KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE İDEMPOTENT UNİNORMLAR

DOKTORA TEZİ

Gül Deniz ÇAYLI

OCAK 2018
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERİSTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE İDEMPOTENT UNİNORMLAR

Gül Deniz ÇAYLI

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 02.01.2018
Tezin Savunma Tarihi : 18.01.2018

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Funda KARAÇAL
İkinci Danışman : Asst. Prof. Dr. Paweł DRYGAŚ

Trabzon 2017

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında

Gül Deniz ÇAYLI Tarafından Hazırlanan

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE İDEMPOTENT UNİNORMLAR

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu 02/01/ 2018 gün ve 1734 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Refik KESKİN ....

Üye : Prof. Dr. Funda KARAÇAL ....

Üye : Prof. Dr. Belgin KÜÇÜKÖMEROĞLU ....

Üye : Doç. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU ....

Üye : Doç. Dr. Bahadır Özgür GÜLER ....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans ve Doktora eğitimim boyunca bana örnek olan ve yol gösteren, çalışma sürecinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek destek olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Funda KARAÇAL'a ve bu çalışmanın hazırlanması sürecinde önerileri ve yönlendirmeleri ile katkı sağlayan ikinci danışman hocam Sayın Asst. Prof. Dr. Paweł DRYGAŚ'a en içten duygularla teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma yüksek lisans ve doktora öğrenimim sürecinde gösterdikleri ilgi ve verdikleri bilgilerden dolayı teşekkür ederim.

Eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme, yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca maddi katkılarından dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Gül Deniz ÇAYLI
Trabzon, 2018

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Sınırlı Kafesler Üzerinde İdempotent Uninormlar" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanlarım Prof. Dr. Funda KARAÇAL ve Asst. Prof. Dr. Paweł DRYGAŚ'ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri\örnekleri kendim topladığımı, deneyleri\analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı\yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 18/01/2018

Gül Deniz ÇAYLI

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE İDEMPOTENT UNİNORMLAR

Gül Deniz ÇAYLI

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Funda KARAÇAL
İkinci Danışman: Asst. Prof. Dr. Paweł DRYGAŚ
2018, 86 Sayfa

Bu tezde esas amaç sınırlı kafesler üzerinde uninormların karakterizasyonunu vermek ve bu karakterizasyonun bir sonucu olarak elde edilen idempotent uninormların özelliklerini incelemektir.

Bu tez çalışması iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, denklik ve sıralama bağıntıları, kafesler, üçgensel normlar ve üçgensel konormlar üzerine genel bir literatür çalışması yapılarak $[0,1]$ birim aralığı, L^* kafesi, L^I kafesi ve L sınırlı kafesi üzerindeki uninormlar ile ilgili elde edilen bazı temel sonuçlardan bahsedildi.

İkinci bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir uninorm inşa etmek için iki yöntem verildi ve bu yöntemlerin bir ürünü olarak L üzerinde e birim elemanlı en küçük ve en büyük idempotent uninormlar elde edildi. İkinci kısımda, L sınırlı kafesi, $e \in L\backslash\{0,1\}$ ve $a = U(0,1) \parallel e$ için L üzerinde e birim elemanlı bir uninormun her zaman mevcut olmadığı gösterildi. Üçüncü kısımda, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde verilen lokal internal kavramı sınırlı kafesler üzerine genişletildi ve her L sınırlı kafesi üzerindeki idempotent uninormun lokal internal olması gerekmediği gösterilerek L üzerindeki bir idempotent uninormun lokal internal olması için gerekli şart verildi. Son kısımda ise, bir L sınırlı kafesi üzerine bazı varsayımlar altında L üzerinde bir azalan fonksiyon yardımıyla idempotent uninormları inşa etmek için bir yöntem verildi.

Anahtar Kelimeler: Uninorm, İdempotent uninorm, T-norm, T-konorm, Sınırlı kafes.

PhD. Thesis

SUMMARY

IDEMPOTENT UNINORMS ON BOUNDED LATTICES

Gül Deniz ÇAYLI

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Funda KARAÇAL
Second Supervisor: Asst. Prof. Dr. Paweł DRYGAŚ
2018, 86 Pages

The main aim of present thesis is to give the characterization of uninorms on bounded lattices and investigate the properties of idempotent uninorms that is obtained in reaction to this characterization.

This thesis consists of two chapters. In the first chapter, by making a general study of literature about the equivalence and order relations, lattices, triangular norms and triangular conorms, it is mentioned some main results obtained concerning uninorms on the unit interval $[0,1]$, the lattice L^I, the lattice L^* and the bounded lattice L.

The second chapter consists of four sections. In the first section, it is given two methods to construct a uninorm on a bounded lattice L with the neutral element $e \in L\backslash\{0,1\}$ and as a by-product these methods, the smallest and the greatest idempotent uninorms on L with the neutral element e are obtained. In the second section, for the bounded lattice L, $e \in L\backslash\{0,1\}$ and $a = U(0,1) \parallel e$, it is shown that there does not always exist a uninorm on L with neutral element e. In the third section, it is extended locally internal concept given on unit interval $[0,1]$ to bounded lattices and by showing an idempotent uninorm on every bounded lattice need not be locally internal, it is given a sufficient condition to an idempotent uninorm on L be locally internal. In the last section, it is given a method for constructing idempotent uninorms on a bounded lattice L by means of a decreasing function under some assumptions on L.

Key Words: Uninorm, Idempotent uninorm, T-norm, T-conorm, Bounded lattice.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

SEMBOLLER DİZİNİ

$\cap$	: Arakesit işlemi
$\cup$	: Birleşim işlemi
$\subseteq$	: Kümeler arasında alt küme bağıntısı
$X \cap Y$	: Kümelerin arakesiti
$X \cup Y$	: Kümelerin birleşimi
$X \setminus Y$	: Kümelerin farkı
X'	: Kümenin tümleyeni
$X \times Y$	: Kümelerin kartezyen çarpımı
$\overline{X}$	: X in üst sınırlarının kümesi
$\underline{X}$	: X in alt sınırlarının kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: Negatif olmayan tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$[0,1]$	: Reel birim aralık
$\emptyset$	: Boş küme
$[x, y]$	: Kapalı aralık
$]x, y[$	: Açık aralık
$[x, y[$, $]x, y]$	: Yarı açık aralıklar
$\wedge$	: Kafeste infimum işlemi
$\vee$	: Kafeste supremum işlemi
$x \wedge y$	: a ve b elemanlarının infimumu
$x \vee y$	: a ve b elemanlarının supremumu
$x \parallel y$	: a ve b elemanları kıyaslanamaz
Max	: Maksimum işlemi
Min	: Minimum işlemi
t-norm	: Üçgensel norm
t-konorm	: Üçgensel konorm

T_M	: Minimum t-norm
T_P	: Çarpım t-norm
T_L	: Lukasiewicz t-norm
T_D	: [0,1] üzerindeki drastik çarpım
$T_\wedge$	: Infimum t-normu
T_W	: Sınırlı bir kafes üzerindeki en küçük t-norm
T_e	: $[0, e]$ aralığı üzerindeki t-norm
S_M	: Maksimum t-konorm
S_L	: Lukasiewicz t-konorm (sınırlı toplam)
S_D	: Drastik toplam
S_P	: İstatistiksel toplam
$S_\vee$	: Supremum t-konormu
S_W	: Sınırlı bir kafes üzerindeki en büyük t-konorm
S_e	: $[e, 1]$ aralığı üzerindeki t-konorm
$\mathcal{U}(e)$	: Sınırlı kafes üzerinde e birim elemanlı tüm uninormların kümesi
I_e	: e elemanı ile kıyaslanamayan elemanların kümesi
$U \downarrow [0, e]$	: U uninormunun $[0, e]$ aralığına kısıtlanışı
$U \downarrow [e, 1]$	: U uninormunun $[e, 1]$ aralığına kısıtlanışı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Menger'in 1942'de 'Statistical Metrics' [62] isimli çalışmasında ortaya koyduğu üçgensel norm (t-norm) kavramı, 1960'lı yılların başlarında metrik uzayda tanımlanan üçgen eşitsizliğini olasılıksal metrik uzaylara genelleştirmek amacıyla Schweizer ve Sklar tarafından birçok makalede [65-69] detaylı olarak çalışıldı. Ayrıca, t-normlar uzaydaki iki eleman arasındaki uzaklığın bir reel sayı yerine olasılık dağılım fonksiyonları ile ölçüldüğü metrik uzaylarda çalışmaya olanak sağlar. 1980'li yılların başında t-normlar fuzzy kümelerin mantıksal bağlacını ve noktasal arakesitini modellemek amacıyla fuzzy küme topluluğu üzerinde tanımlandı.

T-normların inşası birçok yazar tarafından çeşitli şekillerde ele alındı. Klement, Mesiar ve Pap [44] ve Vicenik [71] monoton fonksiyonlar yardımıyla t-normların inşasını detaylı bir şekilde çalıştı. Marko ve Mesiar [52] sürekli Arşimedyan t-normların sonlu bir ailesi için bir nilpotent alt sınırın varlığını gösterdi. Kimberling [43] kesin t-normların inşasını ve tersinir t-norm kavramını verdi. Fakat tersinir sürekli t-normlar Fodor ve Jenei tarafından [34] karakterize edildi.

Daha genel kısmi sıralı yapılar üzerindeki t-normların ele alınması 1999 yıllarda başladı. Drossos [26] bir t-normdan yeni bir t-norm inşa etmek için topolojik ve Boolean yöntemlerini içeren monodial yapılar çerçevesinde t-normları çalıştı. De Baets ve Mesiar [19] sınırlı kısmi sıralı kümeler üzerindeki t-normlar için temel notasyonları genelleştirerek çarpım kafesleri ve çarpım posetleri üzerindeki t-normları inceledi.

Daha sonra mantık ve karar vermede t-normların matematiksel uygulamaları ile ilgilenilmeye başlandı. Calvo [4] aggregasyon operatörleri, yarı-aritmetik ortalama ve birleşmeli fonksiyonlar gibi farklı sınıflarda çalışılmasına izin veren operatörler için klasik dağılmalılık eşitliğinin yeni çözümlemeler ürettiğini gösterdi. Moser, Tsiporkova ve Klement [64] birleştirme operatörlerinin yeni sınıflarının inşa edilmesini sağlayan t-normların ve t-konormların yeni birleşimleri üzerine çalıştı. Birçok yazar, birleştirme operatörlerinin idempotent, simetri ve sıfırlayan eleman gibi birçok özellikleri üzerinde çalıştı. Bu kapsamda Mayor ve Calvo [61] farklı t-normlar ve t-konormlara dayalı sıralara göre birleştirme operatörlerinin monotonluğunu ele aldı. Bu çalışma, t-normların genelleştirilmesi olan uninorm kavramında bazı bilinen fonksiyonlarla çalışılmasını sağladı.

Uninorm birleştirme operatör kavramı ilk olarak Yager ve Rybalov tarafından [77] t-norm ve t-konormların genelleştirilmesi olarak verildi. $[0,1]$ birim aralığı üzerindeki bir uninorm artan, birleşmeli, değişmeli ve $e \in [0,1]$ birim elemanına sahip bir fonksiyondur. T-normlar ve t-konormlardan farklı olarak uninormların $e \in [0,1]$ birim elemanı $[0,1]$ birim aralığındaki herhangi bir sayı olabilir. Bir uninorm $e = 1$ ile bir t-norm ve $e = 0$ ile bir t-konorm verir. Uninormların yapısına t-norm ve t-konormların birleşimi olması sebebiyle hem teorik hem uygulama açısından son yıllarda önemli ve artan bir ilgi vardır. Uninormlar, uzman sistemler, yapay sinir ağları, bulanık mantık, birleştirme ve bulanık sistem modelleri gibi birçok alanda yararlı olduğu kanıtlanmış birleştirme operatörlerinin özel bir halidir [35, 70, 73, 74, 76]. Ayrıca uninormlar, tıbbi teşhis ile ilgili belirli faktörleri birleştiren fonksiyonlar olarak MYCIN benzeri uzman sistemlerde önemli rol oynar [3, 37]. Bir U uninormunun konjanktif uninorm ($U(0,1) = 0$) veya disjanktif uninorm ($U(0,1) = 1$) olması, uninormların fuzzy gerektirme fonksiyonlarının tanımında kullanılmasına olanak sağlar [18, 60].

Yager ve Rybalov'un [77] uninorm kavramını vermesinin ardından Fodor, Yager ve Rybalov [33] bu operatörleri detaylı bir şekilde çalıştı. Fodor, Yager ve Rybalov bu çalışmada, Ling tarafından [49] verilen ordinal toplamlara benzer bir yöntemle t-normlar ve t-konormlardan faydalanılarak uninormların inşa edilebileceğini gösterdi. Aynı çalışmada, sabit birim elemanlı uninormların keyfi bir sınıfı üzerinde en zayıf ve en güçlü uninormlar belirlendi. Ayrıca, $[0,1]$ birim aralığı üzerindeki U uninormu için $x \to U(x,1)$ ve $x \to U(x,0)$ ($x \in [0,1]$) fonksiyonları $x = e$ noktası hariç $[0,1]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar olmak üzere, uninormların U_{min} ve U_{max} ile gösterilen iki sınıfı tanımlandı.

Li ve Shi [47] uninorm birleştirme operatörünün birim elemanının yalnızca 1 (t-norm) veya 0 (t-konorm) olması durumunda uninorm birleştirme operatörünün sürekli olabileceğini gösterdi. Yani, sürekli bir uninorm birleştirme operatörü ya t-norm ya da t-konormdur. Ayrıca, t-normlar ve t-konormları kullanarak [77] de verilen uninorm birleştirme operatörlerinin yapılarını içeren bazı genel uninorm aggregasyon operatörlerini inşa etti.

Deschrijver [22] aralık değerli fuzzy küme teorisinde ne konjanktif ne de disjanktif olan uninormların varlığını göstererek bu tip uninormlar üzerine çalıştı. Aynı çalışmada, ne konjanktif ne de disjanktif olan uninormlara örnekler bulunmaktadır.

Martin, Mayor, Torrens [55] $[0,1]$ birim aralığı üzerindeki monoton (her bir değişkene göre artan) ve lokal internal olan yani her bir $(x,y) \in [0,1]^2$ için $F(x,y) \in \{x,y\}$ şartını sağlayan ikili işlemler üzerinde çalıştı. Lokal internal özelliği, Martin ve Mayor tarafından [54] bazı ek koşullar altında çalışıldı. Lokal internal fonksiyonlar aynı zamanda idempotent fonksiyonlar (her $x \in [0,1]$ için $F(x,x) = x$) olduklarından bu özellik oldukça önemlidir. Bu nedenle, lokal internal fonksiyonların çalışılması idempotent operatörlere yeni örnekler vermesi açısından önemlidir. Ayrıca lokal internal operatörler ile idempotent operatörler yakından ilişkilidir. Czogola ve Drewniak [7] birim elemanlı, birleşmeli, monoton ve idempotent operatörlerin minimum ve maksimum operatörlerin özel bir birleşimi olduğunu ve dolayısıyla lokal internal olduğunu ispatladı. De Baets [17] $[0,1]$ birim aralığı üzerindeki idempotent uninormların karakterisazyonu yaptı. Bu yapılan karakterizasyonda $[0,1]$ birim aralığı üzerindeki uninormların iki önemli sınıfı, bilinen tek idempotent uninormlar olan minimum operatörü (U_{min} sınıfı) ve maksimum operatörü (U_{max} sınıfı) ile ilgili olarak verildi. Ayrıca, [17] de verilen idempotent uninormların karakterizasyonu lokal internaldir.

De Baets, Fodor, Ruiz-Aguilera ve Torrens [20] tüm diskret uninormları yani $L_n = \{0,1,2,\ldots,n\}$ sonlu sıralama ölçeği üzerinde her $x \in L_n$ için $U(x,x) = x$ şartını sağlayan tüm uninormları karakterize etti. $e \in L_n$ birim elemanlı diskret idempotent uninormların sınıfı $g(e) = e$ koşulunun sağlayan $g: [0,e] \to [e,n]$ azalan fonksiyonların kümesi ile birebir eşlemedir öyle ki bu azalan fonksiyonların her biri L_n üzerindeki idempotent uninormları ve tersine olarak L_n üzerindeki idempotent uninormların her biri bu azalan fonksiyonları tek türlü olarak belirler. Bu eşleşme, L_n üzerindeki tüm muhtemel idempotent uninormların sayısını belirlemeye olanak sağlar.

Karaçal ve Mesiar [41] keyfi bir L sınırlı kafesi üzerinde t-normlar ve t-konormların varlığından faydalanarak $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir uninormun mevcut olduğunu gösterdi. Bunun bir sonucu olarak, L üzerinde uninormları inşa etmek için iki yöntem verildi ve bu inşa yöntemleri kullanılarak, L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı en küçük ve en büyük uninormlar elde edildi. Bu elde edilen uninormların birim elemanı $e = 1$ olması durumda t-norm ve $e = 0$ olması durumda t-konorm elde edilir. Daha sonra, Bodjanova ve Kalina [2] sınırlı kafesler üzerinde uninormları inşa etmek için farklı yöntemler verdi.

Yukarıda bahsedilen tüm çalışmaların ışığı altında, bu doktora tez çalışmasında keyfi bir L sınırlı kafesi üzerindeki $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bazı idempotent uninormların karakterizasyonu yapıldı.

Birinci bölümde, kısmen sıralı kümeler, kafesler, üçgensel normlar ve üçgensel konormlar, $[0,1]$ birim aralığı üzerindeki uninormlar, L^* kafesi üzerindeki uninormlar, L^I kafesi üzerindeki uninormlar ve L sınırlı kafesi üzerindeki uninormlar ile ilgili temel tanım ve teoremler ile bu konularda yapılan bazı çalışmalara yer verildi. Tezin ikinci bölümü dört kısma ayrıldı. Birinci kısımda, keyfi bir L sınırlı kafesi üzerinde t-normların ve t-konormların varlığı kullanılarak $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir uninorm inşa etmek için Karaçal ve Mesiar'ın [41] önerdikleri yöntemlerden farklı iki yöntem verildi. Tek idempotent t-normun (infimum) $T_\wedge: L^2 \to L$, $T_\wedge(x,y) = x \wedge y$ ve tek idempotent t-konormun (supremum) $S_\vee: L^2 \to L$, $S_\vee(x,y) = x \vee y$ olduğu göz önüne alınarak sırasıyla $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı $U: L^2 \to L$ konjanktif ve disjanktif idempotent uninormlar elde edildi. Bunun bir sonucu olarak, $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı en büyük ve en küçük idempotent uninormlar bulundu. İkinci kısımda, keyfi bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı keyfi bir idempotent uninormun konjanktif uninorm veya disjanktif uninorm olması gerekmediğine dair bir örnek verildi. Ayrıca, L sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$ ve $a \parallel e$ olmak üzere $a = U(0,1) \in L$ elemanı için L üzerinde e birim elemanlı bir uninormun her zaman mevcut olması gerekmediği ispatlandı. Üçüncü kısımda, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde verilen lokal internal kavramı sınırlı kafesler üzerine genişletilerek her L sınırlı kafesi üzerindeki idempotent uninormun lokal internal olması gerekmediği gösterildi. Bir L sınırlı kafesi üzerindeki idempotent uninormun lokal internal olması için gerekli şartlar verildi. Dördüncü kısımda, L sınırlı kafesi sonlu ve her $x \in L$ elemanı $e \in L\backslash\{0,1\}$ ile kıyaslanabilir olmak üzere, L üzerinde bir azalan fonksiyon yardımıyla e birim elemenlı bir idempotent uninorm inşa etmek için bir yöntem verildi.

1.2. Denklik ve Sıralama Bağıntıları

Tanım 1.1. [39]: S bir küme ve $\leq$, S üzerinde bir bağıntı olsun. $\leq$ bağıntsı,
(i) her $a \in S$ için $a \leq a$ ise yansıyandır.
(ii) her $a, b \in S$ için $a \leq b$ iken $b \leq a$ ise simetriktir.
(iii) her $a, b \in S$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ iken $a = b$ ise ters simetriktir.
(iv) her $a, b, c \in S$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ iken $a \leq c$ ise geçişkendir.

Eğer $\leq$ bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişken ise S üzerinde bir denklik bağıntısı olarak adlandırılır. Eğer $\leq$ bağıntısı yansıyan, ters simetrik ve geçişken ise S üzerinde bir sıralama bağıntısı (veya kısmen sıralama bağıntısı) olarak adlandırılır. Üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı tanımlanan S kümesi sıralı küme (veya kısmen sıralı küme) olarak adlandırılır ve $(S, \leq)$ şeklinde gösterilir.

$a \leq b$ olması durumunda 'b, a yı içerir' denir. Eğer $a \leq b$ ve $a \neq b$ ise, $a < b$ şeklinde gösterilir ve 'a, b de öz olarak içerilir' denir. Ayrıca '$a \leq b$ yanlış' ise, $a \nleq b$ şeklinde gösterilir. $a \nleq b$ ve $b \nleq a$ ise, 'a, b ile kıyaslanamaz' olarak adlandırılır ve $a \parallel b$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2. [39]: E bağıntısı S kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ve $a \in S$ olsun. Eğer $a\,E\,b$ ise, a elemanı E bağıntısı altında b elemanına denktir denir. a elemanına denk olan bütün elemanların kümesine a nın denklik sınıfı denir ve $E(a)$ ile gösterilir. Yani, $E(a) = \{b \in S : b\,E\,a\}$ dır. K, S kümesinin bir alt kümesi olsun. Eğer keyfi bir $a \in S$ için $K = E(a)$ ise, K alt kümesi S kümesinde E nin bir denklik sınıfı (veya E-sınıf) olarak adlandırılır. S kümesinde E nin tüm denklik sınıflarının kümesi S nin E bağıntısına göre bölüm kümesi olarak adlandırılır ve $S\,/\,E$ ile gösterilir.

Tanım 1.3. [39]: A ve B iki küme olsun. Eğer $f: A \to B$ birebir örten bir dönüşüm mevcut ise, A kümesi B kümesine eş güçlüdür denir ve $A \simeq B$ ile gösterilir. Açıkça görülmektedir ki eş güçlülük bir denklik bağıntısıdır. Bu durum, her S kümesi için bir kardinal sayı belirlememize olanak sağlar. Yani, bir S kümesinin kardinal sayısı (veya kardinalitesi), eş güçlülük denklik bağıntısı altında S nin denklik sınıfıdır. Bir S kümesinin kardinalitesi $Card(S)$ veya $|S|$ ile gösterilir.

Tanım 1.4. [39]: S bir küme olsun. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için S kümesi $\{1,2,3, \dots, n\}$ kümesine eş güçlü ise, S kümesi n kardinal sayısına sahip sonlu bir küme olarak adlandırılır. Boş küme 0 kardinal sayısına sahip sonlu bir kümedir. Bir küme sonlu değilse sonsuz küme olarak adlandırılır. Sonsuz bir kümenin kardinal sayısı sonlu ötesi bir kardinal sayı olarak adlandırılır. Eğer bir S sonsuz kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesine eş güçlü ise sayılabilir olarak adlandırılır. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin kardinal sayısı $\aleph_0$ ile gösterilir.

Tanım 1.5. [1]: $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. Her $a, b \in S$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ ise, $(S, \leq)$ kısmen sıralı kümesi zincir veya tam sıralı küme olarak adlandırılır.

Örnek 1.6. [1]: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi doğal sıralamaya göre bir tam sıralı kümedir.

Uyarı 1.7. [1]: $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun.

i) Her $a \in S$ için $x \leq a$ şartını sağlayan $x \in S$ elemanı mevcutsa, bu eleman tektir. Gerçekten, x ve y bu özelliği sağlayan iki eleman olmak üzere, $x \leq y$ ve $y \leq x$ dir. S kısmen sıralı küme olduğundan ters simetri özelliği kullanılarak $x = y$ bulunur. Böyle bir eleman (eğer mevcutsa) 0 ile gösterilir ve S nin en küçük elemanı denir.

ii) Her $b \in S$ için $b \leq y$ şartını sağlayan $y \in S$ elemanı mevcutsa, bu eleman 1 ile gösterilir ve S nin en büyük elemanı denir. Böyle bir eleman mevcutsa, tek olduğu kolaylıkla gösterilir.

Eğer 0 (en küçük) ve 1 (en büyük) elemanları mevcutsa, 0 ve 1 elemanları evrensel sınırlar olarak adlandırılır. Çünkü her $a \in S$ için $0 \leq a \leq 1$ dir.

Teorem 1.8. [1]: $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve K, S nin bir alt kümesi ise, $(K, \leq)$ kısmen sıralı bir kümedir. Özel olarak, S bir tam sıralı küme ise, K da tam sıralı kümedir.

Örnek 1.9. [1]: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi bir tam sıralı küme olduğundan $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, $\mathbb{N}_0$ pozitif doğal sayılar kümesi, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi de doğal sıralamaya göre bir tam sıralı kümedir.

Tanım 1.10. [1]: $(S, \leq_1)$ ve $(T, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme ve $\vartheta: S \to T$ bir dönüşüm olsun. Her $a, b \in S$ için,

$$a \leq_1 b \;\Rightarrow\; \vartheta(a) \leq_2 \vartheta(b)$$

sağlanıyorsa, ϑ dönüşümü sıra korur dönüşüm veya izoton olarak adlandırılır.

Tanım 1.11. [1]: $(S, \leq_1)$ ve $(T, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. Her $a, b \in S$ için,

$$\vartheta(a) \leq_2 \vartheta(b) \Leftrightarrow a \leq_1 b$$

sağlanacak şekilde birebir ve örten bir $\vartheta: S \to T$ dönüşümü mevcutsa, S ve T kısmen sıralı kümeleri izomorf olarak adlandırılır. S ve T kısmen sıralı kümeleri izomorf ise, $S \cong T$ şeklinde gösterilir.

$(S, \leq_1)$ kısmen sıralı kümesinden kendisine tanımlanan bir izomorfi otomorfi olarak adlandırılır.

Tanım 1.12. [1]: $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $x, y \in S$ olsun. Eğer $x > y$ ve $x > b > y$ koşulunu sağlayan bir $b \in S$ elemanı mevcut değilse, "x, y yi kapsar (veya örter)" denir.

Tanım 1.13. [1]: $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. S nin elemanlarının sayısı (kardinali) S nin mertebesi olarak adlandırılır ve $n(S)$ ile gösterilir. S nin elemanlarının sayısı sonlu olması durumunda, S sonlu kısmen sıralı küme olarak adlandırılır.

Kapsama bağıntısı kullanılarak herhangi bir kısmen sıralı kümenin gösterimi aşağıdaki şekilde verilebilir.

$(S, \leq)$ kısmen sıralı kümesinin her bir elemanını göstermek için küçük bir daire çizilir. Eğer $x > y$ ise, x, y den daha büyük yere yazılır ve x, y yi örttüğünden x den y ye düz bir doğru parçası çizilir. Bu elde edilen şekil, $(S, \leq)$ kısmen sıralı kümesinin bir Hasse diyagramı olarak adlandırılır.

Eğer $x > y$ ise, x den y ye düz bir doğru parçası çizildiğinden herhangi bir sonlu kısmen sıralı küme, Hasse diyagramına izomorftur. Bir $(S, \leq)$ kısmen sıralı kümesinin dualinin diyagramı, S nin diyagramındaki okları ters çevirmekle bulunur.

Tanım 1.14. [1]: $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir küme, $K \subseteq S$ ve $p \in K$ olsun.

i) Her $k \in K$ için $p \leq k$ ise, bu p elemanı K kümesinin en küçük elemanı olarak adlandırılır ve EkeK şeklinde gösterilir.

ii) Her $k \in K$ için $p \geq k$ ise, bu p elemanı K kümesinin en büyük elemanı olarak adlandırılır ve EbeK şeklinde gösterilir.

Tanım 1.15. [1]: $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir küme, $K \subseteq S$ ve $p \in K$ olsun.

i) $k < p$ olacak şekilde bir $k \in K$ elemanı mevcut değilse, bu p elemanı K kümesinin minimal elemanı olarak adlandırılır.

ii) $k > p$ olacak şekilde bir $k \in K$ elemanı mevcut değilse, bu p elemanı K kümesinin maksimal elemanı olarak adlandırılır.

En küçük eleman bir minimal eleman ve en büyük eleman bir maksimal elemandır. Fakat, tersinin doğru olması gerekmez.

Tanım 1.16. [1]: $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $K \subseteq S$ olsun.

i) $p \in S$ ve her $k \in K$ için $k \leq p$ ise, bu p elemanı K kümesinin bir üst sınırı olarak adlandırılır ve K kümesinin üst sınırlarının kümesi $\overline{K}$ ile gösterilir. Bu takdirde,

$$\overline{K} = \{p \in S \mid \forall k \in K \text{ için } k \leq p\}$$

dır.

ii) $q \in S$ ve her $k \in K$ için $q \leq k$ ise, bu q elemanı K kümesinin bir alt sınırı olarak adlandırılır ve K kümesinin alt sınırlarının kümesi $\underline{K}$ ile gösterilir. Bu takdirde,

$\underline{K} = \{q \in S \mid \forall k \in K \text{ için } \ q \leq k\}$

dır.

Tanım 1.17. [1]: Bir sonlu n zincirinin uzunluğu $n-1$ şeklinde tanımlanır. Daha genel olarak, bir S kısmen sıralı kümesinin $\ell(S)$ uzunluğu S deki sonlu zincirlerin uzunluklarının en küçük üst sınırı şeklinde tanımlanır. $\ell(S)$ uzunluğu sonlu olması durumunda, S kısmen sıralı kümesi sonlu uzunluklu olarak adlandırılır.

Tanım 1.18. [1]: $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $K \subseteq S$ olsun. $\overline{K}$ kümesinin mevcutsa en küçük elemanı K kümesinin supremumu (veya join) olarak adlandırılır ve $supK$ ile gösterilir. Dual olarak, $\underline{K}$ kümesinin mevcutsa en büyük elemanı K kümesinin infimumu (veya meet) olarak adlandırılır ve $infK$ ile gösterilir. Yani, $supK = Eke\overline{K}$ ve $infK = Ebe\underline{K}$ dir. $supK$ ve $infK$ nın (eğer mevcutsa) ters simetri özelliği yardımıyla tek olduğu gösterilir.

$(S, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $p, q \in S$ olsun. Eğer mevcutsa, $p \vee q \coloneqq \sup\{p, q\}$ ve $p \wedge q \coloneqq \inf\{p, q\}$ ile verilir. Bazen $K = \{p_\tau : \tau \in M\} \subseteq S$ için $supK = \bigvee_{\tau \in M} p_\tau$ (eğer mevcutsa) ve $infK = \bigwedge_{\tau \in M} p_\tau$ (eğer mevcutsa) şeklinde gösterilir.

