KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

# DİREKT TOPLAM OPERATÖRLERİNİN SİNGÜLER SAYILARI

DOKTORA TEZİ

Lale CONA

EKİM 2014
TRABZON

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

# DİREKT TOPLAM OPERATÖRLERİNİN SİNGÜLER SAYILARI

**Lale CONA**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce**
**"DOKTOR (MATEMATİK)"**
**Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18.08.2014**
**Tezin Savunma Tarihi : 10.10.2014**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV**

**Trabzon 2014**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Matematik Ana Bilim Dalında**

**Lale CONA Tarafından Hazırlanan**

**DİREKT TOPLAM OPERATÖRLERİNİN SİNGÜLER SAYILARI**

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 26 / 08 / 2014 gün ve 1567 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda**

**DOKTORA TEZİ**

**olarak kabul edilmiştir.**

**Jüri Üyeleri**

| | | |
|---|---|---|
| **Başkan** | **: Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ** | ........................................ |
| **Üye** | **: Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV** | ........................................ |
| **Üye** | **: Prof. Dr. Uğur ÇEVİK** | ........................................ |
| **Üye** | **: Prof. Dr. Funda KARAÇAL** | ........................................ |
| **Üye** | **: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM** | ........................................ |

**Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ**

**Enstitü Müdürü**

# ÖNSÖZ

Tez izleme komitemde bulunan başta danışmanın Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV'a gerek konumun belirlenmesi gerekse elde edilen bulguların doğruluğunun kontrol edilmesi ve genel olarak bilimsel bir çalışmanın nasıl yapılması gerektiğini öğrettiğinden; Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ hocama tezin her aşamasında öneri ve desteklerinden ve Prof. Dr. Uğur ÇEVİK hocama çalışma konumun fizik anabilim dalındaki yerini ve önemini açıkladığından dolayı saygı ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik bölüm başkanı ve hocalarına, Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği bölüm başkanım ve çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Daima maddi manevi yardımlarıyla yanımda olan canım aileme sonsuz şükranlarımı sunarım.

Maddi desteğinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na teşekkür ederim.

Lale CONA

Trabzon 2014

## TEZ BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “DİREKT TOPLAM OPERATÖRLERİNİN SİNGÜLER SAYILARI” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV’un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 10/10/2014

Lale CONA

# İÇİNDEKİLER

**<u>Sayfa No</u>**

Doktora Tezi

ÖZET

DİREKT TOPLAM OPERATÖRLERİNİN SİNGÜLER SAYILARI

Lale CONA

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV
2014, 81 Sayfa

Bu tez çalışmasında, Banach uzayların $l_p$ , $1 \leq p < \infty$ anlamında direkt toplamı üzerinde tanımlanan direkt toplam operatörleri ile koordinat operatörlerinin sınırlılık, kompaktlık özellikleri, spektrum parçaları ve bazı s-sayı fonksiyonları arasındaki bağıntılar araştırılmıştır. Alınan sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Banach uzayların $l_p$ , $1 \leq p < \infty$ anlamındaki direkt toplamı; Operatörlerin direkt toplamı; Lineer sınırlı operatör; Kompakt operatör; Operatörün spektrumu ve rezolvent kümesi; s-sayı fonksiyonu; Yaklaşım sayıları; Gelfand sayıları; Weyl sayıları.

PhD. Thesis

SUMMARY

SINGULAR NUMBERS OF DIRECT SUM OPERATORS

Lale CONA

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Zameddin ISMAILOV
2014, 81 Pages

In this thesis, the relationships between of boundedness and compactness properties, parts of spectrums and some s-number functions of direct sum of operators defined on the direct sum of Banach spaces in the sense of $l_p$ , $1 \leq p < \infty$ and coordinate operators are investigated. The obtained results are supported with examples.

**Key Words:** Direct sum of Banach spaces in the sense of $l_{\mathrm{p}}$ , $1 \leq \mathrm{p} < \infty$; Direct sum of operators; Linear bounded operator; Compact operator; Spectrum and resolvent set of operator; s-number function; Approximation numbers; Gelfand numbers; Weyl numbers.

# SEMBOLLER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar |
| $\mathbb{N}$ | : Doğal sayılar |
| $\mathbb{Z}$ | : Tam sayılar |
| $\mathbb{C}$ | : Kompleks sayılar |
| $C_{\mathbb{F}}[a,b]$ | : $\{f\colon\ f\colon [a,b] \to \mathbb{F}$ sürekli, $\mathbb{F}(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})\}$ |
| $C_{\mathbb{F}}^{1}[a,b]$ | : $\{f\colon\ f \in C[a,b],\ f'$ mevcut ve sürekli , $\mathbb{F}(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})\}$ |
| $\lvert x\rvert$ | : $x$ sayısının mutlak değeri |
| $\lVert\bullet\rVert$ | : norm fonksiyonu |
| $\lVert\bullet\rVert_p$ | : $l_p$ anlamındaki norm fonksiyonu |
| $\left\lVert S\,\lvert_Z \right\rVert_p$ | : $Z$ lineer manifolda kısıtlanmış $S$ operatörün $l_p$ anlamındaki normu |
| $\bigoplus$ | : direkt toplam |
| $dim(M)$ | : $M$ lineer alt uzayının boyutu |
| $codim(M)$ | : $M$ lineer alt uzayının tümleyeninin boyutu |
| $(\cdot,\cdot)$ | : İç çarpım fonksiyonu |
| $\rho(A)$ | : $A$ operatörünün rezolvent kümesi |
| $\sigma(A)$ | : $A$ operatörünün spektrumu |
| $\sigma_p(A)$ | : $A$ operatörünün ayrık (point veya diskret) spektrumu |
| $\sigma_c(A)$ | : $A$ operatörünün sürekli spektrumu |
| $\sigma_r(A)$ | : $A$ operatörünün artık (kalan veya rezudial) spektrumu |
| $R_\lambda(A)$ | : $A$ operatörünün rezolvent operatörü |
| $s(A)$ | : $A$ operatörünün s-sayları veya singüler sayıları |
| $s_n(A)$ | : $A$ operatörünün n. s-sayısı |
| $s_n^{(m)}(A_m)$ | : $A_m, m \geq 1$ koordinat operatörünün n. s-sayısı |
| $a_n(A)$ | : $A$ operatörünün yaklaşım sayısı |
| $c_n(A)$ | : $A$ operatörünün Gelfand sayısı |
| $x_n(A)$ | : $A$ operatörünün Weyl sayısı |

# 1.GENEL BİLGİLER

## 1.1.Giriş

Matematikte s-sayıları veya singüler sayılar (singuläre zahlen) denilen kavram ilk olarak E. Schmidt'in non-selfadjoint integral operatör teorisi alanındaki [1] (Zur Theorie-der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Math. Ann. 63(1907), 433-476; 64(1907), 161-174) çalışmasında ortaya konulmuş ve kullanılmaya başlanmıştır. Bu kavramın Hilbert uzayındaki lineer sınırlı operatörlere genellemesi ise J. von Neumann ve R. Schatten'in [2] ( The Cross-space of linear transformations, Ann. of Math. 47(1946), 608-630; 49(1948), 557-582) çalışmasında verilmiştir. Hilbert uzayında operatörlerin s-sayılarının mükemmel teorisi İ.Z. Gohberg ve M. G. Krein'nin [3] ( Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators in Hilbert space, Moscow 1965, Providence 1969, Paris 1971) kitabında verilmiştir. Banach uzayında s-sayılarının birçok farklı tanım seçenekleri vardır. Bu bağlamda ilk çalışmalar A. N. Kolmogorov [4] (Über die beste Annahering von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse, Ann. Math. 37 (1936), 107-110) ve İ.M. Gelfand'a aittir.

A.Pietsch'in [5] (Einige neue Klassen von Kompakten linearen Abbildungen, Rev. Roumaine Math. Pures and Appl. 8(1963), 427-447) çalışmasında ise esas inceleme konusu "yaklaşım sayıları" olmuştur.

Banach uzaylarında s-sayılarının aksiyomatik teorisi ve araştırılması ilk olarak A.Pietsch'in [6] ( s-numbers of Operators in Banach Spaces, Studia Math. 51(1974), 123-132) makalesinde ve aynı yazarın [7] ( Operator Ideals, North-Holland Publisching Company, 1980) ile [8] (Eigenvalues and s-numbers, Cambridge University Press, 1987) kitaplarında detaylı ve sistemli olarak verilmiştir.

Sürekli gelişen litaratürde yapılan çalışmalarda, dizilerin ve fonksiyonların Hilbert uzayında bazı operatörlerin s-sayılarının hesaplanmasına ait bulgular verilmektedir. Genelde, seksenli yıllardan sonra yapılan bilimsel çalışmalarda ya farklı Banach uzaylarındaki lineer sınırlı operatörlerin s-sayıları, psevdo-s-sayıları, quasi-s-sayıları, yaklaşım sayıları, Gelfand sayıları, Kolmogorov sayıları, entropi sayıları vs. ile özdeğeri arasındaki ilişki araştırılmış ya da Hilbert uzaylarındaki meşhur Weyl eşitsizliğinin benzerlerinin Banach uzaylarında, yeni tanımlanan s-sayılar için genellemesi matematikçilerin esas odak noktası olmuştur(örneğin: bak. [9] - [21]).

Çok noktalı diferensiyel operatörler teorisinin birçok problemleri, çok-parçacıklı kuantum mekaniğinin bazı süreçlerinin matematiksel modelleme sonucu ortaya çıkan problemleri, kuantum alan teorisi ve katıhal cisim fiziğininin birçok problemlerinde araştırılan sorular ancak Hilbert veya Banach uzaylarının direkt toplamı üzerinde kolay çözümlenebileceği sonucuna varılmıştır(bak [22]-[32]).

Örneğin, F.Gesztesy ve W.Kirsh'in [33] (One Dimensional Schrodinger Operators with Interactions Singular on a Discrete Set, J.Reine Angew. Math., 362 (1985), pp.28-50) çalışmasında

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \left(s^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{cos^2 x} \ , \ s > 0$$

şeklinde ki Schrödinger operatörünün $L^2(\mathbb{R})$'de ürettiği " Hamiltonan ''lar esas inceleme konusu olmuştur. Katsayının sayılabilir sayıda singülerlik noktası olduğundan araştırma $L^2(\mathbb{R})$'de mümkün olmamıştır. Bunun üzerine, onlar üretilen Hamiltonian'ları ilk önce her $n \in \mathbb{Z}$ için $L^2(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi)$ uzayında bulmuş ve daha sonra $H$ operatörünün $L^2(\mathbb{R})$'de ürettiği Hamiltonian'ın $L^2\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right), n \in \mathbb{Z}$ uzayındaki $H_n, n \in \mathbb{Z}$ Hamiltonianlar'ın direkt toplamı olduğu göstermiştir. Bu ve buna benzer birçok problemler Banach uzaylarının direkt toplamı üzerinde lineer operatörlerin spektral teorisini güncel yapan önemli faktörlerden biridir.

Bu tez çalışmasında:

(1) Banach uzayların direkt toplamı üzerinde tanımlanan direkt toplam operatörleri ile koordinat operatörleri arasındaki ileride kullanılacak sınırlılık ve kompaktlık ilişkilerin araştırılması;

(2) Banach uzaylarının direkt toplamı üzerinde direkt toplam operatörünün spektrumunun parçaları ile koordinat operatörlerinin spektrumlarının parçaları arasındaki bağlantıların incelenmesi;

(3) Banach uzaylarının direkt toplamı üzerinde tanımlanan direkt toplam operatörünün bazı s-sayı fonksiyonları ile koordinat operatörlerinin aynı tipteki s-sayı fonksiyonları arasındaki bağıntıların irdelenmesi;

(4) $S_p(E,F) := \{ S \in L(E,F): \quad \sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(S) < \infty \}$, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, Banach uzaylarının direkt toplamı üzerinde $\mathfrak{X} = (\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m)_p$, $1 \leq p < \infty$ tanımlanan $S = \bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m$, $m \geq 1$ direkt toplam operatörlerinin $S_p(\cdot)$, $1 \leq p < \infty$ sınıfında olması ile $S_m$, $m \geq 1$ koordinat operatörlerinin $S_p(\cdot)$, $1 \leq p < \infty$ sınıfına ait olması arasındaki ilişkinin araştırılması

amaçlanmakdadır.

### 1.2. Temel Kavram ve Açıklamalar

Tez çalışmasında kullanacağımız bazı önemli kavram ve sonuçları verelim.

**Tanım 1.2.1 (Metrik Uzay,** $([39], s.11)$**):** $X$ boş olmayan bir küme ve

$d: X \times X \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to d(x,y)$ bir fonksiyon olsun. Eğer $d$ fonksiyonu her $x,y,z \in X$ için

**(i)** $d(x,y) \geq 0$ ;

**(ii)** $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (ö$zdeşlik\ aksiyomu$) ;

**(iii)** $d(x,y) = d(y,x)$ ($simetriklik\ aksiyomu$) ;

**(iv)** $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üç$gen\ eşitsizliği$) ;

özelliklerini sağlıyorsa $d$ fonksiyonuna $X$ üzerinde bir uzaklık fonksiyonu veya bir metrik, bu durumda $(X,d)$ ikilisine de metrik uzay adı verilir. Yukarıda verilen (i)-(iv) özelliklerine ise metrik aksiyomları adı verilir.

**Örnek 1.2.2** $([41], s.8)$**:** $X$ boş olmayan bir küme olmak üzere her $x,y \in X$ için

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ 1 & , \quad x \neq y \end{cases},$$

ile tanımlanan $d$ fonksiyonu $X$ üzerinde bir metriktir.

Gerçekten $d$ nin tanımından (i),(ii) ve (iii) açıktır. (iv) için $x,y$ ve $z \in X$ olsun.

Eğer $x = y$ ise $d(x,y) = 0$ olacağından

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Eğer $x \neq y$ ise $d(x,y) = 1$. Fakat $x = y = z$ olamayacağından

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Bu metriğe diskret ya da ayrık metrik denir.

**Örnek 1.2.3** ($[39], s.11$)**:** $k \geq 1$ herhangi bir tamsayı ve $\mathbb{F}(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ bir cisim olsun,

$$d: \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k \to \mathbb{R},\ d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

şeklinde tanımlı fonksiyon $\mathbb{F}^k$ kümesi üzerinde bir metriktir ve bu metriğe $\mathbb{F}^k$ üzerinde standart metrik adı verilir.

**Tanım 1.2.4 (Lineer Uzay,** ($[39], s.3$)**):** $X$ boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ bir cisim olsun.

$$+: X \times X \to X, \quad (x,y) \to x + y,$$

$$\bullet: \mathbb{F} \times X \to X, \quad (\alpha, x) \to \alpha x,$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. $x + y = y + x$ ;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ ;
3. $\forall x \in X$ için $x + 0 = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in X$ vardır ;
4. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır ;
5. $\forall x \in X$ için $1.x = x$ ;
6. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ ;
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ ;
8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ .

Bu durumda $X$'e $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir. $\mathbb{F}$'in elemanlarına skaler $X$'in elemanlarına ise vektör adı verilir. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ alınırsa $X$'e reel vektör uzayı ve $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ alınırsa $X$'e kompleks vektör uzayı adı verilir.

**Örnek 1.2.5** ($[39], s.5$)**:** $S$ bir küme ve $X$, $\mathbb{F}(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Bu takdirde $F(S,X) := \{f \mid f: S \to X\ \ bir\ fonksiyon\}$ olmak üzere $F$ ailesi

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad f, g \in F(S, X),$$

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x)\,, \;\; \alpha \in \mathbb{F}, \;\; f \in F(S, X),$$

işlemleri altında bir lineer uzaydır.

**Tanım 1.2.6 (Lineer Manifold,** $([39], s.3)$**):** $X$ bir lineer uzay ve $Y \subset X\,, Y \neq \emptyset$ olsun. Eğer $Y$ kümesi $X$ lineer uzayı üzerinde tanımlanan cebirsel işlemler altında kendi başına bir lineer uzay oluşturuyorsa $Y$'ye, $X$'de bir lineer manifold (veya $X$'in bir lineer alt uzayı) denir.

**Örnek 1.2.7:** $\mathbb{R}^3$**,** $\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzaydır.

$$M_1 = \{(x, 0{,}0): \quad x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$M_2 = \{(0, y, 0): \quad y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3\,,$$

$$M_3 = \{(x, 0, z): \quad x, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3\,,$$

kümelerinin de aynı cebirsel işlemler altında birer lineer manifold olduğu fakat

$$M_4 = \{(x_1, x_2, x_3): \quad x_1 \text{ veya } x_2 \text{ sıfır}\} \subset \mathbb{R}^3\,,$$

kümesinin ise lineer alt uzay olmadığı kolayca görülür. $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 \neq 0,\; x_2 \neq 0, x_3 \neq 0$ olmak üzere $(x_1, 0, x_3), (0, x_2, x_3) \in M_4$ olsun. $(x_1, 0, x_3) + (0, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 2x_3) \notin M_4$ , toplama işlemine göre kapalı değildir. O halde $M_4$ kümesi bir lineer alt uzay değildir.

**Tanım 1.2.8 (Normlu Lineer Uzay,** $([39], s.31)$**):** $X$, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}, x \to \|x\|$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için

**(i)** $\|x\| \geq 0$ ;
**(ii)** $\|x\| = 0 \iff x = \theta$ ;
**(iii)** $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ ;
**(iv)** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği) ;

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|$ dönüşümüne $X$ lineer uzayı üzerinde bir norm ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu lineer uzay veya normlu uzay adı verilir. Yukarıda verilen (i)-(iv) özelliklerine ise norm aksiyomları adı verilir.

**Örnek 1.2.9 (**$[39], s.32; s.35$**):**

**(a)** $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ ) bir cisim olsun. $\|\cdot\|: \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}, \|(x_1, \dots, x_n)\| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ olarak tanımlanan fonksiyon $\mathbb{F}^n$ üzerinde bir normdur ve bu norma $\mathbb{F}^n$ üzerinde standart norm adı verilir.

**(b)** $l_p = l_p(\mathbb{N}) := \{(x_n): x_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ ve $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\}, 1 \le p < \infty$ lineer uzayı $\|x\|_p$=$(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}},\ x = (x_n) \in l_p$ fonksiyonu altında bir normlu uzaydır ve bu norma $l_p$ üzerindeki standart norm adı verilir.

Ayrıca $m \in \mathbb{N}$ için

$l_p^m = l_p^m(\{1,2,3, \dots, m\}) := \{(x_i): x_i \in \mathbb{C}, 1 \le i \le m\},\quad 1 \le p < \infty,$ lineer uzayı $\|x\|_p$=$(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}},\ x = (x_i) \in l_p^m$ fonksiyonu altında bir normlu lineer uzaydır.

**(c)** $l_\infty = l_\infty(\mathbb{N}) := \{(x_n): x_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$ ve $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$ lineer uzayı $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|,\ x = (x_n) \in l_\infty$ fonksiyonu altında bir normlu uzaydır ve bu norma $l_\infty$ üzerindeki standart norm adı verilir.

Ayrıca $m \in \mathbb{N}$ için

$l_\infty^m = l_\infty^m(\{1,2,3, \dots, m\}) := \{(x_i): x_i \in \mathbb{C}, 1 \le i \le m\}$ lineer uzayı $\|x\|_\infty = \sup_{1\le i\le m} |x_i|,\ x = (x_i) \in l_\infty^m$ fonksiyonu altında bir normlu lineer uzaydır.

**(d)** $c_0 := \{(x_n):\ x_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ lineer uzayı $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$, $x = (x_n) \in c_0$ fonksiyonu altında bir normlu lineer uzaydır.

**Örnek 1.2.10 (**$[39], s.5; s.35$**):** $X$ ve $Y$ , $\mathbb{F}$($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde lineer uzay olsunlar. $X$ ve $Y$ lineer uzayların kartezyen çarpım kümesi

$$X \times Y = \{(x, y) :\ x \in X,\ y \in Y\},$$

şeklinde tanımlı olup herhangi bir $\alpha \in \mathbb{F}$ ve $(x_i, y_i) \in X \times Y,\ i = 1,2, \dots$ için

$$+: (X \times Y) \times (X \times Y) \to (X \times Y),\quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\bullet : \mathbb{F} \times (X \times Y) \to (X \times Y),\quad \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1),$$

cebirsel işlemleri altında bir lineer(vektör) uzaydır.

Ayrıca yukarıdaki şekilde tanımlanan $X \times Y$ lineer(vektör) uzayı, $X$ lineer(vektör) uzayı üzerindeki norm $\|\cdot\|_1$ ve $Y$ lineer(vektör) uzayı üzerindeki norm $\|\cdot\|_2$ olmak üzere;

$$\|(x,y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2 \ , \ \ x \in X, y \in Y,$$

fonksiyonu altında bir normlu lineer(vektör) uzaydır.

**Örnek 1.2.11** ($[40], s. 246$) **:** $X$ ve $Y$ iki normlu uzay olsun. Bu taktirde $X$'den $Y$'ye bütün sınırlı lineer dönüşümlererin uzayı $L(X,Y)$ bir normlu lineer uzaydır.

**Tanım 1.2.12 (Yakınsak Dizi,** ($[39], s. 32; s. 36$) **):** $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay, $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_X = 0$ ise, $(x_n) \subset X$ dizisi $x \in X$ elemanına $\|\cdot\|_X$ normuna göre yakınsıyor denir. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_X} x$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ notasyonlarından biriyle gösterilir.

**Örnek 1.2.13**($[39], s. 38$)**:** $(f_n) \subset C([0,1], \mathbb{R})$ dizisi her $t \in [0,1]$ için $f_n(t) := t^n, \ n \geq 1$ şeklinde tanımlanıyor. $(f_n)$ dizisi $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1), \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \ dt, \ f \in C([0,1], \mathbb{R})$ normlu uzayında $f(t) = 0$ noktasına yakınsaktır. Gerçekten;

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| \ dt = \int_0^1 (t^n - 0) \ dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{(C, \|\cdot\|_1)} 0$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_1 = 0$. Bu ise $f_n(t) = t^n, \ n \geq 1$ dizisinin $\|\cdot\|_1$ normuna göre $f(t) = 0$ noktasına yakınsadığını gösterir.

**Tanım 1.2.14 (Cauchy Dizisi,** ($[39], s. 32; s. 36$) **):** $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir uzay olsun. $(x_n) \subset X$ dizisi bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall m, n > n_\varepsilon$ için $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$.

**Örnek 1.2.15** ($[39], s. 38$)**:** $(f_n) \subset C([0,1], \mathbb{R})$ dizisi her $t \in [0,1]$ için $f_n(t) := t^n$ şeklinde tanımlanıyor. $(f_n)$ dizisi $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1), \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \ dt, \ f \in C([0,1], \mathbb{R})$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olup $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty), \ \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|: \ t \in [0,1]\}, \ f \in C([0,1], \mathbb{R})$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi değildir. Gerçekten;

İlk olarak $(f_n)$ dizisinin $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normlu uzayında Cauchy dizisi olduğu gösterilsin. $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ olsun. Şu halde $n > m$ olduğu için

$$\int_0^1 |t^n - t^m| \ dt = \int_0^1 (t^m - t^n) \ dt = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{m}$$

olduğu elde edilir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon := \left[\!\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\!\right] + 1$ alırsak her $m, n > n_\varepsilon$ için $\|f_n - f_m\|_1 < \frac{1}{m} < \varepsilon$ olduğundan $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$ olduğu bilinir. Öyleyse $(f_n)$ dizisi $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisidir.

Şimdi $(f_n)$ dizisinin $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olmadığı gösterilsin. Aksine $(f_n)$ dizisinin $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olduğu varsayılsın. $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ olsun. Bu halde $n > m$ olduğu için

$$\|f_n - f_m\|_\infty := \sup\{|t^n - t^m|:\ 0 \leq t \leq 1\} = \sup\{t^m - t^n:\ 0 \leq t \leq 1\}$$

eşitliği elde edilir. Kolay hesaplamalar sonucu $\sup\{t^m - t^n:\ 0 \leq t \leq 1\} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}}\left(1 - \frac{m}{n}\right)$ eşitliği bulunur. Buradan $\|f_n - f_m\|_\infty = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}}\left(1 - \frac{m}{n}\right)$ eşitliğine ulaşılır. Burada $m = k \in \mathbb{N}$ ve $n = 2k \in \mathbb{N}$ alınırsa $\|f_n - f_m\|_\infty = \left(\frac{k}{2k}\right)^{\frac{k}{2k-k}}\left(1 - \frac{k}{2k}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ olur ki bu durumda $\varepsilon := \frac{1}{8}$ için $\frac{1}{4} < \frac{1}{8}$ eşitsizliğine ulaşılır. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $(f_n)$ dizisi $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi değildir.

**Tanım 1.2.16 (Banach Uzay,** $([39], s.16; s.48)$**):** Eğer bir normlu uzayda her Cauchy dizisi bu normlu uzayda yakınsak ise bu uzaya bir tam uzay veya bir Banach Uzay denir.

**Örnek 1.2.17** $([41], s.61)$**:** $l_p(\mathbb{N}),\ 1 \leq p < \infty$ lineer uzayı

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ x = (x_n) \in l_p(\mathbb{N})$$

normuna göre bir Banach uzayı olduğu gösterilsin.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x^{(n)} \in l_p$ olup $x^{(n)} := (x_1^n, \ldots, x_k^n, \ldots)$ şeklindedir. $x^{(n)} \in l_p$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(n)}\right|^p < +\infty$. Öte yandan $\left(x^{(n)}\right) \subset l_p$ bir cauchy dizisi olsun.

