KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONGRÜANS ALT GRUPLARININ GRAFLARI

DOKTORA TEZİ

Seda ÖZTÜRK

HAZİRAN 2017
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONGRÜANS ALT GRUPLARININ GRAFLARI

Seda ÖZTÜRK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30.05.2017
Tezin Savunma Tarihi : 30.06.2017

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

Trabzon 2017

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında
Seda ÖZTÜRK Tarafından Hazırlanan

KONGRÜANS ALT GRUPLARININ GRAFLARI

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 31 /05/2017 gün ve 1704 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ ....

Üye : Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ ....

Üye : Prof. Dr. Uğur ÇEVİK ....

Üye : Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK ....

Üye : Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN ....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu tezde, $\Gamma_o\begin{pmatrix} n \\ h \end{pmatrix}$ kongrüans alt gruplarının alt yörüngesel grafları incelendi.

Bilim bir ülkenin ışığıdır. Bilim insanları ise; bu ışığı elinde tutan neferlerdir. Her zaman o ellerden biri olmak istedim. Küçük bir çocukken başladım bu yola ve artık son basamağa ulaştım. Yükü ağır, sorumluluğu yüksek, aydınlık yarınların anahtarı olan bu yolda çok emek harcadım. Bazen yoruldum ama hiç bıkmadım ve pes etmedim. Hep çok şey öğrenmek istedim. Bir derya olan bu bilim dalında ne öğrensem azdı çünkü. Öğrenilenlerin ötesinde öğrenilmesi gereken çok fazla şey vardı…

Bu zorlu yolu tek başına yürümek elbette mümkün değildi. Üzerimde birçok kişinin emeği var. Öncelikle, bu tezi hazırlamam da bana danışmanlık eden, bilgilerini paylaşan, yol gösteren ve tüm üniversite hayatım boyunca manevi desteğini üzerimden esirgemeyen saygıdeğer hocam sayın Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ' a herşey için can- ı gönülden teşekkür ediyor ve saygılarımı sunuyorum. Emekli olmasına ne kadar üzülmüş olsam da kendisinin öğrencisi olabilmenin şansını her zaman hissettiğim, beni yetiştiren, bu yolda kendim olabilmemi sağlayan, bakış açısı kazandıran kıymetli hocam sayın Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ' a bana verdiği tüm emekleri için sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Tez İzleme Komitemde olan sayın Prof. Dr. Uğur ÇEVİK' e katkıları için teşekkür ediyorum.

KTÜ Matematik Bölümündeki üzerimde emeği olan bütün saygıdeğer hocalarıma teşekkür ediyorum.

İlkokul sıralarından üniversite sıralarına ulaşana kadar üzerimde emeği olan bütün öğretmenlerime teşekkürü bir borç bilirim. Bu yolda gönül yoldaşlığı yaptığım her zaman yanımda olan canım dostum Özlem GEDİKLİ başta olmak üzere; Emine AKBAŞ, Havva BAŞKAN ve adını buraya sığdıramayacağım bütün dostlarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ediyorum. Doktora eğitimim boyunca 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında, bana maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a çok teşekkür ediyorum.

Son ve en büyük teşekkürüm; beni büyüten, bugünlere getiren, her zaman arkamda duran ve beni koşulsuz şartsız seven canım annem Nuran ÖZTÜRK ve babam Osman ÖZTÜRK'e. Herşey için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Seda ÖZTÜRK

Trabzon, 2017

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "KONGRÜANS ALT GRUPLARININ GRAFLARI" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ'IN sorumluluğunda tamamladığımı, örnekleri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 30/ 06/ 2017

Seda ÖZTÜRK

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

KONGRÜANS ALT GRUPLARININ GRAFLARI

Seda ÖZTÜRK

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
2017, 77 Sayfa

Bu tezde; $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ kongrüans alt grubunun $\hat{\mathbb{Q}}(h)$ üzerindeki hareketi ve bu hareketin doğurduğu alt yörüngesel graflar incelenmiştir.

Birinci bölümde; ikinci bölüm için gerekli olan tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde ise; $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ kongrüans alt grubunun $\hat{\mathbb{Q}}(h)$ üzerindeki hareketi ve bu hareketin doğurduğu alt yörüngesel graflar ve grafların kenar olma şartları verilmiştir. Daha sonra $\forall n \in \mathbb{N}$ için $F_{1,n}$ alt yörüngesel grafları detaylı bir şekilde incelenmiş ve bu graflarda birbirini en uzak köşelere resmeden yol bağıntısı ve sayılar teorisine katkı sağlayacak bazı ilginç sonuçlar ispatlanmıştır. Son olarak; $F_{u,2u+1}$, $u \in \mathbb{N}$ alt yörüngesel grafı ve [1]'deki Teorem 10'un $k_o = 2$ olma şartı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Graf Teori, Grup Hareketi, Sayılar Teorisi, Modüler Grup

PhD Thesis

SUMMARY

THE GRAPHS OF CONGRUANCE SUBGROUPS

Seda ÖZTÜRK

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematic Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
2017, 77 Pages

In this thesis, the action of the group $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ on $\hat{\mathbb{Q}}(h)$ and suborbital graphs arising from this action are investigated.

In the first chapter, we give some definitions and theorems requiring for second chapter.

In the second chapter, the action of the group $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ on $\hat{\mathbb{Q}}(h)$, the suborbital graphs arising from this action and the conditions being edge in these suborbital graphs are given. After that, the suborbital graphs $F_{1,n}$ for all $n \in \mathbb{N}$, are investigated comprehensively and in these graphs the relation of path connecting to the largest vertices one another and some interesting results contributing to the Number Theory are proved. Finally, the suborbital graphs $F_{u,2u+1}$, $u \in \mathbb{N}$ and the condition $k_o = 2$ of Theorem 10 in [1] are examined.

Key Words: Graph Theory, Modular Group, Group Action, Number Theory

ŞEKİLLER DİZİNİ

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\varphi(n)$	: Euler Fonksiyonu
$\lvert G:H \rvert$	: G nin H içindeki indeksi
$\hat{\mathbb{C}}$	: Genişletilmiş Kompleks Sayılar
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
Γ	: Modüler Grup
$m \mid n$	: m böler n
$PSL(2,\mathbb{R})$	: Reel Katsayılı Lineer Kesirli Dönüşümler Grubu
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
S_x	: Sabitleyen
∞	: Sonsuz
$[\infty]$	: Sonsuz Bloğu
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$[G,X]$	: Topolojik Dönüşüm Grubu
$\mathcal{U}$	: Üst Yarı Düzlem
Gx	: Yörünge
$O(\alpha,\beta)$	: (α,β) nın yörüngesi
$\gamma \rightarrow \beta$	: γ dan β ya bir kenar
$x \equiv a(n)$	: n sayısı $x-a$ sayısını böler

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

19. yüzyılın sonlarına doğru ayrık gruplar teorisine temel teşkil edecek bazı önemli sonuçlar ilk defa Henry Poincare tarafından göz önüne getirilmiş ve eliptik fonksiyonlar teorisinin genelleştirilmesi için kullanılmıştır. Fuchsian grupları adı verilen ve sistematik çalışmasını Henry Poincare'nin geliştirdiği bu ayrık grupların invaryant bıraktığı fonksiyonlar üzerinde birçok bilim adamı çalışmalar yapmıştır. Lineer kesirli dönüşümler grubu özellikle 19. yüzyılda Öklid olmayan geometriler ve İnvaryant teorinin keşfiyle birlikte büyük önem kazanmış, topolojik grup yapısına uygun olması nedeniyle gerek analiz, gerekse cebirsel yöntemlerle derinlemesine incelenmiştir. Eliptik eğrilerin aritmetiği, integral kuadratik formlar ve eliptik modüler fonksiyonlar teorisindeki önemi nedeniyle en çok Γ modüler grubunun kongrüans alt grupları olan $\Gamma(N)$, $\Gamma_1(N)$, $\Gamma_0(N)$, $\Gamma^0(N)$ grupları üzerinde çalışılmıştır. Son yıllarda sayılar teorisinde de Γ modüler grubunun kongrüans alt grupları Pierre de Fermat'ın 1637 yılında ifade ettiği son teoremin ispatında oldukça önemli bir yer teşkil ettiği görülmektedir.

Charles C. Sims tarafından 1967 yılında yayımlanan "Graphs and Finite Permütation Groups" adlı çalışmada graf teorisi ve permütasyon grupları incelenmiş ve Gareth A.Jones, David Singerman ve K. Wicks' in 1991 yılında yayımlanan "The Modular Group and Generalized Farey Graphs" adlı çalışmada alt yörüngesel graflar, devre uzunlukları ve orman olma durumları araştırılmış ve 2001 yılında M. Akbaş'ın "On Suborbital Graphs for The Modular Group" adlı çalışmasında orman olma konjektürü, devre uzunlukları ile modüler grupta eliptik elemanlar arasındaki ilişki ortaya koyulmuştur.

Bu tezin ilk kısmında, ikinci kısım için gerekli olan tanım ve teoremler verilmiştir. Tezin ana kısmını oluşturan ikinci bölümde ise; $\Gamma_o\left(\dfrac{n}{h}\right)$ kongrüans alt grubu tanıtılmış, $\hat{\mathbb{Q}}(h)$ kümesi üzerindeki hareketi incelenmiş, bu hareketin oluşturduğu alt yörüngesel grafları ve kenar olma şartları verilmiştir. Daha sonra $\forall n \in \mathbb{N}$ için $F_{1,n}$ alt yörüngesel grafları incelenmiş ve bu graflarda sayılar teorisiyle ilgili bazı ilginç sonuçlar bulunmuştur. Özel olarak; $n=5$ için $F_{1,5}$ grafında “Fibonacci Sayı” dizisi elde edilmiştir.

Bu bölümün 1. 2-1.10 numaralı paragrafları [2, 3, 4, 5, 6, 7] esas alınarak hazırlanmış ve çalışma için ihtiyaç duyulan bazı teorem ve sonuçların ispatları verilmiştir.

1.2. Topolojik Gruplar

Tanım 1.2.1: $(G,\bullet)$ hem bir grup hem de bir topolojik uzay olsun.

i. $$\begin{aligned} &F: G\times G \to G \\ &\quad (x,y)\to F(x,y)=x\bullet y \end{aligned}$$ ve

ii. $$\begin{aligned} &f: G \to G \\ &\quad x\to f(x)=x^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümleri sürekli ise; $(G,\bullet)$ grubuna bir topolojik grup denir.

Kısalık olsun diye $x\bullet y = xy$ şeklinde gösterilecektir.

Örnek 1.2.2: Bilindiği üzere; $(\mathbb{R},+)$ bir grup ve $(\mathbb{R},\tau_e)$ bir topolojik uzaydır.

$$\begin{aligned} &F: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\quad (x,y)\to F(x,y):=x+y \end{aligned}$$ ve

$$\begin{aligned} &f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\quad x\to f(x)=-x \end{aligned}$$

dönüşümleri sürekli olduğundan $(\mathbb{R},+)$ bir topolojik gruptur.

Tanım 1.2.3: $(X,\varphi),(Y,\tau)$ iki topolojik uzay ve $f: X\to Y$ olsun.

f, 1-1, örten, sürekli ve f^{-1} sürekli ise; f ye bir homeomorfizma denir.