1.3. Kafesler

Tanım 1.19. [1]: $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. S kısmen sıralı kümesinin herhangi iki elemanı bir en büyük alt sınıra ve bir en küçük üst sınıra sahip ise, S kısmen sıralı kümesi bir kafes olarak adlandırılır.

$(L, \leq)$ bir kafes olmak üzere, eğer L nin supremumu ve infimumu mevcutsa, $supL = 1$ ve $infL = 0$ olur.

Tanım 1.20. [1]: $(L, \leq)$ bir kafes olsun. L kafesi 0 (en küçük) ve 1 (en büyük) elemanlarına sahipse, L kafesi sınırlı kafes olarak adlandırılır.

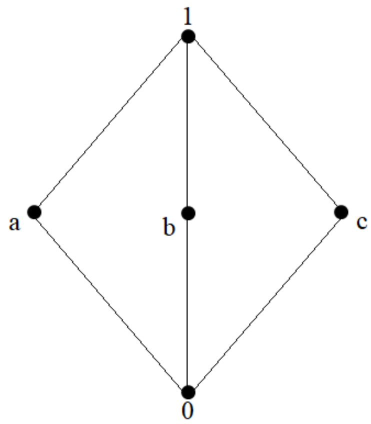
Tanım 1.21. [1]: $(L, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. L nin her K alt kümesi için $supK$ ve $infK$ mevcutsa, L kısmen sıralı kümesi tam kafes olarak adlandırılır. Her sonlu veya sonlu uzunluklu kafes tam kafestir.

Keyfi bir tam sıralı küme kafestir. Çünkü $a \wedge b$, a ve b elemanlarından küçük olanı, $a \vee b$, a ve b elemanlarından büyük olanıdır. Her kafesin tam kafes olması gerekmez.

$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi kafes olmasına rağmen tam kafes değildir. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi kafestir. Fakat $-\infty$ ve $+\infty$ evrensel sınırlar olarak kabul edilmedikçe $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi tam kafes değildir. $([0,1], \leq)$ tam sıralı kümesi bir tam kafes olup $[0,1]$ aralığına birim aralık denir.

Tanım 1.22. [1]: $(L, \leq)$ bir kafes ve $K \subseteq L$ olsun. Her $x, y \in K$ için $x \wedge y \in K$ ve $x \vee y \in K$ sağlanıyorsa, bu takdirde K kümesi L nin bir alt kafesi olarak adlandırılır.

Tanım 1.23. [1]: $(L, \leq)$ bir kafes ve K, L nin bir alt kafesi olsun. Eğer K, Şekil 1.1 de verilen M_3 kafesine izomorf ise, K elmas kafes olarak adlandırılır.



Şekil 1.1. M_3 kafesi

Tanım 1.24. [1]: $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. $x, y \in L$ ve $x \leq y$ için,

$$[x, y] = \{a \in L \mid x \leq a \leq y\},$$

$$]x, y] = \{a \in L \mid x < a \leq y\},$$

$$[x, y[= \{a \in L \mid x \leq a < y\},$$

$$]x, y[= \{a \in L \mid x < a < y\}$$

L nin alt aralıklarıdır.

Tanım 1.25. [1]: $(L, \leq)$ bir kafes olsun. Her a, b, $c \in L$ için,

i) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

ii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

denk şartlarından biri sağlanıyorsa, L kafesi dağılmalı kafes olarak adlandırılır.

Tanım 1.26. [1]: $(L, \leq)$ ve $(K, \leq)$ herhangi iki kafes ve $\vartheta: L \to K$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

i) Her a, $b \in L$ için $\vartheta(a \vee b) = \vartheta(a) \vee \vartheta(b)$ sağlanıyorsa, ϑ fonksiyonu supremum morfizm olarak adlandırılır.

ii) Her a, $b \in L$ için $\vartheta(a \wedge b) = \vartheta(a) \wedge \vartheta(b)$ sağlanıyorsa, ϑ fonksiyonu infimum morfizm olarak adlandırılır.

$\vartheta: L \to K$ fonksiyonu hem supremum-morfizm hem de infimum-morfizm ise, ϑ ye kafes morfizmi veya kısaca morfizm denir.

$(L, \leq)$ ve $(K, \leq)$ herhangi iki kafes olmak üzere, $\vartheta: L \to K$ morfizmine, bijeksiyon olması durumunda, izomorfizm; örten olması durumunda, epimorfizm; birebir olması durumunda, monomorfizm; $L = K$ olması durumunda, endomorfizm; $L = K$ ve izomorfizm olması durumunda, otomorfizm denir.

Tanım 1.27. [1]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes olsun. Bu takdirde,

i) $a \in L$ elemanı $L \backslash \{0\}$ kümesinin bir minimal elemanıysa, $a \in L$ elemanı bir atom olarak adlandırılır.

ii) $a \in L$ elemanı $L \backslash \{1\}$ kümesinin bir maksimal elemanıysa, $a \in L$ elemanı bir koatom olarak adlandırılır.

Tanım 1.28. [1]: Bir $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı kısmen sıralı kümesi $((L_i, \leq_i, 0,1))_i$ sınırlı kısmen sıralı kümelerin yatay toplamıdır : $\Leftrightarrow$ $i \neq j$ için $L_i \cap L_j = \{0,1\}$ olmak üzere $L = \bigcup_{i \in I} L_i$ ve $x \leq y$ olması için gerek ve yeter koşul $\{x, y\} \subseteq L_i$ ve $x \leq_i y$ olacak şekilde en az bir $i \in I$ mevcut olmasıdır.

Teorem 1.29. [1]: $(L, \leq, 0,1)$ bir sınırlı kafes olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) Her $x, y \in L$ için $\{x \wedge y, x \vee y\} \in \{0,1, x, y\}$

(ii) $(L, \leq, 0,1)$ zincirlerin bir yatay toplamıdır.

1.4. $[0, 1]$ Birim Aralığı Üzerinde Üçgensel Normlar

Tanım 1.30. [44]: $[0,1]$ birim aralığı üzerindeki bir üçgensel norm (kısaca t-norm) aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonudur.

T1. Her $a, b \in [0,1]$ için $T(a, b) = T(b, a)$ (Değişme özelliği),

T2. Her $a, b, c \in [0,1]$ için $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$ (Birleşme özelliği), T3. Her $a, b, c \in [0,1]$ için $b \leq c$ ise $T(a, b) \leq T(a, c)$ (Monotonluk özelliği),

T4. Her $a \in [0,1]$ için $T(a, 1) = a$ (Birim eleman veya sınır şartı özelliği).

Örnek 1.31. [44]: Temel dört t-norm T_M, T_P, T_L, T_D aşağıdaki şekildedir:

$T_M(a, b) = Min(a, b)$ (Minimum t-normu)

$T_P(a, b) = ab$ (Çarpım t-normu)

$T_L(a, b) = Max(a + b - 1,0)$ (Lukasiewicz t-normu)

$$T_D(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } (a, b) \in [0,1[^2 \text{ ise,} \\ Min(a, b) & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$ (Drastik çarpım t-normu)

Uyarı 1.32. [44]: $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ keyfi bir t-norm olsun. Bu takdirde,

i) Her $a \in [0,1]$ için $T(0, a) = T(a, 0) = 0$ ve $T(1, a) = a$ sınır koşulları sağlanır.

ii) Bir T t-normunun ikinci bileşene göre monotonluk özelliği, değişme özelliğiyle birlikte her iki bileşene göre monotonluk özelliğine eşdeğerdir. Yani, $a_1 \leq a_2$ ve $b_1 \leq b_2$ ise, $T(a_1, b_1) \leq T(a_2, b_2)$ olur.

Tanım 1.33. [44]: T_1 ve T_2, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde iki t-norm olsun. Bu takdirde,

i) Her $a, b \in [0,1]$ için $T_1(a, b) \leq T_2(a, b)$ eşitsizliği sağlanıyorsa, T_1 t-normu T_2 t-normundan daha zayıf veya T_2 t-normu T_1 t-normundan daha güçlü olarak adlandırılır ve $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ yani, en az bir $(a_0, b_0) \in [0,1]^2$ için $T_1(a_0, b_0) \neq T_2(a_0, b_0)$ ise, $T_1 < T_2$ ile gösterilir.

Uyarı 1.34. [44]:

i) $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ keyfi bir t-norm olsun. T nin monotonluk özelliği yardımıyla, her $a, b \in [0,1]$ için $T(a, b) \leq T(a, 1) = a$ ve $T(a, b) \leq T(1, b) = b$ olduğundan $T(a, b) \leq a \wedge b = T_M(a, b)$ bulunur. Ayrıca $a, b \in [0,1[$ için $T(a, b) \geq 0 = T_D(a, b)$ elde edilir. Sonuç olarak, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde keyfi bir T t-normu için $T_D \leq T \leq T_M$ eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla, en zayıf t-norm T_D ve en güçlü t-norm T_M dir.

ii) Açıkça görülmektedir ki $T_L < T_P$ olduğu için dört temel t-norm arasında $T_D < T_L < T_P < T_M$ ilişkisi vardır.

Önerme 1.35. [44]: $(0,1) \subseteq X \subseteq [0,1]$ bir küme, $\circ: X^2 \to X$ bir ikili işlem ve her $a, b, c \in X$ için, (T1), (T2), (T3) ve $a \circ b \leq Min(a, b)$ özelliği sağlansın. Bu takdirde,

$$T(a, b) = \begin{cases} a \circ b & \text{eğer } (a, b) \in (X \setminus \{1\})^2 \text{ ise,} \\ Min(a, b) & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ dönüşümü bir t-normdur. Ayrıca, T nin $(X \backslash \{1\})^2$ kümesi üzerine kısıtlanışı, $\circ$ işleminin $(X \backslash \{1\})^2$ üzerine kısıtlanışı ile çakışan tek t-normdur.

Tanım 1.36. [44]: Her $a, b, c \in [0,1]$ için, (T1), (T2), (T3) özellikleri ile birlikte $A(a, b) \leq Min(a, b)$ özelliğini sağlayan bir $A: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-altnorm olarak adlandırılır.

Açıkça görülmektedir ki, her t-norm bir t-altnormdur. Fakat tersinin doğru olması gerekmez. Örneğin, sıfır fonksiyonu, yani $A(x, y) = 0$ şeklinde verilen $A: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-altnorm olmasına rağmen bir t-norm değildir.

Sonuç 1.37. [44]: $A: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir t-altnorm olsun. Bu takdirde,

$$T(a, b) = \begin{cases} A(a, b) & \text{eğer } (a, b) \in [0,1[^2 \text{ ise,} \\ Min(a, b) & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur.

Önerme 1.38. [44]:

i) Her $a \in [0,1]$ için $T(a, a) = a$ koşulunu sağlayan tek t-norm, T_M minimum t-normudur.

ii) Her $a \in [0,1[$ için $T(a, a) = 0$ koşulunu sağlayan tek t-norm, T_D drastik çarpım t-normudur.

Uyarı 1.39. [44]:

i) Her T t-normu, (T2) birleşme özelliği ve indüksiyon yardımıyla aşağıdaki n-li işleme genişletilebilir. Yani, her $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in [0,1]^n$ n-sıralısı için

$$T_{i=1}^{n} a_i = T(T_{i=1}^{n-1} a_i, a_n)$$

olur. Özel olarak $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ alınırsa, kısaca

$$a_T^{(n)} = T(a, a, \dots, a)$$

yazılabilir. Bu takdirde, $a_T^{(0)} = 1$ ve $a_T^{(n)} = a$ şeklinde tanımlanır.

ii) $[0,1]$ in elemanlarının her $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dizisi yani $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ için,

$$T_{i=1}^{\infty} a_i = lim_{n \to \infty} T_{i=1}^{n} a_i \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanır.

iii) Keyfi bir I indis kümesi ve her $(a_i)_{i \in I} \in [0,1]^I$ için, yani $[0,1]$ birim aralığındaki elemanların her $(a_i)_{i \in I}$ ailesi için aşağıda verilen ifade iyi tanımlıdır ve (1.1) in bir genelleştirmesidir.

$$T_{i \in I} a_i = inf\left\{T_{j=1}^{k} a_j : \left(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\right), (a_i)_{i \in I} \text{ nın sonlu bir alt ailesidir}\right\}$$

Örnek 1.40. [44]: T_M minimum ve T_P çarpım t- normlarının n-li genişlemelerinin

$$T_M(a_1, a_2, \dots, a_n) = Min(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

ve

$$T_P(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

şeklinde olduğu açıktır. T_L Lukasiewicz t-normunun ve T_D drastik çarpım t-normunun n-li genişlemeleri

$$T_L(a_1, a_2, \dots, a_n) = Max(\sum_{i=1}^{n} a_i - (n-1), 0)$$

ve

$$T_D(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} a_i & \text{her } j \neq i \text{ için } a_j = 1 \text{ ise,} \\ 0 & \text{aksi durumda,} \end{cases}$$

şeklindedir.

Aşağıdaki [0,1] birim aralığı üzerinde tanımlı dönüşümlerden görüldüğü üzere Tanım 1.30 deki (T1)-(T4) aksiyomları birbirinden bağımsızdır. Bu örnekteki fonksiyonlardan her biri (T1)-(T4) aksiyomlarından sadece birini sağlamaz.

Örnek 1.41. [44]: $i = 1,2,3,4$ için $A_i: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonları sırasıyla

$$A_1(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } (a, b) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \times [0,1[\text{ ise,} \\ Min(a, b) & \text{aksi durumda,} \end{cases}$$

$$A_2(a, b) = abMax(a, b)$$

$$A_3(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{eğer } (a, b) \in]0,1[^2 \text{ ise,} \\ Min(a, b) & \text{aksi durumda,} \end{cases}$$

$$A_4(a, b) = 0$$

şeklinde tanımlansın. Açıkça her bir $A_i: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu (Ti) dışındaki (T1)-(T4) aksiyomlarını sağlar.

1.5. $[0, 1]$ Birim Aralığı Üzerinde Üçgensel Konormlar

Tanım 1.42. [44]: [0,1] birim aralığı üzerindeki bir üçgensel konorm (kısaca t-konorm) aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $S: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonudur.

S1. Her $a, b \in [0,1]$ için $S(a, b) = S(b, a)$ (Değişme özelliği),

S2. Her $a, b, c \in [0,1]$ için $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$ (Birleşme özelliği),

S3. Her $a, b, c \in [0,1]$ için $b \leq c$ ise $S(a, b) \leq S(a, c)$ (Monotonluk özelliği),

S4. Her $a \in [0,1]$ için $S(a, 0) = a$ (Birim eleman veya sınır şartı özelliği).

Örnek 1.43. [44]: Dört temel t-konorm S_M, S_P, S_L, S_D aşağıdaki gibidir:

$S_M(a,b) = Max(a,b)$ (Maksimum t-konormu).

$S_P(a,b) = a + b - ab$ (Olasılıksal toplam t-konormu).

$S_L(a,b) = Min(a + b, 1)$ (Lukasiewicz t-konorm, sınırlı toplam).

$S_D(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } (a,b) \in\,]0,1]^2 \text{ ise,} \\ Max(a,b) & \text{aksi durumda.} \end{cases}$ (Drastik toplam t-konormu).

Önerme 1.44. [44]: $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonunun bir t-konorm olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in [0,1]$ için

$$S(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b)$$

eşitliğini sağlayan bir T t-normunun var olmasıdır. Buradaki S t-konormu, T t-normunun dual t-konormu olarak adlandırılır. Benzer şekilde her $a, b \in [0,1]$ için,

$$T(a,b) = 1 - S(1-a, 1-b)$$

şeklindeki T t-normu, S t-konormunun dual t-normu olarak adlandırılır.

(T_M, S_M), (T_P, S_P), (T_L, S_L) ve (T_D, S_D) ikişer tarzda birbirine dual t-norm ve t-konormlardır.

Uyarı 1.45. [44]: S: $[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ keyfi bir t-konorm olsun. Bu takdirde,

i) Her $a \in [0,1]$ için $S(1,a) = S(a,1) = 1$ ve $S(0,a) = a$ sınır koşulları sağlanır.

ii) T_1 ve T_2 t-normları için $T_1 \leq T_2$, S_1 ve S_2, sırasıyla T_1 , T_2 ye karşılık gelen dual t-konormlarsa, $S_2 \leq S_1$ dir. Sonuç olarak, her S t-konormu için $S_M \leq S \leq S_D$ sağlanır. Buna göre, en zayıf t-konorm S_M ve en güçlü t-konorm S_D dir.

Önerme 1.46. [44]: Her $a \in [0,1]$ için $S(a,a) = a$ şartını sağlayan tek S t-konormu, S_M maksimumdur.

Uyarı 1.47. [44]: Verilen bir S t-konormu için Uyarı 1.39 e benzer şekilde $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in [0,1]^n$ n-sıralılarına, $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizilerine ve I keyfi küme olmak üzere, $(a_i)_{i \in I} \in [0,1]^I$ ailelerine genişletme işlemi aşağıdaki gibidir:

$$S_{i=1}^{n} a_i = S(S_{i=1}^{n-1} a_i, a_n)$$

$$S_{i=1}^{\infty} a_i = lim_{n \to \infty} S_{i=1}^{n} a_i$$

$$S_{i \in I} a_i = sup\{S_{j=1}^{k} x_j : (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}), (a_i)_{i \in I} \text{ nın sonlu bir alt ailesidir}\}$$

Örnek 1.48. [44]: S_M maksimum t-konormunun n-li genişlemesinin

$$S_M(a_1, a_2, \dots, a_n) = Max(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

olduğu açıkça görülür. S_P istatistiksel toplam, S_L Lukasiewicz t-konorm ve S_D drastik toplam için n-li genişlemeler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$S_P(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - a_i)$$

$$S_L(a_1, a_2, \dots, a_n) = Min\left(\sum_{i=1}^{n} a_i, 1\right)$$

$$S_D(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} a_i & \text{her } j \neq i \text{ için } a_j = 0 \text{ ise,} \\ 1 & \text{aksi durumda,} \end{cases}$$

1.6. Birleştirme Fonksiyonları

n sıfırdan farklı bir doğal sayı ve $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. n-sıralıları göstermek için genellikle $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ yerine $\boldsymbol{a}$ sembolü kullanılır.

Tanım 1.49. [36]: $[0,1]^n$ üzerinde bir birleştirme fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlayan bir $A^{(n)}: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ fonksiyonudur.

i) $A^{(n)}$ her bir değişkene göre azalmayandır.

ii) $A^{(n)}(0,0, \dots, 0) = 0$ ve $A^{(n)}(1,1, \dots, 1) = 1$ sınır koşulları sağlanır.

Birleştirme fonksiyonunun değişkenleri ortak bir $\mathbb{I}$ bölgesine aittir. Burada $\mathbb{I}$ bölgesi boştan farklı bir reel aralıktır, sınırlı bir aralıktır veya değildir. Bazı istisnai durumlar dışında $\mathbb{I}$ aralığı $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ genişletilmiş reel sayılar kümesinin boştan farklı bir aralığını göstermektedir.

Keyfi bir K sayılabilir kümesi için σ_K, K kümesi üzerindeki tüm permütasyonların kümesini temsil etsin. Keyfi bir $A \subseteq K$ kümesi ve $\sigma \in \sigma_K$ için $\sigma(A) := \{\sigma(a) | a \in A\}$ şeklinde verilsin. Keyfi bir $\sigma \in \sigma_{[n]}$ permütasyonu için

$$\mathbb{I}_\sigma^n := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{I}^n | a_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq a_{\sigma(n)}\}$$

ve verilen keyfi $\boldsymbol{a}$ n-sıralısı ve bir $\sigma \in \sigma_{[n]}$ permütasyonu için $[\boldsymbol{a}]_\sigma := (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$ olarak tanımlansın.

Cebirde, simetri özelliği, değişme özelliği olarak da bilinir. Herhangi bir ikili işlemdeki değişme özelliği $a * b = b * a$ şeklinde olup, kolay bir şekilde $n \geq 2$ için n-li fonksiyonlara genelleştirilir.

Tanım 1.50. [36]: Bir $A: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. Her $\boldsymbol{a} \in \mathbb{I}^n$ ve $\sigma \in \mathcal{O}_{[n]}$ için, $F(\boldsymbol{a}) = F([\boldsymbol{a}]_\sigma)$ sağlanıyorsa, A fonksiyonu simetrik fonksiyon olarak adlandırılır.

Tanım 1.51. [36]: Bir $A: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $Min \leq A \leq Max$ eşitsizliği sağlanıyorsa, A fonksiyonu internal olarak adlandırılır.

Tanım 1.52. [36]: Bir $A: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu, $b = F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ şeklinde tanımlanan n bağımsız değişkenli bir fonksiyon olacak şekilde verilsin. Her bir $a_1, a_2, \dots, a_n$ bir N sayısıyla yer değiştirdiğinde fonksiyonun değeri sabit kalıyorsa, yani,

$$A(N, N, \dots, N) = A(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

sağlanıyorsa, A fonksiyonuna göre $a_1, a_2, \dots, a_n$ nin ortalaması N sayısıdır denir.

Tanım 1.53. [36]: $\mathbb{I}^n$ üzerinde bir n-li ortalama fonksiyonu, $N: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ bir internal birleştirme fonksiyonudur.

Tanım 1.54. [36]: L sınırlı bir kafes ve $n \in \mathbb{N}$ sabit olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $A^{(n)}: L^n \to L$ fonksiyonuna, L üzerinde (n-li) birleştirme fonksiyonu denir.

i) $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ (yani $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$) ise $A^{(n)}(\boldsymbol{a}) \leq A^{(n)}(\boldsymbol{b})$ (Monotonluk özelliği),

ii) $A^{(n)}(0,0 \dots,0) = 0$ ve $A^{(n)}(1,1 \dots 1) = 1$ (Sınır şartları).

1.7. $[0, 1]$ Birim Aralığı Üzerinde Uninormlar

Tanım 1.55. [77]: $[0,1]$ birim aralığı üzerindeki bir uninorm aşağıdaki koşulları sağlayan bir $U: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonudur.

U1. Her $a, b \in [0,1]$ için $U(a, b) = U(b, a)$ (Değişme özelliği),

U2. Her $a, b, c \in [0,1]$ için $U\big(a, U(b, c)\big) = U(U(a, b), c)$ (Birleşme özelliği),

U3. Her $a, b, c \in [0,1]$ için $b \leq c$ ise $\mathrm{U}(a, b) \leq U(a, c)$ (Monotonluk özelliği),

U4. Bir $e \in [0,1]$ elemanı her $a \in [0,1]$ için $\mathrm{U}(a, e) = a$ olacak şekilde mevcuttur. (Birim eleman özelliği).

Uninormlar, t-normlar ve t-konormların tanımında verilen aynı ilk üç özelliğe sahiptir. T-norm $e = 1$ ile, t-konorm $e = 0$ ile uninormların özel bir durumudur.

Teorem 1.56. [77]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun. $\bar{a} = 1 - a$ olmak üzere,

$$\widehat{U}(a, b) = 1 - U\big(\bar{a}, \bar{b}\big)$$

şeklinde tanımlanan $\widehat{U}: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde $\bar{e} = 1 - e$ birim elemanlı bir uninormdur.

Lemma 1.57. [77]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde,

i) Keyfi bir $a \in [0,1]$ ve her $b \in]e, 1]$ için $U(a, b) \geq a$ elde edilir.

ii) Keyfi bir $a \in [0,1]$ ve her $b \in [0, e[$ için $U(a, b) \leq a$ elde edilir.

Teorem 1.58. [77]: $U: [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde,

i) $a_{n+1} \in [0, e[$ ise, $U(a_1, \dots, a_n) \geq U(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ dır.

ii) $a_{n+1} \in]e, 1]$ ise, $U(a_1, \dots, a_n) \leq U(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ dır.

Aşağıdaki teorem sınır koşulunu uninormlar için genelleştirir.

Teorem 1.59. [77]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde,

i) Her $a \in [0, e]$ için $U(a, 0) = 0$ olur.

ii) Her $a \in [e, 1]$ için $U(a, 1) = 1$ olur.

Sonuç 1.60. [77]:

(i) $e = 0$ olması durumunda, her $a \in [0,1]$ için $U(a, 1) = 1$ olur. Bu takdirde, U bir t-konormdur.

(ii) $e = 1$ olması durumunda, her $a \in [0,1]$ için $U(a, 0) = 0$ olur. Bu takdirde, U bir t-normdur.

Tanım 1.61. [55]: $F: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ bir ikili işlem olsun. Eğer her x, $y \in [0,1]$ için $F(x, y) \in \{x, y\}$ ise, F lokal internal ikili işlem olarak adlandırılır.

Lemma 1.62. [55]: $F: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ lokal internal bir ikili işlem olsun. Her a, b, $c \in [0,1]$ için $F\big(a, F(b, c)\big) = F(F(a, b), c)$ olması için gerek ve yeter şart $F(a, b)$, $F(a, c)$ ve $F(b, c)$ değerlerinden en az ikisinin aynı olmasıdır.

Lemma 1.63. [55]: $F: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ lokal internal, monoton bir ikili işlem ve a, b, $c \in [0,1]$ öyle ki F nin $\{a, b, c\}$ kümesine kısıtlanışı değişmeli olsun. Bu takdirde, $F\big(a, F(b, c)\big) = F(F(a, b), c)$ eşitliği sağlanır.

Lemma 1.62 ve Lemma 1.63 ün bir sonucu olarak aşağıdaki önerme, lokal internal ve monoton ikili işlemler için değişme ve birleşme özellikleri arasındaki ilişkiyi gösterir.

Önerme 1.64. [55]: $F: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ lokal internal ve monoton bir ikili işlem olsun. Eğer Fdeğişmeli ise birleşmelidir.

Önerme 1.65. [55]: $F: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ birim elemanlı idempotent, birleşmeli ve monoton bir ikili işlem olsun. Bu takdirde F lokal internaldir.

1.7.1. $[0,1]$ Birim Aralığı Üzerinde Uninormların Bir Ailesi

Teorem 1.66. [17]: $\underline{U}: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu,

$$\underline{U}(a,b) = \begin{cases} Max(a,b) & \text{eğer } (a,b) \in [e,1]^2 \text{ ise,} \\ Min(a,b) & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu takdirde, $\underline{U}$ fonksiyonu $[0,1]$ birim aralığı üzerinde e birim elemanlı bir uninorm olur.

Aşağıdaki Teorem, Teorem 1.66 ye dual olarak verilebilir.

Teorem 1.67. [17]: $\overline{U}: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu

$$\overline{U}(a,b) = \begin{cases} Min(a,b) & \text{eğer } (a,b) \in [0,e]^2 \text{ ise,} \\ Max(a,b) & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu takdirde, $\overline{U}$ fonksiyonu $[0,1]$ birim aralığı üzerinde e birim elemanlı bir uninorm olur.

$\underline{U}$ ve $\overline{U}$ uninormları sırasıyla $e \neq 1, 0$ iken ne t-norm ne de t-konorm olur.

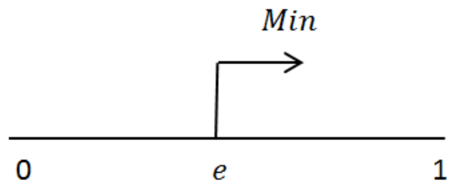
Teorem 1.68. [77]: $\underline{U}: [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ bir uninorm olsun. $Min(a_1, \dots, a_n) < e$ olması durumunda, $\underline{U}(a_1, \dots, a_n) = Min(a_1, \dots, a_n)$, aksi durumda $\underline{U}(a_1, \dots, a_n) = Max(a_1, \dots, a_n)$ olur.

Bu teorem, $\underline{U}$ uninormu için en az bir bileşen e den küçük ise, minimum operatörünün kullanılacağını göstermektedir.

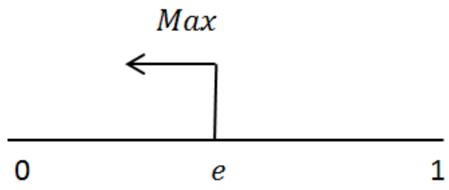
Teorem 1.69. [77]: $\overline{U}: [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ bir uninorm olsun. $Max(a_1, \dots, a_n) > e$ olması durumunda, $\overline{U}(a_1, \dots, a_n) = Max(a_1, \dots, a_n)$, aksi durumda $\overline{U}(a_1, \dots, a_n) = Min(a_1, \dots, a_n)$ olur.

Bu nedenle, $\overline{U}$ uninormu için en az bir bileşenin e den büyük olması durumunda, maksimum operatörü kullanılır.

Şekil 1.2 ve Şekil 1.3, $\underline{U}$ ve $\overline{U}$ uninormlarının işleyişini göstermektedir.



Şekil 1.2. $\underline{U}$ fonksiyonu



Şekil 1.3. $\overline{U}$ fonksiyonu

Şekil 1.2 ve Şekil 1.3, tüm elemanlar e birim elemanının solundaysa, Min fonksiyonunun ve tüm elemanlar e birim elemanının sağındaysa, Max fonksiyonunun kullanılacağını gösterir. Şekil 1.2'de, elemanlar e birim elemanın her iki tarafında olması durumunda, $\underline{U}$ fonksiyonunun Min fonksiyonunu ve Şekil 1.3'de, elemanlar e birim elemanın her iki tarafında olması durumunda, $\overline{U}$ fonksiyonunun Max fonksiyonunu gösterdiği anlaşılır.

1.7.2. $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ Birim Aralığı Üzerinde Uninormların Yapısı

Tanım 1.70. [17]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ keyfi bir uninorm olsun.

i) $a \in [0,1]$ için $U(a, a) = a$ sağlanıyorsa, a elemanı U uninormunun bir idempotent elemanı olarak adlandırılır.

ii) Her $a \in [0,1]$ için $U(a, a) = a$ sağlanıyorsa, U uninormu idempotent uninorm olarak adlandırılır.

Açık olarak $[0,1]$ birim aralığı üzerinde, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir U uninormu için $U(e, e) = e$ olduğundan U uninormunun birim elemanı idempotent ve tektir.

Teorem 1.66 da verilen $\underline{U}$ uninormu ve Teorem 1.67 de verilen $\overline{U}$ unimormu $[0,1]$ birim aralığı üzerinde e birim elemanlı idempotent uninormlardır.

Teorem 1.71. [17]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun.

i) $e \in]0,1]$ ise,

$$T_U(a, b) = \frac{U(ea, eb)}{e}$$

şeklinde tanımlanan T_U fonksiyonu bir t-normdur.

ii) $e \in [0,1[$ ise,

$$S_U(a, b) = \frac{U(e+(1-e)a, e+(1-e)b)-e}{1-e}$$

şeklinde tanımlanan S_U fonksiyonu bir t-konormdur.