Bu takdirde $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall r, s \in \mathbb{N}$ ve $r, s \geq N(\varepsilon)$ için $\left\|x^{(r)} - x^{(s)}\right\|_p < \varepsilon$. Yani $\forall r, s \in \mathbb{N}$ ve $r, s \geq N(\varepsilon)$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(r)} - x_k^{(s)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \qquad (1.2.1).$$

Buradan $\forall r,s,k \in \mathbb{N}$ için $\left|x_k^{(r)} - x_k^{(s)}\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(r)} - x_k^{(s)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ olduğundan $\forall k \in \mathbb{N}$ keyfi fakat sabit ise $\forall r,s \in \mathbb{N}: r,s \geq N(\varepsilon)$ için $\left|x_k^{(r)} - x_k^{(s)}\right| < \varepsilon$ olur. Bu gösteriyor ki $k \in \mathbb{N}$ keyfi fakat sabit olarak alındığında $\left(x^{(n)}\right) \subset \mathbb{R}$ dizisi Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ öglid metriğine göre tam olduğundan $\left(x^{(n)}\right)$ dizisi yakınsaktır. O halde $x \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ olacak şekilde bir $x \coloneqq (x_1, \dots, x_k, \dots) \in \mathbb{R}$ dizisi mevcuttur. $\left(x^{(n)}\right) \subset l_p$ bir Cauchy dizisi olduğundan $1 > 0$ sayısına karşılık bir $N_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki

$$\forall r,s \in \mathbb{N}: r,s \geq N_0 \text{ için } \left\|x^{(r)} - x^{(s)}\right\|_p < 1 \qquad (1.2.2).$$

Öte yandan $x^{(N_0)} = \left(x_1^{N_0}, \dots, x_k^{N_0}, \dots\right) \in l_p$ olduğundan $\left\|x^{(N_0)}\right\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(N_0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ olduğundan $\frac{1}{\sqrt[p]{2^k}} > 0$ sayısına karşılık $\exists N_k \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_k$ için $\left|x_k - x_k^{(n)}\right| < \frac{1}{\sqrt[p]{2^k}}$. Yani

$$\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p < \frac{1}{2^k} \qquad (1.2.3)$$

$m \in \mathbb{N}$ keyfi fakat sabit ve $n_k \in \mathbb{N}$ olsun. $x^{(n_k)} \in l_p$ olduğundan $\left(x^{(n_k)} - x^{(N_0)}\right) \in l_p$. Minkowski eşitsizliği kullanılarak $m \in \mathbb{N}$ keyfi fakat sabit ve $n_k \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{m}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k - x_k^{(n_k)} + x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k - x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k - x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(n_k)} - x_k^{(N_0)} + x_k^{(N_0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k - x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(n_k)} - x_k^{(N_0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(N_0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k - x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left\|x_k^{(n_k)} - x_k^{(N_0)}\right\|_p + \left\|x_k^{(N_0)}\right\|_p \qquad (1.2.4).$$

Eğer $n_k \in \mathbb{N}$ sayısı $n_k > N_k$ ve $n_k > N_0$ olacak şekilde seçilirse (1.2.2) ve (1.2.3) kullanıldığında (1.2.4) den $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$(\sum_{k=1}^{m}|x_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\right)^{\frac{1}{p}} + 1 + \left\|x^{(N_0)}\right\|_p < 1 + 1 + \left\|x^{(N_0)}\right\|_p = 2 + \left\|x^{(N_0)}\right\|_p.$$

Böylece $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{m}|x_k|^p < \left(2 + \left\|x^{(N_0)}\right\|_p\right)^p \qquad (1.2.5).$$

Bu gösteriyor ki $x^{(N_0)} \in l_p$ sabit olduğundan $\left(2 + \left\|x^{(N_0)}\right\|_p\right)^p \in \mathbb{R}_+$ sonlu bir sayıdır. Bu monoton artan $(\sum_{k=1}^{m}|x_k|^p)$ dizisinin üstten sınırlı bir dizi olduğunu gösterir. Monoton artan ve üstten sınırlı bir dizi daima yakınsaktır. Buradan $x \in l_p$ olduğu gösterilmiş olur.

Son olarak $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ olduğunu gösterelim. $\left(x^{(n)}\right) \subset l_p$ bir Cauchy dizisi olduğundan $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için $\exists N^* \equiv N^*\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \in \mathbb{N}$: $\forall r, s \in \mathbb{N}$ ve $r, s \geq N^*$ için

$$\left\|x^{(r)} - x^{(s)}\right\|_p < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (1.2.6).$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ olduğundan $\exists N^*\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt[p]{2^k}}\right) \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_k$ için

$$\left|x_k^{(n)} - x_k\right| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt[p]{2^k}} \qquad (1.2.7).$$

$m \in \mathbb{N}$ keyfi fakat sabit bir sayı olsun. $n_k \in \mathbb{N}$ sayıları $n_k \geq max\{N^*, N_1^*, \ldots, N_m^*\}$ olacak şekilde alınır ve Minkowski eşitsizliği kullanılırsa (1.2.6) ve (1.2.7) den

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(n)} - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(n)} - x_k^{(n_k)} + x_k^{(n_k)} - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(n)} - x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(n_k)} - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(n_k)} - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left\|x^{(n)} - x^{(n_k)}\right\|_p + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n_k)} - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Buradan görülür ki $n \in \mathbb{N}, n \geq N^*$ olarak seçildiğinde : $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N^*$ için $\left\|x^{(n)} - x\right\|_p < \varepsilon$ olur. $\lim_{n\to\infty}\left\|x^{(n)} - x\right\|_p = 0$ yani $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$.

Sonuç olarak $l_p(\mathbb{N}),\ p \geq 1$ vektör uzayı $x = (x_n) \in l_p(\mathbb{N})$ için

$$\|x\|_p \coloneqq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} ,$$

normuna göre bir Banach uzaydır.

Benzer şekilde $l_p(\mathbb{Z}),\ p \geq 1$ vektör uzayınında $\|x\|_p \coloneqq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $x = (x_n) \in l_p(\mathbb{Z})$ normuna göre bir Banach uzay olduğu gösterilebilir.

**Örnek 1.2.18:** $(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ lineer uzayı $\|\cdot\|_1 \colon C([-1,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$

$$\|f\|_1 \coloneqq \int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx$$

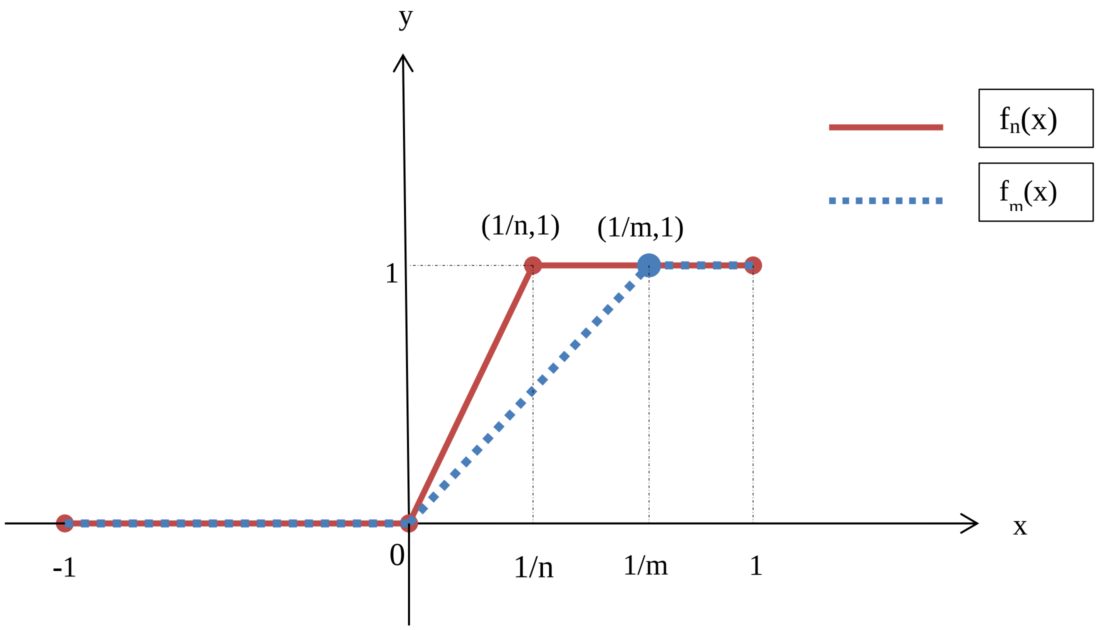
normuna göre bir Banach uzay değildir.

Bu uzayın lineer normlu uzay olduğu kolayca gösterilebilir. İlk olarak $\|f\|_1$ normuna göre $C([-1,1],\mathbb{R})$ uzayının Banach uzay olmadığı gösterilsin.

$$f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ \ f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ nx & , \quad 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & , \quad \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases} ,$$

şeklinde tanımlı $(f_n)$, $C[-1,1]$ uzayında bir Cauchy dizisidir.

Gerçekten, $m, n \in \mathbb{N}$ için $m < n$ sayıları alınsın. Bu durumda;




grafiğindende kolayca görülür ki,

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n - f_m|(x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} |f_n - f_m|(x)dx + \int_{0}^{\frac{1}{n}} |f_n - f_m|(x)dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |f_n - f_m|(x)dx + \int_{\frac{1}{m}}^{1} |f_n - f_m|(x)dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{n}} |nx - mx|\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} |1 - mx|\, dx = \frac{1}{2}(n-m)x^2 \Big|_0^{\frac{1}{n}} + \left(x - \frac{m}{2}x^2\right) \Big|_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}}$$

$$= \frac{1}{2}(n-m)\frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{m} - \frac{m}{2}\frac{1}{m^2}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{m}{2}\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{m}{2n^2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{n} + \frac{m}{2n^2}$$

$$= \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Böylece $\|f_n - f_m\|_1 \underset{m<n}{\xrightarrow[m\to\infty]{}} 0$ olup $(f_n) \subset C[-1,1]$ de bir Cauchy dizisidir.

Şimdi ise $(f_n)$ dizisinin $\|\cdot\|_1$ normunda yakınsamadığı gösterilsin. Aksine yakınsak kabul edilsin yani $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$ için $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\|\cdot\|_1}{=} f$ olsun.

O halde $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq N(\varepsilon)$ için

$$\|f_n - f\|_1 < \varepsilon \qquad (1.2.8).$$

Bu gösteriyor ki $\|f_n - f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|\, dx$ olduğundan $0 < \alpha < 1$ keyfi fakat sabit olan bir sayı olsun. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N(\varepsilon)$ için

$$\int_{-1}^{0} |f_n(x) - f(x)| dx \leq \|f_n - f\|_1 \qquad (1.2.9),$$

ve $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\varepsilon)$ için

$$\int_{\alpha}^{1} |f_n(x) - f(x)| dx \leq \|f_n - f\|_1 \qquad (1.2.10),$$

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\varepsilon)$ için $\int_{-1}^{0} |f_n(x) - f(x)|\, dx < \varepsilon$ olup $x \in [-1,0]$ için $f_n(x) = 0$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\int_{-1}^{0} |f(x)|\, dx < \varepsilon$. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\int_{-1}^{0} |f(x)|\, dx = 0$ olup buradan her $x \in [-1,0]$ için $f(x) = 0$ [43], yani $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

$0 < \alpha < 1$ keyfi fakat sabit olarak alınan bir sayı olsun. $\mathbb{N}$ üstden sınırlı olmadığından $\frac{1}{n} < \alpha$ olan bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu takdirde $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N(\varepsilon)$ için

$$\int_{0}^{1} |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon \qquad (1.2.11)$$

ve $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\varepsilon)$ için

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon \qquad (1.2.12),$$

olup $(1.2.11), (1.2.12)$ ve $(1.2.10)$ dan

$$\int_{\alpha}^{1} |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon \qquad (1.2.13),$$

$\frac{1}{n} < \alpha \leq 1$ ve her $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ için $f_n(x) = 1$ olduğundan her $x > \alpha$ için $f_n(x) = 1$ olup $(1.2.13)$ den $\forall \varepsilon > 0$ için $\int_{\alpha}^{1} |1 - f(x)| dx < \varepsilon$. O halde $\int_{0}^{1} |1 - f(x)| dx = 0$. Dolayısıyla $f$ sürekli olduğundan her $\alpha \leq x \leq 1$ için $f(x) = 1$ [43] elde edilir. Bu ise gösterir ki $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$. Fakat $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ olup $f$ sürekli değildir. Bu ise $f \in C([-1,1], \mathbb{R})$ kabulü ile çelişir. Sonuç olarak $(C([-1,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normlu lineer uzayı bir Banach uzayı değildir.

**Tanım 1.2.19 (Şartsız Yakınsaklık,** $([35], s. 15)$ **):** Bir $X$ Banach uzayında vektörlerin bir dizisi $(x_i),\ i \geq 1$ olsun. Bu takdirde tamsayıların her $\pi$ permütasyonu için $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisine şartsız yakınsaktır denir.

**Tanım 1.2.20 (Schauder Bazı,** $([35], s. 1)$**):** $X$ bir Banach uzayı olsun. Her $x \in X$ için $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ olacak şekilde bir tek $(a_n),\ n \geq 1$ sayı dizisi varsa $(x_n),\ n \geq 1$ dizisine $X$ in bir Schauder bazı adı verilir.

Tez çalışması boyunca Schauder bazının geçtiği yerlerde kısalık olması bakımından sadece baz ifadesi kullanılacaktır.

**Tanım 1.2.21 (Şartsız Baz,** $([35], s. 15)$**):** $X$ bir Banach uzayı ve $(x_n), n \geq 1$, $X$'in bir bazı olsun. Her $x \in X$ için bazın terimleriyle oluşturulan $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ serisi şartsız yakınsak ise bu taktirde $(x_n), n \geq 1$ bazına şartsız baz adı verilir.

**Tanım 1.2.22 (İç Çarpım Uzayı,** $([39], s. 51; s. 53)$ **):** $X$, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $(\cdot,\cdot): X \times X \to \mathbb{C}$ dönüşümü

**(i)** $\forall x \in X$ için $(x, x) \geq 0$ ve $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ ;

**(ii)** $\forall x, y \in X$ için $(x, y) = \overline{(y, x)}$ $(kompleks\ eşlenik)$ ;

**(iii)** $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ ;

**(iv)** $\forall x, y, z \in X$ için $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

özelliklerini sağlıyorsa $(\cdot,\cdot)$ dönüşümüne $X$ vektör uzayı üzerinde bir kompleks iç çarpım ve bu durumda $(X, (\cdot,\cdot))$ ikilisine de bir kompleks iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı*)* adı verilir.

Eğer yukarıda tanımlanmış olan dönüşümde $\mathbb{C}$, kompleks sayılar cismi yerine $\mathbb{R}$, reel sayılar cismi alınırsa $(X, (\cdot,\cdot))$ ikilisine bir reel iç çarpım uzayı adı verilir. Bu durumunda her $x, y \in X$ için $(x, y) = (y, x)$ eşitliği doğrudur.

Ayrıca her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}(\mathbb{C}$ veya $\mathbb{R})$ için

(1) $(\alpha x + \beta y, z) = (\alpha x, z) + (\beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ ;

(2) $(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha(y, x)} = \bar{\alpha}\overline{(y, x)} = \bar{\alpha}(x, y)$ ;

(3) $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{(\alpha y + \beta z, x)} = \overline{\alpha(y, x) + \beta(z, x)} = \bar{\alpha}\overline{(y, x)} + \bar{\beta}\overline{(z, x)}$
$= \bar{\alpha}(x, y) + \bar{\beta}(x, z)$

bağıntılarının doğruluğu elde edilir.

**Örnek 1.2.23** $([41], s.141)$**:** $\mathbb{F}(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ cisim olmak üzere $(C[a,b], \mathbb{F})$ sürekli fonksiyonların kümesi

$$+: C[a,b] \times C[a,b] \to C[a,b]\,,\ (f,g) \to f+g,$$

$$\bullet: \mathbb{F} \times C[a,b] \to C[a,b]\,, \qquad (\alpha, f) \to \alpha f,$$

olarak tanımlanan cebirsel işlemlere göre bir lineer uzaydır.

Ayrıca bu lineer uzay üzerinde

$$(f,g)_{C[a,b]} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\ dx$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm ise bir iç çarpım fonksiyonudur. Gerçekten;

(i) Her $f \in C[a,b]$ için

$$(f,f) = \int_a^b f(x)\overline{f(x)}\ dx = \int_a^b |f(x)|^2\ dx \geq 0.$$

Eğer $f \in C[a,b]$ ve $(f,f) = \int_a^b f(x)\overline{f(x)}\ dx = 0$ yani $(f,f) = \int_a^b |f(x)|^2\ dx = 0$ olsun. Bu halde her $x \in [a,b]$ için $f(x) = 0$ olup buradan $f = 0$ [43].

Diğer taraftan $f = 0$ ise $(f,f)_{C[a,b]} = \int_a^b f(x)\overline{f(x)}\ dx = \int_a^b |f(x)|^2\ dx = \int_a^b 0\ dx = 0$ olduğundan $(f,f)_{C[a,b]} = 0$ olduğu görülür.

(ii) Her $f, g \in C[a,b]$ için

$$(f,g)_{C[a,b]} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\ dx = \overline{\int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx} = \overline{\int_a^b g(x)\overline{f(x)}\ dx}$$

$$= \overline{(g,f)}_{C[a,b]}.$$

(iii) Her $f, g \in C[a,b]$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için

$$(\alpha f, g)_{C[a,b]} = \int_a^b \alpha f(x)\overline{g(x)}\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\ dx = \alpha (f,g)_{C[a,b]}.$$

(iv) Her $f, g, h \in C[a,b]$ için

$$(f+g, h)_{C[a,b]} = \int_a^b (f+g)(x)\overline{h(x)}\ dx = \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\overline{h(x)}\, dx$$

$$\int_a^b \big[f(x)\overline{h(x)} + g(x)\overline{h(x)}\big]\, dx = \int_a^b f(x)\overline{h(x)}\ dx + \int_a^b g(x)\overline{h(x)}\, dx$$

$$= (f,g)_{C[a,b]} + (g,h)_{C[a,b]}.$$

**Tanım 1.2.24 (İç Çarpımın Ürettiği Norm,** $([39], s.56)$ **):** $\big(X, (\cdot,\cdot)\big)$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ ise

$$\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $X$ üzerinde bir norm olup bu norma iç çarpımın ürettiği norm denir.

**Tanım 1.2.25 (Hilbert Uzayı,** $([39], s.63)$ **):** Eğer bir iç çarpım uzayı iç çarpımın ürettiği norma göre tam ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı adı verilir.

**Örnek 1.2.26** $([39], s.64)$**:** $(\cdot,\cdot) = l_2 \times l_2 \to \mathbb{F}(= \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$, $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ dönüşümü $l_2$ üzerinde bir iç çarpım uzayıdır ve bu iç çarpıma göre $l_2$ bir Hilbert uzayıdır.

**Tanım 1.2.27 (**$[41], s.82; s.83$**):** $X$ ve $Y$ iki normlu lineer uzay olsun. $A: D(A) \subset X \to Y$ olan her dönüşüme bir operatör adı verilir. Bu durumda

$D(A) \coloneqq \{x \in X\colon\ Ax\ \ tanımlı\} \subset X$ kümesine $A$ operatörünün tanım kümesi,

$R(A) \coloneqq AD(A) = \{y = Ax\colon\ \ x \in D(A)\} \subset Y$ kümesine ise $A$ operatörünün değer kümesi,

$KerA \coloneqq \{x \in X\colon\ Ax = 0\} \subset X$ kümesine de $A$ operatörünün sıfır kümesi veya çekirdeği denir.

**Tanım 1.2.28 (**$[6], s.20$**):** $X$ ve $Y$ iki Banach uzay ve $A: D(A) \subset X \to Y$ bir operatör olsun. $A$ operatörünün görüntü kümesinin boyutuna $A$ operatörünün boyutu denir ve $rank(A)$ veya $r(A)$ ile gösterilir. Yani $r(A) = rankA = \dim(Im(A)\ )$.

**Tanım 1.2.29 (Lineer Operatör,** $([41], s.82)$**):** $X$ ve $Y$ aynı bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki lineer uzay, $D(A)$, $X$'de bir lineer manifold ve $A: D(A) \subset X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer her $x, y \in D(A)$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ ise, $A$ operatörüne bir lineer operatör denir.

**Örnek 1.2.30**$([39], s.103)$**:** $T: C_{\mathbb{R}}[0,1] \to \mathbb{R}$, $T(f) = \int_0^1 f(x)\ dx$ şeklinde tanımlı dönüşüm lineerdir.

Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ için

$T(\alpha f+\beta g)=\int_0^1(\alpha f+\beta g)(x)\ dx=\int_0^1[(\alpha f)(x)+(\beta g)(x)]\ dx$

$=\int_0^1(\alpha f)(x)\ dx+\int_0^1(\beta g)(x)\ dx=\alpha\int_0^1 f(x)\ dx+\beta\int_0^1 g(x)\ dx$

$=\alpha T(f)+\beta T(g),$

olduğundan $T$ lineerdir.

**Örnek 1.2.31:** $T: C_{\mathbb{R}}[a,b]\to\mathbb{R},\ Tf(t)=max\{f(t): t\in[a,b]\}$, şeklinde tanımlanan operatör lineer değildir. Gerçekten;

$f:[1,5]\to\mathbb{R},\ f(t)=t$ ve $g:[1,5]\to\mathbb{R},\ g(t)=-t$ şeklinde tanımlanacak olursa;

$f,g\in C_{\mathbb{R}}[1,5]$ için

$T(f+g)(t)=max\{(f+g)(t):\ t\in[1,5]\}=max\{f(t)+g(t):\ t\in[1,5]\}=0$

$Tf(t)+Tg(t)=max\{f(t):\ t\in[1,5]\}+max\{g(t):\ t\in[1,5]\}=5+(-1)=4$

olup $T(f+g)(t)\neq Tf(t)+Tg(t)$ olduğundan $T$ operatörü lineer değildir.

**Tanım 1.2.32 (Birim Operatör,** $([41], s. 84)$**):** $A: X\longrightarrow X$ operatörü verilsin. $\forall x\in X$ için $A(x)=x$ ise $A$ operatörüne özdeşlik veya birim operatör adı verilir. $I$ veya $I_X$ şeklinde gösterilir.( Bu tez çalışmasında aksi bir durum belirtilmedikçe birim operatör kısalık adına sadece $I$ ile gösterilecektir.)

**Tanım 1.2.33 (Sürekli Operatör,** $([41], s. 96)$**):** $X$ ve $Y$ iki normlu uzay, $A: X\to \mathrm{Y}$ bir operatör ve $x_0\in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için $\|x-x_0\|<\delta$ koşulunu sağlayan her $x\in X$ için $\|Ax-Ax_0\|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$ sayısı bulunabiliyor ise $A$ operatörüne $x_0$ noktasında süreklidir denir. $A$ operatörü her $x\in X$ noktasında sürekli ise $A$'ya sürekli operatör denir.

**Tanım 1.2.34 (Sınırlı Operatör,** $([41], s. 91)$**):** $X$ ve $Y$ iki normlu uzay ve $A: X\longrightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer her $x\in X$ için $\|Ax\|_Y\leq M\|x\|_X$ olacak şekilde sabit bir $M>0$ sayısı varsa $A$ operatörüne sınırlı operatör denir. $X$'den $Y$'ye tüm sınırlı lineer operatörlerin oluşturduğu aile $L(X,Y)$, özel olarak $X=\mathrm{Y}$ ise bu aile $L(X)$ ile gösterilecektir.

**Lemma 1.2.35** $([39], s. 88)$**:** $X$ ve $Y$ iki normlu uzay olsunlar ve $A: X\longrightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

**(a)** $A$ düzgün süreklidir;

**(b)** $A$ süreklidir;

**(c)** $A$ sıfır noktasında süreklidir;

**(d)** $x \in X$ ve $\|x\| = 1$ olduğunda $\|Ax\| \leq k$ olacak şekilde bir $k$ pozitif reel sayısı vardır.

**(e)** $\forall x \in X$ için $\|Ax\| \leq k\|x\|$ olacak şekilde bir $k$ pozitif reel sayısı vardır.

**Örnek 1.2.36** $([39], s.103)$**:** $T: (C_{\mathbb{R}}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $T(f) = \int_0^1 f(x)\, dx$ şeklinde tanımlı lineer dönüşümü süreklidir. Gerçekten her $x \in X = [0,1]$ için

$$|f(x)| \leq sup\{|f(t)|: t \in [0,1]\} = \|f\|_\infty$$

olduğundan

$$|T(f)| = \left|\int_0^1 f(x)\, dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\, dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\, dx = \|f\|_\infty$$

olup $T$ sınırlıdır dolayısıyla Lemme 1.2.35 den süreklidir.

**Örnek 1.2.37** $([39], s.92)$**:** $\mathbb{F}$($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cisim olmak üzere $P, C_{\mathbb{F}}[0,1]$ nin polinom fonksiyonlarının tamamının oluşturduğu bir lineer altuzay olsun. $p'$, $p$ nin türevi olmak üzere $T(p) = p'$ ile tanımlı $T: P \to P$ lineer dönüşümü sürekli değildir. Gerçekten;

Her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $p_1, p_2 \in C_{\mathbb{F}}[0,1]$ için

$$T(\alpha p_1 + \beta p_2) = (\alpha p_1 + \beta p_2)' = \alpha p_1{}' + \beta p_2{}' = \alpha T(p_1) + \beta T(p_2)$$

olduğundan $T$ lineerdir.

Öte yandan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P_n: [0,1] \to \mathbb{R}$, $p_n(t) = t^n$ polinom fonksiyonu tanımlansın. Bu takdirde $(C_{\mathbb{R}}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, $\|f\|_\infty = sup\{|f(t)|: t \in [0,1]\}, f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ normu alınacak olursa $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\|p_n\|_\infty = sup\{|p_n(t)| : t \in [0,1]\} = sup\{|t^n| : t \in [0,1]\} = 1.$$

Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\|T(p_n)\|_\infty = \|p_n{}'\|_\infty = sup\{|p_n{}'(t)|: t \in [0,1]\} = sup\{|nt^{n-1}|: t \in [0,1]\} = n.$$

olup $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı üstten sınırlandırılamayacağından $\|T(p_n)\|_\infty \leq k\|p_n\|_\infty$ olacak şekilde bir $k > 0$ yoktur. Sonuç olarak $T$ sınırlı değildir ve böylece sürekli değildir.

**Tanım 1.2.38 (Operatörün Normu,** $([39], s. 97)$**):** $X$ ve $Y$ iki normlu uzay ve $A: X \longrightarrow Y$ sınırlı lineer operatör olsun. Bu durumda

$$\|A\| := inf\{M:\ M > 0 \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X\},$$

sayısına $A$ operatörünün normu adı verilir.

