KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ L-ALTGRUPLARIN KAFESLERİ

DOKTORA TEZİ

Dilek BAYRAK

MAYIS 2015
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ L-ALTGRUPARIN KAFESLERİ

Dilek BAYRAK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14/ 04 / 2015
Tezin Savunma Tarihi : 28/ 05 / 2015

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Sultan YAMAK

Trabzon 2015

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında
Dilek BAYRAK Tarafından Hazırlanan

GENELLEŞTİRİLMİŞ L-ALTGRUPLARIN KAFESLERİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 28 /04 / 2015 gün ve 1600 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. İsmail Hakkı ALTAŞ ....

Üye : Prof. Dr. Erdal KARADUMAN ....

Üye : Prof. Dr. Naim ÇAĞMAN ....

Üye : Prof. Dr. Osman KAZANCI ....

Üye : Doç. Dr. Sultan YAMAK ....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgileri ve deneyimlerinden yararlandığım, her zaman her konuda yol gösteren ve sabırla yardımcı olan, değerli hocam Doç. Dr. Sultan YAMAK’ a ve tezin şekillendirilmesinde emeği geçen sayın hocalarım Prof. Dr. Osman KAZANCI ve Prof. Dr. İsmail Hakkı ALTAŞ’ a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Çalışmalarımda çok yardımını gördüğüm sevgili arkadaşlarım Şerife YILMAZ ve Canan EKİZ’ e, KTÜ Matematik Bölümü’ndeki bütün hocalarıma ve tez süresince burs desteği sağlayan TÜBİTAK-Bilim Adamı Yetiştirme Grubuna teşekkür ederim. Ayrıca hayatım boyunca benden desteğini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

Dilek BAYRAK
Trabzon, 2015

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Genelleştirilmiş L-Altgrupların Kafesleri" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Sultan YAMAK' ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 28/05/2015

Dilek BAYRAK

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ L-ALTGRUPLARIN KAFESLERİ

Dilek BAYRAK

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Sultan YAMAK
2015, 56 Sayfa

Bulanık altgrupların pek çok genelleştirilmeleri mevcuttur. Bunlardan literatürde büyük öneme sahip olanlar $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplar ve TL-altgruplardır. Bu tezde, bir grubun $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupları tanıtılarak bu altgrupların temel özellikleri incelenmiştir. Grupların Kartezyen çarpımının bir $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubunun, $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupların genelleştirilmiş çarpımı şeklinde yazılabilmesi için gerek ve yeter şart koşullar elde edilmiştir. Diğer yandan bir grubun (normal) $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının tam kafes olduğu gösterilerek bu kafeslerin özel durumlarına ait sonuçlar verilmiş ve böylece grupların hangi sınıfa ait olduğuna dair bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlardan biri, bir grubun normal $LF_{(0,\mu)}$-altgruplarının kafesinin modüler kafes olduğu elde edilmiştir. Bir diğer sonuç, bir grubun $LF_{(0,\mu)}$-altgruplarının kafesinin dağılmalı kafes olması için gerek ve yeter koşulun grubun yerel devirli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, $LF_{(0,\mu)}$-altgruplarının kafesinin yarı komplementlenebilir olduğu elde edilip, $\lambda \neq 0$ olduğu durumda $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupların kafesinin yarı komplementlenebilirliği incelenmiştir. Diğer taraftan, bir grubun TL-altgrupların kafesi incelenmiş ve bu kafesin modüler olması için gerek ve yeter şart elde edilmiştir. Son olarak, bir grubun T-bulanık altgruplarının kafesinin yarı komplementlenebilirliği sıfır bölen elemanı bulunmayan t-normlar ile karakterize edilmiştir.

Anahtar Kelimler: kafes, modüler kafes, dağılmalı kafes, L-altgrup, $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrup, TL-altgrup

PhD. Thesis

SUMMARY

THE LATTİCES OF GENERALİZED L-SUBGROUPS

Dilek BAYRAK

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Sultan YAMAK

2015, 56 Pages

There are many generalizations of fuzzy subgroups. $LF_{(\lambda,\mu)}$-subgroups and TL-subgroups are the ones which have great importance in literature. In this thesis, the concept of $LF_{(\lambda,\mu)}$-subgroups of a group is introduced and the fundamental properties of these subgroups are investigated. A necessary and sufficient condition is obtained for a $LF_{(\lambda,\mu)}$-subgroup of Cartesian product of some groups to be written as the generalized product of $LF_{(\lambda,\mu)}$-subgroups. On the other hand, it is shown that the lattice of (normal) $LF_{(\lambda,\mu)}$-subgroups of a group is a complete lattice. Some results for special cases of these lattices are given and so that some new results on the classification of groups are obtained. One of these results is that the lattice of (normal) $LF_{(0,\mu)}$-subgroups of a group is a modular lattice. As a further result, a necessary and sufficient condition for distributivity of the lattice of $LF_{(0,\mu)}$-subgroups of a group is shown as being locally cyclic group. Also it is obtained that the lattice of $LF_{(0,\mu)}$-subgroups is pseudo complemented and the pseudo complementation of the lattice of $LF_{(0,\mu)}$-subgroups is investigated, where $\lambda \neq 0$. On the other side, the lattice of TL-subgroups of a group is investigated and a characterization is obtained for modularity of this lattice. Finally, pseudo complementation of the lattice of T-fuzzy subgroups of a group is characterized by t-norms without zero-divisors.

Key Words: lattice, modular lattice, distributive lattice, L-subgroup, $LF_{(\lambda,\mu)}$-subgroup, TL-subgroup.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$	: En büyük elemanı 1, en küçük elemanı 0 olan tam kafes
$\bigvee_{a \in A} a$	: A kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu)
$\bigwedge_{a \in A} a$	: A kümesinin en büyük alt sınırı (infimumu)
$a^{\perp}$	: a elemanının yarı-komplementi
T	: L tam kafesi üzerinde tanımlı bir t-norm
$U(A, t)$	: A nın t-seviye altkümesi
$LF(G)$	: G nin L-altgruplarının kümesi
$F(G)$	: G nin bulanık altgruplarının kümesi
$NLF(G)$	: G nin normal L-altgruplarının kümesi
$TLF(G)$	: G nin TL-altgruplarının kümesi
$TF(G)$	: G nin T- bulanık altgruplarının kümesi
$NTLF(G)$	: G nin normal TL-altgruplarının kümesi
$LF_{(\lambda,\mu)}(G)$	: G nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının kümesi
$F_{(\lambda,\mu)}(G)$	: G nin $F_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının kümesi
$NLF_{(\lambda,\mu)}(G)$	: G nin normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının kümesi
$NF_{(\lambda,\mu)}(G)$	: G nin normal $F_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının kümesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Belirsizlik veya bulanıklık kavramları, niteliği tam anlaşılamayan, iyi seçilmeyen, açık seçik görülmeyen veya net olmayan şeklinde tanımlanabilir. İnsan aklı bulanıklık içeren durumları matematiksel olarak ifade etmek için derecelendirme kavramını oluşturmuştur. Bulanıklık, dereceli üyelik kavramı yardımı ile bilim dünyasına ilk kez 1965 yılında Azeri matematikçi Zadeh [43] tarafından taşınmıştır. Zadeh'in bulanık (fuzzy) kümeler teorisi olarak adlandırdığı teorisinde, bulanık kümeler, kesin sınırları belirli olmayan olayları tanımlamak ve bu olayları matematiksel olarak modellemek amacıyla kullanılır. Bilgisayar sistemleri, kontrol mühendisliği gibi matematiksel otomasyon gerektiren modellemelerde bulanık kavramlara ihtiyaç duyulmuştur.

Bulanık altkümeler teorisinin bir genellemesi olarak 1967 yılında Goguen [17] bulanık altkümeleri bir kafes üzerinde tanımlamıştır. 1971 yılında Rosenfeld [34] bulanık kümeler teorisini ilk olarak cebirsel yapılardan gruplar teorisine uyarlamıştır. 1979'da Anthony ve Sherwood [4], Rosenfield'ın tanımlarını keyfi bir tam kafes üzerindeki *t*-normlara genişletmiştir.

Cebirin önemli problemlerinden biri, cebirsel yapıların özelliklerini, bunlara ait alt cebrisel yapıların kafesleri (örneğin; grupların altgruplarının, halkaların ideallerinin, modüllerin altmodüllerinin kafesleri) ile karakterize etmektir. Şimdiye kadar bu konuyla ilgili önemli sonuçlar elde edilmiştir [26, 27, 29, 35].

Rosenfeld [34], bulanık altgrup kavramını tanıtarak bulanık cebirsel altyapıların çalışmalarına öncülük etmiştir. 1994'ten beri bulanık altgrupların, bulanık normal altgrupların, bulanık ideallerin ve bulanık altmodüllerin kafeslerini inceleyen birçok çalışma yapılmıştır [20, 24, 28, 33, 36, 37, 44, 45]. Özellikle bu kafeslerin modülerlik ve dağılımlılık özellikleri incelenmiştir. İlk olarak 1994'te Ajmal ve Thomas [1-3] tarafından bulanık altgrupların kafesleri ve altkafesleri incelenmiştir. Bu çalışmada bir grubun bulanık normal altgruplarının kafesinin modüler olduğu gösterilmiştir [3]. 2009 yılında Tarnauceanu [36] tarafından sonlu grupların bulanık altgruplarının kafeslerinin hangi koşullarda dağılımlı olacağının bir karakterizasyonu verilmiştir. Head [18] çalışmasında bulanık normal altgrupların kafeslerinin modüler olduğunu metateorem ve alt direkt çarpım teoremi ile izah etmiştir. Son yıllara kadar bulanık cebirsel yapıların altkafeslerinin modüler ve dağılımlı olma özellikleri birçok yöntem kullanılarak incelenmiştir [19, 37]. Ancak bulanık cebirsel yapıların altkafesleri keyfi bir kafes üzerinde son yıllara kadar incelenmemiştir. İlk olarak Jahan [19] tarafından bir halkanın L-ideallerinin kafesinin modüler kafes olduğu farklı bir teknik ile ispatlanmıştır.

Murali [31] bir bulanık noktanın bulanık altkümeye ait olması kavramını tanımlamıştır. Pu ve Liu [32] nun tanıttığı, bulanık noktasının bulanık altküme ile yarı-çakışması kavramı, yeni bulanık altküme tanımlamaya fırsat vermiştir. İlk olarak, Bhakat ve Das [9] taradından bir bulanık altkümenin bulanık noktası, onun aitliği ve yarı-çakışması ile (α, β)-bulanık altgrupların tanımı verilmiştir. Burada $\alpha \neq \epsilon \wedge q$ olmak üzere $\alpha, \beta \in \{\epsilon, q, \epsilon \vee q, \epsilon \wedge q\}$ dir. Bu tanıma göre yaygın olarak incelenen bulanık altgrupların (ϵ, ϵ)-bulanık altgrup olduğu gösterilmiştir. Böylece (α, β)-bulanık altgruplar, Rosenfield'ın bulanık altgruplarının bir genelleştirilmesidir. Bu alanda özellikle birçok araştırmacı tarafından özel olarak $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-bulanık altgruplar çalışılmıştır [7, 8]. Özetle,

A, G nin bulanık altkümesi olmak üzere,

$$\mathcal{L} = \{t | t \in (0,1],\ \ U(A, t) \leq G\}$$

kümesi tanımlanacak olursa,

- $\mathcal{L} = (0,1]$ ise A, Rosenfield' in bulanık altgrubudur,
- $\mathcal{L} \supseteq (0,0.5]$ ise A, $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-bulanık altgruptur.

Buradan hareketle $\lambda, \mu \in (0,1]$ ve $\lambda < \mu$ olmak üzere $\mathcal{L} \supseteq (\lambda, \mu]$ ise A için ne söylenebilir? Bu sorunun cevabı olarak Yuan, Zhang ve Ren [42] tarafından $F_{(\lambda,\mu)}$-altgruplar (diğer bir deyişle, eşik değerli bulanık altgruplar) tanımlanmıştır. Böylece Rosenfield'ın bulanık altgruplarının ve Bhakat ve Das'ın (α, β)-bulanık altgruplarının bir genelleştirilmesi elde edildi. Bu çalışma ışığında, Yao [39] $F_{(\lambda,\mu)}$-normal altgruplar ve $F_{(\lambda,\mu)}$-bölüm altgruplarını tanıttı. $F_{(\lambda,\mu)}$-altgrupları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

A, $F_{(\lambda,\mu)}$-altgrup olmak üzere;

- $\lambda = 0$ ve $\mu = 1$ ise A bulanık altgruptur.
- $\lambda = 0$ ve $\mu = 0.5$ ise A $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-bulanık altgruptur.

Birçok araştırmacı tarafından $F_{(\lambda,\mu)}$-cebirsel yapılar çalışılmıştır [10, 15, 16, 21, 22, 40, 41] .

Bu tezde, bir grubun genelleştirilmiş L-altgruplarının kafes yapıları üzerinde çalışılmıştır. Tez iki ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, önermelerde ve teoremlerde adı geçen kavramların anlaşılabilmesi için gerekli ön bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölüm ise dört kısımdan oluşturulmuştur. İlk kısımda, bulanık altgrupların genelleştirilmesi olan $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplar tanıtılarak çeşitli özellikleri araştırılmıştır. İkinci kısımda, $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupların çarpımı tanımlanmış ve grupların kartezyen çarpımının $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubunun, $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupların çarpımı şeklinde yazılabilmesi için gerek ve yeter şart elde edilmiştir. Üçüncü kısımda $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupların kafeslerinin özellikleri incelenmiştir. Bir grubun normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupların kafesinin modüler olduğu gösterilirken dağılımlı olması için gerek yeter şart verilmiştir. Ayrıca, bu kafesin yarı komplementlenebilirliği incelenmiştir. Dördüncü kısımda ise L-altgrupların bir başka genelleştirilmesi olan TL-altgrupların kafes özellikleri incelenmiştir. Üçüncü kısımda olduğu gibi TL-altgrupların kafeslerinin modülerlik, dağılımlılık ve yarı komplementlenebilirlik özellikleri araştırılmıştır.

1.2. Kafesler

Bu bölümde, tez boyunca ihtiyaç duyulan kafesler ile ilgili tanım ve teoremler [12] ve [13] nolu kaynaklardan derlenerek verilmiştir.

Tanım 1.2.1: $\emptyset \neq L$ bir küme ve "$\leq$" L üzerinde bir bağıntı olsun. "$\leq$" bağıntısına L üzerinde bir sıralama bağıntısıdır ancak ve ancak

i) Her $a \in L$ için $a \leq a$,

ii) Her $a, b \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$,

iii) Her $a, b, c \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$.

Bu durumda L kümesine sıralı küme denir ve $(L, \leq)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 1.2.2: $(L, \leq)$ sıralı küme, $A \subseteq L$ ve $a \in L$ olsun.

i) a ya A kümesinin bir alt sınırı denir ancak ve ancak her $x \in A$ için $a \leq x$ dir.

ii) a ya A kümesinin bir üst sınırı denir ancak ve ancak her $x \in A$ için $x \leq a$ dır.

iii) a ya A kümesinin en küçük elemanı denir ancak ve ancak a, A kümesinin bir alt sınırı ve $a \in A$ dır.

iv) a ya A kümesinin en büyük elemanı denir ancak ve ancak a, A kümesinin bir üst sınırı ve $a \in A$ dır.

Tanım 1.2.3: $(L, \leq)$ sıralı küme ve $A \subseteq L$ olsun. A kümesinin, tüm alt sınırlarının ve üst sınırlarının oluşturduğu kümeler sırasıyla A_{alt} ve $A_{üst}$ ile gösterilsin. Bu takdirde;

i) A_{alt} kümesinin en büyük elemanı mevcut ise bu elemana A kümesinin en büyük alt sınırı (infimumu) denir ve $infA$, $\wedge A$, $\bigwedge_{a \in A} a$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

ii) $A_{üst}$ kümesinin en küçük elemanı mevcut ise bu elemana A kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir ve $supA$, $\vee A$, $\bigvee_{a \in A} a$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

Tanım 1.2.4: $(L, \leq)$ sıralı bir küme olsun.

i) L kümesine kafes denir ancak ve ancak her $a, b \in L$ için $inf\{a, b\} = a \wedge b$ ve $sup\{a, b\} = a \vee b$ mevcuttur.

ii) L kümesine zincir denir ancak ve ancak her $a, b \in L$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ dır.

iii) L kümesine tam kafes denir ancak ve ancak her $A \subseteq L$ için $infA$ ve $supA$ mevcuttur.

Bir L kafesi genel olarak $(L, \leq, \wedge, \vee)$ şeklinde gösterilecektir. Ayrıca, L kafesinin en küçük elemanı ve en büyük elemanı (varsa), sırasıyla "0" ve "1" ile gösterilir. "0" ve "1" elemanlarına sahip kafese sınırlı kafes denir.

Teorem 1.2.5: $(L, \leq)$ bir sıralı küme olsun.

i) L tam kafestir ancak ve ancak $1 \in L$ ve her $\emptyset \neq A \subseteq L$ için $infA$ mevcuttur.

ii) L zincir ise L kafestir.

iii) L tam kafes ise L kafestir.

Tanım 1.2.6: $(L, \leq)$ bir kafes, $\emptyset \neq A \subseteq L$ olmak üzere, her $a, b \in A$ için $a \vee b, a \wedge b \in A$ ise A'ya L'nin bir alt kafesi denir.