Bu nedenle, $[0,e]^2$ ve $[e,1]^2$ kareleri üzerinde $e \in]0,1[$ birim elemanlı bir uninormun yapısı t-normlar ve t-konormlarla yakından ilişkilidir. $e \in]0,1[$ için, ϕ_e ve ψ_e lineer dönüşümleri $\phi_e(a) = \frac{a}{e}$ ve $\psi_e(b) = \frac{b-e}{1-e}$ ile tanımlansın. Teorem 1.71 gözönüne alınırsa, $e \in]0,1[$ birim elemanlı bir U uninormuna bir T t-normu ve bir S t-konormu karşılık gelir öyleki

i) Her $(a,b) \in [0,e]^2$ için $U(a,b) = {\phi_e}^{-1}\left(T\left(\phi_e(a), \phi_e(b)\right)\right)$ (1.2)

ii) Her $(a,b) \in [e,1]^2$ için $U(a,b) = {\psi_e}^{-1}\left(S\left(\psi_e(a), \psi_e(b)\right)\right)$ (1.3)

dır.

Örnek 1.72. [17]:

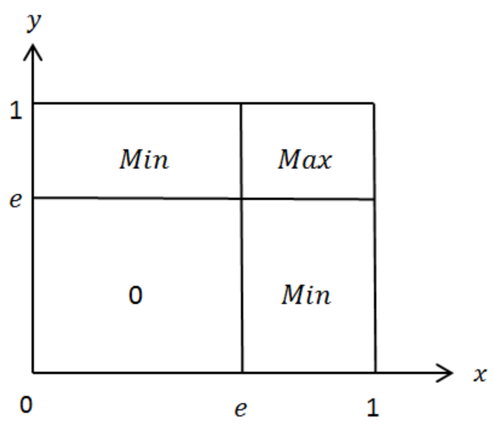
$$U(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } a = 0 \text{ veya } b = 0 \text{ ise,} \\ \frac{ab}{(1-a)(1-b)+ab} & \text{eğer } a > 0 \text{ ve } b > 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

formülü $e = \frac{1}{2}$ birim elemanlı bir uninorm verir. Burada, $T(a,b) = \frac{ab}{2-(a+b-2ab)}$ ve $S(a,b) = \frac{a+b}{1+ab}$ şeklinde olur.

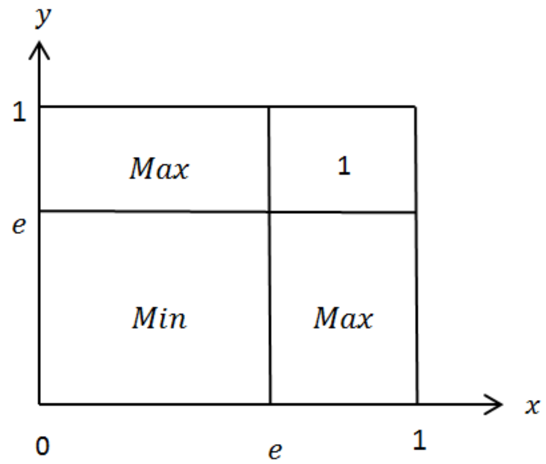
Aşağıdaki lemma, $[0,e] \times [e,1]$ ve $[e,1] \times [0,e]$ bölgeleri üzerindeki U uninormunun tanımından elde edilir.

Lemma 1.73. [33]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun. $a \leq e \leq b$ veya $a \geq e \geq b$ ise, $Min(a,b) \leq U(a,b) \leq Max(a,b)$ sağlanır.

Lemma 1.73 e göre, $[0,e] \times [e,1]$ ve $[e,1] \times [0,e]$ bölgeleri üzerinde $Min(a,b) \leq U(a,b) \leq Max(a,b)$ olur. Bu eşitsizlikler kullanılarak $[0,1]$ birim aralığı üzerinde keyfi bir birim elemana sahip en zayıf uninorm ve en güçlü uninorm, Şekil 1.4 ve Şekil 1.5 deki gibi gösterilir.



Şekil 1.4. En zayıf uninorm U_e



Şekil 1.5. En güçlü uninorm U^e

Önerme 1.74. [33]: $[0,1]$ birim aralığı üzerindeki $e \in]0,1[$ birim elemanlı keyfi bir U uninormu için,

$$U_e(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } 0 \le a,b < e \text{ ise,} \\ Max(a,b) & \text{eğer } e \le a,b \le 1 \text{ ise,} \\ Min(a,b) & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

ve

$$U^e(a,b) = \begin{cases} Min(a,b) & \text{eğer } 0 \le a,b \le e \text{ ise,} \\ 1 & \text{eğer } e < a,b \le 1 \text{ ise,} \\ Max(a,b) & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

olmak üzere $U_e(a,b) \le U(a,b) \le U^e(a,b)$ bulunur.

1.7.3. $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ Birim Aralığı Üzerinde Uninormların Sürekliliği

Lemma 1.75. [47]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, $U(0,0) = 0$ ve $U(1,1) = 1$ dir.

$[0,1]$ birim aralığı üzerinde keyfi bir T t-normu için $T(0,1) = 0$ ve keyfi bir S t-konormu için $S(0,1) = 1$ olduğu tanımlarından açıkça görülmektedir. O halde $[0,1]$ birim aralığı üzerinde keyfi bir U uninormu için $U(0,1)$ in alabileceği değerler araştırılacaktır.

Lemma 1.76. [33]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, her $a \in [0,1]$ için $U(0,1) = U(U(0,1), a)$ olur.

Sonuç 1.77. [33]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, $U(0,1) = 0$ veya $U(0,1) = 1$ olur.

Sonuç 1.77 ile, $U(0,1)$ in tanımı için iki uygun yol vardır. $U(0,1) = 0$ olması durumunda, U uninormuna konjanktif uninorm ve $U(0,1) = 1$ olması durumunda, U uninormuna disjanktif uninorm denir.

Önerme 1.78. [47]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde,

i) $U(0,1) = 0$ ise, keyfi bir $a \in [0,1]$ için $U(0,a) = 0$ ve $U(1,a) \geq a$ elde edilir.

ii) $U(0,1) = 1$ ise, keyfi bir $a \in [0,1]$ için $U(1,a) = 1$ ve $U(0,a) \leq a$ elde edilir.

Teorem 1.79. [47]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı sürekli bir uninorm ise, $e = 0$ veya $e = 1$ dir. Yani, U uninormu sürekli bir t-norm veya sürekli bir t-konormdur.

Teorem 1.79 ile $[0,1]$ birim aralığı üzerindeki sürekli uninormların yapıları açıktır. Fakat e birim elemanı 0 veya 1 e eşit değilse, uninorm sürekli değildir.

Keyfi bir $a \in [0,1]$ elemanı için $a \rightarrow U(a,1)$ ve $a \rightarrow U(a,0)$ dönüşümleri, $[0,e] \times [e,1]$ ve $[e,1] \times [0,e]$ dikdörtgenleri üzerinde U uninormunun değerini belirlemede önemli rol oynar.

Önerme 1.80. [33]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm ve keyfi bir $a \in [0,1]$ elemenı için $a \rightarrow U(a,1)$ ve $a \rightarrow U(a,0)$ dönüşümleri $x = e$ noktası haricinde her noktada sürekli olsun.

i) $U(0,1) = 0$ ise, her $a \in [0,e[$ için $U(a,1) = a$ bulunur.

ii) $U(0,1) = 1$ ise, her $a \in]e,1]$ için $U(a,0) = a$ bulunur.

Şimdi Önerme 1.80 yardımıyla uninormların genel formları gösterilsin.

Teorem 1.81. [17]:

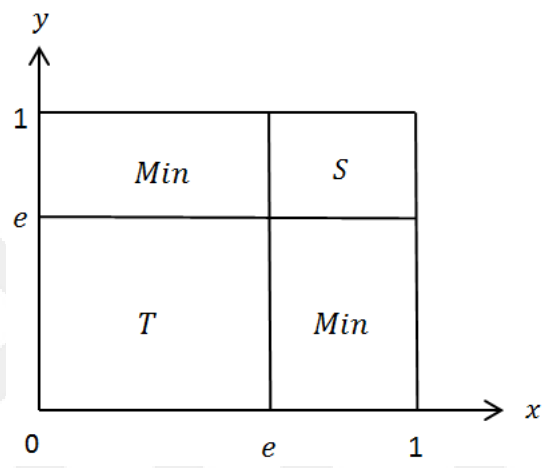
i) U nun $e \in]0,1]$ birim elemanlı ve $U(.,1)$ nın $[0,e[$ üzerinde sürekli bir konjanktif uninorm olması için gerek ve yeter koşul bir T t-normunun ve bir S t-konormunun aşağıdaki eşitlik sağlanacak şekilde var olmasıdır.

$$U(a,b) = \begin{cases} \phi_e^{-1}\left(T\big(\phi_e(a), \phi_e(b)\big)\right) & \text{eğer } 0 \leq a,b \leq e \text{ ise,} \\ \psi_e^{-1}\left(S\big(\psi_e(a), \psi_e(b)\big)\right) & \text{eğer } e \leq a,b \leq 1 \text{ ise,} \\ Min(a,b) & \text{aksi durumda.} \end{cases} \tag{1.4}$$

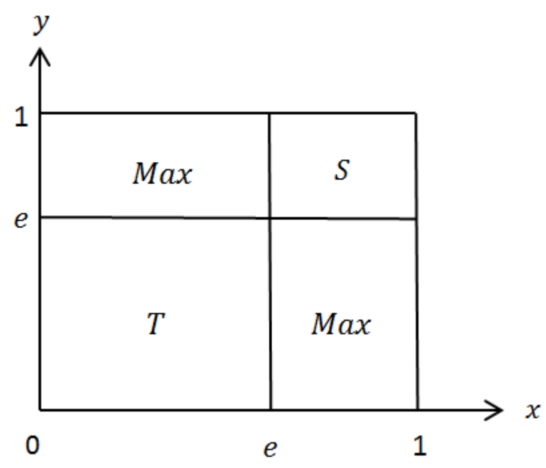
ii) U nun $e \in [0,1[$ birim elemanlı ve $U(.,0)$ nın $]e,1]$ üzerinde sürekli bir disjanktif uninorm olması için gerek ve yeter koşul bir T t-normunun ve bir S t-konormunun aşağıdaki eşitlik sağlanacak şekilde var olmasıdır.

$$U(a,b)=\begin{cases}\phi_e{}^{-1}\big(T\big(\phi_e(a),\phi_e(b)\big)\big) & \text{eğer } 0\le a,b\le e \text{ ise,}\\ \psi_e{}^{-1}\big(S\big(\psi_e(a),\psi_e(b)\big)\big) & \text{eğer } e\le a,b\le 1 \text{ ise,}\\ Max(a,b) & \text{aksi durumda.}\end{cases} \tag{1.5}$$

(1.4) formülü ile verilen uninormların sınıfı U_{Min} ve (1.5) formülü ile verilen uninormların sınıfı U_{Max} ile gösterilsin. Buna göre, U_{Min} ve U_{Max} ailelerin genel elemanları sırasıyla Şekil 1.6 ve Şekil 1.7 ile verilir.



Şekil 1.6. U_{Min} uninormunun bir sınıfı



Şekil 1.7. U_{Max} uninormunun bir sınıfı

1.7.4. $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ Birim Aralığı Üzerinde İdempotent Uninormlar

$A(e) \coloneqq [0,e] \times [e,1] \cup [e,1] \times [0,e]$ bölgesinde U uninormu üzerine ek varsayımlar altında kesin bir formülle U uninornunun bir gösterimi elde edilir.

Lemma 1.82. [25]: $U: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu, artan, $e \in]0,1[$ birim elemanına sahip ve $A(e)$ bölgesi üzerinde $U(a,b) \in \{a,b\}$ ise, bu takdirde e sabit noktalı yani $g(e) = e$ koşulunu sağlayan bir azalan $g: [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu mevcuttur öyleki $A(e)$ üzerinde

$$U(a,b) = \begin{cases} Min(a,b) & \text{eğer } b < g(a) \text{ ise,} \\ Max(a,b) & \text{eğer } b > g(a) \text{ ise,} \\ a \text{ veya } b & \text{eğer } b = g(a) \text{ ise.} \end{cases} \tag{1.6}$$

şeklinde verilir.

Lemma 1.82 de açıkça görülmektedir ki $U(a,b) \in \{a,b\}$ varsayımı U uninormunun idempotent oluşunu garanti eder. Bununla birlikte $A(e)$ bölgesi üzerinde $a = b$ alamayız. Şimdi tüm bölgeler üzerinde (1.6) ile verilen formül göz önüne alınsın .

Teorem 1.83. [25]: $g: [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu $e \in]0,1[$ sabit noktalı yani $g(e) = e$ koşulunu sağlayan bir azalan fonksiyon olsun. Bu takdirde, $[0,1]$ üzerinde

$$U(a,b) = \begin{cases} Min(a,b) & \text{eğer } b < g(a) \text{ ise,} \\ Max(a,b) & \text{eğer } b > g(a) \text{ ise,} \\ a \text{ veya } b & \text{eğer } b = g(a) \text{ ise.} \end{cases} \tag{1.8}$$

şeklinde tanımlanan $U: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonunun değişmeli olması durumunda, U uninormdur.

Tanım 1.84. [46]: $N: [0,1] \to [0,1]$ bir fonksiyon olsun. N fonksiyonu, azalan, $N(0) = 1$ ve $N(1) = 0$ koşullarını sağlıyorsa, N fonksiyonuna negasyon denir.

Tanım 1.85. [46]: $N: [0,1] \to [0,1]$ bir negasyon olsun. N negasyonu involutif yani, her $a \in [0,1]$ için $N\big(N(a)\big) = a$ ise, N ye güçlü negasyon denir.

Teorem 1.83 deki değişme özelliği varsayımına g fonksiyonunun involutif özelliği karşılık getirilebilir.

Teorem 1.86. [25]: $N: [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu $e \in]0,1[$ sabit noktalı yani, $N(e) = e$ koşulunu sağlayan bir güçlü negasyon olsun. Bu takdirde,

$$U(a,b) = \begin{cases} Min(a,b) & \text{eğer } b \leq N(a) \text{ ise,} \\ Max(a,b) & \text{aksi durumda.} \end{cases} \tag{1.9}$$

formülü bir konjanktif sol-sürekli idempotent uninorm ve

$$U(a,b) = \begin{cases} Min(a,b) & \text{eğer } b < N(a) \text{ ise,} \\ Max(a,b) & \text{aksi durumda.} \end{cases} \tag{1.10}$$

formülü bir disjanktif sağ-sürekli idempotent uninorm verir.

$N: [0,1] \to [0,1]$ bir negasyon olsun. (1.2), (1.3) ve (1.6) formüllerine dayalı yapılar genelde uninorm vermez.

Örnek 1.87. [25]: $N: [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu $a \in [0,1]$ için $N(a) = 1 - a$ şeklinde tanımlanan bir negasyon olsun. Bu takdirde, $a, b \in [0,1]$ için

$$U(a,b) = \begin{cases} 2ab & \text{eğer } a, b \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ ise,} \\ Max(a,b) & \text{eğer } b > N(a) \text{ ise,} \\ Min(a,b) & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $U: [0,1]^2 \to [0,1]$ işlemi birleşmeli özelliğini sağlamaz. Gerçekten, $a = b = \frac{1}{4}$ ve $c = \frac{13}{16}$ için,

$$U(U(a,b),c) = U\left(U\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),\frac{13}{16}\right) = U\left(\frac{1}{8},\frac{13}{16}\right) = \frac{1}{8}$$

ve

$$U\big(a,U(b,c)\big) = U\left(\frac{1}{4},U\left(\frac{1}{4},\frac{13}{16}\right)\right) = U\left(\frac{1}{4},\frac{13}{16}\right) = \frac{13}{16}$$

elde edilir. O halde, her $a, b, c \in [0,1]$ için $U(U(a,b),c) = U\big(a,U(b,c)\big)$ eşitliği sağlanmaz.

Teorem 1.88. [25]: $N: [0,1] \to [0,1]$ güçlü bir negasyon olsun.

$$U(a,b) = \begin{cases} T^*(a,b) & \text{eğer } a, b \in [0,e] \text{ ise,} \\ S^*(a,b) & \text{eğer } a, b \in [e,1] \text{ ise,} \\ Min(a,b) & \text{eğer } a < e < b \leq N(a) \text{ veya } b \leq N(a) < e < a \text{ ise,} \\ Max(a,b) & \text{eğer } a < e < N(a) < b \text{ veya } N(a) < b < e < a \text{ ise,} \end{cases} \quad (1.11)$$

formülünün bir uninorm vermesi için gerek ve yeter koşul $T^* = Min$ ve $S^* = Max$ olmasıdır (yani (1.11) ile verilen formül (1.9) ile verilen formüle indirgenir).

$N(0) = 1$ olduğu için (1.11) formülü ile $U(0,1) = 0$ bulunur. Bu nedenle Teorem 1.88 da verilen uninorm konjanktifdir. Benzer sonuçlar, disjanktif uninormlar için de elde edilir.

Teorem 1.89. [25]: $N: [0,1] \to [0,1]$ güçlü bir negasyon olsun.

$$U(a,b) = \begin{cases} T^*(a,b) & \text{eğer } a, b \in [0,e] \text{ ise,} \\ S^*(a,b) & \text{eğer } a, b \in [e,1] \text{ ise,} \\ Min(a,b) & \text{eğer } a < e < b < N(a) \text{ veya } b < N(a) < e < a \text{ ise,} \\ Max(a,b) & \text{eğer } a < e < N(a) \leq b \text{ veya } N(a) \leq b < e < a \text{ ise,} \end{cases} \quad (1.12)$$

formülünün bir uninorm vermesi için gerek ve yeter koşul $T^* = Min$ ve $S^* = Max$ olmasıdır (yani (1.12) ile verilen formül (1.10) ile verilen formüle indirgenir).

1.8. L^* Kafesi Üzerinde Uninormlar

$L^* = \{(a_1, a_2) \mid (a_1, a_2) \in [0,1]^2 \text{ ve } a_1 + a_2 \leq 1\}$

şeklinde tanımlanan L^* kümesi, her (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in L^*$ için,

$(a_1, a_2) \leq_{L^*} (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq b_1 \text{ ve } a_2 \geq b_2$

şeklinde verilen sıraya göre bir tam kafestir. [21]

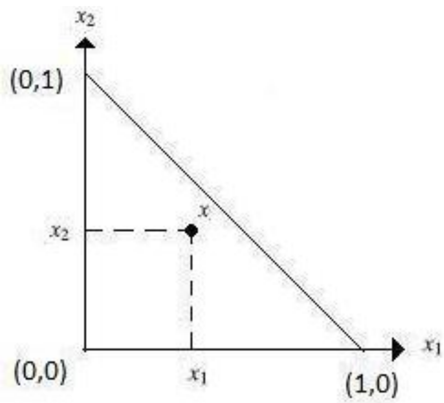
Boştan farklı bir $A \subseteq L^*$ kümesinin supremumu ve infimumu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} supA = (&sup\{a_1 \mid a_1 \in [0,1] \text{ ve } (\exists a_2 \in [0,1-a_1])((a_1, a_2) \in A)\}, \\ &inf\{a_2 \mid a_2 \in [0,1] \text{ ve } (\exists a_1 \in [0,1-a_2])((a_1, a_2) \in A)\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} infA = (&inf\{a_1 \mid a_1 \in [0,1] \text{ ve } (\exists a_2 \in [0,1-a_1])((a_1, a_2) \in A)\}, \\ &sup\{a_2 \mid a_2 \in [0,1] \text{ ve } (\exists a_1 \in [0,1-a_2])((a_1, a_2) \in A)\}) \end{aligned}$$

$(L^*, \leq_{L^*})$ kafesinin sınır elemanları $0_{L^*} = (0,1)$ ve $1_{L^*} = (1,0)$ dır. Eğer $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in L^*$ için ($a_1 < b_1$ ve $a_2 < b_2$) veya ($a_1 > b_1$ ve $a_2 > b_2$) ise, a ve b elemanları $\leq_{L^*}$ bağıntısına göre kıyaslanamaz elemanlar olarak adlandırılır ve $a \parallel_{L^*} b$ ile gösterilir.

Şekil 1.8, $a = (a_1, a_2) \in L^*$ elemanlarının kümesini gösterir. Eğer $a \in L^*$ ise, a_1 ve a_2 nin sırasıyla $a = (a_1, a_2)$ ikilisinin ilk ve ikinci bileşenlerini gösterdiği kabul edilir.



Şekil 1.8. L^* kümesinin grafiksel gösterimi

$(L^*, \leq_{L^*})$ kafesi üzerinde $a, b \in L^*$ elemanları için infimum operatörü $\wedge$ ve supremum operatörü $\vee$,

$a \wedge b = \left(Min(a_1, b_1), Max(a_2, b_2)\right)$

$a \vee b = \left(Max(a_1, b_1), Min(a_2, b_2)\right)$

şeklinde tanımlanır.

L^* üzerinde her $(a_1, a_2) \in L^*$ için, birinci projeksiyon dönüşümü pr_1, $pr_1(a_1, a_2) = a_1$ ve ikinci projeksiyon dönüşümü pr_2, $pr_2(a_1, a_2) = a_2$ olarak tanımlanır. Her $(a_1, a_2) \in L^*$ için $\mathcal{N}_s: L^* \times L^* \to L^*$ dönüşümü $\mathcal{N}_s(a_1, a_2) = (a_2, a_1)$ ile tanımlanır.

Tanım 1.90. [21]: $\mathcal{T}: (L^*)^2 \to L^*$ dönüşümü artan, değişmeli, birleşmeli ve her $a \in L^*$ için $\mathcal{T}(1_{L^*}, a) = a$ sınır şartını sağlıyorsa, L^* üzerinde bir t-norm olarak adlandırılır. $\mathcal{S}: (L^*)^2 \to L^*$ dönüşümü, artan, değişmeli, birleşmeli ve her $a \in L^*$ için $\mathcal{S}(0_{L^*}, a) = a$ ise, L^* üzerinde bir t-konorm olarak adlandırılır.

L^* üzerinde bazı t-norm ve t-konorm örnekleri aşağıdaki şekildedir.

$inf(a, b) = \left(Min(a_1, b_1), Max(a_2, b_2)\right)$

$sup(a, b) = \left(Max(a_1, b_1), Min(a_2, b_2)\right)$

$\mathcal{T}(a, b) = \left(Max(0, a_1 + b_1 - 1), Min(1, a_2 + b_2)\right)$

$\mathcal{T}(a, b) = (a_1 b_1, a_2 + b_2 - a_2 b_2)$

Tanım 1.91. [21]: $\mathcal{T}$, L^* üzerinde bir t-norm olsun. Eğer her $a, b \in L^*$ için,

$\mathcal{T}(a, b) = \left(T(a_1, b_1), S(a_2, b_2)\right)$

sağlanacak şekilde $[0,1]$ üzerinde bir T t-normu ve bir S t-konormu varsa, $\mathcal{T}$ t-normu L^* üzerinde temsil edilebilir t-norm olarak adlandırılır.

Tanım 1.92. [21]: $\mathcal{S}$, L^* üzerinde bir t-konorm olsun. Eğer her $a, b \in L^*$ için,

$\mathcal{S}(a, b) = \left(S(a_1, b_1), T(a_2, b_2)\right)$

sağlanacak şekilde $[0,1]$ üzerinde bir T t-normu ve bir S t-konormu varsa, $\mathcal{S}$ t-konormu L^* üzerinde temsil edilebilir t-konorm olarak adlandırılır.

L^* üzerinde tüm t-normlar temsil edilebilir değildir. Örneğin, L^* üzerinde $a, b \in L^*$ için,

$\mathcal{T}_w(a, b) = \left(Max(0, a_1 + b_1 - 1), Min(1, a_2 + 1 - b_1, b_2 + 1 - a_1)\right)$

ile verilen $\mathcal{T}_w$ t-normu temsil edilebilir değildir.

Tanım 1.93. [21]: $\mathcal{U}: (L^*)^2 \to L^*$ dönüşümü artan, birleşmeli, değişmeli ve her $a \in L^*$ için $\mathcal{U}(e, a) = a$ olacak şekilde en az bir $e \in L^*$ elemanı mevcutsa, $\mathcal{U}$ dönüşümü L^* üzerinde bir uninorm olarak adlandırılır.

L^* üzerinde bir $\mathcal{U}$ uninormu için $\mathcal{U}(e, a) = a$ şartını sağlayan $e \in L^*$ elemanı bir tektir ve bu $e \in L^*$ elemanı $\mathcal{U}$ uninormunun birim elemanı olarak adlandırılır. Eğer $e = 0_{L^*}$ ise, L^* üzerinde bir t-konorm ve eğer $e = 1_{L^*}$ ise, L^* üzerinde bir t-norm elde edilir. Bu nedenle, bundan sonra $e \in L^* \setminus \{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$ olduğu kabul edilecektir.

$[0,1]$ üzerindeki uninormlar için geçerli olan Teorem 1.71 in benzeri, L^* üzerindeki uninormlar için verilebilir. Bunun için, L^* üzerinde

$E = \{a \mid a \in L^* \text{ ve } a \leq_{L^*} e\}$

$E' = \{a \mid a \in L^* \text{ ve } a \geq_{L^*} e\}$

$D = \{a \mid a \in L^* \text{ ve } a_1 + a_2 = 1\}$

kümeleri tanımlanır.

Teorem 1.94. [21]: $e \in L^* \backslash \{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$ olsun. Eğer $e \notin D$ ise, ${\Phi_e}^{-1}$ artan olacak şekilde L^* dan E ye bir artan bijeksiyon Φ_e ve ${\Psi_e}^{-1}$ artan olacak şekilde L^* dan E' ye bir artan bijeksiyon Ψ_e yoktur.

Lemma 1.95. [21]: $e \in D \backslash \{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$ olsun. Bu takdirde $a \in L^*$ için,

$$\Phi_e(a) = \big(e_1 a_1, 1 - e_1(1 - a_2)\big)$$

ile tanımlanan $\Phi_e : L^* \to L^*$ dönüşümü ${\Phi_e}^{-1}$ artan olacak şekilde L^* dan E ye artan bir bijeksiyondur.

$\Phi_e : L^* \to L^*$ dönüşümünün tersi $a \in E$ için,

$${\Phi_e}^{-1}(a) = \left(\frac{a_1}{e_1}, 1 - \frac{1 - a_2}{e_1}\right)$$

ile verilir.

Lemma 1.96. [21]: $e \in D \backslash \{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$ olsun. Bu takdirde $a \in L^*$ için,

$$\Psi_e(a) = (e_1 + a_1 - e_1 a_1, (1 - e_1) a_2)$$

ile tanımlanan $\Psi_e : L^* \to L^*$ dönüşümü ${\Psi_e}^{-1}$ artan olacak şekilde L^* dan E' ye artan bir bijeksiyondur.

$\Psi_e : L^* \to L^*$ dönüşümünün tersi $a \in E'$ için,

$${\Psi_e}^{-1}(a) = \left(\frac{a_1 - e_1}{1 - e_1}, \frac{a_2}{1 - e_1}\right)$$

ile verilir.

Aşağıdaki teorem, Lemma 1.95 ve Lemma 1.96 kullanılarak elde edilir.

Teorem 1.97. [21]: $\mathcal{U}$, L^* üzerinde $e \in D \backslash \{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde,

i) Her $a, b \in L^*$ için

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(a, b) = {\Phi_e}^{-1}\Big(\mathcal{U}\big(\Phi_e(a), \Phi_e(b)\big)\Big)$$

ile tanımlanan $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} : L^* \times L^* \to L^*$ dönüşümü L^* üzerinde bir t-normdur.

ii) Her $a, b \in L^*$ için

$$\mathcal{S}_{\mathcal{U}}(a,b) = {\Psi_e}^{-1}\left(\mathcal{U}\big(\Psi_e(a), \Psi_e(b)\big)\right)$$

ile tanımlanan $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}: L^* \times L^* \to L^*$ dönüşümü L^* üzerinde bir t-konormdur.

Bu nedenle L^* üzerindeki bir uninormun yapısı L^* üzerindeki t-normlar ve t-konormlar ile yakından ilgilidir. Yani L^* üzerinde $e \in D\backslash\{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$ birim elemanlı keyfi bir $\mathcal{U}$ uninormu için L^* üzerinde uygun bir $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ t-normu ve $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ t-konormu vardır öyleki

i) Her $(a,b) \in E^2$ için, $\mathcal{U}(a,b) = \Phi_e\left(\mathcal{T}_{\mathcal{U}}\left({\Phi_e}^{-1}(a), {\Phi_e}^{-1}(b)\right)\right)$ dır.

ii) Her $(a,b) \in {E'}^2$ için, $\mathcal{U}(a,b) = \Psi_e\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}}\left({\Psi_e}^{-1}(a), {\Psi_e}^{-1}(b)\right)\right)$ dır.

L^* üzerinde keyfi bir $\mathcal{U}$ uninormu için $\mathcal{U}$ artan olduğundan $\mathcal{U}(0_{L^*}, 0_{L^*}) = 0_{L^*}$ ve $\mathcal{U}(1_{L^*}, 1_{L^*}) = 1_{L^*}$ dır. Şimdi $\mathcal{U}(0_{L^*}, 1_{L^*})$ ın alabileceği değerler incelensin. L^* üzerinde keyfi bir $\mathcal{T}$ t-normu ve $\mathcal{S}$ t-konormu için $\mathcal{T}(0_{L^*}, 1_{L^*}) = 0_{L^*}$ ve $\mathcal{S}(0_{L^*}, 1_{L^*}) = 1_{L^*}$ dir.

Lemma 1.98. [21]: $\mathcal{U}$, L^* üzerinde $e \in L^* \backslash\{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, her $a \in L^*$ için $\mathcal{U}(0_{L^*}, 1_{L^*}) = \mathcal{U}(\mathcal{U}(0_{L^*}, 1_{L^*}), a)$ elde edilir.

Sonuç 1.99. [21]: $\mathcal{U}$, L^* üzerinde $e \in L^* \backslash\{0_{L^*}, 1_{L^*}\}$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, $\mathcal{U}(0_{L^*}, 1_{L^*}) = 0_{L^*}$ veya $\mathcal{U}(0_{L^*}, 1_{L^*}) = 1_{L^*}$ veya $\mathcal{U}(0_{L^*}, 1_{L^*}) \parallel_{L^*} e$ dır.

Eğer $\mathcal{U}(0_{L^*}, 1_{L^*}) = 0_{L^*}$ ise, $\mathcal{U}$ uninormu L^* üzerinde konjanktif uninorm ve eğer $\mathcal{U}(0_{L^*}, 1_{L^*}) = 1_{L^*}$ ise, $\mathcal{U}$ uninormu L^* üzerinde disjanktif uninorm olarak adlandırılır.

L^* üzerinde ne konjanktif uninorm ne de disjanktif uninorm olan uninorm örnekleri verilebilir.

Örnek 1.100. [21]: U_{e_1} **:** $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ üzerinde

$$U_{e_1}(a_1, b_1) = \begin{cases} max(a_1, b_1) & a_1 \geq e_1 \text{ ve } b_1 \geq e_1, \\ min(a_1, b_1) & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $e_1 \in]0,1[$ birim elemanlı bir uninorm olmak üzere, L^* üzerinde

$$\mathcal{U}(a,b) = \left(U_{e_1}(a_1, b_1), U_{1-e_1}(a_2, b_2)\right)$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{U}: L^* \times L^* \to L^*$ fonksiyonunu göz önüne alınsın.