Teorem 1.2.4: $(G,\bullet)$ bir topolojik grup olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} &f: G \to G \\ &\quad x\to f(x)=x^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümü bir homeomorfizmadır.

İspat: $\forall x\in G$ için $(f\circ f)(x)=x$ olduğundan $f\circ f = I$ özdeşlik dönüşümüdür, yani; $f=f^{-1}$ dir. O halde; f dönüşümü 1-1 ve örtendir. f sürekli ve $f=f^{-1}$ olduğundan f^{-1} de süreklidir. Dolayısıyla, f bir homeomorfizmdir.

Teorem 1.2.5: $(G,\bullet)$ bir topolojik grup ve $U \subset G$ açık bir alt küme olsun. Bu takdirde;

$U^{-1} := \{u^{-1} \mid u \in U\}$ kümesi açık bir alt kümedir.

İspat: $(G,\bullet)$ bir topolojik grup olduğundan Teorem 1.2.4'ten

$$\begin{aligned} f: G &\to G \\ x &\to f(x) = x^{-1} \end{aligned}$$ dönüşümü bir homeomorfizmdir. O halde; f bir açık dönüşümdür.

Dolayısıyla; $f(U) = \{f(u) \mid u \in U\} = \{u^{-1} \mid u \in U\} = U^{-1}$ kümesi açık bir alt kümedir.

Teorem 1.2.6: $(G,\bullet)$ hem bir grup hem de bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde;

$(G,\bullet)$ topolojik gruptur $\Leftrightarrow$ $$\begin{aligned} m: G \times G &\to G \\ (x,y) &\to m(x,y) = xy^{-1} \end{aligned}$$ dönüşümü süreklidir.

İspat: $(G,\bullet)$ topolojik grup olsun. $$\begin{aligned} m: G \times G &\to G \\ (x,y) &\to m(x,y) = xy^{-1} \end{aligned}$$ dönüşümünün sürekli

olduğunu gösterelim. $(G,\bullet)$ topolojik grup olduğundan $$\begin{aligned} F: G \times G &\to G \\ (x,y) &\to F(x,y) = xy \end{aligned}$$ ve

$$\begin{aligned} f: G &\to G \\ x &\to f(x) = x^{-1} \end{aligned}$$ dönüşümleri mevcut ve süreklidir.

$$\begin{aligned} m: G \times G &\xrightarrow{(I,f)} G \times G \xrightarrow{F} G \\ (x,y) &\to (x,y^{-1}) \to m(x,y) = xy^{-1} \end{aligned}$$ dönüşümünü tanımlayalım. (I, f), F dönüşümleri

sürekli ve $m = F \circ (I, f)$ olduğundan m sürekli bir dönüşümdür.

Tersine olarak; $$\begin{aligned} m: G \times G &\to G \\ (x,y) &\to m(x,y) = xy^{-1} \end{aligned}$$ dönüşümü sürekli ise; $(G,\bullet)$'nin bir

topolojik grup olduğunu gösterelim. Bunun için; $$\begin{aligned} F: G \times G &\to G \\ (x,y) &\to F(x,y) = xy \end{aligned}$$

ve $\begin{array}{l} f:G\to G \\ x\to f(x)=x^{-1} \end{array}$ dönüşümlerinin sürekli olduğunu gösterirsek ispat biter.

$V\subset G$ keyfi bir açık küme olsun. $F^{-1}(V)$ 'nin açık olduğunu gösterelim. $(x,y)\in F^{-1}(V)$ keyfi alalım. $F(x,y)=xy\in V$ dir. $m(x,y^{-1})=xy\in V$ ve m sürekli olduğundan $(x,y^{-1})\in m^{-1}(V)$ dir. $V\subset G$ açık ve m sürekli olduğundan $\exists V_x, V_{y^{-1}}\subseteq G$ açık kümeleri öyleki $(x,y^{-1})\in V_x\times V_{y^{-1}}\subset m^{-1}(V)$ dir. Öte yandan; Teorem 1.2.5'ten $V_{y^{-1}}^{\;\;-1}$ açıktır ve $y\in V_{y^{-1}}^{\;\;-1}$ dir. O halde; $(x,y)\in V_x\times V^{-1}{}_{y^{-1}}\subset F^{-1}(V)$ olup $F^{-1}(V)$ açıktır. Dolayısıyla F dönüşümü süreklidir.

Şimdi $\begin{array}{l} f:G\to G \\ x\to f(x)=x^{-1} \end{array}$ dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim.

m dönüşümü sürekli olduğundan $\begin{array}{l} m_e := m\downarrow(\{e\}\times G):\{e\}\times G\to G \\ (e,x)\to m_e(e,x):=x^{-1} \end{array}$

kısıtlanmış dönüşümü de süreklidir. Öte yandan; $\begin{array}{l} \alpha: G\to\{e\}\times G \\ x\to\alpha(x):=(e,x) \end{array}$ tanımlanan dönüşümü bir homeomorfizmdir. Gerçekten; $V\subset G$ bir açık küme olduğundan $\{e\}\times V$, $\{e\}\times G$ 'de açıktır. Ayrıca, $\alpha^{-1}(\{e\}\times V)=V$ olduğundan α sürekli bir dönüşümdür. 1-1 ve örtenlik açıktır. O halde; $G\xrightarrow{\alpha}\{e\}\times G\xrightarrow{m_e}G,\ f:=m_e\circ\alpha$ alınırsa; m_e,α sürekli olduğundan, f dönüşümü sürekli ve $\forall x\in G$ için $f(x)=x^{-1}$ dir.

Teorem 1.2.6: $(G,\bullet)$ bir topolojik grup ve $a\in G$ olsun.

i. $\alpha : G \to G$ (sol öteleme)
$x \to \alpha(x) = ax$

ii. $\beta : G \to G$ (sağ öteleme)
$x \to \beta(x) = xa$

iii. $\varphi : G \to G$
$x \to \varphi(x) = axa^{-1}$

dönüşümleri birer homeomorfizmdir.

Sonuç 1.2.7: $(G,\bullet)$ bir topolojik grup, $A\subset G$ açık küme ve $x\in G$ olsun. Bu takdirde;

$xA,\ Ax,\ A^{-1}$ kümeleri birer açık kümedir.

Tanım 1.2.7: $(G,\bullet)$ bir topolojik grup ve (X,τ) herhangi bir topolojik uzay olsun.

$f : G\times X \to X$
$(g,x) \to f(g,x) := g*x$ dönüşümü sürekli ve

$i)\ \forall g,h\in G$ ve $\forall x\in X$ için $g*(h*x) = gh*x$

$ii)\ e\in G$ birim eleman olmak üzere; $\forall x\in X$ için $e*x = x$ koşullarını sağlayan $[G,X]$ ikilisine bir topolojik dönüşüm grubu ve G'ye X üzerinde bir hareket grubu denir .

Örnek 1.2.8: $G := PGL(2,\mathbb{C}) = \left\{ T : z \to \dfrac{az+b}{cz+d} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{C} \text{ ve } ad-bc \neq 0 \right\}$ ve

$X := \mathbb{C}_\infty$ olarak alınırsa; $[PGL(2,\mathbb{C}),\mathbb{C}_\infty]$ ikilisi bir topolojik dönüşüm grubudur.

Teorem 1.2.9: $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x,y\in X$ olsun.

"$x\sim y :\Leftrightarrow y = gx$ olan bir $g\in G$ vardır. "

"$\sim$" bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.2.10: "$\sim$" bağıntısının oluşturduğu her bir denklik sınıfına bir $G-$ yörüngesi veya yörünge denir.

Bir $x\in X$ noktasını içeren yörünge; $Gx := \{gx \mid g\in G\}$ kümesidir.

Bütün yörüngelerin oluşturduğu küme X/G veya $X/\sim$ ile gösterilecektir.

Yani; $X/G = \{Gx \mid x\in X\}$ dir. Öte yandan; X/G üzerindeki topoloji

$$\begin{array}{l}\phi : X \to X/G \\ \quad x \to \phi(x) := Gx\end{array}$$ fonksiyonunu sürekli yapan topolojidir. Bu topoloji;

$\tau_{\phi} = \{U \subset X/G \mid \phi^{-1}(U),\ X \text{ de açık}\}$ olup $(X/G, \tau_{\phi})$ ikilisi bir topolojik uzaydır.

Tanım 1.2.11: $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x, y \in X$ olsun.

$gx = y$ olan bir $g \in G$ elemanı mevcut ise; G ye X üzerinde transitiftir denir.

Açıkça görülüyor ki G, X üzerinde transitif olarak hareket ediyorsa;

$\forall x \in X$ için $Gx = \{gx \mid g \in G\} = \{y \mid y \in X\} = X$ dir. Bu durumda, $"\sim"$ bağıntısının oluşturduğu tek bir yörünge vardır.

Tanım 1.2.12: $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x \in X$ olsun.

$S_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ kümesine, $x \in X$ noktasının sabitleyeni denir.

Sonuç 1.2.13: $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $y \in Gx$ olsun.

S_x ve S_y eşleniktir.

Yani; Aynı yörüngede bulunan iki elemanın sabitleyenleri eşleniktir.

İspat: S_x ve S_y eşleniktir. Yani bir $g \in G$ için $S_y = gS_xg^{-1}$ olduğunu gösterelim.

$y \in Gx$ olduğundan $\exists g \in G \therefore y = gx$ dir. O halde; $h \in S_y$ keyfi olsun. Böylece;

$$\begin{aligned} h \in S_y &\Leftrightarrow hy = y \Leftrightarrow hgx = gx \Leftrightarrow g^{-1}hgx = x \\ &\Leftrightarrow g^{-1}hg \in S_x \Leftrightarrow h \in gS_xg^{-1} \end{aligned}$$

olduğundan $S_y \subseteq gS_xg^{-1}$ ve $gS_xg^{-1} \subseteq S_y$ dir. Dolayısıyla, $S_y = gS_xg^{-1}$ olup S_x ve S_y eşleniktir.

Tanım 1.2.14: G bir grup ve $H < G$ olsun. H alt grubunun G içindeki sol yan sınıflarının sayısına, H alt grubunun G içindeki indeksi denir ve $|G : H|$ ile gösterilir.

Lemma 1.2.15: $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x \in X$ olsun.

$$|Gx| = |G : G_x|$$

dir.

Tanım 1.2.16: X herhangi bir topolojik uzayın alt kümesi olsun.

$\forall x \in X$ için $U_x \cap X = \{x\}$ olacak şekilde $x \in X$ in bir U_x açık komşuluğu varsa X alt kümesine ayrıktır denir.

Örnek 1.2.17: $(\mathbb{R},\tau_e)$ olmak üzere;

1- $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi ayrıktır.

2- $\mathbb{R}$ nin her sonlu alt kümesi ayrıktır.

3- $\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in\mathbb{Z}^+\right\}$ kümesi ayrıktır.

4- $\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in\mathbb{Z}^+\right\}\cup\{0\}$ kümesi ayrık değildir.

Tanım 1.2.18: $n\in\mathbb{N}$ için $T^n=I$ ve şayet $T^k=I$ ise $n|k$ koşulunu sağlayan T lineer dönüşümüne $n.$ dereceden periyodiktir denir

Tanım 1.2.19: $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere; $U_n := \{a | 1\le a\le n,\ (a,n)=1\}$ olsun.