Tanım 1.2.7: $(L, \leq)$ ve $(L', \leq')$ sıralı kümeler ve $f: L \to L'$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

i) f ye sırakorur (artan) fonksiyon denir ancak ve ancak her $a, b \in L$ için $a \leq b$ ise $f(a) \leq' f(b)$ dir.

ii) f ye izomorfizm denir ancak ve ancak f birebir-örten, artan ve her $a, b \in L$ için $f(a) \leq' f(b)$ ise $a \leq b$ dir.

Tanım 1.2.8: $(L, \leq)$ bir kafes olsun. L'ye yoğun kafes denir ancak ve ancak her $a, b \in L$, $a < b$ için $\exists c \in L$ öyle ki $a < c < b$ dir.

Teorem 1.2.9: Bir $(L, \leq)$ kafesi için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur. Her $a, b, c \in L$ olmak üzere,

1) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,

2) $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$,

3) $a \leq b$ ise $a \vee (b \wedge c) \leq b \wedge (a \vee c)$.

Teorem 1.2.10: Bir L kafesi için aşağıdaki özellikler denktir. Her $a, b, c \in L$ olmak üzere,

D1: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,

D2: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Tanım 1.2.11: Bir L kafesine dağılımlı kafes denir ancak ve ancak L kafesi D1 veya D2 özelliğini sağlar.

Tanım 1.2.12: Bir L tam kafesine sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes denir ancak ve ancak her $a, b_i \in L$ için

$$a \wedge \left(\bigvee_{i \in J} b_i \right) = \bigvee_{i \in J} (a \wedge b_i)$$

dir. Benzer şekilde bir L tam kafesine sonsuz $\wedge$-dağılımlı kafes denir ancak ve ancak her $a, b_i \in L$ için

$$a \vee \left(\bigwedge_{i \in J} b_i \right) = \bigwedge_{i \in J} (a \vee b_i)$$

dir. Eğer L kafesi hem sonsuz $\vee$-dağılımlı hem de sonsuz $\wedge$-dağılımlı ise L ye sonsuz dağılımlı kafes denir. Dağılımlı bir kafeste D1 ve D2 özellikleri denk olmalarına rağmen sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes ile sonsuz $\wedge$-dağılımlı kafes arasında denklik yoktur.

Örnek 1.2.13: E sonsuz elemanlı bir küme ve $\wp^*(E)$, E nin sonlu altkümelerinin kümesi olsun. $L = \wp^*(E) \cup \{E\}$ tam kafesi sonsuz $\wedge$-dağılımlıdır, fakat sonsuz $\vee$-dağılımlı değildir. $\mathbb{Z}$ tamsayılar grubunun altgruplarının kafesi sonsuz $\vee$-dağılımlı olurken, sonsuz $\wedge$-dağılımlı değildir.

Tanım 1.2.14: Bir L kafesine modüler kafes denir ancak ve ancak her $a, b, c \in L$ ve $a \leq b$ için

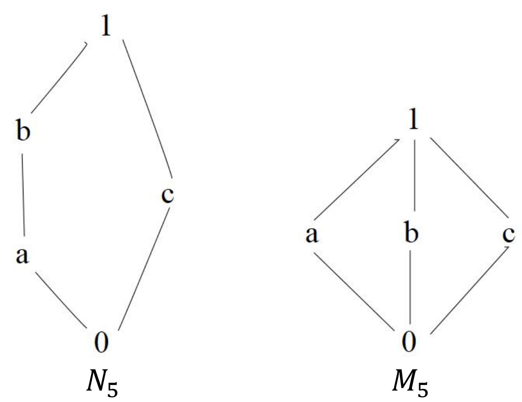
$a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$ dir.

Teorem 1.2.15: Bir L kafesi modülerdir ancak ve ancak N_5 e izomorf olan bir alt kafes içermez.

Önerme 1.2.16: L modüler (dağılımlı) bir kafes olsun. Bu takdirde L nin her alt kafesi modüler (dağılımlı) kafestir.

Örnek 1.2.17:

1) Her zincir dağılımlı kafestir.
2) Her dağılımlı kafes modüler kafestir.
3) Kafes diyagramı M_5 olarak verilen $L = \{0, a, b, c, 1\}$ kafesi dağılımlı değildir ancak modülerdir.
4) Kafes diyagramı N_5 olarak verilen $L = \{0, a, b, c, 1\}$ kafesi modüler değildir.



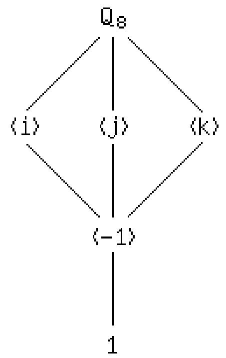
Şekil 1. N_5 ve M_5 kafes diyagramları

Tanım 1.2.18: L sınırlı bir kafes ve $a, b \in L$ olsun. b elemanına a nın komplementi denir ancak ve ancak $a \wedge b = 0$ ve $a \vee b = 1$ dir. L kafesinin her elemanı komplemente sahip ise L ye komplementlenebilir kafes denir.

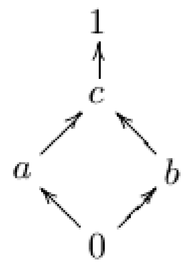
Tanım 1.2.19: $(L, \leq, \wedge, \vee, 0)$ kafesinde $a \in L$ elemanına yarı-komplementlenebilir denir ancak ve ancak $a \wedge a^{\perp} = 0$ olacak şekilde $a^{\perp} \in L$ mevcuttur ve $a \wedge b = 0$ olan her $b \in L$ için $b \leq a^{\perp}$ dir. $a^{\perp}$ elemanına a nın yarı-komplementi denir. L kafesinin her elemanı yarı-komplementlenebilir ise L ye yarı-komplementlenebilir kafes denir. $S(L) := \{a^{\perp\perp} | a \in L\}$ olarak tanımlanan kümeye L nin iskeleti denir. Açık olarak, $S(L)$ L nin $\wedge$-altyarı kafesidir.

Örnek 1.2.20:

1) Her sonlu dağılımlı kafes yarı-komplementlenebilir kafestir. Ancak tersi doğru değildir. Şekil 2 de diyagramı verilen Q_8'in altgruplarının kafesi yarı-komplementlenebilirdir, fakat dağılımlı kafes değildir.
2) Komplementlenebilir kafeslerin yarı-komplementlenebilir olması gerekmez. M_5 kafesi komplementlenebilirdir, fakat yarı-komplementlenebilir değildir.
3) $S(L)$ L nin $\wedge$-altyarı kafesidir. Ancak altkafesi olmayabilir. Kafes diyagramı Şekil 3 te verilen kafes yarı-komplementlenebilirdir. Ancak $S(L) = \{0, a, b, 1\}$ L nin altkafesi değildir.



Şekil 2. Q_8'in altgruplarının kafes diyagramı



Şekil 3. Örnek 1.2.20 (3) kafes diyagramı

Teorem 1.2.21: L yarı-komplementlenebilir ve dağılımlı kafes olsun. Bu durumda her $a, b \in L$ için aşağıdakiler denktir.

i) $S(L)$ L nin altkafesidir;

ii) $(a \vee b)^{\perp\perp} = a^{\perp\perp} \vee b^{\perp\perp}$;

iii) $(a \wedge b)^{\perp} = a^{\perp} \vee b^{\perp}$;

iv) $a^{\perp} \vee a^{\perp\perp} = 1$.

Tanım 1.2.22: Yarı-komplementlenebilir ve dağılımlı bir L kafesi Teorem 1.2.21 deki denk özelliklerden herhangi birini sağlar ise, L ye Stone kafesi denir.

1.3. Altgrupların Kafesleri

Bu bölümde ki temel kavramlar [26, 27, 29, 35] kaynaklarından derlenmiştir.

Tanım 1.3.1: G bir grup olsun. Bu durumda,

i) G ye devirli grup denir ancak ve ancak $\exists\, x \in G : \, < x >= G$.

ii) G ye yerel devirli denir ancak ve ancak G nin her sonlu üretenli altgrubu devirli gruptur.

$< x >= G$ eşitliğini sağlayan x elemanlarına G grubunun üreteçleri denir. Devirli her grup yerel devirli gruptur. Ancak yerel devirli grupların devirli olması gerekmez. Örneğin $(\mathbb{Q}, +)$ yerel devirli gruptur.

G grubunun tüm altgruplarının ve normal altgruplarının aileleri sırasıyla $L(G)$ ve $N(G)$ ile gösterilir. Açık olarak $(L(G), \subseteq)$ ve $(N(G), \subseteq)$ tam kafestir. Burada $\{H_i | i \in \Lambda\} \subseteq L(G)$ ailesi için

$$\bigvee_{i \in \Lambda} H_i =< \bigcup_{i \in \Lambda} H_i >, \quad \bigwedge_{i \in \Lambda} H_i = \bigcap_{i \in \Lambda} H_i$$

dır. Diğer yandan $\{H_i | i \in \Lambda\} \subseteq N(G)$ ailesi için

$$\bigvee_{i \in \Lambda} H_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \alpha_i \in \Lambda} H_{\alpha_1} H_{\alpha_2} \dots H_{\alpha_n}, \quad \bigwedge_{i \in \Lambda} H_i = \bigcap_{i \in \Lambda} H_i$$

dır. Özel olarak H_1, H_2 altgrupları (normal altgrupları) için

$H_1 \vee H_2 =< H_1 \cup H_2 > \quad (H_1 \vee H_2 = H_1 H_2)$

dır. Ayrıca $N(G)$, $L(G)$ tam kafesinin bir alt kafesidir. Bir G grubunun $L(G)$ ve $N(G)$ tam kafeslerinin yapısı G grubunun hangi özel sınıfa ait olduğunu belirlemede önemli yer tutmaktadır. Bunlardan bazıları aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 1.3.2: G bir grup olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) $N(G)$ modüler kafestir,

ii) $L(G)$ dağılımlıdır ancak ve ancak G yerel devirlidir,

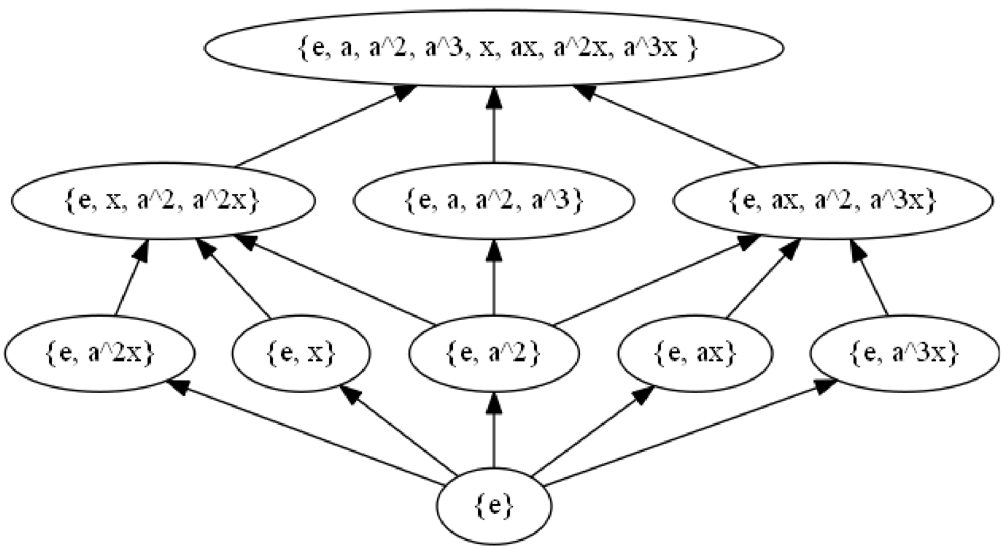
iii) $L(G \times G)$ modüler kafestir ancak ve ancak G abeldir,

G sonlu olsun. Bu takdirde,

iv) $L(G)$ dağılımlı kafestir ancak ve ancak G devirli gruptur.

v) $L(G)$ zincirdir ancak ve ancak G devirli p-gruptur.

Bir grubun normal altgruplarının kafesi modüler olmasına karşın altgruplarının kafesi modüler olmayabilir. Şekil 4. ile $D_8 =< x, a|\, a^4 = x^2 = e, xa\, x^{-1} = a^{-1} >$ Dihedral grubunun altgruplarının kafesi verilmiştir. Burada D_8 in altgruplarının kafesinin modüler olmadığı kolayca görülmektedir.

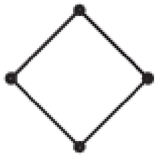


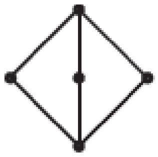
Şekil 4. $L(D_8)$ kafesinin diyagramı

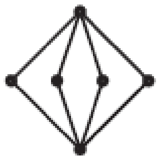
Aşağıda bazı basit kafesler bir G grubunun alt gruplarının kafesi olarak elde edilmiştir.

i) $L(G)$ kafes yapısı  ancak ve ancak G asal mertebeli devirli gruptur.

ii) $L(G)$ kafes yapısı  ancak ve ancak p asal sayısı için G p^2 mertebeli devirli gruptur.

iii) $L(G)$ kafes yapısı  ancak ve ancak p ve q farklı asal sayılar olmak üzere G pq mertebeli devirli gruptur.

iv) $L(G)$ kafes yapısı  ancak ve ancak G Klein'in dörtlü grubudur.

v) $L(G)$ kafes yapısı  ancak ve ancak $G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ veya $G \cong S_3$ dür.

Bir tam kafes acaba bir G grubunun altgruplarını kafesi olarak elde edilebilir mi sorusu gruplar teorisinde önemli yer tutmaktadır. Bu bağlamda yukarıda verilen örneklerin yanı sıra herhangi bir L kafesi için altgruplarının kafesi L ye izomorf olacak şekilde bir grup bulunmayabilir. Altgruplarının kafesi Şekil 3 te verilen kafes ile izomorf olacak şekilde bir grup bulunmamaktadır.

1.4. T-normlar

Bu bölümde t-norm kavramı hakkındaki temel bilgiler [23] kaynağı temel alınarak verilmiştir.

Tanım 1.4.1: $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ tam kafesi üzerinde tanımlı $T: L \times L \to L$ ikili işlemine bir t-norm denir ancak ve ancak her $x, y, z \in L$ için,

T1) $xTy = yTx$,

T2) $(xTy)Tz = xT(yTz)$,

T3) $x \leq y$ ise $xTz \leq yTz$,

T4) $xT1 = x$ dir.

Örnek 1.4.2: $L = [0,1]$ tam kafesi üzerinde bazı temel t-normlar aşağıdaki şekildedir:

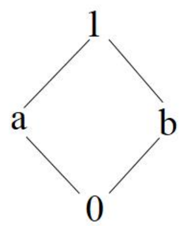
a) $xT_My = \min(x, y)$, (Minimum)

b) $xT_Py = x.y,$ (Çarpım)

c) $xT_Ly = \max(x + y - 1{,}0)$ (Lukasiewhicz)

d) $xT_Dy = \begin{cases} x, & y = 1 \\ y, & x = 1 \\ 0, & diğer. \end{cases}$ (Kesin Çarpım)

Örnek 1.4.3: Kafes diyagramı Şekil 5 ile verilen $L = \{0, a, b, 1\}$ kafesi üzerindeki bütün t-normlar Tablo 1 de verilmiştir.



Şekil 5. Örnek 1.4.3 de verilen L kafesinin diyagramı

Tablo 1. L kafesi üzerindeki t-normların ikili işlem tablosu

T_1	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	0	0	b
1	0	a	b	1

T_2	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	0	b
1	0	a	b	1

T_3	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

T_4	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

Teorem 1.4.4: L bir tam kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşullar sağlanır:

1) Her $x, y \in L$ için $xTy \leq x \wedge y$,

2) Her $x \in L$ için $xT0 = 0Tx = 0$,

3) Her $x_1, x_2, y_1, y_2 \in L$ için $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ ise $x_1Ty_1 \leq x_2Ty_2$ dir.

Tanım 1.4.5: T, L üzerinde bir t-norm olsun. $x \in L$ ye, T t-normuna göre idempotent eleman denir ancak ve ancak $xTx = x$ dir. L nin tüm idempotent elemanlarının kümesi D_T ile gösterilir. Açık olarak, $T = \wedge \Leftrightarrow D_T = L$ dir.

Tanım 1.4.6: T, L tam kafesi üzerinde bir t-norm olsun.

i) T ye L üzerinde $\vee$-dağılımlı t-norm denir ancak ve ancak her $x, y, z \in L$ için

$$xT(y \vee z) = (xTy) \vee (xTz)$$

dir.

ii) T ye L üzerinde sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm denir ancak ve ancak her $x, y_i \in L$ için

$$xT\left(\bigvee_{i\in J} y_i\right) = \bigvee_{i\in J}(x\,Ty_i)$$

dir.

Sonsuz $\vee$-dağılımlı t-normlara örnek olarak $[0,1]$ tam kafesi üzerinde tanımlı T_M, T_P ve T_L verilebilirken T_D t-normu sonsuz $\vee$-dağılımlı değildir.

Tanım 1.4.7: T, L üzerinde bir t-norm olsun. $x \in L\setminus\{0,1\}$ elemanına T nin bir sıfır böleni denir ancak ve ancak $xTy = 0$ olacak şekilde $y \in L\setminus\{0,1\}$ elemanı mevcuttur.

1.5. *L*-Altkümeler

Aksi söylenmedikçe $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ bir tam kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olarak alınacaktır.

