KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE UNİNORMLARIN KARAKTERİZASYONU VE UNİNORMDAN ELDE EDİLEN U-KISMEN SIRA

DOKTORA TEZİ

Ümit ERTUĞRUL

OCAK 2017
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE UNİNORMLARIN KARAKTERİZASYONU VE UNİNORMDAN ELDE EDİLEN U-KISMEN SIRA

Ümit ERTUĞRUL

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

DOKTOR (MATEMATİK)

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 10 / 01 /2017

Tezin Savunma Tarihi : 27 / 01 /2017

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Funda KARAÇAL

Trabzon 2017

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında

ÜMİT ERTUĞRUL Tarafından Hazırlanan

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE UNİNORMLARIN KARAKTERİZASYONU VE UNİNORMDAN ELDE EDİLEN U-KISMEN SIRA

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 10 /01 / 2017 gün ve 1684 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan :	**Prof. Dr. Refik KESKİN**	....
Üye :	**Prof. Dr. Funda KARAÇAL**	....
Üye :	**Prof. Dr. Belgin KÜÇÜKÖMEROĞLU**	....
Üye :	**Doç. Dr. Tülay KESEMEN**	....
Üye :	**Doç. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU**	....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması süreci boyunca önerileriyle, yönlendirmeleriyle ve sağladığı motivasyonla bana rehberlik yapan, tecrübelerini esirgemeyen ve her daim yanımda olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Funda KARAÇAL' a en içten dileklerimle saygı ve minnetimi sunuyorum.

Ayrıca tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini her daim arkamda hissettiğim aileme ve özel olarak eşim Meryem'e, oğlum Kerem'e, üzerimde emeği olan tüm hocalarıma, yardımlarını ve desteğini esirgemeyen mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim. İlaveten, 2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Ümit ERTUĞRUL

Trabzon 2017

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Sınırlı Kafesler Üzerinde Uninormların Karakterizasyonu ve Uninormdan Elde Edilen U-Kısmen Sıra” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Funda KARAÇAL’ ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 27 / 01 / 2017

Ümit ERTUĞRUL

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE UNİNORMLARIN KARAKTERİZASYONU VE UNİNORMDAN ELDE EDİLEN U-KISMEN SIRA

Ümit ERTUĞRUL

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Funda KARAÇAL
2017, 69 Sayfa

Bu tezin amacı sınırlı kafesler üzerinde uninormları karakterize etmek, uninormlar ve t-normlar (t-konormlar) için inşa metotları sunmak, U-kısmen sıralama bağıntısı tanımlayarak bazı özelliklerini incelemek ve bir genelleştirmesini vermektir.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1 de çalışmamıza temel olan bazı tanım, teorem ve önermeler ifade edilmiştir. Bölüm 2 ise her biri iki alt bölümden oluşan iki bölümden oluşmaktadır. İlk kısımda sınırlı kafesler üzerinde uninormların bir karakterizasyonu verilmiş ve uninormlar, t-normlar ve t-konormlar için inşa metotları sunulmuştur. İkinci kısımda uninormdan elde edilen U-kısmen sıralama bağıntısı tanımlanmış, bazı özellikleri incelenmiş ve bu kısmen sıralama bağıntısı n-uninormdan elde edilen kısmen sıralama bağıntısına genelleştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Uninorm, Sınırlı kafes, Kısmen sıralama bağıntısı

PhD. Thesis

SUMMARY

CHARACTERIZATION OF UNINORMS ON BOUNDED LATTİCES AND U-PARTİALLY ORDER DERİVED FROM UNINORM

Ümit ERTUĞRUL

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Funda KARAÇAL
2017, 69 Pages

The aim of the present thesis is to characterize uninorms on bounded lattices, present construction methods for uninorms and t-norms (t-conorms), investigate some properties of U-partially order by defining U-partially order and give a generalization of the order.

This study consists of two main chapters. In Chapter 1, some definitions and theorems which are crucial for our study are stated. Chapter 2 consists of two parts each of which contains two sub-sections. In the first part, a characterization of uninorms on bounded lattices is given and construction methods of uninorms, t-norms and t-conorms are presented. In the second part, U-partially order derived from uninorm is defined, some properties of the partially order are investigated and the order is extended to partially order derived from n-uninorm.

Key Words: Uninorm, Bounded lattice, Partially ordered relation

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$\cap$	: Arakesit işlemi
$\cup$	: Birleşim işlemi
$\subseteq$	: Kümeler arasında alt küme bağıntısı
$A \cap B$	: Kümelerin arakesiti
$A \cup B$	: Kümelerin birleşimi
$A \setminus B$	: Kümelerin farkı
$A \times B$	: Kümelerin kartezyen çarpımı
$\emptyset$	: Boş küme
$\bar{X}$	: X in üst sınırlarının kümesi
$\underline{X}$	: X in alt sınırlarının kümesi
$\wp(X)$	: X in güç kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$[a, b]$	: Kapalı aralık
(a, b)	: Açık aralık
$[a, b), (a, b]$	: Yarı-açık aralık
Y^X	: X den Y ye tüm fonksiyonların kümesi
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad (\in X^{\mathbb{N}})$	: X' deki elemanların dizisi
$\wedge$	: Kafeste infimum işlemi
$\vee$	: Kafeste supremum işlemi
t-norm	: Üçgensel norm
t-konorm	: Üçgensel konorm
H_T (H_S)	:T t-normunun (S t-konormunun) idempotent elemanlarının kümesi
H_U	: U uninormunun idempotent elemanlarının kümesi
$a \parallel b$	: a elemanı ile b elemanı kıyaslanamaz
$\mathbb{I}_a$	: a elemanı ile kıyaslanamayan elemanların kümesi

$U \downarrow [0, e]^2$	: U uninormunun $[0, e]^2$ kümesine kısıtlanışı
$\leq_U$	: U uninormundan elde U-kısmen sıralama bağıntısı
$U_{k(e,f)}$	: 2-uninormların sınıfı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Aritmetik ortalama göz önüne alındığında, birleştirme fonksiyonlarının geçmişi matematik kadar eskiye dayanmasına rağmen yakın tarihimize kadar yoğun bir çalışma alanı olmamıştır. Son yıllarda araştırmacılar tarafından uygulamalı bilimlerdeki kullanışlılığı sebebiyle oldukça popülerlik kazanmıştır. Bu sayede teorik alt yapısı da detaylı bir şekilde çalışılmıştır.

Basit olarak, birden fazla nümerik değeri, tek bir değer elde edecek şekilde bir araya getirme süreci birleştirme süreci ve bu işlemi yapan fonksiyon da birleştirme fonksiyonu olarak adlandırılır. Birleştirme fonksiyonlarının iki temel özelliği azalmayan monotonluk ve sınır koşullarıdır. Birleştirme fonksiyonlarının, azalmayan monotonluk özelliğini sağlaması ile giriş değerlerindeki herhangi bir artış için çıkış değerlerinde herhangi bir azalma olmayacağı ve sınır koşullarını sağlaması ile de minimal (maksimal) giriş değerleri için minimal (maksimal) çıkış değerleri vereceği garanti altına alınır.

Birleştirme fonksiyonlarının önemli bir alt sınıfı da uninormlardır. Aslında uninormlar, birleştirme fonksiyonlarının sahip olduğu iki temel özelliğe ek olarak birim eleman, birleşme ve değişme özelliklerini de sağlayan özel birleştirme fonksiyonlarıdır. Ayrıca t-normların ve t-konormların özel birer uninorm olduğu göz önüne alındığında uninormlar, t-normlar ve t-konormların daha genel bir sınıfıdır.

Uninormlar, ilk olarak $[0,1]$ birim reel aralık üzerinde Yager ve Rybalov tarafından tanımlanılıp ([41]), Fodor, Yager ve Rybalov tarafından çalışılmıştır ([15]). Uninormların fuzzy logic, uzman sistemler, sinir ağları ve fuzzy sistem modellemede kullanışlı olduğu ispatlanmıştır ([38],[39],[40]). Bu sebeple halen günümüzde de teorik ve uygulamalı alanlarda çalışan bilim insanları tarafından yoğun bir şekilde çalışılmaktadır.

Diğer taraftan uninormların teorik açıdan çalışılması daha kapsamlı olmuştur. Calvo, De Baets ve Fodor([6]), De Baets ([7]), Drewniak ve Drygas ([11]), Fodor, Yager ve Rybalov ([15]), Li ve Shi ([29]), Mas, Monserrat ve Torrens ([34]), Monserrat ve Torrens ([35]) uninormları teorik açıdan ele alan araştırmacılardır. Değişmeli olmayan uninormları incelemek amacıyla uninormların bazı genelleştirmeleri, Mas, Monserrat ve Torrens ([34]) ve Marichal ([31]) tarafından çalışıldı. Li ve Shi ([29]), zayıf uninorm olarak adlandırılan uninormların diğer bir genelleştirmesini ele aldılar. Wang ve Fang ([37]), bir tam kafes üzerinde sol ve sağ uninormları ve Liu ([38]), bir tam kafes üzerinde yarı-uninorm kavramlarını ele aldılar. Karaçal ve Mesiar, sınırlı kafesler üzerinde uninormların varlığını ortaya koyup, en büyük ve en küçük uninormları belirlediler ([22]).

Keyfi sınırlı kafes durumu birim reel aralık durumundan çok daha genel olduğu için, birleştirme fonksiyonları ve özel olarak uninormlar bu yapılar üzerinde tanımlandı ve detaylı bir şekilde çalışıldı ([12], [22], [25], [37]). Uninormlar, t-normlar ve t-konormlar özel birleştirme fonksiyonlarıdır ve bu sebeple bu operatörlerin aralarındaki ilişkiyi anlamak oldukça önemlidir. Birim reel aralık üzerinde uninormlar; t-normlar, t-konormlar ve simetrik birleştirme fonksiyonları vasıtasıyla karakterize edilmiştir ([16]). Böylece, birim reel aralık üzerinde bu operatörler arasındaki bağlantılar üzerine çalışmaların literatürde zaten mevcut olduğu söylenebilir. Keyfi sınırlı kafes durumu çok daha genel ve bu sebeple oldukça önemli olmasına rağmen, yapılan literatür taraması neticesinde keyfi sınırlı kafesler üzerinde uninormların bir karakterizasyonuna rastlanmamıştır.

Son zamanlarda araştırmacıların üzerinde durduğu problemlerden bir tanesi de özel birleştirme fonksiyonlarından kısmen sıralama bağıntısı elde edilmesi ve bu kısmen sıralama bağıntısının özelliklerinin araştırılması problemidir. [21] de, t-normlardan elde edilen t-sıra ilk olarak tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Ardından t-sıranın daha detaylı incelemelerini içinde barındıran çalışmalar yapılmıştır ([2], [18], [21], [26]). T-normlardan elde edilen sıra fikrinden yola çıkılarak, fuzzy gerektirmelerden elde edilen sıra üzerinde de çalışılmıştır ([27]). Bazı araştırmacılar t-normlardan sıra elde edilmesi fikrinden yola çıkarak, t-normların daha genel bir sınıfı olan uninormlardan elde edilen ön-sıralama üzerinde çalışmışlardır ([17]). Bu çalışma incelendiğinde önerilen ön-sıralama tanımının ters simetri özelliğini sağlamadığı dolayısıyla bir kısmen sıra olmadığı ve dahası literatürde de böyle bir çalışma olmadığı gözlenir.

Bu çalışmanın ilk kısmında, genel bilgiler başlığı altında, konu bütünlüğünün sağlanması ve anlaşılırlığın artırılması göz önünde bulundurularak, birim reel aralık üzerinde ve ardından keyfi sınırlı kafesler üzerinde t-normlar, t-konormlar, birleştirme fonksiyonları, nullnormlar ve uninormlar ile ilgili genel bilgiler verilmiştir.

Yapılan çalışmalar olarak adlandırılan ikinci bölüm iki alt başlığa ayrılır. Birinci bölümde, birim reel aralık üzerinde uninormların bir karakterizasyonunun mevcudiyetinden ve bu şekilde bir karakterizasyonun keyfi sınırlı kafesler üzerinde mevcut olup olmadığı probleminden yola çıkılmış ve keyfi sınırlı kafesler üzerinde uninormların bir karakterizasyonu sunulmuştur. İkinci bölümde, t-normlar ve gerektirmelerden elde edilen kısmen sıra tanımı ve bu sıranın t-normların çok daha genel bir sınıfı olan uninormlar için mevcut olup olmama problemi motivasyonumuz olmuş, böylece uninormdan elde edilen U-kısmen sıra tanımlanmış, bazı özellikleri incelenmiş ve bir genellemesi verilmiştir.

1.2. Kısmen Sıralı Kümeler ve Kafesler

1.2.1. Kısmen Sıralı Kümeler

Tanım 1.1. [5] P bir küme ve $\leq$, P üzerinde bir bağıntı olsun. Her $x, y, z \in P$ için

P1. Her $x \in P$ için $x \leq x$ (Yansıma)

P2. $x, y \in P$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ (Ters Simetri)

P3. $x, y, z \in P$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (Geçişme)

şartları sağlanırsa, $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir sıralama (veya kısmen sıralama) denir. Üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı mevcut olan P kümesine sıralı küme (veya kısmen sıralı küme) denir ve bu küme $(P, \leq)$ ikilisi ile gösterilir.

Eğer $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise $x < y$ yazılır ve 'x, y de öz olarak içerilir' olarak ifade edilir. $x \leq y$ bağıntısı $y \geq x$ olarak da yazılır ve 'x, y de içerilir' olarak ifade edilir. Benzer şekilde $x < y$, $y > x$ olarak da yazılır.

Örnek 1.2. X bir küme olmak üzere, $(\wp(X), \subseteq)$ kısmen sıralı bir kümedir.

Lemma 1.3. [5] Herhangi bir kısmen sıralı kümede hiçbir x için $x < x$ ve $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ dir.

Uyarı 1.4. [5] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun.

(i) Bir $a \in P$ elemanı her $x \in P$ için $a \leq x$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa bu elemanın tek olduğu açıktır. Böyle bir a elemanı (eğer mevcutsa) 0 ile gösterilir ve P nin en küçük elemanı olarak adlandırılır.

(ii) Bir $b \in P$ elemanı her $x \in P$ için $x \leq b$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa bu elemanın tek olduğu açıktır. Böyle bir b elemanı (eğer mevcutsa) 1 ile gösterilir ve P nin en büyük elemanı olarak adlandırılır.

Eğer 0 ve 1 elemanları mevcutsa, her $x \in P$ için $0 \leq x \leq 1$ olduğundan 0 ve 1 e evrensel sınırlar denir.

Lemma 1.5. [5] $(P, \leq)$ kısmen sıralı ve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in P$ olsun. Eğer $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_1$ ise $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ (ters devir) dir.

P4. Her x ve y için $x \leq y$ veya $y \leq x$ dir.

Tanım 1.6. [5] P4 özelliğini sağlayan bir kısmen sıralı kümeye tam sıralı küme, zincir veya lineer sıralı küme denir.

Teorem 1.7. [5] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $S \subseteq P$ alt kümesi ise, $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir kümedir. Özel olarak, P bir zincir ise S de zincirdir.

Örnek 1.8. [5] $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi bir zincir olduğundan $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, $\mathbb{N}_0$ pozitif doğal sayılar kümesi, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi doğal sıralamaya göre bir zincirdir.

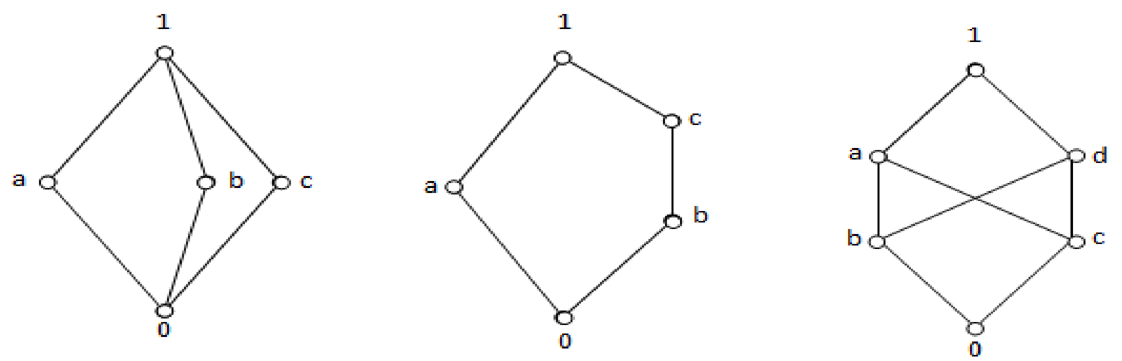
Tanım 1.9. [5] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. $a, b \in P$ için 'a örter b' denir: $\Leftrightarrow$ $a > b$ olup, $a > x > b$ olacak şekilde bir $x \in P$ elemanı mevcut değildir.

Tanım 1.10. [21] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. $a, b \in P$ için $a \nleq b$ ve $b \nleq a$ ise yani a ve b elemanları kıyaslanmıyorsa a ve b elemanlarına kıyaslanamayan elemanlar denir ve bu $a \parallel b$ ile gösterilir. $c \in P$ için c elemanı ile kıyaslanamayan elemanların kümesi

$$I_c \coloneqq \{x \in P : x \parallel c\}$$

ile gösterilir.

Kapsama bağıntısı kullanılarak herhangi bir sonlu kısmen sıralı kümenin aşağıdaki gibi bir grafiksel gösterimi elde edilir: P nin her bir elemanını göstermek için küçük bir daire çizilir ve $a > b$ olduğunda a, b den daha yukarı yazılır. a, b yi örttüğünde a dan b ye düz bir çizgi çizilir. Sonuçta elde edilen şekile P nin bir diyagramı denir. Aşağıda bazı kısmen sıralı kümelerin diyagram örnekleri verilmiştir.



M_5 N_5 P_6

Şekil 1.1. Diyagram örnekleri

Tanım 1.11. [5] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun.

(i) $a \in X$ olsun. Eğer $x < a$ olacak şekilde $x \in X$ mevcut değil ise bu a elemanına X kümesinin bir minimal elemanı denir.

X kümesinde maksimal eleman, dual olarak tanımlanır.

En küçük eleman bir minimal eleman ve en büyük eleman da bir maksimal elemandır. Ancak tersinin doğru olması gerekmez.

Teorem 1.12. [5] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $\emptyset \neq X \subseteq P$ sonlu alt küme olsun. Bu takdirde X kümesi minimal ve maksimal elemanlara sahiptir.

Teorem 1.13. [5] Zincirlerde minimal (maksimal) ve en küçük (en büyük) eleman kavramları denktir. Böylece keyfi sonlu bir zincir en küçük ve en büyük elemanlara sahiptir.

Tanım 1.14. [5] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun.

(i) $a \in P$ ve her $x \in X$ için $x \leq a$ ise, a elemanına X kümesinin bir üst sınırı denir ve X kümesinin üst sınırlarının kümesi $\overline{X}$ ile gösterilir. Her $c \in \overline{X}$ için $a \leq c$ ise, a elemanına X kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir. $a = supX$ veya $a = \vee X$ ile gösterilir.

(ii) $b \in P$ ve her $x \in X$ için $b \leq x$ ise, b elemanına X kümesinin bir alt sınırı denir ve X kümesinin alt sınırlarının kümesi $\underline{X}$ ile gösterilir. Her $d \in \overline{X}$ için $d \leq b$ ise, b elemanına X kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir. $b = infX$ veya $b = \wedge X$ ile gösterilir.

1.2.2. Kafesler

Tanım 1.15. [5] $(L, \leq)$ bir kısmen sıralı kümesi olsun. Her $x, y \in L$ için $sup\{x, y\}$ ve $inf\{x, y\}$ mevcut ise L ye kafes denir.

L kafesinde $x, y \in L$ için $x \vee y := sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y := inf\{x, y\}$ ile gösterilir.

Eğer $(L, \leq)$ bir kafes ise $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri L üzerinde ikili işlemlerdir. Dolayısıyla $(L, \vee, \wedge)$ bir cebirsel yapıdır.

Örnek 1.16. [5] Şekil 1.1 de verilen diyagram örneklerinde M_5 ve N_5 kafes olup P_6 kafes değildir.

Örnek 1.17. [5] $(\wp(X), \subseteq)$ kısmen sıralı kümesi bir kafestir.

Bu kafeste $\forall A, B \in \wp(X)$ için $A \vee B = A \cup B$ ve $A \wedge B = A \cap B$ dir.

Tanım 1.18. [5] Bir L kafesine sınırlı kafes denir:$\Leftrightarrow$ L, en küçük eleman 0 ve en büyük eleman 1 e sahiptir. Bu durum, kısaca $(L, \leq, 0, 1)$ ile gösterilir.

Tanım 1.19. [5] Bir L kafesine tam kafes denir:$\Leftrightarrow$ L nin her X alt kümesi L de bir en küçük üst sınıra ve bir en büyük alt sınıra sahiptir. Yani, her $X \subseteq L$ alt kümesi için $supX$ ve $infX$, L de mevcuttur.

Özel olarak Tanım 1.13 de $X = L$ alındığında boştan farklı her tam kafesin en küçük elemanının ve en büyük elemanının mevcut olduğu görülür. Bu nedenle her tam kafes sınırlıdır. Her sonlu kafes tam kafestir. Keyfi bir zincir kafestir.

Örnek 1.19 da verilen bir X kümesinin tüm alt kümelerinin kafesi $(\wp(X), \subseteq)$ bir tam kafestir, burada en küçük eleman $0 = \emptyset$ ve en büyük eleman $1 = X$ dir. $S_\alpha \subseteq X$ alt kümelerinden oluşan keyfi A ailesi için $infA = \bigcap_A S_\alpha$ ve $supA = \bigcup_A S_\alpha$ dır.

