KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DİREKT TOPLAM OPERATÖRLERİNİN BAZI SPEKTRAL PROBLEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Elif OTKUN ÇEVİK

ŞUBAT 2015
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DİREKT TOPLAM OPERATÖRLERİNİN BAZI SPEKTRAL PROBLEMLERİ

Elif OTKUN ÇEVİK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26.12.2014
Tezin Savunma Tarihi : 13.02.2015

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV

Trabzon 2015

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Elif OTKUN ÇEVİK Tarafından Hazırlanan

DİREKT TOPLAM OPERATÖRLERİNİN BAZI SPEKTRAL PROBLEMLERİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu 03 / 02 / 2015 gün ve 1588 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

DOKTORA TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ**	....
Üye	**: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM**	....
Üye	**: Prof. Dr. Funda KARAÇAL**	....
Üye	**: Prof. Dr. Uğur ÇEVİK**	....
Üye	**: Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV**	....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Lisans ve doktora eğitimim boyunca engin bilgilerinden faydalandığım, her yönüyle örnek aldığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tez çalışmamın tamamlanıp bu hale getirilmesine kadar yardımını hiçbir zaman eksik hissetmediğim değerli hocam Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV'a saygılarımı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ hocama tezin her aşamasında öneri ve desteklerinden; Prof. Dr. Uğur ÇEVİK hocama çalışma konumun fizik anabilim dalındaki yerini ve önemini açıkladığından dolayı saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Diğer taraftan Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanım, hocalarım ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Son olarak, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen, bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan sevgili aileme, eşime ve kızıma engin hoşgörü ve sabırlarından dolayı teşekkür ederim.

Elif OTKUN ÇEVİK

Trabzon 2015

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "DİREKT TOPLAM OPERATÖRLERİNİN BAZI SPEKTRAL PROBLEMLERİ" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV'un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Elif OTKUN ÇEVİK

İÇİNDEKİLER

Doktora Tezi

ÖZET

DİREKT TOPLAM OPERATÖRLERİNİN BAZI SPEKTRAL PROBLEMLERİ

Elif OTKUN ÇEVİK

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV
2015, 82 Sayfa

Bu tez çalışmasında Hilbert uzaylarının direkt toplamı üzerindeki direkt toplam operatörleri ile onların koordinat operatörlerinin kompaktlık, kuvvet ve polinomsal sınırlılık özellikleri arasındaki ilişki araştırılmıştır.

Ayrıca bu ilişkiler spektrum ve genişletilmiş özdeğer kümeleri için de incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hilbert uzaylarının direkt toplamı; Operatörlerin direkt toplamı; Kompakt operatör; Operatörün spektrumu; Kuvvet ve polinomsal sınırlı operatör; Operatörün genişletilmiş özdeğeri.

PhD. Thesis

SUMMARY

SOME SPECTRAL PROBLEMS OF THE DİRECT SUM OF OPERATORS

Elif OTKUN ÇEVİK

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Zameddin ISMAILOV
2015, 82 Pages

In this thesis, the connections between compactness, power and polinomially boundedness properties of direct sum of operators in the direct sum of Hilbert spaces and their coordinate operators have been investigated.

Moreover, these connections have been researched for spectrum and extended eigenvalue sets too.

Key Words: Direct sum of Hilbert spaces; Direct sum of operators; Compact operator; Spectrum of the operator; Power and polinamially bounded operator; Extended eigenvalues of the operator.

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Komleks sayılar kümesi
$\lvert z\rvert$	: $z\in\mathbb{C}$ sayısının modülü
$\bar{z}$	: $z\in\mathbb{C}$ sayısının komleks eşleniği
$\arg z$	: $z\in\mathbb{C}$ sayısının esas argümenti
$\sup A(\inf A)$	: $A\subset\mathbb{R}$ kümesinin supremumu (infimumu)
$\overline{A}$	: A kümesinin kapanışı
$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$	: A_λ, $\lambda\in\Lambda$ (Λ bir damga kümesi) kümelerinin birleşimi
$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$	: A_λ, $\lambda\in\Lambda$ (Λ bir damga kümesi) kümelerinin kesişimi
$X\times Y$	: X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımı
$\mathbb{R}^n\left(\mathbb{C}^n\right)$	: $\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}$, $(\underbrace{\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}}_{n})$
$\dim A$	: A lineer uzayının boyutu
(x_n)	: Genel terimi x_n, $n\geq 1$ olan sayılar dizisi
$\sum_{n=1}^{m} x_n\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)$	: $x_1+x_2+\cdots+x_m$ (Genel terimi x_n olan sayılar serisi)
f'	: f fonksiyonunun türevi
μ -h.h.y	: μ -hemen her yerde
A^{-1}	: A operatörünün tersi
π	: Pi sayısı, yaklaşık değeri 3,14159265…
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	: $m\times n$ tipli matris

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Hilbert uzaylarının direkt toplamı ve Hilbert uzayları üzerinde tanımlı lineer kapalı operatörlerinin direkt toplamı teorisinin başlangıcı çok eskilere dayanmasına rağmen Hilbert uzaylarının direkt integrali ve üzerindeki operatörlerin direkt integrali teorisi 1949 yıllarından sonraki zamanlara tesadüf etmektedir. Hilbert uzaylarının direkt integrali ve üzerindeki operatörlerin direkt integrali teorisi, matematiğin ve bir çok fiziksel problemlerin çözüm yöntemi için uzayların ve operatörlerin direkt toplamı teorisinin bir genelleşmesi olarak 1949 yılında John von Neumann [1] tarafından temeli atılmış ve geliştirilmiştir. Bu konuda esas çalışmalar [2-5] işlerinde bir araya getirilmiştir. Bu teori lokal kompakt grupların gösterimler teorisinde, operatör halkalarının faktörlere ayrışım teorisinde, invariantlar teorisinde, von Neumann cebirlerinde, indirgeme teorisinde, çok partiküllü kuantum teorisinde, kuantum alan teorisinde, salt cisim teorisinde vs. başarılı şekilde kullanılmaktadır [1, 5-9].

Aslında tezin inceleme konusunun yapılandırılmasında, özellikle, E.A. Azoff'un [10] çalışmasının büyük etkisi olmuştur. Burada (Λ, Σ, μ) bir ölçüm uzayı, H_0 bir ayrılabilir Hilbert uzayı ve her $\lambda \in \Lambda$ için $H(\lambda) = H_0$ (özel durum) olmak üzere,

$$H = \int_{\Lambda}^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda)$$

Hilbert uzayları ailesinin direkt integrali ve

$$T : H \to H,\ T = \int_{\Lambda}^{\oplus} T(\lambda)\, d\mu(\lambda)$$

ise $T(\lambda) : H(\lambda) \to H(\lambda), \lambda \in \Lambda$ lineer operatörler ailesinin direkt integrali olsun. Bu çalışmanın esas amacı, spektral fonksiyonun ölçülebilirliği, $\sigma(T(\lambda))$ spektrumu ile $\lambda \in \Lambda$ parametresi ve $\sigma(T)$ ile $\sigma(T(\lambda))$, $\lambda \in \Lambda$ spektrumları arasındaki ilişkiyi belirlemek gibi üç problemden oluşmaktadır. Bu çalışmada;

(1) Eğer $\sigma(T)$ ailesi bir $K \subset C$ kompakt kümesi ile ayrık ise, hemen her λ için $\sigma(T(\lambda))$ kümesi K ile ayrıktır;

(2) $E \subset \Lambda$, $H_E = \int_E^{\oplus} H(\lambda) d\mu(\lambda)$, $T_E = \int_E^{\oplus} T(\lambda) d\mu(\lambda)$ olmak üzere eğer her λ için $\sigma(T(\lambda))$ bağlantısız ise bir pozitif ölçümlü E için $\sigma(T_E)$ kümesi de bağlantısızdır;

gibi sonuçlara ulaşılsa da maalesef spektrumlar arasında kesin ilişkilendirmenin olmadığı gözükmektedir. Her ne kadar bu sonuncu makale yayımlandıktan önce ve sonra [11-23] bilimsel çalışmaları günışığı görsede onların hiçbirinde spektrumların ve genişletilmiş özdeğer kümelerinin, kompaktlık, kuvvet ve polinomsal sınırlılık özelliklerinin ilişkilendirilmesine rastlanamamıştır.

Şimdi direkt integralin özel bir durumu olan direkt toplam hali için birkaç husus verilsin. Bir Hilbert uzayında tanımlı kompakt özeşlenik operatörler için spektral ayrılış teoremi, Hilbert uzayında bu operatörün özalt uzaylarının ortogonal direkt toplamı şeklinde gösterilebildiğini ve ayrıca bu operatörün özalt uzaylar üzerinde izdüşüm operatörlerinin direkt toplamı olarak açık bir ayrışımının verilebildiğini belirtir. Ayrıca, kuantum fiziğinde Hilbert uzaylarının direkt toplamı, parçaların sayısının değiştiği durumları içeren bir sistem olan Fock uzayı olarak ortaya çıkar ki burada kuantum mekaniği sistemi için her bir Hilbert uzayına bir ek serbestlik derecesi karşılık gelir. Gösterim teorisinde Peter-Weyl teoremi Hilbert uzayları üzerindeki bir kompakt grubun herhangi bir üniter gösteriminin sonlu boyutlu gösterimlerinin direkt toplamı şeklinde gösterilebildiğini garantiler [5].

İ.Sobhy El-Sayed’in [24-29] çalışmaları ve [30-32] çalışmalarında (bu listeyi daha da genişletmek mümkündür) direkt toplam için spektral teorinin olmayışından dolayı sonlu veya sayılabilir sayıda alt aralıklar üzerinde tanımlı fonksiyonların Hilbert uzayında, regüler veya singüler tipli skaler lineer diferansiyel operatörlerin direkt toplamının spektrumu, her defasında duruma has özel yöntemlerle incelenmiştir. Bu ve buna benzer birçok çok noktalı diferensiyel operatörler teorisinin spektral teorisinde araştırılan sorular ancak Hilbert veya Banach uzaylarının direkt toplamı üzerinde kolay çözümlenebileceği sonucuna varılmıştır.

Tezde alınacak sonuçlar çok noktalı diferensiyel operatörler ve spektral teorisine uygulanarak regüler veya singüler çok noktalı özeşlenik veya normal vs. diferensiyel operatörlerin spektral problemleri için literatürdeki bu tip boşlukları dolduracaktır.

Şimdi kuantum teorisinden direkt toplam operatörleri genel teorisinin yöntemlerinden yararlanarak çözülen bir örnek verilsin. [33] çalışmasında

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \left(s^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{cos^2 x}\ ,\ s > 0$$

Şeklindeki Schrödinger operatörünün $L_2(\mathbb{R})$’de ürettiği Hamiltonianlar (sistemin total enerji fonksiyonu) esas inceleme konusu olmuştur. Potensiyel fonksiyonunun sayılabilir sayıda singülerlik noktası olduğundan araştırma $L_2(\mathbb{R})$’de mümkün olmamıştır. Bunun üzerine, üretilen Hamiltonian’ lar ilk önce her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$H_n = L_2\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$$

uzayında bulunmuş ve daha sonra H operatörünün $L_2(\mathbb{R})$’de ürettiği Hamiltonian’ın

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} L_2\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$$

şeklindeki direkt toplam olduğu gösterilmiştir.

Bu ve buna benzer birçok problem Hilbert uzaylarının direkt toplamı üzerinde lineer operatörlerin spektral teorisini güncel yapan önemli faktörlerdendir.

Bu tez çalışmasında:

(1) Hilbert uzaylarının direkt toplamı üzerinde tanımlanan direkt toplam operatörlerinin kompaktlığı ile onların koordinat operatörlerinin kompaktlığı arasındaki bağıntıların araştırılması;

(2) Hilbert uzaylarının direkt toplamı üzerinde tanımlanan direkt toplam operatörlerinin spektrum parçaları ile onların koordinat operatörlerinin spektrum parçaları arasındaki bağlantıların incelenmesi;

(3) Hilbert uzaylarının direkt toplamı üzerinde tanımlanan direkt toplam operatörlerinin kuvvet sınırlılığı ile onların koordinat operatörlerinin kuvvet sınırlılığı arasındaki bağıntıların irdelenmesi;

(4) Hilbert uzaylarının direkt toplamı üzerinde tanımlanan direkt toplam operatörlerinin polinomsal sınırlılığı ile onların koordinat operatörlerinin polinomsal sınırlılığı arasındaki bağıntıların irdelenmesi;

(5) Hilbert uzaylarının direkt toplamı üzerinde tanımlanan direkt toplam operatörlerinin genişletilmiş özdeğer kümeleri ile onların koordinat operatörlerinin genişletilmiş özdeğer kümeleri arasındaki bağıntıların araştırılması;

amaçlanmakdadır.

1.2. Gerekli Kavram ve Açıklamalar

Bu bölümde tezde kullanılacak gerekli kavram ve açıklamalar verilecektir.

Tanım 1.2.1 (Metrik Uzay, ([34], s.11)**):** X boş olmayan bir küme ve

$$d: X \text{ x } X \to \mathbb{R},\ (x,y) \to d(x,y)$$

bir fonksiyon olsun. Eğer d fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

(a) $d(x,y) \geq 0$;

(b) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (özdeşlik aksiyomu);

(c) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetriklik aksiyomu);

(d) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği),

özelliklerini sağlıyorsa ona X üzerinde bir uzaklık fonksiyonu veya metrik adı verilir ve (X,d) ikilisine bir metrik uzay denir.

Örnek 1.2.2 ([35], s.5)**:** $X = \mathbb{R}$ olmak üzere

$$d: \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,y) \to d(x,y) = |x-y|$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriği denir. Gerçekten;

(a) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = |x-y| \geq 0$;

(b) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(c) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = |x-y| = |(-1)(y-x)| = |-1||y-x| = d(y,x)$;

(d) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$

şartları sağlanır. O halde $(\mathbb{R},d)$ bir metrik uzaydır.

Tanım 1.2.3 (Ayrılabilir Metrik Uzay, ([34], s.19)**):** (X,d) bir metrik uzay olsun. Eğer bu metrik uzayda sayılabilir yoğun bir küme bulunabilirse bu metrik uzaya ayrılabilir metrik uzay denir.

Örneğin; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ rasyonel sayılar kümesi $(\mathbb{R},d)$ uzayında yoğun olduğundan dolayı $(\mathbb{R},d)$ metrik uzayı ayrılabilir bir metrik uzaydır.

Tanım 1.2.4 (Lineer Uzay, ([34], s.3)**):** X boş olmayan bir küme ve K ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun.

$$+ : X \text{ x } X \to X,\ (x, y) \to x + y\ ,\ x, y \in X$$
$$\bullet : K \text{ x } X \to X,\ (\alpha, x) \to \alpha x\ ,\ \alpha \in K\ , x \in X$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemleri denilen işlemler tanımlansın. Bu işlemler her $x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in K$ için aşağıdaki koşulları sağlasın:

(a) $x + y = y + x$;

(b) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

(c) $x + 0 = x$ bağıntısını sağlayan bir tek $0 \in X$ elemanı vardır;

(d) $x + (-x) = 0$ bağıntısını sağlayan bir tek $-x \in X$ elemanı vardır;

(e) $1 \cdot x = x$;

(f) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$;

(g) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

(h) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

Bu durumda X 'e K cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir. K 'nın elemanlarına skaler, X 'in elemanlarına ise vektör adı verilir. $K = \mathbb{R}$ $(K = \mathbb{C})$ ise X 'e bir reel (komleks) lineer uzay denir.

Örnek 1.2.5 ([34], s.5)**:** S bir küme ve X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Bu durumda $F(S, X) := \{ f : S \to X \text{ bir fonksiyon} \}$ olmak üzere F ailesi

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)\ ,\ f, g \in F(S, X)$$
$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x)\ ,\ \alpha \in K,\ f \in F(S, X)$$

işlemleri altında bir lineer uzaydır

Örnek 1.2.6 ([34], s.5)**:** X ve Y iki lineer uzay olsun. Bu durumda $X \times Y$ uzayı

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\ ,\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$$
$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)\ ,\ \alpha \in K, (x, y) \in X \times Y$$

cebirsel işlemleri altında bir lineer uzaydır.

Tanım 1.2.7 (Lineer Altuzay, ([34], s.3)**):** X bir lineer uzay ve $Y \subset X$, $Y \neq \varnothing$ olsun. Eğer Y kümesi X lineer uzayı üzerinde tanımlanan cebirsel işlemler altında kendi başına bir lineer uzay oluşturuyorsa Y 'ye X 'in bir lineer altuzayı denir.

Örnek 1.2.8 ([35], s.53)**:** X bir lineer uzay olmak üzere $Y=\{0\}\subset X$ alt kümesi X 'in bir lineer alt uzayıdır.

Örnek 1.2.9 ([35], s.56)**:** $\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,...,x_n,...):x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}\}$ kümesi $K=\mathbb{R}$ cismi üzerinde

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)\ ,\ x=(x_1,x_2,...,x_n),y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$$
$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n)\ ,\ \alpha\in\mathbb{R},x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

işlemleri altında bir lineer uzay olup

$$X=\{x=(x_1,x_2,x_3):x_1=x_2\ \text{ ve }\ x_3=0\}\subset\mathbb{R}^3$$

alt kümesi aynı cebirsel işlemler altında $\mathbb{R}^3$'ün bir lineer altuzayıdır.

Tanım 1.2.10 (Normlu Lineer Uzay, ([34], s.31)**:** X , K cismi üzerinde tanımlı bir lineer uzay olsun. Eğer $\|\cdot\|_X:X\to\mathbb{R},\ x\to\|x\|_X$ dönüşümü her $x,y\in X$ ve her $\alpha\in K$ için

(i) $\|x\|_X\geq 0$;

(ii) $\|x\|_X=0\Leftrightarrow x=\theta_X$;

(iii) $\|\alpha x\|_X=|\alpha|\|x\|_X$;

(iv) $\|x+y\|_X\leq\|x\|_X+\|y\|_X$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlıyorsa ona X lineer uzayı üzerinde bir norm ve bu durumda $(X,\|\cdot\|_X)$ ikilisine bir normlu lineer uzay veya normlu uzay adı verilir.

Örnek 1.2.11 ([34], s.35)**:** X ve Y iki normlu uzay olsun. Bu durumda $X\times Y$ lineer uzayı

$$\|(x,y)\|_{X\times Y}=\|x\|_X+\|y\|_Y$$

şeklinde tanımlanan norm altında bir normlu uzaydır.

Örnek 1.2.12 ([34], s.35)**:** $\ell_p:=\left\{(x_n):x_n\in\mathbb{C},\ n\geq 1,\ \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\right\},\ 1\leq p<\infty$ lineer uzayı, her $(x_n)\in\ell_p$ için

$$\|(x_n)\|_{\ell_p}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}$$

şeklindeki fonksiyon altında bir normlu uzaydır.

Tanım 1.2.13 ([36], s.55)**:** Bir X kümesi üzerinde tanımlı, $\mathbb{C}(\mathbb{R})$-değerli, Σ-ölçülebilir, $|f|^p$, $1\leq p<\infty$ fonksiyonunun bir μ ölçümüne göre integralinin sonlu olduğu μ denklik sınıflarının ailesinin tümü $L_P(X,\Sigma,\mu)$ ile gösterilecektir. Bu $L_P(X,\Sigma,\mu)$ lineer uzayı

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} , \ 1 \le p < \infty$$

fonksiyonu altında bir normlu uzaydır ([36], s.59).

Özel durumda eğer, $X \subset \mathbb{R}$, Σ, X 'in Lebesgue ölçülebilir alt kümelerinin oluşturduğu σ-cebiri ve $\mu = \lambda$ Lebesgue ölçümü ise $L_P(X, \Sigma, \mu)$ Lebesgue uzayı $L_P(X)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.14 (Yakınsak dizi, ([34], s.12; s.36)**) :** $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay, $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$ ise, $(x_n) \subset X$ dizisi $x \in X$ elemanına $\|\cdot\|_X$ normuna göre yakınsıyor denir ve bu durum $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_X} x$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ notasyonlarından biriyle gösterilir.

Örnek 1.2.15 ([34], s.38)**:** $(f_n) \subset C([0,1], \mathbb{R}) := \{ f \mid f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ ve sürekli} \}$ dizisi her $t \in [0,1]$ için $f_n(t) := t^n$, $n \ge 1$ şeklinde tanımlanıyor. (f_n) dizisi $\left(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1 \right)$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$, $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ normlu uzayında $f(t) = 0$ noktasına yakınsaktır.

Gerçekten;

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt = \int_0^1 (t^n - 0) dt = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ bulunur. Bu ise $f_n(t) := t^n$, $n \ge 1$ dizisinin $\|\cdot\|_1$ normuna göre $f(t) = 0$ noktasına yakınsadığını gösterir.

Tanım 1.2.16 (Cauchy Dizisi, ([34], s.12; s.36)**):** $(X, \|\cdot\|_X)$ bir normlu uzay ve $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_\varepsilon$ doğal değerlerinde $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir ise $(x_n) \subset X$ dizisine $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi denir.

Örnek 1.2.17: $C([0,1], \mathbb{R}) := \{ f \mid f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ ve sürekli} \}$ olmak üzere $(f_n) \subset C([0,1], \mathbb{R})$ dizisi her $t \in [0,1]$ için $f_n(t) := t^n$ şeklinde tanımlanıyor. (f_n) dizisi

$$\left(C\left([0,1],\mathbb{R}\right),\|\cdot\|_1\right),\ \|f\|_1=\int_0^1\left|f(x)\right|dx\ ,\ f\in C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$$

normlu uzayında bir Cauchy dizisi olup

$$\left(C\left([0,1],\mathbb{R}\right),\|\cdot\|_\infty\right),\ \|f\|_\infty=\sup\left\{\left|f(x)\right|: x\in[0,1]\right\},\ f\in C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$$

normlu uzayında bir Cauchy dizisi değildir. Gerçekten;

İlk olarak (f_n) dizisinin $\left(C\left([0,1],\mathbb{R}\right),\|\cdot\|_1\right)$ normlu uzayında Cauchy dizisi olduğu gösterilsin. $n,m\in\mathbb{N}$ ve $n>m$ olsun. Bu halde $n>m$ olduğu için

$$\int_0^1\left|t^n-t^m\right|dt=\int_0^1\left(t^m-t^n\right)dt=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{m}$$

olduğu elde edilir. Eğer her $\varepsilon>0$ için $n_\varepsilon:=\left[\!\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\!\right]+1$ alınırsa her $m,n>n_\varepsilon$ için

$$\|f_n-f_m\|_1<\frac{1}{m}<\varepsilon$$

olduğundan

$$\|f_n-f_m\|_1<\varepsilon$$

olduğu bulunur. Öyleyse (f_n) dizisi $\left(C\left([0,1],\mathbb{R}\right),\|\cdot\|_1\right)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisidir.

Şimdi (f_n) dizisinin $\left(C\left([0,1],\mathbb{R}\right),\|\cdot\|_\infty\right)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olmadığı gösterilsin. Aksine (f_n) dizisinin $\left(C\left([0,1],\mathbb{R}\right),\|\cdot\|_\infty\right)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olduğu varsayılsın. $n,m\in\mathbb{N}$ ve $n>m$ olsun. Bu halde $n>m$ olduğu için

$$\|f_n-f_m\|_\infty=\sup\left\{\left|t^n-t^m\right|:0\le t\le 1\right\}=\sup\left\{t^m-t^n:0\le t\le 1\right\}$$

eşitliği elde edilir. Kolay hesaplamalarla

$$\sup\left\{t^m-t^n:0\le t\le 1\right\}=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}}\left(1-\frac{m}{n}\right)$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\|f_n-f_m\|_\infty=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}}\left(1-\frac{m}{n}\right)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $m=k\in\mathbb{N}$ ve $n=2k\in\mathbb{N}$ alınırsa

$$\| f_n - f_m \|_\infty = \left(\frac{k}{2k} \right)^{\frac{k}{2k-k}} \left(1 - \frac{k}{2k} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

olur ki bu durumda $\varepsilon = \frac{1}{8}$ için $\frac{1}{4} < \frac{1}{8}$ eşitsizliğine ulaşılır. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla (f_n) dizisinin $\left(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty \right)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi değildir.

Tanım 1.2.18 (Tam Uzay, ([34], s.16; s.36)**):** Eğer bir normlu uzayda her Cauchy dizisi bu normlu uzayda yakınsak ise o uzaya tam uzay denir.

Tanım 1.2.19 (Banach Uzayı, ([34], s.16; s.48)**):** Tam normlu uzaya bir Banach Uzayı denir.