Tanım 1.5.1 [30]: $X \neq \emptyset$ olan bir küme ve L bir tam kafes olsun. $A: X \to L$ fonksiyonuna X in bir L-altkümesi denir. X in bütün L-altkümelerinin kümesine X in L- güç kümesi denir ve L^X ile gösterilir. Özel olarak $L = [0,1]$ alınırsa, A ya X'in bir bulanık altkümesi denir.

$\{A_i | i \in \Lambda\}$, X in L-altkümelerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $x \in X$ için,

$$\left(\bigcap_{i\in\Lambda} A_i\right)(x) = \bigwedge_{i\in\Lambda} A_i(x)$$

ile tanımlanan $\bigcap_{i\in\Lambda} A_i$, X'in L-altkümesine $\{A_i | i \in \Lambda\}$ L-altkümeler ailesinin kesişimi denir.

$A, B \in L^X$ olsun. Her $x \in X$ için $A(x) \leq B(x)$ ise A, B de içerilir denir ve bu durum $A \leq B$ şeklinde gösterilir. Eğer $A \leq B$ ve $A \neq B$ ise A ya, B de kesin içerilir (veya B, A yı kesin içerir) denir ve bu durumda $A < B$ yazılır. $t \in L$ için $\{x \in X | A(x) \geq t\}$ kümesine A nın t-

seviye altkümesi denir ve $U(A,t)$ ile gösterilir. Açık olarak, her $t \in L$ için $U(A \cap B,t) = U(A,t) \cap U(B,t)$ dir.

$\emptyset \neq Y \subseteq X$ ve $\mu \in L$ olsun. Her $x \in X$ için

$$A(x) = \begin{cases} \mu, & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{cases}$$

olarak tanımlanan L-altkümesi μ_Y olarak gösterilecektir. Özel olarak, $Y = \{y\}$ için μ_Y L-altkümesine bulanık nokta denir ve y_μ ile de gösterilir.

Tanım 1.5.2 : A, X in bulanık altkümesi ve $\gamma, \delta, t \in [0,1]$ öyle ki $\gamma < \delta$ ve $t \neq 0$ olsun. Bu durumda,

i) $x_t \in A \Leftrightarrow A(x) \geq t$,

ii) $x_t q A \Leftrightarrow A(x) + t > 1$,

iii) $x_t \in\vee\, qA \Leftrightarrow x_t \in A$ veya $x_t q A$,

iv) $x_t \in_\gamma A \Leftrightarrow A(x) \geq t > \gamma$,

v) $x_t q_\delta A \Leftrightarrow A(x) + t > 2\delta$,

vi) $x_t \in_\gamma \vee\, q_\delta A \Leftrightarrow x_t \in_\gamma A$ veya $x_t q_\delta A$.

1.6. TL-altgruplar

Bu bölümde $(G,\cdot)$ bir grup ve L bir tam kafes olarak alınacaktır.

Tanım 1.6.1: $(G,\cdot)$ bir grup ve A, G nin bir L-altkümesi olsun. A ya, G nin TL-altgrubu denir ancak ve ancak her $x, y \in G$ için

i) $A(x) T A(y) \leq A(xy)$,

ii) $A(x) \leq A(x^{-1})$ dir.

A, TL-altgrubuna normal TL-altgrup denir ancak ve ancak her $x, y \in G$ için

iii) $A(y) \leq A(xyx^{-1})$ dir.

Tablo 2. Özel (normal) TL-altgrupların gösterimleri

A G nin	t-norm	kafes	notasyon
TL-altgrup	-	-	$TLF(G)$
L-altgrup	T_M	-	$LF(G)$
Bulanık altgrup	T_M	[0,1]	$F(G)$
Normal TL-altgrup	-	-	$NTLF(G)$
Normal L-altgrup	T_M	-	$NLF(G)$
Normal bulanık altgrup	T_M	[0,1]	$NF(G)$

Önerme 1.6.2: $H \in L(G)$ ve $\mu \in L$ ise $\mu_H \in LF(G)$ ve $\mu_H \in TLF(G)$ dir.

Teorem 1.6.3[33]: $TLF(G)$, $NTLF(G)$ kümeleri "$\leq$" bağıntısına göre tam kafestir.

Önerme 1.6.4[36]: $\mu \in L \backslash \{0\}$ olsun.

i) $\{\mu_H | H \leq G\}$ kafesi $LF(G)$ kafesinin alt kafesidir.

ii) $\{\mu_H | H \leq G\}$ kafesi ile G nin altgruplarının kafesi izomorftur.

Gruplardaki izomorfi TL-altgrupların (normal TL-altgrupların) kafesi üzerinde kafes izomorfisine aşağıdaki şekilde kolaylıkla taşınır.

Teorem 1.6.5: H, K gruplar olmak üzere $H \cong K$ ve T bir t-norm ise $TLF(H) \cong TLF(K)$ ve $NTLF(H) \cong NTLF(K)$.

Tanım 1.6.6: A, G grubunun bir bulanık altkümesi ve $\gamma, \delta \in [0,1]$ öyle ki $\gamma < \delta$ olsun. Bu takdirde,

i) A ya G nin $(\in, \in \vee\, q)$-bulanık altgrubu denir ancak ve ancak her $x, y \in G$ ve $t, r \in (0,1]$ için

1) $x_t, y_r \in A$ ise $(xy)_{t \wedge r} \in\vee\, qA$;

2) $x_t \in A$ ise $(x^{-1})_t \in\vee\, qA$ dıır.

ii) A ya G nin $(\in_\gamma, \in_\gamma \vee\, q_\delta)$-bulanık altgrubu denir ancak ve ancak her $x, y \in G$ ve $t, r \in (\gamma, 1]$ için

1) $x_t, y_r \in_\gamma A$ ise $(xy)_{t \wedge r} \in_\gamma \vee\, q_\delta A$;

2) $x_t \in_\gamma A$ ise $(x^{-1})_t \in_\gamma \vee\, q_\delta A$ dır.

iii) A ya G nin eşik değerli bulanık altgrubu veya (γ, δ)-bulanık altgrubu denir ancak ve ancak her $x, y \in G$ için

1) $A(xy) \vee \gamma \geq A(x) \wedge A(y) \wedge \delta$;

2) $A(x^{-1}) \vee \gamma \geq A(x) \wedge \delta$ dır.

Önerme 1.6.7: A, G nin bulanık altkümesi ve $\gamma, \delta \in [0,1]$ öyle ki $\gamma < \delta$ olsun. Bu takdirde,

i) A, G nin $(\in, \in\vee\, q)$-bulanık altgrubudur ⟺ Her $x, y \in G$ için $A(xy) \geq A(x) \wedge A(y) \wedge 0{,}5$ ve $A(x^{-1}) \geq A(x) \wedge 0{,}5$ dir.

ii) A, G nin $(\in_\gamma, \in_\gamma\vee\, q_\delta)$-bulanık altgrubudur ⟺ Her $x, y \in G$ için $A(xy) \vee \gamma \geq A(x) \wedge A(y) \wedge \delta$ ve $A(x^{-1}) \vee \gamma \geq A(x) \wedge \delta$ dır.

Sonuç 1.6.8 : A, G nin bulanık altkümesi olsun. Bu takdirde,

i) A (0,0.5)-bulanık altgrup ancak ve ancak A $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-bulanık altgruptur.

ii) A (λ, μ)-bulanık altgrup ancak ve ancak A $(\epsilon_\lambda, \epsilon_\lambda \vee q_\mu)$-bulanık altgruptur.

Tanım 1.6.9 [14]: Her $i \in \{1,2, \ldots, n\}$ için A_i, G_i grubunun bulanık altkümesi olsun.

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) \wedge \ldots \wedge A_n(x_n)$$

ile tanımlanan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ifadesine A_i bulanık altkümelerinin çarpımı denir.

Teorem 1.6.10 [14]: $G_1, G_2, \ldots, G_n$ gruplar ve $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sırasıyla $G_1, G_2, \ldots, G_n$'nin birim elemanları olmak üzere, A, $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$'nin bulanık altgrubu olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

i) Her $i \in \{1,2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}$ için $A(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, x_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \geq A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dir.

ii) $\exists A_i \in FS(G_i);\ i = 1,2, \ldots, n$ öyle ki $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ dir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde aksi söylenmedikçe $(G,\cdot)$, e birim elemanlı bir grup ve L bir tam kafes olarak alınacaktır.

2.1. $LF_{(\lambda,\mu)}$-Altgruplar

Bu bölümde $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrup tanımı verilerek bazı temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupların L-altgruplar yardımıyla bir karakterizasyonu verilmiş ve bir grubun (normal) $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupların kafeslerine ait birçok özellik incelenmiştir.

Tanım 2.1.1: A G nin L-altkümesi, $\lambda,\mu \in L$ ve $\lambda < \mu$ olsun. A ya G nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu denir ancak ve ancak her $x, y \in G$ için

i) $A(x) \wedge A(y) \wedge \mu \leq A(xy) \vee \lambda$,

ii) $A(x) \wedge \mu \leq A(x^{-1}) \vee \lambda$ dir.

A, $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubuna normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrup denir ancak ve ancak her $x, y \in G$ için

iii) $A(y) \wedge \mu \leq A(xyx^{-1}) \vee \lambda$ dir.

G nin tüm $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının ve normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının kümesi sırasıyla $LF_{(\lambda,\mu)}(G)$ ve $NLF_{(\lambda,\mu)}(G)$ notasyonları ile gösterilecektir. Eğer $L = [0,1]$ ise, G nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu, $F_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu olarak gösterilir.

Aşağıdaki örnekle bir G grubunun $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının kümesinin L-altgruplarının kümesinden daha geniş olduğu kolaylıkla görülür.

Örnek 2.1.2: $\lambda, \mu \in L,\ \lambda < \mu$ ve $G = \mathbb{Z}_2$ grubu olsun. $\alpha, \beta \in L$ için

$$A_{(\alpha,\beta)}(x) = \begin{cases} \alpha, & x = \bar{1} \\ \beta, & x = \bar{0} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $LF(G) = NLF(G) = \{A_{\alpha,\beta} | \alpha, \beta \in L\ \ \alpha \leq \beta\}$ ve

$$LF_{(\lambda,\mu)}(G) = NLF_{(\lambda,\mu)}(G) = \{A_{\alpha,\beta} | \alpha, \beta \in L\ \ \alpha \wedge \mu \leq \beta \vee \lambda\}$$

dır.

Tanım 2.1.1 den aşağıdaki önerme kolaylıkla elde edilir.

Önerme 2.1.3: A, G nin L-altkümesi olsun. A G nin (normal) L-altgrubu ise $\lambda < \mu$ olmak üzere her $\lambda, \mu \in L$ ve için A G nin (normal) $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubudur.

Sonuç 2.1.4: $\lambda, \mu \in L$ ve $\lambda < \mu$ olsun. Bu durumda;

i) $LF(G) \subseteq LF_{(\lambda,\mu)}(G)$;

ii) $NLF(G) \subseteq NLF_{(\lambda,\mu)}(G)$ dir.

Sonuç 2.1.4 te ki "⊆" sembolü genel olarak "=" ile değiştirilemez.

Örnek 2.1.5: Şekil 5 te verilen L kafesi için S_3 simetrik grubunun bir L-altkümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$A(x) = \begin{cases} 1, & x = (1), \\ a, & x \in \{(123), (132)\}, \\ b, & x \in \{(12), (23)\}, \\ 0, & x = (13). \end{cases}$$

Bu durumda, $A \in LF_{(0,a)}(S_3) \backslash LF(S_3)$ ve $A \in NLF_{(0,a)}(S_3) \backslash NLF(S_3)$ dir.

Tanım 2.1.6: A, B G grubunun L-altgrupları ve $\alpha, \beta \in L$ olsun. A_β^α, A_β, A^α, $(A \cdot B)$ ve $(A \odot_\mu^\lambda B)$ L-altkümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

i) Her $x \in G$ için

$$A_\beta^\alpha(x) = (A(x) \wedge \beta) \vee \alpha$$

dir. Eğer $\alpha = 0$ ise A_β ile eğer $\beta = 1$ ise A^α ile gösterilir.

ii) Her $x \in G$ için

$$(A \cdot B)(x) = \bigvee_{x=uv} A(u) \wedge B(v)$$

dir.

iii) Her $x \in G$ için

$$(A \odot_\mu^\lambda B)(x) = A(x) \vee B(x) \vee \bigvee_{x=uv} (A(u) \wedge B(v) \wedge \mu) \vee \lambda$$

dir.

Teorem 2.1.7: L dağılımlı bir kafes ve A, G nin L-altkümesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

i) A, G nin (normal) $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubudur.

ii) A_μ^λ, G nin (normal) L-altgrubudur.

İspat: (i)⇒(ii): A, G nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu olsun. Her $x, y \in G$ için,

$$
\begin{aligned}
A_\mu^\lambda(xy) &= (A(xy) \wedge \mu) \vee \lambda \\
&= (A(xy) \vee \lambda) \wedge \mu \\
&\geq (A(x) \wedge A(y) \wedge \mu) \wedge \mu \\
&= A(x) \wedge A(y) \wedge \mu
\end{aligned}
$$

Ayrıca açık olarak $A_\mu^\lambda(xy) \geq \lambda$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
A_\mu^\lambda(xy) &\geq (A(x) \wedge A(y) \wedge \mu) \vee \lambda \\
&= \big((A(x) \wedge \mu) \wedge (A(y) \wedge \mu)\big) \vee \lambda \\
&= \big((A(x) \wedge \mu) \vee \lambda\big) \wedge \big((A(y) \wedge \mu) \vee \lambda\big) \\
&= A_\mu^\lambda(x) \wedge A_\mu^\lambda(y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buna ek olarak,

$$
\begin{aligned}
A_\mu^\lambda(x^{-1}) &= (A(x^{-1}) \wedge \mu) \vee \lambda \\
&= (A(x^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu \\
&\geq A(x) \wedge \mu
\end{aligned}
$$

ve açıkça $A_\mu^\lambda(x^{-1}) \geq \lambda$ olduğundan,

$$
A_\mu^\lambda(x^{-1}) \geq (A(x) \wedge \mu) \vee \lambda = A_\mu^\lambda(x)
$$

dir. Böylece A_μ^λ, G nin L-altgrubudur. Benzer şekilde, A nın G nin normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu olduğu durumda A_μ^λ nın G nin normal L-altgrubu olduğu elde edilir.

(ii)⇒(i): A_μ^λ G nin L-altgrubu olsun. Her $x, y \in G$ için

$$A(xy) \vee \lambda \geq (A(xy) \wedge \mu) \vee \lambda$$
$$= A_\mu^\lambda(xy)$$
$$\geq A_\mu^\lambda(x) \wedge A_\mu^\lambda(y)$$
$$= \big((A(x) \wedge \mu) \vee \lambda\big) \wedge \big((A(y) \wedge \mu) \vee \lambda\big)$$
$$= (A(x) \wedge A(y) \wedge \mu) \vee \lambda$$
$$\geq A(x) \wedge A(y) \wedge \mu$$

ve

$$A(x^{-1}) \vee \lambda \geq (A(x^{-1}) \wedge \mu) \vee \lambda$$
$$= A_\mu^\lambda(x^{-1})$$
$$\geq A_\mu^\lambda(x)$$
$$= (A(x) \wedge \mu) \vee \lambda$$
$$\geq A(x) \wedge \mu$$

elde edilir. Buradan A, G nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubudur. A_μ^λ nın G nin normal L-altgrubu olması durumunda benzer şekilde A nın normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu olduğu gösterilir.

Sonuç 2.1.8: A G nin bulanık altkümesi olsun. Bu takdirde,

- **i)** A $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-bulanık altgruptur ancak ve ancak $A_{0,5}^0$ bulanık altgruptur.
- **ii)** A $(\epsilon_\lambda, \epsilon_\lambda \vee q_\mu)$-bulanık altgruptur ancak ve ancak A_μ^λ bulanık altgruptur.

Bir L kafesi üzerinde G grubunun $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının karakterizasyonu [42] deki Teorem 2.2 ye benzer olarak aşağıdaki teorem ile verilebilir.

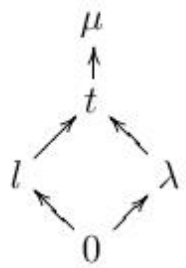
Teorem 2.1.9: A, G nin bir L-altkümesi olsun.

- **i)** Her $t \in (\lambda, \mu]$ için $U(A, t)$ G nin (normal) altgrubu ise A (normal) $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruptur.

ii) L bir zincir ve A (normal) $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrup ise her $t \in (\lambda, \mu]$ için $U(A,t) = \emptyset$ veya $U(A,t)$, G nin (normal) altgruptur.

Bir dağılımlı kafes için Teorem 2.1.9 (ii) nin genel olarak doğru olmadığı aşağıdaki örnekte görülebilir.

Örnek 2.1.10: $L = \{\mu, t, l, \lambda, 0\}$ olmak üzere, L kafesinin diyagramı Şekil 6 daki gibi ve



Şekil 6. L'nin kafes yapısı

$A{:}\mathbb{Z}_2 \to L$, $A(\bar{1}) = t$ ve $A(\bar{0}) = l$ ise A G nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubudur, ancak $U(A,t)$ t-seviye altkümesi G nin altgrubu değildir.

Önerme 2.1.11: L sonsuz dağılımlı kafes olmak üzere A ve B, G nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupları olsun. Bu takdirde,

i) B G nin normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu ise, $(A \cdot B)$ G nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubudur.

ii) A ve B, G nin normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupları ise, $(A \cdot B)$, G nin normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubudur.

iii) Her $\alpha, \beta \in L$ için $A^{\alpha}, A_{\beta}, A_{\beta}^{\alpha}$ G nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarıdır.

iv) A ve B, G nin normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupları ise, $\left(A \odot_{\mu}^{\lambda} B\right)$ G nin normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubudur.

