KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE NULLNORMLAR

DOKTORA TEZİ

Mehmet Akif İNCE

NİSAN 2015
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE NULLNORMLAR

Mehmet Akif İNCE

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : **03/ 02 / 2015**
Tezin Savunma Tarihi : **16/ 04 / 2015**

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Funda KARAÇAL**

Trabzon 2015

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Ana Bilim Dalında
Mehmet Akif İNCE Tarafından Hazırlanan

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE NULLNORMLAR

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 03 / 03 / 2015 gün ve 1592 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	:	**Prof. Dr. Funda KARAÇAL**	…....……………………………....
Üye	:	**Prof. Dr. Belgin KÜÇÜKÖMEROĞLU**	…....………………………….....…
Üye	:	**Prof. Dr. Refik KESKİN**	……...…………………….....……
Üye	:	**Doç. Dr. Bahadır Özgür GÜLER**	……...…………………….....……
Üye	:	**Doç. Dr. Tülay KESEMEN**	……...…………………….....……

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması süreci boyunca önerileri ve yönlendirmeleriyle bana rehberlik yapan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Funda KARAÇAL’ a en içten dileklerimle saygı ve minnetimi sunuyorum.

Ayrıca tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini her daim arkamda hissettiğim aileme, tüm doktora eğitim sürecim boyunca fedakârca beni destekleyen eşim Gülizar’ a, oğlum E. Ege’ ye ve kızım E. Deniz’ e teşekkür ederim.

Mehmet Akif İNCE

Trabzon 2015

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Sınırlı Kafesler Üzerinde Nullnormlar” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Funda KARAÇAL’ ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 16 / 04 / 2015

Mehmet Akif İNCE

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ III
TEZ BEYANNAMESİ IV
İÇİNDEKİLER V
ÖZET VI
SUMMARY VII
ŞEKİLER DİZİNİ VIII
SEMBOLLER DİZİNİ IX
1. GENEL BİLGİLER 1
1.1. Giriş 1
1.2. Kısmen Sıralı Kümeler ve Kafesler 2
1.2.1. Kısmen Sıralı Kümeler 2
1.2.2. Kafesler 6
1.3. [0,1] Üzerinde Üçgensel Normlar ve Konormlar 10
1.3.1. [0,1] Üzerinde Üçgensel Normlar 10
1.3.2. [0,1] Üzerinde Üçgensel Konormlar 15
1.4. Cebirsel Özellikler 17
1.5. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar 20
1.6. Birleştirme Fonksiyonları 22
1.7. [0,1] Üzerinde Nullnormlar 23
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR 25
2.1. Sınırlı Kafesler Üzerinde Nullnormların Genel Özellikleri 25
2.2. Sınırlı Kafesler Üzerinde Nullnormların Bazı İnşa Yöntemleri 27
2.3. Nullnormlar ve a-medyan İlişkisi 39
3. İRDELEME 52
4. SONUÇLAR 53
5. ÖNERİLER 54
6. KAYNAKLAR 55
ÖZGEÇMİŞ

Doktora Tezi

ÖZET

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE NULLNORMLAR

Mehmet Akif İNCE

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Funda KARAÇAL

2015, 56 Sayfa

Bu tezin temel amacı herhangi bir sınırlı kafes üzerinde nullnormları tanımlayarak onlara ait temel özelliklerin verilmesi ve bir takım inşa metotlarının ortaya konulmasıdır.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1 de, çalışmamızda temel olan bazı tanım, teorem ve önermeler ifade edilmiştir. Bölüm 2 ise üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda sınırlı kafesler üzerinde nullnormlar tanımlanmış, onlara ait detaylı özellikler verilmiş ve nullnormların oluşturduğu kısmen sıralı kümeden bahsedilmiştir. İkinci kısımda $V_a^{(T)}$, $V_a^{(S)}$, $V_a^{(\vee)}$, $V_a^{(\wedge)}$, $V_a^{(T,S)}$, V_a^T ve V_a^S ile gösterilen nullnormlar tanımlanarak nullnorm inşa etme yöntemleri ortaya konulmuş ve bu nullnormlar arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca $V_a^{(S)}$, $V_a^{(T)}$ ile gösterilen nullnormların yardımıyla L sınırlı kafesi üzerinde $a \in L\backslash\{0,1\}$ sıfır elemanlı nullnormların ailesinin sırasıyla en küçük ve en büyük elemanları olan $V_a^{(\vee)}$ ve $V_a^{(\wedge)}$ nullnormları belirlenmiştir. Son kısımda ise sınırlı bir L kafesi üzerinde Med_a (disjanktif form) ve Med^a (konjanktif form) tanıtılıp bunlar yardımıyla tanımlanan V_* ve V^* fonksiyonları arasındaki ilişki incelenmiştir. V_* ve V^* fonksiyonlarının hangi şartlar altında nullnorm olabileceği irdelenmiştir. Ayrıca yine bu fonksiyonların yardımıyla sınırlı kafesler üzerinde aynı sıfır elemana sahip birden fazla idempotent nullnormların varlığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Nullnorm, Sınırlı kafes, Medyan, a-medyan

PhD. Thesis

SUMMARY

NULLNORMS ON BOUNDED LATTICES

Mehmet Akif İNCE

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Funda KARAÇAL
2015, 56 Pages

Major purpose of the present thesis is to give the basic properties of nullnorms and to introduce some constructing methods on a bounded lattice by introducing their definition.

This study consists of two main chapters. In Chapter 1, some definitions, theorems and propositions which are crucial for our study are stated. Chapter 2 contains three parts. In the first part, nullnorms are defined on bounded lattices, their detailed properties are given and adverted about the partially ordered set created by nullnorms. In the second part, constructing methods are introduced by defining the nullnorms denoted by $V_a^{(T)}$, $V_a^{(S)}$, $V_a^{(\vee)}$, $V_a^{(\wedge)}$, $V_a^{(T,S)}$, V_a^T and V_a^S and the relations between these nullnorms are investigated. Furthermore, $V_a^{(\vee)}$ and $V_a^{(\wedge)}$ that are the smallest and the greatest elements of family of nullnorms with the zero element $a \in L\backslash\{0,1\}$ on a bounded lattice L is obtained by the helping of $V_a^{(S)}$ and $V_a^{(T)}$ nullnorms. In the last section, the functions V_* and V^* defined by the helping of Med_a $(disjunctive\ form)$ and Med^a $(conjunctive\ form)$ are studied. The relations between these functions are examined. It is analyzed that under which conditions, these functions can be nullnorms. In addition, again using these functions, it is shown that there exist several idempotent nullnorms having the same zero element on bounded lattices.

Key Words: Nullnorm, Bounded lattice, Median, a-median

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

Şekil 1.1. Diyagram örnekleri 4
Şekil 2.1. Nullnormların Yapısı 35
Şekil 2.2. L Üzerindeki $\leq$ Sıralaması 49
Şekil 2.3. $\wp(A)$ Kafesi 50

SEMBOLLER DİZİNİ

$\cap$	: Arakesit işlemi
$\cup$	: Birleşim işlemi
$\subseteq$	: Kümeler arasında alt küme bağıntısı
$A \cap B$	: Kümelerin arakesiti
$A \cup B$	: Kümelerin birleşimi
$A \setminus B$	: Kümelerin farkı
A'	: Kümenin tümleyeni
$A \times B$	: Kümelerin kartezyen çarpımı
$\emptyset$	: Boş küme
$\bar{X}$	: X in üst sınırlarının kümesi
$\underline{X}$	: X in alt sınırlarının kümesi
$\wp(X)$	: X in güç kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{R}}$	: Genişletilmiş reel sayılar kümesi
$[a, b]$	: Kapalı aralık
$]a, b[$	: Açık aralık
$[a, b[,]a, b]$	: Yarı-açık aralık
Y^X	: X den Y ye tüm fonksiyonların kümesi
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad (\in X^{\mathbb{N}})$	: X' deki elemanların dizisi
$\bigwedge, \wedge$	: Kafeste infimum işlemi
$\bigvee, \vee$	: Kafeste supremum işlemi
t-norm	: Üçgensel norm
t-konorm	: Üçgensel konorm
$T_{i=1}^{n} x_i, T_{i=1}^{\infty} x_i, T_{i\in I} x_i$	: Bir t-norm T nin genişlemeleri
$S_{i=1}^{n} x_i, S_{i=1}^{\infty} x_i, S_{i\in I} x_i$	: Bir t-konorm S nin genişlemeleri
$Z(T)$	: T t-normunun sıfır bölenlerinin kümesi

H_T	: T t-normunun idempotent elemanlarının kümesi
T_M	: Minimum t-norm
T_P	: Çarpım t-norm
T_L	: Lukasiewicz t-norm
T_D	: $[0,1]$ üzerindeki drastik çarpım
T_W	: Sınırlı bir kafes üzerindeki en küçük t-norm
S_M	: Maksimum t-konorm
S_P	: İstatistiksel toplam
S_L	: Lukasiewicz t-konorm (sınırlı toplam)
S_D	: Drastik toplam
S_W	: Sınırlı bir kafes üzerindeki en büyük t-konorm
T^{nM}	: Nilpotent minimum
$T_\wedge$	: İnfimum t-norm
I	: Genişletilmiş reel sayıların boştan farklı bir aralığı
$a \parallel b$	: a elemanı ile b elemanı kıyaslanamaz
$\mathbb{I}_a$	: a elemanı ile kıyaslanamayan elemanların kümesi
V_a	: a sıfır elemanlı nullnorm
$[n]$	: $\{1,2,\dots,n\}$ kümesi
$V_a\|_{[0,a]^2}$	: V_a nullnormunun $[0,a]^2$ kümesine kısıtlanışı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

$[0,1]$ birim reel aralığı üzerindeki nullnormların hikâyesi sırasıyla [17] de verilen 1999 yılında Mas, Mayor ve Torrens' in yaptığı "t-operators" ve [3] te verilen 2001 yılında Calvo, DeBaets ve Fodor' un yaptığı "The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms" isimli çalışmalarla başlar. Daha sonra bu konuda çeşitli çalışmalar yapılmıştır ([6], [7], [9], [19], [20], [21], [22]). Nullnormlar, birim reel aralık üzerinde bir sıfır elemana sahip olup t-norm ve t-konormların bir takım ek koşulları sağlayan genelleştirmesidir. Bazı önemli nullnormlar sadece teorik birer fonksiyon olarak kalmayıp, aynı zamanda birçok alanda (uzman sistemler, nöral ağlar, bulanık niceleyiciler gibi) önemli uygulamalara sahiptirler.

Bu çalışmada çözülmesi amaçlanan temel problem, herhangi bir sınırlı kafes göz önüne alındığında, bu kafes üzerinde nullnormların tanımlanması ve hangi özelliklere sahip olduklarının ortaya konmasıdır. Daha önce literatürde bu konuda yapılmış herhangi bir çalışma bulunmamaktadır. Bu problemin çözümü literatürde yepyeni derin bir tartışma başlatması açısından çok büyük önem arz etmektedir.

$[0,1]$ birim reel aralığı üzerindeki nullnormlarla ilgili çalışmalara bakıldığında, herhangi $a \in]0,1[$ sıfır elemanına sahip nullnormların sınıfının en büyük-en küçük elemanları belirlenmiştir ([6]). Ayrıca yine birim reel aralık üzerinde herhangi $a \in]0,1[$ sıfır elemanına sahip idempotent olan sadece bir tane nullnorm olduğu gösterilmiştir ([6]). $[0,1]$ birim reel aralığı üzerindeki nullnormlarla, herhangi bir L sınırlı kafesi üzerindeki nullnormlar arasında önemli farklılıklar bulunmaktadır. Örneğin yukarıda ifade edildiği gibi, birim reel aralık üzerinde herhangi $a \in]0,1[$ sıfır elemanına sahip idempotent olan sadece bir tane nullnorm varken L sınırlı kafesinde bu sayının tek olması gerekmez. Bu çalışmada, buna benzer bazı farklılıklar ortaya konacaktır. Bunun dışında bu konuda yapılan ($[0,1]$ birim reel aralık üzerinde) diğer çalışmalara bakıldığında nullnormların özellikleri, birçok nullnorm örneği ve inşa metotları ortaya konmuştur ([6], [7], [9], [19], [20]). Bu çalışmada ise herhangi bir L sınırlı kafesi üzerinde, $a \in L\backslash\{0,1\}$ sıfır elemanına sahip nullnormların bir karakterizasyonu yapılacaktır. Yapılması amaçlanan şeyler;

- Sınırlı kafesler üzerinde nullnormların tanımının verilmesi,

- Sınırlı kafesler üzerinde nullnormların özelliklerinin belirlenmesi,
- Sınırlı kafesler üzerinde nullnormların t-normlar ve t-konormlarla ilişkisinin araştırılması,
- Sınırlı kafesler üzerinde nullnorm inşası için çeşitli yöntemler ortaya konulması,
- Herhangi bir L sınırlı kafesi üzerinde, $a \in L\backslash\{0,1\}$ sıfır elemanına sahip nullnormların sınıfının en büyük ve en küçük elemanının belirlenmesi,
- Herhangi bir L sınırlı kafesi üzerinde bir t-norm T ve bir t-konorm S yardımıyla tanımlanan $Med_a(T,S)$ ve $Med^a(T,S)$ fonksiyonlarının özellikleri ve hangi koşullar altında nullnorm olacaklarının araştırılması,
- Herhangi bir L sınırlı kafesi üzerinde idempotent nullnorm örneklerinin verilmesi.

Öncelikle bu konuda gerekli olan birtakım genel bilgiler aşağıda verilmiştir:

1.2. Kısmen Sıralı Kümeler ve Kafesler

1.2.1. Kısmen Sıralı Kümeler

Tanım 1.1. [2] P bir küme ve $\leq$, P üzerinde bir bağıntı olsun. Her $x, y, z \in P$ için

P1. $x \leq x$ (Yansıma)

P2. $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ (Ters Simetri)

P3. $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (Geçişme)

şartları sağlanırsa, $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir sıralama (veya kısmen sıralama) denir. Üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı mevcut olan P kümesine sıralı küme (veya kısmen sıralı küme) denir ve $(P, \leq)$ ikilisi ile gösterilir.

Eğer $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise $x < y$ yazılır ve 'x, y de öz olarak içerilir' olarak ifade edilir. $x \leq y$ bağıntısı $y \geq x$ olarak da yazılır ve 'y, x de içerilir' olarak ifade edilir. Benzer şekilde $x < y$, $y > x$ olarak da yazılır.

Örnek 1.1. X bir küme olmak üzere, $(\wp(X), \subseteq)$ kısmen sıralı bir kümedir.

Lemma 1.1. [2] Herhangi bir kısmen sıralı kümede hiçbir x için $x < x$ dir ve $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ dir. Tersine '$<$' ikili bağıntısı ön iki şartı sağlar ve '$x \leq y$' '$x < y$' veya '$x = y$' olarak tanımlanırsa '$x \leq y$' bağıntısı P1, P2, P3 şartlarını sağlar.

Uyarı 1.1. [2] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun.

(i) Bir $a \in P$ elemanı her $x \in P$ için $a \leq x$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa bu elemanın tek olduğu açıktır. Böyle bir eleman (eğer mevcutsa) 0 ile gösterilir ve P nin en küçük elemanı olarak adlandırılır.

(ii) Bir $b \in P$ elemanı her $x \in P$ için $x \leq b$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa 1 ile gösterilir ve P nin en büyük elemanı olarak adlandırılır. Böyle bir eleman mevcutsa tek olduğu açıktır.

Eğer 0 ve 1 elemanları mevcutsa, her $x \in P$ için $0 \leq x \leq 1$ olduğundan 0 ve 1 e evrensel sınırlar denir.

Lemma 1.2. [2] Eğer $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_1$ ise $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ (ters devir) dir.

P4. Her x ve y için $x \leq y$ veya $y \leq x$ dir.

Tanım 1.2. [2] P4 özelliğini sağlayan bir kısmen sıralı kümeye tam sıralı küme, zincir veya lineer sıralı küme denir.

Teorem 1.1. [2] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $S \subseteq P$ alt kümesi ise, $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir kümedir. Özel olarak, P bir zincir ise S de zincirdir.

Örnek 1.2. [2] $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi bir zincir olduğundan $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, $\mathbb{N}_0$ pozitif doğal sayılar kümesi, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi doğal sıralamaya göre bir zincirdir.

Örnek 1.3. [2] $\{1,2, \cdots, n\}$ kümesi doğal sıralamaya göre bir zincir şeklindedir.

Tanım 1.3. [2] $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. $\theta: P \longrightarrow Q$ dönüşümüne sıra korur dönüşüm veya izoton denir:⟺ Her $x, y \in P$ için

$$x \leq_1 y \text{ ise } \theta(x) \leq_2 \theta(y)$$

dir.

$(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ kısmen sıralı kümelerine izomorftur denir:⟺ Birebir, örten bir $\theta: P \longrightarrow Q$ dönüşümü, her $x, y \in P$ için

$$\theta(x) \leq_2 \theta(y) \iff x \leq_1 y$$

sağlayacak şekilde mevcuttur. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ kısmen sıralı kümeleri izomorf ise bu durum $P \cong Q$ ile gösterilir.

$(P, \leq_1)$ kısmen sıralı kümesinden kendisine tanımlanan bir izomorfiye bir otomorfi denir.

Tanım 1.4. [2] ρ, P üzerinde bir bağıntı olsun.

$$\rho^{-1} = \{(a,b) | (b,a) \in \rho\}$$

olarak tanımlanan ρ^{-1} bağıntısına ρ bağıntısının tersi denir.

Teorem 1.2. (Duallik Prensibi) [2] Bir kısmen sıralamanın tersi yine bir kısmen sıralamadır.

Tanım 1.5. [2] Bir X kısmen sıralı kümenin duali aynı elemanlar üzerinde ters sıralama bağıntısı ile tanımlanan $\check{X}$ kümesidir.

