KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DÜZGÜN FİGÜRLER VE $\Gamma_0(N)$ NİN $PSL(2,\mathbb{R})$ DEKİ NORMALLİYENİ

DOKTORA TEZİ

Nazlı YAZICI GÖZÜTOK

MAYIS 2020
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DÜZGÜN FİGÜRLER VE $\Gamma_0(N)$ NİN $PSL(2,\mathbb{R})$ DEKİ NORMALLİYENİ

Nazlı YAZICI GÖZÜTOK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
DOKTOR (MATEMATİK)
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih *:* 29.04.2020
Tezin Savunma Tarihi *:* 21.05.2020

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER

Trabzon 2020

ÖNSÖZ

Öğrenimim boyunca çalışmalarımdaki yardımlarını, desteğini esirgemeyen ve bu zorlu süreçte göstermiş olduğu sabır için sayın hocam Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bu süreçte tavsiyeleriyle tezin şekillenmesinde emeği geçen sayın hocam Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünde üzerimde emeği olan tüm saygıdeğer hocalarıma çok teşekkür ederim. Ayrıca tezi hazırlama sürecinde bana her zaman destek olan, yalnız bırakmayan arkadaşlarıma ve sadece tez dönemimde değil hayatım boyunca bana hep destek olan sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım. Doktora eğitimim boyunca 2211-A Genel Yurtiçi Doktora Burs programı kapsamında, bana maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a çok teşekkür ederim.

Son ve en büyük teşekkürüm, sevgili eşim Arş. Gör. Uğur GÖZÜTOK'a. Bu süreçte birlikte çok emek verdik, birlikte mutlu olduk, birlikte stres yaptık ama hiç pes etmedik. Bana sadece tez döneminde değil hayatımın her aşamasında destek olduğu için sonsuz teşekkürler.

Nazlı YAZICI GÖZÜTOK
Trabzon, 2020

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum “Düzgün Figürler ve $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki Normalliyeni” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER ‘in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 21/05/2020

Nazlı YAZICI GÖZÜTOK

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

DÜZGÜN FİGÜRLER VE $\Gamma_0(N)$ NİN $PSL(2,\mathbb{R})$ DEKİ NORMALLİYENİ

Nazlı YAZICI GÖZÜTOK

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER
2020, 102 Sayfa

Bu çalışmada, $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni $\Gamma_B(N)$ nin üçgen grup olduğu N değerleri için, $\Gamma_0(N)$ ye karşılık gelen düzgün figürlerin analitik olarak ede edilmesi amaçlanmıştır. Bunun için önce $\Gamma_B(N)$ ile $\Gamma_0(N)$ arasında uygun alt gruplar bulunmuş ve bu grupların yapıları incelenmiştir. Ardından elde edilen alt gruplar ile $\Gamma_0(N)$ ye karşılık gelen düzgün figürler arasındaki ilişkiler kurulmuştur.

Bu çalışma iki ana bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde bu çalışma için gerekli olan temel kavramlar tanıtılmıştır. İkinci bölümde ise yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Yapılan çalışmalar kısmında: $\Gamma_B(N)$ grubu ve ilgili alt gruplarının yapıları, hangi N değerleri için üçgen figür, dörtgen figür ya da altıgen figür elde edilebileceği, her bir durum için üçgen figürler, dörtgen figürler ve altıgen figürler analitik olarak verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Düzgün figürler, Normalliyen, Riemann yüzeyi

PhD. Thesis

SUMMARY

REGULAR MAPS AND THE NORMALIZER OF $\Gamma_0(N)$ IN $PSL(2,\mathbb{R})$

Nazlı YAZICI GÖZÜTOK

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER
2020, 102 Pages

In this study, it is aimed to obtain the regular maps corresponding to $\Gamma_0(N)$ analytically for some values of N which makes $\Gamma_B(N)$ a triangle group. For this, we first find appropriate subgroups of $\Gamma_B(N)$, and then we investigate the structure of these subgroups. Therefore, we reveal the relationship between the obtained subgroups and the regular maps corresponding to $\Gamma_0(N)$.

The present study consists of two main chapters. In the fist chapter, the basic concepts required for our study are introduced. In the second chapter, we give our results. In the results section: the structure of $\Gamma_B(N)$ and its subgroups, for which values of N, 3-valent maps, 4-valent maps or 6-valent maps will be obtained, for each case, obtaining 3-valent maps, 4-valent maps and 6-valent maps analytically are given.

Key Words: Regular maps, Normalizer, Riemann surface

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar kümesi

$\mathcal{U}$: Üst yarı düzlem

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar kümesi

$\widehat{\mathbb{Q}}$: Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi

Γ : Modüler grup

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi

$PSL(2, \mathbb{R})$: Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu

Gx : x noktasının G yörüngesi

G_x : x noktasının G deki sabitleyeni

$\approx$: G invaryant denklik bağıntısı

F_m : Farey dizisi

$m|n$: m sayısı n sayısını böler

$|G:H|$: G nin H içindeki indeksi

∞ : Sonsuz

$[\infty]$: Sonsuz Bloğu

$\Gamma_B(N)$: $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2, \mathbb{R})$ deki normalliyeni

$\Gamma_0(N)$: Modüler Grubun bir kongrüans alt grubu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

(Grothendieck, 1997) bir grubun topolojik, geometrik ve kombinatoryal özelliklerinin araştırılmasında, düzgün figürlerin kilit bir öneme sahip olduğunu ortaya koymuştur. Bu tez çalışmasının amacı, literatürde önemi iyi bilinen, $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni olan $\Gamma_B(N)$ aracılığıyla, $\Gamma_0(N)$ ye karşılık gelen düzgün figürleri incelemektir.

Sonlu ve bağlantılı bir G grafının, kompakt, bağlantılı ve yönlendirilebilir bir S yüzeyine gömülmesine, S üzerinde bir figür denir. $S\backslash G$ yüz (face) adı verilen çokgenlerden oluşur ve yüzler düzgün ve özdeş çokgenlerden oluşuyorsa, bu figüre bir düzgün figür denir. Hiperbolik düzlemin konform izometrileri $z \to \frac{az+b}{cz+d}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R}\ ve\ ad-bc=1)$ biçimindeki Möbius dönüşümlerinden oluşur. Bu dönüşümler bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grubun herhangi bir ayrık alt grubuna bir Fuchs grubu denir. $\mathcal{U}=\{x+iy : x,y \in \mathbb{R}, y>0\}$ ile kompleks üst yarı-düzlem gösterilmek üzere, bir F Fuchs grubunun $S=\mathcal{U}/F$ bölüm uzayı da bir yüzeydir. Eğer Δ, F grubunu normal alt grup olarak içeren bir başka Fuchs grubu ve Δ bir üçgensel Fuchs grubu ise S yüzeyine bir Platonik Riemann yüzeyi denir. Literatürde en iyi bilinen Fuchs grubu Γ Modüler gruptur. Γ da bir üçgensel gruptur ve onun $\Gamma(n)$ kongrüans alt gruplarına karşılık gelen düzgün figürler (Ivrissimtzis ve Singerman, 2005) çalışmasında incelenmiştir. Öte yandan $\Gamma_0(N)$ ye karşılık gelen düzgün figürler için literatürde bir çalışmaya rastlanmamıştır. Ayrıca $\Gamma_B(N)$ nin, cusp kümesi üzerindeki grup hareketinin grafları çalışılmasına karşın düzgün figürlerle ilişkisini ortaya koyan literatürde herhangi bir çalışmaya da rastlanmamıştır.

Bu tez çalışmasında öncelikle $\Gamma_{\mathrm{B}}(N)$ ve altgruplarının grup yapıları (Akbaş ve Singerman, 1990) çalışması temel alınarak derinlemesine incelenecektir. Grup teoriden bilindiği üzere bir grubun grup yapısının incelenmesinde bilhassa normal alt gruplar büyük rol oynar. Ayrıca düzgün figürler üçgen grubun normal alt gruplarına karşılık geldiğinden $\Gamma_{\mathrm{B}}(N)$ nin üçgen grupları ve normal altgrupları tez çalışmasının temeli olacaktır. Çalışmadaki kombinatoryal yapıların simetrik özelliklerinin yani $\Gamma_0(N)$ ye karşılık gelen düzgün figürlerin kenar, köşe ve yüzlerinin hesaplanmasında hangi alt grupların kullanılması gerektiği belirlenmiş, sonrasında geometrik olarak da detaylandırılmıştır. Tezin ilk bölümünde ihtiyaç duyacağımız temel tanım, teorem ve kavramlar özetlenecek, ikinci bölümde ilgili hesaplamalar ortaya konacaktır.

1.2. Gruplar ve Topolojik Gruplar

Tanım 1.2.1. $G \neq \emptyset$ bir küme olsun. $G \times G$ den G ye her $\circ : G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \to g_1 \circ g_2$ fonksiyonuna G üzerinde bir ikili işlem denir. Üzerinde en az bir ikili işlem tanımlanmış ve boş olmayan bir kümeye cebirsel yapı denir ve $(G,\circ)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.2. " $\circ$ " , $G \neq \emptyset$ kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(G,\circ)$ ikilisine bir grup adı verilir.

$\boldsymbol{G_1}$**:** $\forall\, a$, b $\in G$ için $a \circ b \in G$ (kapalılık özelliği)

$\boldsymbol{G_2}$**:** $\forall\, a, b, c \in G$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ$ c (birleşme özelliği)

$\boldsymbol{G_3}$**:** $\exists$ bir $e \in G$ öyle ki $\forall\, a \in$G için $e \circ a = a \circ e = a$ (birim eleman özelliği)

$\boldsymbol{G_4}$**:** $\forall\, a \in G$ için $\exists\, a' \in G$ öyle ki $a \circ a' = a' \circ a = e$ (ters eleman özelliği)

Burada $a \circ b$ yerine kısaca ab yazacağız.

Tanım 1.2.3. G bir grup, $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. Eğer H, G üzerinde tanımlanan ikili işleme göre bir grup ise H ye G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir. $H \leq G$ ise $e_G \epsilon H$ dir. Dolayısıyla $\{e\}$ ve G, G nin alt gruplarıdır. Bu alt gruplara trivial (aşikar) alt gruplar denir. Bir grubun trivialden farklı alt gruplarına öz alt grup adı verilir.

Önerme 1.2.4. (Hungerford, 1989) G bir grup $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. Bu takdirde
$H \leq G \Leftrightarrow \forall\, a, b \in H$ için;

i) $ab \in H$

ii) $a^{-1} \in H$ dir.

Önerme 1.2.5. (Hungerford, 1989) G bir grup, $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. Bu takdirde $H \leq G \Leftrightarrow$ $\forall\, a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ dir.

Tanım 1.2.6. G bir grup ve H, M G nin iki alt grubu olsun. $H = gMg^{-1}$ olan bir $g \in G$ varsa H ve M alt gruplarına eşlenik alt gruplar adı verilir.

Tanım 1.2.7. (Hungerford, 1989) G bir grup $H \leq G$ olsun. G üzerinde " $\equiv$ " bağıntısı $a \equiv b(H) :\Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ olarak tanımlansın. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve bir a elemanının denklik sınıfı $\bar{a} = \{ah: h \in H\} \coloneqq aH$ alt kümesidir. aH kümesine $a \in G$ nin sol yan sınıfı denir.

Tanım 1.2.8. (Hungerford, 1989) G bir grup $H \leq G$ olsun. G üzerinde " $\equiv$ " bağıntısı $a \equiv b(H) \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ olarak tanımlansın. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve bir a elemanının denklik sınıfı $\bar{a} = \{ha: h \in H\} \coloneqq Ha$ alt kümesidir. Ha kümesine $a \in G$ nin sağ yan sınıfı denir.

Tanım 1.2.9. G bir grup $H \leq G$ olsun. $H \leq G$ alt grubuna göre sağ ve sol yan sınıfların sayısı aynıdır. Bu sayıya H nın G içindeki indeksi denir ve $[G:H]$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.10. G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer H nın G deki bütün sağ ve sol yan kümeleri eşitse, yani $\forall\, a \in G$ için $aH = Ha$ oluyorsa H alt grubuna G nin normal alt grubu denir.

Teorem 1.2.11. G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Buna göre aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

a) $\forall\, g \in G$ ve $\forall\, n \in N$ için $gng^{-1} \in N$

b) $\forall\, g \in G$ için $gNg^{-1} \subset N$

c) $\forall\, g \in G$ için $gNg^{-1} = N$

d) $\forall\, g \in G$ için $gN = Ng$

Tanım 1.2.12. G bir grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. Bu takdirde $N(H) := \{ g \in G : gH = Hg \}$ kümesine H nin G deki normalliyeni denir.

Teorem 1.2.13. $N(H)$, H nin G deki normalliyeni olsun. Bu takdirde

i) $N(H)$, G nin bir alt grubudur.

ii) H, $N(H)$ nın bir normal alt grubudur.

iii) H yi normal alt grup olarak ihtiva eden, G nin en büyük normal alt grubu $N(H)$ dir.

Tanım 1.2.14. $X \neq \emptyset$ verilen bir küme, $\tau \subset \wp(X)$ olsun. τ ailesine;

i) $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$,

ii) $\forall\, U, V \in \tau$ için $U \cap V \in \tau$,

iii) $\forall\, \{O_i\}_{i \in I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$ şartları sağlanıyor ise τ ailesine X üzerinde bir topoloji adı verilir. X e de bir topolojik uzay denir ve (X, τ) ile gösterilir.

Tanım 1.2.15. (Jones ve Singerman, 1987) $(G,\bullet)$ hem bir grup hem de bir topolojik uzay olsun. Eğer ;

i) $F: G \times G \to G,\ F(g, h) := gh$

ii) $f: G \to G,\ f(g) := g^{-1}$

dönüşümleri sürekli ise G ye bir topolojik grup adı verilir.

Örnek 1.2.16. $(\mathbb{R}, +)$ bir topolojik gruptur.

Tanım 1.2.17. (Jones ve Singerman, 1987) G bir topolojik grup, X herhangi bir topolojik uzay olsun.

$\wedge: G \times X \to X$, $\wedge(g, x) = g \wedge x := gx$ ile tanımlanan $\wedge$ dönüşümü sürekli ve $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall\, x \in X$ için;

i) $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$

ii) $e\wedge x = x$

şartları sağlanıyor ise $(G, X, \wedge)$ üçlüsüne bir topolojik dönüşüm grubu adı verilir.

Yukarıdaki (i) ve (ii) şartları sağlanıyorsa G ye X üzerinde hareket ediyor veya G, X üzerinde bir hareket grubudur denir. Bu yapıyı $(G, X, \wedge)$ yerine kısaca (G, X) ile göstereceğiz.

Tanım 1.2.18. (G, X) bir topolojik dönüşüm grubu ve $x, y \in X$ olsun.

$x \sim y :\Leftrightarrow \exists\, g \in G : y = gx$ olarak tanımlanırsa "$\sim$" bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. "$\sim$" bağıntısının her bir denklik sınıfına hareketin yörüngeleri adı verilir. $x \in X$ noktasını içeren yörüngeye x in yörüngesi denir ve bu Gx ile gösterilir. Açık olarak $Gx \coloneqq \{gx : g \in G\}$ dir.

Tanım 1.2.19. G, X üzerinde hareket etsin ve $x, y \in X$ keyfi olsun. $gx = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ elemanı varsa G ye X üzerinde geçişli olarak (transitif) hareket ediyor denir.

Tanım 1.2.20. G, X üzerinde hareket etsin ve $x \in X$ olsun. $G_x := \{g \in G : gx = x\}$ kümesine x noktasının G deki sabitleyeni denir.

Açık olarak, $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ dir. Dolayısıyla G, X üzerinde geçişli olarak hareket ediyorsa $\forall\, x, y \in X$ için G_x ve G_y eşleniktir.

Tanım 1.2.21. $X \neq \emptyset$ bir küme, $S(X) = \{f \mid f : X \to X \text{ birebir ve örten}\}$ olsun. $(S(X), \circ)$ bileşke işlemine göre bir gruptur ve bu grubun elemanlarına permütasyonlar denir. $(S(X), \circ)$ grubunun alt gruplarına permütasyon grubu adı verilir.

G, X üzerinde bir permütasyon grubu olsun. Bu takdirde; G, X üzerinde hareket eder. Gerçekten $g \in G$ ise $g : X \to X$ bire-bir ve örten bir dönüşümdür. Bu durumda $gx := g(x)$ olarak alınırsa $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$ ve $1x = x$ olduğu açıktır. Bu harekete G nin X üzerindeki doğal hareketi denir. Bu durumda "(G, X) permütasyon grubu" ifadesi kullanılır.

Ayrıca G, X üzerinde geçişli olarak hareket ediyorsa "(G,X) geçişli permütasyon grubu" ifadesi kullanılır.

1.3. Öklidyen Olmayan Kristal Yapılı Gruplar

G, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ genişletilmiş kompleks düzleminin aşağıda verilen biçimdeki dönüşümlerin grubu olsun:

i) $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ $\quad a,b,c,d \in \mathbb{R},\ \ ad-bc=1$

ii) $z \longmapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ $\quad a,b,c,d \in \mathbb{R},\ \ ad-bc=-1.$

G nin her elemanı $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : Im\, z > 0\}$ üst yarı düzleminden kendine bir konform ya da anti-konform homeomorfizmdir. i) tipindeki dönüşümlerin kümesi G de indeksi 2 olan bir alt grup oluşturur. Bu grup G^0 ile ifade edilir. G^0 grubu genellikle $PSL(2,\mathbb{R})$ ile ifade edilir. Biz de çalışmamızda bu notasyonu kullanacağız. G ye $\mathbb{R}^4$ ün bir alt kümesi gözüyle bakarak yani, $\{(a,b,c,d): a,b,c,d \in \mathbb{R},\ \ ad-bc=\pm 1\}$ kümesi ile ifade ederek, G üzerinde bir topoloji inşa edilebilir. Dolayısıyla bu G topolojik grubu iki bileşene sahiptir. Bunlardan biri $PSL(2,\mathbb{R})$ diğeri de $G \backslash PSL(2,\mathbb{R})$ dir.

Tanım 1.3.1. G nin bir ayrık alt grubuna Öklidyen olmayan kristal yapılı grup ya da kısaca NEC grubu denir.

Tanım 1.3.2. $PSL(2,\mathbb{R})$ de içerilen bir NEC grubuna Fuchs grubu denir.

i) tipindeki elemanlar yön korurlar. Bu tipteki dönüşümler sabit noktalarına göre aşağıdaki üç tipten birine sahiptirler. Sabit noktalar, $z = \frac{az+b}{cz+d}$ ikinci dereceden denklemi çözülerek bulunur.

- **i)** Eğer $|a+d| = 2$ ise dönüşüme paraboliktir denir. Bu durumda genişletilmiş reel sayılar üzerinde tek bir sabit nokta vardır.
- **ii)** $|a+d| > 2$ ise dönüşüme hiperbolik denir. Bu durumda genişletilmiş reel sayılar üzerinde farklı iki reel sabit noktası vardır.
- **iii)** $|a+d| < 2$ ise dönüşüme eliptiktir denir. Bu durumda biri üst yarı düzlemde olan iki kompleks eşlenik sabit noktası vardır.

1.4. Modüler Grup

Tanım 1.4.1. $w = \frac{az+b}{cz+d}$ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $ad - bc = 1$ formundaki tüm möbius dönüşümlerinin kümesi modüler grup olarak adlandırılır ve Γ ile gösterilir. Bu grup aşağıdaki gibi 2×2 tipinde tamsayılar matrisi ile temsil edilir.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ \det A = 1$$

A ve $-A$ aynı dönüşümü temsil ettiğinden söz konusu matris negatifi ile eş alınır. Böylece, matris ve dönüşüm arasında bir ayrım yapılmayacaktır.

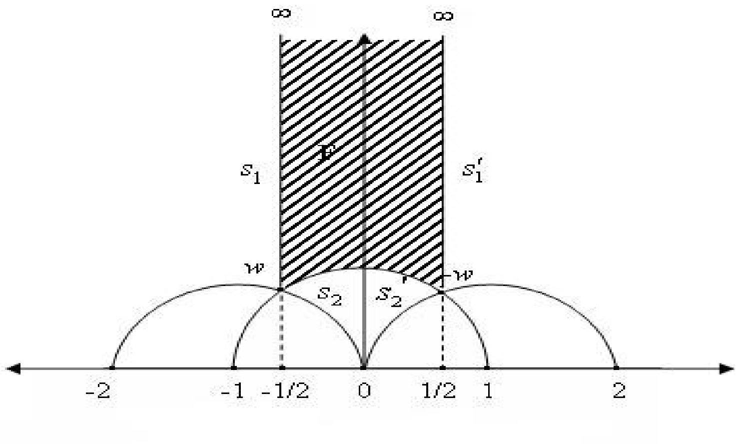
Teorem 1.4.2. Γ modüler grubu, $A^2 = B^3 = I$ ile verilen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ elemanları tarafından üretilir.

Tanım 1.4.3. Bir Λ Fuchs grubu verildiğinde, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $F \subset \mathcal{U}$ kapalı kümesine Λ nın bir F temel bölgesi denir.

i) $\bigcup_{T \in \Lambda} T(F) = \mathcal{U}$

ii) $\forall\, T \in \Lambda \setminus \{I\}$ için $\overset{\circ}{F} \cap T(\overset{\circ}{F}) = \emptyset$

Buna göre $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1,\ |x| \leq \frac{1}{2},\ y > 0\right\}$ kümesi Γ modüler grubu için bir temel bölgedir.



Şekil 1. Γ nın F temel bölgesi

$T(z) = z + 1$ için $T(s_1) = s_1{}'$ ve $\mathrm{U(z)} = -\frac{1}{z}$ için $\mathrm{U}(s_2) = s_2{}'$ olduğundan $(s_1, s_1{}')$ ve $(s_2, s_2{}')$ kongrü kenar çiftleridir. Bu nedenle T ve U dönüşümleri Γ modüler grubunu üretir.

$\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin her bir elemanı, $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $(x, y) = 1$ olmak üzere, $\frac{x}{y}$ indirgenmiş kesri olarak yazılabilir. $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ olduğundan bu gösterim tek değildir. ∞ u, $\frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$ ile temsil edeceğiz.

Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \to \frac{ax+by}{cx+dy}$ şeklindedir. $T \in \Gamma$ olmak üzere;

$$T\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{a.\frac{x}{y}+b}{c.\frac{x}{y}+d} = \frac{\frac{ax+by}{y}}{\frac{cx+dy}{y}} = \frac{ax+by}{cx+dy} \quad \text{ve} \quad T\left(\frac{-x}{-y}\right) = \frac{a.\frac{-x}{-y}+b}{c.\frac{-x}{-y}+d} = \frac{\frac{-ax-by}{y}}{\frac{-cx-dy}{y}} = \frac{-ax-by}{-cx-dy} = \frac{ax+by}{cx+dy}$$

olduğundan $T\left(\frac{x}{y}\right) = T\left(\frac{-x}{-y}\right)$ dir. Bu da Γ modüler grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin iyi tanımlı olduğunu ifade eder.

Teorem 1.4.4.

i) Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

ii) $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi bir noktasının sabitleyeni sonsuz devirlidir.

İspat: **i)** $\forall\, v = \frac{a}{b},\ w = \frac{c}{d} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanları için $T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{c}{d}$ olan $T \in \Gamma$ dönüşümünün varlığını göstermeliyiz. Bunun için $\forall\, v = \frac{a}{b} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanının $\Gamma(\infty) = \{g(\infty) : g \in \Gamma\}$ da olduğunu göstermemiz yeterlidir. Çünkü; $k(\infty) = \frac{a}{b}$ ve $l(\infty) = \frac{c}{d}$ olan $k, l \in \Gamma$ mevcut ise $T \coloneqq lk^{-1}$ ile $T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{c}{d}$ dir. $v = \frac{a}{b} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olsun. Bu durumda $(a, b) = 1$ olduğundan $\exists\, x, y \in \mathbb{Z}$ öyle ki $ax - by = 1$ dir. Böylece, $g \coloneqq \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix} \in \Gamma$ dır ve $\begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ olduğundan $g(\infty) = \frac{a}{b}$ dir. Dolayısıyla $\frac{a}{b}$, ∞ un yörüngesindedir. Yani; Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

ii) $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi iki elemanının sabitleyenleri Γ da eşlenik olduklarından ∞ un sabitleyeni olan Γ_∞ u göz önüne almak yeterlidir. $\Gamma_\infty = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ dır. Gerçekten; $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$ olsun. O halde $T(\infty) = \infty$ dur. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1$ ve $c = 0$ dır ve ayrıca $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \subset \Gamma$ olduğundan $ad - bc = 1$ dir. $1.d - b.0 = 1 \Rightarrow d = 1$ dir. O halde $T = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{Z}$ formundadır. Yani; $\Gamma_\infty = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}\right\}$ dir. Böylece Γ_∞, $z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanı ile üretilen sonsuz devirli bir gruptur. Dolayısıyla $\widehat{\mathbb{Q}}$ da herhangi bir noktanın sabitleyeni sonsuz devirli bir gruptur.

1.5. $\boldsymbol{\Gamma(N)}$ ve $\boldsymbol{\Gamma_0(N)}$ Kongurüans Alt Grupları

Tanım 1.5.1. N pozitif bir tam sayı olmak üzere, modüler grubun $\Gamma(N)$ temel kongrüans alt grubu aşağıdaki küme ile tanımlanır:

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod N\right\}$$

ve modüler grubun $\Gamma(N)$ temel kongrüans alt grubunu içeren herhangi bir alt grubuna kongrüans alt grubu denir.

Bazı bilindik kongrüans alt gruplar aşağıdaki şekildedir:

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle| \ a \equiv d \equiv 1 \, mod \, N, c \equiv 0 \, mod \, N \right\}$$

ve

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle| \ c \equiv 0 \, mod \, N \right\}.$$

$\Gamma_1(N)$ nin tanımında yer alan $d \equiv 1 \, mod \, N$ kongrüansı, $a \equiv 1 \, mod \, N$, $c \equiv 0 \, mod \, N$ kongrüansları ve $ad - bc = 1$ determinantından elde edilebilir. Açıkça görülür ki bu alt gruplar arasında $\Gamma(N) \leq \Gamma_1(N) \leq \Gamma_0(N) \leq \Gamma$ bağıntısı vardır. Diğer yandan $\Gamma(N)$, Γ nın bir normal alt grubudur ve dolayısıyla da $\Gamma_1(N)$ ve $\Gamma_0(N)$ nin de normal alt grubudur. Ayrıca $\Gamma_1(N)$ de $\Gamma_0(N)$ nin normal alt grubudur. Burada $\Gamma(N)$ nin, Γ nın bir normal alt grubu olduğu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:
$\psi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_N$ doğal halka homomorfizmi, Γ dan $PSL(2, \mathbb{Z}_N)$ ye tanımlı aşağıdaki şeklide bir $\tilde{\psi}$ grup homomorfizmi tanımlanmasına yardımcı olur:

$$\tilde{\psi}: \Gamma \longrightarrow \ PSL(2, \mathbb{Z}_N), \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_N & b_N \\ c_N & d_N \end{pmatrix}.$$

Buradan $\tilde{\psi}$ nın çekirdeğinin $\Gamma(N)$ olduğu görülebilir. Ayrıca , $\Gamma_0(N)$ alt grubu $N > 1$ iken Γ nın bir normal alt grubu değildir. Diğer yandan, $\Gamma(N), \Gamma_1(N)$ ve $\Gamma_0(N)$ gruplarının Γ daki indeksleri sonludur. $N > 2$ için

$\Gamma(N)$ nin Γ daki indeksi $|\Gamma: \Gamma(N)| = \frac{N^3}{2} \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$,

$\Gamma_0(N)$ nin Γ daki indeksi $|\Gamma: \Gamma_0(N)| = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$,

$\Gamma_1(N)$ nin Γ daki indeksi $|\Gamma: \Gamma_1(N)| = \frac{N^2}{2} \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$ dir. $N = 2$ için bu indeksler

$$|\Gamma: \Gamma_0(2)| = 3, \ |\Gamma: \Gamma_1(2)| = 3, \ |\Gamma: \Gamma(2)| = 6$$

şeklindedir. Diğer alt grupların birbirlerindeki indeksleri ise yukarıdaki formüller kullanılarak hesaplanabilir. $N > 2$ için

$$|\Gamma_0(N):\Gamma_1(N)| = \frac{|\Gamma:\Gamma_1(N)|}{|\Gamma:\Gamma_0(N)|} = \frac{N}{2}\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{\varphi(N)}{2}$$

ve

$$|\Gamma_1(N):\Gamma(N)| = \frac{|\Gamma:\Gamma(N)|}{|\Gamma:\Gamma_1(N)|} = N$$

elde edilir. **(**Schoneberg, 1974)

Önerme 1.5.2. (Ivrissimtzis, 1998)

i) $\Gamma(N)$, $N \geq 2$ için eliptik eleman içermez,

ii) $\Gamma(N)$ nin parabolik sınıf sayısı

$$\begin{cases} \frac{1}{2}N^2\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^2}\right), & N \geq 3 \\ 3, & N = 2 \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır.

1.6. Γ nın Özel Kongrüans Alt Gruplarının Kosetleri

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, Γ nın iki elemanı olsun. Aşağıdaki önerme, A ve B nin hangi durumda Γ nın özel bir alt grubunun aynı kosetine ait olduklarını belirleyen bir kriter vermektedir:

Önerme 1.6.1. (Ivrissimtzis, 1998) N pozitif bir tam sayı olsun. A, B matrisleri sırasıyla $\Gamma_0(N), \Gamma_1(N)$ ve $\Gamma(N)$ nin aynı kosetine aittir ancak ve ancak

i) $ac' - ca' \equiv 0 \; mod\; N$

ii) $a \equiv a' mod\; N,\; c \equiv c' mod\; N$ veya $a \equiv -a' mod\; N,\; c \equiv -c' mod\; N$

iii) $a \equiv a' mod\; N,\; b \equiv b' mod\; N,\; c \equiv c' mod\; N,\; d \equiv d' mod\; N$ veya
$a \equiv -a' mod\; N,\; b \equiv -b' mod\; N,\; c \equiv -c' mod\; N,\; d \equiv -d' mod\; N.$

1.7. İmpirimitif Hareket

Tanım 1.7.1. G, Ω nın bir transitif hareket grubu ise, (G,Ω) ikilisine bir transitif permütasyon grubu adı verilir.

Tanım 1.7.2. (G,Ω) bir permütasyon grubu olmak üzere, $\alpha,\beta \in \Omega$ ve $\alpha \approx \beta$ iken $\forall g \in G$ için $g(\alpha) \approx g(\beta)$ şartını sağlayan, Ω üzerinde tanımlı bir $\approx$ denklik bağıntısına G −invaryanttır denir. Bu bağıntının her bir denklik sınıfına blok adı verilir.

i) $\forall \alpha,\beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ile tanımlı denklik bağıntısına özdeşlik bağıntısı,
ii) $\forall \alpha,\beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta$ bağıntısına ise evrensel bağıntı denir.

Yukarıda verilen bağıntılara trivial G −invaryant bağıntılar denir. Ω üzerinde trivial bağıntılar dışında bir G −invaryant denklik bağıntısı varsa (G,Ω) permütasyon grubuna impirimitif, aksi halde pirimitif denir.

Önerme 1.7.3. (G,Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. (G,Ω) pirimitiftir ancak ve ancak $\forall \alpha \in \Omega$ için G_α, G nin maksimal alt grubudur.

Önerme 1.7.4. (G,Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. (G,Ω) impirimitiftir ancak ve ancak $\exists\ \alpha \in \Omega$ ve $H < G$ öyle ki $G_\alpha \subsetneqq H \subsetneqq G$ dir.