İspat:

i) $x, y \epsilon G$ olsun. Bu durumda,

$$(A \cdot B)(x) \wedge (A \cdot B)(y) \wedge \mu = \left(\bigvee_{x=ab} A(a) \wedge B(b)\right) \wedge \left(\bigvee_{y=cd} A(c) \wedge B(d)\right) \wedge \mu$$

$$= \bigvee_{\substack{x=ab \\ y=cd}} (A(a) \wedge A(c) \wedge \mu) \wedge (B(b) \wedge \mu) \wedge B(d) \wedge \mu$$

$$\leq \bigvee_{\substack{x=ab \\ y=cd}} (A(ac) \vee \lambda) \wedge (B(c^{-1}bc) \vee \lambda) \wedge B(d) \wedge \mu$$

$$= \bigvee_{\substack{x=ab \\ y=cd}} (A(ac) \vee \lambda) \wedge \big((B(c^{-1}bc) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee (\lambda \wedge B(d) \wedge \mu)\big)$$

$$\leq \bigvee_{\substack{x=ab \\ y=cd}} (A(ac) \vee \lambda) \wedge \Big((B(c^{-1}bcd) \vee \lambda) \vee \big(\lambda \wedge B(d)\big)\Big)$$

$$= \bigvee_{\substack{x=ab \\ y=cd}} (A(ac) \vee \lambda) \wedge (B(c^{-1}bcd) \vee \lambda)$$

$$\leq \bigvee_{\substack{x=ab \\ y=cd}} \big(A(ac) \wedge B(c^{-1}bcd)\big) \vee \lambda$$

$$\leq \bigvee_{xy=uv} \big(A(u) \wedge B(v)\big) \vee \lambda$$

$$= (A \cdot B)(xy) \vee \lambda$$

dir. Diğer yandan,

$$(A \cdot B)(x) \wedge \mu = \left(\bigvee_{x=ab} A(a) \wedge B(b)\right) \wedge \mu$$

$$= \bigvee_{x=ab} (A(a) \wedge \mu) \wedge (B(b) \wedge \mu) \wedge \mu$$

$$\leq \bigvee_{x=ab} (A(a^{-1}) \vee \lambda) \wedge (B(b^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu$$

$$= \bigvee_{x=ab} (A(a^{-1}) \vee \lambda) \wedge ((B(b^{-1}) \wedge \mu) \vee \lambda)$$

$$\leq \bigvee_{x=ab} (A(a^{-1}) \vee \lambda) \wedge (B(ab^{-1}a^{-1}) \vee \lambda)$$

$$= \bigvee_{x=ab} \big(A(a^{-1}) \wedge B(ab^{-1}a^{-1})\big) \vee \lambda$$

$$\leq \left(\bigvee_{x^{-1}=uv} A(u) \wedge B(v)\right) \vee \lambda$$

$$= (A \cdot B)(x^{-1}) \vee \lambda$$

Böylece $(A \cdot B)$, G nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubudur.

ii) $(A \cdot B)$ nin G nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu olduğu (i) şıkında gösterildi. $x, y \in G$ olsun.

$$(A \cdot B)(y) \wedge \mu = \left(\bigvee_{y=cd} A(c) \wedge B(d)\right) \wedge \mu$$

$$= \bigvee_{y=cd} (A(c) \wedge \mu) \wedge (B(d) \wedge \mu)$$

$$\leq \bigvee_{y=cd} (A(xcx^{-1}) \vee \lambda) \wedge (B(xdx^{-1}) \vee \lambda)$$

$$= \bigvee_{y=cd} \big(A(xcx^{-1}) \wedge B(xdx^{-1})\big) \vee \lambda$$

$$\leq \left(\bigvee_{xyx^{-1}=uv} A(u) \wedge B(v)\right) \vee \lambda$$

$$= (A \cdot B)(xyx^{-1}) \vee \lambda$$

dir. Buradan $(A \cdot B)$, G nin normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubudur.

iii) A, G nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu ve $\alpha, \beta \in L$ olsun. Her $x, y \in G$ için

$$A_{\beta}^{\alpha}(xy) \vee \lambda = (A(xy) \wedge \beta) \vee \alpha \vee \lambda$$

$$= (A(xy) \vee \alpha \vee \lambda) \wedge (\beta \vee \alpha \vee \lambda)$$

$$\geq \big((A(x) \wedge A(y) \wedge \mu) \vee \alpha\big) \wedge \beta$$

$$= (A(x) \vee \alpha) \wedge (A(y) \vee \alpha) \ \wedge (\mu \vee \alpha) \wedge \beta$$

$$\geq A_\beta^\alpha(x) \wedge A_\beta^\alpha(y) \ \wedge \mu$$

Benzer şekilde, $A_\beta^\alpha(x^{-1}) \vee \lambda \geq A_\beta^\alpha(x) \ \wedge \mu$ olduğundan her $\alpha, \beta \in L$ için A_β^α $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruptur.

iv) Her $x, y \in G$ için;

$$(A \odot_\mu^\lambda B)(x) \wedge (A \odot_\mu^\lambda B)(y) \wedge \mu = \left(A(x) \vee B(x) \vee \bigvee_{x=ab} (A(a) \wedge B(b) \wedge \mu) \vee \lambda\right)$$

$$\wedge \left(A(y) \vee B(y) \vee \bigvee_{y=cd} (A(c) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee \lambda\right) \wedge \mu$$

$$= \left(\big(\big(A(x) \vee B(x)\big) \wedge \big(A(y) \vee B(y)\big)\big) \right.$$

$$\vee \left(\big(A(x) \vee B(x)\big) \wedge \left(\bigvee_{y=cd} (A(c) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee \lambda \right)\right)$$

$$\vee \left((A(y) \vee B(y)) \wedge \left(\bigvee_{x=ab} (A(a) \wedge B(b) \wedge \mu) \vee \lambda \right)\right)$$

$$\left. \vee \left(\left(\bigvee_{x=ab} (A(a) \wedge B(b) \wedge \mu) \vee \lambda \right) \wedge \left(\bigvee_{y=cd} (A(c) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee \lambda \right)\right)\right) \wedge \mu$$

$$\leq \left(\Big(\big(A(x) \wedge A(y)\big) \vee \big(A(x) \wedge B(y)\big) \vee \big(B(x) \wedge A(y)\big) \vee \big(B(x) \wedge B(y)\big) \Big) \right.$$

$$\vee \left(\left(\bigvee_{y=cd} (A(x) \wedge A(c) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee \lambda \right) \right.$$

$$\left. \vee \left(\bigvee_{y=cd} (B(x) \wedge A(c) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee \lambda \right) \right)$$

$$\vee \left(\left(\bigvee_{x=ab} (A(y) \wedge A(a) \wedge B(b) \wedge \mu) \vee \lambda \right) \right.$$

$$\left. \vee \left(\bigvee_{x=ab} (B(y) \wedge A(a) \wedge B(b) \wedge \mu) \vee \lambda \right) \right)$$

$$\left. \vee \left(\left(\bigvee_{x=ab} (A(a) \wedge B(b) \wedge A(c) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee \lambda \right) \right) \right) \wedge \mu$$

$$\leq (A(xy) \vee \lambda) \vee (B(xy) \vee \lambda) \vee (A(x) \wedge B(y) \wedge \mu) \vee (A(y) \wedge (B(y^{-1}xy) \vee \lambda) \wedge \mu)$$

$$\vee \left(\bigvee_{y=cd} (A(x) \wedge A(c) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{y=cd} ((A(xcx^{-1}) \vee \lambda) \wedge B(x) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{x=ab} (A(a) \wedge ((A(byb^{-1}) \vee \lambda) \wedge B(b) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{x=ab} (A(a) \wedge (B(byb^{-1}) \vee \lambda) \wedge B(b) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{x=ab} (A(a) \wedge (A(bcb^{-1}) \vee \lambda) \wedge B(b) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\leq (A(xy) \vee \lambda) \vee (B(xy) \vee \lambda) \vee ((A(x) \wedge B(y) \wedge \mu) \vee \lambda)$$

$$\vee ((A(y) \wedge B(y^{-1}xy) \wedge \mu) \vee \lambda)) \vee \left(\bigvee_{y=cd} (A(x) \wedge A(c) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{y=cd} (A(xcx^{-1}) \wedge B(x) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{x=ab} (A(a) \wedge (A(byb^{-1}) \wedge B(b) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{x=ab} (A(a) \wedge B(byb^{-1}) \wedge B(b) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{x=ab} (A(a) \wedge A(bcb^{-1}) \wedge B(b) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\leq (A(xy) \vee \lambda) \vee (B(xy) \vee \lambda) \vee ((A(x) \wedge B(y) \wedge \mu) \vee \lambda)$$

$$\vee ((A(y) \wedge B(y^{-1}xy) \wedge \mu) \vee \lambda)) \vee \left(\bigvee_{y=cd} ((A(xc) \vee \lambda) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{y=cd} (A(xcx^{-1}) \wedge (B(xd) \vee \lambda) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{x=ab} ((A(abyb^{-1}) \vee \lambda) \wedge B(b) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{x=ab} (A(a) \wedge (B(by) \vee \lambda) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{x=ab} ((A(abcb^{-1}) \vee \lambda) \wedge (B(bd) \vee \lambda) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\leq (A(xy) \vee \lambda) \vee (B(xy) \vee \lambda) \vee ((A(x) \wedge B(y) \wedge \mu) \vee \lambda)$$

$$\vee ((A(y) \wedge B(y^{-1}xy) \wedge \mu) \vee \lambda)) \vee \left(\bigvee_{y=cd} (A(xc) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{y=cd} (A(xcx^{-1}) \wedge B(xd) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{x=ab} (A(abyb^{-1}) \wedge B(b) \wedge \mu) \vee \lambda \right) \vee \left(\bigvee_{x=ab} (A(a) \wedge B(by) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{x=ab} (A(abcb^{-1}) \wedge B(bd) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\leq A(xy) \vee B(xy) \vee \bigvee_{xy=uv} (A(u) \wedge B(v) \wedge \mu) \vee \lambda$$

$$= (A \odot_{\mu}^{\lambda} B)(xy)$$

$$\leq (A \odot_{\mu}^{\lambda} B)(xy) \vee \lambda$$

dir. Diğer yandan,

$$\big(A \odot_{\mu}^{\lambda} B\big)(x^{-1}) \wedge \mu = \left(A(x^{-1}) \vee B(x^{-1}) \vee \bigvee_{x^{-1}=ab} (A(a) \wedge B(b) \wedge \mu) \vee \lambda \right) \wedge \mu$$

$$= (A(x^{-1}) \wedge \mu) \vee (B(x^{-1}) \wedge \mu) \vee \left(\bigvee_{x^{-1}=ab} (A(a) \wedge B(b) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\leq (A(x) \vee \lambda) \vee (B(x) \vee \lambda)$$

$$\vee \left(\bigvee_{x^{-1}=ab} \big((A(a^{-1}) \vee \lambda) \wedge (B(b^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu\big) \vee \lambda \right)$$

$$= A(x) \vee B(x) \vee \lambda \vee \left(\bigvee_{x^{-1}=ab} (A(a^{-1}) \wedge B(b^{-1}) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\leq A(x) \vee B(x) \vee \left(\bigvee_{x^{-1}=ab} (A(a^{-1}) \wedge (B(ab^{-1}a^{-1}) \vee \lambda) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$= A(x) \vee B(x) \vee \left(\bigvee_{x^{-1}=ab} (A(a^{-1}) \wedge B(ab^{-1}a^{-1}) \wedge \mu) \vee \lambda \right)$$

$$\leq \left(A(x) \vee B(x) \vee \left(\bigvee_{x=uv} (A(u) \wedge B(v) \wedge \mu) \vee \lambda \right) \right) \vee \lambda$$

$$= (A \odot_{\mu}^{\lambda} B)(x) \vee \lambda$$

dir. Böylece, $(A \odot_{\mu}^{\lambda} B)$ $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruptur.

$$(A \odot_{\mu}^{\lambda} B)(y) \wedge \mu = \left(A(y) \vee B(y) \vee \left(\bigvee_{y=cd} (A(c) \wedge B(d) \wedge \mu) \vee \lambda \right) \right) \wedge \mu$$

$$= (A(y) \wedge \mu) \vee (B(y) \wedge \mu) \vee \bigvee_{y=cd} ((A(c) \wedge \mu) \wedge (B(d) \wedge \mu)) \vee \lambda$$

$$\leq (A(xyx^{-1}) \vee \lambda) \vee (B(xyx^{-1}) \vee \lambda)$$

$$\vee \bigvee_{y=cd} ((A(xcx^{-1}) \vee \lambda) \wedge (B(xdx^{-1}) \vee \lambda) \ \wedge \mu) \vee \lambda$$

$$= A(xyx^{-1}) \vee B(xyx^{-1}) \vee \lambda$$

$$\vee \bigvee_{y=cd} (A(xcx^{-1}) \wedge B(xdx^{-1}) \wedge \mu) \vee \lambda$$

$$\leq A(xyx^{-1}) \vee B(xyx^{-1}) \vee \left(\bigvee_{xyx^{-1}=uv} A(u) \wedge B(v) \wedge \mu \right) \vee \lambda$$

$$= (A \odot_{\mu}^{\lambda} B)(xyx^{-1}) \vee \lambda.$$

dir. Sonuç olarak, $A \odot_{\mu}^{\lambda} B$ normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruptur.

Uyarı: İki $F_{(\lambda,\mu)}$-altgrubun çarpımının $F_{(\lambda,\mu)}$-altgrup olması gerekmez.

Örnek 2.1.12: $\lambda, \mu \in [0,1]$ ve $\lambda < \mu$ olmak üzere, S_3 ün A, B $F_{(\lambda,\mu)}$-altgrupları aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$A(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{(1),(12)\}, \\ 0, & diğer. \end{cases} \qquad B(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{(1),(13)\}, \\ 0, & diğer. \end{cases}$$

Bu takdirde,

$$A \cdot B(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{(1),(12),(13),(132)\}, \\ 0, & diğer. \end{cases}$$

olup $A \cdot B$, S_3 ün $F_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu değildir.

2.2. $LF_{(\lambda,\mu)}$-Altgrupların Çarpımları

Grupların Kartezyen çarpımının bulanık altgruplarına ait bir karakterizasyon Chon [14] tarafından verilmiştir. Bu bölümde bir L dağılımlı kafesi için grupların Kartezyen çarpımının $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarına ait benzer bir karakterizasyonu verilecektir.

Teorem 2.2.1: G_1, G_2, … , G_n gruplar ve $\bigvee_{i=1}^{n} \lambda_i < \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_i$ olmak üzere A_1, A_2, … , A_n sırasıyla G_1, G_2, … , G_n'nin $LF_{(\lambda_i,\mu_i)}$-altgrupları olsun. Bu durumda $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)$, $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$'nin $L_{(\bigvee_{i=1}^{n} \lambda_i, \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_i)}$-altgrubudur.

İspat: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ olsun. Bu takdiırde,

$$(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)\big((x_1, x_2, \ldots, x_n)(y_1, y_2, \ldots, y_n)\big) \vee \bigvee_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$= (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n) \vee \bigvee_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$= (A_1(x_1y_1) \wedge A_2(x_2y_2) \wedge \ldots \wedge A_n(x_ny_n)) \vee \bigvee_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\geq (A_1(x_1y_1) \vee \lambda_1) \wedge (A_2(x_2y_2) \vee \lambda_2) \wedge \ldots \wedge (A_n(x_ny_n) \vee \lambda_n)$$

$$\geq A_1(x_1) \wedge A_1(y_1) \wedge \mu_1 \wedge A_2(x_2) \wedge A_2(y_2) \wedge \mu_2 \wedge \ldots \wedge A_n(x_n) \wedge A_n(y_n) \wedge \mu_n$$

$$= (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)(y_1, y_2, \ldots, y_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_i$$

$$(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)((x_1, x_2, \ldots, x_n)^{-1}) \vee \bigvee_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$= (A_1({x_1}^{-1}) \wedge A_2({x_2}^{-1}) \wedge \ldots \wedge A_n({x_n}^{-1})) \vee \bigvee_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\geq (A_1({x_1}^{-1}) \vee \lambda_1) \wedge (A_2({x_2}^{-1}) \vee \lambda_2) \wedge \ldots \wedge (A_n({x_n}^{-1}) \vee \lambda_n)$$

$$\geq A_1(x_1) \wedge \mu_1 \wedge A_2(x_2) \wedge \mu_2 \wedge \ldots \wedge A_n(x_n) \wedge \mu_n$$

$$= (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_i$$

yazılır. Böylece, $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)$ nin $LF_{(\vee_{i=1}^{n} \lambda_i, \wedge_{i=1}^{n} \mu_i)}$-altgrup olduğu elde edilir.

Sonuç 2.2.2: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sırasıyla $G_1, G_2, \ldots, G_n$ gruplarının $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupları olsun. Bu durumda, $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)$, $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$'nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubudur.

Sonuç 2.2.2 de oluşturulan $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)$ $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ grubunun bütün $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının bir karakterizasyonu olmayabilir.