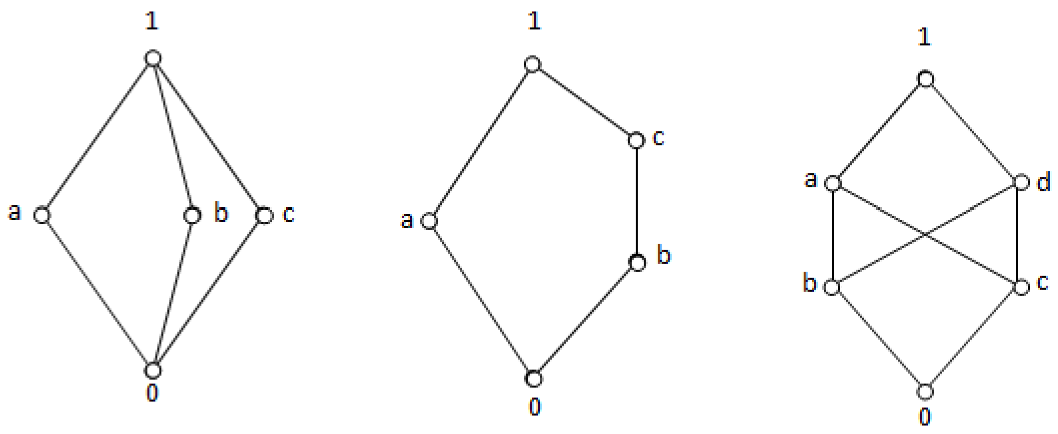
Tanım 1.6. [2] $(P,\leq_1)$ ve $(Q,\leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. Bir $\theta: P \longrightarrow Q$ fonksiyonuna ters sıra korur veya antiton denir:$\Leftrightarrow$ $x, y \in P$ için,

$[x \leq_1 y$ ise $\theta(x) \geq_2 \theta(y)]$ ve $[\theta(x) \leq_2 \theta(y)$ ise $x \geq_1 y]$

gerektirmelerini sağlanır. θ antiton, 1-1 ve örten bir dönüşüm ise θ dönüşümüne dual izomorfi denir.

Tanım 1.7. [2] $(P,\leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. $a, b \in P$ için 'a örter b' denir: $\Leftrightarrow$ $a > b$ olup, $a > x > b$ olacak şekilde bir $x \in P$ elemanı mevcut değildir.

Bir P kısmen sıralı kümesinin $n(P)$ mertebesi ile P nin elemanlarının (kardinal) sayısı kastedilir. Bu sayı sonlu ise P ye sonlu kısmen sıralı bir küme denir. Kapsama bağıntısı kullanılarak herhangi bir sonlu kısmen sıralı kümenin aşağıdaki gibi bir grafiksel gösterimi elde edilir: P nin her bir elemanını göstermek için küçük bir daire çizilir ve $a > b$ olduğunda a, b den daha yukarı yazılır. a, b yi örttüğünde a dan b ye düz bir çizgi çizilir. Sonuçta elde edilen şekle P nin bir diyagramı denir. Aşağıda bazı kısmen sıralı kümelerin diyagram örnekleri verilmiştir.



M_5 N_5 P_6

Şekil 1.1. Diyagram örnekleri

Tanım 1.8. [2] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun.

(i) $a \in X$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $a \leq x$ ise bu a elemanına X kümesinin en küçük elemanıdır denir ve EkeX ile gösterilir.

X kümesinin en büyük elemanı dual olarak tanımlanır ve EbeX ile gösterilir.

(ii) $a \in X$ olsun. Eğer $x < a$ olacak şekilde $x \in X$ mevcut değil ise bu a elemanına X kümesinin bir minimal elemanı denir.

X kümesinde maksimal eleman, dual olarak tanımlanır.

En küçük eleman bir minimal eleman ve en büyük eleman da bir maksimal elemandır. Ancak tersinin doğru olması gerekmez.

Teorem 1.3. [2] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $\emptyset \neq X \subseteq P$ sonlu alt küme olsun. Bu takdirde X kümesi minimal ve maksimal elemanlara sahiptir.

Teorem 1.4. [2] Zincirlerde minimal (maksimal) ve en küçük (en büyük) eleman kavramları denktir. Böylece keyfi sonlu bir zincir en küçük ve en büyük elemanlara sahiptir.

Teorem 1.5. [2] n elemanlı her sonlu zincir n ordinal sayısına ($\{1,2,\ldots,n\}$ tamsayılarının zincirine) izomorftur.

Tanım 1.9. [2] Bir sonlu n zincirinin uzunluğu $n-1$ olarak tanımlanır. Daha genel olarak, bir P kısmen sıralı kümesinin $\ell(P)$ uzunluğu P deki zincirlerin uzunluklarının en küçük üst sınırı olarak tanımlanır. Eğer $\ell(P)$ sonlu ise P kısmen sıralı kümesine sonlu uzunluklu kısmen sıralı küme denir.

Tanım 1.10. [2] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun.

(i) $a \in P$ ve her $x \in X$ için $x \leq a$ ise, a elemanına X kümesinin bir üst sınırı denir ve X kümesinin üst sınırlarının kümesi $\overline{X}$ ile gösterilir. X in herhangi bir c üst sınırı için $a \leq c$ ise, a elemanına X kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir. $a = supX$ veya $a = \vee X$ ile gösterilir.

(ii) $b \in P$ ve her $x \in X$ için $b \leq x$ ise, b elemanına X kümesinin bir alt sınırı denir ve X kümesinin alt sınırlarının kümesi $\underline{X}$ ile gösterilir. X in herhangi bir d alt sınırı için $d \leq b$ ise, b elemanına X kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir. $b = infX$ veya $b = \wedge X$ ile gösterilir.

1.2.2. Kafesler

Tanım 1.11. [2] $(P, \leq)$ bir kısmen sıralı kümesi olsun. Her $x, y \in P$ için $sup\{x, y\}$ ve $inf\{x, y\}$ mevcut ise P ye kafes denir.

P kafesinde $x, y \in P$ için $x \vee y := sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y := inf\{x, y\}$ ile gösterilir.

Eğer $(P, \leq)$ bir kafes ise $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri P üzerinde ikili işlemlerdir. Dolayısıyla $(P, \vee, \wedge)$ bir cebirsel yapıdır.

Örnek 1.4. [2] Şekil 1.1 de verilen diyagram örneklerinde M_5 ve N_5 kafes olup P_6 kafes değildir.

Örnek 1.5. [2] $(\wp(X), \subseteq)$ kısmen sıralı kümesi bir kafestir.

Bu kafeste $\forall A, B \in \wp(X)$ için $A \vee B = A \cup B$ ve $A \wedge B = A \cap B$ dir.

Tanım 1.12. [2] Bir P kafesine sınırlı kafes denir:$\Leftrightarrow$ P, en küçük eleman 0 ve en büyük eleman 1 e sahiptir.

Tanım 1.13. [2] Bir L kafesine tam kafes denir:$\Leftrightarrow$ L nin her X alt kümesi L de bir en küçük üst sınıra ve bir en büyük alt sınıra sahiptir. Yani, her $X \subseteq L$ alt kümesi için $supX$ ve $infX$, L de mevcuttur.

Özel olarak Tanım 1.13 de $X = L$ alındığında boştan farklı her tam kafesin en küçük elemanının ve en büyük elemanının mevcut olduğu görülür. Bu nedenle her tam kafes sınırlıdır. Her sonlu kafes tam kafestir. Keyfi bir zincir kafestir.

Örnek 1.5 de verilen bir X kümesinin tüm alt kümelerinin kafesi $(\wp(X), \subseteq)$ tam kafestir, burada en küçük eleman $0 = \emptyset$ ve en büyük eleman $1 = X$ dir. $S_\alpha \subseteq X$ alt kümelerinden oluşan keyfi A ailesi için $infA = \bigcap_A S_\alpha$ ve $supA = \bigcup_A S_\alpha$ dır.

Tanım 1.14. [2] L bir kafes ve $X \subseteq L$ olsun. X alt kümesine L kafesinin bir alt kafesidir denir:$\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$ için $a \wedge b \in X$ ve $a \vee b \in X$ dir.

Bir kafeste boş küme ve tek elemanlı alt kümeler alt kafestir. Daha genel olarak, $(L, \leq)$ bir kafes ve $a, b \in L$ için $a \leq b$ ise

$$[a, b] := \{x \in L | a \leq x \leq b\}$$

ile tanımlanan $[a, b]$ kapalı aralığı bir alt kafestir.

Tanım 1.15. [2] P bir kısmen sıralı küme ve $X \subseteq P$ olsun. X e konveks alt küme denir:$\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$, $a \leq b$ için $[a, b] \subseteq X$ dir.

Tanım 1.16. [2] Bir L kafesinin S alt kümesine konveks alt kafes denir:$\Leftrightarrow$ Her $a, b \in S$ için $[a \wedge b, a \vee b] \subseteq S$ dir.

Bir L kafesinin aynı sıralama altında kafes olan bir alt kümesinin alt kafes olması gerekmez. Aşağıdaki kafes bu duruma bir örnek olarak verilebilir.

Örnek 1.6. [2] Σ, bir G grubunun tüm alt gruplarının ailesi olsun. $H, K \in \Sigma$ için

$H \leq K \Leftrightarrow H \subseteq K$

olarak tanımlansın. Bu takdirde $(\Sigma, \leq)$ bir tam kafestir, burada $H \wedge K = H \cap K$ (küme kesişimi) ve $H \vee K$, H ve K alt gruplarını içeren en küçük alt gruptur. Ancak $(\Sigma, \leq)$ kafesi $(\wp(G), \subseteq)$ kafesinin bir alt kafesi değildir.

Teorem 1.6. [2] L bir tam kafes ve $S \subseteq L$ olsun. Eğer

(i) $1 \in S$,

(ii) $T \subseteq S \Longrightarrow infT \in S$

ise, S bir tam kafestir.

Tanım 1.17. [2] $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. P ve Q kısmen sıralı kümelerinin

$P \times Q = \{(x, y) | x \in P, y \in Q\}$

şeklinde tanımlanan $P \times Q$ kartezyen çarpım kümesi

$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2$ ve $y_1 \leq_2 y_2 \quad x_1, x_2 \in P,\ y_1, y_2 \in Q$

bağıntısı altında kısmen sıralı bir kümedir. Bu $(P \times Q, \leq)$ kısmen sıralı kümesine P ve Q kısmen sıralı kümelerinin direkt çarpım kümesi denir.

Teorem 1.7. [2] L ve M iki kafes olsun. $L \times M$ direkt çarpımı da yine bir kafestir. Burada $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L \times M$ için

$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$

$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2)$

dır.

Bir kafeste $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri önemli cebirsel özelliklere sahiptir.

Lemma 1.3. [2] P kısmen sıralı bir küme olsun. İnfimum ve supremum işlemleri (eğer mevcutsa) aşağıdaki özelliklere sahiptir:

L1. $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x,$ (İdempotent)

L2. $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x,$ (Komütatif)

L3. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$ (Birleşme)

L4. $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x.$ (Yok etme)

Üstelik $x \leq y$ ifadesi $x \wedge y = x$ ve $x \vee y = y$ şartlarının her birine denktir.

Lemma 1.4. [2] P, 0 en küçük elemanına sahip kısmen sıralı bir küme ise her $x \in P$ için

$0 \wedge x = 0$ ve $0 \vee x = x$

dir. Dual olarak P, 1 evrensel üst sınırına sahip ise her $x \in P$ için

$x \wedge 1 = x$ ve $x \vee 1 = 1$

dir.

Lemma 1.5. [2] Herhangi bir kafeste infimum ve supremum işlemleri sıra korurdur. Yani bir L kafesinde $x, y, z \in L$ için

$y \leq z$ ise $x \wedge y \leq x \wedge z$ ve $x \vee y \leq x \vee z$,

sağlanır.

Lemma 1.6. [2] L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için

$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

eşitsizlikleri sağlanır.

Lemma 1.7. [2] L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için modüler eşitsizlik olarak bilinen

$x \leq z$ ise $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 1.18. [2] İdempotent, komütatif ve birleşme özelliklerine sahip ikili işlemli bir sisteme yarı kafes denir.

Sonuç 1.1. [2] P kısmen sıralı bir küme ve P de alınan herhangi iki elemanın infimumu mevcut olsun. Bu takdirde, P, $\wedge$ ikili işlemine göre bir yarı kafestir. Böyle yarı kafeslere infimum-yarı kafesler denir. Dual olarak, P kısmen sıralı kümesinde alınan herhangi iki elemanın supremumu mevcut ise P, $\vee$ ikili işlemine göre bir yarı kafestir. Böyle yarı kafeslere supremum-yarı kafesler denir.

Lemma 1.8. [2] P bir küme, $\circ$ P üzerinde bir ikili işlem ve $(P,\circ)$ bir yarı kafes olsun. Bu takdirde $x \leq y \Leftrightarrow x \circ y = x$ olarak tanımlanan $\leq$ bağıntısı altında $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir kümedir, burada $x \circ y = inf\{x, y\}$ şeklinde tanımlıdır.

Teorem 1.8. [2] $(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir kafestir $\Leftrightarrow$ $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri L1-L4 özelliklerini sağlar.

Teorem 1.9. [2] Keyfi bir L kafesinde aşağıdaki ifadeler denktir:

L5′. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad \forall x, y, z \in L,$

L5$''$. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad \forall x, y, z \in L$

Tanım 1.19. [2] Bir kafese dağılmalı kafes denir:$\Leftrightarrow$ L5$'$ özelliği (böylece L5$''$) sağlanır.

Şekil 1.1 deki M_5 ve N_5 kafesleri dağılmalı değildir.

Lemma 1.9. [2] L bir zincir ise L dağılmalı bir kafestir.

Keyfi dağılmalı kafesin duali de dağılmalı kafestir. Ayrıca herhangi bir dağılmalı kafesin alt kafesi ve dağılmalı kafeslerin direkt çarpımları da dağılmalı kafestir.

Teorem 1.10. [2] Bir dağılmalı kafeste $c \wedge x = c \wedge y$ ve $c \vee x = c \vee y$ ise, $x = y$ elde edilir.

Tanım 1.20. [2] L bir kafes olsun. L kafesine modüler kafes denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in L$ için

L6. $x \leq z$ ise $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

sağlanır.

Her dağılmalı kafes modülerdir. Fakat her modüler kafesin dağılmalı kafes olması gerekmez. Örnek olarak Şekil 1.1 deki M_5 kafesi modülerdir ancak dağılmalı değildir.

Teorem 1.11. [2] Herhangi bir G grubunun normal alt gruplarının kafesi bir modüler kafestir.

Bir modüler kafesin keyfi alt kafesleri modülerdir ve modüler kafeslerin direkt çarpımları da modülerdir.

Teorem 1.12. [2] Modüler olmayan herhangi bir L kafesi Şekil 1.1 deki N_5 kafesini bir alt kafes olarak içerir.

Tanım 1.21. [2] L sınırlı bir kafes ve $x, y \in L$ olsun. y elemanına x elemanının komplementi denir:$\Leftrightarrow$ $x \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$ dir. Bu durumda x elemanının komplementi x' ile gösterilir.

Eğer bir kafesin her elemanının komplementi mevcut ise böyle kafeslere komplementli kafes denir.

Tanım 1.22. [2] Bir kafese yerel komplementli kafes denir :$\Leftrightarrow$ Bu kafesin tüm kapalı aralıkları komplementlidir.

Bir X kümesinin tüm alt kümelerinin kafesi komplementlidir. Şekil 1.1 deki M_5 kafesi komplementli kafese bir örnektir.

Teorem 1.13. [2] Keyfi komplementli modüler kafes yerel komplementlidir.

5-elemanlı modüler olmayan Şekil 1.1 deki N_5 kafesi komplementlidir ancak yerel komplementli değildir.

Tanım 1.23. [2] L bir kafes olsun. $x \in L$ elemanına atom denir $:\Leftrightarrow$ x, $L \setminus \{0\}$ ın minimal elemanıdır.

Teorem 1.14. [2] Sonlu uzunluklu yerel komplementli bir kafeste her eleman içerdiği atomların supremumu şeklindedir.

Sonuç 1.2. [2] Sonlu uzunluklu komplementli modüler kafeste, her eleman içerdiği atomların supremumu şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.24. [2] Bir atomik kafes, her elemanı içerdiği atomların supremumu şeklinde olan kafestir.

Tanım 1.25. [2] L sınırlı bir kafes olsun. L kafesine Boole kafesi denir $:\Leftrightarrow$ L dağılmalı ve komplementli bir kafestir.

Örnek 1.7. [2] Örnek 1.5 de verilen $(\wp(X), \subseteq, \vee, \wedge)$ kafesi bir Boole kafesidir, burada her $A \subseteq X$ alt kümesi için $A' = X \setminus A$ dır.

Teorem 1.10 kullanılırsa, herhangi bir dağılmalı kafeste komplementler tektir.

Teorem 1.15. [2] L bir Boole kafesi olsun. Her $x \in L$ elemanının bir tek x' komplementi mevcuttur. Üstelik her $x, y \in L$ için

L7. $x \wedge x' = 0$ ve $x \vee x' = 1$,

L8. $(x')' = x$,

L9. $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ ve $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

özellikleri sağlanır.

Tanım 1.26. [2] L bir kafes olsun. L kafesine Boole cebiridir denir $:\Leftrightarrow$ L kafesi $\wedge, \vee, '$ işlemleri ile L1-L9 özelliklerini sağlar.

A bir Boole cebiri olsun. $\emptyset \neq B \subseteq A$ kümesine A Boole cebirinin alt cebiridir denir: $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in B$ için $a \wedge b, a \vee b, a' \in B$ dir.

Teorem 1.16. [2] Evrensel sınırlara sahip herhangi dağılmalı kafesin komplementli elemanların kümesi bir alt kafes oluşturur.

1.3. $[0,1]$ Üzerinde Üçgensel Normlar ve Konormlar

1.3.1. $[0,1]$ Üzerinde Üçgensel Normlar

Aksi belirtilmedikçe, $[0,1]$ üzerindeki doğal sıralama $\leq$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.27. [16] Bir üçgensel norm (kısaca t-norm) T, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir ikili işlemdir; yani $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu her $x, y, z \in [0,1]$ için

T1. $T(x, y) = T(y, x)$ (Komütatiflik)

T2. $T\big(x, T(y, z)\big) = T(T(x, y), z)$ (Birleşme)

T3. $y \leq z$ ise $T(x, y) \leq T(x, z)$ (Monotonluk)

T4. $T(x, 1) = x$ (Sınır şartı)

özelliklerini sağlar.

Örnek 1.8. [16] T_M, T_P, T_L, T_D ve T^{nM} temel t-normları aşağıdaki gibi verilir:

$T_M(x, y) = min(x, y)$ (Minimum)

$T_P(x, y) = xy$ (Çarpım)

$T_L(x, y) = max(x + y - 1{,}0)$ (Lukasiewicz t-norm)

$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0,1[^2 \\ min(x, y), & aksi\ halde \end{cases}$$ (Drastik çarpım)

$$T^{nM}(x, y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 1 \\ min(x, y), & aksi\ halde \end{cases}$$ (Nilpotent Minimum)

Uyarı 1.2. [16] T, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde bir t-norm olsun.

(i) Tanım 1.27 den dolayı her T t-normu her $x \in [0,1]$ için

$$T(0, x) = T(x, 0) = 0 \tag{1.1}$$

$$T(1, x) = x \tag{1.2}$$

eşitliklerini sağlar.

(ii) Bir T t-normunun ikinci bileşene göre monotonluğu, (T1) komütatiflik ve (T3) monotonluk özellikleri ile tanımlanır. Bu monotonluk her iki bileşene göre monotonluğa denktir; yani

$$x_1 \leq x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2 \text{ ise } T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2) \tag{1.3}$$

sağlanır.