Not 1.7.5. $\beta \in \Omega$ ise transitiflikten $\Omega = \{g(\alpha): g \in G\}$ olduğundan $\beta = g(\alpha)$ olan bir $g \in G$ vardır. Böylece β yı içeren $[\beta]$ bloğu $[\beta] = \{gh(\alpha): h \in H\}$ biçimindedir. Gerçekten; β yı içeren$[\beta]$ bloğu, β nın denklik sınıfı olduğundan, $[\beta] = \{\gamma \in \Omega: \gamma \approx \beta\}$ dır. $\gamma \in \Omega$ ve $\Omega = \{g(\alpha): g \in G\}$ olduğundan $\exists\, m \in G$ öyle ki $\gamma = m(\alpha)$ dır. $\gamma\approx\beta \xLeftrightarrow{simetri\text{ öz.}} \beta\approx\gamma \Leftrightarrow g(\alpha) \approx m(\alpha) \Leftrightarrow m \in gH \Leftrightarrow m = gh$ olan $h \in H\, \exists \Leftrightarrow m(\alpha) = gh(\alpha) \Leftrightarrow \gamma = gh(\alpha)$ dır. $\Leftrightarrow [\beta] = \{gh(\alpha): h \in H\} = gH\alpha$ olduğu görülür. Özel olarak α yı içeren $[\alpha]$ bloğu; $[\alpha] = \{h(\alpha): h \in H\} = H\alpha \coloneqq H(\alpha)$ yörüngesidir. Gerçekten; $[\alpha] = \{\theta \in \Omega: \theta \approx \alpha\}$, $\theta \in \Omega$ ve $\Omega = \{g(\alpha): g \in G\}$ olduğundan $\exists\, h \in G$ öyle ki $\theta = h(\alpha)$ dır. $\theta\approx\alpha \xLeftrightarrow{simetri\text{ öz.}} \alpha \approx \theta \Leftrightarrow \alpha\approx h(\alpha) \Leftrightarrow e(\alpha) \approx h(\alpha) \Leftrightarrow h \in eH = H \Leftrightarrow \theta = h(\alpha), h \in H \Leftrightarrow [\alpha] = \{h(\alpha): h \in H\} = H(\alpha)$ dır. H nın G içindeki sol yan sınıflarının temsilcilerinin kümesi $\{l_i{:}i \in I\}$ ile gösterilsin. Böylece (G,Ω) hareketinin blokları (denklik sınıfları) $l_iH(\alpha)$ $(i \in I)$ lardır. Gerçekten; $\omega \in \Omega$, [ω] bloğunu göz önüne alalım. G nin Ω üzerindeki hareketi transitif olduğundan $\omega = k(\alpha)$ olan $k \in G$ ∃. Böylece, $[\omega] = [k(\alpha)] = \{kh(\alpha): h \in H\} = kH(\alpha)$ dan $k = l_t h_t$ olan $h_t \in H$ ∃. Dolayısı ile, $kH(\alpha) = l_t H(\alpha)$ dır. Böylece bloklar sol yan sınıflarından yalnız birine karşılık gelir.

$H < G$ ise $G = \cup_{i \in I} l_i H$ olduğundan blokların sayısı sol yan sınıfların sayısına, yani H nın G deki $|I|$=$|G: H|$ indeksine eşittir.

G nin $\Omega/\approx$ ={[β]:$\beta \in \Omega$} denklik sınıfları üzerinde de bir hareketi vardır. Bu hareket; $\wedge: Gx\Omega/\approx \to \Omega/\approx$, $\wedge(g,[\beta]) = g\wedge[\beta] := [g\beta]$ dır. "∧" nın $\Omega/\approx$ üzerinde bir grup hareketi olduğunu gösterelim:

i) $g\wedge(h\wedge[\beta]) = g\wedge([h\beta]) = [gh\beta] = gh\wedge[\beta]$

ii) $e\wedge[\beta] = [e\beta] = [\beta]$

(i) ve (ii) ile "∧" bir harekettir. Bu harekete G nin denklik sınıfları üzerindeki hareketi denir. [α] bloğunun sabitleyeni olan $G_{[\alpha]} = H$ dır. Gerçekten; $g \in G_{[\alpha]} \Leftrightarrow g\wedge[\alpha] = [\alpha] \Leftrightarrow$ $[g\alpha]$=[α] $\Leftrightarrow gH(\alpha)$=$H(\alpha) \Leftrightarrow g \in H \Leftrightarrow G_{[\alpha]} = H$ olduğu görülür.

1.8. Graf Kavramı

Tanım 1.8.1. $X \neq \emptyset$ bir küme, $\Delta \subset X \times X$ bir bağıntı olsun. $G = (X, \Delta)$ ikilisine bir graf denir. X kümesinin elemanları grafın köşeleri, Δ bağıntısının elemanları da grafın kenarları adını alır. Bir kenar, $(a,b) \in \Delta$ için $a \to b$ ile ifade edilir. Eğer $a \to b$ ya da $a \leftarrow b$ ise a ve b köşelerine bir kenar ile bağlanmıştır denir. Eğer a ve b bir kenar ile bağlanmış ise a ve b köşelerine komşu köşeler denir.

Tanım 1.8.2. $G = (X, \Delta)$ bir graf ve $A \subset X$ olsun.$G' = (A, \Delta \cap A \times A)$ grafına G nin bir alt grafı denir.

Tanım 1.8.3. $a = v_1, v_2, \dots, v_n = b$, bir G grafının köşeleri olsun. Her $i = 1,2, \dots, n$ için $v_{i-1} \to v_i$ veya $v_{i-1} \leftarrow v_i$ olan v_i lerin oluşturduğu yapıya a dan b ye n uzunluklu bir yol denir. Eğer $a = b$ ise bu yola n uzunluklu bir devre ya da bir n −gen denir.

Önerme 1.8.4. $G = (X, \Delta)$ bir graf ve X üzerinde, $\forall x, y \in X$ için

$$x \approx y \Leftrightarrow x = y \;\; \vee \;\; x\, ten\; y\; ye\; bir\; yol\; vardır$$

ile tanımlı $\approx$ bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.8.5. X, $\approx$ bağıntısına göre bir denklik sınıfı ise, X e bağlantılıdır denir, aksi halde bağlantısızdır denir.

Tanım 1.8.6. $G_1 = (X_1, \Delta_1)$ ve $G_2 = (X_2, \Delta_2)$ iki graf olsun. Δ_1 ve Δ_2 arasında birebir bir eşleme var ve bu eşleme komşu köşeleri komşu köşelere resmediyorsa, G_1 ve G_2 graflarına izomorftur denir.

1.9. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Hareketinden Doğan Graflar

(G, Ω) bir permütasyon grubu olsun. G nin $\Omega \times \Omega$ üzerindeki hareketi

$$G \times \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega \times \Omega,\;\; g(\alpha, \beta) = (g\alpha, g\beta)$$

ile tanımlansın. Bu hareketin yörüngelerine G nin alt yörüngeleri denir ve (α, β) elemanını içeren alt yörünge $o(\alpha, \beta)$ ile ifade edilir. Bu $o(\alpha, \beta)$ alt yörüngesinden bir $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafı, köşeleri Ω nın elelmanları ve kenarları da $o(\alpha, \beta)$ nın elemanları olarak alınarak elde edilir. Burada $(x, y) \in o(\alpha, \beta)$ için $x \rightarrow y$ olarak ele alınır.

Diğer yandan $o(\alpha, \beta)$ ve $o(\beta, \alpha)$ yörüngelerinin ayrık veya eşit olmalarına göre alt yörüngesel graflar için aşağıdaki tanımlar yapılabilir.

i) Eğer $o(\alpha, \beta) \neq o(\beta, \alpha)$ ise $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ grafına, $\mathcal{G}(\beta, \alpha)$ grafı ile eşleşmiştir denir. Bu iki graf arasındaki tek fark kenarların yönleridir.

ii) Eğer $o(\alpha, \beta) = o(\beta, \alpha)$ ise $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ grafına kendiyle eşleşmiştir denir.

Önerme 1.9.1. $\mathcal{G}$, bir (G, Ω) transitif permütasyon grubu için bir alt yörüngesel graf olsun. Bu takdirde,

i) G, $\mathcal{G}$ nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder,

ii) G, $\mathcal{G}$ nin köşeleri üzerinde transitif hareket eder,

iii) $\mathcal{G}$ kendiyle eşleşmiş ise, G, $\mathcal{G}$ nin ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif hareket eder.

iv) G, $\mathcal{G}$ nin kenarları üzerinde transitif hareket eder.

Önerme 1.9.2. $o(\alpha,\alpha)$, $\Omega \times \Omega$ nın köşegenidir. $o(\alpha,\alpha)$ yörüngesine karşılık gelen alt yörüngesel grafa trivial graf denir. Bu graf kendiyle eşleşmiştir.

Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinden doğan graflar için: Bu hareket transitif olduğundan bir $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$ için $g(\alpha,\beta) = (\infty, v)$ olacak şekilde bir $g \in \Gamma$ vardır. Dolayısıyla her bir $o(\alpha,\beta)$ alt yörüngesi bir (∞, v) çifti içerir. Yörüngeler ya ayrık ya da eşit olacağından $o(\alpha,\beta)$ ile $o(\infty, v)$ aynı alt yörüngeyi ifade eder. $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olduğundan $(u,n) = 1$ olmak üzere $v = \frac{u}{n}$ şeklindedir. $o(\infty, \frac{u}{n})$ alt yörüngesi $O_{u,n}$ ile ve bu yörüngeye karşılık gelen alt yörüngesel graf ise $\mathcal{G}_{u,n}$ ile ifade edilir. $v = \infty = \frac{1}{0} = -\frac{1}{0}$ ise $\mathcal{G}_{1,0} = \mathcal{G}_{-1,0}$ trivial grafları elde edilir.

Teorem 1.9.3. $v, v' \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $o(\infty, v) = o(\infty, v')$ ancak ve ancak $g(v) = v'$ olacak şekilde bir $g \in \Gamma_\infty$ vardır.

Sonuç 1.9.4. $O_{u,n} = O_{u',n'}$ ancak ve ancak $n = n'$ ve $u \equiv u' mod\, n$.

Sonuç 1.9.5. $\mathcal{G}_{u,n} = \mathcal{G}_{u',n'}$ ancak ve ancak $n = n'$ ve $u \equiv u'\ mod\ n$.

Teorem 1.9.6. $\frac{r}{s} \longrightarrow \frac{x}{y} \in \mathcal{G}_{u,n}$ ancak ve ancak

i) $x \equiv ur\ mod\ n,\ y \equiv us\ mod\ n,\ ry - sx = n$ veya

ii) $x \equiv -ur\ mod\ n,\ y \equiv -us\ mod\ n,\ ry - sx = -n$ dir.

Sonuç 1.9.7. $u^2 \not\equiv -1\, mod\, n$ ve $uv \equiv -1\, mod\, n$ olsun. Bu takdirde $\mathcal{G}_{u,v}$ ile $\mathcal{G}_{v,n}$ eşleşmiştir.

Sonuç 1.9.8. $\mathcal{G}_{u,n}$ kendiyle eşleşmiştir ancak ve ancak $u^2 \equiv -1\, mod\, n$.

Tanım 1.9.9. $u, n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ ve $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathcal{G}_{u,n}$ olmak üzere her $x, y \in \Lambda$ için $x = a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_m = y$ olan sonlu bir yol varsa, $\mathcal{G}_{u,n}$ nin Λ alt grafına bağlantılıdır denir. Aksi takdirde $\mathcal{G}_{u,n}$ nin Λ alt grafına bağlantısızdır denir.

1.10. Farey Grafı

$\mathcal{G}_{1,1}$, köşeleri $\widehat{\mathbb{Q}}$ olan bir alt yörüngesel graftır. Burada $\mathcal{G}_{u,n} = \mathcal{G}_{1,1}$ olduğundan $u = n = 1$ dir ve $1^2 \equiv -1\, mod\, 1$ olduğundan $\mathcal{G}_{1,1}$ kendiyle eşleşmiştir. Bu yüzden $\mathcal{G}_{1,1}$ i yönlendirilmemiş bir graf olarak düşünebiliriz. Burada $\frac{r}{s}$ ile $\frac{x}{y}$ ardışık köşelerdir ancak ve ancak $ry - sx = \mp 1$ $(n = 1)$ dir. Örneğin ∞ ile ardışık olan köşeler tamsayılardır. Gerçekten;
$\frac{r}{s}, \infty = \frac{1}{0}$ ardışık köşeler olsun. $\Rightarrow r.0 - s.1 = \mp 1 \Rightarrow s = \pm 1 \Longrightarrow \frac{r}{s} = \pm r \in \mathbb{Z}$ dir.

$\mathcal{G}_{1,1}$ alt yörüngesel grafına Farey dizileriyle olan bağlantısından ötürü “Farey grafı” denilir ve F ile gösterilir. $\forall m \geq 1$ için F_m Farey dizisi, terimleri artan sırada düzenlendiğinde, $|y| \leq m$ olan $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ elemanlarından oluşur. Örneğin F_4; $\dots, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \dots$ dır. Açıkça görülür ki $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ ve $\bigcup_{m \geq 1} F_m = \mathbb{Q}$ dur. Gerçekten;

i) $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$ olmak üzere; $F_i \subset F_j$ olduğunu gösterelim

$\frac{a}{b} \in F_i$ olsun. $\Rightarrow |b| \leq i < j \Rightarrow \frac{a}{b} \in F_j \Rightarrow F_i \subset F_j$ elde edilir.

ii) $\bigcup_{m \geq 1} F_m \subset \mathbb{Q}$ olduğu aşikardır.

Şimdi $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{m \geq 1} F_m$ olduğunu gösterelim

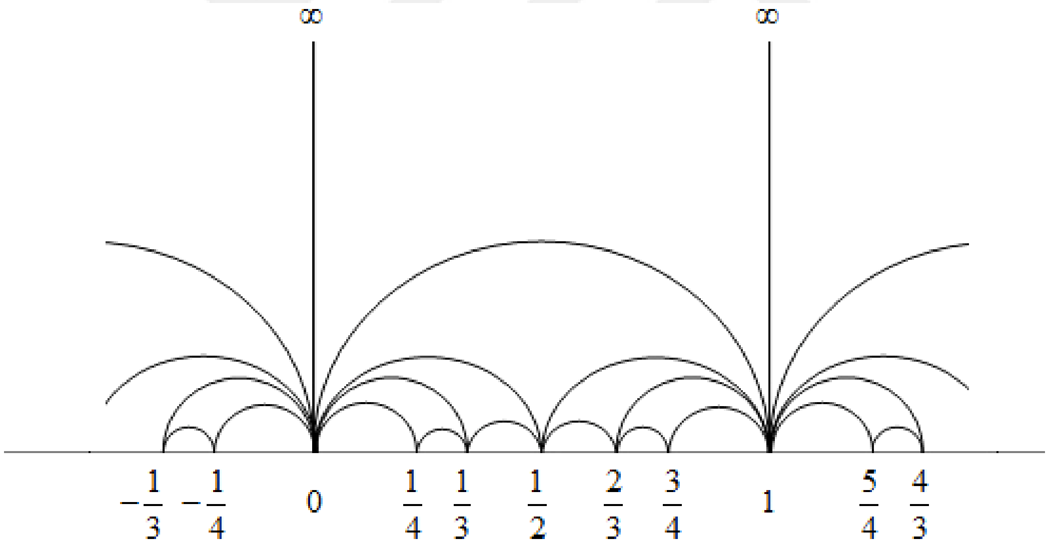
$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ olsun. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üstten sınırlı olmadığından $\exists\, m \in \mathbb{N}$ öyle ki $|q| \leq m$ dir. Dolayısı ile; $\frac{p}{q} \in F_m$ dir. Böylece; $\frac{p}{q} \in \bigcup_{m\geq 1} F_m$ elde edilir. Yani $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{m\geq 1} F_m$ dir. Buradan $\bigcup_{m\geq 1} F_m = \mathbb{Q}$ dır.

Lemma 1.10.1. $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ indirgenmiş rasyonel sayılar olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

i) $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ F de ardışık köşelerdir.

ii) $ry - sx = \mp 1$ dir.

iii) Bir $m \in \mathbb{N}$ için $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ F_m de ardışık köşelerdir.



Şekil 2. Farey grafı

Şekil 2 deki rasyonel sayılar F_4 ün elemanlarıdır. Kolaylıkla gösterilebilir ki Şekil 2 periyodiktir ve periyodu 1 dir.

F nin kenarları $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}: Imz > 0\}$ üst yarı düzleme dik hiperbolik geodezikler, yani yarı Öklid çemberleri veya $\mathbb{R}$ ye dik yarı doğrular olarak göz önüne alınabilir.

Sonuç 1.10.2. F nin kenarları $\mathcal{U}$ da kesişmezler.

1.11. $\mathcal{G}_{u,n}$ ve $F_{u,n}$ Grafları

Bu bölümde $F = \mathcal{G}_{1,1}$ Farey grafının özelliklerini diğer $\mathcal{G}_{u,n}$ alt yörüngesel graflarına nasıl genişletebileceğimizi göreceğiz. $\frac{r}{s} \longrightarrow \frac{x}{y} \in \mathcal{G}_{u,n} \Leftrightarrow ry - sx = \mp n \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \; mod \; n \Leftrightarrow \frac{r}{s} \approx_n \frac{x}{y}$ dir ve her bir $\mathcal{G}_{u,n}$ $\Psi(n)$ tane alt grafın ayrık birleşiminden oluşur. Bu, $\approx_n$ Γ invaryant denklik bağıntısına göre, her bir alt grafın köşeleri bir tek blok oluşturur. Γ, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden Γ bu blokları transitif olarak permüte eder. Bu da alt yörüngelerin her birinin birbirleriyle izomorf oldukları anlamına gelir. $\mathcal{G}_{u,n}$ nin, köşeleri ∞ u içeren $[\infty] = \left\{\frac{x}{y} : \frac{x}{y} \approx \frac{1}{0}\right\} = \{\frac{x}{y} : y \equiv 0 \; mod \; n\}$ bloğunda olan alt grafını $F_{u,n}$ ile gösterelim. Dolayısıyla; $\mathcal{G}_{u,n}$, $F_{u,n}$ nin $\Psi(n)$ tane ayrık kopyasından oluşur.

Teorem 1.11.1. (Jones vd., 1991) $\frac{r}{s} \longrightarrow \frac{x}{y}$ $F_{u,n}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow$

a) $x \equiv ur \; mod \; n$ ve $ry - sx = n$ veya

b) $x \equiv -ur \; mod \; n$ ve $ry - sx = -n$.

Teorem 1.11.2. $\Gamma_0(n)$, $F_{u,n}$ nin köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder.

Not 1.11.3. n bir p asal sayısı ise $\psi(p) = p + 1$ tane blok vardır ve bu bloklar:

$$[j] = \left\{\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} : x \equiv jy \; mod \; p\right\}, j \neq \infty$$

$$[\infty] = \left\{\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0 \; mod \; p\right\}$$

olmak üzere $[0], [1], \dots, [p-1], [\infty]$ şeklindedir. Ayrıca bunların her biri birbirlerinin izomorfik kopyasıdır.

Tanım 1.11.4. $k_1, k_{2,} k_3$ üç köşe olmak üzere $k_1 \to k_2 \to k_3 \to k_1$ şeklinde, yani kenarların hepsi aynı yönde ise buna yönlendirilmiş üçgen; $k_1 \to k_2 \leftarrow k_3 \to k_1$ gibi farklı yönde kenar varsa buna da ters yönlendirilmiş üçgen denir. Kendi eşleşmiş bir alt yörüngesel grafta bu iki kavram birbirine denktir.

Teorem 1.11.5. (Jones vd., 1991)

i) $F_{u,n}$ yönlendirilmiş bir üçgen içerir $\Leftrightarrow u^2 \mp u + 1 \equiv 0\ (modn)$.

ii) $n > 1$ ise, $F_{u,n}$ ters yönlendirilmiş üçgen içermez.

1.12. $PSL(2, \mathbb{R})$ deki Parabolik ve Eliptik Alt Grupları

Teorem 1.12.1. (Jones ve Singerman, 1987) $PSL(2, \mathbb{R})$ nin bir parabolik (eliptik, hiperbolik) elemanının $PSL(2, \mathbb{R})$ deki merkezleyeni, aynı sabit nokta kümesine sahip tüm parabolik (eliptik, hiperbolik) elemanlardan oluşur.

Teorem 1.12.2. (Jones ve Singerman, 1987) Her abel Fuchs grubu devirlidir.

Yukarıdaki iki teoremden, $PSL(2, \mathbb{R})$ deki bir Fuchs grubunun aşağıdaki gibi üç çeşit olduğunu görürüz.

C, $PSL(2, \mathbb{R})$ nin herhangi bir alt grubu olmak üzere C ye abeldir denir ancak ve ancak C devirlidir. Böylece C nin birimden farklı tüm elemanları aynı sabit nokta kümesine sahiptir ve aynı tiptendir ki bunlar parabolik, eliptik veya hiperboliktir. Bir Λ Fuchs grubunun parabolik (eliptik) alt grupları, parabolik(eliptik) elemanlardan oluşan $C \leq \Lambda$ birimden farklı devirli ve bu özellik altında maksimal olan alt gruplar olarak tanımlanır. Λ nın t (veya $\in$) parabolik (eliptik) sınıf sayısı, Λ nın parabolik (eliptik) alt gruplarının eşlenik sınıf sayısıdır.

Tanım 1.12.3. Eğer $\gamma(r) = r$ olacak şekilde Λ nın bir γ parabolik elemanı varsa bir $r \in \widehat{\mathbb{Q}}$ noktası bir Λ Fuchs grubunun bir cusp ı olarak adlandırılır. Benzer şekilde, eğer $\sigma(z) = z$ olacak şekilde bir $\sigma \in \Lambda$ eliptik elmanı varsa bir $z \in \mathcal{U}$ noktasına Λ nın bir eliptik noktası denir.

Lemma 1.12.4. (Jones ve Singerman, 1987) Eğer A ve B, bir G grubunun alt grupları ve $C = A \cap B$ ise $|\mathrm{B}:\mathrm{C}| \leq |\mathrm{G}:\mathrm{A}|$ dır.

Lemma 1.12.5. (Lehner, 1966) $\gamma \in \Lambda$ hiperbolik ve $t \in \Lambda$, γ daki gibi bir ve yalnız bir sabit noktaya sahip olsun. Bu durumda Λ Fuchs değildir.

Sonuç 1.12.6. Λ nın parabolik sınıf sayısı, Λ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ daki yörüngelerinin sayısıdır.

1.13. Ayrık Gruplar ve Riemann Yüzeyleri

$PSL(2,\mathbb{R})$ nin $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisini $\mathbb{R}^4$ ün (a,b,c,d) noktasıyla ifade edeceğimizi söylemiştik. Böylece $PSL(2,\mathbb{R})$ bir topolojik grup olur. $PSL(2,\mathbb{R})$ nin bir Ω ayrık alt grubu, aşağıdaki özelliği sağlayan bir alt gruptur:

$U \cap \Omega = \{I\}$ olacak şekilde I birim matrisinin $PSL(2,\mathbb{R})$ de bir U komşuluğu vardır. $PSL(2,\mathbb{R})$ nin ayrık bir alt grubu Fuchs grup olarak adlandırılır. Sonlu eş hacimli her sonlu üretilmiş Fuchs grup aşağıdaki gösterime sahiptir.

Üreteçler: $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, x_1, \dots, x_r, p_1, \dots, p_s$

Bağıntılar: $x_1{}^{m_1} = x_2{}^{m_2} = \cdots = x_r{}^{m_r} = \prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i{}^{-1} b_i{}^{-1} \prod_{j=1}^{r} x_j \prod_{k=1}^{s} p_k = 1$

burada $m_1, \dots, m_r \geq 2$ tamsayılarıdır. Bu durumda bu grubun simgesi $(g; m_1, \dots, m_r; s)$ şeklindedir.

$a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ elemanları hiperbolik, $m_1, \dots, m_r$ sırasına karşılık gelen $x_1, \dots, x_r$ elemanları eliptik ve $p_1, \dots, p_s$ elemanları paraboliktir. (Singerman, 1970)

Γ bir Fuchs grubudur ve $(0; 2,3; 1)$ simgesine sahiptir. Parabolik elemanlar sonsuz mertebeli eliptik elemanlar olarak düşünüldüğünden Γ nın simgesini sıklıkla $(0; 2,3,\infty)$ şeklinde yazarız. Ayrıca, bir ayrık grubun her alt grubu ayrık olduğundan Γ nın tüm alt grupları Fuchs grubudur.

Eliptik elemanı olmayan her Λ Fuchs grubu, $PSL(2,\mathbb{R})$ nin bir alt grubu olarak $\mathcal{U}$ üzerinde hareket eder. Ayrıca, $\mathcal{U}/\Lambda$ bölüm uzayı, bölüm topolojisi ile bir yüzey oluşturur. $\mathcal{U}/\Lambda$ yüzeyi üzerine $\mathcal{U}$ üzerindeki kompleks yapıyı taşıyarak $\mathcal{U}/\Lambda$ uzayını bir Riemann yüzeyi yapabiliriz. Eğer Λ, eliptik elemanlara da sahipse sonuç yine bir Riemann yüzeyidir fakat $\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}/\Lambda$ projeksiyonu dallıdır. Bu prosedür için ayrıntıları (Jones ve Singerman, 1987) kaynağında görebiliriz.

Tanım 1.13.1. X bir topolojik uzay olsun. X in bir örtüm uzayı, bir $\tilde{X}$ uzayından oluşan bir ikilidir ve sürekli $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki şartı sağlar:
Her $x \in X$, $p^{-1}(U)$ nun her yay bileşeni p tarafından U üzerine topolojik olarak resmedilecek biçimde bir yay bağlantılılığı U açık komşuluğuna sahiptir.

Basit bağlantılı bir örtüm uzayı, evrensel örtüm uzayı olarak adlandırılır ve örtümlerin izomorfizmine göre tektir. (Massey, 1991)

Özellikle, her Riemann yüzeyi bir evrensel örtüme sahiptir. Bu evrensel örtüm, basit bağlantılı bir Riemann yüzeyidir ve konform denkliğe göre yalnızca üç yüzey vardır.

Teorem 1.13.2. (Jones ve Singerman, 1987) Her basit bağlantılı Riemann yüzeyi aşağıdakilerden birine konform eşdeğerdir:

- **i)** Σ Riemann küresi
- **ii)** $\mathbb{C}$ Kompleks düzlem
- **iii)** $\mathcal{U}$ üst yarı düzlem

Bu Riemann yüzeylerinin otomorfizm grupları aşağıdaki gibidir:

Teorem 1.13.3. (Jones ve Singerman, 1987)

- **i)** $Aut(\Sigma) = PSL(2, \mathbb{C})$
- **ii)** $Aut(\mathbb{C}) = \{z \rightarrow az + b: a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$
- **iii)** $Aut(\mathcal{U}) = PSL(2, \mathbb{R})$

Tanım 1.13.4. (Jones ve Singerman, 1987) G, bir Y topolojik uzayının homomorfizmlerinin grubu olsun. Eğer her $y \in Y$ noktası, $g \in G$ için $g(V) \cap V \neq 0$ olacak şekilde V komşuluğuna sahipse bu takdirde G, Y üzerinde süreksiz olarak düzgün bir şekilde hareket eder. Böylece $g(y) = y$ yazılır ve Y nin her noktasının sabitleyeni sonludur.

Önerme 1.13.5. (Jones ve Singerman, 1987) $PSL(2, \mathbb{R})$ nin bir alt grubu Fuchs grubudur ancak ve ancak grup, $\mathcal{U}$ üzerinde süreksiz olarak düzgün bir şekilde hareket eder.

Teorem 1.13.6. $\widetilde{M}$, M nin evrensel örtüm uzayı ve G, sabit noktalar hariç $\widetilde{M}$ üzerinde süreksiz düzgün bir şekilde hareket eden $Aut(\widetilde{M})$ nin bir alt grubu olmak üzere her M Riemann yüzeyi, $\widetilde{M}/G$ ye konform eşdeğerdir.

Kürenin birimden farklı her otomorfizmi bir ya da iki noktayı sabitlediğinden, eğer $\widetilde{M} = \Sigma$ ise G için yalnızca bir durum vardır ki o da $M = \Sigma$ verildiğinde $G = \{I\}$ olmasıdır. Eğer $\widetilde{M} = \mathbb{C}$ ise ya $G = \{I\}$ ve $M = \mathbb{C}$ ya da G, $\mathbb{Z}$ ye izomorf ve $M = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ya da G, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ye izomorf ve M bir tordur.

Geri kalan tüm durumlarda $\widetilde{M} = \mathcal{U}$ ve G ise eliptik elemanlar hariç bir Fuchs grubudur.

Teorem 1.13.7. (Jones ve Singerman, 1987) Λ_1, Λ_2 eliptik elemanlar hariç Fuchs grupları olsun. Bu durumda $\mathcal{U}/\Lambda_1$ ve $\mathcal{U}/\Lambda_2$ konform eşdeğerdir ancak ve ancak $T\Lambda_1 T^{-1} = \Lambda_2$ olacak şekilde $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ vardır.

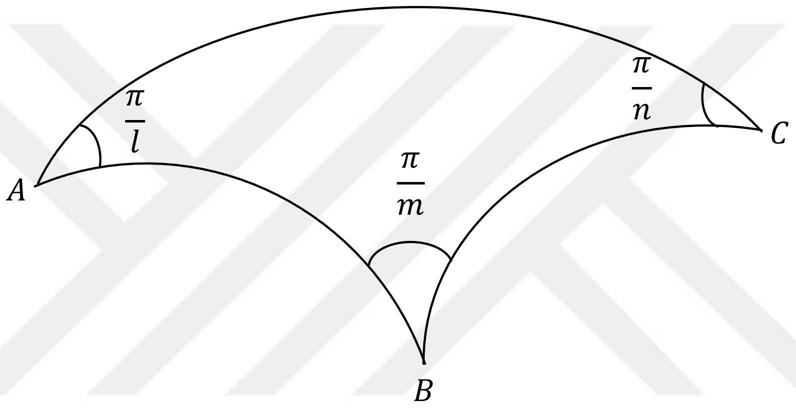
Son olarak bir G Fuchs grubunun parabolik elemanlarının $\mathcal{U}/G$ yüzeyinin geometrisi üzerindeki etkisi ile ilgili bazı teoremler vereceğiz.

Önerme 1.13.8. (Farkas ve Kra, 1980) G, $\mathcal{U}$ üzerinde hareket eden bir Fuchs grubu olsun. Eğer G, parabolik eleman içeriyorsa $\mathcal{U}/G$ yüzeyi delik (puncture) içerir. Ayrıca, $\mathcal{U}/G$ üzerindeki delikler ile G deki parabolik elemanların eşlenik sınıfları arasında bire-bir bir eşleme vardır.

Önerme 1.13.9. (Jones ve Singerman, 1987) $\mathcal{U}/\Lambda$ kompakt ise Λ, parabolik eleman içermez.

1.14. Üçgen Gruplar

Δ ile şekilde görülen ve açıları π/l, π/m ve π/n olan hiperbolik üçgeni gösterelim.



Şekil 3. Δ Hiperbolik üçgeni

Özel olarak $l = 2$ alacağız. Bu hiperbolik üçgenin üç kenarındaki yansımalar σ_1, σ_2, σ_3 olsun. Bu üç yansıma ile üretilen grubu Γ^* ile gösterelim:

$$\Gamma^* = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | {\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 = {\sigma_3}^2 \rangle \tag{1}$$

Burada $x = \sigma_3\sigma_1$ ve $y = \sigma_2\sigma_3$ alalım. Bu durumda $x^m = y^n = I$ olduğu açıktır. O halde $yx = \sigma_2\sigma_1$ olacağından $(yx)^2 = I$ dır. Γ^* grubunun x ve y ile üretilen alt grubunu ele alalım:

$$\Gamma \cong \langle x, y | x^m = y^n = (xy)^2 = I \rangle \tag{2}$$

Bu Γ grubunu $\Delta(2,m,n)$ ile gösterip adına üçgen grubu diyeceğiz. Şimdi önemli bazı üçgen gruplarının sınıflandırmasını yapacağız.
İlk olarak cinsi 0 olanları ele alalım. Bunların sağlanması gereken bağıntı

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \tag{3}$$

olduğundan bu bağıntı

$$(m-2)(n-2) < 4 \tag{4}$$

şekline dönüşür. Bu bağıntıyı sağlayan (m,n) doğal sayı ikilileri bize küre üzerinde (cinsi 0) hareket eden tüm üçgen gruplarını verecektir.