$\varphi(n) := \left|\{a | 1\le a\le n,\ (a,n)=1\}\right|$ şeklinde tanımlanan $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ fonksiyona Euler fonksiyonu denir.

Sonuç 1.2.20: $m\in\mathbb{N}$, $m=p_1^{r_1}p_2^{r_2}...p_s^{r_s}$; m nin asal parçalanışı ise;

$$\varphi(m)=m\prod_{\substack{p|m\\ p\text{ asal}}}\left(1-\frac{1}{p}\right)=m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_s}\right) \qquad \text{dir.}$$

1.3. Öklid Olmayan Kristalize Gruplar

1. $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ genişletilmiş kompleks sayılar kümesi olmak üzere; G ile $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ olmak üzere;

$$(A)\qquad z\to\frac{az+b}{cz+d};\ ad-bc=1$$

ve

$$(B)\qquad z\to\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d};\ ad-bc=-1$$

dönüşümlerinin grubunu gösterelim.

Bu grup, $\hat{\mathbb{C}}$ 'nin dönüşümlerinin bir grubudur. G nin her bir elemanı $\mathcal{U} := \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$ üst yarı düzleminin bir konform veya ters-konform homomorfizmasıdır.

(A) tipindeki dönüşümlerin kümesi $PSL(2,\mathbb{R})$ ile gösterilir ve $PSL(2,\mathbb{R})$ nin,

G grubundaki indeksi 2’dir. Öte yandan; $\mathcal{U}$ ’nun her konform homomorfizması $PSL(2,\mathbb{R})$ de kalır.

G üzerinde bir topolojik yapı aşağıdaki biçimde oluşturulabilir:
$\mathbb{R}^4$ ’ün $M = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : ad - bc = \pm 1\}$ alt kümesini göz önüne alalım.
M kümesi $\mathbb{R}^4$ ’ten indirgenen Öklid metriği ile bir metrik uzaydır. O halde M üzerinde $\mathbb{R}^4$ deki Öklid topolojisinin oluşturduğu alt uzay topolojisini göz önüne alalım. M alt uzayında (a,b,c,d) ile $(-a,-b,-c,-d)$ noktalarını özdeşleştirelim. β dönüşümü,

$$\beta : M \to M$$
$$(a,b,c,d) \to \beta(a,b,c,d) = (-a,-b,-c,-d)$$

şeklinde tanımlanırsa bir homeomorfizmdir.
Bu özdeşlik ile β, M üzerinde 2. mertebeden bir devirli grup olarak hareket eder.

Şimdi; $M/\langle\beta\rangle$ kümesi üzerine bölüm topolojisi koyalım. G ile $M/\langle\beta\rangle$ arasında birebir ve örten bir dönüşüm vardır.

$$f : M \to M/\langle\beta\rangle$$
$$(a,b,c,d) \to f(a,b,c,d) = \mp(a,b,c,d)$$

şeklinde tanımlanan projeksiyon sürekli bir dönüşümdür. G grubunun üzerindeki topolojiyi $M/\langle\beta\rangle$ üzerindeki topoloji olarak alabiliriz. Böylece G grubunun topolojik yapısı oluşturulur. Ayrıca $G, \mathcal{U}$ üzerinde bir hareket grubu ve G ’ nin de her dönüşümü $\mathcal{U}$ üzerinde sürekli olduğundan $[G,\mathcal{U}]$ bir topolojik dönüşüm grubudur.
Üstelik $G, \mathcal{U}$ üzerinde transitif olarak hareket eder.
G topolojik grubunun, $PSL(2,\mathbb{R})$ ve $G/PSL(2,\mathbb{R})$ olmak üzere iki bileşeni vardır.
G topolojik grubunun ayrık alt gruplarına, Öklid olmayan Kristalize Gruplar (Kısaca NEC Grupları) adı verilir. Bir NEC grubu $PSL(2,\mathbb{R})$ ’de ise; bu gruba bir Funchsian Grubu adı verilir. $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemi, Öklid olmayan düzlemin (hiperbolik) bir modeline aşağıdaki gibi dönüştürülebilir:
Bir yay elemanının ds hiperbolik uzunluğu, $z = x + iy$ olmak üzere;

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{|dz|^2}{y^2}$$

ile tanımlanır.

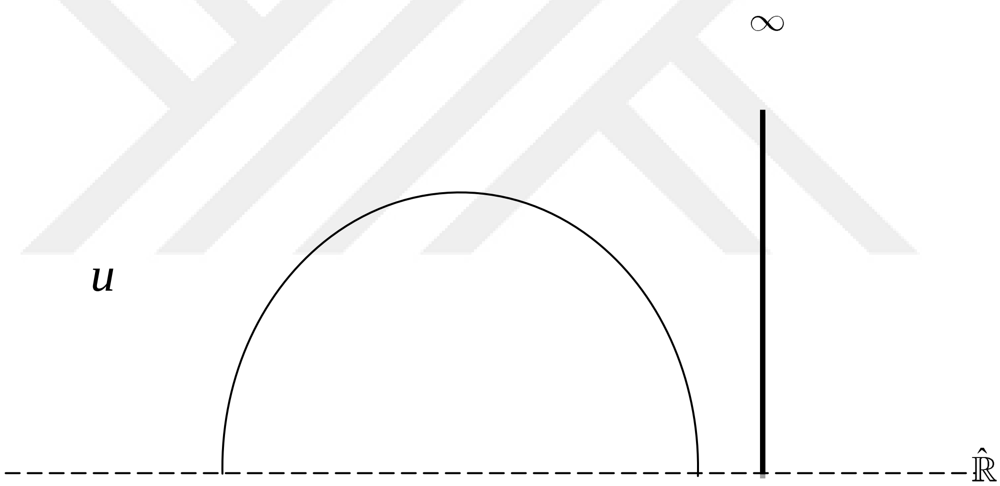
Böylece parçalı sürekli ve diferansiyellenebilir bir C eğrisinin hiperbolik uzunluğu

$$l(C) := \int_C ds = \int_C \frac{1}{\operatorname{Im} z}|dz| = \int_C \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}}$$

ve ölçülebilir bir E kümesinin hiperbolik alanı

$$\mu(E) := \iint_E \frac{dxdy}{y^2}$$

olarak tanımlanır. Yukarıdaki metriğin geodezikleri, reel eksene dik yarı çemberler ve yarı doğrulardır. Bunlar hiperbolik doğrular olarak adlandırılır.



Şekil 1. Hiperbolik Doğrular

$\mathcal{U}$ üst yarı düzlemde iki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık, bu iki noktayı birleştiren bir tek hiperbolik doğru parçasının uzunluğudur. Bu metrikle tanımlanan topoloji, bilinen Öklid topolojisine eş değerdir. Hiperbolik uzaklık ve alan $PSL(2,\mathbb{R})$ 'nin dönüşümleri altında invaryant kalır.

2) Şimdi G grubunun elemanlarını yön durumlarına ve sabit nokta kümelerine göre sınıflandıralım:

I) $T \in PSL(2,\mathbb{R})/I$ dönüşümünün sabit noktalarını bulalım.

$T(z)=z$ denklemin kökleri T 'nin sabit noktalarıdır. O halde; $\dfrac{az+b}{cz+d}=z$ olup

$cz^2+(d-a)z-b=0$ dir. Buradan; $z_{1,2}=\dfrac{-(d-a)\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$

olarak bulunur.

Burada üç durum söz konusudur:

i) $|a+d|>2$ ise; T 'ye bir hiperbolik dönüşüm denir.

ii) $|a+d|=2$ ise; T ye bir parabolik dönüşüm denir.

iii) $|a+d|<2$ ise; T'ye bir eliptik dönüşüm adı verilir.

II. Şimdi; $T\in G/PSL(2,\mathbb{R})$ olsun.

O halde; $\dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}=z$ olup $cz\overline{z}+dz-a\overline{z}-b=0$ dir.

$z=x+iy$ ve $\overline{z}=x-iy$ ' yi denklemde yerine yazarsak $c(x^2+y^2)+(d-a)x-b=0$ ve $(a+d)y=0$ biçiminde iki denklem elde edilir. Burada;

i) $(a+d)\neq 0$ ise $y=0$ dır. O halde; $cx^2+(d-a)x-b=0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin diskriminantı;

$$\Delta=(d-a)^2+4bc$$

dir. Buradan $ad-bc=-1$ eşitliği kullanılırsa $\Delta=(d+a)^2+4$ elde edilir. Dolayısıyla; T nin iki farklı sabit noktası vardır ve bunlar $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ üzerindedirler. Bu durumda; T ye bir kayan-yansıma denir.

ii) $(a+d)=0$ ise; $c(x^2+y^2)+(d-a)x-b=0$ eşitliği gereği T nin sabit noktaları kümesi $c\neq 0$ ise; bir çemberdir. $(a+d)=0$ ve $ad-bc=-1$ eşitliklerinden, bu çemberin merkezinin $\left(\dfrac{a}{c},0\right)$ ve yarıçapının $\dfrac{1}{|c|}$ olduğu görülür.

Eğer $c=0$ ise; $(d-a)x-b=0$ düşey doğrusu elde edilir. Bu durumda; T dönüşümüne bir yansıma adı verilir.

Buna göre G grubunun hiperbolik, parabolik, eliptik, kayan-yansıma ve yansıma diye adlandırılan beş tip elemanı vardır.

Tanım 1.3.1: T_1 ve $T_2 \in G$ olsun.

$T_1 = T^{-1}T_2T$ T_1 olacak şekilde bir $T \in G$ mevcutsa T_1, T_2 ye eşleniktir denir

Lemma 1.3.2: T_1 ve T_2 birbirinin eşleniği ise aynı tiptendirler.

G nin eşlenik elemanlarının aynı tip olduğu gerçeği kullanıldığında, dönüşümlerin her biri bir doğal gösterime sahiptir. Doğal gösterimler aşağıdaki şekilde sınıflandırılır:

Eleman Türü	Doğal Gösterim
Hiperbolik	$z \to \lambda z,\ \lambda > 1$
Eliptik	$z \to w,\ \dfrac{w-i}{w+i} = e^{i\theta}\dfrac{z-i}{z+i}$, $\theta \neq 2n\pi$
Parabolik	$z \to z \pm 1$
Kayan-yansıma	$z \to \lambda \overline{z},\ \lambda < -1$
Yansıma	$z \to -\overline{z}$

1.4. Modüler Grup ve Modüler Grubun $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki Hareketi

$PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun bilinen en önemli alt grubu olan Modüler Grup

$$\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z}) := \left\{ T : z \to \frac{az+b}{cz+d} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z} \text{ ve } ad-bc=1 \right\}$$

dir.

Bu grup aşağıdaki gibi 2×2 lik tamsayılar matrisleriyle temsil edilir:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \det A = 1$$

A ve $-A$ aynı dönüşümü temsil ettiğinden söz konusu matris negatifi ile eş alınır. Böylece, matris ve dönüşüm arasında bir ayrım yapılmayacaktır.

Teorem 1.4.1: Γ modüler grubu, $A^2 = B^3 = I$ ile verilen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ elemanları tarafından üretilir.