Tanım 1.20. [5] L bir kafes ve $X \subseteq L$ olsun. X alt kümesine L kafesinin bir alt kafesidir denir:$\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$ için $a \wedge b \in X$ ve $a \vee b \in X$ dir.

Bir kafeste boş küme ve tek elemanlı alt kümeler alt kafestir. Daha genel olarak, $(L, \leq)$ bir kafes ve $a, b \in L$ için $a \leq b$ ise

$$[a, b] \coloneqq \{x \in L | a \leq x \leq b\}$$

ile tanımlanan $[a, b]$ kapalı aralığı bir alt kafestir.

Benzer şekilde L kafesinin

$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}] \coloneqq \{x \in L | a < x \leq b\},$$

$$[\mathrm{a}, \mathrm{b}) \coloneqq \{x \in L | a \leq x < b\},$$

ve

$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \coloneqq \{x \in L | a < x < b\}$$

alt aralıkları da tanımlanabilir.

Tanım 1.21. [5] $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. P ve Q kısmen sıralı kümelerinin

$$P \times Q = \{(x, y) | x \in P, y \in Q\}$$

şeklinde tanımlanan $P \times Q$ kartezyen çarpım kümesi

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2 \text{ ve } y_1 \leq_2 y_2 \quad x_1, x_2 \in P,\ \ y_1, y_2 \in Q$$

bağıntısı altında kısmen sıralı bir kümedir. Bu $(P \times Q, \leq)$ kısmen sıralı kümesine P ve Q kısmen sıralı kümelerinin direkt çarpım kümesi denir.

Teorem 1.22. [5] L ve M iki kafes olsun. $L \times M$ direkt çarpımı da yine bir kafestir. Burada $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L \times M$ için

$$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$$

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2)$$

dır.

Bir kafeste $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri önemli cebirsel özelliklere sahiptir.

Lemma 1.23. [5] P kısmen sıralı bir küme olsun. İnfimum ve supremum işlemleri (eğer mevcutsa) aşağıdaki özelliklere sahiptir:

L1. $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x,$ (İdempotent)

L2. $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x,$ (Komütatif)

L3. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$ (Birleşme)

L4. $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x.$ (Yok etme)

Üstelik $x \leq y$ ifadesi $x \wedge y = x$ ve $x \vee y = y$ şartlarının her birine denktir.

Lemma 1.24. [5] P, 0 en küçük elemanına sahip kısmen sıralı bir küme ise her $x \in P$ için

$0 \wedge x = 0$ ve $0 \vee x = x$

dir. Dual olarak P, 1 evrensel üst sınırına sahip ise her $x \in P$ için

$x \wedge 1 = x$ ve $x \vee 1 = 1$

dir.

Lemma 1.25. [5] Herhangi bir kafeste infimum ve supremum işlemleri sıra korurdur. Yani bir L kafesinde $x, y, z \in L$ için

$y \leq z$ ise $x \wedge y \leq x \wedge z$ ve $x \vee y \leq x \vee z,$

sağlanır.

Lemma 1.26. [5] L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için

$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

eşitsizlikleri sağlanır.

Sonuç 1.27. [5] P kısmen sıralı bir küme ve P de alınan herhangi iki elemanın infimumu mevcut olsun. Bu takdirde, P, $\wedge$ ikili işlemine göre bir yarı kafestir. Böyle yarı kafeslere infimum-yarı kafesler denir. Dual olarak, P kısmen sıralı kümesinde alınan herhangi iki elemanın supremumu mevcut ise P, $\vee$ ikili işlemine göre bir yarı kafestir. Böyle yarı kafeslere supremum-yarı kafesler denir.

1.3. Birleştirme Fonksiyonları

Tanım 1.28. [16] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $H: L^2 \longrightarrow L$ fonksiyonuna L üzerinde birleştirme fonksiyonu denir:

(i) Her bir değişkene göre azalmayandır. ($(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in L^2$ ve $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$ iken $H(x_1, x_2) \leq H(y_1, y_2)$ dir.)

(ii) Sınır koşullarını sağlar, yani $H(0,0) = 0$ ve $H(1,1) = 1$ dir.

Özel olarak L sınırlı kafesi $L = [0,1]$ olarak seçilirse bu tanımdan $[0,1]$ üzerinde birleştirme fonksiyonlarının tanımı elde edilir.

Üstelik, $H: L^2 \longrightarrow L$ komutatif ise yani her $(x, y) \in L^2$ için $H(x, y) = H(y, x)$ ise H simetrik birleştirme fonksiyonu olarak adlandırılır.

H_1 ve H_2 iki birleştirme fonksiyonu olsun. Eğer her $x, y \in L$ için $H_1(x, y) \leq H_2(x, y)$ eşitsizliği sağlanıyor ise H_1, H_2 birleştirme fonksiyonundan daha zayıftır denir ve bu durum $H_1 \leq H_2$ ile gösterilir. $H_1 \leq H_2$ ve $H_1 \neq H_2$ ise yani $H_1 \leq H_2$ ve bir $x_0, y_0 \in L$ için $H_1(x_0, y_0) < H_2(x_0, y_0)$ ise, bu durum $H_1 < H_2$ ile gösterilir.

Örnek 1.29. [16]

(i) $AM^{(2)}(x_1, x_2) := \frac{x_1 + x_2}{2}$ ile tanımlanan aritmetik ortalama $[0,1]$ birim aralığı üzerinde birleştirme fonksiyonudur.

(ii) $P_1(x_1, x_2) := x_1$ $(P_2(x_1, x_2) := x_2)$ şeklinde tanımlanan $P_1, P_2: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ projeksiyon fonksiyonları birer birleştirme fonksiyonlarıdır.

(iii) L keyfi sınırlı bir kafes olmak üzere L üzerinde en küçük ve en büyük birleştirme fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$H_*(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y = 1 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$H^*(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y = 0 \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Tanım 1.30. [28] Bir $F: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonuna süreklidir denir:$\Leftrightarrow$ Her yakınsak $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizileri için

$$F\left(\lim_{n \to \infty} x_n, \lim_{n \to \infty} y_n\right) = \lim_{n \to \infty} F(x_n, y_n)$$

dir.

1.4. Üçgensel Normlar ve Konormlar

1.4.1. $[0,1]$ Üzerinde Üçgensel Normlar

Aksi belirtilmedikçe, $[0,1]$ üzerindeki doğal sıralama $\leq$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.31. [28] Bir üçgensel norm (kısaca t-norm) T, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir ikili işlemdir; yani $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu her $x, y, z \in [0,1]$ için

T1. $T(x,y) = T(y,x)$ (Komütatiflik)

T2. $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$ (Birleşme)

T3. $y \leq z$ ise $T(x,y) \leq T(x,z)$ (Monotonluk)

T4. $T(x,1) = x$ (Sınır şartı)

özelliklerini sağlar.

Örnek 1.32. [28] T_M, T_P, T_L, T_D ve T^{nM} temel t-normları aşağıdaki gibi verilir:

$T_M(x,y) = min(x,y)$ (Minimum)

$T_P(x,y) = xy$ (Çarpım)

$T_L(x,y) = max(x+y-1, 0)$ (Lukasiewicz t-norm)

$$T_D(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in [0,1)^2 \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$ (Drastik çarpım)

$$T^{nM}(x,y) = \begin{cases} 0, & x+y \leq 1 \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$ (Nilpotent Minimum)

Uyarı 1.33. [28] T, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde bir t-norm olsun.

(i) Tanım 1.31 den dolayı her T t-normu her $x \in [0,1]$ için

$T(0,x) = T(x,0) = 0$

$T(1,x) = x$

eşitliklerini sağlar.

(ii) Bir T t-normunun ikinci bileşene göre monotonluğu, (T1) komütatiflik ve (T3) monotonluk özellikleri ile tanımlanır. Bu monotonluk her iki bileşene göre monotonluğa denktir; yani

$x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ ise $T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2)$

sağlanır.

1.4.2. $[0,1]$ Üzerinde Üçgensel Konormlar

Tanım 1.34. [28] Bir üçgensel konorm (veya kısaca t-konorm) S, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde her $x,y,z \in [0,1]$ için (T1)-(T3) şartlarını ve her $x \in [0,1]$ için

(S4) $S(x,0) = x$ (Sınır şartı)

şartını sağlayan $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonudur.

Aksiyomatik olarak t-normlar ve t-konormlar sadece sınır şartlarında farklılık gösterirler.

Örnek 1.35. [28] S_M, S_p, S_L ve S_D temel t-konormları sırası ile

$S_M(x,y) = max(x,y)$ (Maksimum)

$S_P(x,y) = x + y - xy$ (Probalistic toplam)

$S_L(x,y) = min(x+y,1)$ (Lukasiewicz t-konorm)

$$S_D(x,y) = \begin{cases} 1 & ,(x,y) \in (0,1)^2 \\ max(x,y) & ,\text{aksi halde} \end{cases}$$ (Drastik toplam)

şeklinde tanımlanır.

Önerme 1.36. [28] $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-konormdur $\Leftrightarrow$ Her $x,y \in [0,1]$ için

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$$

olacak şekilde bir T t-normu mevcuttur.

Uyarı 1.37. [28]

(i) $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir t-konorm ise

$$T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y)$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur ve S t-konormunun dual t-normu denir. Benzer şekilde Önerme 1.36. da verilen $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu da T t-normunun dual t-konormudur.

(ii) (T_M, S_M), (T_P, S_P), (T_L, S_L) ve (T_D, S_D) ikişer tarzda birbirine dual t-norm ve t-konorm çiftleridir.

(iii) $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir t-konorm olsun. Her $x \in [0,1]$ için

$S(1,x) = S(x,1) = 1$

$S(0,x) = x$

ilave sınır şartları olarak adlandırılan eşitlikler sağlanır. Böylece, tüm t-konormlar $[0,1]^2$ sınırı üzerinde çakışıktır, yani aynı değeri alırlar.

1.4.3. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar(Konormlar) ve Negasyonlar

Tanım 1.38. [23] L sınırlı bir kafes olsun. Bir üçgensel norm T (kısaca t-norm) L üzerinde komütatiflik, birleşme, monotonluk özelliklerini sağlayan 1- birim elemanlı bir ikili işlemdir.

Uyarı 1.39. [23]

(i) T_1 ve T_2 sınırlı bir L kafesi üzerinde iki t-norm olsun. Eğer her $(x,y) \in L^2$ için $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ eşitsizliği sağlanıyor ise T_1, T_2 t-normundan daha zayıftır veya denk olarak T_2, T_1 t-normundan daha güçlüdür denir ve bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

(ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise yani $T_1 \leq T_2$ ve bir $(x_0, y_0) \in L^2$ elemanı için $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ ise, bu durum $T_1 < T_2$ ile gösterilir.

$$T_W(x,y) = \begin{cases} x\,, & y = 1, \\ y\,, & x = 1, \\ 0\,, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olsun. O halde T_W, L üzerinde bir t-normdur ve özel olarak $L = [0,1]$ olduğunda T_W, T_D ile gösterilir. L üzerindeki keyfi t-norm T için $T_W \leq T$ olduğundan bu t-norm, L üzerindeki en küçük t-normdur.

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki en büyük t-norm $T_\wedge(x,y) = x \wedge y$ ile verilir ve özel olarak $L = [0,1]$ olduğunda $T_\wedge = T_M$ dir.

Tanım 1.40. [23] L sınırlı bir kafes olsun. Bir üçgensel konorm S (kısaca t-konorm) L üzerinde komütatif, birleşme, monoton özelliklerini sağlayan 0- birim elemanlı bir ikili işlemdir.

Örnek 1.41. [23] Aşağıda, L sınırlı kafesi üzerinde t-konorm örnekleri verilmiştir:

$S_\vee(x,y) = x \vee y$, L üzerindeki herhangi t-konorm S için $S_\vee \leq S$ dir.

$$S_W(x,y) = \begin{cases} x\,, & y = 0, \\ y\,, & x = 0, \\ 1\,, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

L üzerindeki herhangi t-konorm S için $S \leq S_W$ dir.

Tanım 1.42. [23]

(i) Sınırlı bir L kafesi üzerindeki bir t-norm T ye (bir t-konorm S ye) $\vee$- dağılmalıdır denir :⟺ Her $a, b_1, b_2 \in L$ için

$$T(a, b_1 \vee b_2) = T(a, b_1) \vee T(a, b_2) \; \big(S(a, b_1 \vee b_2) = S(a, b_1) \vee S(a, b_2)\big)$$

eşitliği sağlanır.

(ii) Sınırlı bir L kafesi üzerindeki bir t-norm T ye (bir t-konorm S ye) sonsuz $\vee$-dağılmalıdır denir :⟺ Her $a \in L$ ve L nin $\{b_i : i \in \mathrm{I}\}$ alt kümesi için

$$T(a, \vee_{i\in \mathrm{I}} b_i) = \vee_{i\in \mathrm{I}} T(a, b_i) \quad (\; S(a, \vee_{i\in \mathrm{I}} b_i) = \vee_{i\in \mathrm{I}} S(a, b_i) \;)$$

eşitliği sağlanır.

(iii) (Sonsuz) $\wedge$-dağılmalı t-norm (t-konorm) benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 1.43. [21] Sınırlı bir L kafesi üzerindeki bir t-norm T ye bölünebilirdir denir :⟺ $x \leq y$ olan her $x, y \in L$ için $x = T(y, z)$ olacak şekilde bir $z \in L$ mevcuttur.

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki T_W t-normu bölünebilir olmayan bir t-normdur. Diğer taraftan, $T_\wedge$ infimum t-normu bölünebilir bir t-normdur: $x \leq y$ olması $x \wedge y = x$ olmasına denktir.

Önerme 1.44. [9] T, $L = [0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun. T bölünebilirdir ⟺ T süreklidir.

Tanım 1.45. [3] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. $N: L^2 \to L$ azalan (yani $x, y \in L$ ve $x \leq y$ iken $N(y) \leq N(x)$) fonksiyonu $N(0) = 1$ ve $N(1) = 0$ koşullarını sağlıyorsa N ye L üzerinde bir negasyon adı verilir. $N: L \to L$ negasyonu L nin her x elemanı için $N\big(N(x)\big) = x$ koşulunu sağlıyorsa N ye L üzerinde güçlü negasyon denir.

Tanım 1.46. [3] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olmak üzere T, L üzerinde bir t-norm ve N, L üzerinde bir güçlü negasyon olsun. $x, y \in L$ için

$$S(x, y) := N\Big(T\big(N(x), N(y)\big)\Big)$$

olarak tanımlanan S operatörü bir t-konormdur ve bu T nin N dual t-conormu olarak adlandırılır.

Önerme 1.47. [36]. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $a \in L \backslash \{0,1\}$, $V: [a, 1]^2 \to [a, 1]$ bir t-norm, $Y: [0, a]^2 \to [0, a]$ bir t-konorm olsun. L üzerinde, V nin T ye (Y nin S ye) ordinal toplam genişlemesi aşağıdaki gibidir:

$$T(x, y) = \begin{cases} V(x, y), & (x, y) \in [a, 1]^2 \\ x \wedge y, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$(S(x,y)=\begin{cases} Y(x,y), & (x,y)\in[0,a]^2 \\ x\vee y, & \text{aksi takdirde}\end{cases})$$

Bu şekilde tanımlanan ordinal toplam genişlemeleri her sınırlı kafes üzerinde her t-norm (t-konorm) için bir t-norm (t-konorm) üretmemektedir. Aynı çalışmada bu şekilde tanımlanan genişlemelerin hangi tip kafesler üzerinde bir t-norm olabileceği veya hangi V t-normları (Y t-konormları) için bu genişlemelerin bir t-norm (t-konorm) olabileceği tartışılmıştır.

1.5. Nullnormlar

Tanım 1.48. [20] Bir nullnorm $(L,\leq,0,1)$ sınırlı kafesi üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur; yani $V: L^2 \longrightarrow L$ fonksiyonuna bir nullnorm denir : $\Leftrightarrow$

Her $x,y,z\in L$ için

V1. $V(x,y)=V(y,x)$ (Komütatiflik)

V2. $V(x,V(y,z))=V(V(x,y),z)$ (Birleşme)

V3. $y\leq z$ ise $V(x,y)\leq V(x,z)$ (Monotonluk)

V4. $x\leq a$ ise $V(x,0)=x$ ve $x\geq a$ ise $V(x,1)=x$ olacak şekilde bir $a\in L$ mevcuttur.

Herhangi $x\in L$ elemanı için monotonluk kullanılırsa $V(x,a)\leq V(1,a)=a$ ve $V(x,a)\geq V(0,a)=a$ olup $V(x,a)=a$ olduğu elde edilir. Böylece $a\in L$ elemanı V için bir "sıfır" ("yutan" veya "abzörve") elemandır.

Benzer şekilde, L sınırlı bir kafes ve H, L üzerinde bir birleştirme fonksiyonu olmak üzere her $x\in L$ eleman için $H(x,a)=H(a,x)=a$ eşitliğini sağlayan $a\in L$ elemanı, H için bir "sıfır" ("yutan" veya "abzörve") eleman olarak tanımlanır.

1.6. Uninormlar

1.6.1. $[0,1]$ Üzerinde Uninormlar

Tanım 1.49. [41] Bir uninorm $U:[0,1]^2\longrightarrow[0,1]$, birim aralık üzerinde komütatiflik, birleşme ve monotonluk özelliklerini sağlayan, $e\in[0,1]$ birim elemanlı ($[0,1]$ in her x elemanı için $U(e,x)=x$) bir ikili işlemdir.

Dikkat edilirse uninormlar, $e = 1$ için t-normlarla ve $e = 0$ için t-konormlarla çakışır.

Örnek 1.50. [15] Aşağıdaki şekilde tanımlanan $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e = 1/2$ birim elemanlı bir uninormdur:

$$U(x,y) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ veya } y = 0 \text{ ise} \\ \frac{xy}{(1-x)(1-y)+xy}, & x > 0 \text{ ve } y > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Tanım 1.51. [15] U, $[0,1]$ üzerinde $e \in (0,1)$ birim elemanlı bir uninorm olsun. U, $[0,1]^2 \backslash \{(0,1),(1,0)\}$ üzerinde sürekli ise U ya hemen hemen sürekli denir.

Tanım.1.52. [4] $u: [0,1]^2 \to [-\infty, +\infty]$, $u(0) = -\infty$, $u(1) = +\infty$ ve $e \in (0,1)$ için $u(e) = 0$ olacak şekilde birebir örten ve kesin artan bir fonksiyon olsun.

(i) $U(x,y) = \begin{cases} u^{-1}\big(u(x) + u(y)\big), & (x,y) \in [0,1]^2 \backslash \{(0,1),(1,0)\} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$

olarak verilen $U: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu e birim elemanlı bir uninormdur ve konjanktif (yani $U(0,1) = 0$) representable uninorm olarak adlandırılır.

(ii) $U(x,y) = \begin{cases} u^{-1}\big(u(x) + u(y)\big), & (x,y) \in [0,1]^2 \backslash \{(0,1),(1,0)\} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$

olarak verilen $U: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu e birim elemanlı bir uninormdur ve disjanktif (yani $U(0,1) = 1$) representable uninorm olarak adlandırılır.

Teorem 1.53. [**14**] $e \in (0,1)$ birim elemanlı bir U uninormu representable (temsil edilebilir)dir ancak ve ancak U, $[0,1]^2 \backslash \{(0,1),(1,0)\}$ üzerinde süreklidir.

Tanım 1.54. [15] U, $[0,1]$ üzerinde $e \in (0,1)$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan T_U ve S_U sırasıyla bir t-norm ve t-konormdur ayrıca sırasıyla U nun belirlediği t-norm ve U nun belirlediği t-konorm olarak adlandırılırlar:

$$T_U(x,y) := \frac{U(ex, ey)}{e}, \qquad x, y \in [0,1]$$

$$S_U(x,y) := \frac{U(e + (1-e)x, e + (1-e)y) - e}{1-e}, \qquad x, y \in [0,1].$$

U, $[0,1]$ üzerinde $e \in (0,1)$ birim elemanlı bir uninorm olmak üzere, U uninormu $[0,e]^2$ üzerinde T_U t-normu ile, $[e,1]^2$ üzerinde S_U t-konormu ile belirlenir ([14]).

Önerme 1.55. [15] $U: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu, $e \in (0,1)$ birim elamanlı bir uninorm olsun. U hemen hemen sürekli ise T_U ve S_U süreklidir.

Aşağıda görülebileceği gibi, $[0,1]$ birim reel aralığı üzerinde tanımlı $e \in (0,1)$ birim elemanlı U uninormu, t-norm, t-conorm ve simetrik birleştirme fonksiyonları yardımıyla karakterize edilmiştir ([16]):

Önerme 1.56. [16]. $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $[0,1]$ üzerinde $e \in (0,1)$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Her $(x, y) \in [0,1]^2$ için

$$U(x,y) = \begin{cases} T(x,y), & (x,y) \in [0,e]^2 \\ S(x,y), & (x,y) \in [e,1]^2 \\ H(x,y), & \text{aksi takdirde} \end{cases} \qquad (1)$$

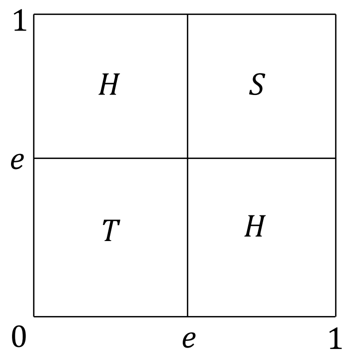
olacak şekilde T bir t-norm, S bir t-konorm ve H simetrik birleştirme fonksiyonu olmak üzere $T, S, H: [0,1]^2 \to [0,1]$ mevcuttur:

$$T(x,y) = \begin{cases} U(x,y), & (x,y) \in [0,e]^2 \\ Min(x,y), & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$S(x,y) = \begin{cases} U(x,y), & (x,y) \in [e,1]^2 \\ Mak(x,y), & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$H(x,y) = \begin{cases} Min(x,y), & (x,y) \in [0,e]^2 \\ Mak(x,y), & (x,y) \in [e,1]^2 \\ U(x,y), & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

[0,1] üzerinde uninormların karakterizasyonu aşağıdaki gibi temsil edilebilir:



Şekil 1.2. [0,1] üzerinde uninormların karakterizasyonu

1.6.2. Sınırlı Kafesler Üzerinde Uninormlar

Tanım 1.57. [22] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. Bir uninorm $U: L^2 \longrightarrow L$, komütatiflik, birleşme ve monotonluk özelliklerini sağlayan, $e \in L$ birim elemanlı (L nin her x elemanı için $U(e, x) = x$) bir ikili işlemdir.