Eğer $a_1 \geq e_1$ ve $b_1 \geq e_1$ ise, $a_2 \leq 1 - a_1 \leq 1 - e_1$ ve $b_2 \leq 1 - b_1 \leq 1 - e_1$ olur. Eğer $a_2 = b_2 = 1 - e_1$ ise, $a = b = e = (e_1, 1 - e_1)$ ve $\mathcal{U}(a,b) = e \in L^*$ elde edilir. Eğer $a_2 < 1 - e_1$ veya $b_2 < 1 - e_1$ ise,

$$\begin{aligned} U_{e_1}(a_1, b_1) + U_{1-e_1}(a_2, b_2) &= max(a_1, b_1) + min(a_2, b_2) \\ &= max\big(a_1 + min(a_2, b_2), b_1 + min(a_2, b_2)\big) \\ &\leq max(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \leq 1 \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre, $\mathcal{U}(a,b) \in L^*$ dır.

Eğer $a_1 < e_1$ veya $b_1 < e_1$ ise,

$U_{e_1}(a_1, b_1) + U_{1-e_1}(a_2, b_2) \leq min(a_1, b_1) + max(a_2, b_2) \leq 1$

elde edilir. Böylece tüm durumlar için $\mathcal{U}(a, b) \in L^*$ olur. Açık olarak, $\mathcal{U}$, L^* üzerinde $e = (e_1, 1 - e_1)$ birim elemanlı bir uninormdur. Bu nedenle $\mathcal{U}(0_{L^*}, 1_{L^*}) = (0,0)$ olup $\mathcal{U}$ uninormu ne konjanktif uninorm ne de disjanktif uninormdur.

Tanım 1.101. [21]: $\mathcal{U}$, L^* üzerinde bir uninorm olsun. Eğer

$\mathcal{U}(a, b) = \big(U_1(a, b), U_2(a, b)\big)$

sağlanacak şekilde [0,1] üzerinde U_1 ve U_2 uninormları var ise, $\mathcal{U}$ uninormu L^* üzerinde temsil edilebilir uninorm olarak adlandırılır. Bu durum $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$ ile gösterilir.

$\mathcal{U}$ iyi tanımlıdır ancak ve ancak her $a, b \in L^*$ için $U_1(a_1, b_1) + U_2(a_2, b_2) \leq 1$ dir. U_2 artan olduğundan her $a, b \in [0,1]$ için eğer $U_1(a_1, b_1) \leq 1 - U_2(1 - a_1, 1 - b_1)$ ise U_2^*, $\mathcal{N}_s$ ye göre U_2 nin dual uninormunu göstermek üzere yani $a, b \in [0,1]$ için $U_2^*(a_1, b_1) = 1 - U_2(1 - a_1, 1 - b_1)$ olmak üzere $U_1 \leq U_2^*$ dır.

Açık olarak $\mathcal{U}$ değişmeli, birleşmeli ve artandır ancak ve ancak U_1 ve U_2 bu özellikleri sağlar. Ayrıca $e = (e_1, e_2) \in L^*$ elemanı $\mathcal{U}$ uninormunun birim elamanıdır ancak ve ancak $e_1 \in [0,1]$, U_1 uninormunun ve $e_2 \in [0,1]$, U_2 uninormunun birim elemanıdır.

L^* üzerinde bütün uninormlar temsil edilebilir uninorm değildir.

Örnek 1.102. [21]: U, [0,1] üzerinde $e_1 \in]0,1[$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde $a, b \in L^*$ için

$\mathcal{U}(a, b) = \Big(Min\big(U(a_1, 1 - b_2), U(b_1, 1 - a_2)\big), 1 - U(1 - a_2, 1 - b_2)\Big)$

ile tanımlanan $\mathcal{U}: (L^*)^2 \to L^*$ dönüşümü L^* üzerinde $e = (e_1, 1 - e_1)$ birim elemanlı bir uninormdur fakat t-representable uninorm değildir.

1.9. L^I Kafesi Üzerinde Uninormlar

$L^I = \{[a_1, a_2] \mid (a_1, a_2) \in [0,1]^2 \text{ ve } a_1 \leq a_2\}$

şeklinde tanımlanan L^I kümesi, her $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2] \in L^I$ için,

$[a_1, a_2] \leq_{L^I} [b_1, b_2] \Leftrightarrow a_1 \leq b_1 \text{ ve } a_2 \leq b_2$

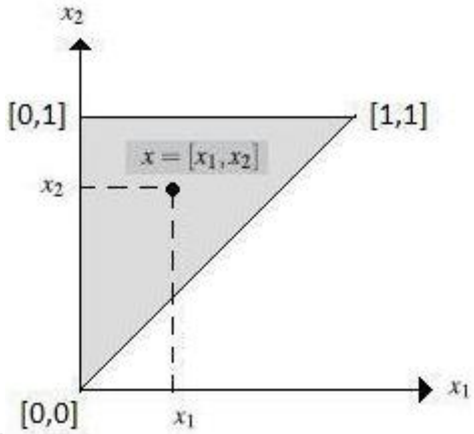
ile verilen sıraya göre bir tam kafestir. [22]

$(L^I, \leq_{L^I})$ kafesi üzerinde $a, b \in L^I$ elemanları için infimum operatörü $\wedge$ ve supremum operatörü $\vee$,

$a \wedge b = [Min(a_1, b_1), Min(a_2, b_2)]$

$a \vee b = [Max(a_1, b_1), Max(a_2, b_2)]$

şeklinde tanımlanır. $(L^I, \leq_{L^I})$ kafesinin sınır elemanları $1_{L^I} = [1,1]$ ve $0_{L^I} = [0,0]$ dır.



Şekil 1.9. L^I kafesi

Tanım 1.103. [22]: $\mathcal{T}: (L^I)^2 \to L^I$ dönüşümü artan, değişmeli, birleşmeli ve her $a \in L^I$ için $\mathcal{T}(1_{L^I}, a) = a$ sınır şartını sağlıyorsa, L^I üzerinde bir t-norm olarak adlandırılır. $\mathcal{S}: (L^I)^2 \to L^I$ dönüşümü, artan, değişmeli, birleşmeli ve her $a \in L^I$ için $\mathcal{S}(0_{L^I}, a) = a$ ise, L^I üzerinde bir t-konorm olarak adlandırılır.

L^I üzerinde bazı t-norm ve t-konorm örnekleri aşağıdaki şekildedir.

$inf(a, b) = [Min(a_1, b_1), Min(a_2, b_2)]$

$sup(a, b) = [Max(a_1, b_1), Max(a_2, b_2)]$

$\mathcal{T}(a, b) = [Max(0, a_1 + b_1 - 1), Min(0, a_1 + b_2 - 1, a_2 + b_1 - 1)]$

Tanım 1.104. [22]: $\mathcal{U}: (L^I)^2 \to L^I$ dönüşümü artan, birleşmeli, değişmeli ve her $a \in L^I$ için $\mathcal{U}(e, a) = a$ olacak şekilde en az bir $e \in L^I$ elemanı mevcutsa, $\mathcal{U}$, L^I üzerinde bir uninorm olarak adlandırılır.

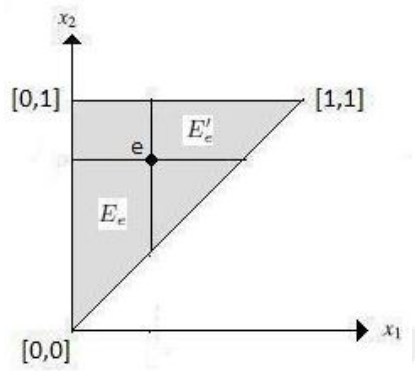
L^I üzerinde bir $\mathcal{U}$ uninormu için $\mathcal{U}(e, a) = a$ şartını sağlayan $e \in L^I$ elemanı bir tektir ve bu $e \in L^I$ elemanı $\mathcal{U}$ uninormunun birim elemanı olarak adlandırılır. Eğer $e = 0_{L^I}$ ise, L^I üzerinde bir t-konorm ve eğer $e = 1_{L^I}$ ise, L^I üzerinde bir t-norm elde edilir. Bu nedenle, bundan sonra $e \in L^I \backslash \{0_{L^I}, 1_{L^I}\}$ olduğu kabul edilecektir.

$[0,1]$ üzerindeki uninormlar için geçerli olan Teorem 1.71 nin benzeri, L^I üzerindeki uninormlar için verilebilir. Bunun için, L^I üzerinde aşağıdaki kümeler tanımlansın.

$E_e = \{a \mid a \in L^I \text{ ve } a \leq_{L^I} e\}$

$E_e{}' = \{a \mid a \in L^I \text{ ve } a \geq_{L^I} e\}$

$D = \{[a,a] \mid a \in [0,1]\}$



Şekil 1.10. E_e ve $E_e{}'$ kümeleri

Teorem 1.105. [22]: $e \in L^I \backslash \{0_{L^I}, 1_{L^I}\}$ olsun. Eğer $e \notin D$ ise, $\Phi_e{}^{-1}$ artan olacak şekilde L^I dan E_e ye bir artan bijeksiyon Φ_e ve $\Psi_e{}^{-1}$ artan olacak şekilde L^I dan $E_e{}'$ ye bir artan bijeksiyon Ψ_e yoktur.

Lemma 1.106. [22]: $e \in D \backslash \{0_{L^I}, 1_{L^I}\}$ olsun. Bu takdirde $a \in L^*$ için,

$$\Phi_e(a) = [e_1 a_1, e_1 a_2]$$

ile tanımlanan $\Phi_e: L^I \to L^I$ dönüşümü $\Phi_e{}^{-1}$ artan olacak şekilde L^I den E_e ye artan bir bijeksiyondur.

$\Phi_e: L^I \to L^I$ dönüşümünün tersi $a \in E_e$ için,

$$\Phi_e{}^{-1}(a) = \left[\frac{a_1}{e_1}, \frac{a_2}{e_1}\right]$$

ile verilir.

Lemma 1.107. [22]: $e \in D \backslash \{0_{L^I}, 1_{L^I}\}$ olsun. Bu takdirde $a \in L^I$ için,

$$\Psi_e(a) = [e_1 + a_1 - e_1 a_1, e_1 + (1 - e_1) a_2]$$

ile tanımlanan $\Psi_e: L^I \to L^I$ dönüşümü $\Psi_e{}^{-1}$ artan olacak şekilde L^I dan $E_e{}'$ ye artan bir bijeksiyondur.

$\Psi_e: L^I \to L^I$ dönüşümünün tersi $a \in E_e{}'$ için,

$$\Psi_e{}^{-1}(a) = \left[\frac{a_1 - e_1}{1 - e_1}, \frac{a_2 - e_1}{1 - e_1}\right]$$

ile verilir.

Aşağıdaki teorem, Lemma 1.106 ve Lemma 1.107 kullanılarak elde edilir.

Teorem 1.108. [22]: $\mathcal{U}$, L^I üzerinde $e \in D\backslash\{0_{L^I}, 1_{L^I}\}$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde,

i) Her $a, b \in L^I$ için,

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(a,b) = \Phi_e{}^{-1}\left(\mathcal{U}\big(\Phi_e(a), \Phi_e(b)\big)\right)$$

ile tanımlanan $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}: L^I \times L^I \to L^I$ dönüşümü L^I üzerinde bir t-normdur.

ii) Her $a, b \in L^I$ için,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{U}}(a,b) = \Psi_e{}^{-1}\left(\mathcal{U}\big(\Psi_e(a), \Psi_e(b)\big)\right)$$

ile tanımlanan $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}: L^I \times L^I \to L^I$ dönüşümü L^I üzerinde bir t-konormdur.

Bu nedenle L^I üzerinde e birim elemanlı bir uninormun yapısı L^I üzerindeki t-normlar ve t-konormlar ile yakından ilgilidir. Yani L^I üzerinde $e \in D\backslash\{0_{L^I}, 1_{L^I}\}$ birim elemanlı keyfi bir $\mathcal{U}$ uninormu için L^I üzerinde uygun bir $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ t-normu ve $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ t-konormu vardır öyleki

i) Her $(a,b) \in {E_e}^2$ için, $\mathcal{U}(a,b) = \Phi_e\left(\mathcal{T}_{\mathcal{U}}\left(\Phi_e{}^{-1}(a), \Phi_e{}^{-1}(b)\right)\right)$ dır.

ii) Her $(a,b) \in {E'}^2$ için, $\mathcal{U}(a,b) = \Psi_e\left(\mathcal{S}_{\mathcal{U}}\left(\Psi_e{}^{-1}(a), \Psi_e{}^{-1}(b)\right)\right)$ dır.

Lemma 1.109. [22]: $\mathcal{U}$, L^I üzerinde $e \in L^I\backslash\{0_{L^I}, 1_{L^I}\}$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, $a \leq e \leq b$ olacak şekildeki her a, $b \in L^I$ için $a \leq \mathcal{U}(a,b) \leq b$ elde edilir.

Lemma 1.110. [22]: $\mathcal{U}$, L^I üzerinde $e \in L^I\backslash\{0_{L^I}, 1_{L^I}\}$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, $a \leq e \leq b$ veya $b \leq e \leq a$ olacak şekildeki her a, $b \in L^I$ için $Min(a,b) \leq \mathcal{U}(a,b) \leq Max(a,b)$ elde edilir.

Lemma 1.111. [22]: $\mathcal{U}$, L^I üzerinde $e \in L^I\backslash\{0_{L^I}, 1_{L^I}\}$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, her $a \in L^I$ için $\mathcal{U}(0_{L^I}, 1_{L^I}) = \mathcal{U}(\mathcal{U}(0_{L^I}, 1_{L^I}), a)$ elde edilir.

Lemma 1.112. [22]: $\mathcal{U}$, L^I üzerinde $e \in L^I\backslash\{0_{L^I}, 1_{L^I}\}$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, $\mathcal{U}(0_{L^I}, 1_{L^I}) = 0_{L^I}$ veya $\mathcal{U}(0_{L^I}, 1_{L^I}) = 1_{L^I}$ veya $\mathcal{U}(0_{L^I}, 1_{L^I}) \parallel_{L^I} e$ dır.

Eğer $\mathcal{U}(0_{L^I}, 1_{L^I}) = 0_{L^I}$ ise, $\mathcal{U}$ uninormu L^I üzerinde konjanktif uninorm ve eğer $\mathcal{U}(0_{L^I}, 1_{L^I}) = 1_{L^I}$ ise, $\mathcal{U}$ uninormu L^I üzerinde disjanktif uninorm olarak adlandırılır.

L^I üzerinde ne konjanktif uninorm ne de disjanktif uninorm olan uninorm örnekleri verilebilir.

Örnek 1.113. [22]: U_1 ve U_2, [0,1] üzerinde

$$U_1(a,b) = \begin{cases} Max(a,b) & \text{eğer } a,b \in [0.1,1] \text{ ise,} \\ Min(a,b) & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

ve

$$U_2(a,b) = \begin{cases} Min(a,b) & \text{eğer } a,b \in [0,0.1] \text{ ise,} \\ Max(a,b) & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

şeklinde verilen iki uninorm olsun. Bu takdirde,

$$\mathcal{U}(a,b) = [U_1(a_1,b_1), U_2(a_2,b_2)]$$

ile tanımlanan $\mathcal{U}: L^I \times L^I \to L^I$ uninormu için

$$\mathcal{U}(0_{L^I}, 1_{L^I}) = [U_1(0,1), U_2(0,1)] = [0,1]$$

olduğundan $\mathcal{U}$ uninormu L^I üzerinde ne disjanktif uninorm ne de konjanktif uninormdur.

1.10. *L* Sınırlı Kafesi Üzerinde Uninormlar

Tanım 1.114 [41]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L$ olsun. Aşağıda verilen koşulları sağlayan $U: L^2 \to L$ fonksiyonu, L üzerinde bir uninorm olarak adlandırılır.

U1. Her $a, b \in L$ için $U(a,b) = U(b,a)$ (Değişme özelliği),

U2. Her $a, b, c \in L$ için $U(a, U(b,c)) = U(U(a,b), c)$ (Birleşme özelliği),

U3. Her $a, b, c \in L$ için $b \leq c$ ise, $U(a,b) \leq U(a,c)$ (Monotonluk özelliği),

U4. Bir $e \in L$ elemanı her $a \in L$ için $U(a,e) = a$ olacak şekilde mevcuttur. (Birim eleman özelliği).

$\mathcal{U}(e)$, bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı tüm uninormların kümesini göstersin.

Tanım 1.115 [14]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U: L^2 \to L$ bir fonksiyon olsun. $s \in L$ elemanı, her $a \in L$ için $U(s,a) = U(a,s) = s$ eşitliğini sağlıyorsa, $s \in L$ elemanına U fonksiyonunun sıfır elemanı veya sıfırlayanı denir.

Tanım 1.116. [41]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes olsun. $T: L^2 \to L$ fonksiyonu değişmeli, birleşmeli, her iki değişkene göre artan ve 1 birim elemanına sahip ise, T fonksiyonu L üzerinde bir üçgensel norm (kısaca t-norm) olarak adlandırılır.

Tanım 1.117. [41]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes olsun. $S: L^2 \to L$ fonksiyonu değişmeli, birleşmeli, her iki değişkene göre artan ve 0 birim elemanına sahip ise, S fonksiyonu L üzerinde bir üçgensel konorm (kısaca t-konorm) olarak adlandırılır.

Önerme 1.118. [41]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L \backslash \{0,1\}$ ve U, L üzerinde e birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

i) Her $(a, b) \in A(e)$ için $a \wedge b \leq U(a, b) \leq a \vee b$,

ii) Her $(a, b) \in L \times [0, e]$ için $U(a, b) \leq a$,

iii) Her $(a, b) \in [0, e] \times L$ için $U(a, b) \leq b$,

iv) Her $(a, b) \in L \times [e, 1]$ için $a \leq U(a, b)$,

v) Her $(a, b) \in [e, 1] \times L$ için $b \leq U(a, b)$.

$(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L$ ve U, L üzerinde e birim elemanlı bir uninorm olsun. $U \downarrow [0, e]$, U uninormunun $[0, e]$ üzerine kısıtlanışını ve $U \downarrow [e, 1]$, U uninormunun $[e, 1]$ üzerine kısıtlanışını göstersin.

Önerme 1.119. [41]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L$ ve U, L üzerinde e birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde,

i) $T^* = U \downarrow [0, e]: [0, e]^2 \to [0, e]$ bir t-normdur.

ii) $S^* = U \downarrow [e, 1]: [e, 1]^2 \to [e, 1]$ bir t-konormdur.

Teorem 1.120. [41]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L \backslash \{0,1\}$ olsun. T_e, $[0, e]$ üzerinde bir t-norm ve S_e, $[e, 1]$ üzerinde bir t-konorm olmak üzere, aşağıdaki şekilde tanımlanan $U_t: L^2 \to L$ ve $U_s: L^2 \to L$ fonksiyonları L üzerinde e birim elemanlı uninormlardır.

$$U_t(a, b) = \begin{cases} T_e(a, b) & \text{eğer } (a, b) \in [0, e]^2 \text{ ise,} \\ a \vee b & \text{eğer } (a, b) \in [0, e] \times]e, 1] \cup]e, 1] \times [0, e] \text{ ise,} \\ b & \text{eğer } a \in [0, e], b \parallel e \text{ ise,} \\ a & \text{eğer } b \in [0, e], a \parallel e \text{ ise,} \\ 1 & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

$$U_s(a, b) = \begin{cases} S_e(a, b) & \text{eğer } (a, b) \in [e, 1]^2 \text{ ise,} \\ a \wedge b & \text{eğer } (a, b) \in [0, e] \times]e, 1] \cup]e, 1] \times [0, e] \text{ ise,} \\ b & \text{eğer } a \in [e, 1], b \parallel e \text{ ise,} \\ a & \text{eğer } b \in [e, 1], a \parallel e \text{ ise,} \\ 0 & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

Uyarı 1.121. [41]: Teorem 1.120 da verilen $U_t: L^2 \to L$ ve $U_s: L^2 \to L$ uninormları

$$U_t(a, b) = \begin{cases} T_e(a, b) & \text{eğer } (a, b) \in [0, e]^2 \text{ ise,} \\ b & \text{eğer } a \in [0, e], b \notin [0, e] \text{ ise,} \\ a & \text{eğer } a \notin [0, e], b \in [0, e] \text{ ise,} \\ 1 & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

ve

$$U_s(a, b) = \begin{cases} S_e(a, b) & \text{eğer } (a, b) \in [e, 1]^2 \text{ ise,} \\ b & \text{eğer } a \in [e, 1], b \notin [e, 1] \text{ ise,} \\ a & \text{eğer } a \notin [e, 1], b \in [e, 1] \text{ ise,} \\ 0 & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

eşitlikleriyle de verilebilir.

Sonuç 1.122. [41]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L \backslash \{0,1\}$ olsun. Teorem 1.120 de verilen $[0, e]$ üzerindeki T_e t-normu yerine en büyük t-norm $T_\wedge$ (infimum) ve $[e, 1]$ üzerindeki S_e t-konormu yerine en küçük t-konorm $S_\vee$ (supremum) alınırsa, bu takdirde

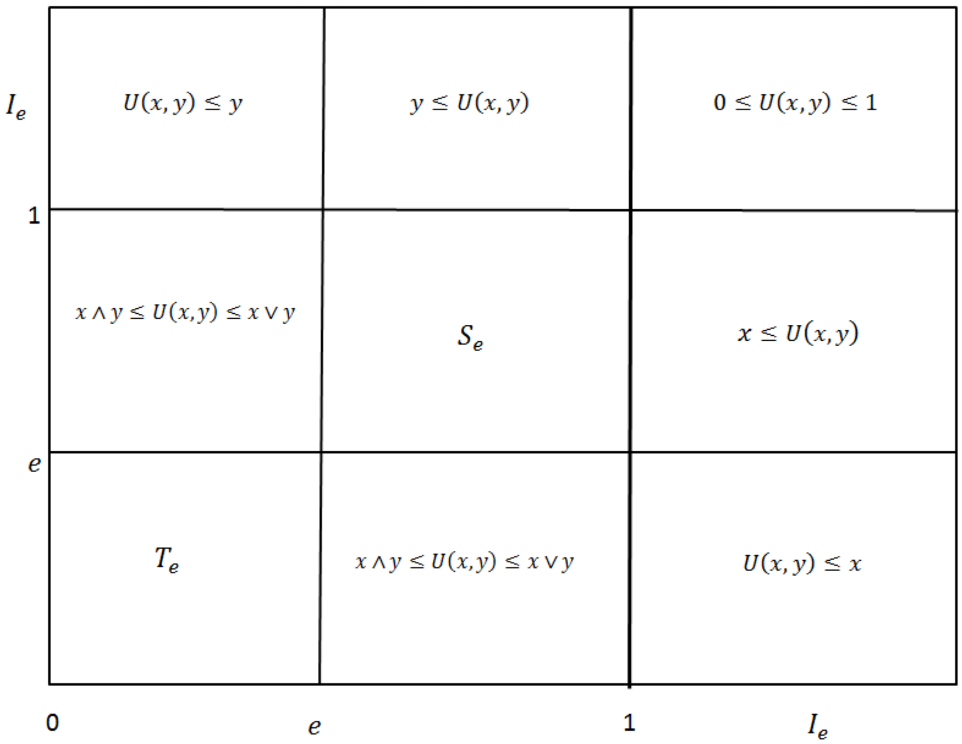
$$U_{t_\wedge}(a, b) = \begin{cases} a \wedge b & \text{eğer } (a, b) \in [0, e]^2 \text{ ise,} \\ a \vee b & \text{eğer } (a, b) \in [0, e] \times]e, 1] \cup]e, 1] \times [0, e] \text{ ise,} \\ b & \text{eğer } a \in [0, e], b \parallel e \text{ ise,} \\ a & \text{eğer } b \in [0, e], a \parallel e \text{ ise,} \\ 1 & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

ve

$$U_{s_\vee}(a, b) = \begin{cases} a \vee b & \text{eğer } (a, b) \in [e, 1]^2 \text{ ise,} \\ a \wedge b & \text{eğer } (a, b) \in [0, e] \times]e, 1] \cup]e, 1] \times [0, e] \text{ ise,} \\ b & \text{eğer } a \in [e, 1], b \parallel e \text{ ise,} \\ a & \text{eğer } b \in [e, 1], a \parallel e \text{ ise,} \\ 0 & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

şeklinde bulunan L üzerindeki e birim elemanlı $U_{t_\wedge}$ uninormu en büyük uninorm ve $U_{s_\vee}$ uninormu en küçük uninormdur.

Keyfi bir L sınırlı kafesi üzerindeki $e \in L \backslash \{0,1\}$ birim elemanlı bir uninormun yapısı aşağıdaki şekilde verilir.



Şekil 1.11. L sınırlı kafesi üzerindeki uninormların yapısı

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar ve Üçgensel Konormlar Yardımıyla Bazı İdempotent Uninormların Karakterizasyonu

Tanım 2.1: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$ ve U, L üzerinde e birim elemanlı bir uninorm olsun.

i) Eğer $x \in L$ için $U(x,x) = x$ eşitliği sağlanıyorsa, $x \in L$ elemanı U uninormunun idempotent elemanı olarak adlandırılır.

ii) Eğer her $x \in L$ için $U(x,x) = x$ eşitliği sağlanıyorsa, U uninormu idempotent uninorm olarak adlandırılır.

$(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $c \in L$ olsun. $I_c := \{x \in L \mid x \parallel c\}$, $L_c := \{x \in L \mid x \leq c \text{ veya } c \leq x\}$ ve $A(c) := [0, c] \times [c, 1] \cup [c, 1] \times [0, c]$ ile tanımlansın.

Önerme 2.2: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$ ve U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm olsun. Bu takdirde,

i) Eğer $(x, y) \in [0, e]^2$ ise, $U(x, y) = x \wedge y$ dir.

ii) Eğer $(x, y) \in [e, 1]^2$ ise, $U(x, y) = x \vee y$ dir.

İspat:

i) $(x, y) \in [0, e]^2$ olsun. Önerme 1.119 i) ye göre $U \downarrow [0, e]: [0, e]^2 \to [0, e]$ bir t-normdur. $[0, e]$ aralığı üzerindeki tek idempotent t-norm $T_\wedge(x, y) = x \wedge y$ şeklinde tanımlanan infimum t-normu olduğundan her $(x, y) \in [0, e]^2$ için $U(x, y) = x \wedge y$ elde edilir.

ii) $(x, y) \in [e, 1]^2$ olsun. Önerme 1.119 ii) ye göre $U \downarrow [e, 1]: [e, 1]^2 \to [e, 1]$ bir t-konormdur. $[e, 1]$ aralığı üzerindeki tek idempotent t-konorm $S_\vee(x, y) = x \vee y$ şeklinde tanımlanan supremum t-konormu olduğundan her $(x, y) \in [e, 1]^2$ için $U(x, y) = x \vee y$ elde edilir.

Tanım 2.3: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$ ve U, L üzerinde e birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde,

i) Eğer $U(0,1) = 0$ ise, U uninormu konjanktif uninorm olarak adlandırılır.

ii) Eğer $U(0,1) = 1$ ise, U uninormu disjanktif uninorm olarak adlandırılır.

Önerme 2.4: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L \backslash \{0,1\}$ ve U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

i) Her $(x, y) \in [0, e]^2$ için $U(x, y) \leq x \wedge y$ dir.

ii) Her $(x, y) \in [e, 1]^2$ için $U(x, y) \geq x \vee y$ dir.

iii) Her $(x, y) \in L^2 \backslash ([0, e]^2 \cup [e, 1]^2)$ için $x \wedge y \leq U(x, y) \leq x \vee y$ dir.

İspat: i) U uninormunun monoton özelliği ve $e \in L \backslash \{0,1\}$ elemanının U uninormunun birim elemanı olduğu göz önüne alınarak, her $(x, y) \in [0, e]^2$ için $U(x, y) \leq U(e, y) = y$ ve $U(x, y) \leq U(x, e) = x$ olup $U(x, y) \leq x \wedge y$ eşitsizliği bulunur.

ii) U uninormunun monoton özelliği ve $e \in L \backslash \{0,1\}$ elemanının U uninormunun birim elemanı olduğu göz önüne alınarak, her $(x, y) \in [e, 1]^2$ için $U(x, y) \geq U(e, y) = y$ ve $U(x, y) \geq U(x, e) = x$ olup $U(x, y) \geq x \vee y$ eşitsizliği bulunur.

iii) U uninormunun monoton özelliği ve idempotent olduğu göz önüne alınarak, her $(x, y) \in L^2 \backslash ([0, e]^2 \cup [e, 1]^2)$ için $U(x, y) \leq U(x \vee y, x \vee y) = x \vee y$ ve $U(x, y) \geq U(x \wedge y, x \wedge y) = x \wedge y$ eşitsizlikleri sağlanır. Buradan, her $(x, y) \in L^2 \backslash ([0, e]^2 \cup [e, 1]^2)$ için $x \wedge y \leq U(x, y) \leq x \vee y$ elde edilir.

Aşağıdaki teorem, sınırlı kafesler üzerindeki uninormlar için Karaçal ve Mesiar'ın Teorem 1.120 da önerdikleri inşa yönetiminden farklı bir yöntem vermektedir. Aşağıda verilen inşa yönteminde, L sınırlı kafesi yerine $[0,1]$ klasik reel birim aralığı düşünülürse, bu yöntem [33, 77] da önerilen inşa yöntemine indirgenmektedir. Fakat, genel bir L sınırlı kafesi ele alındığında, aşağıda önerilen L üzerinde uninorm inşa etme yöntemi yeni bir yöntem olarak ortaya çıkmaktadır.

Teorem 2.5: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L \backslash \{0,1\}$ olsun. Eğer T_e, $[0, e]$ üzerinde bir t-norm ve S_e, $[e, 1]$ üzerinde bir t-konorm ise, bu takdirde aşağıdaki şekilde tanımlanan $U_t: L^2 \to L$ ve $U_s: L^2 \to L$ fonksiyonları L üzerinde e birim elemanlı uninormlardır.

$$U_t(x, y) = \begin{cases} T_e(x, y) & \text{eğer } (x, y) \in [0, e]^2 \text{ ise,} \\ y & \text{eğer } x \in [0, e], y \parallel e \text{ ise,} \\ x & \text{eğer } y \in [0, e], x \parallel e \text{ ise,} \\ x \vee y & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

$$U_s(x, y) = \begin{cases} S_e(x, y) & \text{eğer } (x, y) \in [e, 1]^2 \text{ ise,} \\ y & \text{eğer } x \in [e, 1], y \parallel e \text{ ise,} \\ x & \text{eğer } y \in [e, 1], x \parallel e \text{ ise,} \\ x \wedge y & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

İspat: Yalnızca U_t fonksiyonunun L sınırlı kafesi üzerinde uninorm olduğu ispatlanacaktır. Benzer şekilde, U_s fonksiyonunun L sınırlı kafesi üzerinde uninorm olduğu gösterilebilir.

i) Değişme özelliği: Her $x, y \in L$ için $U_t(x,y) = U_t(y,x)$ olduğu gösterilecektir. İspat mümkün olan tüm durumlara ayrılacaktır.