İlk olarak $m=2$ (veya $n=2$) olursa buna karşılık hangi n (veya m) doğal sayısı alınırsa alınsın (4) bağıntısı sağlanır. Dolayısıyla $(0;2,2,n)$ (veya $(0;2,m,2)$) şeklinde sonsuz elemana sahip üçgen grubu sınıfları elde edilir. Bunlar dikkatle incelendiğinde sırasıyla D_n (veya D_m) dihedral grubuna izomorfik oldukları görülür.

Özel olarak $(1,n,n)$ üçgen grupları da C_n devirli gruplarına izomorftur ve ilk bileşen 2 olmayıp 1 olduğundan bu durum dejenere durum olarak ele alınır.

Bunlar dışında (4) bağıntısını sağlayan sonlu sayıda (m,n) ikilisi daha mevcuttur. Bunlar, (3,3), (3,4) ve (3,5) tir. Bu ikililere karşılık gelen üçgen grupları ise $(0;2,3{,}3)$, $(0;2,3{,}4)$ ve $(0;2,3{,}5)$ tir. Bu üçgen gruplarının grup yapıları sırasıyla A_3, S_4 ve A_5 dır.

Grup teorisinin temel sonuçlarından birisi de verilen bir grubun normal alt gruplarının bulunmasına imkan sağlayan aşağıdaki sonuçtur:

Teorem 1.14.1. $\theta: G_1 \longrightarrow G_2$ bir epimorfizm ise $Ker\theta \lhd G_1$ dir ve $G_2 \cong {}^{G_1}/_{Ker\theta}$ dır.

Bu teorem ile verilen bir G_1 grubundan çıkan tüm epimorfizmlerin çekirdekleri hesaplanarak G_1 in normal alt grupları belirlenebilir. Dolayısıyla üçgen gruplarının iyi bilinmesi hem normal alt grupların belirlenmesinde hem de bunlara karşılık gelen düzgün figürlerin elde edilmesinde oldukça önemlidir.

1.15. Düzgün Figürler

Düzgün figürler, grafların ya da multigrafların kapalı yüzeyler üzerine simetrik şekilde gömülmesidir. Düzgün figürler, platonik katıların ve düzgün üçgenlemelerin, dörtgenlemelerin yüksek cinsli yönlendirilebilir yüzeylere genişletilmesidir. Bu konudaki ilk çalışmalar 1920 lerde Brahana (Brahana, 1927) ile başlamış ve Coxeter (Coxeter, 1980) ile devam etmiştir. Düzgün figürler ile matematiğin hiperbolik geometri, Riemann yüzeyleri, Sayı cisimleri ve Galois Teorisi gibi diğer branşları arasında derin bağlantılar vardır. Küre, tor ve diğer küçük cinsli yönlendirilebilir yüzeyler üzerindeki düzgün figürler bir çok çalışmaya konu olmuştur ve iyi bir şekilde incelenmiştir. Ancak yüksek cinsli yüzeyler için durum daha karmaşıktır. Bu yöndeki çalışmalar da Conder, Siran ve Tucker (Conder vd., 2010) tarafından yapılmıştır.

Bir figür, bir G bağlantılı grafının, sınırı olmayan kapalı bir S yüzeyi üzerine 2 boyutlu hücreler halinde gömülmesidir. Bu G grafı düğümlere veya çoklu kenarlara sahip olabilir. 2 boyutlu hücre kavramı kenar kesişiminin olmadığı ve yüzey üzerindeki grafın $S\backslash G$ tümleyeninin her yüzünün basit bağlantılı olduğu yani, $\mathbb{R}^2$ deki bir açık diske homeomorf olduğu anlamına gelir.

Bir $\mathcal{M}$ figürüne, taşıyıcı yüzeyin yönlendirilebilir ya da yönlendirilemez oluşuna göre yönlendirilebilir ya da yönlendirilemez denir. Yine bir $\mathcal{M}$ figürünün cinsi ve Euler karakteristiği üzerinde bulunduğu yüzeyin cinsi ve Euler karakteristiği olarak tanımlanır. Böyle bir $\mathcal{M}$ figürü bir köşe kümesi, bir kenar kümesi ve bir yüz kümesinden oluşur. Bu kümeler sırasıyla V, E ve F ile ifade edilirse $\mathcal{M}$ nin Euler karakteristiği $\chi = |V| - |E| + |F|$ ile verilir. Dolayısıyla $\mathcal{M}$ nin cinsi g, $\mathcal{M}$ yönlendirilebilirken $\chi = 2 - 2g$; $\mathcal{M}$ yönlendirilemezken $\chi = 2 - g$ formülleri ile hesaplanır.

Bir $\mathcal{M}$ figürü ile ilişkili olan bir diğer kavram da okların kümesidir. Bir ok ise yönlendirilmiş bir kenardır. Altta yatan grafın düğümü yoksa, okları $(v, e) \in V \times E$ köşe-kenar ikilisi olarak ele alabiliriz.

Bir $\mathcal{M}$ figürünün otomorfizmi, altta yatan grafın kenarlarının yön koruyan bir permütasyonudur ya da denk olarak grafın her otomorfizmi taşıyıcı yüzeyin bir homeomorfizmini indirger. Bağlantılılıktan, bir figürün her otomorfizmi, onun keyfi bir ok üzerindeki etkisi ile tek türlü belirlidir.

Bir $\mathcal{M}$ figürünün tüm otomorfizmlerinin kümesi bileşke işlemi ile bir grup oluşturur. Bu gruba figürün otomorfizm grubu denir ve $Aut(\mathcal{M})$ ile ifade edilir. Eğer $Aut(\mathcal{M})$, $\mathcal{M}$ nin okları üzerinde transitif hareket ediyorsa, $\mathcal{M}$ ye düzgün denir.

Herhangi bir $\mathcal{M}$ düzgün figürü için, $Aut(\mathcal{M})$, $\mathcal{M}$ nin okları üzerinde transitif hareket eder ve dolayısıyla $\mathcal{M}$ nin köşeleri, kenarları ve yüzleri üzerinde de transitif hareket eder. Böylece bir $\mathcal{M}$ düzgün figürünün her yüzü aynı kenar sayısına (buna m diyelim) ve her köşesi de aynı birleşim sayısına (buna n diyelim) sahiptir. Böyle bir düzgün figüre $\{m,n\}$ tipindedir denir. Platonik katılar düzgün figürlere örnek olarak verilebilir. Bunlar, $\{3,3\}$ tipli dörtyüzlü (tetrahedron), $\{3,4\}$ tipli sekizyüzlü (octahedron), $\{4,3\}$ tipli küp, $\{3,5\}$ tipli yirmiyüzlü (icosahedron), $\{5,3\}$ tipli oniki yüzlü (dodecahedron) dur.

Figürlerin düzgün olup olmaması oldukça önemli bir özelliktir. Jones ve Singerman (1978), $(2,m,n)$ tipindeki üçgen gruplara karşılık gelen $\{m,n\}$ tipli düzgün figürleri incelemişlerdir. Biz de bu çalışmada $\Gamma_B(N)$ grubunun üçgen grup olduğu durumlara karşılık gelen düzgün figürleri inceleyeceğiz.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Yörünge Uzayı Üzerinde Örtüm Grubunun İndirgenen Hareketi

$PSL(2,\mathbb{R})$ nin $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemdeki hareketini biliyoruz. Ayrıca, G, $PSL(2,\mathbb{R})$ nin ayrık bir alt grubu ise $\mathcal{U}/G$ bir Riemann yüzeyidir. $\mathcal{U}/G$ nin elemanları, G nin $\mathcal{U}$ üzerindeki hareketinden doğan yörüngelere karşılık gelir. Sembolik olarak; $x \in \mathcal{U}$ olmak üzere $[x]_G$, x in G-yörüngesidir. Yani, x den ulaşılabilen noktaların kümesidir. Burada, $\mathcal{U}/G$ üzerinde, $PSL(2,\mathbb{R})$ nin $\mathcal{U}$ üzerindeki hareketinden indirgenen bir hareket tanımlamak istiyoruz. Fakat bir $T \in PSL(2,\mathbb{R})$ elemanının $\mathcal{U}/G$ nin bir dönüşümünü indirgemesi gerekmez. Yani; $\mathcal{U}/G$ nin aynı yörüngesindeki, $\mathcal{U}$ nun iki elemanını $\mathcal{U}/G$ nin farklı iki yörüngesine götüren bir $T \in PSL(2,\mathbb{R})$ var olabilir. Dolayısıyla $PSL(2,\mathbb{R}) \times \mathcal{U}/G \longrightarrow \mathcal{U}/G$ hareketi iyi tanımlı olmayabilir. Haliyle, hareketi $PSL(2,\mathbb{R})$ nin öyle bir alt grubuna kısıtlamalıyız ki $\mathcal{U}$ nun G yörüngeleri korunsun. Bu şart aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\forall\, x, x' \in \mathcal{U} \text{ için } x \in [x']_G \Leftrightarrow T(x) \in [T(x')]_G.$$

Yukarıdaki şartı sağlayan tüm T dönüşümlerinin kümesi $Z(\mathcal{U}, G)$ ile gösterilir. Ayrıca, yukarıda bahsedilen alt gruba trivial olmayan örnek, G nin normalliyen kümesi $N(G)$ dir.

Lemma 2.1.1. H_1 , X kümesi üzerinde hareket eden bir grup ve $H_2 \leq H_1$ olsun. H_2 nin H_1 deki normalliyeni olan $N(H_2)$ nin hareketi H_2 yörüngelerini korur.

İspat: $h \in N(H_2)$ olsun. Tanımdan $hH_2 = H_2h$ yazılır. X in bir elemanı x olsun. O halde,

$$h([x]_{H_2}) = [x]_{hH_2} = [x]_{H_2h} = [hx]_{H_2}$$

dir. Yani; h, x in H_2 yörüngesini hx in H_2 yörüngesine gönderir.

□

Önerme 2.1.2. H_1, X kümesi üzerinde hareket eden bir grup ve $H_2 \trianglelefteq H_1$ olsun. Ayrıca $x \in X$ ve S_x , x in H_1 deki sabitleyeni olsun. Bu takdirde x in H_2 yörüngesinin H_1 deki sabitleyeni $S_{[x]_{H_2}}$ için

$$S_{[x]_{H_2}} = S_x H_2$$

dir.

İspat: $g \in S_{[x]_{H_2}}$ olsun. Bunun anlamı $g[x]_{H_2} = [x]_{H_2}$ dir. Buradan $g[x]_{H_2} = \{gax: a \in H_2\} = [x]_{gH_2}$ olur. $H_2 \trianglelefteq H_1$ olduğundan $gH_2 = H_2 g$ dir. Dolayısıyla $[x]_{H_2 g} = [x]_{H_2}$ bulunur. Eğer $h_1 \in H_2$ ise $h_1 gx = h_2 x$ olacak şekilde bir $h_2 \in H_2$ mevcuttur. Buradan $h_1 gx = h_2 x$ olduğundan $h_2^{-1} h_1 gx = x$ olup bunun anlamı ise $h_2^{-1} h_1 g \in S_x$ dir. O halde $g \in h_1^{-1} h_2 S_x$ dir. Buradan $g \in H_2 S_x$ olup $g \in S_x H_2$ elde ederiz.

Diğer yandan, $g \in H_2 S_x = S_x H_2$ olsun. O halde $g = h_1 h_2$ olacak şekilde $h_1 \in H_2$ ve $h_2 \in S_x$ vardır. Buradan

$$g[x]_{H_2} = h_1 h_2 [x]_{H_2} = [h_1 h_2 x]_{H_2} = [h_1 x]_{H_2} = [x]_{H_2}$$

olup $g \in S_{[x]_{H_2}}$ dir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

□

Lemma 2.1.3. H_1, bir X kümesi üzerinde transitif hareket eden bir grup ve $H_2 \trianglelefteq H_1$ olsun. Bu takdirde $H_1, X/H_2$ üzerinde transitif hareket eder.

İspat: $H_2 \trianglelefteq H_1$ olduğundan, H_1 in X/H_2 üzerindeki hareketi iyi tanımlıdır. Ayrıca bu hareket açıkça transitiftir. Gerçekten; $[x]_{H_2}, [y]_{H_2} \in X/H_2$ olsun. $x, y \in X$ olduğundan ve H_1, X üzerinde transitif hareket ettiğinden öyle bir $g \in H_1$ vardır ki, $gx = y$ dir. $g[x]_{H_2} = [gx]_{H_2} = [y]_{H_2}$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

□

Şimdi bizim bu tez çalışmamıza esin kaynağı olan Ioannis Ivrissimtzis ve David Singerman ın (Ivrissimtzis ve Singerman, 2005) çalışmasını burada detaylandıracağız. Yazarlar bu çalışmada modüler grubun kongrüans alt gruplarına karşılık gelen Farey figürlerini incelediler. Hem modüler grup hem de kongrüans alt grupları daha güzel bir aritmetik yapıya sahip olduklarından yukarıda verilen topolojik kavramların bu gruplara uygulanışını görmek, daha sonrasında bizim normalliyen ve alt grupları üzerinde yapacağımız hesaplamaların da daha anlaşılır olmasını sağlayacaktır.

2.2. Γ nın Kongrüans Alt Gruplarına Karşılık Gelen Figürler

Şekil 2 ile verilen $\mathcal{F}$ evrensel figürünün (Farey Figürü) köşeleri $\widehat{\mathbb{Q}}$ dır. Burada $\infty = \frac{1}{0}$ dır ve $\frac{a}{c}$ ve $\frac{b}{d}$ köşeleri bir kenar ile bağlıdır ancak ve ancak $ad - bc = \pm 1$ dir. $\mathcal{F}$ için aşağıdakiler geçerlidir:

i) Köşeleri $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}$ olan bir üçgen vardır.

ii) Γ, $\mathcal{F}$ nin otomorfizmalarının grubu olarak hareket eder.

iii) Köşeleri $\frac{a}{c}$, $\frac{a+b}{c+d}$, $\frac{b}{d}$ olan bir üçgen vardır.

Böylece $\mathcal{F}$**,** $\mathcal{U}$ nun bir üçgenlemesidir.

Tanım 2.2.1. $\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{F}/\Gamma(n)$ üçgen figürü olarak tanımlanır.

$\mathcal{F}$ nin köşeleri Γ nın cusplarıdır. $\mathcal{F}(n)$ nin köşeleri de bu cuspların $p: \mathcal{U} \to \mathcal{U}/\Gamma(n)$ doğal izdüşümünün altındaki görüntüleridir, yani $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma(n)$ dır. $\Gamma(n) \trianglelefteq \Gamma$ olduğundan ve Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki transitif olduğundan Γ, $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma(n)$ üzerindeki hareketi transitiftir (Lemma 2.1.3.).

∞ un Γ daki sabitleyeni S_∞ , $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisiyle üretilen gruptur.

Lemma 2.2.2. $\Gamma(n)$ nin $PSL(2, \mathbb{R})$ deki normalliyeni Γ dır.

Lemma 2.2.3. $S_\infty \Gamma(n) = \Gamma_1(n)$ dir.

İspat: $S_\infty = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}\right\}$ tanımı dikkate alınırsa $S_\infty \leq \Gamma_1(n)$ yazılır. Ayrıca $\Gamma(n) \leq \Gamma_1(n)$ olduğundan $S_\infty\Gamma(n) \leq \Gamma_1(n)$ elde edilir. Tersine, $A \in \Gamma_1(n)$ alalım, $\Gamma_1(n)$ tanımından

$$A = \begin{pmatrix} 1+an & r+bn \\ cn & 1+dn \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+(a-rc)n & (b-rd)n \\ cn & 1+dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+an & r+bn \\ cn & 1+dn \end{pmatrix} = A$$

elde edilir. Burada

$\begin{pmatrix} 1+(a-rc)n & (b-rd)n \\ cn & 1+dn \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$ dir.

Dolayısıyla $\Gamma_1(n) \leq S_\infty\Gamma(n)$ olduğu görülür. Bu ise ispatı tamamlar.

□

Önerme 2.2.4. $\mathcal{F}(n)$ nin köşeleri ile $\Gamma_1(n)$ nin Γ daki sol kosetleri arasında bire-bir bir eşleme vardır.

İspat: Lemma 2.1.3. ten $S_{[\infty]}$ un Γ daki kosetleri ile $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma(n)$ arasında bire-bir bir eşleme vardır. Önerme 2.1.2. den $S_{[\infty]} = S_\infty\Gamma(n)$ dir. Diğer yandan Önerme 2.2.3. den de $S_\infty\Gamma(n) = \Gamma_1(n)$ idi. Dolayısıyla $\Gamma_1(n)$ nin Γ daki sol kosetleri ile $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma(n)$ arasında bire-bir bir eşleme vardır.

□

Şimdi köşelerin aritmetik olarak nasıl hesaplanabileceğini göstereceğiz. Bunun için öncelikle aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 2.2.5. $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$ olsun. Bu durumda A ve B, $\Gamma_1(n)$ nin Γ daki aynı sol kosetlerini belirler ancak ve ancak $\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} mod\ n$ dir.

İspat: $A\Gamma_1(n)$ ve $B\Gamma_1(n)$ kosetlerini ele alalım. Kabul edelim ki $A\Gamma_1(n) = B\Gamma_1(n)$ olsun. $A\Gamma_1(n) = B\Gamma_1(n)$ ancak ve ancak $A^{-1}B \in \Gamma_1(n)$ dir. Buradan

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} d_1 & -b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 d_1 - b_1 c_2 & b_2 d_1 - b_1 d_2 \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 & a_2 d_1 - b_1 c_2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki matrisin $\Gamma_1(n)$ de olması için gerek ve yeter şart $a_1 c_2 - a_2 c_1 \equiv 0\ mod\ n$ ve diğer yandan $a_2 d_1 - b_1 c_2 \equiv 1\ mod\ n$ olmasıdır. Buradan $\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix}\ mod\ n$ elde edilir.

□

Her bir köşeyi bir satır vektörü ile temsil etmek üzere yukarıdaki önerme dikkate alınırsa bir köşe, $(a, c, n) = 1$ olmak üzere (a, c) vektörü ile ifade edilebilir. Burada (a, c) ile $(-a, -c)$ özdeş kabul edilir. Böylece köşe kümesi

$$\{(a, c) \mid a, c \in \mathbb{Z}_n, (a, c, n) = 1\}/\sim$$

şeklindedir. Burada $(a, c) \sim (n - a, n - c)$ dir.

Örnek 2.2.6. $\mathcal{F}(4)$ ün köşeleri $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(1,2)$, $(0,1)$ şeklinde ve $\mathcal{F}(5)$ in köşeleri $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(3,2)$, $(4,2)$, $(2,0)$, $(0,1)$ şeklindedir.

Yukarıdaki köşe tanımlamaları dikkate alındığında $\mathcal{F}(n)$ nin köşe sayısının $|\Gamma : \Gamma_1(n)|$ indeksi ile hesaplanabildiği görülür.

Diğer yandan $\mathcal{F}(n)$ nin kenarları ve yüzleri $\mathcal{F}$ evrensel figürünün kenarları ve üçgenlerinin projeksiyonlarıdır. Böylece (a, b), (c, d), $\mathcal{F}(n)$ de bir kenarla bağlıdır ancak ve ancak $ad - bc \equiv \pm 1 \; mod \; n$ dir. Ayrıca $\frac{a+c}{b+d}$ ve $\frac{a-c}{b-d}$, (a, b) ve (c, d) köşeleri ile üçgensel yüz oluşturan köşelerdir.

Tanım olarak bir ok, figürün yönlendirilmiş bir kenarını ifade eder. Böylece eğer bir v köşesi, k katlılığına sahipse, v de k tane ok vardır denir. $\mathcal{F}(n)$ figürleri için, bu figürler modüler grubun $\Gamma(n)$ normal alt gruplarından doğar. Dolayısıyla (Jones ve Singerman, 1978) çalışmasından $\mathcal{F}(n)$ figürleri düzgün figürler. Bunun anlamı, bu figürlerin otomorfizm grubunun, figürün okları üzerinde transitif hareket etmesidir.

Teorem 2.2.7. $\mathcal{F}(n)$ nin yönlendirilmiş kenarları (okları) ile $\Gamma(n)$ nin Γ daki kosetleri arasında birebir bir eşleme vardır.

İspat. Lemma 2.1.3. den $H_1 = \Gamma$, X olarak $\mathcal{F}$ nin oklarının kümesini, $H_2 = \Gamma(n)$, x_0 olarak da $\infty \to 0$ okunu alalım. (Jones vd., 1991) den biliyoruz ki, Γ, X üzerinde transitif hareket eder. O halde $S_{[x_0]} = \Gamma(n)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $T \in \Gamma$, $[x_0]$ ni sabitlesin. Yani, $T([\infty]) = [\infty]$ ve $T([0]) = [0]$ olsun. $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, ∞ un yörüngesini sabitlediğinden ve $S_{[\infty]} = \Gamma_1(n)$ olduğundan $T \in \Gamma_1(n)$ dir. Ayrıca,

$$[0] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [\infty]$$

olduğundan, $T([0]) = [0]$ ise

$$T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [\infty] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [\infty]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [\infty] = [\infty]$$

olup $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ elemanı $[\infty]$ ni sabitlediğinden $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma_1(n)$ dir. Buradan

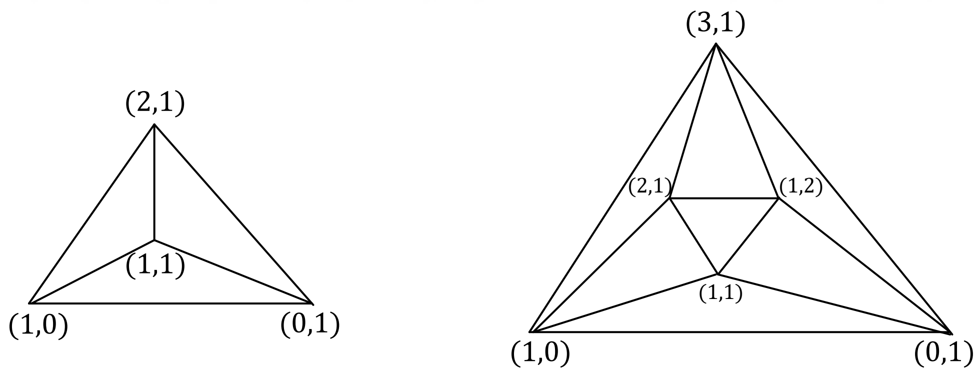
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \Gamma_1(\mathrm{n})$$

elde edilir. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \Gamma_1(n)$ olduğundan $a \equiv d \equiv 1 \; mod \; n, c \equiv 0 \; mod \; n, b \equiv 0 \; mod \; n$ olup $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathrm{n})$ elde edilmiş olur.

Tersine, $T \in \Gamma(n)$ olsun. $T([\infty]) = [\infty]$ ve $T([0]) = [0]$ dir. Dolayısıyla $T([x_0]) = [x_0]$ olup, ispat tamamlanır.

□

Örnekler. Bu kısımda, bazı küçük n değerleri için $\mathcal{F}(n)$ figürlerinin bazılarını çizeceğiz. Bu figürler $\mathcal{U}/\Gamma(n)$ yüzeyi üzerinde yatarlar ve bunların köşeleri $\mathcal{U}/\Gamma(n)$ nin cusplarında yatarlar. $n = 2$ için $\mathcal{F}(2)$ bir üçgendir. $n = 3, 4, 5$ için ise tetrahedron, octahedron ve icosahedron elde edilir.



Şekil 4. Tetrahedron (Sol) ve Octahedron (Sağ)

Bu çalışmada $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2, \mathbb{R})$ deki normalliyeni olan $\Gamma_B(N)$ grubunu ve dolayısıyla onun yörünge uzayı üzerindeki hareketini irdeleyeceğiz. Bunun için öncelikle $\Gamma_B(N)$ nin yapısını inceleyelim.

2.3. $\Gamma_B(N)$ Normalliyenin Yapısı

$PSL(2,\mathbb{R})$ nin ayrık alt gruplarına Fuchs grubu denir. Literatürde en iyi bilinen Fuchs grubu Γ modüler grubudur. Γ modüler grubu oldukça zengin bir alt grup ailesine sahiptir. Bilhassa kongrüans alt grupları ve kuvvet grupları üzerine yapılmış pek çok çalışma mevcuttur. Kongrüans alt gruplarından biri olan $\Gamma_0(N)$, özellikle Klein, Fricke ve diğer kişiler tarafından geniş olarak çalışılmıştır. Bu bölümde, $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni olan $\Gamma_B(N)$ nin yapısı hakkında bilgi vereceğiz.

$\Gamma_B(N)$ normalliyeni ilk olarak (Lehner ve Newman, 1964) çalışmasında tanımlanmıştır. (Conway ve Norton, 1979) çalışmasındaki tanım kullanılırsa normalliyen,

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}$$

matrislerine karşılık gelen dönüşümlerden oluşur ki burada tüm elemanlar tam sayıdır, h ise $h^2|N$ şartını sağlayan, 24 ün en büyük böleni ve $e > 0$, N/h^2 nin tam bölenidir. Ayrıca determinantı e dir. (Eğer $m|K$ ve $(m, K/m) = 1$ ise m ye K nın tam böleni denir ve bu $m||K$ ile ifade edilir.) $\Gamma_B(N)$, birinci çeşit, sonlu üretilmiş bir Fuchs grubudur.

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}$$

matrisi bir Möbius dönüşümü temsil eder ve bu tipteki tüm matrislerin kümesi matris çarpımı ile bir grup oluşturur. Bu grubun birim matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir ve

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}$$

dönüşümünün tersi

$$\begin{pmatrix} de & -b/h \\ -cN/h & ae \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada $e||N/h^2$ dir ve her iki matrisin de determinantı e dir.

$\Gamma_B(N)$ nin bir

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}$$

elemanının $\Gamma_0(N)$ de olması için gerek ve yeter koşul $b \equiv c \equiv 0\, mod\ h$ ve determinant $e = 1$ olmasıdır.

Şimdi, sonraki bölümlerde düzgün figürler için de önemli olacak olan, $\Gamma_B(N)$ nin bazı alt gruplarını tanımlayacağız.

1) $\Gamma_C(N)$ alt grubu $\Gamma_B(N)$ nin, determinantı 1 olan elemanlarının kümesidir. Yani $\Gamma_C(N)$,

$$\begin{pmatrix} a & b/h \\ cN/h & d \end{pmatrix},\ ad - bcN/h^2 = 1$$

matrislerine karşılık gelen dönüşümlerden oluşur ve h yukarıdaki gibi tanımlıdır.

2) $\Gamma_C^0(N)$ alt grubu,

$$\begin{pmatrix} a & b/h \\ cN & d \end{pmatrix},\ ad - bcN/h = 1$$

matrislerine karşılık gelen dönüşümlerden oluşur öyle ki h yukarıdaki gibi tanımlıdır. Kolayca görülebilir ki,

$$\Gamma_0(N/h) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_C^0(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \tag{1}$$

dir. Yani; $\Gamma_C^0(N)$, $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile $\Gamma_0(N/h)$ nın bir eşleniğidir.

3) $\Gamma_B^0(N)$ alt grubu,

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}, \; c^2N/eh^2 \equiv 0 \; (mod\; h)$$

matrislerine karşılık gelen dönüşümlerden oluşur. Böylece aşağıdaki ilişkiyi elde etmiş oluruz.

$$\Gamma_0(N) \leq \Gamma_C^0(N) \leq \Gamma_B^0(N) \leq \Gamma_B(N)$$

Burada $\Gamma_B^0(N)$, $\Gamma_C^0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki normalliyenidir. Bunu gösterebilmek için öncelikle aşağıdaki kullanışlı lemmayı vereceğiz:

Lemma 2.3.1. (Akbaş, 1989) $ad \equiv 1 \; mod\; s$ ise $a \equiv d \; mod\; s$ ancak ve ancak s, 24 ün bir bölenidir.

Önerme 2.3.2. $\Gamma_C^0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki normalliyeni $\Gamma_B^0(N)$ dir.

İspat: $\Gamma_C^0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki normalliyenini $N(\Gamma_C^0(N))$ ile gösterelim. Göstereceğiz ki, $N\left(\Gamma_C^0(N)\right) = \Gamma_B^0(N)$ dir. Öncelikle $\Gamma_C^0(N) \trianglelefteq \Gamma_B^0(N)$ olduğunu gösterelim. Her $\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix} \in \Gamma_B^0(N)$ ve $\begin{pmatrix} x & y/h \\ zN & t \end{pmatrix} \in \Gamma_C^0(N)$ alalım. Burada $\Gamma_B^0(N)$ ve $\Gamma_C^0(N)$ nin tanımlarından $ade^2 - bcN/h^2 = e$, $xt - yzN/h = 1$ ve $c^2N/eh^2 \equiv 0 \; mod\; h$ dır.

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y/h \\ zN & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} de & -b/h \\ -cN/h & ae \end{pmatrix} \in \Gamma_C^0(N)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y/h \\ zN & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} de & -b/h \\ -cN/h & ae \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} aex + bzN/h & (aey + bt)/h \\ (cx/h + dez)N & cyN/h^2 + det \end{pmatrix}\begin{pmatrix} de & -b/h \\ -cN/h & ae \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ade^2x + bdezN/h - (aey + bt)cN/h^2 & [-b(aex + bzN/h) + ae(aey + bt)]/h \\ [decx/h + d^2e^2z - c^2yN/h^3 - cdet/h]N & -bcxN/h^2 - bdezN/h + aecyN/h^2 + ade^2t \end{pmatrix}$$

Bu matrisin her bir bileşeni e ile bölünürse, determinantı 1 olan bir matris elde edilir:

$$\begin{pmatrix} adex + bdzN/h - (aey + bt)cN/eh^2 & [-b(ax + bzN/eh) + a(aey + bt)]/h \\ [dcx/h + d^2ez - c^2yN/eh^3 - cdt/h]N & -bcxN/eh^2 - bdzN/h + acyN/h^2 + adet \end{pmatrix}$$

N/h, N/h^2, N/eh, N/eh^2 ifadeleri birer tam sayı olduğundan, elde edilen matrisin

$$\begin{gathered} ade^2x + bdezN/h - (aey + bt)cN/h^2 \\ -b(ax + bzN/eh) + a(aey + bt) \\ -bcxN/eh^2 - bdzN/h + acyN/h^2 + adet \end{gathered}$$

girdileri tam sayıdır. Eğer $dcx/h + d^2ez - c^2yN/eh^3 - cdt/h$ ifadesinin bir tam sayı olduğu gösterilirse, elde edilen matris $\Gamma_C^0(N)$ grubunun bir elemanı olacaktır. $c^2N/eh^2 \equiv 0 \; mod \; h$ olduğundan c^2yN/eh^3 bir tam sayıdır. Diğer yandan $xt - yzN/h = 1$ olduğundan $xt = 1 + yzN/h$ olup $xt \equiv 1 \; mod \; h$ elde edilir. $h|24$ ve Lemma 2.3.1 kullanılırsa $x \equiv t \; mod \; h$ ve dolayısıyla $x - t \equiv 0 \; mod \; h$ yazılır. Bu ise $dcx/h - cdt/h$ ifadesinin bir tam sayı olduğunu belirtir. Sonuç olarak $dcx/h + d^2ez - c^2yN/eh^3 - cdt/h$ ifadesi bir tam sayıdır ve

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y/h \\ zN & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} de & -b/h \\ -cN/h & ae \end{pmatrix} \in \Gamma_C^0(N)$$

elde edilir. Yani $\Gamma_C^0(N) \trianglelefteq \Gamma_B^0(N)$ dır.

$\Gamma_C^0(N) \trianglelefteq \Gamma_B^0(N)$ olduğundan ve normalliyenin tanımından $\Gamma_B^0(N) \subset N(\Gamma_C^0(N))$ olduğu görülür. Diğer yandan, her $\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix} \in N(\Gamma_C^0(N))$ alalım. Normalliyen tanımı gereği, keyfi $\begin{pmatrix} x & y/h \\ zN & t \end{pmatrix} \in \Gamma_C^0(N)$ için

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y/h \\ zN & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} de & -b/h \\ -cN/h & ae \end{pmatrix} \in \Gamma_C^0(N)$$

dir. Benzer şekilde, yukarıdaki çarpma işlemi yapıldığında, $dcx/h + d^2ez - c^2yN/eh^3 - cdt/h$ ifadesinin bir tam sayı olduğu elde edilir. Burada $dcx/h - cdt/h$ ifadesinin bir tam sayı olduğunu göstermiştik. d^2ez ifadesi de bir tam sayı olduğundan, her y için c^2yN/eh^3 ifadesi de bir tam sayıdır. Böylece $c^2yN/eh^2 \equiv 0\ (mod\ h)$ elde edilir. Bu her y için sağlandığından $c^2N/eh^2 \equiv 0\ (mod\ h)$ elde edilir. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix} \in \Gamma_B^0(N)$ olup $N\big(\Gamma_C^0(N)\big) \subset \Gamma_B^0(N)$ elde edilir. O halde $N\big(\Gamma_C^0(N)\big) = \Gamma_B^0(N)$ olduğu görülür.