Örnek 2.2.3: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$'nin A bulanık altkümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$A(x) = \begin{cases} 0.8, & x = (\bar{0}, \bar{0}), \\ 0.7, & x = (\bar{1}, \bar{0}), \\ 0.6, & x = (\bar{0}, \bar{1}), \\ 0.5, & x = (\bar{1}, \bar{1}). \end{cases}$$

A, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$'nin $F_{(0,0.5)}$-altgrubudur ve A Teorem 1.6.10 (i) koşulunu sağlamasına rağmen $A = A_1 \times A_2$ olacak şekilde $\mathbb{Z}_2$'nin A_1, A_2 $F_{(0,0.5)}$-altgrupları yoktur.

Gerçekten $A = A_1 \times A_2$ olacak şekilde A_1, A_2 $F_{(0,0.5)}$-altgrupları mevcut olsun. Buradan, $A(\bar{1}, \bar{0}) = 0.7$ ve $A(\bar{0}, \bar{1}) = 0.6$ olduğundan $A_1(\bar{1}) \geq 0.7$ ve $A_2(\bar{1}) \geq 0.6$ elde edilir. Böylece,

$$A_1 \times A_2(\bar{1}, \bar{1}) = A_1(\bar{1}) \wedge A_2(\bar{1}) \geq 0.7 \wedge 0.6 = 0.6 \neq 0.5 = A(\bar{1}, \bar{1})$$

çelişkisi elde edilir.

Tanım 2.2.4: G_1, G_2, … , G_n gruplar olsun. A_1, A_2, … , A_n sırasıyla G_1, G_2, … , G_n'nin L-altkümeleri olsun. Bu durumda her $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ için

$$\left(A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n\right)(x_1, x_2, \dots, x_n) = (A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) \wedge \dots \wedge A_n(x_n) \wedge \mu) \vee \lambda$$

olarak tanımlanan $(A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n)$ L-altkümesine A_1, A_2, … , A_n lerin genelleştirilmiş çarpımı denir. $\lambda = 0$ için $(A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n)$ yerine $\left(A_1 \times_\mu A_2 \times_\mu \dots \times_\mu A_n\right)$ notasyonu kullanılacaktır.

Teorem 2.2.5:

i) A_1, A_2, … , A_n sırasıyla G_1, G_2, … , G_n gruplarının $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupları olsun. Bu durumda, $\left(A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n\right)$, $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$'nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubudur.

ii) A, $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$'nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu olsun. Her $i \in \{1,2, \dots, n\}$ için $A_i: G_i \to L$ $\quad A_i(x) = A((e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n))$ olarak tanımlanan L-altküme G_i nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubudur.

İspat:

i) $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
&\left(A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n\right)\left((x_1, x_2, \dots, x_n)(y_1, y_2, \dots, y_n)\right) \vee \lambda \\
&\quad = A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n(x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n) \vee \lambda \\
&\quad = (A_1(x_1y_1) \wedge A_2(x_2y_2) \wedge \dots \wedge A_n(x_ny_n) \wedge \mu) \vee \lambda \\
&\quad = ((A_1(x_1y_1) \vee \lambda) \wedge (A_2(x_2y_2) \vee \lambda) \wedge \dots \wedge (A_n(x_ny_n) \vee \lambda) \wedge \mu) \vee \lambda \\
&\quad \geq (A_1(x_1) \wedge A_1(y_1) \wedge \mu \wedge A_2(x_2) \wedge A_2(y_2) \wedge \mu \wedge \dots \wedge A_n(x_n) \wedge A_n(y_n) \wedge \mu) \vee \lambda \\
&\quad = ((A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) \wedge \dots \wedge A_n(x_n) \wedge \mu) \wedge (A_1(y_1) \wedge A_2(y_2) \wedge \dots \wedge A_n(y_n) \\
&\qquad\qquad \wedge \mu)) \vee \lambda \\
&\quad = ((A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) \wedge \dots \wedge A_n(x_n) \wedge \mu) \vee \lambda) \wedge ((A_1(y_1) \wedge A_2(y_2) \wedge \dots \\
&\qquad\qquad \wedge A_n(y_n) \wedge \mu) \vee \lambda) \wedge \mu \\
&\quad = \left(A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n\right)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&\qquad\qquad \wedge \left(A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n\right)(y_1, y_2, \dots, y_n) \wedge \mu
\end{aligned}$$

$$\left(A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n\right)((x_1, x_2, \dots, x_n)^{-1}) \vee \lambda$$

$$= (A_1(x_1{}^{-1}) \wedge A_2(x_2{}^{-1}) \wedge \dots \wedge A_n(x_n{}^{-1}) \wedge \mu) \ \vee \ \lambda$$

$$= ((A_1(x_1{}^{-1}) \vee \ \lambda) \wedge (A_2(x_2{}^{-1}) \vee \ \lambda) \wedge \dots \wedge (A_n(x_n{}^{-1}) \vee \ \lambda) \wedge \mu) \vee \ \lambda$$

$$\geq (A_1(x_1) \ \wedge \mu \wedge A_2(x_2) \wedge \mu \wedge \dots \wedge A_n(x_n) \wedge \mu) \vee \lambda$$

$$= \left(A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n\right)(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge \mu$$

Böylece, $\left(A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n\right)$ $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrup elde edilir.

ii) A, $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$'nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu ve $x, y \in G_i$ olsun.

$A_i(x) \wedge A_i(y) \wedge \mu$

$$= A\big((e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n)\big) \wedge A\big((e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, y, e_{i+1}, \dots, e_n)\big) \wedge \mu$$

$$\leq A\big((e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, xy, e_{i+1}, \dots, e_n)\big) \vee \lambda$$

$$= A_i(xy) \vee \lambda$$

dir. Benzer şekilde,

$$A_i(x^{-1}) \vee \lambda = A\big((e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, x^{-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)\big) \vee \lambda$$

$$\geq A\big((e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n)\big) \wedge \mu$$

$$= A_i(x) \wedge \mu$$

elde edilir.

Teorem 2.2.6: A, $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$'nin $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu olsun. Her $i \in \{1,2, \dots, n\}$ için $(A(e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n) \wedge A(x_1, \dots, x_{i-1}, e_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \wedge \mu) \vee \lambda = A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\Leftrightarrow$ $A_i(x) = A((e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n))$ olmak üzere, $A = A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n$ şeklinde yazılır.

İspat: . Her $i \in \{1,2, \dots, n\}$ için
$(A(e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n) \wedge A(x_1, \dots, x_{i-1}, e_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \wedge \mu) \vee \lambda = A(x_1, x_2, \dots, x_n)$
olsun. Bu takdirde

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = (A(x_1, e_2, \dots, e_n) \wedge A(e_1, x_2, \dots, x_n) \wedge \mu) \vee \lambda$$

$$= ((A_1(x_1) \wedge (A(e_1, x_2, e_3, \dots, e_n) \wedge A(e_1, e_2, x_3, \dots, x_n) \wedge \mu) \vee \lambda) \wedge \mu) \vee \lambda$$

$$= (A_1(x_1) \wedge (A_2(x_2) \wedge A(e_1, e_2, x_3, \dots, x_n) \wedge \mu) \vee \lambda) \vee \lambda$$

$$= (A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) \wedge A(e_1, e_2, x_3, \dots, x_n) \wedge \mu \vee \lambda$$

$$= \cdots$$

$$= (A_1(x_1) \wedge A_2(x_2) \wedge \dots \wedge A_n(x_n) \wedge \mu) \vee \lambda$$

$$= \left(A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n\right)(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dir. Böylece $A = A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n$ elde edilir. Diğer yandan $A = A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n$ olsun. Bu takdirde

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(A_1 \times_\mu^\lambda A_2 \times_\mu^\lambda \dots \times_\mu^\lambda A_n\right)(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= (A(x_1, e_2, \dots, e_n) \wedge A(e_1, x_2, e_3, \dots, e_n) \wedge \dots \wedge A(e_1, e_2, \dots, x_n) \wedge \mu) \vee \lambda$$

$$\leq ((A(x_1, x_2, \dots, e_n)) \vee \lambda) \wedge \dots \wedge A(e_1, e_2, \dots, x_n) \wedge \mu) \vee \lambda$$

$$= (A(x_1, x_2, \dots, e_n) \wedge \dots \wedge A(e_1, e_2, \dots, x_n) \wedge \mu) \vee \lambda$$

$$\leq \cdots$$

$$\leq (A(x_1, \dots, x_{n-1}, e_n) \wedge A(e_1, e_2, \dots, x_n) \wedge \mu) \vee \lambda$$

$$\leq A(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \lambda$$

$$= A(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dir. Buradan, $(A(x_1, \dots, x_{n-1}, e_n) \wedge A(e_1, e_2, \dots, x_n) \wedge \mu) \vee \lambda = A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ elde edilir. Benzer şekilde, her $i \in \{1,2, \dots, n\}$ için $(A(e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n) \wedge A(x_1, \dots, x_{i-1}, e_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \wedge \mu) \vee \lambda = A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ elde edilir.

2.3. $LF_{(\lambda,\mu)}$-Altgrupların Kafesleri

Önerme 2.3.1: L sonsuz $\wedge$-dağılımlı bir kafes olmak üzere $\{A_i | i \in \Delta\}$, G nin (normal) $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupların ailesi ise $\bigcap_{i\in\Delta} A_i$ G nin (normal) $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruptur.

İspat: $\{A_i | i \in \Delta\}$ $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupların ailesi ve $x, y \in G$ olsun. Bu takdirde

$$\left(\bigcap_{i\in\Delta} A_i\right)(xy) \vee \lambda = \left(\bigwedge_{i\in\Delta} A_i\,(xy)\right) \vee \lambda = \bigwedge_{i\in\Delta} (A_i(xy) \vee \lambda)$$

$$\geq \bigwedge_{i\in\Delta}(A_i(x)\wedge A_i(y)\wedge\mu)=\bigwedge_{i\in\Delta}A_i(x)\wedge\bigwedge_{i\in\Delta}A_i(y)\ \wedge\mu$$
$$=\left(\bigcap_{i\in\Delta}A_i\right)(x)\wedge\left(\bigcap_{i\in\Delta}A_i\right)(y)\wedge\mu$$

dir. Benzer şekilde,

$$\left(\bigcap_{i\in\Delta}A_i\right)(x^{-1})\vee\lambda=\bigwedge_{i\in\Delta}A_i\,(x^{-1})\vee\lambda\geq\bigwedge_{i\in\Delta}A_i(x)\ \wedge\mu=\left(\bigcap_{i\in\Delta}A_i\right)(x)\wedge\mu$$

elde edilir. Böylece $\bigcap_{i\in\Delta}A_i$ $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruptur. $\{A_i|i\in\Delta\}$ normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupların ailesi olmak üzere, $\bigcap_{i\in\Delta}A_i$ nin normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrup olduğu kolaylıkla görülür.

Önerme 2.3.1 in sonucu olarak aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.3.2: $(LF_{(\lambda,\mu)}(G),\leq)$ ve $(NLF_{(\lambda,\mu)}(G),\leq)$ tam kafestir.

Sonuç 2.3.3:

i) G nin (normal) $(\epsilon,\epsilon\vee q)$-bulanık gruplarının kafesi tam kafestir.

ii) L sonsuz $\wedge$-dağılımlı bir kafes olmak üzere, G nin (normal) L-altgruplarının kafesi tam kafestir.

Önerme 2.3.4: L sonsuz $\vee$-dağılımlı bir kafes olmak üzere A, $B\in NLF_{(0,\mu)}(G)$ olsun. Bu durumda, $A\vee B=A\odot_\mu^0 B$ dir.

İspat: A ve B normal $LF_{(0,\mu)}$-altgruplar ise, Önerme 2.1.11 (iv) ile $A\odot_\mu^0 B$ normal $LF_{(0,\mu)}$-altgruptur. Açıkça $A,B\leq A\odot_\mu^0 B$ dir. C normal $LF_{(0,\mu)}$-altgrup ve $A,B\leq C$ olsun. Bu takdirde,

$$(A\odot_\mu^0 B)(x)=A(x)\vee B(x)\vee\bigvee_{x=ab}A(a)\wedge B(b)\wedge\mu$$
$$\leq C(x)\vee\bigvee_{x=ab}(C(a)\wedge C(b)\wedge\mu)\leq C(x)\vee(C(x)\vee 0)=C(x)$$

Böylece $A\vee B=A\odot_\mu^0 B$ elde edilir.

Teorem 2.3.5: L sonsuz $\vee$-dağılımlı bir kafes ise, $NLF_{(0,\mu)}(G)$ modüler bir kafestir.

İspat: A, B ve C normal $LF_{(0,\mu)}$-altgruplar ve $A \geq B$ olsun. $A \wedge (B \vee C) \geq B \vee (A \wedge C)$ eşitsizliği bütün kafesler için geçerlidir. $NLF_{(0,\mu)}(G)$ kafesinin modüler kafes olduğunu göstermek için $A \wedge (B \vee C) \leq B \vee (A \wedge C)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Her $x \in G$ için,

$$
\begin{aligned}
A \wedge (B \vee C)(x) &= A(x) \wedge \left(B \odot_\mu^0 C\right)(x) \\
&= A(x) \wedge \left(B(x) \vee C(x) \vee \bigvee_{x=ab} (B(a) \wedge C(b) \wedge \mu)\right) \\
&= \big(A(x) \wedge B(x)\big) \vee \big(A(x) \wedge C(x)\big) \vee \bigvee_{x=ab} (A(x) \wedge B(a) \wedge C(b) \wedge \mu) \\
&= B(x) \vee \big(A(x) \wedge C(x)\big) \vee \bigvee_{x=ab} (A(x) \wedge A(a) \wedge B(a) \wedge C(b) \wedge \mu) \\
&= B(x) \vee \big(A(x) \wedge C(x)\big) \vee \bigvee_{x=ab} (A(x) \wedge (A(a) \wedge \mu) \wedge B(a) \wedge C(b) \wedge \mu) \\
&\leq B(x) \vee (A \wedge C)(x) \vee \bigvee_{x=ab} (B(a) \wedge A(x) \wedge A(a^{-1}) \wedge C(b) \wedge \mu) \\
&= B(x) \vee (A \wedge C)(x) \vee \bigvee_{x=ab} (B(a) \wedge (A(x) \wedge A(a^{-1}) \wedge \mu) \wedge C(b) \wedge \mu) \\
&\leq B(x) \vee (A \wedge C)(x) \vee \bigvee_{x=ab} (B(a) \wedge A(b) \wedge C(b) \wedge \mu) \\
&= B(x) \vee (A \wedge C)(x) \vee \bigvee_{x=ab} (B(a) \wedge (A \wedge C)(b) \wedge \mu) \\
&= \ B \odot_\mu^0 (A \wedge C)(x) \\
&= \ B \vee (A \wedge C)(x)
\end{aligned}
$$

dir. Sonuç olarak, G nin normal $LF_{(0,\mu)}$-altgruplarının kafesi modüler kafestir.

Sonuç 2.3.6:

i) G nin normal $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-bulanık altgruplarının kafesi modülerdir.

ii) L sonsuz $\vee$-dağılımlı bir kafes olmak üzere, G nin normal L-altgruplarının kafesi modülerdir.

Uyarılar:

i) G nin normal bulanık altgruplarının kafesinin modüler olduğu [3] ve [18] çalışmalarında verilmiştir. Bu sonuç Teorem 2.3.5 in özel durumu olarak elde edilebilir.

ii) $\lambda \neq 0$ için, L sonsuz $\vee$-dağılımlı bir kafes olsa dahi, G nin normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının kafesi modüler olması gerekmez.

Örnek 2.3.7: $L = \{0, \lambda, k, \mu, 1\}$ sıralı kümesinin kafes diyagramı Şekil 7 deki gibi olsun.

Şekil 7: Örnek 2.3.7 de verilen L kafesinin diyagramı

Eğer $\mathbb{Z}$ nin L-altkümeleri A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 aşağıdaki gibi tanımlanırsa;

$$A_1(x) = \begin{cases} \mu, & 10|x \; ise, \\ k, & diğer. \end{cases} \qquad A_2(x) = \begin{cases} \mu, & 10|x \; ise, \\ k, & 2|x \; ve \; 5 \nmid x, \\ \lambda, & diğer. \end{cases}$$

$$A_3(x) = \begin{cases} \mu, & 10|x \; ise, \\ \lambda, & 2|x \; ve \; 5 \nmid x, \\ k, & 5|x \; ve \; 2 \nmid x, \\ 0, & diğer. \end{cases} \qquad A_4(x) = \begin{cases} \mu, & 10|x \; ise, \\ k, & 2|x \; ve \; 5 \nmid x, \\ \lambda, & 5|x \; ve \; 2 \nmid x, \\ 0, & diğer. \end{cases}$$

$$A_5(x) = \begin{cases} \mu, & 10|x \; ise, \\ \lambda, & 2|x, 5 \nmid x \; veya \; 5|x, 2 \nmid x, \\ 0, & diğer. \end{cases}$$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in NLF_{(\lambda,\mu)}(\mathbb{Z})$ olduğu açıktır. Ayrıca bu normal $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplar için $A_4 \vee A_3 = A_1$, $A_2 \wedge A_3 = A_5$ ve $A_1 \geq A_2 \geq A_4 \geq A_5$ ifadeleri doğrudur. Buradan $A_2 \wedge (A_4 \vee A_3)(1) = \lambda$ ve $A_4 \vee (A_2 \wedge A_3)(1) = 0$ olduğundan

$$A_2 \wedge (A_4 \vee A_3) \neq A_4 \vee (A_2 \wedge A_3)$$

elde edilir. Böylece $NLF_{(\lambda,\mu)}(\mathbb{Z})$ modüler kafes değildir.