1. $x \leq e$ olduğu kabul edilsin.

1.1. Eğer $y \leq e$ ise, $U_t(x,y) = T_e(x,y) = T_e(y,x) = U_t(y,x)$ elde edilir.

1.2. Eğer $y > e$ ise, $U_t(x,y) = x \vee y = y = y \vee x = U_t(y,x)$ bulunur.

1.3. Eğer $y \parallel e$ ise, $U_t(x,y) = y = U_t(y,x)$ elde edilir.

2. $x > e$ olduğu kabul edilsin.

2.1. Eğer $y \leq e$ ise, $U_t(x,y) = x \vee y = x = y \vee x = U_t(y,x)$ bulunur.

2.2. Eğer $y > e$ ise, $U_t(x,y) = x \vee y = y \vee x = U_t(y,x)$ elde edilir.

2.3. Eğer $y \parallel e$ ise, $U_t(x,y) = x \vee y = y \vee x = U_t(y,x)$ olur.

3. $x \parallel e$ olduğu kabul edilsin.

3.1. Eğer $y \leq e$ ise, $U_t(x,y) = x = U_t(y,x)$ elde edilir.

3.2. Eğer $y > e$ ise, $U_t(x,y) = x \vee y = y \vee x = U_t(y,x)$ bulunur.

3.3. Eğer $y \parallel e$ ise, $U_t(x,y) = x \vee y = y \vee x = U_t(y,x)$ elde edilir.

ii) Birleşme Özelliği: Her $x, y, z \in L$ için $U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(U_t(x,y), z)$ olduğu gösterilecektir. x, y, z ve e elemanları arasındaki ilişki gözönüne alınarak ispat mümkün olan tüm durumlara ayrılacaktır.

1. $x \leq e$ olduğu kabul edilsin.

1.1. Eğer $y \leq e$ ve $z \leq e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t\big(x, T_e(y,z)\big) = T_e\big(x, T_e(y,z)\big) = T_e(T_e(x,y), z).$$

$$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(T_e(x,y), z) = T_e(T_e(x,y), z).$$

1.2. Eğer $y \leq e$ ve $z > e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x, y \vee z) = U_t(x,z) = x \vee z = z.$$

$$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(T_e(x,y), z) = T_e(x,y) \vee z = z.$$

1.3. Eğer $y \leq e$ ve $z \parallel e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,z) = z.$$

$$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(T_e(x,y), z) = z.$$

1.4. Eğer $y > e$ ve $z \leq e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x, y \vee z) = U_t(x,y) = x \vee y = y.$$

$$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = U_t(y,z) = y \vee z = y.$$

1.5. Eğer $y > e$ ve $z > e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, y \vee z) = x \vee (y \vee z) = y \vee z.$$

$$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = U_t(y,z) = y \vee z.$$

1.6. Eğer $y > e$ ve $z \parallel e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, y \vee z) = x \vee (y \vee z) = y \vee z.$$

$$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = U_t(y,z) = y \vee z.$$

1.7. Eğer $y \parallel e$ ve $z \leq e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x,y) = y.$$

$$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(y,z) = y.$$

1.8. Eğer $y \parallel e$ ve $z > e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, y \vee z) = x \vee (y \vee z) = y \vee z.$$

$$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(y,z) = y \vee z.$$

1.9. Eğer $y \parallel e$ ve $z \parallel e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, y \vee z) = y \vee z.$$

$$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(y,z) = y \vee z.$$

2. $x > e$ olduğu kabul edilsin.

2.1. Eğer $y \leq e$ ve $z \leq e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, T_e(y,z)) = x \vee T_e(y,z) = x.$$

$$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = U_t(x,z) = x \vee z = x.$$

2.2. Eğer $y \leq e$ ve $z > e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, y \vee z) = U_t(x,z) = x \vee z.$$

$$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = U_t(x,z) = x \vee z.$$

2.3. Eğer $y \leq e$ ve $z \parallel e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x,z) = x \vee z.$$

$$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = U_t(x,z) = x \vee z.$$

2.4. Eğer $y > e$ ve $z \leq e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, y \vee z) = U_t(x,y) = x \vee y.$$

$$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = (x \vee y) \vee z = x \vee y.$$

2.5. Eğer $y > e$ ve $z > e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, y \vee z) = x \vee y \vee z.$$

$$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = x \vee y \vee z.$$

2.6. Eğer $y > e$ ve $z \parallel e$ ise,

$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, y \vee z) = x \vee y \vee z.$

$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = x \vee y \vee z.$

2.7. Eğer $y \parallel e$ ve $z \leq e$ ise,

$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, y) = x \vee y.$

$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = (x \vee y) \vee z = x \vee y.$

2.8. Eğer $y \parallel e$ ve $z > e$ ise,

$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, y \vee z) = x \vee y \vee z.$

$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = x \vee y \vee z.$

2.9. Eğer $y \parallel e$ ve $z \parallel e$ ise,

$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, y \vee z) = x \vee y \vee z.$

$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = x \vee y \vee z.$

3. $x \parallel e$ olduğu kabul edilsin.

3.1. Eğer $y \leq e$ ve $z \leq e$ ise,

$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, T_e(y,z)) = x.$

$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x, z) = x.$

3.2. Eğer $y \leq e$ ve $z > e$ ise,

$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, y \vee z) = U_t(x, z) = x \vee z.$

$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x, z) = x \vee z.$

3.3. Eğer $y \leq e$ ve $z \parallel e$ ise,

$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, z) = x \vee z.$

$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x, z) = x \vee z.$

3.4. Eğer $y > e$ ve $z \leq e$ ise,

$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, y \vee z) = U_t(x, y) = x \vee y.$

$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = (x \vee y) \vee z = x \vee y.$

3.5. Eğer $y > e$ ve $z > e$ ise,

$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, y \vee z) = x \vee y \vee z.$

$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = x \vee y \vee z.$

3.6. Eğer $y > e$ ve $z \parallel e$ ise,

$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, y \vee z) = x \vee y \vee z.$

$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = x \vee y \vee z.$

3.7. Eğer $y \parallel e$ ve $z \leq e$ ise,

$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,y) = x \vee y.$

$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = x \vee y.$

3.8. Eğer $y \parallel e$ ve $z > e$ ise,

$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x, y \vee z) = x \vee y \vee z.$

$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = x \vee y \vee z.$

3.9. Eğer $y \parallel e$ ve $z \parallel e$ ise,

$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x, y \vee z) = x \vee y \vee z.$

$U_t(U_t(x,y), z) = U_t(x \vee y, z) = x \vee y \vee z.$

iii) Monoton özelliği: Eğer $x \leq y$ ise, her $z \in L$ için $U_t(x,z) \leq U_t(y,z)$ olduğu gösterilecektir. İspat, tüm muhtemel durumlara ayrılarak yapılacaktır.

1. $x \leq e$ olduğu kabul edilsin.

1.1. Eğer $y \leq e$ ve $z \leq e$ ise,

$U_t(x,z) = T_e(x,z) \leq T_e(y,z) = U_t(y,z).$

1.2. Eğer $y \leq e$ ve $z > e$ ise,

$U_t(x,z) = x \vee z = z = y \vee z = U_t(y,z).$

1.3. Eğer $y \leq e$ ve $z \parallel e$ ise,

$U_t(x,z) = z = U_t(y,z).$

1.4. Eğer $y > e$ ve $z \leq e$ ise,

$U_t(x,z) = T_e(x,z) \leq x \leq y = y \vee z = U_t(y,z).$

1.5. Eğer $y > e$ ve $z > e$ ise,

$U_t(x,z) = x \vee z = z \leq y \vee z = U_t(y,z).$

1.6. Eğer $y > e$ ve $z \parallel e$ ise,

$U_t(x,z) = z \leq y \vee z = U_t(y,z).$

1.7. Eğer $y \parallel e$ ve $z \leq e$ ise,

$U_t(x,z) = T_e(x,z) \leq x \leq y = U_t(y,z).$

1.8. Eğer $y \parallel e$ ve $z > e$ ise,

$U_t(x,z) = x \vee z = z \leq y \vee z = U_t(y,z).$

1.9. Eğer $y \parallel e$ ve $z \parallel e$ ise,

$U_t(x,z) = z \leq y \vee z = U_t(y,z).$

2. $x > e$ olduğu kabul edilsin.

2.1. Eğer $y > e$ ve $z \leq e$ ise,

$U_t(x, z) = x \vee z = x \leq y = y \vee z = U_t(y, z)$.

2.2. Eğer $y > e$ ve $z > e$ ise,

$U_t(x, z) = x \vee z \leq y \vee z = U_t(y, z)$.

2.3. Eğer $y > e$ ve $z \parallel e$ ise,

$U_t(x, z) = x \vee z \leq y \vee z = U_t(y, z)$.

3. $x \parallel e$ olduğu kabul edilsin.

3.1. Eğer $y > e$ ve $z \leq e$ ise,

$U_t(x, z) = x \leq y = y \vee z = U_t(y, z)$.

3.2. Eğer $y > e$ ve $z > e$ ise,

$U_t(x, z) = x \vee z \leq y \vee z = U_t(y, z)$.

3.3. Eğer $y > e$ ve $z \parallel e$ ise,

$U_t(x, z) = x \vee z \leq y \vee z = U_t(y, z)$.

3.4. Eğer $y \parallel e$ ve $z \leq e$ ise,

$U_t(x, z) = x \leq y = U_t(y, z)$.

3.5. Eğer $y \parallel e$ ve $z > e$ ise,

$U_t(x, z) = x \vee z \leq y \vee z = U_t(y, z)$.

3.6. Eğer $y \parallel e$ ve $z \parallel e$ ise,

$U_t(x, z) = x \vee z \leq y \vee z = U_t(y, z)$.

iv) Birim eleman: Her $x \in L$ için $U_t(x, e) = x$ olduğu gösterilmelidir. İspat mümkün olan tüm durumlara ayrılacaktır.

1. $x \leq e$ olduğu kabul edilirse, $U_t(x, e) = T_e(x, e) = x$ elde edilir.

2. $x > e$ olduğu kabul edilirse, $U_t(x, e) = x \vee e = x$ bulunur.

3. $x \parallel e$ olduğu kabul edilirse, $U_t(x, e) = x$ elde edilir.

Böylece U_t fonksiyonunun L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm olduğu gösterilmiş oldu.

Uyarı 2.6: i) Keyfi bir sınırlı kafes üzerindeki uninormların varlığı ilk olarak [41] de gösterildi. Teorem 1.120 de verilen U_s konjanktif uninormu, idempotent uninorm değildir ve $(L\backslash[e, 1])^2$ bölgesi üzerinde Teorem 2.5 de verilen U_s uninormundan farklıdır. $(L\backslash[e, 1])^2$ bölgesi üzerinde Teorem 1.110 da verilen U_s uninormu 0 değerini alırken, Teorem 2.5 de verilen U_s uninormu $x \wedge y$ değerini alır. Benzer şekilde, Teorem 1.120 de verilen U_t disjanktif uninormu idempotent uninorm değildir ve $(L\backslash[0,e])^2$ bölgesi üzerinde Teorem 2.5 de verilen U_t uninormundan farklıdır. $(L\backslash[0,e])^2$ bölgesi üzerinde Teorem 1.120 de verilen U_t uninormu 1 değerini alırken, Teorem 2.5 de verilen U_t uninormu $x \vee y$ değerini alır.

ii) Teorem 2.5 de verilen $U_t: L \times L \to L$ ve $U_s: L \times L \to L$ uninormları,

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \in [0,e] \text{ ise,} \\ x & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

ve

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in [0,e] \text{ ise,} \\ x & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

ile tanımlı $\Phi: L \to L$ ve $\eta: L \to L$ fonksiyonları göz önününe alınarak,

$$U_t(x,y) = \begin{cases} T_e(x,y) & \text{eğer } (x,y) \in [0,e]^2 \text{ ise,} \\ \Phi(x) \vee \Phi(y) & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

ve

$$U_s(x,y) = \begin{cases} S_e(x,y) & \text{eğer } (x,y) \in [e,1]^2 \text{ ise,} \\ \eta(x) \wedge \eta(y) & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

şeklinde de tanımlanabilir.

iii) Teorem 2.5 de verilen inşa yöntemleri, bir L sınırlı kafesi üzerinde keyfi bir $e \in L\backslash\{0,1\}$ elemanı için idempotent uninormların varlığını göstermektedir. Ayrıca, bu inşa yöntemleri ile keyfi bir L sınırlı kafesi üzerinde en büyük ve en küçük idempotent uninormlar elde edilmektedir.

$(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes olsun. $\mathcal{U}$, L üzerindeki tüm uninormların kümesini göstermek üzere, $U, V \in \mathcal{U}$ için,

$$U \leq V \Leftrightarrow \text{Her } (x,y) \in L^2 \text{ için } U(x,y) \leq V(x,y)$$

şeklinde tanımlanan sıra ile $\mathcal{U}$ kümesi ele alınsın. Buna göre, $\mathcal{U}$ kümesi en küçük elemanı

$$T_w: L^2 \to L,\ T_w(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & \text{eğer } 1 \in \{x,y\} \text{ ise,} \\ 0 & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

ve en büyük elemanı

$$S_w: L^2 \to L,\ S_w(x,y) = \begin{cases} x \vee y & \text{eğer } 0 \in \{x,y\} \text{ ise,} \\ 1 & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

olan bir kısmen sıralı kümedir.

Benzer şekilde $\mathcal{U}(e)$ kümesi de bir kısmen sıralı kümedir.

Sonuç 2.7: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L\backslash\{0,1\}$ olsun. Eğer Teorem 2.5 de $[0,e]$ üzerinde T_e t-normu yerine $T_\wedge$ (infimum) en büyük t-normu ve $[e,1]$ üzerinde S_e t-konormu yerine $S_\vee$ (supremum) en küçük t-konormu alınırsa, bu takdirde

$$U_{t_\wedge}(x,y)=\begin{cases} x\wedge y & \text{eğer } (x,y)\in[0,e]^2 \text{ ise,}\\ y & \text{eğer } x\in[0,e], y\parallel e \text{ ise,}\\ x & \text{eğer } y\in[0,e], x\parallel e \text{ ise,}\\ x\vee y & \text{aksi durumda.}\end{cases}$$

$$U_{s_\vee}(x,y)=\begin{cases} x\vee y & \text{eğer } (x,y)\in[e,1]^2 \text{ ise,}\\ y & \text{eğer } x\in[e,1], y\parallel e \text{ ise,}\\ x & \text{eğer } y\in[e,1], x\parallel e \text{ ise,}\\ x\wedge y & \text{aksi durumda.}\end{cases}$$

şeklinde bulunan $U_{t_\wedge}$ ve $U_{s_\vee}$ uninormları sırasıyla L üzerinde e birim elemanlı en büyük ve en küçük idempotent uninormlar olur.

İspat: Her $x\in L$ için $U_{t_\wedge}(x,x)=x$ ve $U_{s_\vee}(x,x)=x$ olduğundan $U_{t_\wedge}$ ve $U_{s_\vee}$ uninormları L üzerinde idempotent uninormlardır.

İlk olarak, $U_{t_\wedge}$ idempotent uninormunun L sınırlı kafesi üzerinde en büyük idempotent uninorm olduğu gösterilsin. Keyfi $U\in\mathcal{U}(e)$ idempotent uninormu seçilsin.

i) Eğer $(x,y)\in[0,e]^2$ ise, Önerme 2.4 i) ye göre $U(x,y)\le x\wedge y=U_{t_\wedge}(x,y)$ bulunur.

ii) Eğer $x\in[0,e]$ ve $y\parallel e$ ise, Önerme 1.118 iii) kullanılarak $U(x,y)\le y=U_{t_\wedge}(x,y)$ sağlanır.

iii) Eğer $y\in[0,e]$ ve $x\parallel e$ ise, Önerme 1.118 ii) kullanılarak $U(x,y)\le x=U_{t_\wedge}(x,y)$ bulunur.

iv) Aksi durumda, Önerme 2.4 iii) den $U(x,y)\le x\vee y=U_{t_\wedge}(x,y)$ olur.

Buna göre, $U_{t_\wedge}$ idempotent uninormu L üzerinde en büyük idempotent uninormdur.

Şimdi $U_{s_\vee}$ idempotent uninormunun L sınırlı kafesi üzerinde en küçük idempotent uninorm olduğu gösterilsin. Keyfi $U\in\mathcal{U}(e)$ idempotent uninormu seçilsin.

i) Eğer $(x,y)\in[e,1]^2$ ise, Önerme 2.4 ii) ye göre $U_{s_\vee}(x,y)=x\vee y\le U(x,y)$ bulunur.

ii) Eğer $x\in[e,1]$ ve $y\parallel e$ ise, Önerme 1.118 v) kullanılarak $U_{s_\vee}(x,y)=y\le U(x,y)$ elde edilir.

iii) Eğer $y\in[e,1]$ ve $x\parallel e$ ise, Önerme 1.118 iv) kullanılarak $U_{s_\vee}(x,y)=x\le U(x,y)$ elde edilir.

iv) Aksi durumda, Önerme 2.4 iii) den $U_{s_\vee}(x,y)=x\wedge y\le U(x,y)$ olur.

Buna göre, $U_{s_\vee}$ idempotent uninormu L üzerinde en küçük idempotent uninormdur.

2.2. $U(0,1)$ ile Kıyaslanamayan e Birim Elemanlı Uninormlar

Bu kısımda, sabit bir $e \in L\backslash\{0,1\}$ elemanı için $U \in \mathcal{U}(e)$ olmak üzere, $U(0,1) = a$ ile gösterilecektir.

Önerme 2.8: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$ ve U, L üzerinde e birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler elde edilir.

i) Her $x \in L$ için $U(a,x) = a$ dır. Yani, $a \in L$ elemanı U uninormunun sıfır elemanı (sıfırlayanı) dır.

ii) Eğer a ile e kıyaslanabilir ise, $a = 0$ veya $a = 1$ dir. Buna göre, U konjanktif uninorm veya disjanktif uninormdur.

iii) Eğer $(x,y) \in [0,a] \times [a,1] \cup [a,1] \times [0,a]$ ise, $U(x,y) = a$ dır.

İspat:

i) Her $x \in L$ için $x \leq 1$ olduğundan U uninormunun monoton ve birleşme özellikleri kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
U(a,x) \leq U(a,1) &= U(U(0,1),1)\\
&= U\big(0, U(1,1)\big)\\
&= U(0,1)\\
&= a
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer taraftan, her $x \in L$ için $x \geq 0$ olduğundan U uninormunun monoton, birleşme ve değişme özellikleri kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
U(a,x) \geq U(a,0) &= U(U(0,1),0)\\
&= U(U(1,0),0)\\
&= U\big(1, U(0,0)\big)\\
&= U(1,0)\\
&= U(0,1)\\
&= a
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan, her $x \in L$ için $U(a,x) = a$ bulunur.

Buna göre, $a \in L$ elemanı U uninormunun sıfır elemanı (sıfırlayanı) dır.

ii) Eğer a ile e kıyaslanabilir ise, $a \leq e$ veya $a \geq e$ dir. Eğer $a \leq e$ ise, U uninormunun monoton özelliği, $a \in L$ elemanının U uninormunun sıfır elemanı ve $e \in L$ elemanının U uninormunun birim elemanı olduğu kullanılırsa, her $x \in L$ için

$$a = U(x, a) \leq U(x, e) = x$$

olup buradan $a = 0$ elde edilir. Eğer $a \geq e$ ise, U uninormunun monoton özelliği, $a \in L$ elemanının U uninormunun sıfır elemanı ve $e \in L$ elemanının U uninormunun birim elemanı olduğu kullanılırsa, her $x \in L$ için

$$a = U(x, a) \geq U(x, e) = x$$

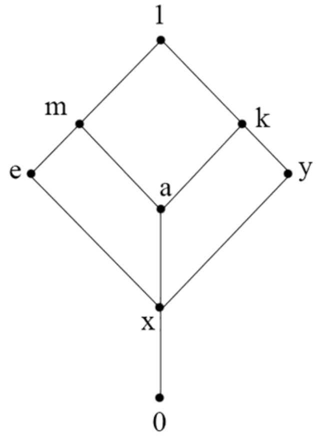
olup buradan $a = 1$ elde edilir.

iii) $(x, y) \in [0, a] \times [a, 1]$ olsun. U uninormunun monoton özelliği ve $a \in L$ elemanının U uninormunun sıfır elemanı olduğu kullanılırsa, $U(x, y) \leq U(a, y) = a$ ve $U(x, y) \geq U(x, a) = a$ eşitsizlikleri bulunur. Buradan $U(x, y) = a$ elde edilir. Benzer şekilde, $(x, y) \in [a, 1] \times [0, a]$ için, $U(x, y) \geq U(a, y) = a$ ve $U(x, y) \leq U(x, a) = a$ olup $U(x, y) = a$ elde edilir.

Teorem 2.5 de, keyfi bir sınırlı kafes üzerinde t-normlar ve t-konormlar kullanılarak keyfi bir L sınırlı kafesi üzerinde uninorm inşa etme metodları verildi. Buna ek olarak, Sonuç 2.7 de, keyfi bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L \backslash \{0,1\}$ birim elemanlı en küçük ve en büyük idempotent uninormlar elde edildi. Ayrıca, elde edilen en küçük idempotent uninormun konjanktif uninorm ve en büyük idempotent uninormun disjanktif uninorm olduğu gözlemlendi.

Bu takdirde şöyle bir soru akla gelmektedir: bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı herhangi bir idempotent uninorm ya konjanktif uninorm ya da disjanktif uninorm olmak zorunda mıdır? Aşağıda, bu sorunun cevabının negatif olduğu bir örnekle gösterildi.

Örnek 2.9: Şekil 2.1 ile verilen $L = \{0, x, a, y, k, m, e, 1\}$ sınırlı kafesi ve Tablo 2.1 ile verilen $U: L \times L \rightarrow L$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu takdirde, U fonksiyonu L üzerinde e birim elemanlı ve $a \parallel e$ olacak şekilde a sıfırlayanlı bir idempotent uninormdur. Ayrıca, bu idempotent uninorm ne konjanktif uninorm ne de disjanktif uninormdur.



Şekil 2.1. L sınırlı kafesi

Tablo 2.1. L üzerindeki U uninormu

U	0	x	a	y	k	m	e	1
0	0	0	a	0	a	a	0	a
x	0	x	a	x	a	a	x	a
a	a	a	a	a	a	a	a	a
y	0	x	a	y	k	k	y	k
k	a	a	a	k	k	k	k	k
m	a	a	a	k	k	m	m	1
e	0	x	a	y	k	m	e	1
1	a	a	a	k	k	1	1	1

L bir sınırlı kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$ ve $a \parallel e$ olacak şekilde $a \in L$ elemanı verilsin. Şimdi başka bir soru daha akla gelmektedir: Keyfi bir L sınırlı kafesi üzerinde $a = U(0,1)$ olacak şekilde $a \in L$ sıfırlayanlı ve $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir uninorm her zaman mevcut mudur?

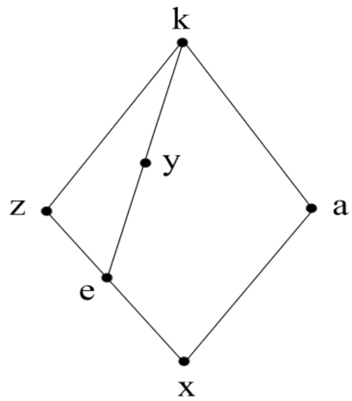
Teorem 2.11 ve Teorem 2.14 de, bu soruya negatif bir cevap verilmektedir.

Lemma 2.10: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir uninorm, $a \parallel e$ ve $(x,y) \in L^2$ öyle ki $x < e$, $x < a$, $y \geq e$, $y \parallel a$ ve $U(0,1) = a$ olsun. Eğer $z > e$, $z \parallel a$ ve $y \vee z > a$ olacak şekilde bir $z \in L$ elemanı var ise, $U(x,y) < a$ ve $U(x,y) \parallel e$ dir.

İspat: Önerme 2.8 (iii) kullanılarak $U(x, y \vee z) = a$ elde edilir. Buradan $U\big(x, U(y, z)\big) \geq U(x, y \vee z)$ olup $U\big(x, U(y, z)\big) \geq a$ bulunur. U uninormunun birleşme özelliği kullanılırsa $U(U(x, y), z) \geq a$ olur. $x < e$ ve $x < a$ olduğundan $U(x, y) \leq y \wedge a \leq a$ yani, $U(x, y) \leq a$ elde edilir. $U(x, y) = a$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, $U(x, y) \leq y$ olduğundan $a \leq y$ bulunur ki bu $y \parallel a$ olması ile çelişir. O halde, $U(x, y) = a$ olamaz. Böylece, $U(x, y) < a$ eşitsizliği elde edilir.

$U(x, y) \leq e$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, $a \leq U(U(x, y), z) \leq z \wedge a \leq z$ bulunur ki bu $z \parallel a$ olması ile çelişir. O halde, $U(x, y) \leq e$ olamaz. Diğer taraftan $U(x, y) > e$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, $e < U(x, y) < a$ olup $e < a$ bulunur. Bu da $a \parallel e$ olması ile çelişir. O halde, $U(x, y) > e$ olamaz. Buna göre, $U(x, y) \parallel e$ elde edilir.

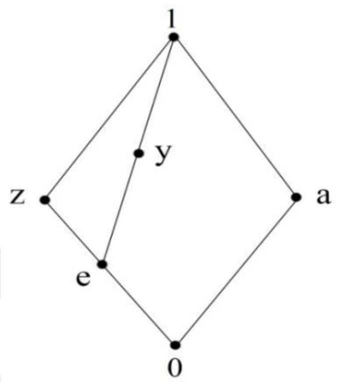
Teorem 2.11: L sınırlı kafesi, Şekil 2.2 deki Hasse diyagramı ile karakterize edilen alt kafese izomorf olan bir alt kafesi içersin. Bu takdirde, L üzerinde $a = U(0,1)$ olacak şekilde $a \in L$ sıfırlayanlı ve $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm mevcut değildir.



Şekil 2.2. L sınırlı kafesi

İspat: $x = U(x, e) \leq U(x, y) \leq y \wedge a = x$ olduğundan $U(x, y) = x$ elde edilir. Buradan $U(U(x, y), z) = U(x, z)$ olur. Önerme 2.8 (iii) den $U\big(x, U(y, z)\big) \geq U(x, y \vee z) = a$ olduğundan $a \leq U(x, z) \leq U(e, z) = z$ bulunur. Buradan $a \leq z$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle, $a \leq U(x, z)$ olamaz. Yani, L kafesi üzerinde, Şekil 2.2 deki alt kafeste belirtilen $a = U(0,1)$ olacak şekilde $a \in L$ sıfırlayanlı ve $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm mevcut değildir.

Örnek 2.12: Şekil 2.2 deki Hasse diyagramı ile karakterize edilen alt kafesi içeren $L = \{0, e, z, y, a, 1\}$ sınırlı kafesi Şekil 2.3 deki gibi verilsin. L üzerinde $a = U(0,1)$ olacak şekilde a sıfırlayanlı ve e birim elemanlı bir U fonksiyonu Tablo 2.2 deki gibi tanımlansın. Çünkü, $0, y, z \in L$ elemanları için, $U\big(0, U(y,z)\big) = U(0,1) = a$ ve $U(U(0,y), z) = U(0,z) = 0$ eşitlikleri elde edilir. Buradan görülmektedir ki, U fonksiyonu birleşme özelliğini sağlamadığından L üzerinde bir uninorm değildir.



Şekil 2.3. L sınırlı kafesi

Tablo 2.2. L üzerindeki U fonksiyonu

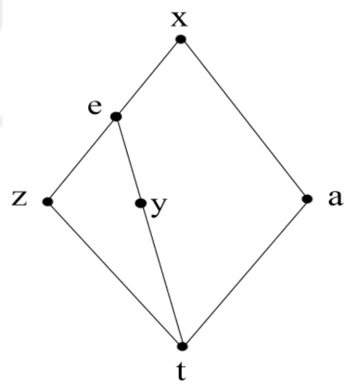
U	0	e	z	y	a	1
0	0	0	0	0	a	a
e	0	e	z	y	a	1
z	0	z	z	1	a	1
y	0	y	1	y	a	1
a	a	a	a	a	a	a
1	a	1	1	1	a	1

Lemma 2.13: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L \backslash \{0,1\}$, U, L üzerinde $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm, $a \parallel e$ ve $(x,y) \in L^2$ öyle ki $x > e$, $x > a$, $y \leq e$, $y \parallel a$ ve $U(0,1) = a$ olsun. Eğer $z < e$, $z \parallel a$ ve $y \wedge z < a$ olacak şekilde bir $z \in L$ elemanı var ise, $U(x,y) > a$ ve $U(x,y) \parallel e$ dir.

İspat: Önerme 2.8 (iii) kullanılarak $U(x, y \wedge z) = a$ elde edilir. Buradan $U\big(x, U(y,z)\big) \leq U(x, y \wedge z)$ olup $U\big(x, U(y,z)\big) \leq a$ bulunur. U uninormunun birleşme özelliği ile $U(U(x,y),z) \leq a$ olur. $x > e$, $x > a$ olduğundan $U(x,y) \geq y \vee a \geq a$ yani, $U(x,y) \geq a$ elde edilir. $U(x,y) = a$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, $U(x,y) \geq y$ olduğundan $a \geq y$ bulunur ki bu $y \parallel a$ olması ile çelişir. O halde, $U(x,y) = a$ olamaz. Böylece, $U(x,y) > a$ eşitsizliği elde edilir.

$U(x,y) \geq e$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde $z \leq z \vee a \leq U(U(x,y),z) \leq a$ bulunur ki bu $z \parallel a$ olması ile çelişir. O halde, $U(x,y) \geq e$ olamaz. Diğer taraftan $U(x,y) < e$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, $a < U(x,y) < e$ olup $e < a$ bulunur. Bu da $a \parallel e$ olması ile çelişir. O halde, $U(x,y) < e$ olamaz. Buna göre, $U(x,y) \parallel e$ elde edilir.

Teorem 2.14: L sınırlı kafesi, Şekil 2.4 deki Hasse diyagramı ile karakterize edilen alt kafese izomorf olan bir alt kafesi içersin. L üzerinde $a = U(0,1)$ olacak şekilde $a \in L$ sıfırlayanlı ve $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm mevcut değildir.