Önerme 1.58. [22] $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve U, L üzerinde $e \in L \backslash \{0,1\}$ birimli bir uninorm olsun. O halde, aşağıdakiler sağlanır:

(i) Her $(x,y) \in (0,e]\times[e,1) \cup [e,1)\times(0,e]$ için $x \wedge y \leq U(x,y) \leq x \vee y$.

(ii) Her $(x,y) \in L\times[0,e]$ için $U(x,y) \leq x$.

(iii) Her $(x,y) \in [0,e]\times L$ için $U(x,y) \leq y$.

(iv) Her $(x,y) \in L\times[e,1]$ için $x \leq U(x,y)$.

(v) Her $(x,y) \in [e,1]\times L$ için $y \leq U(x,y)$

Tanım 1.59. [16] U, L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm olsun. $U(x,x) = x$ olan bir $x \in L$ ye U nun bir idempotent elemanı denir.

U uninormunun (sırasıyla, bir T t-normunun, bir S t-konormunun) tüm idempotent elemanlarının kümesi H_U (sırasıyla, H_T, H_S) ile gösterilecektir.

Tanımlı olduğu küme üzerinde, her elemanı bir idempotent eleman olan bir ikili işleme de idempotent ikili işlem denir.

Uyarı.1.60. [7] U, $[0,1]$ üzerinde $e \in (0,1)$ birim elemanlı bir uninorm olsun. U representable ise U idempotent olamaz.

Önerme 1.61. [22] $(L,\leq,0,1)$ sınırlı bir kafes ve U, L üzerinde $e \in L$ birimli bir uninorm olsun. O halde,

(i) $T^* = U \downarrow [0,e]^2 : [0,e]^2 \to [0,e]$, $[0,e]$ üzerinde bir t-normdur.

(ii) $S^* = U \downarrow [e,1]^2 : [e,1]^2 \to [e,1]$, $[e,1]$ üzerinde bir t-konormdur.

Teorem 1.62. [22] $(L,\leq,0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L\setminus\{0,1\}$ olsun. T_e, $[0,e]^2$ üzerinde bir t-norm ve S_e $[e,1]^2$ üzerinde bir t-konorm olmak üzere L kafesi üzerinde $U_t, U_s : L^2 \to L$ uninormları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$U_t(x,y) = \begin{cases} T_e(x,y) & ,(x,y) \in [0,e]^2 \\ x \vee y & ,(x,y) \in [0,e]\times(e,1] \cup (e,1]\times[0,e] \\ y & ,(x,y) \in [0,e]\times I_e \\ x & ,(x,y) \in I_e\times[0,e] \\ 1 & ,\text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$U_s(x,y) = \begin{cases} S_e(x,y) & ,(x,y) \in [e,1]^2 \\ x \wedge y & ,(x,y) \in [0,e)\times[e,1] \cup [e,1]\times[0,e) \\ y & ,(x,y) \in [e,1]\times I_e \\ x & ,(x,y) \in I_e\times[e,1] \\ 0 & ,\text{aksi takdirde} \end{cases}$$

1.6.3 n-Uninormlar

2-uninorm ilk olarak Akella tarafından [1] ile verilen kaynakta sunulmuştur. 2-uninormlar uninormları ve nullnormları kapsayan bir genelleme olmasından dolayı önemlidir. Aynı çalışmada Akella, bu tanımı n-uninormlara genelleştirmiştir.

Tanım 1.63. [1] $(L, \leq, 0\,, 1)$ bir zincir olsun. Bir 2-uninorm $F: L^2 \longrightarrow L$, birim aralık üzerinde komütatiflik, birleşme, monotonluk özelliklerini sağlayan ve $0 \leq e \leq k \leq f \leq 1$ şartını sağlayan $e, k, f \in L$ için

$x \leq k$ olan her $x \in L$ için $F(e, x) = x$ ve $x \geq k$ olan her $x \in L$ için $F(f, x) = x$ özelliklerini sağlayan bir ikili işlemdir.

Tüm 2-uninormların sınıfı $U_{k(e,f)}$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.64. [1] $(L, \leq, 0\,, 1)$ bir zincir ve G, L üzerinde komutatif bir ikili işlem olsun. $0 = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = 1$ ve $i = 1,2, \dots, n$ için $e_i \in [z_{i-1}, z_i]$ olmak üzere her $x \in [z_{i-1}, z_i]$ için $G(e_i, x) = x$ sağlanıyorsa $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}_{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}}$ e, G nin n-birim elemanı denir.

Tanım 1.65. [1] L zinciri üzerinde tanımlı ve U^n ile temsil edilen, komutatiflik birleşme, monotonluk özelliklerini sağlayan ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}_{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}}$ birim elemanlı ikili işlemine bir n-uninorm denir.

1.7. $\leq_T$ -Üçgensel Sıralama

Tanım 1.66. [21] L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. T-norm T için T-kısmen sıra (üçgensel sıra) aşağıdaki gibi tanımlanır ve $\leq_T$ ile gösterilir:

$x \leq_T y :\Leftrightarrow T(\ell, y) = x$ olacak şekilde bir $\ell \in L$ elemanı mevcuttur.

Dual olarak S-kısmen sıra şu şekilde tanımlanır:

Tanım 1.67. [21] L sınırlı bir kafes ve S, L üzerinde bir t-konorm olsun. S-konorm S için S-kısmen sıra aşağıdaki gibi tanımlanır ve $\leq_S$ ile gösterilir:

$x \leq_S y :\Leftrightarrow S(\ell, x) = y$ olacak şekilde bir $\ell \in L$ elemanı mevcuttur.

Önerme 1.68. [21]. L sınırlı bir kafes ve T L üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde, $(L, \leq_T)$ kısmen sıralı bir kümedir.

Önerme 1.69. [21]. $(L, \leq)$ sınırlı bir kafes, T L üzerinde bir t-norm ve $\leq_T$, t-norm T' den elde edilen kısmen sıralama olsun. Eğer $x \leq_T y$ ise $x \leq y$, yani $\leq_T \subseteq \leq$' dir.

Önerme 1.70. [21]. L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. $\leq_T$ ile $\leq$ sıralamalarının eşit olması için gerek ve yeter şart T t-normunun L üzerinde bölünebilir bir t-norm olmasıdır.

Önerme 1.71. [21] L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Eğer $a, b \in L$ için $a \leq_T b$ ise her $c \in L$ için

$$T(a,c) \leq_T T(b,c)$$

dir.

Önerme 1.72. [21] L sınırlı bir kafes olsun. Eğer $T = T_W$ ise keyfi $a \in L \setminus \{0,1\}$ ve $\forall b \in L \setminus \{0,1,a\}$ için $a \wedge_{T_W} b = 0$ ve $a \vee_{T_W} b = 1$ dir. Böylece $\left(L, \leq_{T_W}\right)$ bir kafestir.

Teorem 1.73. [21] L bir tam kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. T sonsuz $\vee$-dağılmalı t-norm ise $(H_T, \leq_T)$ bir tam kafestir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölüm, her biri iki alt bölümden oluşan iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde sınırlı kafesler üzerinde uninormların karakterizasyonu ve bazı uninorm inşa metotları üzerinde durulmuştur. İkinci bölümde bir uninormdan elde edilen kısmen sıralama tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. İlaveten, bu sıralama 2-uninormlara genişletilerek üçgensel normlardan (konormlardan), nullnormlardan ve uninormlardan elde edilen sıralama ile bağlantısı kurulmuştur. Ardından daha genel olarak n-uninormlar için de ifade edilmiştir.

2.1. Sınırlı Kafesler Üzerinde Uninormların Karakterizasyonu ve Bazı İnşa Metotları

Bu bölüm iki alt bölüme ayrılmıştır. Birinci bölümde, sınırlı kafesler üzerinde uninormların bir karakterizasyonu verilmiştir. Ayrıca bu karakterizasyon yardımıyla ordinal toplam inşasından farklı olarak, herhangi bir sınırlı kafes üzerinde geçerli, t-norm (t-konorm) inşa metodu verilmiştir. İkinci bölümde ise Teorem 1.62 ([22]) de göz önüne alınarak uninormların karakterizasyonu yardımıyla uninormların inşası için yeni yöntemler önerilmiştir.

2.1.1. Sınırlı Kafesler Üzerinde Uninormların Karakterizasyonu

Sınırlı kafesler durumu $[0,1]$ birim reel aralık durumunu da kapsayan çok daha genel bir durumdur. Önerme 1.56 ([16]) ile verilen, birim reel aralık üzerinde uninormların karakterizasyonundan yola çıkılarak, $[0,1]$ birim reel aralık durumuna indirgendiğinde literatürdeki mevcut karakterizasyonla çakışacak şekilde keyfi sınırlı kafesler üzerinde uninormların bir karakterizasyonunu önermek bu bölümün temel motivasyon kaynağıdır.

Teorem 2.2. $(L, \leq, 0,1)$ keyfi sınırlı bir kafes ve $U: L^2 \to L,\ e \in L \setminus \{0,1\}$ birim elemanlı bir uninorm olsun. O halde, L üzerinde T bir t-norm, S bir t-konorm ve H_1, H_2, H_3, H_4 fonksiyonları simetrik birleştirme fonksiyonları olmak üzere,

$$U(x,y)=\begin{cases} T(x,y) & ,(x,y)\in[0,e]^2 \\ S(x,y) & ,(x,y)\in[e,1]^2 \\ H_1(x,y) & ,(x,y)\in[0,e)\times(e,1]\cup(e,1]\times[0,e) \\ H_2(x,y) & ,(x,y)\in[0,e)\times \mathrm{I}_e\cup \mathrm{I}_e\times[0,e) \\ H_3(x,y) & ,(x,y)\in(e,1]\times \mathrm{I}_e\cup \mathrm{I}_e\times(e,1] \\ H_4(x,y) & ,\text{aksi takdirde} \end{cases} \qquad (2)$$

olacak şekilde $T,S,H_1,H_2,H_3,H_4 \colon L^2 \to L$ fonksiyonları mevcuttur ve sırasıyla şu şekilde verilirler:

$$T(x,y)=\begin{cases} U(x,y) & ,(x,y)\in[0,e]^2 \\ U(x\wedge e,y\wedge e) & ,(x,y)\in {\mathrm{I}_e}^2 \\ U(x,y\wedge e) & ,(x,y)\in[0,e]\times \mathrm{I}_e \\ U(x\wedge e,y) & ,(x,y)\in\times \mathrm{I}_e\times[0,e] \\ y\wedge e & ,(x,y)\in(e,1)\times \mathrm{I}_e \\ x\wedge e & ,(x,y)\in\ \mathrm{I}_e\times(e,1) \\ x\wedge y & ,\text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$S(x,y)=\begin{cases} U(x,y) & ,(x,y)\in[e,1]^2 \\ U(x\vee e,y\vee e) & ,(x,y)\in {\mathrm{I}_e}^2 \\ U(x,y\vee e) & ,(x,y)\in[e,1]\times \mathrm{I}_e \\ U(x\vee e,y) & ,(x,y)\in\times \mathrm{I}_e\times[e,1] \\ y\vee e & ,(x,y)\in(0,e)\times \mathrm{I}_e \\ x\vee e & ,(x,y)\in\ \mathrm{I}_e\times(0,e) \\ x\vee y & ,\text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$H_1(x,y)=\begin{cases} U(x,y) & ,(x,y)\in[0,e)\times(e,1]\cup(e,1]\times[0,e) \\ x\wedge y & ,(x,y)\in[0,e]^2\cup[0,e)\times \mathrm{I}_e\cup \mathrm{I}_e\times[0,e) \\ x\vee y & ,(x,y)\in[e,1]^2\cup(e,1]\times \mathrm{I}_e\cup \mathrm{I}_e\times(e,1] \\ e & ,\text{aksi takdirde} \end{cases}$$

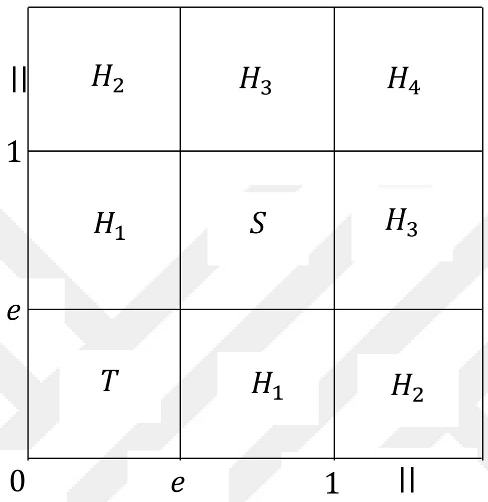
$$H_2(x,y)=\begin{cases} U(x,y) & ,(x,y)\in[0,e)\times \mathrm{I}_e\cup \mathrm{I}_e\times[0,e) \\ 0 & ,(x,y)\in[0,e]^2 \\ 1 & ,(x,y)\in(e,1]^2 \\ x\vee y & ,\text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$H_3(x,y)=\begin{cases} U(x,y) & ,(x,y)\in(e,1]\times \mathrm{I}_e\cup \mathrm{I}_e\times(e,1] \\ 0 & ,(x,y)\in[0,e]^2 \\ 1 & ,(x,y)\in(e,1]^2 \\ x\wedge y & ,\text{aksi takdirde} \end{cases}$$

ve

$$H_4(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & ,(x,y) \in [0,e) \times (e,1] \cup (e,1] \times [0,e) \\ 0 & ,(x,y) \in [0,e]^2 \cup [0,e) \times \mathrm{I}_e \cup \mathrm{I}_e \times [0,e) \\ 1 & ,(x,y) \in (e,1]^2 \cup (e,1] \times \mathrm{I}_e \cup \mathrm{I}_e \times (e,1] \\ U(x,y) & ,\text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

İspat: Önerme 1.56 (1) temel alınarak, Teorem 2.2. den L sınırlı kafesi üzerinde bir uninormun yapısı aşağıdaki gibi temsil edilebilir:

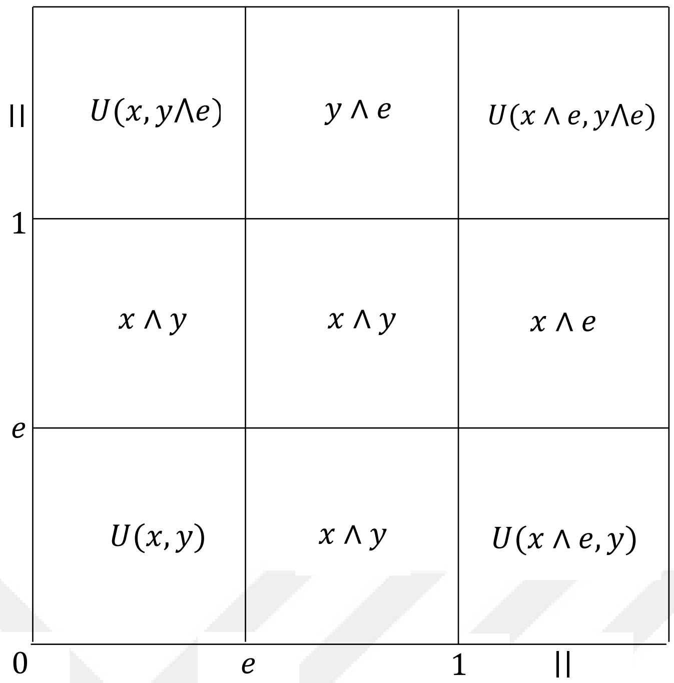


Şekil 2.1. Sınırlı kafes üzerinde uninormun karakterizasyonu

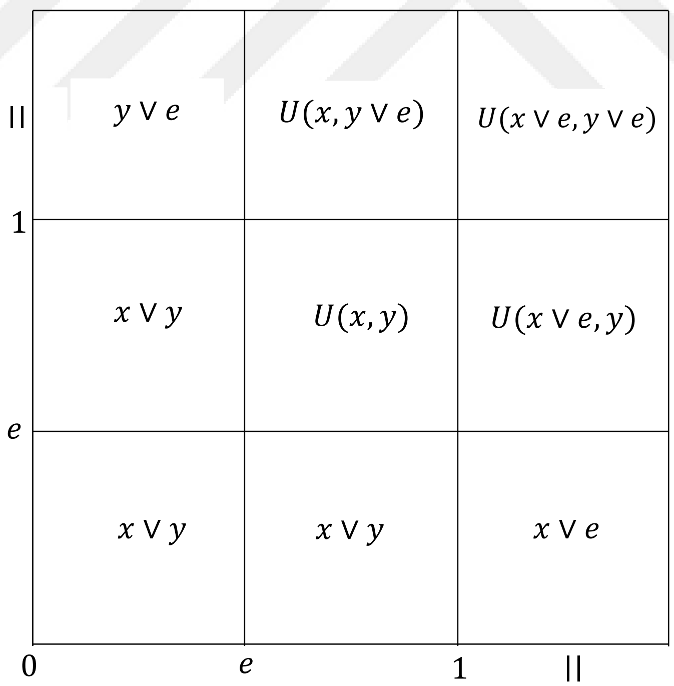
T nin L üzerinde bir t-norm, S nin L üzerinde bir t-konorm ve H_1, H_2, H_3, H_4 lerin simetrik birleştirme fonksiyonları olduğu gösterilmelidir.

İlk olarak, T nin bir t-norm olduğu gösterilecektir. S nin bir t-konorm olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

T-norm T ve t-konorm S aşağıdaki gibi temsil edilebilir:



Şekil 2.2. T t-normu



Şekil 2.3. S t-konormu

i) Monotonluk: $x \leq y$ olacak şekildeki $x, y \in L$ ve her $z \in L$ için $T(x, z) \leq T(y, z)$ olduğu gösterilmelidir. İspat, x, y, z elemanlarının e elemanıyla ilişkilerinin tüm olası durumları göz önüne alınarak aşağıdaki şekilde maddeler halinde yapılmıştır.

1. $x \leq e$

1.1. $y \leq e$

1.1.1. $z \leq e$

$$T(x,z) = U(x,z) \leq U(y,z) = T(y,z)$$

1.1.2. $e < z \leq 1$

$$T(x,z) = x \leq y = T(y,z)$$

1.1.3. $z \parallel e$

$$T(x,z) = U(x, z \wedge e) \leq U(y, z \wedge e) = T(y,z)$$

1.2. $e < y < 1$

1.2.1. $z \leq e$

$$T(x,z) = U(x,z) \leq z = y \wedge z = T(y,z)$$

1.2.2. $e < z < 1$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

1.2.3. $z = 1$

$$T(x,z) = x \leq y = T(y,z)$$

1.2.4. $z \parallel e$

$$T(x,z) = U(x, z \wedge e) \leq z \wedge e = T(y,z)$$

1.3. $y = 1$

1.3.1. $z \leq e$

$$T(x,z) = U(x,z) \leq z = T(y,z)$$

1.3.2. $e < z < 1$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq z = T(y,z)$$

1.3.3. $z = 1$

$$T(x,z) = x \leq 1 = T(y,z)$$

1.3.4. $z \parallel e$

$$T(x,z) = U(x, z \wedge e) \leq z = T(y,z)$$

1.4. $y \parallel e$

1.4.1. $z \leq e$

$$T(x,z) = U(x,z) \leq U(y \wedge e, z) = T(y,z)$$

1.4.2. $e < z < 1$

$$T(x,z) = x \wedge z = x \leq y \wedge e = T(y,z)$$

1.4.3. $z = 1$

$T(x,z) = x \leq y = T(y,z)$

1.4.4. $z \parallel e$

$T(x,z) = U(x, z \wedge e) \leq U(y \wedge e, z \wedge e) = T(y,z)$

2. $e < x < 1$

2.1. $e < y < 1$

2.1.1. $z \leq e$

$T(x,z) = x \wedge z = z = y \wedge z = T(y,z)$

2.1.2. $e < z < 1$

$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$

2.1.3. $z = 1$

$T(x,z) = x \leq y = T(y,z)$

2.1.4. $z \parallel e$

$T(x,z) = z \wedge e = T(y,z)$

2.2. $y = 1$

2.2.1. $z \leq e$

$T(x,z) = x \wedge z = z = T(y,z)$

2.2.2. $e < z < 1$

$T(x,z) = x \wedge z \leq z = T(y,z)$

2.2.3. $z = 1$

$T(x,z) = x \leq 1 = T(y,z)$

2.2.4. $z \parallel e$

$T(x,z) = z \wedge e \leq z = T(y,z)$

3. $x = 1$

Bu durumda $x \leq y$ olduğundan $y = 1$ olur. Bu durum açıktır.