$\hat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin her bir elemanı $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $(x, y) = 1$ olmak üzere; $\frac{x}{y}$ indirgenmiş kesri olarak yazılabilir. $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ olduğundan bu gösterim tek değildir.

Özel olarak; $\infty = \frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$ ile göstereceğiz.

Şimdi Γ 'nın, $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $\forall s = \frac{x}{y}$ için ψ dönüşümünü,

$$\psi : \Gamma \times \hat{\mathbb{Q}} \to \hat{\mathbb{Q}}$$

$$(M, s) \to \psi\ (M, s) = \psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \frac{x}{y}\right) := \frac{ax+by}{cx+dy}$$

şeklinde tanımlayalım.

$M\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ax+by}{cx+dy}$ ve $M\left(\frac{-x}{-y}\right) = \frac{-ax-by}{-cx-dy} = \frac{ax+by}{cx+dy}$ olduğundan ψ dönüşümü iyi tanımlıdır. Öte yandan; $(x, y) = 1$ ve $ad - bc = 1$ ise; $\frac{ax+by}{cx+dy}$ kesri de indirgenmiş bir kesirdir.

Teorem 1.4.2:

i) Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

ii) $\hat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi bir noktasının sabitleyeni sonsuz devirlidir.

İspat: i) $\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \hat{\mathbb{Q}}$ için $M\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{c}{d}$ olan bir $M \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \hat{\mathbb{Q}}$ keyfi alalım. O halde; $(a,b) = 1$ve $(c,d) = 1$ olduğundan

$\exists x, y \in \mathbb{Z} \therefore ax - by = 1$ ve $\exists u, n \in \mathbb{Z} \therefore cu - dn = 1$ dir. Buradan;

$g := \begin{pmatrix} a & y \\ b & x \end{pmatrix}, h := \begin{pmatrix} c & n \\ d & u \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $\begin{pmatrix} a & y \\ b & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{b}, \begin{pmatrix} c & n \\ d & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{d}$ olduğundan

$g(\infty) = \frac{a}{b}, h(\infty) = \frac{c}{d}$ dir. O halde; $M := hg^{-1}$ alınırsa; $M\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{c}{d}$ elde edilir.

Açıkça görülüyor ki ∞un yörüngesi $[\infty]=\hat{\mathbb{Q}}$ dir ve Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki transitif hareketinin tek bir yörüngesi vardır o da $[\infty]$ dir.

ii) $\hat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi iki elemanının sabitleyenleri Γ da eşlenik olduklarından ∞'un sabitleyeni olan Γ_∞ u göz önüne almak yeterlidir. $\Gamma_\infty=\left\{\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle| b\in\mathbb{Z}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\rangle$

dir. Gerçekten; $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_\infty$ olsun. O halde; $M(\infty)=\infty$ dır. Buradan;

$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ olduğundan $a=1, c=0$ dır. Öte yandan; $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_\infty\subset\Gamma$

olduğundan $ad-bc=1$ ve $a=1, c=0$ olduğundan $d=1$ elde edilir. O halde;

$M=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $b\in\mathbb{Z}$ dir. Yani; $\Gamma_\infty=\left\{\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle| b\in\mathbb{Z}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\rangle$ dir. Böylece; $\hat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi bir noktasının sabitleyeni sonsuz devirlidir.

1.5. Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları

Tanım 1.5.1: $n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere; Γ nın

$\Gamma(n):=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle| a\equiv d\equiv 1\equiv \bmod(n),\ b\equiv c\equiv 0\equiv \bmod n\right\}$ alt grubuna temel kongrüans alt grubu denir. Γ nın $\Gamma(n)$ temel kongrüans alt grubunu içeren herhangi bir alt grubuna kongrüans alt grubu denir. Üzerinde en çok çalışılan kongrüans alt gruplarının bazıları aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma_1(n):=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle| a\equiv d\equiv 1 \bmod(n),\ c\equiv 0 \bmod n\right\}$$

$$\Gamma^1(n):=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle| a\equiv d\equiv 1 \bmod(n),\ b\equiv 0 \bmod n\right\}$$

$$\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, c \equiv 0 \bmod n \right\}$$

$$\Gamma^0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, b \equiv 0 \bmod n \right\}$$

$$\Gamma_0{}^0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, b \equiv c \equiv 0 \bmod n \right\}$$ şeklindedir.

Buradan; $\Gamma(n) \leq \Gamma_1(n) \leq \Gamma^0{}_0(n) \leq \Gamma_0(n) \leq \Gamma$ ve $\Gamma(n) \leq \Gamma^1(n) \leq \Gamma^0{}_0(n) \leq \Gamma^0(n) \leq \Gamma$ elde edilir. Ayrıca; $\Gamma(n) \lhd \Gamma$ dır. Dolayısıyla; $\Gamma(n)$ grubu $\Gamma_0(n), \Gamma_1(n)$ gruplarının da alt grubudur. Buna göre; $n > 2$ için

$$|\Gamma : \Gamma_o(n)| = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

$$|\Gamma : \Gamma_1(n)| = \frac{n^2}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

$$|\Gamma : \Gamma(n)| = \frac{n^3}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$ dir.

1.6. İmprimitif Hareket

Tanım 1.6.1: G, X in bir transitif hareket grubu ise; (G, X) ikilisine bir transitif permütasyon grubu denir.

Tanım 1.6.2: (G, Ω) bir permütasyon grubu olmak üzere; $\alpha, \beta \in \Omega$ ve $\alpha \approx \beta$ ise; $\forall g \in G$ için $g(\alpha) \approx g(\beta)$ koşulunu sağlayan Ω üzerindeki bir "$\approx$" denklik bağıntısına $G-$ invaryanttır denir.

Bu bağıntının denklik sınıflarına blok adı verilir.

Bazı özel (trivial) $G-$invaryant bağıntılar:

(i) Özdeşlik Bağıntısı : $\forall \alpha, \beta \in X$ için $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

(ii) Evrensel Bağıntısı : $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta$

Bu bağıntılar dışında bir $G-$invaryant denklik bağıntısı varsa (G, Ω) ya "impirimitif" ; aksi halde "primitif" tir denir.

Önerme 1.6.3: (G,Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu takdirde; (G,Ω) impirimitiftir $\Leftrightarrow \forall\alpha\in\Omega$ için $\alpha\in\Omega$ noktasının sabitleyeni olan G_α, G nin maksimal bir alt grubudur.

Önerme 1.6.4: (G,Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu takdirde; (G,Ω) impirimitiftir $\Leftrightarrow \exists\alpha\in\Omega$ için $H<G \therefore G_\alpha \underset{\neq}{<} H \underset{\neq}{<} G$ dir.

Böylece; bir $\alpha\in\Omega$ için $G_\alpha < H < G$ ise; bir imprimitif $G-$invaryant denklik bağıntısı vardır ve $g(\alpha)\approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g'\in gH$ ile verilir.

$n>1$ için $\Gamma_\infty < \Gamma_0(n) < \Gamma$ eşitliğinden $\frac{r}{s},\frac{x}{y}\in\hat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere;

$$\frac{r}{s}\approx\frac{x}{y} \Leftrightarrow ry-sx\equiv 0\bmod(n) \quad \text{dir.}$$

Blokların sayısı; $\left|\Gamma:\Gamma_0(n)\right| = n\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right)$ ve ∞ 'un bloğu $[\infty]=\left\{\frac{x}{y}\in\mathbb{Q} : y\equiv 0 \bmod n\right\}$ dir.

1.7. Graf Teori

Tanım 1.7.1: $X\neq\varnothing$ bir küme, $\Delta\subset X\times X$ bir bağıntı olsun.

$G=(X,\Delta)$ ikilisine bir graf denir. X in elemanlarına grafın köşeleri ve Δ nın elemanlarına grafın kenarları denir.

Bu durum; $(a,b)\in\Delta$ ise; $a\rightarrow b$ ile gösterilir.

Eğer; $a\rightarrow b$ veya $a\leftarrow b$ ise; a ve b ye bir kenar ile bağlanmıştır denir.

a ve b bir kenar ile bağlanmış ise; a ve b ye komşu köşeler adı verilir.

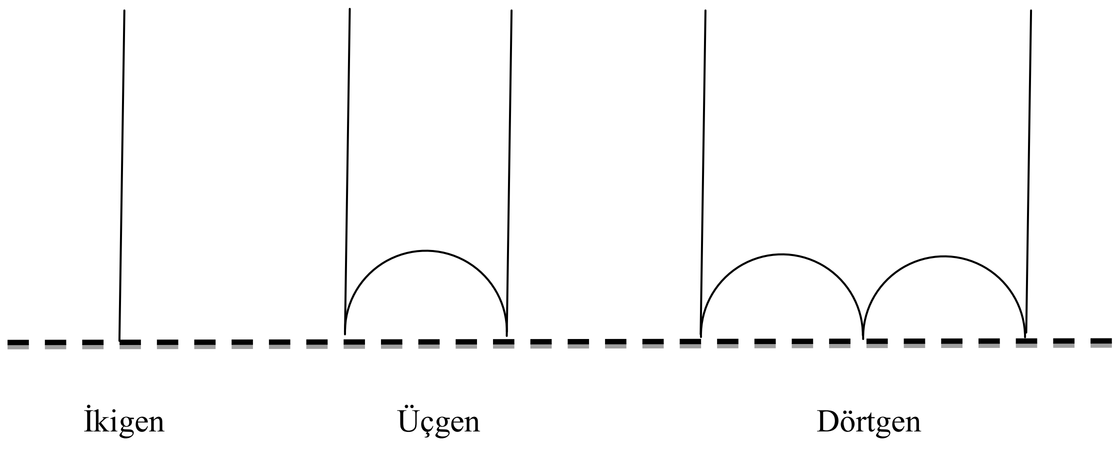
Tanım 1.7.2: $G=(X,\Delta)$ bir graf ve $A\subset X$ olsun. $G'=(A,\Delta\cap A\times A)$ grafına köşe kümesi A olan G nin bir alt grafı denir.

Tanım 1.7.3: $a=v_1,v_2,...,v_n=b$; bir G grafınınm köşeleri olsun.

$\forall 1\leq i\leq n$ için $v_{i-1}\rightarrow v_i$ veya $v_{i-1}\leftarrow v_i$ koşulu sağlanıyorsa; a'dan b'ye n uzunluğunda bir yol denir. Eğer $a=b$ ise; bu yola $n-$ uzunluklu bir devre denir.

$v_1\rightarrow v_2\rightarrow...\rightarrow v_n\rightarrow v_1$ yoluna $n-$ uzunluklu yönlü bir devre denir.

Öte yandan; $n-$ uzunluklu bir devreye kısaca; bir $n-$ gen denir.



Şekil 2. Devreler

Teorem 1.7.4: $n \geq 3$ olmak üzere; n kenarlı bir devre içermeyen grafa orman denir.

Sonuç 1.7.5: $G = (X, \Delta)$ bir graf olsun. Bu takdirde;

X üzerinde "$a \approx b :\Leftrightarrow a = b$ veya $a \neq b$ ise; a'dan b'ye bir yol vardır" şeklinde tanımlanan "$\approx$" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.7.5: X , "$\approx$" bağıntısının bir denklik sınıfı ise; G grafına bağlanıtılı bir graftır denir. Aksi takdirde; G grafına bağlantısızdır denir.