Şekil 2.4. L sınırlı kafesi

İspat: $x = U(x,e) \geq U(x,y) \geq y \vee a = x$ olduğundan $U(x,y) = x$ elde edilir. Buradan $U(U(x,y),z) = U(x,z)$ olur. Önerme 2.8 (iii) den $U\big(x, U(y,z)\big) \leq U(x, y \wedge z) = a$ olduğundan $a \geq U(x,z) \geq U(e,z) = z$ bulunur. Böylece $a \geq z$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle, $a \geq U(x,z)$ olamaz. Yani, L kafesi üzerinde Şekil 2.4 deki alt kafeste belirtilen $a = U(0,1)$ olacak şekilde $a \in L$ sıfırlayanlı ve $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm mevcut değildir.

Bu kısıma kadar yapılanlar özetlenecek olursa, keyfi bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir uninorm inşa etmek için iki yöntem verildi. Bu yöntemlerin bir sonucu olarak, keyfi bir L sınırlı kafesi üzerinde en büyük idempotent t-normun $T_\wedge$ (infimum t-normu) olduğu kullanılarak en büyük idempotent uninorm ve en küçük idempotent t-konormun $S_\vee$ (supremum t-konormu) olduğu kullanılarak en küçük idempotent uninorm elde edildi. Ne konjanktif uninorm ne de disjanktif uninorm olan uninormlara bir örnek verildi. Bu durum sınırlı kafesler için elde edilen sonuçların kısmen sıralı kümeler (zincirler) ve özellikle $[0,1]$ reel birim aralığı için bulunan sonuçlardan farklı olduğunu gösterir. $U \in \mathcal{U}(e)$ için $a = U(0,1)$ olacak şekildeki $a \in L$ sıfırlayanlı ve $e \in L$ birim elemanlı U uninormu için iki durum söz konusudur: ya a ve e kıyaslanamaz ya da a ve e kıyaslanabilirdir. a ve e nin kıyaslanabilir olması durumunda $a = 0$ veya $a = 1$ elde edilir. $a = 0$ olması durumunda U konjanktif uninorm ve $a = 1$ olması durumunda U disjanktif uninormdur. Fakat, bazı $U \in \mathcal{U}(e)$ uninormları için $a = U(0,1)$ olacak şekildeki her bir $a \in L$ elemanı, $e \in L$ birim elemanı ile kıyaslanabilir olmayabilir. Bu durum bir problem ortaya çıkarmaktadır: L sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$ ve bazı $U \in \mathcal{U}(e)$ uninormları için $a = U(0,1)$ olacak şekildeki tüm $a \in L$ elemanları e ile kıyaslanamazdır.

Bu duruma aşağıdaki şekilde iki örnek verilebilir. $L = \{0, a, b, 1\}$ kafesi göz önüne alınsın. $U: L \times L \to L$ uninormu Tablo 2.3 ile tanımlansın öyle ki $b = e$ elemanı, U uninormunun birim elemanı ve $a = U(0,1)$ olacak şekilde $a \in L$ elemanı U uninormunun sıfırlayanı olsun.

Tablo 2.3. L üzerindeki U uninormu

U	0	a	b	1
0	0	a	0	a
a	0	a	a	1
b	a	a	a	a
1	a	a	1	1

Buradan görülmektedir ki, a ve b elemanları kıyaslanamaz ve L kafesi, $\{0, a, 1\}$ ve $\{0, b, 1\}$ zincirlerinin yatay toplamıdır. Bu örnek, L_k kafeslerinin keyfi bir yatay toplamı olan L kafesi için genelleştirilebilir. L kafesi, L_k $(k \in K)$ kafeslerinin keyfi bir yatay toplamı yani, en küçük elemanı 0 ve en büyük elemanı 1 olan $(L_k, \leq, 0,1)$ $(k \in K)$ sınırlı kafeslerin bir sistemi için $L = \bigcup_{k \in K} L_k$ olsun. L üzerindeki $\leq$ kısmen sırası aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$x \leq y \Leftrightarrow x, y \in L_k$ ve $x \leq_{L_k} y$ olacak şekilde bir $k \in K$ vardır.

Buna göre, 0, L nin en küçük elemanı ve 1, L nin en büyük elemanıdır. Şimdi kabul edilsin ki L_{k_0} zincir olacak şekilde en az bir $k_0 \in K$ mevcut olsun. Bu takdirde, keyfi bir $e \in L_{k_0} \backslash \{0,1\}$ elemanı ve e ile kıyaslanamayan keyfi bir $a \in L$ elemanı için, $a = U(0,1)$ olacak şekilde $U \in \mathcal{U}(e)$ uninormu mevcuttur. Diğer taraftan, Önerme 2.8 (ii) de, eğer $U: L \times L \to L$ uninormunun e birim elemanı her $x \in L$ elemanı ile kıyaslanıyorsa, $a = U(0,1) \in \{0,1\}$ olduğu gösterildi. Bu duruma bir örnek olarak, L_k kafeslerinin keyfi bir ordinal toplamı olan L kafesi düşünülsün. Bu takdirde, K indeks kümesi sınırlı zincir olmak üzere, en küçük elemanı 0_K ve en büyük elemanı 1_K olan $(L_k, \leq, 0,1)$ $(k \in K)$ kafeslerin bir sistemi olsun öyle ki $L_{k_1} \cap L_{k_2}$ arakesiti ya boş küme ya da en büyük elemanı $1_{min\,(k_1,k_2)}$ ve en küçük elemanı $0_{max(k_1,k_2)}$ olan tek noktalı bir kümedir. Buna göre, $L = \bigcup_{k \in K} L_k$ ve $k_1 < k_2$ veya $k_1 = k_2 = k$ ve $x \leq y$ olacak şekildeki $x \in L_{k_1}$, $y \in L_{k_2}$ elemanları için $x \leq_k y$ olsun. Kabul edilsin ki, L_{k_0} zincir olacak şekilde $k_0 \in K$ indeksi mevcut olsun. Bu takdirde, keyfi bir $e \in L_{k_0} \backslash \{0,1\}$ elemanı ve $U \in \mathcal{U}(e)$ uninormu için, $a = U(0,1)$ olacak şekilde e ile kıyaslanamayan $a \in L$ elemanı yoktur.

2.3. Sınırlı Kafeslerin Bir Özel Sınıfı Üzerinde İdempotent Uninormların Özellikleri

Önerme 2.15: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L \backslash \{0,1\}$ ve U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler elde edilir.

i) Her $(x, y) \in A(e)$ için $U(x, y) \in \{x \wedge y, x \vee y\}$ dir.

ii) Her $x \in [0, e]$ ve $y \in I_e$ için $U(x, y) = x \wedge y$ veya $U(x, y) \in I_e$ dir.

iii) Her $x \in [e, 1]$ ve $y \in I_e$ için $U(x, y) = x \vee y$ veya $U(x, y) \in I_e$ dir.

iv) Her $x \in I_e$ ve $y \in [0, e]$ için $U(x, y) = x \wedge y$ veya $U(x, y) \in I_e$ dir.

v) Her $x \in I_e$ ve $y \in [e, 1]$ için $U(x, y) = x \vee y$ veya $U(x, y) \in I_e$ dir.

vi) Her $x \in I_e$ ve $y \in I_e$ için $U(x, y) \in \{x \wedge y, x \vee y\}$ veya $U(x, y) \in I_e$ dir.

İspat:

i) $(x, y) \in [0, e] \times [e, 1]$ olsun. Bu takdirde, $U(x, y) \leq e$ veya $U(x, y) > e$ veya $U(x, y) \in I_e$ olabilir. $U(x, y) \in I_e$ olması durumunda ispat açıktır. Şimdi $U(x, y) \leq e$ veya $U(x, y) > e$ olduğu durumlar incelensin.

1. $U(x,y) \leq e$ olsun.

U uninormunun monoton ve birleşme özellikleri kullanılarak $U(x,y) = U(U(x,x),y) = U\big(x, U(x,y)\big) \leq U(x,e) = x$ ve $U(x,y) \geq U(x,e) = x$ elde edilir. Dolayısıyla, $U(x,y) = x$ olup $U(x,y) = x \wedge y$ bulunur.

2. $U(x,y) > e$ olsun.

U uninormunun monoton ve birleşme özellikleri kullanılarak $U(x,y) = U\big(x, U(y,y)\big) = U(U(x,y),y) \geq U(e,y) = y$ ve $U(x,y) \leq U(e,y) = y$ elde edilir. Dolayısıyla, $U(x,y) = y$ olup $U(x,y) = x \vee y$ bulunur.

Benzer şekilde, $(x,y) \in [e,1] \times [0,e]$ için $U(x,y) \leq e$ ise, $U(x,y) = x \wedge y$ ve $U(x,y) > e$ ise, $U(x,y) = x \vee y$ bulunur.

ii) $x \in [0,e]$ ve $y \in I_e$ olsun. U uninormunun monoton özelliği kullanılarak $U(x,y) \leq U(e,y) = y$ elde edilir. $y \in I_e$ olduğundan $U(x,y) < e$ veya $U(x,y) \in I_e$ dir. $U(x,y) \in I_e$ olması durumunda ispat açıktır. $U(x,y) < e$ olması durumunda ise, $U(x,y) = U(U(x,x),y) = U\big(x, U(x,y)\big) \leq U(x,e) = x$ ve $U(x,y) = U\big(x, U(y,y)\big) = U(U(x,y),y) \leq U(e,y) = y$ elde edilir. Dolayısıyla, $U(x,y) \leq x \wedge y$ olur. Ayrıca $U(x,y) \geq U(x \wedge y, x \wedge y) = x \wedge y$ olduğundan $U(x,y) = x \wedge y$ bulunur.

iii) $x \in [e,1]$ ve $y \in I_e$ olsun. U uninormunun monoton özelliği kullanılarak $U(x,y) \geq U(e,y) = y$ elde edilir. $y \in I_e$ olduğundan $U(x,y) > e$ veya $U(x,y) \in I_e$ dir. $U(x,y) \in I_e$ olması durumunda ispat açıktır. $U(x,y) > e$ olması durumunda ise, $U(x,y) = U(U(x,x),y) = U\big(x, U(x,y)\big) \geq U(x,e) = x$ ve $U(x,y) = U\big(x, U(y,y)\big) = U(U(x,y),y) \geq U(e,y) = y$ bulunur. Dolayısıyla, $U(x,y) \geq x \vee y$ olur. Ayrıca $U(x,y) \leq U(x \vee y, x \vee y) = x \vee y$ olduğundan $U(x,y) = x \vee y$ elde edilir.

iv) $x \in I_e$ ve $y \in [0,e]$ olsun. U uninormunun monoton özelliği kullanılarak $U(x,y) \leq U(x,e) = x$ elde edilir. $x \in I_e$ olduğundan $U(x,y) < e$ veya $U(x,y) \in I_e$ dir. $U(x,y) \in I_e$ olması durumunda ispat açıktır. $U(x,y) < e$ olması durumunda ise, $U(x,y) = U(U(x,x),y) = U\big(x, U(x,y)\big) \leq U(x,e) = x$ ve $U(x,y) = U\big(x, U(y,y)\big) = U(U(x,y),y) \leq U(e,y) = y$ bulunur. Dolayısıyla, $U(x,y) \leq x \wedge y$ olur. Ayrıca $U(x,y) \geq U(x \wedge y, x \wedge y) = x \wedge y$ olduğundan $U(x,y) = x \wedge y$ bulunur.

v) $x \in I_e$ ve $y \in [e,1]$ olsun. U uninormunun monoton özelliği kullanılarak $U(x,y) \geq U(x,e) = x$ elde edilir. $x \in I_e$ olduğundan $U(x,y) > e$ veya $U(x,y) \in I_e$ dir. $U(x,y) \in I_e$ olması durumunda ispat açıktır. $U(x,y) > e$ olması durumunda ise, $U(x,y) = U(U(x,x),y) = U\big(x, U(x,y)\big) \geq U(x,e) = x$ ve $U(x,y) = U\big(x, U(y,y)\big) =$

$U(U(x,y),y) \geq U(e,y) = y$ bulunur. Dolayısıyla, $U(x,y) \geq x \vee y$ olur. Ayrıca $U(x,y) \leq U(x \vee y, x \vee y) = x \vee y$ olduğundan $U(x,y) = x \vee y$ bulunur.

vi) $x \in I_e$ ve $y \in I_e$ olsun. $U(x,y) < e$, $U(x,y) > e$ veya $U(x,y) \in I_e$ olabilir. $U(x,y) \in I_e$ olma durumunda ispat açıktır. U uninormunun monoton özelliği kullanılarak (ii) ve (iii) ye benzer şekilde $U(x,y) < e$ olması durumunda, $U(x,y) = x \wedge y$ ve $U(x,y) > e$ olması durumunda, $U(x,y) = x \vee y$ bulunur.

Önerme 2.16: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L \backslash \{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Bu takdirde, her $(x,y) \in L^2$ için $U(x,y) \in \{x \wedge y,\ x \vee y\}$ elde edilir.

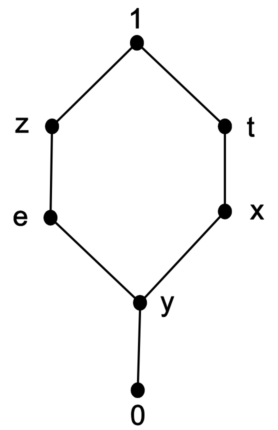
İspat: Önerme 2.2 (i) ve (ii) kullanılarak her $(x,y) \in [0,e]^2$ için $U(x,y) = x \wedge y$ ve her $(x,y) \in [e,1]^2$ için $U(x,y) = x \vee y$ elde edilir. Ayrıca Önerme 2.15 (i) den her $(x,y) \in A(e)$ için $U(x,y) \in \{x \wedge y, x \vee y\}$ dir. Dolayısıyla, her $(x,y) \in L^2$ için $U(x,y) \in \{x \wedge y,\ x \vee y\}$ elde edilir.

Önerme 2.2 den açıkça görülmektedir ki keyfi bir L sınırlı kafesi üzerindeki her idempotent uninorm [0,1] birim aralığı üzerinde verilen lokal internal tanımı açısından lokal internal olmayabilir. Önerme 2.15 doğrultusunda uygun varsayımlar altında keyfi bir L sınırlı kafesi üzerindeki bir idempotent uninorm daha geniş anlamda lokal internal olabilir.

Bu takdirde şöyle bir soru akla gelmektedir: U, keyfi bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L \backslash \{0,1\}$ birim elemanlı bir idempotent uninorm olsun. Eğer $e \in L \backslash \{0,1\}$ elemanı ile kıyaslanamayan bazı $x \in L$ elemanları mevcut ise, $U(x,y) \in \{x, y, x \wedge y,\ x \vee y\}$ olmak zorunda mıdır?

Aşağıdaki örnekte, bu soruya negatif bir cevap verilmektedir.

Örnek 2.17: Şekil 2.5 ile verilen $L = \{0, x, y, e, z, t, 1\}$ sınırlı kafesi ve Tablo 2.4 ile verilen $U: L \times L \rightarrow L$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu takdirde, U fonksiyonu L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninormdur. Fakat $U(x,z) = t$ yani $U(x,z) \notin \{x, z, x \wedge z = y,\ x \vee z = 1\}$ dir.



Şekil 2.5. L sınırlı kafesi

Tablo 2.4. L üzerindeki U idempotent uninormu

U	0	y	x	e	z	t	1
0	0	0	0	0	0	0	a
y	0	y	y	y	y	t	t
x	0	y	x	x	t	t	t
e	0	y	x	e	z	t	1
z	0	y	t	z	z	t	1
t	0	t	t	t	t	t	t
1	a	t	t	1	1	t	1

Önerme 2.18: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L \backslash \{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Bu takdirde, $x, y \geq e$, $x \parallel y$ ve $z \leq e$ için, aşağıdaki durumlardan biri sağlanır.

i) Eğer $U(x,z) = z$ ise, $U(y,z) = z$, $U(x \vee y, z) = z$ ve $U(x \wedge y, z) = z$ dir.

ii) Eğer $U(x,z) = x$ ise, $U(y,z) = y$ ve $U(x \vee y, z) = x \vee y$ dir.

İspat:

i) $U(x,z) = z$ olsun. Önerme 2.2. (ii) ve Önerme 2.16 kullanılarak $U(U(x,y),z) = U(x \vee y, z) \in \{x \vee y, z\}$ ve $U\big(y, U(x,z)\big) = U(y,z) \in \{y,z\}$ elde edilir. U uninormunun değişme ve birleşme özellikleri kullanılarak $U\big(y, U(x,z)\big) = U(U(x,y),z)$ olduğundan $U(y,z) = z$ elde edilir. U uninormunun değişme ve birleşme özellikleri ve Önerme 2.2 (ii) göz önüne alınırsa,

$$U(x \vee y, z) = U(U(x,y),z) = U\big(x, U(y,z)\big) = U(x,z) = z$$

ve

$$U(x \wedge y, z) = U\big(x \wedge y, U(x,z)\big) = U(U(x, x \wedge y), z) = U(x,z) = z$$

elde edilir.

ii) $U(x,z) = x$ olsun. U uninormunun monoton özelliği kullanılarak $U(U(x,y),z) = U(x \vee y, z) \geq U(x,z) = x$ ve Önerme 2.16 kullanılarak $U(x \vee y, z) \in \{x \vee y, z\}$ olduğundan $U(x \vee y, z) = x \vee y$ elde edilir. Önerme 2.16 kullanılarak $U(y,z) \in \{y,z\}$ bulunur. Kabul edilsin ki $U(y,z) = z$ olsun. U uninormunun değişme ve birleşme özellikleri ve Önerme 2.16 göz önüne alınırsa,

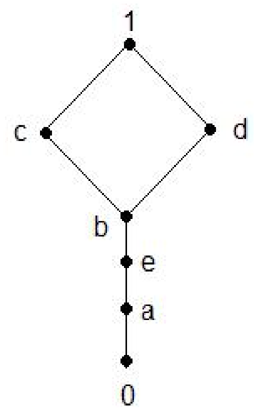
$$x \vee y = U(U(x,y),z) = U\big(x, U(y,z)\big) = U(x,z) \in \{x,z\}$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle $U(y,z) = y$ olur.

$(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L \setminus \{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. $x, y \geq e$, $x \parallel y$ ve $z \leq e$ için $U(x,z) = x$ olduğu kabul edilsin. Buna göre, Önerme 2.18 (ii) ile $U(y,z) = y$ ve $U(x \vee y, z) = x \vee y$ olduğu bilinmektedir.

Aşağıdaki örnekte, $U(x \wedge y, z)$ değerinin $x \wedge y$ den farklı olabileceği gösterildi.

Örnek 2.19: Şekil 2.6 ile verilen $L = \{0, a, e, b, c, d, 1\}$ sınırlı kafesi ve Tablo 2.5 ile verilen $U: L \times L \to L$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu takdirde, U fonksiyonu L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninormdur. Fakat $c, d \geq e$, $c \parallel d$ ve $a \leq e$ için $U(c,a) = c$ iken $U(c \wedge d, a) = a$ dır.



Şekil 2.6. L sınırlı kafesi

Tablo 2.5. L üzerindeki U idempotent uninormu

U	0	a	e	b	c	d	1
0	0	0	0	0	c	d	1
a	0	a	a	a	c	d	1
e	0	a	e	b	c	d	1
b	0	a	b	b	c	d	1
c	c	c	c	c	c	1	1
d	d	d	d	d	1	d	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Önerme 2.20: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Eğer $x, y \geq e$, $x \parallel y$ ve $z \leq e$ için $U(x,z) = z$ ise, her $a, b \geq e$, $a \parallel b$ öyle ki $x \wedge y = a \wedge b$ için $U(a,z) = U(b,z) = U(a \wedge b, z) = U(a \vee b, z) = z$ dir.

İspat: $U(x,z) = z$ ve $z \leq e \leq x, y, a, b$, $x \parallel y$, $a \parallel b$ için $x \wedge y = a \wedge b$ olsun. İspat tüm muhtemel durumlara ayrılarak yapılacaktır.

1. $a = x$ veya $a \in I_x$ olsun. Bu durumda, Önerme 2.18 (i) den $U(a,z) = U(b,z) = U(a \wedge b, z) = U(a \vee b, z) = z$ eşitlikleri sağlanır.

2. $a > x$ olsun.

   2.1. $a \in I_y$ ise, Önerme 2.18 (i) den $U(a,z) = U(b,z) = U(a \wedge b, z) = U(a \vee b, z) = z$ eşitlikleri sağlanır.

   2.2. $a \notin I_y$ ise, $a > y$ dir. Buradan $a \geq x \vee y$ olup $b \in I_x$ elde edilir. Önerme 2.18 (i) kullanılarak $U(a,z) = U(b,z) = U(a \wedge b, z) = U(a \vee b, z) = z$ eşitliklerinin sağlandığı görülür.

3. $a < x$ olsun.

   3.1. $a \in I_y$ ise, Önerme 2.18 (i) den $U(a,z) = U(b,z) = U(a \wedge b, z) = U(a \vee b, z) = z$ eşitlikleri sağlanır.

   3.2. $a \notin I_y$ ise, $a < y$ dir. Buradan $a \leq x \wedge y$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Önerme 2.21: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Eğer $x, y \geq e$, $x \parallel y$ ve $z \leq e$ için $U(x,z) = x$ ise, her $a, b \geq e$, $a \parallel b$ öyle ki $x \vee y = a \wedge b$ için $U(a,z) = a$, $U(b,z) = b$, $U(a \wedge b, z) = a \wedge b$ ve $U(a \vee b, z) = a \vee b$ dir.

İspat: Her $x, y \geq e$, $x \parallel y$ ve $z \leq e$ için $U(x,z) = x$ olsun. Önerme 2.18 (ii) kullanılırsa, $U(x \vee y, z) = x \vee y$ bulunur. $x \vee y = a \wedge b$ olduğundan $U(a \wedge b, z) = a \wedge b$ elde edilir. $U(a,z) = z$ olduğu varsayılsın. Bu takdirde, Önerme 2.18 (i) den $U(a \wedge b, z) = z$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $U(a,z) = z$ varsayımı yanlış olup Önerme 2.16 kullanılarak $U(a,z) = a$ elde edilir. Buna göre, Önerme 2.18 (ii) kullanılarak $U(b,z) = b$ ve $U(a \vee b, z) = a \vee b$ bulunur.

Önerme 2.22: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Eğer $x, y \geq e$, $x \parallel y$ ve $z \leq e$ için $U(x,z) = z$ ise, her $a, b \geq e$, $a \parallel b$ öyle ki $x \wedge y = a \vee b$ için $U(a,z) = U(b,z) = U(a \wedge b, z) = U(a \vee b, z) = z$ dir.

İspat: Her $x, y \geq e$, $x \parallel y$ ve $z \leq e$ için $U(x,z) = z$ olsun. Önerme 2.18 (i) kullanılarak $U(x \wedge y, z) = z$ bulunur. $x \wedge y = a \vee b$ olduğundan $U(a \vee b, z) = z$ elde edilir. $U(a,z) = a$ olduğu varsayılsın. Bu takdirde, Önerme 2.18 (ii) den $U(a \vee b, z) = a \vee b$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $U(a,z) = a$ varsayımı yanlış olup Önerme 2.16 kullanılarak $U(a,z) = z$ elde edilir. Buna göre, Önerme 2.18 (i) göz önüne alınarak $U(b,z) = U(a \wedge b, z) = z$ bulunur.

Önerme 2.23: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Eğer $x, y \geq e$, $x \parallel y$ ve $z \leq e$ için $U(x,z) = x$ ise, her $a, b \geq e$, $a \parallel b$ öyle ki $x \wedge y = a \wedge b$ için $U(a,z) = a$, $U(b,z) = b$ ve $U(a \vee b, z) = a \vee b$ dir.

İspat: $U(x,z) = x$ ve $z \leq e \leq x, y, a, b$, $x \parallel y$, $a \parallel b$ için $x \wedge y = a \wedge b$ olsun. İspat tüm muhtemel durumlara ayrılarak yapılacaktır.

1. $a = x$ veya $a \in I_x$ olsun. Bu durumda, Önerme 2.18 (ii) den $U(a,z) = a$, $U(b,z) = b$ ve $U(a \vee b, z) = a \vee b$ eşitlikleri sağlanır.

2. $a > x$ olsun.

   2.1. $a \in I_y$ ise, Önerme 2.18 (ii) den $U(a,z) = a$, $U(b,z) = b$ ve $U(a \vee b, z) = a \vee b$ eşitlikleri sağlanır.

   2.2. $a \notin I_y$ ise, $a > y$ dir. Buradan $a \geq x \vee y$ olup $b \in I_x$ elde edilir. Önerme 2.18 (ii) kullanılarak $U(a,z) = a$, $U(b,z) = b$ ve $U(a \vee b, z) = a \vee b$ eşitlikleri sağlanır.

3. $a < x$ olsun.

   3.1. $a \in I_y$ ise, Önerme 2.18 (ii) den $U(a,z) = a$, $U(b,z) = b$ ve $U(a \vee b, z) = a \vee b$ eşitliklerinin sağlandığı görülür.

3.2. $a \notin I_y$ ise, $a < y$ dir. Buradan $a \leq x \wedge y$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Önerme 2.24: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L \setminus \{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Eğer $x, y \geq e$, $x \parallel y$ ve $z \leq e$ için $U(x,z) = z$ ise, her $a, b \geq e$, $a \parallel b$ öyle ki $x \vee y = a \vee b$ için $U(a,z) = U(b,z) = U(a \wedge b, z) = U(a \vee b, z) = z$ dir.

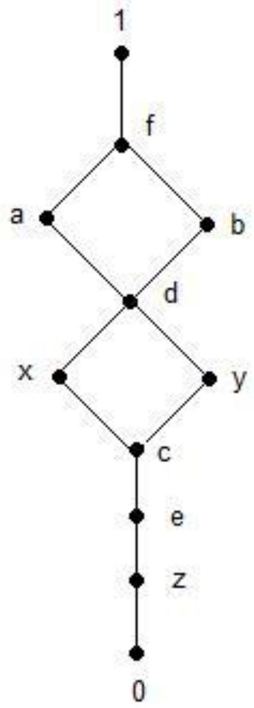
İspat: Her $x, y \geq e$, $x \parallel y$ ve $z \leq e$ için $U(x,z) = z$ olsun. Önerme 2.18 (i) kullanılırsa, $U(x \vee y, z) = z$ bulunur. $x \vee y = a \vee b$ olduğundan $U(a \vee b, z) = z$ elde edilir. $U(a,z) = a$ olduğu varsayılsın. Bu takdirde, Önerme 2.18 (ii) den $U(a \vee b, z) = a \vee b$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $U(a,z) = a$ varsayımı yanlış olup Önerme 2.16 kullanılarak $U(a,z) = z$ elde edilir. Buna göre, Önerme 2.18 (i) göz önüne alınarak $U(b,z) = U(a \wedge b, z) = z$ bulunur.

Önerme 2.25: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L \setminus \{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Eğer $x, y \geq e$, $x \parallel y$ ve $z \leq e$ için $U(x,z) = x$ ise, her $a, b \geq e$, $a \parallel b$ öyle ki $x \vee y = a \vee b$ için $U(a,z) = a$, $U(b,z) = b$ ve $U(a \vee b, z) = a \vee b$ dir.

İspat: Her $x, y \geq e$, $x \parallel y$ ve $z \leq e$ için $U(x,z) = x$ olsun. Önerme 2.18 (ii) kullanılırsa, $U(x \vee y, z) = x \vee y$ bulunur. $x \vee y = a \vee b$ olduğundan $U(a \vee b, z) = a \vee b$ elde edilir. $U(a,z) = z$ olduğu varsayılsın. Bu takdirde, Önerme 2.18 (i) den $U(a \vee b, z) = z$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $U(a,z) = z$ varsayımı yanlış olup Önerme 2.16 kullanılarak $U(a,z) = a$ elde edilir. Buna göre, Önerme 2.18 (ii) göz önüne alınarak $U(b,z) = b$ bulunur.

$(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L \setminus \{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Aşağıdaki örnekte, $x, y, a, b \geq e \geq z$, $x \parallel y$, $a \parallel b$ olacak şekildeki $x, y, z, a, b \in L$ elemanları için $x \vee y = a \wedge b$ iken $U(x,z)$ değerinin $U(a,z)$ değerinden farklı olabileceği gösterildi.

Örnek 2.26: Şekil 2.7 ile verilen $L = \{0, z, a, b, c, d, e, f, x, y, 1\}$ sınırlı kafesi ve Tablo 2.6 ile verilen $U: L \times L \to L$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu takdirde, U fonksiyonu L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninormdur. Fakat $x, y, a, b \geq e \geq z$, $x \parallel y$, $a \parallel b$ ve $x \vee y = a \wedge b$ için $U(z,a) = a$ iken $U(z,x) = U(z, x \vee y) = z$ dir.



Şekil 2.7. L sınırlı kafesi

Tablo 2.6. L üzerindeki U idempotent uninormu

U	0	z	e	c	x	y	d	a	b	f	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
z	0	z	z	z	z	z	z	a	b	f	1
e	0	z	e	c	x	y	d	a	b	f	1
c	0	z	c	c	x	y	d	a	b	f	1
x	0	z	x	x	x	d	d	a	b	f	1
y	0	z	y	y	d	y	d	a	b	f	1
d	0	z	d	d	d	d	d	a	b	f	1
a	0	a	a	a	a	a	a	a	f	f	1
b	0	b	b	b	b	b	b	f	b	f	1
f	0	f	f	f	f	f	f	f	f	f	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Önerme 2.27: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L \setminus \{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Bu takdirde, $x, y \leq e$, $x \parallel y$ ve $z \geq e$ için, aşağıdaki durumlardan biri sağlanır.

i) Eğer $U(x,z) = z$ ise, $U(y,z) = z$, $U(x \vee y, z) = z$ ve $U(x \wedge y, z) = z$ dir.

ii) Eğer $U(x,z) = x$ ise, $U(y,z) = y$, $U(x \wedge y, z) = x \wedge y$ dir.

İspat:

i) $U(x,z)=z$ olsun. Önerme 2.2 (i) ve Önerme 2.16 kullanılarak $U(U(x,y),z)=U(x\wedge y,z)\in\{x\wedge y,z\}$ ve $U\big(y,U(x,z)\big)=U(y,z)\in\{y,z\}$ elde edilir. U uninormunun değişme ve birleşme özellikleri kullanılırsa $U\big(y,U(x,z)\big)=U(U(x,y),z)$ olduğundan $U(y,z)=z$ elde edilir. U uninormunun değişme ve birleşme özellikleri ve Önerme 2.2 (i) göz önüne alınırsa,

$$U(x\wedge y,z)=U(U(x,y),z)=U\big(x,U(y,z)\big)=U(x,z)=z$$

ve

$$U(x\vee y,z)=U\big(x\vee y,U(x,z)\big)=U(U(x,x\vee y),z)=U(x,z)=z$$

elde edilir.

ii) $U(x,z)=x$ olsun. U uninormunun monoton özelliği kullanılarak $U(U(x,y),z)=U(x\wedge y,z)\leq U(x,z)=x$ ve Önerme 2.16 den $U(x\wedge y,z)\in\{x\wedge y,z\}$ olduğundan $U(x\wedge y,z)=x\wedge y$ bulunur. Önerme 2.16 kullanılırsa $U(y,z)\in\{y,z\}$ olur. $U(y,z)=z$ olduğu kabul edilsin. U uninormunun değişme ve birleşme özellikleri ve Önerme 2.2 (i) göz önüne alınırsa,

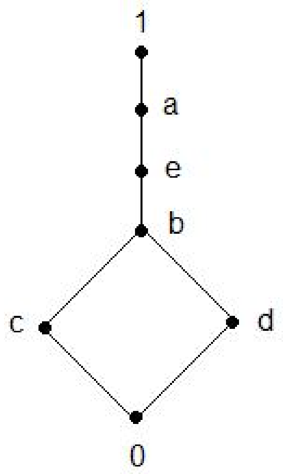
$$x\wedge y=U(U(x,y),z)=U\big(x,U(y,z)\big)=U(x,z)\in\{x,z\}$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle $U(y,z)=y$ olur.