Önerme 2.3.8: $\mu \in L\backslash\{0\}$ olsun.

i) H, G nin altgrubu olmak üzere, $\mu_H \in LF_{(0,\mu)}(G)$ dir.

ii) $\{\mu_H | H \leq G\}$ kümesi $LF_{(0,\mu)}(G)$ kafesinin alt kafesidir.

İspat:

i) Önerme 1.6.2 den μ_H L-altgrup olduğundan $LF_{(0,\mu)}$-altgrup olduğu açıktır.

ii) Önerme 1.6.4 (i) ile benzer olarak $\{\mu_H | H \leq G\}$, $LF_{(0,\mu)}(G)$ kafesinin alt kafesidir.

Teorem 2.3.9: L sonsuz $\vee$-dağılımlı bir kafes olsun. Bu durumda $G \times G$ nin $LF_{(0,\mu)}$-altgruplarının kafesi modülerdir ancak ve ancak G değişmeli gruptur.

İspat: $\Rightarrow$: $G \times G$ nin $LF_{(0,\mu)}$-altgruplarının kafesi modüler olduğundan Önerme 2.3.8 ile onun $\{\mu_H | H \leq G \times G\}$ alt kafesi modülerdir. Önerme 1.6.4 (ii) den dolayı $G \times G$ altgruplarının kafesi modülerdir. Sonuç olarak, Teorem 1.3.2 (iii) den G abeldir.

$\Leftarrow$: G bir abel grubu ise $G \times G$ de bir abel grubudur. Buradan $LF_{(0,\mu)}(G \times G) = NLF_{(0,\mu)}(G \times G)$ elde edilir. Teorem 2.3.5 den, $NLF_{(0,\mu)}(G \times G)$ modüler bir kafestir. Böylece, $G \times G$ nin $LF_{(0,\mu)}$-altgruplarının kafesi modülerdir.

Önerme 2.3.10: L bir zincir, G sonlu bir grup ve A, B G nin $NLF_{(0,\mu)}$-altgrupları olsun. Bu takdirde, her $t \in (0, \mu]$ için $U(A, t) \neq \emptyset$ ve $U(B, t) \neq \emptyset$ ise $U(A \vee B, t) = U(A, t) \cdot U(B, t)$ dir.

İspat:

$x \in U(A \vee B, t)$ olsun. Bu durumda

$$(A \vee B)(x) = A(x) \vee B(x) \vee \bigvee_{x=ab} (A(a) \wedge B(b) \wedge \mu) \geq t$$

dır. L bir zincir olduğundan üç değerlendirme yapılır:

Eğer $(A \vee B)(x) = A(x)$ ise, $x \in U(A,t)$ dir. Teorem 2.1.9 (ii) den $U(B,t)$, G nin altgrubu ve buradan $x \in U(A,t) \cdot U(B,t)$ dir.
Eğer $(A \vee B)(x) = B(x)$ ise, benzer şekilde $x \in U(A,t) \cdot U(B,t)$ dir.
Eğer

$$(A \vee B)(x) = \bigvee_{x=ab} (A(a) \wedge B(b) \wedge \mu) \geq t$$

ise, G sonlu olduğundan, $\exists a, b \in G$ öyle ki $x = ab$ ve $a \in U(A,t)$ $b \in U(B,t)$ dir. Buradan, $x \in U(A,t) \cdot U(B,t)$ elde edilir. $U(A \vee B, t) \subseteq U(A,t) \cdot U(B,t)$ ve açıkça $U(A \vee B, t) = U(A,t) \cdot U(B,t)$ dir.

Sonsuz bir grup için Önerme 2.3.10 genelde doğru değildir. Bu duruma bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.3.11: $\mathbb{Z}$ nin A ve B bulanık kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$A(x) = \begin{cases} \mu, & x = 0, \\ \mu - \frac{\mu}{k}, & x \in 2^k\mathbb{Z} \backslash 2^{k+1}\mathbb{Z}, \\ 0, & diğer. \end{cases} \qquad B(x) = \begin{cases} \mu, & x = 0, \\ \mu - \frac{\mu}{k}, & x \in 3^k\mathbb{Z} \backslash 3^{k+1}\mathbb{Z}, \\ 0, & diğer. \end{cases}$$

Burada A ve B $\mathbb{Z}$ nin $F_{(0,\mu)}$-altgruplarıdır. $U(A,\mu) \cdot U(B,\mu) = \{0\}$ iken $U(A \vee B, \mu) = \mathbb{Z}$ dir.

Teorem 2.3.12: L bir zincir olsun. Bu durumda G grubu yerel devirlidir ancak ve ancak $LF_{(0,\mu)}(G)$ dağılımlı bir kafestir.

İspat: $\Leftarrow$: $LF_{(0,\mu)}(G)$ dağılımlı bir kafes olsun. Önerme 2.3.8 kullanılarak $\{\mu_H | H \leq G\}$ kafesinin dağılımlı olduğu elde edilir. Önerme 1.6.4 (ii) kullanılarak G nin altgruplarının kafesinin dağılımlı olduğu bulunur. Teorem 1.3.2 (ii) den G yerel devirlidir.

$\Rightarrow$: Her kafes için $A \wedge (B \vee C) \geq (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ eşitsizliği mevcuttur. Diğer yandan

$x = ab$ olmak üzere $t \coloneqq A(x) \wedge B(a) \wedge C(b) \wedge \mu$ olsun. Bu durumda $x \in U(A,t)$ $a \in U(B,t)$ ve $b \in U(C,t)$ dir. Teorem 1.3.2 (ii) ile yerel devirli gruplarının altgruplarının kafesi dağılımlı kafes olduğundan

$x \in U(A,t) \cap (U(B,t) \cdot U(C,t)) = (U(A,t) \cap U(B,t)) \cdot (U(A,t) \cap U(C,t))$ dir.

$\exists\, u, v \in G$ öyle ki $x = uv$ ve $u \in U(A,t) \cap U(B,t)$ ve $v \in U(A,t) \cap U(C,t)$ dir. Buradan,

$$A(x) \wedge B(a) \wedge C(b) \wedge \mu \leq A(u) \wedge B(u) \wedge A(v) \wedge C(v)$$

$$\leq (A \wedge B)(u) \wedge (A \wedge C)(v)$$

dır. Böylece,

$$\bigvee_{x=ab} A(x) \wedge B(a) \wedge C(b) \wedge \mu \leq \bigvee_{x=uv} (A \wedge B)(u) \wedge (A \wedge C)(v) \wedge \mu$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$A \wedge (B \vee C)(x) = A(x) \wedge \left(B(x) \vee C(x) \vee \bigvee_{x=ab} (B(a) \wedge C(b) \wedge \mu) \right)$$

$$= (A(x) \wedge B(x)) \vee (A(x) \wedge C(x)) \vee \bigvee_{x=ab} (A(x) \wedge B(a) \wedge C(b) \wedge \mu)$$

$$\leq (A \wedge B)(x) \vee (A \wedge C)(x) \vee \bigvee_{x=uv} (A \wedge B)(u) \wedge (A \wedge C)(v) \wedge \mu$$

$$= \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big)(x)$$

dir. Böylece, $A \wedge (B \vee C)(x) \leq \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big)(x)$ elde edilir. Sonuç olarak, $LF_{(0,\mu)}(G)$ dağılımlı bir kafestir.

Teorem 2.3.12 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 2.3.13:

i) G yerel devirlidir ancak ve ancak G'nin $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-bulanık altgruplarının kafesi dağılımlıdır.

ii) L bir zincir olmak üzere G yerel devirlidir ancak ve ancak G'nin L-bulanık altgruplarının kafesi dağılımlıdır.

Uyarı: $\lambda \neq 0$ olması durumunda genel olarak bir yerel devirli grubun bütün $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının kafesinin dağılımlı olması gerekmez.

Örnek 2.3.14: L Şekil 6 daki gibi olmak üzere, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 $\mathbb{Z}_6$ nın bulanık altkümeleri aşağıdaki gibi olsun:

$$A_1(x) = \begin{cases} \mu, & x = \bar{0}, \\ k, & diğer. \end{cases} \qquad A_2(x) = \begin{cases} \mu, & x = \bar{0}, \\ k, & x \in \{\bar{2}, \bar{4}\}, \\ \lambda, & diğer. \end{cases} \qquad A_3(x) = \begin{cases} \mu, & x = \bar{0}, \\ \lambda, & x \in \{\bar{2}, \bar{4}\}, \\ k, & x = \bar{3}, \\ 0, & diğer. \end{cases}$$

$$A_4(x) = \begin{cases} \mu, & x = \bar{0}, \\ \lambda, & x \in \{\bar{2}, \bar{4}\}, \\ k, & x = \bar{3}, \\ 0, & diğer. \end{cases} \qquad A_5(x) = \begin{cases} \mu, & x = \bar{0}, \\ \lambda, & x \in \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}, \\ 0, & diğer. \end{cases}$$

Bu takdirde $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in LF_{(\lambda,\mu)}(\mathbb{Z}_6)$ dir. Oysaki,

$$A_2 \wedge (A_3 \vee A_4)(\bar{1}) = A_2 \wedge A_1(\bar{1}) = A_2(\bar{1}) = \lambda$$

$$(A_2 \wedge A_3) \vee (A_2 \wedge A_4)(\bar{1}) = A_5 \vee A_4(\bar{1}) = A_4(\bar{1}) = 0$$

ve $\lambda \neq 0$ olduğundan $LF_{(\lambda,\mu)}(\mathbb{Z}_6)$ dağılımlı bir kafes değildir.

Uyarı: Bir G grubunun $F_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının kafesi komplementlenebilir değildir. Gerçekten, $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere her $x \in G$ için $A(x) = \alpha$ olsun. Açıkça $A \in F_{(\lambda,\mu)}(G)$ dir. Fakat A nın komplementi olacak şekilde bir $F_{(\lambda,\mu)}$-altgrup bulunamaz.

Teorem 2.3.15: Her G grubu için $F_{(0,\mu)}(G)$ yarı-komplementlenebilir bir kafestir.

İspat: A, G nin $F_{(0,\mu)}$-altgrubu olsun. $S_A \coloneqq \{x \in G | A(x) = 0\}$ olarak tanımlansın.

- $S_A = \emptyset$ ise $A^{\perp} = 0$ dır.
- $S_A \neq \emptyset$ ise,
  - i) $e \notin S_A$ ise $A^{\perp}(e) = 0$ olmalıdır. Her $x \in G$ için $A^{\perp}(e) \geq A^{\perp}(x) \wedge \mu$ olduğundan $A^{\perp} = 0$ dır.
  - ii) $e \in S_A$ ise her $x \in G$ için $0 = A(e) \geq A(x) \wedge \mu$ olduğundan $A = 0$ elde edilir. Bu durumda $A^{\perp} = 1$ dir.

Sonuç olarak, $F_{(0,\mu)}(G)$ yarı-komplementlenebilirdir.

Teorem 2.3.16: $\lambda \neq 0$ olmak üzere, G nin altgruplarının kafesi bir zincirdir ancak ve ancak $F_{(\lambda,\mu)}(G)$ yarı-komplementlenebilir bir kafestir.

İspat: ⇒: A, $F_{(\lambda,\mu)}$-altgrup olsun. $S_A \coloneqq \{x \in G | A(x) = 0\}$ olarak tanımlansın.

- $S_A = \emptyset$ ise $A^{\perp} = 0$ dır.
- $S_A \neq \emptyset$ ise,

  i) $e \notin S_A$ ise S_A nin içerdiği bir altgrup yoktur.

$$A^{\perp}(x) = \begin{cases} \lambda, & x \in S_A, \\ 0, & diğer. \end{cases}$$

olarak tanımlanan $A^{\perp}$ $F_{(\lambda,\mu)}$-altgruptur ve $A \wedge A^{\perp} = 0$ dır. Varsayalım ki B $F_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu için $A \wedge B = 0$ ve $B > A^{\perp}$ olsun. Bu durumda $\exists x \in S_A$ öyle ki $B(x) > A^{\perp}(x)$ dir. $B(x) \coloneqq t$ olsun. Buradan $t > \lambda$ ve $x \in U(B,t)$ dir. B $F_{(\lambda,\mu)}$-altgrup olduğundan $\mu \geq t > \lambda$ ise $U(B,t)$, $t > \mu > \lambda$ ise $U(B,\mu)$ G nin altgrubudur. Bu ise S_A nın altgrup içermemesiyle çelişir. Böylece $A^{\perp}$, A nın yarı komplementidir.

ii) $e \in S_A$ ise S_A en az bir tane altgrup içerir. G nin altgruplarının kafesi bir zincir olduğundan S_A nın içerdiği altgrupların en büyüğü H olsun. Bu durumda

$$A^{\perp}(x) = \begin{cases} 1, & x \in H, \\ \lambda, & x \in S_A \backslash H, \\ 0, & diğer. \end{cases}$$

olarak tanımlanan $A^{\perp}$, $F_{(\lambda,\mu)}$-altgruptur ve $A \wedge A^{\perp} = 0$ dır. (i) şıkkında olduğu gibi varsayalım ki B $F_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu için $A \wedge B = 0$ ve $B > A^{\perp}$ olsun. Buradan $\exists x \in S_A \backslash H$ öyle ki $t = B(x) > A^{\perp}(x)$ dir. Buradan $t > \lambda$ ve $x \in U(B,t)$ dir. $H \subset U(B,t) \subseteq S_A$ veya $H \subset U(B,\mu) \subseteq S_A$ elde edilir ki bu, H ın S_A nin içerdiği en büyük altgrup olmasıyla çelişir. Böylece $A^{\perp}$, A nın yarı komplementidir.

⇐: $F_{(\lambda,\mu)}(G)$ yarı-komplementlenebilir bir kafes olsun. Varsayalım ki G nin altgruplarının kafesi bir zincir olmasın. Bu durumda, G nin karşılaştırılamayan H ve K altgrupları mevcuttur. $0 < b < \lambda < \mu$ olmak üzere,

$$A(x)=\begin{cases} b, & x\in G\backslash H\cup K,\\ 0, & diğer. \end{cases}$$

olarak tanımlanır ise A, $F_{(\lambda,\mu)}$-altgruptur. Bu durumda,

$$B(x)=\begin{cases} 1, & x\in H,\\ \lambda, & x\in K\backslash H,\\ 0, & diğer. \end{cases} \qquad C(x)=\begin{cases} 1, & x\in K,\\ \lambda, & x\in H\backslash K,\\ 0, & diğer. \end{cases}$$

$F_{(\lambda,\mu)}$-altgruplardır. Ayrıca, $A\wedge B=0$ ve $A\wedge C=0$ dir. $F_{(\lambda,\mu)}(G)$ yarı-komplementlenebilir kafes olduğundan, B ve C den büyük ve A ile infimumu 0 olan bir D $F_{(\lambda,\mu)}$-altgrubu vardır. H,K karşılaştırılamaz altgruplar olduğundan $\exists x\in H$ öyle ki $x\notin K$ ve $\exists y\in K$ öyle ki $y\notin H$ dir. Buradan $xy\notin H\cup K$dir.

$$D(xy)\vee\lambda\geq D(x)\wedge D(y)\wedge\mu\geq B(x)\wedge C(y)\wedge\mu=\mu$$

olduğundan $D(xy)\geq \mu$ elde edilir. Burada, $A\wedge D=0$ olduğundan

$$0=A\wedge D(xy)=A(xy)\wedge D(xy)\geq b\wedge\mu=b$$

çelişkisi elde edilir. Buradan G nin altgruplarının kafesi zincirdir.

Aşağıdaki sonuç Teorem 1.3.2 (v) ve Teorem 2.3.16'dan kolayca elde edilir.

Sonuç 2.3.17: G sonlu bir grup olsun. G devirli p-gruptur ancak ve ancak $F_{(\lambda,\mu)}(G)$ yarı-komplementlenebilirdir.

Teorem 2.3.18: G yerel devirli gruptur ancak ve ancak $F_{(0,\mu)}(G)$ Stone kafesidir.

İspat: Teorem 2.3.15 ile $F_{(0,\mu)}(G)$ yarı-komplementlenebilir kafestir. Teorem 2.3.12 ile $F_{(0,\mu)}(G)$ dağılımlı kafestir. A $F_{(0,\mu)}$-altgrup olsun. İspat için Teorem 1.2.21 deki denk şartlardan $A^{\perp}\vee(A^{\perp})^{\perp}=1$ olduğunu göstermek yeterlidir. $S_A\coloneqq\{x\in G\mid A(x)=0\}$ olarak tanımlansın.

- $S_A=\emptyset$ ise $A^{\perp}=0$ elde edilir. Buradan $(A^{\perp})^{\perp}=1$ olduğundan $A^{\perp}\vee(A^{\perp})^{\perp}=1$ elde edilir.
- $S_A\neq\emptyset$ ise,
  i) $e\notin S_A$ ise $A^{\perp}(e)=0$ dır. Buradan $A^{\perp}=0$ elde edilir. Bir önceki duruma benzer şekilde $A^{\perp}\vee(A^{\perp})^{\perp}=1$ dir.
  ii) $e\in S_A$ ise her $x\in G$ için $0=A(e)\geq A(x)\wedge\mu$ olduğundan $A=0$ elde edilir. Bu durumda $A^{\perp}=1$ ve $A^{\perp}\vee(A^{\perp})^{\perp}=1$ dir.

Sonuç olarak, $F_{(0,\mu)}(G)$ Stone kafesidir.

Tersine, $F_{(0,\mu)}(G)$ Stone kafesi ise $F_{(0,\mu)}(G)$ dağılımlı bir kafes olduğundan Teorem 2.3.12 ile G yerel devirli gruptur.