Tanım 1.28. [16]

(i) T_1 ve T_2 iki t-norm olsun. Eğer her $(x, y) \in [0,1]^2$ için $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ eşitsizliği sağlanıyor ise 'T_1, T_2 t-normundan daha zayıftır' veya 'T_2, T_1 t-normundan daha güçlüdür' denir ve bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

(ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise yani $T_1 \leq T_2$ ve bir $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ elemanı için $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ ise, bu durum $T_1 < T_2$ ile gösterilir.

Uyarı 1.3. [16]

(i) [0,1] birim aralığı üzerinde T_M minimum t-normu en güçlü, T_D drastik çarpımı en zayıf t-normdur. Gerçekten;

T, [0,1] birim aralığı üzerinde bir t-norm olsun. (1.3) ün bir sonucu olarak her $x, y \in [0,1]$ için

$T(x, y) \leq T(x, 1) = x$ ve $T(x, y) \leq T(1, y) = y$ olup

$T(x, y) \leq min(x, y) = T_M(x, y)$ dir. Böylece, T_M minimum t-normu en güçlü t-normdur.

Her $x, y \in]0,1[$ için $T(x, y) \geq 0 = T_D(x, y)$ olduğundan T_D drastik çarpımı en zayıf t-normdur. Bu durumda keyfi T t-normu için

$$T_D \leq T \leq T_M \tag{1.4}$$

eşitsizliği sağlanır.

(ii) Şimdi de $T_L < T_P$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $x, y \in [0,1]$ keyfi alınsın. $x + y \geq 1$ olsun. Buradan $x + y - 1, xy \in [0,1]$ olduğundan

$x + y - 1 \leq xy$ veya $x + y - 1 > xy$

olur. İlk olarak $x + y - 1 > xy$ alınsın. Buradan

$x - 1 > xy - y$

$x - 1 > y(x - 1)$

$y > 1$

çelişkisi elde edilir. O halde $x + y - 1 \leq xy$ dir.

Yani $x + y \geq 1$ ise $T_L(x, y) = x + y - 1 \leq xy = T_P(x, y)$ dir.

$x + y < 1$ durumunda ise $T_L(x, y) = 0 \leq T_P(x, y)$ olur. Dolayısıyla $T_L \leq T_P$ olduğu elde edilir. Şimdi eşitliğin sağlanmadığı gösterilecektir.

$x = {}^1/_2$ ve $y = {}^1/_2$ alınsın.

$$T_L({}^1/_2\,, {}^1/_2) = max({}^1/_2 + {}^1/_2 - 1\,, 0) = 0 < T_P({}^1/_2\,, {}^1/_2) = {}^1/_2\,{}^1/_2 = {}^1/_4$$

olduğundan $T_L \neq T_P$ dir. Buradan $T_L < T_P$ olduğu elde edilir.

Bu nedenle dört temel t-norm arasında

$$T_D < T_L < T_P < T_M \tag{1.5}$$

ilişkisi mevcuttur.

Önerme 1.1. [16] $]0,1[\subseteq A \subseteq [0,1]$ bir küme ve $*: A^2 \longrightarrow A$, A üzerinde bir ikili işlem ve her $x, y, z \in A$ için (T1)-(T3) özellikleri ile birlikte

$$x * y \leq min(x, y) \tag{1.6}$$

özelliği sağlansın. O halde

$$T(x,y) = \begin{cases} x * y, & (x,y) \in (A \setminus \{1\})^2 \\ min(x,y), & aksi\ halde \end{cases} \tag{1.7}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur. Üstelik T, $(A \setminus \{1\})^2$ ne kısıtlanışı, $*$ işleminin $(A \setminus \{1\})^2$ ne kısıtlanışı ile aynı olan tek t-normdur.

Tanım 1.29. [16] Her $x, y, z \in [0,1]$ için (T1)-(T3) ve (1.6) özelliklerini sağlayan bir $F: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonuna bir t-altnorm denir.

Açık olarak her t-norm bir t-altnormdur, fakat tersinin doğru olması gerekmez. Örneğin $F(x, y) = 0$ ile verilen $F: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-altnormdur fakat bir t-norm değildir. Çünkü F fonksiyonu sınır şartı özelliğini sağlamaz.

Sonuç 1.3. [16] F bir t-altnorm ise

$$T(x,y) = \begin{cases} F(x,y), & (x,y) \in [0,1[^2 \\ min(x,y), & aksi\ halde \end{cases}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur.

Önerme 1.2. [16]

(i) Her $x \in [0,1]$ için $T(x, x) = x$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_M minimum t-normdur.

(ii) Her $x \in [0,1[$ için $T(x, x) = 0$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_D drastik çarpımdır.

Uyarı 1.4. [16]

(i) (T2) birleşme kuralı ile, her t-norm T bir tek şekilde, indüksiyon kullanarak aşağıdaki gibi bir n -li işleme genişletilebilir: Yani, her $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n$ n-sıralısı için

$$T_{i=1}^{n} x_i = T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n)$$

dir. Eğer özel olarak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ ise kısaca

$$x_T^{(n)} = T(x, x, \dots, x)$$

yazılır. Bu durumda $x_T^{(0)} = 1$ ve $x_T^{(1)} = x$ olarak tanımlanır.

(ii) $[0,1]$ in elemanlarının her $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisi yani $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ için

$$T_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} T_{i=1}^{n} x_i \tag{1.8}$$

ile tanımlanır.

(iii) Keyfi bir I indis kümesi ve her $(x_i)_{i\in I} \in [0,1]^I$ için, yani $[0,1]$ in elemanlarının her $(x_i)_{i\in I}$ ailesi için aşağıdaki ifade iyi tanımlıdır ve (1.8) in bir genellemesidir:

$$T_{i\in I} x_i = inf\left\{T_{j=1}^{k} x_{i_j} \,\middle|\, (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}), (x_i)_{i\in I} \text{ nın bir sonlu alt ailesidir}\right\}.$$

Örnek 1.9. [16] T_M minumum ve T_p çarpım t- normlarının n-li genişlemelerinin

$$T_M(x_1, x_2, \dots, x_n) = min(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$T_P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

olduğu açıktır. T_L Lukasiewicz t-normunun ve T_D drastik çarpımının n-li genişlemeleri

$$T_L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1), 0\right),$$
$$T_D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} x_i, & \forall j \neq i \text{ } için \text{ } x_j = 1 \text{ } ise \\ 0, & aksi \text{ } halde \end{cases}$$

şeklindedir.

Uyarı 1.5. [16] Tanım 1.27 de verilen (T1)-(T4) aksiyomları birbirinden bağımsızdır. Bunu görebilmek için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 1.10. [16] $i = 1,2,3,4$ için $F_i: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonları aşağıdaki gibi sırasıyla tanımlansın.

$$F_1(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0,0.5] \times [0,1[\\ min(x, y), & aksi \text{ } halde \end{cases}$$

$$F_2(x, y) = xymax(x, y)$$

$$F_3(x, y) = \begin{cases} 0.5, & (x, y) \in [0,1[^2 \\ min(x, y), & aksi \text{ } halde \end{cases}$$

$F_4(x, y) = 0$

Bu fonksiyonlar t-norm değildirler. Çünkü F_1 fonksiyonu (T1)-komütatiflik özelliğini, F_2 fonksiyonu (T2)-birleşme özelliğini, F_3 fonksiyonu (T3)-monotonluk özelliğini ve F_4 fonksiyonu (T4)-sınır şartı özelliğini sağlamaz.

1.3.2. $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ Üzerinde Üçgensel Konormlar

Tanım 1.30. [16] Bir üçgensel konorm (veya kısaca t-konorm) S, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde her $x, y, z \in [0,1]$ için (T1)-(T3) şartlarını ve her $x \in [0,1]$ için

(S4) $\quad S(x, 0) = x \quad$ (Sınır şartı)

şartını sağlayan $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonudur.

Aksiyomatik olarak t-normlar ve t-konormlar sadece sınır şartlarında farklılık gösterirler. Aslında, t-norm ve t-konorm kavramları bazı anlamlarda dualdirler.

Örnek 1.11. [16] S_M, S_p, S_L ve S_D temel t-konormları sırası ile

$S_M(x, y) = max(x, y)$ (Maksimum)

$S_P(x, y) = x + y - xy$ (Probalistic toplam)

$S_L(x, y) = min(x + y, 1)$ (Lukasiewicz t-konorm)

$S_D(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in]0,1[^2 \\ max(x, y), & aksi\ halde \end{cases}$ (Drastik toplam)

şeklinde tanımlanır.

Önerme 1.3. [16] $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-konormdur $\Leftrightarrow$

Her $x, y \in [0,1]$ için

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y) \tag{1.9}$$

olacak şekilde bir T t-normu mevcuttur.

Uyarı 1.6. [16]

(i) $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir t-konorm ise

$$T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y) \tag{1.10}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur. (1.9) ile verilen t-konorma, t-norm T nin dual t-konormu denir. Benzer şekilde, (1.10) ile verilen t-norma S t-konormunun dual t-normu denir.

(ii) (T_M, S_M), (T_P, S_P), (T_L, S_L) ve (T_D, S_D) ikişer tarzda birbirine dual t-norm ve t-konorm çiftleridir.

(iii) $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir t-konorm olsun. Her $x \in [0,1]$ için

$S(1, x) = S(x, 1) = 1$

$S(0, x) = x$

ilave sınır şartları olarak adlandırılan eşitlikler sağlanır. Böylece, tüm t-konormlar $[0,1]^2$ sınırı üzerinde çakışıktır, yani aynı değeri alırlar.

T-normlarda olduğu gibi bir S t-konormu elde etmek için gerek ve yeter koşul Önerme 1.1 in duali ile (S1)-(S3) şartlarının ve her (x, y) için $S(x, y) \geq max(x, y)$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

(iv) Duallik sıralamayı değiştirir:

yani T_1 ve T_2 t-normları için $T_1 \leq T_2$ ve S_1, T_1 t-normuna ve S_2, T_2 t-normuna karşılık gelen dual t-konormlar ise $S_1 \geq S_2$ dir. Her S t-konormu için

$S_M \leq S \leq S_D$

dir. Yani S_M maksimum t-konormu en zayıf, S_D drastik toplam en güçlü t-konormdur. Örnek 1.11 deki t-konormlar için

$S_M < S_P < S_L < S_D$

sıralaması elde edilir.

(v) S bir t-konorm olsun. Uyarı 1.4 e benzer şekilde $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in [0,1]^n$ şeklindeki n-sıralılarına, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizilerine ve I keyfi küme olmak üzere $(x_i)_{i\in I} \in [0,1]^I$ ailelerine genişletme işlemi aşağıdaki gibidir:

$$S_{i=1}^{n} x_i = S(S_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = S(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$S_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} S_{i=1}^{n} x_i$$

$$S_{i\in I} x_i = sup\left\{S_{j=1}^{k} x_{i_j} \,\middle|\, (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}), (x_i)_{i\in I} \text{ nın sonlu alt ailesidir}\right\}.$$

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ olduğunda $S(x, x, \cdots, x)$ yerine kısaca $x_S^{(n)}$ yazılır ve her $x \in [0,1]$ için $x_S^{(0)} = 0$ ve $x_S^{(1)} = x$ olarak gösterilir.

Örnek 1.12. [16] S_M maksimum t-konormunun n -li genişlemesinin

$$S_M(x_1, x_2, \dots x_n) = max(x_1, x_2, \dots x_n)$$

olduğu açıktır. S_P probalistik toplam, S_L Lukasiewicz t-konorm ve S_D drastik toplam için n -li genişlemeler

$$S_P(x_1, x_2, \dots x_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$$

$$S_L(x_1, x_2, \dots x_n) = min(\sum_{i=1}^{n} x_i \,, 1)$$

$$S_D(x_1, x_2, \dots x_n) = \begin{cases} x_i, & \forall i \neq j \; için \; x_j = 0 \; ise \\ 1, & aksi\ halde \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 1.7. [16] (T, S) birbirlerine dual t-norm ve t-konorm çifti ise, (1.9) ve (1.10) dual ifadeleri,

$$S_{k \in K} x_k = 1 - T_{k \in K}(1 - x_k)$$

$$T_{k \in K} x_k = 1 - S_{k \in K}(1 - x_k)$$

şeklinde genişletilebilir, burada K keyfi bir indis kümesidir.

1.4. Cebirsel Özellikler [16]

Tanım 1.31. [16] T bir t-norm olsun.

(i) Bir $a \in [0,1]$ elemanına T nin bir idempotent elemanıdır denir: $\Leftrightarrow T(a, a) = a$ dır.

0 ve 1 her t-norm için idempotent elemanlar olup bu elemanlara trivial idempotent elemanlar denir. $]0,1[$ aralığındaki idempotent elemanlar ise trivialden farklı idempotent elemanlar olarak adlandırılır.

(ii) Bir $a \in]0,1[$ elemanına t-norm T nin nilpotent elemanı denir:$\Leftrightarrow$ Bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı $a_T^{(n)} = 0$ olacak şekilde mevcuttur.

(iii) Bir $a \in]0,1[$ elemanına T nin sıfır böleni denir :$\Leftrightarrow T(a, b) = 0$ olacak şekilde bir $b \in]0,1[$ mevcuttur.

Örnek 1.13. [16]

- Her $a \in [0,1]$ için $T_M(a, a) = min(a, a) = a$ olduğundan keyfi $a \in [0,1]$ elemanı T_M minimum t-normunun idempotent elemanıdır. Önerme 1.2 nin bir sonucu olarak T_M minimum t-normu idempotent elemanlarının kümesi $[0,1]$ aralığına eşit olan tek t-normdur.

- Her $a \in]0,1[$ elemanı T_L Lukasiewicz t-normunun ve T_D drastik çarpımın hem sıfır böleni hem de nilpotent elemanıdır.
- T_M minimum t-normu ne nilpotent elemana ne de sıfır bölene sahiptir.
- T_D drastik çarpım ve T_L Lukasiewicz t-normu trivialden farklı idempotent elemanlara sahip değildirler.
- T_P çarpım t-normunun da trivialden farklı idempotent elemanı yoktur.
- T_P çarpım t-normu nilpotent elemana ve sıfır bölene sahip değildir. Ayrıca T_P çarpım t-normu sıfır bölene de sahip değildir.

İdempotent elemanlar aşağıdaki yolla karakterize edilebilirler.

Önerme 1.4. [16]

(i) Bir $a \in [0,1]$ elemanı bir t-norm T nin idempotent elemanıdır :⟺
Her $x \in [a,1]$ için $T(a,x) = min(a,x)$ dir.

(ii) Eğer t-norm T sürekli bir fonksiyon ise $a \in [0,1]$, T nin bir idempotent elemanıdır ⟺ Her $x \in [0,1]$ için $T(a,x) = min(a,x)$ dir.

Uyarı 1.8. [16]

(i) Eğer $a \in [0,1]$ bir t-norm T nin idempotent elemanı ise, indüksiyon ile her $n \in \mathbb{N}$ için $a_T^{(n)} = a$ dır. Sonuç olarak, $]0,1[$ in hiçbir elemanı hem idempotent hem de nilpotent eleman olamaz.

(ii) Bir t-norm T nin her nilpotent elemanı aynı zamanda T nin bir sıfır bölenidir. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin; $2/3 \in]0,1[$, T^{nM} nilpotent minimum t-normunun sıfır bölenidir ancak nilpotent elemanı değildir.

(iii) Eğer bir t-norm T bir a nilpotent elemana sahip ise o halde $b_T^{(2)} = 0$ olacak şekilde bir $b \in]0,1[$ elemanı daima mevcuttur.

(iv) Eğer bir $a \in]0,1[$ elemanı t-norm T nin bir nilpotent elemanı (sıfır böleni) ise her $b \in]0,a[$ sayısı aynı zamanda T nin bir nilpotent elemanıdır (sıfır bölenidir).

(v) Bir t-norm T nin nilpotent elemanlarının ve sıfır bölenlerinin kümesi ya boş kümedir ya da $]0,c[$ veya $]0,c]$ şeklinde bir aralıktır.

Önerme 1.5. [16] Her t-norm T için aşağıdakiler denktir.

(i) T sıfır bölenlidir.

(ii) T nilpotent elemana sahiptir.

Tanım 1.32. [16] T bir t-norm olsun.

(i) T t-normuna kesin monotondur denir :⟺ $x > 0$ ve $y < z$ ise $T(x, y) < T(x, z)$.

(ii) T t-normu kısaltma kuralını sağlar denir :⟺ $x > 0$ ve $T(x, y) = T(x, z)$ ise $y = z$.

(iii) T t-normu şartlı kısaltma özelliğini sağlar denir :⟺ $T(x, y) = T(x, z) > 0$ ise $y = z$.

(iv) T t-normu Arşimedyandır denir :⟺ Her $x, y \in]0,1[$ için bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı $x_T{}^{(n)} < y$ olacak şekilde mevcuttur.

(v) T t-normu limit özelliğini sağlar denir :⟺ Her $x \in]0,1[$ için $\lim_{n\to\infty} x_T{}^{(n)} = 0$.

Örnek 1.14. [16]

- T_M minimum t-normu Tanım 1.32 de verilen özelliklerden hiçbirini sağlamaz.
- T_P çarpım t-normu Tanım 1.32 de verilen özelliklerin hepsini sağlar.
- T_L Lukasiewicz t-normu Arşimedyandır, şartlı kısaltma özelliğini ve limit özelliğini sağlar ancak Tanım 1.32 de verilen diğer özelliklerin hiçbirini sağlamaz.
- T_D drastik çarpımı Arşimedyandır, şartlı kısaltma özelliğini ve limit özelliğini sağlar ancak Tanım 1.32 de verilen diğer özelliklerin hiçbirini sağlamaz.

Önerme 1.6. [16] T bir t-norm olsun. Bu takdirde;

(i) T kesin monotondur ⟺ T kısaltma özelliğini sağlar.

(ii) T kesin monoton ise T sadece trivial idempotent elemanlara sahiptir.

(iii) T kesin monoton ise T sıfır bölene sahip değildir.

Teorem 1.17. [16] Bir t-norm T için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) T Arşimedyandır.

(ii) T limit özelliğini sağlar.

(iii) T sadece trivial idempotent elemanlara sahiptir. Bir $x_0 \in]0,1[$ için $\lim_{x\searrow x_0} T(x, x) = x_0$ ise $T(y_0, y_0) = x_0$ olacak şekilde bir $y_0 \in]x_0, 1[$ elemanı mevcuttur, burada $\lim_{x\searrow x_0} T(x, x)$ notasyonu t-norm T nin (x_0, x_0) noktasındaki sağ taraflı limitini göstermektedir.

