KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

BİRİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER NORMAL DİFERENSİYEL OPERATÖRLER

DOKTORA TEZİ

Rukiye ÖZTÜRK MERT

TEMMUZ 2014
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

BİRİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER NORMAL DİFERENSİYEL OPERATÖRLER

Rukiye ÖZTÜRK MERT

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30.06.2014
Tezin Savunma Tarihi : 16.07.2014

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV

Trabzon 2014

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalında
Rukiye ÖZTÜRK MERT Tarafından Hazırlanan

BİRİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER NORMAL DİFERENSİYEL OPERATÖRLER

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu 01 / 07 / 2014 gün ve 1560 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 16/07/2014 tarihinde yapılan sınavda

DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ**	....
Üye	**: Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV**	....
Üye	**: Doç. Dr. Gökhan APAYDIN**	....
Üye	**: Prof. Dr. Funda KARAÇAL**	....
Üye	**: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM**	....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Lisans, yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca, ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli hocam sayın Prof. Dr. Zameddin İsmailov'a;

Başta tez jüri üyelerim olmak üzere, Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanım ve hocalarıma, çalışmakta olduğum kurumum olan Hitit Üniversitesi ailesine ve birlikte çalışmaktan zevk aldığım çalışma arkadaşlarıma;

Bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme ve özellikle eşime teşekkürlerimi sunarım.

Rukiye ÖZTÜRK MERT

Trabzon 2014

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "BİRİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER NORMAL DİFERENSİYEL OPERATÖRLER" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV' un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

30/06/2014

Rukiye ÖZTÜRK MERT

İÇİNDEKİLER

Doktora Tezi

ÖZET

BİRİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER NORMAL DİFERENSİYEL OPERATÖRLER

Rukiye ÖZTÜRK MERT

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV
2014, 85 Sayfa

Bu çalışmada vektör-fonksiyonların Hilbert uzaylarının direkt toplamı üzerinde çok-noktalı lineer singüler ve operatör katsayılı birinci mertebeden formal simetrik (veya formal normal) diferensiyel ifadelerin ürettiği minimal operatörün tüm self-adjoint (normal) genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilmiş ve spektrum yapıları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çok-noktalı diferensiyel operatörler, Self-adjoint ve normal operatörler, Spektrum.

PhD. Thesis

SUMMARY

SINGULAR NORMAL DIFFERENTIAL OPERATORS OF FIRST ORDER

Rukiye ÖZTÜRK MERT

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences Biology Graduate Program
Supervisor: Prof. Zameddin ISMAILOV
2014, 85 Pages

In this thesis, in the direct sum of Hilbert spaces of vector-functions all self-adjoint (normal) extensions of the minimal operator generated by linear singular multipoint formal symmetric (formal normal) differential expression with operator coefficient are described in terms of boundary values. Later, structure of the spectrum of these extensions is investigated.

Key Words: Multipoint differential operators, Self-adjoint and normal operators, Spectrum.

SEMBOLLER DİZİNİ

$B(X)$	: X lineer normlu uzayında lineer sınırlı operatörler uzayı
E	:Birim operatör
$L^2(H,(a,b))$	:$[a,b]$' den H Hilbert uzayına tanımlanan vektör fonksiyonların Hilbert uzayı
$R_\lambda(A),(R(\lambda;A))$	: A operatörünün rezolvent operatörü
$\rho(A)$	: A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(A)$	: A operatörünün spektrumu
$\sigma_p(A)$	: A operatörünün ayrık spektrumu
$\sigma_c(A)$	: A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(A)$	: A operatörünün kalan spektrumu
$D(A)$	: A operatörünün tanım kümesi
$R(A)$	: A operatörünün görüntü kümesi
$\mathrm{Re}(A),\ A^R, A_R$	: A operatörünün reel kısmı
$\dot{I}m(A),\ A^{\dot{I}}, A_{\dot{I}}$	: A operatörünün sanal kısmı
$\ker A$	: A operatörünün çekirdeği
$\dim H$	: H uzayının boyutu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında operatörlerin spektral teorisi geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin kaynak noktaları lineer cebir ve klasik mekaniğin önemli problemleri olmuştur. Lineer cebir problemleri ve mekaniğin problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok önceki yıllara dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce l_2 uzayı ve daha sonra ise genel Hilbert uzayı üzerinde çalışılmıştır ve soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra da lineer self-adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. XIX-XX asırlarda matematikçilerin sayesinde bu teori çok ileri bir seviyeye ulaşmış ve bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunmuştur. Spektral teorinin tamamında önemli bir yere sahip olan spektral açılım teoremi ispatlanarak bazı diferensiyel ve fark operatörleri için spektral açılımın uygun denklem çözümleri vasıtasıyla ifade edildiği araştırılmıştır.

Daha sonraları regüler ve singüler diferensiyel operatör kavramı tanımlanmış ve bunların spektral teorileri üzerinde çalışılmıştır. XIX. asrın sonlarında ikinci mertebeden diferensiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G.D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip operatörlerin özdeğerlerinin asimptotik dağılımı, özellikle kuantum mekaniği için çok önemlidir. Daha sonra birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri incelenmiştir. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak H. Weyl tarafından araştırılmıştır. XX. asırda ise, F. Riesz, J. von Neumann ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Sonraki yıllarda J. von Neuman tarafından simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin genel teorisi oluşturulmuştur: Bir Hilbert uzayında lineer kapalı eşit defekt sayılarına sahip olan bir simetrik operatörün bütün maksimal simetrik ve self-adjoint genişlemelerinin tanım kümeleri dilinde ifadesi ve bu tip genişlemelerin spektral özellikleri ilk olarak John von Neumann' ın 1929-1930 yıllarında ([1], *Allgemeine eigenwerttheorie hermetischer* *funktionaloperatoren*, Math. Ann., 102, 49-131, (1929-1930) çalışmasında ele alınmış ve bu alanda temel sonuçlara ulaşılmıştır.

Fonksiyonların Hilbert uzayında iki noktalı bazı regüler ve singüler lineer diferensiyel operatörlerin self-adjoint genişlemeleri ve spektral özellikleri birçok matematikçiler tarafından araştırılmış ve kesin sonuçlara ulaşılmıştır. Bu çalışmaların geniş özeti N. Dunford, J. T. Schwartz ([2], *Linear operators, I; II*, Interscience, New York, (1958); (1963)), M.A. Naimark ([3], *Linear differential operators*, Frederick Ungar Publishing Co., Inc., London, (1968)), V.I. Gorbachuk, M.L. Gorbachuk ([4], *Boundary value problems for operator differential equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,(1991)) ve F. S. Rofe-Beketov, A. M. Kholkin ([5], *Spectral analysis of differential operators*, World Scientific Monograph Series in Mathematics, vol.7 (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hanckensack, NJ, 2005)), A. Zettl ([6], *Sturm-Liouville Theory*, Amer. Math. Soc., Mathematical Survey and Monographs, v.121, Rhode Island, (2005))' ın kitaplarında verilmiştir.

Hilbert uzayında simetrik bir operatörün self-adjoint genişlemeleriyle ilgili olan ilginç bir durum burada açıklansın: Eğer

$H_1 = L^2(a_1, b_1),\ a_1, b_1 \in \mathbb{R}$,

$H_2 = L^2(a_2, b_2),\ a_2, b_2 \in \mathbb{R}$,

ve S_1, S_2, n. mertebeden bir regüler simetrik diferensiyel ifadenin sırasıyla H_1 ve H_2 uzaylarında ürettiği iki minimal operatör ve $S = S_1 \oplus S_2$ ise, S operatörü $H = H_1 \oplus H_2$ Hilbert uzayı üzerinde bir simetrik operatör olup onun her T self-adjoint genişlemesi $T = T_1 \oplus T_2$ şeklinde olup T_1 ve T_2, sırasıyla S_1 ve S_2 operatörlerinin H_1 ve H_2 Hilbert uzaylarında self-adjoint genişlemeleridir. Bu iddianın tersi de doğrudur, yani eğer T_1 ve T_2, H_1 ve H_2 Hilbert uzaylarında sırasıyla S_1 ve S_2 simetrik operatörlerinin iki self-adjoint genişlemesi ise, $T = T_1 \oplus T_2$ operatörü $S = S_1 \oplus S_2$ simetrik operatörünün $H = H_1 \oplus H_2$ uzayında bir self-adjoint genişlemesidir. Fakat diferensiyel ifadenin singülerlik durumunda (alt aralıkların sınırsız veya diferensiyel ifadelerden birinin herhangi bir katsayısının bakılan uygun alt aralık üzerinde integrallenemez olduğu durumlar) sonuncu iddia doğru olmayabilir.

Bu bir basit örnek üzerinde açıklansın. Burada

$H_1 = L^2(-\infty, a),\ a \in \mathbb{R}$,

$H_2 = L^2(b, +\infty),\ b \in \mathbb{R}$

ve S_1, S_2,

$l(\cdot) = (l_1(\cdot), l_2(\cdot)),\ l_1(\cdot) = l_2(\cdot) = i\frac{d}{dt}$

diferensiyel ifadesinin $H = H_1 \oplus H_2$ uzayı üzerinde tanımladığı minimal operatörler olsun. Bu halde

$S_1: D(S_1) \subset H_1 \to H_1$ ve $S_2: D(S_2) \subset H_2 \to H_2$

operatörleri maksimal simetrik operatörlerdir ve genel teoriden onların self-adjoint genişlemeleri olamaz. Çünkü bu simetrik operatörlerin defekt sayıları sırasıyla (0,1) ve (1.0) şeklindedir. Fakat bu durumda

$S = S_1 \oplus S_2: D(S) \subset H \to H$

operatörünün defekt sayıları $(1,1)$ olup J. von Neumann [1] teorisine göre bu operatör hiç olmazsa bir self-adjoint genişlemeye sahiptir. Üstelik, S operatörünün

$l(u_1, u_2) = (iu_1', iu_2'),$

$u_2(b) = e^{i\varphi}u_1(a), \varphi \in [0,2\pi)$

şeklindeki her genişlemesi bir self-adjoint operatördür.

Aslında Lagrange simetrik adi çift mertebeden lineer diferensiyel ifadelerin self-adjoint genişlemelerinin sınır şartları dilinde gösterimi ilk olarak 1950 yılında İ.M.Glazman ([7], *On the theory of singular differential operators*, Uspehi Math.Nauk, 40, 1950, 102-135, Engish translation in Amer.Math.Soc.Translations (1), 4, 1962, 331-372) meşhur çalışmasında yayımlamıştır. Daha sonralar Green (veya Lagrange) formülünü esas alarak sonlu bir aralık üzerinde skaler eşit ve sıfırdan farklı defekt sayıları sahip olan Lagrange simetrik quasi-diferensiyel ifadenin L^2-uzayında ürettiği minimal operatörün self-adjoint genişlemelerinin sınır şartları dilinde ifadesi meşhur Glazman-Krein-Naimark Teoremi adı ile literatüre geçmiştir ([3] M.A. Naimark, *Linear differential operators,* Ungar, New York, 1968, §18.1, Theorem4).

Matematiksel fiziğin birçok problemlerinde çözüm yolu olarak da gösterilen ilk çalışmalardan biri W. N. Everitt ve A. Zettl'ın 1986 yılında yayımladığı ([8], *Sturm-Liouville differential operators in direct sum spaces*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, v.16, no.1 (1986)) makalesi oldu. Bu çalışmada

$m_r(y) = -(p_r y')' + q_r y,$

$t \in I_r = (a_r, b_r), -\infty \leq a_r < b_r \leq +\infty,$

$\frac{1}{p_r}, q_r, w_r \in L^2_{loc}(I_r),\ w_r > 0, r = 1,2$

olmak üzere $m(\cdot) = (m_1(\cdot), m_2(\cdot))$ diferensiyel ifadesinin $H = H_1 \oplus H_2 = L^2_{W_1}(I_r) \oplus L^2_{W_2}(I_r)$ Hilbert uzayı üzerinde doğurduğu $M = M_1 \oplus M_2$ minimal operatörü ele alınmış ve hem regüler ve hemde singüler durumlarda M minimal operatörünün tüm self-adjoint genişlemeleri sınır değerleri dilinde incelenmiştir.

1992 yılında ise W.N.Everitt ve A. Zettl bu sonucu özellikle kullanarak, sayılabilir sayıda sonlu veya sonsuz reel alt aralıklar üzerinde Lagrange simetrik ve alt aralıklar üzerinde keyfi ve ikiden büyük mertebeden (mertebeler değişkenlik yapabilir) quasi-diferensiyel ifadelerin direkt toplamının uygun aralıklar üzerindeki L^2-uzaylarının direkt toplamı üzerinde ürettiği minimal operatörün self-adjoint genişlemelerini sınır şartları dilinde gösterimini vermişler ([9], W.N. Everitt and A. Zettl, *Differential operators generated by a countable number of quasi-differential expressions on the line,* Proc. London Math. Soc.(3), 64, (1992)).

Yapılan bu çalışmada ve bundan sonra bu güne kadar yapılan çalışmaların esas olarak yararlandığı yöntem Glazmann-Krein-Naimark Teorisidir [3]. 2005 yılına kadar yapılan çalışmaların toplu halde sunumu A. Zettl'ın kitabında [6], 2005'den sonraki dönemlerde yayınlanan sonuçları ise [10-20] çalışmalarında bulmak mümkündür.

1960'lı yıllardan sonra J.von Neumann teorisine paralel şekilde kullanılan ve Calkin-Gorbachuk Yöntemi olarak da anılan yöntem bir Hilbert uzayında defekt sayıları eşit ve sıfırdan farklı simetrik operatörlerin self-adjoint genişlemeler teorisinde çok önemli yeri olan bir yöntem olarak literatürde geniş şekilde kullanılmaktadır ([4,5]). Aslında bu yöntemin temeli 1939 yılında J.W. Calkin'in lineer bağıntılar teorisine ait meşhur çalışması ([21], *Abstract symmetric boundary conditions*, Trans. Amer. Math. Soc., 1939, v.45, n.3, p.369-442) olmuştur. V.I. Gorbachuk ve M.L. Gorbachuk'un 1973 yılında yayımladığı ([22], *On boundary-value problems for a first-order differential equation with operator coefficients and the expansion in eigenfunctions of this equation,* Dokl. Akad. Nauk SSSR 208 (1973), no.6=Soviet Math. Dokl., 14, no.1, (1973)**)** çalışması matematikte bu yöntemin kullanıldığı ilk bilimsel araştırmalardan biri olarak gösterilir. Bu çalışmada H bir ayrılabilir Hilbert uzayı , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ olan iki genişletilmiş reel sayı, E birim operatör, $I: H \to H$, $A: D(A) \subset H \to H$, $I^2 = E$, $AI = IA$ koşullarını sağlayan iki self-adjoint operatör ve her $t \in (a, b)$ için $q(t): H \to H$ bir sınırlı self-adjoint operatör olmak üzere, vektör fonksiyonların $L_2(H, (a, b))$ Hilbert uzayında lineer formal simetrik

$$l(y) = iI\frac{dy}{dt} + Ay + q(t)y$$

singüler diferensiyel ifadesinin ürettiği L_0 minimal ve L maksimal operatörlerinin tanım kümeleri araştırılmıştır. Eğer (a, b) tüm $\mathbb{R}$ ise, L_0 minimal operatörünün self-adjoint olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Daha sonra ise (a, b) aralığının sonlu ya da yarı-sonsuz olduğu durumlarda, L_0 minimal operatörünün $L_2(H,(a,b))$ uzayında tüm self-adjoint genişlemeleri sınır şartları (değerleri) dilinde tanımlanmış ve bu genişlemelerin spektrum yapıları araştırılmıştır. Bu çalışmadan bir önemli sonucu verelim:

Teorem: $\tilde{L}$, $L_0 \subset \tilde{L} \subset L$ operatörünün $L_2(H,(a,\infty))$ uzayında L_0 minimal operatörünün bir self-adjoint genişlemesi olması için gerek ve yeter şart $y(a) \in M$ olmasıdır. Burada $M,$ bir hipermaksimal I-nöter alt uzaydır. Ayrıca bir self-adjoint genişlemenin varlığı için gerek ve yeter şart $\dim P_+ H = \dim P_- H$ koşulunun sağlanmasıdır, burada P_+ ve P_-, H Hilbert uzayından I operatörünün λ=1 ve λ= -1 özdeğerlerine karşılık gelen öz alt uzaylara izdüşüm operatörleridir.

Daha sonra bu çalışmada yarı sonsuz aralık durumunda spektrum yapısının incelenmesi için bir teknik gösterilmiştir.

1950. yıllarda Y. Kilpi [23-25], R. Davis [26] bu teoriyi lineer sınırsız formal normal operatörler için genişletmeye çalışmış ve sonunda E. A. Coddington ve G. Biriuk [27,28] bir Hilbert uzayında verilen bir lineer sınırsız formal normal operatörün bütün normal genişlemelerinin tanım kümeleri dilinde (J. von Neumann tipli) ifadesini vermiş ve geliştirilmiştir. Bu teorinin iki noktalı regüler lineer diferensiyel operatörler ve spektral teorisine uygulanması K. Schmüdgen, B. Kokebayev ve H. Otarov, H. Biyarov ve M. Otelbayev ve Z. İ. İsmailov' un çalışmalarında [29, 30, 31, 32-47] başlatılmış ve devam edilmektedir.

Uygulamalı matematiğin ve fiziğin birçok problemleri çok-noktalı lineer veya lineer olmayan adi veya operatör katsayılı diferensiyel operatörler için spektral teorinin yardımıyla çözülebildiğinden, matematikçiler yeni bir zorlukla karşılaşmaktadırlar. Örneğin, F.R. Gantmakher ve M.G. Krein'in [48] çalışmasında elastik bir cisim üzerine yerleştirilen n-tane kütlenin küçük titreşimi incelenmiştir. Özel olarak, telin üzerindeki n-tane farklı noktaya uygulanan kuvvet altındaki titreşimin veya yer değişiminin incelenmesi, kirişin üzerindeki sonlu sayıdaki noktalarda bulunan kütlelerin kirişin salınımı üzerindeki etkisi problemi vs benzer problemler çok-noktalı diferensiyel operatörlerin spektral teorisinin problemlerine indirgenir.

Çok-noktalı regüler durumda, bu alandaki ilk çalışmalar C.E. Wilder [49], H.F. Weinberger [50], J.W. Neuberger [51], A. Zettl [6], W.S. Loud [52], A. M. Krall [53, 54], J. Locker [55], V. A. Il'in ve E. I. Moiseev [56, 57], Z.I. İsmailov [58, 59, 60] vs tarafından yapılmıştır.

Hilbert uzayının direkt toplamı üzerinde tanımlı diferensiyel operatörlerin genişlemesi katıhal fiziğinde, diferensiyel denklemler için çok-noktalı sınır değer problemlerinde, kuantum alan teorisinde, çok-noktalı kuantum mekaniği alanlarındaki birçok problemde kullanılmıştır ([61, 6]).

Singüler durumunda ise, çok-noktalı diferensiyel operatörler alanında bu güne kadar yapılan araştırmalar yeterli bulunmamaktadır. Fakat fiziksel ve tekniksel süreçlerde matematiksel modelleme sonucu ortaya çıkan sorunlar singüler durumun önemini arttırmaktadır.

Bu tez çalışmasında: H bir ayrılabilir Hilbert uzayı ve $\Omega \subset \mathbb{R}$ bir altküme olmak üzere vektör-fonksiyonları $L_2(H,\ \Omega)$ Hilbert uzayı üzerinde birinci mertebeden singüler ve operatör katsayılı diferensiyel-operatör ifadesi için aşağıdakilerin yapılması amaçlanmaktadır:

<u>(S-1)</u> $A = A^*: D(A) \subset H \to H$ durumunda $l(.) = i\frac{d}{dt} + A$ simetrik diferensiyel-operatör ifadesinin vektör –fonksiyonların Hilbert uzaylarının direkt toplamı $L_2\big(H, (-\infty, a)\big) \oplus L_2\big(H, (b, +\infty)\big), a < b$ üzerinde doğurduğu simetrik minimal operatörün tüm self-adjoint genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilecek ve daha sonra bu genişlemelerin spektrum yapısı incelenecektir;

<u>(S-2)</u> $A_i = A_i^*: D(A_i) \subset H \to H,\ i = 1{,}2$ durumunda $l(.) = (i\frac{d}{dt} + A_1, -i\frac{d}{dt} + A_2)$ simetrik diferensiyel-operatör ifadesinin vektör –fonksiyonların Hilbert uzaylarının direkt toplamı $L_2\big(H, (a, +\infty)\big) \oplus L_2\big(H, (b, +\infty)\big), a < b$ üzerinde doğurduğu minimal operatörün tüm self-adjoint genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilecek ve daha sonra bu genişlemelerin spektrum yapısı incelenecektir;

<u>(N-1)</u> $A_i = A_i^*: D(A_i) \subset H \to H,\ i = 1{,}2$durumunda $l(.) = (\frac{d}{dt} + A_1, \frac{d}{dt} + A_2)$ formal normal diferensiyel-operatör ifadesinin vektör –fonksiyonların Hilbert uzaylarının direkt toplamı $L_2(H, (-\infty, a)) \oplus L_2(H, (b, +\infty)),\ a < b$ üzerinde doğurduğu formal normal minimal operatörün tüm normal genişlemeleri sınır değerleri dilinde tanımlanacak ve daha sonra bu genişlemelerin spektrum yapısı incelenecektir;

<u>(S-3)</u> $A_k = A_k^*: D(A_k) \subset H \to H,\quad k = 1{,}2{,}3$durumunda $l(.) = (i\frac{d}{dt} + A_1, i\frac{d}{dt} + A_2, i\frac{d}{dt} + A_3)$ simetrik diferensiyel-operatör ifadesinin vektör –fonksiyonların Hilbert uzaylarının direkt toplamı $L_2(H, (-\infty, a_1)) \oplus L_2(H, (a_2, b_2)) \oplus L_2(H, (a_3, +\infty)),\ -\infty <$

$a_1 < a_2 < b_2 < a_3 < +\infty$ üzerinde doğurduğu simetrik minimal operatörün tüm self-adjoint genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilecek ve bu genişlemelerin spektrum yapısı araştırılacaktır;

(N-2) $A_k = A_k^*: D(A_k) \subset H \to H, \quad k = 1,2,3$durumunda $\quad l(.) = (\frac{d}{dt} + A_1, \frac{d}{dt} + A_2, \frac{d}{dt} + A_3)$formal normal diferensiyel-operatör ifadesinin vektör –fonksiyonların Hilbert uzaylarının direkt toplamı $L_2(H, (-\infty, a_1)) \oplus L_2(H, (a_2, b_2)) \oplus L_2(H, (a_3, +\infty))$, $-\infty < a_1 < a_2 < b_2 < a_3 < +\infty$ üzerinde doğurduğu formal normal minimal operatörün tüm normal genişlemeleri sınır değerleri dilinde tanımlanacak ve daha sonra bu genişlemelerin spektrum yapısı incelenecektir;

(N-3) $T = J,\ J^* = J,\ J^2 = E,\ A^* = A \in L(H), A \geq 0, \quad A^{1/2}J = JA^{1/2}$ durumunda $l(.) = J\frac{d}{dt} + A$ diferensiyel-operatör ifadesinin vektör –fonksiyonların $L^2\big(H, (a, +\infty)\big)$, $a \in \mathbb{R}$Hilbert uzayı üzerinde doğurduğu formal normal minimal operatörün tüm normal genişlemeleri sınır değerleri dilinde tanımlanacak ve daha sonra bu genişlemelerin spektrum yapısı incelenecektir;

Alınan sonuçları örneklerle desteklenecektir.

1.2. Temel Kavramlar

1.2.1. Metrik Uzaylar ve Lineer Uzaylar

Analiz'in temel kavramlarından biri olan yakınsaklık $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ Euclide uzayında iki nokta arasında tanımlanabilen uzaklık fonksiyonuna dayanmaktadır. Bu düşünceyi genişleterek üzerinde uzaklık fonksiyonu tanımlanabilen somut bir X kümesinin, çağdaş matematiğin esas kavramlarından biri olan metrik uzaya dönüştürülmesi önem taşımaktadır.

Tanım 1 (Metrik Uzay, [62] s.11) : X boş olmayan bir küme ve

$$d: X \times X \to [0, +\infty), \ (x, y) \to d(x, y)$$

bir fonksiyon olsun. Eğer d fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

M₁) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (özdeşlik aksiyomu);

M₂) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetriklik aksiyomu);

M₃) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği), özelliklerini sağlıyorsa ona X üzerinde bir *uzaklık fonksiyonu* veya *metrik* adı verilir ve (X,d) ikilisine bir *metrik uzay* denir.

Örnek 2 : X boş olmayan bir küme ve $B(X)$ de X 'den $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı bütün sınırlı fonksiyonların kümesi olsun

$$d: B(X) \mathrm{x} B(X) \to [0,+\infty), \ (f,g) \to d(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in X\}$$

şeklinde tanımlı d dönüşümünün $B(X)$ kümesi üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

Gerçekten de;

1) $\forall x \in X$ için

$$|f(x)-g(x)| \le \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in X\} = d(f,g)$$

olduğundan $d(f,g)=0$ ise $\forall x \in X$ için

$$|f(x)-g(x)| = 0$$

veya $\forall x \in X$ için $f(x)=g(x)$ 'dır. Ayrıca, eğer $f=g$ ise, $d(f,g)=0$ olduğu tanımdan açıktır.

2) $\forall a \in \mathbb{R}$ için $|a|=|-a|$ olduğundan

$$d(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in X\} = \sup\{|g(x)-f(x)| : x \in X\} = d(g,f).$$

3) $\forall f,g,h \in B(X)$ ve $\forall x \in X$ için

$$|f(x)-g(x)| = |f(x)-h(x)+h(x)-g(x)| \le |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|$$
$$\le d(f,h) + d(h,g)$$

ve buradan da

$$d(f,g) \le d(f,h) + d(h,g)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Tanım 3 (Ayrılabilir Uzay, [62], s.19) : Bir (X,d) metrik uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa, bu uzaya *ayrılabilir uzay* denir.

Örnek 4 ([62], s.19) : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilir sonsuz ve $\mathbb{R}$'de yoğun olduğu için $\mathbb{Q}$ bir ayrılabilir uzaydır.

Tanım 5 (Vektör Uzayı, [62], s.3) : X boş olmayan bir küme ve K ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun.

$+ : X \text{ x } X \to X,\ (x,y) \to x+y,\ x,y \in X$

$\bullet : K \text{ x } X \to X,\ (a,x) \to ax,\ \alpha \in K,\ x \in X$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemleri denilen işlemler tanımlansın. Bu işlemler her $x,y,z \in X$ ve $a,b \in K$ için aşağıdaki koşulları sağlasın:

1. $x+y=y+x$;

2. $x+(y+z)=(x+y)+z$;

3. $\forall x \in X$ için $x+0=x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in X$ vardır;

4. $\forall x \in X$ için $x+(-x)=0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır;

5. $\forall x \in X$ için $1 \cdot x = x$;

6. $a(x+y)=ax+ay$;

7. $(a+b)x=ax+bx$;

8. $(ab)x=a(bx)$.

Bu durumda X ’e K cismi üzerinde bir *vektör uzayı* (*lineer uzay*), elemanlarına da *vektör* veya *nokta* adı verilir. $K=\mathbb{R}$ alınırsa X ’e bir *reel vektör uzayı* ve $K=\mathbb{C}$ alınırsa X ’e bir *kompleks vektör uzayı* denir.

Örnek 6 ([62], s.5) : S bir küme ve X, K cismi üzerinde bir vektör uzay olsun. Bu durumda $F(S,X) \coloneqq \{f : S \to X \ bir\ fonksiyon\}$ olmak üzere F ailesi

$(f+g)(x) \coloneqq f(x)+g(x),\ f,g \in F(S,X)$

$(\alpha f)(x) \coloneqq \alpha f(x),\ \alpha \in K,\ f \in F(S,X)$

işlemleri altında bir vektör uzayıdır.

Tanım 7 (Lineer Manifold, [62], s.3) : X , K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve Y , X ’in bir boş olmayan alt kümesi olsun. Y , X vektör uzayındaki cebirsel işlemlere göre kendi başına bir vektör uzayı oluşturuyorsa Y ’ ye, X ’de bir *lineer manifold* (veya X ’in bir *lineer alt uzayı*) denir.

Örnek 8 : $A \subset \ell_p(\mathbb{N})$, $p \geq 1$ olmak üzere $A \coloneqq \{(x_n) \in \ell_p(\mathbb{N}) : (x_n)=(0,x_2,x_3,.....)\}$ kümesi $\ell_p(\mathbb{N})$’de bir lineer manifoldur.

Gerçekten $(x_n)=(0,x_2,x_3,....)$, $(y_n)=(0,y_2,y_3,....) \in A$ ve $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ için

$$(\alpha x_n+\beta y_n)=(0,\alpha x_2+\beta y_2,\alpha x_3+\beta y_3,....)=(0,\alpha x_2,\alpha x_3,....)+(0,\beta y_2,\beta y_3,....)$$

$$=\alpha(0,x_2,x_3,....)+\beta(0,y_2,y_3,....)$$

$$= \alpha(x_n) + \beta(y_n)$$

olup, buradan A kümesi lineer manifoldur.

Tanım 9 ([63], s.53) : X , bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in X$ olarak verilsin. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n \in K$ olmak üzere

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + ... + \alpha_n x_n$$

şeklindeki sonlu toplama $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in X$ elemanlarının bir *lineer kombinasyonu* denir. $\varnothing \neq M \subset X$ ise, M 'den alınan her sonlu sayıdaki vektörlerin lineer kombinasyonlarının tümünün kümesine M ' nin *gereni* (veya *lineer örtüsü*) denir ve $spanM$ olarak gösterilir. Başka bir deyişle,

$$spanM := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ : \ x_i \in M,\ \alpha_i \in K,\ i = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $spanM$, X 'de bir lineer manifolddur ve M ' nin *ürettiği lineer manifold* adı verilir.

Tanım 10 (Direkt toplam, [64], s.4) : $M_1, M_2, \ldots, M_n,\ n \in \mathbb{N}$, X vektör uzayında lineer manifoldlar olsun. Eğer her $x \in X$ için $x_j \in M_j,\ j = 1,2, \ldots, n$ olmak üzere,

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

şeklinde tek bir gösterime sahip ise, X vektör uzayı $M_1, M_2, \ldots, M_n$ lineer manifoldlarının *iç (internal) direkt toplamıdır* denir ve $X = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$ olarak yazılır. Yeni bir V vektör uzayı iki diğer X ve Y vektör uzaylarından (aynı cisim üzerinde) üretiliyorsa bu toplama da *dış (external) direkt toplam* denir.

1.2.2. Normlu Vektör Uzayları

Tanım 11 (Normlu Vektör Uzayı, [62], s.31) : X , K cismi üzerinde tanımlı bir lineer vektör uzayı olsun. Eğer

$$\|\cdot\| : X \to [0, \infty),\ x \to \|x\|$$

dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

N₁) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

N₂) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

N₃) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği) özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|: X \to [0,\infty),\ x \to \|x\|$ dönüşümüne X üzerinde *norm* ve bu durumda $(X,\|\cdot\|)$ ikilisine bir *normlu vektör uzayı* adı verilir. Yukarıda verilen N_1, N_2 ve N_3 özelliklerine *norm aksiyomları* denir.

Örnek 12 : $E = C([a,b],K)$ kümesi

$$\|x\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

fonksiyonu ile bir normlu vektör uzaydır.