**Teorem 1.2.39 (**$[41], s. 92$**):** $X$ ve $Y$ iki normlu uzay ve $A: X \longrightarrow Y$ sınırlı lineer operatör olsun. Bu durumda $A$ operatörünün normu için aşağıdaki ifadeler denktir:

**(1)** $\|A\| := sup\left\{\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}:\ x \in X \text{ ve } \ x \neq \theta_X\right\}$ ;

**(2)** $\|A\| := sup\{\|Ax\|_Y : \ x \in X \text{ ve } \|x\|_X \leq 1\}$ ;

**(3)** $\|A\| := sup\{\|Ax\|_Y : \ x \in X \text{ ve } \|x\|_X < 1\}$ ;

**(4)** $\|A\| := sup\{\|Ax\|_Y : \ x \in X \text{ ve } \|x\|_X = 1\}$ .

**Örnek 1.2.40** $([39], s. 103)$**:** $T: (C_{\mathbb{R}}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $T(f) = \int_0^1 f(x)\ dx$, $f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ şeklinde tanımlanan $T$ dönüşümünün lineerliği Örnek 1.2.30 de sınırlılığı ise Örnek 1.2.36 de verilmiş olup $\|T\| = 1$. Gerçekten;

Her $x \in [0,1]$ ve her $f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ için

$$|f(x)| \leq sup\{|f(t)|: t \in [0,1]\} = \|f\|_\infty$$

olduğundan

$$\|T\|_\infty = \ |T(f)| = \left|\int_0^1 f(x)\ dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\ dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\ dx = \|f\|_\infty \qquad (1.2.8),$$

(1.2.8) den

$$\|T\|_\infty \leq 1 \qquad (1.2.9).$$

Öte yandan özel olarak $f = 1$ alınsın;

$$\|T\|_\infty = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \frac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |T(f)| \geq |T(f)| \qquad (1.2.10),$$

olup

$$|T(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| = \left|\int_0^1 dt\right| = 1$$

olduğundan

$$\|T\|_\infty \geq 1 \qquad (1.2.11).$$

O halde (1.2.9) ve (1.2.11) den

$$\|T\|_\infty = 1\,.$$

**Tanım 1.2.41 (Ters Operatör,** $([39], s.109)$**):** $X$ ve $Y$ iki normlu lineer uzay ve $A \in L(X,Y)$ olsun. Eğer $SA = I_X$ , $AS = I_Y$ olacak şekilde $S \in L(Y,X)$ varsa, $A$ operatörüne terslenebilirdir denir.

$A \in L(X,Y)$ lineer operatörü terslenebilir ise $SA = I_X$ , $AS = I_Y$ koşullarını sağlayan $S \in L(Y,X)$ lineer operatörü tektir. Bu $S \in L(Y,X)$ lineer operatörüne $A \in L(X,Y)$ lineer operatörünün tersi denir ve $A^{-1}$ ile gösterilir.

**Tanım 1.2.42 (Kompakt Küme,** $([39], s.16)$ **):** $X$ bir normlu uzay ve $A \subset X$ bir küme olsun. Eğer her $(x_n) \subset A$ dizisi, $A$ kümesinde bir elemana yakınsayan bir alt dizi içeriyorsa $A \subset X$ kümesine kompakt küme denir.

Örneğin, $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ Euclid uzayında her kapalı sınırlı küme kompakttır.

**Tanım 1.2.43 (Kompakt Operatör,** $([41], s.405)$**):** $X$ ve $Y$ iki Banach uzayı ve $A \in L(X,Y)$ olsun. Eğer $X$'deki her sınırlı kümenin $A$ altında görüntüsünün kapanışı $Y$'de kompakt ise $A$'ya kompakt operatör denir. Ayrıca tüm kompakt operatörler kümesi $\mathfrak{S}_\infty(X,Y)$ $=\{A \in L(X,Y): A\ kompakttır\}$ şeklinde gösterilecektir.

**Teorem 1.2.44** $([39], s.162)$**:** $X$ ve $Y$ iki Banach uzayı ve $A \in \mathfrak{S}_\infty(X,Y)$ olsun. Bu takdirde $A$ sınırlıdır. Yani $\mathfrak{S}_\infty(X,Y) \subset L(X,Y)$.

**Tanım 1.2.45 (Kompaktlık Kriteri,** $([41], s.407)$**):** $X$ ve $Y$ iki Banach uzayı ve $A: X \to Y$ lineer bir operatör olsun. $A$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart her sınırlı $(x_n) \subset X$ dizisi için $(Ax_n) \subset Y$ dizisinin yakınsak bir alt dizi içeriyor olmasıdır.

**Teorem 1.2.46** $([39], s.208)$**:** $X$ bir sonsuz boyutlu normlu lineer(vektör) uzay ise bu takdirde $X$ üzerindeki $I$ birim operatörü kompakt değildir.

**Teorem 1.2.47** $([39], s. 209)$**:** $X$ bir normlu uzay ve $Y$ bir Banach uzay olsun. Eğer $\mathfrak{S}_\infty(X,Y)$ içinde ki bir $(A_k)$ dizisi bir $A \in L(X,Y)$ operatörüne yakınsarsa (yani $n \to \infty$ için $\|A_k \to A\| \to \infty$ ise) bu takdirde $A$ kompakttır. Sonuç olarak $\mathfrak{S}_\infty(X,Y), L(X,Y)$ içinde kapalıdır.

**Örnek 1.2.48** $([39], s. 92)$**:** Örnek 1.2.37 de incelenen $T: P \to P,\ T(p) = p'$ lineer dönüşümü sınırlı olmadığından Teorem1.2.47 gereğince kompakt değildir.

**Sonuç 1.2.49** $([39], s. 210)$**:** $X$ bir normlu uzay ve $Y$ de bir Banach uzay olsun. Eğer sınırlı ve sonlu ranklı operatörlerin bir $(A_k)$ dizisi bir $A \in L(X,Y)$ operatörüne yakınsıyor ise bu taktirde $A$ kompakttır.

**Örnek 1.2.50** $([39], s. 224)$**:** $T(x) := (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \frac{x_5}{5}, \ \ldots)$ ile tanımlı $T \in L(l_2)$ operatörü kompakttır. Gerçekten;

Her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{cases} p_n^k = n^{-1}x_n & , \quad n \le k \\ p_n^k = 0 & , \quad n > k \end{cases}$$

olmak üzere

$$T_k(x) = (p_n^k)$$

ile $T_k \in L(l_2)$ operatörünü tanımlayalım, bu durumda

$$T_1(x) = (x_1, 0,0, \ldots)$$

$$T_2(x) = (x_1, \frac{x_2}{2}, 0,0, \ldots)$$

$$T_3(x) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, 0,0, \ldots)$$

$$\vdots$$

$$T_k(x) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots, \frac{x_{k-1}}{k-1}, \frac{x_k}{k}, 0,0, \ldots)$$

$$\vdots$$

olduğu görülür. $T_k$ operatörleri sınırlı, lineer ve sonlu ranka sahiptir.

Ayrıca, her $x \in l_2$ için

$$\|(T_k - T)x\|_2^2 = \|T_k(x) - T(x)\|_2^2$$

$$= \left\|(0,0, \ldots, 0, \frac{x_{k+1}}{k+1}, \frac{x_{k+2}}{k+2}, \frac{x_{k+3}}{k+3}, \ldots)\right\|_2^2$$

$$= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n^2}$$

$$\le (k+1)^{-2} \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^2$$

$= (k+1)^{-2}\|x\|_2^2$

ve böylece

$\|(T_k - T)x\|_2 \le (k+1)^{-1}\|x\|_2$

bulunur. Buradan

$\|T_k - T\|_2 \le (k+1)^{-1}$

ve böylece $\|T_k \to T\|_2 \to 0$ elde edilir. Bu nedenle Sonuç 1.2.49 dan $T$ kompakttır.

**Tanım 1.2.51 (Kapalı Lineer Operatör,** $([41], s. 292)$**):** $X$ ve $Y$ iki normlu uzay, $D(A)$, $X$'de bir lineer manifold ve $A: D(A) \subset X \longrightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Bu takdirde $A$ operatörünün grafiği $Gr(A) \coloneqq \{(x,y): x \in D(A), y = Ax\} \subset X \times Y$ normlu uzayında kapalı ise $A$ operatörüne kapalı lineer operatör denir.

**Teorem 1.2.52** $([41], s. 293)$ **:** $X$ ve $Y$ iki normlu uzay, $D(A)$, $X$'de lineer bir manifold ve $A: D(A) \subset X \longrightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Bu taktirde $A$ operatörünün kapalı olması için gerek ve yeter şart $(x_n) \subset D(A)$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$ ise $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ olmasıdır.

**Örnek 1.2.53** $([40], s. 262)$**:** $C[0,1]$ ve $D(T)$ ise $C[0,1]$ de türevleri sürekli fonksiyonların teşkil ettiği altuzay olsun. Dolayısıyla $T: D(T) \subset C^1[0,1] \to C[0,1]$, $T(f) = f'$ olarak tanımlanırsa, $T$ sınırlı değildir, fakat kapalıdır.

Gerçekten, Örnek 1.2.37 den $T$ nin sınırlı olmadığı biliniyor. Teorem 1.2.52 kullanılarak $T$ nin kapalı olduğu gösterilsin:

$T(f_n)$ yakınsak olacak şekilde $D(T)$ de yakınsak bir $(f_n)$ dizisi alınsın. $f_n \to f$ ve $T(f_n) = {f_n}' \to g$ olsun, $C[0,1]$ deki supremum normuna göre yakınsama düzgün olduğundan

$$\int_0^x g(t)\ dt = \int_0^x \lim_{n\to\infty} {f_n}'(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^x {f_n}'(t)\ dt = f(x) - f(0),$$

yani

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\ dt.$$

Bu ise $f \in D(T)$ ve $T(f) = f' = g$ olduğunu gösterir. Teorem 1.2.52 den dolayı $T$, $C[0,1]$ de kapalıdır.

**Tanım 1.2.54 (Bire Bir Operatör,** $([41], s.614)$**):** $X$ ve $Y$ iki lineer uzay, $D(A)$, $X$'de bir lineer manifold ve $A: D(A) \subset X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x_1, x_2 \in D(A)$ için $x_1 \neq x_2$ olduğunda $Ax_1 \neq Ax_2$ oluyorsa $A$ operatörüne bire bir operatör denir.

**Örnek 1.2.55:** $T: D(T) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, T(x) = x$ operatörü bire bir lineer operatördür. Gerçekten her $x_1 \neq x_2$ için $T(x_1) \neq T(x_2)$.

**Örnek 1.2.56:** $T: D(T) = \mathbb{R} \to \mathbb{R}, T(x) = 0$ lineer operatörü bire bir değildir. Gerçekten her $x_1 \neq x_2$ için $T(x_1) = 0 = T(x_2)$ olup $T(x_1) = T(x_2)$.

**Teorem 1.2.57 (Adjoint Operatör,** $([39], s.168)$**):** $H$ ve $K$ kompleks Hilbert uzayları ve $A \in L(H, K)$ olsun. Her $x \in H$ ve her $y \in K$ için

$$(Ax, y)_K = (x, A^* y)_H$$

olacak şekilde bir tek $A^* \in L(K, H)$ operatörü mevcuttur.

Teorem 1.2.57 de ifade edilen $A^*$ operatörüne $A$ operatörünün adjoint operatörü denir.

**Örnek 1.2.58**$([39], s.169)$**:**

$A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ için $A(x) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

şeklinde tanımlanan operatör olsun. Açık olarak; $A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ sınırlı bir lineer operatördür. $A$'nın $A^*$ adjoint operatörü'nü hesaplayalalım. $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ için

$$(Ax, y)_{\mathbb{C}^2} = \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2} = \left( \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2}$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\overline{y_1} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\overline{y_2}$$

$$= x_1(a_{11}\overline{y_1} + a_{21}\overline{y_2}) + x_2(a_{12}\overline{y_1} + a_{22}\overline{y_2})$$

$$= \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2}$$

olduğundan Teorem 1.2.57 ye göre varlığı bilinen $A^*: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ adjoint operatörü $\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix}$ matrisinin belirlediği lineer operatördür.

Genel olarak, $\left(a_{ij}\right)_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$ , $n,m \geq 1$ matrisinin belirlediği $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, sınırlı lineer operatörünün adjoint operatörü $A^*$ , $\left(\overline{a_{ji}}\right)_{j=1,\dots,m}^{i=1,\dots,n}$ matrisinin belirlediği sınırlı lineer bir operatördür.

**Örnek 1.2.59** ($[39], s.171$)**:** $H = K = l_2(\mathbb{N})$, $Sx := \left(x_2, x_3, \dots, \overbrace{x_{n+1}}^{n}, \dots\right)$ ise $S$ lineer sınırlı operatör olup yani $S \in L(H)$.

$\forall x = (x_n)$ , $y = (y_n) \in l_2(\mathbb{N})$ için

$$(Sx, y)_{l_2} = \left(\left(x_2, x_3, \dots, \overbrace{x_{n+1}}^{n}, \dots\right), (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)\right)_{l_2}$$

$$= x_2\overline{y_1} + x_3\overline{y_2} + \cdots + x_{n+1}\overline{y_n} + \cdots$$

$$= \left(\left(x_1, x_2, \dots, \overbrace{x_n}^{n}, \dots\right), \left(0, y_1, y_2, \dots, \overbrace{y_{n-1}}^{n}, \dots\right)\right)_{l_2}$$

olduğundan Teorem 1.2.57'ye göre varlığı bilinen $S^* \in L(H)$ operatörü

$S^*(y) = \left(0, y_1, y_2, \dots, \overbrace{y_{n-1}}^{n}, \dots\right)$ şeklindedir.

**Tanım 1.2.60 (Selfadjoint Operatör,** ($[39], s.179$)**):** $H$ kompleks Hilbert uzayı ve $A \in L(H)$ olsun. Eğer

$$A^* = A$$

ise bu takdirde $A$ operatörüne selfadjoint(özeşlenik) operatör denir.

**Örnek 1.2.61** ($[39], s.171$)**:** $H$ bir Hilbert uzay olsun. $H$ üzerinde tanımlı $I$ birim operatörü ve sıfır operatörü selfadjointtir.

**Örnek 1.2.62:** $A\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ için $A(x) := \begin{pmatrix} -3x_1 - 4ix_2 \\ 4ix_1 + 5x_2 \end{pmatrix}$ sınırlı lineer dönüşümü, $A = \begin{pmatrix} -3 & -4i \\ 4i & 5 \end{pmatrix}$ matrisine karşılık gelip self adjointtir. Gerçekten; Örnek 1.2.58 den $A^* = \begin{pmatrix} \overline{-3} & \overline{4i} \\ \overline{-4i} & \overline{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4i \\ 4i & 5 \end{pmatrix} = A$ olup $A$ selfadjointtir.

**Tanım 1.2.63 ( Normal Operatör,** ($[39], s. 176$)**):** $H$ kompleks Hilbert uzayı ve $A \in L(H)$ olsun. Eğer

$$AA^* = A^*A$$

ise bu takdirde $A$ operatörüne normal operatör denir.

**Örnek 1.2.64:** $A\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ için $A(x) := \begin{pmatrix} (2+i)x_1 + (3+2i)x_2 \\ (3+2i)x_1 + (2+i)x_2 \end{pmatrix}$

sınırlı lineer dönüşümü, $A = \begin{pmatrix} 2+i & 3+2i \\ 3+2i & 2+i \end{pmatrix}$ matrisine karşılık gelip Örnek 1.2.58 den

$A^* = \begin{pmatrix} 2-i & 3-2i \\ 3-2i & 2-i \end{pmatrix}$ olup $AA^* = \begin{pmatrix} 18 & 16 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$ ve $A^*A = \begin{pmatrix} 18 & 16 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$ olduğundan $A$ normaldir.

**Örnek 1.2.65** ($[39], s. 177$)**:** $H = K = l_2(\mathbb{N}),\ Sx = S(x_n) = \left( x_2, x_3, \dots, \overbrace{x_{n+1}}^{n}, \dots \right)$ ise $S$ lineer sınırlı operatör olup yani $S \in L(H)$. Ayrıca Örnek 1.2.59 den her $(y_n) \in l_2$ için

$S^*(y_n) = \left( 0, y_1, y_2, \dots, \overbrace{y_{n-1}}^{n}, \dots. \right)$ olduğu biliniyor. O halde $(x_n) \in l_2$ için

$$(S^*S)(x_n) = S^*\left( S\left( x_1, x_2, \dots, \overbrace{x_n}^{n}, \dots \right) \right) = S^*\left( x_2, x_3, \dots, \overbrace{x_{n+1}}^{n}, \dots \right) = \left( 0, x_2, \dots, \overbrace{x_n}^{n}, \dots \right)$$

$$(SS^*)(x_n) = S\left( S^*\left( x_1, x_2, \dots, \overbrace{x_n}^{n}, \dots \right) \right) = S\left( 0, x_1, \dots, \overbrace{x_{n-1}}^{n}, \dots \right) = \left( x_1, x_2, \dots, \overbrace{x_n}^{n}, \dots \right)$$

buradan $S^*S \neq SS^*$ olup $S$ operatörü normal değildir.

**Tanım 1.2.66 ( Üniter Operatör,** $([39], s.181)$**):** $H$ kompleks Hilbert uzayı ve $A \in L(H)$ olsun. Eğer

$$AA^* = A^*A = I$$

ise bu takdirde $A$ operatörüne üniter operatör denir.

**Tanım 1.2.67 (Pozitif Operatör** $([40], s.411)$**) :** $H$ bir Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \to H$ bir lineer selfadjoint operatör olsun. Eğer her $x \in D(A)$ için $(Ax, x)_H \geq 0$ ise $A$ operatörüne pozitif operatör denir ve $A \geq 0$ sembolü ile gösterilir. Eğer $A$ pozitif operatörü için $B^2 = A$ olacak şekilde bir $B$ pozitif lineer operatörü varsa, $B$ operatörüne $A$'nın karekökü denir ve $B = \sqrt{A}$ veya $B = A^{\frac{1}{2}}$ şeklinde gösterilir.

**Teorem 1.2.68** $([40], s.422)$**:** $H$ Hilbert uzayında tanımlı her pozitif operatörün bir pozitif karekökü mevcuttur ve bu karekök operatörü bir tektir.

**Tanım 1.2.69 (Rezolvent ve Spectrum,** $([41], s.371)$**):**
$X$ bir Banach uzayı, $A: D(A) \subset X \to X$ bir lineer operatör ve $I: X \to X$ birim operatör olsun. Bu taktirde;
**(1)** $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: (A - \lambda I)^{-1} \in L(X)\}$
kompleks sayılar kümesine $A$ operatörünün rezolvent kümesi denir.
**(2)** $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$ kümesine $A$ operatörünün spektrumu denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir.

**(3)** $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}: (A - \lambda I)$ bire bir değil$\}$ kümesine $A$ operatörünün ayrık (point veya diskret) spektrumu denir.

**(4)** $\sigma_c(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C}: (A - \lambda I)\right.$ bire bir, $Im(A - \lambda I) \neq X$ ve $\left.\overline{Im(A - \lambda I)} = X\right\}$ kümesine $A$ operatörünün sürekli spektrumu denir.

**(5)** $\sigma_r(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C}: (A - \lambda I)\right.$ bire bir, $\left.\overline{Im(A - \lambda I)} \neq X\right\}$ kümesine $A$ operatörünün artık (kalan veya rezüdial) spektrumu denir.
**(6)** $\lambda \in \sigma_p(A)$ sayısına $A$'nın özdeğeri, $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda,\ x_\lambda \in X \setminus\{0\}$ denkleminin çözümüne ise $A$'nın $\lambda$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir.
$\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ ve $\sigma_r(A)$ kümeleri ayrıktır.
Ayrıca spektrumun tanımından $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ olduğu kolayca görülür.

**Tanım 1.2.70 (Rezolvent Operatör,** $([41], s.370)$**):** $X$ bir Banach uzayı ve $A: D(A) \subset X \to X$ lineer bir operatör olsun. Bu takdirde $\lambda$ bir kompleks sayı olmak üzere $A_\lambda = A - \lambda I$ operatörü terslenebilir (tersi var ve sınırlı) ise $(A_\lambda)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}$ operatörüne $A$ operatörünün rezolvent operatörü denir ve $R_\lambda(A)$ sembolüyle ifade edilir.

**Teorem 1.2.71** $([41], s.390)$ **:** Eğer $X \neq \{0\}$ bir kompleks Banach uzay ve $A \in L(X)$, yani lineer sınırlı bir operatör ise, $\sigma(A) \neq \emptyset$.

**Teorem 1.2.72** $([40], s.299)$ **:** Eğer $A$ lineer operatörü sonlu boyutlu $X$ lineer uzayında tanımlı bir operatör ise $\sigma_C(A) = \emptyset$ ve $\sigma_r(A) = \emptyset$.

**Örnek 1.2.73** $([39], s.185)$**:** $S: l_2 \to l_2$, $S: (x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ dönüşümü *birim öteleme* adını alır. $S$ hiç bir özdeğere sahip değildir. Gerçekten;

$\lambda, S$ nin bir özdeğeri olsun ve bu değere karşılık gelen sıfırdan farklı özvektör $x = (x_n)$ olsun (yani $Sx = \lambda x$ olsun). Bu durumda

$$(0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots).$$

Eğer $\lambda = 0$ ise o halde bu eşitliğin sağ tarafı sıfır vektörüdür ve bu nedenle $0 = x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$ elde edilirki bu $x \neq 0$ olmasıyla çelişir.

Eğer $\lambda \neq 0$ ise bu taktirde $\lambda x_1 = 0$ olduğundan $x_1 = 0$ bulunur. Bu nedenle $\lambda x_2 = x_1 = 0$ olduğundan $x_2 = 0$ elde edilir.

Bu şekilde devam edilmesi halinde $0 = x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$ elde edilirki bu $x \neq 0$ olmasıyla çelişir. Sonuç olarak $S$ operatörü hiçbir öz değere sahip değildir. O halde $\sigma_p(A) = \emptyset$.

**Tanım 1.2.74 (Diagonal Operatör** $([35], s.20)$**):** $X$ ve $Y$ iki Banach uzay ve $T: X \to Y$ lineer sınırlı bir dönüşüm olsun. $(x_i)$, $i \geq 1$, $(y_j), j \geq 1$ sırasıyla $X$ ve $Y$ Banach uzaylarında birer şartsız baz olsunlar. Eğer $T(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_i^j \alpha_{i,j} y_j$ , $i = 1,2, \dots$ ise $T: X \to Y$ operatörüne diagonal operatör adı verilir.

(Burada $(\alpha_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ bir sayı matrisi ve $\delta_i^j$ kroniker delta olup $\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ .)

**Tanım 1.2.75 (Banach Uzaylarının ve Operatörlerinin Direkt Toplamı**([37], $s.256$)**):** $\mathfrak{X}_n$, $n \geq 1$ Banach uzayların $l_p$, $1 \leq p < \infty$ , anlamında direkt toplamı:

$$\mathfrak{X} = (\oplus_{n=1}^{\infty} \mathfrak{X}_n)_p = \left\{ x = (x_n): x_n \in \mathfrak{X}_n, \ \ n \geq 1, \ \ \|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathfrak{X}_n}^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır.

$A_n \in L(\mathfrak{X}_n)$, $n \geq 1$ operatörlerinin direkt toplamı ise:

$$A: D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X},$$

$$D(A) = \{x = (x_n) \in \mathfrak{X}: \ (x_n) \in D(A_n), \ n \geq 1, \ Ax = (A_n x_n) \in \mathfrak{X}\}$$

olarak tanımlanır. Burada $A$ ya $A_n$, $n \geq 1$ operatörlerinin direkt toplamı denir ve

$A = \oplus_{n=1}^{\infty} A_n$ şeklinde gösterilir.

**Tanım 1.2.76 (s-sayıları** veya **Singüler sayıları**([3], $s.59$)**):** $H$ bir Hilbert uzayı ve $A$, $H$ Hilbert uzayında bir lineer kompakt operatör olsun, yani $A \in \mathfrak{S}_\infty(H)$. $T \coloneqq (A^* A)^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ operatörünün özdeğerlerine $A$ operatörünün s-sayıları veya bazen singüler sayıları denir.

Bir kompakt operatörünün s-sayılarını monoton azalan şekilde ve tekrarlanma derecesi dikkate alınarak aşağıdaki şekilde numaralandırılabilir.

Yani

$$s_j(A) = \lambda_j(T) \ , \quad j = 1,2,\dots,r(T),$$

$$r(T) = \dim(Im(T)) \ ,$$

eğer $r(T) < \infty$ ise

$$s_j(A) = 0 \ \ , \quad j = r(T) + 1, \ \ r(T) + 2, \dots$$

kabul edilecektir.

Not:

(1) Eğer $A: H \to H,\ A \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ bir normal operatör ise,

$$s_j(A) = |\lambda_j(A)| \quad , \quad j = 1,2,\dots$$

(2) Her skaler $c$ sabiti için

$$s_j(cA) = |c| s_j(A) \quad , \quad j = 1,2,\dots$$

(3)

$$s_j(A) = s_j(A^*) \quad , \quad j = 1,2,\dots$$

(4) Her $B \in L(H)$ için

$$s_j(BA) \leq \|B\| s_j(A) \quad , \quad j = 1,2,\dots$$

$$s_j(AB) \leq \|B\|\, s_j(A) \quad , \quad j = 1,2,\dots$$

Her ne kadar singüler sayılar bir $H$ Hilbert uzayındaki lineer kompakt operatör için tanımlanmış ise de bir $H$ Hilbert uzayında tanımlanan lineer sınırlı operatörler için de singüler sayılar(s-sayılar) kavramı verilebilir(bak. [3]: $s_j(A) = \lambda_j\left(\sqrt{A^*A}\right),\ j = 1,2,\dots$ ).

Uzun yıllar matematikçileri düşündüren sorulardan biri Banach uzayında s-sayıları tanımının nasıl verileceği sorusu olmuştur. Banach uzayında s-sayıları tanımının nasıl verilmesi gerektiğinden bağımsız olarak bir başka önemli nokta ise, verilecek olan bu tanımın daha önceden Hilbert uzaylarında ki bilinen s-sayılar kavramı ile de örtüşmek zorunda olmasıydı.

Banach uzayında s-sayıları tanımının çok farklı şekillerde verilebilme seçenekleri vardı. Fakat yeni verilecek tanım, genelleşme dışında Banach uzaylarındaki operatörlerin spektral teorisine de yeni faydalar ve kolaylıklar katmak zorundaydı. Bu bağlamda, varsayımlar arasından en iyisinin seçilmesinde en büyük etken B. S. Mitiagin ve A. Pelczynski'nin [36](B.S.Mitiagin, A.Pelczynski. Nuclear Operators and Approximative Dimension, Proc. ICM, Moscow.1966, p.366-372) 1966 yılında matematikçilerin uluslararası kongresindeki sunumu oldu.

Şimdi burada A. Pietsch'in [7-8] kitaplarında verdiği ve s-sayılarının aksiyomatik olarak tanımladığı tanımı verelim.