4. $x \parallel e$

4.1. $e < y < 1$

4.1.1. $z \leq e$

$T(x,z) = U(x \wedge e, z) \leq z = y \wedge z = T(y,z)$

4.1.2. $e < z < 1$

$T(x,z) = x \wedge e \leq y \wedge z = T(y,z)$

4.1.3. $z = 1$

$$T(x,z) = x \leq y = T(y,z)$$

4.1.4. $z \parallel e$

$$T(x,z) = U(x \wedge e, z \wedge e) \leq z \wedge e = T(y,z)$$

4.2. $y = 1$

4.2.1. $z \leq e$

$$T(x,z) = U(x \wedge e, z) \leq z = T(y,z)$$

4.2.2. $e < z < 1$

$$T(x,z) = x \wedge e \leq z = T(y,z)$$

4.2.3. $z = 1$

$$T(x,z) = x \leq 1 = T(y,z)$$

4.2.4. $z \parallel e$

$$T(x,z) = U(x \wedge e, z \wedge e) \leq z = T(y,z)$$

4.3. $y \parallel e$

4.3.1. $z \leq e$

$$T(x,z) = U(x \wedge e, z) \leq U(y \wedge e, z) = T(y,z)$$

4.3.2. $e < z < 1$

$$T(x,z) = x \wedge e \leq y \wedge e = T(y,z)$$

4.3.3. $z = 1$

$$T(x,z) = x \leq y = T(y,z)$$

4.3.4. $z \parallel e$

$$T(x,z) = U(x \wedge e, z \wedge e) \leq U(y \wedge e, z \wedge e) = T(y,z)$$

ii) Asosyatiflik: L nin her x, y, z elemanı için $T\big(x, T(y,z)\big) = T(T(x,y), z)$ olduğu gösterilmelidir. $x, y, z \in L$ nin en az biri 1 ise, ispat açıktır. İspat, x, y, z elemanlarının e elemanıyla ilişkilerinin tüm olası durumları göz önüne alınarak aşağıdaki şekilde maddeler halinde yapılmıştır.

1. $x \leq e$

1.1. $y \leq e$

1.1.1. $z \leq e$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = U\big(x, U(y,z)\big) = U(U(x,y), z) = T(T(x,y), z)$$

1.1.2. $e < z < 1$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x,y) = U(x,y) = T(U(x,y), z) = T(T(x,y), z)$$

1.1.3. $z \parallel e$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,U(y,z\wedge e)) = U(x,U(y,z\wedge e)) = U(U(x,y),z\wedge e)$$
$$= T(T(x,y),z)$$

1.2. $e < y < 1$

1.2.1. $z \le e$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,z) = U(x,z) = T(T(x,y),z)$$

1.2.2. $e < z < 1$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,y\wedge z) = x = T(x,z) = T(T(x,y),z)$$

1.2.3. $z \parallel e$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,z\wedge e) = U(x,z\wedge e) = T(x,z) = T(T(x,y),z)$$

1.3. $y \parallel e$

1.3.1. $z \le e$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,U(y\wedge e,z)) = U(x,U(y\wedge e,z)) = U(U(x,y\wedge e),z)$$
$$= T(U(x,y\wedge e),z) = T(T(x,y),z)$$

1.3.2. $e < z < 1$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,y\wedge e) = U(x,y\wedge e) = T(U(x,y\wedge e),z) = T(T(x,y),z)$$

1.3.3. $z \parallel e$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,U(y\wedge e,z\wedge e)) = U(x,U(y\wedge e,z\wedge e)) = T(U(x,y\wedge e),z)$$
$$= T(T(x,y),z)$$

2. $e < x < 1$

2.1. $y \le e$

2.1.1. $z \le e$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,U(y,z)) = U(y,z) = T(y,z) = T(T(x,y),z)$$

2.1.2. $e < z < 1$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,y) = y = T(y,z) = T(T(x,y),z)$$

2.1.3. $z \parallel e$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,U(y,z\wedge e)) = U(y,z\wedge e) = T(y,z) = T(T(x,y),z)$$

2.2. $e < y < 1$

2.2.1. $z \le e$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,z) = z = T(x\wedge y,z) = T(T(x,y),z)$$

2.2.2. $e < z < 1$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,y \wedge z) = x \wedge y \wedge z = T(x \wedge y,z) = T(T(x,y),z)$$

2.2.3. $z \parallel e$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,z \wedge e) = z \wedge e = T(x \wedge y,z) = T(T(x,y),z)$$

2.3. $y \parallel e$

2.3.1. $z \leq e$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T\big(x,U(y \wedge e,z)\big) = U(y \wedge e,z) = T(y \wedge e,z) = T(T(x,y),z)$$

2.3.2. $e < z < 1$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,y \wedge e) = y \wedge e = T(y \wedge e,z) = T(T(x,y),z)$$

2.3.3. $z \parallel e$

$$\begin{aligned} T\big(x,T(y,z)\big) &= T\big(x,U(y \wedge e,z \wedge e)\big) = U(y \wedge e,z \wedge e) = T(y \wedge e,z) \\ &= T(T(x,y),z) \end{aligned}$$

3. $x \parallel e$

3.1. $y \leq e$

3.1.1. $z \leq e$

$$\begin{aligned} T(x,T(y,z)) &= T(x,U(y,z)) = U(x \wedge e,U(y,z)) = U(U(x \wedge e,y),z) \\ &= T(U(x \wedge e,y),z) = T(T(x,y),z) \end{aligned}$$

3.1.2. $e < z < 1$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,y) = U(x \wedge e,y) = T(U(x \wedge e,y),z) = T(T(x,y),z)$$

3.1.3. $z \parallel e$

$$\begin{aligned} T\big(x,T(y,z)\big) &= T\big(x,U(y,z \wedge e)\big) = U\big(x \wedge e,U(y,z \wedge e)\big) = U(U(x \wedge e,y),z \wedge e) \\ &= T(U(x \wedge e,y),z) = T(T(x,y),z) \end{aligned}$$

3.2. $e < y < 1$

3.2.1. $z \leq e$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,z) = U(x \wedge e,z) = T(x,z) = T(T(x,y),z)$$

3.2.2. $e < z < 1$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,y \wedge z) = x \wedge e = T(x \wedge e,z) = T(T(x,y),z)$$

3.2.3. $z \parallel e$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,z \wedge e) = U(x \wedge e,z \wedge e) = T(x \wedge e,z) = T(T(x,y),z)$$

3.3. $y \parallel e$

3.3.1. $z \leq e$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T\big(x,U(y \wedge e,z)\big) = U\big(x \wedge e,U(y \wedge e,z)\big) = U(U(x \wedge e,y \wedge e),z)$$

$$= T(U(x \wedge e, y \wedge e), z) = T(T(x, y), z)$$

3.3.2. $e < z < 1$

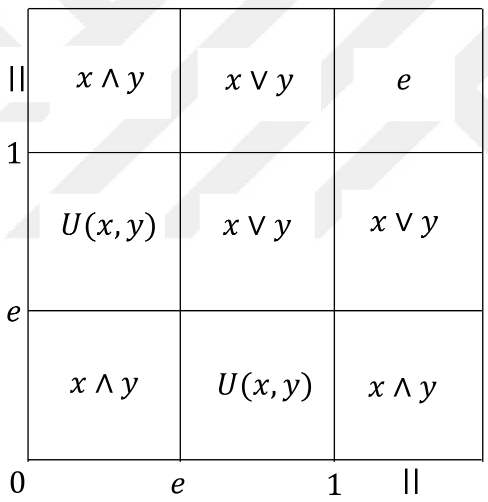
$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge e) = U(x \wedge e, y \wedge e) = T(U(x \wedge e, y \wedge e), z)$$
$$= T(T(x, y), z)$$

3.3.3. $z \parallel e$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, U(y \wedge e, z \wedge e)\big) = U\big(x \wedge e, U(y \wedge e, z \wedge e)\big)$$
$$= U(U(x \wedge e, y \wedge e), z \wedge e) = T(U(x \wedge e, y \wedge e), z)$$
$$= T(T(x, y), z)$$

T nin komutatifliği ve 1 in T nin birim elemanı olduğu açıktır.

Şekil 2.4 teki gibi temsil edilebilen H_1 in simetrik birleştirme fonksiyonu olduğu aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 2.4. H_1 simetrik birleştirme fonksiyonu

i) Monotonluk: $x \leq y$ olacak şekildeki $x, y \in L$ ve her $z \in L$ için $H_1(x, z) \leq H_1(y, z)$ olduğu gösterilmelidir. İspat, x, y, z elemanlarının e elemanıyla ilişkilerinin tüm olası durumları göz önüne alınarak aşağıdaki şekilde maddeler halinde yapılmıştır.

1. $x < e$

1.1. $y < e$

1.1.1. $z \leq e$ veya $z \parallel e$

$$H_1(x, z) = x \wedge z \leq y \wedge z = H_1(y, z)$$

1.1.2. $e < z$

$$H_1(x,z) = U(x,z) \leq U(y,z) = H_1(y,z)$$

1.2. $y = e$

1.2.1. $z \leq e$

$$H_1(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = H_1(y,z)$$

1.2.2. $e < z$

$$H_1(x,z) = U(x,z) \leq z \leq y \vee z = H_1(y,z)$$

1.2.3. $z \parallel e$

$$H_1(x,z) = x \wedge z \leq e = H_1(y,z)$$

1.3. $e < y$

1.3.1. $z < e$

$$H_1(x,z) = x \wedge z \leq z = U(e,z) \leq U(y,z) = H_1(y,z)$$

1.3.2. $z = e$ veya $z \parallel e$

$$H_1(x,z) = x \wedge z \leq y \vee z = H_1(y,z)$$

1.3.3. $e < z$

$$H_1(x,z) = U(x,z) \leq U(e,z) = z \leq y \vee z = H_1(y,z)$$

1.4. $y \parallel e$

1.4.1. $z < e$

$$H_1(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = H_1(y,z)$$

1.4.2. $z = e$

$$H_1(x,z) = x \wedge z \leq e = H_1(y,z)$$

1.4.3. $e < z$

$$H_1(x,z) = U(x,z) \leq U(e,z) = z \leq y \vee z = H_1(y,z)$$

1.4.4. $z \parallel e$

$$H_1(x,z) = x \wedge z \leq x < e = H_1(y,z)$$

2. $x = e$

2.1. $y = e$

2.1.1. $z < e$

$$H_1(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = H_1(y,z)$$

2.1.2. $z = e$ veya $z \parallel e$

$$H_1(x,z) = e = H_1(y,z)$$

2.1.3. $e < z$

$H_1(x,z) = z = H_1(y,z)$

2.2. $e < y$

2.2.1. $z < e$

$H_1(x,z) = x \wedge z \leq z = U(e,z) \leq U(y,z) = H_1(y,z)$

2.2.2. $z = e$

$H_1(x,z) = e \leq y = H_1(y,z)$

2.2.3. $e < z$

$H_1(x,z) = x \vee z \leq y \vee z = H_1(y,z)$

2.2.4. $z \parallel e$

$H_1(x,z) = e \leq y \vee z = H_1(y,z)$

3. $e < x$

3.1. $e < y$

3.1.1. $z < e$

$H_1(x,z) = U(x,z) \leq U(y,z) = H_1(y,z)$

3.1.2. $e \leq z$ veya $z \parallel e$

$H_1(x,z) = x \vee z \leq y \vee z = H_1(y,z)$

4. $x \parallel e$

4.1. $e < y < 1$

4.1.1. $z < e$

$H_1(x,z) = x \wedge z \leq z = U(e,z) \leq U(y,z) = H_1(y,z)$

4.1.2. $z = e$ veya $z \parallel e$

$H_1(x,z) = e \leq y \vee z = H_1(y,z)$

4.1.3. $e < z$

$H_1(x,z) = x \vee z \leq y \vee z = H_1(y,z)$

4.2. $y \parallel e$

4.2.1. $z < e$

$H_1(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = H_1(y,z)$

4.2.2. $z = e$ veya $z \parallel e$

$H_1(x,z) = e = H_1(y,z)$

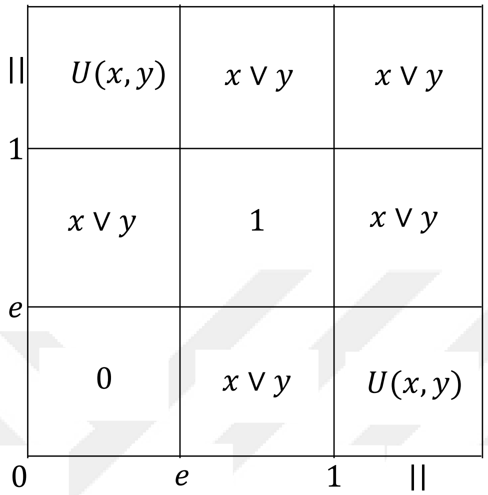
4.2.3. $e < z$

$H_1(x,z) = x \vee z \leq y \vee z = H_1(y,z)$

H_1 in simetrik olduğu açıktır. Dolayısıyla her iki bileşene göre azalmayandır.

ii) $H_1(0,0) = 0$ ve $H_1(1,1) = 1$ olduğundan sınır koşullarını sağlar.

Şekil 2.5 teki gibi temsil edilebilen H_1 in simetrik birleştirme fonksiyonu olduğu aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 2.5. H_2 simetrik birleştirme fonksiyonu

i) Monotonluk: $x \leq y$ olacak şekildeki $x, y \in L$ ve her $z \in L$ için $H_2(x,z) \leq H_2(y,z)$ olduğu gösterilmelidir. İspat, x, y, z elemanlarının e elemanıyla ilişkilerinin tüm olası durumları göz önüne alınarak aşağıdaki şekilde maddeler halinde yapılmıştır.

1. $x < e$

1.1. $y < e$

1.1.1. $z \leq e$

$$H_2(x,z) = 0 = H_2(y,z)$$

1.1.2. $e < z$

$$H_2(x,z) = x \vee z \leq y \vee z = H_2(y,z)$$

1.1.3. $z \parallel e$

$$H_2(x,z) = U(x,z) \leq U(y,z) = H_2(y,z)$$

1.2. $y = e$

1.2.1. $z \leq e$

$$H_2(x,z) = 0 = H_2(y,z)$$

1.2.2. $e < z$

$$H_2(x,z) = x \vee z \leq y \vee z = H_2(y,z)$$

1.2.3. $z \parallel e$

$$H_2(x,z) = U(x,z) \le U(e,z) = z \le y \vee z = H_2(y,z)$$

1.3. $e < y$

1.3.1. $z \le e$

$$H_2(x,z) = 0 \le y \vee z = H_2(y,z)$$

1.3.2. $e < z$

$$H_2(x,z) = x \vee z \le 1 = H_2(y,z)$$

1.3.3. $z \parallel e$

$$H_2(x,z) = U(x,z) \le U(e,z) = z \le y \vee z = H_2(y,z)$$

1.4. $y \parallel e$

1.4.1. $z < e$

$$H_2(x,z) = 0 \le U(y,z) = H_2(y,z)$$

1.4.2. $z = e$

$$H_2(x,z) = 0 \le y \vee z = H_2(y,z)$$

1.4.3. $e < z$

$$H_2(x,z) = x \vee z \le y \vee z = H_2(y,z)$$

1.4.4. $z \parallel e$

$$H_2(x,z) = U(x,z) \le U(e,z) = z \le y \vee z = H_2(y,z)$$

2. $x = e$

2.1. $y = e$

2.1.1. $z \le e$

$$H_2(x,z) = 0 = H_2(y,z)$$

2.1.2. $e < z$ veya $z \parallel e$

$$H_2(x,z) = x \vee z \le y \vee z = H_2(y,z)$$

2.2. $e < y$

2.2.1. $z \le e$

$$H_2(x,z) = 0 \le y \vee z = H_2(y,z)$$

2.2.2. $e < z$

$$H_2(x,z) = x \vee z \le 1 = H_2(y,z)$$

2.2.3. $z \parallel e$

$$H_2(x,z) = x \vee z \le y \vee z = H_2(y,z)$$

3. $e < x$

3.1. $e < y$

3.1.1. $z \leq e$ veya $z \parallel e$

$$H_2(x,z) = x \vee z \leq y \vee z = H_2(y,z)$$

3.1.2. $e < z$

$$H_2(x,z) = 1 = H_2(y,z)$$

4. $x \parallel e$

4.1. $e < y$

4.1.1. $z < e$

$$H_2(x,z) = U(x,z) \leq U(x,e) = x \leq y \leq y \vee z = H_2(y,z)$$

4.1.2. $z = e$ veya $z \parallel e$

$$H_2(x,z) = x \vee z \leq y \vee z = H_2(y,z)$$

4.1.3. $e < z$

$$H_2(x,z) = x \vee z \leq 1 = H_2(y,z)$$

4.2. $y \parallel e$

4.2.1. $z < e$

$$H_2(x,z) = U(x,z) \leq U(y,z) = H_2(y,z)$$

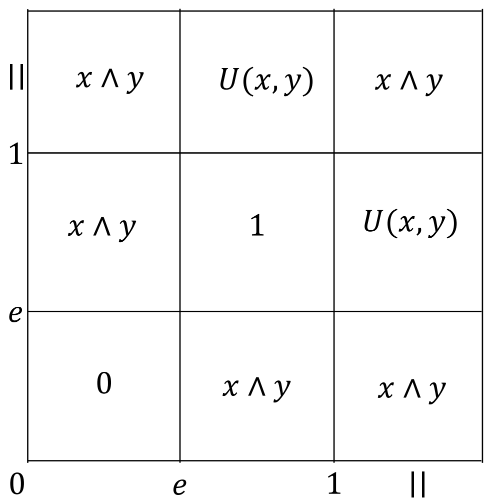
4.2.2. $e \leq z$ veya $z \parallel e$

$$H_2(x,z) = x \vee z \leq y \vee z = H_2(y,z)$$

H_2 in simetrik olduğu açıktır. Dolayısıyla H_2 her iki bileşene göre azalmayandır.

ii) $H_2(0,0) = 0$ ve $H_2(1,1) = 1$ olduğundan sınır koşullarını sağlar.

Şekil 2.6 daki gibi temsil edilebilen H_1 in simetrik birleştirme fonksiyonu olduğu aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 2.6. H_3 simetrik birleştirme fonksiyonu

i) Monotonluk: $x \leq y$ olacak şekildeki $x, y \in L$ ve her $z \in L$ için $H_3(x,z) \leq H_3(y,z)$ olduğu gösterilmelidir. İspat, x, y, z elemanlarının e elemanıyla ilişkilerinin tüm olası durumları göz önüne alınarak aşağıdaki şekilde maddeler halinde yapılmıştır.

1. $x < e$

1.1. $y < e$

1.1.1. $z \leq e$

$$H_3(x,z) = 0 = H_3(y,z)$$

1.1.2. $e < z$ veya $z \parallel e$

$$H_3(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = H_3(y,z)$$

1.2. $y = e$

1.2.1. $z \leq e$

$$H_3(x,z) = 0 = H_3(y,z)$$

1.2.2. $e < z$ veya $z \parallel e$

$$H_3(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = H_3(y,z)$$

1.3. $e < y$

1.3.1. $z \leq e$

$$H_3(x,z) = 0 \leq y \wedge z = H_3(y,z)$$

1.3.2. $e < z$

$$H_3(x,z) = x \wedge z \leq 1 = H_3(y,z)$$

1.3.3. $z \parallel e$

$$H_3(x,z) = x \wedge z \leq z = U(e,z) \leq U(y,z) = H_3(y,z)$$

1.4. $y \parallel e$

1.4.1. $z \leq e$

$$H_3(x,z) = 0 \leq y \wedge z = H_3(y,z)$$

1.4.2. $e < z$

$$H_3(x,z) = x \wedge z \leq x \leq y = U(y,e) \leq U(y,z) = H_3(y,z)$$

1.4.3. $z \parallel e$

$$H_3(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = H_3(y,z)$$

2. $x = e$

2.1. $y = e$

2.1.1. $z \leq e$

$$H_3(x,z) = 0 = H_3(y,z)$$

2.1.2. $e < z$ veya $z \parallel e$

$$H_3(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = H_3(y,z)$$

2.2. $e < y$

2.2.1. $z \leq e$

$$H_3(x,z) = 0 \leq y \wedge z = H_3(y,z)$$

2.2.2. $e < z$

$$H_3(x,z) = x \wedge z \leq 1 = H_3(y,z)$$

2.2.3. $z \parallel e$

$$H_3(x,z) = x \wedge z \leq z = U(e,z) \leq U(y,z) = H_3(y,z)$$

3. $e < x$

3.1. $e < y$

3.1.1. $z \leq e$

$$H_3(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = H_3(y,z)$$

3.1.2. $e < z$

$$H_3(x,z) = 1 = H_3(y,z)$$

3.1.3. $z \parallel e$

$$H_3(x,z) = U(x,z) \leq U(y,z) = H_3(y,z)$$

4. $x \parallel e$

4.1. $e < y$

4.1.1. $z \leq e$

$$H_3(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = H_3(y,z)$$

4.1.2. $e < z$

$$H_3(x,z) = U(x,z) \leq 1 = H_3(y,z)$$

4.1.3. $z \parallel e$

$$H_3(x,z) = x \wedge z \leq z = U(e,z) \leq U(y,z) = H_3(y,z)$$

4.2. $y \parallel e$

4.2.1. $z \leq e$ veya $z \parallel e$

$$H_3(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = H_3(y,z)$$

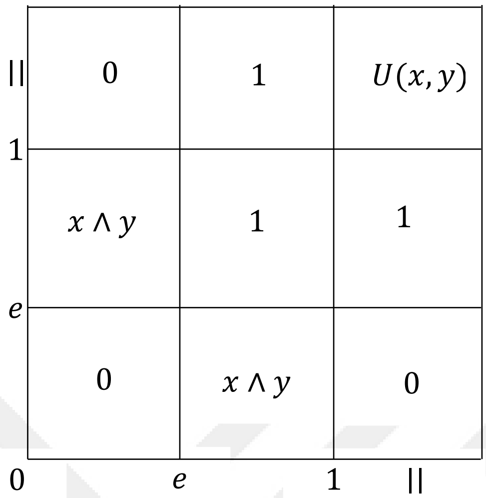
4.2.2. $e < z$

$$H_3(x,z) = U(x,z) \leq U(y,z) = H_3(y,z)$$

H_3 ün simetrik olduğu açıktır. Dolayısıyla H_3 her iki bileşene göre azalmayandır.

ii) $H_3(0,0) = 0$ ve $H_3(1,1) = 1$ olduğundan sınır koşullarını sağlar.