Gerçekten, E 'nin bir lineer vektör uzayı olduğu açıktır. $x, y \in C[a,b]$ ve $\alpha \in K$ için,

(N_1) $\|x\|_c = 0$ ise, $\|x\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a,b]$ için $x(t) = 0$;

(N_2) $\|\alpha x\|_c = \max_{t\in[a,b]} |(\alpha x)(t)| = \max_{t\in[a,b]} |\alpha||x(t)| = |\alpha| \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = |\alpha|\|x\|_c$;

(N_3) $\|x+y\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)+y(t)| \le \max_{t\in[a,b]} (|x(t)|+|y(t)|)$

$$\le \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |y(t)| = \|x\|_c + \|y\|_c .$$

Tanım 13 ([65], s.255) : Bir X kümesi üzerinde tanımlı, $\mathbb{C}$-değerli, $\sum$-ölçülebilir, $|f|^p$, $1 \le p < \infty$, fonksiyonunun bir μ ölçümüne göre integralinin sonlu olduğu μ denklik sınıflarının ailesinin tümü $L_p(X,\sum,\mu)$ ile gösterilecektir. Bu $L_p(X,\sum,\mu)$ vektör uzayı $\|f\|_{L_p} := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$ fonksiyonu altında bir normlu uzaydır ([65], s.257).

Tanım 14 (Yakınsak dizi, [63], s.67) : $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzay, $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

ise, (x_n) dizisi $x \in X$ elemanına $\|\cdot\|$ *normuna göre yakınsıyor* denir ve $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\ \|_X} x$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ notasyonlarının biriyle gösterilir.

Örnek 15 : $L^2(0,1)$ uzayında alınan $x_n(t) = t^n$, $n \ge 1$ dizisi $x(t) = 0$ noktasına yakınsaktır. Gerçekten;

$$\|x_n - x\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^2 dt = \int_0^1 |t^n - 0|^2 dt = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

olup sonuçta $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{L^2} = 0$ olduğu elde edilir ki bu $x_n(t) = t^n$, $n \ge 1$ dizisinin $x(t) = 0$ noktasına yakınsadığı anlamına gelir.

Tanım 16 (Cauchy Dizisi, [62], s.12;s.36) : $(X,\|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve $(x_n)\subset X$ bir dizi olsun. Eğer

$$\forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N} \text{ öyle ki } \forall m,n>n_\varepsilon \text{ için } \|x_n-x_m\|<\varepsilon$$

koşulu sağlanıyor ise (x_n) dizisine X içinde bir *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 17 ([62], s.16;s.36) : Eğer bir normlu uzayda bir Cauchy dizisi bu normlu uzayda yakınsak ise o uzaya *tam uzay* denir.

Tanım 18 (Banach Uzayı, [62], s.16;s.48) : Bir $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir elemana yakınsıyorsa, bu $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* adı verilir.

Örnek 19 : $X=L_p([a,b]),\ a,b\in\mathbb{R},\ p\geq 1$ vektör uzayı

$$\|f\|_{L_p}:=\|[f]\|_{L_p}=\left(\int_{[a,b]}|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\ f\in L_p([a,b])$$

normuna göre bir Banach Uzayıdır.

Bu $L_p([a,b])$ uzayının lineer olduğu Minkowski Eşitsizliğinin bir sonucudur. Normlu uzay olduğu kolayca gösterilebilir. Tamlığı ise, Riesz-Fischer teoreminden açıktır. $L_\infty([a,b])$ uzayının da bir Banach Uzayı olduğu da kolayca gösterilebilir [65].

Örnek 20 : $C([0,1],\mathbb{R})$ lineer uzayı $\|\cdot\|_1:C([0,1],\mathbb{R})\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$, $\|f\|_1:=\int_0^1|f(t)|\,dt$ normuna göre bir Banach Uzayı değildir.

Bu uzayın normlu lineer uzay olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi onun tam uzay olmadığını gösterelim.

$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\ f_n(t)=\begin{cases}0 & ,0\leq t\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\\ n\left(t-\frac{1}{2}\right)+1 & ,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}<t\leq\frac{1}{2}\\ 1 & ,\frac{1}{2}<t\leq 1\end{cases}$$

şeklinde bir $(f_n)\subset C[0,1]$ dizisi tanımlayıp, bu dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $m,n\in\mathbb{N}$ için $m<n$ sayılarını alalım. Bu durumda;

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n - f_m|(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)} |f_n - f_m|(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)}^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)} |f_n - f_m|(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\frac{1}{2}} |f_n - f_m|(x)\,dx$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1} |f_n - f_m|(x)\,dx$$

$\left|f_n(x)\right| \le 1,\ n \ge 1$ eşitsizliğinden,

$$\|f_m - f_n\|_1 \le \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)}^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)} |f_m|\,dx + \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\frac{1}{2}} |f_n - f_m|\,dx$$

$$\le \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2m}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} \to 0\,.$$

Böylece $\|f_n - f_m\|_1 \xrightarrow[m<n]{m\to\infty} 0$ olup (f_n) bir Cauchy dizisidir. Şimdi ise (f_n) dizisinin $\|\bullet\|_1$ normunda yakınsamadığını gösterelim.

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0, & 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ 1, & \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$ tanımlayalım.

$$\|f_n - \varphi\|_1 = \int_0^1 |f_n - \varphi|\,dx = \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\frac{1}{2}} |f_n|\,dx \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Yani $\int_0^1 |f_n - \varphi|(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Keyfi bir $f \in C[0,1]$ alalım. $f \in C[0,1]$ ve $\varphi \notin C[0,1]$ olduğundan $\int_0^1 |f - \varphi|(x)\,dx \ne 0$. Öte yandan

$$0 \le \int_0^1 |f - \varphi|(x)\,dx \le \int_0^1 |f - f_n|(x)\,dx + \int_0^1 \le |f_n - \varphi|(x)\,dx$$

eşitliğinden $\int_0^1 |f - f_n|(x)dx \not\to_{n\to\infty} 0$. Çünkü aksi halde $\int_0^1 |f-\varphi|(x)dx = 0$ olmalıdır, bu ise olamaz.

Sonuç olarak (f_n) dizisi $C[0,1]$ uzayında $\|\bullet\|_1$ normu altında hiçbir fonksiyona yakınsamaz. Dolayısıyla $C([0,1],\mathbb{R})$ lineer uzayı $\|\bullet\|_1$ normuna göre bir Banach Uzayı değildir.

1.2.3. İç Çarpım ve Hilbert Uzayları

Hilbert uzayları sonsuz boyutlu normlu uzayların en basit tipi olmak üzere Fonksiyonel Analiz 'in teorik ve pratik uygulamalarında önemli rol oynamaktadır. Euclide uzayları ile büyük benzerliğe sahip olan Hilbert uzaylarının böyle kullanışlı olmasının nedeni, vektör cebirinde tanımlanan iç çarpım ve diklik kavramlarının bu uzaylar için genelleştirilebilmesidir.

Tanım 21 (İç Çarpım Uzayı, [62], s.51;s.53) : $K=\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere X bir vektör uzayı olsun. Eğer $(\cdot,\cdot)_X : X \text{ x } X \to K$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(\cdot,\cdot)_X$ 'ye X üzerinde bir *iç çarpım,* $\left(X,(\cdot,\cdot)_X\right)$ ikilisine de *iç çarpım uzayı* (veya *ön Hilbert uzayı*) denir.

H₁) $\forall x \in X$ için $(x,x)_X \geq 0$ ve $(x,x)_X = 0 \Leftrightarrow x=\theta$;

H₂) $\forall x,y \in X$ için $(x,y)_X = \overline{(y,x)_X}$ (kompleks eşlenik);

H₃) $\forall x,y \in X$ ve $\alpha \in K$ için $(\alpha x,y)_X = \alpha(x,y)_X$;

H₄) $\forall x,y,z \in X$ için $(x+y,z)_X = (x,z)_X + (y,z)_X$.

$K=\mathbb{R}$ durumunda her $x,y \in X$ için $(x,y)_X = (y,x)_X$ eşitliği doğrudur. Ayrıca H_2 ve H_4 ifadelerinden $\forall x,y,z \in X$ ve $\forall \alpha,\beta \in K$ için

a) $(\alpha x+\beta y,z)_X = \alpha(x,z)_X + \beta(y,z)_X$;

b) $(x,\alpha y)_X = \overline{\alpha}(x,y)_X = \alpha(x,y)_X$;

c) $(x,\alpha y+\beta z)_X = \overline{\alpha}(x,y)_X + \overline{\beta}(x,z)_X$

formüllerinin doğruluğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 22 : $f, g \in C([a,b], K)$ fonksiyonları için

$$(f,g) := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

tanımıyla $C([a,b], K)$ bir iç çarpım uzayıdır.

Gerçekten:

(H_1) $\forall f \in C([a,b]; K)$ için

$$(f,f) = \int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt \geq 0,$$

eğer $(f,f) = \int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt = 0 \;\Leftrightarrow\; f = \theta$;

(H_2) $\forall f, g \in C([a,b]; K)$ için

$$(f,g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt = \overline{\int_a^b \overline{f(t)}g(t)dt}$$

$$= \overline{\int_a^b g(t)\overline{f(t)}dt} = \overline{(g,f)};$$

(H_3) $\forall f \in C([a,b]; K)$ ve için

$$(\alpha f, g) = \int_a^b \alpha f(t)\overline{g(t)}dt = \alpha \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt = \alpha(f,g);$$

(H_4) $\forall f, g, h \in C([a,b]; K)$ için

$$(f+h, g) = \int_a^b (f(t)+h(t))\overline{g(t)}dt = \int_a^b \left(f(t)\overline{g(t)} + h(t)\overline{g(t)}\right)dt$$

$$= \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt + \int_a^b h(t)\overline{g(t)}dt = (f,g) + (h,g).$$

Tanım 23 ([62], s.56): $(X, (\cdot,\cdot)_X)$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun.

$$\|x\|_X = (x,x)_X^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir norm olup ve bu norma *iç çarpımın ürettiği norm* denir.

Tanım 24 (Hilbert uzayı, [62], s.63) : Bir $(X, (.,.)_X)$ iç çarpım uzayı, iç çarpımın ürettiği norma göre tam ise, yani $(X, (\cdot,\cdot)_X)$ içindeki her Cauchy dizisi iç çarpımın ürettiği norma göre yakınsaksa, bu iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir.

Örnek 25 : $l_2(\mathbb{N})$ ($l_2(\mathbb{Z})$) bir Hilbert uzayıdır [66].

Tanım 26 (Sobolev Uzayı, [4], s.50-51) : $L^2(H,(a,b))$, $a,b \in \mathbb{R}$ lineer uzayında $\|f\|^2_{L^2(H,(a,b))} + \|f'\|^2_{L^2(H,(a,b))} < \infty$ koşulunu sağlayan $f:[a,b] \to H$ vektör fonksiyonların oluşturduğu aile $W_2^1(H,(a,b))$ ile gösterilir. Bu durumda $W_2^1(H,(a,b))$ lineer uzayı $(f,g)_{W_2^1(H,(a,b))} := (f,g)_{L^2(H,(a,b))} + (f',g')_{L^2(H,(a,b))}$, $f,g \in W_2^1(H,(a,b))$ iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır. Bu uzaya Sobolev uzayı da denir. Ayrıca

$$\overset{0}{W}{}_2^1(H,(\mathrm{a},\mathrm{b})) = \left\{ f \in W_2^1(H,(\mathrm{a},\mathrm{b})) : f(\mathrm{a}) = f(\mathrm{b}) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 27 (Vektör-Fonksiyonlar, [4]) : B bir Banach uzayı ve $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olsun. $f : I \to B$ şeklindeki fonksiyonlara *vektör-fonksiyonlar* denir.

Tanım 28 (Süreklilik, [4]) : Bir $f(t)$ vektör-fonksiyonu, $t_0 \in I$ noktasında, eğer

$$\lim_{t \to t_0} \| f(t) - f(t_0) \| = 0$$

ise, $f(t)$ vektör-fonksiyonuna $t_0 \in I$ noktasında *süreklidir* denir. Diğer taraftan, I aralığının her bir noktasında sürekli olan $f(t)$ vektör-fonksiyonuna I aralığı üzerinde *süreklidir* denir.

Tanım 29 (Diferensiyellenebilirlik, [4], s.13) : $f : I \to B$ bir vektör-fonksiyonu $t_0 \in I$ noktası için

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} - y \right\| = 0$$

olacak şeklinde bir $y \in B$ vektörü mevcutsa, $f(t)$ vektör-fonksiyonuna $t_0 \in I$ noktasında *diferensiyellenebilir* denir. Buradaki $y \in B$ vektörüne de $f(t)$ vektör-fonksiyonunun $t_0 \in I$ noktasındaki *türevi* adı verilir.

Eğer $f(t)$ vektör-fonksiyonu I aralığının her bir noktasında diferensiyellenebilir ise, o zaman bu $f(t)$’ye I aralığı üzerinde *diferensiyellenebilir* denir.

Tanım 30 ([4], s.17) : H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun.

$$\int_a^b \| f(t) \|_H^2 \, dt < +\infty$$

koşulunu sağlayan $f:[a,b] \to H$ güçlü ölçülebilir vektör-fonksiyonlarının lineer vektör uzayı $L_2(H,(a,b))$ ile gösterilir. Bu uzay

$$(f,g)_{L_2(H,(a,b))} := \int_a^b (f(t),g(t))_H \, dt, \quad f,g \in L_2(H,(a,b))$$

iç çarpımın doğurduğu norm ile bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 31 ([4], s.52) : H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında

$$\sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right\|^2_{L_2(H,(a,b))} < +\infty, \quad f \in L_2(H,(a,b))$$

koşulunu sağlayan $f:[a,b] \to H,$ vektör-fonksiyonlarının oluşturduğu küme $W_2^m(H,(a,b))$ ile gösterilir. $\overset{0}{W}{}_2^m(H,(a,b))$ ise, m yinci mertebeye kadar a ve b noktalarında sıfır olan $W_2^m(H,(a,b))$ fonksiyonların uzayı olarak gösterilir. $W_2^m(H,(a,b))$ uzayı

$$(f,g)_{W_2^m(H,(a,b))} = \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{d^k f(t)}{dt^k}, \frac{d^k g(t)}{dt^k} \right)_{L^2(H,(a,b))}$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.

1.2.4. Lineer Operatörler ve Temel Spektral Özellikleri

Tanım 32 ([64], s.238) : X ve Y iki normlu lineer uzay olsun. $A:D(A) \subset X \to Y$ olan her dönüşüme *operatör* adı verilir. Bu durumda

$D(A) := \{x \in X : Ax \ \text{tanımlı}\} \subset X$ kümesine A operatörünün *tanım kümesi*,

$R(A) := AD(A) = \{y = Ax : \ x \in D(A)\} \subset Y$ kümesine ise A operatörünün *değer kümesi*,

$Ker\, A := \{ x \in X : Ax = 0 \} \subset X$ kümesine ise A operatörünün *sıfır kümesi* veya *çekirdeği* denir.

Tanım 33 (Lineer Operatör, [63], s.82) : X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay, $D(A)$, X 'de bir lineer manifold ve $A: D(A) \subset X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer her $x, y \in D(A)$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise, A operatörüne X üzerinde bir *lineer operatör* denir.

Örnek 34 : $X = Y = L_2(0,1)$ ve $A: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $Au = u'(t)$,

$$D(A) = \{u \in L_2(0,1) : u' \in L_2(0,1)\} = W_2^1(0,1)$$

ise, A bir lineer operatördür.

Gerçekten, $\forall u, v \in W_2^1(0,1)$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için

$$\alpha u + \beta v \in W_2^1(0,1)$$

olup

$$A(\alpha u + \beta v) = (\alpha u + \beta v)'(t) = (\alpha u)'(t) + (\beta v)'(t)$$
$$= \alpha u'(t) + \beta v'(t) = \alpha Au + \beta Av,$$

yani A bir lineer operatördür.

Örnek 35 : $A: C[a,b] \to C[a,b]$, $Af(t) = f(a) + 1$, $f \in C[a,b]$ şeklinde tanımlanan operatör lineer değildir.

Gerçekten, $f, g \in C[a,b]$, $f(t) = g(t) = 1$ ve $\alpha = \beta = 1$ için $f + g \in C[a,b]$ olup

$$A(f+g)(t) = (f+g)(a) + 1 = f(a) + g(a) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

ve

$$Af(t) + Ag(t) = (f(a) + 1) + (g(a) + 1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

olup $A(f+g)(t) \neq Af(t) + Ag(t)$ olduğundan A operatörü lineer değildir.

Tanım 36 (Sürekli Operatör, [63], s.96) : X ve Y iki normlu uzaylar, $D(A)$, X 'de bir lineer manifold ve $A: D(A) \subset X \to Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(A)$ olsun. Eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \text{ olan } \forall x \in D(A) \text{ için } \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$$

ise, A operatörü $x = x_0$ noktasında *süreklidir* denir. A operatörü her $x \in D(A)$ noktasında sürekli ise, operatöre *sürekli operatör* denir.

Tanım 37 (Sınırlı Operatör, [63], s.91) : X ve Y iki normlu uzaylar ve $A: X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa A operatörüne *sınırlı operatör* denir. X 'den Y 'ye tüm sınırlı operatörlerin oluşturduğu aile $B(X,Y)$, özel olarak $X = Y$ ise bu aile $B(X)$ ile gösterilecektir.

Teorem 38 ([62], s.88) : X ve Y iki normlu uzaylar, $A: X \to Y$ lineer operatörü sınırlıdır ancak ve ancak süreklidir.

Örnek 39 : $X = Y = L_2(a,b)$ ve $k(t,s)$ fonksiyonu $D = [a,b]$ x $[a,b]$, $(a,b \in \mathbb{R})$ karesel bölgesi üzerinde kompleks değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$K: L_2(a,b) \to L_2(a,b),\ Kf(t) := \int_a^b k(t,s) f(s) ds$$

operatörü lineer sınırlı bir operatördür. Gerçekten K operatörünün lineer olduğu açık olup sınırlı olduğunu gösterelim. Her $f \in L_2(a,b)$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\int_a^b |k(t,s) f(s)| ds \le \left(\int_a^b |k(t,s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_a^b |f(s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

olup

$$\|Kf\|^2_{L_2(a,b)} = \int_a^b \left(\int_a^b |k(t,s) f(s)| ds \right)^2 dt \le \|f\|^2_{L_2(a,b)} \int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 ds dt$$

olduğu ve buradan $f \in L^2(\mathrm{a,b})$ için $\|Kf\|^2 \le \left(\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 ds dt \right)^{1/2} \|f\|$ eşitsizliği elde edilir.

Dolayısıyla $K: L_2(a,b) \to L_2(a,b)$ operatörünün sınırlı olduğu görülür.

Örnek 40 : $X = Y = L_2(0,1)$, $A: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $Af := f'$, $f \in L_2(0,1)$.

$$D(A) = \{ f \in L_2(0,1) : f' \in L_2(0,1) \}$$

şeklinde tanımlanan lineer operatör sınırlı değildir.

Gerçekten, $n = 1, 2, ...$ için $\varphi_n(x) = e^{inx}$ ise, $\|\varphi_n\| = 1$, ama

$$\|A\varphi_n\| = n\|\varphi_n\| = n \to \infty.$$

Tanım 41 (Operatörün Normu, [62], s.97) : X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \to Y$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu durumda $\|A\| := inf\{M: M > 0\ \ ve\ \forall x \in X\ için\ \|Ax\|_Y \le M\|x\|_X\}$ sayısına A operatörünün *normu* adı verilir.

Teorem 42 ([63], s.92) : X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \to Y$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu takdirde A operatörünün normu için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) $\|A\| := sup\left\{\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}:\ x \in X\ \ ve\ \ x \ne \theta_X\right\}$;

(2) $\|A\| := sup\{\|Ax\|_Y:\ x \in X\ \ ve\ \ \|x\|_X \le 1\}$;

(3) $\|A\| := sup\{\|Ax\|_Y:\ x \in X\ \ ve\ \ \|x\|_X < 1\}$;

(4) $\|A\| := sup\{\|Ax\|_Y : x \in X \ ve \ \|x\|_X = 1\}$.

Örnek 43 : $A : L_2(0,1) \to \mathbb{C},\ Af(t) := \int_0^1 f(t)dt$, $f \in L_2(0,1)$ lineer fonksiyoneli sınırlı bir operatör olup $\|A\| = 1$'dır.

Gerçekten, her $f \in L_2(0,1)$ için

$$|Af|_{\mathbb{C}}^2 = \left| \int_0^1 f(t)dt \right|_{\mathbb{C}}^2 = \int_0^1 \left| \int_0^1 f(t)dt \right|^2 dx$$

$$\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|dt \right)^2 dx = \left(\int_0^1 |f(t)|dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 1^2 dt \right)\left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right) = \|f\|_{L_2(0,1)}^2$$

olup

$$|Af| \leq \|f\|.$$

Buradan $\|A\| \leq 1$ olduğu bulunur. Eğer $f_*(t) = 1 \in L_2(0,1)$ alırsak

$$|Af_*|_{\mathbb{C}} = 1 = 1 \cdot \|f_*\|_{L_2(0,1)}$$

olup $\|A\| = 1$ elde edilir.

Tanım 44 (Grafik, [63], s.292) : X ve Y iki Banach uzayı olmak üzere $Z := X \oplus Y$ olsun. $A : X \to Y$ lineer operatörü için,

$$Gr(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset Z = X \oplus Y$$

alt kümesine A operatörünün *grafiği* denir.

Tanım 45 (Kapalı Operatör, [63], s.292) : $A : X \to Y$ lineer operatörünün grafiği $Gr(A)$, $Z = X \oplus Y$ de kapalı ise A operatörüne *kapalı operatör* denir.

$A : X \to Y$ operatörünün grafiğinin kapalı olması

$$(x_n) \subset D(A), \quad \lim_{n\to\infty} \{x_n, Ax_n\} = \{x, y\}$$

koşullarından $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ denklemini sağlaması demektir.

$\{x, y\} \in X \oplus \mathrm{Y}$ için $\|\{x, y\}\|_{X\oplus Y}^2 = \|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2$ şeklinde olduğundan $A : X \to Y$ lineer operatörü *kapalıdır* $\Leftrightarrow (x_n) \subset D(A)$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$ ise, $x \in D(A)$ ve $y = Ax$.

Örnek 46 : $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ Af = f'$,

$D(A)=\{f\in L_2[0,1]: f\in AC,\ f'\in L_2[0,1],\ f(0)=0\}$

şeklinde tanımlanan operatör kapalıdır.

Gerçekten, $n=1,2,....$ için $f_n(t)=t^n$ ise,

$$\|f_n\|^2_{L_2[0,1]}=\int_0^1 t^{2n}dt=\frac{1}{2n+1}\le 1 \text{ ve}$$

$$\|Af_n\|^2_{L_2[0,1]}=\int_0^1 n^2t^{2n-2}dt=\frac{n^2}{2n-1}\to\infty$$

olup A operatörü sınırsızdır. Şimdi A operatörünün kapalı olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için, ilk önce $KerA=\{0\}$ ve $\operatorname{Im}A=L_2[0,1]$ olduğunu not edelim. $g\in L_2[0,1]$ için $f(t)=\int_0^1 g(s)ds$ alalım. Buradan $f\in D(A)$ ve $Af=g$ 'dır. $g\in L_2[0,1]$ için $A^{-1}g=f$ şeklinde tanımlanır.

$$\left|\left(A^{-1}g\right)(t)\right|\le\int_0^1|g(s)|ds\le\left(\int_0^1|g(s)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}=\|g\|$$

olup A^{-1} sınırlı lineer operatördür. Buradan

$$\|A^{-1}g\|^2=\int_0^1\left|\left(A^{-1}g\right)(t)\right|^2dt\le\int_0^1\|g\|^2dt=\|g\|^2$$

olup $\|A^{-1}\|\le 1$ 'dır.

$f_n\in D(A)$ için $f_n\to f$ ve $Af_n\to h\in L_2[0,1]$

için $f_n=A^{-1},\ Af_n=A^{-1}h$ olarak alındığında $f=A^{-1}h\in D(A)$ ve $Af=h$ 'dır. Dolayısıyla A operatörü kapalıdır.

Tanım 47 (Kapanabilir Operatör, [63], s.537) : $A:X\to Y$ operatörünün $D(A)\subset D(\overline{A})$ ve her $x\in D(A)$ için $Ax=\overline{A}x$ olacak şekilde bir kapalı $\overline{A}$ operatörü varsa, A 'ya *kapana-bilir operatör* ve $\overline{A}$ operatörüne A 'nın *kapanışı* denir.

Örnek 48 : $T:D(T)\subset L_2[0,1]\to L_2[0,1],\ \mathrm{T}f:=xf(1),$

$$D(T)=C[0,1]$$

şeklinde tanımlanan operatör kapalı değil ve kapanışı yoktur.

Gerçekten, $\overline{C[0,1]} = L_2[0,1]$ olup

$$\left(f_n(x)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\bullet\|_{L_2}} u(x),$$

$$\left(h_n(x)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\bullet\|_{L_2}} u(x),\ (f_n),(h_n) \subset C[0,1],$$

ama $f_n(1)=1,\ h_n(1)=0,\ n=1,2,....$ şeklinde tanımlansın. O halde $Tf_n = x,\ Th_n = 0$ olduğundan durum açıktır.

Tanım 49 (Adjoint Operatör, [64], s.353) : H bir Hilbert uzayı, $A: D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör ve $\overline{D(A)} = H$ olsun. Bu durumda

$$D(A^*) := \{ y \in H : \forall x \in D(A) \text{ için bir } z \in H \text{ vardır, öyleki } (Ax, y)_H = (x, z)_H \}$$

olmak üzere $A^* : D(A^*) \subset H \to H$, $A^* y := z$ şeklinde tanımlanan operatöre A operatörünün *adjoint operatörü* denir.

Örnek 50 ([62], s.183) : $H = \ell_2(\mathbb{N}),\ T_c : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$, $(c_n) \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ ve $T_c(x_n) := (c_n x_n)$ şeklinde tanımlanan operatörün adjointi bulunsun.

Bu halde $(x_n),(y_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$ ve $\alpha, \beta \in K$ için $\alpha(x_n) + \beta(y_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$ olup

$$T_c\left(\alpha(x_n) + \beta(y_n)\right) = \left(c_n\left(\alpha(x_n) + \beta(y_n)\right)\right) = \left(c_n\left(\alpha(x_n)\right) + c_n\left(\beta(y_n)\right)\right)$$

$$= \alpha(c_n x_n) + \beta(c_n y_n) = \alpha T_c(x_n) + \beta T_c(y_n)$$

bağıntısından T_c operatörünün lineerliği açıktır. Her $(x_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$

$$\|T_c(x_n)\|_{\ell_2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le c\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = c\|(x_n)\|_{\ell_2},\ c := \sup_{n\ge1}|c_n| < +\infty$$

olup $T_c \in B(\ell_2(\mathbb{N}))$ olduğu açıktır. O halde T_c^* adjoint operatörü var olup her $x = (x_n),\ y = (y_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$ için

$$(T_c x, y)_{\ell_2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{\left(\overline{c_n} y_n\right)} = \left(x, T_c^* y\right)_{\ell_2} \text{ ve}$$

$$T_c^* y := \left(\overline{c_n} y_n\right),\ y = (y_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$$

olup $T_c^* = T_{\overline{c}}$.

Örnek 51 : $H = L_2(0,1),\ A: H \to H,\ Af := f'$,

$$D(A) := \{ f \in H : f \in AC(0,1),\ f' \in H \text{ ve } f(0) = f(1) = 0 \}$$

olsun. Bu halde

$$C_0^\infty(0,1) \subset D(A)$$

olup

$$H = \overline{C_0^\infty(0,1)} \subset \overline{D(A)} \subset H\,,$$

Buradan

$$\overline{D(A)} = H$$

olduğu açıktır. Şimdi

$$A^* g = -g',\ D(A^*) = \{g \in H \cap AC(0,1) : g' \in H\}$$

olduğu gösterilsin.

$g \in D(A^*)$ ve $A^* g = h$ olsun. O halde her $f \in D(A)$ için

$$(Af, g)_{L_2} = \int_0^1 f'(t)\overline{g(t)}dt = (f, A^* g)_{L_2} = \int_0^1 f(t)\overline{h(t)}dt\,.$$

Ayrıca $f \in D(A)$ olduğundan $f(0) = f(1) = 0$ olup

$$\int_0^1 f(t)\overline{h(t)}dt = \int_0^1 f(t)d\overline{\left(\int_0^t h(s)ds + c\right)} = f(t)\overline{\left(\int_0^t h(s)ds + c\right)}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \overline{\left(\int_0^t h(s)ds + c\right)} f'(t)dt$$

$$= -\int_0^1 \left(H(t) + c\right) f'(t)dt,\ H(t) = \int_0^t \overline{h(s)}ds\,.$$

Yukarıdakilerden

$$0 = \int_0^1 \left(\overline{g(t)} + H(t) + c\right) f'(t)dt,\ f \in D(A).$$

Eğer $f_0(t) := \int_0^t \overline{\left(\overline{d(s)} + H(s) + c_0\right)}ds$ (c_0 sayısı $f_0(1) = 0$ bağıntısından bulunur) ise, $f_0 \in D(A)$, sonuncu bağıntıda f yerine f_0 alarak

$$0 = \int_0^1 \left|\overline{g(t)} + H(t) + c_0\right|^2 dt$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$g(t) = -\overline{H(t)} - c_0 = -\int_0^t h(s)ds - \overline{c_0},\ g \in AC(0,1) \text{ ve } g' = -h \in H\,.$$

Böylece $g \in D(A^*)$ için

$$\left(Af, g\right)_{L_2} = \left(f, -g'\right) = \left(f, A^* g\right) \text{ ve } A^* g = -g'.$$

Tanım 52 : H bir Hilbert uzayı, $A : D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör ve A^*, A operatörünün adjoint operatörü olsun.

Eğer $D(A) \subset D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^* f$, yani

$\forall f, g \in D(A)$ için $\left(Af, g\right)_H = \left(f, Ag\right)_H$

ise, A operatörüne *simetrik operatör* denir ve $A \subset A^*$ sembolüyle gösterilir ([64], s.358).

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^* f$ ise, A operatörüne *self-adjoint operatör* denir ([64], s.359).

Eğer H Hilbert uzayında lineer kapalı bir A operatörü için

a) $D(A) \subset D(A^*)$ ve

b) Her $f \in D(A)$ için $\|Af\|_H = \|A^* f\|_H$

ise, A'ya H'da *formal normal operatör* adı verilir.

Eğer A, H Hilbert uzayında formal normal ve $D(A) = D(A^*)$ ise, A operatörüne H'da *normal operatör* denir ([64], s.379).

Eğer her $f \in H$ için $AA^* f = A^* A f = f$ ise, A operatörüne *üniter operatör* denir ([64], s.364).

Örnek 53 : $H = \ell_2(\mathbb{Z})$, $(c_n) \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$, $A : \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$, $A(x_n) = (c_n x_n)$, $x = (x_n) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ şeklinde tanımlanan A operatörünün adjointi bulunsun.

A operatörünün lineer olduğu açıktır. Ayrıca her $(x_n) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ için

$$\|Ax\|_{\ell_2} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le c \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = c\|x\|,\ c := \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|$$

olduğundan $A \in B\left(\ell_2(\mathbb{Z})\right)$. Her $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ için

$$\left(Ax, y\right)_{\ell_2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \overline{\left(\overline{c_n} y_n\right)}$$

olduğundan

$$A^*(y_n) = \left(\overline{c_n} y_n\right),\ y_n \in \ell_2(\mathbb{Z}).$$

O halde

$A = A^*$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $c_n = \overline{c_n}$.

Örnek 54 : $H = L_2[0,1],\ A : D(A) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ Au := u'(t) + au(t),\ a \in \mathbb{R}$,

$$D(A) := \{u \in L_2[0,1] \cap AC[0,1] : u(1) = u(0),\ u'(t) \in L_2[0,1]\}$$

şeklinde tanımlanan operatör bir normal operatördür.