□

4) $\Gamma_W(N)$ alt grubu,

$$\begin{pmatrix} ae & b \\ cN & de \end{pmatrix}$$

matrislerine karşılık gelen dönüşümlerden oluşur. Burada $e||N$ ve determinant $e > 0$ dır. Bu $\Gamma_W(N)$ grubunun elemanları Atkin-Lehner dönüşümleri olarak adlandırılır.

Şimdi $\Gamma_0(N) \leq \Gamma_C^0(N) \leq \Gamma_B^0(N) \leq \Gamma_B(N)$ zinciri için, bazı alt grupların $\Gamma_B(N)$ deki indekslerini hesaplayacağız. Bunun için aşağıdaki Lemma dan yararlanacağız.

Lemma 2.3.3. (Akbaş, 1989) ρ, N/h^2 nin ayrık asal çarpanlarının sayısı ve $\tau = \prod_{p|N}(1+\frac{1}{p}) \,/\, \prod_{p|N/h^2}(1+\frac{1}{p})$ olmak üzere $|\Gamma_B(N) : \Gamma_0(N)| = 2^{\rho}h^2\tau$ dir.

Önerme 2.3.4. $|\Gamma_C^0(N) : \Gamma_0(N)| = h$ dır.

İspat: (1) eşitliğinden $\Gamma_C^0(N)$ ile $\Gamma_0(N/h)$ nın eşlenik olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $|\Gamma_C^0(N) : \Gamma_0(N)| = |\Gamma_0(N/h) : \Gamma_0(N)|$ eşitliği yazılabilir. $\Gamma_0(N)$ nin Γ modüler grubundaki indeksinin $N\prod_{p|N}(1+\frac{1}{p})$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$|\Gamma_0(N/h) : \Gamma_0(N)| = \frac{|\Gamma:\Gamma_0(N)|}{|\Gamma:\Gamma_0(N/h)|} = \frac{N\prod_{p|N}(1+\frac{1}{p})}{N/h\prod_{p|N/h}(1+\frac{1}{p})}$$

elde edilir. Şimdi N ile N/h ın asal bölenlerinin aynı olduğunu gösterelim. $h = 1$ durumunda N ile N/h aynı sayı olacağından istenilen açıktır. $h \neq 1$ olsun. Kabul edelim ki $p|N$ fakat $p \nmid N/h$ olan bir p asalı mevcut olsun. $p|N$ olduğundan $N = pk$ olacak şekilde bir k doğal sayısı mevcuttur. $h^2|N$ olduğundan $h^2|pk$ dır ve p asal olduğundan $h^2|k$ elde edilir. Dolayısıyla $h|k$ elde edilir. O halde $N = pk$ olduğu kullanılırsa, $N/h = p(k/h)$ elde edilir ki bunun anlamı $p|N/h$ dır. Bu ise $p \nmid N/h$ kabulüyle çelişir. Sonuç olarak N ile N/h ın asal bölenleri aynıdır. Bu ise $\prod_{p|N}(1+\frac{1}{p}) = \prod_{p|N/h}(1+\frac{1}{p})$ sonucunu verir. Dolayısıyla

$$|\Gamma_C^0(N) : \Gamma_0(N)| = |\Gamma_0(N/h) : \Gamma_0(N)| = \frac{|\Gamma : \Gamma_0(N)|}{|\Gamma : \Gamma_0(N/h)|} = \frac{N\prod_{p|N}(1+\frac{1}{p})}{N/h\prod_{p|N/h}(1+\frac{1}{p})} = h$$

elde edilir.

$\square$

Önerme 2.3.5. ρ, N/h^2 nin ayrık asal çarpanlarının sayısı ve $\tau = \prod_{p|N}(1+\frac{1}{p}) / \prod_{p|N/h^2}(1+\frac{1}{p})$ olmak üzere $|\Gamma_B(N) : \Gamma_C^0(N)| = 2^{\rho}h\tau$ dur.

İspat: Lemma 2.3.3. ve Önerme 2.3.4. kullanarak,

$$|\Gamma_B(N)\ :\Gamma_C^0(N)| = \frac{|\Gamma_B(N)\ :\Gamma_0(N)|}{|\Gamma_C^0(N):\Gamma_0(N)|} = \frac{2^\rho h^2\tau}{h} = 2^\rho h\tau$$

elde edilir.

□

Şimdi (Akbaş, 1989) tezinde olan, $\Gamma_B(N)$ nin yapısını karakterize eden iki önemli teorem vereceğiz.

Teorem 2.3.6. $N = 2^\alpha 3^\beta$ ve $\beta = 0$ veya 2 olsun. Böylece $\Gamma_B(N)$ üçgen gruptur ancak ve ancak $\alpha \leq 8$ ise. Bu durumlarda $\Gamma_B(N)$ nin simgesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} (0;2,3,\infty), & \alpha = 0,2,4,6 \\ (0;2,4,\infty), & \alpha = 1,3,5,7 \\ (0;2,\infty,\infty), & \alpha = 8\,. \end{cases}$$

Teorem 2.3.7. $N = 2^\alpha 3^\beta$ ve $\beta = 1,3$ olsun. Bu takdirde $\Gamma_B(N)$ bir üçgen gruptur ancak ve ancak $\alpha = 0,2,4,6$ dır. Bu durumlar için $\Gamma_B(N)$ nin simgesi $(0;2,6,\infty)$ dir.

$N = 2^\alpha 3^\beta$ olsun. Yukarıdaki iki teoremden, eğer $\beta = 0,2$ ve $\alpha = 0,2,4,6$ ise $\Gamma_B(N)$ nin normal alt gruplarına düzgün üçgensel figürler karşılık gelir; eğer $\beta = 0,2$ ve $\alpha = 1,3,5,7$ ise $\Gamma_B(N)$ nin normal alt gruplarına düzgün dörtgensel figürler karşılık gelir; eğer $\beta = 1,3$ ve $\alpha = 0,2,4,6$ ise $\Gamma_B(N)$ nin normal alt gruplarına düzgün altıgensel figürler karşılık gelir.

Tüm bu durumlar aşağıdaki tablo ile açıklanabilir:

Tablo 1. N değerleri ve karşılık gelen figürler

N değeri	h değeri	e değeri	Simge	Karşılık Gelen Figür
1	1	1	$(0; 2,3, \infty)$	Düzgün Üçgen Figür
2	1	1 ve 2	$(0; 2,4, \infty)$	Düzgün Dörtgen Figür
3	1	1 ve 3	$(0; 2,6, \infty)$	Düzgün Altıgen Figür
4	2	1	$(0; 2,3, \infty)$	Düzgün Üçgen Figür
8	2	1 ve 2	$(0; 2,4, \infty)$	Düzgün Dörtgen Figür
9	3	1	$(0; 2,3, \infty)$	Düzgün Üçgen Figür
12	2	1 ve 3	$(0; 2,6, \infty)$	Düzgün Altıgen Figür
16	4	1	$(0; 2,3, \infty)$	Düzgün Üçgen Figür
18	3	1 ve 2	$(0; 2,4, \infty)$	Düzgün Dörtgen Figür
27	3	1 ve 3	$(0; 2,6, \infty)$	Düzgün Altıgen Figür
32	4	1 ve 2	$(0; 2,4, \infty)$	Düzgün Dörtgen Figür

Tablo 1'in devamı

36	6	1	$(0; 2,3, \infty)$	Düzgün Üçgen Figür
48	4	1 ve 3	$(0; 2,6, \infty)$	Düzgün Altıgen Figür
64	8	1	$(0; 2,3, \infty)$	Düzgün Üçgen Figür
72	6	1 ve 2	$(0; 2,4, \infty)$	Düzgün Dörtgen Figür
108	6	1 ve 3	$(0; 2,6, \infty)$	Düzgün Altıgen Figür
128	8	1 ve 2	$(0; 2,4, \infty)$	Düzgün Dörtgen Figür
144	12	1	$(0; 2,3, \infty)$	Düzgün Üçgen Figür
192	8	1 ve 3	$(0; 2,6, \infty)$	Düzgün Altıgen Figür
288	12	1 ve 2	$(0; 2,4, \infty)$	Düzgün Dörtgen Figür
432	12	1 ve 3	$(0; 2,6, \infty)$	Düzgün Altıgen Figür
576	24	1	$(0; 2,3, \infty)$	Düzgün Üçgen Figür
1152	24	1 ve 2	$(0; 2,4, \infty)$	Düzgün Dörtgen Figür
1728	24	1 ve 3	$(0; 2,6, \infty)$	Düzgün Altıgen Figür

Bu tez çalışmasında, öncelikle $\Gamma_0(N)$ alt gruplarına karşılık gelen düzgün üçgen figürler araştırılmıştır, akabinde $\Gamma_0(N)$ alt gruplarına karşılık gelen düzgün dörtgen ve altıgen figürler araştırılmıştır.

2.3.1. Üçgen Figürler

Bu bölüm boyunca N sayısı, $\beta = 0, 2$ ve $\alpha = 0, 2, 4, 6$ olmak üzere $N = 2^{\alpha}3^{\beta} > 1$ şeklinde bir doğal sayıyı ifade edecektir. N nin bu değerleri için, Tablo 2.3.1 den $N = h^2$ ve $e = 1$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\Gamma_B(N)$ grubu, aşağıdaki matrislere karşılık gelen dönüşümlerden oluşur:

$$\begin{pmatrix} a & b/h \\ ch & d \end{pmatrix}, \; ad - bc = 1.$$

Burada h, $h^2|N$ şartını sağlayan, 24 ün en büyük bölenidir. Bu değerler için $\Gamma_C^0(N)$ grubu, aşağıdaki matrislere karşılık gelen dönüşümlerden oluşur:

$$\begin{pmatrix} a & b/h \\ ch^2 & d \end{pmatrix}, \; ad - bch = 1.$$

(Akbaş, 1989) çalışmasında yer alan bir sonuca göre, N nin bu bölümdeki değerleri için $\Gamma_B(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin transitif olduğu bilinmektedir. Fakat, çalışmanın bütünlüğü açısından, $\Gamma_B(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin transitifliği için aşağıdaki kanıtı vereceğiz:

Teorem 2.3.8. $\Gamma_B(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

İspat: $\infty = \frac{1}{0} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanının yörüngesinin $\widehat{\mathbb{Q}}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olsun.

1.Durum: $(h, y) = 1$ olsun. $(x, y) = 1$ olduğundan, $(hx, y) = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $ahx - by = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Bu durumda

$\begin{pmatrix} hx & b/h \\ hy & a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 1 dir ve $\Gamma_B(N)$ nin tanımı göz önüne alınırsa $\begin{pmatrix} hx & b/h \\ hy & a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ olduğu elde edilir. Diğer yandan

.

$$\begin{pmatrix} hx & b/h \\ hy & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bunun anlamı keyfi $\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanı alındığında bu eleman sonsuzun yörüngesindedir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

2.Durum: $(h, y) = h$ olsun. $h|y$ olup $y = ht$ olacak şekilde bir t tam sayısı mevcuttur. $(x, y) = 1$ olduğundan $ax - by = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Bu durumda $\begin{pmatrix} x & b \\ y & a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 1 dir ve bu matrise $\begin{pmatrix} x & b \\ y & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & bh/h \\ th & a \end{pmatrix}$ gözüyle bakılırsa, $\Gamma_B(N)$ nin tanımı dikkate alındığında $\begin{pmatrix} x & b \\ y & a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{pmatrix} x & b \\ y & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

3.Durum: $k \neq 1$ ve $k \neq h$ olmak üzere $(h, y) = k$ olsun. Bu takdirde $h = km$ ve $y = kn$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur ve $(n, m) = 1$ olur. $(m, y) = 1$ ve $(x, y) = 1$ olduğundan $(mx, y) = 1$ dir. Buradan $amx - by = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} mx & b/m \\ my & a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 1 dir ve bu matrise $\begin{pmatrix} mx & b/m \\ my & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx & bk/km \\ mkn & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx & bk/h \\ nh & a \end{pmatrix}$ gözüyle bakılırsa, $\Gamma_B(N)$ nin tanımı dikkate alındığında $\begin{pmatrix} mx & b/m \\ my & a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{pmatrix} mx & b/m \\ my & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

□

Şimdi $\mathcal{M}_3$ ile sembolize edeceğimiz evrensel üçgen figürü (normalliyen figürü) inşa edeceğiz. $\mathcal{M}_3$ ün köşeleri için ∞ un $\Gamma_B(N)$ altındaki görüntülerine bakmak yeterlidir. $\infty = \frac{1}{0.h}$ ve $0 = \frac{0}{h}$ ile ifade edilirse, $\mathcal{M}_3$ ün köşeleri $(a,c) = 1$ olan $\frac{a}{ch}$ elemanlarıdır. $\mathcal{M}_3$ te $\frac{a}{ch}$ ile $\frac{b}{dh}$ köşeleri birbirlerine bir kenar ile bağlıdır ancak ve ancak $ad - bc = \pm 1$ dir. Ayrıca $\mathcal{M}_3$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i) Köşeleri $\frac{1}{0.h}, \frac{1}{h}, \frac{0}{h}$ olan bir üçgen vardır.

ii) $\Gamma_B(N)$, $\mathcal{M}_3$ ün otomorfizmalarının grubu olarak hareket eder.

iii) Köşeleri $\frac{a}{ch}, \frac{a+b}{(c+d)h}, \frac{b}{dh}$ olan bir üçgen vardır.

Buradaki ii) önermesini kanıtlayalım.

Önerme 2.3.9. $Aut\mathcal{M}_3 = \Gamma_B(N)$ dir.

İspat. Öncelikle bir $A = \begin{pmatrix} a & b/h \\ ch & d \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ dönüşümünü alalım. Şimdi $A: \mathcal{M}_3 \longrightarrow \mathcal{M}_3$ dönüşümünün bir otomorfizm olduğunu göstereceğiz. $\frac{x}{yh}$, $\mathcal{M}_3$ ün bir köşesi olsun.

$$A\left(\frac{x}{yh}\right) = \begin{pmatrix} a & b/h \\ ch & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ yh \end{pmatrix} = \frac{ax+by}{(cx+dy)h}$$

elde edilir. $(x,y) = 1$ ve $ad - bc = 1$ olduğundan, $(ax+by, cx+dy) = 1$ dir. Dolayısıyla $\frac{ax+by}{(cx+dy)h}$, $\mathcal{M}_3$ ün bir köşesidir. O halde $A: \mathcal{M}_3 \longrightarrow \mathcal{M}_3$ dönüşümü kapalıdır. Diğer yandan $\frac{x_1}{y_1 h}, \frac{x_2}{y_2 h}$, $\mathcal{M}_3$ ün iki köşesi ve $\frac{x_1}{y_1 h} = \frac{x_2}{y_2 h}$ olsun. Bu durumda $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ dir.

$$A\begin{pmatrix}\frac{x_1}{y_1h}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b/h\\ ch & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{x_1}{y_1h}\end{pmatrix}=\frac{ax_1+by_1}{(cx_1+dy_1)h}=\frac{ax_2+by_2}{(cx_2+dy_2)h}=\begin{pmatrix}a & b/h\\ ch & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{x_2}{y_2h}\end{pmatrix}$$
$$=A\begin{pmatrix}\frac{x_2}{y_2h}\end{pmatrix}$$

olup, $A:\mathcal{M}_3\longrightarrow\mathcal{M}_3$ dönüşümü iyi tanımlıdır. Şimdi birebir ve örtenliği gösterelim. Bunun için $\frac{x_1}{y_1h}$, $\frac{x_2}{y_2h}$, $\mathcal{M}_3$ ün iki köşesi ve $A\left(\frac{x_1}{y_1h}\right)=A\left(\frac{x_2}{y_2h}\right)$ olsun. Bu eşitlikten

$$\frac{ax_1+by_1}{(cx_1+dy_1)h}=\frac{ax_2+by_2}{(cx_2+dy_2)h}$$

elde edilir. Burada $(ax_1+by_1,cx_1+dy_1)=1$ ve $(ax_2+by_2,cx_2+dy_2)=1$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$(ax_1+by_1)(cx_2+dy_2)=(ax_2+by_2)(cx_1+dy_1)$$
$$acx_1x_2+adx_1y_2+bcy_1x_2+bdy_1y_2=acx_1x_2+ady_1x_2+bcx_1y_2+bdy_1y_2$$
$$adx_1y_2-bcx_1y_2=ady_1x_2-bcy_1x_2$$
$$(ad-bc)x_1y_2=(ad-bc)y_1x_2$$
$$\frac{x_1}{y_1h}=\frac{x_2}{y_2h}$$

elde edilir. Dolayısıyla dönüşüm birebirdir. Diğer yandan $\frac{x}{yh}$, $\mathcal{M}_3$ ün bir köşesi olsun. $\frac{dx-by}{(ay-cx)h}$ kesrini göz önüne alalım. $(dx-by,ay-cx)=k$ olsun. Bu durumda $k|dx-by$ ve $k|ay-cx$ olur. Bunun sonucu olarak da $k|a(dx-by)+b(ay-cx)$ ve $k|c(dx-by)-d(ay-cx)$ yazılabilir. $k|a(dx-by)+b(ay-cx)$ ifadesi düzenlenirse ve $ad-bc=1$ olduğu kullanılırsa $k|x$ elde edilir. Benzer şekilde $k|c(dx-by)-d(ay-cx)$ ifadesi düzenlenirse ve $ad-bc=1$ olduğu dikkate alınırsa $k|y$ elde edilir. $k|x$ ve $k|y$ olduğundan $k|(x,y)=1$ olup, $(dx-by,ay-cx)=1$ elde edilir. O halde $\frac{dx-by}{(ay-cx)h}$, $\mathcal{M}_3$ ün bir köşesidir ve

$$A\left(\frac{dx-by}{(ay-cx)h}\right)=\begin{pmatrix}a & b/h\\ ch & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dx-by}{(ay-cx)h}\end{pmatrix}=\frac{x}{yh}$$

dir. O halde dönüşüm örtendir. Son olarak, $\frac{x_1}{y_1h}$, $\frac{x_2}{y_2h}$, $\mathcal{M}_3$ ün bir e kenarıyla bağlanmış iki köşesi olsun. Bu durumda $x_1y_2 - x_2y_1 = \pm 1$ dir.

$$A\left(\frac{x_1}{y_1h}\right) = \begin{pmatrix} a & b/h \\ ch & d \end{pmatrix}\left(\frac{x_1}{y_1h}\right) = \frac{ax_1+by_1}{(cx_1+dy_1)h}$$

$$A\left(\frac{x_2}{y_2h}\right) = \begin{pmatrix} a & b/h \\ ch & d \end{pmatrix}\left(\frac{x_2}{y_2h}\right) = \frac{ax_2+by_2}{(cx_2+dy_2)h}$$

köşelerini ele alalım. $detA = ad - bc = 1$ olduğu da dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}&(ax_1 + by_1)(cx_2 + dy_2) - (ax_2 + by_2)(cx_1 + dy_1)\\ &= acx_1x_2 + adx_1y_2 + bcx_2y_1 + bdy_1y_2 - acx_1x_2 - adx_2y_1 - bcx_1y_2 - bdy_1y_2\\ &= ad(x_1y_2 - x_2y_1) - bc(x_1y_2 - x_2y_1) = (x_1y_2 - x_2y_1)(ad - bc) = \pm 1\end{aligned}$$

elde edilir. Bunun anlamı ise $A\left(\frac{x_1}{y_1h}\right)$ ve $A\left(\frac{x_2}{y_2h}\right)$ köşeleri, $\mathcal{M}_3$ te bir e' kenarı ile bağlıdır. O halde $A: \mathcal{M}_3 \longrightarrow \mathcal{M}_3$ bir otomorfizmdir. Dolayısıyla $A \in Aut\mathcal{M}_3$ elde edilir.

Tersine, bir $A \in Aut\mathcal{M}_3$ otomorfizmi alalım. Öncelikle bu yöndeki içermeyi gösterebilmek için bazı bilgiler vereceğiz. Bunlardan ilki $\Gamma_B(N)$ ile Γ modüler grup arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki eşleniklik bağıntısıdır:

$$\Gamma_B(N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}\Gamma\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bu eşitlik basit bir matris çarpımıyla doğrulanabilir. Buradaki $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$ dönüşümünü $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$ ile gösterirsek, $f^{-1} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ yazılır. Dolayısıyla yukarıdaki eşitliği $\Gamma_B(N) = f\Gamma f^{-1}$ şeklinde ifade edebiliriz. Diğer yandan Farey Tessellationını $\mathcal{F}$ ile gösterecek olursak, (Ivrissimtzis ve Singerman, 2005) çalışmasından $Aut\mathcal{F} = \Gamma$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca kolayca gösterilebilir ki $\mathcal{F}$ nin bir köşesinin f altındaki görüntüsü $\mathcal{M}_3$ ün bir köşesini verir. Tersine $\mathcal{M}_3$ ün bir köşesinin f^{-1} altındaki görüntüsü $\mathcal{F}$ nin bir köşesini verir. Şimdi iddiamız $f^{-1}Af$ dönüşümünün $\mathcal{F}$ nin bir otomorfizmi olduğudur. Bunun için öncelikle $f^{-1}Af\colon\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}$ dönüşümünün kapalı ve iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $\frac{x}{y}$, $\mathcal{F}$ nin bir köşesi olsun. $f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{yh}$ dır. Diğer yandan A, $\mathcal{M}_3$ ün bir otomorfizmi olduğundan $A\left(\frac{x}{yh}\right)$, $\mathcal{M}_3$ ün bir köşesidir. Bu köşeyi $A\left(\frac{x}{yh}\right)=\frac{z}{th}$ ile gösterelim. Burada $\frac{z}{th}$, $\mathcal{M}_3$ nin bir köşesi olduğundan $(z,t)=1$ dir. Yine $f^{-1}\left(\frac{z}{th}\right)=\frac{z}{t}$ elde edilir. O halde $f^{-1}Af\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{z}{t}$ olup, $(z,t)=1$ olduğundan bu nokta $\mathcal{F}$ nin bir köşesidir. Dolayısıyla $f^{-1}Af\colon\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}$ kapalıdır. Diğer yandan $\frac{x_1}{y_1}$, $\frac{x_2}{y_2}$, $\mathcal{F}$ nin iki köşesi ve $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ olsun. Buradan $x_1=x_2$ ve $y_1=y_2$ yazılır. $f\left(\frac{x_1}{y_1}\right)=\frac{x_1}{y_1h}$ ve $f\left(\frac{x_2}{y_2}\right)=\frac{x_2}{y_2h}$ dır ve $\frac{x_1}{y_1h}=\frac{x_2}{y_2h}$ olup, A, $\mathcal{M}_3$ ün bir otomorfizmi olduğundan $A\left(\frac{x_1}{y_1h}\right)=A\left(\frac{x_2}{y_2h}\right)$ dır. Dolayısıyla $f^{-1}Af\left(\frac{x_1}{y_1}\right)=f^{-1}Af\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$ olup, $f^{-1}Af$ iyi tanımlıdır. Şimdi $f^{-1}Af$ nin birebir ve örten olduğunu gösterelim. $\frac{x_1}{y_1}$, $\frac{x_2}{y_2}$, $\mathcal{F}$ nin iki köşesi ve $f^{-1}Af\left(\frac{x_1}{y_1}\right)=f^{-1}Af\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$ olsun. Buradan $Af\left(\frac{x_1}{y_1}\right)=Af\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$ elde edilir. A, $\mathcal{M}_3$ ün bir otomorfizmi olduğundan, $f\left(\frac{x_1}{y_1}\right)=f\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$ elde edilir. f nin tanımından $\frac{x_1}{y_1h}=\frac{x_2}{y_2h}$ yazılır. Dolayısıyla $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$ olup $f^{-1}Af$ birebirdir. $\frac{x}{y}$, $\mathcal{F}$ nin bir köşesi olsun. Öncelikle bu köşeyi f ile $\mathcal{M}_3$ ün bir köşesine taşıyalım, yani $f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{yh}$ olur. A, $\mathcal{M}_3$ ün bir otomorfizmi olduğundan örtendir, dolayısıyla $A\left(\frac{z}{th}\right)=\frac{x}{yh}$ olacak şekilde, $\mathcal{M}_3$ ün bir $\frac{z}{th}$ köşesi vardır. $(z,t)=1$ olduğundan $\frac{z}{t}$, $\mathcal{F}$ nin bir köşesidir ve bunun $f^{-1}Af$ altındaki görüntüsü $f^{-1}Af\left(\frac{z}{t}\right)=f^{-1}A\left(\frac{z}{th}\right)=f^{-1}\left(\frac{x}{yh}\right)=\frac{x}{y}$ olur. Dolayısıyla $f^{-1}Af$ örtendir. Son olarak $\frac{x_1}{y_1}$, $\frac{x_2}{y_2}$, $\mathcal{F}$ nin bir e kenarı ile bağlı iki köşesi olsun. Bu durumda $x_1y_2-x_2y_1=\pm1$ yazılır. Bu köşelerin f altındaki görüntüleri $f\left(\frac{x_1}{y_1}\right)=\frac{x_1}{y_1h}$ ve $f\left(\frac{x_2}{y_2}\right)=\frac{x_2}{y_2h}$ dir. Ayrıca $\frac{x_1}{y_1h},\frac{x_2}{y_2h}$ köşelerinin A altındaki görüntüleri $A\left(\frac{x_1}{y_1h}\right)=\frac{z_1}{t_1h}$ ve $A\left(\frac{x_2}{y_2}\right)=\frac{z_2}{t_2h}$ olsun. Burada $x_1y_2-x_2y_1=\pm1$ olduğundan $\frac{x_1}{y_1h},\frac{x_2}{y_2h}$ köşeleri, $\mathcal{M}_3$ te bir e' kenarı ile bağlıdır. A, $\mathcal{M}_3$ ün bir otomorfizmi olduğundan $\frac{x_1}{y_1h}$, $\frac{x_2}{y_2h}$ köşelerinin görüntüleri olan $\frac{z_1}{t_1h}$ ve $\frac{z_2}{t_2h}$ köşeleri, $\mathcal{M}_3$ te bir e'' kenarı ile bağlıdır. Buradan $z_1t_2-z_2t_1=\pm1$ dir. Şimdi $\frac{x_1}{y_1},\frac{x_2}{y_2}$ köşelerinin $f^{-1}Af$ altındaki görüntülerine bakalım:

$$f^{-1}Af\left(\frac{x_1}{y_1}\right)=f^{-1}A\left(\frac{x_1}{y_1h}\right)=f^{-1}\left(\frac{z_1}{t_1h}\right)=\frac{z_1}{t_1}$$

$$f^{-1}Af\left(\frac{x_2}{y_2}\right)=f^{-1}A\left(\frac{x_2}{y_2h}\right)=f^{-1}\left(\frac{z_2}{t_2h}\right)=\frac{z_2}{t_2}$$

elde edilir. $z_1t_2-z_2t_1=\pm 1$ olduğundan $f^{-1}Af\left(\frac{x_1}{y_1}\right)$ ve $f^{-1}Af\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$ köşeleri, $\mathcal{F}$ de bir e''' kenarı ile bağlıdır. O halde $f^{-1}Af$, $\mathcal{F}$ nin bir otomorfizmidir, yani $f^{-1}Af\in Aut\mathcal{F}=\Gamma$ elde edilir. Buradan $f^{-1}Af\in\Gamma$ olup, $A\in f\Gamma f^{-1}=\Gamma_B(N)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

□

(Singerman, 1988) çalışmasında gösterdi ki bir yüzey üzerindeki herhangi bir üçgen figür; evrensel figürün, $\Gamma(2,\infty,3)$ grubunun bir alt grubuna bölümüdür ve her düzgün üçgen figür evrensel figürün, $\Gamma(2,\infty,3)$ grubunun bir normal alt grubuna bölümüdür. Biz burada $\Gamma(2,\infty,3)$ üçgen grubu olarak $\Gamma_B(N)$ grubunu kullanacağız ve $\mathcal{M}_3^0(N)=\mathcal{M}_3/\Gamma_0(N)$ figürlerini inceleyeceğiz.

Tanım 2.3.10. $\mathcal{M}_3^0(N)$ figürü, $\mathcal{M}_3/\Gamma_0(N)$ üçgen figürü ile tanımlanır.

$\mathcal{M}_3^0(N)$ figürü için öncelikle $\mathcal{M}_3^0(N)$ nin köşelerini tanımlayacağız. Tanımdan dolayı figürün köşeleri $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(N)$ dir. Ayrıca, $\Gamma_0(N)\lhd\Gamma_B(N)$ ve $\Gamma_B(N)$, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif hareket ettiğinden $\Gamma_B(N)$, $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(N)$ köşelerinin kümesi üzerinde transitif hareket eder (Lemma 2.1.3.). Burada $[x]_{\Gamma_0(N)}$, x in $\Gamma_0(N)$-yörüngesi olarak tanımlanır ve $A\in\Gamma_B(N)$ elemanı, $A[x]_{\Gamma_0(N)}=[Ax]_{\Gamma_0(N)}$ olarak hareket eder.

Teorem 2.3.11. (Orbit-Stabilizer Teoremi, (Fraleigh, 1969)) G, bir X kümesi üzerinde hareket eden bir grup, S_x , x in G deki sabitleyeni ve $[x]_G$ de x in G yörüngesi olmak üzere

$$|G:S_x|=|[x]_G|$$

dir.

Lemma 2.3.12. G, X kümesi üzerinde transitif olarak hareket eden bir grup ve $H \lhd G$ olsun. $S_{[x_0]}$, $[x_0]_H$ ın G deki sabitleyeni olmak üzere $S_{[x_0]}$ ın G deki kosetleri ile X/H arasında bire-bir bir eşleme vardır.

İspat: Öncelikle $G \times X/H \to X/H$ hareketi ve $[x_0]_H$ yörüngesini ele alalım. Orbit-Stabilizer teoreminden

$$\left|G{:}\,S_{[x_0]}\right| = |[[x_0]_H]_G|$$

elde edilir. $[[x_0]_H]_G$ ile X/H arasında birebir bir eşleme olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Bunun için $f{:}\,[[x_0]_H]_G \longrightarrow X/H$ şeklinde tanımlı f dönüşümü $A \in G$ için $f(A[x_0]_H) = [Ax_0]_H$ şeklinde alınsın. $\forall A_1[x_0]_H, A_2[x_0]_H \in [[x_0]_H]_G$ için

$$f(A_1[x_0]_H) = f(A_2[x_0]_H)$$

olsun. f nin tanımından $[A_1x_0]_H = [A_2x_0]_H$ elde edilir. Burada $A_1, A_2 \in G$ olduğu ve G nin X/H üzerindeki hareketi dikkate alınırsa $A_1[x_0]_H = A_2[x_0]_H$ elde edilir. O halde f birebirdir. Diğer yandan $\forall [x]_H \in X/H$ alalım. G, X üzerinde transitif hareket ettiğinden $x_0 \in X$ için $Ax_0 = x$ olacak şekilde bir $A \in G$ vardır. Dolayısıyla $f(A[x_0]_H) = [Ax_0]_H = [x]_H$ olacak şekilde bir $A[x_0] \in [[x_0]_H]_G$ eleman var olduğundan f örtendir.

Sonuç olarak $|[[x_0]_H]_G|$ ile X/G arasında birebir bir eşleme ve $\left|G{:}\,S_{[x_0]}\right| = |[[x_0]_H]_G|$ olduğundan ispat tamamlanmış olur.

□

Lemma 2.3.13. $\infty = \frac{1}{0}$ un $\Gamma_B(N)$ deki sabitleyeni $S_\infty = \left\{\begin{pmatrix} 1 & u/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{Z}\right\}$ dir.