Tanım 1.33. [16] T bir t-norm, S bir t-konorm olsun. T t-normu S üzerinde dağılmalıdır denir :⟺ Her $x, y, z \in [0,1]$ için

$$T\big(x, S(y, z)\big) = S(T(x, y), T(x, z))$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde S, T üzerinde dağılmalıdır denir :$\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in [0,1]$ için

$$S(x, T(y, z)) = T(S(x, y), S(x, z))$$

eşitliği sağlanır. Eğer S, T üzerinde ve T, S üzerinde dağılmalı ise (T, S) çiftine dağılmalı çift denir.

Önerme 1.7. [16] T bir t-norm ve S bir t-konorm olsun. Bu takdirde

(i) S, T üzerinde dağılmalıdır $\Leftrightarrow T = T_M$ dir.

(ii) T, S üzerinde dağılmalıdır $\Leftrightarrow S = S_M$ dir.

(iii) (T, S) bir dağılmalı çifttir $\Leftrightarrow T = T_M$ ve $S = S_M$ dir.

Uyarı 1.9. [16] Eğer T bir t-norm, S onun dual t-konormu ve T, S üzerinde (veya S, T üzerinde) dağılmalı ise $T = T_M$ ve $S = S_M$ dir.

1.5. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar

Tanım 1.34. [13] L sınırlı bir kafes olsun. Bir üçgensel norm T (kısaca t-norm) L üzerinde komütatif, birleşme, monoton özelliklerini sağlayan 1- birim elemanlı bir ikili işlemdir.

Uyarı 1.10. [13]

(i) T_1 ve T_2 sınırlı bir L kafesi üzerinde iki t-norm olsun. Eğer her $(x, y) \in L^2$ için $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ eşitsizliği sağlanıyor ise T_1, T_2 t-normundan daha zayıftır veya denk olarak T_2, T_1 t-normundan daha güçlüdür denir ve bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

(ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise yani $T_1 \leq T_2$ ve bir $(x_0, y_0) \in L^2$ elemanı için $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ ise, bu durum $T_1 < T_2$ ile gösterilir.

$$T_W(x, y) = \begin{cases} x\,, & y = 1, \\ y\,, & x = 1, \\ 0\,, & aksi\ halde \end{cases}$$

olsun. O halde T_W, L üzerinde bir t-normdur ve özel olarak $L = [0,1]$ olduğunda T_W, T_D ile gösterilir. L üzerindeki keyfi t-norm T için $T_W \leq T$ olduğundan bu t-norm, L üzerindeki en küçük t-normdur.

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki en büyük t-norm $T_\wedge(x, y) = x \wedge y$ ile verilir ve özel olarak $L = [0,1]$ olduğunda $T_\wedge = T_M$ dir.

Tanım 1.35. [13] L sınırlı bir kafes olsun. Bir üçgensel konorm S (kısaca t-konorm) L üzerinde komütatif, birleşme, monoton özelliklerini sağlayan 0- birim elemanlı bir ikili işlemdir.

Örnek 1.15. [13] Aşağıda, L sınırlı kafesi üzerinde t-konorm örnekleri verilmiştir: $S_{\vee}(x,y) = x \vee y$, L üzerindeki herhangi t-konorm S için $S_{\vee} \leq S$ dir.

$$S_W(x,y) = \begin{cases} x\,, & y = 0, \\ y\,, & x = 0, \\ 1\,, & \textit{aksi halde} \end{cases}$$

L üzerindeki herhangi t-konorm S için $S \leq S_W$ dir.

Tanım 1.36. [4] T, sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm olsun. Bir $x \in L$ elemanına T nin bir sıfır böleni denir $:\Leftrightarrow$ $x \wedge y \neq 0$ ve $T(x,y) = 0$ olacak şekilde bir $y \in L$ elemanı mevcuttur. T nin sıfır bölenlerinin kümesi $Z(T)$ ile gösterilecektir.

Eğer $Z(T) = \emptyset$ ise T ye sıfır bölensiz denir.

$L = [0,1]$ olarak alınırsa Tanım 1.36 ve Tanım 1.31 (iii) deki sıfır bölen tanımlarının denk olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tanım 1.37. [4] Sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm T alalım. Bir $x \in L$ elemanına T nin idempotent elemanıdır denir $:\Leftrightarrow$ $T(x,x) = x$ eşitliği sağlanır.

Açık olarak, 0 ve 1 elemanları herhangi bir t-normun idempotent elemanlarıdır. Bu elemanlara trivial idempotent elemanlar denir. Bunlardan farklı idempotent elemanlara da trivial olmayan idempotent elemanlar denir.

Tanım 1.38. [13] Sınırlı bir L kafesi üzerindeki bir t-norm T ye (bir t-konorm S ye) $\vee$- dağılmalıdır ($\wedge$- dağılmalıdır) denir $:\Leftrightarrow$

Her $a, b_1, b_2 \in L$ için

$$T(a, b_1 \vee b_2) = T(a,b_1) \vee T(a,b_2) \ \big(S(a, b_1 \wedge b_2) = S(a,b_1) \wedge S(a,b_2)\big)$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 1.39. [1] Sınırlı bir L kafesi üzerindeki bir t-norm T ye bölünebilirdir denir $:\Leftrightarrow$ $x \leq y$ olan her $x, y \in L$ için $x = T(y,z)$ olacak şekilde bir $z \in L$ mevcuttur.

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki T_W t-normu bölünebilir olmayan bir t-normdur. Diğer taraftan, $T_{\wedge}$ infimum t-normu bölünebilir bir t-normdur: $x \leq y$ olması $x \wedge y = x$ olmasına denktir.

1.6. Birleştirme Fonksiyonları

$\mathbf{I}$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ genişletilmiş reel sayılar sisteminin boştan farklı bir aralığını temsil eder.

n sıfırdan farklı bir doğal sayı olmak üzere, $[n] = \{1,2, \dots, n\}$ şeklinde gösterilir. Ayrıca n-sıralıları göstermek için bazen $(x_1, \dots, x_n)$ yerine koyu $\boldsymbol{x}$ sembolünü kullanılacaktır.

Tanım 1.40. [9] $\mathbf{I}^n$ de birleştirme fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlayan bir $A^{(n)}: \mathbf{I}^n \longrightarrow \mathbf{I}$ fonksiyonudur.

(i) Herbir değişkene göre azalmayandır.

(ii) $\inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{I}^n} A^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \inf \mathbf{I}$ ve $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{I}^n} A^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \sup \mathbf{I}$

Burada n tamsayısı birleştirme fonksiyonunun değişkenlerinin sayısını temsil eder. Hiçbir karışıklık olmayacağı zaman $A^{(n)}$ yerine A yazılacaktır.

Örnek 1.16. [9]

(i) $AM^{(n)}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ ile tanımlanan aritmetik ortalama her $\mathbf{I}$ aralığı için $\mathbf{I}^n$ de birleştirme fonksiyonudur.

(ii) Herhangi $k \in [n]$ için $P_k(\boldsymbol{x}) := x_k$ şeklinde tanımlanan $P_k: \mathbf{I}^n \longrightarrow \mathbf{I}$ projeksiyon fonksiyonu bir birleştirme fonksiyonudur.

(iii) Herhangi $k \in [n]$ için $OS_k(\boldsymbol{x}) := x_{(k)}$ şeklinde tanımlanan $OS_k: \mathbf{I}^n \longrightarrow \mathbf{I}$ sıra istatistik fonksiyonu bir birleştirme fonksiyonudur. Burada $x_{(k)}$, $\boldsymbol{x}$ in k. alttaki koordinatıdır yani:

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(k)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ dir.

OS_k fonksiyonunun aşağıdaki şekilde yazılabileceğine dikkat edilmelidir:

$$OS_k(\boldsymbol{x}) = \bigwedge_{\substack{K \subseteq [n] \\ |K| = k}} \left(\bigvee_{i \in K} x_i\right) = \bigvee_{\substack{K \subseteq [n] \\ |K| = n-k+1}} \left(\bigwedge_{i \in K} x_i\right)$$

n nin tek olduğu durumda, $n = 2k - 1$ ise $(x_1, \dots, x_{2k-1})$ elemanının sıra istatistik değeri olan $x_{(k)}$ basit olarak daha iyi bilinen *medyan* fonksiyonu türünden

$$Med(x_1, \dots, x_{2k-1}) := x_{(k)}$$

şeklinde ifade edilir. Daha genel olarak

$$Med(x_1, \dots, x_{2k-1}) = \bigwedge_{\substack{K \subseteq [2k-1] \\ |K| = k}} \left(\bigvee_{i \in K} x_i\right) = \bigvee_{\substack{K \subseteq [2k-1] \\ |K| = k}} \left(\bigwedge_{i \in K} x_i\right)$$

Örnek olarak:

$$Med(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3).$$

(iv) Herhangi $\alpha \in \mathbf{I}$ için α-medyan, $Med_\alpha : \mathbf{I}^n \longrightarrow \mathbf{I}$

$$Med_\alpha(\boldsymbol{x}) = Med\left(x_1, \dots, x_n, \underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{n-1\ tane}\right) = Med(Min(x), \alpha, Max(x))$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.41. [9] $\bigcup_{n \in \mathbf{I}} \mathbf{I}^n$ de genişletilmiş birleştirme fonksiyonu $F: \bigcup_{n \in \mathbf{I}} \mathbf{I}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e bir fonksiyondur.

$\bigcup_{n \in \mathbf{I}} \mathbf{I}^n$ de genişletilmiş birleştirme fonksiyonu bir A fonksiyonudur öyle ki A nın $\mathbf{I}^n$ ye kısıtlanışı $A^{(n)} := A|_{\mathbf{I}^n}$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbf{I}^n$ de bir birleştirme fonksiyonudur.

Bir genişletilmiş fonksiyon, bileşenlerin herhangi sayısı için tanımlandığından bu fonksiyon bir $(F^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi olarak tanıtılabilir. Burada bu dizinin n. elemanı n-li $F^{(n)}: \mathbf{I}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonudur. Karışıklık olmayacağı zaman bir genişletilmiş fonksiyona basit olarak bir fonksiyon denilecektir.

Birleştirme fonksiyonlarını sınırlı kafesler üzerinde de tanımlamak mümkündür. Bunun için aşağıdaki tanım incelenmelidir:

Tanım 1.42. [9] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $n \in \mathbb{N}$ keyfi olsun. Bir $A: L^n \longrightarrow L$ fonksiyonuna L sınırlı kafesi üzerinde bir birleştirme fonksiyonu denir $:\Leftrightarrow$ Herbir değişkene göre azalmayandır yani $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ (yani $x_1 \leq y_1, \cdots, x_n \leq y_n$) olduğunda $A(\boldsymbol{x}) \leq$ A$(\boldsymbol{y})$ dir ve aşağıdaki sınır koşullarını sağlar:

$$A(0, \cdots, 0) = 0, A(1, \cdots, 1) = 1.$$

1.7. $[0, 1]$ Üzerinde Nullnormlar

Tanım 1.43. [3] Bir nullnorm $V: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, birim aralık üzerinde komütatif, birleşme ve monoton özelliklerini sağlayan, $a \in [0,1]$ sıfır elemanlı ve aşağıdaki özelliği sağlayan bir ikili işlemdir:

Her $x \in [0, a]$ için $V(x, 0) = x$ ve her $x \in [a, 1]$ için $V(x, 1) = x$.

Örnek 1.17. [9] Aşağıdaki şekilde $V: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ $a = 1/3$ sıfır elemanlı bir nullnormdur:

$$V(x,y) = \begin{cases} Mak(x,y) & ,(x,y) \in \left[0, {}^{1}\!/_{3}\right]^2 \; ise \\ \frac{3xy-x-y+1}{2} & ,(x,y) \in \left[{}^{1}\!/_{3}, 1\right]^2 \; ise \\ {}^{1}\!/_{3} & ,aksi \; halde \end{cases}$$

Sıradaki önerme $[0,1]$ birim reel aralık üzerinde nullnormlarla a-medyan arasındaki önemli ilişkiyi açıklamaktadır:

Önerme 1.8. [9] $V: \bigcup_{n \in \mathbf{I}} [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ birleştime fonksiyonu bir nullnormdur $\Leftrightarrow$ $V(\boldsymbol{x}) = Med_a(T(\boldsymbol{x}), S(\boldsymbol{x})) = Med(T(\boldsymbol{x}), S(\boldsymbol{x}), a)$ olacak şekilde bir t-norm T, bir t-konorm S ve bir $a \in]0,1[$ mevcuttur.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Sınırlı Kafesler Üzerinde Nullnormların Genel Özellikleri

$(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı kafes ve $a, b \in L$ olsun. Eğer a ve b birbiriyle kıyaslanamazsa $a \parallel b$ notasyonu kullanılır. a elemanı ile kıyaslanamayan tüm elemanların kümesi $\mathbb{I}_a$ ile gösterilsin. Böylece

$$\mathbb{I}_a = \{x \in L \ : \ x \parallel a\}$$

olur.

Ayrıca bu çalışma boyunca D_a simgesi ile aşağıdaki küme kastedilecektir:

$$D_a = [0, a[\times]a, 1] \cup]a, 1] \times [0, a[\,, \ a \in L \backslash \{0,1\}$$

Tanım 2.1. Bir nullnorm $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı kafesi üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur; yani $V: L^2 \longrightarrow L$ fonksiyonuna bir nullnorm denir $:\Leftrightarrow$

Her $x, y, z \in L$ için

V1. $V(x, y) = V(y, x)$ (Komütatiflik)

V2. $V\big(x, V(y, z)\big) = V(V(x, y), z)$ (Birleşme)

V3. $y \leq z$ ise $V(x, y) \leq V(x, z)$ (Monotonluk)

V4. $x \leq a$ ise $V(x, 0) = x$ ve $x \geq a$ ise $V(x, 1) = x$ olacak şekilde bir $a \in L$ mevcuttur.

Herhangi $x \in L$ elemanı için monotonluk kullanılırsa $V(x, a) \leq V(1, a) = a$ ve $V(x, a) \geq V(0, a) = a$ olup $V(x, a) = a$ olduğu elde edilir. Böylece $a \in L$ elemanı V için bir "sıfır" ("yutan" veya "abzörve") elemandır.

L kafesi üzerindeki tüm nullnormların kümesi $\mathcal{V}$ ile gösterilirsin ve $\mathcal{V}$ aşağıdaki sıralama ile göz önüne alınsın:

$V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ için

$$V_1 \leq V_2 \Leftrightarrow V_1(x, y) \leq V_2(x, y) \text{ her } (x, y) \in L^2 \tag{2.1}$$

Yukarıdaki sıralama bağıntısı ile $\mathcal{V}$ kümesinin bir kısmen sıralı küme olduğu kolayca gösterilebilir. Benzer mantıkla, L kafesi üzerindeki $a \in L$ sıfır elemanlı tüm nullnormların kümesi $\mathcal{V}(a)$ ile gösterilirse, bu takdirde $\mathcal{V}(a)$ da bir kısmen sıralı küme olur.

Önerme 2.1. $(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı kafes, $a \in L \backslash \{0,1\}$ ve V_a L üzerinde a sıfır elemanlı bir nullnorm olsun. Bu takdirde;

(i) $V_a|_{[0,a]^2}: [0,a]^2 \longrightarrow [0,a]$, $[0,a]$ üzerinde bir t-konormdur.

(ii) $V_a|_{[a,1]^2}: [a,1]^2 \longrightarrow [a,1]$, $[a,1]$ üzerinde bir t-normdur.

Önermenin ispatı nullnormun tanımından kolayca elde edilir ■

Aşağıdaki önermede, yukarıda tanımı verilen sınırlı kafesler üzerinde tanımlı nullnormların tam bir karakterizasyonu detaylı olarak verilmiştir:

Önerme 2.2. $(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı kafes, $a \in L \backslash \{0,1\}$ ve V_a L üzerinde a sıfır elemanlı bir nullnorm olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $V_a(x,y) = a$, her $(x,y) \in D_a$;

(ii) $a \leq V_a(x,y)$, her $(x,y) \in [a,1]^2 \cup [a,1] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [a,1]$;

(iii) $V_a(x,y) \leq a$, her $(x,y) \in [0,a]^2 \cup [0,a] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [0,a]$;

(iv) $V_a(x,y) \leq y$, her $(x,y) \in L \times [a,1]$;

(v) $V_a(x,y) \leq x$, her $(x,y) \in [a,1] \times L$;

(vi) $x \leq V_a(x,y)$, her $(x,y) \in [0,a] \times L$;

(vii) $y \leq V_a(x,y)$, her $(x,y) \in L \times [0,a]$;

(viii) $x \vee y \leq V_a(x,y)$, her $(x,y) \in [0,a]^2$;

(ix) $V_a(x,y) \leq x \wedge y$, her $(x,y) \in [a,1]^2$;

(x) $(x \wedge a) \vee (y \wedge a) \leq V_a(x,y)$, her $(x,y) \in [0,a] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [0,a] \cup \mathbb{I}_a \times \mathbb{I}_a$;

(xi) $V_a(x,y) \leq (x \vee a) \wedge (y \vee a)$, her $(x,y) \in [a,1] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [a,1] \cup \mathbb{I}_a \times \mathbb{I}_a$.

İspat:

(i) Her $(x,y) \in [0,a[\times]a,1]$ için $a = V_a(0,a) \leq V_a(x,y) \leq V_a(a,1) = a$ ve her $(x,y) \in]a,1] \times [0,a[$ için $a = V_a(a,0) \leq V_a(x,y) \leq V_a(1,a) = a$ olup istenen elde edilir.

(ii) Her $(x,y) \in [a,1]^2 \cup [a,1] \times \mathbb{I}_a$ için $a = V_a(a,0) \leq V_a(x,y)$ ve her $(x,y) \in \mathbb{I}_a \times [a,1]$ için $a = V_a(0,a) \leq V_a(x,y)$.

(iii) Her $(x,y) \in [0,a]^2 \cup [0,a] \times \mathbb{I}_a$ için $V_a(x,y) \leq V_a(a,1) = a$ ve her $(x, y) \in \mathbb{I}_a \times [0, a]$ için $V_a(x, y) \le V_a(1, a) = a$.

(iv) Her $(x, y) \in L \times [a, 1]$ için $V_a(x, y) \le V_a(1, y) = y$.

(v) V_a nın komütatifliği ve (iv) şıkkından elde edilir.

(vi) Her $(x, y) \in [0, a] \times L$ için $x = V_a(x, 0) \le V_a(x, y)$.

(vii) V_a nın komütatifliği ve (vi) şıkkından elde edilir.

(viii) (vi) ve (vii) şıklarından elde edilir.

(ix) (iv) ve (v) şıklarından elde edilir.

(x) Her $(x, y) \in [0, a] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [0, a] \cup \mathbb{I}_a \times \mathbb{I}_a$ için $x \wedge a, y \wedge a \in [0, a]$ olduğundan (viii) kullanılıp ardından V_a nın monotonluğu gözönüne alınırsa, $(x \wedge a) \vee (y \wedge a) \le V_a(x \wedge a, y \wedge a) \le V_a(x, y)$ elde edilir.