Son olarak Şekil 2.6 daki gibi temsil edilebilen H_1 in simetrik birleştirme fonksiyonu olduğu aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 2.7. H_4 simetrik birleştirme fonksiyonu

i) Monotonluk: $x \leq y$ olacak şekildeki $x, y \in L$ ve her $z \in L$ için $H_4(x,z) \leq H_4(y,z)$ olduğu gösterilmelidir. İspat, x, y, z elemanlarının e elemanıyla ilişkilerinin tüm olası durumları göz önüne alınarak aşağıdaki şekilde maddeler halinde yapılmıştır.

1. $x < e$

1.1. $y < e$

1.1.1. $z \leq e$ veya $z \parallel e$

$$H_4(x,z) = 0 = H_4(y,z)$$

1.1.2. $e < z$

$$H_4(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = H_4(y,z)$$

1.2. $y = e$

1.2.1. $z \leq e$

$$H_4(x,z) = 0 = H_4(y,z)$$

1.2.2. $e < z$

$$H_4(x,z) = x \wedge z \leq z = U(y,z) = H_4(y,z)$$

1.2.3. $z \parallel e$

$$H_4(x,z) = 0 \leq U(y,z) = H_4(y,z)$$

1.3. $e < y$

1.3.1. $z < e$

$H_4(x,z) = 0 \leq y \wedge z = H_4(y,z)$

1.3.2. $z = e$

$H_4(x,z) = 0 \leq U(y,z) = H_4(y,z)$

1.3.3. $e < z$

$H_4(x,z) = x \wedge z \leq 1 = H_4(y,z)$

1.3.4. $z \parallel e$

$H_4(x,z) = 0 \leq 1 = H_4(y,z)$

1.4. $y \parallel e$

1.4.1. $z < e$

$H_4(x,z) = 0 = H_4(y,z)$

1.4.2. $z = e$ veya $z \parallel e$

$H_4(x,z) = 0 \leq U(y,z) = H_4(y,z)$

1.4.3. $e < z$

$H_4(x,z) = x \wedge z \leq 1 = H_4(y,z)$

2. $x = e$

2.1. $y = e$

2.1.1. $z \leq e$

$H_4(x,z) = 0 = H_4(y,z)$

2.1.2. $z > e$ veya $z \parallel e$

$H_4(x,z) = U(x,z) \leq U(y,z) = H_4(y,z)$

2.2. $e < y$

2.2.1. $z < e$

$H_4(x,z) = 0 \leq y \wedge z = H_4(y,z)$

2.2.2. $z = e$

$H_4(x,z) = 0 \leq U(y,z) = H_4(y,z)$

2.2.3. $e < z$ veya $z \parallel e$

$H_4(x,z) = U(x,z) \leq 1 = H_4(y,z)$

3. $e < x$

3.1. $e < y$

3.1.1. $z < e$

$H_4(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = H_4(y,z)$

3.1.2. $z = e$

$H_4(x,z) = U(x,z) \leq U(y,z) = H_4(y,z)$

3.1.3. $e < z$ veya $z \parallel e$

$H_4(x,z) = 1 = H_4(y,z)$

4. $x \parallel e$

4.1. $e < y$

4.1.1. $z < e$

$H_4(x,z) = 0 \leq y \wedge z = H_4(y,z)$

4.1.2. $z = e$

$H_4(x,z) = U(x,z) \leq U(y,z) = H_4(y,z)$

4.1.3. $e < z$

$H_4(x,z) = 1 = H_4(y,z)$

4.1.4. $z \parallel e$

$H_4(x,z) = U(x,z) \leq 1 = H_4(y,z)$

4.2. $y \parallel e$

4.2.1. $z < e$

$H_4(x,z) = 0 = H_4(y,z)$

4.2.2. $z = e$ veya $z \parallel e$

$H_4(x,z) = U(x,z) \leq U(y,z) = H_4(y,z)$

4.2.3. $e < z$

$H_4(x,z) = 1 = H_4(y,z)$

H_4 ün simetrik olduğu açıktır. Dolayısıyla H_4 her iki bileşene göre azalmayandır.

ii) $H_4(0,0) = 0$ ve $H_4(1,1) = 1$ olduğundan sınır koşullarını sağlar.

(2) deki gibi tanımlanın U nun e birim elemanlı bir uninorm olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır ■

Uyarı 2.3. L sınırlı kafesi üzerinde tanımlı bir U uninormu için, U uninormunun $[0,e]^2$ ye kısıtlanışı bir t-norm, $[e,1]^2$ ye kısıtlanışı bir t-konormdur. O halde, Teorem 2.2. de göz önüne alınırsa, L sınırlı kafesi üzerinde tanımlı bir uninormdan (kısıtlanış göz önüne alınırsa t-normdan veya t-konormdan) t-norm veya t-konorm elde etmek için Önerme 1.47 ile ifade edilen bilindik metottan farklı bir inşaa metodu sunar. Ayrıca Önerme 1.47 de belirtilen metodun yalnızca özel tipte kafesler üzerinde geçerli olduğu ([12]) göz önüne alınırsa bu metodun önemli bir yenilik sunduğu daha anlaşılır olur.

Örnek 2.4. $L = L([0,1]) = \{[a,b]: 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ ve $L([0,1])$ üzerindeki sıra

$[a,b] \leq_L [c,d]: \Leftrightarrow a \leq c$ ve $b \leq d$

olarak tanımlandığında $(L([0,1]), \leq_L)$ in bir kafes yapısı oluşturur ve aralık değerli kafes olarak adlandırılır ([10]). U, $[0,1]$ üzerinde $e \in (0,1)$ birim elemanlı bir uninorm ve U nun $[0,e]$ ye kısıtlanışı ile elde edilen t-norm T ile, $[e,1]$ e kısıtlanışı ile elde edilen t-konorm S ile gösterilsin. [22] ile $L([0,1])$ üzerinde U yardımıyla $[e,e]$ birim elemanlı

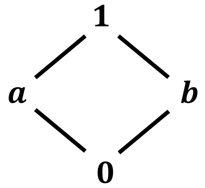
$$\boldsymbol{U}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = [U(x_1,y_1), U(x_2,y_2)]$$

$\boldsymbol{U}: L([0,1])^2 \to L([0,1])$ uninormu tanımlansın. Teorem 2.2 kullanılarak, $L([0,1])$ üzerinde $\boldsymbol{T}$ t-normu ve $\boldsymbol{S}$ t-konormu sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\boldsymbol{T}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \begin{cases} [T(x_1,y_1), T(x_2,y_2)] & , ([x_1,x_2],[y_1,y_2]) \in \big[[0,0],[e,e]\big]^2 \\ [T(x_1,y_1), e] & , ([x_1,x_2],[y_1,y_2]) \in I_{[e,e]}^2 \\ [T(x_1,y_1), x_2] & , ([x_1,x_2],[y_1,y_2]) \in \big[[0,0],[e,e]\big] \times I_{[e,e]} \\ [T(x_1,y_1), y_2] & , ([x_1,x_2],[y_1,y_2]) \in I_{[e,e]} \times \big[[0,0],[e,e]\big] \\ [y_1, e] & , ([x_1,x_2],[y_1,y_2]) \in ([e,e],[1,1]) \times I_{[e,e]} \\ [x_1, e] & , ([x_1,x_2],[y_1,y_2]) \in I_{[e,e]} \times ([e,e],[1,1]) \\ [x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2] & , \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{S}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \begin{cases} [S(x_1,y_1), S(x_2,y_2)] & , ([x_1,x_2],[y_1,y_2]) \in \big[[e,e],[1,1]\big]^2 \\ [e, S(x_2,y_2)] & , ([x_1,x_2],[y_1,y_2]) \in I_{[e,e]}^2 \\ [x_1, S(x_2,y_2)] & , ([x_1,x_2],[y_1,y_2]) \in \big[[e,e],[1,1]\big] \times I_{[e,e]} \\ [y_1, S(x_2,y_2)] & , ([x_1,x_2],[y_1,y_2]) \in I_{[e,e]} \times \big[[e,e],[1,1]\big] \\ [e, y_2] & , ([x_1,x_2],[y_1,y_2]) \in ([0,0],[e,e]) \times I_{[e,e]} \\ [e, x_2] & , ([x_1,x_2],[y_1,y_2]) \in I_{[e,e]} \times ([0,0],[e,e]) \\ [x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2] & , \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

Örnek 2.5. Aşağıdaki hasse diagramı ile gösterilen L Diamond kafesi



Şekil 2.8. L Diamond Kafes

ve L üzerinde tanımlı $a \in L$ birim elemanlı $U: L^2 \to L$ uninormu aşağıdaki gibi tanımlansın.

Tablo 1. U uninormu

U	0	a	b	1
0	0	0	b	b
a	0	a	b	1
b	b	b	b	b
1	b	1	b	1

Teorem 2.2. kullanılarak, T t-normu, S t-konormu, H_1, H_2, H_3, H_4 simetrik birleştirme fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

Tablo 2. T t-normu

T	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	0	b
1	0	a	b	1

Tablo 3. S t-konormu

S	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	1	1
1	1	1	1	1

Tablo 4. H_1 simetrik birleştirme fonksiyonu

H_1	0	a	b	1
0	0	0	0	b
a	0	a	a	1
b	0	a	a	1
1	b	1	1	1

Tablo 5. H_2 simetrik birleştirme fonksiyonu

H_2	0	a	b	1
0	0	0	b	1
a	0	0	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

Tablo 6. H_3 simetrik birleştirme fonksiyonu

H_3	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

Tablo 7. H_4 simetrik birleştirme fonksiyonu

H_4	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	b	1
b	0	b	b	1
1	0	1	1	1

Uyarı 2.6. Zincirler üzerinde tanımlı uninormlar için yutan elemanlar 0 veya 1 olabilir. Oysa yukarıdaki örnek 0 ve 1 den farklı yutan elemana sahip bir uninorm örneği vermektedir. Yukarıda verilen örnek, zincirler üzerindeki bu durumun keyfi kafesler üzerinde sağlanmayabileceğine dair önemli bir örnek olarak görülebilir.

2.1.2. Sınırlı Kafesler Üzerinde Uninormların İnşası

Teorem 1.62. de ifade edilen [22, Teorem 1] çalışması da göz önüne alınarak, keyfi sınırlı kafesler üzerinde geçerli iki genel inşa metodu aşağıdaki gibi verilebilir.

Sonuç 2.7. $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L\backslash\{0,1\}$ olsun. S, L üzerinde en büyük t-konorm ve $H_3 = H_4 = H^*$, L üzerinde en büyük birleştirme fonksiyonu olmak üzere, $S, H_1, H_2, H_3, H_4: L^2 \to L$ sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$S(x,y) = \begin{cases} x \vee y, & x = 0 \text{ veya } y = 0 \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$H_1(x,y) = x \vee y$$

$$H_2(x,y) = \begin{cases} y, & x \in [0,e] \text{ ve } y \parallel e \\ x, & y \in [0,e] \text{ ve } x \parallel e \\ 0, & (x,y) \in [0,e]^2 \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$H^*(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y = 0 \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$T \downarrow [0,e]^2 = T' : [0,e]^2 \to [0,e]$, $[0,e]$ üzerinde bir t-norm olmak üzere $T: L^2 \to L$ keyfi bir t-norm olsun. Bu takdirde (2) formülü L üzerinde e birimli $U: L^2 \to L$ uninormunu üretir.

Sonuç 2.8. $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L\backslash\{0,1\}$ olsun. T, L üzerinde en küçük t-norm ve $H_2 = H_4 = H_*$, L üzerinde en küçük birleştirme fonksiyonu olmak üzere, $T, H_1, H_2, H_3, H_4: L^2 \to L$ sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T(x,y) = \begin{cases} x \wedge y, & x = 1 \text{ veya } y = 1 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$H_1(x,y) = x \wedge y$$

$$H_*(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y = 1 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$H_3(x,y) = \begin{cases} y, & x \in [e,1] \text{ ve } y \parallel e \\ x, & y \in [e,1] \text{ ve } x \parallel e \\ 1, & (x,y) \in [e,1]^2 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$S \downarrow [e,1]^2 = S' : [e,1]^2 \to [e,1]$, $[e,1]$ üzerinde bir t-konorm olmak üzere $S: L^2 \to L$ keyfi bir t-konorm olsun. Bu takdirde (2) formülü L üzerinde e birimli $U: L^2 \to L$ uninormunu üretir.

2.2. Uninormdan ve n-Uninormdan Elde Edilen Sıralama

Bu bölüm iki alt bölüme ayrılır. Birinci kısımda, Karaçal ve Kesicioğlu tarafından [21] de tanımlanan ve bazı özellikleri incelenen t-normlardan elde dilen $\leq_T$ kısmen sıralama bağıntısını (dual olarak $\leq_S$ kısmen sıralama bağıntısını) kapsayan uninormlardan üretilen $\leq_U$ kısmen sıralama bağıntısı verilmiştir ve bazı özellikleri incelenmiştir. İkinci kısımda, $\leq_U$ kısmen sıralama bağıntısı tanımı, öncelikle 2-uninormlardan elde edilen $\leq_{U^2}$ kısmen sıralama bağıntısına ve ardından n-uninormlardan elde edilen $\leq_{U^n}$ kısmen sıralama bağıntısına genelleştirilmiştir. Ayrıca, $\leq_{U^2}$ kısmen sıralama bağıntısının $\leq_T$, $\leq_S$, $\leq_U$ ve V bir nullnorm olmak üzere bir nullnormdan elde edilecek $\leq_V$ kısmen sıralama bağıntılarını kapsadığı gösterilmiştir.

2.2.1. Uninormdan Üretilen U-Kısmen Sıralama ($\leq_U$)

Tanım 2.9. $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve U, e birim elemanlı bir uninorm olsun. $x, y \in L$ için aşağıdaki bağıntıyı tanımlayalım:

$$x \leq_U y :\Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in [0, e] \text{ iken } U(k, y) = x \text{ olacak şekilde } k \in [0, e] \text{ mevcut ise,} \\ \text{veya} \\ x, y \in [e, 1] \text{ iken } U(x, l) = y \text{ olacak şekilde } l \in [e, 1] \text{ mevcut ise,} \\ \text{veya} \\ (x, y) \in L^* \text{ iken } x \leq y \text{ ise,} \end{cases} \quad (3)$$

burada $L^* = [0, e] \times [e, 1] \cup [0, e] \times I_e \cup [e, 1] \times [0, e] \cup [e, 1] \times I_e \cup I_e \times [0, e]$
$\cup\, I_e \times [e, 1] \cup I_e \times I_e$ dir.

Önerme 2.10. (3) ile tanımlanan bağıntı L üzerinde bir kısmen sıralama bağıntısıdır.

İspat:

i) Eğer $x \in [0, e]$ veya $x \in [e, 1]$ ise, $U(x, e) = x$ olduğu için, $x \leq_U x$ dir. $x \notin [0, e]$ ve $x \notin [e, 1]$ ise $x \leq x$ olduğundan $x \leq_U x$ dir. Böylece $\leq_U$ yansıma özelliğini sağlar.

ii) $x, y \in L$ için $x \leq_U y$ ve $y \leq_U x$ olsun.

• $x, y \in [0, e]$ olsun. $x \leq_U y$ ve $y \leq_U x$ olduğundan $U(l_1, y) = x$ ve $U(l_2, x) = y$ olacak şekilde $l_1, l_2 \in [0, e]$ mevcuttur. U nun monotonluğu kullanılırsa

$x = U(l_1, y) \leq U(e, y) = y$

ve

$$y = U(I_2, x) \leq U(e, x) = x$$

elde edilir. Böylece $x = y$ dir.

• $x, y \in [e, 1]$ olsun. Bu durumda ispat $x, y \in [0, e]$ durumuyla benzer olarak yapılır.

• $x, y \in L^*$ olsun. $x \leq_U y$ ve $y \leq_U x$ olduğundan $x \leq y$ ve $y \leq x$ elde edilir. Buradan $x = y$ dir.

Böylece $\leq_U$ ters simetri özelliğini sağlar.

iii) $x, y, z \in L$ için $x \leq_U y$ ve $y \leq_U z$ olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlar gerçekleşemez:

• $x \in [0, e], y \in [e, 1]$ ve $z \in I_e$

• $x \in [0, e], y \in I_e$ ve $z \in [0, e]$

• $x \in [e, 1], y \in [e, 1]$ ve $z \in I_e$

• $x \in [e, 1], y \in I_e$ ve $z \in L$

• $x \in I_e, y \in [0, e]$ ve $z \in L$

• $x \in I_e, y \in [e, 1]$ ve $z \in [0, e]$

• $x \in I_e, y \in [e, 1]$ ve $z \in I_e$

• $x \in I_e, y \in I_e$ ve $z \in [0, e]$

Kalan tüm olası durumlar aşağıda verilmiştir:

3.1. $x \in [0, e]$

3.1.1. $y \in [0, e]$

3.1.1.1. $z \in [0, e]$

$x \leq_U y$ ve $y \leq_U z$ olduğu için $U(y, l_1) = x$ ve $U(l_2, z) = y$ olacak şekilde $l_1, l_2 \in [0, e]$ mevcuttur. Buradan

$$x = U(l_1, y) = U\big(l_1, U(l_2, z)\big) = U(U(l_1, l_2), z)$$

elde edilir. $l_1, l_2 \leq e$ olduğundan $U(l_1, l_2) \leq e$ dir. Böylece $x \leq_U z$ elde edilir.

3.1.1.2. $z \notin [0, e]$

$y \leq_U z$ olduğundan $y \leq z$ elde edilir. $x \leq_U y$ olduğundan $U(l, y) = x$ olacak şekilde $l \leq e$ mevcuttur. $x = U(l, y) \leq U(e, y) = y \leq z$ olduğundan $x \leq_U z$ elde edilir.

3.1.2. $y \in [e, 1]$

3.1.2.1. $z \in [0, e]$

$y \leq_U z$ olduğundan $e \leq y \leq z \leq e$ elde edilir ve böylece $y = z = e$ dir. $U(z, x) = U(e, x) = x$ olduğundan, $x \leq_U z$ dir.

3.1.2.2. $z \in [e, 1]$

$x \leq e \leq z$ olduğundan, $x \leq_U z$ dir.

3.1.3. $y \parallel e$

3.1.3.1. $z \notin [0, e]$

$x \leq_U y$ ve y $\leq_U z$ olduğundan, $x \leq y$ ve $y \leq z$ dir. $x \leq z$ olduğundan, $x \leq_U z$ dir.

3.2. $x \in [e, 1]$

3.2.1. $y \in [0, e]$

$x \leq_U y$ olduğu için, $e \leq x \leq y \leq e$ olup $x = y = e$ dir. y $\leq_U z$ olmasından $x = y \leq_U z$ elde edilir.

3.2.2. $y \in [e, 1]$

3.2.2.1. $z \in [0, e]$

y $\leq_U z$ olduğundan $e \leq y \leq z \leq e$ ve buradan da $y = z = e$ dir. $x \leq_U y$ olduğundan $U(x, k) = y$ olacak şekilde $e \leq k$ mevcuttur. Böylece, $x = U(x, e) \leq U(x, k) = y = z$ olduğu kullanılarak $x \leq_U z$ bulunur.

3.2.2.2. $z \in [e, 1]$

$x \leq_U y$ ve y $\leq_U z$ olduğu için $U(l_1, x) = y$ ve $U(l_2, y) = z$ olacak şekilde $l_1, l_2 \in [e, 1]$ mevcuttur. Buradan $z = U(l_2, y) = U\big(l_2, U(l_1, x)\big) = U(U(l_2, l_1), x)$ elde edilir. $e \leq U(l_2, l_1)$ olduğundan $x \leq_U z$ bulunur.

3.3. $x \parallel e$

3.3.1. $y \in [e, 1]$

3.3.1.1. $z \in [e, 1]$

y $\leq_U z$ olduğundan $U(y, l) = z$ olacak şekilde $e \leq l$ mevcuttur. Ayrıca $x \leq_U y$ olduğundan $x \leq y$ elde edilir. Böylece, $x \leq y = U(y, e) \leq U(y, l) = z$ dir ve buradan da $x \leq_U z$ elde edilir.

3.3.2. $y \parallel e$

3.3.2.1. $z \notin [0, e]$

$x \leq_U y$ ve y $\leq_U z$ olduğundan, $x \leq y$ ve $y \leq z$ dir. Böylece $x \leq_U z$ elde edilir.

Böylece geçişme özelliği sağlanır. O halde $\leq_U$ bir kısmen sıralama bağıntısıdır■

Önerme 2.11. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve U, e birim elemanlı bir uninorm olsun. $x, y \in L$ için $x \leq_U$ y ise, $x \leq y$ dir.

İspat:

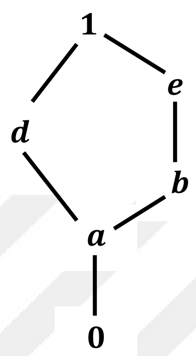
$x, y \in L$ için $x \leq_U$ y olsun.

• $x, y \in [0, e]$ ise, $U(l, y) = x$ olacak şekilde $l \leq e$ mevcuttur. $x = U(l, y) \leq U(e, y) = y$ olduğundan, $x \leq y$ dir.

• $x, y \in [e, 1]$ ise, $U(k, x) = y$ olacak şekilde $e \leq k$ mevcuttur. $x = U(e, x) \leq U(k, x) = y$ olduğundan, $x \leq y$ dir.