İspat: ∞ u sabitleyen $\Gamma_B(N)$ nin elemanı için

$$\begin{pmatrix} a & b/h \\ ch & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} a \\ ch \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan $a = 1$ ve $c = 0$ dır. Determinantı $ad - bc = 1$ den $d = 1$ elde edilir ve ∞ un $\Gamma_B(N)$ deki sabitleyeni S_∞ da içerilir. Tersine, $\begin{pmatrix} 1 & u/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_\infty$ için

$$\begin{pmatrix} 1 & u/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

□

Lemma 2.3.14. $[\infty]_{\Gamma_0(N)}$ un $\Gamma_B(N)$ deki kümesel sabitleyeni $S_{[\infty]}$ olsun. Bu durumda

$$S_{[\infty]} = S_\infty \Gamma_0(N)$$

dir.

İspat: A, $S_{[\infty]}$ un bir elemanı olsun. Buradan $A[\infty]_{\Gamma_0(N)} = [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ yazılır. Diğer yandan

$$A[\infty]_{\Gamma_0(N)} = \{AB\infty : B \in \Gamma_0(N)\}$$

olup, $C = AB \in A\Gamma_0(N)$ olduğu dikkate alınırsa

$$A[\infty]_{\Gamma_0(N)} = \{AB\infty : B \in \Gamma_0(N)\} = \{C\infty : C \in A\Gamma_0(N)\} = [\infty]_{A\Gamma_0(N)}$$

elde edilir. Yani $[\infty]_{\Gamma_0(\mathrm{N})} = \mathrm{A}[\infty]_{\Gamma_0(\mathrm{N})} = [\infty]_{\mathrm{A}\Gamma_0(\mathrm{N})}$ dir. Ayrıca $\Gamma_0(N) \lhd \Gamma_B(N)$ olduğundan $\mathrm{A}\Gamma_0(N) = \Gamma_0(N)A$ dır. Dolayısıyla $[\infty]_{\Gamma_0(N)A} = [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ dir. Bunun anlamı ise $A_1, A_2 \in \Gamma_0(N)$ elemanları vardır öyle ki $A_1A\infty = A_2\infty$ yazılır. Buradan $A_2^{-1}A_1A\infty = \infty$ elde edilir. Yani, $C_1 = A_2^{-1}A_1A \in S_\infty$ elde edilir. O halde $A_1^{-1}A_2C_1 = A$ olup, $A_1^{-1}A_2 \in$

$\Gamma_0(N)$ ve $C_1 \in S_\infty$ olduğundan $A \in \Gamma_0(N)S_\infty$ elde edilir. Yine $\Gamma_0(N) \lhd \Gamma_B(N)$ olduğundan $\Gamma_0(N)S_\infty = S_\infty\Gamma_0(N)$ olup $A \in \mathrm{S}_\infty\Gamma_0(N)$ bulunur. Yani $S_{[\infty]} \subset \mathrm{S}_\infty\Gamma_0(N)$ dır.

Ters kapsama için, $C \in S_\infty\Gamma_0(N)$ olsun. C, $C = AB$ formundadır öyle ki $A \in S_\infty$ ve $B \in \Gamma_0(N)$ dir. Böylece,

$$C[\infty]_{\Gamma_0(N)} = AB[\infty]_{\Gamma_0(N)} = A[\infty]_{\Gamma_0(N)} = [A\infty]_{\Gamma_0(N)} = [\infty]_{\Gamma_0(N)}$$

eşitliği elde edilir. Yani, C, $[\infty]_{\Gamma_0(N)}$ u sabitler. Dolayısıyla $C \in S_{[\infty]}$ dir. Yani $\mathrm{S}_\infty\Gamma_0(N) \subset S_{[\infty]}$ olup, ispat tamamlanır.

□

Lemma 2.3.15. $S_\infty\Gamma_0(N) = \Gamma_C^0(N)$ dir.

İspat: N sayısı, $\beta = 0, 2$ ve $\alpha = 0, 2, 4, 6$ olmak üzere $N = 2^\alpha 3^\beta$ şeklinde olduğundan $\Gamma_C^0(N)$ grubunu aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\Gamma_C^0(N) = \left\{\begin{pmatrix} a & b/h \\ ch^2 & d \end{pmatrix} : ad - bch = 1\right\}.$$

$S_\infty = \left\{\begin{pmatrix} 1 & u/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{Z}\right\}$ tanımı dikkate alınırsa $S_\infty \leq \Gamma_C^0(N)$ yazılır. Ayrıca $\Gamma_0(N) \leq \Gamma_C^0(N)$ olduğundan $S_\infty\Gamma_0(N) \leq \Gamma_C^0(N)$ elde edilir. Tersine, $A \in \Gamma_C^0(N)$ alalım, $\Gamma_C^0(N)$ tanımından

$$A = \begin{pmatrix} a & b/h \\ ch^2 & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bch = 1$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$\begin{pmatrix} 1 & ab/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a - abch & -b^2c \\ ch^2 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & abd/h - b^2c \\ ch^2 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b(ad - bch)/h \\ ch^2 & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b/h \\ ch^2 & d \end{pmatrix} = A$$

elde edilir. Burada

$$\begin{pmatrix} a-abch & -b^2c \\ ch^2 & d \end{pmatrix}$$

matrisini ele alalım. $h^2 = N$ olduğundan $\begin{pmatrix} a-abch & -b^2c \\ ch^2 & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ dir. Aynı zamanda S_∞ tanımı dikkate alınırsa $\begin{pmatrix} 1 & ab/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_\infty$ elde edilir. O halde keyfi $A \in \Gamma_C^0(N)$ elemanı, biri $\Gamma_0(N)$ nin diğeri de S_∞ nin elemanı olan iki matrisin çarpımı şeklinde yazılabilir. Yani $A \in S_\infty\Gamma_0(N)$ olur. Dolayısıyla $\Gamma_C^0(N) \leq S_\infty\Gamma_0(N)$ olduğu görülür. Bu ise ispatı tamamlar.

□

Şimdi $\mathcal{M}_3^0(N)$ figürünün köşelerini belirleyen teoremi vereceğiz:

Teorem 2.3.16. $\Gamma_C^0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki sol kosetleri ile $\mathcal{M}_3^0(N)$ nin köşeleri arasında birebir bir eşleme vardır.

İspat: $\mathcal{M}_3^0(N)$ için $\Gamma_B(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(N)$ üzerindeki hareketi dikkate alınacağından, $\mathcal{M}_3^0(N)$ nin köşelerinin kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(N)$ ile karakterize edilir. $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(N)$ köşe kümesini birebir eşleyeceğimiz bir küme bulmak için Lemma 2.3.12. i kullanacağız. Bu lemmada $G = \Gamma_B(N)$, $H = \Gamma_0(N)$, $X = \widehat{\mathbb{Q}}$ ve $x_0 = \infty$ alalım, burada $\Gamma_B(N)$, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif hareket ettiğinden lemmanın şartları sağlanır. Şimdi $[\infty]_{\Gamma_0(N)}$ nin kümesel sabitleyeni olan $S_{[\infty]}$ kümesi bulunursa köşe kümesinin birebir eşleştiği küme elde edilmiş olur. Lemma 2.3.14. kullanılırsa $S_{[\infty]} = S_\infty\Gamma_0(N)$ bulunur. Ayrıca Lemma 2.3.15. kullanılırsa ∞ un $\Gamma_0(N)$-yörüngesinin sabitleyeninin $\Gamma_C^0(N)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(N)$ ile $\Gamma_C^0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki sol kosetleri arasında birebir bir eşleme vardır.

□

Bu teoremin anlamı,

$$|\Gamma_B(N) : \Gamma_C^0(N)| = 2^\rho h\tau$$

indeksinin bize köşelerin sayısını verdiğidir.

Şimdi, köşeleri bulmak için aşağıdaki önermeyi vereceğiz.

Önerme 2.3.17. $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1/h \\ c_1 h & d_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2/h \\ c_2 h & d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ olsun. Bu durumda A ve B, $\Gamma_C^0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki aynı sol kosetlerini belirler ancak ve ancak $\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ $mod\ h$ dır.

İspat: $A\Gamma_C^0(N)$ ve $B\Gamma_C^0(N)$ kosetlerini ele alalım. Kabul edelim ki $A\Gamma_C^0(N) = B\Gamma_C^0(N)$ olsun. $A\Gamma_C^0(N) = B\Gamma_C^0(N)$ ancak ve ancak $A^{-1}B \in \Gamma_C^0(N)$ dir. Buradan

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} d_1 & -b_1/h \\ -c_1 h & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2/h \\ c_2 h & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 d_1 - b_1 c_2 & (b_2 d_1 - b_1 d_2)/h \\ (a_1 c_2 - a_2 c_1)h & a_2 d_1 - b_1 c_2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki matrisin $\Gamma_C^0(N)$ de olması için gerek ve yeter şart $a_1 c_2 - a_2 c_1 \equiv 0\ mod\ h$ olmasıdır. Buradan $\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} mod\ h$ elde edilir.

□

Yukarıdaki önermeden, $\begin{pmatrix} a & b/h \\ ch & d \end{pmatrix}$ matrisi tarafından belirlenen sol koseti, (a, ch) satır vektörü ile ifade edeceğiz. Böylece köşeleri, $(a, c, h) = 1$ olmak üzere (a, ch) satır vektörü ile ifade edeceğiz. (a, ch) ve $(-a, (-c)h)$ vektörleri aynı sol koseti belirlediği için, köşeler kümesini;

$$\{(a, ch) :\ a, c \in \mathbb{Z}_h, (a, c, h) = 1\}/\sim$$

şeklinde ifade edeceğiz ki burada $(a, ch) \sim (h - a, (h - c)h)$ dir.

Şimdi $\mathcal{M}_3^0(N)$ nin oklarını, kenarlarını ve yüzlerini analitik olarak araştıracağız.

Bir ok, yönlendirilmiş bir kenar olarak ifade edilebilir. $\mathcal{M}_3^0(N)$ nin otomorfizm grubu $\Gamma_B(N)/\Gamma_0(N)$ dir. Diğer yandan $\Gamma_B(N)$, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif hareket ettiğinden $\mathcal{M}_3$ ün okları üzerinde de transitif hareket eder. Böylece $\Gamma_B(N)/\Gamma_0(N)$, $\mathcal{M}_3^0(N)$ nin okları üzerinde transitif hareket eder. (Jones ve Singerman, 1978) çalışmasının bir sonucu olarak, eğer figürün otomorfizma grubu onun okları üzerinde transitif hareket ediyorsa figür düzgündür denir. Dolayısıyla buradan $\mathcal{M}_3^0(N)$ bir düzgün figürdür diyebiliriz.

Teorem 2.3.18. $\Gamma_0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki kosetleri ile $\mathcal{M}_3^0(N)$ okları arasında birebir bir eşleme vardır.

İspat: Teoremin ispatı için yine Lemma 2.3.12. i uygulayacağız. Dolayısıyla öncelikle bir ok seçelim ve sonrasında onun sabitleyenini bulalım. $[0]_{\Gamma_0(N)} \longrightarrow [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ okunu seçelim. Eğer $A \in \Gamma_B(N)$ elemanı bu oku sabitlerse, ilk olarak $[\infty]_{\Gamma_0(N)}$ yi sabitlemelidir. Lemma 2.3.14. ve Lemma 2.3.15. den $A \in \Gamma_C^0(N)$ bulunur. Diğer yandan A, $[0]_{\Gamma_0(N)}$ yi de sabitlemelidir. Yani $A[0]_{\Gamma_0(N)} = [0]_{\Gamma_0(N)}$ olmalıdır. Burada her $B \in \Gamma_0(N)$ için $AB0 \in [0]_{\Gamma_0(N)}$ elde edilir. Bunun anlamı ise $AB \in \Gamma_0(N)$ olmasıdır. Böylece keyfi $B = \begin{pmatrix} x & y \\ zN & t \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ için $N = h^2$ olduğu dikkate alınırsa,

$$AB = \begin{pmatrix} a & b/h \\ ch & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ zN & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bzh & ay + bt/h \\ chx + dzN & cyh + dt \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada $A \in \Gamma_C^0(N)$ olduğundan bir k tamsayısı için $c = kh$ dır. Dolayısıyla $N = h^2$ olduğu da dikkate alınırsa,

$$AB = \begin{pmatrix} ax + bzh & ay + bt/h \\ kh^2x + dzN & cyh + dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bzh & ay + bt/h \\ (kx + dz)N & cyh + dt \end{pmatrix}$$

elde edilir. Yukardaki matris $\Gamma_0(N)$ de olmalıdır. Haliyle matrisin $ay + bt/h$ girdisinin bir tam sayı olması gerekir. O halde t keyfi olduğundan $h|b$ olmalıdır. Bir l tam sayısı için $b = lh$ olsun. Buradan

$$A = \begin{pmatrix} a & b/h \\ ch & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & l \\ kh^2 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & l \\ kN & d \end{pmatrix}$$

olup $A \in \Gamma_0(N)$ elde edilir. Tersine, $T = \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ elemanını alalım ve bu elemanın $[0]_{\Gamma_0(N)} \longrightarrow [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ oku üzerindeki etkisini inceleyelim. $T \in \Gamma_0(N)$ olduğundan $T[\infty]_{\Gamma_0(N)} = [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ ve $T[0]_{\Gamma_0(N)} = [0]_{\Gamma_0(\mathrm{N})}$ olduğu görülür. Böylece T, $[0]_{\Gamma_0(N)} \longrightarrow [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ okunu sabitler. Dolayısıyla $\Gamma_0(N)$, $[0]_{\Gamma_0(N)} \longrightarrow [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ okunun sabitleyenidir. Sonuç olarak Lemma 2.3.11. den $\Gamma_0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki sol kosetleri ile $\mathcal{M}_3^0(N)$ nin okları arasında birebir bir eşleme vardır.

□

Yukarıdaki teoremden okların sayısının $|\Gamma_B(N){:}\,\Gamma_0(N)|$ olduğuna ulaşılır. Sonuç olarak, (a, ch) ve (b, dh), $\mathcal{M}_3^0(N)$ nin iki köşesi olsun. Böylece bu iki köşe, $ad - bc \equiv \pm 1 \bmod h$ ise bir kenar ile birleşir ki burada $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_h$ dır. Bu köşeler, $(a + b, (c + d)h)$ ve $(a - b, (c - d)h)$ köşeleriyle birlikte üçgensel yüz oluşturur. Figürün düzgün olmasından, kenarların sayısı

$$\frac{|\Gamma_B(N){:}\,\Gamma_0(N)|}{2}$$

dır ve figürün üçgensel olmasından dolayı yüzlerin sayısı ise

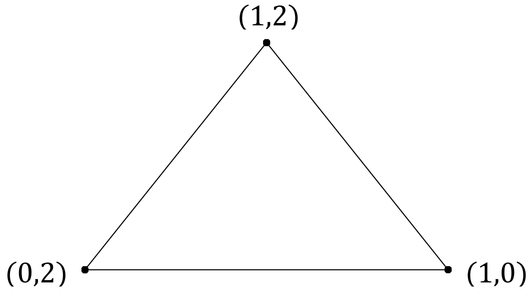
$$\frac{|\Gamma_B(N){:}\,\Gamma_0(N)|}{3}$$

dir. $\mathcal{U}/\Gamma_0(N)$ nin cinsi $2 - 2g = V - E + F$ Euler karakteristiği kullanılarak bulunabilir.

2.3.1.1. Örnekler

$N = 4$ için, $h = 2$ dir. Bu durumda $\mathcal{U}/\Gamma_0(4)$ yüzeyi üzerinde yatan $\mathcal{M}_3^0(4)$ figürü elde edilir (Şekil 1). Bu figür 3 köşe, 3 kenar, 2 yüze sahiptir ve cinsi sıfırdır. $\mathcal{M}_3^0(4)$ ün köşeleri aşağıdaki biçimdedir,

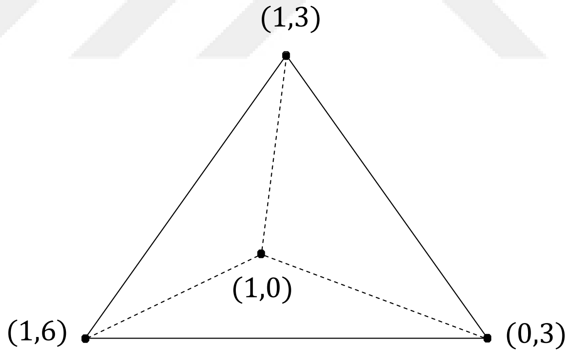
$$(0,2), (1,0), (1,2).$$



Şekil 5. $\mathcal{M}_3^0(4)$: Üçgen

$N = 9$ için, $h = 3$ dir. Bu durumda $\mathcal{U}/\Gamma_0(9)$ yüzeyi üzerinde yatan $\mathcal{M}_3^0(9)$ figürü elde edilir (Şekil 2). Bu figür 4 köşe, 6 kenar, 4 yüze sahiptir ve cinsi sıfırdır. $\mathcal{M}_3^0(9)$ ün köşeleri aşağıdaki biçimdedir,

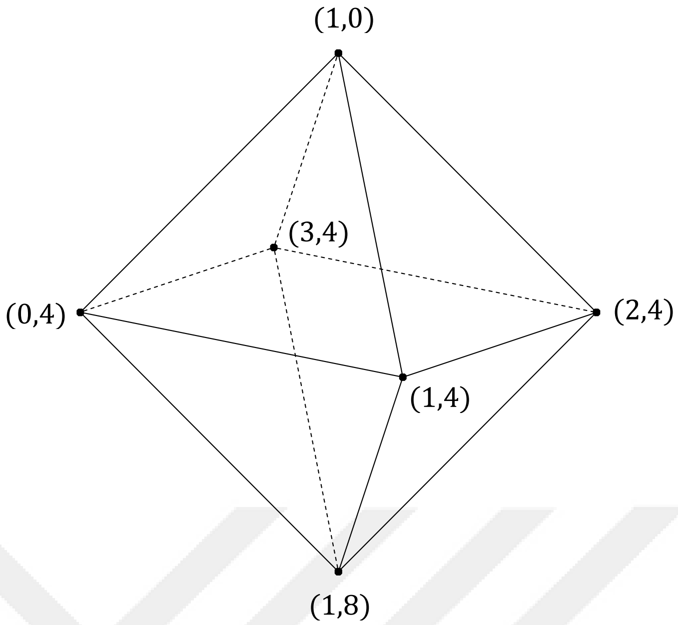
$$(0,3), (1,0), (1,3), (1,6).$$



Şekil 6. $\mathcal{M}_3^0(9)$:Tetrahedron

$N = 16$ için, $h = 4$ dir. Bu durumda $\mathcal{U}/\Gamma_0(16)$ yüzeyi üzerinde yatan $\mathcal{M}_3^0(16)$ figürü elde edilir (Şekil 3). Bu figür 6 köşe, 12 kenar, 8yüze sahiptir ve cinsi sıfırdır. $\mathcal{M}_3^0(16)$ ün köşeleri aşağıdaki biçimdedir,

$$(0,4), (1,0), (1,4), (1,8), (3,4), (2,4).$$



Şekil 7. $\mathcal{M}_3^0(16)$:Octahedron

2.3.1.2. Üçgen Figürler Tablosu

Bu alt bölümde, yukarıda verdiğimiz teoriden elde edilen verilerle oluşturulan bir tablo vereceğiz. $N = 2^{\alpha}3^{\beta} > 1$ $\beta = 0, 2$ ve $\alpha = 0, 2, 4, 6$ şartıyla verilen tüm N değerleri için aşağıdaki veriler elde edilir:

Oklar : $D = |\Gamma_B(N): \Gamma_0(N)|$

Kenarlar : $E = \frac{|\Gamma_B(N):\Gamma_0(N)|}{2}$

Köşeler : $V = |\Gamma_B(N): \Gamma_C^0(N)|$

Yüzler : $F = \frac{|\Gamma_B(N):\Gamma_0(N)|}{3}$

Cins : $2 - 2g = V - E + F$

Tablo 2. N değerleri ve üçgen figürler

N	***D***	***E***	***V***	***F***	***g***	**Figür**
4	6	3	3	2	0	Üçgen
9	12	6	4	4	0	Tetrahedron
16	24	12	6	8	0	Oktahedron
36	72	36	12	24	1	{3,6}
64	96	48	12	32	3	Dual Dyck Fg.
144	288	144	24	96	13	{3,12}
576	1152	576	48	384	73	{3,24}

2.3.2. Dörtgen Figürler

Bu bölüm boyunca N sayısı, $\beta = 0, 2$ ve $\alpha = 1, 3, 5, 7$ olmak üzere $N = 2^{\alpha}3^{\beta} > 2$ şeklinde bir doğal sayıyı ifade edecektir. N nin bu değerleri için, Tablo 2.3.1 den $N = 2h^2$ ve $e = 1, 2$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\Gamma_B(N)$ grubu, aşağıdaki matrislere karşılık gelen dönüşümlerden oluşur:

$$(I)\ \begin{pmatrix} a & b/h \\ 2ch & d \end{pmatrix},\ ad - 2bc = 1,$$

$$(II)\ \begin{pmatrix} 2a & b/h \\ 2ch & 2d \end{pmatrix},\ 4ad - 2bc = 2\ \Rightarrow 2ad - bc = 1.$$

Burada h, $h^2|N$ şartını sağlayan, 24 ün en büyük bölenidir. $\Gamma_B(N)$ nin (I) tipli elemanlarına çift elemanlar, (II) tipli elemanlarına da tek elemanlar adını vereceğiz.

Önerme 2.3.19. $\Gamma_B(N)$ nin çift elemanlarının oluşturduğu küme, 2 indeksli bir alt gruptur.

İspat. Çift elemanların kümesini $\Gamma_B^+(N)$ ile ifade edelim. $\Gamma_B^+(N) \leq \Gamma_B(N)$ olduğu açık olduğundan indeksin 2 olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için, keyfi

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2a_1 & b_1/h \\ 2c_1h & 2d_1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2a_2 & b_2/h \\ 2c_2h & 2d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$$

elemanlarını alalım. Buradan,

$$A_2^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 2d_2 & -b_2/h \\ -2c_2h & 2a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a_1 & b_1/h \\ 2c_1h & 2d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_1d_2 - 2c_1b_2 & 2(b_1d_2 - b_2d_1)/h \\ 4(a_2c_1 - c_2a_1)h & 4d_1a_2 - 2b_1c_2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu dönüşümün determinantı 4 tür. Dolayısıyla her bir terim 2 ile bölünürse, determinantı 1 olan

$$A_2^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 2a_1d_2 - c_1b_2 & (b_1d_2 - b_2d_1)/h \\ 2(a_2c_1 - c_2a_1)h & 2d_1a_2 - b_1c_2 \end{pmatrix}.$$

dönüşümü elde edilir. Bu ise bir çift elemandır, yani $A_2^{-1}A_1 \in \Gamma_B^+(N)$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

□

Bu değerler için $\Gamma_C^0(N)$ grubu, aşağıdaki matrislere karşılık gelen dönüşümlerden oluşur:

$$\begin{pmatrix} a & b/h \\ 2ch^2 & d \end{pmatrix}, \qquad ad - 2bch = 1.$$

Öncelikle N nin bu değerleri için $\Gamma_B(N)$ nin transitif hareket ettiği kümeyi ifade edelim:

Teorem 2.3.20. $\Gamma_B(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

İspat: $\infty = \frac{1}{0} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanının yörüngesinin $\widehat{\mathbb{Q}}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olsun.

1.Durum: Eğer $(h, y) = 1$ ise;

a) y çift olsun. Bu durumda $y = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$ diyelim. $(x, y) = 1$ olduğundan, $(hx, y) = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $ahx - by = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Bu durumda $\begin{pmatrix} hx & b/h \\ hy & a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 1 dir ve $y = 2k$ yerine yazılırsa $\begin{pmatrix} hx & b/h \\ hy & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hx & b/h \\ 2hk & a \end{pmatrix}$ olup $\Gamma_B(N)$ nin tanımı göz önüne alınırsa $\begin{pmatrix} hx & b/h \\ hy & a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ olduğu elde edilir. Diğer yandan

.

$$\begin{pmatrix} hx & b/h \\ hy & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bunun anlamı keyfi $\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanı alındığında bu eleman sonsuzun yörüngesindedir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

b) y tek olsun. $(x, y) = 1$ olduğundan, $(hx, y) = 1$ elde edilir. Ayrıca y tek olduğundan $(2hx, y) = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $2ahx - by = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Bu durumda $\begin{pmatrix} 2hx & b/h \\ 2hy & 2a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 2 dir ve $\Gamma_B(N)$ nin tanımı göz önüne alınırsa $\begin{pmatrix} 2hx & b/h \\ 2hy & 2a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ olduğu elde edilir. Diğer yandan

.

$$\begin{pmatrix} 2hx & b/h \\ 2hy & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bunun anlamı keyfi $\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanı alındığında bu eleman sonsuzun yörüngesindedir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

2.Durum: $(h, y) = h$ olsun. $h|y$ olup $y = ht$ olacak şekilde bir t tam sayısı mevcuttur.

a) y tek olsun. $(x, y) = 1$ ve y tek olduğundan $(2x, y) = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $2ax - by = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Bu durumda $\begin{pmatrix} 2x & b \\ 2y & 2a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 2 dir ve bu matrise $\begin{pmatrix} 2x & b \\ 2y & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & bh/h \\ 2th & 2a \end{pmatrix}$ gözüyle bakılırsa, $\Gamma_B(N)$ nin tanımı dikkate alındığında $\begin{pmatrix} 2x & b \\ 2y & 2a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{pmatrix} 2x & b \\ 2y & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

b) y çift olsun. $y = ht$ şeklindeydi, burada t nin durumlarını incelemeliyiz:

b1) t çift olsun. Bu durumda $t = 2k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ sayısı vardır. Bunu $y = ht$ de yerine yazarsak $y = 2hk$ elde edilir. $(x, y) = 1$ olduğundan $ax - by = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} x & b \\ y & a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 1 dir ve bu matrise $\begin{pmatrix} x & b \\ y & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & bh/h \\ 2hk & a \end{pmatrix}$ gözüyle bakılırsa, $\Gamma_B(N)$ nin tanımı dikkate alındığında $\begin{pmatrix} x & b \\ y & a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{pmatrix} x & b \\ y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

b2) t tek olsun. $(x, y) = 1$ olduğundan, $(x, t) = 1$ dir. Ayrıca t tek olduğundan $(2x, t) = 1$ elde edilir. Buradan $2ax - bt = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} 2x & b/h \\ 2y & 2a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 2 dir ve bu matrise $\begin{pmatrix} 2x & b/h \\ 2y & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & b/h \\ 2ht & 2a \end{pmatrix}$ gözüyle bakılırsa, $\Gamma_B(N)$ nin tanımı dikkate alındığında $\begin{pmatrix} 2x & b/h \\ 2y & 2a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{pmatrix} 2x & b/h \\ 2y & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

3.Durum: $k \neq 1$ ve $k \neq h$ olmak üzere $(h, y) = k$ olsun. Bu takdirde $h = km$ ve $y = kn$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur ve $(n, m) = 1$ olur.

a) y tek olsun. $(m, y) = 1$ ve $(x, y) = 1$ olduğundan $(mx, y) = 1$ dir. Ayrıca y tek olduğundan $(2mx, y) = 1$ dir. Buradan $2amx - by = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} 2mx & b/m \\ 2my & 2a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 2 dir ve bu matrise $\begin{pmatrix} 2mx & b/m \\ 2my & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2mx & bk/km \\ 2mkn & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2mx & bk/h \\ 2nh & 2a \end{pmatrix}$ gözüyle bakılırsa, $\Gamma_B(N)$ nin tanımı dikkate alındığında $\begin{pmatrix} 2mx & b/m \\ 2my & 2a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{pmatrix} 2mx & b/m \\ 2my & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

b) y çift olsun. $y = kn$ olduğunu biliyoruz. n nin durumlarını inceleyelim:

b1) n çift olsun. $n = 2t$ olacak şekilde $t \in \mathbb{Z}$ sayısı mevcuttur. Dolayısıyla $y = 2kt$ yazılır. y çift ve $(x, y) = 1$ olduğundan x tektir. Diğer yandan $(m, n) = 1$ ve n çift olduğundan m tektir. Ayrıca $(x, y) = 1$ olduğundan $(x, t) = 1$ dir. x tek olduğundan $(x, 2t) = 1$ dir. $(m, n) = 1$ olduğundan $(m, 2t) = 1$ dir. Buradan $(mx, 2t) = 1$ dir.

Buradan $amx - 2bt = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} mx & b/h \\ 2th & a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 1 dir ve $\Gamma_B(N)$ nin tanımı dikkate alındığında $\begin{pmatrix} mx & b/h \\ 2th & a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{pmatrix} mx & b/h \\ 2th & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

b2) n tek olsun. $(x, y) = 1$ olduğundan $(x, n) = 1$ dir. n tek olduğundan $(2x, n) = 1$ elde edilir. Ayrıca $(m, n) = 1$ olduğundan $(2xm, n) = 1$ dir. Buradan $2amx - bn = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} 2mx & b/h \\ 2nh & 2a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 2 dir ve $\Gamma_B(N)$ nin tanımı dikkate alındığında $\begin{pmatrix} 2mx & b/h \\ 2nh & 2a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{pmatrix} 2mx & b/h \\ 2nh & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

□

Şimdi $\mathcal{M}_4$ ile sembolize edeceğimiz evrensel figürü inşa edeceğiz. Öncelikle $\mathcal{M}_4$ ün köşelerini elde edelim. $\mathcal{M}_4$, sanal eksenin $\Gamma_B(N)$ altındaki görüntülerinden oluşur. Buradan 0 ve ∞ un $\mathcal{M}_4$ ün köşeleri olduğu açıktır. $0 = \frac{0}{1.h}$ ve $\infty = \frac{1}{2.0.h}$ şeklinde yazılabilir. Eğer $\Gamma_B(N)$ nin bir çift elemanı uygulanırsa, ∞ un yörüngesi, $(a, c) = 1$ ve a tek olan $\frac{a}{2ch}$ formundaki noktalardan oluşurken; 0 ın yörüngesi ise $(a, c) = 1$ olan ve c tek olan $\frac{a}{ch}$ formundaki noktalardan oluşur. Benzer şekilde $\Gamma_B(N)$ nin tek elemanı için de aynı formda noktalar elde edilir. Birinci tipteki köşelere çift köşeler, ikinci tipteki köşelere de tek köşeler adını vereceğiz.

Önerme 2.3.21. $\Gamma_B(N)$ nin çift elemanları, $\mathcal{M}_4$ ün çift köşelerinin kümesini ve tek köşelerinin kümesini korur.

İspat. $\begin{pmatrix} a & b/h \\ 2ch & d \end{pmatrix}$ çift elemanını alalım. $\frac{x}{2yh}$ bir çift köşe, $\frac{r}{sh}$ bir tek köşe olsun. Buradan

$$\begin{pmatrix} a & b/h \\ 2ch & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 2yh \end{pmatrix} = \frac{ax+2by}{2(cx+dy)h}$$

elde edilir. $\frac{x}{2yh}$ bir çift köşe olduğundan x tektir. Diğer yandan $ad-2bc=1$ determinantından a nın tek olduğu bulunur. Dolayısıyla $ax+2by$ tam sayısı tektir. Şimdi $(ax+2by, cx+dy)=1$ olduğunu gösterelim. x tek ve $(x,y)=1$ olduğundan $(x,2y)=1$ dir. $ad-2bc=1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} = \frac{ax+2by}{2(cx+dy)}$$

eşitliği kullanılırsa, $\big(ax+2by, 2(cx+dy)\big)=1$ olup, buradan da $(ax+2by, cx+dy)=1$ elde edilir. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} a & b/h \\ 2ch & d \end{pmatrix}$ dönüşümü çift köşeleri çift köşelere dönüştürür. Şimdi

$$\begin{pmatrix} a & b/h \\ 2ch & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ sh \end{pmatrix} = \frac{ar+bs}{(2cr+ds)h}$$

eşitliğini ele alalım. $\frac{r}{sh}$ bir tek köşe olduğundan s tektir. Diğer yandan $ad-2bc=1$ determinantından d nin tek olduğu bulunur. Dolayısıyla $2cr+ds$ tam sayısı tektir. Şimdi $(ar+bs, 2cr+ds)=1$ olduğunu gösterelim. $(r,s)=1$ ve $ad-2bc=1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \frac{ar+bs}{2cr+ds}$$

eşitliği kullanılırsa $(ar+bs, 2cr+ds)=1$ elde edilir. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} a & b/h \\ 2ch & d \end{pmatrix}$ dönüşümü tek köşeleri tek köşelere dönüştürür.