Tanım 1.7.6: Herhangi iki grafın köşeleri arasında 1-1 ve örten bir dönüşüm mevcut ve bu dönüşüm komşu köşeleri, komşu köşelere resmediyorsa bu iki grafa izomorf graflar adı verilir.

1.8. Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

(G, Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. G nin $\Omega \times \Omega$ üzerindeki hareketi $g \in G$ olmak üzere;

$$f : G \times (\Omega \times \Omega) \to (\Omega \times \Omega)$$
$$(g, (\alpha, \beta)) \to f(g, (\alpha, \beta)) := g * (\alpha, \beta) := (g(\alpha), g(\beta))$$

şeklinde tanımlanır.

Bu hareketin yörüngelerine G nin alt yörüngeleri denir ve (α, β) yı içeren alt yörünge $O(\alpha, \beta)$ ile gösterilir. $O(\alpha, \beta)$ yörüngesinden bir $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafını aşağıdaki şekilde elde ederiz:

* Ω nın elemanları $\mathcal{G}(\alpha,\beta)$ nın köşeleri,

** $\mathcal{G}(\alpha,\beta)$ nın kenarları $(a,b)\in O(\alpha,\beta)$ nın elemanlarıdır. $(a,b)\in O(\alpha,\beta)$ olması $a\to b$ ile gösterilir.

Açık olarak; $O(\beta,\alpha)$ da bir alt yörüngedir ve $O(\alpha,\beta)$ ile $O(\beta,\alpha)$ yörüngeleri ya eşittir ya da ayrıktır. O halde;

$(i)\, O(\alpha,\beta)\neq O(\beta,\alpha)$ ise; $\mathcal{G}(\alpha,\beta)$ grafının $\mathcal{G}(\beta,\alpha)$ grafından farkı okların yönleridir. Bu graflara Eşleşmiş graf adı verilir.

$(ii)\, O(\alpha,\beta)=O(\beta,\alpha)$ ise; $\mathcal{G}(\alpha,\beta)$ ile $\mathcal{G}(\beta,\alpha)$ ya Kendi-eşleşmiş graflar adı verilir. Bu durumda $a\leftrightarrow b$ dir. Bu durum; $a-b$ ile de gösterilir.

Önerme 1.8.1: $\mathcal{G}$ bir (G,Ω) transitif permütasyon grubu için bir alt yörüngesel graf olsun. Bu takdirde;

i. $G,\mathcal{G}$ nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder.

ii. $G,\mathcal{G}$ nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder.

iii. $\mathcal{G}$ kendi eşleşmiş bir graf ise; $G,\mathcal{G}$ nin ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder.

iv. $G,\mathcal{G}$ nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder.

Örnek 1.8.2: $O(\alpha,\alpha)=\{\,(\gamma,\gamma)\mid \gamma\in\Omega\}$, $\Omega\times\Omega$ nın köşegenidir. Buna karşılık gelen graf trivial graf diye adlandırılan, $\mathcal{G}(\alpha,\alpha)$ grafı kendi eşleşmiştir. Bu durumda; her bir $\gamma\in\Omega$ köşesinde bir düğümden varmış gibi düşünülebilir. Genel olarak trivial olmayan alt yörüngesel grafları inceleyeceğiz.

Şimdi; Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi ile oluşan alt yörüngesel grafları inceleyelim: Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $v\in\hat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere; $g(\alpha,\beta)=(\infty,v)$ olan bir $g\in G$ vardır. Dolayısıyla her bir $O(\alpha,\beta)$ alt yörüngesi bir (∞,v) çifti içerir. Yörüngeler ya eşit ya da ayrık olduğundan $O(\alpha,\beta)$ ve $O(\infty,v)$ aynı yörüngeyi temsil eder. Yani; $O(\alpha,\beta)=O(\infty,v)$ dir. $v\in\hat{\mathbb{Q}}$ olduğundan $v=\dfrac{u}{n}, n\geq 0, (u,n)=1$ biçimindedir. $O(\infty,v)=O(\infty,\dfrac{u}{n})$ alt yörüngesini $O(u,n)$ (veya $O_{u,n}$) ile buna karşılık gelen alt yörüngesel grafı da $\mathcal{G}(u,n)$ (veya $\mathcal{G}_{u,n}$) ile göstereceğiz. $v=\infty=\frac{1}{0}=-\frac{1}{0}$ olduğu durumda $\mathcal{G}_{1,0}=\mathcal{G}_{-1,0}$ trivial alt yörüngesel grafları elde edileceğinden biz $v\in\mathbb{Q}$ varsayalım.

Teorem 1.8.3: $v,v'\in\mathbb{Q}$ olmak üzere; $O(\infty,v)=O(\infty,v')\Leftrightarrow v$ ve v', Γ_∞ un aynı yörüngesindedir. Yani; $g(v)=v'$ olacak şekilde bir $g\in\Gamma_\infty$ mevcuttur.

Sonuç 1.8.4: $O(\infty,\frac{u}{n})=O(\infty,\frac{u'}{n'})\Leftrightarrow n=n'$ ve $u\equiv u'(n)$ dir.

Dolayısı ile $O(\infty,\frac{u}{n})$ ve $O(\infty,\frac{u'}{n'})$ alt yörüngelerine karşılık gelen $\mathcal{G}_{u,n}$ ve $\mathcal{G}_{u',n'}$ alt yörüngesel grafları için de $\mathcal{G}_{u,n}=\mathcal{G}_{u',n'}\Leftrightarrow n=n'$ ve $u\equiv u'(n)$ dir.

$\left(\frac{r}{s},\frac{x}{y}\right)\in O_{u,n}$ olduğunda $\frac{r}{s}\rightarrow\frac{x}{y}$ veya $\frac{r}{s}\rightarrow\frac{x}{y}\in\mathcal{G}_{u,n}$ dir.

Teorem 1.8.5: $\frac{r}{s}\rightarrow\frac{x}{y}\in\mathcal{G}_{u,n}\Leftrightarrow a)\ x\equiv ur \bmod n,\ y\equiv us \bmod n,\ ry-sx=n$ veya
$b)\ x\equiv -ur \bmod n,\ y\equiv -us \bmod n,\ ry-sx=-n$ dir.

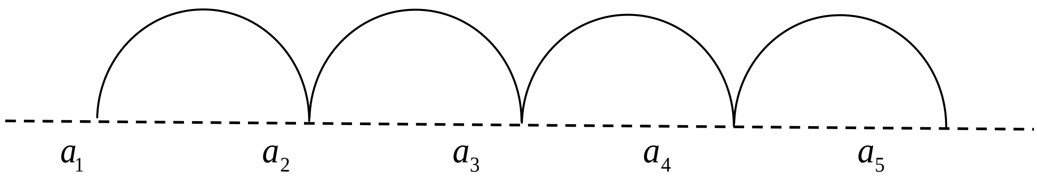
Sonuç 1.8.6: $u^2\not\equiv -1(n)$ ve $uv\equiv -1(n)$ olsun. Bu takdirde; $\mathcal{G}_{u,n}$ ile $\mathcal{G}_{v,n}$ eşleşmiştir.

Sonuç 1.8.7: $\mathcal{G}_{u,n}$ kendi eşleşmiştir $\Leftrightarrow u^2\equiv -1(n)$ dir.

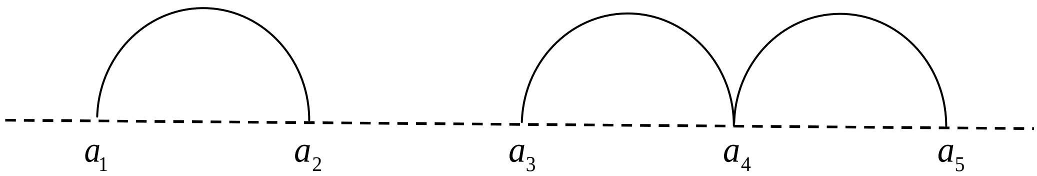
Tanım 1.8.8: $u,n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}, m\geq 2$ ve $a_1,a_2,\dots,a_m\in F_{u,n}$ olmak üzere;

$\forall x,y\in\Lambda$ için $x=a_1\rightarrow a_2\rightarrow\dots\rightarrow a_n=y$ olan sonlu bir yol varsa; $F_{u,n}$ nin Λ alt grafına bağlantılıdır denir .

Aksi takdirde; $F_{u,n}$ nin Λ alt grafına bağlantısızdır denir.



Şekil 3. Bağlantılı Graf



Şekil 4. Bağlantısız Graf

1.9. Farey Grafı

$\mathcal{G}_{1,1}$ köşeleri $\hat{\mathbb{Q}}$ olan bir alt yörüngesel graftır. Burada; $\mathcal{G}_{u,n} = \mathcal{G}_{1,1}$ olduğundan $u = n = 1$ dir ve $1^2 \equiv -1(1)$ olduğundan $\mathcal{G}_{1,1}$ kendi eşleşmiştir. Bu yüzden; $\mathcal{G}_{1,1}$'i yönlendirilmemiş bir graf olarak düşünebiliriz.

Burada; $\frac{r}{s}, \frac{x}{y}$ ardışık köşelerdir $\Leftrightarrow ry - sx = \pm 1$ dir. Buna göre; ∞ ile ardışık köşeler tamsayılardır. Gerçekten; $\frac{r}{s}, \frac{1}{0}$ ardışık köşeler olsun. O halde; $r.0 - s.1 = \pm 1,\ s = \pm 1$ dir. O halde; $\frac{r}{s} = \pm r \in \mathbb{Z}$ elde edilir. $\mathcal{G}_{1,1}$ alt yörüngesel grafına Farey dizileriyle olan bağıntısından dolayı "Farey Grafı" denir ve F ile gösterilir.

$\forall m \geq 1$ için F_m Farey dizisi, terimleri artan sırada düzenlendiğinde, $|y| \leq m$ olan $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ elemanlarından oluşur.

Örneğin; F_4: $\ldots, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \ldots$ dır.

Açıkça görülüyor ki $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$ ve $\bigcup_{m\geq 1} F_m = \mathbb{Q}$ dır. Gerçekten;

i) $i, j \in \mathbb{N},\ i < j$ olmak üzere; $F_i \subset F_j$ olduğunu gösterelim.