**Tanım 1.2.77** ([7], $s.145$)**:** Bir Banach uzayından diğer bir Banach uzayına lineer sınırlı operatörlerin $L$ uzayından negatif olmayan sayıların dizileri kümesine

$$s: L \to \{s_n(S): s_n(S) \geq 0, \ \ n \geq 1\}$$

dönüşümü, eğer aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, bu dönüşüme s-sayı fonksiyonu veya

s-fonksiyonu denir.

**1)** Her $S \in L(E,F)$ için

$$\|S\| = s_1(S) \geq s_2(S) \geq \cdots \geq 0 \ ;$$

**2)** Her $S,T \in L(E,F)$ için

$$s_n(S+T) \leq s_n(S) + \|T\| \ ,n \geq 1 \ ;$$

**3)** Her $T \in L(E_0,E)$ , $S \in L(E,F)$ , $R \in L(F,F_0)$ için

$$s_n(RST) \leq \|R\| s_n(S) \|T\| \quad ,n \geq 1;$$

**4)** Eğer $S \in L(E,F)$ ve $\dim(S) < n$ ise, $s_n(S) = 0$;

**5)** Eğer $I \in L(E,E)$ birim operatör ve $\dim( E ) \geq n$ $ise, s_n(I) = 1$;

Ayrıca $s_n(S)$'ye $S$ operatörünün n. s-sayısı, $n \geq 1$ denir. Bazen $s_n(S)$ yerine $s_n(S: E \to F)$ simgesi de kullanılacaktır.

**Teorem 1.2.78 [7-8 ] :** Eğer bir $H$ Hilbert uzayı ve bir $S \in L(H)$ operatörü Tanım 1.2.77 de ki beş koşulu sağlıyorsa, bu s-fonksiyonu bir tektir.

**Tanım 1.2.79 (Yaklaşım Sayıları** ([7], $s.146$)**):** $E,F$ birer Banach uzay ve bir $S \in L(E,F)$ operatörü için

$$a_n(S) = inf\{\|S-A\|: \ A \in L(E,F) \ , \quad \dim(A) < n\}, n \geq 1,$$

şeklinde tanımlanan sayılara $S$ operatörünün yaklaşım sayıları denir.

**Tanım 1.2.80 (Gelfand Sayıları** $([7], s. 149)$**):** $E, F$ birer Banach uzay ve bir

$S \in L(E, F)$ operatörü için

$$c_n(S) := inf\left\{\left\|S_{|_Z}\right\| : \ Z \subset E, \ \ codim(Z) < n\right\}, \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanan s-sayısına $S$ operatörünün Gelfand sayıları denir.

**Tanım 1.2.81 (Weyl Sayıları** $([8], s. 94)$**):** $E, F$ birer Banach uzay ve bir

$S \in L(E, F)$ operatörü için

$$x_n(S) := sup\{\, a_n(SA) : A \in L(l_2, E)\,, \|A\| \leq 1\}, n \geq 1$$

şeklinde tanımlanan sayılara $S$ operatörünün Weyl sayıları denir.

Yaklaşım, Gelfand, Weyl sayıları ve bu teoride kullanılan diğer s-sayıları (izomorfizm sayıları, injektif sayılar, surjektif sayılar, Bernstein sayıları, Mitiağin sayıları, Kolmogorov sayıları, entropi sayıları, Hilbert sayıları, simetrik s-sayıları, additif s-sayıları, multiplikatif s-sayıları, maksimal s-sayıları v.s) birer s-sayı fonksiyonlarıdır.

Şimdi burada özel bir $S$ diyagonal operatörün bazı s-sayıları için alınan önemli bazı sonuçları verilsin.

**Teorem 1.2.82** $([7], s. 158)$ **:** $1 \leq u \leq \infty$ , $S(\xi_n) = (\sigma_n \xi_n)$ , $(\xi_n) \in l_u$ ve $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq \cdots \geq 0$. Bu durumda

$$a_n(S: l_u \to l_u) = \sigma_n \quad , \quad n \geq 1 \ ,$$

$$c_n(S: l_u \to l_u) = \sigma_n \quad , \quad n \geq 1 \ ,$$

bağıntıları doğrudur.

**Teorem 1.2.83** $([7], s. 161)$**:** Eğer $S: l_1 \to l_2$ , $S(\xi_n) = (\sigma_n \xi_n)$ , $(\sigma_n) \in c_0$ ise,

$$a_n(S: l_1 \to l_2) = sup\left\{\left(\frac{h-n+1}{\sum_{k=1}^{h} \sigma_k^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad h = n, n+1, \ldots\right\}.$$

Şimdi birim operatörler için elde edilen bazı sonuçlar verilsin.

**Teorem 1.2.84** $([7], s. 160)$**:** Eğer $1 \leq v \leq u \leq \infty$ ise,

$$a_n(\, I: l_u^m \to l_v^m) = (m-n+1)^{\frac{1}{v}-\frac{1}{u}} \quad , \quad n = 1,2, \dots, m.$$

**Teorem 1.2.85** $([7], s. 163)$**:**

$$a_n(\, I: l_1^m \to l_2^m) = \left(\frac{m-n+1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad n = 1,2, \dots, m.$$

**Teorem 1.2.86** $([7], s. 163)$**:**

$$a_n(\, I: l_1 \to c_0) = 1 \quad , \quad n = 1,2, \dots \quad .$$

**Teorem 1.2.87** $([7], s. 163)$**:**

$$a_n(\, I: l_1 \to l_\infty) = \frac{1}{2} \quad , \quad n = 2,3, \dots \quad .$$

**Teorem 1.2.88** $([7], s. 164)$**:**

$$a_n(\, I: l_1^m \to l_\infty^m) \leq 3 \left(\frac{\log(m+1)}{n}\right)^{\frac{1}{2}} , \quad n = 1,2, \dots, m \, .$$

Hilbert uzayları durumunda aşağıdaki sonuç doğrudur.

**Teorem 1.2.89** [18]**:** Eğer $H$, $K$ iki Hilbert uzayları , $S \in L(H, K)$ ve kompakt ise,

$$a_n(S) = c_n(S) = x_n(S) = \lambda_n(|S|), \ \ n \geq 1.$$

## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

### 2.1. Operatörlerin Direkt Toplamının Sınırlılığı, Kompaktlığı ve Spektrum Yapısı Hakkında

Bu kesimde $\mathfrak{X}_m,\ m \geq 1$ Banach uzaylarının $\mathfrak{X} = \left(\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m\right)_p, 1 \leq p < \infty$ direkt toplamı üzerinde tanımlı $A = \bigoplus_{m=1}^{\infty} A_m,\ A_m \in L(\mathfrak{X}_m),\ m \geq 1$, direkt toplam operatörleri ile koordinat operatörleri arasındaki sınırlılık ve kompaktlık ilişkileri araştırılacaktır.

Ayrıca $\mathfrak{X}_m,\ m \geq 1$ Banach uzaylarının $\mathfrak{X} = \left(\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m\right)_p, 1 \leq p < \infty$ direkt toplamı üzerinde tanımlanan $l_p, 1 \leq p < \infty$ normu kısalık adına $\|\cdot\|_p$ yerine $\|\cdot\|$ ile $\mathfrak{X}_m,\ m \geq 1$ Banach uzayları üzerinde tanımlanan $l_p, 1 \leq p < \infty$ normu ise $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}_m}$ yerine $\|\cdot\|_m$ şeklinde gösterilecektir.

İlk önce aşağıdaki önermeyi ispatlayalım.

**Teorem 2.1.1:** Eğer her $m \geq 1$ için $A_m: \mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_m$ lineer operatör ve $A = \bigoplus_{m=1}^{\infty} A_m \in L(\mathfrak{X})$ ise, $A_m \in L(\mathfrak{X}_m),\ m \geq 1$.

**İspat:** Operatörün sınırlılık tanımına göre, her $x \in \mathfrak{X}$ için $\|Ax\| \leq c\|x\|$ olacak şekilde bir küçük $c > 0$ sayısı vardır. O halde özel olarak

$$x = x_m = \left(0, \dots, 0, \overset{m}{\widehat{x_m}}, 0, \dots\right) \in \mathfrak{X} \quad , m \geq 1$$

şeklindeki elemanlar için

$$\|Ax\| \leq c\|x\|$$

olup buradan her $x_m \in \mathfrak{X}_m$ için

$$\|A_m x_m\|_m \leq c\|x_m\|_m.$$

Bu ise $A_m \in L(\mathfrak{X}_m),\ m \geq 1$.

Not: Fakat Teorem 2.1.1'in tersi doğru olmayabilir.

**Örnek 2.1.2:** Her $m \geq 1$ için $\mathfrak{X}_m := \mathbb{C},\ A_m : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ A_m x_m = m x_m, x_m \in \mathbb{C}$ olsun. $\|A_m\|_m \leq m,\ m \geq 1$ olup şu halde $A_m \in L(\mathfrak{X}_m)$ olduğu açıktır.

Fakat

$$x_m^* = \left(0, \dots, 0, \overset{m}{\widehat{1}}, 0, \dots\right) \in \mathfrak{X},\ m \geq 1$$

dizisi için

$Ax_m^* = (A_m(x_m^*)_m) = m,\ m \geq 1$

olup

$\|Ax_m^*\| = m \to \infty,\ m \to \infty$

olduğu açıktır. Bu ise $A_m, m \geq 1$ lerin direkt toplam operatörü olan $A$'nın sınırlı olmadığını verir. Yani

$A = \bigoplus_{m=1}^{\infty} A_m \notin L(\mathfrak{X})$.

Ama genelde aşağıdaki sonuç doğrudur.

**Teorem 2.1.3**([44],Teorem 2.1; [45],Teorem1; [47],2.1Teorem)**:**
Her $m \geq 1$ için $A_m \in L(\mathfrak{X}_m)$ ve $A = \bigoplus_{m=1}^{\infty} A_m : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ olsun. Bu halde $A \in L(\mathfrak{X})$ olması için gerek ve yeter şart $sup_{m\geq 1}\|A_m\| < \infty$ olmasıdır. Diğer taraftan, eğer $A \in L(\mathfrak{X})$ ise, $\|A\| = \sup\limits_{m\geq 1}\|A_m\|$.

**İspat:** Bu halde $A: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ operatörünün lineerliği her $m \geq 1$ için $A_m$ operatörünün lineerliğinden açıktır.

Şimdi $A \in L(\mathfrak{X})$, fakat $\sup_{m\geq 1}\|A_m\| = +\infty$ olduğunu kabul edelim.
Bu durumda

$$\|A_{k_m}\| = \sup\left\{\frac{\|A_{k_m}x_{k_m}\|_{k_m}}{\|x_{k_m}\|_{k_m}} : x_{k_m} \in \mathfrak{X}_{k_m},\ x_{k_m} \neq 0, m \geq 1\right\} \to \infty, m \to \infty$$

olacak şekilde $(k_m) \subset \mathbb{N}$ bir dizi bulunabilir.

Öyleyse, en az bir $(x_{k_m}^*) \subset \mathfrak{X}_{k_m}$ dizisi vardır, öyleki $m \to \infty$ iken

$$\frac{\|A_{k_m}x_{k_m}^*\|_{k_m}}{\|x_{k_m}^*\|_{k_m}} \to \infty,$$

buradan her $m \geq 1$ için

$$\frac{\|A_{n_m}x_{n_m}^*\|_{n_m}}{\|x_{n_m}^*\|_{n_m}} > m^2$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir $n_m \subset k_m$ alt dizisinin varlığı bulunabilir. Buradan

$$\frac{\|x_{n_m}^*\|_{n_m}}{\|A_{n_m}x_{n_m}^*\|_{n_m}} < \frac{1}{m^2}, m > 1.$$

Eğer burada

$$y := \left(0, \dots, 0, \overbrace{y_{p_1}}^{p_1}, 0, \dots, 0, \overbrace{y_{p_2}}^{p_2}, 0, \dots, 0, \overbrace{y_{p_m}}^{p_m}, 0, \dots\right),$$

ve

$$y_{p_m} := \frac{x_{p_m}^*}{\|A_{p_m} x_{p_m}^*\|_{p_m}} \ , m \geq 1,$$

alınırsa $1 \leq p < \infty$ için

$$\|y\|_{\mathfrak{X}}^p = \sum_{m=1}^{\infty} \|y_{p_m}\|_{p_m}^p = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\|x_{p_m}^*\|_{p_m}}{\|A_{p_m} x_{p_m}^*\|_{p_m}} \right)^p \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{m^2} \right)^p < \infty.$$

Yani $y \in \mathfrak{X}$.

Fakat

$$\|Ay\|^p = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\|A_{p_m} x_{p_m}^*\|_{p_m}}{\|A_{p_m} x_{p_m}^*\|_{p_m}} \right)^p = \sum_{m=1}^{\infty} 1 = \infty$$

olduğundan $y \notin D(A)$ ve buradan $D(A) \neq \mathfrak{X}$ bulunur.

Bu çelişki

$$\sup_{m \geq 1} \|A_m\| < \infty$$

olduğunu ispatlar.

Tersine, eğer $\sup_{m \geq 1} \|A_m\| < \infty$ ise, her $x = x_m \in \mathfrak{X}$ için

$$\|Ax\|^p = \sum_{m=1}^{\infty} \|A_m x_m\|_m^p \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|A_m\|^p \, \|x_m\|_m^p$$

$$\leq (\sup_{m \geq 1} \|A_m\|)^p \sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\|_m^p = (\sup_{m \geq 1} \|A_m\|)^p \|x\|^p$$

olup buradan

$$\|A\| \leq \sup_{m \geq 1} \|A_m\|$$

olduğu, yani $A \in L(\mathfrak{X})$ sonucu doğrudur.

Öte yandan her $m \geq 1$ için $\|A_m\| \leq \|A\|$ olduğundan

$$\sup_{m \geq 1} \|A_m\| \leq \|A\|$$

bağıntısının doğruluğu açıktır.

Böylece

$$\|A\| = \sup_{m \geq 1} \|A_m\|.$$

Şimdi $A = \bigoplus_{m=1}^{\infty} A_m : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ direkt toplam operatörü ile onun koordinat operatörünün kompaktlığı arasındaki ilişkiyi araştıralım.

Eğer $A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X})$ ise, her $m \geq 1$ için $A_m \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X}_m)$ olduğunun doğruluğu kompaktlık tanımının bir sonucudur.

Not: Fakat bu sonuncu iddianın tersi doğru olmayabilir.

Örneğin, $\mathfrak{X}_m := \mathbb{C}, \ m \geq 1, \ A_m x_m := x_m, \ x_m \in \mathbb{C}, m \geq 1$

ise, $dim \mathfrak{X}_m = 1, A_m \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X}_m), m \geq 1$.

Bu durumda $A = \bigoplus_{m=1}^{\infty} A_m$ operatörü her $x = (x_m) \in \mathfrak{X}, \ \mathfrak{X} = (\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m)_p$, $1 \leq p < \infty$ için

$$\|Ax\| = \left(\sum_{m=1}^{\infty}\|A_m x_m\|_m^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{m=1}^{\infty}\|x_m\|_m^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|\,,$$

olduğundan $A \in L(\mathfrak{X})$ ve $\|A\| = 1$.

Fakat $A \notin \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X})$. Gerçekten bu durumda

$$M = \left\{x_m : x_m = \left(0,\ldots,0,\overset{\curvearrowright m}{\widehat{1}},0,\ldots\right)\right\} \subset \mathfrak{X}$$

ailesi $\mathfrak{X}$ uzayında sınırlı,

$$AM = \left\{(A_m x_m) = \left(0,\ldots,0,\overset{\curvearrowright m}{\widehat{1}},0,\ldots\right)\right\}$$

olup her $m,k \geq 1,\ m \neq k$ için

$$\|Ax_m - Ax_k\|_p = 2^{\frac{1}{p}}.$$

Yani $AM$ kümesinde yakınsak dizi bulunamaz.

Genelde aşağıdaki sonuç doğrudur.

**Teorem 2.1.4** ([44], Teorem 2.2; [45], Teorem2; [47], 2.2Teorem)**:**

Her $m \geq 1$ için $A_m \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X}_m)$ ve $A = \bigoplus_{m=1}^{\infty} A_m : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ olsun. Bu halde $A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X})$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{m\to\infty}\|A_m\| = 0$$

olmasıdır.

**İspat:** Aksini yani $\limsup_{n\to\infty}\|A_m\| > 0$ olduğunu kabul edelim.

Bu halde bir $c > 0$ ve $(k_m) \subset \mathbb{N}$ dizisi vardır, öyleki

$$\|A_{k_m}\| = \sup\left\{\frac{\|A_{k_m}x_{k_m}\|_{k_m}}{\|x_{k_m}\|_{k_m}} : x_{k_m} \in \mathfrak{X}_{k_m}\backslash\{0\}\right\} \geq c > 0$$

öyleyse, $\dfrac{\|A_{k_m}x_{k_m}^*\|_{k_m}}{\|x_{k_m}^*\|_{k_m}} \geq c, m \geq 1$, koşulunu sağlayan bir $x_{k_m}^* \subset \mathfrak{X}_{k_m}$ dizisi bulunabilir.

Şimdi

$$M = \left\{\left(0,\ldots,0,\overbrace{\frac{x_{k_m}^*}{\|A_{k_m}x_{k_m}^*\|_{k_m}}}^{\curvearrowright m},0,\ldots\right) \in \mathfrak{X}, m \geq 1\right\}$$

şeklinde bir küme oluşturalım.

Her $x \in M$ için $\|x\| \leq \frac{1}{c} < \infty$ olduğundan $M$ sınırlı bir kümedir ve

$$AM = \left\{ \left( 0, \dots, 0, \overbrace{\frac{A_{k_m} x_{k_m}^*}{\left\| A_{k_m} x_{k_m}^* \right\|_{k_m}}}^{\rightarrow m}, 0, \dots \right) \in \mathfrak{X}, m \geq 1 \right\}.$$

Bu halde $\overline{AM} \subset \mathfrak{X}$ kompakt olamaz. Gerçekten, her $m, l \geq 1, m \neq l$ için

$$u_m = \left( 0, \dots, 0, \overbrace{\frac{A_{k_m} x_{k_m}^*}{\left\| A_{k_m} x_{k_m}^* \right\|_{k_m}}}^{\rightarrow m}, 0, \dots \right),$$

$$v_l = \left( 0, \dots, 0, \overbrace{\frac{A_{k_l} x_{k_l}^*}{\left\| A_{k_l} x_{k_l}^* \right\|_{k_l}}}^{\rightarrow l}, 0, \dots \right),$$

için

$$\|u_m - v_l\|_{\mathfrak{X}} = (1^p + 1^p)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}.$$

Yani $AM$ kümesinin keyfi iki elemanı arasındaki uzaklık tam $2^{\frac{1}{p}}$ ye eşittir. Bu küme yakınsak alt dizi bulunduramaz. Bu çelişki $\limsup_{(m)} \|A_m\| = 0$ olduğunu ispatlar. Bu ise $\lim_{m \to \infty} \|A_m\| = 0$ olduğu anlamına gelir.

Şimdi bu önermenin tersinin doğruluğunu gösterelim.

Bunun için bir

$$K_m := A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_m \oplus 0_{\mathfrak{X}_{m+1}} \oplus 0_{\mathfrak{X}_{m+2}} \oplus \dots, K_m : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}, m \geq 1$$

operatör dizisi tanımlayalım.

Her $x \in \mathfrak{X}$ için

$$\|(A - K_m)x\|^p \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \|A_n\|^p \|x_n\|_n^p$$
$$\leq \sup_{n \geq m+1} \|A_n\|^p \sum_{n \geq m+1}^{\infty} \|x_n\|_n^p$$
$$\leq \sup_{n \geq m+1} \|A_n\|^p \, \|x\|^p$$
$$= (\sup_{n \geq m+1} \|A_n\|)^p \|x\|^p$$

olduğundan

$$\|A - K_m\| \leq \sup_{n \geq m+1} \|A_n\|$$

öte yandan $\limsup_{(m)} \|A_m\| = 0$ olduğundan sonuncu eşitsizlikten $(K_m) \subset L(\mathfrak{X})$operatörler dizisinin operatörler normunda $A$ operatörüne yakınsak olduğu bulunur. Ayrıca $(K_m) \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X}),\ m \geq 1$ olduğundan operatörler teorisinin önemli teoremlerinden birine göre [37]

$$A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X}).$$

Not: Hilbert uzaylarının direkt toplamı üzerinde direkt toplam operatörleri için aynı problemler [28] çalışmasında incelenmiştir.

Şimdi Banach uzaylarının direkt toplamı üzerinde direkt toplam operatörlerinin spektrumu ile koordinat operatörlerinin spektrumları arasındaki bağlantıyı araştıralım.

**Teorem 2.1.5** ([44], Teorem4.1)**:** $A = \bigoplus_{m=1}^{\infty} A_m \in L(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X} = (\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m)_p$, $1 \leq p < \infty$ direkt toplam operatörünün spektrum parçaları ve rezolvent kümesi için aşağıdaki bağıntılar doğrudur:

$$\sigma_p(A) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_p(A_m),$$

$$\sigma_c(A) = \left\{\left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_p(A_m)\right]^c \cap \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_r(A_m)\right]^c \cap \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_c(A_m)\right]\right\} \cup$$
$$\{\lambda \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \rho(A_m) : \sup_{m\geq 1} \|R_\lambda(A_m)\| = +\infty\},$$

$$\sigma_r(A) = \left\{\left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_p(A_m)\right]^c \cap \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_r(A_m)\right]\right\},$$

$$\rho(A) = \{\lambda \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \rho(A_m) : \sup_{m\geq 1} \|R_\lambda(A_m)\| < +\infty\}$$

Özel durumda, eğer $\mathfrak{X} = (\bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m)_p$, $1 \leq p < \infty$ ve $A = \bigoplus_{m=1}^{n} A_m \in L(\mathfrak{X}), n \in \mathbb{N}$ ise bu durumda

$$\sigma_p(A) = \bigcup_{m=1}^{n} \sigma_p(A_m),$$

$$\sigma_c(A) = \left\{\left[\bigcup_{m=1}^{n} \sigma_p(A_m)\right]^c \cap \left[\bigcup_{m=1}^{n} \sigma_r(A_m)\right]^c \cap \left[\bigcup_{m=1}^{n} \sigma_c(A_m)\right]\right\},$$

$$\sigma_r(A) = \left\{\left[\bigcup_{m=1}^{n} \sigma_p(A_m)\right]^c \cap \left[\bigcup_{m=1}^{n} \sigma_r(A_m)\right]\right\},$$

$$\rho(A) = \{\lambda \in \bigcap_{m=1}^{n} \rho(A_m)\}$$

şeklindedir.

**İspat:** $\lambda \in \sigma_p(A)$ olsun. Bu durumda $Ax = \lambda x$ denklemini sağlayan bir $x = x_m \in \mathfrak{X}\backslash\{0\}$ elemanı vardır. Burada $x \neq 0$ olduğundan en az bir $m = m_\lambda \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $x_{m_\lambda} \in \mathfrak{X}_{m_\lambda}, x_{m_\lambda} \neq 0$ ve $A_{m_\lambda} x_{m_\lambda} = \lambda x_{m_\lambda}$. Öyleyse, $\lambda \in \sigma_p(A_{m_\lambda})$. Buradan $\lambda \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_p(A_m)$ ve sonuçta $\sigma_p(A) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_p(A_m)$ ilişkisinin doğruluğu bulunur.

Tersine, eğer $\lambda \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_p(A_m)$ ise, en az bir $m_\lambda \in \mathbb{N}$ ve $(x_{m_\lambda}) \in \mathfrak{X}_{m_\lambda}\backslash\{0\}$ vardır, öyleki $\lambda \in \sigma_p(A_{m_\lambda})$ ve $A_{m_\lambda} x_{m_\lambda} = \lambda x_{m_\lambda}$.

Eğer,

$$x_\lambda = \left(0, \ldots, 0, \overbrace{x_{m_\lambda}}^{m}, 0, \ldots\right)$$

alınırsa, $x_\lambda \in \mathfrak{X}, x_\lambda \neq 0$ ve $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$, yani $\lambda \in \sigma_p(A)$.

Neticede $\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_p(A_m) \subset \sigma_p(A)$ alınır. Böylece teoremin birinci iddiasının doğruluğu açıktır.

Şimdi teoremin ikinci iddiasının doğruluğunu gösterelim.

Eğer $\lambda \in \sigma_c(A)$ ise, sürekli spektrumun tanımına göre, $A - \lambda I: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ bire bir, $Im(A - \lambda I) \neq \mathfrak{X}$ ve $Im(A - \lambda I), \mathfrak{X}$ de yoğundur. Burada her $m \geq 1$ için $A_m - \lambda I_m: \mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_m$ operatörü birebir, en az bir $m_\lambda \in \mathbb{N}$ vardır, öyleki $Im\left(A_{m_\lambda} - \lambda I_{m_\lambda}\right) \neq \mathfrak{X}_{m_\lambda}$ve her $m \geq 1$ için $Im(A_m - \lambda I_m), \mathfrak{X}_m$ de yoğundur veya her $m \geq 1$ için $\lambda \in \rho(A_m)$, ama $\sup\{\|R_\lambda(A_m)\|: m \geq 1\} = +\infty$. Buradan

$$\lambda \in \{(\bigcap_{m=1}^{\infty}[\sigma_c(A_m) \cup \rho(A_m)]) \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_c(A_m))\}$$
$$\cup \{\lambda \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \rho(A_m): \sup\|R_\lambda(A_m)\| = +\infty\}$$

Şimdi tersine, bir $\lambda \in \mathbb{C}$ noktasının sonuncu bağıntıyı sağladığını kabul edelim. Öyleyse, ya( her $m \geq 1$ için $\lambda \in \left(\sigma_c(A_m) \cup \rho(A_m)\right)$ ve bir $m_\lambda \in \mathbb{N}$ için $\lambda \in \sigma_c\left(A_{m_\lambda}\right)$ veya $\lambda \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \rho(A_m)$, ama $\sup_{m\geq 1}\|R_\lambda(A_m)\| = +\infty$. Buradan her $m \geq 1$ için $A_m: \mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_m$ operatörünün bire bir olduğu, $Im(A_m - \lambda I) \neq \mathfrak{X}$ ve $Im(A_m - \lambda I)$ nin $\mathfrak{X}$ de yoğun olduğu elde edilir. Buradan $A: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ operatörünün bire bir, $Im(A - \lambda I) \neq \mathfrak{X}$ ve $\overline{Im(A - \lambda I)} = \mathfrak{X}$ olduğu ortaya çıkar. Böylece $\lambda \in \sigma_c(A)$ dır.