Örnek 1.2.20 ([35], s.33)**:** $\ell_\infty := \left\{ z := (z_1, ..., z_n, ...) : (z_n) \subset \mathbb{C} \text{ sınırlı bir dizi} \right\}$ lineer uzayı üzerinde $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ normu her $z \in \ell_\infty$ için

$$\|z\|_\infty := \sup\left\{ |z_n| : n \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklinde tanımlanıyor. Bu durumda $\left(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty \right)$ normlu uzayı bir Banach uzayıdır.

Gerçekten; $\left(z^{(n)} \right) = \left(\left(z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, ..., z_k^{(n)}, ... \right) \right) \subset \ell_\infty$, $\left(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty \right)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilir öyleki her $p, q \in \mathbb{N}; p, q \geq N(\varepsilon)$ için

$$\left\| z^{(p)} - z^{(q)} \right\|_\infty < \varepsilon$$

bağıntısı doğrudur. Burada

$$\left\| z^{(p)} - z^{(q)} \right\|_\infty = \sup\left\{ \left| z_k^{(p)} - z_k^{(q)} \right| : k \in \mathbb{N} \right\}$$

olduğundan son eşitsizlikten her $k \in \mathbb{N}$ için $\left(z_k^{(n)} \right) \subset \mathbb{C}$ kompleks sayı dizilerinin her $p, q \in \mathbb{N}; p, q \geq N(\varepsilon)$ için

$$\left| z_k^{(p)} - z_k^{(q)} \right| < \varepsilon$$

şartını sağladığı görülür. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için $\left(z_k^{(n)} \right) \subset \mathbb{C}$ kompleks sayı dizilerinin her biri birer Cauchy dizisidir. Dolayısıyla Cauchy yakınsaklık kriterine göre her $k \in \mathbb{N}$ için $\left(z_k^{(n)} \right) \subset \mathbb{C}$ kompleks sayı dizilerinin her biri yakınsaktır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $z_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z_k := \lim_{n \to \infty} z_k^{(n)} \quad \text{ve} \quad z := (z_1, z_2, ..., z_k, ...)$$

olsun.

(a) $z \in \ell_\infty$'dur. Gerçekten; $\left(z^{(n)}\right) = \left(\left(z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, ..., z_k^{(n)}, ...\right)\right) \subset \ell_\infty$, $\left(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty\right)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan $1 > 0$ sayısına karşılık bir $N \equiv N(1) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır öyleki her $p, q \in \mathbb{N}$; $p, q \geq N(\varepsilon)$ için

$$\left\|z^{(p)} - z^{(q)}\right\|_\infty < 1$$

Özel olarak her $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ için

$$\left\|z^{(n)} - z^{(N)}\right\|_\infty < 1$$

şeklindedir. Bu durumda

$$\left\|z^{(n)} - z^{(N)}\right\|_\infty = \sup\left\{\left|z_k^{(n)} - z_k^{(N)}\right| : k \in \mathbb{N}\right\}$$

olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ için

$$\left|z_k^{(n)} - z_k^{(N)}\right| < 1$$

olup buradan

$$\left|z_k^{(n)}\right| \leq 1 + \left|z_k^{(N)}\right|$$

olur. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\left|z_k^{(N)}\right| \leq \left\|z^{(N)}\right\|_\infty$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ için

$$\left|z_k^{(n)}\right| \leq 1 + \left\|z^{(N)}\right\|_\infty$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ayrıca her $k \in \mathbb{N}$ için $z_k := \lim_{n\to\infty} z_k^{(n)}$ olduğundan

$$|z_k| = \lim_{n\to\infty}\left|z_k^{(n)}\right|$$

şeklindedir. O halde son eşitsizlikten her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left|z_k^{(n)}\right| \leq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \left\|z^{(N)}\right\|_\infty\right)$$

Yani her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|z_k| \leq 1 + \left\|z^{(N)}\right\|_\infty$$

olduğu elde edilir. O halde

$$z = (z_1, z_2, ..., z_k, ...) \in \ell_\infty$$

(b) $\lim_{n\to\infty} z^{(n)} \overset{\|\cdot\|_\infty}{=} z$ 'dir. Gerçekten; $\left(z^{(n)}\right)=\left(\left(z_1^{(n)},z_2^{(n)},...,z_k^{(n)},...\right)\right)\subset \ell_\infty$, $\left(\ell_\infty,\|\cdot\|_\infty\right)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon>0$ sayısı için $\frac{\varepsilon}{2}>0$ sayısına karşılık bir $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\in\mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilir öyleki her $p,q\in\mathbb{N}$; $p,q\geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için

$$\left\|z^{(p)}-z^{(q)}\right\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$$

şeklindedir. O halde

$$\left\|z^{(p)}-z^{(q)}\right\|_\infty=\sup\left\{\left|z_k^{(p)}-z_k^{(q)}\right|:k\in\mathbb{N}\right\}$$

olduğundan her $k\in\mathbb{N}$ ve her $p,q\in\mathbb{N}; p,q\geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için

$$\left|z_k^{(p)}-z_k^{(q)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği bulunur. Her $k\in\mathbb{N}$ için $z_k=\lim_{n\to\infty} z_k^{(n)}$ olduğundan $p\in\mathbb{N}$ ve $k\in\mathbb{N}$ sayıları sabit olarak göz önüne alındığında son eşitsizlikte $q\to+\infty$ için limit alındığında her $k,p\in\mathbb{N}$ öyleki $p\geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için

$$\lim_{q\to\infty}\left|z_k^{(p)}-z_k^{(q)}\right|<\lim_{q\to\infty}\frac{\varepsilon}{2}$$

dolayısıyla

$$\left|z_k^{(p)}-z_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

olduğu bulunur. O halde her $p\in\mathbb{N}$; $p\geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için

$$\left\|z^{(p)}-z\right\|_\infty=\sup\left\{\left|z_k^{(p)}-z_k\right|:k\in\mathbb{N}\right\}\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

şeklindedir. Sonuç olarak her $n\in\mathbb{N}$, $n\geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için

$$\left\|z^{(n)}-z\right\|_\infty<\varepsilon$$

olduğundan $\left(z^{(n)}\right)\subset \ell_\infty$ dizisi $\left(\ell_\infty,\|\cdot\|_\infty\right)$ normlu uzayında $z\in \ell_\infty$ noktasına yakınsaktır. Dolayısıyla $\left(\ell_\infty,\|\cdot\|_\infty\right)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan $\left(\ell_\infty,\|\cdot\|_\infty\right)$ normlu uzayı bir Banach uzayıdır.

Örnek 1.2.21 ([35], s.38)**:** $(\mathbb{R},+,\cdot)$ reel sayılar cismi ve $a,b\in \mathbb{R}$; $a<b$ olan iki reel sayı olmak üzere $C\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ lineer uzayı

$$C\left([a,b],\mathbb{R}\right):=\left\{ f \mid f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ sürekli}\right\}$$

şeklinde tanımlanıyor. Bu durumda

$$\left(C\left([a,b],\mathbb{R}\right),\|\cdot\|_1\right),\ \|f\|_1=\int_a^b\left|f(x)\right|dx\ ,\ f\in C\left([a,b],\mathbb{R}\right)$$

normlu uzayı bir Banach uzayı değildir.

Gerçekten; her $n\in \mathbb{N}$ için

$$f_n(x):=\begin{cases} 0 & , \quad a\leq x\leq 0 \\ nx & , \quad 0<x<\dfrac{1}{n} \\ 1 & , \quad \dfrac{1}{n}\leq x\leq b \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (f_n) dizisi $\left(C\left([a,b],\mathbb{R}\right),\|\cdot\|_1\right)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olup yakınsak bir dizi değildir.

Tanım 1.2.22 (İç Çarpım Uzayı, ([34], s.51; s.53))**:** X, $K\left(K=\mathbb{C}\ ,\ K=\mathbb{R}\right)$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $(\cdot,\cdot)_X : X \text{ x } X\rightarrow K$ dönüşümü;

a) $\forall x\in X$ için $(x,x)_X\geq 0$ ve $(x,x)_X=0\Leftrightarrow x=\theta$;

b) $\forall x,y\in X$ için $(x,y)_X=\overline{(y,x)_X}$;

c) $\forall x,y\in X$ ve $\alpha\in K$ için $(\alpha x,y)_X=\alpha(x,y)_X$;

d) $\forall x,y,z\in X$ için $(x+y,z)_X=(x,z)_X+(y,z)_X$

koşullarını sağlıyorsa ona X lineer uzayı üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu, $\left(X,(\cdot,\cdot)_X\right)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir. Eğer $K=\mathbb{C}$ $\left(K=\mathbb{R}\right)$ ise ona kompleks (reel) iç çarpım uzayı denir.

$K=\mathbb{R}$ durumunda her $x,y\in X$ için $(x,y)_X=(y,x)_X$ eşitliği doğrudur.

Ayrıca her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

(1) $(\alpha x+\beta y, z)_X=(\alpha x, z)_X+(\beta y, z)_X=\alpha(x, z)_X+\beta(y, z)_X$;

(2) $(x, \alpha y)_X=\overline{(\alpha y, x)_X}=\overline{\alpha(y, x)_X}=\overline{\alpha}\,\overline{(y, x)_X}=\overline{\alpha}(x, y)_X$;

(3) $$(x, \alpha y+\beta z)_X=\overline{(\alpha y+\beta z, x)_X}=\overline{\alpha(y, x)_X+\beta(z, x)_X}$$
$$=\overline{\alpha}\,\overline{(y, x)_X}+\overline{\beta}\,\overline{(z, x)_X}=\overline{\alpha}(x, y)_X+\overline{\beta}(x, z)_X$$

bağıntılarının doğruluğu elde edilir.

Örnek 1.2.23 ([37], s.40)**:** $\alpha \in C[a, b]$,$\alpha(t)>0$, $t \in[a, b]$ olmak üzere

$$(f, g)_{L_2[a, b]}=\int_a^b \alpha(t) f(t) \overline{g(t)} d t, \quad f, g \in L_2[a, b]$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm $L_2[a, b]$ lineer uzayı üzerinde bir iç çarpım fonksiyonudur.

Gerçekten;

a) Her $f \in L_2[a, b]$ için $(f, f)_{L_2[a, b]}=\int_a^b \alpha(t) f(t) \overline{f(t)} d t=\int_a^b \alpha(t)|f(t)|^2 d t \geq 0$,

Eğer

$$(f, f)_{L_2[a, b]}=\int_a^b \alpha(t) f(t) \overline{f(t)} d t=\int_a^b \alpha(t)|f(t)|^2 d t=0$$

ise her $t \in[a, b]$ için $\alpha(t)>0$ olduğundan her $t \in[a, b]$ için $|f(t)|=0$ $\lambda-$h.h.y olup buradan her $t \in[a, b]$ için $f(t)=0$ $\lambda-$h.h.y dır, yani $(f, f)=0$ ise $f=0$ $\lambda-$h.h.y olduğu bulunur.

Tersine, eğer $f=0$ ise

$$(f, f)_{L_2[a, b]}=\int_a^b \alpha(t) f(t) \overline{f(t)} d t=\int_a^b \alpha(t)|f(t)|^2 d t=\int_a^b 0 d t=0$$

olup $(f, f)_{L_2}=0$ eşitliği elde edilir.

b) Her $f, g \in L_2[a, b]$ için

$$(f, g)_{L_2[a, b]}=\int_a^b \alpha(t) f(t) \overline{g(t)} d t=\overline{\int_a^b \overline{\alpha(t) f(t)} g(t) d t}$$
$$=\overline{\int_a^b \alpha(t) g(t) \overline{f(t)} d t}=\overline{(g, f)_{L_2[a, b]}} ;$$

c) Her $f \in L_2[a,b]$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ için

$$(\beta f, g)_{L_2[a,b]} = \int_a^b \beta\alpha(t)\, f(t)\overline{g(t)}\,dt = \beta\int_a^b \alpha(t)\, f(t)\overline{g(t)}dt = \beta(f,g)_{L_2[a,b]};$$

d) Her $f,g,h \in L_2[a,b]$ için

$$\begin{aligned}(f+h,g)_{L_2[a,b]} &= \int_a^b \alpha(t)\big(f(t)+h(t)\big)\overline{g(t)}\,dt = \int_a^b \Big(\alpha(t)\, f(t)\overline{g(t)} + \alpha(t)h(t)\overline{g(t)}\Big)dt \\ &= \int_a^b \alpha(t)\, f(t)\overline{g(t)}\,dt + \int_a^b \alpha(t)h(t)\overline{g(t)}\,dt = (f,g)_{L_2[a,b]} + (h,g)_{L_2[a,b]}\end{aligned}$$

Tanım 1.2.24 (İç Çarpımın Ürettiği Norm, ([34], s.56)**):** $\left(X,(\cdot,\cdot)_X\right)$ bir iç çarpım uzayı olmak üzere $x \in X$ için

$$\|x\| = (x,x)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir norm olup ve bu norma iç çarpımın ürettiği norm denir.

Tanım 1.2.25 (Hilbert Uzayı, ([34], s.63)**):** Eğer bir iç çarpım uzayı iç çarpımın ürettiği norma göre tam ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Örnek 1.2.26 ([34], s.64)**:** $(\cdot,\cdot):\ell_2\times\ell_2 \to \mathbb{C}$, $(z,w) := \sum_{n=1}^{\infty} z_n\overline{w_n}$, $z=(z_n), w=(w_n)\in \ell_2$

fonksiyonu

$$\ell_2 := \left\{(x_n): x_n \in \mathbb{C}, n \geq 1, \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty\right\}$$

uzayı üzerinde bir iç çarpım fonksiyonudur ve ℓ_2 uzayı bu iç çarpımın ürettiği

$$\|z\|_{\ell_2} = (z,z)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^2\right)^{1/2}, \quad z=(z_n)\in \ell_2$$

normuna göre bir Hilbert uzayıdır.

Örnek 1.2.27 ([34], s.64)**:** $X = L_2(a,b)$, $(f,g) := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$, $f,g \in L_2(a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$

fonksiyonu $L_2(a,b)$ üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu olup $L_2(a,b)$ uzayı bu iç çarpımın ürettiği

$$\|f\|_{L_2(a,b)} = \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}, \quad f \in L_2(a,b),\ a,b \in \mathbb{R}$$

normu altında bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.2.28 ($W_2^1(a,b)$ Sobolev uzayı, ([38], s.50))**:** $L_2(a,b), a,b \in \mathbb{R}$ lineer uzayında

$$\|f\|_{L_2(a,b)}^2 + \|f'\|_{L_2(a,b)}^2 < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir f fonksiyonlarının oluşturduğu aile $W_2^1(a,b)$ ile gösterilir.

Bu durumda $W_2^1(a,b)$ lineer uzayı

$$(f,g)_{W_2^1(a,b)} := (f,g)_{L_2(a,b)} + (f',g')_{L_2(a,b)} \ , \ \ f,g \in W_2^1(a,b)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır. Bu uzaya Sobolev uzayı denir. Ayrıca

$$\overset{0}{W}{}_2^1(a,b) = \left\{ f \in W_2^1(a,b) : f(a) = f(b) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.29 ([34], s.7; [39], s.238)**:** X ve Y iki lineer uzay olsun. $D(A)$, X ’ in bir lineer altuzayı olmak üzere $A : D(A) \subset X \to Y$ olan her dönüşüme bir operatör adı verilir. Bu durumda

$D(A) := \{ x \in X : Ax \text{ tanımlı} \} \subset X$ kümesine A operatörünün tanım kümesi,

$R(A) := AD(A) = \{ y = Ax : \ x \in D(A) \} \subset Y$ kümesine ise A operatörünün değer kümesi,

$Ker\, A := \{ x \in D(A) : Ax = 0 \} \subset X$ kümesine ise A operatörünün sıfır kümesi veya çekirdeği denir.

Tanım 1.2.30 (Lineer Operatör, ([35], s.82))**:** X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay, $D(A)$, X ’ in bir lineer altuzayı ve $A : D(A) \subset X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer her $x, y \in D(A)$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A operatörüne bir lineer operatör denir.

Tanım 1.2.31 (Birim Operatör, ([35], s.84))**:** X bir lineer uzay olmak üzere $E : X \to X$, her $x \in X$ için $Ex = x$ şeklinde tanımlanan operatöre birim operatör denir.

Tanım 1.2.32 (Sıfır Operatörü, ([35], s.84))**:** X bir lineer uzay olmak üzere $0 : X \to X$, her $x \in X$ için $0x = x$ şeklinde tanımlanan operatöre sıfır operatörü denir.

Örnek 1.2.33 ([35], s.84)**:** Birim ve sıfır operatörleri lineer operatörlerdir.

Örnek 1.2.34 ([35], s.90)**:** $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x_1,x_2)=(x_1,0)$, $(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2$ şeklinde tanımlanan A operatörü lineerdir.

Örnek 1.2.35: $A:C[a,b]\to C[a,b]$, $Af(t)=f(t)+1,\ f\in C[a,b]$ şeklinde tanımlanan A operatörü lineer değildir.

Gerçekten; $f,\ g\in C[a,b]$ için $f+g\in C[a,b]$ olup lineer operatör tanımındaki $\alpha=\beta=1$ için

$$A(f+g)(t)=f(t)+g(t)+1$$
$$Af(t)+Ag(t)=f(t)+g(t)+2$$

olup

$$A(f+g)(t)\neq Af(t)+Ag(t)$$

olduğundan A operatörü lineer değildir.

Tanım 1.2.36 (Sürekli Operatör, ([35], s.96)**):** X ve Y iki normlu uzay, $D(A)$, X ’ in bir lineer altuzayı ve $A:D(A)\subset X\to Y$ bir operatör ve $a\in D(A)$ olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için $\delta>0$ sayısı vardır öyleki $\|x-a\|<\delta$ olan $\forall x\in D(A)$ için $\|Ax-Aa\|<\varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa A operatörü $x=a$ noktasında süreklidir denir. A operatörü her $x\in D(A)$ noktasında sürekli ise ona sürekli operatör denir.

Tanım 1.2.37 (Sınırlı Operatör, ([35], s.91)**):** X ve Y iki normlu uzay ve $A:X\to Y$ bir operatör olsun. Eğer her $x\in X$ için

$$\|Ax\|_Y \leq M\,\|x\|_X$$

olacak şekilde sabit bir $M>0$ sayısı varsa A operatörüne sınırlı operatör denir. X ’den Y ’ye tüm sınırlı operatörlerin oluşturduğu aile $B(X,Y)$, özel olarak $X=Y$ ise bu aile $B(X)$ ile gösterilecektir.

Örnek 1.2.38 ([37], s.55)**:** $k(t,s)$ fonksiyonu $D=[a,b]$ x $[a,b],\ a,b\in\mathbb{R}$ karesel bölgesi üzerinde kompleks değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $f\in L_2[a,b]$ için

$$Kf(t):=\int_a^b k(t,s)\,f(s)\,ds$$

şeklinde bir operatör tanımlansın. Bu operatör lineer sınırlı bir operatördür. Gerçekten K operatörünün lineer olduğu açık olup sınırlı olduğunu gösterilsin. Her $f \in L_2[a,b]$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\left(\int_a^b |k(t,s)\, f(s)| ds\right)^2 \leq \int_a^b |k(t,s)|^2 ds \int_a^b |f(s)|^2 ds$$

olup

$$\|Kf\|_{L_2[a,b]}^2 = \int_a^b \left(\int_a^b |k(t,s)\, f(s)| ds\right)^2 dt \leq \|f\|_{L_2[a,b]}^2 \int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt$$

olduğu ve buradan her $f \in L_2[a,b]$ için $Kf \in L_2[a,b]$ olduğu ve

$$\|Kf\|_{L_2[a,b]} \leq \left(\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt\right)^{1/2} \|f\|_{L_2[a,b]}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $K : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ operatörünün sınırlı olduğu görülür.

Örnek 1.2.39 ([34], s.92)**:** $C([a,b],\mathbb{R}) := \{ f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ sürekli} \}$ ve

$$C^1([a,b],\mathbb{R}) := \{ f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f' : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ var ve } f' \text{ sürekli} \}$$

olmak üzere

$$S : C^1([0,1],\mathbb{R},\|\cdot\|_\infty) \to C([0,1],\mathbb{R},\|\cdot\|_\infty),\ \|f\|_\infty := \sup\{ |f(x)| : x \in [0,1] \}$$
$$S(f) := f',\ \ f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün lineer olup sınırlı bir dönüşüm değildir.

Tanım 1.2.40 (İzdüşüm Operatörü, ([34], s.155)**):** X herhangi bir lineer uzay olmak üzere $P : X \to X$, $P^2 = P$ şartını sağlayan operatöre izdüşüm operatörü denir.

Örnek 1.2.41: $H = \mathbb{C}^2$, $P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ve $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ise P bir izdüşüm operatörüdür.

Gerçekten; her $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ için

$$P^2 x = P(Px) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Px$$

olup buradan $P^2 = P$ olduğu görülür.

Tanım 1.2.42 (Nilpotent Operatör, ([34], s.246)**):** H bir Hilbert uzayı ve $A\in B(H)$ olsun. Bu durumda $A^n=0$ olacak şekilde bir $n\in\mathbb{N}$ sayısı mevcutsa A operatörüne nilpotent operatör denir. Eğer bir $n\in\mathbb{N}$ için $A^{n-1}\neq 0$, ama $A^n=0$ ise $n\in\mathbb{N}$ sayısına A operatörünün nilpotentlik derecesi denir.

Örnek 1.2.43: ([40], s.301)**:** $S:L_2(-1,1)\to L_2(-1,1)$, $Sf(x)=\int_{-x}^{x}f(t)\,dt$, $f\in L_2(-1,1)$ şeklinde tanımlanan ters simetrik Volterra operatörü nilpotentlik derecesi 2 olan bir nilpotent operatördür.

Gerçekten; her $f\in L_2(-1,1)$ için

$$S^2(f(x))=S(Sf(x))=S\left(\int_{-x}^{x}f(t)\,dt\right)=\int_{-x}^{x}\left(\int_{-t}^{t}f(y)\,dy\right)dt=0$$

olup buradan $S\neq 0$ ve $S^2=0$ olduğu elde edilir.

Tanım 1.2.44 (Operatörün Normu, ([34], s.97)**):** X ve Y iki normlu uzay ve $A:X\to Y$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu durumda

$$\|A\|:=\inf\left\{M : M>0 \text{ ve } \forall x\in X \text{ için } \|Ax\|_Y\leq M\|x\|_X\right\}$$

sayısına A operatörünün normu adı verilir.

Teorem 1.2.45 ([35], s.92)**:** X ve Y iki normlu uzay ve $A:X\to Y$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu takdirde $\left\{\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} : x\in X \text{ ve } x\neq\theta_X\right\}$ kümesi $\mathbb{R}$ 'de sınırlı olup A operatörünün normu için aşağıdaki alternatif formüller doğrudur:

(1) $\|A\|:=\sup\left\{\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} : x\in X \text{ ve } x\neq\theta_X\right\}$;

(2) $\|A\|:=\sup\left\{\|Ax\|_Y : x\in X \text{ ve } \|x\|_X\leq 1\right\}$;

(3) $\|A\|:=\sup\left\{\|Ax\|_Y : x\in X \text{ ve } \|x\|_X< 1\right\}$;

(4) $\|A\|:=\sup\left\{\|Ax\|_Y : x\in X \text{ ve } \|x\|_X= 1\right\}$.

Örnek 1.2.46 ([35], s.93)**:** X bir normlu uzay olmak üzere $E:X\to X$ birim operatörü sınırlı bir operatör olup $\|E\|=1$ 'dir.

Örnek 1.2.47 ([35], s.93)**:** X bir normlu uzay olmak üzere $0:X\to X$ sıfır operatörü sınırlı bir operatör olup $\|0\|=0$ 'dır.

Örnek 1.2.48 ([34], s.104)**:** Her $z=(z_1,z_2,...,z_n,...)\in \ell_2$ için

$$T(z)=(0,4z_1,z_2,4z_3,z_4,...)$$

şeklinde bir T dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $z\in \ell_2$

$$\begin{aligned}\|T(z)\|_{\ell_2}^2 &= \|(0,4z_1,z_2,4z_3,z_4,...)\|_{\ell_2}^2 \\ &= 16|z_1|^2+|z_2|^2+16|z_3|^2+16|z_4|^2+\cdots \\ &\le 16\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^2<\infty\end{aligned}$$

olup $T(z)\in \ell_2$'dir. Yani, $T:\ell_2\to \ell_2$ şeklinde bir dönüşümdür. Ayrıca T dönüşümü sınırlı lineer bir dönüşüm olup $\|T\|=4$'tür.