$(L,\leq,0,1)$ sınırlı bir kafes, $e\in L\backslash\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x\in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. $x,y\leq e$, $x\parallel y$ ve $z\geq e$ için $U(x,z)=x$ olsun. Buna göre, Önerme 2.27 (ii) den $U(y,z)=y$ ve $U(x\wedge y,z)=x\wedge y$ dır.

Aşağıdaki örnekte, $U(x\vee y,z)$ değerinin $x\vee y$ den farklı olabileceği gösterildi.

Örnek 2.28: Şekil 2.8 ile verilen $L=\{0,a,e,b,c,d,1\}$ sınırlı kafesi ve Tablo 2.7 ile verilen $U\colon L\times L\to L$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu takdirde, U fonksiyonu L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninormdur. Fakat $c,d\leq e$, $c\parallel d$ ve $a\geq e$ için $U(c,a)=c$ iken $U(c\vee d,a)=a$ dır.



Şekil 2.8. L sınırlı kafesi

Tablo 2.7. L üzerindeki U idempotent uninormu

U	0	d	c	b	e	a	1
0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	d	0	d	d	d	d
c	0	0	c	c	c	c	c
b	0	d	c	b	b	a	1
e	0	d	c	b	e	a	1
a	0	d	c	a	a	a	1
1	0	d	c	1	1	1	1

Önerme 2.29: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\setminus\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Eğer $x, y \leq e$, $x \parallel y$ ve $z \geq e$ için $U(x,z) = z$ ise, her $a, b \leq e$, $a \parallel b$ öyle ki $x \vee y = a \vee b$ için $U(a,z) = U(b,z) = U(a \wedge b, z) = U(a \vee b, z) = z$ dir.

İspat: $U(x,z) = z$ ve $x, y, a, b \leq e \leq z$, $x \parallel y$, $a \parallel b$ için $x \vee y = a \vee b$ olsun. İspat tüm muhtemel durumlara ayrılarak yapılacaktır.

1. $a = x$ veya $a \in I_x$ olsun. Önerme 2.27 (i) den $U(a,z) = U(b,z) = U(a \wedge b, z) = U(a \vee b, z) = z$ eşitlikleri sağlanır.

2. $a < x$ olsun.

   2.1. $a \in I_y$ ise, Önerme 2.27 (i) den $U(a,z) = U(b,z) = U(a \wedge b, z) = U(a \vee b, z) = z$ eşitlikleri sağlanır.

2.2. $a \notin I_y$ ise, $a < y$ dir. Buradan $a \leq x \wedge y$ olup $b \in I_x$ elde edilir. Önerme 2.27 (i) kullanılarak $U(a,z) = U(b,z) = U(a \wedge b, z) = U(a \vee b, z) = z$ eşitliklerinin sağlandığı görülür.

3. $a > x$ olsun.

3.1. $a \in I_y$ ise, Önerme 2.27 (i) den $U(a,z) = U(b,z) = U(a \wedge b, z) = U(a \vee b, z) = z$ eşitliklerinin sağlandığı görülür.

3.2. $a \notin I_y$ ise, $a > y$ dir. Buradan $a \geq x \vee y$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Önerme 2.30: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Eğer $x, y \leq e$, $x \parallel y$ ve $z \geq e$ için $U(x,z) = x$ ise, her $a, b \leq e$, $a \parallel b$ öyle ki $x \wedge y = a \vee b$ için $U(a,z) = a$, $U(b,z) = b$, $U(a \wedge b, z) = a \wedge b$ ve $U(a \vee b, z) = a \vee b$ dir.

İspat: Her $x, y \leq e$, $x \parallel y$ ve $z \geq e$ için $U(x,z) = x$ olsun. Önerme 2.27 (ii) kullanılırsa, $U(x \wedge y, z) = x \wedge y$ bulunur. $x \wedge y = a \vee b$ olduğundan $U(a \vee b, z) = a \vee b$ elde edilir. $U(a,z) = z$ olsun. Bu takdirde, Önerme 2.27 (i) den $U(a \vee b, z) = z$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $U(a,z) = z$ varsayımı yanlış olup Önerme 2.16 kullanılarak $U(a,z) = a$ elde edilir. Buna göre, Önerme 2.27 (ii) kullanılarak $U(b,z) = b$ ve $U(a \wedge b, z) = a \wedge b$ bulunur.

Önerme 2.31: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Eğer $x, y \leq e$, $x \parallel y$ ve $z \geq e$ için $U(x,z) = z$ ise, her $a, b \leq e$, $a \parallel b$ öyle ki $x \vee y = a \wedge b$ için $U(a,z) = U(b,z) = U(a \wedge b, z) = U(a \vee b, z) = z$ dir.

İspat: Her $x, y \leq e$, $x \parallel y$ ve $z \geq e$ için $U(x,z) = z$ olsun. Önerme 2.27 (i) den $U(x \vee y, z) = z$ dir. $x \vee y = a \wedge b$ olduğundan $U(a \wedge b, z) = z$ elde edilir. $U(a,z) = a$ olduğu varsayılsın. Bu takdirde, Önerme 2.27 (ii) den $U(a \wedge b, z) = a \wedge b$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $U(a,z) = a$ varsayımı yanlış olup Önerme 2.16 kullanılarak $U(a,z) = z$ elde edilir. Buna göre, Önerme 2.27 (i) kullanılarak $U(b,z) = U(a \vee b, z) = z$ bulunur.

Önerme 2.32: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Eğer $x, y \leq e$, $x \parallel y$ ve $z \geq e$ için $U(x,z) = x$ ise, her $a, b \leq e$, $a \parallel b$ öyle ki $x \vee y = a \vee b$ için $U(a,z) = a$, $U(b,z) = b$ ve $U(a \wedge b, z) = a \wedge b$ dir.

İspat: $U(x,z)=x$ ve $x,y,a,b\leq e\leq z$, $x \parallel y$, $a \parallel b$ için $x\vee y=a\vee b$ olsun. İspat tüm muhtemel durumlara ayrılarak yapılacaktır.

1. $a=x$ veya $a\in I_x$ olsun. Önerme 2.27 (ii) den $U(a,z)=a$, $U(b,z)=b$ ve $U(a\wedge b,z)=a\wedge b$ eşitlikleri sağlanır.

2. $a<x$ olsun.

 2.1. $a\in I_y$ ise, Önerme 2.27 (ii) den $U(a,z)=a$, $U(b,z)=b$ ve $U(a\wedge b,z)=a\wedge b$ eşitlikleri sağlanır.

 2.2. $a\notin I_y$ ise, $a<y$ dir. Buradan $a\leq x\wedge y$ olup $b\in I_x$ elde edilir. Önerme 2.27 (ii) kullanılarak $U(a,z)=a$, $U(b,z)=b$ ve $U(a\wedge b,z)=a\wedge b$ eşitlikleri sağlanır.

3. $a>x$ olsun.

 3.1. $a\in I_y$ ise, Önerme 2.27 (ii) den $U(a,z)=a$, $U(b,z)=b$ ve $U(a\wedge b,z)=a\wedge b$ eşitliklerininin sağlandığı görülür.

 3.2. $a\notin I_y$ ise, $a>y$ dir. Buradan $a\geq x\vee y$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Önerme 2.33: $(L,\leq,0,1)$ sınırlı bir kafes, $e\in L\backslash\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x\in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Eğer $x,y\leq e$, $x\parallel y$ ve $z\geq e$ için $U(x,z)=z$ ise, her $a,b\leq e$, $a\parallel b$ öyle ki $x\wedge y=a\wedge b$ için $U(a,z)=U(b,z)=U(a\wedge b,z)=U(a\vee b,z)=z$ dir.

İspat: Her $x,y\leq e$, $x\parallel y$ ve $z\geq e$ için $U(x,z)=z$ olsun. Önerme 2.27 (i) kullanılırsa, $U(x\wedge y,z)=z$ bulunur. $x\wedge y=a\wedge b$ olduğundan $U(a\wedge b,z)=z$ elde edilir. $U(a,z)=a$ olduğu varsayılsın. Bu takdirde, Önerme 2.27 (ii) den $U(a\wedge b,z)=a\wedge b$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $U(a,z)=a$ varsayımı yanlış olup Önerme 2.16 kullanılarak $U(a,z)=z$ elde edilir. Buna göre, Önerme 2.27 (i) kullanılarak $U(b,z)=U(a\vee b,z)=z$ bulunur.

Önerme 2.34: $(L,\leq,0,1)$ sınırlı bir kafes, $e\in L\backslash\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x\in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Eğer $x,y\leq e$, $x\parallel y$ ve $z\geq e$ için $U(x,z)=x$ ise, her $a,b\leq e$, $a\parallel b$ öyle ki $x\wedge y=a\wedge b$ için $U(a,z)=a$, $U(b,z)=b$ ve $U(a\wedge b,z)=a\wedge b$ dir.

İspat: Her $x,y\leq e$, $x\parallel y$ ve $z\geq e$ için $U(x,z)=x$ olsun. Önerme 2.27 (ii) kullanılırsa, $U(x\wedge y,z)=x\wedge y$ bulunur. $x\wedge y=a\wedge b$ olduğundan $U(a\wedge b,z)=a\wedge b$ elde edilir. $U(a,z)=z$ olduğu varsayılsın. Bu takdirde, Önerme 2.27 (i) den $U(a\wedge b,z)=z$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $U(a,z)=z$ varsayımı yanlış olup Önerme 2.16 kullanılarak $U(a,z)=a$ elde edilir. Buna göre, Önerme 2.27 (ii) kullanılarak $U(b,z)=b$ bulunur.

Önerme 2.35: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Bu takdirde,

$$A_x = \{y \in L : y \parallel x \text{ veya } (\exists z)(z \parallel x \text{ ve } z \parallel y)\}$$

şeklinde tanımlanan A_x kümesi $[0, e]$ veya $[e, 1]$ alt aralıklarının bir alt kümesidir. Ayrıca aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) $x \leq e \leq z$ veya $z \leq e \leq x$ olmak üzere, $y \in A_x$ için $U(y, z) = y$ ise, $a \in A_x$ için $U(a, z) = a$ dır.

ii) $x \leq e \leq z$ veya $z \leq e \leq x$ olmak üzere, $y \in A_x$ için $U(y, z) = z$ ise, $a \in A_x$ için $U(a, z) = z$ dir.

İspat: i) $x \leq e \leq z$ ve $y \in A_x$ için $U(y, z) = y$ olsun. Keyfi $a \in A_x$ için $U(a, z) = a$ olduğu gösterilsin. İspat tüm muhtemel durumlara ayrılarak yapılacaktır.

1. $y \parallel x$ olsun. Bu takdirde $y < e$ dir.

1.1. Eğer $a \parallel x$ ise, $a < e$ dir. Önerme 2.27 (ii) kullanılarak $U(a, z) = a$ olduğu görülür.

1.2. Eğer $(\exists k)(k \parallel x \text{ ve } k \parallel a)$ ise, bu takdirde, $k < e$ ve $a < e$ bulunur. Önerme 2.27 (ii) kullanılarak $U(a, z) = a$ olduğu görülür.

2. $(\exists p)(p \parallel x \text{ ve } p \parallel y)$ olsun. Bu takdirde, $p < e$ ve $y < e$ bulunur.

2.1. Eğer $a \parallel x$ ise, $a < e$ dir. Önerme 2.27 (ii) kullanılarak $U(a, z) = a$ olduğu görülür.

2.2. Eğer $(\exists q)(q \parallel x \text{ ve } q \parallel a)$ ise, bu takdirde, $q < e$ ve $a < e$ bulunur. Önerme 2.27 (ii) kullanılarak $U(a, z) = a$ olduğu görülür.

Benzer şekilde $z \leq e \leq x$ ve $y \in A_x$ için $U(y, z) = y$ ise, Önerme 2.18 (ii) kullanılarak, keyfi $a \in A_x$ için $U(a, z) = a$ olduğu gösterilir.

ii) $x \leq e \leq z$ ve $y \in A_x$ için $U(y, z) = z$ olsun. Keyfi $a \in A_x$ için $U(a, z) = z$ olduğu gösterilsin. İspat tüm muhtemel durumlara ayrılarak yapılacaktır.

1. $y \parallel x$ olsun. Bu takdirde $y < e$ dir.

1.1. Eğer $a \parallel x$ ise, $a < e$ dir. Önerme 2.27 (i) kullanılarak $U(a, z) = z$ olduğu görülür.

1.2. Eğer $(\exists k)(k \parallel x \text{ ve } k \parallel a)$ ise, bu takdirde, $k < e$ ve $a < e$ bulunur. Önerme 2.27 (i) kullanılarak $U(a, z) = z$ olduğu görülür.

2. $(\exists p)(p \parallel x$ ve $p \parallel y)$ olsun. Bu takdirde, $p < e$ ve $y < e$ bulunur.

2.1. Eğer $a \parallel x$ ise, $a < e$ dir. Önerme 2.27 (i) kullanılarak $U(a, z) = z$ olduğu görülür.

2.2. Eğer $(\exists q)(q \parallel x$ ve $q \parallel a)$ ise, bu takdirde, $q < e$ ve $a < e$ bulunur. Önerme 2.27 (i) kullanılarak $U(a, z) = z$ olduğu görülür.

Benzer şekilde $z \leq e \leq x$ ve $y \in A_x$ için $U(y, z) = z$ ise, Önerme 2.18 (i) kullanılarak, keyfi $a \in A_x$ için $U(a, z) = z$ olduğu gösterilir.

2.4. Bir Fonksiyon Yardımıyla Bazı İdempotent Uninormların Karakterizasyonu

Bu bölümde, keyfi bir L sınırlı kafesinin sonlu ve L nin tüm elemanlarının e birim elemanı ile kıyaslanabilir olması varsayımı altında idempotent uninormların karakterisazyonu incelendi.

Lemma 2.36: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L \setminus \{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm, her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir ve $\mathrm{Card}(L) < \aleph_0$ olsun. Bu takdirde,

$$g(x) = \begin{cases} max\{z \in L : U(x, z) = min(x, z)\} & \text{eğer } x \leq e \text{ ise,} \\ min\{z \in L : U(x, z) = max(x, z)\} & \text{aksi durumda,} \end{cases} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan $g: L \to L$ fonksiyonu aşağıdaki ifadeleri sağlar.

i) $g(e) = e$ dir.

ii) Her $x < e$ için $g(x) \geq e$ ve $y \leq g(x)$ iken $U(x, y) = x \wedge y$ dir.

iii) Her $x > e$ için $g(x) \leq e$ ve $y \geq g(x)$ iken $U(x, y) = x \vee y$ dir.

İspat:

i) $g(e) = max\{z \in L : U(e, z) = min(e, z)\}$

$= max\{z \in L : z = min(e, z)\}$

$= max\{z \in L : z \leq e\}$

$= e$

ii) Her $x < e$ için

$$g(x) = max\{z \in L : U(x, z) = min(x, z)\} \geq e$$

elde edilir. $y \leq g(x)$ iken Önerme 2.2 (i) den dolayı $x < e \leq y \leq g(x)$ durumunu düşünmek yeterlidir. U uninormunun monoton özelliği ve g fonksiyonunun tanımı kullanılarak $U(x,y) \leq U\big(x,g(x)\big) = x$ ve $U(x,y) \geq U(x,e) = x$ bulunur. Buradan $U(x,y) = x = x \wedge y$ elde edilir.

iii) Her $x > e$ için

$$g(x) = min\{z \in L : U(x,z) = max(x,z)\} \leq e$$

elde edilir. $y \geq g(x)$ iken Önerme 2.2 (ii) den dolayı $g(x) \leq y \leq e < x$ durumunu düşünmek yeterlidir. U uninormunun monoton özelliği ve g fonksiyonunun tanımı kullanılarak $U(x,y) \geq U\big(x,g(x)\big) = x$ ve $U(x,y) \leq U(x,e) = x$ bulunur. Buradan $U(x,y) = x = x \vee y$ elde edilir.

Uyarı 2.37: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Lemma 2.36 da $\text{Card}(L) < \aleph_0$ olma şartı ihmal edilemez. Eğer $\text{Card}(L) < \aleph_0$ olma şartı ihmal edilirse, (2.1) formülü ile verilen $\{z \in L : U(x,z) = min(x,z)\}$ ve $\{z \in L : U(x,z) = max(x,z)\}$ kümeleri sırasıyla en büyük elemana ve en küçük elemana sahip olmayabilir.

Örneğin, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlı $e \in]0,1[$ birim elemenlı idempotent uninorm gözönüne alınsın.

$$U(x,y) = \begin{cases} min(x,y) & \text{eğer } (x,y) \in [0,e]^2 \cup [0,e[\times [e,1[\cup [e,1[\times [0,e[\text{ ise,} \\ max(x,y) & \text{aksi durumda.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Keyfi bir $x \in [0,e[$ elemanı verilsin. (2.2) formülü ile verilen U fonksiyonun tanımından, her $z \in [e,1[$ elemanı için $U(x,z) = min(x,z) = x$ ve $U(x,1) = max(x,1) = 1$ elde edilir. Bu takdirde, $x \in [0,e[$ elemanı için $1 \notin \{z \in [0,1] : U(x,z) = min(x,z)\}$ bulunur. Buna göre, $\{z \in [0,1] : U(x,z) = min(x,z)\}$ kümesinin en büyük elemanı yoktur. Bu nedenle, $[0,1]$ üzerinde (2.2) formülü ile verilen U idempotent uninormu için $[0,1]$ üzerinde (2.1) ile verilen g formülü iyi tanımlı değildir.

Sonuç olarak, L sınırlı kafesi üzerindeki bir U idempotent uninormu için, $\text{Card}(L) < \aleph_0$ şartı $\{z \in L : U(x,z) = min(x,z)\}$ kümesinin en büyük elemanının ve $\{z \in L : U(x,z) = max(x,z)\}$ kümesinin en küçük elemanının mevcut olduğunu garanti eder. Dolayısıyla, Lemma 2.36 da $\text{Card}(L) < \aleph_0$ şartı ihmal edilemez.

Lemma 2.38: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm, her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir ve $\text{Card}(L) < \aleph_0$ olsun. (2.1) formülü ile tanımlanan $g: L \to L$ fonksiyonu göz önüne alınırsa, aşağıdaki ifadeler elde edilir.

i) Her $x < e$ için $y \parallel g(x)$ olacak şekilde bir $y \in L$ elemanı mevcut değildir.

ii) Her $x > e$ için $y \parallel g(x)$ olacak şekilde bir $y \in L$ elemanı mevcut değildir.

İspat:

i) Kabul edilsin ki bir $x < e$ için $y \parallel g(x)$ olacak şekilde bir $y \in L$ mevcut olsun. Önerme 2.16 kullanılırsa $y > e$ olduğundan $U(x,y) \in \{x,y\}$ olur. Eğer $U(x,y) = x$ ise, Önerme 2.18 (i) den $U\big(x, y \vee g(x)\big) = x$ bulunur. Buna göre,

$$g(x) = max\{z \in L : U(x,z) = min(x,z)\} \geq y \vee g(x)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Eğer $U(x,y) = y$ ise, Önerme 2.18 (ii) den $U\big(x, g(x)\big) = g(x)$ bulunur. Bu da Lemma 2.36 (ii) ile çelişir. Dolayısıyla kabul yanlış olup her $x < e$ için $y \parallel g(x)$ olacak şekilde bir $y \in L$ elemanı mevcut değildir.

ii) Kabul edilsin ki bir $x > e$ için $y \parallel g(x)$ olacak şekilde bir $y \in L$ elemanı mevcut olsun. Önerme 2.16 kullanılırsa $y < e$ olduğundan $U(x,y) \in \{x,y\}$ olur. Eğer $U(x,y) = x$ ise, Önerme 2.27 (i) den $U\big(x, y \wedge g(x)\big) = x$ bulunur. Buna göre,

$$g(x) = min\{z \in L : U(x,z) = max(x,z)\} \leq y \wedge g(x)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Eğer $U(x,y) = y$ ise, Önerme 2.27 (ii) den $U\big(x, g(x)\big) = g(x)$ bulunur. Bu da Lemma 2.36 (iii) ile çelişir. Dolayısıyla kabul yanlış olup her $x > e$ için $y \parallel g(x)$ olacak şekilde bir $y \in L$ elemanı mevcut değildir.

Teorem 2.39: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L \backslash \{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm, her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir ve $\mathrm{Card}(L) < \aleph_0$ olsun. Bu takdirde,

$$U(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & \begin{array}{l}\text{eğer } y \leq g(x) \text{ ve } x \leq e \\ \text{veya } y < g(x) \text{ ve } x > e \text{ ise,}\end{array} \\ x \vee y & \begin{array}{l}\text{eğer } y > g(x) \text{ ve } x \leq e \\ \text{veya } y \geq g(x) \text{ ve } x > e \text{ ise,}\end{array} \end{cases} \tag{2.3}$$

olacak şekilde $g(e) = e$ sabit noktalı bir azalan $g: L \to L$ fonksiyonu vardır.

İspat: (2.1) formülü ile tanımlanan $g: L \to L$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Lemma 2.36 ve Lemma 2.38 kullanılırsa, U uninormu (2.3) formülü ile verilir. U uninormunun monoton özelliği kullanılarak g fonksiyonunun azalan olduğu elde edilir.

Uyarı 2.40: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L \backslash \{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Aşağıda, Teorem 2.39 da L nin sonluğunun ihmal edilemeyeceğini göstermek amacıyla $g(e) = e$ özelliğini sağlayan her $g: L \to L$ azalan fonksiyonu için Teorem 2.39 daki (2.3) formülü geçerli olmayacak şekilde e birim elemanlı bir U idempotent uninormu ile birlikte sonsuz sınırlı bir kafes örneği verilmektedir.

Örnek 2.41: Uyarı 2.37 deki (2.2) formülü ile tanımlanan $[0,1]$ birim aralığı üzerindeki $e \in]0,1[$ birim elemanlı U idempotent uninormu göz önüne alınsın. Keyfi $k \in [0, e[$ elemanı verilsin. Bu durumda, her $t \in [e, 1[$ için $U(k,t) = min(k,t) = k$ ve $U(k,1) = max(k,1) = 1$ elde edilir. Kabul edelim ki (2.2) formülü ile verilen U idempotent uninormu, $g(e) = e$ özelliğini sağlayan keyfi bir $g: L \to L$ azalan fonksiyonu için Teorem 2.39 daki (2.3) formülü ile karakterize edilsin. Bu durumda her $t \in [e, 1[$ için $U(k,t) = k$ olduğundan (2.3) formülünden $t \leq g(k)$ elde edilir. Her $t \in [e, 1[$ için $t \leq g(k)$ olduğu için $sup\{t : t \in [e, 1[\} \leq g(k)$ yani $1 \leq g(k)$ elde edilir. Buradan $1 = g(k)$ olur. $1 = g(k)$ ve $k \in [0, e[$ olduğundan (2.3) formülünden $U(k, 1) = k$ bulunur ki bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak, eğer L sınırlı kafesinin sonluluğu ihmal edilirse, (2.2) formülü ile tanımlanan $[0,1]$ birim aralığı üzerindeki $e \in]0,1[$ birim elemanlı U idempotent uninormu, $g(e) = e$ özelliğini sağlayan keyfi bir $g: L \to L$ azalan fonksiyonu için Teorem 2.39 daki (2.3) formülü ile karakterize edilemez.

Uyarı 2.42: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L\setminus\{0,1\}$, U, L üzerinde e birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun. Uyarı 2.40 ve Örnek 2.41 dan görülmektedir ki Teorem 2.39 da L sınırlı kafesinin sonluluğu yeter koşuldur. Aşağıdaki örnekte, Teorem 2.39 da L sınırlı kafesinin sonluluğunun gerek koşul olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 2.43: $e \in]0,1[$ için

$$U(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & \text{eğer } (x,y) \in [0,e]^2 \\ x \vee y & \text{aksi durumda,} \end{cases}$$

ile tanımlanan $[0,1]$ üzerinde e birim elemanlı U idempotent uninormu göz önüne alınsın. $[0,1]$ üzerinde yukarıdaki şekilde tanımlanan U idempotent uninormu için bir $g: L \to L$ azalan fonksiyonu

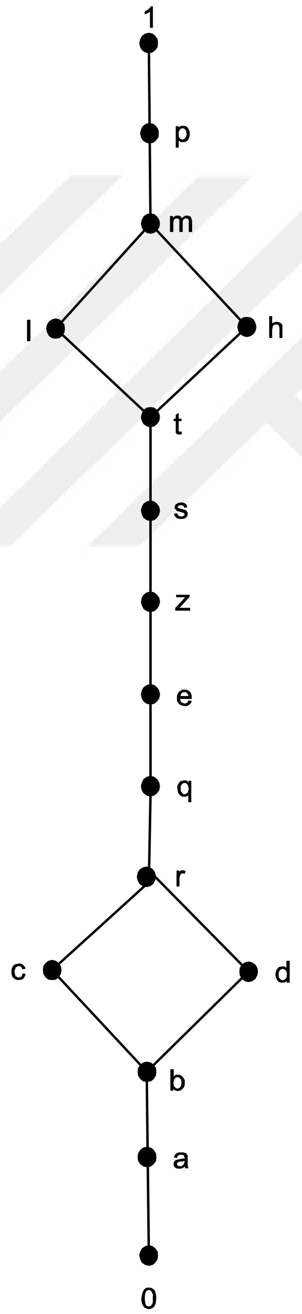
$$g(x) = \begin{cases} e & \text{eğer } x \leq e \text{ ise,} \\ 0 & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

şeklinde verilebilir.

Örnek 2.44: Şekil 2.9 ile verilen $L = \{0, a, b, c, d, r, q, e, z, s, t, l, h, m, p, 1\}$ sınırlı kafesi göz önüne alınsın. Tablo 2.8 ile tanımlanan $U: L \times L \to L$ idempotent uninormu için $g: L \to L$ azalan fonksiyonu

$$g(x)=\begin{cases}0 & x\in\{p,1\},\\ a & x\in\{t,l,h,m\},\\ e & x\in\{e,q\},\\ r & x\in\{s,z\},\\ s & x\in\{b,c,d,r\},\\ m & x=a,\\ p & x=0,\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 2.9. *L* sınırlı kafesi

Tablo 2.8. L üzerindeki U idempotent uninormu

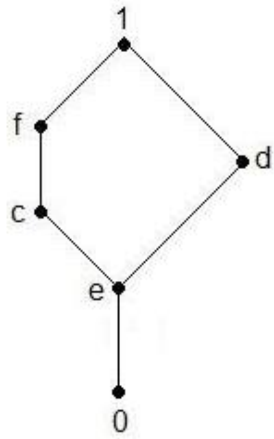
U	0	a	b	c	d	r	q	e	z	s	t	l	h	m	p	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	p	1
b	0	a	b	b	b	b	b	b	b	b	t	l	h	m	p	1
c	0	a	b	c	b	c	c	c	c	c	t	l	h	m	p	1
d	0	a	b	b	d	d	d	d	d	d	t	l	h	m	p	1
r	0	a	b	c	d	r	r	r	r	r	t	l	h	m	p	1
q	0	a	b	c	d	r	q	q	z	s	t	l	h	m	p	1
e	0	a	b	c	d	r	q	e	z	s	t	l	h	m	p	1
z	0	a	b	c	d	r	z	z	z	s	t	l	h	m	p	1
s	0	a	b	c	d	r	s	s	s	s	t	l	h	m	p	1
t	0	a	t	t	t	t	t	t	t	t	t	l	h	m	p	1
l	0	a	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	m	m	p	1
h	0	a	h	h	h	h	h	h	h	h	h	m	h	m	p	1
m	0	a	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	p	1
p	0	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Uyarı 2.45: Teorem 2.39, her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir ve $\mathrm{Card}(L) < \aleph_0$ olacak şekildeki dağılmalı olmayan bir L sınrlı kafesi için de geçerlidir. Aşağıdaki örnek, L üzerindeki bir U idempotent uninormu (2.3) formülü ile inşa edilecek şekilde $g(e) = e$ özelliğini sağlayan bir $g: L \to L$ azalan fonksiyonunun mevcut olduğunu göstermektedir.

Örnek 2.46: Şekil 2.10 ile verilen $L = \{0, e, c, d, f, 1\}$ dağılmalı olmayan sınırlı kafesi göz önüne alınsın. Tablo 2.9 ile tanımlanan $U: L \times L \to L$ idempotent uninormu için $g: L \to L$ azalan fonksiyonu

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 1, \\ e & x \in \{f, d, c, e\} \\ 1 & x = 0, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 2.10. L sınırlı kafesi

Tablo 2.9. L üzerindeki U idempotent uninormu

U	0	e	c	d	f	1
0	0	0	0	0	0	0
e	0	e	c	d	f	1
c	0	c	c	1	f	1
d	0	d	1	d	1	1
f	0	f	f	1	f	1
1	0	1	1	1	1	1

3. İRDELEME

$[0,1]$ birim aralığı üzerinde tanımlanan ikili işlemler fuzzy küme teorisinde başta çok bileşenli mantıksal bağlaçlar olmak üzere birçok önemli uygulama alanlarına sahiptir. Bu operatörler birim aralık üzerindeki birleştirme operatörlerinden biri olduğu için bu operatörleri karakterize etmek ve incelemek oldukça önemlidir. $[0,1]$ birim aralığı üzerindeki uninormlar, birim aralık üzerindeki ikili işlemlere dolayısıyla birleştirme operatörlerine bir örnektir. Uninormlar, üçgensel normlar ve üçgensel konormların bir genelleştirmesi olarak Yager ve Rybalov tarafından [77] ortaya konuldu ve bu operatörlerin genel yapısı Fodor, Yager ve Rybalov tarafından [33] detaylı bir şekilde incelendi. $[0,1]$ üzerindeki bir uninorm $*: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ bir ikili işlemdir öyle ki değişmeli, birleşmeli, her iki değişkene göre artan ve $e \in [0,1]$ birim elemanına sahiptir. Bir üçgensel norm $e = 1$ birim elemanlı bir uninorm iken bir üçgensel konorm $e = 0$ birim elemanlı bir uninormdur. Uninormlar fuzzy mantık, uzman sistemler, sinir ağları, birleştirme ve fuzzy sistem modeli gibi birçok alanda yararlılığı kanıtlanmış birleştirme operatörlerinin özel bir çeşitidir [8,19,45,47,48,50].