Gerçekten, bu durumda

$$A^*v = -v'(t) + av(t),$$

$$D(A^*) = \{v(t) \in L_2[0,1] \cap AC[0,1] : v(1) = v(0),\ v'(t) \in L_2[0,1]\}$$

olup [45],

$$D(A) = D(A^*)$$

ve her $u(t) \in L_2[0,1]$ için

$$\|Au\|_{L_2[0,1]} = \|u' + au\|_{L_2[0,1]} = \|-u' + au\|_{L_2[0,1]} = \|A^*u\|_{L_2[0,1]},$$

yani A normaldir.

Örnek 55 : $H = L_2(0,1),\ A : L_2(0,1) \to L_2(0,1),\ \mathrm{a}(t) \in L_\infty(0,1),\ Af(t) = a(t)f(t)$,

$f \in L_2(0,1)$ şeklinde tanımlanan operatör lineer sınırlı olup

$$AA^*f(t) = a(t)\overline{a^*(t)}f(t) = f(t),$$

$$A^*Af(t) = \overline{a^*(t)}a(t)f(t) = f(t),\ f \in L_2(0,1)$$

olması için, yani A'nın bir üniter operatör olması için gerekli ve yeterli koşul

$$|a(t)| = 1,\ t \in [0,1]$$

olmasıdır.

Tanım 56 (Pozitif Operatör, [64], s.411) : H bir Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \to H$ bir lineer self-adjoint operatör olsun. Eğer her $f \in D(A)$ için

$$(Af, f)_H \geq 0$$

ise, A operatörüne *pozitif operatör* denir ve $A \geq 0$ sembolüyle gösterilir. Eğer A pozitif operatörü için $B^2 = A$ olacak şekilde bir B pozitif lineer operatörü varsa, B operatörüne A'nın *karekökü* denir ve $B = \sqrt{A}$ veya $B = A^{1/2}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 57 ([64], s.422) : H Hilbert uzayında tanımlı her pozitif operatörün bir pozitif karekökü mevcut ve bu karekök operatörü bir tektir.

Tanım 58 (Rezolvent Küme, [63], s.371) : H bir Hilbert uzayı ve $A:D(A)\subset H\rightarrow H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A):=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:(A-\lambda E)^{-1}\in B(X)\right\}$$

kompleks sayılar kümesine A operatörünün *rezolvent kümesi* denir.

$\lambda\in\rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda;A):=(A-\lambda E)^{-1}$ operatörüne A operatörünün *rezolvent operatörü* (veya *çözücü operatörü*) adı verilir.

Tanım 59 (Spektrum, [63], s.371) : H bir Hilbert uzayı olsun. $\mathbb{C}\setminus\rho(A)$ kümesine A operatörünün *spektrumu* denir. A operatörünün spektrum kümesi $\sigma(A)$ ile gösterilir.

Tanım 60 (Ayrık Spektrum, [63], s.371) :

$$\sigma_p(A):=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:(A-\lambda E)\ \text{operatörü bire bir değil}\right\}$$

kümesine A operatörünün *ayrık* veya *diskret spektrumu* denir. Eğer $\lambda_0\in\sigma_p(A)$ ise,

$$(A-\lambda_0E)x_0=0$$

denkleminin $x_0\neq 0$ çözümü vardır. Buradaki λ_0'a A operatörünün *özdeğeri*, x_0' a ise λ_0' a uygun bir *özvektörü* denir.

Tanım 61 (Sürekli Spektrum, [63], s.371) :

$$\sigma_c(A):=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:(A-\lambda E)\ \text{bire bir,}\ \overline{R(A-\lambda E)}=H,\ \text{fakat}\ R(A-\lambda E)\neq H\right\}$$

kümesine A operatörünün *sürekli spektrumu* denir.

Tanım 62 (Kalan Spektrum, [63], s.371) :

$$\sigma_r(A):=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:(A-\lambda E)\ \text{bire bir,}\ \overline{R(A-\lambda E)}\neq H\right\}$$

kümesine A operatörünün *kalan spektrumu* denir.

$\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ ve $\sigma_r(A)$ kümeleri ayrıktır. Ayrıca spektrumun tanımından $\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_r(A)$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 63 ([64], s.299) : Eğer A lineer operatörü bir sonlu boyutlu X lineer uzayında tanımlı olsun. Bu takdirde $\sigma_c(A)=\varnothing$ ve $\sigma_r(A)=\varnothing$.

Teorem 64 ([4], s.23) : Eğer A lineer normal operatör ise, $\sigma_r(A)=\varnothing$.

Tanım 65 ([4], s.23) : A, bir H Hilbert uzayında lineer operatör ve $\lambda\in\sigma_p(A)$ olsun. Bu λ özdeğerine karşılık gelen özvektörlerinin ürettiği lineer alt uzay $H_\lambda(A)$ ile gösterilir.

Örnek 66 : $X=\left(C[0,1],\|\cdot\|_{\infty}\right)$ olmak üzere, $A:X\to X$ $Ax=tx(t)$ operatörünü göz önüne alalım. $Ax=tx(t)$ operatörü için $R(\lambda;A)=(A-\lambda E)^{-1}$ ' i bulalım.

$$tx(t)-\lambda x(t)=y(t)$$

olup, $x(t)$ çözümü her $t\in[0,1]$ için yukarıdaki eşitliği sağlayan bir fonksiyondur. Eğer $\lambda\in\mathbb{R}\backslash[0,1]$ $(\lambda<0$ veya $\lambda>1)$ ise, yukarıdaki denkleminin her $y\in X$ için $[0,1]$ üzerinde sürekli tek

$$x(t)=\frac{1}{t-\lambda}y(t),\ t\in[0,1]$$

çözümü vardır. Bu nedenle $\rho(A)=\mathbb{R}\backslash[0,1]$ ve her $\lambda\in\rho(A)$ için

$$R(\lambda;A)=\frac{1}{t-\lambda}y(t),\ t\in[0,1]$$

olur. Şimdi $\lambda\in[0,1]$ sayısının A operatörünün spektrumuna dâhil olduğunu görelim. $\lambda_0\in[0,1]$ ve $y(t)\in C[0,1]$ fonksiyonu $y(\lambda_0)=a\neq 0$ koşulunu sağlayan herhangi bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon için

$$(t-\lambda_0)x(t)=y(t)$$

eşitliği hiçbir $x(t)\in C[0,1]$ fonksiyonu için sağlanamaz, çünkü $t=\lambda_0$ noktasında sol tarafı sıfır, sağ tarafı ise sıfırdan farklıdır. Dolayısı ile $\lambda=\lambda_0$ olduğundan yukarıda verilen denklemin bazı $y(t)\in C[0,1]$ fonksiyonları için çözümü yoktur. Bu ise $\lambda\in\sigma(A)$ olması demektir. Ayrıca $\sigma(A)$'nın hiçbir noktası A operatörünün öz değeri olamaz, çünkü

$$(t-\lambda)x(t)=0,\ \lambda\in[0,1]$$

denkleminin çözümü her $t\neq\lambda_0$ için $x(t)$'nin süreksizliğine göre $t=\lambda$ noktasında 0 olur. Böylece $\sigma_c(A)=[0,1]$ ve $\sigma_p=\varnothing$ olduğu bulunur.

Örnek 67 : $H=L_2(0,1)$ uzayında ve $A_i:L_2(0,1)\to L_2(0,1),\ i=1,..4$ operatörü için

(1) $A_1u:=u'+au,\ D(A_1)=\overset{0}{W}{}_2^1(0,1);$

(2) $A_2u:=u'+au,\ D(A_2)=\left\{u\in W_2^1(0,1):u(0)=0\right\};$

(3) $A_3u:=u'+au,\ D(A_3)=\left\{u\in W_2^1(0,1):u(0)=u(1)\right\};$

(4) $A_4 u := u' + au,\ D(A_4) = W_2^1(0,1),\ a \in \mathbb{R}$;

operatörlerinin spektrumlarını bulalım:

Çözüm: (1) $\lambda \in \mathbb{C}$ için $R(A_1 - \lambda E) \perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$ olduğunu gösterelim.

Gerçekten, her $u(t) \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$ için

$$\left(u' + au - \lambda u, e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)} = \left(u', e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)} + \left(u, \left(a - \bar{\lambda}\right) e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)}$$

$$= \left(u, e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)'_{L_2(0,1)} - \left(u, \left(a - \bar{\lambda}\right) e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)} + \left(u, \left(a - \bar{\lambda}\right) e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)$$

$$= \left(u(1), e^{(a-\bar{\lambda})}\right)_{L_2(0,1)} - \left(u(0), 1\right)_{L_2(0,1)} = 0$$

olduğundan her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $R(A_1 - \lambda E) \perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$ ve buradan $\overline{R(A_1 - \lambda E)} \perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$ bulunur. Başka bir ifadeyle, $\overline{R(A_1 - \lambda E)} \neq L_2(0,1)$.

Sonuncu ve kalan spektrumunun tanımına göre

$\sigma(A_1) = \sigma_r(A_1) = \mathbb{C}$.

(2) $A_2 u := u' + au,\ A : L_2(0,1) \to L_2(0,1),\ D(A_2) = \left\{u \in W_2^1(0,1) : u(0) = 0\right\}$.

Bu durumda $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$u' + au = \lambda u + f,\ f \in L_2(0,1)$

denkleminin genel çözümü

$$u(t) = ce^{(\lambda - a)t} + \int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)} f(s)\,ds$$

şeklinde olup $u(0) = 0$ sınır değer koşulundan $c = 0$ bulunur. Öyleyse, her $\lambda \in \mathbb{C}$ ve her $f \in L_2(0,1)$ için

$(A_2 - \lambda)u = f$

denkleminin

$$u(t) = \int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)} f(s)\,ds \in W_2^1(0,1)$$

şeklinde bir tek çözümü vardır, yani her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$(A_2 - \lambda)^{-1} \in B(L_2(0,1))$.

Başka bir ifadeyle

$$\sigma(A_2)=\varnothing,\ \rho(A_2)=\mathbb{C}.$$

(3) $\lambda\in\mathbb{C}$ için

$$A_3u=u'+au=\lambda u,\ u\in D(A_3)$$

denkleminin çözüm kümesi

$$u_\lambda(t)=ce^{-(a-\lambda)t},\ c\in\mathbb{C},\ 0\le t\le 1$$

şeklindedir. Ayrıca $u_\lambda\in W_2^1(0,1)$ olup $u(0)=u(1)$ sınır değerlerini kullanırsak,

$$c=ce^{-(a-\lambda)}$$

elde edilir. Buradan

$$c\left(1-e^{-(a-\lambda)}\right)=0$$

olup, $c\ne 0$ için $1=e^{-(a-\lambda)}$'dır. Buradan ise,

$$\lambda-a=2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$$

elde edilir. Sonuncu ve noktasal spektrumunun tanımından

$$\sigma_p(A_3)=\{a+2k\pi i:k\in\mathbb{Z}\}.$$

Diğer taraftan $A_3:D(A_3)\subset L_2(0,1)\to L_2(0,1)$ operatörü normal olduğundan bu operatörün kalan spektrumu

$$\sigma_r(A_3)=\varnothing.$$

$\lambda\ne\lambda_k=a+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$ alalım.

$A_3u=\lambda u+f,\ u(t),\ f(t)\in L_2(0,1)$ denkleminin çözüm kümesi

$$u(t)=ce^{-(a-\lambda)t}+\int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)}f(s)ds,\ c\in\mathbb{C} \tag{1.2.4.1}$$

elde edilir. $u(0)=u(1)$ sınır değerleri kullanılırsa,

$$c=\left(1-e^{(\lambda-a)}\right)^{-1}\int_0^1 e^{(\lambda-a)(1-s)}f(s)ds$$

olup (1.2.4.1) denkleminden,

$$R_\lambda f(t)=\left(1-e^{(\lambda-a)}\right)^{-1}\int_0^1 e^{(\lambda-a)(1+t-s)}f(s)ds+\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)ds,\ f\in L_2(0,1).$$

Yani

$$R_\lambda f(t)=\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds+\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_t^1 e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi $R_\lambda f(t)\in B(L_2(0,1))$ olduğunu gösterelim.

$$\|R_\lambda f(t)\|^2=\int_0^1\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds+\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_t^1 e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds\right|^2 dt$$

$$\le 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds\right|^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_t^1 e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds\right|^2\right)dt$$

$$\le 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_0^t\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\right|ds\right)^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_t^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\right|ds\right)^2\right)dt$$

$$\le 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\right|ds\right)^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\right|ds\right)^2\right)dt$$

(Cauchy-Bunyokowski Eşitsizliğinden)

$$\le 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}\right|^2 ds\int_0^1|f(s)|^2 ds+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}\right|^2 ds\int_0^1|f(s)|^2 ds\right)dt$$

$$\le 2\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\right)\int_0^1\left(\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}\right|^2 ds\right)dt\,\|f(t)\|^2$$

$$\le 2\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\right)\left(\frac{e^{2|a-\lambda|}-1}{2|a-\lambda|}\right)^2\|f(t)\|^2$$

$c_\lambda:=\left(2\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2+2\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{2|\lambda-a|}-1}{2|\lambda-a|}\right)$ olarak seçildiğinde

$$\|R_\lambda f(t)\|\le c_\lambda\|f(t)\|$$

elde edilir. Böylece eğer $\lambda\ne\lambda_k,\ k\in\mathbb{Z}$ ise, $\lambda\in\rho(A_3)$.

Sonuç olarak

$$\sigma(A_3)=\{a+2k\pi i:k\in\mathbb{Z}\}.$$

(4) Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $A_4 u = u' + au = \lambda u,\ u \in W_2^1(0,1)$ denkleminin çözüm kümesi

$$u(t) = ce^{(\lambda - a)t}$$

şeklinde olup her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$A_4 u = \lambda u$$

denkleminin $u \neq 0,\ u \in W_2^1(0,1)$ şeklinde çözümü vardır. Sonuncu ve noktasal spektrumunun tanımına göre

$$\sigma(A_4) = \sigma_p(A_4) = \mathbb{C}.$$

Teorem 68 ([67], s.162): H Hilbert uzayında A ve B keyfi iki lineer sınırlı operatör ve $A \otimes B$ onların tensör çarpımı olmak üzere

$$\sigma(A \otimes B) = \sigma(A)\sigma(B)$$

eşitliği doğrudur.

Tanım 69 (Defekt Sayıları, [4], s.149) : A, bir H Hilbert uzayında lineer operatör ve $n_+ = \dim H_{-i}(A^*),\ n_- = \dim H_i(A^*)$ olsun. (n_+, n_-) sayılarına A operatörünün *defekt sayıları* denir.

Tanım 70 (Sınır Değerler Uzayı, [4], s.155) : $A : D(A) \subset H \to H$, H Hilbert uzayında eşit defekt sayılı kapalı simetrik bir operatör olsun. $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı, $\gamma_1, \gamma_2 : D(A^*) \to \mathcal{H}$ iki lineer dönüşüm olsun. Eğer:

i) Her $f, g \in D(A^*)$ için

$$(A^* f, g)_H - (f, A^* g)_H = (\gamma_1 f, \gamma_2 g)_{\mathcal{H}} - (\gamma_2 f, \gamma_1 g)_{\mathcal{H}};$$

ii) Her $x, y \in \mathcal{H}$ için $\gamma_1 f = x$ ve $\gamma_2 f = y$ koşulunu sağlayan bir $f \in D(A^*)$ elemanı mevcut;

ise, $(\mathcal{H}, \gamma_1, \gamma_2)$ üçlüsüne A operatörü için bir *sınır değerler uzayı* denir.

Teorem 71 ([4], s.155) : Defekt sayıları eşit (n,n), $n \leq +\infty$ olan her simetrik operatör için bir $(\mathcal{H}, \gamma_1, \gamma_2)$ sınır değerler uzayı vardır ve $\dim \mathcal{H} = n$ dir.

Tanım 72 (Çok Noktalı Diferensiyel Operatör, [68], s.561-563) : Özel bir durumda $L^2[a,b]$ uzayında tanımlı çok noktalı lineer diferensiyel operatörün tanımını verelim.

$$\tau := \sum_{i=0}^{n} a_i(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^i,$$

burada $a_i:[a,b]\to\mathbb{R},\ a_i\in C^{\infty}[a,b],\ i=1,2,\cdots,n$ ve $[a,b]$ üzerinde $a_n(\cdot)\neq 0$ olsun.

$\pi=\{a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=b\}$, $[a,b]$'nin bir parçalanışı olsun. S reel $L^2[a,b]$ Hilbert uzayını göstermek üzere,

$$H^n([a,b]):=\left\{f(t)\in S: f\in C^{n-1}[a,b],\ f^{(n-1)}\in AC[a,b],\ f^{(n)}\in S\right\}.$$

$H^n(\pi)$ ile aşağıdaki iki şartı sağlayan bütün $f(t)\in S$ fonksiyonların kümesini göstereceğiz:

1. $f(t)\in S$ fonksiyonu her bir $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\cdots,m$ alt aralığında x_{i-1} ve x_i uç noktalarında sırasıyla sağ ve sol limitlere sahiptir. $i=1,2,\cdots,m$ için $f_i(t)=f(t),\ x_{i-1}<t<x_i,\ f_i(x_{i-1})=f(x_{i-1}^{+})$ ve $f_i(x_i)=f(x_i^{-})$ şeklinde $[x_{i-1},x_i]$ üzerinde f_i fonksiyonu tanımlansın. $f_1, f_2,\cdots, f_m$ fonksiyonlarına f'nin "bileşenleri" denir ve $f=(f_1, f_2,\cdots, f_m)$ şeklinde yazılır.

2. $i=1,\cdots,m$ için f_i bileşenleri $H^n[x_{i-1},x_i]$'ye aittir. $H^n(\pi)$, $H^n[a,b]$'yi içeren S'nin lineer bir alt uzayıdır ve keyfi $f(t)\in H^n(\pi)$ için $\tau f(t)\in S.$

Şimdi $H^n(\pi)$ üzerinde aşağıdaki şekilde bir lineer çok noktalı sınır değer fonksiyoneli tanımlayalım:

$$B(f):=\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\alpha_{jl}f_l^{(j)}(x_{l-1})+\beta_{jl}f_l^{(j)}(x_l)\right],\ f=(f_1, f_2,\cdots, f_m)\in H^n(\pi)$$

burada, $j=0,1,\cdots,n-1,\ l=1,2,\cdots,m$ için $\alpha_{jl},\beta_{jl}\in\mathbb{R}$. Bu şekildeki bütün sınır değerler uzayı $2mn$ boyutlu lineer uzaydır.

Burada

$$B_i(f):=\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\alpha_{ijl}f_l^{(j)}(x_{l-1})+\beta_{ijl}f_l^{(j)}(x_l)\right],\ i=1,2,\cdots,k$$

şeklinde k-tane lineer bağımsız çok noktalı sınır değer fonksiyonellerin kümesi verilmiş olsun. S uzayı üzerinde

$$L:\mathfrak{D}(L)\subset S\to S,\ Lf=\tau f,\ \mathfrak{D}(L):=\left\{f\in H^n(\pi): B_i(f)=0,\ i=1,2,\cdots,k\right\}$$

şeklinde tanımlanan L lineer operatörüne *çok noktalı lineer diferensiyel operatör* denir.

Sayılabilir sonsuz sayıda alt aralıklar durumunda da çok noktalı diferensiyel operatör tanımı benzer şekilde verilebilir [69].

Tanım 73 ([3], s.49) : $l(y)=(-1)^n\left(p_0 y^{(n)}\right)^{(n)}+(-1)^{n-1}\left(p_1 y^{(n-1)}\right)^{(n-1)}+\cdots+p_n y$ bir diferensiyel ifade olsun. Burada $p_{n-k}(x),\ x\in(a,b),\ k=0,1,\cdots,n$ k. mertebeden türevlere sahip Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlardır. Eğer (a,b) aralığı sonlu ve $1/p_0(x),\ p_1(x),\cdots,p_n(x)$ fonksiyonları (a,b) aralığı üzerinde Lebesgue integrallenebilirse, $l(\cdot)$' ye *regüler diferensiyel ifade*, diğer durumlarda *singüler diferensiyel ifade* denir.

Tanım 74 (Pozitif ve Negatif Uzaylar, [4], s.58) : $A=A^*\geq E$, A^j operatörü ile tanımlanan $H_j(A)\ -\infty<j<+\infty$, Hilbert derecelendirme uzaylarını tanımlayalım.

$H=H_0$, kompleks sayılar cismi üzerinde $(\cdot,\cdot)_{H_0}$ iç çarpımı ve $f\in H_0$ için

$$\|f\|_{H_0}=(f,f)_{H_0}^{1/2}$$

normuyla tanımlı bir Hilbert uzayı olsun. Ayrıca bu durumda A operatörü için

$$\|Af\|_{H_0}\geq\|f\|_{H_0}$$

bağıntısı doğrudur. $D\left(A^j\right),\ 0<j<+\infty$, kümesi

$$(f,g)_{H_{+j}}:=\left(A^j f,A^j g\right)_{H_0},\quad f,g\in D\left(A^j\right)$$

iç çarpımıyla bir Hilbert uzayıdır. $H_{+j}:=H_{+j}(A),\ 0<j<+\infty,$ uzayına *pozitif uzay* denir. $H_{+j}:=H_{+j}(A),\ 0<j<+\infty,$ Hilbert uzayının H Hilbert uzayındaki iç çarpıma göre dual uzayı $H_{-j}:=H_{-j}(T),\ 0<j<+\infty,$ şeklinde gösterilir ve *negatif uzay* denir.

Tanım 75 (Lineer Bağıntı, [4]) : H bir Hilbert uzayı ve $H^2=H\oplus H$ olsun. H^2 Hilbert uzayında her lineer manifolda, H Hilbert uayında bir *lineer bağıntı* denir.

Tanım 76 [4] : θ, H Hilbert uzayında bir lineer bağıntı olsun.

$$\theta^*=\left\{\{y,y'\}\in H^2:\forall\{x,x'\}\in\theta\ için\ (y,x')_H=(y',x)_H\right\}$$

şeklinde tanımlanan lineer bağıntısına θ lineer bağıntısının *adjointi* denir. Eğer θ lineer bağıntısı için $\theta^*=\theta$ ise, θ lineer bağıntısına *self-adjointtir* denir.

Teorem 77 [4] : $\theta=\left\{\{x,x'\}\in H^2:x,x'\in H\right\}$ şeklinde bir lineer bağıntı olsun. θ lineer bağıntısının self-adjoint olması için gerekli ve yeterli koşul

$$(W-E)x'+i(W+E)x=0,$$

eşitliğini sağlayan $W:H\to H$ bir tek üniter operatörünün mevcut olmasıdır.

Tanım 78 ([70], s.1) : $\mathfrak{F}$, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir lineer vektör uzay ve $Q: \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$ bir yarı-lineer Hermityen form olsun, yani Q, birinci argumente göre lineer:

$$Q(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 Q(x_1, y) + \lambda_2 Q(x_2, y),\ x_1, x_2, y \in \mathfrak{F},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \quad (1.2.4.2)$$

ve Hermityen simetriktir:

$$Q(y, x) = \overline{Q(x, y)},\ x, y \in \mathfrak{F} \quad (1.2.4.3)$$

$Q(x, y)$ Hermityen formu (1.2.4.2) ve (1.2.4.3) şartlarını sağlıyorsa ona *Q-metrik* denir ve

$$[x, y] = Q(x, y),\ x, y \in \mathfrak{F}$$

ile gösterilir. Bu metriğe *indefinite metrik* denir.

Örnek 79 ([70], s.2) : $\mathfrak{F}$, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı tüm sonlu kompleks değerli sürekli fonksiyonların oluşturduğu lineer uzay olsun. $Q: \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$,

$$Q: Q(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y(t)}dt,\ x, y \in \mathfrak{F}$$

şeklinde tanımlanırsa form (1.2.4.2) ve (1.2.4.3) özelliklerine sahiptir. Bu bir Q-metriktir.

Tanım 80 ([70], s.3) : $x \in \mathfrak{F}$ olsun. Eğer

$$[x, x] > 0,\ [x, x] < 0,\ [x, x] = 0$$

ise, x vektörüne sırasıyla *pozitif, negatif* ve *nöter vektör* denir.

Pozitif (negatif) ve nöter vektörlere birlikte *negatif olmayan* (*pozitif olmayan*) *vektörler* denir.

Tanım 81 ([70], s.3) : $\mathcal{L} \subset \{x: [x, x] > 0\} \cup \{\theta\}$ $\quad(\mathcal{L} \subset \{x: [x, x] < 0\} \cup \{\theta\})$ lineer alt uzayına *pozitiftir* (*negatiftir*) denir. Eğer bir $\mathcal{L}$ lineer alt uzayı için

$$\mathcal{L} \cap \{x: [x, x] > 0\} \neq \emptyset \text{ ve } \mathcal{L} \cap \{x: [x, x] < 0\} \neq \emptyset$$

ise, $\mathcal{L}$'ye *indefinite lineer alt uzay* denir.

Tanım 82 ([70], s.6) : Eğer bir $\mathcal{L} \subset \mathfrak{F}$ lineer alt uzayı için $\mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}$ bağıntısından $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$ alınırsa, $\mathcal{L}$'ye *maksimal pozitif alt uzay* denir. Benzer şekilde maksimal negatif olmayan, maksimal negatif, maksimal pozitif olmayan, maksimal nöter vs. tanımlanabilir.

Tanım 83 ([70], s.28) : Eğer bir $\mathcal{L}$ maksimal nöter alt uzayı hem maksimal negatif olmayan ve hem de maksimal pozitif olmayan alt uzay ise, ona *hipermaksimal nöter alt uzay* denir.

Tanım 84 [70] : Eğer H bir Hilbert uzayı $\mathcal{J}: H \to H$ bir operatör $\mathcal{J}^* = \mathcal{J}$ ve $\mathcal{J}^2 = E$ ise, $[x, y] = (\mathcal{J}x, y): H \times H \to \mathbb{C}$ bir indefinite metriktir ve $\mathcal{J}$-metrik denir.

Bu metrikte tanımlanan hipermaksimal nöter alt uzaya *hipermaksimal $\mathcal{J}$-nöter lineer alt uzay* denir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. S-1 Durumunda Self-adjoint Genişlemelerinin Gösterimi ve Spektrum Yapısı

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı, $H \neq \{0\}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olsun. Burada $A: D(A) \subset H \to H$ bir lineer self-adjoint operatör olmak üzere, vektör fonksiyonların $L^2(H, (-\infty, a)) \oplus L^2(H, (b, +\infty))$ Hilbert uzayında

$$l(u) = \big(l_1(u_1), l_2(u_2)\big) = (iu_1' + Au_1, iu_2' + Au_2),\ u = (u_1, u_2)$$

formundaki lineer çok noktalı diferensiyel operatör ifadesine bakılacaktır. $D(A) \subset H$ lineer manifoldu

$$(f, g)_+ := (Af, Ag)_H + (f, g)_H,\ f, g \in D(A)$$

şeklinde tanımlanan iç çarpım işlemi ile H Hilbert uzayına göre $\|\cdot\|_+$ pozitif normu altında bir Hilbert uzayıdır ve H_+ ile gösterilir. H_- ise negatif normlu Hilbert uzayını ifade etmektedir. Açıkça görüldüğü gibi $A: H_+ \to H$ operatörü süreklidir. Onun $\tilde{A}: H \to H_-$ adjointine $\tilde{A}: D(A) = H \subset H_{-1} \to H_{-1}$ şeklinde bakılırsa $\tilde{A}$, A operatörünün bir lineer self-adjoint operatörüdür. Şimdi $u = (u_1, u_2)$ ve $\widetilde{l_1}(u_1) = iu_1' + \tilde{A}u_1$, $\widetilde{l_2}(u_2) = iu_2' + \tilde{A}u_2$ olmak üzere

$$\tilde{l}(u) = (\widetilde{l_1}(u_1), \widetilde{l_2}(u_2)) \tag{2.1.1}$$

şeklindeki diferensiyel ifadesine bakılsın.

$\widetilde{l_1}$ ($\widetilde{l_2}$) diferensiyel ifadesinin$L^2(H, (-\infty, a))$ ($L^2(H, (b, +\infty))$) Hilbert uzayında ürettiği L_{10} (L_{20}) minimal ve L_1 (L_2) maksimal operatörlerin ayrıntılı incelenmesi [22] çalışmasında yapılmıştır.

$L^2 = L^2(H, (-\infty, a)) \oplus L^2(H, (b, +\infty))$ uzayında $L_0 = L_{10} \oplus L_{20}$ ve $L = L_1 \oplus L_2$ şeklinde ifade edilen operatörler sırasıyla (2.1.1) diferensiyel ifadesi tarafından doğrulan (çok noktalı) minimal ve maksimal operatörler olarak tanımlanır. Bu halde L_0 operatörü L^2 uzayında simetriktir ve $L_0^* = L$'dir. Diğer taraftan,

$$m(L_{10}) = 0,\ n(L_{10}) = dimH,$$

$$m(L_{20}) = dimH,\ n(L_{20}) = 0$$

olduğu açıktır.

Sonuç olarak, $m(L_0) = n(L_0) > 0$. Öyleyse L_0 minimal operatörü self-adjoint genişlemelere sahiptir [1]. Gerçekten, örneğin $l(u)$ diferensiyel ifadesi $u(a) = u(b)$ sınır şartıyla L^2 uzayında bir self-adjoint operatör üretir.

Burada L_0 minimal operatörün L^2 uzayında tüm self-adjoint genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilecek ve spektrum yapısı araştırılacaktır.

İlk olarak aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 2.1.1: $\gamma_1: D(L_0^*) \to H,\ \gamma_1(u) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(u_1(a) + u_2(b)),$

$$\gamma_2: D(L_0^*) \to H,\ \gamma_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1(a) - u_2(b)),\ u = (u_1, u_2) \in D(L_0^*)$$

olmak üzere (H, γ_1, γ_2) üçlüsü L_0 minimal operatörün L^2 uzayında bir sınır değerleri uzayıdır.

İspat: Keyfi $u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2) \in D(L)$ için

$$(Lu, v)_{L^2} - (u, Lv)_{L^2} = (\gamma_1(u), \gamma_2(v))_H - (\gamma_2(u), \gamma_1(v))_H$$

eşitliğinin doğruluğu kolayca gösterilebilir. Şimdi keyfi $f, g \in H$ için

$$\gamma_1(u) = \frac{1}{i\sqrt{2}}\big(u_1(a) + u_2(b)\big) = f \ \text{ ve } \ \gamma_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(u_1(a) - u_2(b)\big) = g,$$

yani

$$u_1(a) = \frac{if+g}{\sqrt{2}} \ \text{ ve } \ u_2(b) = \frac{if-g}{\sqrt{2}}.$$

koşullarını sağlayan $u = (u_1, u_2) \in D(L)$ fonksiyonunun varlığı araştırılsın.

Eğer $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ fonksiyonları

$$u_1(t) = e^{t-a/2}\frac{if+g}{\sqrt{2}},\ t < a,$$

$$u_2(t) = e^{b-t/2}\frac{if-g}{\sqrt{2}},\ t > b$$

şeklinde seçilirse, $(u_1, u_2) \in D(L)$ ve $\gamma_1(u) = f,\ \gamma_2(u) = g$ olduğu açıktır.

Daha sonra [4] çalışmasındaki yöntem kullanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılabilir.

Teorem 2.1.2: Eğer $\tilde{L}$, L_0 minimal operatörün L^2 uzayındaki bir self-adjoint genişlemesi ise, bu genişleme (2.1.1) diferensiyel ifadesi ve $W: H \to H$ bir üniter operatör olmak üzere

$$u_2(b) = Wu_1(a)$$

sınır şartı tarafından üretilir. Üstelik $W: H \to H$ üniter operatörü $\tilde{L}$ genişlemesi tarafından tek türlü belirlenir yani, $\tilde{L} = L(W)$ ve bu önermenin tersi de doğrudur.

Şimdi L_W self-adjoint genişlemelerin L^2 uzayında spektrum yapısı araştırılacaktır.

İlk önce aşağıdaki sonucun doğruluğu gösterilecektir.