Gerçekten; T dönüşümünün lineer bir dönüşüm olduğu açıktır. Her $z\in \ell_2$ için

$$\|T(z)\|_{\ell_2}^2 \le 16\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^2=16\|z\|_{\ell_2}^2$$

olduğundan

$$\|T(z)\|_{\ell_2}\le 4\|z\|_{\ell_2}$$

eşitsizliği doğrudur. O halde $T:\ell_2\to \ell_2$ dönüşümü sınırlı ve $\|T\|\le 4$'dir. Diğer taraftan

$$\|T\|:=\sup\left\{\ \|T(z)\|_{\ell_2} : z\in \ell_2\ ve\ \|z\|_{\ell_2}=1\right\}$$

olduğundan $e:=(1,0,...,0,...)\in \ell_2$ için

$$\|e\|_2=1,\ T(e)=(0,4,0,4,...,)\ \text{ ve } \|T(e)\|_{\ell_2}=4$$

şeklindedir. Dolayısıyla $4\le\|T\|$'dir. Sonuç olarak $\|T\|\le 4$ ve $4\le\|T\|$ eşitsizliklerinden $\|T\|=4$ eşitliği elde edilir.

Örnek 1.2.49: ([34], s.103)**:** $C([0,1],\mathbb{R})=\{f \mid f:[0,1]\to\mathbb{R} \text{ ve } f \text{ sürekli}\}$ ve $\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|:x\in[0,1]\}$, $f\in C([0,1],\mathbb{R})$ olmak üzere $f\in C([0,1],\mathbb{R})$ için

$$Af(t):=\int_0^1 f(t)\,dt$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. Bu halde

$$|Af(t)|=\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right|\le\int_0^1|f(t)|\,dt\le\int_0^1\|f\|_\infty\,dt=\|f\|_\infty$$

olup her $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ için $Af \in \mathbb{R}$ olur, yani $A : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyoneldir. Ayrıca A lineer operatörü sınırlı bir operatör olup $\|A\| = 1$'dir.

Gerçekten; her $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ için

$|Af(t)| \leq \|f\|_\infty$

eşitsizliğinden A lineer operatörünün sınırlı ve $\|A\| \leq 1$ olduğu elde edilir.

Diğer taraftan

$\|A\| = \sup\{ |A(f)| \ f \in C([0,1],\mathbb{R}) \text{ ve } \|f\|_\infty = 1\}$

olduğundan her $x \in [0,1]$ için $g(x) = 1$ şeklinde alınırsa

$$g \in C([0,1],\mathbb{R}),\ \|g\|_\infty = 1 \text{ ve } |Ag(t)| = \left|\int_0^1 g(t)\,dt\right| = 1$$

olup buradan ise $1 \leq \|A\|$ olduğu elde edilir. Sonuç olarak $\|A\| \leq 1$ ve $1 \leq \|A\|$ eşitsizliklerinden $\|A\| = 1$ olduğu bulunur.

Teorem 1.2.50 ([34], s.97)**:** X ve Y iki normlu uzay olmak üzere X'den Y'ye tanımlı lineer sınırlı operatörlerin oluşturduğu $B(X,Y)$ lineer uzayı $\|\cdot\|$-operatör normu altında bir normlu uzaydır.

Tanım 1.2.51 (Operatör Normunda Yakınsama, ([39], s.246)**):** X ve Y iki normlu uzay ve A_n, $A \in B(X,Y)$, $n \geq 1$ olsun. Bu durumda, eğer her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ mevcut öyle ki her $n > N$ için $\|A_n - A\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa (A_n) dizisi A'ya operatör normunda yakınsıyor denir.

Tanım 1.2.52 (Kompakt Küme, ([34], s.16; s.36)**):** X bir normlu uzay ve $A \subset X$ bir küme olsun. Eğer her $(x_n) \subset A$ dizisi A kümesinde bulunan bir elemana yakınsayan bir alt dizi içeriyorsa $A \subset X$ kümesine kompakt küme denir.

Örneğin; $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ Öklid uzayında her kapalı sınırlı küme kompakttır.

Tanım 1.2.53 (Kompakt Operatör, ([35], s.405)**):** X ve Y iki normlu uzay ve $A : X \to Y$ lineer sınırlı bir operatör olsun. Bu durumda eğer her sınırlı $M \subset X$ kümesi için $\overline{A(M)}$ kompakt ise A operatörüne kompakt operatör denir. X'den Y'ye tüm kompakt operatörler ailesi $C_\infty(X,Y)$ ile ayrıca $X = Y$ ise bu aile $C_\infty(X)$ ile gösterilecektir.

Teorem 1.2.54 ([35], s.407)**:** X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \to Y$ lineer sınırlı bir operatör olsun. Bu durumda A operatörünün kompakt operatör olması için gerek ve yeter şart her sınırlı $(x_n) \subset X$ dizisi için $(Ax_n) \subset Y$ dizisinin yakınsak alt dizi içeriyor olmasıdır.

Örnek 1.2.55 ([34], s.213)**:** H bir kompleks Hilbert uzayı ve $y, z \in H$ iki sabit eleman olsun. Bu durumda

$$T: H \to H,\ Tx = (x, y)_H\, z,\ x \in H$$

şeklinde tanımlanan operatör bir kompakt operatördür.

Gerçekten; alınan her $M \subset H$ sınırlı alt kümesi için

$$T(M) = \{(x, y)_H\, z : x \in M\}$$

görüntü kümesi için

$$\dim \overline{\operatorname{span}(T(M))} \leq 1$$

olduğundan durum açıktır.

Örnek 1.2.56: H bir Hilbert uzayı, $(e_n)_{n\geq 1} \subset H$ ortonormal baz olmak üzere $A: H \to H$, her $x \in H$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$ için

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_{n+1}$$

operatörü kompakt değildir.

Gerçekten; bu halde

$$Ae_n = e_{n+1}\ , n \geq 1$$

olup

$$M = \{e_n : n \geq 1\} \subset H$$

kümesi gözönüne alınırsa her $n \geq 1$ için

$$\|e_n\|^2 = (e_n, e_n) = 1$$

olup M kümesi sınırlıdır. Bu halde

$$AM = \{e_n : n \geq 2\}$$

olup

$$x_n = e_n\ ,\ n \geq 2$$

şeklinde alınırsa (x_n) dizisinin hiçbir altdizisi yakınsayamaz. Çünkü $n \neq m$ için

$$\|x_n - x_m\|^2 = (e_n - e_m, e_n - e_m) = 1 + 1 = 2$$

olup

$$\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$$

bulunur. Buradan $\overline{AM} \subset H$ kümesinin kompakt olmadığı dolayısıyla da A operatörünün kompakt olmadığı elde edilir.

Teorem 1.2.57 ([37], s.92)**:** H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı olmak üzere eğer $(K_n) \subset C_\infty(H_1, H_2)$, $K \in B(H_1, H_2)$ ve $\|K_n - K\| \to 0$ ise $K \in C_\infty(H_1, H_2)$ şeklindedir.

Örnek 1.2.58 ([37], s.93)**:** $K : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$, $Kf(t) := \int_a^b k(t,s) f(s) ds$ ve $k(t,s)$ fonksiyonu $D = [a,b]$ x $[a,b]$, $(a, b \in \mathbb{R})$ karesel bölgesi üzerinde kompleks değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda K operatörünün kompakt olduğu gösterilsin. Bunun için; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ $L_2[a,b]$ Hilbert uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere $L_2([a,b] \times [a,b])$ Hilber uzayı için

$$\phi_{i,j}(t,s) = \varphi_i(t) \times \varphi_j(s),\ i, j = 1, 2, \ldots$$

tabanı göz önünde bulundurulsun $([37], s.32)$. Bu durumda

$$k = \sum_{i,j=1}^{+\infty} (k, \phi_{i,j})_{L_2([a,b]\times[a,b])} \phi_{i,j}$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca

$$k_n = \sum_{i,j=1}^{n} (k, \phi_{i,j})_{L_2([a,b]\times[a,b])} \phi_{i,j} \quad ,\ n \in \mathbb{N}$$

şeklindeki fonksiyonlar için

$$\|k - k_n\|_{L_2([a,b]\times[a,b])} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ayrıca

$$K_n : L_2[a,b] \to L_2[a,b],\ K_n f(t) := \int_a^b k_n(t,s) f(s) ds$$

şeklinde tanımlanan lineer operatörleri $\dim R(K_n) < +\infty$ olduğundan kompakt operatörlerdir ([34], s.207). Ayrıca

$$\|K - K_n\| \le \|k - k_n\|_{L_2([a,b]\times[a,b])} \to 0,\ n \to +\infty$$

olduğundan K operatörünün kompakt olduğu elde edilir ([37], s.92).

Örnek 1.2.59 ([37], s.93)**:** $K:\ell_2 \to \ell_2$, $K(x_n) := (\lambda_n x_n)$, $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$, $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{C}} 0$ ise K operatörü kompakt bir operatördür. Gerçekten; bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n : \ell_2 \to \ell_2$,

$$K_n(x_1, x_2, ..., x_n, ...) := (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n, 0, ...)$$

operatörler dizisi tanımlansın. Burada $\dim R(K_n) \le n < \infty$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n \in C_\infty(\ell_2)$ ([34], s.207). Ayrıca her $(x_n) \in \ell_2$ için

$$\begin{aligned}
\|K_n(x_n) - K(x_n)\|_{\ell_2} &= \|(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n, ...) - (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n, 0, ...)\|_{\ell_2} \\
&= \|(0, 0, ..., \lambda_{n+1} x_{n+1}, \lambda_{n+2} x_{n+2}, ...)\|_{\ell_2} \\
&= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k x_k|^2 \right)^{1/2} \\
&\le \sup_{k \ge n+1} |\lambda_k| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} \\
&\le \sup_{k \ge n+1} |\lambda_k| \|(x_n)\|_{\ell_2}
\end{aligned}$$

olup buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|K_n - K\| \le \sup_{k \ge n+1} |\lambda_k| \to 0$$

bulunur. Bilinen bir sonuçtan $K \in C_\infty(\ell_2)$ olduğu elde edilir ([37], s.92).

Tanım 1.2.60 (Kapalı Lineer Operatör, ([35], s.292)**):** X ve Y iki normlu uzay, $D(A)$, X ’ in bir lineer altuzayı ve $A : D(A) \subset X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda A operatörünün grafiği

$$Gr(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times Y$$

$X \times Y$ normlu uzayında kapalı ise A operatörüne kapalı lineer operatör denir.

Teorem 1.2.61 ([35], s.293)**:** X ve Y iki normlu uzay, $D(A)$, X ’ in bir lineer altuzayı ve $A : D(A) \subset X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Bu takdirde A operatörünün kapalı operatör olması için gerek ve yeter şart $(x_n) \subset D(A)$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$ ise $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ olmasıdır.

Örnek 1.2.62 ([35], s.294)**:** $A : D(A) \subset C^1[0,1] \to C[0,1]$, $Ax := x'$ olsun. Bu durumda A operatörü kapalı bir operatördür. Gerçekten; $(x_n) \subset D(A)$ için

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \text{ ve } Ax_n = x_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} y$$

olsun. $C[0,1]$ normunda yakınsaklık $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsaklığa denk olduğundan ve $x_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ kabulünden

$$\int_0^t y(\tau)\,d\tau = \int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(\tau)\,d\tau = \lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(\tau)\,d\tau = x(t)-x(0)$$

Yani

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(\tau)\,d\tau$$

eşitliği elde edilir. Bu ise $x \in D(A)$ ve $x' = y$ olduğu anlamına gelir. Teorem 1.2.61'den A operatörü kapalı bir operatördür.

Örnek 1.2.63: ([41], s.121) $T : D(T) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Tf := xf(1)$, $D(T) = C[0,1]$ şeklinde tanımlanan operatör kapalı değildir. Gerçekten $(f_n),(h_n) \subset C[0,1]$ için

$$(f_n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{L_2[0,1]}} u(x),\ (h_n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{L_2[0,1]}} u(x)$$

ama

$$f_n(1) = 1,\ h_n(1) = 0,\ n = 1, 2, \ldots$$

şeklinde tanımlansın. Bu halde $Tf_n = x,\ Th_n = 0$ olduğundan durum açıktır.

Tanım 1.2.64 (Bire-bir Operatör, ([35], s.614)**):** X ve Y iki lineer uzay, $D(A)$, X ' in bir lineer altuzayı ve $A : D(A) \subset X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x_1, x_2 \in D(A)$ için $x_1 \neq x_2$ bağıntısı sağlandığında $Ax_1 \neq Ax_2$ bağıntısı sağlanıyorsa A operatörüne bire-bir operatör denir.

Tanım 1.2.65 (Eşlenik operatör, ([39], s.353)**):** H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H ' nın bir lineer altuzayı, $A : D(A) \subset H \to H$ lineer bir operatör ve $\overline{D(A)} = H$ olsun. Bu durumda

$$D(A^*) := \left\{ y \in H : \forall x \in D(A) \text{ için bir } z \in H \text{ vardır öyleki } (Ax, y)_H = (x, z)_H \right\}$$

olmak üzere

$$A^* : D(A^*) \subset H \to H\ ,\ A^* y := z$$

şeklinde tanımlanan operatöre A operatörünün eşlenik operatörü denir.

Örnek 1.2.66 ([34], s.183) **:** $T_c : \ell_2 \to \ell_2$, $(c_n) \in \ell_\infty$, $T_c(x_n) := (c_n x_n)$ şeklinde tanımlanan operatörün eşleniği bulunsun. Bu halde her $(x_n), (y_n) \in \ell_2$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $\alpha(x_n) + \beta(y_n) \in \ell_2$ olup

$$T_c\left(\alpha(x_n) + \beta(y_n)\right) = \left(c_n\left(\alpha(x_n) + \beta(y_n)\right)\right) = \left(c_n\left(\alpha(x_n)\right) + c_n\left(\beta(y_n)\right)\right)$$
$$= \alpha(c_n x_n) + \beta(c_n y_n) = \alpha T_c(x_n) + \beta T_c(y_n)$$

bağıntısından T_c operatörünün lineerliği açıktır. Her $(x_n) \in \ell_2$ için

$$\left\|T_c(x_n)\right\|_{\ell_2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|^2\right)^{1/2} \le c\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} = c\left\|(x_n)\right\|_{\ell_2},\ c := \sup_{n \ge 1} |c_n| < +\infty$$

olup $T_c \in B(\ell_2)$ olduğu açıktır. O halde T_c^* eşlenik operatörü var olup her $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \ell_2$ için

$$(T_c x, y)_{\ell_2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{\left(\overline{c_n} y_n\right)} = \left(x, T_c^* y\right)_{\ell_2}$$

şeklindedir. Buradan

$$T_c^* y := \left(\overline{c_n} y_n\right),\ y = (y_n) \in \ell_2$$

Yani $T_c^* = T_{\overline{c}}$ 'dir.

Örnek 1.2.67: ([37], s.78) **:** $V : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $Vf(x) := \int_0^x f(t)dt$ şeklinde tanımlanan lineer Volterra operatörünün eşleniği bulunsun. Bu durumda V operatörünün lineer olduğu açıktır. Ayrıca her $f, g \in L_2(0,1)$ için Couchy-Schwarz eşitsizliği de kullanılarak

$$\|Vf\|^2_{L_2(0,1)} = \int_0^1 |Vf(x)|^2 dx = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)dt\right|^2 dx \le \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)| dt\right)^2 dx$$
$$\le \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| dt\right)^2 dx = \left(\int_0^1 |f(t)| dt\right)^2$$
$$\le \left[\left(\int_0^1 1^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}\right]^2$$
$$= \int_0^1 1dt \int_0^1 |f(t)|^2 dt = \|f\|^2_{L_2(0,1)}$$

Yani

$$\|Vf\|^2_{L_2(0,1)} \le \|f\|^2_{L_2(0,1)}$$

olup V operatörünün sınırlı olduğu görülür. O halde V^* eşlenik operatörü var olup her $f, g \in L_2(0,1)$ için

$$\begin{aligned}
(Vf,\ g)_{L_2(0,1)} &= \int_0^1 Vf(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)dt \right) \overline{g(x)}dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)dt \right) d\left(\overline{-\int_x^1 g(t)dt} \right) \\
&= \left(\int_0^x f(t)dt \right) \overline{\left(-\int_x^1 g(t)dt \right)} \Bigg|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 f(x) \left(\overline{\int_x^1 g(t)dt} \right) dx \\
&= \int_0^1 f(x) \left(\overline{\int_x^1 g(t)dt} \right) dx = \left(f(x)\ ,\ \int_x^1 g(t)dt \right)_{L_2(0,1)} = \left(f, V^* g \right)_{L_2(0,1)}
\end{aligned}$$

olup buradan

$$V^* g(t) = \int_x^1 g(t)dt$$

Tanım 1.2.68 (Özeşlenik operatör, ([39], s.359)**):** H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H ' nın bir lineer altuzayı, $A : D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör ve A^*, A operatörünün eşlenik operatörü olsun. Bu durumda, eğer $D(A) = D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^* f$ ise A operatörüne özeşlenik operatör denir.

Örnek 1.2.69 ([34], s.179)**:** Her $f \in C[0,1]$ için $T_f \in B(L_2[0,1])$ operatörü

$$\left(T_f g\right)(t) := f(t)\, g(t)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda reel değerli $f \in C[0,1]$ için T_f özeşlenik operatördür.

Gerçekten; her $g, h \in L_2[0,1]$ için

$$\left(T_f g, h\right)_{L_2[0,1]} = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, \overline{h(t)}dt = \int_0^1 g(t)\, \overline{\overline{f(t)}h(t)}dt = \left(g, T_{\overline{f}} h\right)_{L_2[0,1]}$$

olup $\left(T_f\right)^* = T_{\overline{f}}$ olduğu bulunur. $f \in C[0,1]$ fonksiyonu reel değerli olduğundan $f = \overline{f}$ olup $\left(T_f\right)^* = T_f$ eşitliği elde edilir.

Tanım 1.2.70 ([35], s.555)**:** $S_r:\ell_2\to\ell_2$, $S_r(x_n)=(x_{n-1})=(0,x_1,x_2,...)$ ve $S_l:\ell_2\to\ell_2$, $S_l(x_n)=(x_{n+1})=(x_2,x_3,x_4,...)$ operatörlerine sırasıyla ℓ_2 lineer uzayı üzerinde sağa ve sola öteleme operatörleri denir.

Örnek 1.2.71 ([34], s.171)**:** $S_r:\ell_2\to\ell_2$ sağa öteleme ve $S_l:\ell_2\to\ell_2$ sola öteleme operatörleri lineer operatörler olup özeşlenik olmayan operatörlerdir.

Gerçekten; her $x=(x_n)$, $y=(y_n)\in\ell_2$ ve her $\alpha,\beta\in K$ için

$$\begin{aligned}S_r(\alpha x+\beta y)&=S_r((\alpha x_n)+(\beta y_n))\\&=(0,\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,...)\\&=(0,\alpha x_1,\alpha x_2,...)+(0,\beta y_1,\beta y_2,...)\\&=\alpha(0,x_1,x_2,...)+\beta(0,y_1,y_2,...)\\&=\alpha(x_{n-1})+\beta(y_{n-1})\\&=\alpha S_r x+\beta S_r y\end{aligned}$$

olup $S_r:\ell_2\to\ell_2$ sağa öteleme operatörü lineerdir. Benzer şekilde $S_l:\ell_2\to\ell_2$ sola öteleme operatörünün de lineer olduğu gösterilebilir.

Sağa öteleme ve sola öteleme operatörlerinin eşlenikleri ise her $(y_n)\in\ell_2$ için

$$S_r^*(y_1,y_2,y_3,...)=(y_2,y_3,y_4,...)=S_l$$

ve

$$S_l^*(y_1,y_2,y_3,...)=(0,y_1,y_2,...)=S_r$$

olup her ikisi de özeşlenik olmayan operatörlerdir.

Tanım 1.2.72 (Normal operatör, ([39], s.379)**):** H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H' nın bir lineer altuzayı, $A:D(A)\subset H\to H$ bir lineer kapalı operatör ve A^*, A operatörünün eşlenik operatörü olsun. Bu durumda, eğer;

a) $D(A)=D(A^*)$ ve

b) Her $f\in D(A)$ için $\|Af\|_H=\|A^*f\|_H$

ise A'ya H'da normal operatör adı verilir.

Örnek 1.2.73 ([34], s.176)**:** Her $f\in C[0,1]$ için $T_f\in B(L_2[0,1])$ operatörü $(T_f g)(t):=f(t)g(t)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda T_f operatörü normal bir operatördür.

Gerçekten; Örnek 1.2.69'dan her $f \in C[0,1]$ için $(T_f)^* = T_{\overline{f}}$ olduğu bilinir. O halde her $g \in L_2[0,1]$ için

$$\left(T_f (T_f)^*\right)(g) = T_f \left(T_{\overline{f}}(g)\right) = T_f \left(\overline{f} g\right) = f\,\overline{f} g$$

ve

$$\left((T_f)^* T_f\right)(g) = T_{\overline{f}} \left(T_f(g)\right) = T_{\overline{f}}(fg) = \overline{f} fg = f\,\overline{f} g$$

olup

$$T_f (T_f)^* = (T_f)^* T_f$$

ve buradan da T_f operatörünün normal bir operatör olduğu bulunur.

Örnek 1.2.74 [42]**:** $A : D(A) \subset L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $Au(t) := u'(t) + au(t)$, $a \in \mathbb{R}$,

$$D(A) := \left\{u \in W_2^1(0,1) : u(1) = u(0)\right\}$$

şeklinde tanımlanan operatör bir normal operatördür. Gerçekten, bu durumda

$$A^* v(t) = -v'(t) + av(t),$$
$$D(A^*) = \left\{v \in W_2^1(0,1) : v(1) = v(0)\right\}$$

olup, $D(A) = D(A^*)$ ve her $u(t) \in L_2(0,1)$ için

$$\|Au\|_{L_2(0,1)} = \|u' + au\|_{L_2(0,1)} = \|-u' + au\|_{L_2(0,1)} = \|A^* u\|_{L_2(0,1)}$$

Yani A normaldir.

Örnek 1.2.75 ([34], s.177)**:** $S_r : \ell_2 \to \ell_2$, $S_r(x_n) = (x_{n-1}) = (0, x_1, x_2, ...)$ sağa öteleme operatörü normal bir operatör değildir. Gerçekten; her $(y_n) \in \ell_2$ için

$$S_r^*(y_1, y_2, y_3, ...) = (y_2, y_3, y_4, ...) = S_l$$

olduğu bilinir. O halde her $(x_n) \in \ell_2$ için

$$S_r^*\left(S_r(x_1, x_2, x_3, ..)\right) = S_l\left(S_r(x_1, x_2, x_3, ..)\right) = S_l(0, x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, x_3, ..)$$

ve

$$S_r\left(S_r^*(x_1, x_2, x_3, ..)\right) = S_r\left(S_l(x_1, x_2, x_3, ..)\right) = S_r(x_2, x_3, x_4 ...) = (0, x_2, x_3, ..)$$

olup

$$S_r^* S_r \neq S_r S_r^*$$

Yani sağa öteleme operatörü normal değildir. Benzer şekilde sola öteleme operatörünün de normal olmadığı gösterilebilir.

Tanım 1.2.76 (Üniter operatör, ([39], s.364)**):** H bir Hilbert uzayı $A: H \to H$ bir lineer operatör ve A^*, A operatörünün eşlenik operatörü olsun. Bu durumda $E: H \to H$ birim operatör olmak üzere, eğer $AA^* = A^* A = E$ ise A operatörüne üniter operatör denir.

Örnek 1.2.77 ([34], s.181)**:** Her $f \in C[0,1]$ için $T_f \in B(L_2[0,1])$ operatörü

$$(T_f g)(t) := f(t) g(t)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda eğer $f \in C[0,1]$ için $|f(t)| = 1$ ise T_f operatörü bir üniter operatördür.

Gerçekten; Örnek 1.2.69'dan her $f \in C[0,1]$ için $(T_f)^* = T_{\overline{f}}$ olduğu bilinir. O halde her $g \in L_2[0,1]$ için

$$\left(T_f (T_f)^*\right) g(t) = f(t)\,\overline{f(t)} g(t) = |f(t)|^2 g(t)$$

olup

$$T_f (T_f)^* (g) = g$$

ve dolayısıyla

$$T_f (T_f)^* = E$$

eşitliği bulunur. Benzer şekilde $(T_f)^* T_f = E$ eşitliği elde edilir. O halde T_f operatörü bir üniter operatördür.