Öte yandan basit hesaplamalarla

$$[\bigcap_{m=1}^{\infty}[\sigma_c(A_m) \cup \rho(A_m)]] \cap [\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_c(A_m)]$$
$$= \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_p(A_m)\right]^c \cap [\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_r(A_m)]^c \cap [\bigcup_{m=1}^{\infty} \sigma_c(A_m)]$$

olduğu görülür.

Benzer tekniklerle teoremin üçüncü ve dördüncü iddiaların doğruluğu gösterilebilir.

Not: Hilbert uzayları durumunda sonuncu teoremin benzeri [28] çalışmasında ispatlanmıştır.

### 2.2. Direkt Toplam Operatörlerinin Yaklaşım Sayıları

Bu kesimde Banach uzaylarının direkt toplam operatörleri ile onun koordinat operatörlerinin yaklaşım sayıları arasındaki ilişki incelenecektir. Burada her $m \geq 1$ için $dim\mathfrak{X}_m < \infty$ olduğu kabul edilecektir.

İlk önce aşağıdaki sonuçları verelim.

**Teorem 2.2.1**([44], Teorem 3.1)**:** Her $m \geq 1$ için $dim\mathfrak{X}_m = 1,\ S = \bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m,\ S \in L(\mathfrak{X})$ ve $a_n(S), n \geq 1,\ S$ operatörünün $\mathfrak{X}$ uzayı üzerinde $n$. yaklaşım sayısı ise,

$$a_n(S) \leq \sup_{m \geq n} \|S_m\|$$

doğrudur.

**İspat:** Her $k \in \mathbb{N}$ için $P_k: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}, P_k(x_m) \coloneqq (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots),\ x = x_m \in \mathfrak{X}$ olsun. Bu durumda

$$SP_{n-1}(x_m) = \left(\bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m\right)\left(P_{n-1}(x_m)\right) = (S_1x_1, S_2x_2, \dots, S_{n-1}x_{n-1}, 0, \dots)$$

ve $SP_{n-1} \in L(\mathfrak{X})$. Öyleyse, her $x = x_m \in \mathfrak{X}$ için

$$\|(S - SP_{n-1})x\| = \|(0, \dots, 0, S_nx_n, S_{n+1}x_{n+1}, \dots)\| = \left(\sum_{m=n}^{\infty} \|S_mx_m\|_m^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{m=n}^{\infty} \|S_m\|^p \|x_m\|_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{m \geq n} \|S_m\| \|x_m\|$$

olduğundan $\|S - SP_{n-1}\| \leq \sup_{m \geq n} \|S_m\|$. Buradan ve yaklaşım sayılarının tanımından

$$a_n(S) \leq \sup_{m \geq n} \|S_m\|, n \geq 1$$

bulunur.

**Teorem 2.2.2**([44], Teorem 3.2)**:** $\mathfrak{X} = \left(\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m\right)_p,\ 1 \leq p < \infty,\ S = \bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m,\ S_m,\ S_m^{-1} \in L(\mathfrak{X}_m),\ m \geq 1,\ S^{-1} \in L(\mathfrak{X})$ olsun. Bu halde

$$\inf_{1 \leq m \leq n} \frac{1}{\|S_m^{-1}\|} \leq a_n(S),\ \ n \geq 1.$$

**İspat:** Bu durumda $S^{-1} = \bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m^{-1}$ sonucundan

$$\|S^{-1}\| = \sup_{m \geq 1} \|S_m^{-1}\|.$$

Şimdi

$$J_n: \left(\bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m\right)_p \to \left(\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m\right)_p, n \geq 1,$$

$$Q_n: \left(\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m\right)_p \to \left(\bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m\right)_p, n \geq 1,$$

$$J_n\left((x_1, x_2, \dots, x_n)\right) \coloneqq (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots),$$

$$Q_n\left((x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots)\right) \coloneqq (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

operatörleri tanımlansın. Şu halde tanımlardan

$$K_n \coloneqq Q_nSJ_n: \left(\bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m\right)_p \to \left(\bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m\right)_p,$$

her $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \left(\bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m\right)_p$ için

$$K_n\left((x_1, x_2, \dots, x_n)\right) = (S_1x_1, S_2x_2, \dots, S_nx_n),$$

operatörü elde edilir. Bu durumda $K_n^{-1}, n \geq 1$ ters operatörü var ve

$K_n^{-1} = \bigoplus_{m=1}^{n} S_m^{-1}, K_n^{-1}: \bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m \to \bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m,\ \|K_n^{-1}\| = \sup_{m \geq 1} \|S_m^{-1}\|,\ \ n \geq 1.$

Öte yandan

$$a: S \to \big(a_n(S)\big), S \in L(E,F)$$

bir s-sayı fonksiyonu olduğundan s-sayı fonksiyonunun özelliklerinden[7]

$$1 = a_n\big(I_n: (\oplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m)_p \to (\oplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m)_p\big) = a_n(K_n K_n^{-1}) \leq a_n(Q_n S J_n)\|K_n^{-1}\|$$
$$\leq \|Q_n\|\|J_n\| a_n(S)\|K_n^{-1}\|$$
$$\leq a_n(S)\|K_n^{-1}\|,\ \ n \geq 1,$$

bulunur ki, buradan $\frac{1}{\|K_n^{-1}\|} \leq a_n(S)$, yani $\frac{1}{\sup_{1\leq m\leq n}\|S_m^{-1}\|} \leq a_n(S),\ n \geq 1.$

Böylece her $n \geq 1$ için

$$\inf_{1\leq m\leq n} \frac{1}{\|S_m^{-1}\|} \leq a_n(S)$$

bağıntısı doğrudur.

**Sonuç 2.2.3**([44], Sonuç 3.1)**:** Eğer $S = \oplus_{m=1}^{\infty} S_m, S_m = \alpha_m I_m, \alpha_m \in \mathbb{C}, m \geq 1$ ise,

$$\inf_{1\leq m\leq n}|\alpha_m| \leq a_n(S) \leq \sup_{m\geq n}|\alpha_m|.$$

Not: Özel durumda, eğer $\alpha_m \in \mathbb{R}, dim\mathfrak{X}_m = 1, m \geq 1$ ve $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \cdots \geq \alpha_m \geq \cdots \geq 0$ ise, $a_n(S) = \alpha_n,\ n \geq 1.$

Bu sonuç [7] çalışmasında bulunmuştur.

Şimdi direkt toplam operatörleri ile onun koordinat operatörleri arasındaki bir bağıntıyı açıklayan aşağıdaki sonucu verelim.

**Teorem 2.2.4**([44], Teorem 3.3; [46], Teorem1)**:**

$S = \oplus_{m=1}^{\infty} S_m \in L(\mathfrak{X})$ ve $a_n^{(m)}(S_m), S_m: \mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_m,\ m \geq 1$ operatörünün n. yaklaşım sayısını göstermek üzere, her $n \geq 1$ için

$$\sup_{m\geq 1} a_n^{(m)}(S_m) \leq a_n(S),$$

bağıntısı doğrudur.

**İspat:** Her $m \geq 1$ için $Q_m$ ve $J_m$, Teorem 2.2.2'nin ispatındaki operatörleri göstermek üzere

$$a_n^{(m)}(S_m) = a_n(Q_m S J_m) \leq a_n(S),\ \ n \geq 1$$

olduğundan

$$\sup_{m\geq 1} a_n^{(m)}(S_m) \leq a_n(S),\ \ \ n \geq 1,$$

bağıntısının doğruluğu elde edilir.

Buradan aşağıdaki sonucun doğruluğu elde edilir.

**Teorem 2.2.5**([44], Teorem 3.4; [46], Teorem2)**:**Eğer $S = \bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m \in L(\mathfrak{X})$ ise, $n \geq 1$ ve $q \geq 1$ için

$$a_n(S) \leq \sup_{m\geq q+1} \|S_m\| + \sup_{q\geq 1} \inf_{\sum_{m=1}^{q} n_m < n} sup\left\{a_{n_1}^{(1)}(S_1), a_{n_2}^{(2)}(S_2), \ldots, a_{n_m}^{(q)}(S_q)\right\}, n \geq 1$$

bağıntısı doğrudur.

**İspat:** Eğer

$$K_q = S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_q \oplus 0 \oplus \ldots, q \geq 1,\ K_q: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$$

şeklinde tanımlanırsa, her $T_* = \bigoplus_{m=1}^{\infty} T_m \in L(\mathfrak{X})$ operatörü için

$$\|S - T_*\| \leq \|S - K_q\| + \|K_q - T_*\| = \sup_{m\geq q+1}\|S_m\| + \|K_q - T_*\|$$

bağıntısı elde edilir. Buradan ve ayrıca yaklaşım sayılarının tanımından her $1 \leq q < \infty$ için

$$a_n(S) = \inf\{\|S - T\|: T \in L(\mathfrak{X}), dimT < n\}$$

$$\leq \inf\{\|S - T_*\|: T_* = T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_q \oplus 0 \oplus 0 \ldots \in L(\mathfrak{X}), dimT_* < n\}$$

$$\leq \sup_{m\geq q+1} \|S_m\| + \inf\{\|K_q - T_*\|: T_* = T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_q \oplus 0 \oplus 0 \ldots \in L(\mathfrak{X}), dimT_* < n\}$$

$$\leq \sup_{m\geq q+1} \|S_m\|$$

$$+ \inf_{\sum_{m=1}^{q} n_m < n} \left\{ \begin{matrix} \sup\limits_{1\leq m\leq q} \| S_m - T_m\|: T_1 \in L(\mathfrak{X}_1), T_2 \in L(\mathfrak{X}_2), \ldots, T_q \in L(\mathfrak{X}_q), \\ dimT_1 < n_1, dimT_2 < n_2, \ldots, dimT_{q-1} < n_{q-1}, dim\ T_q < n_q \end{matrix} \right\}$$

$$\leq \sup_{m\geq q+1} \|S_m\| + \sup_{1\leq m\leq q} \left\{ \inf_{\sum_{m=1}^{q} n_m < n} \{\|S_m - T_m\|: T_m \in L(\mathfrak{X}_m): dim\ T_m < n_m\} \right\}$$

$$\leq \sup_{m\geq q+1} \|S_m\| + sup\left\{a_{n_1}^{(1)}(S_1), a_{n_2}^{(2)}(S_2), \ldots, a_{n_m}^{(q)}(S_q)\right\}, \sum_{m=1}^{q} n_m < n.$$

Bu sonuncu eşitsizlikten ise

$$a_n(S) \leq \sup_{m\geq q+1}\|S_m\| + \inf_{\sum_{m=1}^{q} n_m < n} sup\left\{a_{n_1}^{(1)}(S_1), a_{n_2}^{(2)}(S_2), \ldots, a_{n_m}^{(q)}(S_q)\right\},\ n \geq 1$$

olup

$$a_n(S) \leq \sup_{m\geq q+1}\|S_m\| + \sup_{q\geq 1} \inf_{\sum_{m=1}^{q} n_m < n} sup\left\{a_{n_1}^{(1)}(S_1), a_{n_2}^{(2)}(S_2), \ldots, a_{n_m}^{(q)}(S_q)\right\}.$$

Sonuncu teorem, Teorem 2.2.4 ve Teorem 2.1.4'den aşağıdaki önermenin tersinin doğruluğu açıktır.

**Sonuç 2.2.6**([44], Sonuç 3.2)**:** Eğer $S = \bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X})$ ise , $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için

$$a_n(S) \leq \sup_{p\geq 1} \inf_{\sum_{m=1}^{p} n_m < n} sup\left\{a_{n_1}^{(1)}(S_1), a_{n_2}^{(2)}(S_2), \dots, a_{n_m}^{(p)}(S_p)\right\}, n \geq 1.$$

**Sonuç 2.2.7:** Eğer $S = \bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m \in L(\mathfrak{X})$ ise, $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için

$$\sup_{m\geq 1} a_n^{(m)}(S_m) \leq a_n(S) \leq$$

$$\leq \text{limsup}_{(m)} \|S_m\| + \sup_{p\geq 1} \inf_{\sum_{m=1}^{p} n_m < n} sup\left\{a_{n_1}^{(1)}(S_1), a_{n_2}^{(2)}(S_2), \dots, a_{n_m}^{(p)}(S_p)\right\}.$$

Aşağıda verilecek örnekte $\mathbb{C}^3$ den $\mathbb{C}^3$ e bir matrisin yaklaşım sayıları hesaplanarak bu özel durum için alınan sonuçların doğruluğu kontrol edilecektir.

**Örnek 2.2.8:** $S$ matris operatörü $S: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, S \coloneqq \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, a, b, c, d, e \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $S \in L(\mathbb{C}^3)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 \bigoplus \mathrm{S}_2$ veya $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \mathrm{S}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{S}_2 \end{pmatrix}, \mathrm{S}_1: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \mathrm{S}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $S_2: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ S_2 = e$ şeklinde gösterilebilir.

İlk olarak $S_1$ operatörünün yaklaşım sayısını hesaplayalım:

$n = 1$ için

$$a_1(S_1) = inf\{\|S_1 - L\|_p : L \in L(E, F),\ \ dimL < 1\}$$

olduğundan $dimL = 0$ olup $L = 0$ operatörüdür, dolayısıyla

$$a_1(S_1) = \|S_1\|_p.$$

$n = 2$ için

$$a_2(S_1) = inf\{\|S_1 - L\|_p : L(E, F), dimL < 2\}$$

olduğundan $dimL = 0$ veya $dimL = 1$ olabilir. $dimL = 0$ olması durumu incelendi. $dimL = 1$ olması durumunu inceleyelim. $2 \times 2$ tipindeki tüm bir boyutlu matrisler $\begin{pmatrix} x & y \\ \lambda x & \lambda y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ x & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z & \beta z \\ w & \beta w \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \gamma z & z \\ \gamma w & w \end{pmatrix}$ matrisleri şeklindedir. Bu halde

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} x & y \\ \lambda x & \lambda y \end{pmatrix}: \mathbb{C}^2 \to M_1 \subset \mathbb{C}^2, |x|^2 + |y|^2 > 0, dimM_1 = 1,\ x, y, \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ x & y \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \to M_2 \subset \mathbb{C}^2 \,, |x|^2 + |y|^2 > 0, dimM_2 = 1,\ x, y, \alpha \in \mathbb{C},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} z & \beta z \\ w & \beta w \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \to M_3 \subset \mathbb{C}^2 \,, |z|^2 + |w|^2 > 0, dimM_3 = 1,\ z, w, \beta \in \mathbb{C},$$

$$\phi_4 = \begin{pmatrix} \gamma z & z \\ \gamma w & w \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \to M_2 \subset \mathbb{C}^2 \,, |z|^2 + |w|^2 > 0, dimM_4 = 1,\ z, w, \gamma \in \mathbb{C},$$

alarak $a_2(S_1)$ yaklaşım sayısı hesaplansın.

$$a_2(S_1) = inf_{k=1,2,3,4}\{\|S_1 - \phi_k\|_p\}$$

olduğundan matris teorisindeki, $\mathbb{C}^{n\times n}$ üzerindeki herhangi bir $A$ matrisinin $l_p$ normunun

$\|A\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \le p \le 2\ [42,\ s.358]$ şeklinde tanımlı olduğu dikkate alınırsa;

$$\|S_1 - \phi_1\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ \lambda x & \lambda y \end{pmatrix} \right\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a - x & b - y \\ c - \lambda x & d - \lambda y \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= (|a - x|^p + |b - y|^p + |c - \lambda x|^p + |d - \lambda y|^p)^{\frac{1}{p}},\ x, y, \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\|S_1 - \phi_2\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ x & y \end{pmatrix} \right\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a - \alpha x & b - \alpha y \\ c - x & d - y \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= (|a - \alpha x|^p + |b - \alpha y|^p + |c - x|^p + |d - y|^p)^{\frac{1}{p}},\ x, y, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\|S_1 - \phi_3\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z & \beta z \\ w & \beta w \end{pmatrix} \right\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a - z & b - \beta z \\ c - w & d - \beta w \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= (|a - z|^p + |b - \beta z|^p + |c - w|^p + |d - \beta w|^p)^{\frac{1}{p}},\ z, w, \beta\ \in \mathbb{C}$$

$$\|S_1 - \phi_4\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma z & z \\ \gamma w & w \end{pmatrix} \right\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a - \gamma z & b - z \\ c - \gamma w & d - w \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= (|a - \gamma z|^p + |b - z|^p + |c - \gamma w|^p + |d - w|^p)^{\frac{1}{p}},\ z, w, \gamma \in \mathbb{C}$$

olacağı açıktır. Buradan

$$\|S_1 - \phi_1\|_p = (|a - x|^p + |b - y|^p + |c - \lambda x|^p + |d - \lambda y|^p)^{\frac{1}{p}},\ x, y, \lambda \in \mathbb{C}$$

olup:

(1) Özel olarak $x = a, y = b$ ve $\lambda = \frac{c}{a}$ alınırsa,

$\|S_1 - \phi_1\|_p = \left|\frac{ad-bc}{a}\right|,$

(2) Özel olarak $x = a, y = b$ ve $\lambda = \frac{d}{b}$ alınırsa,

$\|S_1 - \phi_1\|_p = \left|\frac{bc-ad}{b}\right|,$

(3) Özel olarak $x = a, y = b$ ve $\lambda = 0$ alınırsa,

$\|S_1 - \phi_1\|_p = (|c|^p + |d|^p)^{\frac{1}{p}},$

(4) Özel olarak $x = 0, y = b \neq 0$ ve $\lambda = \frac{d}{b}$ alınırsa,

$\|S_1 - \phi_1\|_p = (|a|^p + |c|^p)^{\frac{1}{p}},$

(5) Özel olarak $y = 0, x = a \neq 0$ ve $\lambda = \frac{c}{a}$ alınırsa,

$\|S_1 - \phi_1\|_p = (|b|^p + |d|^p)^{\frac{1}{p}},$

elde edilir. Buradan

$$\|S_1 - \phi_1\|_p = inf \begin{cases} \left|\frac{detS_1}{a}\right| \\ \left|\frac{detS_1}{b}\right| \\ (|c|^p + |d|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|a|^p + |c|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|b|^p + |d|^p)^{\frac{1}{p}} \end{cases} \quad (2.2.1).$$

Öte yandan

$$\|S_1 - \phi_2\|_p = \left\|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ x & y \end{pmatrix}\right\|_p = \left\|\begin{pmatrix} a - \alpha x & b - \alpha y \\ c - x & d - y \end{pmatrix}\right\|_p$$

$$= (|a - \alpha x|^p + |b - \alpha y|^p + |c - x|^p + |d - y|^p)^{\frac{1}{p}}, \; x, y, \alpha \in \mathbb{C}$$

olup:

(1) Özel olarak $x = c, y = d$ ve $\alpha = \frac{b}{d}$ alınırsa,

$\|S_1 - \phi_2\|_p = \left|\frac{ad-bc}{d}\right|,$

(2) Özel olarak $x = c, y = d$ ve $\alpha = \frac{a}{c}$ alınırsa,

$\|S_1 - \phi_2\|_p = \left|\frac{bc-ad}{c}\right|,$

(3) Özel olarak $x = c, y = d$ ve $\alpha = 0$ alınırsa,

$\|S_1 - \phi_2\|_p = (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}},$

(4) Özel olarak $x = 0, y = d \neq 0$ ve $\alpha = \frac{b}{d}$ alınırsa,

$\|S_1 - \phi_2\|_p = (|a|^p + |c|^p)^{\frac{1}{p}}$

(5) Özel olarak $y = 0, x = c \neq 0$ ve $\alpha = \frac{a}{c}$ alınırsa,

$\|S_1 - \phi_2\|_p = (|b|^p + |d|^p)^{\frac{1}{p}}$

elde edilir. Buradan

$$\|S_1 - \phi_2\|_p = inf \begin{cases} \left|\frac{detS_1}{d}\right| \\ \left|\frac{detS_1}{c}\right| \\ (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|a|^p + |c|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|b|^p + |d|^p)^{\frac{1}{p}} \end{cases} \qquad (2.2.2).$$

Ayrıca

$$\|S_1 - \phi_3\|_p = \left\|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z & \beta z \\ w & \beta w \end{pmatrix}\right\|_p = \left\|\begin{pmatrix} a - z & b - \beta z \\ c - w & d - \beta w \end{pmatrix}\right\|_p$$

$$= (|a - z|^p + |b - \beta z|^p + |c - w|^p + |d - \beta w|^p)^{\frac{1}{p}}, \; z, w, \beta \in \mathbb{C}$$

olup:

(1) Özel olarak $z = a, w = c$ ve $\beta = \frac{b}{a}$ alınırsa,

$\|S_1 - \phi_3\|_p = \left|\frac{ad-bc}{a}\right|$

(2) Özel olarak $z = a, w = c$ ve $\beta = \frac{d}{c}$ alınırsa,

$\|S_1 - \phi_3\|_p = \left|\frac{bc-ad}{c}\right|,$

(3) Özel olarak $z = a, w = c$ ve $\beta = 0$ alınırsa,

$\|S_1 - \phi_3\|_p = (|b|^p + |d|^p)^{\frac{1}{p}}$,

(4) Özel olarak $z = 0, w = c \neq 0$ ve $\beta = \frac{d}{c}$ alınırsa,

$\|S_1 - \phi_3\|_p = (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}}$,

(5) Özel olarak $w = 0, z = a \neq 0$ ve $\beta = \frac{b}{a}$ alınırsa,

$\|S_1 - \phi_3\|_p = (|c|^p + |d|^p)^{\frac{1}{p}}$,

elde edilir. Buradan

$$\|S_1 - \phi_3\|_p = inf \begin{cases} \left|\frac{detS_1}{a}\right| \\ \left|\frac{detS_1}{c}\right| \\ (|b|^p + |d|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|c|^p + |d|^p)^{\frac{1}{p}} \end{cases} \qquad (2.2.3).$$

Benzer şekilde

$$\|S_1 - \phi_4\|_p = \left\|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma z & z \\ \gamma w & w \end{pmatrix}\right\|_p = \left\|\begin{pmatrix} a - \gamma z & b - z \\ c - \gamma w & d - w \end{pmatrix}\right\|_p$$

$$= (|a - \gamma z|^p + |b - z|^p + |c - \gamma w|^p + |d - w|^p)^{\frac{1}{p}}, \ z, w, \gamma \in \mathbb{C}$$

olup:

(1) Özel olarak $z = b, w = d$ ve $\gamma = \frac{a}{b}$ için

$\|S_1 - \phi_4\|_p = \left|\frac{bc-ad}{b}\right|$,

(2) Özel olarak $z = b, w = d$ ve $\gamma = \frac{c}{d}$ için

$\|S_1 - \phi_4\|_p = \left|\frac{ad-ac}{d}\right|$,

(3) Özel olarak $z = b, w = d$ ve $\gamma = 0$

$\|S_1 - \phi_4\|_p = (|a|^p + |c|^p)^{\frac{1}{p}}$,

(4) Özel olarak $z = 0, w = d \neq 0$ ve $\gamma = \frac{c}{d}$

$$\|S_1-\phi_4\|_p=(|a|^p+|b|^p)^{\frac{1}{p}}$$

(5) Özel olarak $w=0, z=b\neq 0$ ve $\gamma=\frac{a}{b}$

$$\|S_1-\phi_4\|_p=(|c|^p+|d|^p)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. Buradan

$$\|S_1-\phi_4\|_p=inf\begin{cases}\left|\frac{detS_1}{b}\right|\\ \left|\frac{detS_1}{d}\right|\\ (|a|^p+|c|^p)^{\frac{1}{p}}\\ (|a|^p+|b|^p)^{\frac{1}{p}}\\ (|c|^p+|d|^p)^{\frac{1}{p}}\end{cases} \quad (2.2.4).$$

Böylece (2.2.1)-(2.2.4) den

$$a_2(S_1)=inf\{\|S_1-\phi_k\|_p,\ \ k=1,2,3,4\}=inf_{k=1,2,3,4}\{\|S_1-\phi_k\|_p\}$$

$$=inf\begin{cases}\left|\frac{detS_1}{a}\right|\\ \left|\frac{detS_1}{b}\right|\\ \left|\frac{detS_1}{c}\right|\\ \left|\frac{detS_1}{d}\right|\\ (|a|^p+|b|^p)^{\frac{1}{p}}\\ (|a|^p+|c|^p)^{\frac{1}{p}}\\ (|b|^p+|d|^p)^{\frac{1}{p}}\\ (|c|^p+|d|^p)^{\frac{1}{p}}\end{cases} \quad (2.2.5)$$

olarak bulunur.

$n=3$ için

$$a_3(S_1)=inf\{\|S_1-L\|_p: L(E,F), dimL<3\}$$

olduğundan $dimL=0$ , $dimL=1$ veya $dimL=2$ olabilir. $dimL=0$ ve $dimL=1$ olması durumu incelendi. $dimL=2$ olması durumunu inceleyelim. $2\times 2$ tipindeki tüm iki boyutlu matrisler $\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$ matrisi şeklindedir. Bu halde

$\phi = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \to M_1 \subset \mathbb{C}^2$ , $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + |w|^2 > 0, dimM_1 = 1,\ x, y, z, w \in \mathbb{C}$,

alınarak $a_3(S_1)$ sayısı hesaplansın.

$$a_3(S_1) = inf\{\|S_1 - \phi\|_p : L \in L(E,F), dimL < 3\}$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \right\|_p = \left\| \begin{matrix} a-x & b-y \\ c-z & d-w \end{matrix} \right\|_p$$

$$= (|a-x|^p + |b-y|^p + |c-z|^p + |d-w|^p)^{\frac{1}{p}}$$

olup özel olarak $x = a, y = b, z = c$ ve $w = d$ alınırsa;

$$a_3(S_1) = 0$$

Şimdi de $S_2$ operatörünün yaklaşım sayısını hesaplayalım:

$S_1$ operatörünün yaklaşım sayısının hesaplanmasında kullanılan benzer yöntemler uygulanırsa;

$$a_1(S_2) = \|S_2\|_p = e$$

ve

$$a_2(S_2) = inf\{\|S_2 - L\|_p : L(E,F), dimL < 2\}$$

olduğundan $dimL = 0$ veya $dimL = 1$ olabilir. $dimL = 0$ olması durumu incelendi. $dimL = 1$ olması durumunu inceleyelim. Şu halde,

$$\varphi = (\lambda x) : \mathbb{C} \to M_1 \subset \mathbb{C}, |x|^2 > 0, dimM_1 = 1,\ x, \lambda \in \mathbb{C},$$

alarak $a_2(S_2)$ yaklaşım sayısı hesaplansın.

$$a_2(S_2) = inf\{\|S_2 - \varphi\|_p : L \in L(E,F), dimL < 2\} = \|e - \lambda x\|_p = |e - \lambda x|$$

olup burada özel olarak $\lambda = 1, x = e$ alınması halinde $a_2(S_2) = 0$ olarak bulunur.