(xi) Her $(x, y) \in [a, 1] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [a, 1] \cup \mathbb{I}_a \times \mathbb{I}_a$ için $x \vee a, y \vee a \in [a, 1]$ olduğundan (ix) kullanılıp ardından V_a nın monotonluğu gözönüne alınırsa, $(x \vee a) \wedge (y \vee a) \ge V_a(x \vee a, y \vee a) \ge V_a(x, y)$ elde edilir ■

Önerme 2.3. $(L, \le, 0,1)$ bir sınırlı kafes, $a \in L \backslash \{0,1\}$ ve V_a L üzerinde a sıfır elemanlı bir nullnorm olsun. Eğer $x \le y$, $x \parallel a$ ve $y \parallel z$ olacak şekilde $x, y, z \in L$ öyleki $y, z \in [a, 1]$ elemanları mevcutsa bu takdirde $V_a(x, z) < z$ dir.

İspat: $x, y, z \in L$ elemanları önermenin hipotezindeki gibi seçilirse bu takdirde V_a monoton ve $z \ge a$ olduğundan

$$V_a(x, z) \le V_a(y, z) \le V_a(1, z) = z$$

elde edilir. Şimdi varsayalım ki $V_a(x, z) = z$ olsun. Bu takdirde V_a nın monotluğu ve Önerme 2.2 (ix) kullanılırsa

$$z = V_a(x, z) \le V_a(y, z) \le y \wedge z$$

elde edilir ve buradan $z \le y$ bulunur. Bu ise $y \parallel z$ olması ile çelişir. Dolayısı ile varsayımımız yanlış olup $V_a(x, z) < z$ olması gerektiği sonucu bulunur ■

2.2. Sınırlı Kafesler Üzerinde Nullnormların Bazı İnşa Yöntemleri

$(L, \le, 0,1)$ bir sınırlı kafes ve $a \in L$ keyfi bir eleman olsun. Biliniyor ki $a = 0$ için (bu durumda V bir t-norm) ve $a = 1$ için (bu durumda V bir t-konorm) $a \in L$ sıfır elemanlı bir nullnorm V her zaman mevcuttur. Akla şu soru gelir. Acaba herhangi $(L, \le, 0,1)$ sınırlı kafesi üzerinde her $a \in L \backslash \{0,1\}$ için a sıfır elemanlı bir nullnorm V her zaman mevcut mudur? Bu bölümde, $[0,a]$ üzerindeki t-konormların ve $[a,1]$ üzerindeki t-normların mevcudiyeti kullanılarak $(L,\leq,0,1)$ sınırlı kafesi üzerinde her $a\in L\backslash\{0,1\}$ için a sıfır elemanlı bir nullnorm V nin mevcudiyeti, verilecek olan inşa yöntemleriyle garanti altına alınmış olur.

Teorem 2.1. $(L,\leq,0,1)$ bir sınırlı kafes, $a\in L\backslash\{0,1\}$, $T:[a,1]^2\longrightarrow[a,1]$ bir t-norm ve $S:[0,a]^2\longrightarrow[0,a]$ bir t-konorm olsun. Bu takdirde aşağıdaki şekilde tanımlı $V_a^{(S)}$, $V_a^{(T)}:L^2\longrightarrow L$ fonksiyonları a sıfır elemanlı birer nullnormdurlar:

$$V_a^{(S)}(x,y)=\begin{cases} S(x,y) & ,(x,y)\in[0,a]^2 \\ a & ,(x,y)\in[a,1[^2\cup[a,1]\times\mathbb{I}_a\cup\mathbb{I}_a\times[a,1]\cup D_a \\ S(x\wedge a,y\wedge a) & ,(x,y)\in[0,a]\times\mathbb{I}_a\cup\mathbb{I}_a\times[0,a]\cup\mathbb{I}_a\times\mathbb{I}_a \\ x\wedge y & ,aksi\ halde \end{cases}$$

ve

$$V_a^{(T)}(x,y)=\begin{cases} T(x,y) & ,(x,y)\in[a,1]^2 \\ a & ,(x,y)\in]0,a[^2\cup[0,a]\times\mathbb{I}_a\cup\mathbb{I}_a\times[0,a]\cup D_a \\ T(x\vee a,y\vee a) & ,(x,y)\in[a,1]\times\mathbb{I}_a\cup\mathbb{I}_a\times[a,1]\cup\mathbb{I}_a\times\mathbb{I}_a \\ x\vee y & ,aksi\ halde \end{cases}$$

İspat: Her $x\in[0,a]$ için $V_a^{(S)}(x,0)=S(x,0)=x$ ve her $t\in[a,1]$ için $V_a^{(S)}(t,1)=t\wedge 1=t$ elde edilir. Böylece V4 şartı sağlanır. V1 komütatiflik açıktır. Şimdi V2 birleşme şartının sağlandığını gösterelim. Bunun için $x,y,z\in L$ olsun. İspat, x,y,z elemanlarının a elemanıyla ilişkilerinin tüm olası durumları göz önüne alınarak bölümler halinde yapılmıştır.

1. $x\leq a$

1.1. $y\leq a$

1.1.1. $z\leq a$

$$V_a^{(S)}(x,V_a^{(S)}(y,z))=S(x,S(y,z))=S(S(x,y),z)=V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z)$$

1.1.2. $z>a$

$$V_a^{(S)}(x,V_a^{(S)}(y,z))=V_a^{(S)}(x,a)=a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z)=V_a^{(S)}(S(x,y),z)=a$$

1.1.3. $z\parallel a$

$$V_a^{(S)}(x,V_a^{(S)}(y,z))=V_a^{(S)}(x,S(y\wedge a,z\wedge a))=S(x,S(y,z\wedge a))$$

$$=S(S(x,y),z\wedge a)$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(S(x,y),z) = S(S(x,y) \wedge a, z \wedge a) = S(S(x,y), z \wedge a)$$

1.2. $y > a$

1.2.1. $z \leq a$

$$V_a^{(S)}(x, V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,a) = S(x,a) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(a,z) = S(a,z) = a$$

1.2.2. $z > a$

$$V_a^{(S)}(x, V_a^{(S)}(y,z)) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(a,z) = a$$

1.2.3. $z \parallel a$

$$V_a^{(S)}(x, V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,a) = S(x,a) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(a,z) = a$$

1.3. $y \parallel a$

1.3.1. $z \leq a$

$$V_a^{(S)}(x, V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x, S(y \wedge a, z \wedge a)) = S(x, S(y \wedge a, z))$$
$$= S(S(x, y \wedge a), z)$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(S(x \wedge a, y \wedge a), z) = S(S(x, y \wedge a), z)$$

1.3.2. $z > a$

$$V_a^{(S)}(x, V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,a) = S(x,a) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(S(x \wedge a, y \wedge a), z) = a$$

1.3.3. $z \parallel a$

$$V_a^{(S)}(x, V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x, S(y \wedge a, z \wedge a)) = S(x, S(y \wedge a, z \wedge a))$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(S(x \wedge a, y \wedge a), z) = S(S(x, y \wedge a) \wedge a, z \wedge a)$$
$$= S(x, S(y \wedge a, z \wedge a))$$

2. $x > a$

2.1. $y \leq a$

2.1.1. $z \leq a$

$$V_a^{(S)}(x, V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x, S(y,z)) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(a,z) = S(a,z) = a$$

2.1.2. $z > a$

$$V_a^{(S)}(x,V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,a) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(a,z) = a$$

2.1.3. $z \parallel a$

$$V_a^{(S)}(x,V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,S(y \wedge a,z \wedge a)) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(a,z) = a$$

2.2. $y > a$

2.2.1. $z \leq a$

$$V_a^{(S)}(x,V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,a) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = a$$

2.2.2. $z > a$

$$V_a^{(S)}(x,V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z)$$

2.2.3. $z \parallel a$

$$V_a^{(S)}(x,V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,a) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = a$$

2.3. $y \parallel a$

2.3.1. $z \leq a$

$$V_a^{(S)}(x,V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,S(y \wedge a,z \wedge a)) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(a,z) = S(a,z) = a$$

2.3.2. $z > a$

$$V_a^{(S)}(x,V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,a) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(a,z) = a$$

2.3.3. $z \parallel a$

$$V_a^{(S)}(x,V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,S(y \wedge a,z \wedge a)) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(a,z) = a$$

3. $x \parallel a$

3.1. $y \leq a$

3.1.1. $z \leq a$

$$V_a^{(S)}(x,V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,S(y,z)) = S(x \wedge a,S(y,z) \wedge a) = S(x \wedge a,S(y,z))$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(S(x \wedge a,y \wedge a),z) = S(S(x \wedge a,y),z)$$

$$= S(x \wedge a,S(y,z))$$

3.1.2. $z > a$

$$V_a^{(S)}(x, V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,a) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(S(x \wedge a, y \wedge a), z) = a$$

3.1.3. $z \parallel a$

$$V_a^{(S)}(x, V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x, S(y \wedge a, z \wedge a)) = S(x \wedge a, S(y, z \wedge a) \wedge a)$$
$$= S(x \wedge a, S(y, z \wedge a))$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(S(x \wedge a, y \wedge a), z) = S(S(x \wedge a, y) \wedge a, z \wedge a)$$
$$= S(x \wedge a, S(y, z \wedge a))$$

3.2. $y > a$

3.2.1. $z \leq a$

$$V_a^{(S)}(x, V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,a) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(a,z) = S(a,z) = a$$

3.2.2. $z > a$

$$V_a^{(S)}(x, V_a^{(S)}(y,z)) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(a,z) = a$$

3.2.3. $z \parallel a$

$$V_a^{(S)}(x, V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,a) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(a,z) = a$$

3.3. $y \parallel a$

3.3.1. $z \leq a$

$$V_a^{(S)}(x, V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x, S(y \wedge a, z \wedge a)) = S(x \wedge a, S(y \wedge a, z) \wedge a)$$
$$= S(x \wedge a, S(y \wedge a, z))$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(S(x \wedge a, y \wedge a), z) = S(S(x \wedge a, y \wedge a), z)$$
$$= S(x \wedge a, S(y \wedge a, z))$$

3.3.2. $z > a$

$$V_a^{(S)}(x, V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,a) = a$$

$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(S(x \wedge a, y \wedge a), z) = a$$

3.3.3. $z \parallel a$

$$V_a^{(S)}(x,V_a^{(S)}(y,z)) = V_a^{(S)}(x,S(y\wedge a,z\wedge a)) = S(x\wedge a,S(y\wedge a,z\wedge a)\wedge a)$$
$$= S(x\wedge a,S(y\wedge a,z\wedge a))$$
$$V_a^{(S)}(V_a^{(S)}(x,y),z) = V_a^{(S)}(S(x\wedge a,y\wedge a),z) = S(S(x\wedge a,y\wedge a)\wedge a,z\wedge a)$$
$$= S(x\wedge a,S(y\wedge a,z\wedge a))$$

Böylece $V_a^{(S)}$ birleşme özelliğini sağlar. Şimdi V3 monotonluk özelliğinin sağlandığını gösterelim. Bunun için $x,y,z\in L$ keyfi alınsın. Yine ispat, x,y,z elemanlarının a elemanıyla ilişkilerinin tüm olası durumları göz önüne alınarak bölümler halinde yapılmıştır.

1. $x\leq a$

1.1. $y\leq z\leq a$

$V_a^{(S)}(x,y) = S(x,y)\leq S(x,z) = V_a^{(S)}(x,z)$

1.2. $y\leq a<z$

$V_a^{(S)}(x,y) = S(x,y)\leq a = V_a^{(S)}(x,z)$

1.3. $a<y\leq z$

$V_a^{(S)}(x,y) = a = V_a^{(S)}(x,z)$

1.4. $z>a, y\parallel a$

$V_a^{(S)}(x,y) = S(x\wedge a,y\wedge a)\leq a = V_a^{(S)}(x,z)$

1.5. $y\leq a, z\parallel a$

$V_a^{(S)}(x,y) = S(x,y)\leq S(x,z\wedge a) = S(x\wedge a,z\wedge a) = V_a^{(S)}(x,z)$

1.6. $z\parallel a,\ y\parallel a$

$V_a^{(S)}(x,y) = S(x\wedge a,y\wedge a)\leq S(x\wedge a,z\wedge a) = V_a^{(S)}(x,z)$

2. $x>a$

2.1. $y\leq z\leq a$

$V_a^{(S)}(x,y) = a = V_a^{(S)}(x,z)$

2.2. $y\leq a<z$

$V_a^{(S)}(x,y) = a\leq V_a^{(S)}(x,z)$

2.3. $a<y\leq z$

$V_a^{(S)}(x,y)\leq V_a^{(S)}(x,z)$

2.4. $z>a, y\parallel a$

$V_a^{(S)}(x,y) = a\leq V_a^{(S)}(x,z)$

2.5. $y \leq a, z \parallel a$

$V_a^{(S)}(x,y) = a = V_a^{(S)}(x,z)$

2.6. $z \parallel a, y \parallel a$

$V_a^{(S)}(x,y) = a = V_a^{(S)}(x,z)$

3. $x \parallel a$

3.1. $y \leq z \leq a$

$V_a^{(S)}(x,y) = S(x \wedge a, y \wedge a) \leq S(x \wedge a, z \wedge a) = V_a^{(S)}(x,z)$

3.2. $y \leq a < z$

$V_a^{(S)}(x,y) = S(x \wedge a, y \wedge a) \leq a = V_a^{(S)}(x,z)$

3.3. $a < y \leq z$

$V_a^{(S)}(x,y) = a = V_a^{(S)}(x,z)$

3.4. $z > a, y \parallel a$

$V_a^{(S)}(x,y) = S(x \wedge a, y \wedge a) \leq a = V_a^{(S)}(x,z)$

3.5. $y \leq a, z \parallel a$

$V_a^{(S)}(x,y) = S(x \wedge a, y \wedge a) \leq S(x \wedge a, z \wedge a) = V_a^{(S)}(x,z)$

3.6. $z \parallel a, y \parallel a$

$V_a^{(S)}(x,y) = S(x \wedge a, y \wedge a) \leq S(x \wedge a, z \wedge a) = V_a^{(S)}(x,z)$

Böylece $V_a^{(S)}$ nin bir nullnorm olduğu gösterilmiş olur. $V_a^{(T)}$ nin nullnorm olduğu tamamen benzer şekilde elde edilir■

Sonuç 2.1. $(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı kafes ve $a \in L \backslash \{0,1\}$ olsun. Eğer önceki teoremde $[0,a]$ üzerinde $S = S_\vee$ ve $[a,1]$ üzerinde $T = T_\wedge$ alınırsa bu takdirde aşağıdaki nullnormlar sırasıyla L üzerinde a sıfır elemanlı en küçük ve en büyük nullnormlar olurlar:

$$V_a^{(\vee)}(x,y) = \begin{cases} x \vee y & , (x,y) \in [0,a]^2 \\ a & , (x,y) \in [a,1[^2 \cup [a,1] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [a,1] \cup D_a \\ (x \wedge a) \vee (y \wedge a) & , (x,y) \in [0,a] \times \mathbb{I}_a \cup \mathbb{I}_a \times [0,a] \cup \mathbb{I}_a \times \mathbb{I}_a \\ x \wedge y & , aksi\ halde \end{cases}$$

ve

$$V_a^{(\wedge)}(x,y)=\begin{cases} x\wedge y & ,(x,y)\in[a,1]^2 \\ a & ,(x,y)\in[0,a[^2\cup[0,a]\times\mathbb{I}_a\cup\mathbb{I}_a\times[0,a]\cup D_a \\ (x\vee a)\wedge(y\vee a) & ,(x,y)\in[a,1]\times\mathbb{I}_a\cup\mathbb{I}_a\times[a,1]\cup\mathbb{I}_a\times\mathbb{I}_a \\ x\vee y & ,aksi\ halde \end{cases}$$

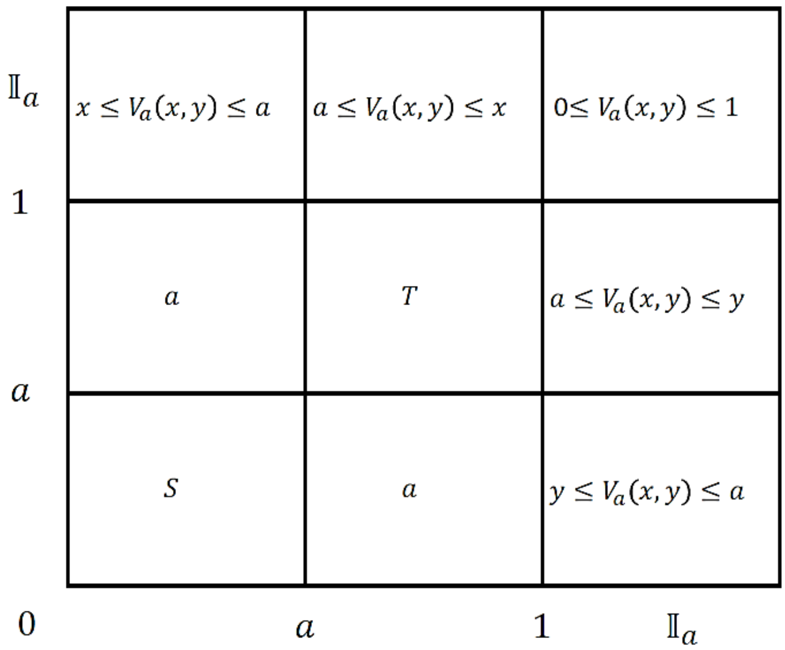
İspat: Gösterilmesi gereken $V_a^{(\vee)}$ un, $\mathcal{V}(a)$ nın en küçük elemanı olduğudur. Yani keyfi $V_a\in\mathcal{V}(a)$ nullnormu alındığında, tüm $(x,y)\in L^2$ elemanları için $V_a^{(\vee)}(x,y)\leq V_a(x,y)$ eşitsizliğinin sağlandığıdır. Şimdi keyfi $(x,y)\in L^2$ için:

- Eğer $(x,y)\in[0,a]^2$ ise Önerme 2.1 in kullanılırsa $V_a|_{[0,a]^2}:[0,a]^2\longrightarrow[0,a]$ bir t-konorm olur. $[0,a]$ üzerinde $V_a^{(\vee)}(x,y)=x\vee y=S_\vee(x,y)$ ve $S_\vee(x,y)=x\vee y$ en küçük t-konorm olduğundan $V_a^{(\vee)}(x,y)\leq V_a(x,y)$ eşitsizliğini elde edilir.
- Eğer $(x,y)\in[a,1[^2\cup[a,1]\times\mathbb{I}_a\cup\mathbb{I}_a\times[a,1]\cup D_a$ ise Önerme 2.2 (i) ve (ii) şıkları ile $V_a^{(\vee)}(x,y)=a\leq V_a(x,y)$ olduğu görülür.
- Eğer $(x,y)\in[0,a]\times\mathbb{I}_a\cup\mathbb{I}_a\times[0,a]\cup\mathbb{I}_a\times\mathbb{I}_a$ ise Önerme 2.2 (x) şıkkından dolayı $V_a^{(\vee)}(x,y)=(x\wedge a)\vee(y\wedge a)\leq V_a(x,y)$ bulunur.
- Eğer $y=1$ ve $x\in[a,1]$ ise $V_a^{(\vee)}(x,y)=x\wedge 1=x=V_a(x,1)=V_a(x,y)$.
- Eğer $x=1$ ve $y\in[a,1]$ ise $V_a^{(\vee)}(x,y)=1\wedge y=y=V_a(1,y)=V_a(x,y)$.