Hu ve Li [38] ve Drygaś [28] sürekli uninormların karakterizasyonunu ve De Baets [17] idempotent uninormların yapısını ele aldı. Uninormun özelliklerinden değişmelilik varsayımı kaldırılarak uninormlardan daha genel operatörlerin sınıfı, Drygaś tarafından [29] çalışıldı. Aynı çalışmada, ordinal toplamlar ile verilen operatörler yardımıyla uninorm benzeri operatörlerin özellikleri üzerinde duruldu. Mas, Monserrat, Torrens uninormların özelliklerinden değişme özelliğini kaldırarak üçgensel normların genelleştirmesinde, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde [58] ve bir sonlu zincir üzerinde [59] sol ve sağ uninorm kavramlarını; Wang ve Fang [72] bir tam kafes üzerinde sol ve sağ uninorm kavramlarını ele aldı. Üçgensel normların genelleştirmesinden hareketle Liu [50] uninormların özelliklerinden değişme özelliğine ek olarak birleşme özelliğini de kaldırarak uninorm kavramını genelleştirdi ve bir tam kafes üzerinde yarı uninorm olarak adlandırılan yeni bir kavram tanımladı. $[0,1]$ birim aralığı üzerinde tanımlanan bir U uninormu için, $U(0,1) \in \{0,1\}$ değeri U uninormunun sıfırlayanıdır. Eğer $U(0,1) = 0$ ise, U uninormu konjanktif, eğer $U(0,1) = 1$ ise, U uninormu disjanktif olarak adlandırılır. Bir U uninormunun konjanktif veya disjanktif olması bulanık gerektirme fonksiyonlarının tanımında uninormların (yarı-uninorm, sol ve sağ uninorm) kullanılmasını sağlar [18,50,60,72,74].

Karaçal ve Mesiar [41] bir L sınırlı kafesi üzerinde verilen $e \in L \backslash \{0,1\}$ birim elemanlı bir uninorm inşa etmek için iki yöntem verdi ve bu yöntemlerin bir ürünü olarak L üzerinde $e \in L \backslash \{0,1\}$ birim elemanlı en küçük ve en büyük uninormu elde etti. L sınırlı kafesi üzerindeki $e \in L \backslash \{0,1\}$ birim elemanlı her bir U uninormu için U nun $[0, e]^2$ üzerine kısıtlanışı bir üçgensel norm ve U nun $[e, 1]^2$ üzerine kısıtlanışı bir üçgensel konormdur.

Bu tezde, keyfi bir L sınırlı kafesi üzerinde üçgensel normların ve üçgensel konormların varlığı kullanılarak $e \in L \backslash \{0,1\}$ birim elemanlı bir uninorm inşa etmek için Karaçal ve Mesiar'ın [41] önerdikleri yöntemlerden farklı iki yöntem verildi. Bu yöntemlerin bir sonucu olarak L sınırlı kafesi üzerinde en küçük idempotent uninorm ve en büyük idempotent uninorm elde edildi ve bu elde edilen en küçük idempotent uninormun konjanktif ve en büyük idempotent uninormun disjanktif olduğu gözlemlendi. L sınırlı bir kafes, $e \in L \backslash \{0,1\}$, $a \parallel e$ ve $a = U(0,1)$ olacak şekildeki $a \in L$ elemanı için L üzerinde a sıfırlayanlı, e birim elemanlı bir uninormun her zaman mevcut olması gerekmediği ispatlandı. Ayrıca, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde verilen lokal internal kavramı sınırlı kafesler üzerine genişletilerek her L sınırlı kafes üzerindeki idempotent uninormun lokal internal olması gerekmediği gösterilerek, L üzerindeki idempotent uninormun lokal internal olması için gerekli şartlar verildi. Son olarak, L sınırlı kafesi sonlu ve her $x \in L$ elemanı $e \in L \backslash \{0,1\}$ ile kıyaslanabilir olmak üzere, L üzerinde bir azalan fonksiyon yardımıyla e birim elemanlı bir idempotent uninorm inşa etmek için bir yöntem verildi.

4. SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Bölüm 2.1. de:

1. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L\setminus\{0,1\}$ birim elemanlı bir U idempotent uninormu için,

i) Eğer $(x, y) \in [0, e]^2$ ise, $U(x, y) = x \wedge y$

ii) Eğer $(x, y) \in [e, 1]^2$ ise, $U(x, y) = x \vee y$

ifadelerinin sağlandığı gösterildi. (Önerme 2.2)

2. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L\setminus\{0,1\}$ birim elemanlı bir U idempotent uninormu için,

i) Her $(x, y) \in [0, e]^2$ için, $U(x, y) \leq x \wedge y$

ii) Her $(x, y) \in [e, 1]^2$ için, $U(x, y) \geq x \vee y$

iii) Her $(x, y) \in L^2\setminus([0, e]^2 \cup [e, 1]^2)$ için, $x \wedge y \leq U(x, y) \leq x \vee y$

ifadelerinin sağlandığı gösterildi. (Önerme 2.4)

3. Bir L sınırlı kafesi ve keyfi bir $e \in L\setminus\{0,1\}$ elemanı için $[0, e]$ üzerindeki t-normların varlığına ve $[e, 1]$ üzerindeki t-konormların varlığına dayanılarak L üzerinde $e \in L\setminus\{0,1\}$ birim elemanlı bir uninorm inşa etmek için iki yöntem verildi. (Teorem 2.5)

4. Teorem 2.5 de verilen L sınırlı kafesi üzerindeki U_t ve U_s uninormlarının,

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \in [0, e] \text{ ise,} \\ x & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

ve

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in [0, e] \text{ ise,} \\ x & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

ile tanımlı $\Phi: L \to L$ ve $\eta: L \to L$ fonksiyonları göz önününe alınarak,

$$U_t(x, y) = \begin{cases} T_e(x, y) & \text{eğer } (x, y) \in [0, e]^2 \text{ ise,} \\ x \vee y & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

ve

$$U_s(x, y) = \begin{cases} S_e(x, y) & \text{eğer } (x, y) \in [e, 1]^2 \text{ ise,} \\ x \wedge y & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

şeklinde de tanımlanabileceği gösterildi. (Uyarı 2.6)

5. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L\setminus\{0,1\}$ elemanı için $[0, e]$ üzerindeki en büyük t-norm $T_\wedge$ (infimum) ve $[e, 1]$ üzerindeki en küçük t-konorm $S_\vee$ (supremum) kullanılarak L üzerinde e birim elemanlı en büyük ve en küçük idempotent uninormlar elde edildi ve bu

elde edilen en küçük idempotent uninormun konjanktif ve en büyük idempotent uninormun disjanktif olduğu görüldü. (Sonuç 2.7)

Bölüm 2.2. de:

6. U, L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir uninorm olmak üzere,

i) $U(0,1) \in L$ elemanının U uninormunun sıfır elemanı (sıfırlayanı)

ii) Eğer $U(0,1) \in L$ elemanı ile e kıyaslanabilir ise, U uninormunun konjanktif uninorm veya disjanktif uninorm

iii) Eğer $(x, y) \in [0, a] \times [a, 1] \cup [a, 1] \times [0, a]$ ise, $U(x, y) = U(0,1)$.

olduğu gösterildi. (Önerme 2.8)

7. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı herhangi bir idempotent uninormun konjanktif uninorm veya disjanktif uninorm olması gerekmediğine dair bir örnek verildi. (Örnek 2.9)

8. L bir sınırlı kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$ ve $a \parallel e$ olacak şekilde $a \in L$ elemanı verilsin. Buna göre, L üzerinde $a = U(0,1)$ olacak şekilde a sıfırlayanlı ve e birim elemanlı bir uninormun her zaman mevcut olması gerekmediği ispatlandı. (Teorem 2.11 ve Teorem 2.14)

Bölüm 2.3. de:

9. L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir U idempotent uninormun sağladığı bazı özellikler verildi. (Önerme 2.15)

10. L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir U idempotent uninormun her $x \in L$ elemanının e ile kıyaslanabilir olması şartı ile infimuma ya da supremuma eşit olduğu gösterildi. (Önerme 2.16)

11. Eğer $e \in L$ elemanı ile kıyaslanamayan bazı $x \in L$ elemanları mevcut ise, $U \in \mathcal{U}(e)$ için her zaman $U(x, y) = \{x, y, x \wedge y,\ x \vee y\}$ olması gerekmediğine dair bir örnek verildi. (Örnek 2.17)

12. L sınırlı bir kafes, U, L üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olmak üzere, $x, y \geq e$, $x \parallel y$ ve $z \leq e$ için

i) Eğer $U(x, z) = z$ ise, $U(y, z) = z$, $U(x \vee y, z) = z$ ve $U(x \wedge y, z) = z$

ii) Eğer $U(x, z) = x$ ise, $U(y, z) = y$ ve $U(x \vee y, z) = x \vee y$

ifadelerinden birininin sağlandığı gösterildi. (Önerme 2.18)

13. Önerme 2.18 (ii) varsayımları altında $U(x \wedge y, z)$ değerinin $x \wedge y$ değerinden farklı olabileceği gösterildi. (Örnek 2.19)

14. L sınırlı bir kafes, U, L üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olmak üzere, eğer $x, y \geq e$, $x \parallel y$ ve $z \leq e$ için $U(x,z) = z$ ise, her $a, b \geq e$, $a \parallel b$ için farklı ek kısıtlamalar altında $U(a,z) = U(b,z) = U(a \wedge b, z) = U(a \vee b, z) = z$ eşitliklerinin sağlandığı gösterildi. (Önerme 2.20, Önerme 2.22, Önerme 2.24)

15. L sınırlı bir kafes, U, L üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olmak üzere, eğer $x, y \geq e$, $x \parallel y$ ve $z \leq e$ için $U(x,z) = x$ ise, her $a, b \geq e$, $a \parallel b$ için $x \vee y = a \wedge b$ kısıtlaması altında $U(a,z) = a$, $U(b,z) = b$, $U(a \vee b, z) = a \vee b$ ve $U(a \wedge b, z) = a \wedge b$ eşitliklerinin sağlandığı gösterildi (Önerme 2.21). Farklı kısıtlamalar altında bu eşitliklerden ilk üçünün sağlandığı gösterildi. (Önerme 2.23, Önerme 2.25)

16. L sınırlı bir kafes, U, L üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olmak üzere, $x, y, a, b \geq e \geq z$, $x \parallel y$, $a \parallel b$ olacak şekildeki $x, y, z, a, b \in L$ elemanları için $x \vee y = a \wedge b$ iken $U(x,z)$ değerinin $U(a,z)$ değerinden farklı olabileceği gösterildi. (Örnek 2.26)

17. L sınırlı bir kafes, U, L üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olmak üzere, $x, y \leq e$, $x \parallel y$ ve $z \geq e$ için,

i) Eğer $U(x,z) = z$ ise, $U(y,z) = z$, $U(x \vee y, z) = z$ ve $U(x \wedge y, z) = z$

ii) Eğer $U(x,z) = x$ ise, $U(y,z) = y$, $U(x \wedge y, z) = x \wedge y$

ifadelerinden birinin sağlandığı gösterildi. (Önerme 2.27)

18. Önerme 2.27 (ii) varsayımları altında $U(x \vee y, z)$ değerinin $x \vee y$ değerinden farklı olabileceği gösterildi. (Örnek 2.28)

19. L sınırlı bir kafes, U, L üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olmak üzere, eğer $x, y \leq e$, $x \parallel y$ ve $z \geq e$ için $U(x,z) = z$ ise, her $a, b \leq e$, $a \parallel b$ için farklı ek kısıtlamalar altında $U(a,z) = U(b,z) = U(a \wedge b, z) = U(a \vee b, z) = z$ eşitliklerinin sağlandığı gösterildi. (Önerme 2.29, Önerme 2.31, Önerme 2.33)

20. L sınırlı bir kafes, U, L üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olmak üzere, eğer $x, y \leq e$, $x \parallel y$ ve $z \geq e$ için $U(x,z) = x$ ise, her $a, b \leq e$, $a \parallel b$ için $x \wedge y = a \vee b$ kısıtlaması altında $U(a,z) = a$, $U(b,z) = b$, $U(a \wedge b, z) = a \wedge b$ ve $U(a \vee b, z) = a \vee b$ eşitliklerinin sağlandığı gösterildi (Önerme 2.30). Farklı kısıtlamalar altında bu eşitliklerden ilk üçünün sağlandığı gösterildi. Önerme 2.32, Önerme 2.34)

21. L sınırlı bir kafes, U, L üzerinde $e \in L\setminus\{0,1\}$ birim elemanlı bir idempotent uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olmak üzere,

$$A_x = \{y \in L : y \parallel x \text{ veya } (\exists z)(z \parallel x \text{ ve } z \parallel y)\}$$

kümesi üzerinde bazı sonuçlar verildi. (Teorem 2.35)

Bölüm 2.4. de:

22. L sınırlı bir kafes, U, L üzerinde $e \in L\setminus\{0,1\}$ birim elemanlı bir idempotent uninorm, her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir ve $\mathrm{Card}(L) < \aleph_0$ olmak üzere

$$U(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & \begin{array}{l}\text{eğer } y \leq g(x) \text{ ve } x \leq e \\ \text{veya } y < g(x) \text{ ve } x > e \text{ ise,}\end{array} \\ x \vee y & \begin{array}{l}\text{eğer } y > g(x) \text{ ve } x \leq e \\ \text{veya } y \geq g(x) \text{ ve } x > e \text{ ise,}\end{array} \end{cases}$$

olacak şekilde $g(e) = e$ sabit noktalı bir azalan $g: L \to L$ fonksiyonunun mevcut olduğu gösterildi. (Teorem 2.39)

5. ÖNERİLER

1. Teorem 2.5 de bir L sınırlı kafesi ve keyfi $e \in L\backslash\{0,1\}$ elemanı için $[0, e]$ üzerindeki üçgensel normların varlığına ve $[e, 1]$ üzerindeki üçgensel konormların varlığına dayanılarak, L üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir uninorm inşa etmek için iki yöntem verildi.

Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir uninorm elde etmek için Teorem 2.5 de verilen inşa yöntemlerinden farklı yöntemler düşünülebilir. Ayrıca bir L sınırlı kafesi üzerinde $a \in L\backslash\{0,1\}$ sıfır elemanlı nullnormlar elde etmek için inşa yöntemleri üzerinde çalışılabilir.

2. Sonuç 2.7 de $[0, e]$ üzerindeki en büyük üçgensel norm $T_\wedge$ (infimum) ve $[e, 1]$ üzerindeki en küçük üçgensel konorm $S_\vee$ (supremum) olduğu kullanılarak L üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı en büyük ve en küçük idempotent uninormlar elde edildi.

Bir L sınırlı kafesi üzerinde $a \in L\backslash\{0,1\}$ sıfır elemanlı idempotent nullnormların karakterizasyonu üzerine çalışılabilir.

3. Teorem 2.39 de L sınırlı bir kafes, U, L üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir idempotent uninorm, her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir ve $\text{Card}(L) < \aleph_0$ olmak üzere $g(e) = e$ sabit noktalı bir azalan $g: L \to L$ fonksiyonunu yardımıyla U idempotent uninormunun inşaa edilebileceği gösterildi.

Bu teoremde verilen her $x \in L$ elemanı $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanı ile kıyaslanabilir ve $\text{Card}(L) < \aleph_0$ kısıtlamalarından en az biri kaldırılarak L sınırlı kafesi üzerinde bir azalan $g: L \to L$ fonksiyonunu yardımıyla idempotent uninormları karakterize etme problemi ile ilgilenilebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Birkhoff, G., Lattice Theory, 3rd Edition, Providence, Rhode Island, 1967.

2. Bodjanova, S. ve Kalina, M., Construction of Uninorms on Bounded Lattices, IEEE 12th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics SISY 2014, September, 2014, 61-66.

3. Buchanan, B. ve Shortliffe, E., Rule-Based Expert Systems, The MYCIN Experiments of the Stanford Heuristic Programming Project, Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.

4. Calvo, T., On Some Solutions of The Distributivity Equation, Fuzzy Sets and Systems, 104,1 (1999) 85–96.

5. Calvo, T., De Baets, B. ve Fodor, J., The Functional Equations of Frank and Alsina for Uninorms and Nullnorms, Fuzzy Sets and Systems, 120 (2001) 385-394.

6. Calvo, T., Kolesárová, A., Komorníková, M. ve Mesiar, R., Aggregation Operators: Properties, Classes and Construction Methods, in Aggregation Operators, New Trends and Aplications, Calvo, T., Mayor, G. ve Mesiar, R., Eds, Heidelberg, Physica-Verlag, 2002, 3-104.

7. Czogala, E. ve Drewniak, J., Associative Monotonic Operations in Fuzzy Set Theory, Fuzzy Sets and Systems,12 (1984) 249–269.

8. Çaylı, G.D., Karaçal, F. ve Mesiar, R., On a New Class of Uninorms on Bounded Lattices, Information Sciences, 367-368 (2016) 221-231.

9. Çaylı, G.D. ve Karaçal, F., Construction of Uninorms on Bounded Lattices, Kybernetika, 53,3 (2017) 394-417.

10. Çaylı, G.D. ve Drygaś, P., Some Properties of Idempotent Uninorms on a Special Class of Bounded Lattices, Information Sciences, 422 (2018) 352-363.

11. Çaylı, G.D., On a New Class of t-norms and t-conorms on Bounded Lattices, Fuzzy Sets and Systems, 332 (2018) 129-143.

12. Çaylı, G.D. ve Karaçal, F., Idempotent Nullnorms on Bounded Lattices, Information Sciences, 425 (2018) 154-163.

13. Çaylı, G.D. ve Karaçal, F., Some Remarks on Idempotent Nullnorms on Bounded Lattices, In: Torra, V., Mesiar, R. ve De Baets, B., Eds, Aggregation Functions in Theory and in Practice, AGOP 2017, Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 581, Springer, Cham, 2018, 31-39.

14. Çaylı, G.D. ve Karaçal, F., A Survey on Nullnorms on Bounded Lattices, In: Kacprzyk, J., Szmidt, E., Zadrożny, S., Atanassov, K. ve Krawczak, M., Eds, Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017, IWIFSGN 2017, EUSFLAT 2017, Advances in Intelligent Systems and Computing, 641, Springer, Cham, 2018, 431-442.

15. Çaylı, G.D., Characterizing Ordinal Sum for t-norms and t-conorms on Bounded Lattices, In: Kacprzyk, J., Szmidt, E., Zadrożny, S., Atanassov, K. ve Krawczak, M., Eds, Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017, IWIFSGN 2017, EUSFLAT 2017, Advances in Intelligent Systems and Computing, 641, Springer, Cham, 2018, 443-454.

16. De Baets, B., Uninorms: The Known Classes, in Fuzzy Logic and Intelligent Technologies for Nuclear Science and Industry, Proceedings of the Third International FLINS Workshop, Ruan, D., Abderrahim, H.A., D'hont, P. ve Kerre, E.E., Eds, Singapore, World Scientific, 1998, 21-22.

17. De Baets, B., Idempotent Uninorms, European Journal of Operational Research, 118, 3 (1999) 631-642.

18. De Baets, B. ve Fodor, J., Residual Operators of Uninorms, Soft Computing, 3 (1999) 89-100.

19. De Baets, B. ve Mesiar, R., Triangular Norms on Product Lattice, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 61-75.

20. De Baets, B., Fodor, J., Ruiz-Aguilera, D. ve Torrens, J., Idempotent Uninorms on Finite Ordinal Scales, International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge- Based Systems, 17,1 (2009) 1-14.

21. Deschrijver, G. ve Kerre, E.E., Uninorms in L^* Set Theory, Fuzzy Sets and Systems, 148 (2004) 243-262.

22. Deschrijver, G., Uninorms which are neither Conjunctive nor Disjunctive in Interval-Valued Fuzzy Set Theory, Information Sciences, 244 (2013) 48-59.

23. Deschrijver, G., Kerre, E.E., Triangular Norms and Related Operators in L^*-fuzzy Set The Theory, in: Logical, Algebric, Analytic and Probabilistic Aspect of Triangular Norms, Elsevier, 2005.

24. Deschrijver, G. ve Kerre, E.E., On the Relationship between Some Extensions of Fuzzy Set Theory, Fuzzy Sets and Systems, 133,2 (2008) 227-235.

25. Drewniak, J. ve Drygaś, P., On Class of Uninorms, International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge- Based Systems, 10 (2002) 5-10.

26. Drossos, C.A., Generalized t-norm Structures, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 53-59.

27. Drygaś, P., A Characterization of Idempotent Uninorms, Fuzzy Sets and Systems, 145,3 (2004) 455-461.

28. Drygaś, P., On the Structure of Continuous Uninorms, Kybernetika, 43 (2007) 183–196.

29. Drygaś, P., On Properties of Uninorms with underlying t-norm and t-conorm given as Ordinal Sum, Fuzzy Sets and Systems, 161 (2010) 149-157.

30. Drygaś, P., Some Class of Uninorms in Interval Valued Fuzzy Set Theory, in: P. Angelov, P., Atanassov, K.T., Doukovska, L., Hadjiski, M., Jotsov, V., Kacprzyk, J., Kasabov, N., Sotirov, S., Szmidt, E. ve Zadrożny S., Eds, Proceedings of the 7th IEEE International Conference Intelligent Systems, Volume 1: Mathematical Foundations, Theory, Analyses, Series: Advances in Intelligent Systems and Computing, 322, Springer 2015, 33-43.

31. Drygaś, P., Ruiz-Aguilera, D. ve Torrens, J., A Characterization of Uninorms Locally Internal in $A(e)$ with Continuous underlying Operators, Fuzzy Sets and Systems, 287 (2016) 137-153.

32. Drygaś, P. ve Rak, E., Distributivity Equation in the Class of 2-Uninorms, Fuzzy Sets and Systems, 291 (2016) 82-97.

33. Fodor, J., Yager, R.R. ve Rybalov A., Structure of Uninorms, International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge- Based Systems, 5,4 (1997) 411-427.

34. Fodor, J. ve Jenei, S., On Reversible Triangular Norms, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 43-51.

35. Gabbay, D. ve Metcalfe, G., Fuzzy Logics Based on $[0,1)$-Continuous Uninorms, Archive for Mathematical Logic, 46 (2007) 425–449.

36. Grabisch, M., Marichal, J.L, Mesiar, R. ve Pap, E., Aggregation Functions, Cambridge University Press, 2009.

37. Hájek, P., Havránek, T. ve Jiroušek, R., Uncertain Information Processing in Expert Systems, CRC Press, 1992.

38. Hu, S.K. ve Li, Z.F., The Structure of Continuous Uninorm, Fuzzy Sets and Systems, 124 (2001) 43-52.

39. Hungerford, T.W., Algebra, Springer-Verlag New York, 1974.

40. Karaçal, F., On the Direct Decomposability of Strong Negations and s-implication Operators on Product Lattices, Information Sciences, 176 (2006) 3011-3025.

41. Karaçal, F. ve Mesiar, R., Uninorms on Bounded Lattices, Fuzzy Sets and Systems, 261 (2015) 33–43.

42. Kesicioğlu, M.N. ve Karaçal, F., Mesiar, R., Order-Equivalent Triangular norms, Fuzzy Sets and Systems, 268 (2015) 59–71.

43. Kimberling, C., On a Class of Associative Functions, Publicationes Mathematica-Debrecen, 20 (1973) 21–39.

44. Klement, E.P., Mesiar, R. ve Pap, E., Triangular Norms, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

45. Komorníková, M. ve Mesiar, R., Aggregation Functions on Bounded Partially Ordered Sets and Their Classification, Fuzzy Sets and Systems, 17 (2011) 48-56.

46. Li, G. ve Liu, H., Continuity of Left-Continuous Triangular Norms with Special Associated Negations, Fuzzy Sets and Systems, 226 (2013) 78-88.

47. Li, Y.M. ve Shi, Z.K., Remarks on Uninorm Aggregation Operators, Fuzzy Sets and Systems, 114 (2000) 377-380.

48. Li, Y.M. ve Shi, Z.K., Weak Uninorms Aggregation Operators, Information Sciences, 124 (2000) 317-323.

49. Ling, C.H., Representation of Associative Functions, Publicationes Mathematica-Debrecen, 12 (1965) 189-212.

50. Liu, H., Semi-uninorms and Implications on a Complete Lattice, Fuzzy Sets and Systems, 191 (2012) 72-82.

51. Marichal, J.L., On the Associativity Functional Equation, Fuzzy Sets and Systems, 114 (2000) 381-389.

52. Marko, V. ve Mesiar, R., Continuous Archimedean t-norms and Their Bounds, Fuzzy Sets and Systems, 121,2 (2001) 183-190.

53. Martin, J., On a Theorem of Czogala and Drewniak (1984), Proc. EUROFUSE PM'01, Granada, 2001, 49-54.

54. Martin, J. ve Mayor, G., On Locally Internal Aggregation Functions, International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge- Based Systems, 69 (1999) 235–241.

55. Martin, J., Mayor, G. ve Torrens, J., On Locally Internal Monotonic Operations, Fuzzy Sets and Systems, 137 (2003) 27-42.

56. Mas, M., Mayor, G. ve Torrens, J., The Modularity Condition for Uninorms and t-Operators, Fuzzy Sets and Systems, 126,2 (2002) 207-218.

57. Mas, M., Mayor G. ve Torrens, J., The Distributivity Condition for Uninorms and t-Operators, Fuzzy Sets and Systems, 128,2 (2002) 209-225.

58. Mas, M., Monserrat, M. ve Torrens, J., On Left and Right Uninorms, International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge- Based Systems, 9 (2002) 491-507.

59. Mas, M., Monserrat, M. ve Torrens, J., On Left and Right Uninorms on a Finite Chain, Fuzzy Sets and Systems, 146 (2004) 3-17.

60. Mas, M., Monserrat, M. ve Torrens, J., Two Types of Implication derived from Uninorms, Fuzzy Sets and Systems, 158 (2007) 2612-2626.

61. Mayor, G. ve Calvo, T., On Extended Aggregation Functions, In: Proc. IFSA Conference, Volume 1, Academia, Prague 1997, 281-285.

62. Menger, K., Statistical Metrics, Proceeding of National Academy of Sciences, USA, 28 (1942) 535-537.

63. Mesiarova-Zemankova, A., Multi-polar t-conorms and Uninorms, Information Sciences, 301 (2015) 227-240.

64. Moser, B., Tsiporkova, E. ve Klement, E.P., Convex Combinations in terms of Triangular Norms: A Characterization of Idempotent, Bisymmetrical and Self-Dual Compensatory Operators, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 97- 108.

65. Schweizer, B. ve Sklar, A., Escapes Metriques Aleatoires, C. R. Acad. Sci. Paris SRer. A, 247 (1958) 2092-2094.

66. Schweizer, B. ve Sklar, A., Statiscal Metric Spaces, Pacific Journal of Mathematics, 10 (1960) 313-334.

67. Schweizer, B. ve Sklar, A., Associative Functions and Statistical Triangle Inequalities, Publicationes Mathematica-Debrecen, 8 (1961) 169-186.

68. Schweizer, B. ve Sklar, A., Associative Functions and Abstract Semigroups, Publicationes Mathematica-Debrecen, 10 (1963) 69-81.

69. Schweizer, B. ve Sklar, A., Probabilistic Metric Spaces, New York, North-Holland, 1983.

70. Tsadiras, A.K. ve Margaritis, K.G., The MYCIN Certainty Factor Handling Function as Uninorm Operator and Its Use as a Threshold Function in Artificial Neurons, Fuzzy Sets and Systems, 93 (1998) 263–274.

71. Vicenik, P., A Note to a Construction of t-norms Based on Pseudo-Inverses of Monotone Functions, Fuzzy Sets and Systems, 104,1 (1999) 15-18.

72. Wang, Z. ve Fang, J., Residual Operations of Left and Right Uninorms on a Complete Lattice, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 22-31.

73. Yager, R.R., Uninorms in Fuzzy Systems Modelling, Fuzzy Sets and Systems, 122 (2001) 167-175.

74. Yager, R.R., Defending aganist Strategic Manipulation in Uninorm-Based Multi-Agent Decision Making, European Journal of Operational Research, 141 (2002) 217-232.

75. Yager, R.R. ve Kreinovich, V., On the Relation between Two Approaches to Combining Evidence: Ordered Abelian Groups and Uninorms, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 14,1 (2003) 7-12.

76. Yager, R.R. ve Kreinovich, V., Universal Approximation Theorem for Uninorm-Based Fuzzy Systems Modeling, Fuzzy Sets and Systems, 140,2 (2003) 331-339.

77. Yager, R.R. ve Rybalov A., Uninorm Aggregation Operators, Fuzzy Sets and Systems, 80 (1996) 111-120.

ÖZGEÇMİŞ

Gül Deniz Çaylı, 1989 yılında İstanbul'da doğdu. İlköğrenimini İzmir Mustafa Şık İlköğretim Okulunda ve lise öğrenimini İzmir Cengiz Topel Y.D.A Lisesinde tamamladı.

2007-2008 Eğitim-Öğretim yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü programında lisans eğitimine başladı. 2011 yılında lisans eğitiminden birincilikle mezun oldu.

2011-2012 Eğitim-Öğretim yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalında Tezli Yüksek Lisans programını kazandı. Aynı yılda TUBİTAK Yurt içi Yüksek Lisans Bursu almaya hak kazandı. 2012 yılında Öğretim Üyesi Yetiştirme Programı (ÖYP) ile Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı'na Araştırma Görevlisi olarak atanarak burada yüksek lisans eğitimine devam etti. 2013-2014 Eğitim-Öğretim yılında 'Sınırlı Kafesler Üzerinde Uninormlar' adlı teziyle yüksek lisans eğitimini tamamladı. Aynı Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora (Matematik) programına kabul edildi ve TUBİTAK Yurt İçi Doktora Bursu almaya hak kazandı. 2015-2016 Eğitim-Öğretim yılında doktora teziyle ilgili çalışmak üzere altı ay süreyle Polonya-University of Rzeszow'e gitti. Halen Karadeniz Teknik Üniversitesi'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır. Yabancı dili İngilizcedir.

Bu tez çalışmasından yayınlanan eserler aşağıda verildi.

Çaylı, G.D., Karaçal, F. ve Mesiar, R., On a New Class of Uninorms on Bounded Lattices, Information Sciences, 367-368 (2016) 221-231.

Çaylı, G.D. ve Drygaś, P., Some Properties of Idempotent Uninorms on a Special Class of Bounded Lattices, Information Sciences, 422 (2018) 352-363.