Teorem 2.1.3: $L_W, L_0 \subset L_W \subset L$, self-adjoint genişlemesinin ayrık spektrumu boştur, yani

$$\sigma_p(L_W) = \emptyset.$$

İspat: $\tilde{l}(u) = iu'(t) + \tilde{A}u(t) = \lambda u(t), u \in L^2, \lambda \in \mathbb{R}$

$$u_2(b) = Wu_1(a)$$

özdeğer problemine bakılsın. Buradan

$$u' = i(\tilde{A} - \lambda)u,\ u_2(b) = Wu_1(a),\ u \in L^2, \lambda \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Bu son sınır değer probleminin genel çözümü

$$\begin{cases} u_1(t) = e^{i(\tilde{A}-\lambda)(t-a)} f\ ,\ \ t < a \\ u_2(t) = e^{i(\tilde{A}-\lambda)(t-b)} g\ ,\ \ t > b \\ u_2(b) = Wu_1(a),\ \ \ f, g \in H \end{cases} \cdot$$

Buradan $f \neq 0,\ g \neq 0$ için $u_1 \notin L^2(H, (-\infty, a)),\ u_2 \notin L^2(H, (b, +\infty))$ olduğu açıktır. Böylece her W üniter operatörü için $\sigma_p(L_W) = \emptyset$.

Genel teoriden bilindiği gibi [64], Hilbert uzayında bir self-adjoint operatörün kalan spektrumu boştur. O halde şimdi L_0 minimal operatörün L_W self-adjoint genişlemelerinin sürekli spektrumunu incelensin.

Teorem 2.1.4: L_W genişlemesinin $\rho(L_W)$ resolvent kümesi için

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: \text{İ}m\lambda \neq 0\} \subset \rho(L_W)$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: Şimdi L^2 Hilbert uzayında $\tilde{l}(\cdot)$ diferensiyel ifadesi ve $u_2(b) = Wu_1(a)$ sınır şartı tarafından doğrulan L_W operatörünün resolventi, yani

$$\begin{cases} \tilde{l}(u) = iu'(t) + \tilde{A}u(t) = \lambda u(t) + f(t),\ \ u \in L^2,\ \ \lambda \in \mathbb{C},\ \ \lambda_i = \text{İ}m\lambda > 0 \\ \qquad\qquad u_2(b) = Wu_1(a) \end{cases} \tag{2.1.2}$$

sınır değer problemine bakılsın.(2.1.2) sınır değer probleminin çözümünün

$$u_1(\lambda; t) = e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-a)} f_\lambda^* + i\int_t^a e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-s)} f(s)ds\ ,\ \ t < a,$$

$$u_2(\lambda;t) = i\int_t^\infty e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-s)} f(s)ds\,, \qquad\qquad t > b,$$

$$f_\lambda^* = W^*(-i\int_b^\infty e^{-i(\lambda-\tilde{A})(b-s)} f(s)ds)$$

olmak üzere

$$u(\lambda;t) = (u_1(\lambda;t), u_2(\lambda;t))$$

fonksiyonu olduğu gösterilsin. Bunun için, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i > 0$ durumunda

$$u_1(\lambda;t) \in L^2(H,(-\infty,a)),\, u_2(\lambda;t) \in L^2(H,(b,+\infty))$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Üstelik bu durumda,

$$\|f_\lambda^*\|_H^2 = \left\|-i\int_b^\infty e^{-i(\lambda-\tilde{A})(b-s)} f(s)ds\right\|_H^2 \le (\int_b^\infty e^{\lambda_i(b-s)}\|f(s)\|_H ds)^2$$

$$\le \left(\int_b^\infty e^{2\lambda_i(b-s)}ds\right)\left(\int_b^\infty \|f(s)\|_H^2 ds\right) = \frac{1}{2\lambda_i}\|f\|_{L^2(H,(b,+\infty))}^2 < \infty,$$

$$\left\|e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-a)} f_\lambda^*\right\|_{L^2(H,(-\infty,a))}^2 = \left\|e^{-i\lambda(t-a)} f_\lambda^*\right\|_{L^2(H,(-\infty,a))}^2 = \int_{-\infty}^a \left\|e^{-i\lambda(t-a)} f_\lambda^*\right\|_H^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^a e^{2\lambda_i(t-a)}dt\|f_\lambda^*\|_H^2 = \frac{1}{2\lambda_i}\|f_\lambda^*\|_H^2 < \infty$$

ve

$$\left\|i\int_t^a e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-s)} f(s)ds\right\|_{L^2(H,(-\infty,a))}^2 \le \int_{-\infty}^a (\int_t^a e^{\lambda_i(t-s)}\|f(s)\|_H ds)^2 dt$$

$$\le \int_{-\infty}^a\left(\int_t^a e^{\lambda_i(t-s)}ds\right)\left(\int_t^a e^{\lambda_i(t-s)}\|f(s)\|^2 ds\right)dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_i}\int_{-\infty}^a\int_t^a e^{\lambda_i(t-s)}\|f(s)\|^2 ds\, dt = \frac{1}{\lambda_i}\int_{-\infty}^a\left(\int_{-\infty}^s e^{\lambda_i(t-s)}\|f(s)\|^2 dt\right)ds$$

$$= \frac{1}{\lambda_i}\int_{-\infty}^a(\int_{-\infty}^s e^{\lambda_i(t-s)}dt)\|f(s)\|^2 ds = \frac{1}{\lambda_i^2}\int_{-\infty}^a\|f(s)\|^2 ds$$

$$= \frac{1}{\lambda_i^2}\|f\|_{L^2(H,(-\infty,a))}^2 < \infty.$$

Daha sonra

$$\left\|i\int_t^\infty e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-s)} f(s)ds\right\|_{L^2(H,(b,+\infty))} \le \int_b^\infty (\int_t^\infty e^{\lambda_i(t-s)}\|f(s)\|_H ds)^2 dt$$

$$\le \int_b^\infty\left(\int_t^\infty e^{\lambda_i(t-s)}ds\right)\left(\int_t^\infty e^{\lambda_i(t-s)}\|f(s)\|^2 ds\right)dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_i}\int_b^\infty\left(\int_t^\infty e^{\lambda_i(t-s)}\|f(s)\|^2 ds\right)dt = \frac{1}{\lambda_i}\int_b^\infty\left(\int_b^s e^{\lambda_i(t-s)}\|f(s)\|^2 dt\right)ds$$

$$= \frac{1}{\lambda_i}\int_b^\infty(\int_b^s e^{\lambda_i(t-s)}dt)\|f(s)\|^2 ds = \frac{1}{\lambda_i^2}(\int_b^\infty(1 - e^{\lambda_i(b-s)})\|f(s)\|^2 ds)$$

$$\le \frac{1}{\lambda_i^2}\|f\|_{L^2(H,(b,+\infty))}^2 < \infty.$$

Yukarıdaki hesaplamalardan $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \dot{I}m\lambda > 0$ için $u_1(\lambda;t) \in L^2(H,(-\infty,a))$, $u_2(\lambda;t) \in L^2(H,(b,+\infty))$ olduğu görülür. Diğer taraftan $u(\lambda;t)$'nin (2.1.2) sınır değer probleminin bir çözümü olduğu kolayca görülür.

$\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \dot{I}m\lambda < 0$ olduğu durumlarda W, H'da bir üniter operatör olmak üzere

$$\begin{cases} L_W u = iu' + \tilde{A}u = \lambda u + f,\ u = (u_1,u_2),\ f \in L^2, \\ u_2(b) = Wu_1(a) \end{cases}$$

sınır değer probleminin çözümü

$$\begin{cases} u_1(\lambda;t) = -i\int_{-\infty}^{t} e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-s)} f(s)ds\,, & t < a, \\ u_2(\lambda;t) = e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-b)} g_\lambda^* - i\int_{b}^{t} e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-s)} f(s)ds\,, & t > b, \end{cases}$$

$$g_\lambda^* = W\left(-i\int_{-\infty}^{a} e^{-i(\lambda-\tilde{A})(a-s)} f(s)ds\right)$$

$u(\lambda;t) = (u_1(\lambda;t), u_2(\lambda;t))$ formundadir. İlk olarak $u(\lambda;t) \in L^2$ olduğu kanıtlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|u_1(\lambda;t)\|^2_{L^2(H,(-\infty,a))} &= \int_{-\infty}^{a} \left\| -i\int_{-\infty}^{t} e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-s)} f(s)ds \right\|_H^2 dt \\
&\le \int_{-\infty}^{a} \left(\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_i(t-s)}ds\right)\left(\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_i(t-s)} \|f(s)\|_H^2 ds\right) dt \\
&= \frac{1}{|\lambda_i|}\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_i(t-s)} \|f(s)\|_H^2 ds\, dt = \frac{1}{|\lambda_i|}\int_{-\infty}^{a}\left(\int_{s}^{a} e^{\lambda_i(t-s)}\|f(s)\|_H^2 dt\right)ds \\
&= \frac{1}{|\lambda_i|}\int_{-\infty}^{a}\left(\int_{s}^{a} e^{\lambda_i(t-s)}dt\right)\|f(s)\|_H^2 ds = \frac{1}{|\lambda_i|^2}\int_{-\infty}^{a}\left(1 - e^{\lambda_i(a-s)}\right)\|f(s)\|_H^2\, ds \\
&\le \frac{1}{|\lambda_i|^2}\|f\|^2_{L^2(H,(-\infty,a))} < \infty\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|g_\lambda^*\|_H^2 &= \left\| -i\int_{-\infty}^{a} e^{-i(\lambda-\tilde{A})(a-s)} f(s)ds \right\|_H^2 \le \left(\int_{-\infty}^{a} e^{\lambda_i(a-s)}\|f(s)\|_H ds\right)^2 \\
&\le \left(\int_{-\infty}^{a} e^{2\lambda_i(a-s)}ds\right)\left(\int_{-\infty}^{a}\|f(s)\|_H^2 ds\right) \\
&= \frac{1}{2|\lambda_i|}\|f\|^2_{L^2(H,(-\infty,a))} < \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-b)} g_\lambda^* \right\|^2_{L^2(H,(b,+\infty))} &\le \int_{b}^{\infty} e^{2\lambda_i(t-b)}dt\, \|g_\lambda^*\|_H^2 = \frac{1}{2|\lambda_i|}\|g_\lambda^*\|_H^2 \\
&\le \frac{1}{4|\lambda_i|^2}\|f\|^2_{L^2(H,(b,+\infty))} < \infty
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left\| -i\int_{b}^{t} e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-s)} f(s)ds \right\|^2_{L^2(H,(b,+\infty))} &\le \int_{b}^{\infty}\left(\int_{b}^{t} e^{\lambda_i(t-s)}\|f(s)\|_H ds\right)^2 dt \\
&\le \int_{b}^{\infty}\left(\int_{b}^{t} e^{\lambda_i(t-s)}ds\right)\left(\int_{b}^{t} e^{\lambda_i(t-s)}\|f(s)\|_H^2 ds\right) dt
\end{aligned}$$

$$= \int_b^\infty \left(\frac{1}{\lambda_i}(1 - e^{\lambda_i(t-b)})\right)\left(\int_b^t e^{\lambda_i(t-s)}\|f(s)\|_H^2 ds\right) dt$$
$$\leq \frac{1}{|\lambda_i|}\int_b^\infty \left(\int_b^t e^{\lambda_i(t-b)}\|f(s)\|_H^2 ds\right) dt = \frac{1}{|\lambda_i|}\int_b^\infty \left(\int_s^\infty e^{\lambda_i(t-s)}\|f(s)\|_H^2 dt\right) ds$$
$$= \frac{1}{|\lambda_i|}\int_b^\infty \left(\int_s^b e^{\lambda_i(t-s)} dt\right)\|f(s)\|_H^2 ds = \frac{1}{|\lambda_i|^2}\|f\|^2_{L^2(H,(b,+\infty))} < \infty .$$

Yukarıdaki hesaplamalardan $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \text{İ}m\lambda < 0$ durumunda $u_1(\lambda;\cdot) \in L^2(H,(-\infty,a))$, $u_2(\lambda;\cdot) \in L^2(H,(b,+\infty))$, yani $u(\lambda;\cdot) \in L^2$ olduğu açıktır.

Diğer taraftan, $u(\lambda;\cdot)$ fonksiyonunun $\tilde{l}u(\lambda;\cdot) = iu'(\lambda;\cdot) + \tilde{A}(\lambda;\cdot) = \lambda u(\lambda;\cdot) + f$ diferensiyel denklemini ve $u_2(b) = Wu_1(a)$ sınır değer şartını sağladığı kontrol edilebilir. Dolayısıyla istenilen sonuç ispatlanmış olur.

Şimdi L_W genişlemesinin $\sigma_c(L_W)$ sürekli spektrumu araştırılsın.

Teorem 2.1.5: Her L_W self-adjoint genişlemesinin sürekli spektrumu tüm reel eksendir, yani

$$\sigma_c(L_W) = \mathbb{R}.$$

İspat: Bu halde $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \text{İ}m\lambda > 0$ için $R_\lambda(L_W)$ resolvent operatörünün normu

$$\|R_\lambda(L_W)f(t)\|^2_{L^2} = \left\|e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-a)}f^*_\lambda + i\int_t^a e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-s)}f_1(s)ds\right\|^2_{L^2(H,(-\infty,a))}$$
$$+\left\|i\int_t^\infty e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-s)}f_2(s)ds\right\|^2_{L^2(H,(b,+\infty))}$$

$f \in L^2, f = (f_1, f_2)$ formundadır.

Buradan keyfi $f = (f_1, f_2) \in L^2$ için

$$\|R_\lambda(L_W)f(t)\|^2_{L^2} \geq \left\|i\int_t^b e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-s)}f_2(s)ds\right\|^2_{L^2(H,(b,+\infty))}$$

olduğu doğrudur. $f^*(\lambda;t) = (0, e^{-i(\bar{\lambda}-\tilde{A})t}f)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \text{İ}m\lambda > 0$, $f \in H$ formundaki $f^*(\lambda;t)$ vektör fonksiyonları L^2'ye aittir. Üstelik

$$\|f^*(\lambda;t)\|^2_{L^2} = \int_b^\infty \left\|e^{-i(\bar{\lambda}-\tilde{A})t}f\right\|^2_H dt = \int_b^\infty e^{-2\lambda_i t}dt\,\|f\|^2_H = \frac{1}{2\lambda_i}e^{-2\lambda_i b} < \infty .$$

Ayrıca $f^*(\lambda;\cdot)$ fonksiyonları için

$$\|R_\lambda(L_W)f^*(\lambda;t)\|^2_{L^2(H,(b,+\infty))} \geq \left\|i\int_t^\infty e^{-i(\lambda-\tilde{A})(t-s)}e^{-i(\bar{\lambda}-\tilde{A})s}fds\right\|^2_{L^2(H,(b,+\infty))}$$
$$= \left\|\int_t^\infty e^{-i\lambda t}e^{-2\lambda_i s}e^{i\tilde{A}t}fds\right\|^2_{L^2(H,(b,+\infty))}$$
$$= \left\|e^{-i\lambda t}e^{i\tilde{A}t}\int_t^\infty e^{-2\lambda_i s}fds\right\|^2_{L^2(H,(b,+\infty))}$$

$$= \left\| e^{-i\lambda t} \int_t^{\infty} e^{-2\lambda_i s} ds \right\|^2_{L^2(H,(b,+\infty))} \|f\|_H^2$$

$$= \frac{1}{4\lambda_i^2} \int_b^{\infty} e^{-2\lambda_i t} dt \, \|f\|_H^2 = \frac{1}{8\lambda_i^3} e^{-2\lambda_i b} \|f\|_H^2 \, .$$

Buradan,

$$\|R_\lambda(L_W) f^*(\lambda;\cdot)\|_{L^2} \geq \frac{e^{-\lambda_i b}}{2\sqrt{2}\lambda_i \sqrt{\lambda_i}} \|f\|_H = \frac{1}{2\lambda_i} \|f^*(\lambda;\cdot)\|_{L^2},$$

yani $\lambda_i = \dot{I}m\lambda > 0$ ve $f \neq 0$ için

$$\frac{\|R_\lambda(L_W) f^*(\lambda;\cdot)\|_{L^2}}{\|f^*(\lambda;\cdot)\|_{L^2}} \geq \frac{1}{2\lambda_i}$$

sağlanır. Bu sonuncu ve operatör normunun tanımından

$$\|R_\lambda(L_W)\| \geq \frac{\|R_\lambda(L_W) f^*(\lambda;\cdot)\|_{L^2}}{\|f^*(\lambda;\cdot)\|_{L^2}}, \; f \neq 0$$

olduğu açıktır. Sonuç olarak $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \dot{I}m\lambda > 0$ için

$$\|R_\lambda(L_W)\| \geq \frac{1}{2\lambda_i} \, .$$

Bu ise teoremi ispatlar.

Örnek 2.1.6: $L^2\big((-\infty,-1) \times (0,1)\big) \oplus L^2\big((1,+\infty) \times (0,1)\big)$ uzayında

$$i\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(t,x), \;\; |t| > 1, \;\; x \in [0,1],$$

$$u(1,x) = e^{i\varphi} u(-1,x), \;\; \varphi \in [0,2\pi),$$

$$u_x'(t,0) = u_x'(t,1) = 0, \;\; |t| > 1$$

sınır değer probleminin son teoreme göre spektrumu sadece sürekli spektrum olup tüm $\mathbb{R}$'ye eşittir.

2.2. S-2 Durumunda Self-adjoint Genişlemelerinin Gösterimi ve Spektrum Yapısı

H uzayı $0 < dimH \leq \infty$ olmak üzere bir ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. Vektör fonksiyonlarının $L^2(H,(a,+\infty)) \oplus L^2(H,(b,+\infty))$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ Hilbert uzayında, $A_k: D(A_k) \subset H \to H$, $k = 1,2$ operatörleri H Hilbert uzayında lineer self-adjoint operatörler olmak üzere

$$l(u) = \big(l_1(u_1), l_2(u_2)\big), u = (u_1, u_2),$$

$$l_1(u_1) = iu_1'(t) + A_1 u_1(t), \;\; t \in (a,+\infty),$$

$$l_2(u_2) = -iu_2'(t) + A_2 u_2(t), \;\; t \in (b,+\infty)$$

formundaki lineer çok noktalı diferensiyel-operatör ifadesi düşünülsün. $D(A_k) \subset H$ lineer manifoldu

$$(f,g)_{k,+} := (A_k f, A_k g)_H + (f,g)_H,\ f,g \in D(A_k),\ k = 1,2$$

şeklinde tanımlanan iç çarpım işlemi ile H Hilbert uzayına göre $\|\cdot\|_+$ pozitif normu altında bir Hilbert uzayıdır ve H_+ ile gösterilir. H_- ise negatif normlu uygun Hilbert uzayını ifade etmektedir. Açıkça görüldüğü gibi $A_k: H_+ \to H$ operatörü süreklidir ve onun $\widetilde{A_k}: H \to H_-$ adjoint operatörü A_k, $k = 1,2$ operatörünün bir genişlemesidir. Diğer taraftan, $\widetilde{A_k}: H \to H_-$ operatörü bir lineer self-adjoint operatördür.

$L^2(H,(a,+\infty)) \oplus L^2(H,(b,+\infty))$ direkt toplam Hilbert uzayında

$$\widetilde{l_1}(u_1) = iu_1'(t) + \widetilde{A_1}u_1(t),\ \ t \in (a,+\infty),$$

$$\widetilde{l_2}(u_2) = -iu_2'(t) + \widetilde{A_2}u_2(t),\ \ t \in (b,+\infty),\ u = (u_1,u_2)$$

olmak üzere

$$\tilde{l}(u) = (\widetilde{l_1}(u_1), \widetilde{l_2}(u_2)) \tag{2.2.1}$$

şeklindeki diferensiyel ifadesine bakılsın.

$\widetilde{l_1}(\cdot)$ ($\widetilde{l_2}(\cdot)$) diferensiyel ifadesinin$L^2(H,(a,+\infty))$ ($L^2(H,(b,+\infty))$) Hilbert uzayında ürettiği L_{10} (L_{20}) minimal ve L_1 (L_2) maksimal operatörlerin ayrıntılı incelenmesi [22] çalışmasında yapılmıştır ve burada L_{10} (L_{20}) minimal operatörün $L^2(H,(a,+\infty))$ ($L^2(H,(b,+\infty))$) Hilbert uzayında self-adjoint olmadığı bulunmuştur. $L^2(H,(a,+\infty)) \oplus L^2(H,(b,+\infty))$ Hilbert uzayında $L_0 = L_{10} \oplus L_{20}$ ve $L = L_1 \oplus L_2$ şeklinde ifade edilen operatörler sırasıyla (2.2.1) diferensiyel ifadesi tarafından doğrulan (çok noktalı) minimal ve maksimal operatörler olarak tanımlanır. Bu halde L_0 operatörü $L^2(H,(a,+\infty)) \oplus L^2(H,(b,+\infty))$ uzayında simetriktir. Diğer taraftan,

$$m(L_{10}) = 0,\ n(L_{10}) = dimH,$$

$$m(L_{20}) = dimH,\ n(L_{20}) = 0$$

olduğu açıktır.

Sonuç olarak, $m(L_0) = n(L_0) = dimH > 0$. Öyleyse L_0 minimal operatörü $L^2(H,(a,+\infty)) \oplus L^2(H,(b,+\infty))$ Hilbert uzayında self-adjoint genişlemelere sahiptir [1].

İlk olarak aşağıdaki önerme verilsin.

Önerme 2.2.1: L_{n0}, M_{n0} ve K_{n0} operatörleri sırasıyla vektör fonksiyonların $L^2(H_n,(a_n,+\infty))$, $L^2(H_n,(-\infty,b_n))$ ve $L^2(H_n,(c_n,+\infty))$, $n = 1,2,\dots,m$ Hilbert uzayında

$A_n: D(A_n) \subset H_n \to H_n,\ B_n: D(B_n) \subset H_n \to H_n,\ C_n: D(C_n) \subset H_n \to H_n$ lineer self-adjoint operatörler ve $dimH_1 = dimH_2 = \cdots .. = dimH_m \leq \infty$ olmak üzere

$$l_n(u_n) = (-1)^{n-1} i u_n'(t) + A_n u_n(t),\ t \in (a_n, +\infty),\ a_n \in \mathbb{R},$$

$$m_n(u_n) = i u_n'(t) + B_n u_n(t),\ t \in (-\infty, b_n),\ b_n \in \mathbb{R},$$

$$k_n(u_n) = i u_n'(t) + C_n u_n(t),\ t \in (c_n, +\infty),\ c_n \in \mathbb{R}, n = 1,2, \dots ., m$$

formundaki lineer diferensiyel ifadesi tarafından doğrulan minimal operatörler olsun.

Bu durumda:

1. $n = 1,2, \dots ., m$ için L_{n0}, M_{n0} ve K_{n0} minimal operatörleri sırasıyla $L^2(H_n, (a_n, +\infty))$, $L^2(H_n, (-\infty, b_n))$ ve $L^2(H_n, (c_n, +\infty))$, $n = 1,2, \dots, m$ uzaylarında self-adjoint genişlemeye sahip değildir [22].

2. Eğer m bir çift tam sayı ise, $L_0 = \bigoplus_{n=1}^{m} L_{n0}$ çok noktalı minimal operatörü $\bigoplus_{n=1}^{m} L^2(H_n, (a_n, +\infty))$ direkt toplam Hilbert uzayında bir self-adjoint genişlemeye sahiptir;

3. Eğer m bir tek tam sayı ise, $L_0 = \bigoplus_{n=1}^{m} L_{n0}$ çok noktalı minimal operatörü $\bigoplus_{n=1}^{m} L^2(H_n, (a_n, +\infty))$ direkt toplam Hilbert uzayında bir self-adjoint genişlemeye sahip değildir;

4. $L_0 = M_{10} \oplus K_{10} \oplus M_{20} \oplus K_{20} \oplus \dots . \oplus M_{m0} \oplus K_{m0}$ çok noktalı minimal operatörü $\bigoplus_{n=1}^{m} (L^2(H_n, (-\infty, b_n)) \oplus L^2(H_n, (c_n, +\infty)))$ direkt toplam Hilbert uzayında bir self-adjoint genişlemeye sahiptir;

5. $L_0 = M_{10} \oplus K_{10} \oplus M_{20} \oplus K_{20} \oplus \dots . \oplus M_{(m-1)0} \oplus K_{(m-1)0} \oplus M_{m0}$ çok noktalı minimal operatörü $\bigoplus_{n=1}^{m-1} (L^2(H_n, (-\infty, b_n)) \oplus L^2(H_n, (c_n, +\infty)) \oplus L^2(H_m, (-\infty, b_m)))$ direkt toplam Hilbert uzayında self-adjoint operatör değildir;

6. $L_0 = M_{10} \oplus K_{10} \oplus M_{20} \oplus K_{20} \oplus \dots . \oplus M_{(m-1)0} \oplus K_{(m-1)0} \oplus K_{m0}$ çok noktalı minimal operatörü $\bigoplus_{n=1}^{m-1} (L^2(H_n, (-\infty, b_n)) \oplus L^2(H_n, (c_n, +\infty)) \oplus L^2(H_m, (c_m, +\infty)))$ direkt toplam Hilbert uzayında self-adjoint operatör değildir.

Bu bölümde, $L^2(H,(a,+\infty))\oplus L^2(H,(b,+\infty))$ Hilbert uzaylarının direkt toplamında (2.2.1) birinci mertebeden lineer çok noktalı simetrik singüler diferensiyel-operatör ifadesi tarafından üretilen L_0 minimal operatörünün tüm self-adjoint genişlemeleri sınır değerleri dilinde tanımlanacaktır. Unutmayalım ki, sınır değerleri uzayı, lineer simetrik yoğun tanımlı kapalı operatörlerin self-adjoint genişlemelerinin Calkin-Gorbachuk teorisinde önemli bir role sahiptir [4, 5].

Lemma 2.2.2: $\gamma_1: D(L_0^*) \to H,\ \gamma_1(u) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(u_1(a) + u_2(b)),$

$$\gamma_2: D(L_0^*) \to H,\ \gamma_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1(a) - u_2(b)),\ u = (u_1, u_2) \in D(L_0^*)$$

olmak üzere (H, γ_1, γ_2) üçlüsü L_0 minimal operatörün $L^2(H,(a,+\infty))\oplus L^2(H,(b,+\infty))$ direkt toplam Hilbert uzayında bir sınır değerleri uzayıdır.

İspat: Keyfi $u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2) \in D(L)$ için

$$(Lu, v)_{L^2(H,(a,+\infty))\oplus L^2(H,(b,+\infty))} - (u, Lv)_{L^2(H,(a,+\infty))\oplus L^2(H,(b,+\infty))}$$
$$= (\gamma_1(u), \gamma_2(v))_H - (\gamma_2(u), \gamma_1(v))_H$$

eşitliğinin doğruluğu kolayca gösterilebilir. Şimdi keyfi $f, g \in H$ için

$$\gamma_1(u) = \frac{1}{i\sqrt{2}}\big(u_1(a) + u_2(b)\big) = f \ \text{ ve } \ \gamma_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(u_1(a) - u_2(b)\big) = g,$$

yani

$$u_1(a) = \frac{if+g}{\sqrt{2}} \ \text{ ve } \ u_2(b) = \frac{if-g}{\sqrt{2}}.$$

koşullarını sağlayan $u = (u_1, u_2) \in D(L)$ fonksiyonunun varlığı araştırılsın.

Eğer $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ fonksiyonları

$$u_1(t) = e^{a-t/2}\frac{if+g}{\sqrt{2}},\ t > a,$$

$$u_2(t) = e^{b-t/2}\frac{if-g}{\sqrt{2}},\ t > b$$

şeklinde seçilirse, $(u_1, u_2) \in D(L)$ ve $\gamma_1(u) = f,\ \gamma_2(u) = g$ olduğu açıktır.

Daha sonra [4] çalışmasındaki yöntem kullanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılabilir.

Teorem 2.2.3: Eğer $\tilde{L}$, L_0 minimal operatörün $L^2(H,(a,+\infty))\oplus L^2(H,(b,+\infty))$ uzayındaki bir self-adjoint genişlemesi ise, bu genişleme (2.2.1) diferensiyel-operatör ifadesi ve $W: H \to H$ bir üniter operatör olmak üzere

$$u_2(b) = Wu_1(a)$$

sınır şartı tarafından üretilir. Üstelik $W: H \to H$ üniter operatörü $\tilde{L}$ genişlemesi tarafından tek türlü belirlenir, yani $\tilde{L} = L_W$. Bu önermenin tersi de doğrudur.

Not: Benzer düşünce ile, sırasıyla H_k, $k = 1,2, \ldots, n$ ve G_j, $j = 1,2, \ldots., k$ Hilbert uzaylarında $u = (u_1, u_2, \ldots., u_n; v_1, v_2, \ldots., v_k)$,

$$l_p(u_p) = iu_p'(t) + A_p u_p(t),\ t \in (a_p, +\infty),\ p = 1,2, \ldots, n,$$

$$m_j(v_j) = -iu_j'(t) + B_j u_j(t),\ t \in (b_j, +\infty),\ j = 1,2, \ldots, k,$$

$A_p: D(A_p) \subset H_p \to H_p$ ve $B_j: D(B_j) \subset G_j \to G_j$ lineer self-adjoint operatörler olmak üzere

$$l(u) = (l_1(u_1), l_2(u_2), \ldots, l_n(u_n); m_1(v_1), m_2(v_2), \ldots, m_k(v_k))$$

çok noktalı diferensiyel-operatör ifadesi tarafından üretilen minimal operatörün self-adjoint genişlemeleri $\overset{n}{\underset{p=1}{\oplus}} L^2(H_p, (a_p, +\infty)) \oplus \overset{k}{\underset{j=1}{\oplus}} L^2(G_j, (b_j, +\infty))$ direkt toplam Hilbert uzayında ($0 < \sum_{p=1}^{n} dimH_p = \sum_{j=1}^{k} dimG_j$ şartı altında) ifade edilebilir.

Şimdi $L^2(H, (a, +\infty)) \oplus L^2(H, (b, +\infty))$ direkt toplam Hilbert uzayında L_W self-adjoint genişlemelerin spektrum yapısı araştırılacaktır.

İlk olarak aşağıdaki sonuç ispatlansın.

Teorem 2.2.4: L_W self-adjoint genişlemesinin ayrık spektrumu boştur, yani

$$\sigma_p(L_W) = \emptyset.$$

İspat: $W: H \to H$ bir üniter operatör olmak üzere

$$\tilde{l}(u) = \lambda u(t),\ u \in L^2(H, (a, +\infty)) \oplus L^2(H, (b, +\infty))\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$u_2(b) = Wu_1(a)$$

özdeğer problemine bakılsın. Buradan

$$\left(\widetilde{l_1}(u_1), \widetilde{l_2}(u_2)\right) = \lambda(u_1, u_2)$$

$$u_2(b) = WVu_1(a)$$

ve

$$\widetilde{l_1}(u_1) = iu_1'(t) + \widetilde{A_1}u_1(t) = \lambda u_1(t),\ \ t \in (a, +\infty),$$

$$\widetilde{l_2}(u_2) = -iu_2'(t) + \widetilde{A_2}u_2(t) = \lambda u_2(t),\ \ t \in (b, +\infty),$$

$$u_2(b) = Wu_1(a)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bu son sınır değer probleminin genel çözümü

$$u_1(\lambda;t) = e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-a)}f_\lambda,\ f_\lambda \in \mathrm{H},\ t \in (a,+\infty),$$

$$u_2(\lambda;t) = e^{-i(\widetilde{A_2}-\lambda)(t-b)}g_\lambda,\ g_\lambda \in \mathrm{H},\ t \in (b,+\infty).$$

Verilen sınır şartlarından $g_\lambda = Wf_\lambda$ elde edilir. Buradan $u_1(\lambda;t) \in L^2(H,(a,+\infty))$ ve $u_2(\lambda;t) \in L^2(H,(b,+\infty))$ olması için gerek ve yeter şartın $f_\lambda = g_\lambda = 0$ olduğu çıkar. Böylece her W operatörü için $\sigma_p(L_W) = \emptyset$ elde edilir.