Tüm durumlarda $V_a^{(\vee)}\leq V_a$ elde edilir. Böylece $V_a^{(\vee)}$, $\mathcal{V}(a)$ kümesinin en küçük elemanı olarak bulunur. Benzer şekilde $V_a^{(\wedge)}$ nın, $\mathcal{V}(a)$ kümesinin en büyük elemanı olduğu gösterilebilir ■

Sonuç 2.2. $\mathcal{V}(a)$ bir sınırlı kısmen sıralı kümedir.

Yukarıdaki önermeler ve sonuçlar göz önüne alındığında $(L,\leq,0,1)$ sınırlı kafesi üzerindeki $a\in L\backslash\{0,1\}$ sıfır elemanlı nullnormların yapısı aşağıda Şekil 2.1 de verildiği gibidir:



Şekil 2.1: Nullnormların Yapısı

Burada $V_a: L^2 \longrightarrow L$, $a \in L\backslash\{0,1\}$ sıfır elemanlı herhangi bir nullnorm, $S = V_a|_{[0,a]^2}$ ve $T = V_a|_{[a,1]^2}$.

Önerme 2.4. $(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı kafes, $a \in L\backslash\{0,1\}$, $T: [a,1]^2 \longrightarrow [a,1]$ bir t-norm ve $S: [0,a]^2 \longrightarrow [0,a]$ bir t-konorm olsun. Bu takdirde aşağıdaki şekilde tanımlı $V_a^{(T,S)}: L^2 \longrightarrow L$ fonksiyonu a sıfır elemanlı bir nullnormdur:

$$V_a^{(T,S)}(x,y) = \begin{cases} S(x,y) & , (x,y) \in [0,a]^2 \\ T(x,y) & , (x,y) \in [a,1]^2 \\ a & , aksi\ halde \end{cases}$$

İspat: Her $x \in [0,a]$ için $V_a^{(T,S)}(x,0) = S(x,0) = x$ ve her $t \in [a,1]$ için $V_a^{(T,S)}(t,1) = T(t,1) = t$ dir. Böylece V4 şartı sağlanmış olur.

V1 komütatiflik açıktır. Şimdi V2 birleşme şartının sağlandığını gösterelim. Bunun için $x, y, z \in L$ olsun. İspat, x, y, z elemanlarının a elemanıyla ilişkilerinin tüm olası durumları göz önüne alınarak bölümler halinde yapılmıştır.

1. $x \leq a$

1.1. $y \leq a$

1.1.1. $z \leq a$

$$V_a^{(T,S)}(x, V_a^{(T,S)}(y,z)) = S(x, S(y,z)) = S(S(x,y),z) = V_a^{(T,S)}(V_a^{(T,S)}(x,y),z)$$

1.1.2. $z > a$

$$V_a^{(T,S)}(x, V_a^{(T,S)}(y,z)) = V_a^{(T,S)}(x,a) = S(x,a) = a$$

$$V_a^{(T,S)}(V_a^{(T,S)}(x,y),z) = V_a^{(T,S)}(S(x,y),z) = a$$

1.1.3. $z \parallel a$

$$V_a^{(T,S)}(x, V_a^{(T,S)}(y,z)) = V_a^{(T,S)}(x,a) = S(x,a) = a$$

$$V_a^{(T,S)}(V_a^{(T,S)}(x,y),z) = a$$

1.2. $y > a$

1.2.1. $z \leq a$

$$V_a^{(T,S)}(x, V_a^{(T,S)}(y,z)) = V_a^{(T,S)}(x,a) = S(x,a) = a$$

$$V_a^{(T,S)}(V_a^{(T,S)}(x,y),z) = V_a^{(T,S)}(a,z) = S(a,z) = a$$

1.2.2. $z > a$

$$V_a^{(T,S)}(x, V_a^{(T,S)}(y,z)) = V_a^{(T,S)}(x,T(y,z)) = a$$

$$V_a^{(T,S)}(V_a^{(T,S)}(x,y),z) = V_a^{(T,S)}(a,z) = T(a,z) = a$$

1.2.3. $z \parallel a$

$$V_a^{(T,S)}(x, V_a^{(T,S)}(y,z)) = V_a^{(T,S)}(x,a) = S(x,a) = a$$

$$V_a^{(T,S)}(V_a^{(T,S)}(x,y),z) = a$$

1.3. $y \parallel a$

$$V_a^{(T,S)}(x, V_a^{(T,S)}(y,z)) = V_a^{(T,S)}(x,a) = a$$

$$V_a^{(T,S)}(V_a^{(T,S)}(x,y),z) = V_a^{(T,S)}(a,z) = a$$

2. $x > a$

2.1. $y \leq a$

2.1.1. $z \leq a$

$$V_a^{(T,S)}(x, V_a^{(T,S)}(y,z)) = V_a^{(T,S)}(x,S(y,z)) = a$$

$$V_a^{(T,S)}(V_a^{(T,S)}(x,y),z) = V_a^{(T,S)}(a,z) = a$$

2.1.2. $z > a$

$$V_a^{(T,S)}(x, V_a^{(T,S)}(y,z)) = V_a^{(T,S)}(x,a) = a$$

$$V_a^{(T,S)}(V_a^{(T,S)}(x,y),z) = V_a^{(T,S)}(a,z) = a$$

2.1.3. $z \parallel a$

$$V_a^{(T,S)}(x, V_a^{(T,S)}(y,z)) = V_a^{(T,S)}(x,a) = a$$

$$V_a^{(T,S)}(V_a^{(T,S)}(x,y),z) = a$$

2.2. $y > a$

2.2.1. $z \leq a$

$$V_a^{(T,S)}(x, V_a^{(T,S)}(y,z)) = V_a^{(T,S)}(x,a) = a$$

$$V_a^{(T,S)}(V_a^{(T,S)}(x,y),z) = V_a^{(T,S)}(T(x,y),z) = a$$

2.2.2. $z > a$

$$V_a^{(T,S)}(x, V_a^{(T,S)}(y,z)) = T(x, T(y,z)) = T(T(x,y),z) = V_a^{(T,S)}(V_a^{(T,S)}(x,y),z)$$

2.2.3. $z \parallel a$

$$V_a^{(T,S)}(x, V_a^{(T,S)}(y,z)) = V_a^{(T,S)}(x,a) = a$$

$$V_a^{(T,S)}(V_a^{(T,S)}(x,y),z) = a$$

2.3. $y \parallel a$

$$V_a^{(T,S)}(x, V_a^{(T,S)}(y,z)) = V_a^{(T,S)}(x,a) = a$$

$$V_a^{(T,S)}(V_a^{(T,S)}(x,y),z) = V_a^{(T,S)}(a,z) = a$$

3. $x \parallel a$

$$V_a^{(T,S)}(x, V_a^{(T,S)}(y,z)) = a$$

$$V_a^{(T,S)}(V_a^{(T,S)}(x,y),z) = V_a^{(T,S)}(a,z) = a$$

Böylece $V_a^{(T,S)}$ birleşme özelliğini sağlar. Şimdi V3 monotonluk özelliğinin sağlandığını gösterelim. Bunun için $x, y, z \in L$ keyfi alınsın. Yine ispat, x, y, z elemanlarının a elemanıyla ilişkilerinin tüm olası durumları göz önüne alınarak bölümler halinde yapılmıştır.

1. $x \leq a$

1.1. $y \leq z \leq a$

$$V_a^{(T,S)}(x,y) = S(x,y) \leq S(x,z) = V_a^{(T,S)}(x,z)$$

1.2. $y \leq a < z$

$$V_a^{(T,S)}(x,y) = S(x,y) \leq a = V_a^{(T,S)}(x,z)$$

1.3. $a < y \leq z$

$$V_a^{(T,S)}(x,y) = a = V_a^{(T,S)}(x,z)$$

1.4. $z > a, y \parallel a$

$$V_a^{(T,S)}(x,y) = a = V_a^{(T,S)}(x,z)$$

1.5. $y \leq a, z \parallel a$

$V_a^{(T,S)}(x,y) = S(x,y) \leq a = V_a^{(T,S)}(x,z)$

1.6. $z \parallel a, y \parallel a$

$V_a^{(T,S)}(x,y) = a = V_a^{(T,S)}(x,z)$

2. $x > a$

2.1. $y \leq z \leq a$

$V_a^{(T,S)}(x,y) = a = V_a^{(T,S)}(x,z)$

2.2. $y \leq a < z$

$V_a^{(T,S)}(x,y) = a \leq T(x,z) = V_a^{(T,S)}(x,z)$

2.3. $a < y \leq z$

$V_a^{(T,S)}(x,y) = T(x,y) \leq T(x,z) = V_a^{(T,S)}(x,z)$

2.4. $z > a, y \parallel a$

$V_a^{(T,S)}(x,y) = a \leq T(x,z) = V_a^{(T,S)}(x,z)$

2.5. $y \leq a, z \parallel a$

$V_a^{(T,S)}(x,y) = a = V_a^{(T,S)}(x,z)$

2.6. $z \parallel a, y \parallel a$

$V_a^{(T,S)}(x,y) = a = V_a^{(T,S)}(x,z)$

3. $x \parallel a$

$V_a^{(T,S)}(x,y) = a = V_a^{(T,S)}(x,z)$

Böylece $V_a^{(T,S)}$ nin bir nullnorm olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç 2.3. $(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı kafes ve $a \in L \backslash \{0,1\}$ olsun. Eğer önceki önermede $[0, a]$ üzerinde $S = S_W$ alınırsa V_a^T ve $[a, 1]$ üzerinde $T = T_W$ alınırsa V_a^S nullnormları elde edilir. $V_a^T, V_a^S: L^2 \longrightarrow L$ fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$V_a^T(x,y) = \begin{cases} T(x,y) & , (x,y) \in [a,1]^2 \\ y & , x = 0 \; ve \; y \leq a \\ x & , y = 0 \; ve \; x \leq a \\ a & , aksi \; halde \end{cases}$$

ve

$$V_a^S(x,y) = \begin{cases} S(x,y) & ,(x,y) \in [0,a]^2 \\ y & ,x = 1 \; ve \; y \geq a \\ x & ,y = 1 \; ve \; x \geq a \\ a & ,aksi \; halde \end{cases}$$

Şimdiye kadar verilen $V_a^{(T)}$, $V_a^{(S)}$, $V_a^{(\vee)}$, $V_a^{(\wedge)}$, $V_a^{(T,S)}$, V_a^T ve V_a^S nullnormları göz önüne alındığında bunlar arasındaki sıralama aşağıdaki şekilde elde edilir:

Sonuç 2.4. $(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı kafes ve $a \in L \setminus \{0,1\}$ olsun. Bu takdirde herbir $T: [a,1]^2 \longrightarrow [a,1]$ t-normu ve $S: [0,a]^2 \longrightarrow [0,a]$ bir t-konormu için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$V_a^{(\vee)} \leq V_a^{(S)} \leq V_a^S \leq V_a^{(T,S)} \leq V_a^T \leq V_a^{(T)} \leq V_a^{(\wedge)}$

2.3. Nullnormlar ve a-medyan İlişkisi

Tanım 2.2. $(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı kafes, $a \in L \setminus \{0,1\}$ ve $V_a: L^2 \longrightarrow L$ a sıfır elemanlı bir nullnorm olsun.

$x \in L$ elemanına V_a nullnormunun bir idempotent elemanı denir $:\Leftrightarrow V_a(x,x) = x$.

V_a nullnormuna idempotent nullnorm denir $:\Leftrightarrow$ L nin tüm elemanları idempotenttir.

$[0,1]$ birim reel aralık üzerinde herhangi bir $a \in]0,1[$ elemanı için tek idempotent nullnorm Örnek 1.16 da verilen Med_a (a-medyan) nullnormudur ([6]).

$$Med_a(x,y) = Med(x,y,a) = (x \wedge y) \vee (x \wedge a) \vee (y \wedge a) \quad (disjanktif form)$$

veya denk olarak

$$Med_a(x,y) = Med(x,y,a) = (x \vee y) \wedge (x \vee a) \wedge (y \vee a) \quad (konjanktif\ form).$$

Önerme 1.8 den biliniyor ki $[0,1]$ birim reel aralığı üzerindeki herhangi bir nullnorm V_a, $V_a(x,y) = Med(T(x,y), S(x,y), a)$ formunda yazılabiliyor. Burada T $[0,1]$ üzerinde bir t-norm, S $[0,1]$ üzerinde bir t-konorm ve $a \in]0,1[$ sıfır elemandır. Bu gerçekten esinlenilerek bir sınırlı L kafesi üzerinde iki tip medyan (disjanktif form ve konjanktif form) dolayısı ile iki tip a-medyan aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$Med_a, Med^a: L^2 \longrightarrow L$

$Med_a(T(x,y), S(x,y)) = [T(x,y) \wedge S(x,y)] \vee [S(x,y) \wedge a] \vee [T(x,y) \wedge a]$

$Med^a(T(x,y), S(x,y)) = [T(x,y) \vee S(x,y)] \wedge [S(x,y) \vee a] \wedge [T(x,y) \vee a]$.

Önerme 2.5. $(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı kafes $a \in L\backslash\{0,1\}$, $T: L^2 \longrightarrow L$ bir t-norm ve $S: L^2 \longrightarrow L$ bir t-konorm olsun. $V_* = Med_a(T,S)$ ve $V^* = Med^a(T,S)$ fonksiyonları tanımlansın. Bunlar:

$V_*(x,y) = Med_a(T(x,y), S(x,y)) = [T(x,y) \wedge S(x,y)] \vee [S(x,y) \wedge a] \vee [T(x,y) \wedge a]$

ve

$V^*(x,y) = Med^a(T(x,y), S(x,y)) = [T(x,y) \vee S(x,y)] \wedge [S(x,y) \vee a] \wedge [T(x,y) \vee a]$

Böylece $V_*(x,y) = T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a)$ ve $V^*(x,y) = S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a)$ olur. Bu takdirde aşağıdakiler elde edilir:

(i) $x \geq a$ ve $y \leq a$ ise bu takdirde,
$V_*(x,y) = T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) = a$
$V^*(x,y) = S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a) = a$

(ii) $x \parallel a$ ve $y \leq a$ ise bu takdirde,
$V_*(x,y) = T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) = S(x,y) \wedge a$
$V^*(x,y) = S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a) = S(x,y) \wedge a$

(iii) $x \leq a$ ve $y \leq a$ ise bu takdirde,
$V_*(x,y) = T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) = S(x,y) \wedge a$
$V^*(x,y) = S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a) = S(x,y) \wedge a$

(iv) $x \geq a$ ve $y \geq a$ ise bu takdirde,
$V_*(x,y) = T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) = T(x,y) \vee a$
$V^*(x,y) = S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a) = T(x,y) \vee a$

(v) $x \leq a$ ve $y \geq a$ ise bu takdirde,
$V_*(x,y) = T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) = a$
$V^*(x,y) = S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a) = a$

(vi) $x \parallel a$ ve $y \parallel a$ ise bu takdirde,
$V_*(x,y) = T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a)$

$V^*(x,y) = S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a)$

(vii) $x \parallel a$ ve $y \geq a$ ise bu takdirde,

$V_*(x,y) = T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) = T(x,y) \vee a$

$V^*(x,y) = S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a) = T(x,y) \vee a$

Önermenin ispatı t-norm ve t-konormun tanımından kolayca elde edilir ■

Önerme 2.6. $(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı kafes $a \in L \setminus \{0,1\}$, $T: L^2 \longrightarrow L$ bir t-norm ve $S: L^2 \longrightarrow L$ bir t-konorm olsun. $V_* = Med_a(T,S)$ ve $V^* = Med^a(T,S)$ fonksiyonları göz önüne alınsın. Bu takdirde:

(i) $V_* \leq V^*$;

(ii) Eğer L dağılmalı ise $V_* = V^*$.

İspat: $(x,y) \in L^2$ keyfi olsun.

(i) $T(x,y) \leq S(x,y)$ ve $S(x,y) \wedge a \leq S(x,y)$ olduğundan

$T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) \leq S(x,y)$ elde edilir.

Ayrıca $T(x,y) \leq T(x,y) \vee a$ ve $S(x,y) \wedge a \leq a \leq T(x,y) \vee a$ olduğundan

$T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) \leq T(x,y) \vee a$ bulunur.

Böylece $T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) \leq S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a)$ olup $V_* \leq V^*$ dır.

(ii) $V_*(x,y) = T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a)$

$= (T(x,y) \vee S(x,y)) \wedge (T(x,y) \vee a)$ L nin dağılmalılığından

$= S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a) = V^*(x,y)$ ■

Yukarıdaki önermede eğer L dağılmalı ise $V_* = V^*$ olduğu gösterildi. Sıradaki örnekte, eğer L dağılmalı değil ise V_* ve V^* ın çakışmayabileceği gösterilecektir.

Örnek 2.1. Şekil 1.1 de verilen N_5 kafesi göz önüne alınsın. 1. bölümden bilindiği üzere N_5 dağılmalı değildir. $T = T_\wedge$ ve $S = S_\vee$ alınırsa bu takdirde

$V_*(x,y) = (x \wedge y) \vee ((x \vee y) \wedge a)$

$V^*(x,y) = (x \vee y) \wedge ((x \wedge y) \vee a)$

olarak bulunur. Aşağıdaki sonuçları kıyaslayalım:

$V_*(b,c) = (b \wedge c) \vee ((b \vee c) \wedge a) = b$

$V^*(b,c) = (b \vee c) \wedge ((b \wedge c) \vee a) = c$

Sonuç olarak $V_* < V^*$ olduğu elde edilir. Böylece V_* ve V^* foksiyonlarının dağılmalı olmayan bir kafeste çakışmayabileceği gösterilmiş olur.

Ek olarak, kolayca gösterilebilir ki V_* ve V^* N_5 üzerinde birleşmelidirler ve sonuç olarak her ikisi de birer nullnormdur. Ayrıca idempotent olduklarını da not edelim ■

Sıradaki örnekte V_* ve V^* fonksiyonlarının birleşme özelliğini sağlamayabileceği, dolayısı ile birer nullnorm olmayabileceği gösterilecektir.