• $x, y \in L^*$ ise, $x \leq_U$ y olduğundan $x \leq y$ olduğu elde edilir ■

Uyarı 2.12. Önerme 2.11. in tersi doğru olmayabilir, örneğin:



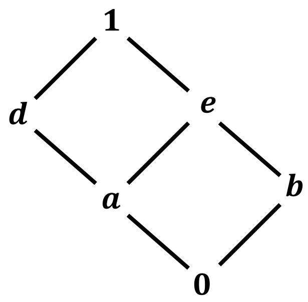
Şekil 2.9. ($L = \{0, a, b, d, e, 1\}, \leq$)

Kafes diyagramı Şekil 2.9. ile gösterilen ($L = \{0, a, b, d, e, 1\}, \leq, 0, 1$) kafesi ele alınsın ve L üzerinde e birim elemanlı U uninormu şu şekilde tanımlansın

Tablo 8. $L = \{0, a, b, d, e, 1\}$ üzerinde U uninormu

U	0	a	b	e	d	1
0	0	0	0	0	d	1
a	0	0	0	a	d	1
b	0	0	0	b	d	1
e	0	a	b	e	d	1
d	d	d	d	d	1	1
1	1	1	1	1	1	1

$a = U(k, b)$ olacak şekilde $k \in [0, e]$ mevcut olmadığından $a \leq b$ olmasına rağmen $a \nleq_u b$ dir. Gerçekten L üzerinde $\leq_U$ sırası şu şekildedir:



Şekil 2.10. $(L = \{0, a, b, d, e, 1\}, \leq_U)$

Önerme 2.13. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve U, e birim elemanlı bir uninorm olsun. O halde $(L, \leq_U)$ sınırlı kısmen sıralı bir kümedir.

İspat:

Önerme 2.10 dan $(L, \leq_U)$ nun bir kısmen sıralı küme olduğu açıktır.

• $x \in [0, e]$ olsun. $U(0, x) \leq U(0, e) = 0$ olduğundan, $U(0, x) = 0$ dır. $l := 0 \leq e$ olarak düşünülürse $U(0, x) = 0$ dan $0 \leq_U x$ elde edilir.

• $x \notin [0, e]$ olsun. $0 \leq x$ olduğundan $0 \leq_U x$ elde edilir.

Böylece her $x \in L$ için $0 \leq_U x$ elde edilir. O halde 0 ın en küçük eleman olduğu elde edilir. Benzer şekilde 1 in en büyük eleman olduğu da gösterilir. O halde $(L, \leq_U)$ sınırlı bir kısmen sıralı kümedir■

Uyarı 2.14. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve U, e birim elemanlı bir uninorm olsun.

i) $e = 1$ $(e = 0)$ olduğunda, $\leq_U$ sırası $\leq_T$ $(\leq_S)$ sıralaması ile çakışır.

ii) $(L, \leq, 0, 1)$ bir zincir olsa bile $(L, \leq_U)$ kısmen sıralı kümesi zincir olmak zorunda değildir. Örneğin, $L = [0,1]$ kafesini ve $e \in (0,1)$ olmak üzere

$$U_e(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0, e]^2 \\ Mak(x, y), & (x, y) \in [e, 1]^2 \\ Min(x, y), & Aksi\ takdirde \end{cases}$$

$U_e: [0,1]^2 \to [0,1]$ en küçük uninormu ele alınsın ([16]). $\frac{e}{2}$ ve $\frac{e}{4}$, $\leq_{U_e}$ sıralamasına göre kıyaslanabilir değildir. Gerçekten, Önerme 2.11 kullanılarak $\frac{e}{2} \leq \frac{e}{4}$ olmadığından, $\frac{e}{2} \leq_{U_e} \frac{e}{4}$ olamaz. $\frac{e}{4} \leq_{U_e} \frac{e}{2}$ olduğu varsayılsın. O halde $U_e\left(l, \frac{e}{2}\right) = \frac{e}{4}$ olacak şekilde $l \leq e$ mevcuttur. U_e nin tanımından, $0 = U\left(l, \frac{e}{2}\right) = \frac{e}{4}$ olur, bu bir çelişkidir.

iii) $\bar{X}_{\leq_U}$ $\left(\underline{X}_{\leq_U}\right)$ notasyonu ile L nin herhangi X alt kümesinin $\leq_U$ sıralamasına göre tüm üst (alt) sınırlarının kümesi gösterilecektir. Ayrıca, $a, b \in L$ için

$a \vee_U b$ $(a \wedge_U b)$ notasyonu ile a ve b elemanlarının $\leq_U$ sırasına göre üst (alt) sınırlarının en küçüğü (büyüğü) yani $\leq_U$ sırasına göre supremumu (infumumu) gösterilecektir. Benzer notasyonlar $\leq_T$ ve $\leq_S$ sıralamaları için de kullanılacaktır.

Uyarı 2.15. L kafesi, $\leq_U$ sırasına göre bir kafes olmak zorunda değildir.

Gerçekten, $L = [0,1]$ kafesini ve

$$U_{Min\left(T^{nM}, S_M, \frac{1}{2}\right)}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2 \ \ ve \ \ x + y \leq \frac{1}{2} \\ Mak(x,y), & (x,y) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]^2 \\ Min(x,y), & \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $U = U_{Min\left(T^{nM}, S_M, \frac{1}{2}\right)}(x,y)$: $[0,1]^2 \to [0,1]$ uninormunu alalım ([4]). Bu durumda $([0,1], \leq_U)$ infimum yarı kafestir fakat supremum yarı kafes değildir.

İlk olarak, $([0,1], \leq_U)$ infimum yarı kafes olduğunu gösterelim. $x, y \in [0,1]$ keyfi olsun. x ve y elemanları $\leq_U$ sırasına göre kıyaslanabilir ise $x \wedge_U y$ mevcuttur. x ve y elemanları $\leq_U$ sırasına göre kıyaslanabilir olmasın. O halde $x, y \neq 0{,}1$ ve $x \neq y$ dir. Bu durumda, $x \wedge_U y = 0$ dır. Varsayalım, $x \wedge_U y = k \neq 0$ olsun.

• $x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve $x + y \leq \frac{1}{2}$ olsun. $x \wedge_U y = k$ olduğundan, $k \leq_U x$ ve $k \leq_U y$ dir. Önerme 2.12. den $k \leq x, y$ dir. $x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ olduğundan, $k \leq \frac{1}{2}$ dir. Ayrıca, $k \leq_U x$ ve $k \leq_U y$ eşitsizliklerinden $U(l_1, x) = k \neq 0$ ve $U(l_2, y) = k \neq 0$ olacak şekilde $l_1, l_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ nin mevcut olduğu elde edilir. U nun tanımı ile $l_1 + x > \frac{1}{2}$ ve $l_2 + y > \frac{1}{2}$ elde edilir. Böylece, $U(l_1, x) = \mathrm{Min}(l_1, x) = k$ ve $U(l_2, y) = \mathrm{Min}(l_2, y) = k$ olur. $U(l_1, x) = \mathrm{Min}(l_1, x) = k$ eşitliğinden $k = x$ veya $l_1 = k$ elde edilir. $k = x$ ise, $U(l_2, y) = k = x$ eşitliğinden $x \leq_U y$ elde edilir ki bu varsayımla çelişir. O halde $l_1 = k$ olmalıdır. Benzer şekilde $l_2 = k$ elde edilir. $k + x = l_1 + x > \frac{1}{2}$, $k + y = l_2 + y > \frac{1}{2}$ ve $x + y \leq \frac{1}{2}$ olduğundan, $k > \frac{1}{2} - x \geq y$ elde edilir. Bu ise $k = U(l_2, y) = U(k, y) = Min(k, y) = y$ olması ise çelişir.

• $x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve $x + y > \frac{1}{2}$ olsun. $x, y \in [0,1]$ için, $x \leq y$ olduğu varsayılsın. Bu durumda $U(x,y) = \mathrm{Min}(x,y) = x$ olduğundan $x \leq_U y$ elde edilir ki x ve y nin $\leq_U$ sırasına göre kıyaslanamaz olması ile çelişir. Benzer şekilde $x, y \in [0,1]$ için, $y \leq x$ ise, $y \leq_U x$ edilir ve bu da benzer şekilde bir çelişkidir.

• $x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ve $x \leq y$ olsun. $l \coloneqq y \geq \frac{1}{2}$ seçilirse $U(l, x) = Mak(l, x) = Mak(y, x) = y$ olup $x \leq_U y$ olur ki bu da x ve y nin $\leq_U$ sırasına göre kıyaslanamaz olması ile çelişir. Benzer şekilde $y \leq x$ iken $y \leq_U x$ çelişkisi bulunur.

• $x, y \notin \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve $x, y \notin \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ olsun. Böylece U nun tanımından, $x \leq y$ den $x \leq_U y$ veya $y \leq x$ olması durumunda ise $y \leq_U x$ olur ki bu da x ve y nin $\leq_U$ sırasına göre kıyaslanamaz olması ile çelişir.

Böylece, x ve y $\leq_U$ sırasına göre kıyaslanamaz ise $x \wedge_U y = 0$ olur. Yani, $([0,1], \leq_U)$ infimum yarı-kafestir.

$([0,1], \leq_U)$ supremum yarı-kafes olmadığı gösterilsin. $\frac{1}{4}, \frac{1}{8} \in [0,1]$ alınsın. $\frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{8}$ nin $\leq_U$ sırasına göre kıyaslanabilir olmadığı açıktır. $\leq_U$ nun tanımından her $\frac{1}{2} < k$ için $\frac{1}{4} \leq_U k$ ve $\frac{1}{8} \leq_U k$ elde edilir. Böylece $k \in \overline{\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}}_{\leq_U}$ elde edilir. $t \leq \frac{1}{2}$ ve $t \in \overline{\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}}_{\leq_U}$ olsun. $\frac{1}{4} \leq_U t$ ve $\frac{1}{8} \leq_U t$ olduğundan, $U(l_1, t) = \frac{1}{4}$ ve $U(l_2, t) = \frac{1}{8}$ olacak şekilde $l_1, l_2 \leq \frac{1}{2}$ mevcuttur. Buradan, $l_1 + t > \frac{1}{2}$ ve $l_2 + t > \frac{1}{2}$ elde edilir. U nun tanımından, $U(l_1, t) = Min(l_1, t) = \frac{1}{4}$ ve $U(l_2, t) = Min(l_2, t) = \frac{1}{8}$ elde edilir. $Min(l_1, t) = t = \frac{1}{4}$ ise, $U\left(l_2, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$ olup $\frac{1}{8} \leq_U \frac{1}{4}$ elde edilir, bu bir çelişkidir. $Min(l_2, t) = t = \frac{1}{8}$ ise, benzer çelişki elde edilir. O halde, $Min(l_1, t) = l_1 = \frac{1}{4}$ ve $Min(l_2, t) = l_2 = \frac{1}{8}$ olmalıdır. $l_1 + t > \frac{1}{2}$ ve $l_2 + t > \frac{1}{2}$ olduğundan $t > \frac{3}{8}$ elde edilir.

Tersine $t > \frac{3}{8}$ alalım. $U\left(\frac{1}{4}, t\right) = \frac{1}{4}$ ve $U\left(\frac{1}{8}, t\right) = \frac{1}{8}$ olduğundan $\frac{1}{4}, \frac{1}{8} \leq_U t$ elde edilir. Böylece $t \in \overline{\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}}_{\leq_U}$ olduğu elde edilir.

O halde $\overline{\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right\}}_{\leq_U} = \left(\frac{3}{8}, 1\right]$ olduğu elde edilmiş olur. $\left(\frac{3}{8}, 1\right]$ kümesinin en küçük elemanı olmadığından $\frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{8}$ in supremumu mevcut değildir. Böylece $([0,1], \leq_U)$ supremum yarı-kafes değildir. O halde kafes değildir.

Önerme 2.16. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L\backslash\{0,1\}$ olmak üzere U, e birim elemanlı bir uninorm olsun. T^* ve S^* bölünebilirdir ancak ve ancak $\leq_U = \leq$.

İspat:

Önerme 2.11. den $a, b \in L$ için $a \leq_U b$ ise $a \leq b$ dir. Tersine, $a \leq b$ olsun.

• $a, b \in [0, e]$ olsun. T^* bölünebilir olduğundan $\leq_{T^*} = \leq$ dir. Yani, $a \leq_{T^*} b$ dir. O halde $T^*(l, b) = a$ olacak şekilde $l \leq e$ mevcuttur. $l \leq e$ için $U(l, b) = U \downarrow [0, e]\ (l, b) = T^*(l, b) = a$ olduğundan $a \leq_U b$ dir.

• $a, b \in [e, 1]$ olsun. S^* bölünebilir olduğundan $\leq_{S^*} = \leq$ dir. Yani, $a \leq_{S^*} b$ dir. O halde $S^*(l^*, a) = b$ olacak şekilde $l^* \geq e$ mevcuttur. $l^* \geq e$ için $U(l^*, a) = U \downarrow [e, 1]\ (l^*, a) = S^*(l^*, a) = b$ olduğundan $a \leq_U b$ dir.

• $a, b \notin [0, e]$ ve $a, b \notin [e, 1]$ olsun. Bu durumda da $a \leq b$ iken $a \leq_U b$ olduğu açıktır.

Böylece T^* ve S^* bölünebilir iken $\leq_U = \leq$ olduğu elde edilir.

Tersine, varsayalım ki $\leq_U = \leq$ olsun. $a, b \in [0, e]$ için $a \leq b$ olsun. Varsayımdan $a \leq_U b$ elde edilir. $a, b \in [0, e]$ olduğundan, $a \leq_U b$ olması $a \leq_{T^*} b$ olduğunu verir. Buradan, $T^*(l, b) = a$ olacak şekilde $l \leq e$ mevcut olduğu elde edilir ki bu da T^* ın bölünebilir olduğunu verir. Benzer şekilde S^* ın da bölünebilir olduğu elde edilir. Böylece $\leq_U = \leq$ iken T^* ve S^* bölünebilir olduğu sonucuna varılır■

Sonuç 2.17. $U: [0,1]^2 \to [0,1]$, $e \in (0,1)$ birim elamanlı bir uninorm olsun. T_U ve S_U süreklidir ancak ve ancak $\leq_U = \leq$. Üstelik U, L kafesi üzerinde idempotent uninorm ise $T^* = T_\wedge$ ve $S^* = S_\vee$ dur. Böylece $\leq_U$ ve $\leq$ sırası çakışır.

İspat:

$U: [0,1]^2 \to [0,1]$, $e \in (0,1)$ birim elamanlı bir uninorm olsun O halde U nun belirlediği t-norm ve t-konorm sırasıyla T_U ve S_U dur ([14]). Önerme 1.44. den T_U ve S_U süreklidir ancak ve ancak T_U ve S_U bölünebilirdir. O halde, Önerme 2.16 ile T_U ve S_U süreklidir ancak ve ancak $\leq_U = \leq$. Ayrıca, $T_\wedge$ ve $S_\vee$ bölünebilir olduğundan Önerme 2.16 ile $\leq_U = \leq$ dir. Böylece U idempotent bir uninorm ise $\leq_U = \leq$ olduğu elde edilir ■

Sonuç 2.18. $U: [0,1]^2 \to [0,1]$, $e \in (0,1)$ birim elamanlı bir uninorm olsun. U representable ise, $\leq_U = \leq$ dir.

İspat:

U representable ise, Teorem 1.53 den, U uninormu $[0,1]^2 \backslash \{(0,1), (1,0)\}$ üzerinde süreklidir. Yani, U hemen hemen süreklidir. Teorem 1.54. den T_U ve S_U süreklidir. Böylece $\leq_U = \leq$ dir■

Uyarı 2.19. Sonuç 2.18. in tersi doğru olmak zorunda değildir. Yani, $\leq_U = \leq$ ise, U representable olmak zorunda değildir. Gerçekten, keyfi bir idempotent U uninormu alınırsa, Sonuç 2.17 den açıkça $\leq_U = \leq$ dir. Fakat Uyarı 1.60. dan bilinir ki, U idempotent bir uninorm olduğundan representable değildir.

Önerme 2.20. $T: L^2 \to L$, L üzerinde bir t-norm ve S, T nin N-dual t-konormu olsun. Bu takdirde, $(L, \leq_T)$ infimum (supremum) yarı kafestir ancak ve ancak $(L, \leq_S)$ supremum (infimum) yarı kafestir.

İspat:

$(L, \leq_T)$ infimum yarı kafes olsun. S, T nin N-dual t-konormu olduğundan her $x, y \in L$ için $N: L \to L$ güçlü negasyon olmak üzere $S(x, y) = N\big(T(x), T(y)\big)$ dir. $x, y \in L$ keyfi olmak üzere $N(x), N(y) \in L$ dir ve $(L, \leq_T)$ infimum yarı kafes olduğundan $N(x)$ ve $N(y)$ nin $\leq_T$ sırasına göre infimumu mevcuttur. $N(x) \wedge_T N(y) = k$ olsun. Buradan $k \leq_T N(x), N(y)$ elde edilir. O halde, $T(N(x), k_1) = k$ ve , $T(N(y), k_2) = k$ olacak şekilde $k_1, k_2 \in L$ mevcuttur. N güçlü negasyon olduğundan, $N\big(T(N(x), k_1)\big) = N(k)$ ve $N\big(T(N(y), k_2)\big) = N(k)$ elde edilir. Buradan da $S\big(x, N(k_1)\big) = N(k)$ ve $S\big(y, N(k_2)\big) = N(k)$ olduğu bulunur. O halde $x \leq_s N(k)$ ve $y \leq_s N(k)$ olup $N(k) \in \overline{\{x, y\}}_{\leq_S}$ dir. $m \in \overline{\{x, y\}}_{\leq_S}$ keyfi alınsın. Böylece, $x, y \leq_s m$ dir. $\leq_s$ nin tanımından $S(x, m_1) = m$ ve $S(y, m_2) = m$ olacak şekilde $m_1, m_2 \in L$ mevcuttur. S nin, T nin N-dual t-konormu olması kullanılırsa, $N(T\big(N(x), N(m_1)\big) = S(x, m_1) = m$ ve $N(T\big(N(y), N(m_2)\big) = S(y, m_2) = m$ olduğu görülür. N güçlü negasyon olduğundan, $T\big(N(x), N(m_1)\big) = N(m)$ ve $T\big(N(y), N(m_1)\big) = N(m)$ elde edilir. Bu ise $N(m) \leq_T N(x), N(y)$ olduğunu verir. O halde $N(m) \in \underline{\{N(x), N(y)\}}_{\leq_T}$ dir. $N(x) \wedge_T N(y) = k$ olduğundan, $N(m) \leq_T k$ dır. O halde $T(l, k) = N(m)$ olacak şekilde $l \in L$ mevcuttur. N nin güçlü negasyon olduğu kullanılırsa $m = N\Big(T\Big(N\big(N(l)\big), N\big(N(k)\big)\Big)\Big) = S\big(N(l), N(k)\big)$ elde edilir. Böylece $N(k) \leq_s m$ olup $x \vee_S y = N(k)$ dır■

Tersine, $(L, \leq_S)$ supremum yarı kafes iken $(L, \leq_T)$ nin infimum yarı kafes olduğu da benzer şekilde gösterilir.

Sonuç 2.21. $T: L^2 \to L$, L üzerinde bir t-norm ve S, T nin N-dual t-konormu olsun. Bu takdirde, $(L, \leq_T)$ sınırlı kafestir ancak ve ancak $(L, \leq_S)$ sınırlı kafestir.

İspat:

Önerme 2.20 ile $(L, \leq_T)$ infimumum (supremum) yarı kafestir ancak ve ancak $(L, \leq_S)$ supremum (infimum) yarı kafestir . O halde $(L, \leq_T)$ hem infimum hem supremum kafestir (yani kafestir) ancak ve ancak $(L, \leq_S)$ hem supremum hem infimum kafestir (yani kafestir). Üstelik $(L, \leq_T)$ sınırlı kafes ise yani her $x \in L$ için $a \leq_T x \leq_T b$ olacak şekilde a ve b

mevcut iken $(L,\leq_S)$ de sınırlı kafestir ve her $y \in L$ için $N(b) \leq_S y \leq_S N(a)$ dır. Tersi de doğrudur. O halde, $(L,\leq_T)$ sınırlı kafestir ancak ve ancak $(L,\leq_S)$ sınırlı kafestir.

Önerme 2.22. $(L,\leq,0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L\backslash\{0,1\}$, L nin tüm elemanları ile kıyaslanabilir bir birim eleman olmak üzere U, e birim elemanlı bir uninorm olsun. $([0,e],\leq_{T^*})$ ve $([e,1],\leq_{S^*})$ kafestir ancak ve ancak $(L,\leq_U)$ kafestir.

İspat:

$([0,e],\leq_{T^*})$ ve $([e,1],\leq_{S^*})$ kafes olsun.

• $x,y \in [0,e]$ keyfi alınsın. $([0,e],\leq_{T^*})$ kafes olduğundan $x \vee_{T^*} y$ ve $x \wedge_{T^*} y$ mevcuttur. $x \vee_{T^*} y = k \in [0,e]$ ve $x \wedge_{T^*} y = m \in [0,e]$ olsun. $x \vee_U y = k$ ve $x \wedge_U y = m$ olduğu gösterilsin. $x \vee_{T^*} y = k$ olması sebebiyle $x \leq_{T^*} k$ ve $y \leq_{T^*} k$ olduğundan, $T^*(l_1,k) = x$ ve $T^*(l_2,k) = y$ olacak şekilde $l_1, l_2 \in [0,e]$ mevcuttur. $U(l_1,k) = U \downarrow [0,e]\ (l_1,k) = T^*(l_1,k) = x$ ve $U(l_2,k) = U \downarrow [0,e]\ (l_2,k) = T^*(l_2,k) = y$ olduğundan, $x \leq_U k$ ve $y \leq_U k$ yani $k \in \overline{\{x,y\}}_U$ dur. $t \in \overline{\{x,y\}}_U$ keyfi alalım. O halde $x \leq_U t$ ve $y \leq_U t$ dir. e tüm elemanlarla kıyaslanabilir olduğundan, $t \leq e$ veya $e \leq t$ dir.