□

Önerme 2.3.22. $\Gamma_B(N)$ nin tek elemanları, $\mathcal{M}_4$ ün çift köşelerinin kümesi ile tek köşelerinin kümesini birbirine dönüştürür.

İspat. $\begin{pmatrix} 2a & b/h \\ 2ch & 2d \end{pmatrix}$ tek elemanını alalım. $\frac{x}{2yh}$ bir çift köşe, $\frac{r}{sh}$ ise bir tek köşe olsun. Buradan

$$\begin{pmatrix} 2a & b/h \\ 2ch & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 2yh \end{pmatrix} = \frac{2(ax+by)}{2(cx+2dy)h} = \frac{ax+by}{(cx+2dy)h}$$

elde edilir. $\frac{x}{2yh}$ bir çift köşe olduğundan x tektir. Diğer yandan $\begin{pmatrix} 2a & b/h \\ 2ch & 2d \end{pmatrix}$ elemanının determinantından $2ad-bc=1$ olup, c tektir. Dolayısıyla $cx+2dy$ tam sayısı tektir. Şimdi $(ax+by, cx+2dy)=1$ olduğunu gösterelim. $(x,y)=1$ ve $2ad-bc=1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{ax+by}{cx+2dy}$$

eşitliğinden $(ax+by, cx+2dy)=1$ olduğu bulunur. Sonuç olarak $\begin{pmatrix} 2a & b/h \\ 2ch & 2d \end{pmatrix}$ dönüşümü çift köşeleri tek köşelere dönüştürür.

$$\begin{pmatrix} 2a & b/h \\ 2ch & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ sh \end{pmatrix} = \frac{2ar+bs}{2(cr+ds)h}$$

eşitliğini ele alalım. $\frac{r}{sh}$ bir tek köşe olduğundan s tektir. Diğer yandan $\begin{pmatrix} 2a & b/h \\ 2ch & 2d \end{pmatrix}$ elemanının determinantından $2ad-bc=1$ olup, b tektir. Dolayısıyla $2ar+bs$ tamsayısı tektir. Şimdi $(2ar+bs, cr+ds)=1$ olduğunu gösterelim. $(r,s)=1$ ve $2ad-bc=1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \frac{2ar+bs}{cr+ds}$$

eşitliğinden $(2ar+bs, cr+ds) = 1$ olduğu bulunur. Sonuç olarak $\begin{pmatrix} 2a & b/h \\ 2ch & 2d \end{pmatrix}$ dönüşümü tek köşeleri çift köşelere dönüştürür.

□

Şimdi $\mathcal{M}_4$ ün kenarlarını ve dörtgenlerini karakterize edeceğiz. $\mathcal{M}_4$ ün kenarları 0 ile ∞ u bağlayan kenarın $\Gamma_B(N)$ altındaki görüntüleridir. Diğer yandan, tanım gereği, 0 $\mathcal{M}_4$ ün bir tek köşesi ve ∞ $\mathcal{M}_4$ ün bir çift köşesi olduğundan $\mathcal{M}_4$ ün kenarları bir tek ve bir çift köşeyi birbirine bağlar. Dolayısıyla $\frac{a}{2ch}$ köşesi $\frac{b}{dh}$ köşesi ile bağlıdır ancak ve ancak $ad-2bc=\pm1$ dir. $\mathcal{M}_4$ ün dörtgenleri ise; ∞, 0, $\frac{1}{2h}$, $\frac{1}{h}$ köşeli temel dörtgenin $\Gamma_B(N)$ altındaki görüntüleridir. Yani $\mathcal{M}_4$ ün dörtgenleri $\frac{a}{2ch}, \frac{b}{dh}, \frac{a+2b}{2(c+d)h}, \frac{a+b}{(2c+d)h}$ köşeleri ile karakterize edilir.

Tanım 2.3.23. $\mathcal{M}_4^0(N)$ figürü, $\mathcal{M}_4/\Gamma_0(N)$ dörtgen figürü ile tanımlanır.

$\mathcal{M}_4^0(N)$ figürü için öncelikle $\mathcal{M}_4^0(N)$ nin köşelerini tanımlayacağız.

Lemma 2.3.24. $\infty = \frac{1}{0}$ un $\Gamma_B(N)$ deki sabitleyeni $S_\infty = \left\{\begin{pmatrix} 1 & u/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{Z}\right\}$ dir.

İspat: $\Gamma_B(N)$ nin tek elemanları çift köşeleri korumadığından ve ∞ bir çift köşe olduğundan $\Gamma_B(N)$ nin tek elemanları ∞ u sabitleyemez. ∞ u sabitleyen $\Gamma_B(N)$ nin bir tek elemanı için

$$\begin{pmatrix} a & b/h \\ 2ch & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} a \\ 2ch \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan $a = 1$ ve $c = 0$ dır. Bu elemanın determinantı $ad - 2bc = 1$ olup, $d = 1$ elde edilir ve ∞ un $\Gamma_B(N)$ deki sabitleyeni, S_∞ da içerilir. Tersine, $\begin{pmatrix} 1 & u/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_\infty$ için

$$\begin{pmatrix} 1 & u/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

□

Lemma 2.3.25. $[\infty]_{\Gamma_0(N)}$ un $\Gamma_B(N)$ deki kümesel sabitleyeni $S_{[\infty]}$ olsun. Bu durumda

$$S_{[\infty]} = S_\infty \Gamma_0(N)$$

dir.

İspat: A, $S_{[\infty]}$ un bir elemanı olsun. Buradan $A[\infty]_{\Gamma_0(N)} = [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ yazılır. Diğer yandan

$$A[\infty]_{\Gamma_0(N)} = \{AB\infty : B \in \Gamma_0(N)\}$$

olup, $C = AB \in A\Gamma_0(N)$ olduğu dikkate alınırsa

$$A[\infty]_{\Gamma_0(N)} = \{AB\infty : B \in \Gamma_0(N)\} = \{C\infty : C \in A\Gamma_0(N)\} = [\infty]_{A\Gamma_0(N)}$$

elde edilir. Yani $[\infty]_{\Gamma_0(\mathrm{N})} = \mathrm{A}[\infty]_{\Gamma_0(\mathrm{N})} = [\infty]_{\mathrm{A}\Gamma_0(\mathrm{N})}$ dir. Ayrıca $\Gamma_0(N) \lhd \Gamma_B(N)$ olduğundan $\mathrm{A}\Gamma_0(N) = \Gamma_0(N)A$ dır. Dolayısıyla $[\infty]_{\Gamma_0(N)A} = [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ dir. Bunun anlamı ise $A_1, A_2 \in \Gamma_0(N)$ elemanları vardır öyle ki $A_1 A\infty = A_2\infty$ yazılır. Buradan $A_2^{-1} A_1 A\infty = \infty$ elde edilir. Yani, $C_1 = A_2^{-1} A_1 A \in S_\infty$ elde edilir. O halde $A_1^{-1} A_2 C_1 = A$ olup, $A_1^{-1} A_2 \in \Gamma_0(N)$ ve $C_1 \in S_\infty$ olduğundan $A \in \Gamma_0(N) S_\infty$ elde edilir. Yine $\Gamma_0(N) \lhd \Gamma_B(N)$ olduğundan $\Gamma_0(N) S_\infty = S_\infty \Gamma_0(N)$ olup $A \in \mathrm{S}_\infty \Gamma_0(N)$ bulunur. Yani $S_{[\infty]} \subset \mathrm{S}_\infty \Gamma_0(N)$ dır.

Ters kapsama için, $C \in S_\infty \Gamma_0(N)$ olsun. C, $C = AB$ formundadır öyle ki $A \in S_\infty$ ve $B \in \Gamma_0(N)$ dir. Böylece,

$$C[\infty]_{\Gamma_0(N)} = AB[\infty]_{\Gamma_0(N)} = A[\infty]_{\Gamma_0(N)} = [A\infty]_{\Gamma_0(N)} = [\infty]_{\Gamma_0(N)}$$

eşitliği elde edilir. Yani, C, $[\infty]_{\Gamma_0(N)}$ u sabitler. Dolayısıyla $C \in S_{[\infty]}$ dir. Yani $S_\infty \Gamma_0(N) \subset S_{[\infty]}$ olup, ispat tamamlanır.

□

Lemma 2.3.26. $S_\infty \Gamma_0(N) = \Gamma_C^0(N)$ dir.

İspat: N sayısı, $\beta = 0, 2$ ve $\alpha = 1, 3, 5, 7$ olmak üzere $N = 2^\alpha 3^\beta$ şeklinde olduğundan $\Gamma_C^0(N)$ grubunu aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\Gamma_C^0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b/h \\ 2ch^2 & d \end{pmatrix} : ad - 2bch = 1 \right\}.$$

$S_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{Z} \right\}$ tanımı dikkate alınırsa $S_\infty \leq \Gamma_C^0(N)$ yazılır. Ayrıca $\Gamma_0(N) \leq \Gamma_C^0(N)$ olduğundan $S_\infty \Gamma_0(N) \leq \Gamma_C^0(N)$ elde edilir. Tersine, $A \in \Gamma_C^0(N)$ alalım, $\Gamma_C^0(N)$ tanımından

$$A = \begin{pmatrix} a & b/h \\ 2ch^2 & d \end{pmatrix}, \qquad ad - 2bch = 1$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$\begin{pmatrix} 1 & ab/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - 2abch & -2b^2c \\ 2ch^2 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & abd/h - b^2c \\ 2ch^2 & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b(ad - 2bch)/h \\ 2ch^2 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b/h \\ 2ch^2 & d \end{pmatrix} = A$$

elde edilir. Burada

$$\begin{pmatrix} a-2abch & -2b^2c \\ 2ch^2 & d \end{pmatrix}$$

matrisini ele alalım. $2h^2 = N$ olduğundan $\begin{pmatrix} a-2abch & -2b^2c \\ 2ch^2 & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ dir. Aynı zamanda S_∞ sabitleyeni tanımı dikkate alınırsa $\begin{pmatrix} 1 & ab/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_\infty$ elde edilir. O halde keyfi $A \in \Gamma_C^0(N)$ elemanı, biri $\Gamma_0(N)$ nin diğeri de S_∞ nin elemanı olan iki matrisin çarpımı şeklinde yazılabilir. Yani $A \in S_\infty\Gamma_0(N)$ olur. Dolayısıyla $\Gamma_C^0(N) \leq S_\infty\Gamma_0(N)$ olduğu görülür. Bu ise ispatı tamamlar.

□

Şimdi $\mathcal{M}_4^0(N)$ figürünün köşelerini belirleyen teoremi vereceğiz:

Teorem 2.3.27. $\Gamma_C^0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki sol kosetleri ile $\mathcal{M}_4^0(N)$ nin köşeleri arasında birebir bir eşleme vardır.

İspat: $\mathcal{M}_3^0(N)$ için $\Gamma_B(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(N)$ üzerindeki hareketi dikkate alınacağından, $\mathcal{M}_3^0(N)$ nin köşelerinin kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(N)$ ile karakterize edilir. $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(N)$ köşe kümesini birebir eşleyeceğimiz bir küme bulmak için Lemma 2.3.12. yi kullanacağız. Bu lemmada $G = \Gamma_B(N)$, $H = \Gamma_0(N)$, $X = \widehat{\mathbb{Q}}$ ve $x_0 = \infty$ alalım, burada $\Gamma_B(N)$, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif hareket ettiğinden lemmanın şartları sağlanır. Şimdi $[\infty]_{\Gamma_0(N)}$ nin kümesel sabitleyeni olan $S_{[\infty]}$ kümesi bulunursa köşe kümesinin birebir eşleştiği küme elde edilmiş olur. Lemma 2.3.25. kullanılırsa $S_{[\infty]} = S_\infty\Gamma_0(N)$ bulunur. Ayrıca Lemma 2.3.26. kullanılırsa ∞ un $\Gamma_0(N)$-yörüngesinin sabitleyeninin $\Gamma_C^0(N)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(N)$ ile $\Gamma_C^0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki sol kosetleri arasında birebir bir eşleme vardır.

□

Bu teoremin anlamı,

$$|\Gamma_B(N) : \Gamma_C^0(N)| = 2^\rho h\tau$$

indeksi bize köşelerin sayısının verir.

Şimdi, köşeleri bulmak için aşağıdaki önermeleri vereceğiz.

Önerme 2.3.28. $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1/h \\ 2c_1h & d_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2/h \\ 2c_2h & d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ iki çift eleman olsun. Bu durumda A ve B, $\Gamma_C^0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki aynı sol kosetlerini belirler ancak ve ancak $\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} mod\ h$ dır.

İspat: $A\Gamma_C^0(N)$ ve $B\Gamma_C^0(N)$ kosetlerini ele alalım. Kabul edelim ki $A\Gamma_C^0(N) = B\Gamma_C^0(N)$ olsun. $A\Gamma_C^0(N) = B\Gamma_C^0(N)$ ancak ve ancak $A^{-1}B \in \Gamma_C^0(N)$ dir. Buradan

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} d_1 & -b_1/h \\ -2c_1h & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2/h \\ 2c_2h & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2d_1 - 2b_1c_2 & (b_2d_1 - b_1d_2)/h \\ 2(a_1c_2 - a_2c_1)h & a_2d_1 - 2b_1c_2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki matrisin $\Gamma_C^0(N)$ de olması için gerek ve yeter şart $a_1c_2 - a_2c_1 \equiv 0\ mod\ h$ olmasıdır. Buradan $\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} mod\ h$ elde edilir.

□

Önerme 2.3.29. $A = \begin{pmatrix} 2a_1 & b_1/h \\ 2c_1h & 2d_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2a_2 & b_2/h \\ 2c_2h & 2d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ iki tek eleman olsun. Bu durumda A ve B, $\Gamma_C^0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki aynı sol kosetlerini belirler ancak ve ancak $\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} mod\ h$ dır.

İspat: $A\Gamma_C^0(N)$ ve $B\Gamma_C^0(N)$ kosetlerini ele alalım. Kabul edelim ki $A\Gamma_C^0(N) = B\Gamma_C^0(N)$ olsun. $A\Gamma_C^0(N) = B\Gamma_C^0(N)$ ancak ve ancak $A^{-1}B \in \Gamma_C^0(N)$ dir. Buradan

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2d_1 & -b_1/h \\ -2c_1h & 2a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a_2 & b_2/h \\ 2c_2h & 2d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(2a_2d_1 - b_1c_2) & 2(b_2d_1 - b_1d_2)/h \\ 4(a_1c_2 - a_2c_1)h & 2(2a_2d_1 - b_1c_2) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki dönüşümün her bir terimini 2 ile bölelim. Böylece

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2a_2d_1 - b_1c_2 & (b_2d_1 - b_1d_2)/h \\ 2(a_1c_2 - a_2c_1)h & 2a_2d_1 - b_1c_2) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu dönüşümün $\Gamma_C^0(N)$ de olması için gerek ve yeter şart $a_1c_2 - a_2c_1 \equiv 0 \; mod \; h$ olmasıdır. Buradan $\binom{a_1}{c_1} \equiv \pm \binom{a_2}{c_2} mod \; h$ elde edilir.

□

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1/h \\ 2c_1h & d_1 \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ bir çift eleman ve $B = \begin{pmatrix} 2a_2 & b_2/h \\ 2c_2h & 2d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ bir tek eleman olmak üzere,

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} d_1 & -b_1/h \\ -2c_1h & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_2 & b_2/h \\ 2c_2h & 2d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(d_1a_2 - b_1c_2) & (b_1d_2 - 2d_2b_1)/h \\ 2(a_1c_2 - 2c_1a_2)h & 2(a_1d_2 - c_1b_2) \end{pmatrix}$$

olup, $A^{-1}B \notin \Gamma_C^0(N)$ olduğundan, $\Gamma_B(N)$ nin tek elemanları ile belirli sol kosetler ile $\Gamma_B(N)$ nin çift elemanları ile belirli sol kosetler ayrıktır. Dolayısıyla bu kosetlere karşılık gelen köşeler birbirinden farklıdır. Bu sebeple bu köşeleri ayrı ayrı adlandıracağız. Tek elemanların belirlediği sol kosetleri tek köşeler, çift elemanların belirlediği sol kosetleri çift köşeler olarak adlandıracağız. Yukarıdaki önermelerden, $\begin{pmatrix} a & b/h \\ 2ch & d \end{pmatrix}$ dönüşümü tarafından belirlenen sol koseti, $(a, 2ch)$ ve $\begin{pmatrix} 2a & b/h \\ 2ch & 2d \end{pmatrix}$ dönüşümü tarafından belirlenen sol koseti ise (a, ch) satır vektörü ile ifade edeceğiz. Böylece köşeleri, $(a, c, h) = 1$ olmak üzere $(a, 2ch)$ (bir çift köşe) ve (a, ch) (bir tek köşe) satır vektörleri ile ifade edeceğiz. $(a, 2ch)$ ve $(-a, 2(-c)h)$ vetörleri aynı sol koseti belirlediği için çift köşeler kümesini

$$\{(a, 2ch) : \; a, c \in \mathbb{Z}_h, (a, c, h) = 1\}/\sim$$

şeklinde göstereceğiz. Burada $(a, 2ch) \sim (h - a, 2(h - c)h)$ dir. Benzer şekilde (a, ch) ve $(-a, (-c)h)$ vektörleri aynı sol koseti belirlediği için tek köşeler kümesini

$$\{(a, ch) : \; a, c \in \mathbb{Z}_h, (a, c, h) = 1\}/\sim$$

şeklinde ifade edeceğiz ki burada $(a, ch) \sim (h - a, (h - c)h)$ dir.

Şimdi $\mathcal{M}_4^0(N)$ nin oklarını, kenarlarını ve yüzeylerini araştıracağız.

Teorem 2.3.30. $\Gamma_0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki kosetleri ile $\mathcal{M}_4^0(N)$ nin okları arasında birebir bir eşleme vardır.

İspat: Teoremin ispatı için yine Lemma 2.3.12. i uygulayacağız. Dolayısıyla öncelikle bir ok seçelim ve sonrasında onun sabitleyenini bulalım. $[0]_{\Gamma_0(N)} \longrightarrow [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ okunu seçelim. Eğer $A \in \Gamma_B(N)$ elemanı bu oku sabitlerse, ilk olarak $[\infty]_{\Gamma_0(N)}$ yi sabitlemelidir. Lemma 2.3.25. ve Lemma 2.3.26. dan $A \in \Gamma_C^0(N)$ bulunur. Diğer yandan A, $[0]_{\Gamma_0(N)}$ yi de sabitlemelidir. Yani $A[0]_{\Gamma_0(N)} = [0]_{\Gamma_0(N)}$ olmalıdır. Burada her $B \in \Gamma_0(N)$ için $AB0 \in [0]_{\Gamma_0(N)}$ elde edilir. Bunun anlamı ise $AB \in \Gamma_0(N)$ olmasıdır. Böylece keyfi $B = \begin{pmatrix} x & y \\ zN & t \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ için $A \in \Gamma_C^0(N)$ olduğu ve $N = 2h^2$ olduğu dikkate alınırsa,

$$AB = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{h} \\ 2ch^2 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ zN & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + 2bzh & ay + \frac{bt}{h} \\ 2cxh^2 + dzN & 2cyh^2 + dt \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ax + 2bzh & ay + bt/h \\ (cx + dz)N & 2cyh^2 + dt \end{pmatrix}$$

elde edilir. Yukardaki matris $\Gamma_0(N)$ de olmalıdır. Haliyle matrisin $ay + bt/h$ girdisinin bir tam sayı olması gerekir. O halde t keyfi olduğundan $h|b$ olmalıdır. Bir l tam sayısı için $b = lh$ olsun. Buradan

$$A = \begin{pmatrix} a & b/h \\ 2ch^2 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & l \\ cN & d \end{pmatrix}$$

olup $A \in \Gamma_0(N)$ elde edilir. Tersine, $T = \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ elemanını alalım ve bu elemanın $[0]_{\Gamma_0(N)} \longrightarrow [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ oku üzerindeki etkisini inceleyelim. $T \in \Gamma_0(N)$ olduğundan $T[\infty]_{\Gamma_0(N)} = [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ ve $T[0]_{\Gamma_0(N)} = [0]_{\Gamma_0(\mathrm{N})}$ olduğu görülür. Böylece T, $[0]_{\Gamma_0(N)} \longrightarrow [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ okunu sabitler. Dolayısıyla $\Gamma_0(N)$, $[0]_{\Gamma_0(N)} \longrightarrow [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ okunun sabitleyenidir. Sonuç olarak Lemma 2.3.12. den $\Gamma_0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki sol kosetleri ile $\mathcal{M}_4^0(N)$ nin okları arasında birebir bir eşleme vardır.

□

Yukarıdaki teoremden okların sayısının $|\Gamma_B(N):\Gamma_0(N)|$ olduğuna ulaşılır. Sonuç olarak; $(a,2ch)$ ve (b,dh), $\mathcal{M}_4^0(N)$ nin iki köşesi olsun. Böylece bu iki köşe, $ad-2bc\equiv \pm 1 \bmod h$ ise bir kenar ile birleşir ki burada $a,b,c,d\in\mathbb{Z}_h$ dır. Figürün düzgün olmasından, kenarların sayısı

$$\frac{|\Gamma_B(N):\Gamma_0(N)|}{2}$$

dır ve figürün dörtgensel olmasından dolayı yüzlerin sayısı ise

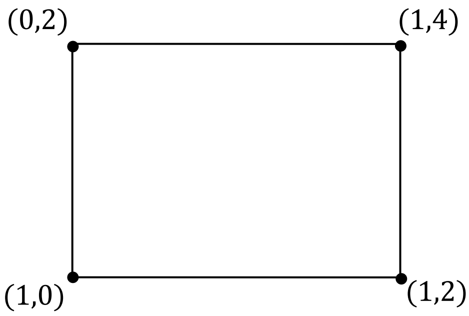
$$\frac{|\Gamma_B(N):\Gamma_0(N)|}{4}$$

dir. $\mathcal{U}/\Gamma_0(N)$ nin cinsi, için $2-2g=V-E+F$ Euler karakteristiği kullanılarak bulunabilir.

2.3.2.1. Örnekler

$N=8$ için, $h=2$ dir. Bu durumda $\mathcal{U}/\Gamma_0(8)$ yüzeyi üzerinde yatan $\mathcal{M}_4^0(8)$ figürü elde edilir (Şekil 1). Bu figür 4 köşe, 4 kenar, 2 yüze sahiptir ve cinsi sıfırdır. $\mathcal{M}_4^0(8)$ in köşeleri aşağıdaki biçimdedir,

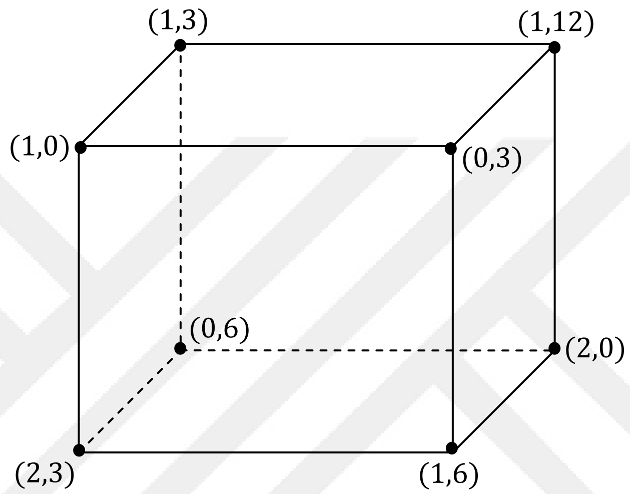
$$(0,2),(1,0),(1,2),(1,4).$$



Şekil 8. $\mathcal{M}_4^0(8)$:Dörtgen

$N = 18$ için, $h = 3$ dür. Bu durumda $\mathcal{U}/\Gamma_0(18)$ yüzeyi üzerinde yatan $\mathcal{M}_4^0(18)$ figürü elde edilir (Şekil 2). Bu figür 8 köşe, 12 kenar, 6 yüze sahiptir ve cinsi sıfırdır. $\mathcal{M}_4^0(18)$ in köşeleri aşağıdaki biçimdedir,

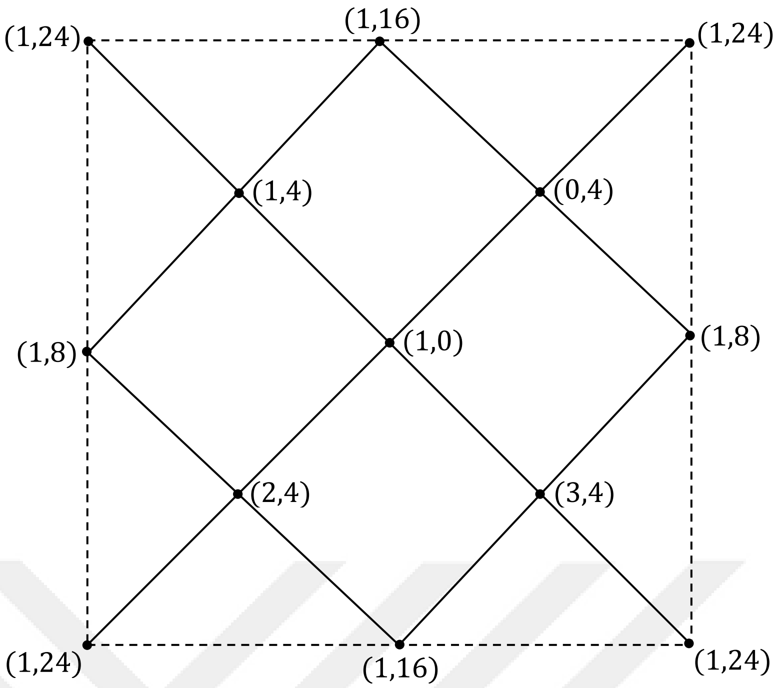
$$(0,3), (0,6), (1,3), (1,0), (2,0), (1,6), (1,12), (2,3).$$



Şekil 9. $\mathcal{M}_4^0(18)$:Küp

$N = 32$ için, $h = 4$ dir. Bu durumda $\mathcal{U}/\Gamma_0(32)$ yüzeyi üzerinde yatan $\mathcal{M}_4^0(32)$ figürü elde edilir (Şekil 3). Bu figür 8 köşe, 16 kenar, 8 yüze sahiptir ve cinsi 1 dir. $\mathcal{M}_4^0(32)$ nin köşeleri aşağıdaki biçimdedir,

$$(1,0), (0,4), (1,8), (1,4), (1,16), (2,4), (1,24), (3,4).$$



Şekil 10. $\mathcal{M}_4^0(32)\colon \{4,4\}_{2,2}$

2.3.2.2. Dörtgen Figürler Tablosu

Bu alt bölümde, yukarıda verdiğimiz teoriden elde edilen verilerle oluşturulan bir tablo vereceğiz. $N = 2^\alpha 3^\beta > 2 \;\; \beta = 0, 2$ ve $\alpha = 1, 3, 5, 7$ şartıyla verilen tüm N değerleri için aşağıdaki veriler elde edilir:

Oklar : $D = |\Gamma_B(N)\colon \Gamma_0(N)|$

Kenarlar : $E = \frac{|\Gamma_B(N)\colon \Gamma_0(N)|}{2}$

Köşeler : $V = |\Gamma_B(N)\colon \Gamma_C^0(N)|$

Yüzler : $F = \frac{|\Gamma_B(N)\colon \Gamma_0(N)|}{4}$

Cins : $2 - 2g = V - E + F$

Tablo 3. N değerleri ve dörtgen figürler

N	D	E	V	F	g	**Figür**
8	8	4	4	2	0	Dörtgen
18	24	12	8	6	0	Küp
32	32	16	8	8	1	{4,4}
72	96	48	16	24	5	{4,6}
128	128	64	16	32	9	{4,8}
288	384	192	32	96	33	{4,12}
1152	1536	768	64	384	161	{4,24}

2.3.3. Altıgen Figürler

Bu bölüm boyunca N sayısı, $\beta = 1, 3$ ve $\alpha = 0, 2, 4, 6$ olmak üzere $N = 2^{\alpha}3^{\beta} > 3$ şeklinde bir doğal sayıyı ifade edecektir. N nin bu değerleri için, Tablo 2.3.1 den $N = 3h^2$ ve $e = 1, 3$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\Gamma_B(N)$ grubu, aşağıdaki matrislere karşılık gelen dönüşümlerden oluşur:

$$(I)\ \begin{pmatrix} a & b/h \\ 3ch & d \end{pmatrix}, \qquad ad - 3bc = 1,$$

$$(II)\ \begin{pmatrix} 3a & b/h \\ 3ch & 3d \end{pmatrix}, \qquad 9ad - 3bc = 3\ \Rightarrow 3ad - bc = 1.$$

Burada h, $h^2|N$ şartını sağlayan, 24 ün en büyük bölenidir. $\Gamma_B(N)$ nin (I) tipli elemanlarına çift elemanlar, (II) tipli elemanlarına da tek elemanlar adını vereceğiz.

Önerme 2.3.31. $\Gamma_B(N)$ nin çift elemanlarının oluşturduğu küme, 2 indeksli bir alt gruptur.

İspat. Çift elemanların kümesini $\Gamma_B^+(N)$ ile ifade edelim. $\Gamma_B^+(N) \leq \Gamma_B(N)$ olduğu açık olduğundan indeksin 2 olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için, keyfi

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3a_1 & b_1/h \\ 3c_1h & 3d_1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 3a_2 & b_2/h \\ 3c_2h & 3d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$$

elemanlarını alalım. Buradan,

$$A_2^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 3d_2 & -b_2/h \\ -3c_2h & 3a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3a_1 & b_1/h \\ 3c_1h & 3d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a_1d_2 - 3c_1b_2 & 3(b_1d_2 - b_2d_1)/h \\ 9(a_2c_1 - c_2a_1)h & 9d_1a_2 - 3b_1c_2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu dönüşümün determinantı 9 dur. Dolayısıyla her bir terim 3 ile bölünürse, determinantı 1 olan

$$A_2^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 3a_1d_2 - c_1b_2 & (b_1d_2 - b_2d_1)/h \\ 3(a_2c_1 - c_2a_1)h & 3d_1a_2 - b_1c_2 \end{pmatrix}.$$

dönüşümü elde edilir. Bu ise bir çift elemandır, yani $A_2^{-1}A_1 \in \Gamma_B^+(N)$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

□

Bu değerler için $\Gamma_C^0(N)$ grubu, aşağıdaki matrislere karşılık gelen dönüşümlerden oluşur:

$$\begin{pmatrix} a & b/h \\ 3ch^2 & d \end{pmatrix}, \qquad ad - 3bch = 1.$$

Öncelikle N nin bu değerleri için $\Gamma_B(N)$ nin transitif hareket ettiği kümeyi ifade edelim:

Teorem 2.3.32. $\Gamma_B(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

İspat: $\infty = \frac{1}{0} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanının yörüngesinin $\widehat{\mathbb{Q}}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olsun.