Tanım 1.2.78 (Pozitif Operatör, ([39], s.411)**):** H bir Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \to H$ bir lineer özeşlenik operatör olsun. Eğer her $x \in D(A)$ için

$$(Ax, x)_H \geq 0$$

ise A operatörüne pozitif operatör denir ve $A \geq 0$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 1.2.79 (Spektrum, Rezolvent Küme, ([35], s.371)**):** H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H'nın bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset H \to H$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda $E: H \to H$ birim operatör olmak üzere

(1) $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{bir } x \in H,\ x \neq 0 \text{ için } Ax = \lambda x\}$ kümesine A'nın noktasal spektrumu denir.

(2) $\sigma_c(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda E \text{ bire-bir, } R(A-\lambda E) \neq H,\ \overline{R(A-\lambda E)} = H\right\}$ kümesine A'nın sürekli spektrumu denir.

(3) $\sigma_r(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda E \text{ bire-bir, } \overline{R(A-\lambda E)} \neq H\right\}$ kümesine A'nın kalan spektrumu denir.

(4) $\sigma(A) := \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ kümesine A'nın spektrumu denir. Bu halde

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda E \text{ terslenemezdir}\}$$

(5) $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ kümesine A'nın rezolvent kümesi denir. Bu halde

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda E \text{ terslenebilirdir}\}$$

(6) $\lambda \in \sigma_p(A)$ sayısına A'nın özdeğeri, $Ax = \lambda x,\ x \in H,\ x \neq 0$ denkleminin çözümüne ise A'nın λ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörü denir.

Tanım 1.2.80 (Rezolvent Operatör, ([35], s.370)**):** H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H' nın bir lineer altuzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ lineer bir operatör olsun. Bu takdirde λ bir komleks sayı, E ise birim operatör olmak üzere $A_\lambda = A - \lambda E$ operatörü terslenebilir (tersi var ve sanırlı) ise

$$A_\lambda^{-1} = (A - \lambda E)^{-1}$$

operatörüne A operatörünün rezolvent operatörü denir ve $R_\lambda(A)$ sembolüyle ifade edilir.

Teorem 1.2.81 ([39], s.299)**:** Eğer A lineer operatörü sonlu boyutlu X lineer uzayında tanımlı bir operatör ise $\sigma_c(A) = \varnothing$ ve $\sigma_r(A) = \varnothing$.

Teorem 1.2.82 ([39], s.382)**:** H bir Hilbert uzayı, $A \in B(H)$ olsun.

(a) Eğer $A = A^*$ ise, $\sigma_r(A) = \varnothing, \sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$

(b) Eğer A normal bir operatör ise, $\sigma_r(A) = \varnothing$.

Teorem 1.2.83 ([35], s.390)**:** H bir Hilbert uzayı olmak üzere $A \in B(H)$ ise $\sigma(A) \neq \varnothing$.

Tanım 1.2.84 (Spektral Yarıçap, ([34], s.188)**):** H bir Hilbert uzayı, $T \in B(H)$ olsun. Bu durumda

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

sayısına T operatörünün spektral yarıçapı denir ve $r_\sigma(T)$ sembolü ile gösterilir.

Örnek 1.2.85 ([43], s.223)**:** $H = L_2(0,1)$ uzayında $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$,

$$Af(x) = \int_0^1 \min(x,y)\, f(y)\, dy$$

şeklinde tanımlanan operatörün spektrumu ve spektral yarıçapı bulunsun.

Bu halde her $f \in L_2(0,1)$ için A operatörü

$$Af(x) = \int_0^1 \min(x,y)\, f(y)\, dy = \int_0^x y f(y)\, dy + x\int_x^1 f(y)\, dy$$

şeklinde yazılabilir. İlk önce A operatörünün noktasal spektrumu incelensin. $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$Af(x) = \lambda f(x), \ f \in L_2(0,1)$$

denkleminin çözümü bulunsun. Bu halde

$$\int_0^x y f(y)\, dy + x\int_x^1 f(y)\, dy = \lambda f(x)$$

denklemini çözmek için her iki tarafın türevi alınırsa

$$xf(x) + \int_x^1 f(y)\, dy - xf(x) = \lambda f'(x)$$

denklemi, yani

$$\int_x^1 f(y)\, dy = \lambda f'(x)$$

eşitliği elde edilir. Bulunan denklemin tekrar her iki tarafının türevi alınırsa

$$-f(x) = \lambda f''(x)$$

olduğu bulunur. Burada eğer $\lambda = 0$ ise $f = 0$ bulunur. Yani $\lambda = 0 \notin \sigma_p(A)$.

Şimdi $\lambda \neq 0, \ \lambda \in \mathbb{C}$ olduğu kabul edilsin. O halde yukarıdaki yapılan işlemlerden bakılan problem

$$\begin{cases} f''(x) = -\dfrac{1}{\lambda} f(x), \ f \in L_2(0,1), \ \lambda \in \mathbb{C} \\ f(0) = f'(1) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemine dönüşür. Bu denklemin çözümü

$$f(x) = c_1 \cos\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x + c_2 \sin\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x, \ x \in [0,1]$$

şeklindedir. $f(0) = 0$ ve $f'(1) = 0$ sınır değerleri kullanılırsa

$$c_1 = 0 \quad \text{ve} \quad c_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0$$

Buradan da $\cos\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0$ olduğu elde edilir. Son eşitlikten

$$\frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \; k \in \mathbb{Z}$$

ve buradan da

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2}{(2k+1)\pi} \;, k \in \mathbb{Z}$$

olduğu görülür. Bu sonuncudan ise, A 'nın özdeğerlerinin

$$\lambda_k = \frac{4}{(2k+1)^2 \pi^2} = \frac{1}{(k+1/2)^2 \pi^2}, \; k \in \mathbb{Z}$$

şeklinde olduğu bulunur, yani

$$\sigma_p(A) = \left\{ \frac{1}{(k+1/2)^2 \pi^2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

elde edilir.

$A : L_2(0,1) \to L_2(0,1),\; A \in C_\infty\left(L_2(0,1)\right)$ ([43], s.223) ve $\dim L_2(0,1) = \infty$ olduğundan A^{-1} sınırlı olamaz ([34], s.208). Dolayısıyla $0 \notin \rho(A)$. Ayrıca A operatörü özeşlenik bir operatör olduğundan Teorem 1.2.82'den $\sigma_r(A) = \varnothing$'dur. Bu halde $0 \notin \sigma_p(A)$, $0 \notin \rho(A)$ ve $\sigma_r(A) = \varnothing$ olduğundan $0 \in \sigma_c(A)$. Sonuç olarak A operatörünün spektrumunun

$$\sigma(A) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{(k+1/2)^2 \pi^2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

şeklinde olduğu bulunur.

Diğer taraftan, A operatörünün özdeğerlerinin en büyüğü $k = 0$ için $4/\pi^2$ olup $r_\sigma(A) = 4/\pi^2$'dir.

Örnek 1.2.86 ([40], s.299)**:** $V : L_2(0,1) \to L_2(0,1), Vf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ lineer sınırlı Volterra operatörünün spektrumu $\sigma(V) = \{0\}$ şeklindedir.

Gerçekten; $E : H \to H$ birim operatör olmak üzere $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\left(V-\lambda E\right)f=g\ \ ,f,g\in L_2\left(0,1\right)$$

spektrum problemine bakılsın. İlk olarak

(a) $g=0$, $\lambda\neq 0$ durumu incelensin. Bu durumda problem

$$\left(V-\lambda E\right)f=0$$

şeklinde olup buradan

$$\int_0^x f\left(t\right)dt=\lambda f\left(x\right),\ f\in L_2\left(0,1\right)$$

şeklindedir. Bu integral denklemi

$$\begin{cases} f\left(x\right)=\lambda f'\left(x\right)\ \lambda\text{-h.h.y} \\ f\left(0\right)=0 \end{cases}$$

diferansiyel denklem olan sınır-değer problemine dönüşür. Son eşitlikten

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{\lambda}f\left(x\right)\quad \lambda\text{-h.h.y}$$

olup buradan ise $f\left(x\right)$ çözümü

$$f\left(x\right)=e^{\frac{1}{\lambda}x}c$$

şeklinde olur. Burada $f\left(0\right)=0$ sınır-değer şartını yerine yazılırsa $f\left(x\right)=0$ λ-h.h.y bulunur. Bu $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda\neq 0$ sayısının özdeğer olamayacağı anlamına gelir. Şimdi

(b) $g=0$, $\lambda=0$ durumu incelensin. Bu halde $Vf=0$ olup

$$\int_0^x f\left(t\right)dt=0,\ f\in L_2\left(0,1\right)$$

olur. Buradan $f\left(x\right)=0$ λ-h.h.y olduğu bulunur. Bu ise $\lambda=0$ sayısının özdeğer olamayacağı anlamına gelir. Böylece (a) ve (b) durumlarından $\sigma_p\left(V\right)=\varnothing$ olduğu elde edilir.

(c) $g\neq 0$, $\lambda\neq 0$ durumu ele alınsın. Bu durumda

$$\left(V-\lambda E\right)f=g\ \ ,f,g\in L_2\left(0,1\right)$$

Yani

$$\int_0^x f\left(t\right)dt-\lambda f\left(x\right)=g\left(x\right),\ f,g\in L_2\left(0,1\right)$$

olur. Burada

$$h(x) := \int_0^x f(t)\,dt$$

alınırsa integral denklemi

$$\begin{cases} h'(x) - \dfrac{1}{\lambda} h(x) = -\dfrac{1}{\lambda} g(x) \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

diferansiyel denklemine dönüşür. Bu denklemin genel çözümü

$$h(x) = e^{\frac{1}{\lambda}x} c - \frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-s)} g(s)\,ds$$

şeklindedir. $h(0) = 0$ olduğundan $c = 0$ olup buradan

$$h(x) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-s)} g(s)\,ds$$

eşitliği doğrudur. $h(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ olduğundan

$$(V - \lambda E)^{-1} g(x) = f(x) = h'(x) = \left(-\frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-s)} g(s)\,ds \right)' = -\frac{1}{\lambda} g(x) - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-s)} g(s)\,ds$$

çözümü elde edilir. Son eşitlikten $R_\lambda(V) = (V - \lambda E)^{-1}$’in var olduğu ve

$$(V - \lambda E)^{-1} \in B(L_2(0,1))$$

olduğu elde edilir. Sonuç olarak

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} = \rho(V)$$

olup

$$\sigma(V) = \{0\}$$

şeklindedir. Şimdi ise

(d) $g \neq 0$, $\lambda = 0$ durumunda ise $0 \in \sigma_c(V)$ olduğu açıktır. Böylece

$$\sigma(V) = \sigma_c(V) = \{0\}$$

bulunur. Bu durumda $r_\sigma(V) = 0$ şeklindedir.

Örnek 1.2.87 ([44], s.365)**:** $H = L_2(0,1)$ uzayında $A_i : \mathrm{D}(A_i) \subset L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $i = 1,\dots,4$ operatörü için

(1) $A_1u := u' + au,\ D(A_1) = \overset{0}{W}{}_2^1(0,1),\ a \in \mathbb{R}$;
(2) $A_2u := u' + au,\ D(A_2) = \{u \in W_2^1(0,1) : u(0) = 0\},\ a \in \mathbb{R}$;
(3) $A_3u := u' + au,\ D(A_3) = \{u \in W_2^1(0,1) : u(0) = u(1)\},\ a \in \mathbb{R}$;
(4) $A_4u := u' + au,\ D(A_4) = W_2^1(0,1),\ a \in \mathbb{R}$

operatörlerinin spektrumları bulunsun. Bu halde $E : H \to H$ birim operatör olmak üzere

(1) Her $u(t) \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$ için

$$\left(u' + au - \lambda u, e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)} = \left(u', e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)} + \left(u, (a-\bar{\lambda})e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)}$$
$$= \left(u, e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)'_{L_2(0,1)} - \left(u, (a-\bar{\lambda})e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)} + \left(u, (a-\bar{\lambda})e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)$$
$$= \left(u(1), e^{(a-\bar{\lambda})}\right)_{L_2(0,1)} - \left(u(0), 1\right)_{L_2(0,1)} = 0$$

olduğundan her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$R(A_1 - \lambda E) \perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$$

ve buradan

$$\overline{R(A_1 - \lambda E)} \perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$$

bulunur. Başka bir deyişle,

$$\overline{R(A_1 - \lambda E)} \neq L_2(0,1)$$

Sonuncu ve kalan spektrumunun tanımına göre

$$\sigma(A_1) = \sigma_r(A_1) = \mathbb{C}$$

(2) Bu durumda $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$A_2u = u' + au = \lambda u + f,\ f \in L_2(0,1)$$

denkleminin genel çözümü

$$u(t) = ce^{(\lambda-a)t} + \int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)} f(s)\,ds$$

şeklinde olup $u(0) = 0$ sınır değer koşulundan $c = 0$ bulunur. Öyleyse $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$(A_2 - \lambda)u = f\ ,\ f \in L_2(0,1)$$

denkleminin

$$u(t) = R_\lambda(A_2) f(t) = \int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)} f(s)\,ds \in W_2^1(0,1)$$

şeklinde bir tek çözümü vardır, yani

$$R_\lambda(A_2) = (A_2 - \lambda E)^{-1}$$

mevcut olup

$$(A_2 - \lambda E)^{-1} \in B(L_2(0,1))$$

Başka bir ifadeyle

$$\sigma(A_2) = \varnothing,\ \rho(A_2) = \mathbb{C}$$

(3) $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$A_3 u = u' + au = \lambda u,\ u \in D(A_3)$$

denkleminin çözüm kümesi

$$u_\lambda(t) = ce^{-(a-\lambda)t},\ \ c \in \mathbb{C},\ 0 \le t \le 1$$

şeklindedir. Ayrıca $u_\lambda \in W_2^1(0,1)$ olup $u(0) = u(1)$ sınır değerlerini kullanılırsa

$$c = ce^{-(a-\lambda)}$$

olduğu elde edilir. Buradan

$$c\left(1 - e^{-(a-\lambda)}\right) = 0$$

olup $c \neq 0$ için

$$1 = e^{-(a-\lambda)}$$

şeklindedir. Buradan ise $\lambda - a = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$ oluğu bulunur. Sonuncu ve noktasal spektrumun tanımından

$$\sigma_p(A_3) = \{a + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$$

Örnek 1.2.74'den $A_3 : D(A_3) \subset L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ operatörü normal olup Teorem 1.2.82'den bu operatörün kalan spektrumu $\sigma_r(A_3) = \varnothing$.

Şimdi $\lambda \neq \lambda_k = a + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$ alınsın.

$$A_3 u = \lambda u + f,\ u(t), f(t) \in L_2(0,1)$$

denkleminin çözüm kümesi

$$u(t) = ce^{-(a-\lambda)t} + \int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)} f(s)\,ds,\ c \in \mathbb{C}$$

şeklindedir. $u(0)=u(1)$ sınır değerleri kullanılırsa

$$c=\left(1-e^{(\lambda-a)}\right)^{-1}\int_0^1 e^{(\lambda-a)(1-s)} f(s)\,ds$$

olup

$$R_\lambda f(t)=\left(1-e^{(\lambda-a)}\right)^{-1}\int_0^1 e^{(\lambda-a)(1+t-s)} f(s)\,ds+\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\,ds,\ f\in L_2(0,1)$$

Yani

$$R_\lambda f(t)=\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\,ds+\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_t^1 e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\,ds$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi $R_\lambda f(t)\in B\left(L_2(0,1)\right)$ olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
\left\|R_\lambda f(t)\right\|^2 &= \int_0^1\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\,ds+\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_t^1 e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\,ds\right|^2 dt\\
&\le 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\,ds\right|^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_t^1 e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\,ds\right|^2\right)dt\\
&\le 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_0^t\left|e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\right|ds\right)^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_t^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\right|ds\right)^2\right)dt\\
&\le 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\right|ds\right)^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\right|ds\right)^2\right)dt
\end{aligned}$$

(Cauchy-Bunyokowski Eşitsizliğinden)

$$\begin{aligned}
&\le 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}\right|^2 ds\int_0^1\left|f(s)\right|^2 ds+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}\right|^2 ds\int_0^1\left|f(s)\right|^2 ds\right)dt\\
&\le 2\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\right)\int_0^1\left(\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}\right|^2 ds\right)dt\left\|f(t)\right\|^2\\
&\le 2\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\right)\left(\frac{e^{2|a-\lambda|}-1}{2|a-\lambda|}\right)^2\left\|f(t)\right\|^2
\end{aligned}$$

Bu halde

$$c_\lambda := \left(2\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2+2\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{2|\lambda-a|}-1}{2|\lambda-a|}\right)$$

olarak seçildiğinde

$$\|R_\lambda f(t)\| \le c_\lambda \|f(t)\|$$

elde edilir. Böylece eğer $\lambda \ne \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}$ ise, $\lambda \in \rho(A_3)$. Sonuç olarak

$$\sigma(A_3) = \{a + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$$

(4) $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$A_4 u = u' + au = \lambda u, \; u \in W_2^1(0,1)$$

denkleminin çözüm kümesi

$$u(t) = ce^{(\lambda - a)t}$$

şeklinde olup her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $A_4 u = \lambda u$ denkleminin $u \ne 0$, $u \in W_2^1(0,1)$ şeklinde çözümü vardır. Sonuncu ve noktasal spektrum tanımına göre

$$\sigma(A_4) = \sigma_p(A_4) = \mathbb{C}$$

Tanım 1.2.88 (Diskret Spektrumlu Operatör, ([38], s.27)**):** $T : D(T) \subset H \to H$ operatörü herhangi bir H Hilbert uzayı üzerinde lineer kapalı ve yoğun tanımlı bir operatör olsun. Eğer $\rho(T) \ne \varnothing$ ve $\lambda \in \rho(T)$ için rezolvent operatör $R_\lambda(T) \in C_\infty(H)$ ise T operatörüne diskret spektumlu operatör denir.

Örnek 1.2.89 ([44], s.365)**:** $H = L_2(0,1)$ uzayında

$$A : W_2^1(0,1) \subset L_2(0,1) \to L_2(0,1),$$
$$Au = u', \; u(0) = 0$$

operatörü diskret spektrumlu bir operatördür. Bu halde $\lambda \in \mathbb{C}$ ve her $f \in L_2(0,1)$ için

$$\begin{cases} Au = \lambda u + f \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin çözümü

$$R_\lambda(A) f(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} f(s)\,ds, \quad f \in L_2(0,1)$$

şeklindedir. Öyleyse her $\lambda \in \rho(A)$ için $R_\lambda(A) \in C_\infty(L_2(0,1))$ (bak ([37], s.93)).

Gerçekten, bu durumda

$$R_\lambda(A)f(t)=\int_0^1 k(t,s)f(s)ds\,,\quad f\in L_2(0,1)$$

$$k(t,s)=\begin{cases} e^{-\lambda(t-s)} & ,\ 0\le s\le t\le 1 \text{ ise} \\ 0 & ,\ 0\le t< s\le 1 \text{ ise}\end{cases}$$

yazılabilip $\lambda\neq 0$ için

$$\int_0^1\int_0^1 |k(t,s)|^2 dsdt=\int_0^1\int_0^t \left|e^{-\lambda(t-s)}\right|^2 dsdt=\int_0^1 e^{-2\lambda t}\left(\int_0^t e^{2\lambda s}ds\right)dt$$

$$=\int_0^1 e^{-2\lambda t}\frac{1}{2\lambda}\left(e^{2\lambda t}-1\right)dt=\frac{1}{2\lambda}\int_0^1 dt-\frac{1}{2\lambda}\int_0^1 e^{-2\lambda t}dt$$

$$=\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{4\lambda^2}\left(e^{-2\lambda}-1\right)=\frac{2\lambda+e^{-2\lambda}-1}{4\lambda^2}<\infty$$

şeklindedir. Eğer $\lambda=0$ ise de $R_\lambda(A)=R_0(A)\in C_\infty(L_2(0,1))$ olduğu açıktır.

Tanım 1.2.90 (Kuvvet Sınırlı Operatör, [45]**):** H bir Hilbert uzayı ve $T\in B(H)$ olsun. Eğer her $n\in\mathbb{N}$ için $\left\|T^n\right\|\le M<\infty$ olacak şekilde sabit bir $M\,(\ge 1)$ sayısı mevcutsa T operatörüne kuvvet sınırlı operatör denir ve $T\in PW(H)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca eğer her $n\in\mathbb{N}$ için $\left\|T^n\right\|\le M$ eşitsizliğini sağlayan en küçük M sayısı mevcut ise bu sayıya T operatörünün kuvvet sınırı denir ve $M_w(T)$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 1.2.91: ([40], s.301) $S:L_2(-1,1)\to L_2(-1,1)$, $Sf(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$, $f\in L_2(-1,1)$ şeklinde tanımlanan S operatörü kuvvet sınırlı bir operatördür.

Gerçekten; $\|S\|=\dfrac{4}{\pi}$ ve Örnek 1.2.43'ten $\left\|S^n\right\|=0\,,n\ge 2$ olup her $n\ge 1$ için $\left\|S^n\right\|\le\dfrac{4}{\pi}$ şeklindedir. Yani $S\in PW(L_2(-1,1))$'dir.

Örnek 1.2.92: H herhangi bir Hilbert uzayı olsun. Bu halde

$$T:H\to H,\ Tx=\frac{1}{2}x,\ x\in H$$

Yani $E:H\to H$ birim operatör olmak üzere $T=\dfrac{1}{2}E$ şeklinde tanımlanan T operatörü kuvvet sınırlı bir operatördür.

Gerçekten; her $n\ge 1$ için

$$\left\|T^n\right\|=\frac{1}{2^n}\le 1$$

olup $T \in PW(H)$'dir.

Örnek 1.2.93: H bir Hilbert uzayı,

$$T : H \to H,\ Tx = 2x,\ x \in H$$

Yani $E : H \to H$ birim operatör olmak üzere $T = 2E$ şeklinde tanımlanan T operatörü kuvvet sınırlı bir operatör olamaz. Çünkü her $n \geq 1$ için

$$\|T^n\| \leq 2^n$$

şeklindedir.

Tanım 1.2.94 (Polinomsal Sınırlı Operatör, [45]**):** H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun. Eğer her $p(\cdot)$ polinomu için $\|p(T)\| \leq M \|p\|_\infty$, $\|p\|_\infty = \sup\{|p(z)| : z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ olacak şekilde sabit bir $M(\geq 1)$ sayısı mevcutsa T operatörüne polinomsal sınırlı operatör denir ve $T \in PB(H)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca eğer $\|p(T)\| \leq M \|p\|_\infty$ eşitsizliğini sağlayan en küçük M sayısı mevcut ise bu sayıya T operatörünün polinomsal sınırı denir ve $M_p(T)$ şeklinde ifade edilir.

Not: H bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun. Bu durumda; eğer $T \in PB(H)$ ise $T \in PW(H)$'dır. Bu iddianın tersinin doğru olmadığını, yani kuvvet sınırlı her operatörün polinomsal sınırlı olmadığını gösteren operatör örneği A. Lebow'un [46] çalışmasında verilmiştir.

Örnek 1.2.95 [47]**:** Eğer H bir Hilbert uzayı, $K : H \to H$ bir daraltma operatörü ise her p polinomu için

$$\|p(K)\| \leq \|p\|_\infty$$

eşitsizliği J.von Neumann eşitsizliği olarak anılmaktadır. Bu eşitsizlikten $K \in PB(H)$ olduğu elde edilir.

Örnek 1.2.96 [46]**:** H bir Hilbert uzayı, $K : H \to H$ bir daraltma operatörü, $S, S^{-1} \in B(H)$ için $T = SKS^{-1} : H \to H$ operatörü polinomsal sınırlı bir operatördür.

Gerçekten; keyfi $p(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m$, $a_m \in \mathbb{C}$, $m = 0,1,\ldots,n$ için

$$
\begin{aligned}
\|p(T)\| &= \left\|p\left(SKS^{-1}\right)\right\| \\
&= \left\|a_n\left(SKS^{-1}\right)^n + a_{n-1}\left(SKS^{-1}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(SKS^{-1}\right) + a_0 E\right\| \\
&= \left\|a_n\left(SK^n S^{-1}\right) + a_{n-1}\left(SK^{n-1}S^{-1}\right) + \cdots + a_1\left(SKS^{-1}\right) + a_0 SS^{-1}\right\| \\
&= \left\|S\left(a_n K^n + a_{n-1}K^{n-1} + \cdots + a_1 K + a_0 E\right)S^{-1}\right\| \\
&\le \|S\|\|p(K)\|\left\|S^{-1}\right\|
\end{aligned}
$$

eşitsizliği doğrudur. Bu sonuncu ve J.von Neumann eşitsizliğinden

$$\|p(T)\| \le M\|p\|_\infty , \; M := \|S\|\left\|S^{-1}\right\| < \infty$$

olup T operatörü polinomsal sınırlı bir operatördür.