$t \leq e$ olsun. $x = U(l_1,t) = U \downarrow [0,e](l_1,t) = T^*(l_1,t)$ ve $y = U(l_2,t) = U \downarrow_{[0,e]} (l_2,t) = T^*(l_2,t)$ olacak şekilde $l_1, l_2 \leq e$ mevcuttur. Buradan, $x \leq_{T^*} t$ ve $y \leq_{T^*} t$ olduğu elde edilir. Böylece $t \in \overline{\{x,y\}}_{T^*}$ olduğu görülür. $x \vee_{T^*} y = k$ olduğu bilindiğinden, $k \leq_{T^*} t$ bulunur. Buradan, $U(t,s) = U \downarrow [0,e](t,s) = T^*(t,s) = k$ olacak şekilde $s \in [0,e]$ olduğu elde edilir. Bu ise $k \leq_U t$ olduğunu gösterir.

$e \leq t$ olsun. O halde $k \leq t$ dir. $k \in [0,e]$ ve $t \in [e,1]$ olduğundan $k \leq_U t$ elde edilir.

Böylece $x \vee_U y = k$ dır. Benzer şekilde $x \wedge_U y = m$ olduğu gösterilir.

• $x,y \in [e,1]$ keyfi alınsın. $([e,1],\leq_{S^*})$ kafes olduğundan $x \vee_{S^*} y = k^* \in [e,1]$ ve $x \wedge_{S^*} y = m^* \in [e,1]$ olacak şekilde mevcuttur. İlk kısımda yapılanlara benzer şekilde, $x \vee_U y = k^*$ ve $x \wedge_U y = m^*$ olduğu gösterilir.

• Aksi takdirde, e L nin bütün elemanları ile kıyaslanabildiğinden $x \leq e \leq y$ veya $y \leq e \leq x$ olmalıdır.

$x \leq e \leq y$ olsun. $x \leq y$ olduğundan $x \leq_U y$ elde edilir. Bu durumda $x \vee_U y = y$ ve $x \wedge_U y = x$ dir.

$y \leq e \leq x$ olsun. Benzer şekilde $x \vee_U y = x$ ve $x \wedge_U y = y$ olduğu elde edilir.

Böylece $(L,\leq_U)$ kafestir.

Tersine, $(L,\leq_U)$ kafes ise $([0,e],\leq_{T^*})$ ve $([e,1],\leq_{S^*})$ de kafestir ■

Sonuç 2.23. L bir zincir, $e \in L \backslash \{0,1\}$ olacak şekilde U, e birim elemanlı bir uninorm olsun. S^*, T^* ın N-dual t-konormu olsun. $([0,e], \leq_{T^*})$ kafestir ancak ve ancak $(L, \leq_U)$ kafestir.

İspat:

Sonuç 2.21 ile S^*, T^* ın N-dual t-konormu iken $([0,e], \leq_{T^*})$ kafestir ancak ve ancak $([e,1], \leq_{S^*})$ de kafestir. Önerme 2.22 ile $([0,e], \leq_{T^*})$ ve $([e,1], \leq_{S^*})$ kafestir ancak ve ancak $(L, \leq_U)$ kafestir. Bu iki sonucu birleştirerek $([0,e], \leq_{T^*})$ kafestir ancak ve ancak $(L, \leq_U)$ kafestir■

Sonuç 2.24. U, $[0,1]$ üzerinde $e \in (0,1)$ birim elemanlı bir uninorm olsun. U nun belirlediği t-norm ve t-konorm sırasıyla T_D ve S_D olsun. O halde $([0,1], \leq_U)$ kafestir.

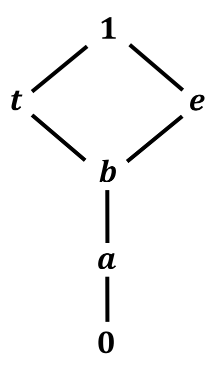
İspat:

U nun altındaki t-norm T_D olsun. Önerme 1.71 den $\left([0,e], \leq_{T_D}\right)$ kafestir. Sonuç 2.21 den $\left([e,1], \leq_{S_D}\right)$ kafestir. Böylece Önerme 2.22 den $([0,1], \leq_U)$ kafestir■

Uyarı 2.25. Önerme 2.16 ve Sonuç 2.24 ün bir genellemesi olarak, U nun belirlediği t-normu T_λ lar Schweizer-Sklar, Hamacher, Frank, Yager, Aczel-Alsina, Dombi, Sugeno-Weber ve Mayor-Torrens t-norm aileleri ([28]) olmak üzere T_λ lar olarak ve U nun belirlediği t-konormu da T_λ ların dual t-konormları olarak alınırsa $([0,1], \leq_U)$ kafestir.

Uyarı 2.26. Önerme 2.22 deki koşul kaldırılırsa, yani e, L nin tüm elemanları ile kıyaslanmıyorsa, aşağıdaki örnekte olduğu gibi iddia doğru olmak zorunda değildir.

Örnek 2.27. Kafes diagramı aşağıdaki gibi olan $(L, \leq, 0, 1)$ kafesi göz önüne alınsın.



Şekil 2.11. $(L = \{0, a, b, t, e, 1\}, \leq)$

L kafesi üzerinde tanımlı e birim elemanlı U uninormu şu şekilde tanımlansın:

Tablo 9. $L = \{0, a, b, t, e, 1\}$ üzerinde U uninormu

U	0	a	b	t	e	1
0	0	0	0	t	0	1
a	0	0	0	t	a	1
b	0	0	0	t	b	1
t	t	t	t	1	t	1
e	0	a	b	t	e	1
1	1	1	1	1	1	1

Yukarıda tanımlı olan U uninormunun altındaki T^* t-normu ve S^* t-konormu şu şekildedir:

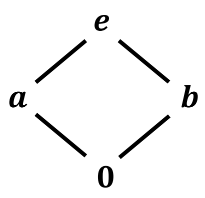
Tablo 10. T^* t-normu

T^*	0	a	b	e
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	0	0	b
e	0	a	b	e

Tablo 11. S^* t-konormu

S^*	e	1
e	e	1
1	1	1

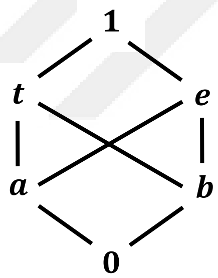
Aşağıda $([0, e], \leq_{T^*})$ ve $([e, 1], \leq_{S^*})$ kafes diyagramları gösterilmiştir:



Şekil 2.12.$([0,e],\leq_{T^*})$

Şekil 2.13. $([e,1],\leq_{S^*})$

Son olarak $(L,\leq_U)$ kafes diagramı aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 2.14. $(L=\{0,a,b,t,e,1\},\leq_U)$

Yukarıdaki kafes diagramlarından da açıkça görülür ki $([0,e],\leq_{T^*})$ ve $([e,1],\leq_{S^*})$ kafes iken $(L,\leq_U)$ kafes değildir.

Önerme 2.28. L bir zincir, $e\in L\backslash\{0,1\}$ olmak üzere U, e birim elemanlı bir uninorm ve H_U, U nun tüm idempotent elemanlarının kümesi olsun. Bu takdirde, $(H_U,\leq_U)$ bir zincirdir.

İspat:

$a,b\in H_U$ olsun. L zincir olduğundan, herhangi $a,b\in L$ için ya $a\leq b$ ya da $b\leq a$ dır. $a\leq b$ olduğu varsayılsın.

• $a, b \in [0, e]$ olsun. $a = U(a, a) \leq U(a, b) \leq U(a, e) = a$ olduğundan $U(a, b) = a$ elde edilir. Yani $a \leq_U b$ dir.

• $a, b \in [e, 1]$ olsun. $b = U(e, b) \leq U(a, b) \leq U(b, b) = b$ olduğundan $U(a, b) = b$ elde edilir. Yani $a \leq_U b$ dir.

• Aksi takdirde $a \leq b$ olduğundan, $a \leq e \leq b$ olup $a \leq_U b$ dir■

Önerme 2.29. L sınırlı bir kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$ olmak üzere U, e birim elemanlı bir uninorm ve H_{T^*} ve H_{S^*}, sırasıyla T^* ve S^* in tüm idempotent elemanlarının kümesi olsun. Eğer T^*, $\vee$-dağılmalı t-norm ve S^*, $\wedge$-dağılmalı t-konorm ise, $(H_{T^*} \cup H_{S^*}, \leq_U)$ sınırlı bir kafestir.

İspat:

$a, b \in H_{T^*} \cup H_{S^*}$ keyfi alınsın.

• $a, b \in H_{T^*}$ olsun. O halde, $U(a, a) = T^*(a, a) = a$ ve $U(b, b) = T^*(b, b) = b$ dir. $a, b \in [0, e]$ için $U(a, b) = U(a, b)$ olduğundan $U(a, b) \leq_U a, b$ elde edilir. Böylece $U(a, b) \in \underline{\{a, b\}}_{\leq_U}$ dır. $l \in \underline{\{a, b\}}_{\leq_U}$ keyfi alınsın. O halde $l \leq_U a, b$ dir. Bu takdirde, $U(l_1, a) = l$ ve $U(l_2, b) = l$ olacak şekilde $l_1, l_2 \in [0, e]$ mevcuttur. Buradan, $U(l, a) = U(U(l_1, a), a) = U\big(l_1, U(a, a)\big) = U(l_1, a) = l$ ve $U(l, b) = U(U(l_2, b), b) = U\big(l_2, U(b, b)\big) = U(l_2, b) = l$ elde edilir. $U\big(l, U(a, b)\big) = U(U(l, a), b) = U(l, b) = l$ olduğundan, $l \leq_U U(a, b)$ dir. Böylece $a \wedge_U b = U(a, b)$ olduğu görülür.

$a, b \in [0, e]$ olduğundan, $a \vee b \leq e$ dir. $a = T^*(a, a) \leq T^*(a \vee b, a \vee b)$ ve benzer şekilde $b = T^*(b, b) \leq T^*(a \vee b, a \vee b)$ olduğundan $a \vee b \leq T^*(a \vee b, a \vee b) \leq T^*(a \vee b, e) = a \vee b$ elde edilir. Bu ise $T^*(a \vee b, a \vee b) = a \vee b$ olduğunu verir. Buradan da $a \vee b \in H_{T^*}$ elde edilir. Üstelik $a = T^*(a, a) \leq T^*(a \vee b, a) \leq T^*(e, a) = a$ ve $b = T^*(b, b) \leq T^*(a \vee b, b) \leq T^*(e, b) = b$ olduğundan, $a = T^*(a \vee b, a) = U(a \vee b, a)$ ve $b = T^*(a \vee b, b) = U(a \vee b, b)$ olduğu elde edilir. Bu ise $a, b \leq_U a \vee b$ olduğunu ve buradan $a \vee b \in \overline{\{a, b\}}_{\leq_U}$ olduğunu verir.

$k \in \overline{\{a, b\}}_{\leq_U}$ keyfi alınsın. O halde $a, b \leq_U k$ dır. $k \in [0, e]$ ise $T^*(l_1, k) = U(l_1, k) = a$ ve $T^*(l_2, k) = U(l_2, k) = b$ olacak şekilde $l_1, l_2 \in [0, e]$ mevcuttur. T^*, $\vee$-dağılmalı olduğundan, $a \vee b = T^*(l_1, k) \vee T^*(l_2, k) = T^*(k, l_1 \vee l_2)$ olur. Buradan da $a \vee b \leq_U k$ elde edilir. $k \notin [0, e]$ ise $a, b \leq_U k$ olduğundan $a, b \leq k$ elde edilir. Böylece $a \vee b \leq k$ olur. Buradan $a \vee b \leq_U k$ olduğu elde edilir. O halde $a \vee_U b = a \vee b$ dir.

• $a, b \in H_{S^*}$ olsun. Benzer şekilde $a \vee_U b = U(a,b)$ ve $a \wedge_U b = a \wedge b$ olduğu görülür.

• $a \in H_{T^*}$ ve $b \in H_{S^*}$ olsun. Bu takdirde, $a \leq e \leq b$ dir. $\leq_U$ nun tanımından, $a \leq_U b$ olduğu elde edilir. Böylece $a \vee_U b = b$ ve $a \wedge_U b = a$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde, $a \in H_{S^*}$ ve $b \in H_{T^*}$ iken $a \vee_U b = a$ ve $a \wedge_U b = b$ olduğu görülür.

Böylece, $(H_{T^*} \cup H_{S^*}, \leq_U)$ bir kafestir. Üstelik, $0 \in H_{T^*}$ ve $1 \in H_{S^*}$ olduğundan, $(H_{T^*} \cup H_{S^*}, \leq_U)$ sınırlı bir kafestir■

Sonuç 2.30. L bir tam kafes, $e \in L\backslash\{0,1\}$ olmak üzere U, e birim elemanlı bir uninorm olsun. Eğer T^*, sonsuz $\vee$-dağılmalı t-norm ve S^*, sonsuz $\wedge$-dağılmalı t-konorm ise, $(H_{T^*} \cup H_{S^*}, \leq_U)$ bir tam kafestir.

İspat:

Teorem 1.73 kullanıldığında istenen sonuç elde edilir■

Uyarı 2.31. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L\backslash\{0,1\}$ olmak üzere U, e birim elemanlı bir uninorm olsun. T^* ve S^* bölünebilirken $\leq_U = \leq$ olduğundan, $\leq_U$ sırasına göre monotonluğun sağlandığı açıktır. Fakat genel durumda U, $\leq_U$ sırasına göre monotonluğu sağlamak zorunda değildir. Örneğin, $0 < a < b < c < d < e < 1$ sırasıyla $L = \{0, a, b, c, d, e, 1\}$ kafesini ve aşağıdaki gibi tanımlanan c birim elemanlı $U: L^2 \to L$ uninormunu alalım:

Tablo 12. $L = \{0, a, b, c, d, e, 1\}$ üzerinde U uninormu

U	0	a	b	c	d	e	1
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	d	d	1
b	0	a	b	b	d	e	1
c	0	a	b	c	d	e	1
d	0	d	d	d	1	1	1
e	0	d	e	e	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1

$a \leq c$ için $U(a,b) = a$ olduğundan, $a \leq_U b$ olduğu açıktır. Varsayalım U, $\leq_U$ sırasına göre monoton olsun. O halde, $d = U(a,e) \leq_U U(b,e) = e$ olmalıdır. Fakat, $U(d,t) = e$

olacak şekilde $c \leq t$ mevcut değildir. Bu sebeple $d \nleq_U e$ dir ve U, $\leq_U$ sırasına göre monoton değildir.

2.2.2. n-Uninormdan Elde Edilen Sıralama

Bu bölümde, Bölüm 2.2.1 de tanımı verilen ve bazı özellikleri incelenen uninormdan elde edilen $\leq_U$ kısmen sıra, öncelikle L zinciri üzerinde 2-uninormdan elde edilen $\leq_{U^2}$ ye genelleştirilerek $\leq_T$, $\leq_S$, $\leq_{U^2}$ ve V bir nullnorm olmak üzere bir nullnormdan elde edilen $\leq_V$ sıra ile ilişkisi verilmiş, ardından daha genel olarak L zinciri üzerinde n-uninormdan elde edilen $\leq_{U^n}$ ye genelleştirilmiştir.

Tanım 2.32. L bir zincir olmak üzere $U^2 \in U_{k(e,f)}$ olsun. $x, y \in L$ için

$x \leq_{U^2} y$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in [0, e] \text{ iken } U^2(l, y) = x \text{ olacak şekilde } l \in [0, e] \text{ mevcut ise,} \\ \text{veya} \\ x, y \in [\mathrm{e}, k] \text{ iken } U^2(x, m) = y \text{ olacak şekilde } m \in [\mathrm{e}, k] \text{ mevcut ise,} \\ \text{veya} \\ x, y \in [\mathrm{k}, f] \text{ iken } U^2(y, n) = x \text{ olacak şekilde } n \in [\mathrm{k}, f] \text{ mevcut ise,} \\ \text{veya} \\ x, y \in [\mathrm{f}, 1] \text{ iken } U^2(x, p) = y \text{ olacak şekilde } p \in [\mathrm{f}, 1] \text{ mevcut ise,} \\ \text{veya} \\ \text{Aksi takdirde } x \leq y \text{ ise.} \end{cases} \tag{4}$$

Önerme 2.33. (4) ile tanımlanan $\leq_{U^2}$ bağıntısı L zinciri üzerinde bir kısmen sıralamadır.

İspat:

(i) $x \in L$ keyfi bir eleman olmak üzere $x \leq_{U^2} x$ olduğu, yani yansıma özelliğini sağladığı gösterilmelidir. Tüm olası durumlar aşağıda incelenmiştir:

1.1. $x \in [0, e]$

Bu takdirde $U^2(x, e) = x$ olduğundan $x \leq_{U^2} x$ dir.

1.2. $x \in [e, k]$

Bu takdirde $U^2(x, e) = x$ olduğundan $x \leq_{U^2} x$ dir.

1.3. $x \in [k, f]$

Bu takdirde $U^2(x, f) = x$ olduğundan $x \leq_{U^2} x$ dir.

1.4. $x \in [f, 1]$

Bu takdirde $U^2(x, f) = x$ olduğundan $x \leq_{U^2} x$ dir.

(ii) $x, y \in L$ için $x \leq_{U^2} y$ ve $y \leq_{U^2} x$ olsun. $x = y$ olduğu, yani ters simetri özelliğini sağladığı gösterilmelidir. Tüm olası durumlar aşağıda incelenmiştir:

2.1. $x, y \in [0, e]$

Bu takdirde $x \leq_{U^2} y$ ve $y \leq_{U^2} x$ olduğundan $U^2(y, l_1) = x$ ve $U^2(x, l_2) = y$ olacak şekilde $l_1, l_2 \leq e$ mevcuttur. $x = U^2(y, l_1) \leq U^2(y, e) = y$ ve $y = U^2(x, l_2) \leq U^2(x, e) = x$ olduğundan $x = y$ elde edilir.

2.2. $x, y \in [e, k]$

Bu takdirde $x \leq_{U^2} y$ ve $y \leq_{U^2} x$ olduğundan $U^2(x, l_2) = y$ ve $U^2(y, l_1) = x$ olacak şekilde $l_1, l_2 \in [e, k]$ mevcuttur. $x = U^2(x, e) \leq U^2(x, l_2) = y$ ve $y = U^2(y, e) \leq U^2(y, l_1) = x$ olduğundan $x = y$ elde edilir.

2.3. $x, y \in [k, f]$

Bu takdirde $x \leq_{U^2} y$ ve $y \leq_{U^2} x$ olduğundan $U^2(y, l_1) = x$ ve $U^2(x, l_2) = y$ olacak şekilde $l_1, l_2 \in [k, f]$ mevcuttur. $x = U^2(y, l_1) \leq U^2(y, f) = y$ ve $y = U^2(x, l_2) \leq U^2(x, f) = x$ olduğundan $x = y$ elde edilir.

2.4. $x, y \in [f, 1]$

Bu takdirde $x \leq_{U^2} y$ ve $y \leq_{U^2} x$ olduğundan $U^2(x, l_2) = y$ ve $U^2(y, l_1) = x$ olacak şekilde $l_1, l_2 \in [f, 1]$ mevcuttur. $x = U^2(x, f) \leq U^2(x, l_2) = y$ ve $y = U^2(y, f) \leq U^2(y, l_1) = x$ olduğundan $x = y$ elde edilir.

2.5. Aksi takdirde,

Kalan tüm olası durumlarda $x \leq_{U^2} y$ ve $y \leq_{U^2} x$ olması $x \leq y$ ve $y \leq x$ olduğunu verir. Buradan $x = y$ olduğu elde edilir.

(iii) $x, y, z \in L$ için $x \leq_{U^2} y$ ve $y \leq_{U^2} z$ olsun. $x \leq_{U^2} z$ olduğu, yani geçişme özelliğini sağladığı gösterilmelidir. Tüm olası durumlar aşağıda incelenmiştir:

3.1. $x \in [0, e]$

3.1.1. $y \in [0, e]$

3.1.1.1. $z \in [0, e]$

Bu takdirde $x \leq_{U^2} y$ ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan $U^2(y, m) = x$ ve $U^2(z, n) = y$ olacak şekilde $m, n \leq e$ mevcuttur. $x = U^2(y, m) = U^2(U^2(z, n), m) = U^2\big(z, U^2(n, m)\big)$ elde edilir. $U^2(n, m) \leq e$ olduğundan $x \leq_{U^2} z$ elde edilir.

3.1.1.2. $z \notin [0, e]$

Bu takdirde $x \leq_{U^2} y$ olduğundan $U^2(y, m) = x$ olacak şekilde $m \leq e$ mevcuttur ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan $y \leq z$ elde edilir. $x = U^2(y, m) \leq U^2(y, e) = y \leq z$ elde edilir ki bu da $x \leq_{U^2} z$ olduğunu verir.

3.1.2. $y \in [e, k]$

$z \in [0, e]$ olması durumu, $y \leq_{U^2} z$ olduğundan $y = z$ olmasını gerektirir. Bu durum açıktır. $z \notin [0, e]$ olsun:

3.1.2.1. $z \in [e, k]$

$x \leq_{U^2} y$ olduğundan $x \leq y$ ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan $U^2(y, m) = z$ olacak şekilde $m \in [e, k]$ nın mevcut olduğu elde edilir. $x \leq y = U^2(y, e) \leq U^2(y, m) = z$ elde edilir, buradan $x \leq_{U^2} z$ dir.

3.1.2.2. $z \notin [e, k]$

Bu takdirde $x \leq_{U^2} y$ ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan sırasıyla $x \leq y$ ve $y \leq z$ yani $x \leq z$ elde edilir. Bu ise $x \leq_{U^2} z$ olduğunu verir.