Genel teoriden bilindiği gibi [64], Hilbert uzayında bir self-adjoint operatörün kalan spektrumu boştur. O halde şimdi L_0 minimal operatörün L_W self-adjoint genişlemelerinin sürekli spektrumunu incelensin.

Öncelikle aşağıdaki sonuç verilsin.

Teorem 2.2.5: L_W genişlemesinin $\rho(L_W)$ resolvent kümesi için

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{\dot{I}}m\lambda \neq 0\} \subset \rho(L_W)$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: Şimdi $L^2(H,(a,+\infty)) \oplus L^2(H,(b,+\infty))$ Hilbert uzayında uzayında $\tilde{l}(\cdot)$ diferensiyel-operatör ifadesi ve $u_2(b) = Wu_1(a)$ sınır şartı tarafından doğrulan L_W operatörünün resolventi, yani

$$\begin{cases} \tilde{l}(u) = \lambda u(t) + f(t),\ f = (f_1, f_2),\ \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda_i = \mathrm{\dot{I}}m\lambda > 0 \\ u_2(b) = Wu_1(a) \end{cases} \qquad (2.2.2)$$

sınır değer problemine bakılsın.(2.2.2) sınır değer probleminin çözümünün $L^2(H,(a,+\infty)) \oplus L^2(H,(b,+\infty))$ Hilbert uzayında

$$u_1(\lambda;t) = i\int_t^\infty e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-s)}f_1(s)ds\ ,\ t > a,$$

$$u_2(\lambda;t) = e^{i(\lambda-\widetilde{A_2})(t-b)}g_\lambda + i\int_b^t e^{i(\lambda-\widetilde{A_2})(t-s)}f_2(s)ds,\ g_\lambda \in H_2,\ t > b,$$

$$g_\lambda = W\left(i\int_a^\infty e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(a-s)}f_1(s)ds\right)$$

olmak üzere

$$u(\lambda;t) = (u_1(\lambda;t), u_2(\lambda;t))$$

fonksiyonu olduğu gösterilsin. Bunun için, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i > 0$ durumunda

$$u_1(\lambda;t) = i\int_t^\infty e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-s)}f_1(s)ds\ \in L^2(H,(a,+\infty)),$$

$$u_2(\lambda;t) = e^{i(\lambda-\widetilde{A_2})(t-b)}g_\lambda + i\int_b^t e^{i(\lambda-\widetilde{A_2})(t-s)}f_2(s)ds \in L^2(H,(b,+\infty))$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Üstelik bu durumda,

$$\|u_1(\lambda;t)\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))} = \left\|i\int_t^{\infty} e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-s)}f_1(s)ds\right\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))}$$
$$\le \int_a^{\infty}(\int_t^{\infty} e^{\lambda_i(t-s)}\|f_1(s)\|_H ds)^2 dt$$
$$\le \int_a^{\infty}\left(\int_t^{\infty} e^{\lambda_i(t-s)}ds\right)\left(\int_t^{\infty} e^{\lambda_i(t-s)}\|f_1(s)\|^2_H ds\right)dt$$
$$= \frac{1}{\lambda_i}\int_a^{\infty}(\int_t^{\infty} e^{\lambda_i(t-s)}\|f_1(s)\|^2_H ds)\, dt = \frac{1}{\lambda_i}\int_a^{\infty}\left(\int_t^{\infty} e^{\lambda_i(t-s)}\|f_1(s)\|^2_H ds\right)dt$$
$$= \frac{1}{\lambda_i}\int_a^{\infty}(\int_a^{s} e^{\lambda_i(t-s)}dt)\|f_1(s)\|^2_H ds = \frac{1}{\lambda_i^2}\int_b^{\infty}(1-e^{\lambda_i(b-s)})\|f_1(s)\|^2_H ds$$
$$\le \frac{1}{\lambda_i^2}\|f_1\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))} < \infty,$$

$$\|g_\lambda\|^2_H = \left\|W(i\int_a^{\infty} e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(a-s)}f_1(s)ds)\right\|^2_H = \left\|\int_a^{\infty} e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(a-s)}f_1(s)ds\right\|^2_H$$
$$\le (\int_a^{\infty} e^{\lambda_i(a-s)}\|f_1(s)\|_H ds)^2 \le \left(\int_a^{\infty} e^{2\lambda_i(a-s)}ds\right)\left(\int_a^{\infty}\|f_1(s)\|^2_H ds\right)$$
$$= \frac{1}{2\lambda_i}\|f_1\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))} < \infty,$$

$$\left\|i\int_b^{t} e^{i(\lambda-\widetilde{A_2})(t-s)}f_2(s)ds\right\|^2_{L^2(H,(-\infty,a))} \le \int_b^{\infty}(\int_b^{t} e^{-\lambda_i(t-s)}\|f_2(s)\|_H ds)^2 dt$$
$$\le \int_b^{\infty}\left(\int_b^{t} e^{-\lambda_i(t-s)}ds\right)\left(\int_b^{t} e^{-\lambda_i(t-s)}\|f_2(s)\|^2 ds\right)dt$$
$$= \int_b^{\infty}(\frac{1}{\lambda_i}\left(e^{-\lambda_i(t-b)}-1\right))(\int_b^{t} e^{-\lambda_i(t-s)}\|f_2(s)\|^2 ds)dt$$
$$\le \frac{1}{\lambda_i}\int_b^{\infty}\left(\int_b^{t} e^{-\lambda_i(t-s)}\|f_2(s)\|^2 ds\right)dt$$
$$\le \frac{1}{\lambda_i}\int_b^{\infty}\left(\int_s^{b} e^{-\lambda_i(t-s)}\|f_2(s)\|^2 dt\right)ds$$
$$\le \frac{1}{\lambda_i}\int_b^{\infty}(\int_s^{b} e^{-\lambda_i(t-s)}dt)\|f_2(s)\|^2 ds$$
$$\le \frac{1}{\lambda_i^2}\int_b^{\infty}\|f_2(s)\|^2 ds = \frac{1}{\lambda_i^2}\|f_2\|^2_{L^2(H,(b,+\infty))} < \infty.$$

Yukarıdaki hesaplamalardan $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \dot{I}m\lambda > 0$ için $u_1(\lambda;t) \in L^2(H,(a,+\infty))$, $u_2(\lambda;t) \in L^2(H,(b,+\infty))$ olduğu görülür. Diğer taraftan $u(\lambda;t)$'nin (2.2.2) sınır değer probleminin bir çözümü olduğu kolayca görülür.

$\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \dot{I}m\lambda < 0$ olduğu durumlarda, (2.2.2) sınır değer probleminin çözümü

$$\begin{cases} u_1(\lambda;t) = e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-a)}f_\lambda - i\int_a^{t} e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-s)}f_1(s)ds\,, & \mathrm{t} > a \\ u_2(\lambda;t) = -i\int_t^{\infty} e^{i(\lambda-\widetilde{A_2})(t-s)}f_2(s)ds, & t > b \end{cases}$$

ve

$$Wf_\lambda = -i\int_b^\infty e^{i(\lambda-\widetilde{A_2})(b-s)} f_2(s)ds$$

şartını sağlayan $u(\lambda;t) = (u_1(\lambda;t), u_2(\lambda;t))$ formundadır. Ayrıca, eğer

$$\left\| -i\int_b^\infty e^{i\left(\lambda-\widetilde{A_2}(b-s)\right)} f_2(s)ds \right\|_H^2 \le (\int_b^\infty e^{-\lambda_i(b-s)} \|f_2(s)\|_H ds)^2$$

$$\le \left(\int_b^\infty e^{-2\lambda_i(b-s)}ds\right)\left(\int_b^\infty \|f_2(s)\|_H^2 ds\right) \le \frac{1}{2|\lambda_i|}\|f_1\|_{L^2(H,(a,+\infty))}^2 < \infty$$

ise $-i\int_b^\infty e^{i(\lambda-\widetilde{A_2})(b-s)} f_2(s)ds \in H$ elde edilir. İlk olarak $u(\lambda;t) \in L^2(H,(a,+\infty)) \oplus L^2(H,(b,+\infty))$ olduğu gösterilsin. Bu durumda,

$$\left\| e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-a)} f_\lambda \right\|_{L^2(H,(a,+\infty))}^2 \le \int_a^\infty e^{2\lambda_i(t-a)}ds\, \|f_\lambda\|_H^2 = \frac{1}{2|\lambda_i|}\|f_\lambda\|_H^2 < \infty,$$

$$\left\| -i\int_a^t e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-s)} f_1(s)ds \right\|_{L^2(H,(a,+\infty))}^2 = \int_a^\infty \left\| -i\int_a^t e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-s)} f_1(s)ds \right\|_H^2 dt$$

$$\le \int_a^\infty \left(\int_a^t e^{\lambda_i(t-s)}ds\right)\left(\int_a^t e^{\lambda_i(t-s)}\|f_1(s)\|_H^2 ds\right)dt$$

$$= \frac{1}{|\lambda_i|}\int_a^\infty \int_a^t e^{\lambda_i(t-s)}\|f_1(s)\|_H^2 ds\, dt$$

$$= \frac{1}{|\lambda_i|}\int_a^\infty \left(\int_a^t e^{\lambda_i(t-s)}\|f_1(s)\|_H^2 ds\right)dt = \frac{1}{|\lambda_i|}\int_a^\infty \left(\int_s^a e^{\lambda_i(t-s)}\|f_1(s)\|_H^2 dt\right)ds$$

$$= \frac{1}{|\lambda_i|}\int_a^\infty (\int_s^a e^{\lambda_i(t-s)}dt)\|f_1(s)\|_H^2 ds = \frac{1}{|\lambda_i|^2}\int_a^\infty (1-e^{\lambda_i(a-s)})\|f_1(s)\|_H^2 ds$$

$$\le \frac{1}{|\lambda_i|^2}\|f_1\|_{L^2(H,(a,+\infty))}^2 < \infty,$$

ve

$$\left\| -i\int_t^\infty e^{i(\lambda-\widetilde{A_2})(t-s)} f_2(s)ds \right\|_{L^2(H,(b,+\infty))}^2 \le \int_b^\infty (\int_t^\infty e^{-\lambda_i(t-s)}\|f_2(s)\|_H ds)^2 dt$$

$$\le \int_b^\infty (\int_t^\infty e^{-\lambda_i(t-s)}ds)\left(\frac{1}{\lambda_i}\int_t^\infty e^{-\lambda_i(t-s)}\|f_2(s)\|_H^2 ds\right)dt$$

$$\le \frac{1}{|\lambda_i|}\int_b^\infty \left(\int_t^\infty e^{-\lambda_i(t-s)}\|f_2(s)\|_H^2 ds\right)dt = \frac{1}{|\lambda_i|}\int_b^\infty \left(\int_b^s e^{-\lambda_i(t-s)}\|f_2(s)\|_H^2 dt\right)ds$$

$$= \frac{1}{|\lambda_i|}\int_b^\infty (\int_b^s e^{-\lambda_i(t-s)}dt)\|f_2(s)\|_H^2 ds = \frac{1}{|\lambda_i|^2}\|f_2\|_{L^2(H,(b,+\infty))}^2 < \infty\,.$$

Yukarıdaki hesaplamalardan $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \dot{I}m\lambda < 0$ durumunda $u_1(\lambda;t) \in L^2(H,(a,+\infty))$, $u_2(\lambda;t) \in L^2(H,(b,+\infty))$, yani $u(\lambda;t) \in L^2(H,(a,+\infty)) \oplus L^2(H,(b,+\infty))$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, $u(\lambda;\cdot)$ fonksiyonunun (2.2.2) sınır değer problemini sağladığı kontrol edilebilir.

Şimdi L_W self-adjoint genişlemesinin $\sigma_c(L_W)$ sürekli spektrumu araştırılsın.

Teorem 2.2.6: Her L_W self-adjoint genişlemesinin sürekli spektrumu tüm reel eksendir, yani

$$\sigma_c(L_W) = \mathbb{R}.$$

İspat: $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \dot{I}m\lambda > 0$ için $R_\lambda(L_W)$ resolvent operatörünün normu $f = (f_1, f_2) \in L^2(H,(a,+\infty)) \oplus L^2(H,(b,+\infty))$ ve $g_\lambda = W(i\int_a^\infty e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(a-s)} f_1(s)ds)$ olmak üzere

$$\|R_\lambda(L_W)f(t)\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))\oplus L^2(H,(b,+\infty))} = \left\| i\int_t^\infty e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-s)} f_1(s)ds \right\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))}$$

$$+ \left\| e^{i(\lambda-\widetilde{A_1})(t-b)} g_\lambda + i\int_b^t e^{i(\lambda-\widetilde{A_1})(t-s)} f_2(s)ds \right\|^2_{L^2(H,(b,+\infty))}$$

formundadır.

Buradan keyfi $f = (f_1, f_2) \in L^2(H,(a,+\infty)) \oplus L^2(H,(b,+\infty))$için

$$\|R_\lambda(L_W)f(t)\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))\oplus L^2(H,(b,+\infty))} \geq \left\| i\int_t^\infty e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-s)} f_1(s)ds \right\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))}$$

olduğu doğrudur. $f^*(\lambda;t) = (e^{i(\widetilde{A_1}-\bar{\lambda})t}f, 0)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \dot{I}m\lambda > 0$, $f \in H$ formundaki $f^*(\lambda;t)$ vektör fonksiyonları $L^2(H,(a,+\infty)) \oplus L^2(H,(b,+\infty))$ uzayına aittir. Üstelik

$$\|f^*(\lambda;t)\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))\oplus L^2(H,(b,+\infty)} = \int_a^\infty \left\| e^{i(\widetilde{A_1}-\bar{\lambda})t} f \right\|^2_H dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-2\lambda_i t} dt \, \|f\|^2_H = \frac{1}{2\lambda_i} e^{-2\lambda_i b} < \infty.$$

Ayrıca $f^*(\lambda;\cdot)$ fonksiyonları için

$$\|R_\lambda(L_W)f^*(\lambda;t)\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))\oplus L^2(H,(b,+\infty)}$$

$$\geq \left\| i\int_t^\infty e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-s)} e^{i(\widetilde{A_1}-\bar{\lambda})s} f ds \right\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))}$$

$$= \left\| \int_t^\infty e^{-i\lambda t} e^{-2\lambda_i s} e^{i\widetilde{A_1}t} f ds \right\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))}$$

$$= \left\| e^{-i\lambda t} e^{i\widetilde{A_1}t} \int_t^\infty e^{-2\lambda_i s} f ds \right\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))}$$

$$= \left\| e^{-i\lambda t} \int_t^\infty e^{-2\lambda_i s} ds \right\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))} \|f\|^2_H$$

$$= \frac{1}{4\lambda_i^2} \int_a^\infty e^{-2\lambda_i t} dt \, \|f\|^2_H = \frac{1}{8\lambda_i^3} e^{-2\lambda_i a} \|f\|^2_H .$$

Buradan

$$\|R_\lambda(L_W)f^*(\lambda;\cdot)\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))\oplus L^2(H,(b,+\infty)} \geq \frac{e^{-2\lambda_i a}}{2\sqrt{2}\lambda_i\sqrt{\lambda_i}} \|f\|_H$$

$$= \frac{1}{2\lambda_i} \|f^*(\lambda;\cdot)\|_{L^2(H,(a,+\infty))\oplus L^2(H,(b,+\infty)},$$

yani $\lambda_i = \dot{I}m\lambda > 0$ ve $f \neq 0$ için

$$\frac{\|R_\lambda(L_W)f^*(\lambda;\cdot)\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))\oplus L^2(H,(b,+\infty)}}{\|f^*(\lambda;\cdot)\|_{L^2(H,(a,+\infty))\oplus L^2(H,(b,+\infty)}} \geq \frac{1}{2\lambda_i}$$

sağlanır. Bu sonuncu ve operatörün normunun tanımından

$$\|R_\lambda(L_W)\| \geq \frac{\|R_\lambda(L_W)f^*(\lambda;\cdot)\|^2_{L^2(H,(a,+\infty))\oplus L^2(H,(b,+\infty)}}{\|f^*(\lambda;\cdot)\|_{L^2(H,(a,+\infty))\oplus L^2(H,(b,+\infty)}},\ f \neq 0$$

olduğu açıktır. Sonuç olarak $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \dot{I}m\lambda > 0$ için

$$\|R_\lambda(L_W)\| \geq \frac{1}{2\lambda_i}.$$

Bu son ilişki iddianın doğruluğunu gösterir.

Örnek 2.2.7: $L^2((0,+\infty) \times (0,1))\oplus L^2((0,+\infty) \times (0,1))$ uzayında

$$i\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(t,x),\ t > 0,\ x \in [0,1],$$

$$i\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} = g(t,x),\ t > 0,\ x \in [0,1],$$

$$u(0,x) = e^{i\varphi} v(0,x),\ \varphi \in [0,2\pi),$$

$$u'_x(t,0) = u'_x(t,1) = 0,\ v'_x(t,0) = v'_x(t,1) = 0,\ t > 0$$

sınır değer probleminin son teoreme göre spektrumu ancak sürekli spektrum olup tüm $\mathbb{R}$'ye eşittir.

Uyarı: $a = b$ olduğu durumda $l(\cdot)$ diferensiyel-operatör ifadesi $L^2(H\oplus H,(a,+\infty))$ uzayında $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$l(u) = iJu'(t) + Au(t)$$

formunda yazılabilir.

2.3. N-1 Durumunda Normal Genişlemelerin Gösterimi ve Spektrum Yapısı

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olsun. Vektör fonksiyonların $L^2 = L^2(H,(-\infty,a))\oplus L^2(H,(b,+\infty))$ Hilbert uzayında, $A_k: H \to H$, $k = 1,2$ lineer sınırlı self-adjoint operatörler ve $A_1 \leq 0$, $A_2 \geq 0$ olmak üzere,

$$l(u) = \big(l_1(u_1), l_2(u_2)\big) = \left(\frac{du_1}{dt} + A_1u_1, \frac{du_2}{dt} + A_2u_2\right),\ u = (u_1,u_2) \qquad (2.3.1)$$

şeklindeki lineer çok noktalı diferensiyel ifade alınsın. Bu durumda $l(\cdot)$'nin formal adjoint diferensiyel ifadesi

$$l^+(v) = \big(l_1^+(v_1), l_2^+(v_2)\big) = (-\frac{dv_1}{dt} + A_1 v_1, -\frac{dv_2}{dt} + A_2 v_2), \ v = (v_1, v_2) \qquad (2.3.2)$$

formunda olur.

$L^2(H, (-\infty, a))$ $(L^2(H, (b, +\infty)))$ uzayında (2.3.1) ((2.3.2)) diferensiyel ifadesi tarafından doğrulan minimal operatör L_{k0} (L_{k0}^+), $k = 1,2$ şeklinde ve (2.3.1) ((2.3.2)) diferensiyel ifadesi tarafından doğrulan maksimal operatör de $L_k = (L_{k0}^+)^*$ $(L_k^+ = L_{k0}^*)$, $k = 1,2$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda L^2 uzayında $L_0 = L_{10} \oplus L_{20}$ ve $L = L_1 \oplus L_2 (L_0^+ = L_{10}^+ \oplus L_{20}^+$ ve $L^+ = L_1^+ \oplus L_2^+)$ operatörleri sırasıyla (2.3.1) ve (2.3.2) diferensiyel ifadesi tarafından doğrulan minimal ve maksimal operatörler olarak adlandırılır. Buradan $L_{k0} \subset L_k$, $L_{k0}^+ \subset L_k^+$, $k = 1,2$ ve $L_0 \subset L$, $L_0^+ \subset L^+$ olduğu açıktır.

Şimdi $L_2(H, (-\infty, a)) \oplus L_2(H, (b, +\infty))$ direkt toplamında

$$m(u) = \big(m(u_1), m(u_2)\big) = (-i\frac{du_1}{dt}, -i\frac{du_2}{dt})$$

formundaki birinci dereceden lineer singüler diferensiyel ifadenin doğurduğu M_0 minimal operatörün sınır değerleri uzayı yapılandırılsın. Unutmayalım ki, M_0 minimal operatörü $L_2(H, (-\infty, a)) \oplus L_2(H, (b, +\infty))$ uzayında defekt sayıları $(dimH, dimH)$ olan kapalı simetrik bir operatördür.

Teorem 2.3.1: $\gamma_1 : D(M_0^*) \to H, \ \gamma_1(u) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(u_2(b) + u_1(a)),$

$$\gamma_2 : D(M_0^*) \to H, \ \gamma_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_2(b) - u_1(a)), \ u = (u_1, u_2) \in D(M_0^*)$$

olmak üzere (H, γ_1, γ_2) üçlüsü M_0 minimal operatörün L^2 uzayında bir sınır değerleri uzayıdır.

İspat: $D(M_0^*)$ içinde alınan keyfi iki $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$ elemanları için

$$(M_0^* u, v)_{L^2} - (u, M_0^* v)_{L^2} = (\gamma_1(u), \gamma_2(v))_H - (\gamma_2(u), \gamma_1(v))_H$$

eşitliğinin sağlandığı kolayca gösterilebilir. Şimdi $f, g \in H$ elemanları için

$$\gamma_1(u) = \frac{1}{i\sqrt{2}}\big(u_2(b) + u_1(a)\big) = f \ \text{ ve } \ \gamma_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(u_2(b) - u_1(a)\big) = g,$$

yani

$$u_1(a) = \frac{if - g}{\sqrt{2}} \text{ve} u_2(b) = \frac{if + g}{\sqrt{2}}$$

eşitliğini sağlayan $u = (u_1, u_2) \in D(M_0^*)$ fonksiyonunun varlığı araştırılsın.

Eğer $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ fonksiyonlarını

$$u_1(t) = e^{t-a/2}\frac{if - g}{\sqrt{2}}, \ t < a,$$

$$u_2(t) = e^{b-t/2}\frac{if + g}{\sqrt{2}}, \ t > b$$

şeklinde seçersek, $(u_1, u_2) \in D(M_0^*)$ ve $\gamma_1(u) = f, \gamma_2(u) = g$ olduğu bulunur.

Şimdi aşağıdaki teorem ispatlansın.

Teorem 2.3.2: Eğer L_{10}, L_{20} minimal operatörü formal normal ise

$$D(L_{10}) \subset W_2^1(H, (-\infty, a)),\ A_1 D(L_{10}) \subset L^2(H, (-\infty, a)),$$
$$D(L_{20}) \subset W_2^1(H, (b, +\infty)),\ A_2 D(L_{20}) \subset L^2(H, (b, +\infty))$$

bağıntıları doğrudur.

İspat: Gerçekten, her $u_1 \in D(L_{10}) \subset D(L_{10}^*)$ için $u_1' + A_1 u_1 \in L^2(H, (-\infty, a))$ ve $u_1' - A_1 u_1 \in L^2(H, (-\infty, a))$ olduğu $u_1' \in L^2(H, (-\infty, a))$ ve $A_1 u_1 \in L^2(H, (-\infty, a))$, yani $D(L_{10}) \subset W_2^1(H, (-\infty, a))$ ve $A_1 D(L_{10}) \subset L^2(H, (-\infty, a))$ elde edilir. Benzer yolla teoremin ikinci kısmı da ispat edilebilir.

Teorem 2.3.3:$(-A_1)^{1/2} W_2^1(H, (-\infty, a)) \subset W_2^1(H, (-\infty, a))$ ve $A_2^{1/2} W_2^1(H, (b, +\infty)) \subset W_2^1(H, (b, +\infty))$ olsun. L_0 minimal operatörün L^2 Hilbert uzayında her $\tilde{L}$ normal genişlemesi (2.3.1) diferensiyel ifadesi ve $W: H \to H$ bir üniter operatör olmak üzere

$$u_2(b) = W u_1(a),\ u_1(a) \in ker(-A_1)^{1/2},\ u_2(b) \in ker A_2^{1/2} \qquad (2.3.3)$$

sınır şartı tarafından doğrulur. Üstelik $W: H \to H$ üniter operatörü $\tilde{L}$ genişlemesi tarafından tek şekilde belirlenir, yani $\tilde{L} = L_W$ ve bu önermenin tersi de doğrudur.

İspat: $\tilde{L}$, L_0 minimal operatörünün normal bir genişlemesi olsun. Bu halde $Im\tilde{L}$ operatörü ImL_0 minimal operatörünün L^2 Hilbert uzayında self-adjoint genişlemesidir. Sonuç olarak, $Im\tilde{L}$ operatörü $-i\frac{d}{dt}$diferensiyel ifadesi ve $W: H \to H$ üniter bir operatör ve tek türlü olmak üzere

$$(W - E)\gamma_1(u) + i(W + E)\gamma_2(u) = 0,\ u = (u_1, u_2) \in D(L)$$

sınır şartı tarafından doğrulur [22]. Basit hesaplamalarla her $u = (u_1, u_2) \in D(\tilde{L})$ için

$u_2(b) = W u_1(a)$, yani $\tilde{L} = L_W$

elde edilir.

Diğer taraftan, $\tilde{L}$ genişlemesi normal ise, her $u = (u_1, u_2) \in D(\tilde{L})$ için $\|\tilde{L}u\| = \|\tilde{L}^* u\|$ eşitliğinden,

$$(u', A_1 u)_{L^2(H,(-\infty,a))} + (A_1 u, u')_{L^2(H,(-\infty,a))}$$
$$+(u', A_2 u)_{L^2(H,(b,+\infty))} + (A_2 u, u')_{L^2(H,(b,+\infty))} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\left\|(-A_1)^{1/2}u(a)\right\|^2 + \left\|A_2^{1/2}u(b)\right\|^2 = 0$$

dır. Bundan dolayı $u(a) \in ker(-A_1)^{1/2}$, $u(b) \in kerA_2^{1/2}$ elde edilir.

Tersine, L_W operatörü $l(\cdot)$ lineer ifadesi ve (2.3.3) sınır şartı tarafından doğrulan L_0 minimal operatörünün bir genişlemesi olsun. Buradan $l^+(\cdot)$ diferensiyel ifadesi ve

$$v_1(a) = W^* v_2(b),\ v = (v_1, v_2) \in D(L^+)$$

sınır şartı tarafından doğrulur. Bu durumda L_W operatörünün L_0'ın bir genişlemesi ve normal olduğu kolayca ispatlanabilir.

Sonuç 2.3.4: Eğer A_1 ve A_2 operatörlerinden en az biri H'da 1-1 bir dönüşüm ise L_0 minimal operatörü L^2 uzayında maksimal formal normaldir.

Sonuç 2.3.5: Eğer L_0 minimal operatörünün en az bir normal genişlemesi var ise,

$$dimker(-A_1)^{1/2} = dimkerA_2^{1/2} > 0$$

elde edilir.

Şimdi L_W normal genişlemesinin L^2 uzayında spektrum yapısı incelenecektir. Ayrıca burada $A_1 = A_1^* \leq 0$, $A_2 = A_2^* \geq 0$ ve $0 \in \sigma_p((-A_1)^{1/2}) \cap \sigma_p(A_2^{1/2})$ olduğu kabul edilecektir.

İlk olarak aşağıdaki teorem ispatlansın.

Teorem 2.3.6: L^2 uzayında L_0 minimal operatörün her L_W normal genişlemesinin ayrık spektrumu boştur, yani

$$\sigma_p(L_W) = \emptyset.$$

İspat: L_W normal genişlemesi için

$$L_W u = \lambda u, \lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \mathbb{C}, u \in D(L_W)$$

problemi ele alınsın. Buradan

$$u_1' + A_1 u_1 = \lambda u_1, u_1 \in L^2(H, (-\infty, a)),$$

$$u_2' + A_2 u_2 = \lambda u_2, u_2 \in L^2(H, (b, +\infty)), \lambda \in \mathbb{C},$$

$$u_2(b) = W u_1(a), u_1(a) \in ker(-A_1)^{1/2}, u_2(b) \in kerA_2^{1/2}$$

elde edilir. Son diferensiyel denklemlerin genel çözümleri

$$u_1(\lambda;t) = e^{-(A_1-\lambda)(t-a)}f_\lambda,\ t < a,\ f_\lambda \in H_{-1/2}((-A_1)),$$

$$u_2(\lambda;t) = e^{-(A_2-\lambda)(t-b)}g_\lambda,\ t > b,\ g_\lambda \in H_{-1/2}(A_2)$$

ve

$$g_\lambda = Wf_\lambda,\ f_\lambda = u_1(\lambda;a),\ g_\lambda = u_2(\lambda;b)$$

formundadır. $0 \in \sigma_p((-A_1)^{1/2}) \cap \sigma_p(A_2^{1/2})$ ve $(-A_1)^{1/2}f_\lambda = 0, A_2^{1/2}g_\lambda = 0$ olduğundan,

$$u_1(\lambda;t) = e^{\lambda(t-a)}f_\lambda,\ t < a,\ f_\lambda \in H_{-1/2}((-A_1)),$$

$$u_2(\lambda;t) = e^{\lambda(t-b)}g_\lambda,\ t > b,\ g_\lambda \in H_{-1/2}(A_2)$$

ve

$$g_\lambda = Wf_\lambda,\ f_\lambda = u_1(\lambda;a),\ g_\lambda = u_2(\lambda;b)$$

elde edilir. Buradan $u_1(\lambda;\cdot) \in L^2(H,(-\infty,a))$ ve $u_2(\lambda;\cdot) \in L^2(H,(b,+\infty))$ olması için gerek ve yeter şartın sırasıyla $\lambda_r \geq 0$ ve $\lambda_r \leq 0$ olması gerektiği bulunur. Böylece $\lambda_r = 0$ elde edilir.

Sonuç olarak,

$$u_1(\lambda;t) = e^{i\lambda_i(t-a)}f_\lambda,\ t < a,$$

$$u_2(\lambda;t) = e^{i\lambda_i(t-b)}g_\lambda,\ t > b,\ g_\lambda = Wf_\lambda.$$

Bu durumda $u_1(\lambda;\cdot) \in L^2(H,(-\infty,a))$ ve $u_2(\lambda;\cdot) \in L^2(H,(b,+\infty))$ olması için gerek ve yeter şartın $f_\lambda = 0$, $g_\lambda = 0$ olduğu açıktır. Bu ise $u_1 = 0$ ve $u_2 = 0$ demektir. Dolayısıyla $\sigma_p(L_W) = \emptyset$.

Hilbert uzayında normal operatörlerin kalan spektrumu boş olduğundan [64], L_0 minimal operatörünün L_W normal genişlemesinin sürekli spektrumunu araştırılsın.

Teorem 2.3.7: L_0 minimal operatörün L^2 uzayında her L_W normal genişlemesi için

$$i\mathbb{R} \subset \sigma_c(L_W) \subset \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2) + i\mathbb{R}$$

bağıntıları doğrudur.