Fakat G. Pisier'in [48] çalışmasında bir Hilbert uzayında polinomsal sınırlı olan ama bir daraltma dönüşümüne benzer olmayan operatörler olduğu da gösterilmiştir.

Tanım 1.2.97 (Genişletilmiş Özdeğer, [49]**):** H bir Hilbert uzayı ve $A \in B(H)$ olsun. Eğer $TA = \lambda AT$ olacak şekilde sıfırdan farklı $T \in B(H)$ operatörü mevcutsa $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına A operatörünün bir genişletilmiş özdeğeri denir ve A operatörünün tüm genişletilmiş özdeğerlerinin kümesi $\Sigma(A)$ ile gösterilir.

Bu durumda $\lambda = 1$ sayısının her lineer sınırlı A operatörü için bir genişletilmiş özdeğeri olduğu açıktır. Burada tanımdaki T operatörü E birim operatörü olarak seçilebilir.

Örnek 1.2.98 [50]**:** H bir Hilbert uzayı, $E : H \to H$ birim operatör ise $\Sigma(E) = \{1\}$ 'dir.

Gerçekten; $\lambda = 1$ ve her $T \in B(H)$, $T \ne 0$ için $TE = \lambda ET$ şeklindedir.

Örnek 1.2.99 [49]**:** H bir Hilbert uzayı, $A : H \to H$ nilpotentlik derecesi $n > 1$ olan bir lineer sınırlı nilpotent operatör olsun. Bu halde $\Sigma(A) = \mathbb{C}$ 'dir. Gerçekten; burada genişletilmiş özdeğerler tanımındaki T operatörü, A^{n-1} şeklinde seçilebilir.

Tanım 1.2.100 (Hilbert uzaylarının ve operatörlerinin direkt toplamı, ([51], s.256)**:** H_n, $n \ge 1$ Hilbert uzaylarının sonsuz direkt toplamı ve H_n, $n \ge 1$ Hilbert uzayı üzerinde lineer yoğun tanımlı kapalı $A_n : D(A_n) \subset H_n \to H_n$, $n \ge 1$ operatörlerin sonsuz direkt toplamı sırasıyla

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n = \left\{ u = (u_n) : u_n \in H_n, \; n \ge 1, \; \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{H_n}^2 < \infty \right\},$$

$$A=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n,\ A: D(A)\subset H\to H,$$
$$D(A)=\left\{u=(u_n)\in H\ : u_n\in D(A_n),\ \ n\geq 1,\ \ Au=(A_n u_n)\in H\ \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu halde H

$$(u,v)_H=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n,v_n)_{H_n}$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır [51].

Örneğin; $H_n:=(\mathbb{C},|\cdot|)$, $n\geq 1$ olmak üzere

$$H=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}\mathbb{C}=\left\{(u_n):u_n\in\mathbb{C},\ n\geq 1 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|^2<\infty\right\}=\ell_2$$

şeklindedir. Ayrıca eğer

$$A_n:H_n\to H_n\ ,\ A_n u_n:=\alpha_n u_n\ ,\ n\geq 1\ ,\alpha_n\in\mathbb{C},\ \alpha=\sup_{n\geq 1}|\alpha_n|<\infty$$

olmak üzere

$$A:\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}H_n\to\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}H_n\ ,\ A=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}A_n$$

olsun. Bu halde

$$v:=Au,(v_n)=((Au)n)=(\alpha_n u_n),\ n\geq 1$$

olup her $u\in H$ için

$$\|Au\|_H=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2|u_n|^2\right)^{1/2}\leq\alpha\|u\|_H$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$A:\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}H_n\to\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}H_n$$

operatörü sınırlı bir operatördür.

2.YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. Direkt Toplam Operatörlerinin Bazı Kompaktlık Özellikleri

Bu bölümde Hilbert uzaylarının direkt toplamı üzerinde tanımlı direkt toplamnoperatörlerinin kompaktlığı ile koordinat operatörlerinin kompaktlığı arasındaki ilişki araştırılacaktır.

İlk önce her $n \geq 1$ için $A_n \in B(H_n)$ olmak üzere $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$ Hilbert uzayı üzerinde tanımlı $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n$ operatörünün sınırlılık özelliği araştırılacaktır. Aşağıdaki örnekte bu iddianın genelde doğru olmadığını gösteriliyor. Gerçekten, eğer

$$A_n u_n := n u_n \ , \ u_n \in H_n \ , \ n \geq 1 \ , \ A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n \ , \ H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$$

ise her $n \geq 1$ için $A_n \in B(H_n)$, ama $A \notin B(H)$.

Şimdi ileride sık sık kullanacağımız ve [5] çalışmasında ispatsız verilen bir önerme ve ispatı verilsin.

Teorem 2.1.1 [5]: $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n$ ve her $n \geq 1$ için $A_n \in B(H_n)$ olsun. Bu durumda, $A \in B(H)$ olması için gerek ve yeter şart $\sup\limits_{n \geq 1} \|A_n\| < \infty$ olmasıdır.

Ek olarak, $A \in B(H)$ olduğu durumda

$$\|A\| = \sup_{n \geq 1} \|A_n\|$$

eşitliği doğrudur.

İspat: $A \in B(H)$ ama $\sup\limits_{n \geq 1} \|A_n\| = \infty$ olsun. Bu durumda bir $(k_n) \subset \mathbb{N}$ dizisi vardır öyleki

$$\|A_{k_n}\| = \sup \left\{ \frac{\|A_{k_n} u_{k_n}\|_{H_{k_n}}}{\|u_{k_n}\|_{H_{k_n}}} \ : \ u_{k_n} \in H_{k_n} \ , \ u_{k_n} \neq 0 \ , \ n \geq 1 \right\} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

O halde bir $\left(u^*_{k_n}\right) \subset H_{k_n}$ dizisi vardır öyleki

$$\frac{\|A_{k_n} u^*_{k_n}\|_{H_{k_n}}}{\|u^*_{k_n}\|_{H_{k_n}}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

Öyleyse bir $(m_n) \subset (k_n)$ alt dizisi bulunabilir öyleki her $n \geq 1$ için

$$\frac{\left\| A_{m_n} u^*_{m_n} \right\|_{H_{m_n}}}{\left\| u^*_{m_n} \right\|_{H_{m_n}}} > n$$

Yani her $n \geq 1$ için

$$\frac{\left\| u^*_{m_n} \right\|_{H_{m_n}}}{\left\| A_{m_n} u^*_{m_n} \right\|_{H_{m_n}}} \leq \frac{1}{n}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi eğer

$$v := \left(0, ..., 0, v_{m_1}, 0, ..., 0, v_{m_2}, 0, ..., 0, v_{m_n}, 0, ...\right)$$

şeklinde bir eleman tanımlanırsa, burada

$$v_{m_n} := \frac{u^*_{m_n}}{\left\| A_{m_n} u^*_{m_n} \right\|_{H_{m_n}}} \;, n \geq 1, \;\; \|v\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| v_{m_n} \right\|^2_{H_{m_n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Yani $v \in H$. Fakat

$$\|Av\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\| A_{m_n} u^*_{m_n} \right\|^2_{H_{m_n}}}{\left\| A_{m_n} u^*_{m_n} \right\|^2_{H_{m_n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

yani $v \notin D(A)$ ve buradan $D(A) \neq H$. Bu çelişki $\sup\limits_{n \geq 1} \|A_n\| < \infty$ olduğunu gösterir.

Tersine, eğer $\sup\limits_{n \geq 1} \|A_n\| \leq c < \infty$ ise her $u = (u_n) \in H$ için

$$\|Au\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n u_n\|^2_{H_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|^2 \|u_n\|^2_{H_n} \leq \left(\sup_{n \geq 1} \|A_n\| \right)^2 \|u\|_H^2$$

Buradan $\|A\| \leq \sup\limits_{n \geq 1} \|A_n\|$, yani $A \in B(H)$ olduğu açıktır. Ayrıca

$$\sup\left\{ \|Ax\|_H : x \in H, \; \|x\|_H = 1 \,, \|x_n\|_{H_n} = 1 \right\} \leq \sup\left\{ \|Ax\|_H : x \in H, \; \|x\|_H = 1 \right\}$$

eşitsizliği doğru olup bu sonuncudan

$$\sup\left\{ \|A_n x_n\|_{H_n} : x_n \in H_n, \|x_n\|_{H_n} = 1 \right\} \leq \sup\left\{ \|Ax\|_H : x \in H, \; \|x\|_H = 1 \right\}, \; n \geq 1$$

bulunur. Dolayısıyla her $n \geq 1$ için

$$\|A_n\| \leq \|A\|$$

olup buradan ise

$$\sup_{n\geq 1}\|A_n\| \leq \|A\|$$

olur. Böylece

$$\|A\| = \sup_{n\geq 1}\|A_n\|$$

elde edilir.

Operatörlerin kompaktlığı tanımından ([35], s.405) aşağıdaki önermenin doğru olduğu elde edilir.

Teorem 2.1.2: Eğer $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n$, $A_n \in B(H_n)$, $n \geq 1$ ve $A \in C_\infty(H)$ ise her $n \geq 1$ için $A_n \in C_\infty(H_n)$.

Uyarı 2.1.3: Sonuncu iddianın tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.1.4: H_n bir boyutlu Öklid uzayı, yani $H_n = \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $A_n : H_n \to H_n$ operatörü birim operatör ve $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n$ olsun. Buradan her $n \geq 1$ için $A_n \in C_\infty(H_n)$ ama $A \notin C_\infty(H)$ olduğu açıktır.

Genelde, aşağıdaki sonuç doğrudur.

Teorem 2.1.5 [53]: $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n$ ve her $n \geq 1$ için $A_n \in C_\infty(H_n)$ olsun. Bu halde $A \in C_\infty(H)$ olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n\to\infty}\|A_n\| = 0$ olmasıdır.

İspat: $\lim_{(n)}\sup\|A_n\| > 0$ olduğu varsayılsın. O halde bir $c > 0$ sayısı ve $(k_n) \subset \mathbb{N}$ dizisi vardır öyleki

$$\|A_{k_n}\| = \sup\left\{ \frac{\|A_{k_n} u_{k_n}\|_{H_{k_n}}}{\|u_{k_n}\|_{H_{k_n}}} : u_{k_n} \in H_{k_n} \setminus \{0\} \ , n \geq 1 \right\} \geq c > 0$$

Bu durumda $\left(u_{k_n}^*\right) \in H_{k_n}$ dizisi bulunabilir öyleki

$$\frac{\|A_{k_n} u_{k_n}^*\|_{H_{k_n}}}{\|u_{k_n}^*\|_{H_{k_n}}} \geq c \ , n \geq 1$$

şeklindedir.

Şimdi, eğer aşağıdaki formda H 'nın bir

$$M := \left\{ \left(\underbrace{0,0,\dots,0}_{k_n-1}, \frac{u_{k_n}^*}{\left\| A_{k_n} u_{k_n}^* \right\|_{H_{k_n}}}, 0, \dots \right) \in H \ : \ n \geq 1 \right\}$$

alt kümesi tanımlanırsa her $u \in M$ için

$$\|u\| \leq \frac{1}{c} < \infty$$

Yani M, H 'da sınırlı bir kümedir.

Diğer taraftan

$$AM = \left\{ \left(0,0,\dots,0, \frac{A_{k_n} u_{k_n}^*}{\left\| A_{k_n} u_{k_n}^* \right\|_{H_{k_n}}}, 0, \dots \right) \in H \ : \ n \geq 1 \right\}$$

şeklinde olduğu açıktır. Şimdi $\overline{AM} \subset H$ kümesinin kompakt olmadığı gösterilsin. Keyfi bir $(v_n) \subset \overline{AM}$ dizisi alınsın. Bu durumda her $n \geq 1$ için $\|v_n\|_H = 1$ olup keyfi iki $m, n \geq 1,\ m \neq n$ için

$$\|v_n - v_m\|_H^2 = (v_n - v_m, v_n - v_m)_H = \|v_n\|_H^2 - (v_n, v_m)_H - (v_m, v_n)_H + \|v_m\|_H^2 = 1 + 1 = 2$$

bulunur. Buradan her $m, n \geq 1,\ m \neq n$ için

$$\|v_n - v_m\|_H = \sqrt{2}$$

olduğu elde edilir. Bu ise alınan hiçbir $(v_n) \subset \overline{AM}$ dizisinin yakınsak bir alt dizi bulunduramayacağı anlamına gelir. Öyleyse bilinen bir sonuçtan ([34], s.16) $\overline{AM} \subset H$ kümesinin kompakt olmadığı ve dolayısıyla A operatörünün kompakt olmadığı elde edilir. Sonuç olarak

$$\lim_{(n)} \sup \|A_n\| = 0$$

Yani

$$\lim_{(n)} \|A_n\| = 0$$

Tersine, eğer

$$K_m : H \to H \ , m \geq 1 \quad , \quad K_m := A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m \oplus 0_{H_{m+1}} \oplus 0_{H_{m+2}} \oplus \cdots$$

ise her $u \in H$ için

$$\left\|(A-K_m)(u)\right\|_H^2=\left(\left(\overset{\infty}{\underset{n=m+1}{\oplus}}A_n\right)u,\left(\overset{\infty}{\underset{n=m+1}{\oplus}}A_n\right)u\right)_H=\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(A_nu_n,A_nu_n\right)_{H_n}=\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\|A_nu_n\right\|_{H_n}^2$$

$$\le\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\|A_n\right\|^2\left\|u_n\right\|_{H_n}^2\le\sup_{n\ge m+1}\left\|A_n\right\|^2\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\|u_n\right\|_{H_n}^2\le\left(\sup_{n\ge m+1}\left\|A_n\right\|\right)^2\left\|u\right\|_H^2$$

Buradan

$$\left\|A-K_m\right\|\le\sup_{n\ge m+1}\left\|A_n\right\|,\ m\ge1$$

elde edilir. Ayrıca $\limsup\limits_{(n)}\left\|A_n\right\|=0$ olduğu için sonuncu bağıntıdan $B(H)$'daki (K_m) operatörler dizisinin operatör normunda A operatörüne yakınsadığı açıktır. Diğer taraftan $K_m\in C_\infty(H),\ m\ge1$ olduğundan kompakt operatörler teorisinin bilinen bir sonucundan $A\in C_\infty(H)$ ([37], s.92) olduğu bilinir.

Şimdi direkt toplam operatörünün spektrum yapısı hakkındaki aşağıdaki kısım verilebilir.

2.2. Direkt Toplam Operatörlerinin Spektrum Kümeleri

Bu bölümde Hilbert uzaylarının direkt toplamı üzerinde tanımlı direkt toplam operatörlerinin spektrum ve rezolvent kümeleri ile koordinat operatörlerinin spektrum ve rezolvent kümeleri arasındaki ilişki araştırılacaktır.

Teorem 2.2.1 [53]: Her $n\ge1$ için H_n bir Hilbert uzayı ve $H=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}H_n$ olmak üzere $A=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}A_n:D(A)\subset H\to H$ operatörünün spektrum ve rezolvent kümeleri için aşağıdaki bağıntılar doğrudur:

$$\sigma_p(A)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_p(A_n);$$

$$\sigma_c(A)=\left\{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_p(A_n)\right)^c\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_r(A_n)\right)^c\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_c(A_n)\right)\right\}$$

$$\cup\left\{\lambda\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\rho(A_n):\sup_{n\ge1}\left\|R_\lambda(A_n)\right\|=\infty\right\};$$

$$\sigma_r(A)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_p(A_n)\right)^c\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_r(A_n)\right);$$

$$\rho(A)=\left\{\lambda\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\rho(A_n):\sup_{n\geq 1}\|R_\lambda(A_n)\|<\infty\right\}$$

İspat: İlk önce birinci iddianın doğruluğu ispatlansın. $\lambda\in\sigma_p(A)$ olsun. Bu durumda $Au=\lambda u$, $u\neq 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $u=(u_n)\in D(A)$ elemanı vardır. Bu halde $u\neq 0$ olduğu için en az bir $m_\lambda\in\mathbb{N}$ vardır öyleki

$$u_{m_\lambda}\in D\left(A_{m_\lambda}\right),\ u_{m_\lambda}\neq 0 \text{ ve } A_{m_\lambda}u_{m_\lambda}=\lambda u_{m_\lambda}$$

eşitliği sağlanır. Bu $\lambda\in\sigma_p\left(A_{m_\lambda}\right)$ olduğu anlamına gelir. Buradan

$$\sigma_p(A)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_p(A_n)$$

elde edilir.

Tersine, herhangi bir $m\in\mathbb{N}$ için $\lambda\in\sigma_p(A_m)$ olsun, yani $u_m\in D(A_m)$, $u_m\neq 0$ ve $A_m u_m=\lambda u_m$. Bu durumda

$$u_*:=(0,0,...,0,u_m,0,...)\in D(A),\ u_*\neq 0 \text{ ve } Au_*=\lambda u_*$$

bağıntısı doğrudur. Buradan $\lambda\in\sigma_p(A)$ olup

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_p(A_n)\subset\sigma_p(A)$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla teoremin birinci iddiası açıktır.

Şimdi sürekli spektrumla ilgili olan ikinci bağıntı ispatlansın. $\lambda\in\sigma_c(A)$ olsun. Bu durumda $E:H\to H$ birim operatör olmak üzere sürekli spektrum tanımından $A-\lambda E$ birebir bir operatör, $R(A-\lambda E)\neq H$ ve $R(A-\lambda E)$, H'da yoğundur. Sonuç olarak $E_n:H_n\to H_n, n\geq 1$ birim operatör olmak üzere her $n\geq 1$ için $A_n-\lambda E_n$ operatörü H_n' de birebir bir operatör, en az bir $m_\lambda\in\mathbb{N}$ vardır öyleki $R\left(A_{m_\lambda}-\lambda E_{m_\lambda}\right)\neq H_{m_\lambda}$ ve her $n\geq 1$ için $R(A_n-\lambda E_n)$ lineer altuzayı H_n'de yoğundur veya her $n\geq 1$ için $\lambda\in\rho(A_n)$ fakat $\sup_{n\geq 1}\|R_\lambda(A_n)\|=\infty$. Bunun anlamı ise

$$\lambda\in\left\{\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_c(A_n)\cup\rho(A_n)\right)\right]\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_c(A_n)\right)\right\}\cup\left\{\lambda\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\rho(A_n):\sup_{n\geq 1}\|R_\lambda(A_n)\|=\infty\right\}$$

olduğudur.

Tersine olarak, $\lambda \in \mathbb{C}$ için sonuncu bağıntının sağlandığı kabul edilsin. Sonuç olarak her $n \geq 1$ için $\lambda \in \sigma_c(A_n) \cup \rho(A_n)$ ve en az bir $m_\lambda \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$$\lambda \in \sigma_c\left(A_{m_\lambda}\right) \text{ veya } \lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) \text{ ve } \sup_{n\geq 1} \left\| R_\lambda(A_n) \right\| = \infty$$

Yani her $n \geq 1$ için $A_n - \lambda E_n$ birebir bir operatör, $\overline{R(A_n - \lambda E_n)} = H_n$ ve $R\left(A_{m_\lambda} - \lambda E_{m_\lambda}\right) \neq H_{m_\lambda}$ şeklindedir. Buradan $A - \lambda E = \bigoplus_{n=1}^{\infty}(A_n - \lambda E_n)$ operatörünün birebir olduğu, $R(A - \lambda E) \neq H$ ve $\overline{R(A - \lambda E)} = H$ olduğu elde edilir. Bunun sonucu olarak $\lambda \in \sigma_c(A)$. Ayrıca $\lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(A_n)$ ve $\sup_{n\geq 1} \left\| R_\lambda(A_n) \right\| = \infty$ olduğu durumlarda da $\lambda \in \sigma_c(A)$ olduğu açıktır. Böylece

$$\sigma_c(A) = \left\{ \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\sigma_c(A_n) \cup \rho(A_n) \right) \right] \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_c(A_n) \right) \right\} \cup \left\{ \lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) : \sup_{n\geq 1} \left\| R_\lambda(A_n) \right\| = \infty \right\}$$

elde edilir. Ayrıca her $n \geq 1$ için

$$\sigma_p(A_n) \cup \sigma_c(A_n) \cup \sigma_r(A_n) \cup \rho(A_n) = \mathbb{C}$$

ve

$$\sigma_p(A_n) \cap \sigma_c(A_n) = \varnothing \ , \ \sigma_p(A_n) \cap \sigma_r(A_n) = \varnothing \ , \ \sigma_p(A_n) \cap \rho(A_n) = \varnothing \ ,$$
$$\sigma_c(A_n) \cap \sigma_r(A_n) = \varnothing \ , \ \sigma_c(A_n) \cap \rho(A_n) = \varnothing \ , \ \sigma_r(A_n) \cap \rho(A_n) = \varnothing$$

bağıntılarından her $n \geq 1$ için

$$\sigma_c(A_n) \cup \rho(A_n) = \left[\sigma_p(A_n) \cup \sigma_r(A_n) \right]^c$$

eşitliği elde edilir. Bu halde De Morgan kuralından

$$\sigma_c(A_n) \cup \rho(A_n) = \left[\sigma_p(A_n) \right]^c \cap \left[\sigma_r(A_n) \right]^c$$

bulunur. Öyleyse

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\sigma_c(A_n) \cup \rho(A_n) \right] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\left(\sigma_p(A_n) \right)^c \cap \left(\sigma_r(A_n) \right)^c \right] \\
&= \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\sigma_p(A_n) \right)^c \right] \cap \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\sigma_r(A_n) \right)^c \right] \\
&= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_p(A_n) \right)^c \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_r(A_n) \right)^c
\end{aligned}$$

olduğu açıktır. Sonuçta

$$\sigma_c(A)=\left\{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_p(A_n)\right)^c\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_r(A_n)\right)^c\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_c(A_n)\right)\right\}\cup\left\{\lambda\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\rho(A_n):\sup_{n\geq 1}\left\|R_\lambda(A_n)\right\|=\infty\right\}$$

olduğu bulunur.

Şimdi üçüncü iddianın doğruluğu gösterilsin. Bir $\lambda\in\sigma_r(A)$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde kalan spektrum tanımından $A-\lambda E$ birebir bir operatör, $\overline{R(A-\lambda E)}\neq H$ bağıntısı doğrudur. O halde her $n\geq 1$ için bir $A_n-\lambda E_n$ operatörü H_n' de birebir bir operatör, en az bir $m_\lambda\in\mathbb{N}$ için $\overline{R\left(A_{m_\lambda}-\lambda E_{m_\lambda}\right)}\neq H_{m_\lambda}$ eşitliği doğrudur. Buradan

$$\lambda\in\left\{\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_c(A_n)\cup\sigma_r(A_n)\cup\rho(A_n)\right)\right]\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_r(A_n)\right)\right\}$$

bulunur ki buradan

$$\sigma_r(A)\subset\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_c(A_n)\cup\sigma_r(A_n)\cup\rho(A_n)\right)\right]\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_r(A_n)\right)$$

bağıntısına ulaşılır.

Ters yöndeki bağıntının doğruluğu kolaylıkla gösterilebilir. Öyleyse

$$\sigma_r(A)=\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_c(A_n)\cup\sigma_r(A_n)\cup\rho(A_n)\right)\right]\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_r(A_n)\right)$$

Bir operatörün spektrum parçaları ve rezolvent kümeleri arasındaki ayrıklık özelliği ve her $n\geq 1$ için

$$\sigma_p(A_n)\cup\sigma_c(A_n)\cup\sigma_r(A_n)\cup\rho(A_n)=\mathbb{C}$$

bağıntısından

$$\sigma_c(A_n)\cup\sigma_r(A_n)\cup\rho(A_n)=\left(\sigma_p(A_n)\right)^c\ ,\ n\geq 1$$

elde edilir. Bu sonuncudan ve De Morgan kuralından

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_c(A_n)\cup\sigma_r(A_n)\cup\rho(A_n)\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_p(A_n)\right)^c=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_p(A_n)\right)^c$$

olup sonuçta

$$\sigma_r(A)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_p(A_n)\right)^c\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_r(A_n)\right)\ .$$

Şimdi ise teoremin rezolvent küme ile ilişkisini açıklayan iddianın doğruluğu gösterilsin.