3.1.3. $y \in [k, f]$

$y \leq_{U^2} z$ olduğundan $z \in [0, k]$ olması durumu $y = z$ olmasını gerektirir ki bu durum açıktır. $z \notin [0, k]$ olsun:

3.1.3.1. $z \in [k, f]$

$x \leq_{U^2} y$ olduğundan $x \leq y$ ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan $U^2(z, m) = y$ olacak şekilde $m \in [k, f]$ nin mevcut olduğu elde edilir. $x \leq y = U^2(z, m) \leq U^2(z, f) = z$ olduğundan, $x \leq_{U^2} z$ dir.

3.1.3.2. $z \notin [k, f]$

Bu takdirde $x \leq_{U^2} y$ ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan sırasıyla $x \leq y$ ve $y \leq z$ yani $x \leq z$ elde edilir. Bu ise $x \leq_{U^2} z$ olduğunu verir.

3.1.4. $y \in [f, 1]$

$y \leq_{U^2} z$ olduğundan $z \in [0, f]$ olması durumu $y = z$ olmasını gerektirir ki bu durum açıktır. $z \notin [0, f]$ olsun:

3.1.4.1. $z \in [f, 1]$

$x \leq_{U^2} y$ olduğundan $x \leq y$ ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan $U^2(y, m) = z$ olacak şekilde $m \in [f, 1]$ in mevcut olduğu elde edilir. $x \leq y = U^2(y, f) \leq U^2(y, m) = z$ olduğundan, $x \leq_{U^2} z$ dir.

3.2. $x \in [e, k]$

$y \in [0, e]$ olması durumu ise $x \leq_{U^2} y$ olduğundan $x = y$ olmasını gerektirir, bu durum açıktır. $y \notin [0, e]$ olsun

3.2.1. $y \in [e, k]$

$z \in [0, e]$ olması durumu ise $y \leq_{U^2} z$ olduğundan $y = z$ olmasını gerektirir, bu durum açıktır. $z \notin [0, e]$ olsun

3.2.1.1. $z \in [e, k]$

Bu takdirde $x \leq_{U^2} y$ ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan $U^2(x, m) = y$ ve $U^2(y, n) = z$ olacak şekilde $m, n \in [e, k]$ mevcuttur. $z = U^2(y, n) = U^2(U^2(x, m), n) = U^2\big(x, U^2(m, n)\big)$ elde edilir. $U^2(m, n) \in [e, k]$ olduğundan $x \leq_{U^2} z$ elde edilir.

3.2.1.2. $z \notin [e, k]$

Bu takdirde $x \leq_{U^2} y$ olduğundan $U^2(x, m) = y$ olacak şekilde $m \in [e, k]$ mevcuttur ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan $y \leq z$ elde edilir. $x = U^2(x, e) \leq U^2(x, m) = y \leq z$ elde edilir ki bu da $x \leq_{U^2} z$ olduğunu verir.

3.2.2. $y \in [k, f]$

$y \leq_{U^2} z$ olduğundan, $z \in [0, k]$ olması $y = z$ olmasını gerektirir, bu durum açıktır. $z \notin [0, k]$ olsun:

3.2.2.1. $z \in [k, f]$

$x \leq_{U^2} y$ olduğundan $x \leq y$ ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan $U^2(z, m) = y$ olacak şekilde $m \in [k, f]$ nin mevcut olduğu elde edilir. $x \leq y = U^2(z, m) \leq U^2(z, f) = z$ olduğundan, $x \leq_{U^2} z$ dir.

3.2.2.2. $z \notin [k, f]$

Bu takdirde $x \leq_{U^2} y$ ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan sırasıyla $x \leq y$ ve $y \leq z$ yani $x \leq z$ elde edilir. Bu ise $x \leq_{U^2} z$ olduğunu verir.

3.2.3. $y \in [f, 1]$

$y \leq_{U^2} z$ olduğundan, $z \in [0, f]$ olması $y = z$ olmasını gerektirir ki bu durum açıktır. $z \notin [0, f]$ olsun:

3.2.3.1. $z \in [f, 1]$

$x \leq_{U^2} y$ olduğundan $x \leq y$ ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan $U^2(y, m) = z$ olacak şekilde $m \in [f, 1]$ in mevcut olduğu elde edilir. $x \leq y = U^2(y, f) \leq U^2(y, m) = z$ olduğundan, $x \leq_{U^2} z$ dir.

3.3. $x \in [k, f]$

$x \leq_{U^2} y$ olduğundan, $y \in [0, k]$ olması $x = y$ olmasını gerektirir, bu durum açıktır. $y \notin [0, k]$ olsun:

3.3.1. $y \in [k, f]$

$y \leq_{U^2} z$ olduğundan, $z \in [0, k]$ olması $y = z$ olmasını gerektirir, bu durum açıktır. $z \notin [0, k]$ olsun:

3.3.1.1. $z \in [k, f]$

Bu takdirde $x \leq_{U^2} y$ ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan $U^2(y, m) = x$ ve $U^2(z, n) = y$ olacak şekilde $m, n \in [k, f]$ mevcuttur. $x = U^2(y, m) = U^2(U^2(z, n), m) = U^2\big(x, U^2(n, m)\big)$ elde edilir. $U^2(n, m) \in [k, f]$ olduğundan $x \leq_{U^2} z$ elde edilir.

3.3.1.2. $z \notin [k, f]$

Bu takdirde $x \leq_{U^2} y$ olduğundan $U^2(y, m) = x$ olacak şekilde $m \in [k, f]$ mevcuttur ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan $y \leq z$ elde edilir. $x = U^2(y, m) \leq U^2(y, f) = y \leq z$ elde edilir ki bu da $x \leq_{U^2} z$ olduğunu verir.

3.3.2. $y \in [f, 1]$

$y \leq_{U^2} z$ olduğundan $z \in [0, f]$ olması $y = z$ olmasını gerektirir, bu durum açıktır. $z \notin [0, f]$ olsun:

3.3.2.1. $z \in [f, 1]$

$x \leq_{U^2} y$ olduğundan $x \leq y$ ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan $U^2(y, m) = z$ olacak şekilde $m \in [f, 1]$ in mevcut olduğu elde edilir. $x \leq y = U^2(y, f) \leq U^2(y, m) = z$ olduğundan, $x \leq_{U^2} z$ dir.

3.4. $x \in [f, 1]$

$x \leq_{U^2} y$ olduğundan $y \in [0, f]$ olması $x = y$ olmasını gerektirir, bu durum açıktır $y \notin [0, f]$ olsun:

3.4.1. $y \in [f, 1]$

$y \leq_{U^2} z$ olduğundan $z \in [0, f]$ olması $y = z$ olmasını gerektirir, bu durum açıktır. $z \notin [0, f]$ olsun:

3.4.1.1. $z \in [f, 1]$

Bu takdirde $x \leq_{U^2} y$ ve $y \leq_{U^2} z$ olduğundan $U^2(x, m) = y$ ve $U^2(y, n) = z$ olacak şekilde $m, n \in [f, 1]$ mevcuttur. $z = U^2(y, n) = U^2(U^2(x, m), n) = U^2\big(x, U^2(m, n)\big)$ elde edilir. $U^2(m, n) \in [f, 1]$ olduğundan $x \leq_{U^2} z$ elde edilir.

O halde i, ii, iii den $\leq_{U^2}$ sırasının bir kısmen sıralama bağıntısı olduğu elde edilir ■

Uyarı 2.34. L bir zincir olmak üzere $U^2 \in U_{k(e,f)}$ olsun.

(i) $0 = k \leq f = 1$ ise, U^2 2-uninormu $f = 1$ birim elemanlı bir T üçgensel normdur ve bu durumda $\leq_{U^2} = \leq_T$ dir.

(ii) $0 = e \leq k = 1$ ise, U^2 2-uninormu $e = 0$ birim elemanlı bir S üçgensel konormdur ve bu durumda $\leq_{U^2} = \leq_S$ dir.

(iii) $0 = k \leq f \leq 1$ $(0 \leq e \leq k = 1)$ ise, U^2 2-uninormu f (e) birim elemanlı bir U uninormudur ve bu durumda $\leq_{U^2} = \leq_U$ dur.

(iv) $e = 0$ ve $f = 1$ ise, U^2 2-uninormu k sıfır elemanlı bir V nullnormudur ve bu durumda $\leq_{U^2} = \leq_V$ dir.

(4) ile verilen sıralama n-uninormlara aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

Önerme 2.35. U^n, L zinciri üzerinde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}_{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}}$ birim elemanlı bir n-uninorm olsun.

Bu takdirde $i = 1,2, \dots, n$ için

$$x \leq_{U^n} y :$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in [z_{i-1}, e_i] \text{ iken } U^n(l, y) = x \text{ olacak şekilde } l \in [z_{i-1}, e_i] \text{ mevcut ise,} \\ \qquad\qquad \text{veya} \\ x, y \in [e_i, z_i] \text{ iken } U^n(m, x) = y \text{ olacak şekilde } m \in [e_i, z_i] \text{ mevcut ise,} \\ \qquad\qquad \text{veya} \\ \qquad \text{Aksi takdirde } x \leq y \text{ ise,} \end{cases} \quad (5)$$

olarak tanımlansın. (5) ile verilen bağıntı L üzerinde bir kısmen sıralamadır.

İspat: Önerme 2.33 ün ispatına benzer şekilde yapılır■

3. İRDELEME

Bu tezin amacı sınırlı bir L kafesi üzerinde uninormlar için bir karakterizasyon sunmak, ordinal toplamlardan farklı olarak t-normlar (t-konormlar) ve uninormlar için bazı inşa metotları vermek, sınırlı kafesler üzerinde uninormlardan elde edilen $\leq_U$ sıra tanımını sunarak bazı özelliklerini araştırmak ve bu sıranın genel bir formunu ifade etmektir.

Uninormlar, [0,1] birim reel aralık üzerinde ilk kez 1996 yılında Yager ve Rybalov tarafından "Uninorm aggregation operators" adlı çalışmada ([41]) ortaya konmuştur. Daha sonra bu konuda birçok çalışma yapılmıştır ([7], [22], [29], [32], [37]). Birim reel aralık üzerinde uninormlar, "Aggregation functions" isimli kaynakta karakterize edilmiştir ([16, Önerme 3.95]). Fakat sınırlı kafesler üzerinde uninormların bir karakterizasyonu literatürde mevcut değildir. Bu çalışmanın birinci bölümünde literatürdeki bu boşluğu doldurmak esas amaçtır. Ayrıca sınırlı kafesler üzerinde uninormların karakterizasyonu yardımıyla bilinen inşa metotlarından farklı olarak t-normlar ve t-konormlar için inşa metodu sunulmuştur. İlaveten, [22] ve elde edilen karakterizasyon kullanılarak uninormlar için inşa metotları da önerilmiştir. Ayrıca, zincirler üzerinde uninormlar 0 veya 1 sıfırlayan elemanlarına sahip olabilirken, keyfi sınırlı kafeslerde uninormların 0 veya 1 den farklı olarak bir sıfırlayan elamana sahip olabileceğine dair örnek verilmiştir.

Literatürde t-normlardan ve dual olarak t-conormlardan elde edilen $\leq_T$ $(\leq_S)$ kısmen sıralama çalışmalarına ([2],[18],[21],[25]) ilaveten, fuzzy gerektirmelerden elde edilen sıra üzerine de çalışılmıştır ([27]). Uninormlardan elde edilen ön-sıralama üzerine Hlinêna, Kalina ve Kral bir çalışma yapmıştır ([17]) fakat önerdikleri sıra, ters simetri özelliğini sağlamadığından bir kısmen sıralama bağıntısı değildir. Çalışmanın ikinci kısmında uninormlardan elde edilen $\leq_U$ kısmen sıralama tanımlanmış, $\leq_T$ $(\leq_S)$ kısmen sıralamalar ile ilişkisi araştırılmış, hangi durumlarda kafes üzerindeki doğal sıra $(\leq)$ ile çakıştığı incelenmiş ve bu kısmen sıranın daha genel bir formu olarak önce 2-uninormlar için $\leq_{U^2}$ kısmen sırası sunulmuştur. Ek olarak, $\leq_{U^2}$ sırasının $\leq_T, \leq_S, \leq_U$ sıraları ve bir V nullnormundan elde edilen $\leq_V$ sırası ile ilişkisi ortaya konmuştur. Son olarak ise $\leq_{U^2}$ sırası, n-uninormlardan elde edilen $\leq_{U^n}$ sırasına genelleştirilmiştir.

4. SONUÇLAR

Yaptığımız çalışmada elde edilen başlıca sonuçlar şunlardır:

1. Keyfi sınırlı L kafesi üzerinde uninormlar için bir karakterizasyon önerilmiştir.

2. Bilinen ordinal toplam inşasından farklı olarak, sınırlı kafesler üzerinde t-normlar ve t-konormlar için inşa metotları sunulmuştur.

3. Sınırlı kafesler üzerinde uninormlar için iki genel inşa metodu verilmiştir.

4. Sınırlı L kafesi üzerinde 0 ve 1 den farklı yutan elemana sahip uninorm örneği verilmiştir (Zincirler üzerinde uninormlar için bu durum mümkün değildir).

5. Uninormlardan elde edilen $\leq_U$ kısmen sıralama bağıntısı tanımlanmıştır.

6. $\leq_U$ kısmen sıralama bağıntısının $\leq_T$ $(\leq_S)$ kısmen sıralama bağıntıları ile ilişkisi ortaya konmuştur.

7. $\leq_U$ kısmen sıralama bağıntısının hangi durumlarda L üzerindeki mevcut $\leq$ sıralama bağıntısı ile çakıştığı araştırılmıştır.

8. 2-uninormlar için $\leq_{U^2}$ kısmen sıralama bağıntısı tanımlanmış ve $\leq_{U^2}$ sıralama bağıntısının $\leq_T, \leq_S, \leq_U$ kısmen sıralama bağıntıları ve bir V nullnormundan elde edilen $\leq_V$ kısmen sıralama bağıntısı ile ilişkisi ortaya konmuştur.

9. $\leq_{U^2}$ kısmen sıralama bağıntısı, n-uninormlardan elde edilen $\leq_{U^n}$ kısmen sıralama bağıntısına genelleştirilmiştir.

5. ÖNERİLER

1. L sınırlı kafesi üzerinde uninormlar için önerilen karakterizasyondan faydalanarak benzer bir karakterizasyonun nullnormlar için verilip verilemeyeceği araştırılabilir.

2. $\leq_U$ kısmen sıra için incelenen özellikler, $\leq_{U^2}$ ve $\leq_{U^n}$ için de araştırılabilir.

3. $(L, \leq)$ sınırlı kafesi üzerinde e birim elemanlı U uninormundan elde edilen sıra $\leq_U$ olmak üzere, L kafesinde aynı sıra elde edilecek şekildeki uninormlar ve bu uninormlar arasındaki ilişkiler araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Akella, P., Structure of n-uninorms, Fuzzy Sets and Systems, 158 (2007) 1631-1651.

2. Aşıcı, E. ve Karaçal, F., On the T-partial order and properties, Information Sciences, 267 (2014) 323-333.

3. Baczynski, M. ve Jayaram, B., Fuzzy implications, Studies in Fuzziness and Soft Computing, 231, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

4. Beliakov, G., Pradera, A. ve Calvo T., Aggregation functions: A guide for practitioners, Studies in Fuzziness and Soft Computing, 221, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

5. Birkhoff G., Lattice Theory, 3 rd edition, Providence, Rhode Island, 1967.

6. Calvo, T., De Baets, B. ve Fodor, J., The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets and Systems, 120 (2001) 385-394.

7. De Baets, B., Idempotent Uninorms, European Journal of Operationsl Research, 118 (1999) 631-642.

8. De Baets B. ve Mesiar R., Triangular norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 61-75.

9. De Baets B. ve Mesiar R., Triangular norms on the real unit square, Proceedings of the 1999 EUSFLAT-EST YLF Joint Conference, Eylül 1999, Palma de Mallorca, Spain, 351-354.

10. Deschrijver, G. ve Kerre, E. E., Uninorms in L^* -fuzzy set theory, Fuzzy Sets and Systems, 148 (2004) 243-262.

11. Drewniak, J. ve Drygas P., On class of uninorms, International Journal of Uncertainty, Fuzziness Knowledge- Based Systems, 10 (2002) 5-10.

12. Ertuğrul, Ü., Karaçal, F. ve R. Mesiar, Modified ordinal sums of triangular norms and triangular conorms on bounded lattices, International Journal of Intelligent Systems, 30 (2015) 807-817.

13. Ertuğrul, Ü., Kesicioğlu, M. N. ve Karaçal, F., Ordering Based on Uninorms, Information Sciences, 330 (2016) 315-327.

14. Fodor, J. ve De Baets, B., A single-point characterization of representable uninorms, Fuzzy Sets and Systems, 202 (2012) 89-99.

15. Fodor, J.C., Yager, R.R. ve Rybalov, A., Structure of uninorms, Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Systems, 5 (1997) 411-427.

16. Grabisch, M., Marichal, J.-L., Mesiar, R. ve Pap, E., Aggregation Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

17. Hlinêna, D., Kalina, M. ve Kral, P., Pre-orders and orders generated by conjunctive uninorms, Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, 444 (2014) 307-316.

18. Karaçal, F. ve Aşıcı, E., Some notes on T-partial order, Journal of Inequalities and Applications, (2013) 219.

19. Karaçal, F., Ertuğrul, Ü. ve Mesiar, R., Characterization of uninorms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems, 308 (2017) 54-71.

20. Karaçal, F., İnce, M. A. ve Mesiar, R., Nullnorms on bounded lattices, Information Sciences, 325 (2015) 227-236.

21. Karaçal, F. ve Kesicioğlu, M. N., A T-partial order obtained from t-norms, Kybernetika, 47 (2011) 300-314.

22. Karaçal, F. ve Mesiar, R., Uninorms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems, 261 (2015) 33-43.

23. Karaçal, F. ve Khadjiev, Dj., $\vee$ - distributive and infinitely $\vee$ -distributive t-norms on complete lattice, Fuzzy Sets and Systems, 151 (2005) 341-352.

24. Karaçal, F. ve Sağıroğlu, Y., Infinitely $\vee$ - distributive t-norms on complete lattices and pseudo-complements, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 32-43.

25. Kesicioğlu, M. N., On the property of T-distributivity, Fixed Point Theory and Applications, (2013) 32.

26. Kesicioğlu, M. N., Karaçal, F. ve Mesiar, R., Order-equivalent triangular norms, Fuzzy Sets and Systems, 268 (2015) 59-71.

27. Kesicioğlu, M. N. ve Mesiar, R., Ordering based on implications, Information Sciences, 276 (2014) 377-386.

28. Klement, E.P., Mesiar, R. ve Pap, E., Triangular norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

29. Li, Y.M. ve Shi, Z.K., Weak uninorms aggregation operators, Information Sciences, 124 (2000) 317-323.

30. Liu, H., Semi-uninorms and implications on a complete lattice, Fuzzy Sets and Systems, 191 (2012) 72-82.

31. Marichal, J.L., On the associativity functional equation, Fuzzy Sets and Systems, 114 (2000) 381-389.

32. Mas, M., Mayor G. ve Torrens, J., The modularity condition for uninorms and t-operators, Fuzzy Sets and Systems, 126 (2002) 207-218.

33. Mas, M., Mayor G. ve Torrens, J., The distributivity condition for uninorms and t-operators, Fuzzy Sets and Systems, 128 (2002) 209-225.

34. Mas, M., Monserrat, M. ve Torrens, J., On left and right uninorms, International Journal of Uncertainty Fuzzines Knowledge- Based Systems, 9 (2002) 491-507.

35. Monserrat, M. ve Torrens J., On the reversibility of uninorms and t-operators, Fuzzy Sets and Systems, 131 (2002) 303-314.

36. Saminger, S., On ordinal sums of triangular norms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems, 157 (2006) 1403-1416.

37. Wang, Z. ve Fang, J., Residual operations of left and right uninorms on a complete lattice, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 22-31.

38. Yager, R. R., Defending against strategic manipulation in uninorm-based multi-agent decision making, Fuzzy Sets and Systems, 141 (2002) 217-232.

39. Yager, R.R. ve Kreinovich, V., On the relation between two approaches to combining evidence: ordered abelian groups and uninorms, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 14 (2003) 7-12.

40. Yager, R.R. ve Kreinovich, V., Universal approximation theorem for uninorm-based fuzzy systems modeling, Fuzzy Sets and Systems, 140 (2003) 331-339.

41. Yager, R.R. ve Rybalov A., Uninorm aggregation operators, Fuzzy Sets and Systems, 80 (1996) 111-120.

ÖZGEÇMİŞ

Ümit Ertuğrul, 1987 yılında Trabzon'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Trabzon'da tamamladı. 2010 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl, K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans eğitimine ve Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başlamıştır ve halen bu görevine devam etmektedir. 2012 yılında K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü'nden Yüksek Lisans derecesini aldı ve 2012 yılında aynı enstitüde Doktora eğitimine başladı. Evli ve bir çocuk babası olup, İngilizce bilmektedir.

Bu Tezden Elde Edilen Yayınlar

1. Ertuğrul, Ü., Kesicioğlu, M. N. ve Karaçal, F., Ordering Based on Uninorms, <u>Information Sciences</u>, 330 (2016) 315-327.
2. Karaçal, F., Ertuğrul, Ü. ve Mesiar, R., Characterization of uninorms on bounded lattices, <u>Fuzzy Sets and Systems</u>, 308 (2017) 54-71.

Diğer Yayınlar

1. Ertuğrul, Ü., Karaçal, F. ve R. Mesiar, Modified ordinal sums of triangular norms and triangular conorms on bounded lattices, <u>International Journal of Intelligent Systems</u>, 30 (2015) 807-817.
2. Karaçal, F., İnce M. A. ve Ertuğrul, Ü., Some Properties of $K_{\preccurlyeq}$ set, <u>New Trends in Mathematical Sciences</u>, 4 (2016) 239-244.