$\frac{a}{b} \in F_i$ olsun. O halde; $|b| \leq i < j \Rightarrow \frac{a}{b} \in F_j \Rightarrow F_i \subset F_j$ elde edilir.

ii) $\bigcup_{m\geq 1} F_m \subset \mathbb{Q}$ olduğu açıktır. (*)

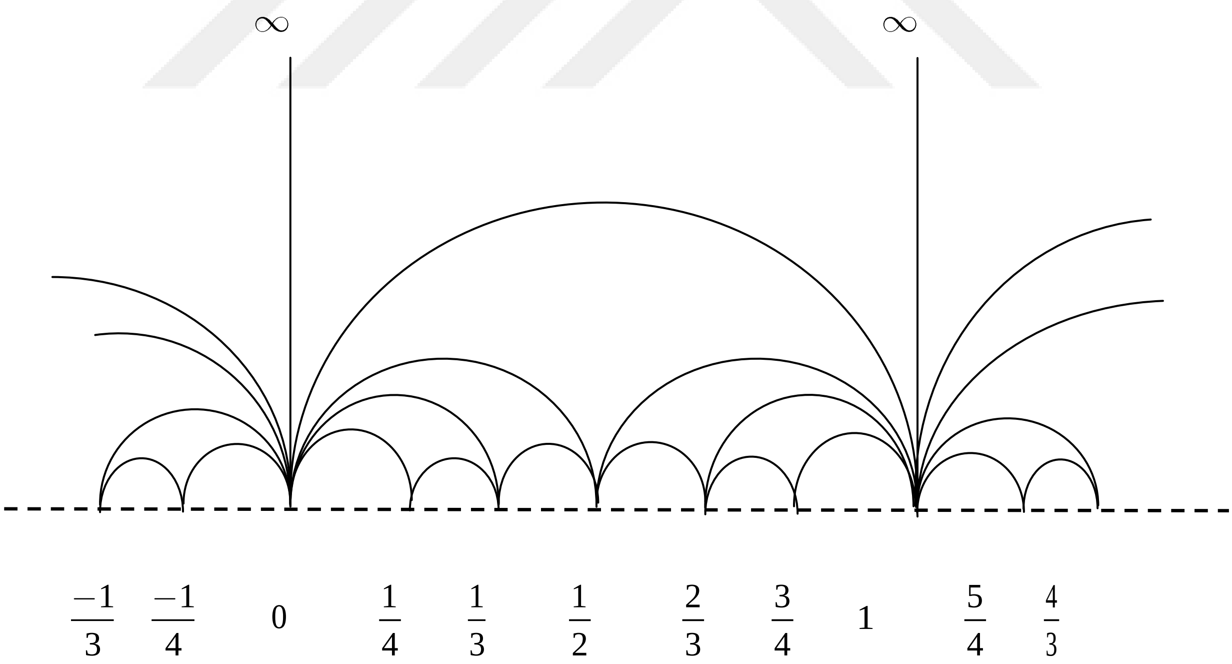
Şimdi; $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{m\geq 1} F_m$ olduğunu gösterelim. $\frac{p}{q} \in \hat{\mathbb{Q}}$ keyfi olsun. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üstten sınırlı olmadığından $\exists m \in \mathbb{N} \therefore |q| \leq m$ dir. Dolayısıyla; $\frac{p}{q} \in F_m$ elde edilir. O halde; $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{m\geq 1} F_m$ olur. (**). (*) ve (**)'dan $\bigcup_{m\geq 1} F_m = \mathbb{Q}$ dir.

Lemma 1.9.1: $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ indirgenmiş rasyonel sayılar olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

i. $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, F de ardışık köşelerdir.

ii. $ry - sx = \pm 1$ dir.

iii. Bir $m \in \mathbb{N}$ için $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, F_m de ardışık köşelerdir.



Şekil 5. Farey Grafı

Şekil 5 deki rasyonel sayılar F_4 ün elemanlarıdır. Kolaylıkla gösterilebilir ki Şekil 5 periyodiktir ve periyodu 1 dir.

F nin kenarlarını $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ üst yarı düzleme dik yarı Öklid çemberleri veya $\mathbb{R}$ ye dik yarı doğrular olarak göz önüne alıyoruz.

Sonuç 1.9.2: F nin kenarları $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ üst yarı düzleminde kesişmez.

1.10. $\mathcal{G}_{u,n}$ ve $F_{u,n}$ Grafları

Bu bölümde $F = \mathcal{G}_{1,1}$ Farey grafının özelliklerini diğer $\mathcal{G}_{u,n}$ alt yörüngesel graflarına nasıl genişletebileceğimizi göreceğiz.

$\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in \mathcal{G}_{u,n} \Leftrightarrow ry - sx = \pm n \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0(n) \Leftrightarrow \frac{r}{s} \approx_n \frac{x}{y}$ dir. Her bir $\mathcal{G}_{u,n}$, $\Psi(n)$ tane alt grafın ayrık birleşiminden oluşur.

Bu $\approx_n$, Γ invaryant denklik bağıntısına göre, her bir alt grafın köşeleri bir tek blok oluşturur. Γ, $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif hareket ettiğinden dolayı Γ bu blokları transitif olarak permüte eder. Bu da alt yörüngelerin her birinin birbiriyle izomorf oldukları anlamına gelir. $\mathcal{G}_{u,n}$ nin, köşeleri ∞ u içeren

$[\infty] = \left\{ \frac{x}{y} \middle| \frac{x}{y} \approx \frac{1}{0} \right\} = \left\{ \frac{x}{y} \middle| y \equiv 0(n) \right\}$ bloğunda olan alt grafını $F_{u,n}$ ile göstereceğiz. Böylece $\mathcal{G}_{u,n}$ grafı, $F_{u,n}$ nin $\Psi(n)$ tane ayrık kopyasından oluşur.

Teorem 1.10.1:

$$\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in F_{u,n} \Leftrightarrow a)\; x \equiv ur \bmod n,\; ry - sx = n \quad \text{veya}$$
$$b)\; x \equiv -ur \bmod n,\; ry - sx = -n \qquad \text{dir.}$$

Teorem 1.10.2: $\Gamma_o(n)$, $F_{u,n}$ nin köşelerini ve kenarlarını trasitif olarak permüte eder.

Lemma 1.10.3:

i. $F_{u,n}$ nin tüm v köşeleri için $F_{u,n} \to F_{-u,n}$ ye $T(v) = -v$ ile verilen fonksiyon bir izomorfizmadır.

ii. Eğer $m|n$ ise; $F_{u,n}$ nin tüm v köşeleri için $F_{u,n}$ den $F_{u,m}$ nin bir alt grafına $T(v) = \frac{nv}{m}$ ile verilen fonksiyon bir izomorfizmadır.

Sonuç 1.10.4: $F_{u,n}$ nin tüm v köşeleri için $F_{u,n}$ den $F(=\mathcal{G}_{1,1}=F_{1,1})$ in bir alt grafına $f:v\to -v$ ile verilen bir izomorfizma vardır.

Tanım 1.10.5: v_1,v_2,v_3 üç köşe olmak üzere;

$v_1\to v_2\to v_3\to v_1$ ise; buna yönlendirilmiş üçgen,

$v_1\to v_2\leftarrow v_3\to v_1$ ise; buna ters yönlendirilmiş üçgen denir.

Kendi eşleşmiş grafta bu iki kavram birbirine denktir.

Teorem 1.10.6:

i. $F_{u,n}$ yönlü üçgen içerir $\Leftrightarrow u^2\pm u+1\equiv 0 \bmod n$

ii. $n>1$ ise; $F_{u,n}$ ters yönlü üçgen içermez.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

2.1. $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ Kongrüans Alt Grubu $\hat{\mathbb{Q}}(h)$ Üzerindeki Hareketi

$h \in \mathbb{Z}$ sayısı $h^2 \mid n$ olan 24 'ün en büyük böleni ve $n \in \mathbb{Z},\ n > 1$ olmak üzere;

$$\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix} \middle|\ ad - bc\frac{n}{h} = 1,\ a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$$ grubunu ele alacağız.

Öncelikle; $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ nın transtif olduğu en büyük kümeyi bulalım. Bir grup, bir küme üzerinde transitif olarak hareket ediyorsa bu grubun tek bir yörüngesi vardır. Dolayısıyla, eğer $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ nın ∞ u içeren yörüngesini hesaplarsak bu aradığımız küme olur. O halde;

$$\begin{aligned} \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)\infty &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle|\ \begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix} \in \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ c\frac{n}{h} \end{pmatrix} \middle|\ a,c \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla; $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ grubu, $\hat{\mathbb{Q}}(h) := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ c\frac{n}{h} \end{pmatrix} \middle|\ a,c \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi üzerinde transitif olarak hareket eder. Şimdi; $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ nın $\hat{\mathbb{Q}}(h) := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ c\frac{n}{h} \end{pmatrix} \middle|\ a,c \in \mathbb{Z} \right\}$ üzerindeki hareketini tanımlayalım.

$$\alpha:\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)\times\hat{\mathbb{Q}}(h)\to\hat{\mathbb{Q}}(h)$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d\end{pmatrix},\frac{x}{y\frac{n}{h}}\right)\to\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d\end{pmatrix},\frac{x}{y\frac{n}{h}}\right):=\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d\end{pmatrix}.\left(\frac{x}{y\frac{n}{h}}\right)=\frac{ax+by\frac{n}{h}}{c\frac{n}{h}x+dy\frac{n}{h}}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm, $\hat{\mathbb{Q}}(h)$ üzerinde bir hareket grubudur.

Gerçekten;

i) $\forall\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d\end{pmatrix},\begin{pmatrix} p & q \\ r\frac{n}{h} & s\end{pmatrix}\in\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ ve $\forall\frac{x}{y\frac{n}{h}}\in\hat{\mathbb{Q}}(h)$ için

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d\end{pmatrix}\left(\frac{x}{y\frac{n}{h}}\right)\right)=\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d\end{pmatrix}\right)\left(\frac{x}{y\frac{n}{h}}\right)$$ dir.

ii) $e=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ için ve $\forall\frac{x}{y\frac{n}{h}}\in\hat{\mathbb{Q}}(h)$ için $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\left(\frac{x}{y\frac{n}{h}}\right)=\frac{x}{y\frac{n}{h}}$ dir.

Dolayısıyla; $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ grubu $\hat{\mathbb{Q}}(h)$ üzerinde hareket eder.

NOT: $\frac{x}{y\frac{n}{h}}\in\hat{\mathbb{Q}}(h)$ indirgenmiş formda bir kesir olduğundan $\frac{ax+by\frac{n}{h}}{c\frac{n}{h}x+dy\frac{n}{h}}$ kesri de indirgenmiş formda bir kesirdir. Ayrıca $\frac{x}{y\frac{n}{h}}=\frac{-x}{-y\frac{n}{h}}$ olduğundan bu gösterim tek türlü belirli değildir.

Gerçekten; $\left(x,y\frac{n}{h}\right)=1$ ise $\left(ax+by\frac{n}{h},c\frac{n}{h}x+dy\frac{n}{h}\right)=1$ dir.

İspat: $\left(ax+by\frac{n}{h},c\frac{n}{h}x+dy\frac{n}{h}\right)=n>1$ olsun. O halde; $n\,|\,ax+by\frac{n}{h}$ ve $n\,|\,c\frac{n}{h}x+dy\frac{n}{h}$

dır. O halde; $\exists k,l \in \mathbb{Z} \therefore ax + by\frac{n}{h} = nk$ ve $c\frac{n}{h}x + dy\frac{n}{h} = nl$ dir. Buradan; birinci eşitliği d ile ikincisini $-b$ ile çarpıp alt alta toplarsak

$d\ /\ ax + by\frac{n}{h} = nk$, $-b\ /\ c\frac{n}{h}x + dy\frac{n}{h} = nl \Rightarrow x = nt$ olup $n \mid x$ dir. Eğer; birinci eşitliği $c\frac{n}{h}$ ile ikincisini a ile çarpıp toplarsak

$c\frac{n}{h}\ /\ ax + by\frac{n}{h} = nk$, $a\ /\ c\frac{n}{h}x + dy\frac{n}{h} = nl \Rightarrow y\frac{n}{h} = nu$ olup $n \mid y\frac{n}{h}$ dir. Dolayısıyla; $n \left| \left(x, y\frac{n}{h} \right) \right. = 1$ dır.