Şimdi de $S$ operatörünün yaklaşım sayısını hesaplayalım:

$n = 1$ için $a_1(S)$

$$a_1(S) = inf\{\|S - L\|_p : L(E, F), dimL < 1\}$$

olduğundan $dimL = 0$ olup $L = 0$ operatörüdür, dolayısıyla

$$a_1(S) = \|S\|_p.$$

$n = 2$ için

$$a_2(S) = inf\{\|S - L\|_p : L \in L(E, F), dimL < 2\}$$

olduğundan $dimL = 0$ veya $dimL = 1$ olabilir. $dimL = 0$ olması durumu incelendi. $dimL = 1$ olması durumunu inceleyelim. $3 \times 3$ tipindeki tüm bir boyutlu matrisler

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ k_1x & k_1y & k_1z \\ k_2x & k_2y & k_3z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1x & k_1y & k_1z \\ x & y & z \\ k_2x & k_2y & k_3z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1x & k_1y & k_1z \\ k_2x & k_2y & k_2z \\ x & y & z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x & k_1x & k_2x \\ y & k_1y & k_2y \\ z & k_1z & k_2z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1x & x & k_2x \\ k_1y & y & k_2y \\ k_1z & z & k_2z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1x & k_2x & x \\ k_1y & k_2y & y \\ k_1z & k_2z & z \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$dimL = 1$ olacak şekildeki operatörleri

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ k_1x & k_1y & k_1z \\ k_2x & k_2y & k_3z \end{pmatrix} : \mathbb{C}^3 \to M_1 \subset \mathbb{C}^3,\ |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 > 0, dimM_1 = 1,$$

$$x, y, z, k_1, k_2 \in \mathbb{C}$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} k_1x & k_1y & k_1z \\ x & y & z \\ k_2x & k_2y & k_3z \end{pmatrix} : \mathbb{C}^3 \to M_2 \subset \mathbb{C}^3,\ |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 > 0, dimM_2 = 1,$$

$$x, y, zk_1, k_2 \in \mathbb{C}$$

$$\varphi_3 = \begin{pmatrix} k_1x & k_1y & k_1z \\ k_2x & k_2y & k_2z \\ x & y & z \end{pmatrix} : \mathbb{C}^3 \to M_3 \subset \mathbb{C}^3, |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 > 0, dimM_3 = 1,$$

$$x, y, z, k_1, k_2 \in \mathbb{C}$$

$$\varphi_4 = \begin{pmatrix} x & k_1x & k_2x \\ y & k_1y & k_2y \\ z & k_1z & k_2z \end{pmatrix} : \mathbb{C}^3 \to M_4 \subset \mathbb{C}^3 \, , |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 > 0, dimM_4 = 1,$$

$$x, y, z, k_1, k_2 \in \mathbb{C}$$

$$\varphi_5 = \begin{pmatrix} k_1x & x & k_2x \\ k_1y & y & k_2y \\ k_1z & z & k_2z \end{pmatrix} : \mathbb{C}^3 \to M_4 \subset \mathbb{C}^3 \, , |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 > 0, dimM_4 = 1,$$

$$x, y, z, k_1, k_2 \in \mathbb{C}$$

$$\varphi_6 = \begin{pmatrix} k_1x & k_2x & x \\ k_1y & k_2y & y \\ k_1z & k_2z & z \end{pmatrix} : \mathbb{C}^3 \to M_4 \subset \mathbb{C}^3 \, , |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 > 0, dimM_4 = 1,$$

$$x, y, z, k_1, k_2 \in \mathbb{C}$$

alarak $a_2(S)$ sayısı hesaplanacaktır.

O halde,

$$\|S - \varphi_1\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y & z \\ k_1x & k_1y & k_1z \\ k_2x & k_2y & k_3z \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} a - x & b - y & -z \\ c - k_1x & d - k_1y & -k_1z \\ -k_2x & -k_2y & e - k_3z \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= (|a - x|^p + |b - y|^p + |-z|^p + |c - k_1x|^p + |d - k_1y|^p + |-k_1z|^p|-k_2x|^p +$$

$$|-k_2y|^p + |e - k_2z|^p)^{\frac{1}{p}}, \; x, y, z, k_1, k_2 \in \mathbb{C}$$

olup:

(1) Özel olarak $x = a, \; y = b, \; z = 0$ ve $k_1 = k_2 = 0$ olarak alınırsa,

$$\|S - \varphi_1\|_p = (|c|^p + |d|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}},$$

(2) Özel olarak $x = a, \; y = b, \; z = 0$ ve $k_1 = \frac{c}{a}, \; k_2 = 0$ olsun,

$$\|S - \varphi_1\|_p = \left(\left|\frac{bc-ad}{b}\right|^p + |e|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

(3) Özel olarak $x = a, \; y = b, \; z = 0$ ve $k_1 = \frac{d}{b}, \; k_2 = 0$

$$\|S - \varphi_1\|_p = \left(\left|\frac{ad-bc}{a}\right|^p + |e|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

(4) Özel olarak olarak $x = z = 0$ , $y = b \neq 0$ ve $k_1 = \frac{d}{b}, \; k_2 = 0$

$$\|S-\varphi_1\|_p=(|a|^p+|c|^p+|e|^p)^{\frac{1}{p}},$$

(5) Özel olarak olarak $y=z=0\,,\ x=a\neq 0$ ve $k_1=\frac{a}{c},\ k_2=0$

$$\|S-\varphi_1\|_p=(|b|^p+|d|^p+|e|^p)^{\frac{1}{p}},$$

olur. Böylece

$$\|S-\phi_1\|_p=inf\begin{cases}(|a|^p+|c|^p+|e|^p)^{\frac{1}{p}}\\(|b|^p+|d|^p+|e|^p)^{\frac{1}{p}}\\(|c|^p+|d|^p+|e|^p)^{\frac{1}{p}}\\\left(\left|\frac{detS_1}{a}\right|^p+|e|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\\left(\left|\frac{detS_1}{b}\right|^p+|e|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{cases}\qquad(2.2.6).$$

Öte yandan

$$\|S-\varphi_2\|_p=\left\|\begin{pmatrix}a&b&0\\c&d&0\\0&0&e\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k_1x&k_1y&k_1z\\x&y&z\\k_2x&k_2y&k_2z\end{pmatrix}\right\|_p$$

$$=\left\|\begin{pmatrix}a-k_1x&b-k_1y&-k_1z\\c-x&d-y&-z\\-k_2x&-k_2y&e-k_2z\end{pmatrix}\right\|_p$$

$$=(|a-k_1x|^p+|b-k_1y|^p+|k_1z|^p+|c-x|^p+|d-y|^p+|z|^p+|k_2x|^p+|k_2y|^p+|e-k_2z|^p)^{\frac{1}{p}},\quad x,y,z,k_1,k_2\in\mathbb{C}$$

olup:

(1) Özel olarak $x=c,\ y=d,\ z=0$ ve $k_1=k_2=0$ olarak alınırsa,

$$\|S-\varphi_2\|_p=(|a|^p+|b|^p+|e|^p)^{\frac{1}{p}}$$

(2) Özel olarak $x=c,\ y=d,\ z=0$ ve $k_1=\frac{a}{c},\ k_2=0$ olsun,

$$\|S-\varphi_2\|_p=\left(\left|\frac{bc-ad}{c}\right|^p+|e|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(3) Özel olarak $x=c,\ y=d,\ z=0$ ve $k_1=\frac{b}{d},\ k_2=0$

$$\|S-\varphi_2\|_p=\left(\left|\frac{ad-bc}{d}\right|^p+|e|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(4) Özel olarak $x=z=0\,,\ y=d\neq 0$ ve $k_1=\frac{b}{d},\ k_2=0$

$$\|S-\varphi_2\|_p=(|a|^p+|c|^p+|e|^p)^{\frac{1}{p}}$$

(5) Özel olarak $y = z = 0$ , $x = c \neq 0$ ve $k_1 = \frac{a}{c}$, $k_2 = 0$

$$\|S - \varphi_2\|_p = (|b|^p + |d|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Böylece

$$\|S - \varphi_2\|_p = inf \begin{cases} (|a|^p + |b|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|a|^p + |c|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|b|^p + |d|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}} \\ \left(\left|\frac{detS_1}{c}\right|^p + |e|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \left(\left|\frac{detS_1}{d}\right|^p + |e|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{cases} \qquad (2.2.7).$$

Ayrıca

$$\|S - \varphi_3\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1x & k_1y & k_1z \\ k_2x & k_2y & k_2z \\ x & y & z \end{pmatrix} \right\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a - k_1x & b - k_1y & -k_1z \\ c - k_2x & d - k_2y & -k_2z \\ -x & -y & e - z \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= (|a - k_1x|^p + |b - k_1y|^p + |-k_1z|^p + |c - k_2x|^p + |d - k_2y|^p + |-k_2z|^p + |x|^p + |y|^p + |e - z|^p)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad x, y, z, k_1, k_2 \in \mathbb{C}$$

olup:

(1) Özel olarak $x = 0$, $y = 0$, $z = e$ ve $k_1 = k_2 = 0$ olarak alınırsa,

$$\|S - \varphi_3\|_p = (|a|^p + |b|^p + |c|^p + |d|^p)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Böylece

$$\|S - \varphi_3\|_p = inf \left\{ (|a|^p + |b|^p + |c|^p + |d|^p)^{\frac{1}{p}} \right. \qquad (2.2.8).$$

Benzer şekilde

$$\|S - \varphi_4\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & k_1x & k_2x \\ y & k_1y & k_2y = \\ z & k_1z & k_2z \end{pmatrix} \right\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a - x & b - k_1x & -k_2x \\ c - y & d - k_1y & -k_2y \\ -z & -k_1z & e - k_2z \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= (|a - x|^p + |b - k_1x|^p + |-k_2x|^p + |c - y|^p + |d - k_1y|^p + |-k_2y|^p + |-z|^p + |-k_1z|^p + |e - k_2z|^p)^{\frac{1}{p}}, \qquad x, y, z, k_1, k_2 \in \mathbb{C}$$

olup:

(1) Özel olarak $x = a,\ y = c,\ z = 0$ ve $k_1 = k_2 = 0$ olarak alınırsa,

$$\|S - \varphi_4\|_p = (|b|^p + |d|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}}$$

(2) Özel olarak $x = a,\ y = c,\ z = 0$ ve $k_1 = \frac{b}{a},\ k_2 = 0$ olsun,

$$\|S - \varphi_4\|_p = \left(\left|\frac{ad-bc}{a}\right|^p + |e|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(3) Özel olarak $x = a,\ y = c,\ z = 0$ ve $k_1 = \frac{d}{c},\ k_2 = 0$

$$\|S - \varphi_4\|_p = \left(\left|\frac{bc-ad}{c}\right|^p + |e|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(4) Özel olarak $x = z = 0,\ y = c \neq 0$ ve $k_1 = \frac{d}{c},\ k_2 = 0$

$$\|S - \varphi_4\|_p = (|a|^p + |b|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}}$$

(5) Özel olarak $y = z = 0,\ x = a \neq 0$ ve $k_1 = \frac{b}{a},\ k_2 = 0$

$$\|S - \varphi_4\|_p = (|c|^p + |d|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Böylece

$$\|S - \varphi_4\|_p = inf\begin{cases} (|a|^p + |b|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|b|^p + |d|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|c|^p + |d|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}} \\ \left(\left|\frac{detS_1}{a}\right|^p + |e|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \left(\left|\frac{detS_1}{c}\right|^p + |e|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{cases} \qquad (2.2.9).$$

Paralel düşünce ile

$$\|S - \varphi_5\|_p = \left\|\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1x & x & k_2x \\ k_1y & y & k_2y \\ k_1z & z & k_2z \end{pmatrix}\right\|_p = \left\|\begin{pmatrix} a - k_1x & b - x & -k_2x \\ c - k_1y & d - y & -k_2y \\ -k_1z & -z & e - k_2z \end{pmatrix}\right\|_p$$

$$= (|a - k_1x|^p + |b - x|^p + |-k_2x|^p + |c - k_1y|^p + |d - y|^p + |-k_2y|^p + |-k_1z|^p + |-z|^p + |e - k_2z|^p)^{\frac{1}{p}}, \qquad x, y, z, k_1, k_2 \in \mathbb{C}$$

olup:

(1) Özel olarak $x = b,\ y = d,\ z = 0$ ve $k_1 = k_2 = 0$ olarak alınırsa,

$$\|S - \varphi_5\|_p = (|a|^p + |c|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}}$$

(2) Özel olarak $x = b,\ y = d,\ z = 0$ ve $k_1 = \frac{a}{b},\ k_2 = 0$ olsun,

$$\|S - \varphi_5\|_p = \left(\left|\frac{bc-ad}{b}\right|^p + |e|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(3) Özel olarak $x = b,\ y = d,\ z = 0$ ve $k_1 = \frac{c}{d},\ k_2 = 0$

$$\|S - \varphi_5\|_p = \left(\left|\frac{ad-bc}{d}\right|^p + |e|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(4) Özel olarak $x = z = 0\ ,\ y = d \neq 0$ ve $k_1 = \frac{c}{d},\ k_2 = 0$ olarak alınırsa,

$$\|S - \varphi_5\|_p = (|a|^p + |b|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}}$$

(5) Özel olarak $y = z = 0\ ,\ x = b \neq 0$ ve $k_1 = \frac{a}{b},\ k_2 = 0$ olarak alınırsa,

$$\|S - \varphi_5\|_p = (|c|^p + |d|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Böylece

$$\|S - \varphi_5\|_p = inf \begin{cases} (|a|^p + |b|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|a|^p + |c|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|c|^p + |d|^p + |e|^p)^{\frac{1}{p}} \\ \left(\left|\frac{detS_1}{b}\right|^p + |e|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \left(\left|\frac{detS_1}{d}\right|^p + |e|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{cases} \qquad (2.2.10).$$

Öte yandan

$$\|S - \varphi_6\|_p = \left\|\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1x & k_2x & x \\ k_1y & k_2y & y \\ k_1z & k_2z & z \end{pmatrix}\right\|_p = \left\|\begin{pmatrix} a-k_1x & b-k_2x & -x \\ c-k_1y & d-k_2y & -y \\ -k_1z & -k_2z & e-z \end{pmatrix}\right\|_p$$

$= (|a - k_1x|^p + |b - k_2x|^p + |-x|^p + |c - k_1y|^p + |d - k_2y|^p + |-y|^p + |-k_1z|^p +$
$|-k_2z|^p + |e - z|^p)^{\frac{1}{p}},\ x, y, z, k_1, k_2 \in \mathbb{C}$

olup:

(1) Özel olarak $x = 0,\ y = 0,\ z = e$ ve $k_1 = k_2 = 0$ olarak alınırsa,

$$\|S - \varphi_6\|_p = (|a|^p + |b|^p + |c|^p + |d|^p)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Böylece

$$\|S-\varphi_6\|_p = inf\left\{(|a|^p+|b|^p+|c|^p+|d|^p)^{\frac{1}{p}}\right. \qquad (2.2.11).$$

Böylece (2.2.6)-(2.2.11) dan

$$a_2(S) = inf\{\|S-\varphi_k\|_p,\ \ k=1,2,3,4,5,6\} = inf_{k=1,2,3,4,5,6}\{\|S-\varphi_k\|_p\}$$

$$= inf\begin{cases} \left|\frac{detS_1}{a}\right| \\ \left|\frac{detS_1}{b}\right| \\ \left|\frac{detS_1}{c}\right| \\ \left|\frac{detS_1}{d}\right| \\ (|a|^p+|b|^p+|e|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|a|^p+|c|^p+|e|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|b|^p+|d|^p+|e|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|c|^p+|d|^p+|e|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|a|^p+|b|^p+|c|^p+|d|^p)^{\frac{1}{p}} \end{cases} \qquad (2.2.12)$$

olarak bulunur.

$n=3$ için

$$a_3(S) = inf\{\|S-L\|_p : L(E,F)\ , dimL < 3\}$$

olduğundan $dimL=0,\ dimL=1$ veya $dimL=2$ olabilir. $dimL=0$ ve $dimL=1$ olması durumu incelendi. $dimL=2$ olması durumunu inceleyelim. $3\times 3$ tipindeki tüm iki boyutlu matrisler

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda_1x+\lambda_2\alpha & \lambda_1y+\lambda_2\beta & \lambda_1z+\lambda_2\gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda_1x+\lambda_2\alpha & \lambda_1y+\lambda_2\beta & \lambda_1z+\lambda_2\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1x+\lambda_2\alpha & \lambda_1y+\lambda_2\beta & \lambda_1z+\lambda_2\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & \alpha & \lambda_1x+\lambda_2\alpha \\ y & \beta & \lambda_1y+\lambda_2\beta \\ z & \gamma & \lambda_1z+\lambda_2\gamma \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x & \lambda_1x+\lambda_2\alpha & \alpha \\ y & \lambda_1y+\lambda_2\beta & \beta \\ z & \lambda_1z+\lambda_2\gamma & \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1x+\lambda_2\alpha & x & \alpha \\ \lambda_1y+\lambda_2\beta & y & \beta \\ \lambda_1z+\lambda_2\gamma & z & \gamma \end{pmatrix},$$

şeklindedir.

$dimL = 2$ olacak şekildeki operatörleri

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda_1 x + \lambda_2 \alpha & \lambda_1 y + \lambda_2 \beta & \lambda_1 z + \lambda_2 \gamma \end{pmatrix} : \mathbb{C}^3 \to M_1 \subset \mathbb{C}^3 \ ,$$

$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 > 0, \qquad \alpha^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 > 0, dimM_1 = 1, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda_1 x + \lambda_2 \alpha & \lambda_1 y + \lambda_2 \beta & \lambda_1 z + \lambda_2 \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} : \mathbb{C}^3 \to M_2 \subset \mathbb{C}^3 \ ,$$

$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 > 0, \qquad \alpha^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 > 0, dimM_1 = 1, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 x + \lambda_2 \alpha & \lambda_1 y + \lambda_2 \beta & \lambda_1 z + \lambda_2 \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{pmatrix} : \mathbb{C}^3 \to M_3 \subset \mathbb{C}^3,$$

$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 > 0, \qquad \alpha^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 > 0, dimM_1 = 1, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\psi_4 = \begin{pmatrix} x & \alpha & \lambda_1 x + \lambda_2 \alpha \\ y & \beta & \lambda_1 y + \lambda_2 \beta \\ z & \gamma & \lambda_1 z + \lambda_2 \gamma \end{pmatrix} : \mathbb{C}^3 \to M_4 \subset \mathbb{C}^3 \ ,$$

$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 > 0, \qquad \alpha^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 > 0, dimM_1 = 1, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\psi_5 = \begin{pmatrix} x & \lambda_1 x + \lambda_2 \alpha & \alpha \\ y & \lambda_1 y + \lambda_2 \beta & \beta \\ z & \lambda_1 z + \lambda_2 \gamma & \gamma \end{pmatrix} : \mathbb{C}^3 \to M_4 \subset \mathbb{C}^3 \ ,$$

$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 > 0, \qquad \alpha^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 > 0, dimM_1 = 1, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\psi_6 = \begin{pmatrix} \lambda_1 x + \lambda_2 \alpha & x & \alpha \\ \lambda_1 y + \lambda_2 \beta & y & \beta \\ \lambda_1 z + \lambda_2 \gamma & z & \gamma \end{pmatrix} : \mathbb{C}^3 \to M_4 \subset \mathbb{C}^3 \ ,$$

$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 > 0, \qquad \alpha^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 > 0, dimM_1 = 1, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

alarak $a_2(S)$ sayısı hesaplanacaktır.

O halde,

$$\|S - \psi_1\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda_1 x + \lambda_2 \alpha & \lambda_1 y + \lambda_2 \beta & \lambda_1 z + \lambda_2 \gamma \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} a-x & b-y & -z \\ c-\alpha & d-\beta & -\gamma \\ -\lambda_1 x-\lambda_2\alpha & -\lambda_1 y-\lambda_2\beta & e-\lambda_1 z-\lambda_2\gamma \end{pmatrix} \right\|_p$$

$= (|a-x|^p + |b-y|^p + |-z|^p + |c-\alpha|^p + |d-\beta|^p + |-\gamma|^p + |-\lambda_1 x-\lambda_2\alpha|^p +$

$|-\lambda_1 y-\lambda_2\beta|^p + |e-\lambda_1 z-\lambda_2\gamma|^p)^{\frac{1}{p}}$, $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

olup:

(1) Özel olarak $x = a,\ y = b,\ z = 0\ , \alpha = c, \beta = d, \gamma = 0$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olsun,

$\|S-\psi_1\|_p = e$

olur.

Böylece

$$\|S-\psi_1\|_p = inf\{e\} = e \qquad (2.2.13).$$

Diğer taraftan

$$\|S-\psi_2\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda_1 x+\lambda_2\alpha & \lambda_1 y+\lambda_2\beta & \lambda_1 z+\lambda_2\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} a-x & b-y & -z \\ c-\lambda_1 x-\lambda_2\alpha & d-\lambda_1 y-\lambda_2\beta & -\lambda_1 z-\lambda_2\gamma \\ -\alpha & -\beta & e-\gamma \end{pmatrix} \right\|_p$$

$= (|a-x|^p + |b-y|^p + |-z|^p + |c-\lambda_1 x-\lambda_2\alpha|^p + |d-\lambda_1 y-\lambda_2\beta|^p +$

$|-\lambda_1 z-\lambda_2\gamma|^p + |-\alpha|^p + |-\beta|^p + |e-\gamma|^p)^{\frac{1}{p}}$, $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

olup:

(1) Özel olarak $x = a,\ y = b,\ z = 0\ , \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = e$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olsun,

$\|S-\psi_2\|_p = [|c|^p + |d|^p]^{\frac{1}{p}}$

(2) Özel olarak $x = a,\ y = b,\ z = 0\ , \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = e$ ve $\lambda_1 = \frac{c}{a},\ \lambda_2 = 0$ olsun,

$\|S-\psi_2\|_p = \left|\frac{ad-bc}{a}\right|$

(3) Özel olarak $x = a,\ y = b,\ z = 0\ , \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = e$ ve $\lambda_1 = \frac{d}{b},\ \lambda_2 = 0$ olsun,

$$\|S - \psi_2\|_p = \left|\frac{bc - ad}{b}\right|$$

olur. Böylece

$$\|S - \psi_2\|_p = inf \begin{cases} (|c|^p + |d|^p)^{\frac{1}{p}} \\ \left|\frac{detS_1}{a}\right| \\ \left|\frac{detS_1}{b}\right| \end{cases} \qquad (2.2.14).$$

Öte yandan

$$\|S - \psi_3\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 x + \lambda_2 \alpha & \lambda_1 y + \lambda_2 \beta & \lambda_1 z + \lambda_2 \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} a - \lambda_1 x - \lambda_2 \alpha & b - \lambda_1 y - \lambda_2 \beta & -\lambda_1 z - \lambda_2 \gamma \\ c - \alpha & d - \beta & -\gamma \\ -x & -y & e - z \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= (|a - \lambda_1 x - \lambda_2 \alpha|^p + |b - \lambda_1 y - \lambda_2 \beta|^p + |-\lambda_1 z - \lambda_2 \gamma|^p + |c - \alpha|^p + |d - \beta|^p$$
$$+ |-\gamma|^p + |-x|^p + |-y|^p + |e - z|^p)^{\frac{1}{p}}, \qquad x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

olup:

(1) Özel olarak $x = 0,\ y = 0,\ z = e\ , \alpha = c, \beta = d, \gamma = 0$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olsun,

$$\|S - \psi_3\|_p = [|a|^p + |b|^p]^{\frac{1}{p}}$$

(2) Özel olarak $x = 0,\ y = 0,\ z = e\ , \alpha = c, \beta = d, \gamma = 0$ ve $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{a}{c}$ olsun,

$$\|S - \psi_3\|_p = \left|\frac{bc - ad}{c}\right|$$

(3) Özel olarak $x = 0,\ y = 0,\ z = e\ , \alpha = c, \beta = d, \gamma = 0$ ve $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{b}{d}$ olsun,

$$\|S - \psi_3\|_p = \left|\frac{ad - bc}{d}\right|$$

olur. Böylece

$$\|S - \psi_3\|_p = inf \begin{cases} (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} \\ \left|\frac{detS_1}{c}\right| \\ \left|\frac{detS_1}{d}\right| \end{cases} \qquad (2.2.15).$$

Benzer hesaplamalar ile

$$\|S-\psi_4\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & \alpha & \lambda_1 x + \lambda_2 \alpha \\ y & \beta & \lambda_1 y + \lambda_2 \beta \\ z & \gamma & \lambda_1 z + \lambda_2 \gamma \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} a-x & b-\alpha & -\lambda_1 x - \lambda_2 \alpha \\ c-y & d-\beta & -\lambda_1 y - \lambda_2 \beta \\ -z & -\gamma & e-\lambda_1 z - \lambda_2 \gamma \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= (|a-x|^p + |b-\alpha|^p + |-\lambda_1 x - \lambda_2 \alpha|^p + |c-y|^p + |d-\beta|^p + |-\lambda_1 y - \lambda_2 \beta|^p$$

$$+ |-z|^p + |-\gamma|^p + |e-\lambda_1 z - \lambda_2 \gamma|^p)^{\frac{1}{p}}, \qquad x,y,z,\alpha,\beta,\gamma,\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}$$

olup:

(1) Özel olarak $x = a,\ y = c,\ z = 0, \gamma = 0, \alpha = b, \beta = d$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olsun,

$\|S-\psi_4\|_p = e$

olur. Böylece

$$\|S-\psi_4\|_p = inf\{e\} = e \qquad (2.2.16).$$

Diğer taraftan

$$\|S-\psi_5\|_p = \left\| \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & \lambda_1 x + \lambda_2 \alpha & \alpha \\ y & \lambda_1 y + \lambda_2 \beta & \beta \\ z & \lambda_1 z + \lambda_2 \gamma & \gamma \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} a-x & b-\lambda_1 x - \lambda_2 \alpha & -\alpha \\ c-y & d-\lambda_1 y - \lambda_2 \beta & -\beta \\ -z & -\lambda_1 z - \lambda_2 \gamma & e-\gamma \end{pmatrix} \right\|_p$$

$$= (|a-x|^p + |b-\lambda_1 x - \lambda_2 \alpha|^p + |-\alpha|^p + |c-y|^p + |d-\lambda_1 y - \lambda_2 \beta|^p +$$

$$|-\beta|^p + |-z|^p + |-\lambda_1 z - \lambda_2 \gamma|^p + |e-\gamma|^p)^{\frac{1}{p}},\ x,y,z,\alpha,\beta,\gamma,\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}$$

olup:

(1) Özel olarak $x = a,\ y = c,\ z = 0, \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = e$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olsun,

$\|S-\psi_5\|_p = [|b|^p + |d|^p]^{\frac{1}{p}}$

(2) Özel olarak $x = a,\ y = c,\ z = 0, \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = e$ ve $\lambda_1 = \frac{b}{a},\ \lambda_2 = 0$ olsun,

$\|S-\psi_5\|_p = \left|\frac{ad-bc}{a}\right|$

(3) Özel olarak $x=a,\ y=c,\ z=0\,,\alpha=0,\beta=0,\gamma=e$ ve $\lambda_1=\frac{d}{c},\ \lambda_2=0$ olsun,

$\|S-\psi_5\|_p = \left|\frac{bc-ad}{c}\right|$

olur. Böylece

$$\|S-\psi_5\|_p = inf\begin{cases}(|b|^p+|d|^p)^{\frac{1}{p}}\\ \left|\frac{detS_1}{a}\right|\\ \left|\frac{detS_1}{c}\right|\end{cases} \qquad (2.2.17).$$

Diğer taraftan

$$\|S-\psi_6\|_p = \left\|\begin{pmatrix}a & b & 0\\ c & d & 0\\ 0 & 0 & e\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda_1x+\lambda_2\alpha & x & \alpha\\ \lambda_1y+\lambda_2\beta & y & \beta\\ \lambda_1z+\lambda_2\gamma & z & \gamma\end{pmatrix}\right\|_p$$

$$=\left\|\begin{pmatrix}a-\lambda_1x-\lambda_2\alpha & b-x & -\alpha\\ c-\lambda_1y-\lambda_2\beta & d-y & -\beta\\ -\lambda_1z-\lambda_2\gamma & -z & e-\gamma\end{pmatrix}\right\|_p$$

$$=(|a-\lambda_1x-\lambda_2\alpha|^p+|b-x|^p+|-\alpha|^p+|c-\lambda_1y-\lambda_2\beta|^p+|d-y|^p+$$

$$|-\beta|^p+|-\lambda_1z-\lambda_2\gamma|^p+|-z|^p+|e-\gamma|^p)^{\frac{1}{p}},\ x,y,z,\alpha,\beta,\gamma,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$$

olup:

(1) Özel olarak $x=b,\ y=d,\ z=0\,,\alpha=0,\beta=0,\gamma=e$ ve $\lambda_1=\lambda_2=0$ olsun,

$\|S-\psi_6\|_p = [|a|^p+|c|^p]^{\frac{1}{p}}$

(2) Özel olarak $x=b,\ y=d,\ z=0\,,\alpha=0,\beta=0,\gamma=e$ ve $\lambda_1=\frac{a}{b},\ \lambda_2=0$ olsun,

$\|S-\psi_6\|_p = \left|\frac{bc-ad}{b}\right|$

(3) Özel olarak $x=a,\ y=c,\ z=0\,,\alpha=0,\beta=0,\gamma=e$ ve $\lambda_1=\frac{c}{d},\ \lambda_2=0$ olsun,

$\|S-\psi_6\|_p = \left|\frac{ad-bc}{d}\right|$

olur. Böylece

$$\|S-\psi_6\|_p = inf\begin{cases} (|a|^p+|c|^p)^{\frac{1}{p}} \\ \left|\frac{detS_1}{b}\right| \\ \left|\frac{detS_1}{d}\right| \end{cases} \qquad (2.2.18).$$

Böylece (2.2.13)-(2.2.18) dan

$$a_3(S) = inf\{\|S-\psi_k\|_p,\ \ k = 1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\} = inf_{k=1,2,3,4,5,6}\{\|S-\psi_k\|_p\}$$

$$= inf\begin{cases} \left|\frac{detS_1}{a}\right| \\ \left|\frac{detS_1}{b}\right| \\ \left|\frac{detS_1}{c}\right| \\ \left|\frac{detS_1}{d}\right| \\ (|a|^p+|b|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|a|^p+|c|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|b|^p+|d|^p)^{\frac{1}{p}} \\ (|c|^p+|d|^p)^{\frac{1}{p}} \\ e \end{cases} \qquad (2.2.19)$$

olarak bulunur.

$n = 4$ için

$$a_4(S) = inf\{\|S-L\|_p : L(E,F), dimL < 4\}$$

olduğundan $dimL = 0$, $dimL = 1, dimL = 2$ veya $dimL = 3$ olabilir. $dimL = 0$, $dimL = 1, dimL = 2$ ve $dimL = 3$ olması durumu incelendi. $dimL = 4$ olması durumunu inceleyelim. $3\times 3$ tipindeki tüm iki boyutlu matrisler $\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & u & v \\ s & t & r \end{pmatrix}$ matrisi şeklindedir. Bu halde

$$\phi = \begin{pmatrix} x & y & z \\ w & u & v \\ s & t & r \end{pmatrix} : \mathbb{C}^3 \to M_1 \subset \mathbb{C}^3,\ |x|^2+|y|^2+|z|^2+|w|^2+|u|^2+|v|^2+|s|^2+$$
$$|t|^2+|r|^2 > 0,\ dimM_1 = 1,\ \ x,y,z,w,u,v,s,t,r \in \mathbb{C},$$

alınarak $a_4(S)$ sayısı hesaplansın.

$a_4(S) = inf\{\|S-\phi\|_p : L \in L(E,F), dimL < 4\} =$

$$= \left\| \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y & z \\ w & u & v \\ s & t & r \end{pmatrix} \right\|_p = \left\| \begin{matrix} a-x & b-y & -z \\ c-w & d-u & -v \\ -s & -t & e-r \end{matrix} \right\|_p$$

$= (|a-x|^p + |b-y|^p + |-z|^p + |c-w|^p + |d-u|^p + |-v|^p + |-s|^p + |-t|^p +$

$|e-r|^p)^{\frac{1}{p}}$

olup özel olarak $x = a, y = b,\ z = 0,\ w = c, u = d, v = 0, s = 0, t = 0$ ve $r = e$ alınırsa;

$a_4(S) = 0.$

Not: Bu $S = S_1 \oplus S_2$ ve $S_1, S_2$ operatörlerinin yaklaşım sayılarının Teorem 2.2.4 – Sonuç 2.2.7 nin iddialarını sağladığı kolayca görülebilir.

### 2.3. Direkt Toplam Operatörlerinin Gelfand Sayıları

Bu kesimde Banach uzaylarının direkt toplamı üzerindeki direkt toplam operatörleri ile onun koordinat operatörlerinin Gelfand sayıları arasındaki ilişki incelenecektir. İlk önce aşağıdaki sonuçları verelim.

**Teorem 2.3.1**([45], Teorem3; [47], 3.3Teorem)**:**
Eğer $\mathfrak{X} = (\oplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m)_p, 1 \leq p < \infty$, $S = \oplus_{m=1}^{\infty} S_m$, $S \in L(\mathfrak{X})$ ve her $m \geq 1$ için $n_m = dim\mathfrak{X}_m < \infty$ ise, bu takdirde $n > n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, $k \geq 1$ olmak üzere $S$ operatörünün $\mathfrak{X}$ Banach uzayı üzerindeki n. Gelfand sayısı için

$c_n(S) \leq \sup_{m \geq k+1} \|S_m\|$

doğrudur.

**İspat:** İlk olarak, her $k \in \mathbb{N}$ için $P_k : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}, P_k(x_m) := (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots), x = x_m \in \mathfrak{X}$ operatörü tanımlansın.

Bu durumda $k \in \mathbb{N}$ için

$SP_k(x_m) = (\oplus_{m=1}^{\infty} S_m)(P_k(x_m)) = (S_1x_1, S_2x_2, \dots, S_kx_k, 0,0,0, \dots)$

ve $SP_k \in L(\mathfrak{X})$. Öyleyse, her $x = x_m \in \mathfrak{X}$ için

$\|(S - SP_k)(x_m)\| = \|(0, \dots, 0, S_{k+1}x_{k+1}, \dots)\| = \left(\sum_{m=k+1}^{\infty} \|S_m x_m\|_m^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$\leq \left(\sum_{m=k+1}^{\infty} \|S_m\|^p \|x_m\|_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{m \geq k+1} \|S_m\| \|x\|$

olduğundan $\|S - SP_k\| \leq \sup_{m\geq k+1}\|S_m\|$.

Buradan ve Gelfand sayılarının tanımından $n > n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ , $k \geq 1$ için

$$c_n(S) \leq \sup_{m\geq k+1}\|S_m\|$$

bulunur.

**Teorem 2.3.2**([45], Teorem4; [47], 3.4Teorem)**:**

$\mathfrak{X} = (\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m)_p$, $S = \bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m \in L(\mathfrak{X})$, $S: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ operatörü için $S^{-1}$ mevcut ve $S\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, $S^{-1} \in L(\mathfrak{X})$. Bu taktirde

$$\inf_{1\leq m\leq n} \frac{1}{\|S_m^{-1}\|} \leq c_n(S), \ \ n \geq 1.$$

**İspat:** Bu durumda $S^{-1} = \bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m^{-1}$ ve $\|S^{-1}\| = \sup_{m\geq 1}\|S_m^{-1}\|$ olduğu bilinir.

Şimdi

$$J_n: (\bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m)_p \to (\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m)_p, n \geq 1,$$

$$Q_n: (\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m)_p \to (\bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m)_p, n \geq 1,$$

$$J_n\big((x_1, x_2, \ldots, x_n)\big) \coloneqq (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, ..),$$

$$Q_n\big((x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)\big) \coloneqq (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

operatörleri tanımlansın. Bu tanımlardan

$$R_n \coloneqq Q_n S J_n: (\bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m)_p \to (\bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m)_p,$$

her $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m)_p$ için

$$R_n\big((x_1, x_2, \ldots, x_n)\big) = (S_1x_1, S_2x_2, \ldots, S_nx_n), n \geq 1$$

operatörü elde edilir. Bu durumda $R_n^{-1}, n \geq 1$ ters operatörü var ve

$R_n^{-1} = \bigoplus_{m=1}^{n} S_m^{-1}$, $R_n^{-1}: (\bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m)_p \to (\bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m)_p, \|R_n^{-1}\| = \sup\limits_{1\leq m\leq n} \|S_m^{-1}\|$, $n \geq 1$.

Öte yandan

$$c: S \to \big(c_n(S)\big), S \in L(\mathfrak{X})$$

dönüşümü bir s-sayı fonksiyonu olduğundan s-sayı fonksiyonunun özelliklerinden[7]

$$1 = c_n\left(I_n: \big((\bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m)_p \to (\bigoplus_{m=1}^{n} \mathfrak{X}_m)_p\big)\right) = c_n(R_nR_n^{-1}) \leq c_n(Q_nSJ_n)\|R_n^{-1}\|$$

$$\leq \|Q_n\| c_n(S) \|J_n\| \|R_n^{-1}\|$$

$$\leq c_n(S)\|R_n^{-1}\|, n \geq 1$$

bulunur ki, buradan $\frac{1}{\|R_n^{-1}\|} \leq c_n(S)$, yani $\frac{1}{\sup_{1\leq m\leq n}\|S_m^{-1}\|} \leq c_n(S), n \geq 1$.

Başka bir ifadeyle her $n \geq 1$ için

$$\inf_{1\leq m\leq n} \frac{1}{\|S_m^{-1}\|} \leq c_n(S)$$

bağıntısı doğrudur.

**Sonuç 2.3.3** ([45], Sonuç1; [47], 3.5 Sonuç)**:**

Eğer $S = \bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m\, , S_m = \alpha_m I_m,\ \alpha_m \in \mathbb{C}$ ve $I_m: \mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_m\, , m \geq 1$ ise, bu taktirde

$$\inf_{1\leq m\leq n}|\alpha_m| \leq c_n(S) \leq \sup_{m\geq n}|\alpha_m|\, , n \geq 1.$$

Not: Özel durumda, eğer $\alpha_m \in \mathbb{R}, dim\mathfrak{X}_m = 1, m \geq 1$ ve $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \cdots \geq \alpha_m \geq \cdots \geq 0$ ise, her $n \geq 1$ için $c_n(S) = \alpha_n$.

Bu sonuç [7] çalışmasında bulunmuştur.

Şimdi Gelfand sayılarının direkt toplam operatörleri ile onun koordinat operatörleri arasındaki bir bağıntıyı açıklayan aşağıdaki sonucu verelim.

**Teorem 2.3.4** ([45], Teorem5; [47], 3.7Teorem)**:**

$S: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X},\ S = \bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m$ olsun. Burada $c_n^{(m)}(S_m),\ S_m: \mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_m, S_m \in L(\mathfrak{X}_m),\ m \geq 1$ operatörünün n. Gelfand sayısını göstermek üzere, her $n \geq 1$ için

$$\sup_{m\geq 1} c_n^{(m)}(S_m) \leq c_n(S)$$

bağıntısı doğrudur.

**İspat:** Eğer

$$D_m: \mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X},\ T_m: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_m,\ \ m \geq 1$$

operatörleri

$$D_m(x_m) = \left(0,0,\dots,0,\overset{\curvearrowright m}{\widehat{x_m}}, 0, \dots\right), x_m \in \mathfrak{X}_m,$$

$$T_m(x_m) = x_m,\ x_m \in \mathfrak{X}_m, m \geq 1,$$

olarak tanımlanırsa bu durumda $\|D_m\| \leq 1, \|T_m\| \leq 1, m \geq 1$ olup $D_m, T_m$ lineer sınırlı operatörlerdir. Öyle ki $S_m = T_m S D_m, m \geq 1$ olduğu açıktır.

Böylece s-sayı fonksiyonlarının üçüncü şartından her $n \geq 1$ ve $m \geq 1$ için $c_n^{(m)}(S_m) = c_n(T_m S D_m) \leq \|T_m\| c_n(S)\|D_m\| \leq c_n(S)$. Buradan

$$\sup_{n\geq 1} c_n^{(m)}(S_m) \leq c_n(S), n \geq 1,$$

bağıntısının doğruluğu elde edilir.

Başka bir ifadeyle aşağıdaki sonucun doğruluğu elde edilir.

**Teorem 2.3.5**([47], 3.8Teorem)**:** Eğer $S = \bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m \in L(\mathfrak{X})$ ise bu takdirde her $n, m \geq 1$ için

$$c_n(S) \leq c_n^{(m)}(S_m) + \sup_{n\neq m}\|S_n\|\, ,$$

bağıntısı doğrudur.

**İspat:** s-sayı fonksiyonlarının ikinci şartından her $n \geq 1$ ve $m \geq 1$ için

$$c_n(S) = c_n(0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus S_m \oplus 0 \oplus \dots + S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_{m-1} \oplus 0 \oplus S_{m+1} \oplus \dots)$$

$$\leq c_n(0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus S_m \oplus 0 \oplus \dots) + \|S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_{m-1} \oplus 0 \oplus S_{m+1} \oplus \dots\|$$

$$= c_n(S_m) + \sup_{n \neq m} \|S_n\|$$

olup bağıntının doğruluğu elde edilir.

**Teorem 2.3.6**([45], Teorem6; [47], 3.9Teorem)**:**

Eğer $S = \oplus_{m=1}^{\infty} S_m \in L(\mathfrak{X})$ ve $S^{(p)}: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X},\ S^{(p)} := S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_p \oplus 0 \oplus \dots, p \geq 1$ ise bu taktirde

$$\left|c_n(S) - c_n\left(S^{(p)}\right)\right| \leq \sup_{m \geq p+1} \|S_m\|,\ \ n \geq 1.$$

Ayrıca, eğer $S \in \mathfrak{S}_{\infty}(\mathfrak{X})$ ise

$$\lim_{p \to \infty} c_n\left(S^{(p)}\right) = c_n(S), n \geq 1.$$

**İspat:** Gelfand sayı fonksiyonu bir s-sayı fonksiyonu olduğundan $\left\|c_n(S) - c_n\left(S^{(p)}\right)\right\| \leq \left\|S - S^{(p)}\right\|,\ p \geq 1$ eşitsizliği ve Teorem 2.1.4 den iddianın doğruluğu açıktır.

Not: Hilbert uzayı olması durumunda benzer sonuçlar [27] çalışmasında bulunmuştur.

**Örnek 2.3.7:** $S$ matris operatörü $S: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, S := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ S \in L(\mathbb{C}^3)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $S$ operatörü $S = S_1 \oplus S_2$ veya $S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix},\ S_1: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ve $S_2: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, S_2 = 3$ şeklinde yazılabilir.

Burada $S_1$, $S_2$ ve $S$ operatörlerinin Gelfand sayıları hesaplanacak ve alınan sonuçların bu özel durumda doğrulandığı gösterilecektir. O halde matris teorisinden, $\mathbb{C}^{n \times n}$ üzerindeki herhangi bir $A$ matrisinin $l_p$ normunun $\|A\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leq p \leq 2$ $[42,\ s.358]$ şeklinde tanımlı olduğu dikkate alınırsa;

İlk olarak $S_1$ operatörünün Gelfand sayılarını hesaplayalım:

$n = 1$ için

$$c_1^{(1)}(S_1) = inf\left\{\left\|(S_1)\,\big|_Z\right\|_p : Z \subset \mathbb{C}^2,\ \ codimZ < 1\right\}$$

olduğundan $codimZ = 0$ olup, $dimZ = 2$. Buradan

$Z = \{x = (x_1, x_2): \quad x_1, x_2 \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$ ve

$$\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p = \sup_{\substack{x\in Z\\ x\neq 0}} \frac{\|S_1x\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z\\ x\neq 0}} \frac{\left\|\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z\\ x\neq 0}} \frac{\left\|\begin{pmatrix}x_2\\ 2x_1\end{pmatrix}\right\|_p}{\|x\|_p}$$

$$= \sup_{\substack{x\in Z\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt[p]{|x_2|^p+|2x_1|^p}}{\sqrt[p]{|\,x_1|^p+|x_2|^p}} \leq \sup_{\substack{x\in Z\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt[p]{2^p|x_2|^p+2^p|x_1|^p}}{\sqrt[p]{|\,x_1|^p+|x_2|^p}} = 2.$$

Öte yandan bir özel $x_* = (1,0) \in Z \subset \mathbb{C}^2$ elemanı için

$$\frac{\|S_1\, x_*\|_p}{\|\,x_*\|_p} = \frac{\left\|\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right\|_p}{\|\,x_*\|_p} = 2$$

olduğundan $\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p = 2$. Dolayısıyla

$$c_1^{(1)}(S_1) = \left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p = 2.$$

$n = 2$ için

$$c_2^{(1)}(S_1) = inf\left\{\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p : \; Z \subset \mathbb{C}^2, \; codimZ < 2\right\} =$$

$$= inf\left\{\left\{\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p : \; Z \subset \mathbb{C}^2, codimZ = 0\right\}, \left\{\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p : \; Z \subset \mathbb{C}^2, codimZ = 1\right\}\right\}$$

$$= inf\left\{\|S_1\|_p, \left\{\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p : \; Z \subset \mathbb{C}^2, codimZ = 1\right\}\right\}$$

$$= inf\left\{\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p : \; Z \subset \mathbb{C}^2, codimZ = 1\right\}.$$

O halde $codimZ = 1$ olup, $dimZ = 1$. Bu durumda

$Z = Z_1 = \{x = (x_1, 0): \; x_1 \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$ veya $Z = Z_2 = \{x = (0, x_2): \; x_2 \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$ .

$$\left\|(S_1)\,|_{Z_1}\right\|_p = \sup_{\substack{x\in Z_1,\\ x\neq 0}} \frac{\|S_1x\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z_1,\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt[p]{|2|^p}\|x\|_p}{\|x\|_p} = 2,$$

$$\left\|(S_1)\,|_{Z_2}\right\|_p = \sup_{\substack{x\in Z_2,\\ x\neq 0}} \frac{\|S_1x\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z_2,\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt[p]{1^p}\|x\|_p}{\|x\|_p} = 1,$$

elde edilir. Buradan

$$c_2^{(1)}(S_1) = inf\{\,2\,,1\;\} = 1.$$

Şimdi eğer $n = 3$ ise

$$c_3^{(1)}(S_1) = inf\left\{\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p:\ Z \subset \mathbb{C}^2,\ \ codimZ < 3\right\}$$

$$= inf\left\{\left\{\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p:\ Z \subset \mathbb{C}^2, codimZ = 0\right\}, \left\{\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p:\ Z \subset \mathbb{C}^2, codimZ = 1\right\},\right.$$
$$\left., \left\{\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p:\ Z \subset \mathbb{C}^2, codimZ = 2\right\}\right\}$$

$$= inf\left\{\|S_1\|_p, \left\{\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p:\ Z \subset \mathbb{C}^2, codimZ = 1\right\}, \left\{\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p:\ Z \subset \mathbb{C}^2, codimZ\right.\right.$$
$$\left.\left. = 2\right\}\right\}$$

$$= inf\left\{\left\{\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p:\ Z \subset \mathbb{C}^2, codimZ = 1\right\}, \left\{\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p:\ Z \subset \mathbb{C}^2, codimZ\right.\right.$$
$$\left.\left. = 2\right\}\right\}.$$

Daha önce $\left\{\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p:\ Z \subset \mathbb{C}^2, codimZ = 1\right\}$ durumu incelendiği için $\left\{\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p:\ Z \subset \mathbb{C}^2, codimZ = 2\right\}$ durumuna bakılsın. Bu halde $codimZ = 2$ olduğundan $dimZ = 0$. Öyleyse,

$$\left\|(S_1)\,|_Z\right\|_p = 0$$

olur ki buradan $c_3^{(1)}(S_1) = 0$. Genel olarak ifade edilecek olursa,

$$c_n^{(1)}(S_1) = \begin{cases} 2 & , \quad eğer\ \ n = 1\ \ ise \\ 1 & , \quad eğer\ \ n = 2\ \ ise\ . \\ 0 & , \quad eğer\ \ n \geq 3\ \ ise \end{cases}$$

Öte yandan

$$c_n^{(2)}(S_2) = \begin{cases} 3 & , \qquad n = 1 \\ 0 & , \qquad n \geq 2 \end{cases}$$

olduğu açıktır.

Şimdi de $S$ operatörünün Gelfand sayısını hesaplayalım:

$n = 1$ için

$$c_1(S) = inf\left\{\left\|S\,|_Z\right\|_p: Z \subset \mathbb{C}^3,\ \ codimZ < 1\right\}$$

olduğundan $codimZ = 0$ olup $dimZ = 3$. Dolayısıyla

$Z = \{x = (x_1, x_2, x_3): \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^3$ ve

$$\left\| S\left|_Z\right. \right\|_p = \sup_{\substack{x\in Z\\ x\neq 0}} \frac{\|Sx\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z\\ x\neq 0}} \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z\\ x\neq 0}} \frac{\left\| \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1 \\ 3x_3 \end{pmatrix} \right\|_p}{\|x\|_p} =$$

$$= \sup_{\substack{x\in Z\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt[p]{|x_2|^p + |2x_1|^p + |3x_3|^p}}{\sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p}} \leq \sup_{\substack{x\in Z\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt[p]{3^p|x_1|^p + 3^p|x_2|^p + 3^p|x_3|^p}}{\sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p}} = 3.$$

Eğer şimdi bir özel olarak $x = x_* = (0,0,1) \in Z \subset \mathbb{C}^3$ elemanı alınırsa,

$$\frac{\|S\, x_*\|_p}{\|x_*\|_p} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_p}{\|x_*\|_p} = 3$$

olur ki buradan $\left\| S\left|_Z\right. \right\|_p = 3$ bulunur. Dolayısıyla $c_1(S) = \left\| S\left|_Z\right. \right\|_p = 3$

$n = 2$ için

$$c_2(S) = inf\left\{ \left\| S\left|_Z\right. \right\|_p : \ Z \subset \mathbb{C}^3, \ codimZ < 2 \right\}$$

$$= inf\left\{ \left\{ \left\| S\left|_Z\right. \right\|_p : \ Z \subset \mathbb{C}^3, codimZ = 0 \right\}, \left\{ \left\| S\left|_Z\right. \right\|_p : \ Z \subset \mathbb{C}^3, codimZ = 1 \right\} \right\}$$

$$= inf\left\{ \|S\|_p, \left\{ \left\| S\left|_Z\right. \right\|_p : \ Z \subset \mathbb{C}^3, codimZ = 1 \right\} \right\}$$

$$= inf\left\{ \left\| S\left|_Z\right. \right\|_p : \ Z \subset \mathbb{C}^3, codimZ = 1 \right\}.$$

Bu durumda $codimZ = 1$, yani $dimZ = 2$ olur. Böylece

$Z = Z_1 = \{x = (x_1, x_2, 0): \quad x_1, x_2 \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^3,$

$Z = Z_2 = \{x = (x_1, 0, x_3): \quad x_1, x_3 \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^3,$

$Z = Z_3 = \{x = (0, x_2, x_3): \quad x_2, x_3 \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^3,$

durumlarına bakılacaktır.

$$\left\| S\left|_{Z_1}\right. \right\|_p = \sup_{\substack{x\in Z_1\\ x\neq 0}} \frac{\|Sx\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z_1\\ x\neq 0}} \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z_1\\ x\neq 0}} \frac{\left\| \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_p}{\|x\|_p} \leq 2$$

olup, buradan $x = (x_1, 0,0), x_1 \in \mathbb{C}$ şeklindeki elemanlar üzerinde $\frac{\|Sx\|_p}{\|x\|_p} = 2,$

yani $\left\| S\left|_{Z_1}\right. \right\|_p = 2$ olur.

Benzer şekilde

$$\left\|S|_{Z_2}\right\|_p = \sup_{\substack{x\in Z_2\\ x\neq 0}} \frac{\|Sx\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z_2\\ x\neq 0}} \frac{\left\|\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\0\\x_3\end{pmatrix}\right\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z_2\\ x\neq 0}} \frac{\left\|\begin{pmatrix}0\\2x_1\\3x_3\end{pmatrix}\right\|_p}{\|x\|_p} = 3$$

ve

$$\left\|S|_{Z_3}\right\|_p = \sup_{\substack{x\in Z_3\\ x\neq 0}} \frac{\|Sx\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z_3\\ x\neq 0}} \frac{\left\|\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z_3\\ x\neq 0}} \frac{\left\|\begin{pmatrix}x_2\\0\\3x_3\end{pmatrix}\right\|_p}{\|x\|_p} = 3$$

olduğu görülür.