İspat: Bu durumda her $u = (u_1, u_2) \in D(L_W)$ için

$$\begin{aligned} 2Re(L_W u, u)_{L^2} &= (L_W u, u)_{L^2} + (u, L_W u)_{L^2} \\ &= (u_1' + A_1 u_1, u_1)_{L^2(H,(-\infty,a))} + (u_2' + A_2 u_2, u_2)_{L^2(H,(b,+\infty))} \\ &\quad + (u_1, u_1' + A_1 u_1)_{L^2(H,(-\infty,a))} + (u_2, u_2' + A_2 u_2)_{L^2(H,(b,+\infty))} \\ &= (u_1, u_1)'_{L^2(H,(-\infty,a))} + (u_2, u_2)'_{L^2(H,(b,+\infty))} \\ &\quad + 2(A_1 u_1, u_1)_{L^2(H,(-\infty,a))} + 2(A_2 u_2, u_2)_{L^2(H,(b,+\infty))} \end{aligned}$$

$$=$$

$$\|u_1(a)\|_H^2 - \|u_2(b)\|_H^2 + 2(A_1u_1, u_1)_{L^2(H,(-\infty,a))} + 2(A_2u_2, u_2)_{L^2(H,(b,+\infty))}$$

$$=$$

$$\|u_1(a)\|_H^2 - \|Wu_1(a)\|_H^2 + 2(A_1u_1, u_1)_{L^2(H,(-\infty,a))} + 2(A_2u_2, u_2)_{L^2(H,(b,\infty))}$$

$$= 2(A_1u_1, u_1)_{L^2(H,(-\infty,a))} + 2(A_2u_2, u_2)_{L^2(H,(b,+\infty))}$$

olduğundan her $u \in D(L_W)$ için

$$Re(L_W u, u)_{L^2} = (A_1u_1, u_1)_{L^2(H,(-\infty,a))} + (A_2u_2, u_2)_{L^2(H,(b,+\infty))} \qquad (2.3.4)$$

bağıntısı doğrudur. Buradan ve $A_1 \leq 0$ olduğundan her $u \in D(L_W)$ için

$$Re(L_W u, u)_{L^2} \leq (A_2u_2, u_2)_{L^2(H,(b,+\infty))} \leq \|A_2\|\|u_2\|^2_{L_2(H,(b,+\infty))}$$

$$\leq \|A_2\|\left(\|u_1\|^2_{L^2(H,(-\infty,a))} + \|u_2\|^2_{L^2(H,(b,+\infty))}\right) = \|A_2\|\|u\|_{L^2},$$

yani her $u \in D(L_W)$ için

$$ReL_W \leq \|A_2\|.$$

Benzer şekilde (2.3.4) bağıntısından ve $A_2 \geq 0$ olduğundan

$$Re(L_W u, u)_{L^2} \geq (A_1u_1, u_1)_{L^2(H,(-\infty,a))} \geq -\|A_1\|\|u_1\|^2_{L^2(H,(-\infty,a))}$$

$$\geq -\|A_1\|\left(\|u_1\|^2_{L^2(H,(-\infty,a))} + \|u_2\|^2_{L^2(H,(b,+\infty))}\right) = -\|A_1\|\|u\|_{L^2},$$

yani

$$ReL_W \geq -\|A_1\|.$$

Kısacası böylece

$$-\|A_1\| \leq ReL_W \leq \|A_2\|.$$

Buradan

$$\sigma(L_W) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: -\|A_1\| \leq Re\lambda \leq \|A_2\|\}$$

sonucuna ulaşılır.

Öte yandan normal operatörlerin spektrumları hakkındaki bir önemli sonuca göre [2],

$$\sigma(L_W) \subset \sigma(ReL_W) + i\sigma(ImL_W).$$

Teorem 2.3.6'dan $\sigma_p(L_W) = \emptyset$ olduğundan bir $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \sigma_c(L_W)$ için

$$\lambda_r \in \sigma(ReL_W) \text{ ve } \lambda_i \in \sigma(ImL_W)$$

elde edilir.

Şimdi $\sigma(ReL_W) \subset \mathbb{R}$ ve $\sigma(ImL_W) \subset \mathbb{R}$ kümeleri araştırılsın. Tanıma göre $ReL_W = \frac{\overline{L_W + L_W^*}}{2}$ olup $u = (u_1, u_2) \in D(L_W) = D(L_W^*)$ için

$$\left(\frac{L_W+L_W^*}{2}\right)(u)=\begin{cases}A_1u_1(t), & -\infty<t<a,\\ A_2u_2(t), & b<t<+\infty\end{cases}$$

$$u_2(b)=Wu_1(a).$$

Şimdi bir $S: L^2 \to L^2$,

$$Su=\begin{cases}A_1u_1, & u_1\in L^2\big(H,(-\infty,a)\big),\\ A_2u_2, & u_2\in L^2(H,(b,+\infty))\end{cases}$$

$u=(u_1,u_2)\in L^2$ tanımlansın. S operatörü L^2'den L^2'ye lineer ve sınırlı bir operatördür. $D(L_W)\subset L^2$ manifoldu L^2 uzayında yoğun $D(L_W)\subset D(ReL_W)$ ve $A_1,A_2\in L(H)$ olduğundan

$$ReL_W=\overline{\frac{L_W+L_W^*}{2}}=S$$

bağıntısı doğrudur. Bununla beraber

$$S=\left(A_1\otimes E_{L^2(H,(b,+\infty))}\right)\oplus\left(E_{L^2(H,(-\infty,a))}\otimes A_2\right) \tag{2.3.5}$$

bağıntısının doğruluğu da elde edilir.

Öte yandan operatörlerin tensör çarpımları teorisinden [67]

$$\sigma\left(A_1\otimes E_{L^2(H,(b,+\infty))}\right)=\sigma(A_1),$$

$$\sigma\left(E_{L^2(H,(-\infty,a))}\otimes A_2\right)=\sigma(A_2).$$

Bu sonuncu, (2.3.5) bağıntısı ve [71] çalışmasındaki bir sonuçtan

$$\sigma(ReL_W)=\sigma(A_1)\cup\sigma(A_2)$$

bulunur. Ayrıca

$$\sigma(\dot{I}mL_W)\subset\mathbb{R}$$

olduğundan

$$\sigma(L_W)\subset\sigma(A_1)\cup\sigma(A_2)+i\mathbb{R}$$

bağıntısının doğruluğu açıktır.

Şimdi $i\mathbb{R}\subset\sigma_c(L_W)$ bağıntısının doğru olduğu araştırılsın.

Ayrıca, $\lambda=i\lambda_i\in\mathbb{C}$ için

$$u_1'+A_1u_1=i\lambda_iu_1+f_1,\ u_1,f_1\in L^2(H,(-\infty,a)),$$

$$u_2'+A_2u_2=i\lambda_iu_2+f_2,\ u_2,f_2\in L^2(H,(b,+\infty)),\ \lambda_i\in\mathbb{R},$$

$$u_2(b)=Wu_1(a),\ u_1(a)\in ker(-A_1)^{1/2},\ u_2(b)\in kerA_2^{1/2}$$

sınır değer probleminin genel çözümünün

$$u_1(i\lambda_i;t)=e^{-(A_1-i\lambda_i)(t-a)}f_{i\lambda_i}-\int_t^a e^{-(A_1-i\lambda_i)(t-s)}f_1(s)ds,\ t<a,$$

$$u_2(i\lambda_i;t)=e^{-(A_2-i\lambda_i)(t-b)}g_{i\lambda_i}+\int_b^t e^{-(A_2-i\lambda_i)(t-s)}f_2(s)ds,\ t>b$$

formunda olduğu açıktır. Bu durumdan, her $g_{i\lambda_i}, f_{i\lambda_i} \in H$ için

$$e^{-(A_1 - i\lambda_i)(t-a)} f_{i\lambda_i} \in L^2(H, (-\infty, a)),$$

$$e^{-(A_2 - i\lambda_i)(t-b)} g_{i\lambda_i} \in L^2(H, (b, +\infty))$$

ifadeleri doğrudur. Eğer $f_1(t) = e^{i\lambda_i t} e^{-(t-a)} f^*$, $f^* \in ker(-A_1)^{1/2}$, $t < a$ olarak seçilirse

$$\int_t^a e^{-(A_1 - i\lambda_i)(t-s)} f_1(s) ds = e^{-i\lambda_i t} \int_t^a e^{-(s-a)} f^* ds = e^{-i\lambda_i t}(e^{-(t-a)} - 1) f^*, \ t < a$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{-\infty}^a \left\| e^{-i\lambda_i t}(e^{-(t-a)} - 1) f^* \right\|^2 dt = \int_{-\infty}^a (e^{-2(t-a)} - 2e^{-(t-a)} + 1) dt \|f^*\|^2 = \infty.$$

Sonuç olarak, $f_1(t) \in L^2(H, (-\infty, a))$ için $u_1(i\lambda_i; t) \in L^2(H, (-\infty, a))$'dır. Bu ise her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $L - \lambda$ operatörünün L^2'de 1-1 olup örten bir dönüşüm olmadığı anlamına gelir. Diğer taraftan, $\sigma_r(L_W)$ boş olduğundan $\sigma(L_W) = \sigma_c(L_W) \supset i\mathbb{R}$ elde edilir.

Örnek 2.3.8: $L^2((-\infty, -1) \times (0,1)) \oplus L^2((1, +\infty) \times (0,1))$ uzayında

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - sgn(t) x u(t,x) = f(t,x), \ |t| > 1, \ x \in [0,1],$$

$$u(1,x) = e^{i\varphi} u(-1,x), \varphi \in [0,2\pi),$$

sınır değer problemine bakılsın. Bu halde, eğer $A = A_1 = A_2$, $A: L^2(0,1) \to L^2(0,1)$, $Av(t) = xv(t)$, $v \in L^2(0,1)$ olarak alınırsa, bu problem

$$L_\varphi : \begin{cases} u_1'(t) - x u_1(t) = f_1(t), \ \ t < -1, \\ u_2'(t) + x u_2(t) = f_2(t), \ \ t > 1, \\ u(1) = W_\varphi u(-1), \ \ W_\varphi = e^{i\varphi} E, \ \ \varphi \in [0,2\pi), \ \ E = E_{L^2(0,1)} \end{cases}$$

şeklindeki sınır değer problemine dönüşür.

Öyleyse, sonuncu teoreme göre her $\varphi \in [0,2\pi)$ için

$$i\mathbb{R} \subset \sigma(L_\varphi) \subset \sigma(A) + i\mathbb{R}$$

formunda olacaktır. Bu halde $\sigma(A) = [0,1]$ olduğundan

$$i\mathbb{R} \subset \sigma(L_\varphi) \subset [0,1] + i\mathbb{R}.$$

2.4. S-3 Durumunda Self-adjoint Genişlemelerin Gösterimi ve Spektrum Yapısı

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı, $H \neq \{0\}$ ve $a_1, a_2, b_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2 < b_2 < a_3$ olsun. $L^2(H, (-\infty, a_1)) \oplus L^2(H, (a_2, b_2)) \oplus L^2(H, (a_3, +\infty))$ vektör fonksiyonların Hilbert uzayında $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $A_k: D(A_k) \subset H \to H$, $k = 1,2,3$ H'da lineer self-adjoint operatörler olmak üzere

$$l(u) = \left(l_1(u_1), l_2(u_2), l_3(u_3)\right) = (iu_1' + A_1u_1,\ iu_2' + A_2u_2,\ iu_3' + A_3u_3)$$

lineer singüler çok noktalı diferensiyel ifadesi ele alınsın. $D(A_k) \subset H$ lineer manifoldunda

$$(f,g)_{k,+} \coloneqq (A_k f A_k, g)_H + (f,g)_H,\ f,g \in D(A_k),\ k = 1,2,3$$

şeklinde iç çarpım tanımlanırsa, $k = 1,2,3$ için $D(A_k)$, H Hilbert uzayına göre $\|\cdot\|_{k,+}$ pozitif normu altında bir Hilbert uzayıdır ve $H_{k,+}$ ifadesiyle gösterilir. Ayrıca $H_{k,-}$ ile de negatif normlu bir Hilbert uzayı ifade edilmektedir. Açıkça görüldüğü gibi $A_k\colon H_{k,+} \to H$ operatörü süreklidir ve onun adjointi $\widetilde{A_k}\colon H \to H_{k,-}$ operatörü A_k operatörünün bir genişlemesidir. Diğer taraftan, $\widetilde{A_k}\colon D(\widetilde{A_k}) = H \subset H_{k,-1} \to H_{k,-1}$ bir lineer self-adjoint operatördür.

Şimdi $L^2(H,(-\infty,a_1)) \oplus L^2(H,(a_2,b_2)) \oplus L^2(H,(a_3,+\infty))$ direkt toplam Hilbert uzayında

$u = (u_1,u_2,u_3)$ ve $\widetilde{l_1}(u_1) = iu_1' + \widetilde{A_1}u_1$, $\widetilde{l_2}(u_2) = iu_2' + \widetilde{A_2}u_2$,, $\widetilde{l_3}(u_3) = iu_3' + \widetilde{A_3}u_3$ olmak üzere

$$\tilde{l}(u) = (\widetilde{l_1}(u_1), \widetilde{l_2}(u_2), \widetilde{l_3}(u_3)) \tag{2.4.1}$$

şeklindeki diferensiyel operatör ifadesine bakılsın.

$L^2(H,(-\infty,a_1))$ ($L^2(H,(a_2,b_2))$ ve $L^2(H,(a_3,+\infty))$) uzayında $\widetilde{l_1}$ ($\widetilde{l_2}$ ve $\widetilde{l_3}$) diferensiyel ifadesi tarafından üretilen L_{10} (L_{20} ve L_{30}) minimal ve L_1 (L_2 ve L_3) maksimal operatörler [22] çalışmasında detaylı araştırılmıştır.

$L^2 = L^2(H,(-\infty,a_1)) \oplus L^2(H,(a_2,b_2)) \oplus L^2(H,(a_3,+\infty))$ uzayında $L_0 = L_{10} \oplus L_{20} \oplus L_{30}$ ve $L = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ operatörleri sırasıyla (2.4.1) diferensiyel ifadesi tarafından doğrulan (çok noktalı) minimal ve maksimal operatörler olarak tanımlanır. Buradan L^2 uzayında L_0 operatörü simetriktir ve $L_0^* = L$'dir. Diğer taraftan, $m(L_{10}) = 0$, $n(L_{10}) = dimH$, $m(L_{20}) = dimH$, $n(L_{20}) = dimH$, $m(L_{30}) = dimH$, $n(L_{30}) = 0$ olduğu açıktır.

Sonuç olarak, $m(L_0) = n(L_0) = 2dimH > 0$. Buradan, L_0 minimal operatörü self-adjoint genişlemeye sahiptir [1]. Gerçekten, örneğin $\tilde{l}(u)$ diferensiyel ifadesi $u(a_1) = u(a_3)$, $u(a_2) = u(b_2)$ sınır şartlarıyla L^2 uzayında bir self-adjoint operatör üretir.

Burada ilk olarak L^2 uzayında L_0 minimal operatörün tüm self-adjoint genişlemelerinin sınır değerleri dilinde ifadesi verilecektir.

Unutmayalım ki, sınır değerleri uzayı lineer simetrik diferensiyel operatörlerin self-adjoint genişlemelerinin teorisinde önemli bir role sahiptir [4, 5].

İlk olarak aşağıdaki lemma ifade edilsin.

Lemma 2.4.1: $\gamma_1 : D((L_{10} \oplus 0 \oplus L_{30})^*) \to H,\ \gamma_1(u) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(u_1(a_1) + u_3(a_3)),$

$$\gamma_2 : D((L_{10} \oplus 0 \oplus L_{30})^*) \to H,\ \gamma_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1(a_1) - u_3(a_3))$$

olmak üzere (H, γ_1, γ_2) üçlüsü $L^2(H, (-\infty, a_1)) \oplus 0 \oplus L^2(H, (a_3, +\infty))$ direkt toplam Hilbert uzayı üzerinde $L_{10} \oplus 0 \oplus L_{30}$ minimal operatörün bir sınır değerleri uzayıdır.

İspat: Keyfi $u = (u_1, u_2, u_3),\ v = (v_1, v_2, v_3) \in D((L_{10} \oplus 0 \oplus L_{30})^*)$ elemanları için

$$(Lu, v)_{L^2(H,(-\infty,a_1)) \oplus 0 \oplus L^2(H,(a_3,+\infty))} - (u, Lv)_{L^2(H,(-\infty,a_1)) \oplus 0 \oplus L^2(H,(a_3,+\infty))}$$
$$= (\gamma_1(u), \gamma_2(v))_H - (\gamma_2(u), \gamma_1(v))_H$$

eşitliğinin doğruluğu kolayca gösterilebilir. Şimdi keyfi $f, g \in H$ için

$$\gamma_1(u) = \frac{1}{i\sqrt{2}}\big(u_1(a_1) + u_3(a_3)\big) = f \text{ve} \gamma_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(u_1(a_1) - u_3(a_3)\big) = g,$$

yani

$$u_1(a_1) = \frac{if+g}{\sqrt{2}} \text{ ve } u_3(a_3) = \frac{if-g}{\sqrt{2}}$$

bağıntılarını sağlayan bir $u = (u_1, u_2, u_3) \in D((L_{10} \oplus 0 \oplus L_{30})^*)$ fonksiyonunun varlığı araştırılsın.

Eğer $u_1(t)$ ve $u_3(t)$ fonksiyonlarını

$$u_1(t) = e^{t-a_1/2} \frac{if+g}{\sqrt{2}}, \quad t < a_1,$$
$$u_2(t) = 0 \qquad , \ a_2 < t < b_2,$$
$$u_3(t) = e^{a_3-t/2} \frac{if-g}{\sqrt{2}} \ , \ t > a_3$$

formunda seçilirse, $u = (u_1, u_2, u_3) \in D((L_{10} \oplus 0 \oplus L_{30})^*)$ ve $\gamma_1(u) = f,\ \gamma_2(u) = g$ olduğu açıktır.

Ayrıca, [22] çalışmasındaki metod kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Lemma 2.4.2: $\Gamma_1 : D((0 \oplus L_{20} \oplus 0)^*) \to H,\ \Gamma_1(u) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(u_2(a_2) + u_2(b_2)),$

$$\Gamma_2 : D((0 \oplus L_{20} \oplus 0)^*) \to H,\ \Gamma_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_2(a_2) - u_2(b_2))$$

olmak üzere (H, Γ_1, Γ_2) üçlüsü $0 \oplus L^2(H, (a_2, b_2)) \oplus 0$ Hilbert uzayında $0 \oplus L_0 \oplus 0$ minimal operatörünün bir sınır değerleri uzayıdır.

Aşağıdaki sonuç kolayca ispatlanabilir.

Lemma 2.4.3: $L^2 = L^2(H,(-\infty,a_1))\oplus L^2(H,(a_2,b_2))\oplus L^2(H,(a_3,+\infty))$ uzayında L_0 operatörünün her self-adjoint genişlemesi $L^2(H,(-\infty,a_1))\oplus 0\oplus L^2(H,(a_3,+\infty))$ uzayında $L_{10}\oplus 0\oplus L_{30}$ minimal operatörünün ve $0\oplus L^2(H,(a_2,b_2))\oplus 0$ uzayında $0\oplus L_0\oplus 0$ minimal operatörünün self-adjoint genişlemelerinin bir direkt toplamıdır.

Son olarak, [4] çalışmasındaki method kullanılarak aşağıdaki sonuç ispatlanabilir.

Teorem 2.4.4: L_0 minimal operatörün her $\tilde{L}$ self-adjoint genişlemesi L^2 uzayında ise, (2.4.1) diferensiyel ifadesi ve $W_1, W_2\colon H \to H$ üniter operatörler olmak üzere

$$u_3(a_3) = W_1 u_1(a_1),\;\; u_2(b_2) = W_2 u_2(a_2)$$

sınır şartları tarafından üretilir. Üstelik $W_1, W_2\colon H \to H$ üniter operatörleri $\tilde{L}$ genişlemesi tarafından tek türlü belirlenir, yani $\tilde{L} = L_{W_1W_2}$ ve bu önermenin tersi de doğrudur.

Şimdi burada, L^2 uzayında $L_{W_1W_2}$ self-adjoint genişlemesinin spektrum yapısı incelenecektir. Bu durumda, Lemma 2.4.3'den L_{W_1} ve L_{W_2} sırasıyla $L^2(1,0,1) = L^2(H,(-\infty,a_1))\oplus 0\oplus L^2(H,(a_3,+\infty))$ ve $L^2(0,1,0) = 0\oplus L^2(H,(a_2,b_2))\oplus 0$ Hilbert uzaylarında $L_0(1,0,1) = L_{10}\oplus 0\oplus L_{30}$ ve $L_0(0,1,0) = 0\oplus L_0\oplus 0$ minimal operatörlerinin self-adjoint genişlemeleridir.

İlk olarak aşağıdaki sonuç ispatlansın.

Teorem 2.4.5: $L^2(1,0,1)$ Hilbert uzayında keyfi L_{W_1} self-adjoint genişlemesinin ayrık spektrumu boştur, yani

$$\sigma_p\big(L_{W_1}\big) = \phi.$$

İspat: $L^2(1,0,1)$ Hilbert uzayında $L_0(1,0,1)$ minimal operatörünün L_{W_1} self-adjoint genişlemesinin spektrumunun incelenmesi için

$$L_{W_1}u = \lambda u,\;\; u = (u_1, 0, u_3) \in L^2(1,0,1)$$

problemine, yani

$$\widetilde{l_1}(u_1) = iu_1' + \widetilde{A_1}u_1 = \lambda u_1,\;\; u_1 \in L^2(H,(-\infty,a_1)),$$

$$\widetilde{l_3}(u_3) = iu_3' + \widetilde{A_3}u_3 = \lambda u_3,\;\; u_3 \in L^2(H,(a_3,+\infty)),\;\; \lambda \in \mathbb{R},$$

$$u_3(a_3) = W_1 u_1(a_1)$$

problemine bakılsın. Bu problemin genel çözümü

$$u_1(\lambda;t) = e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-a_1)} f_1^*,\ t < a_1,$$

$$u_3(\lambda;t) = e^{i(\widetilde{A_3}-\lambda)(t-a_3)} f_3^*,\ t > a_3,$$

$$f_3^* = W_1 f_1^*,\ f_1^*, f_2^* \in H$$

olup $f_1^* \neq 0,$ $f_3^* \neq 0$ fonksiyonları için $u_1(\lambda;\cdot) \notin L^2(H,(-\infty,a_1))$,$u_3(\lambda;\cdot) \notin L^2(H,(a_3,+\infty))$ olduğu açıktır. Böylece her W_1 üniter operatörü için $\sigma_p(L_{W_1}) = \emptyset$ olduğu elde edilir.

Hilbert uzayında self-adjoint operatörün kalan spektrumu boş olduğundan [64], $L^2(1{,}0{,}1)$ Hilbert uzayında $L_0(1{,}0{,}1)$ minimal operatörün L_{W_1} self-adjoint genişlemesinin sürekli spektrumu incelensin.

Teorem 2.4.6: $L^2(1{,}0{,}1)$ Hilbert uzayında $L_0(1{,}0{,}1)$ minimal operatörün L_{W_1} self-adjoint genişlemesinin sürekli spektrumu tüm reel eksendir, yani

$$\sigma_c(L_{W_1}) = \mathbb{R}.$$

İspat: İlk olarak, $L^2(1{,}0{,}1)$ Hilbert uzayında $(\widetilde{l_1}, 0, \widetilde{l_3})$ diferensiyel ifadesi ve $u_3(a_3) = W_1 u_1(a_1)$ sınır şartı tarafından doğrulan L_{W_1} genişlemesinin rezolvent operatörü, yani

$$\widetilde{l_1}(u_1) = iu_1' + \widetilde{A_1} u_1 = \lambda u_1 + f_1,\ u_1, f_1 \in L^2(H,(-\infty,a_1)),$$

$$\widetilde{l_3}(u_3) = iu_3' + \widetilde{A_3} u_3 = \lambda u_3 + f_3,\ u_3, f_3 \in L^2(H,(a_3,+\infty)),\ \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda_i = \text{İ}m\lambda > 0$$

$$u_3(a_3) = W_1 u_1(a_1). \tag{2.4.2}$$

araştırılsın. Şimdi

$$u_1(\lambda;t) = e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-a_1)} f_1^* + i\int_t^{a_1} e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-s)} f_1(s)ds,\ t < a_1,$$

$$u_3(\lambda;t) = i\int_t^{\infty} e^{i(\widetilde{A_3}-\lambda)(t-s)} f_3(s)ds,\ t > a_3,$$

$$f_1^* = W^*(i\int_{a_3}^{\infty} e^{i(\widetilde{A_3}-\lambda)(t-s)(b-s)} f_3(s)ds)$$

olmak üzere $u(\lambda;t) = (u_1(\lambda;t), 0, u_3(\lambda;t))$ fonksiyonunun $L^2(1{,}0{,}1)$ Hilbert uzayında (2.4.1) sınır değer probleminin bir çözümü olduğu gösterilsin. Bunun için $\lambda_i > 0$ olduğu durumda $u_1(\lambda;t) \in L^2(H,(-\infty,a_1))$ ve $u_3(\lambda;t) \in L^2(H,(a_3,+\infty))$ olduğunu göstermek yeterlidir. Buradan

$$\|f_1^*\|_H^2 = \left\| \int_{a_3}^{\infty} e^{i(\widetilde{A_3}-\lambda)(a_3-s)} f(s)ds \right\|_H^2 \le (\int_{a_3}^{\infty} e^{\lambda_i(a_3-s)} \|f(s)\|_H ds)^2$$

$$\le \left(\int_{a_3}^{\infty} e^{2\lambda_i(a_3-s)} ds\right)\left(\int_{a_3}^{\infty} \|f(s)\|_H^2 ds\right) = \frac{1}{2\lambda_i} \|f\|_{L^2(H,(a_3,+\infty))}^2 < \infty,$$

$$\left\|e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-a_1)}f_1^*\right\|^2_{L^2(H,(-\infty,a_1))} = \left\|e^{-i\lambda(t-a_1)}f_1^*\right\|^2_{L^2(H,(-\infty,a_1))}$$
$$= \int_{-\infty}^{a_1}\left\|e^{-i\lambda(t-a_1)}f_1^*\right\|^2_H dt = \int_{-\infty}^{a_1} e^{2\lambda_i(t-a_1)}dt\,\|f_1^*\|_H^2 = \frac{1}{2\lambda_i}\|f_1^*\|_H^2 < \infty$$

ve

$$\left\|i\int_t^{a_1} e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-s)}f_1(s)ds\right\|^2_{L^2(H,(-\infty,a_1))} \le \int_{-\infty}^{a_1}(\int_t^{a_1} e^{\lambda_i(t-s)}\|f_1(s)\|_H ds)^2 dt$$
$$\le \int_{-\infty}^{a_1}\left(\int_t^{a_1} e^{\lambda_i(t-s)}ds\right)(\int_t^{a_1} e^{\lambda_i(t-s)}\|f_1(s)\|_H^2 ds)dt$$
$$= \frac{1}{\lambda_i}\int_{-\infty}^{a_1}\int_t^{a_1} e^{\lambda_i(t-s)}\|f_1(s)\|_H^2 dsdt = \frac{1}{\lambda_i}\int_{-\infty}^{a_1}(\int_{-\infty}^{s} e^{\lambda_i(t-s)}\|f_1(s)\|_H^2 dt)ds$$
$$= \frac{1}{\lambda_i}\int_{-\infty}^{a_1}(\int_{-\infty}^{s} e^{\lambda_i(t-s)}dt)\,\|f_1(s)\|_H^2 ds = \frac{1}{\lambda_i^2}\int_{-\infty}^{a_1}\|f_1(s)\|_H^2 ds$$
$$= \frac{1}{\lambda_i^2}\|f_1\|^2_{L^2(H,(-\infty,a_1))} < \infty.$$

Üstelik

$$\left\|i\int_t^{\infty} e^{i(\widetilde{A_3}-\lambda)(t-s)}f_3(s)ds\right\|^2_{L^2(H,(a_3,+\infty))} \le \int_{a_3}^{\infty}(\int_t^{\infty} e^{\lambda_i(t-s)}\|f_3(s)\|_H ds)^2 dt$$
$$\le \int_{a_3}^{\infty}\left(\int_t^{\infty} e^{\lambda_i(t-s)}ds\right)\left(\int_t^{\infty} e^{\lambda_i(t-s)}\|f_3(s)\|^2 ds\right)dt$$
$$= \frac{1}{\lambda_i}\int_{a_3}^{\infty}\left(\int_t^{\infty} e^{\lambda_i(t-s)}\|f_3(s)\|^2 ds\right)dt = \frac{1}{\lambda_i}\int_{a_3}^{\infty}\left(\int_{a_3}^{s} e^{\lambda_i(t-s)}\|f_3(s)\|^2 dt\right)ds$$
$$= \frac{1}{\lambda_i}\int_{a_3}^{\infty}\left(\int_{a_3}^{s} e^{\lambda_i(t-s)}dt\right)\|f_3(s)\|^2 ds = \frac{1}{\lambda_i^2}\int_{a_3}^{\infty}(1-e^{\lambda_i(a_3-s)})\|f_3(s)\|^2 ds$$
$$\le \frac{1}{\lambda_i^2}\|f_3\|^2_{L^2(H,(a_3,+\infty))} < \infty.$$

Yukarıdaki hesaplamalardan, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \dot{\mathrm{I}}m\lambda > 0$ için $u_1(\lambda;t) \in L^2(H,(-\infty,a_1))$ ve $u_3(\lambda;t) \in L^2(H,(a_3,+\infty))$ olduğu bulunur. Diğer taraftan, $u(\lambda;t) = (u_1(\lambda;t), 0, u_3(\lambda;t))$ fonksiyonunun (2.4.1) sınır değer probleminin bir çözümü olduğu kolayca görülebilir.

$\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \dot{\mathrm{I}}m\lambda < 0$ iken, $W_1 : H \to H$ üniter operatör olmak üzere

$L_{W_1}u = \lambda u + f,\ u = (u_1, 0, u_3),\ f = (f_1, 0, f_3) \in L^2(1,0,1)$

$u_3(a_3) = W_1 u_1(a_1)$

sınır değer probleminin çözümü

$u_1(\lambda;t) = -i\int_{-\infty}^{t} e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-s)}f_1(s)ds,\ t < a_1,$

$u_3(\lambda;t) = e^{i(\widetilde{A_3}-\lambda)(t-a_3)}f_3^* - i\int_{a_3}^{t} e^{i(\widetilde{A_3}-\lambda)(t-s)}f_3(s)ds,\ t > a_3,$

$f_3^* = W(-i\int_{-\infty}^{a_1} e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(a_1-s)}f_1(s)ds)$

olmak üzere $u(\lambda;t) = (u_1(\lambda;t), 0, u_3(\lambda;t))$ formundadır.