Bir $\lambda\in\rho(A)$ olsun. Bu halde $A-\lambda E:H\to H$ birebir bir operatör, $R(A-\lambda E)=H$ ve $(A-\lambda E)^{-1}\in B(H)$. O halde her $n\geq 1$ için $A_n-\lambda E_n:H_n\to H_n$ operatörü birebir bir operatör , $R(A_n-\lambda E_n)=H_n$ ve $(A_n-\lambda E_n)^{-1}\in B(H_n)$. Bu ise her $n\geq 1$ için $\lambda\in\rho(A_n)$ olduğu anlamına gelir ve sonuçta $\lambda\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\rho(A_n)$ olduğu bulunur. Ayrıca

$$(A-\lambda E)^{-1}=\underset{n=1}{\overset{\infty}{\oplus}}(A_n-\lambda E_n)^{-1}:\underset{n=1}{\overset{\infty}{\oplus}}H_n\to\underset{n=1}{\overset{\infty}{\oplus}}H_n$$

ve

$$(A-\lambda E)^{-1}\in B(H)$$

bağıntısı ve Teorem 2.1.1'den

$$\left\|(A-\lambda E)^{-1}\right\|=\sup_{n\geq 1}\left\|(A_n-\lambda E_n)^{-1}\right\|<\infty$$

Yani

$$\|R_\lambda(A)\|=\sup_{n\geq 1}\|R_\lambda(A_n)\|<\infty$$

Sonuçta

$$\rho(A)\subset\left\{\lambda\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\rho(A_n):\sup_{n\geq 1}\|R_\lambda(A_n)\|<\infty\right\}$$

Tersine, eğer bir $\lambda\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\rho(A_n)$ ve $\sup_{n\geq 1}\|R_\lambda(A_n)\|<\infty$ ise

$$A-\lambda E=\underset{n=1}{\overset{\infty}{\oplus}}(A_n-\lambda E_n):H\to H$$

operatörü birebir örten olup Teorem 2.1.1'den

$$\|R_\lambda(A)\|=\sup_{n\geq 1}\|R_\lambda(A_n)\|<\infty$$

Bu ise $\lambda\in\rho(A)$ olduğu anlamına gelir. Sonuçta

$$\rho(A)=\left\{\lambda\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\rho(A_n):\sup_{n\geq 1}\|R_\lambda(A_n)\|<\infty\right\}$$

elde edilir.

Şimdi bu sonuçtan yararlanılarak bazı özel operatörlerin spektrumu incelensin.

Örnek 2.2.2: $H=\ell_2$ ve (α_n) bir sınırlı kompleks sayı dizisi olmak üzere

$$A:H\to H \text{ ve } A(u_n):=(\alpha_n u_n),\ (u_n)\in H$$

olsun. Eğer şimdi her $n \geq 1$ için

$$H_n := (\mathbb{C}, |\cdot|) \text{ ve } A_n : H_n \to H_n \ , \ A_n u_n := \alpha_n u_n \ , \alpha_n \in \mathbb{C}$$

olarak alınırsa $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$ ve $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n$ olduğu açıktır. Bu halde noktasal spektrum tanımından ve Teorem 1.2.81'den

$$\sigma_p(A_n) = \{\alpha_n\} \ , \ \sigma_c(A_n) = \sigma_r(A_n) = \varnothing \ , \ n \geq 1$$

olduğu dikkate alınırsa $\lambda \in \rho(A_n) = \mathbb{C} \setminus \{\alpha_n\}$ için A_n operatörünün rezolvent operatörü

$$R_\lambda(A_n) v_n = \frac{1}{\alpha_n - \lambda} v_n \ , v_n \in H_n$$

şeklinde olup

$$\|R_\lambda(A_n)\| = \left| \frac{1}{\alpha_n - \lambda} \right| , \ n \geq 1$$

Öyleyse, Teorem 2.2.1'den dolayı

$$\sigma_p(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_p(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n\} \ ;$$

$$\sigma_c(A) = \left\{ \lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{C} \setminus \{\alpha_n\}) : \sup_{n \geq 1} \frac{1}{|\alpha_n - \lambda|} = \infty \right\} = \left\{ \lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{C} \setminus \{\alpha_n\}) : \inf_{n \geq 1} |\alpha_n - \lambda| = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{C} \setminus \{\alpha_n\}) : (\alpha_{n_m}) \subset (\alpha_n) \text{ vardır öyleki } \alpha_{n_m} \to \lambda \ , \ m \to \infty \right\}$$

$$= \left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n\}} \right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n\} \right)$$

$$\sigma_r(A) = \varnothing \ , \ n \geq 1$$

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{C} \setminus \{\alpha_n\}) : \sup_{n \geq 1} \frac{1}{|\alpha_n - \lambda|} < \infty \right\} = \left\{ \lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{C} \setminus \{\alpha_n\}) : \inf_{n \geq 1} |\alpha_n - \lambda| \neq 0 \right\}$$

Genel olarak

$$\sigma(A) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n\}}$$

Örnek 2.2.3: $H = \ell_2$ ve (α_n) $[0,1]$'de bir dizi ve $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n\}} = [0,1]$ olmak üzere

$$A : H \to H \text{ ve } A(u_n) := (\alpha_n u_n), \ (u_n) \in H$$

olsun. Eğer şimdi bir önceki örnekte olduğu gibi her $n \geq 1$ için

$$H_n := (\mathbb{C}, |\cdot|) \text{ ve } A_n : H_n \to H_n \,,\; A_n u_n := \alpha_n u_n \,,\; \alpha_n \in \mathbb{R}$$

olarak alınırsa $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$ ve $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n$ olup Teorem 2.2.1 ve $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\alpha_n\}} = [0,1]$ olduğundan

$$\sigma_p(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\alpha_n\} \;;\;\; \sigma_c(A) = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\alpha_n\} \;;\;\; \sigma_r(A) = \varnothing$$

Genel olarak ise

$$\sigma(A) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\alpha_n\}} = [0,1]$$

Örnek 2.2.4: Her $n \geq 1$ için $H_n = \ell_2$, $A_n : H_n \to H_n$, $A_n(u_m) := (\alpha_{nm} u_m)$ öyleki $\sup\limits_{n\geq 1}\sup\limits_{m\geq 1}|\alpha_{nm}| < \infty$ olmak üzere $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$ ve $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n$ olsun.

Eğer şimdi her $n \geq 1$ için

$$H_{nm} := (\mathbb{C}, |\cdot|) \text{ ve } A_{nm} : H_{nm} \to H_{nm} \,,\; A_{nm} w_m := \alpha_{nm} w_m \,,\; w_m \in H_{nm} \,,\; m \geq 1$$

alınırsa

$$H_n = \overset{\infty}{\underset{m=1}{\oplus}} H_{nm} \text{ ve } A_n = \overset{\infty}{\underset{m=1}{\oplus}} A_{nm} : H_n \to H_n \,,\; n \geq 1$$

Öyleyse, yine Teorem 2.2.1 ve Örnek 2.2.2'den

$$\sigma_p(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_p(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_p(A_{nm}) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\alpha_{nm}\}$$

$$\sigma_c(A) = \left\{ \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_p(A_n) \right)^c \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_c(A_n) \right) \right\} \cup \left\{ \lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) : \sup_{n\geq 1} \| R_\lambda(A_n) \| = \infty \right\}$$

$$= \left\{ \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\alpha_{nm}\} \right)^c \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\left(\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\alpha_{nm}\}} \right) \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\alpha_{nm}\} \right) \right] \right\}$$

$$\cup \left\{ \lambda \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\alpha_{nm}\}} \right) \right)^c : \inf_{n\geq 1}\inf_{m\geq 1} |\alpha_{nm} - \lambda| = 0 \right\}$$

$$\sigma_r(A) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_p(A_n) \right)^c \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_r(A_n) \right) = \varnothing \;;$$

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) : \sup_{n\geq 1} \| R_\lambda(A_n) \| < \infty \right\}$$

$$= \left\{ \lambda \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\alpha_{nm}\}} \right) \right)^c : \inf_{n\geq 1}\inf_{m\geq 1} |\alpha_{nm} - \lambda| \neq 0 \right\}$$

Örnek 2.2.5: $r,s\in\mathbb{C},\ s\neq 0$ olmak üzere,

$$A=\begin{pmatrix} r & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & r & s & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & s & r & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & s & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & r & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},\ A:\ell_2\to\ell_2$$

şeklindeki sonsuz bir üçköşegenli bant matrise bakılsın. Bu durumda A matrisini $A_n=\begin{pmatrix} r & s \\ s & r\end{pmatrix}$, $A_n:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2,\ n\geq 1$ olmak üzere, $A=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}A_n$, $A:\ell_2\to\ell_2$ şeklinde yazmak mümkündür. Bu halde Teorem 2.1.1'den

$$\|A\|=\sup_{n\geq 1}\|A_n\|=\sup_{n\geq 1}\left(2|r|^2+2|s|^2\right)^{1/2}<\infty$$

Bilindiği gibi Teorem 1.2.81'den her $n\geq 1$ için $\sigma_c(A_n)=\sigma_r(A_n)=\varnothing$.

Şimdi $\sigma_p(A_n),\ n\geq 1$ kümesi hesaplansın. E_n, $\mathbb{C}^2$'de birim matris olmak üzere bir $\lambda\in\mathbb{C}$ için $\det(A_n-\lambda E_n)=0$ karakteristik denklemine bakılırsa;

$$\det(A_n-\lambda E_n)=\begin{vmatrix} r-\lambda & s \\ s & r-\lambda\end{vmatrix}=(r-\lambda)^2-s^2=0$$

eşitliğinden $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ kökleri bulunur ki her $n\geq 1$ için

$$\sigma_p(A_n)=\{\lambda_1,\lambda_2\}$$

olur. Burada $\lambda_1=\lambda_2$ olabilir. Sonuçta her $n\geq 1$ için

$$\sigma(A_n)=\{\lambda_1,\lambda_2\}$$

Diğer taraftan $\lambda\in\rho(A_n),\ n\geq 1$ için

$$(A_n-\lambda E_n)x_n=y_n\ ,\ x_n,y_n\in\mathbb{C}^2,\ x_n=\left(x_n^1,x_n^2\right),\ y_n=\left(y_n^1,y_n^2\right),n\geq 1$$

denklemi

$$\begin{pmatrix} r-\lambda & s \\ s & r-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_n^1 \\ y_n^2\end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan her $n\geq 1$ için

$$(r-\lambda)x_n^1 + s x_n^2 = y_n^1$$
$$s x_n^1 + (r-\lambda)x_n^2 = y_n^2$$

Öyleyse

$$\Delta(\lambda) = (r-\lambda)^2 - s^2 \neq 0$$

olduğundan

$$x_n^1 = \frac{(r-\lambda)y_n^1 - s y_n^2}{\Delta(\lambda)}\ ,\ x_n^2 = \frac{(r-\lambda)y_n^2 - s y_n^1}{\Delta(\lambda)}$$

şeklindedir. Sonuçta

$$R_\lambda(A_n)y_n = \begin{pmatrix} \dfrac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)} & \dfrac{-s}{\Delta(\lambda)} \\ \dfrac{-s}{\Delta(\lambda)} & \dfrac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \end{pmatrix}\ ,\ y_n = (y_n^1, y_n^2) \in \mathbb{C}^2,\ R_\lambda(A_n) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ n \geq 1$$

bulunur. Bu durumda her $\lambda \in \rho(A_n)$, $n \geq 1$ için

$$\|R_\lambda(A_n)\| = \left(2\left|\frac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)}\right|^2 + 2\left|\frac{s}{\Delta(\lambda)}\right|^2 \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{|\Delta(\lambda)|}\left(|r-\lambda|^2 + |s|^2\right)^{1/2} < \infty$$

olup her

$$\lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

için Teorem 2.1.1'den

$$\|R_\lambda(A)\| = \sup_{n \geq 1} \|R_\lambda(A_n)\| < \infty$$

olduğu elde edilir. Öyleyse Teorem 2.2.1'den

$$\sigma(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$$
$$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

Şimdi $A : \ell_2 \to \ell_2$ sonsuz üçköşegenli bant matrisinin spektrumu direkt hesaplansın. Bunun için ilk önce A operatörünün resolvent kümesi bulunsun. E, ℓ_2'de birim operatör olmak üzere $\lambda \in \mathbb{C}$ ve bir $y = (y_n) \in \ell_2$ için $(A - \lambda E)x = y$, $x = (x_n)$, yani

$$\begin{pmatrix} r-\lambda & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s & r-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & r-\lambda & s & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & s & r-\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-\lambda & s & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & r-\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

denklemine bakılsın. Bu durumda her $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} &(r-\lambda)x_{2n-1} + sx_{2n} = y_{2n-1} \\ &sx_{2n-1} + (r-\lambda)x_{2n} = y_{2n} \end{aligned}$$

lineer denklemler sistemi elde edilir.

Eğer $\Delta(\lambda) = (r-\lambda)^2 - s^2 \neq 0$ ise

$$x_{2n-1} = \frac{(r-\lambda)y_{2n-1} - sy_{2n}}{\Delta(\lambda)} \quad , \; x_{2n} = \frac{(r-\lambda)y_{2n} - sy_{2n-1}}{\Delta(\lambda)} \; , \; n \geq 1$$

bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ell_2}^2 = \|(x_n)\|_{\ell_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| \frac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)} y_{2n-1} - \frac{s}{\Delta(\lambda)} y_{2n} \right|^2 + \left| \frac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)} y_{2n} - \frac{s}{\Delta(\lambda)} y_{2n-1} \right|^2 \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[2\left(\left| \frac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)} \right|^2 + \left| \frac{s}{\Delta(\lambda)} \right|^2 \right) |y_{2n-1}|^2 + 2\left(\left| \frac{s}{\Delta(\lambda)} \right|^2 + \left| \frac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)} \right|^2 \right) |y_{2n}|^2 \right] \\ &= 2\left(\left| \frac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)} \right|^2 + \left| \frac{s}{\Delta(\lambda)} \right|^2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} |y_{2n-1}|^2 + |y_{2n}|^2 \\ &= 2\left(\left| \frac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)} \right|^2 + \left| \frac{s}{\Delta(\lambda)} \right|^2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty \end{aligned}$$

olduğundan $x = (x_n) \in \ell_2$ olduğu elde edilir. Ayrıca

$$\left(A-\lambda E\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)} & \frac{-s}{\Delta(\lambda)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{-s}{\Delta(\lambda)} & \frac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)} & \frac{-s}{\Delta(\lambda)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{-s}{\Delta(\lambda)} & \frac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}=\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n\left(\lambda\right)$$

öyle ki

$$A_n\left(\lambda\right)=\begin{pmatrix} \frac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)} & \frac{-s}{\Delta(\lambda)} \\ \frac{-s}{\Delta(\lambda)} & \frac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)} \end{pmatrix}, n \geq 1$$

olup Teorem 2.1.1’den

$$\left\|\left(A-\lambda E\right)^{-1}\right\|=\sup_{n\geq 1}\left\|A_n\left(\lambda\right)\right\|=\sup_{n\geq 1}\left[2\left(\left|\frac{r-\lambda}{\Delta(\lambda)}\right|^2+\left|s\right|^2\right)\right]^{1/2}<\infty$$

Öyleyse

$$\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\Delta\left(\lambda\right)\neq 0\right\}\subset\rho\left(A\right)$$

şeklindedir.

Şimdi $\lambda\in\mathbb{C}$ için

$$\Delta\left(\lambda\right)=\left(r-\lambda\right)^2-s^2=0$$

olsun. Bu halde $s\neq 0$ olduğundan $\lambda\neq r$ olur. Öyleyse

$$\left(A-\lambda E\right)x=0,\ x=\left(x_n\right)$$

denkleminden her $n\geq 1$ için

$$\left(r-\lambda\right)x_{2n-1}+sx_{2n}=0$$
$$sx_{2n-1}+\left(r-\lambda\right)x_{2n}=0$$

ve buradan

$$\left(\left(r-\lambda\right)^2-s^2\right)x_{2n}=0\ ,\ n\geq 1$$

bulunur. Eğer

$$x_{2n} = \frac{1}{n} \neq 0 \; , n \geq 1$$

alınırsa

$$x_{2n-1} = \frac{-s}{(r-\lambda)n} \; , \; n \geq 1$$

Bu halde

$$\|x\|_{\ell_2}^2 = \|(x_n)\|_{\ell_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n-1}|^2 + |x_{2n}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| \frac{s}{r-\lambda} \right|^2 \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) = \left(1 + \left| \frac{s}{r-\lambda} \right|^2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Sonuçta $\lambda \in \sigma_p(A)$ bulunur. Yani

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \Delta(\lambda) = 0\} \subset \sigma(A)$$

bağıntısına ulaşılır. Bu sonuncu ve

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \Delta(\lambda) \neq 0\} \subset \rho(A)$$

bağıntısından

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$$
$$\rho(A) = \mathbb{C} \backslash \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

burada λ_1, λ_2 sayıları $\Delta(\lambda) = 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ denkleminin çözümleridir.

Örnek 2.2.6: (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) kompleks sayı dizileri ve

$$\sup_{n\geq 1} |a_n| < \infty, \; \sup_{n\geq 1} |b_n| < \infty, \; \sup_{n\geq 1} |c_n| < \infty \; \text{ ve } \; \sup_{n\geq 1} |d_n| < \infty$$

olmak üzere,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & c_n & d_n & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, A : \ell_2 \to \ell_2$$

şeklindeki sonsuz bir üçköşegenli bant matrise bakılsın. Eğer

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \; , \; A_n : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, n \geq 1$$

alınırsa $A=\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$, $A:\ell_2 \to \ell_2$ şeklinde yazılabilir. Bu halde her $n \geq 1$ için

$$\|A_n\| = \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 + |c_n|^2 + |d_n|^2\right)^{1/2} < \infty$$

olup Teorem 2.1.1'den

$$\|A\| = \sup_{n\geq 1} \|A_n\| < \infty$$

olup gerçekten de $A:\ell_2 \to \ell_2$ olduğu açıktır. Bu durumda Teorem 2.2.1'den

$$\sigma_p(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (a_n-\lambda)(d_n-\lambda) = c_n b_n\right\}$$

Şimdi her $n \geq 1$ için

$$R_\lambda(A_n) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \ , \ \lambda \in \rho(A_n)$$

operatörü hesaplansın. E_n, $\mathbb{C}^2$'de birim matris olmak üzere bir $y=(y_1,y_2) \in \mathbb{C}^2$ için

$$(A_n - \lambda E_n)x = y \ , x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$$

Yani

$$\begin{pmatrix} a_n-\lambda & b_n \\ c_n & d_n-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

denklemine bakılsın. Buradan ve

$$\Delta_n(\lambda) = (a_n-\lambda)(d_n-\lambda) - c_n b_n \neq 0 \ , \ n \geq 1$$

olduğundan

$$x_1 = \frac{(d_n-\lambda)y_1 - b_n y_2}{\Delta_n(\lambda)} \ , \ x_2 = \frac{(a_n-\lambda)y_2 - c_n y_1}{\Delta_n(\lambda)} \ , \ n \geq 1$$

olup

$$R_\lambda(A_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{d_n-\lambda}{\Delta_n(\lambda)} & \dfrac{-b_n}{\Delta_n(\lambda)} \\ \dfrac{-c_n}{\Delta_n(\lambda)} & \dfrac{a_n-\lambda}{\Delta_n(\lambda)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Öyleyse

$$\|R_\lambda(A_n)\| = \left(\left|\frac{d_n-\lambda}{\Delta_n(\lambda)}\right|^2 + \left|\frac{a_n-\lambda}{\Delta_n(\lambda)}\right|^2 + \left|\frac{b_n}{\Delta_n(\lambda)}\right|^2 + \left|\frac{c_n}{\Delta_n(\lambda)}\right|^2 \right)^{1/2}$$

Bu halde $\lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(A_n)$ için Teorem 2.1.1'den $\sup_{n\geq 1}\left\| R_\lambda(A_n)\right\| = \infty$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n\geq 1}\left\{ \left|\frac{a_n-\lambda}{\Delta_n(\lambda)}\right|, \left|\frac{d_n-\lambda}{\Delta_n(\lambda)}\right|, \left|\frac{b_n}{\Delta_n(\lambda)}\right|, \left|\frac{c_n}{\Delta_n(\lambda)}\right| \right\} = \infty$$

olmasıdır. Bu durumda her $n \geq 1$ için $\sigma_c(A_n) = \sigma_r(A_n) = \varnothing$ olduğundan Teorem 2.2.1'e göre

$$\sigma_c(A) = \left\{ \lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) : \sup_{n\geq 1}\left\{ \left|\frac{a_n-\lambda}{\Delta_n(\lambda)}\right|, \left|\frac{d_n-\lambda}{\Delta_n(\lambda)}\right|, \left|\frac{b_n}{\Delta_n(\lambda)}\right|, \left|\frac{c_n}{\Delta_n(\lambda)}\right| \right\} = \infty \right\},$$

$$\sigma_r(A) = \varnothing \ ,$$

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) : \sup_{n\geq 1}\left\{ \left|\frac{a_n-\lambda}{\Delta_n(\lambda)}\right|, \left|\frac{d_n-\lambda}{\Delta_n(\lambda)}\right|, \left|\frac{b_n}{\Delta_n(\lambda)}\right|, \left|\frac{c_n}{\Delta_n(\lambda)}\right| \right\} < \infty \right\}$$

Sonuç 2.2.7: $H = \bigoplus_{n=1}^{m} H_n,\ m \in \mathbb{N}$ Hilbert uzayı üzerinde tanımlı $A = \bigoplus_{n=1}^{m} A_n$ operatörünün spektrum ve rezolvent kümeleri için aşağıdaki bağıntılar doğrudur:

$$\sigma_p(A) = \bigcup_{n=1}^{m} \sigma_p(A_n) \ ;$$

$$\sigma_c(A) = \left\{ \left(\bigcup_{n=1}^{m} \sigma_p(A_n) \right)^c \cap \left(\bigcup_{n=1}^{m} \sigma_r(A_n) \right)^c \cap \left(\bigcup_{n=1}^{m} \sigma_c(A_n) \right) \right\} ;$$

$$\sigma_r(A) = \left(\bigcup_{n=1}^{m} \sigma_p(A_n) \right)^c \cap \left(\bigcup_{n=1}^{m} \sigma_r(A_n) \right) ;$$

$$\rho(A) = \bigcap_{n=1}^{m} \rho(A_n)$$

Örnek 2.2.8: Eğer $H_n := (\mathbb{C}, |\cdot|),\ A_n : H_n \to H_n,\ A_n u_n := \alpha_n u_n,\ \alpha_n \in \mathbb{C},\ n = 1, 2, ..., m, m \in \mathbb{N}$ şeklinde seçilirse

$$\sigma(A_n) = \sigma_p(A_n) = \{\alpha_n\} \ , n = 1, 2, \ldots m$$

Bu halde bir önceki sonuca göre $H = \bigoplus_{n=1}^{m} H_n$ ve $A = \bigoplus_{n=1}^{m} A_n$, $A : H \to H$ olmak üzere

$$\sigma(A) = \bigcup_{n=1}^{m} \{\alpha_n\}, \quad \rho(A) = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{m} \{\alpha_n\} \right)$$

Teorem 2.2.9 [53]: Eğer $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n : H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n \to H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$ diskret spektrumlu bir operatör ise her $n \geq 1$ için $A_n : H_n \to H_n$ operatörü de diskret spektrumlu operatördür.

Genelde aşağıdaki sonuç doğrudur.

Teorem 2.2.10 [53]: Eğer $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n : D(A) \subset H \to H$, her $n \geq 1$ için $A_n : H_n \to H_n$ diskret spektrumlu bir operatör, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) \neq \varnothing$ ve $\lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(A_n)$ için $\lim_{n\to\infty} \left\| R_\lambda(A_n) \right\| = 0$ ise $A : H \to H$ operatörü diskret spektrumlu bir operatördür.

İspat: Bu durumda her $\lambda \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \rho(A_n)$ için $R_\lambda(A_n) \in C_\infty(H_n)$, $n \geq 1$ dir.