Dolayısıyla

$$c_2(S) = inf\{2,3\} = 2$$

elde edilir.

$n = 3$ için

$$c_3(S) = inf\left\{\left\|S|_Z\right\|_p : \ Z \subset \mathbb{C}^3, codimZ < 3\right\}$$

$$= inf\left\{\left\{\left\|S|_Z\right\|_p : \ Z \subset \mathbb{C}^3, codimZ = 0\right\}, \left\{\left\|S|_Z\right\|_p : \ Z \subset \mathbb{C}^3, codimZ = 1\right\}, \right.$$
$$\left., \left\{\left\|S|_Z\right\|_p : \ Z \subset \mathbb{C}^3, codimZ = 2\right\}\right\}$$

$$= inf\left\{\|S\|_p, \left\{\left\|S|_Z\right\|_p : \ Z \subset \mathbb{C}^3, codimZ = 1\right\}, \left\{\left\|S|_Z\right\|_p : \ Z \subset \mathbb{C}^3, codimZ \right.\right.$$
$$\left.\left. = 2\right\}\right\}$$

$$= inf\left\{\left\{\left\|S|_Z\right\|_p : \ Z \subset \mathbb{C}^3, codimZ = 1\right\}, \left\{\left\|S|_Z\right\|_p : \ Z \subset \mathbb{C}^3, codimZ = 2\right\}\right\}.$$

$\left\{\left\|S|_Z\right\|_p : \ Z \subset \mathbb{C}^3, codimZ = 1\right\}$ durumu incelendi $\left\{\left\|S|_Z\right\|_p : \ Z \subset \mathbb{C}^3, codimZ = 2\right\}$ incelenirse,

$codimZ = 2$ olduğundan $dimZ = 1$. Bu durumda

$$Z = Z_1 = \{x = (x_1, 0,0): \ x_1 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\} \subset \mathbb{C}^3 ,$$

$$Z = Z_2 = \{x = (0, x_2, 0): \ x_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\} \subset \mathbb{C}^3 ,$$

$$Z = Z_3 = \{x = (0,0, x_3): \ x_3 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\} \subset \mathbb{C}^3 .$$

$$\left\|S\mid_{Z_1}\right\|_p = \sup_{\substack{x\in Z_1\\ x\neq 0}} \frac{\|Sx\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z_1\\ x\neq 0}} \frac{\left\|\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z_1\\ x\neq 0}} \frac{\left\|\begin{pmatrix}0\\2x_1\\0\end{pmatrix}\right\|_p}{\|x\|_p} = 2,$$

$$\left\|S\mid_{Z_2}\right\|_p = \sup_{\substack{x\in Z_2\\ x\neq 0}} \frac{\|Sx\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z_2\\ x\neq 0}} \frac{\left\|\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\x_2\\0\end{pmatrix}\right\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z_2\\ x\neq 0}} \frac{\left\|\begin{pmatrix}x_2\\0\\0\end{pmatrix}\right\|_p}{\|x\|_p} = 1,$$

$$\left\|S\mid_{Z_3}\right\|_p = \sup_{\substack{x\in Z_3\\ x\neq 0}} \frac{\|Sx\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z_3\\ x\neq 0}} \frac{\left\|\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\x_3\end{pmatrix}\right\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\substack{x\in Z_3\\ x\neq 0}} \frac{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\3x_3\end{pmatrix}\right\|_p}{\|x\|_p} = 3,$$

olup

$$c_3(S) = inf\{2,1,3\} = 1$$

bulunur.

$n = 4$ için

$$c_4(S) = inf\left\{\left\|S\mid_Z\right\|_p :\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ < 4\right\}$$

$$= inf\left\{\left\{\left\|S\mid_Z\right\|_p :\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ = 0\right\}, \left\{\left\|S\mid_Z\right\|_p :\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ = 1\right\},\right.$$
$$\left.\left\{\left\|S\mid_Z\right\|_p :\ Z\subset\mathbb{C}^3, codim = 2\right\}, \left\{\left\|S\mid_Z\right\|_p :\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ = 3\right\}\right\}$$

$$= inf\left\{\|S\|_p, \left\{\left\|S\mid_Z\right\|_p :\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ = 1\right\},\right.$$
$$\left., \left\{\left\|S\mid_Z\right\|_p :\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ = 2\right\}\ , \left\{\left\|S\mid_Z\right\|_p :\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ = 3\right\}\right\}$$

$$= inf\left\{\left\{\left\{\left\|S\mid_Z\right\|_p :\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ = 2\right\} :\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ = 1\right\},\right.$$
$$, \left\{\left\{\left\|S\mid_Z\right\|_p :\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ = 2\right\} :\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ = 2\right\},$$
$$\left., \left\{\left\{\left\|S\mid_Z\right\|_p :\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ = 2\right\}_Z :\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ = 3\right\}\right\}.$$

$$\left\{\left\{\left\{\left\|S|_{Z}\right\|_{p}:\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ=2\right\}:\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ=2\right\}:\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ=1\right\},$$

$$\left\{\left\{\left\{\left\|S|_{Z}\right\|_{p}:\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ=2\right\}:\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ=2\right\}:\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ=2\right\}$$

durumları incelendi

$$\left\{\left\{\left\{\left\|S|_{Z}\right\|_{p}:\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ=2\right\}:\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ=2\right\}:\ Z\subset\mathbb{C}^3, codimZ=3\right\}$$

olması halinde

$$c_4(S)=0,$$

olduğu kolayca görülür.

Genel olarak ifade edilirse,

$$c_n(S)=\begin{cases}3 & , \ eğer\ n=1\\ 2 & , \ eğer\ n=2\\ 1 & , \ eğer\ n=3\\ 0 & , \ eğer\ n\geq 4\end{cases}.$$

Sonuçta $S:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3, S:=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $S=S_1\oplus S_2$ veya $S=\begin{pmatrix}S_1&0\\0&S_2\end{pmatrix}$, $S_1:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2, S_1=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$ ve $S_2:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, S_2=3$ durumunda,

$$c_n^{(1)}(S_1)=\begin{cases}2 & , \ eğer\ n=1\ ise\\ 1 & , \ eğer\ n=2\ ise\\ 0 & , \ eğer\ n\geq 3\ ise\end{cases},$$

$$c_n^{(2)}(S_2)=\begin{cases}3 & , \ eğer\ n=1\ ise\\ 0 & , \ eğer\ n\geq 2\ ise\end{cases},$$

$$c_n(S)=\begin{cases}3 & , \ eğer\ n=1\ ise\\ 2 & , \ eğer\ n=2\ ise\\ 1 & , \ eğer\ n=3\ ise\\ 0 & , \ eğer\ n\geq 4\ ise\end{cases}.$$

Not: Bu durumda hesaplanan Gelfand sayılarının Teorem 2.3.4 – Teorem 2.3.6 nın iddialarını gerçekleştirdiği açıktır.

### 2.4. Direkt Toplam Operatörlerinin Weyl Sayıları

Bu kesimde Banach uzaylarının direkt toplamı üzerinde tanımlı direkt toplam operatörlerinin Weyl sayıları ile koordinat operatörlerinin Weyl sayıları arasındaki bağıntılar araştırılacaktır.

İlk önce aşağıdaki bazı sonuçları verelim.

**Teorem 2.4.1:** Her $m \geq 1$ için $dim\mathfrak{X}_m = 1$, $\mathfrak{X} = (\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m)_p$, $1 \leq p < \infty, S = \bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m, S \in L(\mathfrak{X})$ ve $x_n(S), n \geq 1$, $S$ operatörünün $\mathfrak{X}$ uzayı üzerinde $n$. Weyl sayısı ise

$$x_n(S) \leq \sup_{m\geq n}\|S_m\|,\ \ n \geq 1,$$

bağıntısının doğruluğu açıktır.

**İspat:** Bu durumda Teorem 2.2.1'e göre n. yaklaşım sayısı için

$$a_n(S) \leq \sup_{m\geq n}\|S_m\|\,,\ \ n \geq 1,$$

bağıntısı doğrudur. O halde,

$$x_n(S) = sup\{a_n(SA)\colon\ A \in L(l_2, \mathfrak{X}), \|A\| \leq 1\}$$
$$\leq sup\{a_n(S)\|A\|\colon\ A \in L(l_2, \mathfrak{X}), \|A\| \leq 1\}$$
$$\leq sup\{a_n(S)\colon\ A \in L(l_2, \mathfrak{X}), \|A\| \leq 1\}$$
$$= a_n(S) \leq \sup_{m\geq n}\|S_m\|.$$

Yani her $n \geq 1$ için

$$x_n(S) \leq \sup_{m\geq n}\|S_m\|,$$

bulunur.

**Teorem 2.4.2:** Eğer $S =\bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m$, $S_m, S_m^{-1} \in L(\mathfrak{X}_m), m \geq 1, S^{-1} \in L(\mathfrak{X})$ ise, her $n \geq 1$ için

$$\inf_{m\geq 1}\frac{x_n(I)}{\|S_m^{-1}\|} \leq x_n(S),\ \ n \geq 1,$$

bağıntısı doğrudur.

**İspat:** Gerçekten, bu durumda her $A \in L(l_2, \mathfrak{X})$ ve $\|A\| \leq 1$ için

$$a_n(A) = a_n(S^{-1}SA) \leq \|S^{-1}\|a_n(SA),\ \ n \geq 1.$$

Buradan ve Weyl sayılarının tanımından

$$\frac{x_n(I)}{\|S^{-1}\|} \leq x_n(S),\ \ n \geq 1,$$

olup iddianın doğruluğu açıktır.

Şimdi direkt toplam ve koordinat operatörlerinin Weyl sayıları arasındaki bağıntıları verelim.

**Teorem 2.4.3**([46], Teorem5)**:**

Eğer $S=\bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m,\ S_m \in L(\mathfrak{X}_m)$ ise, $x_n^{(m)}(S_m), S_m: \mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_m, m \geq 1$ operatörünün $n$. Weyl sayılarını göstermek üzere, her $n \geq 1$ için

$$\sup_{m\geq 1} x_n^{(m)}(S_m) \leq x_n(S).$$

**İspat:** Gerçekten, bu durumda her $n \geq 1$ için

$$x_n(S) = sup\{a_n(SA): A: l_2 \to \mathfrak{X},\ \ A \in L(l_2, \mathfrak{X}), \|A\| \leq 1\}$$
$$\geq sup\{a_n(SA): A: l_2 \to \widetilde{\mathfrak{X}_m},\ A \in L(l_2, \mathfrak{X}), \|A\| \leq 1\}$$
$$= sup\{a_n(S_m A_m):\ A_m \in L(l_2, \mathfrak{X}_m), \|A\| \leq 1\}$$
$$= x_n^{(m)}(S_m),$$

burada

$$\widetilde{\mathfrak{X}_m} = 0 \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0 \oplus \overbrace{\mathfrak{X}_m}^{m} \oplus 0 \oplus 0 \oplus \ldots\ ,$$

olduğundan

$$\sup_{m\geq 1} x_n^{(m)}(S_m) \leq x_n(S)\,, n \geq 1,$$

bulunur.

Öte yandan aşağıdaki iki sonucun doğruluğu kolaylıkla gösterilebilir.

**Teorem 2.4.4**([46], Teorem6)**:** Eğer $S=\bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m \in L(\mathfrak{X})$, ise her $n, m \geq 1$ için

$$x_n(S) \leq x_n^{(m)}(S_m) + \sup_{m\neq n} \|S_m\|.$$

**Teorem 2.4.5**([46], Teorem7)**:**

Eğer $S=\bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m \in L(\mathfrak{X})$ ve $S^{(q)} = S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_q \oplus 0 \oplus 0 \oplus \ldots$ , $S^{(q)}: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, $q \geq 1$ ise,

$$\left|x_n(S) - x_n\left(S^{(q)}\right)\right| \leq \sup_{m\geq q+1} \|S_m\|\,,\ \ n \geq 1.$$

Ayrıca eğer $S \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{X})$ ise,

$$\lim_{q\to\infty} x_n\left(S^{(q)}\right) = x_n(S),\ \ n \geq 1.$$

Şimdi $\mathfrak{X} = (\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m)_p, 1 \leq p < \infty$ Banach uzayı üzerinde tanımlanan $S=\bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m$ , $S_m: \mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_m$ , $m \geq 1$ direkt toplam operatörünün

$$S_p(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}) = \left\{S \in L(\mathfrak{X}): \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p(S) < \infty\right\},\ \ 1 \leq p < \infty,$$

sınıfına ait olması ile onun koordinat operatörlerinin bu sınıfa aitliği arasındaki ilişki araştırılacaktır.

**Teorem 2.4.6:** Eğer $S = \bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m$, $S \in L(\mathfrak{X})$ ve $S \in S_p(\mathfrak{X}), 1 \leq p < \infty$ ise, her $m \geq 1$ için

$$S_m \in S_p(\mathfrak{X}_m\,).$$

**İspat:** Bu iddianın doğruluğunu göstermek için Teorem 2.4.3 kullanılır. Bu durumda her $n \geq 1$ için

$$\sup_{m\geq 1} x_n^{(m)}(S_m) \leq x_n(S).$$

Öyleyse alınan her $m \geq 1$ için

$$\left(x_n^{(m)}(S_m)\right)^p \leq \sup_{m\geq 1}\left(x_n^{(m)}(S_m)\right)^p \leq x_n^p(S)$$

bulunur.

Bu sonuncu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p(S)$ serisinin yakınsaklığı ve negatif terimi olmayan serilerin yakınsaklığı hakkındaki karşılaştırma testinden her $m \geq 1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n^{(m)}(S_m)\right)^p$ serisinin yakınsaklığı elde edilir. Bu ise, $S_m \in S_p(\mathfrak{X}_m\,), m \geq 1,\ 1 \leq p < \infty$ olduğu anlamına gelir.

Not: Bu teorem yaklaşım sayıları ve Gelfand sayıları içinde ispatlanabilir.

Not: Her $m \geq 1$ için $S_m \in S_p(\mathfrak{X}_m\,),\ m \geq 1,\ 1 \leq p < \infty$ olmasından $S = \bigoplus_{m=1}^{\infty} S_m \in S_p$, $1 \leq p < \infty$ sonucu çıkmaz.

**Örnek 2.4.7:** Her $m \geq 1$ için $\mathfrak{X}_m$ bir Banach uzayı, $0 < n_m = dim\mathfrak{X}_m < \infty$, $I_m\colon \mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_m$ birim operatör ve $\mathfrak{X} = (\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m)_p, 1 \leq p < \infty,\ I \coloneqq \bigoplus_{m=1}^{\infty} I_m$ olsun. Görüldüğü gibi her $m \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n^{(m)}(I_m)\right)^p = \sum_{n=1}^{n_m} 1 < +\infty,$$

yani $I_m \in S_p(\mathfrak{X}_m),\ 1 \leq p < \infty.$

Fakat

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p(I) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

olduğundan $I \notin S_p(\mathfrak{X}),\ 1 \leq p < \infty.$

Şimdi Teorem 2.4.6'nın tersinin doğruluğunu gösteren bir özel duruma bakalım.

**Teorem 2.4.8:** Eğer bir $m \geq 1$ için $S_m \in S_p(\mathfrak{X}_m),\ 1 \leq p < \infty$ ve $t_n = \sup_{m\neq n}\|S_m\| \in l_p(\mathbb{N})$ ise, $S \in S_p(\mathfrak{X}),\ 1 \leq p < \infty.$

**İspat:** Gerçekten, bu halde Teorem 2.4.4'e göre, sözü geçen eşitsizlik $m \geq 1$ için

$$x_n(S) \leq x_n(S_m) + \sup_{m\neq n}\|S_m\|\,, n \geq 1,$$

olup teoremin koşulları altında

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n^{(m)}(S_m)\right)^p < +\infty$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sup_{m\neq n}\|S_m\|)^p < +\infty$$

olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p(S) < +\infty$$

olur. Yani $S \in S_p(\mathfrak{X}),\ 1 \leq p < \infty.$

## 3. SONUÇLAR

1) $\mathfrak{X}_m$, $m \geq 1$ Banach uzaylarının $\mathfrak{X} = (\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m)_p$, $1 \leq p < \infty$ direkt toplamı üzerinde tanımlı $A = \bigoplus_{m=1}^{\infty} A_m$, $A_m \in L(\mathfrak{X}_m)$, $m \geq 1$, direkt toplam operatörleri ile onların koordinat operatörleri arasındaki sınırlılık, kompaktlık gibi önemli kavramları incelenerek Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.1.4 deki bağıntılar elde edilmiştir.

**2)** $\mathfrak{X}_m$, $m \geq 1$ Banach uzaylarının $\mathfrak{X} = (\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m)_p$, $1 \leq p < \infty$ direkt toplamı üzerinde tanımlı $A = \bigoplus_{m=1}^{\infty} A_m$, $A_m \in L(\mathfrak{X}_m)$, $m \geq 1$, direkt toplam operatörleri ile onların koordinat operatörlerinin spektrum parçaları ve rezolvent kümeleri arasındaki ilişki Teorem 2.1.5 ile kesin sonuç alınmıştır.

**3)** $\mathfrak{X}_m$, $m \geq 1$ Banach uzaylarının $\mathfrak{X} = (\bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{X}_m)_p$, $1 \leq p \leq \infty$ direkt toplamı üzerinde tanımlı $A = \bigoplus_{m=1}^{\infty} A_m$, $A_m \in L(\mathfrak{X}_m)$, $m \geq 1$, direkt toplam operatörleri ile onların koordinat operatörlerinin bazı s-sayı fonksiyonlarından olan "yaklaşım sayıları", "Gelfand sayıları" ve "Weyl sayıları" hesaplanarak başta Teorem 2.2.4, Teorem 2.3.4 ve Teorem 2.4.3 olmak üzere önemli sonuçlar elde edilmişdir.

**4)** Bulunan sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

# 4. ÖNERİLER

- Yaklaşım sayıları için Teorem 2.2.4'de elde edilen sonuçların tersi yönündeki eşitsizliğin doğruluğu araştırılabilir.
- Gelfand sayıları için Teorem 2.3.4'de elde edilen sonuçların tersi yönündeki eşitsizliğin doğruluğu araştırma konusu olabilir.
- Weyl sayıları için Teorem 2.4.3'de elde edilen sonuçların tersi yönündeki eşitsizliğin doğruluğu incelenebilir.
- Diyagonal operatörlerin direkt toplam operatörleri ile onların koordinat operatörleri arasındaki bağıntılar diğer s-sayı fonksiyonları alınmak suretiyle incelenebilir.

## 5. KAYNAKLAR


1. Schmidt, E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen, Math. Ann., 63 (1907), 433-476, 64 (1907), 161-174.

2. von Neumann, J. ve Schatten, R., The Cross-space of linear transformations, Ann. of Math., 47 (1946), 608-630; 49 (1948), 557-582.

3. Gohberg, İ.Z. ve Krein, M. G., İntroduction to the theory of linear non-selfadjoint operators in Hilbert Space, Moscow 1965, Providence 1969, Paris 1971.

4. Kolmogorov, A. N., Über die Beste Annahering von Funktionen Einer Gegebenen Funktionenklasse., Ann. Math. 37 (1936), 107-110.

5. Pietsch, A., Einige neue klassen von kompakten linearen abbildungen, Rev. Roumaine Math. Pures and Appl., 8 (1963), 427-447.

6. Pietsch, A., s-numbers of operatorsin Banach Spaces, Studia Math., 51 (1974) 123-132).

7. Pietsch, A., Operator ideals, North-Holland Publisching Company, 1980.

8. Pietsch, A., Eigenvalues and s-numbers, Cambridge University Press, 1987.

9. Pajor, A. ve Tomczak-Jaegermann, N., Volume ratio and other s-numbers of operators related to local properties of Banach spaces, Journal of Functıonal Analysis, 87 (1989) 273-293.

10. Carl, B., Entropy numbers, s-numbers, and eigenvalue problems, Journal of Functional Analysis, 41 (1981) 290-306.

11. Aksoy, Asuman G. ve Lewicki, G., Diagonal operators, s-numbers and Bernstein pairs, Note di Mathematica, 17 (1997) 209-216.

12. König, H., s-numbers, eigenvalues and the trace theorem in Banach Spaces, Studia Math., 67 (1980) 157-172.

13. Carl, B. ve Hinrichs, A., On s-numbers and Weyl inequalities of operators in Banach Spaces, Bull. Lon. Math Soc., 41 (2009) 332-340.

14. Carl, B., On the Weyl inequality of operators in Banach Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 137, 1 (2009) 115-159.

15. Pietsch, A., Weyl numbers and eigenvalues of operators in Banach Spaces, Math., Ann., 247, 2 (1980) 149-168.

16. Carl, B., On s-numbers, Quasi s-numbers, s-moduli and Weyl inequelities of operators in Banach Spaces, Revista Math. Comp., 23, 2 (2010) 467-487.

17. Carl, B., On a Weyl inequality of operators on Banach Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 137, (2009) 155-159.

18. König, H, Eigenvalues of operators and applications, Mathematisches Seminar, Universitat Kiel, Germany, 1-40.

19. Carl, B. ve Hinrichs, A., Optimal Weyl-type inequalities for operators in Banach Spaces, Seminar.

20. Carl, B. ve Kühn, T., Local Entropy moduli and eigenvalues of operators in Banach Spaces, Rev. Math. İberoamerikana, 1, 4 (1985) 127-148.

21. H intichs, A., Approximation numbers of identity operators betwen symmetric sequence space, Journal of Approximation Theory, 118, (2002) 305-315.

22. Kochubei, A. N., Symmetric operators and nonclassical spectral problems, Mat. Zametki, 25, 3 (1979) 425-434.

23. El-Sayed, I.S., On boundary conditions for Strum-Liouville differential operators in the direct sum spaces, Rocky Mountain Journal of Math. 29, 3 (1999) 873-892.

24. Sokolov, M.S., An abstract approach to same spectral problems of direct sum of differential operators, Electronic J. Differential Equations, 75, (2003) 1-6.

25. Zettl, A., Strum-Liouville theory, Amer. Math. Soc., Mathematical Survey and Monographs, V. 121, Rhode İsland, 2005.

26. İsmailov, Z. İ., Multipoint normal differential operators for first order, Opuscula Mathematica, 29, 4 (2009) 339-414.

27. İsmailov, Z. İ. , Otkun Çevik, E. ve Unlüyol, E., Compact Inverses of Multipoint Normal Differential Operators For First Order, Electronic J. Differential Equations, 89, (2011) 1-11.

28. Otkun Çevik, E. ve İsmailov, Z.İ., Spectrum of Direct Sum of Operators, Electronic. J. Differential Equations, 210, (2012) 1-8.

29. İsmailov, Z. İ. ve Öztürk Mert, R., Normal extensions of a singular multipoint differential operator for first order, Electronic Journal of Differential Equantions, 36 (2012), 1-9.

30. İsmailov, Z. İ., Selfadjoint extensions of a multipoint singular differential operators, Electronic Journal of Differential Equantions, 213, (2013) 1-10.

31. İsmailov, Z. İ. ve Öztürk Mert, R., Selfadjoint extensions of a singular multipoint differential operator for first order, Electronic Journal of Differential Equantions, 129, (2013) 1-11.

32. Bairamov, E., Öztürk Mert, R. ve Ismailov, Z.I., Selfadjoint extensions of a singular differential operatör, Journal of Mathematical Chemistry, 50, 5 (2012) 1100-1110.

33. Gesztesy, F. ve Kirsh, W., One dimensional Schrodinger operators with interactions singular on a discrate set, J. Reine Angev. Math., 362, (1985) 28-50.

34. Hirsch, F. ve Lacombe, G., Elements of Functional Analysis, Springer,1999.

35. Lindenstrauss, J. ve Tzafriri, L., Classical Banach spaces, I, Springer-Verlag, 1977.

36. Mitiagin, B.S. ve Pelczynski, A., Nuclear operators and approximative dimension, Proc. ICM, Moscow, (1966) 366-372.

37. Dunford, N., Schwartz, J.T., Linear Operators, I, Interscience, New York, 1958.

38. Abramovich Y.A., Aliprantis C.D., An Invitation to Operator Theory, American Mathematical Society, 2002.

39. Rynne, B.P., Youngson,M.A., Linear Functional Analysis, Springer, 2008.

40. Narici, L., Bachman, G., Functional Analysis, Academic Press, Inc. London, 1972.

41. Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John and Sons, 1978.

42. Lancaster, P. ve Tismenetsky, M., The Theory of Matrices, Academic Press, Inc., 1985.

43. Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, Inc., 1953.

44. Ismailov, Z.I., Cona, L. ve Güler, B.O., Approximation Numbers of Infinite Diagonal Matrices, 4. International Conference on Matrix Analysis and Ampplications, ICMAA 2013, 28-29.

45. Ismailov, Z.I., Cona, L. ve Otkun Çevik, E., Gelfand Numbers of Infinite Diagonal Matrices, The Algerian-Turkish International days on Mathematics, ATIM 2013, 40.

46. Ismailov, Z.I., Cona, L., Otkun Çevik, E. ve Güler, B.O., Weyl Numbers of Diagonal Matrices, AIP Conference Proceedings 1611, (2014) 296-299.

47. Ismailov, Z.I., Cona, L. ve Otkun Çevik, E., Gelfand Numbers of Infinite Diagonal Matrices, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, (yayıma kabul edilmiştir).

## ÖZGEÇMİŞ

Lale CONA, 1986 yılında Kayseri'nin Büyük Toraman kasabasında doğdu. İlköğrenimini sekizinci sınıfa kadar Büyük Toraman Cumhuriyet ilkokulunda, sekizinci sınıfı ise Kayseri de Şehit Doktor Ulucan Dayan ilköğretim okulunda tamamladı. Lise öğrenimini Kayseri de Belsin Çok Programlı Lisesi'nde tamamladı.

2003-2004 Eğitim-Öğretim yılında Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümü programında lisans eğitimine başladı. 2007 yılında mezun oldu ve aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi anabilim dalında tezli yüsek lisans programında eğitime başladı. 2009 Temmuz'da "Cauchy Serileri ile Normlu Uzayların Bazı Karekterizasyonları" adlı tezle yüksek lisansı tamamladı. 2009 ağustosta Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümünde doktora programına girmeye hak kazandı ve aynı yıl 17 Ağustos'ta Gümüşhane Üniversitesi'ne Öğretim Görevlisi olarak atandı ve hala bu göreve devam etmektedir. 2010 Ocak'ta Karedeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümüne doktora programına yatay geçiş yaptı. Yabancı dili İngilizcedir.