İlk olarak $u(\lambda;t) \in L^2(1,0,1)$ olduğu gösterilsin. Bu durumda,

$$\|u_1(\lambda;t)\|^2_{L^2(H,(-\infty,a_1))} = \int_{-\infty}^{a_1} \left\| -i\int_{-\infty}^{t} e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-s)} f_1(s)ds \right\|_H^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{a_1} \left(\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_i(t-s)} ds \right) (\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_i(t-s)} \|f_1(s)\|_H^2 ds) dt$$

$$= \frac{1}{|\lambda_i|} \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_i(t-s)} \|f_1(s)\|_H^2 ds dt = \frac{1}{|\lambda_i|} \int_{-\infty}^{a_1} (\int_{s}^{a_1} e^{\lambda_i(t-s)} \|f_1(s)\|_H^2 dt) ds$$

$$= \frac{1}{|\lambda_i|} \int_{-\infty}^{a_1} e^{\lambda_i(t-s)} dt \, \|f_1(s)\|_H^2 ds = \frac{1}{|\lambda_i|^2} \int_{-\infty}^{a_1} (1 - e^{\lambda_i(a_1-s)}) \|f_1(s)\|_H^2 ds$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda_i|^2} \|f_1\|^2_{L^2(H,(-\infty,a_1))} < \infty,$$

$$\|f_3^*\|_H^2 = \left\| \int_{-\infty}^{a_1} e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(a_1-s)} f_1(s)ds \right\|_H^2 \leq (\int_{-\infty}^{a_1} e^{\lambda_i(a_1-s)} \|f_1(s)\|_H ds)^2$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{a_1} e^{2\lambda_i(a_1-s)} ds \right) \left(\int_{-\infty}^{a_1} \|f_1(s)\|_H^2 ds \right) = \frac{1}{2|\lambda_i|} \|f_1\|^2_{L^2(H,(-\infty,a_1))} < \infty,$$

$$\left\| e^{i(\widetilde{A_3}-\lambda)(t-a_3)} f_3^* \right\|^2_{L^2(H,(a_3,+\infty))} \leq \int_{a_3}^{\infty} e^{2\lambda_i(t-a_3)} dt \, \|f_3^*\|_H^2$$

$$= \frac{1}{2|\lambda_i|} \|f_3^*\|_H^2 \leq \frac{1}{4|\lambda_i|^2} \|f\|^2_{L^2(H,(a_3,+\infty))} < \infty$$

ve

$$\left\| \int_{a_3}^{t} e^{i(\widetilde{A_3}-\lambda)(t-s)} f_3(s)ds \right\|^2_{L^2(H,(a_3,+\infty))} \leq \int_{a_3}^{\infty} (\int_{a_3}^{t} e^{\lambda_i(t-s)} \|f_3(s)\|_H ds)^2 dt$$

$$\leq \int_{a_3}^{\infty} \left(\int_{a_3}^{t} e^{\lambda_i(t-s)} ds \right) (\int_{a_3}^{t} e^{\lambda_i(t-s)} \|f_3(s)\|_H^2 ds) dt$$

$$= \int_{a_3}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_i} (1 - e^{\lambda_i(t-a_3)}) \right) (\int_{a_3}^{t} e^{\lambda_i(t-s)} \|f_3(s)\|_H^2 ds) dt$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda_i|} \int_{a_3}^{\infty} \left(\int_{a_3}^{t} e^{\lambda_i(t-a_3)} \|f_3(s)\|_H^2 ds \right) dt$$

$$= \frac{1}{|\lambda_i|} \int_{a_3}^{\infty} \left(\int_{s}^{\infty} e^{\lambda_i(t-s)} \|f_3(s)\|_H^2 dt \right) ds = \frac{1}{|\lambda_i|} \int_{a_3}^{\infty} \left(\int_{s}^{a_3} e^{\lambda_i(t-s)} dt \right) \|f_3(s)\|_H^2 ds$$

$$= \frac{1}{|\lambda_i|^2} \|f_3\|^2_{L^2(H,(a_3,+\infty))} < \infty.$$

Yukarıdaki hesaplamalardan $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \dot{I}m\lambda < 0$ durumunda $u_1(\lambda;t) \in L^2(H,(-\infty,a_1))$ ve $u_3(\lambda;t) \in L^2(H,(a_3,+\infty))$, yani $u(\lambda;\cdot) = (u_1(\lambda;\cdot), 0, u_3(\lambda;\cdot)) \in L^2(1,0,1)$ olduğu görülür. Diğer taraftan, $u(\lambda;\cdot)$ fonksiyonunun $L_{W_1}u = \lambda u + f$ ve $u_3(a_3) = W_1 u_1(a_1)$ denklemini sağladığı gösterilebilir.

Buradan,

$$\rho(L_{W_1}) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \dot{I}m\lambda \neq 0\}$$

sonucu çıkar. Şimdi L_{W_1} genişlemesinin $\sigma_c(L_{W_1})$ sürekli spektrumu incelensin. $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \dot{I}m\lambda > 0$ için $f = (f_1, 0, f_3) \in L^2(1,0,1)$ olmak üzere $R_\lambda(L_{W_1})$ rezolvent operatörü-nün normu

$$\left\|R_\lambda(L_{W_1})f(t)\right\|_{L^2}^2 = \left\|e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-a_1)}f_1^* + i\int_t^{a_1} e^{i(\widetilde{A_1}-\lambda)(t-s)}f_1(s)ds\right\|_{L^2(H,(-\infty,a_1))}^2$$

$$+\left\|i\int_t^{\infty} e^{i(\widetilde{A_3}-\lambda)(t-s)}f_3(s)\,ds\right\|_{L^2(H,(a_3,+\infty))}^2$$

formundadır. Her $f = (f_1, 0, f_3) \in L^2(1,0,1)$ için

$$\left\|R_\lambda(L_{W_1})f(t)\right\|_{L^2}^2 \geq \left\|i\int_t^{\infty} e^{i(\widetilde{A_3}-\lambda)(t-s)}f_3(s)\,ds\right\|_{L^2(H,(a_3,+\infty))}^2$$

eşitsizliği doğrudur.

$f^*(\lambda;t) = (0,0,e^{i(\widetilde{A_3}-\bar{\lambda})t}f_3)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \dot{I}m\lambda > 0$, $f_3 \in H$ formundaki $f^*(\lambda;t)$ vektör fonksiyonları $L^2(1,0,1)$ uzayına aittir. Üstelik

$$\|f^*(\lambda;t)\|_{L^2}^2 = \int_{a_3}^{\infty}\left\|e^{i(\widetilde{A_3}-\bar{\lambda})t}f_3\right\|_H^2 dt = \int_{a_3}^{\infty} e^{-2\lambda_i t}dt\,\|f_3\|_H^2$$

$$= \frac{1}{2\lambda_i}e^{-2\lambda_i a_3}\|f_3\|_H^2 < \infty.$$

$f^*(\lambda;\cdot)$ fonksiyonları için

$$\left\|R_\lambda(L_{W_1})f^*(\lambda;t)\right\|_{L^2(H,(a_3,+\infty))}^2 \geq \left\|i\int_t^{\infty} e^{i(\widetilde{A_3}-\lambda)(t-s)}e^{i(\widetilde{A_3}-\bar{\lambda})s}f_3 ds\right\|_{L^2(H,(a_3,+\infty))}^2$$

$$= \left\|\int_t^{\infty} e^{-i\lambda t}e^{-2\lambda_i s}e^{i\widetilde{A_3}t}f_3 ds\right\|_{L^2(H,(a_3,+\infty))}^2$$

$$= \left\|e^{-i\lambda t}e^{i\widetilde{A_3}t}\int_t^{\infty} e^{-2\lambda_i s}f_3 ds\right\|_{L^2(H,(a_3,+\infty))}^2$$

$$= \left\|e^{-i\lambda t}\int_t^{\infty} e^{-2\lambda_i s}ds\right\|_{L^2(H,(a_3,+\infty))}^2\|f_3\|_H^2$$

$$= \frac{1}{4\lambda_i^2}\int_{a_3}^{\infty} e^{-2\lambda_i t}dt\,\|f_3\|_H^2 = \frac{1}{8\lambda_i^3}e^{-2\lambda_i a_3}\|f_3\|_H^2.$$

Buradan

$$\left\|R_\lambda(L_{W_1})f^*(\lambda;\cdot)\right\|_{L^2} \geq \frac{e^{-\lambda_i a_3}}{2\sqrt{2}\lambda_i\sqrt{\lambda_i}}\|f\|_H = \frac{1}{2\lambda_i}\|f^*(\lambda;\cdot)\|_{L^2},$$

yani $\lambda_i = \dot{I}m\lambda > 0$ ve $f \neq 0$ için

$$\frac{\left\|R_\lambda(L_{W_1})f^*(\lambda;\cdot)\right\|_{L^2}}{\|f^*(\lambda;\cdot)\|_{L^2}} \geq \frac{1}{2\lambda_i}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\left\|R_\lambda(L_{W_1})\right\| \geq \frac{\left\|R_\lambda(L_{W_1})f^*(\lambda;\cdot)\right\|_{L^2}}{\|f^*(\lambda;\cdot)\|_{L^2}},\ f_3 \neq 0$$

olduğu açıktır. Sonuç olarak,

$\lambda \in \mathbb{C}, \lambda_i = \text{İ}m\lambda > 0$ için $\|R_\lambda(L_{W_1})\| \geq \frac{1}{2\lambda_i}$

elde edilir.

$L_0(0,1,0)$ minimal operatörünün self-adjoint genişlemesinin spektrumu incelensin.

Teorem 2.4.7: $L^2(0,1,0)$ Hilbert uzayında $L_0(0,1,0)$ minimal operatörün L_{W_2} self-adjoint genişlemesinin spektrumu

$$\sigma(L_{W_2}) = \{\lambda \in \mathbb{R}: \lambda = \frac{2n\pi}{b_2-a_2} + \frac{1}{b_2-a_2} arg\mu,\ n \in \mathbb{Z},$$

$$\mu \in \sigma\big(W_2^* e^{i\widetilde{A_2}(b_2-a_2)}\big), 0 \leq arg\mu < 2\pi\}$$

formundadır.

İspat: L_{W_2} self-adjoint genişlemesinin

$$\widetilde{l_2}(u_2) = iu_2' + \widetilde{A_2}u_2 = \lambda u_2 + f_2,\ u_2, f_2 \in L^2(H,(a_2,b_2))$$

$$u_2(b_2) = W_2 u_2(a_2),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

spektrum probleminin genel çözümü

$$u_2(t) = e^{i(\widetilde{A_2}-\lambda)(t-a_2)} f_2^* + \int_{a_2}^{t} e^{i(\widetilde{A_2}-\lambda)(t-s)} f_2(s)ds,\ a_2 < t < b_2,$$

$$\big(e^{i\lambda(b_2-a_2)} - W_2^* e^{i\widetilde{A_2}(b_2-a_2)}\big) f_2^* = W_2^* e^{i\lambda(b_2-a_2)} \int_{a_2}^{b_2} e^{i(\widetilde{A_2}-\lambda)(b_2-s)} f_2(s)ds$$

formundadır. Buradan $\lambda \in \sigma(L_{W_2})$ olması için gerek ve yeter şartın $\mu \in \sigma(W_2^* e^{i\widetilde{A_2}(b_2-a_2)})$ olmak üzere λ'nın $e^{i\lambda(b_2-a_2)} = \mu$ denkleminin bir çözümü olması gerektiği çıkar. Böylece

$$\lambda = \frac{2n\pi}{b_2-a_2} + \frac{1}{b_2-a_2} arg\mu,\ n \in \mathbb{Z},\ \mu \in \sigma(W_2^* e^{i\widetilde{A_2}(b_2-a_2)})$$

olduğu elde edilir.

Teorem 2.4.8: $L_{W_1W_2} = L_{W_1} \oplus L_{W_2}$ self-adjoint genişlemesinin $\sigma(L_{W_1W_2})$ spektrumu tüm reel eksendir, yani

$$\sigma\big(L_{W_1W_2}\big) = \mathbb{R}.$$

İspat: Eğer S_1 ve S_2 sırasıyla H_1 ve H_2 Hilbert uzaylarında lineer kapalı operatörler ise, [71] çalışmasındaki

$$\sigma_p(S_1 \oplus S_2) = \sigma_p(S_1) \cup \sigma_p(S_2),$$

$$\sigma_c(S_1 \oplus S_2) = (\sigma_p(S_1) \cup \sigma_p(S_2))^c \cap (\sigma_r(S_1) \cup \sigma_r(S_2))^c \cap (\sigma_c(S_1) \cup \sigma_c(S_2))$$

eşitliklerinin doğruluğundan teoremin ispatı açıktır.

Örnek 2.4.9: Sonuncu teoreme göre

$L^2((-\infty,-1)\times(0,1))\oplus L^2((-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\times(0,1))\oplus L^2((1,+\infty)\times(0,1))$ uzayında

$$i\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+sgnt\left(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)=f(t,x),\ |t|>1,\ x\in[0,1],$$

$$i\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=f(t,x),\ |t|<\frac{1}{2},\ x\in[0,1],$$

$$u\left(\frac{1}{2},x\right)=e^{i\psi}u(-\frac{1}{2},x),\ \psi\in[0,2\pi),$$

$$u(1,x)=e^{i\varphi}u(-1,x),\ \varphi\in[0,2\pi),$$

$$u_x(t,0)=u_x(t,1)=0,\ |t|>1,\ |t|<\frac{1}{2}$$

sınır değer probleminin spektrumu tüm reel eksendir.

2.5. N-2 Durumunda Normal Genişlemelerin Gösterimi ve Spektrum Yapısı

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı, $H\neq\{0\}$ ve $a_1,a_2,b_2,a_3\in\mathbb{R}$ ve $a_1<a_2<b_2<a_3$ olsun. Vektör fonksiyonların

$$L^2(1,1,1)=L^2(H,(-\infty,a_1))\oplus L^2(H,(a_2,b_2))\oplus L^2(H,(a_3,+\infty))$$

Hilbert uzayında $u=(u_1,u_2,u_3)$ ve $A_k\colon H\to H$, $k=1,2,3$ lineer sınırlı self-adjoint operatörler ve $A_1=A_1^*\leq 0$, $A_2=A_2^*\geq 0$, $A_3=A_3^*\geq 0$ olmak üzere

$$l(u)=\big(l_1(u_1),l_2(u_2),l_3(u_3)\big)=(u_1'+A_1u_1,\ u_2'+A_2u_2,\ u_3'+A_3u_3) \qquad (2.5.1)$$

lineer çok noktalı diferensiyel operatör ifadesine bakılsın.

$L^2(1,1,1)$ uzayında (2.5.1) diferensiyel ifadesi tarafından doğrulan (çok noktalı) minimal ve (çok noktalı) maksimal operatörler sırasıyla $L_0(1,1,1)=L_{10}\oplus L_{20}\oplus L_{30}$ ve $L(1,1,1)=L_1\oplus L_2\oplus L_3$ ile gösterilsin.

Burada, $L^2(1,1,1)$ uzayında $L_0(1,1,1)$ minimal operatörün tüm normal genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilecek ve spektrum yapısı araştırılacaktır.

Unutmayalım ki, sınır değerleri uzayı lineer simetrik diferensiyel operatörlerin genişlemesi teorisinde önemli bir role sahiptir [4].

Şimdi sırasıyla $L^2(1,0,1)$ ve $L^2(0,1,0)$ Hilbert uzayları üzerinde

$$\big(m_1(u_1),0,m_3(u_3)\big)=(-i\frac{du_1}{dt},0,-i\frac{du_3}{dt}),$$

$$(0,m_2(u_2),0)=(0,-i\frac{du_2}{dt},0)$$

formundaki lineer singüler diferensiyel ifadeler tarafından doğrulan $M_0(1,0,1)$ ve $M_0(0,1,0)$ minimal operatörlerinin sınır değerleri uzayı yapılandırılsın. $M_0(1,0,1)$ ve

$M_0(0,1,0)$ minimal operatörleri $L^2(1,0,1)$ ve $L^2(0,1,0)$ uzaylarında defekt sayıları $(dimH, dimH)$ olan kapalı simetrik operatörlerdir.

Lemma 2.5.1: $\gamma_1 : D(M_0^*) \to H,\ \gamma_1(u) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(u_3(a_3) + u_1(a_1)),$

$$\gamma_2 : D(M_0^*) \to H,\ \gamma_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_3(a_3) - u_1(a_1)),\ u = (u_1, 0, u_3) \in D(M_0^*)$$

olmak üzere (H, γ_1, γ_2) üçlüsü $L^2(1,0,1)$ uzayında $M_0(1,0,1)$ minimal operatörün bir sınır değerleri uzayıdır.

İspat: Her $u = (u_1, 0, u_2),\ v = (v_1, 0, v_2) \in D(M_0^*(1,0,1))$ için

$$(M_0^*(1,0,1)u, v)_{L^2(1,0,1)} - (u, M_0^*(1,0,1)v)_{L^2(1,0,1)} = (\gamma_1(u), \gamma_2(v))_H - (\gamma_2(u), \gamma_1(v))_H$$

eşitliğinin doğruluğu kolayca gösterilebilir. Şimdi herhangi $f, g \in H$ elemanları için

$$\gamma_1(u) = \frac{1}{i\sqrt{2}}\big(u_3(a_3) + u_1(a_1)\big) = f \text{ ve } \gamma_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(u_3(a_3) - u_1(a_1)\big) = g$$

yani;

$$u_1(a_1) = \frac{if - g}{\sqrt{2}} \text{ ve } u_3(a_3) = \frac{if + g}{\sqrt{2}}$$

eşitliğini sağlayan bir $u = (u_1, 0, u_2) \in D(M_0^*(1,0,1))$ fonksiyonunun var olduğu incelensin.

Eğer $u_1(t), u_2(t)$ fonksiyonlarını

$$u_1(t) = e^{(t-a_1)/2}\frac{if - g}{\sqrt{2}},\ t < a_1,$$

$$u_3(t) = e^{(a_3-t)/2}\frac{if + g}{\sqrt{2}},\ t > a_3$$

formunda seçersek, $(u_1, u_2) \in D(M_0^*(1,0,1))$ ve $\gamma_1 = f, \gamma_2 = g$ olduğu açıktır.

Lemma 2.5.2: $\Gamma_1 : D(M_0^*(0,1,0)) \to H,\ \Gamma_1(u) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(u_2(b_2) + u_2(a_2)),$

$$\Gamma_2 : D(M_0^*(0,1,0)) \to H,\ \gamma_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_2(b_2) - u_2(a_2)),$$

$$u = (0, u_2, 0) \in D(M_0^*(0,1,0))$$

olmak üzere (H, Γ_1, Γ_2) üçlüsü $L^2(0,1,0)$ uzayında $M_0(0,1,0)$ minimal operatörün bir sınır değerleri uzayıdır.

Teorem 2.5.3: Eğer L_{10}, L_{20} ve L_{30} minimal operatörleri formal normal ise

$$D(L_{10}) \subset W_2^1(H, (-\infty, a_1)),\ A_1 D(L_{10}) \subset L^2(H, (-\infty, a_1)),$$

$$D(L_{20}) \subset W_2^1(H, (a_2, b_2)),\ A_2 D(L_{20}) \subset L^2(H, (a_2, b_2)),$$

$$D(L_{30}) \subset W_2^1(H,(a_3,+\infty)),\ A_3D(L_{30}) \subset L^2(H,(a_3,+\infty))$$

ifadeleri doğrudur.

İspat: Her $u_1 \in D(L_{10}) \subset D(L_{10}^*)$ için

$$u_1' + A_1u_1 \in L^2(H,(-\infty,a_1)) \text{ ve } u_1' - A_1u_1 \in L^2(H,(-\infty,a_1))$$

ifadesi doğru olup buradan

$$u_1' \in L^2(H,(-\infty,a_1)) \text{ ve } A_1u_1 \in L^2(H,(-\infty,a_1)),$$

yani

$$D(L_{10}) \subset W_2^1(H,(-\infty,a_1)) \text{ ve } A_1D(L_{10}) \subset L^2(H,(-\infty,a_1))$$

elde edilir. Teoremin ikinci ve üçüncü ifadeleri de benzer şekilde ispatlanabilir.

Aşağıdaki sonuç kolayca gösterilebilir.

Lemma 2.5.4: $L^2(1,1,1)$ uzayında $L_0(1,1,1)$ operatörünün her normal genişlemesi $L^2(1,0,1) = L^2(H,(-\infty,a_1))\oplus 0 \oplus L^2(H,(a_3,+\infty))$ uzayında $L_0(1,0,1) = L_{10}\oplus 0\oplus L_{30}$ ve $L^2(0,1,0) = 0\oplus L^2(H,(a_2,b_2))\oplus 0$ uzayında $L_0(0,1,0) = 0\oplus L_{20}\oplus 0$ minimal operatörlerinin normal genişlemelerinin bir direkt toplamıdır.

Son olarak, [4, 37, 45]'deki metod ve Lemma 2.5.1 ve 2.5.2 kullanılarak aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

Teorem 2.5.5: $(-A_1)^{1/2}W_2^1(H,(-\infty,a_1)) \subset W_2^1(H,(-\infty,a_1))$,

$$A_2^{1/2}W_2^1(H,(a_2,b_2)) \subset W_2^1(H,(a_2,b_2)),$$

$$A_3^{1/2}W_2^1(H,(a_3,+\infty)) \subset W_2^1(H,(a_3,+\infty))$$

olsun. $L^2(1,1,1)$ Hilbert uzayında L_0 minimal operatörünün her $\tilde{L}$ normal genişlemesi (2.5.1) diferensiyel ifadesi ve $W_1, W_2: H \to H$ üniter operatörler olmak üzere

$$u_3(a_3) = W_1u_1(a_1),\ u_1(a_1) \in ker(-A_1)^{1/2},\ u_3(a_3) \in ker A_3^{1/2}, \tag{2.5.2}$$

$$u_2(b_2) = W_2u_1(a_2),\ A_2W_2 = W_2A_2 \tag{2.5.3}$$

sınır şartları tarafından doğrulur. Üstelik $W_1, W_2: H \to H$ üniter operatörleri $\tilde{L}$ genişlemesi tarafından tek türlü belirlenir, yani $\tilde{L} = L_{W_1W_2}$ ve bu önermenin tersi de doğrudur.

Sonuç 2.5.6: Eğer A_1 ve A_3 operatörlerinin en az biri H uzayında 1-1 ise, $L_0(1,1,1)$ minimal operatörü $L^2(1,1,1)$ uzayında maksimal formal normaldir.

Sonuç 2.5.7: Eğer $L_0(1,1,1)$ minimal operatörünün en az bir normal genişlemesi varsa,

$$dimker(-A_1)^{1/2} = dimkerA_3^{1/2} > 0$$

ifadesi doğrudur.

Şimdi $L^2(1,1,1)$ uzayında $L_{W_1W_2}$ normal genişlemesinin spektrum yapısı araştırılsın. Lemma 2.5.4'den L_{W_1} ve L_{W_2} sırasıyla $L^2(1,0,1)$ ve $L^2(0,1,0)$ Hilbert uzaylarında $L_0(1,0,1)$ ve $L_0(0,1,0)$ minimal operatörlerin normal genişlemeleri olmak üzere

$$L_{W_1W_2} = L_{W_1} \oplus L_{W_2}$$

olduğu açıktır. Burada $A_1 = A_1^* \leq 0,\ A_2 = A_2^* \geq 0,\ A_3 = A_3^* \geq 0,\ A_1, A_2, A_3 \in L(H)$ ve $0 \in \sigma_p((-A_1)^{1/2}) \cap \sigma_p(A_3^{1/2})$ alalım.

İlk olarak aşağıdaki teoremin doğruluğu gösterilsin.

Teorem 2.5.8: $L^2(1,0,1)$ Hilbert uzayında $L_0(1,0,1)$ minimal operatörün L_{W_1} normal genişlemesinin ayrık spektrumu boştur, yani

$$\sigma_p(L_{W_1}) = \emptyset.$$

İspat: $L^2(1,0,1)$ Hilbert uzayında $L_0(1,0,1)$ minimal operatörün L_{W_1} normal genişlemesinin spektrumu için

$$L_{W_1}u = \lambda u,\ \lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \mathbb{C},\ u = (u_1, 0, u_3) \in L^2(1,0,1),$$

yani

$$\tilde{l}_1(u_1) = u_1' + \tilde{A}_1 u_1 = \lambda u_1,\ u_1 \in L^2(H, (-\infty, a_1)),$$

$$\tilde{l}_3(u_3) = u_3' + \tilde{A}_3 u_3 = \lambda u_3,\ \ u_3 \in L^2(H, (a_3, +\infty)),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

$$u_3(a_3) = W_1 u_1(a_1), u_1(a_1) \in \ker(-A_1)^{1/2}, u_3(a_3) \in kerA_3^{1/2}$$

problemine bakılsın. Bu problemin genel çözümü

$$u_1(\lambda; t) = e^{-(\tilde{A}_1 - \lambda)(t - a_1)} f_1^*,\ t < a_1,\ f_1^* \in H_{-1/2}(-A_1),$$

$$u_3(\lambda; t) = e^{-(\tilde{A}_3 - \lambda)(t - a_3)} f_3^*,\ t > a_3,\ f_3^* \in H_{-1/2}(A_3),$$

$$f_3^* = W_1 f_1^*,\quad f_1^*, f_3^* \in H,\quad f_1^* = u_1(\lambda; a_1),\quad f_3^* = u_3(\lambda; a_3).$$

$0 \in \sigma_p((-A_1)^{1/2}) \cap \sigma_p(A_3^{1/2})$ ve $(-A_1)^{1/2} f_1^* = 0$, $A_3^{1/2} f_3^* = 0$ olduğundan,

$$u_1(\lambda;t) = e^{\lambda(t-a)} f_1^*,\ t < a, f_1^* \in H_{-1/2}((-A_1)),$$

$$u_3(\lambda;t) = e^{\lambda(t-b)} f_3^*, t > b, f_3^* \in H_{-1/2}(A_3),$$

$$f_3^* = W_1 f_1^*,\ f_1^* = u_1(\lambda; a_1), f_3^* = u_3(\lambda; a_3).$$

Buradan $u_1(\lambda;\cdot) \in L^2\big(H, (-\infty, a_1)\big)$ ve $u_3(\lambda;\cdot) \in L^2\big(H, (a_3, +\infty)\big)$ olması için gerek ve yeter şartın sırasıyla $\lambda_r \geq 0$ ve $\lambda_r \leq 0$ olması gerektiği görülür. Böylece $\lambda_r = 0$ bulunur. Sonuç olarak,

$$u_1(\lambda;t) = e^{i\lambda_i(t-a_1)} f_1^*,\ t < a_1,$$

$$u_3(\lambda;t) = e^{i\lambda_i(t-a_3)} f_3^*, t > a_3,\ f_3^* = W_1 f_1^*.$$

Bu durumda $u_1(\lambda;\cdot) \in L^2\big(H, (-\infty, a_1)\big)$ ve $u_3(\lambda;\cdot) \in L^2\big(H, (a_3, +\infty)\big)$ olması için gerek ve yeter şartın $f_1^* = 0$ ve $f_3^* = 0$ olması gerektiği açıkça görülür. Böylece $L^2(1{,}0{,}1)$ uzayında $u_1 = 0$ ve $u_3 = 0$ bulunur. Bu nedenle $\sigma_p\big(L_{W_1}\big) = \emptyset$ elde edilir.

Hilbert uzayında her normal operatörlerin kalan spektrumu boş olduğundan [64], $L^2(1{,}0{,}1)$ Hilbert uzayında $L_0(1{,}0{,}1)$ minimal operatörün L_{W_1} normal genişlemelerinin sürekli spektrumunu araştırmak hedefe ulaşmak için yeterli olacaktır.

Teorem 2.5.9: $L^2(1{,}0{,}1)$ Hilbert uzayında $L_0(1{,}0{,}1)$ minimal operatörün L_{W_1} normal genişlemesinin sürekli spektrumu için

$$i\mathbb{R} \subset \sigma_c\big(L_{W_1}\big) \subset \sigma(A_1) \cup \sigma(A_3) + i\mathbb{R}$$

bağıntıları doğrudur.

İspat: İspat için bakınız Teorem 2.3.7.

Şimdi $L^2(0{,}1{,}0)$ uzayında $L_0(0{,}1{,}0)$ minimal operatörün L_{W_2} normal genişlemelerinin spektrumu incelensin.

Teorem 2.5.10: $L^2(0{,}1{,}0)$ Hilbert uzayında $L_0(0{,}1{,}0)$ minimal operatörün L_{W_2} normal genişlemelerinin spektrumu

$$\sigma\big(L_{W_2}\big) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda = \frac{1}{a_2 - b_2}(\ln|\mu| + i\, arg\mu + 2n\pi i),\ n \in \mathbb{Z},$$

$$\mu \in \sigma\big(W_2^* e^{-\tilde{A}_2(b_2 - a_2)}\big),\ 0 \leq \arg\mu < 2\pi\}$$

formundadır.

İspat: L_{W_2} bir normal genişleme olmak üzere

$$\tilde{l}_2(u_2) = u_2' + \tilde{A}_2 u_2 = \lambda u_2 + f_2, \quad u_2, f_2 \in L^2\big(H, (a_2, b_2)\big),$$

$$u_2(b_2) = W_2 u_2(a_2),\ \lambda \in \mathbb{C}$$

spektrum probleminin genel çözümü

$$u_2(t) = e^{-(\tilde{A}_2-\lambda)(t-a_2)} f_2^* + \int_{a_2}^{t} e^{-(\tilde{A}_2-\lambda)(t-s)} f_2(s)ds, \qquad a_2 < t < b_2, \qquad f_2^* \in H_{-1/2}(A_2)$$

$$(e^{-\lambda(b_2-a_2)} - W_2^* e^{-\tilde{A}_2(b_2-a_2)}) f_2^* = W_2^* e^{-\lambda(b_2-a_2)} \int_{a_2}^{b_2} e^{-(\tilde{A}_2-\lambda)(b_2-s)} f_2(s)ds$$

formundadır. Buradan $\lambda \in \sigma(L_{W_2})$ olması için gerek ve yeter şartın $\mu \in \sigma(W_2^* e^{-\tilde{A}_2(b_2-a_2)})$ olmak üzere λ'nın $e^{-\lambda(b_2-a_2)} = \mu$ denkleminin bir çözümü olması gerektiği görülür. Böylece

$$\lambda = \frac{1}{a_2-b_2}(\ln|\mu| + i\, arg\mu + 2n\pi i),\ n \in \mathbb{Z},\ \mu \in \sigma(W_2^* e^{-\tilde{A}_2(b_2-a_2)})$$

olduğu elde edilir.

Teorem 2.5.11: Her $L_{W_1W_2} = L_{W_1} \oplus L_{W_2}$ normal genişlemesinin $\sigma(L_{W_1W_2})$ spektrumu için

$$\sigma_p(L_{W_1W_2}) = \sigma_p(L_{W_2}),$$

$$\sigma_c(L_{W_1W_2}) = \{[\sigma_p(L_{W_2})]^c \cap [\sigma_c(L_{W_1}) \cup \sigma_c(L_{W_2})]\}$$

eşitlikleri doğrudur.

İspat: Eğer S_1 ve S_2 sırasıyla H_1 ve H_2 Hilbert uzaylarında lineer kapalı operatörler ise, [71] çalışmasındaki

$$\sigma_p(S_1 \oplus S_2) = \sigma_p(S_1) \cup \sigma_p(S_2),$$

$$\sigma_c(S_1 \oplus S_2) = \left(\sigma_p(S_1) \cup \sigma_p(S_2)\right)^c \cap \left(\sigma_r(S_1) \cup \sigma_r(S_2)\right)^c \cap \left(\sigma_c(S_1) \cup \sigma_c(S_2)\right)$$

eşitliklerin doğruluğundan önermenin iddiası doğrudur.

Örnek 2.5.12: $L^2\big((-\infty,-1) \times (0,1)\big) \oplus L^2\big((-1/2\,,1/2) \times (0,1)\big) \oplus L^2\big((1,+\infty) \times (0,1)\big)$ uzayında $L_{\varphi\psi}$ diferensiyel operatörü için

$$L_{\varphi\psi} : \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + sgnt\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(t,x),\ |t| > 1,\ x \in [0,1],$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) = f(t,x),\ |t| < 1/2,\ x \in [0,1],$$

$$u(1,x) = e^{i\varphi} u(-1,x),\ \varphi \in [0,2\pi),$$

$$u(1/2\,,x) = e^{i\psi} u(-1/2\,,x),\ \psi \in [0,2\pi),$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0,\ |t| > 1,\ |t| < 1/2$$

sınır değer problemine bakılsın. Bu durumda $L^2(0,1)$ uzayında

$$A_1 = \frac{\partial^2 u(\cdot,x)}{\partial x^2},\ x \in [0,1],\ u_x(\cdot\,,0) = u_x(\cdot\,,1) = 0,$$

$$A_2 = -\frac{\partial^2 u(\cdot,x)}{\partial x^2} + u(\cdot,x),\ x \in [0,1],\ u_x(\cdot,0) = u_x(\cdot,1) = 0,$$

$$A_3 = -\frac{\partial^2 u(\cdot,x)}{\partial x^2},\ x \in [0,1],\ u_x(\cdot,0) = u_x(\cdot,1) = 0$$

operatörleri için

$$A_1 = A_1^* \leq 0,\ A_2 = A_2^* \geq 1,\ A_3 = A_3^* \geq 0,\ \ker(-A_1)^{1/2} \neq \{0\},\ kerA_3^{1/2} \neq \{0\},$$

$$0 \in \sigma_p\left((-A_1)^{1/2}\right) \cap \sigma_p\left(A_3^{1/2}\right)$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan, $A_2^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty\big(L_2(0,1)\big)$, $\sigma\big(L_\psi\big) = \sigma_p(L_\psi)$, $\sigma_c\big(L_\psi\big) = \emptyset$ ve

$$\sigma\big(L_\psi\big) = \big\{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda\ = \ln|\mu| + i\, arg\mu + 2n\pi i, n \in \mathbb{Z}\,, \mu\ \in \sigma\big(e^{i\psi}e^{-\tilde{A}_2(b_2-a_2)}\big),$$

$$0 \leq \arg\mu < 2\pi\big\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{Re}\lambda \geq 1\}$$

olduğundan, Teorem 2.5.11'e göre

$$\sigma_p(L_{\varphi\psi}) = \ \sigma_p(L_\psi),$$

$$\sigma_c\big(L_{\varphi\psi}\big) = \big[\sigma_p\big(L_\psi\big)\big]^c \cap \big[\sigma_c\big(L_\varphi\big) \cup \sigma_c\big(L_\psi\big)\big] = \big[\sigma_p\big(L_\psi\big)\big]^c\ \cap \sigma_c\big(L_\varphi\big)$$

elde edilir.