Şimdi

$$K := \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} R_\lambda(A_n) : H \to H$$

operatörü tanımlansın. Bu durumda $E : H \to H$ ve $E_n : H_n \to H_n$, $n \geq 1$ birim operatör olmak üzere her $u = (u_n) \in D(A)$ için

$$\begin{aligned} K(A - \lambda E)(u_n) &= \left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} R_\lambda(A_n) \right) \left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} (A_n - \lambda E_n) \right)(u_n) = \left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} R_\lambda(A_n) \right)\left((A_n - \lambda E_n) u_n \right) \\ &= \left(R_\lambda(A_n)(A_n - \lambda E_n) u_n \right) = (u_n) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (A - \lambda E) K(u_n) &= (A - \lambda E) \left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} R_\lambda(A_n) \right)(u_n) = (A - \lambda E)\left(R_\lambda(A_n) u_n \right) \\ &= \left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} (A_n - \lambda E_n) \right)\left(R_\lambda(A_n) u_n \right) = \left((A_n - \lambda E_n) R_\lambda(A_n) u_n \right) = (u_n) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Bu bağıntılar

$$R_\lambda(A) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} R_\lambda(A_n)$$

olduğunu gösterir. Buna ek olarak aşağıdaki formda olan $K_m : H \to H$, $m \geq 1$ operatörleri tanımlansın;

$$K_m u := \left(R_\lambda(A_1) u_1, R_\lambda(A_2) u_2, \ldots, R_\lambda(A_m) u_m, 0, 0, \ldots \right),\ u = (u_n) \in H$$

Şimdi $K_m, m \geq 1$ operatörlerinin K operatörüne operatör normunda yakınsaklığı incelensin. Her $u = (u_n) \in H$ için

$$\|K_m u - Ku\|^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} \|R_\lambda(A_n)u_n\|_{H_n}^2 \le \sum_{n=m+1}^{\infty} \|R_\lambda(A_n)\|^2 \|u_n\|_{H_n}^2 \le \left(\sup_{n\ge m+1} \|R_\lambda(A_n)\|\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{H_n}^2$$
$$= \left(\sup_{n\ge m+1} \|R_\lambda(A_n)\|\right)^2 \|u\|^2$$

olduğu bulunur. Buradan

$$\|K_m - K\| \le \sup_{n\ge m+1} \|R_\lambda(A_n)\| \ , \ m \ge 1$$

olduğu elde edilir. Bu ise (K_m) operatörler dizisinin K operatörüne operatör normunda yakınsadığı anlamına gelir. Bu ve $K_m \in C_\infty(H)$, $m \ge 1$ olduğu için kompakt operatörler teorisinin önemli bir teoreminden $K \in C_\infty(H)$ ([37], s.92).

Örnek 2.2.11: Eğer şimdi her $n \ge 1$ için $H_n := (\mathbb{C}, |\cdot|)$,

$$A_n : H_n \to H_n \ , \ A_n u_n := \alpha_n u_n \ , \ u_n \in H_n \ , \ \alpha_n \in \mathbb{C}, \ |\alpha_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

ve $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $A : D(A) \subset H \to H$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n$ olsun.

Bu halde $\dim \mathbb{C} = 1$ olduğu için $A_n \in C_\infty(H_n)$, $n \ge 1$ olduğu ve $\sigma(A_n) = \{\alpha_n\}$, $n \ge 1$ olduğu bilinir.

Öte yandan $\lambda \in \rho(A_n)$ için A_n operatörünün rezolvent operatörü

$$R_\lambda(A_n)v_n = \frac{1}{\alpha_n - \lambda} v_n \ , \ v_n \in H_n$$

şeklinde olup

$$\|R_\lambda(A_n)\| = \left|\frac{1}{\alpha_n - \lambda}\right|, \ n \ge 1$$

Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \|R_\lambda(A_n)\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\alpha_n - \lambda|} = 0$$

olduğundan bir önceki teoremden $R_\lambda(A) \in C_\infty(H)$ olduğu elde edilir.

Uyarı 2.2.12: $T : D(T) \subset H \to H$ bir operatör ve $\rho(T) \ne \varnothing$ olsun. Bilindiği üzere $\lambda, \mu \in \rho(T)$ için

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\lambda(T) R_\mu(T)$$

bağıntısı matematikte Hilbert eşitliği olarak anılmaktadır. Eğer bir $\lambda \in \rho(T)$ için $R_\lambda(T) \in C_\infty(H)$ ise

$$R_\mu(T) = R_\lambda(T) + (\mu - \lambda) R_\lambda(T) R_\mu(T)$$

eşitliğinden $R_\mu(T) \in C_\infty(H)$ elde edilir.

2.3. Direkt Toplam Operatörlerinin Kuvvet ve Polinomsal Snırlılık Özellikleri

Bu kısımda Hilbert uzaylarının direkt toplamı üzerinde tanımlanan direkt toplam operatörlerinin kuvvet ve polinomsal sınırlılığı ile koordinat operatörlerinin kuvvet ve polinomsal sınırlılığı arasındaki bağıntı incelenecektir.

Aşağıdaki sonucun doğruluğu açıktır.

Teorem 2.3.1: Eğer $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n \in PW(H)$ ise her $n \geq 1$ için $A_n \in PW(H_n)$.

Bu teoremin ispatı

$$\sup_{m\geq 1}\left(\sup_{n\geq 1}\left\|A_n^m\right\|\right) = \sup_{n\geq 1}\left(\sup_{m\geq 1}\left\|A_n^m\right\|\right) < \infty$$

eşitliğinin sonuçlarından biridir.

Uyarı 2.3.2: Sonuncu iddianın tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.3.3: $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $H_n = L_2(-1,1)$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n : H \to H$, $A_n : L_2(-1,1) \to L_2(-1,1)$, $n \geq 1, A_n f(x) = \alpha_n \int_{-x}^{x} f(t)\,dt$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $\sup_{n\geq 1}|\alpha_n| = \infty$ olsun. Bu durumda her $n \geq 1$ için $\|A_n\| = 4|\alpha_n|/\pi$ $([40],\ s.301)$ ve Örnek 1.2.43'den $A_n^2 = 0$ olduğu açıktır. O halde buradan ve Teorem 2.1.1'den

$$\sup_{m\geq 1}\|A^m\| = \sup_{m\geq 1}\left(\sup_{n\geq 1}\left\|A_n^m\right\|\right) = \sup_{n\geq 1}\|A_n\| = \sup_{n\geq 1} 4|\alpha_n|/\pi = \infty$$

şeklinde olup her $n \geq 1$ için $A_n \in PW(H_n)$ fakat $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n \notin PW(H)$.

Örnek 2.3.4: $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $H_n = \mathbb{C}^2$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n : H \to H$, $A_n : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_n & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, $\sup_{n\geq 1}|\alpha_n| = \infty$ olsun. Bu durumda her $n \geq 1$ için $\|A_n\| = |\alpha_n|$ ve $A_n^2 = 0$, yani her $n \geq 1$ için $A_n \in PW\left(\mathbb{C}^2\right)$, fakat Teorem 2.1.1'den

$$\sup_{m\geq1}\left\|A^m\right\|=\sup_{m\geq1}\left(\sup_{n\geq1}\left\|A_n^m\right\|\right)=\sup_{n\geq1}\left\|A_n\right\|=\sup_{n\geq1}\left|\alpha_n\right|=\infty$$

olup sonuç olarak $A\notin PW(H)$.

Genelde, aşağıdaki sonuç doğrudur.

Teorem 2.3.5: $H=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}H_n$, $A=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}A_n$ olmak üzere $A\in PW(H)$ olması için gerek ve yeter şart her $n\geq1$ için $A_n\in PW(H_n)$ ve $\sup_{n\geq1}M_w(A_n)<\infty$ olmasıdır.

İspat: Eğer $A\in PW(H)$ ise Teorem 2.1.1'den

$$\sup_{m\geq1}\left\|A^m\right\|=\sup_{m\geq1}\left(\sup_{n\geq1}\left\|A_n^m\right\|\right)=\sup_{n\geq1}\left(\sup_{m\geq1}\left\|A_n^m\right\|\right)<\infty$$

olup buradan her $n\geq1$ için $\sup_{m\geq1}\left\|A_n^m\right\|<\infty$ olduğu elde edilir. Buradan her $n\geq1$ için $A_n\in PW(H_n)$ olduğu bulunur. Diğer taraftan her $n\geq1$ için

$$\sup_{m\geq1}\left\|A_n^m\right\|\leq\sup_{n\geq1}\left(\sup_{m\geq1}\left\|A_n^m\right\|\right)=\sup_{m\geq1}\left(\sup_{n\geq1}\left\|A_n^m\right\|\right)=\sup_{m\geq1}\left\|A^m\right\|\leq M_w(A)<\infty$$

olup buradan

$$\sup_{n\geq1}M_w(A_n)\leq M_w(A)<\infty$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Tersine, eğer her $n\geq1$ için $A_n\in PW(H_n)$, $\sup_{m\geq1}\left\|A_n^m\right\|\leq M_w(A_n)$ ve $\sup_{n\geq1}M_w(A_n)<\infty$ ise

$$\sup_{m\geq1}\left\|A^m\right\|=\sup_{m\geq1}\left(\sup_{n\geq1}\left\|A_n^m\right\|\right)=\sup_{n\geq1}\left(\sup_{m\geq1}\left\|A_n^m\right\|\right)\leq\sup_{n\geq1}M_w(A_n)<\infty$$

bağıntısından $A\in PW(H)$ olduğu elde edilir.

Şimdi direkt toplam operatörlerinin polinamsal sınırlılık özelliği araştırılsın. Aşağıdaki sonucun doğruluğu açıktır.

Teorem 2.3.6: Eğer $H=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}H_n$, $A=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}A_n$ ve $A\in PB(H)$ ise her $n\geq1$ için $A_n\in PB(H_n)$

Uyarı 2.3.7: Sonuncu iddianın tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.3.8: $H=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $H_n=L_2(-1,1)$, $A=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n : H\to H$, $A_n : L_2(-1,1)\to L_2(-1,1)$, $n\geq 1$, $A_n f(x)=\lambda_n \int_{-x}^{x} f(t)\,dt$, $\lambda_n \geq \dfrac{\pi}{4}$, $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ olsun. Bu durumda her $n\geq 1$ için A_n operatörünün nilpotentlik derecesi 2 olan bir operatör olduğu bilinir.

İlk olarak A_n , $n\geq 1$ operatörünün polinomsal sınırlı olduğu gösterilsin. Bu halde

$$p(z)=\sum_{k=0}^{q} a_k z^k \ ,\ a_k\in\mathbb{C}\ ,\ k=0,1,...,q\ ,\ q=0,1,2,...\ ,\ p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

keyfi bir polinom ve $E_n : H_n \to H_n$, $n\geq 1$ birim operatör olmak üzere

$$\left\| p(A_n)\right\| = \left\| \sum_{k=0}^{q} a_k A_n^{\,k} \right\| = \left\| a_0 E_n + a_1 A_n \right\| \leq |a_0| + |a_1| \left\| A_n \right\| = |a_0| + \frac{4\lambda_n}{\pi}|a_1| \leq \frac{4\lambda_n}{\pi}\left(|a_0|+|a_1|\right)$$

Öte yandan ters üçgen eşitsizliği ve supremum-infimum özellikleri kullanılarak her $z\in \bar{D} := \{z\in\mathbb{C} : |z|\leq 1\}$ için

$$|p(z)| \geq |a_0| - \left| a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_q z^q \right|$$

bağıntısından

$$\sup_{z\in\bar{D}} |p(z)| \geq |a_0| - \inf_{z\in\bar{D}} |z| \left| a_1 + a_2 z + \cdots + a_q z^{q-1} \right| = |a_0|$$

bulunur. Buradan

$$\|p\|_{\infty} \geq |a_0|$$

olduğu elde edilir.

Diğer taraftan her $z\in\bar{D}$ için

$$|p(z)| \geq |a_1 z| - \left| a_0 + a_2 z^2 + \cdots + a_q z^q \right|$$

bağıntısından

$$\sup_{z\in\bar{D}} |p(z)| \geq \sup_{z\in\bar{D}} |a_1 z| - \inf_{z\in\bar{D}} \left| a_0 + a_2 z^2 + \cdots + a_q z^q \right| \geq |a_1| - |a_0|$$

elde edilir. Böylece

$$\|p\|_{\infty} \geq |a_1| - |a_0|$$

Sonuçta her $p(\cdot)$ polinomu için

$$|a_0| \leq \|p\|_{\infty} \quad \text{ve} \quad |a_1| \leq 2\|p\|_{\infty}$$

bulunur. Bu son eşitsizlikler ve daha önceki

$$\|p(A_n)\| \le \frac{4\lambda_n}{\pi}\left(|a_0|+|a_1|\right),\ n\ge 1$$

bağıntısından her $p(\cdot)$ polinomu için

$$\|p(A_n)\| \le \frac{4\lambda_n}{\pi}\left(\|p\|_\infty + 2\|p\|_\infty\right) = \frac{12\lambda_n}{\pi}\|p\|_\infty\ ,\ n\ge 1$$

bağıntısı elde edilir. Yani her $n\ge 1$ için $A_n \in PB(H_n)$ 'dir.

Eğer şimdi

$$p_*(z) := z,\ z\in\mathbb{C}\ ,\ p_*:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

polinomu alınırsa Teorem 2.1.1'den

$$\|p_*(A)\| = \sup_{n\ge 1}\|p_*(A_n)\| = \sup_{n\ge 1}\|A_n\| = \sup_{n\ge 1}\frac{4\lambda_n}{\pi} = \infty$$

Buradan $A \notin PB(H)$ olduğu elde edilir.

Örnek 2.3.9: H_0 bir Hilbert uzayı, $H_n = H_0, n\ge 1$, $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $A_0 : H_0 \to H_0$ nilpotentlik derecesi 3 olan bir operatör, $\|A_0\|\ge 1$ ve $A_n := nA_0, n\ge 1$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n$ olsun. Bu halde $A_n \in PB(H_n)$ olmasına rağmen $A\notin PB(H)$ 'dır.

Bunun için keyfi

$$p(z) = \sum_{k=0}^{q} a_k z^k\ ,\ a_k\in\mathbb{C}\ ,\ k=0,1,\dots,q\ \ ,\ q=0,1,2,\dots\ ,\ p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

polinomu alınsın. Bu durumda $E_n : H_n \to H_n$, $n\ge 1$ birim operatör olmak üzere

$$\begin{aligned}\|p(A_n)\| &= \left\|\sum_{k=0}^{q} a_k A_n^k\right\| = \left\|a_0E_n + a_1A_n + a_2A_n^2\right\| = \left\|a_0E_n + a_1 n A_0 + a_2 n^2 A_0^2\right\| \\ &\le |a_0| + n|a_1|\|A_0\| + n^2|a_2|\|A_0\|^2 \le n^2\|A_0\|^2\left(|a_0|+|a_1|+|a_2|\right)\end{aligned}$$

olduğu açıktır.

Diğer yandan ters üçgen eşitsizliği ve supremum-infimum özellikleri kullanılarak her $z\in \bar{D} := \{z\in\mathbb{C} : |z|\le 1\}$ için

$$|p(z)| \ge |a_0| - \left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_q z^q\right|$$

bağıntısından

$$\sup_{z\in\bar{D}}|p(z)| \ge |a_0| - \inf_{z\in\bar{D}}|z|\left|a_1 + a_2 z + \cdots + a_q z^{q-1}\right| = |a_0|$$

bulunur. Buradan

$$\|p\|_\infty \geq |a_0|$$

olduğu elde edilir.

Öte yandan $p_0(z) = 1 + cz$, $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\|p_0\|_\infty = \sup_{z\in \bar{D}} |p_0(z)| = \sup_{z\in \bar{D}} |1 + cz| \leq 1 + |c|$$

olup ayrıca $z_0 = \dfrac{|c|}{c}$ noktası için

$$|p_0(z)| = \left|1 + c\frac{|c|}{c}\right| = 1 + |c|$$

bulunur. Buradan

$$\|p_0\|_\infty = 1 + |c|$$

olduğu elde edilir. Bu durumda

$$p_1(z) := a_0 + a_1 z \ , \ a_0, a_1 \in \mathbb{C} \backslash \{0\} \ , \ p_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

polinomu için

$$\|p_1\|_\infty = \sup_{z\in \bar{D}} |a_0 + a_1 z| = |a_0| \sup_{z\in \bar{D}} \left|1 + \frac{a_1}{a_0} z\right| = |a_0| \left(1 + \left|\frac{a_1}{a_0}\right|\right) = |a_0| + |a_1|$$

Eğer $a_0 = 0$ veya $a_1 = 0$ ise de

$$\|p_1\|_\infty = |a_0| + |a_1|$$

olduğu açıktır. Yeniden ters üçgen eşitsizliği, supremum-infimum özellikleri ve bir önceki uyarı kullanılarak her $z \in \bar{D}$ için

$$\sup_{z\in \bar{D}} |p(z)| \geq \sup_{z\in \bar{D}} |a_0 + a_1 z| - \inf_{z\in \bar{D}} |a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_q z^q| = |a_0| + |a_1|$$

bulunur. Buradan

$$\|p\|_\infty \geq |a_0| + |a_1|$$

olduğu elde edilir.

Benzer şekilde her her $z \in \bar{D}$ için

$$\sup_{z\in \bar{D}} |p(z)| \geq \sup_{z\in \bar{D}} |a_2 z^2| - \inf_{z\in \bar{D}} |a_0 + a_1 z + a_3 z^3 + \cdots + a_q z^q| = |a_2| - |a_0|$$

bulunur. Buradan

$$\|p\|_\infty \geq |a_2| - |a_0|$$

olduğu elde edilir.

Sonuç olarak yukarıda $\|p\|_\infty$ için alınan bağıntılardan

$$\|p\|_\infty \geq |a_0| + |a_1| \text{ ve } 2\|p\|_\infty \geq |a_2|$$

bulunur. Bu eşitsizliklerden

$$\|p(A_n)\| \leq n^2 \|A_0\|^2 \left(|a_0| + |a_1| + |a_2|\right) \leq 3n^2 \|A_0\|^2 \|p\|_\infty$$

Yani her $n \geq 1$ için $A_n \in PB(H_n)$ 'dir.

Fakat

$$p_*(z) := z,\ z \in \mathbb{C},\ p_* : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

polinomu için Teorem 2.1.1'den

$$\|p_*(A)\| = \sup_{n\geq 1} \|p_*(A_n)\| = \sup_{n\geq 1} \|A_n\| = \sup_{n\geq 1} \|nA_0\| = \infty$$

Buradan $A \notin PB(H)$ olduğu elde edilir.

Aslında dikkat edilirse

$$\|A\| = \sup_{n\geq 1} \|A_n\| = \sup_{n\geq 1} \|nA_0\| = \sup_{n\geq 1} n\|A_0\| = \infty$$

olduğundan $A \notin B(H)$ 'dır.

Genelde aşağıdaki sonuç doğrudur.

Teorem 2.3.10: $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n$ ve $A \in B(H)$ olsun. Bu durumda $A \in PB(H)$ olması için gerek ve yeter şart her $n \geq 1$ için $A_n \in PB(H_n)$ ve $\sup_{n\geq 1} M_p(A_n) < \infty$ olmasıdır.

İspat: Her $p(\cdot)$ polinom fonksiyonu için

$$\|p(A_n)\| \leq M_p(A_n)\|p\|_\infty \text{ ve } \sup_{n\geq 1} M_p(A_n) < \infty$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda her $p(\cdot)$ polinom fonksiyonu için

$$p(A) = p\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n\right) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} p(A_n)$$

olduğundan Teorem 2.1.1'den

$$\|p(A)\| = \sup_{n\geq 1} \|p(A_n)\|$$

eşitliği doğrudur. En son eşitlikten

$$\|p(A)\| \leq \sup_{n\geq 1} M_p(A_n)\|p\|_\infty$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak $A \in PB(H)$.

Şimdi tersine, $A \in PB(H)$ olsun. Bu durumda her $n \geq 1$ ve $p(\cdot)$ polinom fonksiyonu için

$$\left\| p(A_n) \right\| \leq \left\| p(A) \right\| = \sup_{n \geq 1} \left\| p(A_n) \right\| \leq \sup_{n \geq 1} M_p(A_n) \left\| p \right\|_\infty$$

eşitliği doğrudur. Buradan her $n \geq 1$ için $A_n \in PB(H_n)$. Diğer taraftan son eşitlikten her $n \geq 1$ için

$$M_p(A_n) \leq M_p(A) < \infty$$

sağlanır. Dolayısıyla $\sup_{n \geq 1} M_p(A_n) < \infty$ oluğu elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

2.4. Direkt Toplam Operatörlerinin Genişletilmiş Özdeğer Kümeleri

Bu kısımda Hilbert uzaylarının direkt toplamı üzerinde tanımlanan direkt toplam operatörlerinin genişletilmiş özdeğerleri ile koordinat operatörlerin genişletilmiş özdeğerleri arasındaki bağıntı incelenecektir. Ayrıca normal kompakt operatörlerin genişletilmiş özdeğerlerinin yapısı araştırılacaktır.

İlk önce aşağıdaki sonucun doğruluğu gösterilsin.

Teorem 2.4.1: Her $n \geq 1$ için H_n bir Hilbert uzayı, $A_n : H_n \to H_n$, $A_n \in B(H_n)$, $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n \in B(H)$ olsun. Bu durumda sınırlı direkt toplam operatörlerinin genişletilmiş özdeğerleri için

$$\bigcup_{n \geq 1} \Sigma(A_n) \subset \Sigma(A)$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: İlk önce keyfi $\lambda \in \bigcup_{n \geq 1} \Sigma(A_n)$ alınsın. Buradan en az bir $n_\lambda \in \mathbb{N}$ doğal sayısı ve sıfırdan farklı $T_{n_\lambda} \in B\left(H_{n_\lambda}\right)$ operatörü vardır öyleki

$$T_{n_\lambda} A_{n_\lambda} = \lambda A_{n_\lambda} T_{n_\lambda}$$

eşitliği doğrudur. Bu durumda, eğer T_λ operatörü, T_{n_λ} , n_λ. yerde olmak üzere

$$T_\lambda = \left(0, 0, \ldots 0, T_{n_\lambda}, 0 \ldots\right)$$

şeklinde seçilirse

$$T_\lambda \in B(H)\,,\;\; T_\lambda \neq 0 \;\text{ ve }\; T_\lambda A = \lambda A T_\lambda$$

eşitliği sağlanır. Buradan $\lambda \in \Sigma(A)$ olup

$$\bigcup_{n\geq 1} \Sigma(A_n) \subset \Sigma(A)$$

olduğu elde edilir.

Teorem 2.4.2: Eğer her $n \geq 1$ için H_n bir Hilbert uzayı, $A_n : H_n \to H_n$, $A_n \in B(H_n)$,

$H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n \in B(H), \lambda \in \Sigma(A)$ öyleki $TA = \lambda AT$ ve bir $n_\lambda \in \mathbb{N}$ için $TH_{n_\lambda} \subset H_{n_\lambda}$

ise $\lambda \in \bigcup_{n\geq 1} \Sigma(A_n)$ şeklindedir. Yani

$$\left\{\lambda \in \Sigma(A) : TA = \lambda AT \text{ ve bir } n_\lambda \in \mathbb{N} \text{ için } TH_{n_\lambda} \subset H_{n_\lambda}\right\} \subset \bigcup_{n\geq 1} \Sigma(A_n)$$

İspat: Keyfi $\lambda \in \Sigma(A)$ alınsın. Buradan sıfırdan farklı $T \in B(H)$ operatörü mevcuttur öyleki $TA = \lambda AT$ eşitliği sağlanır. Bu durumda T_n , $n \geq 1$ operatörü T operatörünün H_n alt uzayına kısıtlanışı olmak üzere $TA = \lambda AT$ eşitliğinden her $n \geq 1$ için $TA_n = \lambda AT_n$ eşitliği elde edilir. Eğer bir $n_\lambda \in \mathrm{N}$ için

$$TH_{n_\lambda} \subset H_{n_\lambda} \text{ ve } T_{n_\lambda} \neq 0$$

bağıntıları sağlanıyorsa

$$T_{n_\lambda} A_{n_\lambda} = \lambda A_{n_\lambda} T_{n_\lambda}$$

eşitliği doğrudur, yani $\lambda \in \Sigma\left(A_{n_\lambda}\right)$ bulunur. Sonuç olarak

$$\lambda \in \bigcup_{n\geq 1} \Sigma(A_n)$$

olduğu elde edilir.

Son iki teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.4.3: Her $n \geq 1$ için H_n bir Hilbert uzayı, $A_n : H_n \to H_n$, $A_n \in B(H_n)$, $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n \in B(H)$ olduğu kabul edilsin. Eğer her $\lambda \in \Sigma(A)$ için $T_\lambda \in B(H)$, $T_\lambda A = \lambda AT_\lambda$ ve en az bir $n_\lambda \in \mathbb{N}$ için $\{0\} \neq TH_{n_\lambda} \subset H_{n_\lambda}$ koşulu sağlanıyorsa

$$\Sigma(A) = \bigcup_{n\geq 1} \Sigma(A_n)$$

eşitliği doğrudur.

Teorem 2.4.4: Her $n \geq 1$ için H_n bir Hilbert uzayı, $A_n : H_n \to H_n$, $A_n \in B(H_n)$, $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n \in B(H)$ olsun. Eğer bir $m \in \mathbb{N}$ için $A_m = 0$ ise $\Sigma(A) = \mathbb{C}$ eşitliği doğrudur.