Teorem 2.1.1: $\forall T \in \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ için $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_{T(\infty)} = T\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_{\infty} T^{-1}$ dir.

İspat: $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$, $\hat{\mathbb{Q}}(h)$ üzerinde hareket ettiği için $w \in \hat{\mathbb{Q}}(h)$ ve $T \in \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ için $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_{T(w)} = T\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_{w} T^{-1}$ dir. O halde; $\hat{\mathbb{Q}}(h)$ nın herhangi iki elemanının sabitleyeni, $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ grubunda eşleniktir.

Teorem 2.1.2: $\hat{\mathbb{Q}}(h)$ nın herhangi bir noktasının sabitleyeni sonsuz devirlidir.

İspat: $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$, $\hat{\mathbb{Q}}(h)$ üzerinde transitif olduğundan ∞ un sabitleyenine bakmak yeterlidir. Yani; $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_{\infty} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ olduğunu gösterelim.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix} \in \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_{\infty}$ keyfi olsun. O halde; $\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olduğundan

$a = 1,\ c = 0, d = 1$ dir. O halde; $\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{Z}$ dir. Buradan;

$$\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_\infty = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{Z}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ dir.}$$

Biliyoruz ki (G,Ω) bir transitif permütasyon grubu ve $G_\alpha < H < G$ olmak üzere; Ω üzerinde $g(\alpha) \approx h(\alpha) \Leftrightarrow g^{-1}h \in H$ ile verilen "$\approx$" bağıntısı bir G invaryant impirimitif denklik bağıntısı idi. O halde; $v \approx w \Leftrightarrow g^{-1}h \in \Gamma_o(n)$ dır.Burada;

$$\Gamma_o(n) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \middle| \, ad - bcn = 1, a,b,c,d \in \mathbb{Z}\right\}$$ grubunu göz önüne alalım. $n > 1$ için

$$\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_\infty < \Gamma_o(n) < \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right) \text{ dır.}$$

Şimdi; $\hat{\mathbb{Q}}(h)$ üzerinde bir $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ invaryant denklik bağıntısı elde edelim:

$v = \dfrac{r}{s\frac{n}{h}}, w = \dfrac{x}{y\frac{n}{h}} \in \hat{\mathbb{Q}}(h)$ için $g(\infty) = v, h(\infty) = w$ olan $g, h \in \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ vardır. Böylece;

$$g = \begin{pmatrix} r & * \\ s\frac{n}{h} & * \end{pmatrix}, \; h = \begin{pmatrix} x & * \\ y\frac{n}{h} & * \end{pmatrix}$$ formundadır. Buradan,

$$v = \frac{r}{s\frac{n}{h}} \approx w = \frac{x}{y\frac{n}{h}} \Leftrightarrow g^{-1}h = \begin{pmatrix} * & * \\ -s\frac{n}{h} & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & * \\ y\frac{n}{h} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ ry\frac{n}{h} - sx\frac{n}{h} & * \end{pmatrix} \in \Gamma_o(n)$$

$$\Leftrightarrow ry\frac{n}{h} - sx\frac{n}{h} \equiv 0(n)$$
$$\Leftrightarrow ry - sx \equiv 0(h)$$

elde edilir.

Şimdi bu denklik bağıntısının doğurduğu blokların sayısını hesaplayalım:

Teorem 2.1.3: Yukarıda tanımlanan "$\approx$" denklik bağıntısının tam h tane bloğu vardır ve bu bloklar $\left[\dfrac{1}{k\frac{n}{h}}\right]$, $k \in \{0,1,2...,h-1\}$ şeklindedir.

İspat: $\dfrac{a}{b\frac{n}{h}} \in \mathbb{Q}(h)$ keyfi olsun. $\dfrac{a}{b\frac{n}{h}} \approx \dfrac{1}{k\frac{n}{h}}$ olan bir tek $k \in \{0,1,2...,h-1\}$ sayısının

mevcut olduğunu gösterelim. $(a, b\frac{n}{h}) = 1$ olduğundan

$$\exists p,l \in \mathbb{Z} \therefore ap - bl\frac{n}{h} = 1 \qquad (*)$$

dir. Buradan; $h^2 \mid n$ olduğundan $\exists u \in \mathbb{Z} \therefore n = h^2 u \Rightarrow \dfrac{n}{h} = hu$ şeklindedir. O halde; (*)

eşitliğinin her iki tarafının h ya göre modunu alırsak $ap \equiv 1(h) \overset{b\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} apb \equiv b(h)$ dir ve

$pb \equiv k(h)$ olan bir tek $k \in \{0,1,...,h-1\}$ mevcuttur. O halde;

$ak \equiv b(h) \Rightarrow ak - b \equiv 0(h)$ olur. Bu ise bize; $\dfrac{a}{b\frac{n}{h}} \approx \dfrac{1}{k\frac{n}{h}}$ olduğunu söyler.

Sonuç 2.1.4: $\left|\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right) : \Gamma_o(n)\right| = h$ dır.

İspat: $C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\frac{n}{h} & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, k \in \{0,1,2,...,h-1\} \right\}$ kümesinin koset temsilcilerinin kümesi olduğu

açıktır.

Ayrıca; $\Gamma_o(n) < \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ olduğundan $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right) = \dot{\bigcup}_{i\in\{0,1,...,h-1\}} c_i\Gamma_o(n)$ öyleki $c_i \in C$

şeklindedir.

2.2. $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ nın $\hat{\mathbb{Q}}(h)$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

$\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$, $\hat{\mathbb{Q}}(h)$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $u,v \in \hat{\mathbb{Q}}(h)$ için

$\exists g \in \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right) \therefore g(u) = \infty$ dır. $g(v) = w$ dersek; $g(u,v) = (\infty, w)$ olur. Öte yandan;

$g(u,v)\in O(u,v)$ ve $g(u,v)=(\infty,w)\in O(\infty,w)$ olduğundan $O(u,v)=O(\infty,w)$ dır.

$v\in\hat{\mathbb{Q}}(h)$ olduğundan $v=\dfrac{u}{n_o\frac{n}{h}}$, $(u,n_o\frac{n}{h})=1$ şeklindedir. $(\infty,v)=(\infty,\dfrac{u}{n_o\frac{n}{h}})$ çiftini

içeren alt yörüngeyi $O\left(u,n_o\dfrac{n}{h}\right)$ ve bu yörüngeye karşılık gelen grafı da $\mathcal{G}(u,n_o\frac{n}{h})$ ile

göstereceğiz.

$v=\infty$ durumunda; $\mathcal{G}(1,0)=\mathcal{G}(-1,0)$ trivial alt yörüngesel graftır. Şimdi; $v\neq\infty$ durumlarını inceleyelim.

Önerme 2.2.1: $v,w\in\hat{\mathbb{Q}}(h)$ olmak üzere;

$$O(\infty,v)=O(\infty,w)\Leftrightarrow v,w;\ \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_\infty \text{ un aynı yörüngesindedir.}$$

İspat: $O(\infty,v)=O(\infty,w)$ olsun. $g(v)=w$ olan bir $g\in\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_\infty$ olduğunu gösterirsek ispat biter. $(\infty,v)\in O(\infty,v)$ için $(\infty,v)\in O(\infty,w)$ dır. O halde;

$\exists g\in\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_\infty$ $\therefore$ $g(\infty)=\infty$ ve $g(v)=w$ dır. $g(\infty)=\infty$ olduğundan $g\in\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_\infty$ olup ispat tamamlanır. Tersine olarak; $v,w\in\hat{\mathbb{Q}}(h)$, $\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_\infty$ un aynı yörüngesinde olsun. O halde; $\exists g\in\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_\infty$ $\therefore$ $g(v)=w$ dır. $g\in\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_\infty$ olduğundan $g(\infty)=\infty$ dır.

Dolayısıyla; $O(\infty,v)=O(\infty,w)$ dir.

Sonuç 2.2.2: $O(\infty,\dfrac{u}{n_o\frac{n}{h}})=O(\infty\dfrac{u'}{n_o'\frac{n}{h}})$ $\Leftrightarrow$ $u\equiv u'(n_o\frac{n}{h})$ ve $n_o\frac{n}{h}=n_o'\frac{n}{h}$ dir.

İspat: $v,w\in\hat{\mathbb{Q}}(h)$ olduğundan $v=\dfrac{u}{n_o\frac{n}{h}},w=\dfrac{u'}{n_o'\frac{n}{h}}$ dir. $g\in\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)_\infty$ olduğundan

$g=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix},k\in\mathbb{Z}$ formundadır. $g(v)=w$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ n_o\frac{n}{h} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u' \\ n_o'\frac{n}{h} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u+kn_o\frac{n}{h} \\ n_o\frac{n}{h} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u' \\ n_o'\frac{n}{h} \end{pmatrix}$$

dır. O halde; $u=u'+kn_o\frac{n}{h}$, $n_o=n_o'$ dır. Dolayısıyla; $u\equiv u'(n_o\frac{n}{h})$, $n_o\frac{n}{h}=n_o'\frac{n}{h}$ dır.

Tersi açıktır.

Sonuç 2.2.3: $\mathcal{G}(\infty,\frac{u}{n_o\frac{n}{h}})=\mathcal{G}(\infty,\frac{u'}{n_o'\frac{n}{h}}) \Leftrightarrow u\equiv u'(n_o\frac{n}{h})$ ve $n_o\frac{n}{h}=n_o'\frac{n}{h}$ dir.

Gösterim: Euler fonksiyonu; $U_{n_o\frac{n}{h}}:=\left\{u \middle| (u,n_o\frac{n}{h})=1,\ u\le n_o\frac{n}{h}\right\}$ olmak üzere;

$\varphi(n_o\frac{n}{h}):=\left|\left\{u \middle| \left(u,n_o\frac{n}{h}\right)=1,\ u\le n_o\frac{n}{h}\right\}\right|$ şeklindedir.

Sonuç 2.2.4: $u\in U_{n_o\frac{n}{h}}$ olmak üzere; toplam $\frac{n_o\varphi(n)}{h}$ tane farklı $\mathcal{G}\left(u,n_o\frac{n}{h}\right)$ alt yörüngesel grafı vardır.