2.4. TL-Altgrupların Kafesleri

Bu bölümde, L-altgrupların bir genelleştirilmesi olan TL-altgrupların kafesleri araştırılmıştır.

Tanım 2.4.1: A ve B, G nin L-altkümeleri olmak üzere, $A \odot_T B$ L-altkümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır: Her $x \in G$ için,

$$(A \odot_T B)(x) = A(x) \vee B(x) \vee \bigvee_{x=ab} A(a)TB(b)$$

dir.

Teorem 2.4.2: T, L tam kafesi üzerinde sonsuz $\vee$-dağılımlı bir t-norm olmak üzere A ve B G nin normal TL-altgrupları ise $A \odot_T B$ G nin normal TL-altgrubudur ve $NTLF(G)$ tam kafesinde $A \vee B = A \odot_T B$ dir.

İspat: Her $x, y \in G$ için,

$$(A \odot_T B)(x)T(A \odot_T B)(y) = \left(A(x) \vee B(x) \vee \bigvee_{x=ab} A(a)TB(b)\right)$$

$$T\left(A(y) \vee B(y) \vee \bigvee_{y=cd} A(c)TB(d)\right)$$

$$= (A(x)TA(y)) \vee (A(x)TB(y)) \vee \big(B(x)TA(y)\big) \vee \big(B(x)TB(y)\big)$$

$$\vee \left(\bigvee_{x=ab} \big(A(y)TA(a)TB(b)\big) \right) \vee \left(\bigvee_{x=ab} \big(B(y)TA(a)TB(b)\big) \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{y=cd} \big(A(x)TA(c)TB(d)\big) \right) \vee \left(\bigvee_{y=cd} \big(B(x)TA(c)TB(d)\big) \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{\substack{x=ab \\ y=cd}} \big(A(a)TB(b)TA(c)TB(d)\big) \right)$$

$$\leq A(xy) \vee B(xy) \vee (A(x)TB(y)) \vee (A(xyx^{-1})TB(x))$$

$$\vee \left(\bigvee_{x=ab} \big(A(a)TA(byb^{-1})TB(b)\big) \right) \vee \left(\bigvee_{x=ab} \big(A(a)TB(by)\big) \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{y=cd} \big(A(xc)TB(d)\big) \right) \vee \left(\bigvee_{y=cd} \big(A(xcx^{-1})TB(xd)\big) \right)$$

$$\vee \left(\bigvee_{\substack{x=ab \\ y=cd}} \big(A(a)TA(bcb^{-1})TB(b)TB(d)\big) \right)$$

$$\leq A(xy) \vee B(xy) \vee \left(\bigvee_{xy=uv} \big(A(u)TB(v)\big) \right)$$

$$= (A \odot_T B)(xy)$$

dir. Ayrıca,

$$(A \odot_T B)(x^{-1}) = A(x^{-1}) \vee B(x^{-1}) \vee \bigvee_{x^{-1}=ab} \big(A(a)TB(b)\big)$$

$$= A(x) \vee B(x) \vee \bigvee_{x^{-1}=ab} \big(A(a^{-1})TB(b^{-1})\big)$$

$$\leq A(x) \vee B(x) \vee \bigvee_{x^{-1}=ab} \big(A(b^{-1}a^{-1}b)TB(b^{-1})\big)$$

$$\leq A(x) \vee B(x) \vee \bigvee_{x=uv} \big(A(u) \wedge B(v)\big)$$

$$= (A \odot_T B)(x)$$

dir. Böylece $A \odot_T B$, G nin TL-altgrubudur. Diğer yandan,

$$(A \odot_T B)(y) = A(y) \vee B(y) \vee \bigvee_{y=cd} \big(A(c)TB(d)\big)$$

$$\leq A(xyx^{-1}) \vee B(xyx^{-1}) \vee \bigvee_{y=cd} \big(A(xcx^{-1})TB(xdx^{-1})\big)$$

$$\leq A(xyx^{-1}) \vee B(xyx^{-1}) \vee \bigvee_{xyx^{-1}=uv} \big(A(u)TB(v)\big)$$

$$= (A \odot_T B)(xyx^{-1})$$

dir. Böylece $(A \odot_T B)$ G nin normal TL-altgrubudur. Açık olarak, $A, B \leq A \odot_T B$ dir. C, G nin normal TL-altgrubu ve $A, B \leq C$ olsun. Buradan,

$$(A \odot_T B)(x) = A(x) \vee B(x) \vee \bigvee_{x=ab} \big(A(a)TB(b)\big)$$

$$\leq C(x) \vee \bigvee_{x=ab} \big(C(a)TC(b)\big)$$

$$\leq C(x) \vee C(x)$$

$$= C(x)$$

elde edilir. Böylece, $A \odot_T B \leq C$ olup $A \vee B = A \odot_T B$ olduğu elde edilir.

$T = \wedge$ için $NTF(G)$ kafesi modüler olurken herhangi bir t-norm için $NTF(G)$ kafesinin modüler olması gerekmez.

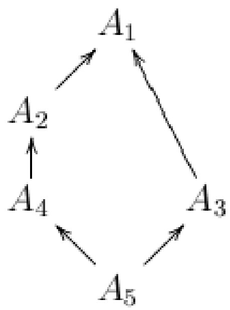
Örnek 2.4.3: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, $\mathbb{Z}$ nin bulanık altkümeleri aşağıdaki gibi olsun.

$$A_1(x) = \begin{cases} 0.8, & 15|x \; ise, \\ 0.6, & 3|x \; ve \; 5 \nmid x, \\ 0.7, & 5|x \; ve \; 3 \nmid x, \\ 0.42, & diğer. \end{cases} \qquad A_2(x) = \begin{cases} 0.8, & 15|x \; ise, \\ 0.6, & 3|x \; ve \; 5 \nmid x, \\ 0.6, & 5|x \; ve \; 3 \nmid x, \\ 0.4, & diğer. \end{cases}$$

$$A_3(x) = \begin{cases} 0.8, & 15|x \ ise, \\ 0.5, & 3|x \ ve \ 5 \nmid x, \\ 0.7, & 5|x \ ve \ 3 \nmid x, \\ 0.35, & diğer. \end{cases} \qquad A_4(x) = \begin{cases} 0.8, & 15|x \ ise, \\ 0.6, & 3|x \ ve \ 5 \nmid x, \\ 0.6, & 5|x \ ve \ 3 \nmid x, \\ 0.36, & diğer. \end{cases}$$

$$A_5(x) = \begin{cases} 0.8, & 15|x \ ise, \\ 0.5, & 3|x \ ve \ 5 \nmid x, \\ 0.6, & 5|x \ ve \ 3 \nmid x, \\ 0.35, & diğer. \end{cases}$$

Bu durumda, $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ kümesi $NT_PF(\mathbb{Z})$ de aşağıdaki şekilde bir alt kafes oluşturur.



Şekil 8. Örnek 2.3.2 de verilen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 in kafes diyagramı

Böylece, $NT_PF(\mathbb{Z})$ kafesi N_5 kafesini alt kafes olarak içerdiğinden modüler bir kafes değildir.

Uyarı: $T_1 \leq T_2$ için $NT_2F(G) \subseteq NT_1F(G)$ olsa da bu kafeslerin iç içe geçen alt kafesler olması gerekmez.

Örnek 2.4.4: [0,1] kafes üzerindeki T_P ve T_L t-normlarını göz önüne alalım. $T_L < T_P$ olduğu açıktır. Örnek 2.4.3 teki A_2 ve A_3 bulanık altkümeleri göz önüne alınacak olursa bu iki bulanık altküme hem normal T_P-bulanık altgrup hem de normal T_L-bulanık altgruptur.

$$A_2 \vee_{T_L} A_3(1) = A_2 \odot_{T_L} A_3(1) = A_2(1) \vee A_3(1) \vee \bigvee_{1=ab} A_2(a) T_L A_3(b)$$

$$= 0{,}4 \vee 0{,}35 \vee 0{,}3 \vee 0{,}1 = 0{,}4$$

dir. Örnek 2.4.3 te $A_2 \vee_{T_P} A_3 = A_1$ olduğundan $A_2 \vee_{T_P} A_3(1) = 0{,}42$ dir. Böylece $A_2 \vee_{T_L} A_3 \neq A_2 \vee_{T_P} A_3$ dir. $NT_PF(\mathbb{Z})$ kafesi $NT_LF(\mathbb{Z})$ kafesinin alt kafesi değildir.

Teorem 2.4.5: L yoğun, sonsuz $\vee$-dağılımlı bir kafes, T sonsuz $\vee$-dağılımlı bir t-norm ve G sonsuz devirli bir grup olsun. Bu takdirde $TLF(G)$ modüler kafestir ancak ve ancak $T = \wedge$ dir.

İspat: $\Leftarrow$: Teorem 2.3.5 den G nin normal L-altgruplarının kafesi modülerdir. G sonsuz devirli grubu değişmeli olduğundan her L-altgrubu, normal L-altgruptur. Böylece G nin L-altgruplarının kafesi modülerdir.

$\Rightarrow$: Her sonsuz devirli grup $\mathbb{Z}$ grubuna izomorf olduğundan sonsuz devirli bir G grubu için $TLF(G) \cong TLF(\mathbb{Z})$ dir. Varsayalım ki $T \neq \wedge$ olsun. Bu durumda $\exists a \in L \backslash \{0,1\}$ öyle ki $aTa < a$ dır. L kafesi yoğun olduğundan $aTa < c < b < a < 1$ olacak şekilde $b, c \in L$ mevcuttur. A_1, A_2, A_3 $\mathbb{Z}$ nin L-altkümeleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$A_1(x) = \begin{cases} 1, & 6|x \ ise, \\ a, & 2|x \ ve \ 3 \nmid x, \\ b, & diğer. \end{cases}$$

$$A_2(x) = \begin{cases} 1, & 2|x \ ise, \\ aTa, & diğer. \end{cases} \qquad A_3(x) = \begin{cases} 1, & 6|x \ ise, \\ a, & 2|x \ ve \ 3 \nmid x, \\ c, & 3|x \ ve \ 2 \nmid x, \\ b, & diğer. \end{cases}$$

Buradan A_1, A_2, A_3 $\mathbb{Z}$ nin normal TL-altgrupları ve $A_1 \geq A_3$ olup

$$A_1 \wedge (A_3 \vee A_2)(3) = b$$

dir. Diğer yandan

$$A_3 \vee (A_1 \wedge A_2)(3) = c$$

dir. Bu ise $TLF(\mathbb{Z})$ nin modüler kafes olmasıyla çelişir. Böylece $T = \wedge$ dir.

Teorem 2.4.6: L bir zincir ve T $\vee$-dağılımlı bir t-norm ise $TLF(\mathbb{Z}_2)$ modüler kafestir.

İspat: $A, B, C \in TLF(\mathbb{Z}_2)$ ve $A \leq B$ olsun. Açık olarak $A \vee (B \wedge C) \leq B \wedge (A \vee C)$ dir.

$$A \vee (B \wedge C)(\bar{1}) = A(\bar{1}) \vee (B \wedge C)(\bar{1}) \vee \big(A(\bar{0})T(B \wedge C)(\bar{1})\big) \vee \big(A(\bar{1})T(B \wedge C)(\bar{0})\big)$$

$$= A(\bar{1}) \vee (B \wedge C)(\bar{1})$$

$$= (B \wedge A)(\bar{1}) \vee (B \wedge C)(\bar{1})$$

$$= B(\bar{1}) \wedge \big(A(\bar{1}) \vee C(\bar{1})\big)$$

$$= B(\bar{1}) \wedge \Big(A(\bar{1}) \vee C(\bar{1}) \vee \big(A(\bar{0})TC(\bar{1})\big) \vee \big(A(\bar{1})TC(\bar{0})\big)\Big)$$

$$= B(\bar{1}) \wedge (A \vee C)(\bar{1})$$

$$= B \wedge (A \vee C)\ (\bar{1})$$

dir. Böylece ispat için $B \wedge (A \vee C)(\bar{0}) \ \leq \ A \vee (B \wedge C)(\bar{0})$ olduğunu göstermek yeterlidir. Varsayalım ki $B \wedge (A \vee C)(\bar{0}) > A \vee (B \wedge C)(\bar{0})$ olsun.

$$B(\bar{0}) \wedge \Big(A(\bar{0}) \vee C(\bar{0}) \vee \big(A(\bar{1})TC(\bar{1})\big) \vee \big(A(\bar{0})TC(\bar{0})\big)\Big)$$
$$> A(\bar{0}) \vee (B \wedge C)(\bar{0}) \vee (A(\bar{1})T(B \wedge C)(\bar{1})) \vee (A(\bar{0})T(B \wedge C)(0))$$

$$B(\bar{0}) \wedge \Big(A(\bar{0}) \vee C(\bar{0}) \vee \big(A(\bar{1})TC(\bar{1})\big)\Big) > A(\bar{0}) \vee (B \wedge C)(\bar{0}) \vee \big(A(\bar{1})T(B \wedge C)(\bar{1})\big)$$

ve buradan,

$$A(\bar{0}) \vee (B \wedge C)(\bar{0}) \vee \Big(B(\bar{0}) \wedge \big(A(\bar{1})TC(\bar{1})\big)\Big)$$
$$> A(\bar{0}) \vee (B \wedge C)(\bar{0}) \vee \big(A(\bar{1})T(B \wedge C)(\bar{1})\big) \quad .....(*)$$

elde edilir. L bir zincir olduğundan,

$$B(\bar{0}) \wedge (A(\bar{1})TC(\bar{1})) > \ A(\bar{1})T(B \wedge C)(\bar{1})$$

ve böylece

$$A(\bar{1})TC(\bar{1}) > \ A(\bar{1})T(B \wedge C)(\bar{1})$$

dir. Buradan $C(\bar{1}) > (B \wedge C)(\bar{1})$ elde edilir. Böylece $C(\bar{1}) > B(\bar{1}) \geq A(\bar{1})$ dir. Diğer yandan

$$B(\bar{0}) \wedge \big(A(\bar{1})TC(\bar{1})\big) \leq B(\bar{0}) \wedge \big(C(\bar{1})TC(\bar{1})\big)$$
$$\leq B \wedge C(\bar{0})$$

olduğunu (*) da kullanırsak,

$$A(\bar{0}) \vee (B \wedge C)(\bar{0}) > A(\bar{0}) \vee (B \wedge C)(\bar{0}) \vee (A(\bar{1})T(B \wedge C)(\bar{1})$$

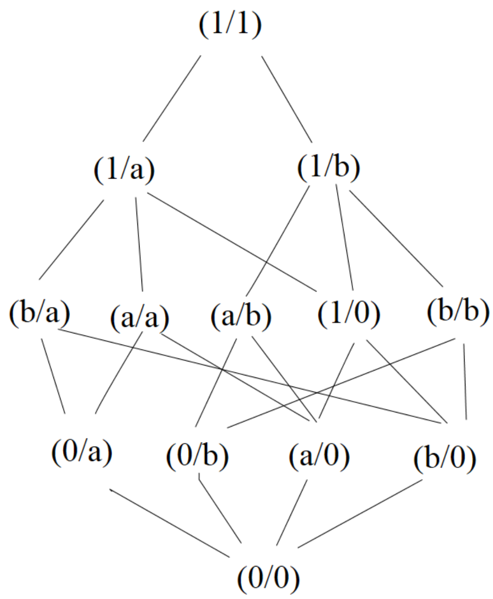
çelişkisi elde edilir. Buradan

$$B \wedge (A \vee C)(\bar{0}) \ \leq \ A \vee (B \wedge C)(\bar{0})$$

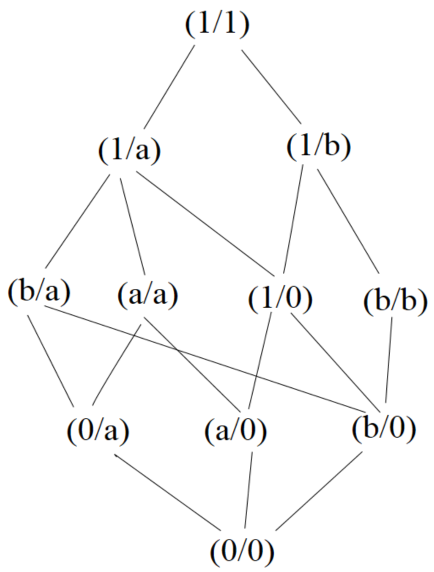
dir. Sonuç olarak $TLF(\mathbb{Z}_2)$ modüler kafestir.

Uyarı: Zincir olmayan bir L kafesi için genel olarak $TLF(\mathbb{Z}_2)$ nin modüler kafes olması gerekmez.

Örnek 2.4.7: $L = \{0, a, b, 1\}$ kafes diyagramı Şekil 5 deki gibi olsun. Bu kafes üzerinde sadece Tablo 1 ile gösterilen T_1, T_2, T_3, T_4 t-normları mevcut olup L üzerindeki keyfi bir T t-normu için $TLF(\mathbb{Z}_2) = \{A: \mathbb{Z}_2 \to L \mid A(\bar{0}) \geq A(\bar{1})TA(\bar{1})\}$ dir. A yerine $(A(\bar{0})/ A(\bar{1}))$ notasyonu kullanılırsa, $T_1LF(\mathbb{Z}_2)$, $T_2LF(\mathbb{Z}_2)$, $T_4LF(\mathbb{Z}_2)$ kafes diyagramları sırasıyla Şekil 9, Şekil 10, Şekil 11 deki gibidir. $T_4LF(\mathbb{Z}_2)$ kafesi modüler olur iken $T_1LF(\mathbb{Z}_2)$ ve $T_2LF(\mathbb{Z}_2)$ kafesleri modüler değildir.