İspat: Gerçekten; eğer

$$T_m \neq 0 \text{ ve } T_n = 0 \,,\; n \neq m \,,\; n \geq 1 \,,\; T_n \in B(H_n) \,,\; T = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} T_n \,,\;\; T : H \to H$$

olarak seçilirse her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $TA = \lambda AT$ ve $T \in B(H)$ bağıntısı sağlanır.

Teorem 2.4.5: Her $n \geq 1$ için H_n bir Hilbert uzayı, $A_n : H_n \to H_n$, $A_n \in B(H_n)$, $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$, $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n \in B(H)$ olsun. Eğer bir $m \in \mathbb{N}$ için A_m bir nilpotent operatör ise bu durumda $\Sigma(A) = \mathbb{C}$ eşitliği doğrudur.

Gerçekten; bu durumda $k \in \mathbb{N}$, A_m operatörünün nilpotentlik derecesi olmak üzere T operatörü

$$T = 0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus A_m^{k-1} \oplus 0 \oplus \cdots$$

şeklinde seçilebilir.

Eğer $A : H \to H$ operatörü normal kompakt bir operatör ise bu operatörün direkt toplam operatörü olarak ifade edilebildiği, yani $E_n : H_n \to H_n$ birim operatör, $H_n = H_{\mu_n}(A)$, her $n \geq 0$ için A operatörünün μ_n, $\mu_0 = 0$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerinin oluşturduğu alt uzay olmak üzere

$$A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mu_n E_n \,,\; H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n \,,\; H_0 = kerA$$

şeklinde yazılabildiği bilinir (bak [39], s.445).

Teorem 2.4.6: Eğer H bir Hilbert uzayı, $A : H \to H$ normal kompakt bir operatör, $kerA \neq \{0\}$, $\sigma_p(A) = \{\mu_n : n \geq 0\}$ kümesi A operatörünün noktasal spektrumu, $H_n = H_{\mu_n}(A)$, $n \geq 0$, A operatörünün μ_n özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerinin oluşturduğu alt uzay ise $\Sigma(A) = \mathbb{C}$ eşitliği doğrudur.

İspat: Bu durumda

$$A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mu_n E_n : \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n \to \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$$

operatörü için $A_0 = 0$ olduğundan ve Teorem 2.4.4’den $\Sigma(A) = \mathbb{C}$ eşitliği elde edilir.

Şimdi son teoremin birkaç uygulaması verilsin.

Örnek 2.4.7: $A:\ell_2 \to \ell_2$ operatörü, (w_n) kompleks sayı dizisi öyle ki $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$ olmak üzere

$$A(x_n) = (0, w_2x_2, w_3x_3, \ldots)$$

şeklinde alınsın. Bu durumda $\Sigma(A) = \mathbb{C}$ 'dir.

Gerçekten; Teorem 1.2.57'den A operatörünün kompakt bir operatör olduğu açıktır. Ayrıca her $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell_2$ için

$$(Ax, y)_{\ell_2} = \left(A(x_n), (y_n)\right)_{\ell_2} = \left((0, w_2x_2, w_3x_3, \ldots, w_nx_n, \ldots), (y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...)\right)_{\ell_2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} w_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=2}^{\infty} x_n \overline{\overline{w_n} y_n} = \left((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots), \left(0, \overline{w_2}y_2, \overline{w_3}y_3, ..., \overline{w_n}y_n, ...\right)\right)_{\ell_2}$$

olup buradan

$$A^* = \left(0, \overline{w_2}y_2, \overline{w_3}y_3, ..., \overline{w_n}y_n, ...\right)$$

olduğu bulunur. Bu halde $A^*A = AA^*$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Dolayısıyla A operatörü normal bir operatördür.

O halde A operatörü normal kompakt bir operatör olup yukarıdaki teoremden $\Sigma(A) = \mathbb{C}$ olduğu elde edilir.

Örnek 2.4.8: H bir Hilbert uzayı , $M \subset H$ lineer altuzay, $M \neq H$, $\dim M < \infty$ ve $P: H \to H$ operatörü M lineer altuzayına kompakt ortogonal izdüşüm operatörü olsun. Bu durumda Teorem 2.4.6'dan $\Sigma(P) = \mathbb{C}$ olduğu açıktır. Gerçekten $E: H \to H$ birim operatör olmak üzere genişletilmiş özdeğerler tanımındaki T operatörü $E - P$ şeklinde seçilebilir.

Örnek 2.4.9: B bir Banach uzayı olmak üzere $\Sigma(A) = \mathbb{C}$ olacak şekilde $A: B \to B$ kompakt operatörü vardır. Gerçekten $B = \ell_p$, $1 \le p < \infty$, (w_n) kompleks sayı dizisi öyleki $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$ ve

$$A(x_n) = (w_1x_1, 0, w_3x_3, 0, w_5x_5, \ldots, 0, w_{2n-1}x_{2n-1}, 0, ...), x = (x_n) \in \ell_p$$

şeklinde alınırsa $A: \ell_p \to \ell_p$ operatörünün kompakt operatör olduğu açıktır. Ayrıca T operatörü

$$T: \ell_p \to \ell_p, 1 \le p < \infty, T(x_n) = (0, x_2, 0, x_4, 0, \ldots, 0, x_{2n}, 0, ...), \; x = (x_n) \in \ell_p$$

şeklinde seçilirse $TA = AT = 0$ eşitliğinin sağlanacağını görmek zor değildir. Dolayısıyla $\Sigma(A) = \mathbb{C}$ eşitliği elde edilir.

Teorem 2.4.10: H bir Hilbert uzayı, $A : H \to H$ bir normal kompakt operatör, $\sigma_c(A) = \{0\}$, $E_n : H_n \to H_n$ birim operatör olmak üzere $\sigma_p(A) = \{\mu_n : n \geq 1\}$ kümesi $A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mu_n E_n$ operatörünün noktasal spektrumu, $H_n = H_{\mu_n}(A)$, $n \geq 1$, A operatörünün μ_n özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerinin oluşturduğu alt uzay, $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$ $\lambda \in \Sigma(A)$, $TA = \lambda AT$ ve T_n operatörü ise T operatörünün H_n , $n \geq 1$ alt uzayına kısıtlanışı olsun. Bu durumda, eğer iki $m, k \in \mathbb{N}$ için

$$T_n H_n \cap H_m \neq \{0\} \quad \text{ve} \quad T_n H_n \cap H_k \neq \{0\}$$

ise

$$m = k \quad \text{ve} \quad \lambda = \frac{\mu_n}{\mu_m}$$

eşitlikleri doğrudur.

İspat: Bu durumda $x_n^m \in H_n \setminus \{0\}$ elemanı mevcuttur öyleki

$$T x_n^m \in H_m \setminus \{0\} \quad \text{ve} \quad T_n A_n x_n^m = \lambda A_m T_n x_n^m$$

şeklindedir. Bu halde

$$(\mu_n - \lambda \mu_m) T_n x_n^m = 0$$

olup buradan $\lambda = \dfrac{\mu_n}{\mu_m}$ eşitliği bulunur. Aynı mantıkla $\lambda = \dfrac{\mu_n}{\mu_k}$ eşitliği elde edilebilir. Buradan $\mu_m = \mu_k$ olduğu ve sonuçta $m = k$ eşitliği bulunur.

Teorem 2.4.11: Eğer $A \in B(H)$, $\ker A = \{0\}$, $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\mu_n : n \geq 1\}$, $H_n = H_{\mu_n}(A)$, $n \geq 1$, A operatörünün μ_n özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerinin oluşturduğu alt uzay ve $H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$ ise bu durumda

$$\Sigma(A) = \bigcup_{m,n \geq 1} \left\{ \frac{\mu_m}{\mu_n} \right\}$$

eşitliği doğrudur.

İspat: İlk olarak işlemlerin kolaylığı için $A_n x_n = \mu_n x_n$, dim $H_n = 1$ olsun. [50] çalışmasında

$$\Sigma(A)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}:\sigma(A)\cap\sigma(\lambda A)\neq\varnothing\}$$

bağıntısının doğruluğu ispatlanmıştır. Bu ve A operatörünün spektrum yapısından

$$\Sigma(A)\subset\bigcup_{n,m\geq 1}\left\{\frac{\mu_n}{\mu_m}\right\}$$

bağıntısı elde edilir. Şimdi $T\in B(H)$, T_n operatörü T operatörünün H_n , $n\geq 1$ alt uzayına kısıtlanışı olmak üzere

$$T_n x_n = x_m \text{ , } n\geq 1 \text{ ve } T_k = 0 \text{ , } k\neq n$$

olarak tanımlansın. Bu durumda her $x=(x_n)\in H$ için

$$\begin{aligned}TAx = TA(x_n) &= T(A_n x_n) = T((A_1x_1, A_2x_2, A_3x_3,\dots, A_nx_n,\dots))\\ &= T((\mu_1 x_1, \mu_2 x_2, \mu_3 x_3,\dots, \mu_n x_n,\dots)) = (0,0,,\dots,0,\mu_n x_m,0,\dots)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan benzer şekilde

$$ATx = AT((x_1, x_2,\dots,x_n,\dots)) = A((0,0,\dots,0,x_m,0,\dots)) = (0,0,\dots,0,\mu_m x_m,0,\dots)$$

eşitliği bulunabilir. Bu halde $\lambda=\frac{\mu_m}{\mu_n}\in\mathbb{C}$ ve $T\in B(H), T\neq 0$ için

$$TAx=\left(\frac{\mu_m}{\mu_n}\right)ATx$$

eşitliği doğrudur. Bu $\frac{\mu_m}{\mu_n}\in\Sigma(A)$, $m\geq 1, n\geq 1$ anlamına gelir. Buradan

$$\bigcup_{m,n\geq 1}\left\{\frac{\mu_m}{\mu_n}\right\}\subset\Sigma(A)$$

bağıntısına ulaşılır. Sonuç olarak

$$\Sigma(A)=\bigcup_{m,n\geq 1}\left\{\frac{\mu_m}{\mu_n}\right\}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 2.4.12: H bir Hilbert uzayı olmak üzere, eğer $A:H\rightarrow H$ operatörü normal kompakt bir operatör, $\ker A=\{0\}$ ve $\sigma(A)=\sigma_p(A)=\{\mu_n : n\geq 1\}$ ise

$$\Sigma(A)=\bigcup_{m,n\geq 1}\left\{\frac{\mu_m}{\mu_n}\right\}$$

eşitliği doğrudur.

Teorem 2.4.11 ve Sonuç 2.4.12'de kompleks düzlemde genişletilmiş özdeğerler kümesinin formu konusunda bazı fikirler verilmiştir. Bununla ilgili benzer sonuçlar [49] çalışmasında verilmiştir.

Örnek 2.4.13: Maalesef alınan bu sonuçlar normal olmayan kompakt operatörler için doğru değildir. Örneğin,

$$V : L_2(0,1) \to L_2(0,1), \; Vf(x) := \int_0^x f(t)\,dt \;, \quad f \in L_2(0,1)$$

Volterra operatörü normal olmayan bir operatör olup $\Sigma(V) = (0,+\infty)$ şeklindedir (bak [52]).

Diğer taraftan Hilbert uzayı üzerinde tanımlı $\Sigma(A) = \{1\}$ eşitliğini sağlayan kompakt olmayan A operatörü de mevcuttur (bak [49]).

Teorem 2.4.14: Her $n \ge 1$ için H_n Hilbert uzayı, $A_n \in B(H_n)$, $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$, $A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n \in B(H)$, $n \ge 1$ olsun. Bu durumda, eğer $\dim H < \infty$ ise

$$\Sigma(A) = \bigcup_{m,n \ge 1} \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(A_n) \cap \sigma(\lambda A_m) \ne \varnothing\}$$

şeklindedir. Genel durumda ise

$$\Sigma(A) \subset \bigcup_{m,n \ge 1} \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(A_n) \cap \sigma(\lambda A_m) \ne \varnothing\}$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: Bu koşullar altında Teorem 2.2.1'den

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_p(A_n)$$

eşitliğinin doğruluğu açıktır. Diğer taraftan $\dim H < \infty$ ise

$$\Sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(A) \cap \sigma(\lambda A) \ne \varnothing\}$$

ve genel durum için

$$\Sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(A) \cap \sigma(\lambda A) \ne \varnothing\}$$

olduğu bilinir (bak [50]). Dolayısıyla yukarıdaki bağıntılar doğrudur.

Uyarı 2.4.15: Her $n \ge 1$ için H_n bir Hilbert uzayı, $A_n \in B(H_n)$, $A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n \in B(H)$, $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$, $n \ge 1$ olsun. Bu durumda, genelde

$$\Sigma(A) \neq \bigcup_{n \geq 1} \Sigma(A_n)$$

bağıntısı doğrudur.

Örnek 2.4.16: Eğer H_1 ve H_2 iki sonlu boyutlu Hilbert uzayı,

$$A_1 \in B(H_1),\, A_2 \in B(H_2),\, H = H_1 \oplus H_2\,,\quad A = A_1 \oplus A_2\,,\ \sigma(A_1) = \{1,3\},\ \sigma(A_2) = \{2,4\}$$

ise bu durumda

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(A_1) \cap \sigma(\lambda A_1) \neq \varnothing\} = \{1,3,1/3\}\,,$$

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(A_2) \cap \sigma(\lambda A_2) \neq \varnothing\} = \{1,2,1/2\},$$

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(A_1) \cap \sigma(\lambda A_2) \neq \varnothing\} = \{1/2, 1/4, 3/4, 3/2\},$$

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(A_2) \cap \sigma(\lambda A_1) \neq \varnothing\} = \{2/3,\ 4/3, 2\,, 4\}$$

şeklinde olup Teorem 2.4.15’den

$$\Sigma(A) = \{1, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4,\ 4/3, 3/2,\ 2, 3, 4\} \neq \Sigma(A_1) \cup \Sigma(A_2) = \{1, 1/3, 1/2, 2, 3\}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Genelde aşağıdaki iddia doğrudur (ispat için bak [50]).

Teorem 2.4.17: Eğer H Hilbert uzayı, $A \in B(H)$ ve $0 \notin \sigma(A)$ ise

(1) $\Sigma(A) \subset \left\{\dfrac{\alpha}{\beta} : \alpha, \beta \in \sigma(A)\right\}$

(2) $\Sigma(A) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \inf\limits_{\alpha \in \sigma(A)} \arg\alpha - \sup\limits_{\alpha \in \sigma(A)} \arg\alpha \leq arg\lambda \leq \sup\limits_{\alpha \in \sigma(A)} \arg\alpha - \inf\limits_{\alpha \in \sigma(A)} \arg\alpha,\ \dfrac{\inf\limits_{\alpha \in \sigma(A)} |\alpha|}{\sup\limits_{\alpha \in \sigma(A)} |\alpha|} \leq |\lambda| \leq \dfrac{\sup\limits_{\alpha \in \sigma(A)} |\alpha|}{\inf\limits_{\alpha \in \sigma(A)} |\alpha|}\right\}$

bağıntıları doğrudur.

Uyarı 2.4.18: Eğer Teorem 2.4.17’da $\dim H < \infty$ ise (1) ve (2) eşitsizlikleri eşitliklere dönüşür.

Örnek 2.4.19: Eğer H Hilbert uzayı, $A \in B(H)$ ve $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r > 0\}$ ise A operatörünün genişletilmiş özdeğerlerinin kümesi $\Sigma(A) \subset \{e^{i\varphi} : 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ formundadır.

3. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında Hilbert uzaylarının direkt toplamı üzerinde tanımlı direkt toplam operatörlerinin:

(1) Kompaktlık özellikleri [53];

(2) Kuvvet sınırlılık özellikleri;

(3) Polinomsal sınırlılık özellikleri;

ile koordinat operatörlerinin uygun özellikleri arasında kesin ilişkilendirmelere ait sonuçlar elde edilmiştir.

Ayrıca bu bağlantılar spektrum ve rezolvent kümeleri ile genişletilmiş özdeğer kümeleri için de incelenerek kesin sonuçlara ulaşılmıştır [53].

Öte yandan alınan sonuçlar uygun yerlerde örneklerle desteklenmiştir.

4. ÖNERİLER

- Tez kapsamında incelenen problemler Hilbert uzaylarının direkt integrali üzerinde tanımlı direkt integral operatörleri için de ayrıca bir araştırma konusu olabilir.
- Spektrum parçalarının ilişkilendirilmesi hakkındaki Teorem 2.2.1; üçköşegenli bant matrisler ve iki köşegenli alt veya üst bant matrisler için de incelenebilir.
- Genişletilmiş özdeğer kümelerinin ilişkilendirilmesi hakkındaki sonuçlar genişletilmiş özvektör kümeleri için de bir araştırma konusu olabilir.
- Hilbert uzaylarının direkt toplamı üzerinde tanımlı direkt toplam operatörleri ile onların koordinat operatörleri arasındaki ilşkilendirme bağıntıları devirlilik, hiperdevirlilik ve süperdevirlilik özellikleri için de bağımsız bir inceleme konusu olabilir.

5. KAYNAKLAR

1. von Neumann, J., On rings of operators, Reduction theory, Ann. Math., 50 (1949) 401-485.

2. Dixmier, J., Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien, Geauther-Villars, Paris, 1957.

3. Schwartz, J.T., $W^* -$algebras, Gordon and Breach, New York , 1967.

4. Mackey, G.W., The theory of unitary group representations, University of Chicago Press, 1976.

5. Naimark, M.A. ve Fomin,S.V., Continuous direct sum of Hilbert spaces and some applications, Uspehi Mat. Nauk., 10 (1955) 111-14 (in Russian).

6. von Neumann, J., On rings of operators III, Ann.Math., 41 (1940) 94-161.

7. Murray, J. ve von Neumann, J., On rings of operators I, Ann. Math., 37 (1936) 116-229.

8. Murray, J. ve von Neumann, J., On rings of operators II, Trans. Amer. Math. Soc., 41 (1937) 208-248.

9. Murray, J. ve von Neumann, J., On rings of operators IV, Ann. Math., 44 (1943) 716-808.

10. Azoff , E.A., Spectrum and direct integral, Trans. Amer. Math. Soc., 197 (1974) 211-223.

11. Dunford, N., Spektral Operators in a Direct Sum of Hilbert spaces, Mathematics, 50 (1963) 1041-1043.

12. Dunford, N., A Spectral Theory for certain Operators on a Direct Sum of Hilbert Spaces, Math. Annalen, 162 (1966) 294-330.

13. Harris, R.T., A Direkt Integral Construction, Duke Math. J., 33 (1966) 535-537.

14. Foguel, S.R., On Spectrality criterion for operators on a Direct Sum of Hilbert Spaces 1966.

15. Chow, T.R, A spectral theory for the direct integrals of operators, Math. Ann., 188 (1970) 285-303.

16. Chow, T.R. ve Gilfeather, F., Functions of direct integrals of operators, Proc. Amer. Math. Soc., 29 (1971) 325-330.

17. Fialkow, L.A., A Note of Direct Sums of Quasinilpotent Operators, Proc. Amer. Math. Soc., 48 (1975) 125-131.

18. Azoff, E.A., A Note of Direct Integrals of Spectral Operators, Michigan Math. J., 23 (1976) 65-69.

19. Conway, J.B., The Direct Sum of Normal Operators, İndiana Univ. Math. J., 26 (1977) 277-289.

20. Azoff, E.A. ve Clancey, K.F., Spectral multiplicity for direct integrals of normal operators, J.Operator Theory, 3 (1980) 213-235.

21. Brodski, M.S., The Direct Sum of Integration Operators, Funk. Anal. Prilozhen., 19 (1985) 70-71.

22. Sokolov, M.S., An Abstract Approach to Same Spectral Problems of Direct Sum of Differential operators, Electronic J. Differential Equations, 75 (2003) 1-6.

23. Gill, M.I., Spectrum and Functions of Operators on Direct Families of Banach Spaces, Methods and Application of Analysis, 16 (2009) 521-534.

24. El-Sayed, I.S., Non-selfadjoint Quasi-differential Operators with Discreta Spectra, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 25 (1995) 1053-1078.

25. El-Sayed, I.S., The Spectra of well-posed operators, Proc. R. Soc. Edinb., 125 (1995) 1331-1348.

26. El-Sayed, I.S., On the Essential Spectra of General Differential Operators, Tamkang J.Math., 30 (1999) 105-126.

27. El-Sayed, I.S., On The Spectra of Non-selfadjoint Differential Operators and Their Adjoints in Direct Sum Spaces, 2001.

28. El-Sayed, I.S., The Point Spectra and regularity Fields of General Differential Operators in the Direct Sum Spaces, Int. J. Differ. Equ. Appl., 2 (2001) 243-265.

29. El-Sayed, I.S., The Spectra Of General Differential Operators in the Direct Sum Spaces, Czech. Math. J., 54 (2004) 9-29.

30. Zettl, A., Eweritt, W.N. ve Markus, L., Sturm-Liouville Theory, Amer. Math. Soc., Survey and Monographs, USA, 2005.

31. Kochubei, A. N., Symmetric Operators and Nonclassical Spectral Problems, Mat. Zametki, 25 (1979) 425-434.

32. İsmailov, Z. İ., Multipoint Normal Differential Operators for First Order, Opusc. Math., 29 (2009) 339-414.

33. Gesztesy, F. ve Kirsh, W., One Dimensional Schrodinger Operators with Interactions Singular on a Discrete Set, J. Reine Angew. Math., 362 (1985) 28–50.

34. Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., Linear Functional Analysis, Springer, 2008.

35. Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applicatons, John Wiley & Sons, 1978.

36. Bartle, R.G., The Elements of Integration, John Wiley & Sons, 1966.

37. Gohberg, I.C., Goldberg, S. and Kaashoek, M.A., Basic Classes of Linear Operators, Birkhauser, Berlin, 2003.

38. Gorbachuk, M.L., Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, 1991.

39. Narici, L. ve Bachman, G., Functional Analysis, Academic Press, Inc. London, 1972.

40. Halmos, P.R., A Hilbert Space Problem Book, Springer Verlag, New York , 1982.

41. Akhizer, N.I. ve Glazman, I.M., Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Dover Publications, 1994.

42. Ismailov, Z.I., Compact inverses of first-order normal differential operators, J. Math. Anal. And App., USA, 320, 1(2006) 266-278.

43. Hirsh, F. ve Lacombe, G., Elements of Functional Analysis, Verlag, New York, 1999.

44. Rudin, W., Functional Analysis, McGraw-Hill Book Company, Newyork, 1973.

45. Ionascu, E.J., On Power Bounded Operators, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997) 1435-1441.

46. Lebow, A., A Power Bounded Operator that is not Polynomially Bounded, Michigan Math. J., 15 (1968) 397-399.

47. von Neumann, J., Eine Spektraltheorie fur Allgemeine Operatoren Eines Unitaren Raumes, Math. Nachr., 4 (1951) 258-281.

48. Pisier, G., A Polynomially Bounded Operator on Hilbert Space which is not Similar to Contraction, J. Amer. Math Soc., 10 (1997) 351-369.

49. Shkarin, S., Compact Operators without Extended Eigenvalues, J. Math. Anal. Appl., 332 (2007) 455-462.

50. Biswass, A. ve Petrovic, S., On Extended Eigenvalues of Operators, Int. Equat. Oper. Theory, 55 (2006) 233-248.

51. Dunford, N., Schwartz, J. T., Linear Operators, I; II, Interscience, New York, 1958.

52. Biswass, A., Lambert, A. ve Petrovic, S., Extended Eigenvalues and Volterra Operator, Glasgow Math. J., 44 (2002) 521-534.

53. Otkun Çevik E. ve Ismailov Z. I., Spectrum of the direct sum of operators, Electronic Journal of Differential Equations, 210 (2012) 1-8 .

54. Ismailov Z. I. ve Otkun Çevik E., Extended Eigenvalues of Direct Integral of Operators, First International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2012), October 2012, Gumushane, Turkey, 54.

55. İsmailov Z.İ. ve Otkun Çevik E., Hilbert Uzaylarının Direkt Toplamı Üzerinde Tanımlı Kompakt Operatör Sınıfları, XXIII. Ulusal Matematik Sepozyumu, Ağustos 2010, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, 40.

ÖZGEÇMİŞ

Elif OTKUN ÇEVİK, 15.10.1986 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlköğrenimini Fatih İlkokulunda, ortaokulu Cumhuriyet ortaokulunda, liseyi ise Trabzon Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı Lise Bölümü)'sinde tamamladı.

2005-2006 Eğitim-Öğretim yılında KTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı. 2008-2009 Eğitim-Öğretim yılı bahar döneminde Matematik bölümünü ikincilik derecesiyle bitirdi. 2009-2010 Eğitim-Öğretim yılı güz döneminde KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında direkt doktora programına kabul edildi. Yabancı dili İngilizcedir. Evlidir.