1.Durum: Eğer $(h, y) = 1$ ise;

a) $3|y$ olsun. Bu durumda $y = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$ diyelim. $(x, y) = 1$ olduğundan, $(hx, y) = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $ahx - by = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Bu durumda $\begin{pmatrix} hx & b/h \\ hy & a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 1 dir ve $y = 3k$ yerine yazılırsa $\begin{pmatrix} hx & b/h \\ hy & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hx & b/h \\ 3hk & a \end{pmatrix}$ olup $\Gamma_B(N)$ nin tanımı göz önüne alınırsa $\begin{pmatrix} hx & b/h \\ hy & a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ olduğu elde edilir. Diğer yandan

.

$$\begin{pmatrix} hx & b/h \\ hy & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bunun anlamı keyfi $\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanı alındığında bu eleman sonsuzun yörüngesindedir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

b) $3 \nmid y$ olsun. $(x, y) = 1$ olduğundan, $(hx, y) = 1$ elde edilir. Ayrıca $3 \nmid y$ olduğundan $(3hx, y) = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $3ahx - by = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Bu durumda $\begin{pmatrix} 3hx & b/h \\ 3hy & 3a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 3 tür ve $\Gamma_B(N)$ nin tanımı göz önüne alınırsa $\begin{pmatrix} 3hx & b/h \\ 3hy & 3a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ olduğu elde edilir. Diğer yandan

.

$$\begin{pmatrix} 3hx & b/h \\ 3hy & 3a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bunun anlamı keyfi $\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanı alındığında bu eleman sonsuzun yörüngesindedir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

2.Durum: $(h, y) = h$ olsun. $h|y$ olup $y = ht$ olacak şekilde bir t tam sayısı mevcuttur.

a) $3 \nmid y$ olsun. $(x, y) = 1$ ve $3 \nmid y$ olduğundan $(3x, y) = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $3ax - by = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Bu durumda $\begin{pmatrix} 3x & b \\ 3y & 3a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 3 tür ve bu matrise $\begin{pmatrix} 3x & b \\ 3y & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & bh/h \\ 3th & 3a \end{pmatrix}$ gözüyle bakılırsa, $\Gamma_B(N)$ nin tanımı dikkate alındığında $\begin{pmatrix} 3x & b \\ 3y & 3a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{pmatrix} 3x & b \\ 3y & 3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

b) $3|y$ olsun. $y = ht$ şeklindeydi, burada t nin durumlarını incelemeliyiz:

b1) $3|t$ olsun. Bu durumda $t = 3k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ sayısı vardır. Bunu $y = ht$ de yerine yazarsak $y = 3hk$ elde edilir. $(x, y) = 1$ olduğundan $ax - by = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} x & b \\ y & a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 1 dir ve bu matrise $\begin{pmatrix} x & b \\ y & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & bh/h \\ 3hk & a \end{pmatrix}$ gözüyle bakılırsa, $\Gamma_B(N)$ nin tanımı dikkate alındığında $\begin{pmatrix} x & b \\ y & a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{pmatrix} x & b \\ y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

b2) $3 \nmid t$ olsun. $(x, y) = 1$ olduğundan, $(x, t) = 1$ dir. Ayrıca $3 \nmid t$ olduğundan $(3x, t) = 1$ elde edilir. Buradan $3ax - bt = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} 3x & b/h \\ 3y & 3a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 3 tür ve bu matrise $\begin{pmatrix} 3x & b/h \\ 3y & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & b/h \\ 3ht & 3a \end{pmatrix}$ gözüyle bakılırsa, $\Gamma_B(N)$ nin tanımı dikkate alındığında $\begin{pmatrix} 3x & b/h \\ 3y & 3a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{pmatrix} 3x & b/h \\ 3y & 3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

3.Durum: $k \neq 1$ ve $k \neq h$ olmak üzere $(h, y) = k$ olsun. Bu takdirde $h = km$ ve $y = kn$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur ve $(n, m) = 1$ olur.

a) $3 \nmid y$ olsun. $(m, y) = 1$ ve $(x, y) = 1$ olduğundan $(mx, y) = 1$ dir. Ayrıca $3 \nmid y$ olduğundan $(3mx, y) = 1$ dir. Buradan $3amx - by = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} 3mx & b/m \\ 3my & 3a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 3 tür ve bu matrise $\begin{pmatrix} 3mx & b/m \\ 3my & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3mx & bk/km \\ 3mkn & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3mx & bk/h \\ 3nh & 3a \end{pmatrix}$ gözüyle bakılırsa, $\Gamma_B(N)$ nin tanımı dikkate alındığında $\begin{pmatrix} 3mx & b/m \\ 3my & 3a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{pmatrix} 3mx & b/m \\ 3my & 3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

b) $3|y$ olsun. $y = kn$ olduğunu biliyoruz. n nin durumlarını inceleyelim:

b1) $3|n$ olsun. $n = 3t$ olacak şekilde $t \in \mathbb{Z}$ sayısı mevcuttur. Dolayısıyla $y = 3kt$ yazılır. $3|y$ ve $(x, y) = 1$ olduğundan $3 \nmid x$ tir. Diğer yandan $(m, n) = 1$ ve $3|n$ olduğundan $3 \nmid m$ dir. Ayrıca $(x, y) = 1$ olduğundan $(x, t) = 1$ dir. $3 \nmid x$ olduğundan $(x, 3t) = 1$ dir. $(m, n) = 1$ olduğundan $(m, 3t) = 1$ dir. Buradan $(mx, 3t) = 1$ dir.

Buradan $amx - 3bt = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} mx & b/h \\ 3th & a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 1 dir ve $\Gamma_B(N)$ nin tanımı dikkate alındığında $\begin{pmatrix} mx & b/h \\ 3th & a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{pmatrix} mx & b/h \\ 3th & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

b2) $3 \nmid n$ olsun. $(x, y) = 1$ olduğundan $(x, n) = 1$ dir. $3 \nmid n$ olduğundan $(3x, n) = 1$ elde edilir. Ayrıca $(m, n) = 1$ olduğundan $(3xm, n) = 1$ dir. Buradan $3amx - bn = 1$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ tam sayıları mevcuttur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} 3mx & b/h \\ 3nh & 3a \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Bu matrisin determinantı 3 tür ve $\Gamma_B(N)$ nin tanımı dikkate alındığında $\begin{pmatrix} 3mx & b/h \\ 3nh & 3a \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{pmatrix} 3mx & b/h \\ 3nh & 3a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

□

Şimdi $\mathcal{M}_6$ ile sembolize edeceğimiz evrensel figürü inşa edeceğiz. Öncelikle $\mathcal{M}_6$ nın köşelerini elde edelim. $\mathcal{M}_6$, sanal eksenin $\Gamma_B(N)$ altındaki görüntülerinden oluşur. Buradan 0 ve ∞ un $\mathcal{M}_6$ ün köşeleri olduğu açıktır. $0 = \frac{0}{1.h}$ ve $\infty = \frac{1}{3.0.h}$ şeklinde yazılabilir. Eğer $\Gamma_B(N)$ nin bir çift elemanı uygulanırsa, ∞ un yörüngesi, $(a, c) = 1$ ve $3 \nmid a$ olan $\frac{a}{3ch}$ formundaki noktalardan oluşurken; 0 ın yörüngesi ise $(a, c) = 1$ olan ve $3 \nmid c$ olan $\frac{a}{ch}$ formundaki noktalardan oluşur. Benzer şekilde $\Gamma_B(N)$ nin tek elemanı için de aynı formda noktalar elde edilir. Birinci tipteki köşelere çift köşeler, ikinci tipteki köşelere de tek köşeler adını vereceğiz.

Önerme 2.3.33. $\Gamma_B(N)$ nin çift elemanları, $\mathcal{M}_6$ nın çift köşelerinin kümesini ve tek köşelerinin kümesini korur.

İspat. $\begin{pmatrix} a & b/h \\ 3ch & d \end{pmatrix}$ çift elemanını alalım. $\frac{x}{3yh}$ bir çift köşe, $\frac{r}{sh}$ bir tek köşe olsun. Buradan

$$\begin{pmatrix} a & b/h \\ 3ch & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 3yh \end{pmatrix} = \frac{ax+3by}{3(cx+dy)h}$$

elde edilir. $\frac{x}{3yh}$ bir çift köşe olduğundan $3 \nmid x$ tir. Diğer yandan $ad - 3bc = 1$ determinantından $3 \nmid a$ olduğu bulunur. Dolayısıyla $3 \nmid ax + 3by$ dir. Şimdi $(ax + 3by, cx + dy) = 1$ olduğunu gösterelim. $3 \nmid x$ ve $(x, y) = 1$ olduğundan $(x, 3y) = 1$ dir. $ad - 3bc = 1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 3y \end{pmatrix} = \frac{ax+3by}{3(cx+dy)}$$

eşitliği kullanılırsa, $\big(ax + 3by, 3(cx + dy)\big) = 1$ olup, buradan da $(ax + 3by, cx + dy) = 1$ elde edilir. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} a & b/h \\ 3ch & d \end{pmatrix}$ dönüşümü çift köşeleri çift köşelere dönüştürür. Şimdi

$$\begin{pmatrix} a & b/h \\ 3ch & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ sh \end{pmatrix} = \frac{ar+bs}{(3cr+ds)h}$$

eşitliğini ele alalım. $\frac{r}{sh}$ bir tek köşe olduğundan $3 \nmid s$ dir. Diğer yandan $ad - 3bc = 1$ determinantından $3 \nmid d$ olduğu bulunur. Dolayısıyla $3 \nmid 3cr + ds$ elde edilir. Şimdi $(ar + bs, 3cr + ds) = 1$ olduğunu gösterelim. $(r, s) = 1$ ve $ad - 3bc = 1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \frac{ar+bs}{3cr+ds}$$

eşitliği kullanılırsa $(ar+bs, 3cr+ds)=1$ elde edilir. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} a & b/h \\ 3ch & d \end{pmatrix}$ dönüşümü tek köşeleri tek köşelere dönüştürür.

□

Önerme 2.3.34. $\Gamma_B(N)$ nin tek elemanları, $\mathcal{M}_6$ nın çift köşelerinin kümesi ile tek köşelerinin kümesini birbirine dönüştürür.

İspat. $\begin{pmatrix} 3a & b/h \\ 3ch & 3d \end{pmatrix}$ tek elemanını alalım. $\frac{x}{3yh}$ bir çift köşe, $\frac{r}{sh}$ bir tek köşe olsun. Buradan

$$\begin{pmatrix} 3a & b/h \\ 3ch & 3d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 3yh \end{pmatrix} = \frac{3(ax+by)}{3(cx+3dy)h} = \frac{ax+by}{(cx+3dy)h}$$

elde edilir. $\frac{x}{3yh}$ bir çift köşe olduğundan $3 \nmid x$ tir. Diğer yandan $\begin{pmatrix} 3a & b/h \\ 3ch & 3d \end{pmatrix}$ elemanının determinantından $3ad-bc=1$ olup, $3 \nmid c$ dir. Dolayısıyla $3 \nmid cx+3dy$ elde edilir. Şimdi $(ax+by, cx+3dy)=1$ olduğunu gösterelim. $(x,y)=1$ ve $3ad-bc=1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 3d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{ax+by}{cx+3dy}$$

eşitliğinden $(ax+by, cx+3dy)=1$ olduğu bulunur. Sonuç olarak $\begin{pmatrix} 3a & b/h \\ 3ch & 3d \end{pmatrix}$ dönüşümü çift köşeleri tek köşelere dönüştürür.

$$\begin{pmatrix} 3a & b/h \\ 3ch & 3d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ sh \end{pmatrix} = \frac{3ar+bs}{3(cr+ds)h}$$

eşitliğini ele alalım. $\frac{r}{sh}$ bir tek köşe olduğundan $3 \nmid s$ dir. Diğer yandan $\begin{pmatrix} 3a & b/h \\ 3ch & 3d \end{pmatrix}$ elemanının determinantından $3ad-bc=1$ olup, $3 \nmid b$ dir. Dolayısıyla $3 \nmid 3ar+bs$ elde edilir. Şimdi $(3ar+bs, cr+ds)=1$ olduğunu gösterelim. $(r,s)=1$ ve $3ad-bc=1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} 3a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \frac{3ar + bs}{cr + ds}$$

eşitliğinden $(3ar + bs, cr + ds) = 1$ olduğu bulunur. Sonuç olarak $\begin{pmatrix} 3a & b/h \\ 3ch & 3d \end{pmatrix}$ dönüşümü tek köşeleri çift köşelere dönüştürür.

□

Şimdi $\mathcal{M}_6$ nın kenarlarını ve altıgenlerini karakterize edeceğiz. $\mathcal{M}_6$ nın kenarları 0 ile ∞ u bağlayan kenarın $\Gamma_B(N)$ altındaki görüntüleridir. Diğer yandan, tanım gereği, 0 $\mathcal{M}_6$ nın bir tek köşesi ve ∞ $\mathcal{M}_6$ nın bir çift köşesi olduğundan $\mathcal{M}_6$ nın kenarları bir tek ve bir çift köşeyi birbirine bağlar. Dolayısıyla $\frac{a}{3ch}$ köşesi $\frac{b}{dh}$ köşesi ile bağlıdır ancak ve ancak $ad - 3bc = \pm 1$ dir. $\mathcal{M}_6$ nın altıgenleri ise, $\infty, 0$, $\frac{1}{3h}, \frac{1}{2h}, \frac{2}{3h}, \frac{1}{h}$ köşeli temel altıgenin $\Gamma_B(N)$ altındaki görüntüleridir. Yani $\mathcal{M}_6$ nın altıgenleri $\frac{a}{3ch}, \frac{b}{dh}, \frac{a+3b}{3(c+d)h}, \frac{a+2b}{(3c+2d)h}, \frac{2a+3b}{3(2c+d)h}, \frac{a+b}{(3c+d)h}$ köşeleri ile karakterize edilir.

Tanım 2.3.35. $\mathcal{M}_6^0(N)$ figürü, $\mathcal{M}_6/\Gamma_0(N)$ figürü ile tanımlanır.

$\mathcal{M}_6^0(N)$ figürü için öncelikle $\mathcal{M}_6^0(N)$ nin köşelerini tanımlayacağız.

Lemma 2.3.36. $\infty = \frac{1}{0}$ un $\Gamma_B(N)$ deki sabitleyeni $S_\infty = \left\{\begin{pmatrix} 1 & u/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{Z}\right\}$ dir.

İspat: $\Gamma_B(N)$ nin tek elemanları çift köşeleri korumadığından ve ∞ bir çift köşe olduğundan $\Gamma_B(N)$ nin tek elemanları ∞ u sabitleyemez. ∞ u sabitleyen $\Gamma_B(N)$ nin bir tek elemanı için

$$\begin{pmatrix} a & b/h \\ 3ch & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} a \\ 3ch \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan $a = 1$ ve $c = 0$ dır. Bu elemanın determinantı $ad - 3bc = 1$ olup, $d = 1$ elde edilir ve ∞ un $\Gamma_B(N)$ deki sabitleyeni, S_∞ da içerilir. Tersine, $\begin{pmatrix} 1 & u/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_\infty$ için

$$\begin{pmatrix} 1 & u/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

□

Lemma 2.3.37. $[\infty]_{\Gamma_0(N)}$ un $\Gamma_B(N)$ deki kümesel sabitleyeni $S_{[\infty]}$ olsun. Bu durumda

$$S_{[\infty]} = S_\infty \Gamma_0(N)$$

dir.

İspat: A, $S_{[\infty]}$ un bir elemanı olsun. Buradan $A[\infty]_{\Gamma_0(N)} = [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ yazılır. Diğer yandan

$$A[\infty]_{\Gamma_0(N)} = \{AB\infty : B \in \Gamma_0(N)\}$$

olup, $C = AB \in A\Gamma_0(N)$ olduğu dikkate alınırsa

$$A[\infty]_{\Gamma_0(N)} = \{AB\infty : B \in \Gamma_0(N)\} = \{C\infty : C \in A\Gamma_0(N)\} = [\infty]_{A\Gamma_0(N)}$$

elde edilir. Yani $[\infty]_{\Gamma_0(\mathrm{N})} = \mathrm{A}[\infty]_{\Gamma_0(\mathrm{N})} = [\infty]_{\mathrm{A}\Gamma_0(\mathrm{N})}$ dir. Ayrıca $\Gamma_0(N) \lhd \Gamma_B(N)$ olduğundan $\mathrm{A}\Gamma_0(N) = \Gamma_0(N)A$ dır. Dolayısıyla $[\infty]_{\Gamma_0(N)A} = [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ dir. Bunun anlamı ise $A_1, A_2 \in \Gamma_0(N)$ elemanları vardır öyle ki $A_1A\infty = A_2\infty$ yazılır. Buradan $A_2^{-1}A_1A\infty = \infty$ elde edilir, yani, $C_1 = A_2^{-1}A_1A \in S_\infty$ elde edilir. O halde $A_1^{-1}A_2C_1 = A$ olup, $A_1^{-1}A_2 \in \Gamma_0(N)$ ve $C_1 \in S_\infty$ olduğundan $A \in \Gamma_0(N)S_\infty$ elde edilir. Yine $\Gamma_0(N) \lhd \Gamma_B(N)$ olduğundan $\Gamma_0(N)S_\infty = S_\infty\Gamma_0(N)$ olup $A \in \mathrm{S}_\infty\Gamma_0(N)$ bulunur. Yani $S_{[\infty]} \subset \mathrm{S}_\infty\Gamma_0(N)$ dır.

Ters kapsama için, $C \in S_\infty\Gamma_0(N)$ olsun. C, $C = AB$ formundadır öyle ki $A \in S_\infty$ ve $B \in \Gamma_0(N)$ dir. Böylece,

$$C[\infty]_{\Gamma_0(N)} = AB[\infty]_{\Gamma_0(N)} = A[\infty]_{\Gamma_0(N)} = [A\infty]_{\Gamma_0(N)} = [\infty]_{\Gamma_0(N)}$$

eşitliği elde edilir. Yani, C, $[\infty]_{\Gamma_0(N)}$ u sabitler. Dolayısıyla $C \in S_{[\infty]}$ dir. Yani $S_\infty\Gamma_0(N) \subset S_{[\infty]}$ olup, ispat tamamlanır.

□

Lemma 2.3.38. $S_\infty\Gamma_0(N) = \Gamma_C^0(N)$ dir.

İspat: N sayısı, $\beta = 1, 3$ ve $\alpha = 0, 2, 4, 6$ olmak üzere $N = 2^\alpha 3^\beta$ şeklinde olduğundan $\Gamma_C^0(N)$ grubunu aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\Gamma_C^0(N) = \left\{\begin{pmatrix} a & b/h \\ 3ch^2 & d \end{pmatrix} : ad - 3bch = 1\right\}.$$

$S_\infty = \left\{\begin{pmatrix} 1 & u/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{Z}\right\}$ tanımı dikkate alınırsa $S_\infty \leq \Gamma_C^0(N)$ yazılır. Ayrıca $\Gamma_0(N) \leq \Gamma_C^0(N)$ olduğundan $S_\infty\Gamma_0(N) \leq \Gamma_C^0(N)$ elde edilir. Tersine, $A \in \Gamma_C^0(N)$ alalım, $\Gamma_C^0(N)$ tanımından

$$A = \begin{pmatrix} a & b/h \\ 3ch^2 & d \end{pmatrix}, \qquad ad - 3bch = 1$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$\begin{pmatrix} 1 & ab/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a - 3abch & -3b^2c \\ 3ch^2 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & abd/h - b^2c \\ 3ch^2 & d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & b(ad - 3bch)/h \\ 3ch^2 & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b/h \\ 3ch^2 & d \end{pmatrix} = A$$

elde edilir. Burada

$$\begin{pmatrix} a-3abch & -3b^2c \\ 3ch^2 & d \end{pmatrix}$$

matrisini ele alalım. $3h^2 = N$ olduğundan $\begin{pmatrix} a-3abch & -3b^2c \\ 3ch^2 & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ dir. Aynı zamanda S_∞ tanımı dikkate alınırsa $\begin{pmatrix} 1 & ab/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_\infty$ elde edilir. O halde keyfi $A \in \Gamma_C^0(N)$ elemanı, biri $\Gamma_0(N)$ nin diğeri de S_∞ nin elemanı olan iki matrisin çarpımı şeklinde yazılabilir. Yani $A \in S_\infty\Gamma_0(N)$ olur. Dolayısıyla $\Gamma_C^0(N) \leq S_\infty\Gamma_0(N)$ olduğu görülür. Bu ise ispatı tamamlar.

□

Şimdi $\mathcal{M}_6^0(N)$ figürünün köşelerini belirleyen teoremi vereceğiz:

Teorem 2.3.39. $\Gamma_C^0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki sol kosetleri ile $\mathcal{M}_6^0(N)$ nin köşeleri arasında birebir bir eşleme vardır.

İspat: $\mathcal{M}_3^0(N)$ için $\Gamma_B(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(N)$ üzerindeki hareketi dikkate alınacağından, $\mathcal{M}_3^0(N)$ nin köşelerinin kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(N)$ ile karakterize edilir. $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(N)$ köşe kümesini birebir eşleyeceğimiz bir küme bulmak için Lemma 2.3.12. i kullanacağız. Bu lemmada $G = \Gamma_B(N)$, $H = \Gamma_0(N)$, $X = \widehat{\mathbb{Q}}$ ve $x_0 = \infty$ alalım, burada $\Gamma_B(N)$, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif hareket ettiğinden lemmanın şartları sağlanır. Şimdi $[\infty]_{\Gamma_0(N)}$ nin kümesel sabitleyeni olan $S_{[\infty]}$ kümesi bulunursa köşe kümesinin birebir eşleştiği küme elde edilmiş olur. Lemma 2.3.37. kullanılırsa $S_{[\infty]} = S_\infty\Gamma_0(N)$ bulunur. Ayrıca Lemma 2.3.38. kullanılırsa ∞ un $\Gamma_0(N)$-yörüngesinin sabitleyeninin $\Gamma_C^0(N)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\widehat{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(N)$ ile $\Gamma_C^0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki sol kosetleri arasında birebir bir eşleme vardır.

□

Bu teoremin anlamı,

$$|\Gamma_B(N) : \Gamma_C^0(N)| = 2^\rho h\tau$$

indeksi bize köşelerin sayısının verir.

Şimdi, köşeleri bulmak için aşağıdaki önermeleri vereceğiz.

Önerme 2.3.40. $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1/h \\ 3c_1h & d_1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_2 & b_2/h \\ 3c_2h & d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ iki çift eleman olsun. Bu durumda A ve B, $\Gamma_C^0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki aynı sol kosetlerini belirler ancak ve ancak $\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} mod\ h$ dır.

İspat: $A\Gamma_C^0(N)$ ve $B\Gamma_C^0(N)$ kosetlerini ele alalım. Kabul edelim ki $A\Gamma_C^0(N) = B\Gamma_C^0(N)$ olsun. $A\Gamma_C^0(N) = B\Gamma_C^0(N)$ ancak ve ancak $A^{-1}B \in \Gamma_C^0(N)$ dir. Buradan

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix} d_1 & -b_1/h \\ -3c_1h & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2/h \\ 3c_2h & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2d_1-3b_1c_2 & (b_2d_1-b_1d_2)/h \\ 3(a_1c_2-a_2c_1)h & a_2d_1-2b_1c_2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki matrisin $\Gamma_C^0(N)$ de olması için gerek ve yeter şart $a_1c_2-a_2c_1 \equiv 0\ mod\ h$ olmasıdır. Buradan $\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} mod\ h$ elde edilir.

□

Önerme 2.3.41. $A=\begin{pmatrix} 3a_1 & b_1/h \\ 3c_1h & 3d_1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3a_2 & b_2/h \\ 3c_2h & 3d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ iki tek eleman olsun. Bu durumda A ve B, $\Gamma_C^0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki aynı sol kosetlerini belirler ancak ve ancak $\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} mod\ h$ dır.

İspat: $A\Gamma_C^0(N)$ ve $B\Gamma_C^0(N)$ kosetlerini ele alalım. Kabul edelim ki $A\Gamma_C^0(N) = B\Gamma_C^0(N)$ olsun. $A\Gamma_C^0(N) = B\Gamma_C^0(N)$ ancak ve ancak $A^{-1}B \in \Gamma_C^0(N)$ dir. Buradan

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3d_1 & -b_1/h \\ -3c_1h & 3a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3a_2 & b_2/h \\ 3c_2h & 3d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3(3a_2d_1-b_1c_2) & 3(b_2d_1-b_1d_2)/h \\ 9(a_1c_2-a_2c_1)h & 3(3a_2d_1-b_1c_2) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki dönüşümün her bir terimini 3 ile bölelim. Böylece

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3a_2d_1 - b_1c_2 & (b_2d_1 - b_1d_2)/h \\ 3(a_1c_2 - a_2c_1)h & 3a_2d_1 - b_1c_2) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu dönüşümün $\Gamma_C^0(N)$ de olması için gerek ve yeter şart $a_1c_2 - a_2c_1 \equiv 0\ mod\ h$ olmasıdır. Buradan $\binom{a_1}{c_1} \equiv \pm \binom{a_2}{c_2} mod\ h$ elde edilir.

□

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1/h \\ 3c_1h & d_1 \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ bir çift eleman ve $B = \begin{pmatrix} 3a_2 & b_2/h \\ 3c_2h & 3d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ bir tek eleman olmak üzere,

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} d_1 & -b_1/h \\ -3c_1h & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3a_2 & b_2/h \\ 3c_2h & 3d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(d_1a_2 - b_1c_2) & (b_1d_2 - 3d_2b_1)/h \\ 3(a_1c_2 - 3c_1a_2)h & 3(a_1d_2 - c_1b_2) \end{pmatrix}$$

olup, $A^{-1}B \notin \Gamma_C^0(N)$ olduğunan, $\Gamma_B(N)$ nin tek elemanları ile belirli sol kosetler ile $\Gamma_B(N)$ nin çift elemanları ile belirli sol kosetler ayrıktır. Dolayısıyla her bu kosetlere karşılık gelen köşeler birbirinden farklıır. Bu sebeple bu köşeleri ayrı ayrı adlandıracağız. Tek elemanların belirlediği sol kosetleri tek köşeler, çift elemanların belirlediği sol kosetleri çift köşeler olarak alandıracağız. Yukarıdaki önermelerden, $\begin{pmatrix} a & b/h \\ 3ch & d \end{pmatrix}$ dönüşümü tarafından belirlenen sol koseti, $(a, 3ch)$ ve $\begin{pmatrix} 3a & b/h \\ 3ch & 3d \end{pmatrix}$ dönüşümü tarafından belirlenen sol koseti ise (a, ch) satır vektörü ile ifade edeceğiz. Böylece köşeleri, $(a, c, h) = 1$ olmak üzere $(a, 3ch)$ (bir çift köşe) ve (a, ch) (bir tek köşe) satır vektörleri ile ifade edeceğiz. $(a, 3ch)$ ve $(-a, 3(-c)h)$ vetörleri aynı sol koseti belirlediği için çift köşeler kümesini

$$\{(a, 3ch) :\ a, c \in \mathbb{Z}_h, (a, c, h) = 1\}/\sim$$

şeklinde ifade edeceğiz ki burada $(a, 3ch) \sim (h - a, 3(h - c)h)$ dir. Benzer şekilde (a, ch) ve $(-a, (-c)h)$ vektörleri aynı sol koseti belirlediği için tek köşeler kümesini;

$$\{(a, ch) :\ a, c \in \mathbb{Z}_h, (a, c, h) = 1\}/\sim$$

şeklinde ifade edeceğiz ki burada $(a, ch) \sim (h - a, (h - c)h)$ dir.

Şimdi $\mathcal{M}_6^0(N)$ nin oklarını, kenarlarını ve yüzeylerini araştıracağız.

Teorem 2.3.42. $\Gamma_0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki kosetleri ile $\mathcal{M}_6^0(N)$ nin okları arasında birebir bir eşleme vardır.

İspat: Teoremin ispatı için yine Lemma 2.3.12. i uygulayacağız. Dolayısıyla öncelikle bir ok seçelim ve sonrasında onun sabitleyenini bulalım. $[0]_{\Gamma_0(N)} \longrightarrow [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ okunu seçelim. Eğer $A \in \Gamma_B(N)$ elemanı bu oku sabitlerse, ilk olarak $[\infty]_{\Gamma_0(N)}$ yi sabitlemelidir. Lemma 2.3.36. ve Lemma 2.3.37. den $A \in \Gamma_C^0(N)$ bulunur. Diğer yandan A, $[0]_{\Gamma_0(N)}$ yi de sabitlemelidir. Yani $A[0]_{\Gamma_0(N)} = [0]_{\Gamma_0(N)}$ olmalıdır. Burada her $B \in \Gamma_0(N)$ için $AB0 \in [0]_{\Gamma_0(N)}$ elde edilir. Bunun anlamı ise $AB \in \Gamma_0(N)$ olmasıdır. Böylece keyfi $B = \begin{pmatrix} x & y \\ zN & t \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ için $A \in \Gamma_C^0(N)$ olduğu ve $N = 3h^2$ olduğu dikkate alınırsa,

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} a & b/h \\ 3ch^2 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ zN & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + 3bzh & ay + bt/h \\ 3cxh^2 + dzN & 3cyh^2 + dt \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ax + 3bzh & ay + bt/h \\ (cx + dz)N & 3cyh^2 + dt \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yukardaki matris $\Gamma_0(N)$ de olmalıdır. Haliyle matrisin $ay + bt/h$ girdisinin bir tam sayı olması gerekir. O halde t keyfi olduğundan $h|b$ olmalıdır. Bir l tam sayısı için $b = lh$ olsun. Buradan

$$
A = \begin{pmatrix} a & b/h \\ 3ch^2 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & l \\ cN & d \end{pmatrix}
$$

olup $A \in \Gamma_0(N)$ elde edilir. Tersine, $T = \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ elemanını alalım ve bu elemanın $[0]_{\Gamma_0(N)} \longrightarrow [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ oku üzerindeki etkisini inceleyelim. $T \in \Gamma_0(N)$ olduğundan $T[\infty]_{\Gamma_0(N)} = [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ ve $T[0]_{\Gamma_0(N)} = [0]_{\Gamma_0(\mathrm{N})}$ olduğu görülür. Böylece T, $[0]_{\Gamma_0(N)} \longrightarrow [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ okunu sabitler. Dolayısıyla $\Gamma_0(N)$, $[0]_{\Gamma_0(N)} \longrightarrow [\infty]_{\Gamma_0(N)}$ okunun sabitleyenidir. Sonuç olarak Lemma 2.3.12. den $\Gamma_0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki sol kosetleri ile $\mathcal{M}_3^0(N)$ nin okları arasında birebir bir eşleme vardır.

□

Yukarıdaki teoremden okların sayısının $|\Gamma_B(N)\colon\Gamma_0(N)|$ olduğuna ulaşılır. Sonuç olarak; $(a, 3ch)$ ve (b, dh), $\mathcal{M}_6^0(N)$ nin iki köşesi olsun. Böylece bu iki köşe, $ad - 3bc \equiv \pm 1 \bmod h$ ise bir kenar ile birleşir ki burada $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_h$ dır. Figürün düzgün olmasından, kenarların sayısı

$$\frac{|\Gamma_B(N)\colon\Gamma_0(N)|}{2}$$

dır ve figürün altıgen olmasından dolayı yüzlerin sayısı ise

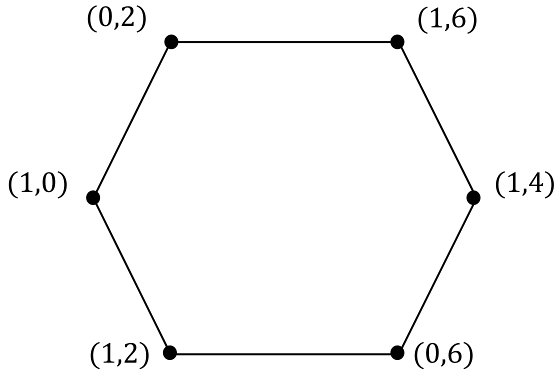
$$\frac{|\Gamma_B(N)\colon\Gamma_0(N)|}{6}$$

dir. $\mathcal{U}/\Gamma_0(N)$ nin cinsi $2 - 2g = V - E + F$ Euler karakteristiği kullanılarak bulunabilir.