2.6. N-3 Durumunda Normal Genişlemelerin Gösterimi ve Spektrum Yapısı

H bir ayrılabilir Hilbert uzayı olmak üzere, $L^2(H,(a,+\infty))$, $a \in \mathbb{R}$ Hilbert uzayında, E H Hilbert uzayında birim operatör, $J^* = J$, $J^2 = E$, $A^* = A \in L(H)$, $A \geq 0$ ve $A^{1/2}J = JA^{1/2}$ için

$$l(u) = Ju' + Au \tag{2.6.1}$$

formundaki birinci mertebeden lineer singüler diferensiyel-operatör ifadesine bakılsın. Bu ifadenin $L^2(H,(a,+\infty))$ uzayında formal adjointi

$$l^+(v) = -Jv' + Av \tag{2.6.2}$$

formunda olacaktır.

$$L_0': L_0'u \coloneqq l(u),\ u \in D_0'$$

$$D_0' \coloneqq \{u(t): u(t), (a,+\infty) aralığı\ \text{üzerinde}\ kompakt\ desteğe\ sahip\ \text{sürekli}$$

$$türevlenebilir\ fonksiyonlar\ \text{öyleki}\ l(u) \in L^2(H,(a,+\infty))\}$$

operatörü ele alınsın.

$L^2(H,(a,+\infty))$ Hilbert uzayında L_0' operatörünün kapanışı (2.6.1) diferensiyel-operatör ifadesi tarafından üretilen minimal operatör olarak adlandırılır ve L_0 ile gösterilir. Benzer şekilde $L^2(H,(a,+\infty))$ Hilbert uzayında (2.6.2) diferensiyel-operatör ifadesi tarafından üretilen L_0^+ minimal operatörü tanımlanabilir. $L^2(H,(a,+\infty))$ Hilbert uzayında L_0^+

(L_0) operatörünün adjoint operatörü (2.6.1) ((2.6.2)) tarafından üretilen maksimal operatör olarak adlandırılır ve L (L^+) ile gösterilir.

Buradan $L_0 \subset L,\ L_0^+ \subset \mathrm{L}^+,\ D(L_0) = \overset{0}{W}{}_2^1(H,(a,+\infty)),\ D(L) = W_2^1(H,(a,+\infty))$ olduğu açıktır.

$J = E$ olduğu durumda, L_0 minimal operatörün $L^2(H,(a,+\infty))$ Hilbert uzayında maksimal formal normal olup hiçbir normal genişlemesinin olmadığı Bölüm 2.1'de gösterilmiştir.

Teorem 2.6.1: $A^{1/2}W_2^1(H,(a,+\infty)) \subset W_2^1(H,(a,+\infty))$ olsun. $L^2(H,(a,+\infty))$ Hilbert uzayında L_0 minimal operatörün her $L_n,\ L_0 \subset L_n \subset L$, normal genişlemesi için bir M hipermaksimal J-neutral altuzay vardır öyle ki L_n genişlemesi (2.6.1) diferensiyel-operatör ifadesi ve

$$u(a) \in M,\ A^{1/2}u(a) \in M \tag{2.6.3}$$

sınır şartı tarafından üretilir. Üstelik M altuzayı L_n genişlemesi tarafından tek türlü belirlenir, yani $L_n = L_M$.

Tersine, M hipermaksimal J-neutral keyfi altuzay olmak üzere L maksimal operatörün (2.6.3) sınır şartlarını sağlayan $u(t) \in W_2^1(H,(a,+\infty))$ vektör fonksiyonlarının lineer manifolduna kısıtlanışı L_0 minimal operatörünün $L^2(H,(a,+\infty))$ Hilbert uzayında bir normal genişlemesidir.

İspat: Eğer L_n operatörü L_0 minimal operatörün normal bir genişlemesi ise,

$$Re(L_n) = \overline{A \otimes E},\ Re(L_n): D(L_n) \to L^2(H,(a,+\infty)),$$

$$\dot{I}m(L_n) = \overline{E \otimes \left(-\imath J \frac{d}{dt}\right)},\ \dot{I}m(L_n): D(L_n) \to L^2(H,(a,+\infty))$$

operatörleri $L^2(H,(a,+\infty))$ uzayında sırasıyla $Re(L_0)$ ve $\dot{I}m(L_0)$ operatörlerinin self-adjoint genişlemeleridir. $\dot{I}m(L_0)$, $-\imath J \frac{d}{dt}$ diferensiyel ifadesi ve M, H Hilbert uzayında bir hipermaksimal J-neutral altuzay olmak üzere $u(a) \in M$ şartı tarafından üretilir. Üstelik bu L_n genişlemesi tarafından tek türlüdür, yani $\dot{I}m(L_n) = \dot{I}m(L_M)$ [22]. Diğer taraftan, L_n genişlemesi bir normal operatör ise, her $u \in D(L_n)$ için

$$(Re(L_n)u, Im(L_n)u)_{L^2} = (Im(L_n)u, Re(L_n)u)_{L^2}$$

eşitliği sağlanır. Diğer bir ifadeyle, her $u \in D(L_n)$ için

$$(Ju', Au)_{L^2} + (Au, Ju')_{L^2} = 0,$$

yani

$$\left(JA^{1/2}u', A^{1/2}u\right) + \left(JA^{1/2}u, A^{1/2}u'\right) = 0$$

eşitliği doğrudur. Son eşitlikten

$$(JA^{1/2}u, A^{1/2}u)'_{L^2} = 0$$

olup

$$(Ju(a), Au(a))_H = 0$$

elde edilir. Buradan her $u \in D(L_n)$ için normalliğin ikinci şartı olan

$$(Ju(a), Au(a))_H = 0$$

ifadesi bulunur. Diğer taraftan, A operatörü H Hilbert uzayında bir self-adjoint pozitif operatör ve $A^{1/2}J = JA^{1/2}$ olduğundan, son şarttan

$$(JA^{1/2}\mathrm{u(a)}, A^{1/2}Ju(a))_H = 0$$

eşitliği sağlanır. Bu ise $A^{1/2}u(a) \in M$ anlamına gelir. Buradan M hipermaksimal J-neutral altuzayı L_n genişlemesi tarafından tek türlü ifade edilir [22].

Aksine, L_M (2.6.1) diferensiyel-operatör ifadesi ve (2.6.3) sınır şartı tarafından üretilen bir operatör olsun, yani

$$L_M u = l(u),\ D(L_M) = \{u \in W_2^1\big(H, (a, +\infty)\big): u(a) \in M,\ A^{1/2}\mathrm{u(a)} \in M\},$$

$$L_M: D(L_M) \subset L^2(H, (a, +\infty)) \to L^2(H, (a, +\infty)).$$

Bu durumda L_M^* adjoint operatörü için

$$L_M^* = (ReL_M + i\dot{I}mL_M)^* = ReL_M - i\dot{I}mL_M$$

elde edilir. Buradan

$$L_M^* v := -Jv' + Av$$

$$D(L_M^*) = D(ReL_M \cap \dot{I}mL_M) = D(\dot{I}mL_M) = D(L_M).$$

Diğer taraftan L_M genişlemesinin normalliğin diğer şartını sağladığı kontrol edilebilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Şimdi $L^2(H, (a, +\infty))$ uzayında (2.6.1) lineer diferensiyel-operatör ifadesi ve (2.6.3) sınır şartı tarafından üretilen L_0 minimal operatörün L_M normal genişlemesinin ayrık spektrumu araştırılsın.

Teorem 2.6.2: $L^2(H, (a, +\infty))$ uzayında L_0 minimal operatörün her L_M normal genişlemesinin ayrık spektrumu boştur, yani

$$\sigma_p(L_M) = \emptyset.$$

İspat: $L^2(H,(a,+\infty))$ uzayında L_M normal genişlemesinin ayrık spektrumu için

$$L_M u = \lambda u,\ \lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \mathbb{C},\ u \in L^2(H,(a,+\infty)),$$

yani

$$\begin{cases} Ju' + Au = \lambda u,\ \ u \in L^2(H,(a,+\infty)) \\ u(a) \in M,\ \ A^{1/2}u(a) \in M,\ \ \lambda \in \mathbb{C} \end{cases}$$

problemine bakılsın. Buradan $\bar{\lambda} \in \sigma_p(L_M^*)$ olup $L_M^* u = -Ju' + Au = \bar{\lambda} u$.

Bu durumda yukarıdaki iki denklemden,

$$\begin{cases} Ju' = i\lambda_i u \\ Au = \lambda_r u,\ \ \lambda_i, \lambda_r \in \mathbb{R},\ \ u(a) \in M,\ \ A^{1/2}u(a) \in M,\ \ u \in L^2(H,(a,+\infty)) \end{cases}$$

elde edilir. Bu son denklemlerin birincisinin genel çözümü

$$u_\lambda(t) = e^{i\lambda_i J(t-a)} f_\lambda,\ \ f_\lambda \in M$$

formundadır. Ayrıca

$$\|u_\lambda(t)\|_{L^2}^2 = \int_a^{+\infty} \left\| e^{i\lambda_i J(t-a)} f_\lambda \right\|_H^2 dt = \int_a^{+\infty} \left(e^{i\lambda_i J(t-a)} f_\lambda, e^{i\lambda_i J(t-a)} f_\lambda \right)_H dt$$
$$= \int_a^{+\infty} \left(e^{i\lambda_i J(t-a) - i\lambda_i J(t-a)} f_\lambda, f_\lambda \right)_H dt = \int_a^{+\infty} \|f_\lambda\|_H^2 dt = (+\infty)\|f_\lambda\|_H^2.$$

Buradan $u_\lambda \neq 0$, $u_\lambda \in L^2(H,(a,+\infty))$ olması için gerek ve yeter şartın $f_\lambda \neq 0$, $f_\lambda \in M \subset H$ olduğu çıkar. Fakat $f_\lambda \neq 0$ durumunda, $u_\lambda(t) \notin L^2(H,(a,+\infty))$. Bu ise L_M operatörü için $\sigma_p(L_M) = \emptyset$ anlamına gelir.

Şimdi aşağıdaki sonucun doğruluğu gösterilsin.

Teorem 2.6.3: $L^2(H,(a,+\infty))$ Hilbert uzayında L_0 minimal operatörün her L_M normal genişlemesi için

$$\sigma(L_M) \subset \{\lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \mathbb{C}:\ 0 \leq \lambda_r \leq \|A\|,\ \ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

doğrudur.

İspat: Bu halde her $u \in D(L_M)$ için

$$2Re(L_M u, u) = (L_M u, u) + (u, L_M u) = (Ju' + Au, u) + (u, Ju' + Au)$$
$$= (Ju, u') + 2(Au, u) = 2(Au, u)$$

elde edilir. Son eşitlikten

$$0 \leq Re(L_M u, u) \leq \|A\|(u, u)$$

bulunur.

Hilbert uzayında normal operatörlerin kalan spektrumu boş olduğundan [64], $L^2(H,(a,+\infty))$ Hilbert uzayında L_0 minimal operatörün L_M normal genişlemelerinin sürekli spektrumunu bulmak yeterlidir.

Teorem 2.6.4: $L^2(H,(a,+\infty))$ Hilbert uzayında L_0 minimal operatörün her L_M normal genişlemesi için

$$\sigma_c(L_M) \subset \sigma(A) + i\mathbb{R}$$

ilişkisi doğrudur.

İspat: Bu durumda $ReL_M = \frac{1}{2}\overline{(L_M + L_M^*)}$ ve $\dot{I}mL_M = \frac{1}{2i}\overline{(L_M - L_M^*)}$ self-adjoint operatörler olmak üzere her normal operatörlerin spektrumu için

$$\sigma(L_M) \subset \sigma(ReL_M) + i\sigma(\dot{I}mL_M)$$

ilişkisi doğrudur [2]. Şimdi $S: L^2(H,(a,+\infty)) \to L^2(H,(a,+\infty))$, $Su(t) = Au(t)$ self-adjoint operatörü düşünülsün. Bu durumda $\frac{1}{2}(L_M + L_M^*) \subset S$ ve S operatörü $L^2(H,(a,+\infty))$ uzayında

$$\|S\| = \|A \otimes E\| = \|A\| < \infty$$

olduğundan bir sınırlı operatördür. Böylece $ReL_M = S$ elde edilir. S operatörünün spektrumu $\sigma(A \otimes E)$ olduğundan, $\sigma(ReL_M) = \sigma(A \otimes E) = \sigma(A)$ bulunur [67]. Böylece $\sigma_c(L_M) \subset \sigma(A) + i\mathbb{R}$ elde edilir.

Örnek 2.6.5: Keyfi $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{cases} v'(t,x) + e^{-2|x|}u(t,x) = \lambda u(t,x), \\ u'(t,x) + e^{-2|x|}v(t,x) = \lambda v(t,x) \end{cases}$$

diferensiyel denklemlerin sistemi

$$u(a,x) = iv(a,x),\ x \in \mathbb{R}$$

sınır şartıyla $L^2(H,(a,+\infty))$, $H = L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ uzayında sıfırdan farklı bir (u,v) çözümüne sahip değildir. Bu $J: H \to H$, E operatörü $L^2(\mathbb{R})$ uzayında birim operatör,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix},\ A: H \to H,\ A = \begin{pmatrix} e^{-2|x|E} & 0 \\ 0 & e^{-2|x|E} \end{pmatrix}$$

ve

$$M = \{(u(a,x), v(a,x)) \in L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R}):\ u(a,x) = iv(a,x)\}$$

durumunda, Teorem 2.6.1 ve Teorem 2.6.2'nin bir sonucudur.

3. SONUÇLAR

1) $A = A^*: D(A) \subset H \to H$ durumunda $l(.) = i\frac{d}{dt} + A$ simetrik diferensiyel-operatör ifadesinin vektör–fonksiyonların Hilbert uzaylarının direkt toplamı $L_2\big(H, (-\infty, a)\big) \oplus L_2\big(H, (b, +\infty)\big), a < b$ üzerinde doğurduğu simetrik minimal operatörün tüm self-adjoint genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilip ve daha sonra bu genişlemelerin spektrum yapısı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar “Math. Chemistry” [72] dergisinde yayınlanmıştır.

2) $A_i = A_i^*: D(A_i) \subset H \to H,\ i = 1,2$durumunda $l(.) = (\frac{d}{dt} + A_1, \frac{d}{dt} + A_2)$ formal normal diferensiyel-operatör ifadesinin vektör–fonksiyonların Hilbert uzaylarının direkt toplamı $L_2(H, (-\infty, a)) \oplus L_2(H, (b, +\infty)),\ a < b$ üzerinde doğurduğu formal normal minimal operatörün tüm normal genişlemeleri sınır değerleri dilinde tanımlanmış ve daha sonra bu genişlemelerin spektrum yapısı incelenmiştir.

3) $A_i = A_i^*: D(A_i) \subset H \to H,\ i = 1,2$ durumunda $l(.) = (i\frac{d}{dt} + A_1, -i\frac{d}{dt} + A_2)$ simetrik diferensiyel-operatör ifadesinin vektör–fonksiyonların Hilbert uzaylarının direkt toplamı $L_2\big(H, (a, +\infty)\big) \oplus L_2\big(H, (b, +\infty)\big), a < b$ üzerinde doğurduğu minimal operatörün tüm self-adjoint genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilmiş ve daha sonra bu genişlemelerin spektrum yapısı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar “Electronic Journal of Differential Equations”[73] dergisinde yayınlanmıştır.

4) $A_k = A_k^*: D(A_k) \subset H \to H,\ k = 1,2,3$durumunda $l(.) = (i\frac{d}{dt} + A_1, i\frac{d}{dt} + A_2, i\frac{d}{dt} + A_3)$ simetrik diferensiyel-operatör ifadesinin vektör–fonksiyonların Hilbert uzaylarının direkt toplamı $L_2(H, (-\infty, a_1)) \oplus L_2(H, (a_2, b_2)) \oplus L_2(H, (a_3, +\infty)),\ -\infty < a_1 < a_2 < b_2 < a_3 < +\infty$ üzerinde doğurduğu simetrik minimal operatörün tüm self-adjoint genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilmiş ve bu genişlemelerin spektrum yapısı araştırılmıştır.

5) $A_k = A_k^*: D(A_k) \subset H \to H,\quad k = 1,2,3$durumunda $l(.) = (\frac{d}{dt} + A_1, \frac{d}{dt} + A_2, \frac{d}{dt} + A_3)$formal normal diferensiyel-operatör ifadesinin vektör –fonksiyonların Hilbert uzaylarının direkt toplamı $L_2(H, (-\infty, a_1)) \oplus L_2(H, (a_2, b_2)) \oplus L_2(H, (a_3, +\infty)),\ -\infty < a_1 < a_2 < b_2 < a_3 < +\infty$ üzerinde doğurduğu formal normal minimal operatörün tüm normal genişlemeleri sınır değerleri dilinde tanımlanmış ve daha sonra bu genişlemelerin spektrum

yapısı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar “Electronic Journal of Differential Equations”[74] dergisinde yayınlanmıştır.

6) $T = J,\ J^* = J,\ J^2 = E,\ A^* = A \in L(H), A \geq 0,\ A^{1/2}J = JA^{1/2}$ durumunda $l(.) = J\frac{d}{dt} + A$ diferensiyel-operatör ifadesinin vektör –fonksiyonların $L^2\big(H, (a, +\infty)\big),\ a \in \mathbb{R}$Hilbert uzayı üzerinde doğurduğu formal normal minimal operatörün tüm normal genişlemeleri sınır değerleri dilinde tanımlanmış ve daha sonra bu genişlemelerin spektrum yapısı incelenmiştir.

4. ÖNERİLER

1) Tezde bakılan problemler birinci mertebeden quasi-diferensiyel ifade için çekili uzaylarda incelenebilir.
2) Tezin (S1-S3) kısımlarında ifade edilen self-adjoint genişlemelerin spektral fonksiyonları ayrıca bir araştırma konusu olabilir.
3) Tezde bakılan problemler alt aralıklar üzerinde mertebesi değişkenlik gösteren diferensiyel ifadeler için yeni bir inceleme konusu olabilir.
4) Tezde bakılan (N1-N3) bölümlerinde ifade edilen normal genişlemelerin sürekli spektrumları için daha güçlü sonuçların alınması konusu araştırılabilir.
5) Tezde bakılan problemler sayılabilir sonsuz (ya da sonsuz) sayıdaki alt aralıklar için incelenmesi kendi başına yeni bir inceleme konusu olarak ele alınabilir.

5. KAYNAKLAR

1. von Neumann, J., Allgemeine eigenwerttheorie hermetischer funktionaloperatoren, Math. Ann., 102 (1929-1930) 49-131.

2. Dunford, N. ve Schwartz, J.T., Linear operators, I; II, Interscience, New York, 1958; 1963.

3. Naimark, M.A., Linear differential operators, Frederick Ungar Publishing Co., Inc., London, 1968.

4. Gorbachuk, V.I. ve Gorbachuk, M.L., Boundary value problems for operator differential equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

5. Rofe-Beketov, F.S. ve Kholkin, A.M., Spectral analysis of differential operators, World Scientific Monograph Series in Mathematics, vol.7 (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hanckensack, NJ, 2005).

6. Zettl, A., Sturm-Liouville Theory, Amer. Math. Soc., Mathematical Survey and Monographs, v.121, Rhode Island, 2005.

7. Glazman, I. M., On the theory of singular differential operators, Uspehi Math. Nauk, 40 (1950), 102-135, Engish translation in Amer. Math. Soc. Translations (1), 4 (1962) 331-372.

8. Everitt, W. N. ve Zettl, A., Sturm-Liouville differential operators in direct sum spaces, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 16, 1 (1986) 497-516.

9. Everitt, W. N. ve Zettl, A., Differential operators generated by a countable number of quasi-differential expressions on the line, Proc. London Math. Soc., 3, 64 (1992) 524-544.

10. Ashurov, R. R. ve Everitt, W. N., Linear quasi-differential operators in locally integrable spaces on the real line, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 130A (2000) 671-698.

11. Ibrahim, S. El-sayed, The spectra of general differential operators in the direct sum spaces, Czechoslovak Mathematical Journal, 54, 129 (2004) 9-29.

12. Ashurov, R. R. ve Sokolov, M. S., On spectral resolutions connected with self-adjoint differential vector-operators in a Hilbert space, Applicable Analysis, 84, 6 (2005) 601-616.

13. Everitt, W. N. ve Markus, L., Complex symplectic spaces and boundary value problems, Bulletin of the American Math. Society, 42, 4 (2005) 461-500.

14. Sokolov, M., Representation results for operators generated by a quasi-differential multi-interval system in a Hilbert direct sum space, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 36, 2 (2006) 721-739.

15. Sun, S., Shi, Y. ve Chen, S., The Glazman-Krein-Naimark theory for a class of discrete Hamiltonian systems, J. Math. Anal. Appl., 327 (2007) 1360-1380.

16. Wang, A., Sun, J. ve Zettl, A., Two-interval Sturm-Liouville operators in modified Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl., 328 (2007) 390-399.

17. Sun, J., Wang, A. ve Zettl, A., Two-interval Sturm-Liouville operators in direct sum spaces with inner product multiples, Result. Math., 50 (2007) 155-168.

18. Hao, X., Sun, J. ve Zettl, A., The spectrum of differential operators and square-integrable solutions, Journal of Functional Analysis, 262 (2012) 1630-1644.

19. Suo, J. ve Wang, W., Two-interval even-order differential operators in modified Hilbert spaces, Bull. Aust. Math. Soc., 85 (2012) 241-260.

20. Suo, J. ve Wang, W., Two-interval even order differential operators in direct sum spaces, Results. Math., 62 (2012) 13-32.

21. Calkin, J. W., Abstract symmetric boundary conditions, Trans. Amer. Math. Soc., 45, 3 (1939) 369-442.

22. Gorbachuk, V.I. ve Gorbachuk, M.L., On boundary-value problems for a first-order differential equation with operator coefficients and the expansion in eigen-functions of this equation, Dokl. Akad. Nauk SSSR 208 (1973), no.6=Soviet Math. Dokl., 14, no.1, 1973.

23. Kilpi, Y., Über lineare normale transformationen in Hilbertschen raum, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. AI, 154 (1953) 38.

24. Kilpi, Y., Über das komplexe momenten problem, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. AI, 236 (1957) 32.

25. Kilpi, Y., Über die Anzahl der hypermaximalen normalen fort setzungen normalen Transformationen, Ann. Univ. Turkuenses. Ser. AI, 65 (1963) 12.

26. Davis, R.H., Singular normal differential operators, Tech. Rep., Dep. Math., California Univ. 10, 1955.

27. Biriuk, G. ve Coddington, E. A., Normal extensions of unbounded formally normal operators, J. Math. and Mech., 13 (1964) 617-638.

28. Coddington, E.A., Extension theory of formally normal and symmetric subspaces, Mem. Amer. Math. Soc., 134 (1973) 1-80.

29. Schmüdgen, K., A formally normal operator having no extension, Proc. Amer. Math. Soc., 95, 3 (1985) 503-504.

30. Kokebayev, B. ve Otarov, H., On some properties of correct compressions of the operator of differentiation, Izvestiya AN Kaz. SSR, 5 (1985) 38-42.

31. Biyarov, H. ve Otelbayev, M., Description of normal extensions, Math. Notes, 53, 5-6 (1993) 474-478.

32. Ismailov, Z.I., Formally-normal extensions of an operator, Diff. Equations, Minsk, 28, 5 (1992) 905-907.

33. Ismailov, Z.I., Normal boundary value problem for differential operator equation for three point, Siberian Mathematical Journal, Novosibirsk, 35, 5 (1994) 1058-1061.

34. Ismailov, Z.I., Normal extensions of differential operators for second order, Diff. Equations, Moskow, 30, 10 (1994) 1823-1824.

35. Ismailov, Z.I., Normal boundary value problems of differential equation for second order with bounded operator potential, Diff. Equations, Moscow, 30, 11 (1994) 2018-2019.

36. Maksudov, F.G. ve Ismailov, Z.I., Normal boundary value problems for differential equations of higher order, Turkish Journal of mathematics, 20, 2 (1996) 141-151.

37. Maksudov, F.G. ve Ismailov, Z.I., Normal boundary value problems for differential equation of first order, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 5, 2 (1996) 659-661.

38. Ismailov, Z.I. ve Maksudov, F.G., Normal extensions of first order differential operators, Dokl. Akad. Nauk Azerb., 53, 1 (1997) 3-6.

39. Ismailov, Z.I., Discreteness of the spectrum of the normal differential operators for first order, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 57, 1 (1998) 32-33.

40. Maksudov, F.G. ve Ismailov, Z.I., On the one necessary condition for normality of differential operators, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 59, 3 (1999) 422-424.

41. Ismailov, Z.I. ve Karatash, H., Some necessary condition for normality of differential operators, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 62, 2 (2000) 277-279.

42. Ismailov, Z.I., On the normal solvability and index of the differential operators, Doklady Mathematics, Birmingham, USA , 62, 3 (2000) 357-358.

43. Ismailov, Z.I., On the normality of first order differential operators, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, (Math.) 51, 2 (2003) 139-145.

44. Ismailov, Z.I., Discreetness of the spectrum of the normal differential operators of second order, Doklady Nas of Belarus, 49, 3 (2005) 5-7.

45. Ismailov, Z.I., Compact inverses of first – order normal differential operators, J. Math. Anal. and App., USA, 320, 1 (2006) 266-278.

46. Ismailov, Z.I. ve Erol, M., Normal differential operators of first order with smooth coefficients, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 42, 2 (2012) 633-642.

47. Ismailov, Z.I. ve Erol, M., Normal differential operators of third order, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 41, 5 (2012) 675-688.

48. Gantmakher, F.P. ve Krein, M.G., Oscillating matrices and kernels and small oscillations of mechanical systems, [in Russian], Gostekhteorizdat, Moscow 1950.

49. Wilder, C.E., Problems in the theory of linear differential equations with auxiliary conditions at more than two points , Trans. Amer. Math. Soc., 19 (1918) 157-166.

50. Weinberger, H.F., An extension of the classical Sturm-Liouville Theory, Duke Math. J., 22 (1955) 1-14.

51. Neuberger, J.W., The lack of self-adjointness in three point boundary value problems, Pasific J. Math., 18 (1966) 165-168.

52. Loud, W.S., Self-adjoint multi-point boundary value problems, Pasific J. Math., 24 (1968) 303-317.

53. Krall, A.M., The adjoint of a differential operator with integral boundary conditions, Proc. Amer. Math. Soc., 16, 4 (1965) 738-742.

54. Krall, A.M., Boundary value problems with interior point boundary conditions, Pasific J. Math., 29 (1969) 161-166.

55. Locker, J., Self-adjointness for multi-point differential operators, Pasific J. Math., 45 (1973) 561-570.

56. Il'in V.A. ve Moiseev, E.I., Nonlocal boundary value problem of the first kind for a Sturm-Liouville operator in its differential and finite difference aspects, Diff. Equat, 23 (1987) 803-810.

57. Il'in V.A. ve Moiseev, E.I., Nonlocal boundary value problem of the second kind for a Sturm-Liouville operator, Diff. Equat., 23, 8 (1987) 979-987.

58. Ismailov, Z.I., Multipoint normal differential operators for firs order, Opuscula Mathematica, 29, 4 (2009) 399-414.

59. Ismailov, Z.I. ve Unluyol, E., Hyponormal differential operators with discrete spectrum, Opuscula Mathematica, 30, 1 (2010) 79-94.

60. Ismailov Z.I., Otkun Çevik E. ve Unluyol E., Compact inverses of multipoint normal differential operators for first order, Electronic Journal of Differential Equtions, 89 (2011) 11.

61. Albeverio, S. ve Gesztesy, F., Hoegh-Krohn, R. and Holden, H., Solvable models in quantum mechanics, New-York, Springer, 1988.

62. Rynne, B.P ve Youngson, M.A., Linear Functional Analysis, Springer, 2008.

63. Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applicatons, John and Sons, 1978.

64. Narici, L. ve Bachman, G., Functional Analysis, Academic Press, Inc. London, 1972.

65. Aliprantis, D. ve Burkinshaw, O., Principles of Real Analysis, Academic Pres, New York, 1998.

66. Hunter, J.K. ve Nachtergaele, B., Applied Analysis, University of California, 2000.

67. Brown, A. ve Pearcy, C., Spectra of tensor products of operators, Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1966) 162-166.

68. Locker, J., Self-adjointness for multi-point differential operators, Pasific J. Math., 45 (1973) 561-570.

69. Kochubei, A. N., Symmetric Operators and Nonclassical Spectral Problems, Mat. Zametki, 25, 3 (1979) 425-434.

70. Azizov, T. Ya. ve Iokhvidov, I. S., Linear operators in spaces with an indefinite metric, John Wiley and Sons, 1989.

71. Otkun Çevik, E. ve Ismailov, Z.I, Spectrum of the direct sum of operators, Electronic Journal of Differential Equtions, 210 (2012) 9.

72. Bairamov, E., Öztürk Mert, R. ve Ismailov, Z.I., Selfadjoint extensions of a singular differential operator, Journal of Mathematical Chemistry, 50, 5(2012) 1100-1110.

73. Ismailov, Z.I. ve Öztürk Mert, R., Selfadjoint extensions of a singular multipoint differential operator of first order, Electronic Journal of Differential Equations, 2013, 129 (2013) 1-11.

74. Ismailov, Z.I. ve Öztürk Mert, R., Normal extensions of a singular multipoint differential operator for first order, Electronic Journal of Differential Equations, 2012, 36 (2012) 1-9.

ÖZGEÇMİŞ

Rukiye ÖZTÜRK MERT, 1984 yılında Samsun'da doğdu. İlköğrenimini Samsun Fatih İlkokulu'nda, lise öğrenimini ise Samsun 19 Mayıs Lisesi'nde tamamladı.

2002-2003 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü programında lisans eğitimine başladı. 2006 yılında lisans eğitiminden matematikçi ünvanıyla ikincilikle mezun oldu.

2006-2007 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tezli Yüksek Lisans (Matematik) programına başladı. 2008-2009 Eğitim-Öğretim yılında "Birinci Mertebeden Normal Fark Operatörleri" adlı teziyle yüksek lisansını bitirdi. 2008-2009 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora (Matematik) programına kabul edildi. Ocak 2012 tarihinde Hitit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı'na Araştırma Görevlisi olarak atandı. Yabancı dili ingilizcedir.

Bu tez çalışmasının:

2.1. Bölümü;

Bairamov, E., Öztürk Mert, R., Ismailov, Z., Selfadjoint Extensions of a Singular Differential Operator, Journal of Mathematical Chemistry, v.50, no.5 (2012), 1100-1110

2.3. Bölümü;

Ismailov, Z.I., Öztürk Mert, R., Selfadjoint extensions of a singular multipoint differential operator of first order, Electronic Journal of Diff. Equations, v.2013, no.129 (2013), 1-11

2.5. Bölümü;

Ismailov, Z.I., Öztürk Mert, R., Normal extensions of a singular multipoint differential operator for first order, Electronic Journal of Diff. Equations, v.2012, no.36 (2012), 1-9

dergilerinde yayınlanmıştır.