Örnek 2.2. $L = M_5$ (Şekil 1.1), $T = T_\wedge$ ve $S = S_\vee$ olarak alınsın. Böylece V_* ve V^* fonksiyonları bir önceki örnekteki gibi elde edilir. $b, c, 1 \in M_5$ elemanları için aşağıdaki sonuçlar incelenirse, bu takdirde

$V_*(V_*(b,c),1) = V_*(a,1) = a$

$V_*(b, V_*(c,1)) = V_*(b,1) = 1$

ve

$V^*(V^*(b,c),1) = V^*(a,1) = a$

$V^*(b, V^*(c,1)) = V^*(b,1) = 1$

olduğundan V_* ve V^* fonksiyonları M_5 kafesi üzerinde birleşme özelliğini sağlamazlar ve böylece birer nullnorm değildirler. M_5 kafesinin dağılmalı olmadığı unutulmamalıdır.

Önceki iki örnekle çok önemli sonuçlar ortaya konmuştur. Birincisi, L dağılmalı olmadığında V_* ve V^* fonksiyonları, kafese bağlı olarak, nullnorm olabilirler veya olmayabilirler. İkincisi ise, bir sınırlı kafes üzerinde iki tane idempotent nullnorm ortaya konmuştur. Bu durum, [0,1] birim reel aralığı üzerindeki nullnormlarla keyfi sınırlı kafesler üzerindeki nullnormlar arasındaki en önemli farklardan birisidir (hatırlanacağı üzere [0,1] birim reel aralık üzerinde tek bir tane idempotent nullnorm vardır).

Aşağıdaki teorem V_* ve V^* fonksiyonlarının hangi koşullar altında nullnorm olduklarını ortaya koyar.

Teorem 2.2. $(L, \leq, 0, 1)$ bir sınırlı dağılmalı kafes, $a \in L \setminus \{0,1\}$, $T: L^2 \longrightarrow L$ bir $\vee$-dağılmalı t-norm ve $S: L^2 \longrightarrow L$ $\wedge$- dağılmalı bir t-konorm olsun.

Bu takdirde $V_* = Med_a(T,S)$ (ve böylece $V^* = Med^a(T,S)$) fonksiyonu a sıfır elemanlı bir nullnormdur.

İspat: V1 komütatiflik açıktır. V3 monotonluk ve a nın sıfır eleman oluşu Önerme 2.5 ten elde edilir. Dolayısı ile birleşme özelliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. Bunun için $x, y, z \in L$ keyfi alınsın. İspat, x, y, z elemanlarının a elemanıyla ilişkilerinin tüm olası durumları göz önüne alınarak bölümler halinde yapılmıştır.

1. Kabul edelim ki $x \parallel a$, $y \parallel a$ ve $z \parallel a$ olsun.

Bu durumda Önerme 2.5 (vi) den

$V_*(x, V_*(y,z)) = V_*(x, T(y,z) \vee (S(y,z) \wedge a))$.

1.1. $T(y,z) \vee (S(y,z) \wedge a) \parallel a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(x, V_*(y,z)) = V_*(x, T(y,z) \vee (S(y,z) \wedge a))$

$= [T(x, T(y,z) \vee (S(y,z) \wedge a)] \vee [S(x, T(y,z) \vee (S(y,z) \wedge a)) \wedge a]$, Önerme 2.5 (vi) den

$= T(x, T(y,z)) \vee T(x, S(y,z) \wedge a) \vee [S(x, S(y,z) \wedge (T(y,z) \vee a)) \wedge a]$, L nin dağılmalılığı ve T nin $\vee$-dağılmalılığından

$= T(x, T(y,z)) \vee T(x, S(y,z) \wedge a) \vee [S(x, S(y,z)) \wedge S(x, T(y,z) \vee a) \wedge a]$, S nin $\wedge$- dağılmalılığından

$= T(x, T(y,z)) \vee T(x, S(y,z) \wedge a) \vee [S(x, S(y,z)) \wedge a]$, $S(x, T(y,z) \vee a) \geq S(x,a) \geq a$ eşitsizliğinden

$= [T(x, T(y,z)) \vee T(x, S(y,z) \wedge a) \vee S(x, S(y,z))] \wedge [T(x, T(y,z)) \vee T(x, S(y,z) \wedge a) \vee a]$, L nin dağılmalılığından

$= S(x, S(y,z)) \wedge [T(x, T(y,z) \vee a]$, $T(x, S(y,z) \wedge a) \leq T(x,a) \leq a$ eşitsizliğinden

1.1.1. $T(x,y) \vee (S(y,z) \wedge a) \parallel a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(V_*(x,y), z) = V_*(T(x,y) \vee (S(y,z) \wedge a), z)$

$= T(T(x,y) \vee (S(y,z) \wedge a), z) \vee [S(T(x,y) \vee (S(y,z) \wedge a), z) \wedge a]$, Önerme 2.5 (vi) den

$= T(T(x,y), z) \vee T(S(x,y) \wedge a, z) \vee [S(S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a), z) \wedge a]$, L nin dağılmalılığı ve T nin $\vee$-dağılmalılığından

$= T(T(x,y), z) \vee T(S(x,y) \wedge a, z) \vee [S(S(x,y), z) \wedge S(T(x,y) \vee a, z) \wedge a]$, S nin $\wedge$- dağılmalılığından

$= T(T(x,y), z) \vee T(S(x,y) \wedge a, z) \vee [S(S(x,y), z) \wedge a]$, $S(T(x,y) \vee a, z) \geq S(a,z) \geq a$ eşitsizliğinden

$= [T(T(x,y), z) \vee T(S(x,y) \wedge a, z) \vee S(S(x,y), z)] \wedge [T(T(x,y), z) \vee T(S(x,y) \wedge a, z) \vee a]$, L nin dağılmalılığından

$= S(S(x,y), z) \wedge [T(T(x,y), z) \vee a]$, $T(S(x,y) \wedge a, z) \leq T(a,z) \leq a$ eşitsizliğinden

Bu durumda $V_*(x, V_*(y,z)) = V_*(V_*(x,y), z)$ olduğu elde edilir.

1.1.2. $T(x,y) \vee (S(y,z) \wedge a) \leq a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(V_*(x,y),z) = V_*(T(x,y) \vee (S(y,z) \wedge a),z)$

$= S(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a),z) \wedge a$, Önerme 2.5 (ii) den

$= S(S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a),z) \wedge a$, L nin dağılmalılığından

$= S(S(x,y),z) \wedge S(T(x,y) \vee a,z) \wedge a$, S nin $\wedge$- dağılmalılığından

$= S(S(x,y),z) \wedge a$, $S(T(x,y) \vee a,z) \geq S(a,z) \geq a$ eşitsizliğinden

Diğer taraftan,

$V_*(x,V_*(y,z)) = S(x,S(y,z)) \wedge [T(x,T(y,z)) \vee a]$, 1.1 den

$= S(x,S(y,z)) \wedge a$, $T(x,T(y,z)) \leq T(x,y) \leq T(x,y) \vee (S(y,z) \wedge a) \leq a$ eşitsizliğinden

Sonuç olarak $V_*(x,V_*(y,z)) = V_*(V_*(x,y),z)$ elde edilir.

1.1.3. $T(x,y) \vee (S(y,z) \wedge a) \geq a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(V_*(x,y),z) = V_*(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a),z)$

$= T(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a),z) \vee a$, Önerme 2.5 (vii) den

$= T(T(x,y),z) \vee T(S(x,y) \wedge a,z) \vee a$, T nin $\vee$-dağılmalılığından

$= T(T(x,y),z) \vee a$, $T(S(x,y) \wedge a,z) \leq T(a,z) \leq a$ eşitsizliğinden

Öte yandan,

$V_*(x,V_*(y,z)) = V_*(x,T(y,z) \vee (S(y,z) \wedge a))$

$= S(x,S(y,z)) \wedge [T(x,T(y,z)) \vee a]$, 1.1 den

$= [S(x,S(y,z)) \wedge T(x,T(y,z))] \vee [S(x,S(y,z)) \wedge a]$, L nin dağılmalılığından

$= T(x,T(y,z)) \vee a$, $a \leq T(x,y) \vee (S(y,z) \wedge a) \leq S(x,y) \vee S(y,z) \leq S(x,S(y,z)) \vee S(x,S(y,z)) = S(x,S(y,z))$ eşitsizliğinden

Yine $V_*(x,V_*(y,z)) = V_*(V_*(x,y),z)$ elde edilir.

1.2. $T(y,z) \vee (S(y,z) \wedge a) \leq a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(x,V_*(y,z)) = V_*(x,T(y,z) \vee (S(y,z) \wedge a))$

$= S(x,T(y,z) \vee (S(y,z) \wedge a)) \wedge a$, Önerme 2.5 (ii) den

$= S(x,S(y,z) \wedge (T(y,z) \vee a)) \wedge a$, L nin dağılmalılığından

$= S(x,S(y,z)) \wedge S(x,T(y,z) \vee a) \wedge a$, S nin $\wedge$- dağılmalılığından

$= S(x,S(y,z)) \wedge a$, $S(x,T(y,z) \vee a) \geq S(x,a) \geq a$ eşitsizliğinden

1.2.1. $T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) \parallel a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(V_*(x,y),z) = V_*(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a),z)$

$= T(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z) \vee [S(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z) \wedge a]$, Önerme 2.5 (vi) den

$= T(T(x,y), z) \vee T(S(x,y) \wedge a, z) \vee [S(S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a), z) \wedge a]$, L nin dağılmalılığı ve T nin $\vee$-dağılmalılığından

$= T(T(x,y), z) \vee T(S(x,y) \wedge a, z) \vee [S(S(x,y), z) \wedge S(T(x,y) \vee a, z) \wedge a]$, S nin $\wedge$- dağılmalılığından

$= T(T(x,y), z) \vee T(S(x,y) \wedge a, z) \vee [S(S(x,y), z) \wedge a]$, $S(T(x,y) \vee a, z) \geq S(a,z) \geq a$ eşitsizliğinden

$= T(T(x,y), z) \vee [S(S(x,y), z) \wedge a]$, $T(S(x,y) \wedge a, z) \leq S(x,y) \wedge a \leq S(S(x,y), z) \wedge a$ eşitsizliğinden

$= S(S(x,y), z) \wedge a$, $T(T(x,y), z) \leq T(y,z) \leq a$ (1.2 den) ve $T(T(x,y), z) \leq S(S(x,y), z)$ eşitsizliklerinden

Bu durumda $V_*(x, V_*(y,z)) = V_*(V_*(x,y), z)$ olduğu elde edilir.

1.2.2. $T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) \leq a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(V_*(x,y), z) = V_*(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z)$

$= S(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z) \wedge a$, Önerme 2.5 (ii) den

$= S(S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a), z) \wedge a$, L nin dağılmalılığından

$= S(S(x,y), z) \wedge S(T(x,y) \vee a, z) \wedge a$, S nin $\wedge$- dağılmalılığından

$= S(S(x,y), z) \wedge a$, $S(T(x,y) \vee a, z) \geq S(a,z) \geq a$ eşitsizliğinden

Yine $V_*(x, V_*(y,z)) = V_*(V_*(x,y), z)$ olduğu elde edilir.

1.2.3. $T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) \geq a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(V_*(x,y), z) = T(T(x,y), z) \vee a = a$, $T(T(x,y), z) \leq T(y,z) \leq a$ eşitsizliğinden

$V_*(x, V_*(y,z)) = S(x, S(y,z)) \wedge a = a$, $a \leq T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) \leq S(x,y) \leq S(S(x,y), z)$ eşitsizliğinden

1.3. $T(y,z) \vee (S(y,z) \wedge a) \geq a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(x, V_*(y,z)) = V_*(x, T(y,z) \vee (S(y,z) \wedge a))$

$= T(x, T(y,z) \vee (S(y,z) \wedge a)) \vee a$, Önerme 2.5 (vii) den

$= T(x, T(y,z)) \vee T(x, S(y,z) \wedge a) \vee a$, T nin $\vee$-dağılmalılığından

$= T(x, T(y,z)) \vee a$, $T(x, S(y,z) \wedge a) \leq S(y,z) \wedge a \leq a$ eşitsizliğinden

1.3.1. $T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) \parallel a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(V_*(x,y), z) = V_*(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z)$

$= T(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z) \vee [S(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z) \wedge a]$, Önerme 2.5 (vi) den

$= T(T(x,y), z) \vee T(S(x,y) \wedge a, z) \vee [S(S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a), z) \wedge a]$, L nin dağılmalılığı ve T nin $\vee$-dağılmalılığından

$= T(T(x,y), z) \vee T(S(x,y) \wedge a, z) \vee [S(S(x,y), z) \wedge S(T(x,y) \vee a, z) \wedge a]$, S nin $\wedge$- dağılmalılığından

$= T(T(x,y), z) \vee T(S(x,y) \wedge a, z) \vee [S(S(x,y), z) \wedge a]$, $S(T(x,y) \vee a, z) \geq S(a,z) \geq a$ eşitsizliğinden

$= T(T(x,y), z) \vee [S(S(x,y), z) \wedge a]$, $T(S(x,y) \wedge a, z) \leq S(x,y) \wedge a \leq S(S(x,y), z) \wedge a$ eşitsizliğinden

$= T(T(x,y), z) \vee a$, $S(S(x,y), z) \geq S(y,z) = S(y,z) \vee S(y,z) \geq T(y,z) \vee (S(y,z) \wedge a) \geq a$ eşitsizliğinden (1.3 den)

Bu durumda $V_*(x, V_*(y,z)) = V_*(V_*(x,y), z)$ olduğu elde edilir.

1.3.2. $T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) \leq a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(V_*(x,y), z) = V_*(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z)$

$= S(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z) \wedge a$, Önerme 2.5 (ii) den

$= S(S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a), z) \wedge a$, L nin dağılmalılığından

$= S(S(x,y), z) \wedge S(T(x,y) \vee a, z) \wedge a$, S nin $\wedge$- dağılmalılığından

$= S(S(x,y), z) \wedge S(a,z) \wedge a = S(S(x,y), z) \wedge a = a$, $S(S(x,y), z) \geq S(y,z) = S(y,z) \vee S(y,z) \geq T(y,z) \vee (S(y,z) \wedge a) \geq a$ eşitsizliğinden (1.3 den)

Bu durumda

$V_*(x, V_*(y,z)) = T(x, T(y,z)) \vee a = a$, 1.3 ve $T(x, T(y,z)) \leq T(x,y) \leq T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) \leq a$ eşitsizliğinden

1.3.3. $T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) \geq a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(V_*(x,y), z) = V_*(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z)$

$= T(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z) \vee a$, Önerme 2.5 (vii) den

$= T(T(x,y), z) \vee T(S(x,y) \wedge a, z) \vee a$, T nin $\vee$-dağılmalılığından

$= T(T(x,y), z) \vee a$, $T(S(x,y) \wedge a, z) \leq a$ eşitsizliğinden

1.3 ten dolayı zaten $V_*(x, V_*(y,z)) = T(x, T(y,z)) \vee a$

2. Şimdi kabul edelim ki x, y, z elemanları, birisi hariç, a ile kıyaslanamasın. $x \parallel a$, $y \parallel a$ ve $z \leq a$ olsun. Bu durumda

$V_*(x, V_*(y,z)) = V_*(x, S(y,z) \wedge a)$, Önerme 2.5 (ii) den

$= S(x, S(y,z)) \wedge a) \wedge a$, Önerme 2.5 (ii) den

$= S(x, S(y,z)) \wedge S(x,a) \wedge a$, S nin $\wedge$- dağılmalılığından

$= S(x, S(y,z)) \wedge a$

2.1. $T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) \parallel a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(V_*(x,y),z) = V_*(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z)$, Önerme 2.5 (vi) den

$= S(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z) \wedge a$, Önerme 2.5 (ii) den

$= S(S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a), z) \wedge a$, L nin dağılmalılığından

$= S(S(x,y),z) \wedge S(T(x,y) \vee a, z) \wedge a$, S nin $\wedge$- dağılmalılığından

$= S(S(x,y)z) \wedge a$, $S(T(x,y) \vee a, z) \geq a$ eşitsizliğinden

Bu durumda $V_*(x, V_*(y,z)) = V_*(V_*(x,y),z)$ olduğu elde edilir.

2.2. $T(x,y) \vee \ \ (S(x,y) \wedge a) \leq a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(V_*(x,y),z) = V_*(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z)$, Önerme 2.5 (vi) den

$= S(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z) \wedge a$, Önerme 2.5 (iii) den

$= S(S(x,y) \wedge (T(x,y) \vee a), z) \wedge a$, L nin dağılmalılığından

$= S(S(x,y),z) \wedge S(T(x,y) \vee a, z) \wedge a$, S nin $\wedge$- dağılmalılığından

$= S(S(x,y),z) \wedge a$, $S(T(x,y) \vee a, z) \geq a$ eşitsizliğinden

$V_*(x, V_*(y,z)) = S(x, S(y,z)) \wedge a$ olduğunu zaten biliyoruz.

2.3. $T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) \geq a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(V_*(x,y),z) = V_*(T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a), z) = a$, Önerme 2.5 (i) den

$V_*(x, V_*(y,z)) = S(x, S(y,z)) \wedge a = a$, $S(x, S(y,z)) \geq S(x,y) = S(x,y) \vee$ $S(x,y) \geq T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) \geq a$ eşitsizliğinden

3. Kabul edelim ki x, y, z elemanlarından yalnız birisi a ile kıyaslanamasın. $x \parallel a$ olsun.

3.1. $y \leq a, z \leq a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(x, V_*(y,z)) = V_*(x, S(y,z) \wedge a)$, Önerme 2.5 (iii) den

$= S(x, S(y,z) \wedge a) \wedge a$, Önerme 2.5 (ii) den

$= S(x, S(y,z)) \wedge S(x,a) \wedge a$, S nin $\wedge$- dağılmalılığından

$= S(x, S(y,z)) \wedge a$

$V_*(V_*(x,y),z) = V_*(S(x,y) \wedge a, z)$, Önerme 2.5 (ii) den

$= S(S(x,y) \wedge a, z) \wedge a$, Önerme 2.5 (iii) den

$= S(S(x,y),z) \wedge S(a,z) \wedge a$, S nin $\wedge$- dağılmalılığından

$= S(S(x,y),z) \wedge a$

3.2. $y \leq a, z \geq a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(x, V_*(y,z)) = V_*(x,a) = S(x,a) \wedge a = a$, Önerme 2.5 (v) ve (ii) den

$V_*(V_*(x,y),z) = V_*(S(x,y) \wedge a, a) = a$, Önerme 2.5 (ii) ve (v) den

3.3. $y \geq a, z \leq a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(x, V_*(y,z)) = V_*(x,a) = S(x,a) \wedge a = a$, Önerme 2.5 (i) ve (ii) den

$V_*(V_*(x,y),z) = V_*(T(x,y) \vee a, a) = a$, Önerme 2.5 (vii) ve (i) den

3.4. $y \geq a, z \geq a$ olsun. Bu takdirde

$V_*(x, V_*(y,z)) = V_*(x, T(y,z) \vee a)$, Önerme 2.5 (iv) den

$= T(x, T(y,z) \vee a) \vee a$, Önerme 2.5 (vii) den

$= T(x, T(y,z)) \vee T(x,a) \vee a$, T nin $\vee$-dağılmalılığından

$= T(x, T(y,z)) \vee a$

$V_*(V_*(x,y),z) = V_*(T(x,y) \vee a, z)$, Önerme 2.5 (vii) den

$= T(T(x,y) \vee a, z) \vee a$, Önerme 2.5 (iv) den

$= T(T(x,y),z) \vee T(a,z) \vee a$, T nin $\vee$-dağılmalılığından

$= T(T(x,y),z) \vee a$

Sonuç olarak $V_* = Med_a(T,S)$ (ve böylece $V^* = Med^a(T,S)$) fonksiyonunun a sıfır elemanlı bir nullnorm olduğu gösterilmiş olur ■

Uyarı 2.1. $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı dağılmalı kafesi göz önüne alınsın. $V_* \,(= V^*)$ nullnormunun birleşmeli oluşu, t-normlara (veya t-konormlara) benzer şekilde, onun n-li genişlemesini tanımlamaya imkan sağlar. Bu genişleme şu şekilde tanımlanabilir:

$$V_*(x_1, \ldots, x_n) = T(x_1, \ldots, x_n) \vee (S(x_1, \ldots, x_n) \wedge a)$$

$$= S(x_1, \ldots, x_n) \wedge (T(x_1, \ldots, x_n) \vee a) = V^*(x_1, \ldots, x_n) \,.$$

Önerme 1.8 de Grabisch, Marichal, Mesiar ve Pap ([9]) tarafından, [0,1] birim reel aralığı üzerinde verilen sonucu bir $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı zincirine genişletmek mümkündür.