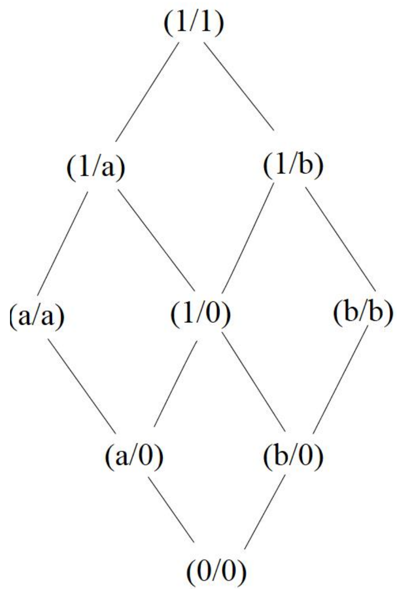


Şekil 9. $T_1LF(\mathbb{Z}_2)$ kafes diyagramı



Şekil 10. $T_2LF(\mathbb{Z}_2)$ kafes diyagramı

$T_2LF(\mathbb{Z}_2)$ kafes diyagramı ile $T_3LF(\mathbb{Z}_2)$ kafes diyagramı aynıdır. Yalnız a ve b elemanlarının rolleri değişir.



Şekil 11. $T_4LF(\mathbb{Z}_2)$ kafes diyagramı

Uyarı: G sonlu devirli bir grup olsun. Bu takdirde G nin T-bulanık altgruplarının kafesi modüler olmayabilir.

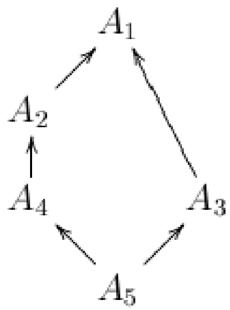
Örnek 2.4.8: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 $\mathbb{Z}_6$ nın bulanık altkümeleri aşağıdaki gibi olsun:

$$A_1(x) = \begin{cases} 1, & x = \bar{0}, \\ 0.7, & x \in \{\bar{1}, \bar{5}\}, \\ 0.8, & x \in \{\bar{2}, \bar{4}\}, \\ 0.56, & x = \bar{3}. \end{cases} \qquad A_2(x) = \begin{cases} 0.9, & x = \bar{0}, \\ 0.7, & x \in \{\bar{1}, \bar{5}\}, \\ 0.5, & x \in \{\bar{2}, \bar{4}\}, \\ 0.41, & x = \bar{3}. \end{cases}$$

$$A_3(x) = \begin{cases} 1, & x = \bar{0}, \\ 0.5, & x \in \{\bar{1}, \bar{5}\}, \\ 0.8, & x \in \{\bar{2}, \bar{4}\}, \\ 0.4, & x = \bar{3}. \end{cases} \qquad A_4(x) = \begin{cases} 0.9, & x = \bar{0}, \\ 0.7, & x \in \{\bar{1}, \bar{5}\}, \\ 0.5, & x \in \{\bar{2}, \bar{4}\}, \\ 0.4, & x = \bar{3}. \end{cases}$$

$$A_5(x) = \begin{cases} 0.9, & x = \bar{0}, \\ 0.5, & x \in \{\bar{1}, \bar{5}\}, \\ 0.5, & x \in \{\bar{2}, \bar{4}\}, \\ 0.4, & x = \bar{3}. \end{cases}$$

Bu durumda $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in T_P F(\mathbb{Z}_6)$ olduğu açıktır. $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ ailesi Şekil 12 ile $T_P F(\mathbb{Z}_6)$ nin bir alt kafesini oluşturur.



Şekil 12. Örnek 2.4.8 de verilen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 in kafes diyagramı

Böylece $T_P F(\mathbb{Z}_6)$ kafesi N_5 kafesini alt kafes olarak içerir. Buradan $T_P F(\mathbb{Z}_6)$ modüler bir kafes değildir.

Teorem 2.4.9: T, $[0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun. T sıfır bölen elemana sahip değildir ancak ve ancak her $G \neq E$ grubu için $TF(G)$ yarı komplementlenebilir bir kafestir.

İspat: $\Rightarrow$: A, G nin T-bulanık altgrubu olsun. $S_A := \{x \in G | A(x) = 0\}$ olarak tanımlansın.

- $S_A = \emptyset$ ise $A^{\perp} = 0$ dir.

- $S_A \neq \emptyset$ ise,
  - i) $e \notin S_A$ ise $A^{\perp}(e) = 0$ dır. Her $x \in G$ için $A^{\perp}(e) \geq A^{\perp}(x)TA^{\perp}(x^{-1}) = A^{\perp}(x)TA^{\perp}(x)$ dir. T sıfır bölen elemana sahip olmadığından $A^{\perp}(x) = 0$ bulunur. Buradan $A^{\perp} = 0$ elde edilir.
  - ii) $e \in S_A$ ise her $x \in G$ için $0 = A(e) \geq A(x)TA(x)$ olduğundan $A = 0$ elde edilir. Bu durumda $A^{\perp} = 1$ dir.

$\Leftarrow$: Varsayalım ki T sıfır bölen elemana sahip olsun. Bu durumda $a, b \in (0,1)$ ve $aTb = 0$ olsun. $a \leq b$ ise $aTa = 0$ dır. Buradan

$$A(x) = \begin{cases} a, & x = (\bar{1}, \bar{1}), \\ 0, & x \neq (\bar{1}, \bar{1}). \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 1, & x = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0})\}, \\ 0, & diğer. \end{cases} \qquad C(x) = \begin{cases} 1, & x = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})\}, \\ 0, & diğer. \end{cases}$$

bulanık altkümeleri $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ nin T-bulanık altgruplarıdır. Ayrıca $A \wedge B = 0$ ve $A \wedge C = 0$ olmasına karşın $B \vee C = 1_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}$ olduğundan $A \wedge (B \vee C) = A$ dir. $TF(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ yarı komplementlenebilir olduğundan $A = 0$ olmalıdır. Buradan $a = 0$ çelişkisi elde edilir. Böylece T sıfır bölen elemana sahip değildir.

Örnek 2.4.10: Bir $G \neq E$ grubu için $T_D F(G)$ yarı komplementlenebilir bir kafes değildir. Gerçekten $a \neq 0$ ve $\beta \in (0,1)$ olsun. Bu durumda,

$$A(x) = \begin{cases} a, & x = e \; ise, \\ 0, & diğer. \end{cases} \qquad B_\beta(x) = \begin{cases} 0, & x = e \; ise, \\ \beta, & diğer. \end{cases}$$

Bulanık altkümeleri G nin T_D-bulanık altgruplarıdır. Her $\beta \in (0,1)$ için $A \wedge B_\beta = 0$ dır. Fakat B_β T_D-bulanık altgruplarının en büyüğü mevcut değildir. Buradan $T_D F(G)$ yarı komplementlenebilir bir kafes değildir.

3. SONUÇLAR

1. Bu tezde, bir grubun L-altgruplarının genelleştirilmesi olan $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplar tanıtılmış ve bazı özelikleri incelenmiştir.
2. $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupların genelleştirilmiş çarpımı tanımlanmış ve grupların kartezyen çarpımının $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrubunun, $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgrupların genelleştirilmiş çarpımı şeklinde yazılabilmesi için gerek ve yeter şart elde edilmiştir.
3. Bir grubun $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının tam kafes belirttiği gösterilmiştir. Normal $LF_{(0,\mu)}$-altgrupların kafesinin modüler kafes olduğu elde edilmiştir. Hangi koşullarda $LF_{(0,\mu)}$-altgrupların kafesinin dağılımlı kafes olduğu araştırılmıştır.
4. Bir grubun $F_{(0,\mu)}$-altgrupların kafesinin yarı komplementlenebilir olduğu gösterilmiş ve $F_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının kafesinin yarı komplementlenebilir olması için gerek ve yeter şart elde edilmiştir.
5. TL-altgrupların kafesi incelenmiş ve bu kafesin modüler olması için gerek ve yeter şart elde edilmiştir.
6. Özel gruplar ve özel t-normlar için TL-altgrupların kafesi araştırılmıştır.
7. Bir grubun T-bulanık altgrupların kafesinin yarı komplementlenebilir olması t-normun sıfır bölensiz olmasıyla karekterize edilmiştir.

4. ÖNERİLER

1. Sonlu bir G grubu devirli p-gruptur ancak ve ancak altgruplarının kafesi zincirdir. Bu durum bulanık altgrupların kafesi için geçerli değildir. Trivialden farklı herhangi bir G grubunun bulanık altgruplarının kafesi doğal sıralama altında zincir değildir. Fakat [37] çalışmasında bulanık altgrupların kafesi üzerinde yeni bir sıralama tanımlanarak bu sıralama için sonlu devirli p-grupların bulanık altgruplarının kafesinin zincir belirttiği gösterilmiştir. Benzer bir çalışma $F_{(\lambda,\mu)}$-altgrupların kafesi için düşünülebilir. Uygun bir sıralama bağıntısı ile $F_{(\lambda,\mu)}$-altgrupların kafesinin zincir olduğu elde edilebilir.
2. İzomorf grupların $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının kafesleri izomorfiktir. Tersine iki grubun $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının kafesleri izomorf ise bu grupların izomorf olup olmadıkları araştırılabilir.
3. Bir grubun $LF_{(0,\mu)}$-altgruplarının kafesinin hangi koşullar altında sonsuz $\vee$-dağılımlı ve (veya) sonsuz $\wedge$-dağılımlı olduğu araştırılabilir.
4. İki grubun bulanık altgruplarının veya $LF_{(\lambda,\mu)}$-altgruplarının kafesleri izomorf ise altgruplarının kafesinin izomorf olup olmadığı araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

1. Ajmal, N. ve Thomas, K.V., The Lattices of Fuzzy Subgroups and Fuzzy Normal Subgroups, Information Sciences, 76 (1994) 1-11.

2. Ajmal, N. ve Thomas, K.V., The Lattice of Fuzzy Ideals of a Ring, Fuzzy Sets and Systems, 74 (1995) 371-379.

3. Ajmal, N. ve Thomas, K.V., The Lattices of Fuzzy Normal Subgroups Is Modular, Information Sciences, 83 (1995) 199-218.

4. Anthony, J.M. ve Sherwood, H., Fuzzy Groups Redefined, J. Math. Anal. Appl., 69 (1979) 124-130.

5. Bayrak, D. ve Yamak, S., The Lattice of Generalized Normal L-Subgroups, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 27, 3 (2014) 1143-1152.

6. Bayrak, D. ve Yamak, S., A Note on The Lattice of TL-Submodules of A Module, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, accepted.

7. Bhakat, S.K. ve Das, P., $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-Fuzzy Subgroup, Fuzzy Sets and Systems, 80 (1996) 353-393.

8. Bhakat, S.K., $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-Fuzzy Subgroup Normal, Quasi Normal and Maksimal Subgroups, Fuzzy Sets and Systems, 112 (2000) 299-312.

9. Bhakat, S.K. ve Das, P., On The Definitions of Fuzzy Subgroup, Fuzzy Sets and Systems, 581 (1996) 383-393.

10. Bhakat, S.K. ve Das, P., Fuzzy Subrings and Ideals Redefined, Fuzzy Sets and Systems, 5 (1992) 235-241.

11. Bhambri S.K. ve Kumar P., Lattices of Fuzzy Submoldules, International Mathematical Forum, 4(13) (2009) 653-659.

12. Birhoff, G., Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Rhode Island, (1967).

13. Blyth, T.S., Lattices and Ordered Algebraic Structures, Springer, (2005).

14. Chon, I., Fuzzy Subgroups as a Products, Fuzzy Sets Systems, 141 (2004) 505-508.

15. Davvaz, B., $(\epsilon, \epsilon \vee q)$-Fuzzy Subnear-Rings and Ideals, Soft Computing, 10 (2006) 206-211.

16. Feng, Y., Duan, H. ve Zeng, Q., (λ, μ)-Fuzzy Sublattices and (λ, μ)-Fuzzy Subhyperlattices, Fuzzy Information and Engineering 2010, AISC, 78, 17-26.

17. Goguen, J.A., L-Fuzzy Sets, J. Math. Anal. Appl., 18 (1967) 145-174.

18. Head, T., A Meta Theorem for Deriving Fuzzy Theorems from Crisp Versions, Fuzzy Sets and Systems, 73 (1995) 349-358.

19. Jahan, I., The Lattice of L-Ideals of A Ring Is Modular, Fuzzy Sets and Systems, 199 (2012) 121-129.

20. Jahan, I., Modularity of The Lattices of Fuzzy Ideals of A Ring, Iran. J. Fuzzy Syst., 5 (2008) 71-78.

21. Jun, Y.B. ve Song, S.Z., Generalized Fuzzy Bi-ideals in Semigroups, Information Sciences, 176, 20 (2006) 3079-3093.

22. Kazancı, O. ve Yamak, S., Generalized Fuzzy Bi-ideals of Semigroups, Soft Computing, 12 (2008) 1119-1124.

23. Klement, E.P., Mesiar, R. ve Pap, E., Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, London, 2000.

24. Kumar, R., Non-distributive of The Lattice of Fuzzy Ideals of A Ring, Fuzzy Sets and Systems, 97 (1998) 393-394.

25. Liu, W., Operations on Fuzzy Ideals, Fuzzy Sets and Systems, 11 (1983) 31-41.

26. Lu, X. ve Boynton, J.G., Completely Arithmetical Rings, Communications in Algebra, 42 (2014) 4047-4054.

27. Lukacs, E. ve Palfy, P.P., Modularity of The Subgroup Lattice of a Direct Square, Arch. Math. (Basel), 46 (1986) 18-19.

28. Majumdar, S. ve Sultana, Q. S., The Lattice of Fuzzy Ideals of a Ring, Fuzzy Sets and Systems, 81 (1996) 271-273.

29. Medts, T. D. ve Tarnauceanu, M., Pseudocomplementation in (Normal) Subgroup Lattices, Communications in Algebra, 39 (2011) 247-262.

30. Mordeson, J.N. ve Malik, D.S., Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific, 1998.

31. Murali, V., Fuzzy Points of Equivalent Fuzzy Subsets, Information Sciences, 158 (2004) 277-288.

32. Pu, P.M. ve Liu, Y.M., Fuzzy Topology I, Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and Moore_Smith Convergence, J. Math. Anal. Appl., 76 (1980) 571-599.

33. Ray, S., Modified TL-subgroups of a group, Fuzzy Sets and Systems, 91 (1997) 375-387.

34. Rosenfield, A., Fuzzy Groups, J. Math. Anal. and Appl., 35 (1971) 512-517.

35. Schmidt, R., Subgroup Lattices of Groups, Walter de Gruyter, 1994.

36. Tarnauceanu, M., Distributivity in Lattices of Fuzzy Subgroups, Information Sciences, 179 (2009) 1163-1168.

37. Tarnauceanu, M., A Note on the Lattice of Fuzzy Subgroups of a Finite Group, J. of Mult.-Valued Logic & Soft Computing, 19 (2012) 537-545.

38. Yamak, S., Kazancı, O. ve Bayrak, D., A Solution to An Open Problem on The T-Product of TL-Fuzzy Subgroups, Fuzzy Sets and Systems, 178 (2011) 102-106.

39. Yao, B., (λ,μ)-Fuzzy Normal Subgroups and (λ,μ)-Fuzzy Quotient Subgroups, The Journal of Fuzzy Mathematics, 13 (2005) 695-705.

40. Yao, B., (λ,μ)-Fuzzy Subrings and (λ,μ)-Fuzzy Ideals, The Journal of Fuzzy Mathematics, 15, 4 (2007) 981-987.

41. Yao, B., (λ,μ)-Fuzzy Ideal in Semigroups, Fuzzy Systems Math., 23, 1 (2009) 123-127.

42. Yuan, X., Zhang C. ve Ren, Y., Generalized Fuzzy Groups and Many Valued Implications, Fuzzy Sets and Systems, 138 (2003) 205-211.

43. Zadeh, L. A., Fuzzy Sets, Information and Control, 8 (1965) 338-353.

44. Zhang, Q., The Lattice of Fuzzy (Left, Right) Ideals of A Ring Is Modular, Fuzzy Sets and Systems, 125 (2002) 209-214.

45. Zhang, Q. ve Meng, G., On The Lattice of Fuzzy Ideals of A Ring, Fuzzy Sets and Systems, 112 (2000) 349-353.

ÖZGEÇMİŞ

Dilek Bayrak, 1986'da Sinop'ta doğdu. İlköğrenimini İnkılap İlköğretim Okulunda, lise öğrenimini ise Sinop Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamladı.

2003-2004 Eğitim-Öğretim yılında girdiği Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Öğretmenliği programını 2008 yılında tamamladı. 2008-2009 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında başladığı yüksek lisans öğrenimini, 2010 yılında tamamlayarak aynı yıl yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında doktora öğrenimine başlamıştır. 2010 yılında Namık Kemal Üniversitesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi (ÖYP) olarak atanan Bayrak, Öğretim üyesi Yetiştirme Programı kapsamında görevine 2011 yılından beri Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünde devam etmektedir.

Bu tezin bir kısmından aşağıdaki makale oluşturulmuştur.

Bayrak, D. ve Yamak, S., The Lattice of Generalized Normal L-Subgroups, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 27 (3) (2014) 1143-1152.