2.3.3.1. Örnekler

$N = 12$ için, $h = 2$ dir. Bu durumda $\mathcal{U}/\Gamma_0(12)$ yüzeyi üzerinde yatan $\mathcal{M}_6^0(12)$ figürü elde edilir (Şekil 1). Bu figür 6 köşe, 6 kenar, 2 yüze sahiptir ve cinsi sıfırdır. $\mathcal{M}_6^0(12)$ nin köşeleri aşağıdaki biçimdedir,

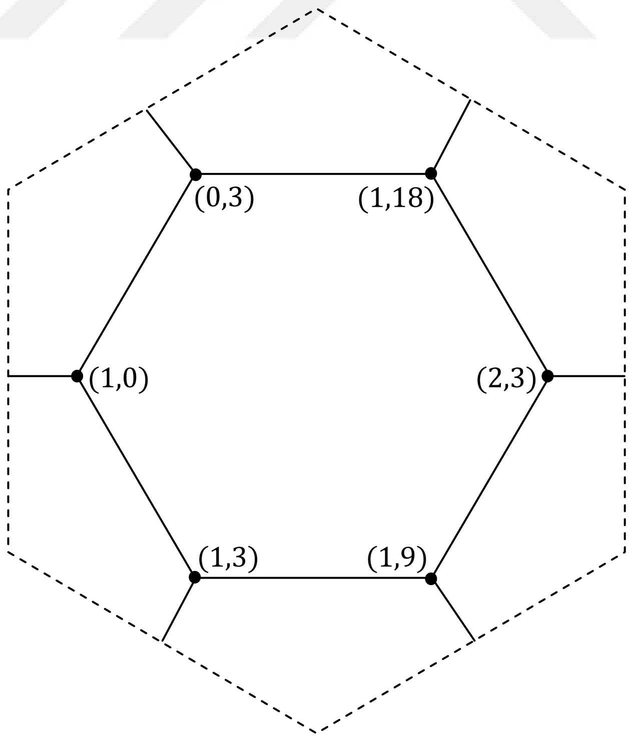
$$(1,0), (0,2), (1,6), (1,2), (0,6), (1,4).$$



Şekil 11. $\mathcal{M}_6^0(12)$:Altıgen

$N = 27$ için, $h = 3$ dür. Bu durumda $\mathcal{U}/\Gamma_0(27)$ yüzeyi üzerinde yatan $\mathcal{M}_6^0(27)$ figürü elde edilir (Şekil 2). Bu figür 6 köşe, 9 kenar, 3 yüze sahiptir ve cinsi 1 dir. $\mathcal{M}_6^0(27)$ nin köşeleri aşağıdaki biçimdedir,

$$(1,0), (0,3), (1,9), (1,3), (1,18), (2,3).$$



Şekil 12. $\mathcal{M}_6^0(27)$: $\{6,3\}$

2.3.3.2. Altıgen Figürler Tablosu

Bu alt bölümde, yukarıda verdiğimiz teoriden elde edilen verilerle oluşturulan bir tablo vereceğiz. $N = 2^{\alpha}3^{\beta} > 3 \;\; \beta = 1, 3$ ve $\alpha = 0, 2, 4, 6$ şartıyla verilen tüm N değerleri için aşağıdaki veriler elde edilir:

Oklar : $D = |\Gamma_B(N): \Gamma_0(N)|$

Kenarlar : $E = \frac{|\Gamma_B(N):\Gamma_0(N)|}{2}$

Köşeler : $V = |\Gamma_B(N): \Gamma_C^0(N)|$

Yüzler : $F = \frac{|\Gamma_B(N):\Gamma_0(N)|}{6}$

Cins : $2 - 2g = V - E + F$

Tablo 4. N değerleri ve altıgen figürler

N	D	E	V	F	g	**Figür**
12	12	6	6	2	0	Altıgen
27	18	9	6	3	1	{6,3}
48	48	24	12	8	3	{6,4}
108	108	54	18	18	10	{6,6}
192	192	96	24	32	21	{6,8}
432	432	216	36	72	55	{6,12}
1728	1728	864	72	288	253	{6,24}

3. İRDELEME

M bir Hausdorff uzayı olsun. M nin her noktasının $\mathbb{R}^2$ nin bir açığına homeomorf bir komşuluğu varsa M ye bir Riemann yüzeyi denir. Tanımdan kurulan bu özdeşimle, topolojik manada Öklid uzayına en yakın yapılardır. Bir Riemann yüzeyi inşa etmenin en kolay yolu: "G, $PSL(2,\mathbb{R})$ nin bir ayrık alt grubu ise G nin $\mathcal{U}$ üzerindeki grup hareketinin neticesinde elde edilen $S = \mathcal{U}/G$ bölüm uzayı bir Riemann yüzeyidir" özelliğinden faydalanmaktır. Aşağıda verilen iki teorem, bu tezde bahsi geçen gruplarla Riemann yüzeyleri arasındaki yakın ilişkiyi vurgulamaktadır:

Teorem (Jones ve Singerman, 1987): Her basit-bağlantılı Riemann yüzeyi aşağıdakilerden birine konform eşdeğerdir,

- **i)** Riemann küresi (Σ)
- **ii)** Kompleks düzlem ($\mathbb{C}$)
- **iii)** Üst-yarı düzlem ($\mathcal{U}$)

Teorem (Jones ve Singerman, 1987): Yukarıdaki yüzeylerin otomorfizma grupları aşağıdaki gibidir,

- **i)** $Aut\, \Sigma = PSL(2,\mathbb{C})$
- **ii)** $Aut\, \mathbb{C} = \{z \to az + b \ : \ a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$
- **iii)** $Aut\, \mathcal{U} = PSL(2,\mathbb{R})$

Bu tez çalışmasında önemi literatürce iyi bilinen $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki $\Gamma_B(N)$ normalliyeninin düzgün figürlerle (bir tür Riemann yüzeyi) olan ilişkisi incelenmiştir.

4. SONUÇLAR

Figürün en sade tanımı "bir yüzey üzerinde bir grafın çizilmesidir." Ancak bağlantılı bir grafın bir yüzeye gömülmesinin nasıl yapılacağı, belki de en temel durum olan yönlendirilebilir yüzeyler üzerinde ilk kez (Jones ve Singerman, 1978) çalışmasında verilmiştir. Figürün düzgün (regüler) olmasıyla anlaşılan şey "yüksek düzeyde simetri" özellikleridir.

I. Aşama (Kısım 2.1): Bu tez çalışmasında öncelikle gruplardan düzgün figürlerin nasıl inşa edildiği ile ilgili teori detaylandırılmıştır. Bu çalışmamızla ilgili olarak verilen en önemli detay, belli üçgen gruplarının normal alt gruplarıyla düzgün figürler arasında 1-1 bir ilişkinin varlığının bir kez daha vurgulanmasıdır.

II. Aşama (Kısım 2.2): Bu tez çalışmasına esin kaynağı olan (Ivrissimtzis ve Singerman, 2005) çalışmasında, Hecke gruplarının temel kongrüans alt gruplarına karşılık gelen düzgün figürler elde edilmiş, düşük indeksli olan bazıları geometrik olarak da çizilmiştir. Bizim özgün hesaplamalarımızın daha anlaşılır olması için ve aritmetik yapıları $\Gamma_B(N)$ normalliyenine nazaran daha iyi olması nedeniyle Γ-Modüler grubun temel kongrüans alt gruplarına karşılık gelen düzgün figürler detaylandırılmıştır.

III. Aşama: Grup teoriden bilindiği üzere bir grubun grup yapısının incelenmesinde bilhassa normal altgruplar büyük rol oynar. Ayrıca düzgün figürler üçgen grubun normal altgruplarına karşılık geldiğinden $\Gamma_B(N)$ nin üçgen grupları ve normal altgruplarının yapısı özellikle (Akbaş ve Singerman, 1990) çalışmasının yardımıyla incelenmiş ve düzgün figürlerinin kenar, köşe ve yüzlerinin hesaplanmasında hangi alt grupların kullanılması gerektiği belirlenmiştir (Kısım 2.3). Daha sonra sırasıyla

- $(2,3,\infty)$ simgeli üçgen gruplar (Kısım 2.3.1)
- $(2,4,\infty)$ simgeli üçgen gruplar (Kısım 2.3.2)
- $(2,6,\infty)$ simgeli üçgen gruplar (Kısım 2.3.3)

için karşılık gelen düzgün figürler elde edilmiş ve Kısım 2.3.1.deki sonuçlar (Yazıcı Gözütok vd., 2019) çalışmasında yayınlanmıştır.

5.ÖNERİLER

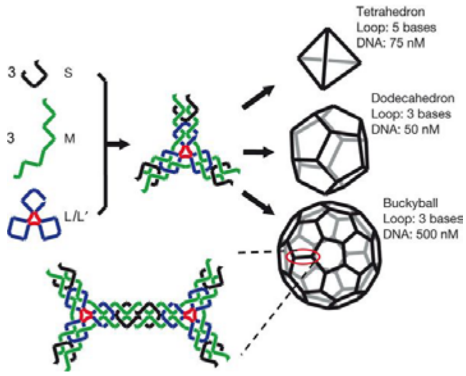
“G, $PSL(2,\mathbb{R})$’nin bir ayrık alt grubu ise G’nin $\mathcal{U}$ üzerindeki grup hareketinin neticesinde elde edilen $S = \mathcal{U}/G$ bölüm uzayı bir Riemann yüzeyidir” sonucundan yola çıkarak, kombinatoryal olarak ilk kez (Ivrissimtzis ve Singerman, 2005)’de ortaya konan ve bu tez çalışmasında $\Gamma_0(N)$’e uygulanan metot, diğer sonlu üretilmiş Fuchs gruplarına da pekâlâ uygulanabilir.

Yine (Singerman, 1988)’de ele alınan $\mathcal{F}(n)$ yani $\mathcal{F}/\Gamma(\mathrm{n})$ üçgen figürlerinin bizzat yüzey olarak özellikleri (nasıl elde edildiğinden ziyade), (Singerman ve Strudwick, 2020; Singerman, 1988; Singerman ve Strudwick, 2016; Ivrissimtzis vd., 2019) çalışmalarında araştırma konusu olmuştur. Örneğin düzgün figürlerin önemli invaryantlarından biri olan Petrie poligonlarının uzunlukları (kabaca yerkürede ekvator çizgisi ne ise, kristalize yüzeylerdeki Petrie poligonu odur) hesaplanmış ve köşe kümelerinin Fibonacci dizileri ile olan ilişkisi ve yine sayılar teorisi açısından dikkate değer bir çok sonuç elde edilmiştir. Bu tez çalışmasındaki yüzeyler de bu anlamda incelenmeye namzettir.

Son olarak düzgün figürlerin diğer disiplinlerdeki uygulamaları oldukça çarpıcıdır. (King, 2003)’te kimyasal maddelerin pek çok önemli özelliğinin aydınlatılmasında figürlerden yararlanılabileceğini göstermiştir. İlgili çalışmada örnek olarak fulleren ve grafit ele alınmıştır. Fulleren 20 altıgen ve 12 beşgen şeklinde dizili 60 Karbon atomuyla meydana gelmiş bir tür moleküldür (C60) (Şekil 13). Fullerenler üzerine ilk yayın Japon kimyager Eiji Osawa tarafından 1970 yılında yapıldı. Ancak esas farkındalık 15 yıl sonra 14 Kasım 1985 Nature dergisinde Robert F. Curl, Jr (ABD), Harold W. Kroto (İngiltere) ve Richard E. Smalley (ABD) araştırmacılar tarafından yayınlanan yayının dünya çapında ilgi görmesiyle oluştu. Bu ekip, keşiflerinden ötürü 1996 Nobel Kimya Ödülü'nü kazandı. Dünyada nadiren bulunan bir molekül olmasına karşın, fulereni kıymetli kılan şey nanoteknolojidir. Bilindiği üzere nano teknoloji, yaklaşık 1-100 nm boyutundaki materyallerin fiziksel, kimyasal ve biyolojik özelliklerinin; (tek atom, molekül ve hacimli cisim) düzenlenebilmesi, sentezlenebilmesi ve yeni nesil materyal, cihaz, yapı ve sistemlerin geliştirilebilmesi için değiştirilebilmesinin anlaşılması, işlenmesi ve kontrol edilmesi olarak tanımlanmaktadır (Diudea vd., 2001). Temelinde yüksek ısı ve basınç altında atomların yeniden dizayn edilmesi dediğimiz bu teknolojinin bilinen varyasyonları nano tüpler, maga tüpler, polimerlerdir. Yine çalışmalar göstermiştir ki, yüksek ısı ve basınç altındaki manipülasyonlar da dahi süreç tabiatı gereği bazı matematik modellemelere uygun olarak hareket etmektedir (Diudea vd., 2006). Dahası bir çok disiplinin optimizasyon probleminde, çalışılan konu ya da materyalin matematiksel modeli kurulup en etkili sonuca ulaşma gereksinimi vardır. Burada da düzgün figürler ve onların dejenere formları karşımıza çıkmaktadır. (Stefanelli, 2017).

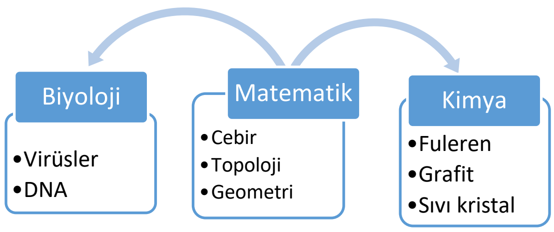
Şekil 13. Fulleren

Yine biyoloji alanında düzgün figürlerin içerisinde yer aldığı pek çok önemli çalışma ortaya konmuştur. Watson ve Crick 1956'da yine Nature dergisinde yayınlanan ve virüsleri konu alan makalelerinde, virüslerin şekil ve boyut manasında, geometrik olarak düzgün ve simetrik özellikler taşıdığına işaret etmişlerdir. Kurdukları hipoteze göre bitkilerdeki küçük virüslerden hayvanlardaki daha kompleks olanlarına kadar hepsi küçük birim bileşenlerin kristalize bir şekilde bir araya gelmesiyle türemekteydi. Aynı makalelerinde platonik katıların(düzgün figür) onları modellemedeki başarısını örneklerle verdiler. Bu hipotez sonraki yıllarda yüksek çözünürlüklü cihazların gelişmesiyle tamamen doğrulandı. Günümüzde DNA moleküllerinin dizaynında yine düzgün figürlerin etkin bir şekilde kullanıldığını görmekteyiz (Şekil 14). DNA'nın heliks şeklindeki çift sarmal yapısı ve baz eşleşmeleri, onu yapısal olarak manipülasyona açık hale getirmektedir. Ve tıpkı fullerende olduğu gibi yüksek nitelikli nanoyapılar inşa etmek için düzgün figürlerin özelliklerinden faydalanarak DNA üzerinde yapılan dizayn stratejilerinin başarısı, yüksek faktörlü dergilerdeki pek çok çalışmayla vurgulanmaktadır (Goodman vd., 2005; He vd., 2008; Winfree, 1998).



Şekil 14. DNA ve Düzgün figürler

Konunun matematik tarafını ele alacak olursak; grup kavramı modern cebirin en temel kavramlarından biridir. Geometrik şekillerin simetri özelliklerinin araştırılmasında ve cebirsel denklemlerin köklerinin belirlenmesinde ortaya çıkmıştır. Buna göre, her geometrik şekle bir simetri grubu ve her cebirsel denklemin köklerine bir Galois grubu karşılık gelir (Asar, 2009). Yukarıda bahsi geçen konular bunlardan birincisi, yani geometrik şekillerin simetri özellikleri ile ilgilidir. Bu tez çalışmasından elde edilen deneyim ve düzgün figürler hakkında elde edilecek temel bilgi ile



multidisipliner çalışmalar tasarlanabilir ya da önerilebilir.

6. KAYNAKLAR

Akbaş, M., 1989. The Normalizer of Modular Subgroups, Ph. D. Thesis, University of Southampton, Faculty of Mathematical Studies, Southampton.

Akbaş, M. ve Singerman D., 1990. The Normalizer of $\Gamma_0(N)$ in $PSL(2,\mathbb{R})$, Glasgow Mathematical Journal, 32, 317-327.

Akbaş, M. ve Singerman D., 1992. The signature of the normalizer of $\Gamma_0(N)$, London Math. Soc. Lecture Note Series, 165, 77-86.

Asar, A.O., 2009. Cebir, Eflatun Yayınevi, 373, Ankara.

Brahana, H. R., 1927. Regular maps and their groups, Amer. J. Math., 49, 268-284.

Cangül, İ. ve Singerman, D., 1998. Normal subgroups of hecke groups and regular maps, Math. Proc. Camb. Phill. Soc., 123, 1, 59-74.

Conder, M. D. E., Siran, J. ve Tucker, T. W., 2010. The genera, reflexibility and simplicity of regular maps, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 12, 343-364.

Conder, M. D. E. ve Ma, J., 2015. Regular maps with simple underlying graphs, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 110, 1-18.

Conway, J. H. ve Norton, S. P., 1979. Montrous Moonshine, Bulletion of the London Mathematical Society, 11, 308-339.

Coxeter, H. S. M. ve Moser, W. O. J., 1957. Generators and Relations for Discrete Groups, Springer, Berlin.

Coxeter, H. S. M., 1973. Regular polytopes, Dover Publications, New York

Coxeter, H. S. M., 1998. Non-Euclidean Geometry, Cambridge: CUP.

Crick, F., ve Watson, J. D., 1956. The Structure of Small Viruses, Nature, 177, 473.

Diudea, M. V. vd., 2001. Molecular Topology. Nova, Huntington, New York.

Diudea, M. V. vd., 2006. Generalized operations on maps, Croatica Chemica Acta, 79, 3, 355-362.

Dyck, W., 1880. Über Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemannscher Flächen, Math. Ann., 17, 473-509.

Farkas, H. M. ve Kra, I., 1980. Riemann Surfaces, Springer Verlag, New York.

Farkas, H. M. ve Kra, I., 2001. Riemann surfaces and the modular group, American Mathematical Society.

Goodman, R. P. vd., 2005. Rapid chiral assembly of rigid DNA building blocks for molecular nanofabrication, Science, 310, 1661–1665.

Grothendieck, A., 1997. Esquisse d'un programme(French) with an English translation, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 242, 243-283.

Hungerford, T.W., 1989. Algebra, Springer-Verlag, New York.

Ivrissimtzis, I., 1998. Congruence subgroups of Hecke groups and regular dessins, Ph. D. Thesis, University of Southampton, Faculty of Mathematical Studies, Southampton.

Ivrissimtzis, I. ve Singerman, D., 2005. Regular maps and principal congruence subgroups of Hecke groups, European Journal of Combinatorics, 26, 437-456.

Ivrissimtzis, I., Singerman D. ve Strudwick J., 2019. From Farey fractions to the Klein quartic and beyond, arXiv:1909.08568 [math.GR].

Jones, G. A. ve Singerman, D., 1978. Theory of Maps on Orientable Surfaces, Proceedings of the London Mathematical Society, 37, 2, 273-307.

Jones, G. A. ve Singerman, D., 1987. Complex Functions:An Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge.

Jones, G. A., Singerman, D. ve Wicks, K., 1991. The modular group and generalized Farey graphs, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 160, 316-338.

Keskin, R. ve Demirtürk, B., 2009. On suborbital graphs fort he normalizer $\Gamma_0(N)$, The Electronic Journal of Combinatorics, 16, 1-10.

King, R. B. ve Diudea, M. V., 2005. From the cube to the Dyck and Klein tessellations: Implications for the structures of zeolite-like carbon and boron nitride allotropes, J. Math. Chem., 38, 4, 425-435.

Kroto, H. W. vd., 1985. C_{60} Buckminsterfullerene, Nature, 318, 162-163.

Lehner, J. ve Newman, M., 1964. Weierstrass points of $\Gamma_0(n)$, Annals of Mathematics, 79, 2, 360-368.

Lehner, J., 1966. A Short Course in Automorphic Functions, New York.

Lijnen, E. ve Ceulemans, A., 2005. Topology-aided molecular design: The platonic molecules of genera 0 to 3, J Chem Inf Model, 45, 1719–1726.

Machlaclan, C., 1981. Groups of units of zero ternary quadratic forms, Proceeding of the Royal Society of Edinburg Section A, 88, 141-157.

Massey, W. S., 1991. A Basic Course in Algebraic Topology, Springer Verlag, New York.

Richeson, D., 2008. Euler's Gem: The polyhedron formula and the birth of topology, Princeton: Princeton University Press.

Schoneberg, B., 1974. Elliptic Modular Functions, Springer Verlag, Berlin.

Singerman, D., 1970. Subgroups of Fuchsian Groups and Finite Permutation Groups, Bulletion of the London Mathematical Society, 2, 3, 319-323.

Singerman D., 1988. Universal Tessellations, Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid, 1, 111-123.

Singerman D. ve Strudwick J., 2016. Petrie Polygons, Fibonacci sequences and Farey maps, Ars Mathematica Contemporanea, 10, 2, 349-357.

Singerman D. ve Strudwick J., 2020. The Farey Maps Modulo N, Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 89, 1, 39-52.

Stefanelli, U., 2017. Stable carbon configurations, Boll. Unione Mat. Ital., 9, 10, 335-354.

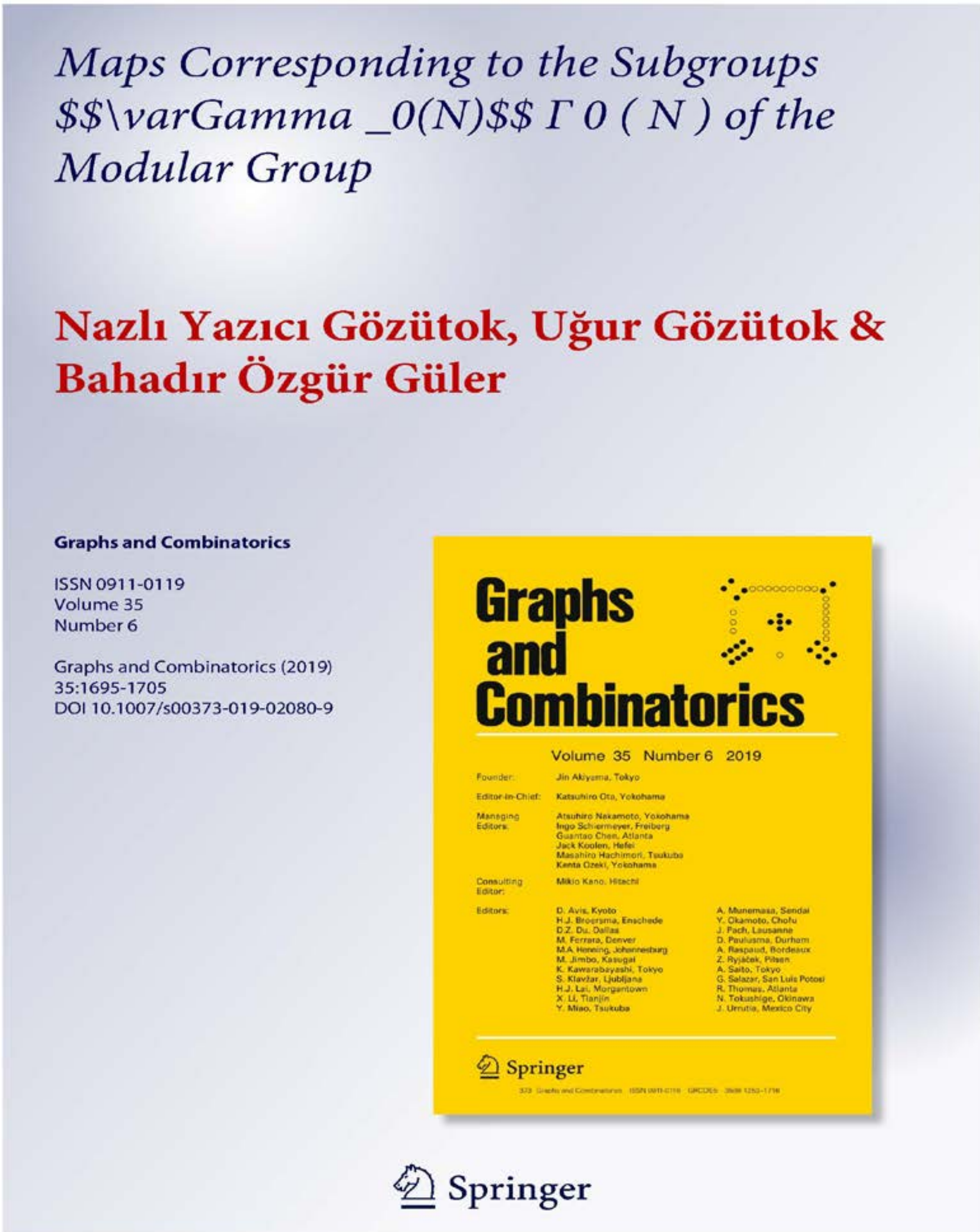
Winfree, E. vd., 1998. Design and self-assembly of two-dimensional DNA crystals, Nature, 394, 539–544.

7. EKLER

Ek 1.

Bu tezdeki sonuçlar kullanılarak yayımlanmış SCI kapsamındaki makaleler:

1) Yazıcı Gözütok, N., Gözütok, U. ve Güler, B. Ö., Maps Corresponding to the Subgroups $\Gamma_0(N)$ of the Modular Group, Graphs and Combinatorics, 35 (2019) 1695-1705.



Maps Corresponding to the Subgroups $$\varGamma _0(N)$$ Γ 0 (N) of the Modular Group

Nazlı Yazıcı Gözütok, Uğur Gözütok & Bahadır Özgür Güler

Graphs and Combinatorics

ISSN 0911-0119
Volume 35
Number 6

Graphs and Combinatorics (2019)
35:1695-1705
DOI 10.1007/s00373-019-02080-9

Springer

Ek-1'in devamı

2) Yazıcı Gözütok, N. ve Güler, B. Ö., Elliptic Elements of a Subgroup of the Normalizer and Circuits in Orbital Graphs, Applications and Applied Mathematics, 3 (2019) 11-21.

Available at
http://pvamu.edu/aam
Appl. Appl. Math.
ISSN: 1932-9466

Applications and Applied Mathematics:
An International Journal
(AAM)

Special Issue No. 3 (February 2019), pp. 11 – 21

Elliptic Elements of a Subgroup of the Normalizer and Circuits in Orbital Graphs

[1]Nazlı Yazıcı Gözütok, [2]Bahadır Özgür Güler

Department of Mathematics
Karadeniz Technical University
Trabzon, Turkey
[1]nazliyazici@ktu.edu.tr, [2]boguler@ktu.edu.tr

Received: August 8, 2018; Accepted: November 3, 2018

Abstract

In this study, we investigate suborbital graphs $G_{u,N}$ of the normalizer $\Gamma_B(N)$ of $\Gamma_0(N)$ in $PSL(2,\mathbb{R})$ for $N = 2^\alpha 3^\beta > 1$ where $\alpha = 0, 2, 4, 6$, and $\beta = 0, 2$. In these cases the normalizer becomes a triangular group. We first define an imprimitive action of $\Gamma_B(N)$ on $\hat{Q}$ using the group $\Gamma_C^0(N)$ and then obtain some properties of the suborbital graphs arising from this action. Finally we define suborbital graphs $F_{u,N}$ and investigate their properties. As a consequence, we find some certain relationships between the lengths of circuits in suborbital graphs $F_{u,N}$ and the periods of the group $\Gamma_C^0(N)$.

Keywords: Normalizer; Congruence Subgroup; Suborbital Graphs

MSC 2010 No.: 20H10; 05C25

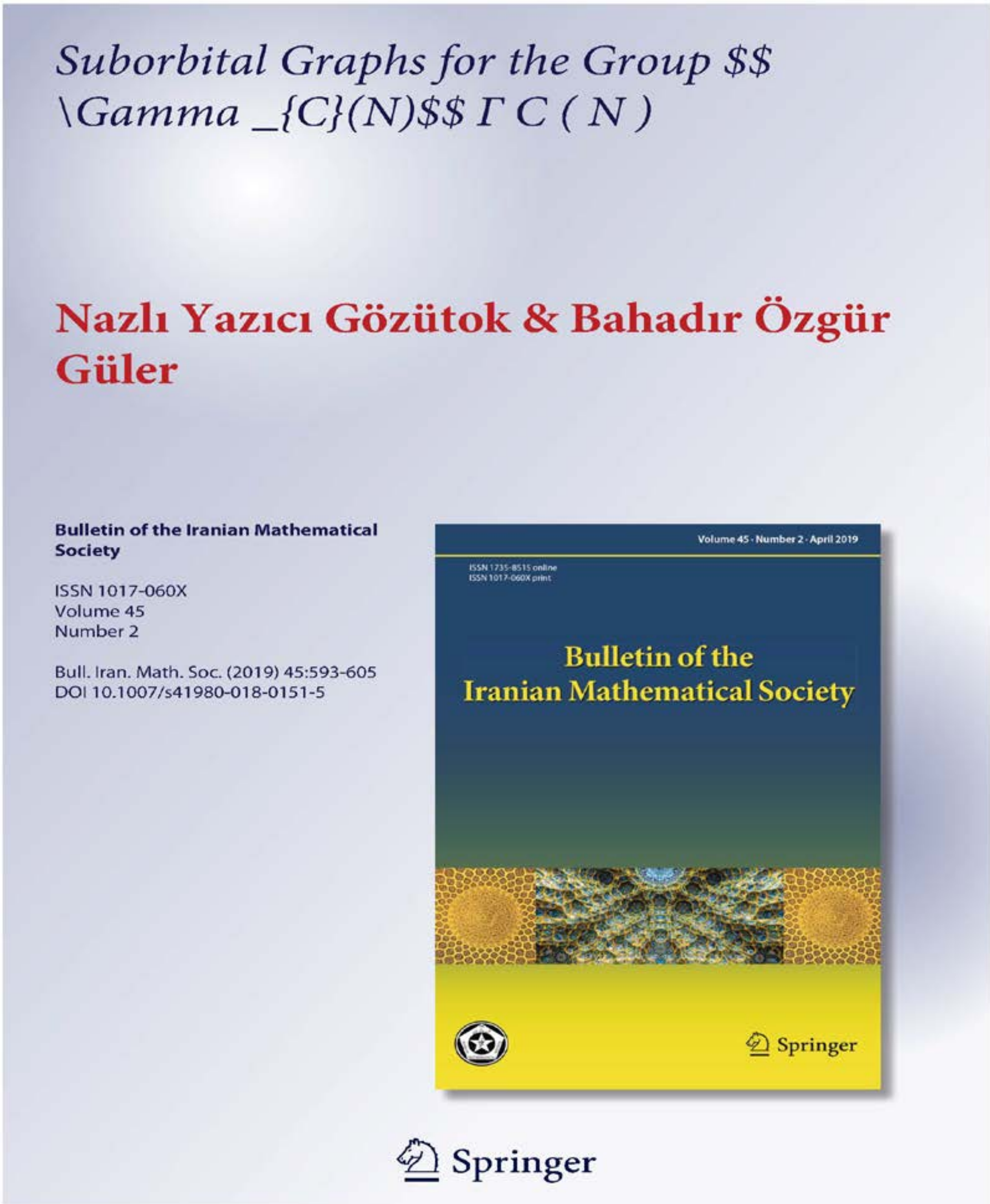
1. Introduction

Orbital graphs, also called suborbital graphs, were introduced into the theory of permutation groups (especially finite permutation groups) by Sims (1967). In their paper, Jones et al. (1991) investigate the concept in the relation to the modular group Γ acting on the projective line $PG(1,\mathbb{Q})$ over the field of rational numbers. This is an interesting infinite permutation group that, for well over a century, has played an important role in number theory, in the theory of binary quadratic forms, and in the theory of modular forms and automorphic functions.

The group $SL(2,\mathbb{Z})$, the group of 2×2 matrices of determinant 1 with integer entries, has a natural action by Mobius transformations on $PG(1,\mathbb{Q})$, given by

Ek-1'in devamı

3) Yazıcı Gözütok, N. ve Güler, B. Ö., Suborbital graphs for the group $\Gamma_C(N)$, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 45 (2019) 593-605.


Suborbital Graphs for the Group $$ \Gamma _{C}(N)$$ Γ C (N)

Nazlı Yazıcı Gözütok & Bahadır Özgür Güler

Bulletin of the Iranian Mathematical Society

ISSN 1017-060X
Volume 45
Number 2

Bull. Iran. Math. Soc. (2019) 45:593-605
DOI 10.1007/s41980-018-0151-5

Volume 45 · Number 2 · April 2019
ISSN 1735-8515 online
ISSN 1017-060X print

Bulletin of the Iranian Mathematical Society

Springer

Springer

ÖZGEÇMİŞ

Nazlı Yazıcı Gözütok, 1986 yılında Trabzon'da doğdu. İlk öğrenimini 24 Şubat İlkokulunda, orta öğrenimini Cumhuriyet Ortaokulunda ve lise öğrenimini Trabzon Lisesinde tamamladı.

2010 yılında Atatürk Üniversitesi Matematik Bölümünde lisans eğitimini, 2013 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans eğitimini tamamladı.

2014 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora programına başladı.

Yabancı dili İngilizcedir.

2015 yılında TÜBİTAK 2211-A Genel Yurt içi Doktora Bursu almaya hak kazanmış ve doktora eğitimi boyunca TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.