Önerme 2.7. $(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı zincir olsun. Bir $V: L^2 \longrightarrow L$ birleştime fonksiyonu bir nullnormdur $\Leftrightarrow$

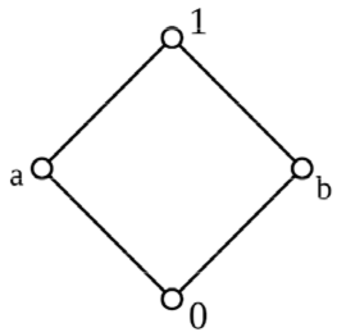
$$V(x,y) = Med_a(T(x,y), S(x,y)) = Med(T(x,y), S(x,y), a)$$

olacak şekilde bir t-norm T, bir t-konorm S ve bir $a \in L \setminus \{0,1\}$ mevcuttur.

[0,1] birim reel aralığı için yukarıdaki önermenin ispatı [9] da bulunabilir.

Uyarı 2.2. Teorem 2.2 kullanılırsa, bir $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı dağılmalı kafesi üzerinde eğer $T: L^2 \longrightarrow L$ $\vee$- dağılmalı bir t-norm ve $S: L^2 \longrightarrow L$ $\wedge$- dağılmalı bir t-konorm olursa yukarıdaki önermenin yeter şartının sağlandığı gösterilmiş olur. Akla şu soru gelir: Acaba $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı dağılmalı kafesi üzerindeki herhangi bir nullnorm V_a için $V_a(x,y) = Med_a(T(x,y), S(x,y))$ olacak şekilde bir t-norm T, bir t-konorm S ve bir $a \in L \backslash \{0,1\}$ her zaman mevcut mudur? Sıradaki örnek bu sorunun cevabının 'hayır' olduğunu gösterir.

Örnek 2.3. $L = \{0, a, b, 1\}$ ve L üzerindeki $\leq$ sıralaması Şekil 2.2 deki gibi tanımlansın.



Şekil 2.2 : L Üzerindeki $\leq$ Sıralaması

Açıkça $(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı dağılmalı kafestir. Aşağıdaki şekilde tanımlı $V_a: L^2 \longrightarrow L$ fonksiyonu göz önüne alınsın:

$$V_a(x,y) = \begin{cases} x \vee y & , x, y \in [0, a] \\ x \wedge y & , x, y \in [a, 1] \\ a & , aksi\ halde \end{cases}$$

Önerme 2.4 ün bir sonucu olarak V_a, L üzerinde bir nullnormdur. Şimdi L üzerinde,

$$V_a(x,y) = Med_a(T(x,y), S(x,y)) = T(x,y) \vee (S(x,y) \wedge a) \quad (2.2)$$

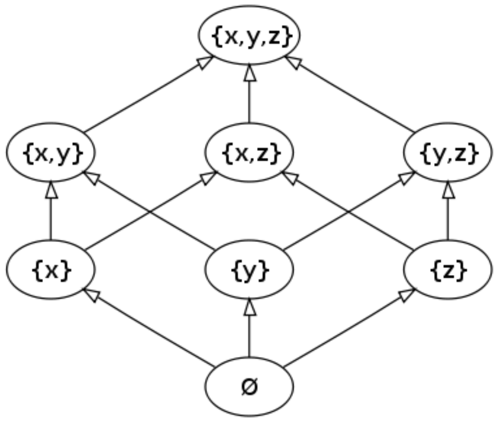
olacak şekilde bir t-norm T ve bir t-konorm S nin mevcut olamayacağını gösterelim. Varsayalım ki L üzerinde böyle bir t-norm T ve bir t-konorm S mevcut olsun. Bu takdirde $T(0,b) = 0$ ve $S(0,b) = b$ olur. Böylece

$$Med_a(T(0,b), S(0,b)) = T(0,b) \vee (S(0,b) \wedge a) = 0 \vee (b \wedge a) = 0$$

bulunur. Fakat diğer taraftan $V_a(0,b) = a$ olur ki (2.2) eşitliğinden $a = 0$ çelişkisi bulunur. Bu durumda, varsayımımız yanlış olup (2.2) eşitliğini sağlayacak şekilde bir t-norm T ve bir t-konorm S mevcut olamaz ■

Uyarı 2.3. $(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı dağılmalı kafes ve $a \in L \setminus \{0,1\}$ olsun. Teorem 2.2 nin hipotezindeki T nin $\vee$- dağılmalılığı veya S nin $\wedge$- dağılmalılığı şartları ihmal edilemez. Çünkü bu durumda V_* (böylece V^*) bir nullnorm olmayabilir. Aşağıdaki örnek bu durumu doğrular.

Örnek 2.4. $A = \{x, y, z\}$ kümesinin tüm alt kümelerinin kafesi olan $\wp(A)$ göz önüne alınsın. Örnek 1.7 den dolayı $(\wp(A), \subseteq, \emptyset, A)$ bir sınırlı dağılmalı kafestir. Kafesin diyagramı Şekil 2.3 te verilmiştir.



Şekil 2.3 : $\wp(A)$ Kafesi

$T = T_\wedge$ ve $S = S_W$ alınsın. $\wp(A)$ dağılmalı olduğundan T t-normu $\vee$- dağılmalıdır. Ama S $\wedge$- dağılmalı değildir. Gerçekten:

$$S(\{x\} \wedge \{y\}, \{y\}) = \{y\} \text{ ve } S(\{x\}, \{y\}) \wedge S(\{y\}, \{y\}) = A.$$

Şimdi $V_* = Med_{\{x\}}(T, S)$ fonksiyonunun nullnorm olmadığını gösterelim ($\{x\}$ in sıfır eleman olduğu, ayrıca T nin $\vee$- dağılmalı bir t-norm ve S nin $\wedge$- dağılmalı bir t-konorm olması durumunda $V_* = Med_{\{x\}}(T, S)$ nin bir nullnorm olduğu Teorem 2.2 den açıktır).

$\{y\}, \{z\}, \emptyset \in \wp(A)$ elemanları için,

$$V_*(V_*(\{y\}, \{z\}), \emptyset) = V_*(T(\{y\}, \{z\}) \vee (S(\{y\}, \{z\}) \wedge \{x\}), \emptyset) = \{x\}$$

ve

$$V_*(\{y\}, V_*(\{z\}, \emptyset)) = V_*(\{y\}, T(\{z\}, \emptyset) \vee (S(\{z\}, \emptyset) \wedge \{x\})) = \emptyset.$$

Böylece V_* birleşme özelliğini sağlamadığından dolayı bir nullnorm olamaz ■

Sonuç 2.5. $(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı dağılmalı kafes ve $a \in L \backslash \{0,1\}$ olsun. Bu takdirde

$$V_*^{(\wedge,\vee)}(x,y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge a) \vee (y \wedge a) = (x \vee y) \wedge (x \vee a) \wedge (y \vee a) = V_{(\wedge,\vee)}^*(x,y)$$

fonksiyonu a sıfır elemanlı bir idempotent nullnormdur.

3. İRDELEME

Bu tezin amacı sınırlı bir L kafesi üzerinde nullnormları tanımlamak, bir takım özelliklerini araştırmak ve $[0,1]$ birim reel aralık üzerindeki nullnormlarla sınırlı kafesler üzerindeki nullnormlar arasındaki bir takım farklılıkları ortaya koymaktır. Ayrıca çok önemli bir birleştirme fonksiyonu olan 'medyan' ile nullnormların ilişkisini araştırmaktır.

Bu amaçla öncelikle bir sınırlı kafes üzerinde nullnorm tanımı verilmiştir. Nullnormlar, $[0,1]$ birim reel aralık üzerinde ilk kez 1999 yılında Mas, Mayor ve Torrens tarafından "t-operators" adlı çalışmada ([17]) ve 2001 yılında Calvo, DeBaets ve Fodor tarafından "The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms" adlı çalışmada ([3]) ortaya konmuştur. Daha sonra bu konuda birçok çalışma yapılmıştır ([6], [7], [9], [21], [22]). Fakat sınırlı kafesler üzerinde şu ana kadar literatürde çalışma bulunmamaktadır. Bu çalışmadaki esas amaç bu boşluğu doldurmaktır.

Birim reel aralık üzerindeki çalışmalara bakıldığında $a \in]0,1[$ sıfır elemanına sahip nullnormların sınıfının en büyük-en küçük elemanları bilinmektedir ([17]). Bu çalışmada ise keyfi sınırlı bir L kafesi üzerinde $a \in L \backslash \{0,1\}$ sıfır elemanına sahip nullnormların sınıfının en büyük-en küçük elemanlarının belirlenmesi problemi çözülmüştür. Ayrıca birçok nullnorm inşa metodu verilerek bunlar arasındaki ilişki ortaya konmuştur.

Birim reel aralık üzerindeki nullnormlarla sınırlı kafesler üzerindeki nullnormlar arasında çok önemli farklılıklar bulunmaktadır. Bunlardan bir tanesi idempotent nullnorm sayısıdır. Birim reel aralık üzerinde a sıfır elemanlı sadece bir tane idempotent nullnorm mevcut iken sınırlı bir kafes üzerinde bu sayının birden fazla olabileceği bu çalışmada elde edilmiştir.

Önerme 1.8 de ifade edildiği gibi $[0,1]$ birim reel aralık üzerindeki herhangi bir nullnorm V_a, $V_a(x,y) = Med(T(x,y), S(x,y), a)$ formunda yazılabilir ve sonuç olarak medyan fonksiyonu bir nullnormdur ([9]). Bu çalışmada ise dağılmalı olmayan sınırlı kafesler üzerinde iki tip medyan olduğu ortaya konmuştur (disjanktif form ve konjanktif form). Bu medyanlar arasındaki ilişki bulunup hangi koşullar altında nullnorm oldukları belirlenmiştir.

4. SONUÇLAR

Yaptığımız çalışmada elde edilen başlıca sonuçlar şunlardır:

1. L sınırlı kafesi üzerindeki tüm nullnormların kümesi olarak gösterdiğimiz $\mathcal{V}$ kümesinin (2.1) de verilen sıralamayla bir kısmen sıralı küme olduğu, ayrıca L sınırlı kafesi üzerindeki $a \in L$ sıfır elemanlı tüm nullnormların kümesi olarak gösterdiğimiz $\mathcal{V}(a)$ kümesinin benzer sıralamayla bir sınırlı kısmen sıralı küme olduğu elde edilmiştir.

2. Önerme 2.2 de, L sınırlı kafesi üzerindeki $a \in L\backslash\{0,1\}$ sıfır elemanlı bir nullnormun hangi özelliklere sahip olduğu detaylı şekilde belirlenmiştir.

3. Teorem 2.1 de $V_a^{(S)}$, $V_a^{(T)}$ nullnormları inşa edilip bunların yardımıyla L sınırlı kafesi üzerinde $a \in L\backslash\{0,1\}$ sıfır elemanlı nullnormların ailesinin sırasıyla en küçük ve en büyük elemanları olan $V_a^{(\vee)}$ ve $V_a^{(\wedge)}$ nullnormları belirlenmiştir.

4. $V_a^{(T,S)}$ nullnormu tanıtılmıştır.

5. $V_a^{(T)}$, $V_a^{(S)}$, $V_a^{(\vee)}$, $V_a^{(\wedge)}$, $V_a^{(T,S)}$, V_a^T ve V_a^S nullnormları tanımlanarak aralarındaki ilişki bulunmuştur.

6. Sınırlı bir L kafesi üzerinde Med_a (disjanktif form) ve Med^a (konjanktif form) tanıtılıp bunlar yardımıyla tanımlanan V_* ve V^* fonksiyonları için $V_* \leq V^*$ olduğu ve dağılmalı olmayan bir kafeste bu fonksiyonların çakışmayabileceği sonucuna ulaşılmıştır.

7. V_* ve V^* fonksiyonlarının N_5 üzerinde idempotent oldukları gösterilmiş olup herhangi bir L sınırlı kafesi üzerinde birden fazla idempotent nullnorm olabileceği sonucuna ulaşılmıştır.

8. Bir L sınırlı dağılmalı kafesi üzerinde eğer $T: L^2 \longrightarrow L$ $\vee$- dağılmalı bir t-norm ve $S: L^2 \longrightarrow L$ $\wedge$- dağılmalı bir t-konorm olursa $V_* = Med_a(T,S)$ (ve böylece $V^* = Med^a(T,S)$) fonksiyonunun bir nullnorm olduğu gösterilmiştir.

9. Bir L sınırlı dağılmalı kafesi üzerinde $V_* = Med_a(T,S)$ (ve böylece $V^* = Med^a(T,S)$) fonksiyonunun bir nullnorm olması için gerek şartlardan herhangi birisinin yani T nin $\vee$- dağılmalılığı veya S nin $\wedge$- dağılmalılığı şartlarının ihmal edilemeyeceği gösterilmiştir.

5. ÖNERİLER

1. L sınırlı kafesi üzerindeki tüm nullnormların kümesi olarak gösterdiğimiz $\mathcal{V}$ kümesinin ayrıca L sınırlı kafesi üzerindeki $a \in L$ sıfır elemanlı tüm nullnormların kümesi olarak gösterdiğimiz $\mathcal{V}(a)$ kümesinin elemanlarının supremuma veya infimuma sahip olup olmadığı dolayısı ile sözü geçen kümelerin kafes olup olmadığı araştırılabilir.
2. Dağılmalı olan veya olmayan kafesler üzerinde tanımlanabilecek tüm idempotent nullnormların sınıfı araştırılabilir.
3. V_* ve V^* fonksiyonlarının hangi tip dağılmalı olmayan kafesler üzerinde nullnorm oldukları araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Aşıcı, E. ve Karaçal, F., On the T-partial order and properties, Information Sciences, 267 (2014) 323-333.

2. Birkhoff G., Lattice Theory, 3 rd edition, Providence, Rhode Island, 1967.

3. Calvo, T., De Baets, B. ve Fodor, J., The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets and Systems, 120 (2001) 385-394.

4. De Baets B. and Mesiar R., Triangular norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 61-75.

5. Demirci, M., Aggregation operators on partially ordered sets and their categorical foundations, Kybernetika, 42 (2006) 261-277.

6. Drewniak, J., Drygas, P. ve Rak, E., Distributivity between uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets and Systems, 159 (2008) 1646-1657.

7. Drygas, P., A characterization of idempotent nullnorms, Fuzzy Sets and Systems, 145 (2004) 455-461.

8. Fodor, J.C., Yager, R.R. ve Rybalov, A., Structure of uninorms, Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Systems, 5 (1997) 411-427.

9. Grabisch, M., Marichal, J.-L., Mesiar, R. ve Pap, E., Aggregation Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

10. İnce, M.A., Karaçal, F. ve Mesiar, R., Medians and nullnorms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems, Submitted, 2014.

11. Karaçal, F., On the direct decomposability of strong negations and S-implication operators on product lattices, Information Sciences, 176 (2006) 3011-3025.

12. Karaçal, F., İnce, M.A. ve Mesiar, R., Nullnorms on bounded lattices, Information Sciences, Submitted, 2014.

13. Karaçal, F. ve Khadjiev, Dj., $\vee$ - distributive and infinitely $\vee$ -distributive t-norms on complete lattice, Fuzzy Sets and Systems, 151 (2005) 341-352.

14. Karaçal, F. ve Sağıroğlu, Y., Infinitely $\vee$ - distributive t-norms on complete lattices and pseudo-complements, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 32-43.

15. Kesicioğlu, M. N. ve Mesiar, R., Ordering based on implications, Information Sciences, 276 (2014) 377-386.

16. Klement, E.P., Mesiar, R. ve Pap, E., Triangular norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

17. Mas, M., Mayor, G. ve Torrens, J., t-operators, Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based System, 7 (1999) 31-50.

18. Mas, M., Mayor, G. ve Torrens, J., t-operators and uninorms on a finite totally ordered set (Special Issue: The Mathematics of Fuzzy Sets), Internat. J. Intell. Systems, 14 (1999) 909-922.

19. Mas, M., Mayor, G. ve Torrens, J., The distributivity condition for uninorms and t-operators, Fuzzy Sets and Systems, 128 (2002) 209-225.

20. Mas, M., Mayor, G. ve Torrens, J., The modularity condition for uninorms and t-operators, Fuzzy Sets and Systems, 126 (2002) 207-218.

21. Qin, F. ve Zhao, B., The distributive equations for idempotent uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets and Systems, 155 (2005) 446-458.

22. Xie, A. ve Liu, H., On the distributivity of uninorms over nullnorms, Fuzzy Sets and Systems, 211 (2013) 62-72.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Akif İnce 1983 yılında Kırıkkale'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Sivas' ta tamamladı. 2006 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2009 yılında K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü'nden Yüksek Lisans derecesini aldı ve 2010 yılında aynı enstitüde Doktora eğitimine başladı. 2006 – 2011 yılları arasında çeşitli özel eğitim kurumlarında matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2011 yılından itibaren Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk sahibi olup, orta derecede İngilizce bilmektedir.

Bu Tezden Elde Edilen Yayınlar

1. İnce M. A., Karaçal F., Mesiar R., Medians and nullnorms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems, submitted.
2. Karaçal F., İnce M. A., Mesiar R., Nullnorms on bounded lattices, Information Sciences, submitted.