Teorem 2.2.5:

$\frac{r}{s\frac{n}{h}}\rightarrow\frac{x}{y\frac{n}{h}}$, $\mathcal{G}\left(u,n_o\frac{n}{h}\right)$ da bir kenardır $\Leftrightarrow$

$a)\ x\equiv ur\left(n_o\frac{n}{h}\right),\ ry-sx=n_o$

$b)\ x\equiv -ur\left(n_o\frac{n}{h}\right),\ ry-sx=-n_o$

İspat: $\frac{r}{s\frac{n}{h}}\rightarrow\frac{x}{y\frac{n}{h}}$, $\mathcal{G}\left(u,n_o\frac{n}{h}\right)$ da bir kenar olsun. O halde; $\left(\frac{r}{s\frac{n}{h}},\frac{x}{y\frac{n}{h}}\right)\in O\left(u,n_o\frac{n}{h}\right)$

dır. Dolayısıyla, $\exists g\in\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)\therefore\ g(\infty)=\frac{r}{s\frac{n}{h}}$ ve $g\left(\frac{u}{n_o\frac{n}{h}}\right)=\frac{x}{y\frac{n}{h}}$ dır. O halde;

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n_o\frac{n}{h} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & x \\ s\frac{n}{h} & y\frac{n}{h} \end{pmatrix} \quad \ldots(I)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n_o\frac{n}{h} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -r & -x \\ -s\frac{n}{h} & -y\frac{n}{h} \end{pmatrix} \quad \ldots(II)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n_o\frac{n}{h} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -r & x \\ -s\frac{n}{h} & y\frac{n}{h} \end{pmatrix} \quad \ldots(III)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n_o\frac{n}{h} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & -x \\ s\frac{n}{h} & -y\frac{n}{h} \end{pmatrix} \quad \ldots(IV)$$

eşitliklerinden birini verir.

(I) eşitliğini göz önüne alalım.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n_o\frac{n}{h} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & x \\ s\frac{n}{h} & y\frac{n}{h} \end{pmatrix}$$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & au+bn_o\frac{n}{h} \\ c\frac{n}{h} & uc\frac{n}{h}+dn_o\frac{n}{h} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & x \\ s\frac{n}{h} & y\frac{n}{h} \end{pmatrix}$$ dir. Buradan; $a=r$, $c=s$, $x\equiv ur\left(n_o\frac{n}{h}\right)$ dir.

Her iki tarafın determinantını alırsak $ry-sx=n_o$ elde edilir.

(II) eşitliğinden benzer sonuçlar elde edilir.

(III) eşitliğini göz önüne alalım.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n_o\frac{n}{h} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -r & x \\ -s\frac{n}{h} & y\frac{n}{h} \end{pmatrix}$$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & au+bn_o\frac{n}{h} \\ c\frac{n}{h} & uc\frac{n}{h}+dn_o\frac{n}{h} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -r & x \\ -s\frac{n}{h} & y\frac{n}{h} \end{pmatrix}$$ dır. Buradan $a=-r$, $c=-s$, $x\equiv -ur\left(n_o\frac{n}{h}\right)$

elde edilir.

Her iki tarafın determinantını alırsak $ry - sx = -n_o$ elde edilir.

(IV) eşitliğinden benzer sonuçlar elde edilir.

Tersine olarak; Farz edelimki $x \equiv ur\left(n_o \frac{n}{h}\right)$, $ry - sx = n_o$ olsun.

$\frac{r}{s\frac{n}{h}} \rightarrow \frac{x}{y\frac{n}{h}}$, $\mathcal{G}\left(u, n_o \frac{n}{h}\right)$ da bir kenar olduğunu gösterelim.

$x \equiv ur\left(n_o \frac{n}{h}\right)$ olduğundan $\exists t \in \mathbb{Z} \therefore x = ur + tn_o \frac{n}{h}$ ve $ry - sx = n_o$ dir. Şimdi;

$g(\infty) = \frac{r}{s\frac{n}{h}}$ ve $g\left(\frac{u}{n_o\frac{n}{h}}\right) = \frac{x}{y\frac{n}{h}}$ olan bir $g \in \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ olduğunu gösterelim.

$\begin{pmatrix} r & t \\ s\frac{n}{h} & \frac{y-us}{n_o} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n_o\frac{n}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s\frac{n}{h} & y\frac{n}{h} \end{pmatrix}$ ve $ry - sx = n_o$ olduğundan her iki tarafın determinantı alınırsa;

$\left(r\left(\frac{y-us}{n_o}\right) - st\frac{n}{h}\right)n_o\frac{n}{h} = \frac{n}{h}(ry - sx) \Rightarrow \left(r\left(\frac{y-us}{n_o}\right) - st\frac{n}{h}\right) = 1$ dir. Dolayısıyla;

$g := \begin{pmatrix} r & t \\ s\frac{n}{h} & \frac{y-us}{n_o} \end{pmatrix} \in \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ dir.

Benzer şekilde b) elde edilir.

Sonuç 2.2.6: $u^2 \not\equiv n_0\left(n_o\frac{n}{h}\right)$ ve $uv \equiv -1\left(n_o\frac{n}{h}\right)$ olsun. Bu taktirde;

$$\mathcal{G}\left(u, n_o\frac{n}{h}\right) \text{ ve } \mathcal{G}\left(v, n_o\frac{n}{h}\right) \text{ eşleşmiştir.}$$

İspat: $\frac{x}{y\frac{n}{h}} \rightarrow \frac{r}{s\frac{n}{h}}$, $\mathcal{G}\left(u, n_o\frac{n}{h}\right)$ da bir kenar olsun.

$a)\ r \equiv ux\left(n_o \frac{n}{h}\right),\ sx - ry = n_o$ veya

$b)\ r \equiv -ux\left(n_o \frac{n}{h}\right),\ sx - ry = -n_o$ dir. Farz edelim ki $a)$ şıkkı doğru olsun.

$r \equiv ux\left(n_o \frac{n}{h}\right)$ olduğundan $v\,r \equiv vux\left(n_o \frac{n}{h}\right) \Rightarrow v\,r \equiv -x\left(n_o \frac{n}{h}\right)$ dir. Yani;

$x \equiv -vr\left(n_o \frac{n}{h}\right), ry - sx = n_o$ dır. Benzer şekilde $b)$ için de gösterilir.

Öte yandan; $O(\infty, \frac{u}{n_o \frac{n}{h}}) \cap O(\frac{u}{n_o \frac{n}{h}}, \infty) = \varnothing$ dır. Farz edelim ki

$O(\infty, \frac{u}{n_o \frac{n}{h}}) \cap O(\frac{u}{n_o \frac{n}{h}}, \infty) \neq \varnothing$ olsun. O halde; $O(\infty, \frac{u}{n_o \frac{n}{h}}) = O(\frac{u}{n_o \frac{n}{h}}, \infty)$ dir. O halde;

$\exists g \in \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right) \therefore g(\infty) = \frac{u}{n_o \frac{n}{h}},\ g(\frac{u}{n_o \frac{n}{h}}) = \infty$ dir. Yani; $g(\infty, \frac{u}{n_o \frac{n}{h}}) = (\frac{u}{n_o \frac{n}{h}}, \infty)$ dir.

Buradan; $\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n_o \frac{n}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -1 \\ \frac{n}{h} & 0 \end{pmatrix}$ olup $\begin{pmatrix} a & au + bn_o \frac{n}{h} \\ c\frac{n}{h} & uc\frac{n}{h} + dn_o \frac{n}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -1 \\ \frac{n}{h} & 0 \end{pmatrix}$

dir. O halde; $a = u,\ c = 1,\ d = \frac{-u}{n_o}$ dır. Dolayısıyla;

$\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & b \\ \frac{n}{h} & \frac{-u}{n_o} \end{pmatrix} := g \in \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ dir. $\det g = 1$ olduğundan

$\frac{-u^2}{n_o} - b\frac{n}{h} = 1 \Rightarrow u^2 + bn_o \frac{n}{h} = -n_o$ elde edileceğinden $u^2 \equiv -n_o\left(n_o \frac{n}{h}\right)$ çelişkisi elde

edilir. Dolayısıyla; $O(\infty, \frac{u}{n_o \frac{n}{h}}) \cap O(\frac{u}{n_o \frac{n}{h}}, \infty) = \varnothing$ dir.

Sonuç olarak; $\mathcal{G}\left(u, n_o\frac{n}{h}\right)$ ve $\mathcal{G}\left(v, n_o\frac{n}{h}\right)$ eşleşmiştir.

Sonuç 2.2.7: $\mathcal{G}\left(u, n_o\frac{n}{h}\right)$ kendi eşleşmiştir $\Leftrightarrow$ $u^2 \equiv -1\left(n_o\frac{n}{h}\right)$ dir.

İspat: $\mathcal{G}\left(u, n_o\frac{n}{h}\right)$ kendi eşleşmiştir. Bu takdirde; $O(\infty, \frac{u}{n_o\frac{n}{h}}) = O(\frac{u}{n_o\frac{n}{h}}, \infty)$ dır.

O halde; $\exists\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix} \in \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ öyleki $\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n_o\frac{n}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ n_o\frac{n}{h} & 0 \end{pmatrix}$ dir.

Buradan;

$\begin{pmatrix} a & au + bn_o\frac{n}{h} \\ c\frac{n}{h} & cu\frac{n}{h} + dn_o\frac{n}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ n_o\frac{n}{h} & 0 \end{pmatrix}$ dir. O halde; $a = u, c = n_o$ ve $u^2 + bn_o\frac{n}{h} = 1$,

$uc\frac{n}{h} + dn_o\frac{n}{h} = 0 \Rightarrow \frac{n}{h}(uc + dn_o) = 0 \Rightarrow uc + dn_o = 0 \Rightarrow d = -u$ dir. Buradan;

$\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & b \\ n_o\frac{n}{h} & -u \end{pmatrix}$ dır. Biliyoruz ki $\det\begin{pmatrix} u & b \\ n_o\frac{n}{h} & -u \end{pmatrix} = 1$ olduğundan

$-u^2 - bn_o\frac{n}{h} = 1$ dir. O halde; $u^2 \equiv -1(n_o\frac{n}{h})$ dir.

Tersine olarak; $u^2 \equiv -1(n_o\frac{n}{h})$ olsun. Bu takdirde; $\exists k \in \mathbb{Z} \therefore u^2 = -kn_o\frac{n}{h} - 1$ dir.

$-u^2 - kn_o\frac{n}{h} = 1$ dir. Buradan; $\begin{pmatrix} u & k \\ n_o\frac{n}{h} & -u \end{pmatrix} \in \Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ olur. Öte yandan;

$\begin{pmatrix} u & k \\ n_o\frac{n}{h} & -u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ n_o\frac{n}{h} \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} u & k \\ n_o\frac{n}{h} & -u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ n_o\frac{n}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dır. Yani;

$O(\infty,\dfrac{u}{n_o\frac{n}{h}})=O(\dfrac{u}{n_o\frac{n}{h}},\infty)$ olup $\mathcal{G}\left(u,n_o\dfrac{n}{h}\right)$ kendi eşleşmiştir.

2.3. $\mathcal{G}(u,n_o\frac{n}{h})$ ve $F(u,n)$ Grafları

Bu bölümde $\mathcal{G}(u,n_o\frac{n}{h})$ alt yörüngesel grafının, köşeleri ∞ 'u içeren $[\infty]=\left\{\dfrac{x}{yn}\in\hat{\mathbb{Q}}(h)\,\middle|\, x,y\in\mathbb{Z}\right\}$ bloğundan oluşan alt grafını $F(u,n)$ ile göstereceğiz.

Kısalık olması için $F(u,n)$ 'yi $F_{u,n}$ ile göstereceğiz. Ayrıca; Farey grafı ile $F_{1,1}$ grafı aynıdır. Şimdi $F_{u,n}$ 'de kenar olma şartlarını verelim.

Lemma 2.3.1: $\dfrac{r}{sn}\rightarrow\dfrac{x}{yn}\in F_{u,n} \Leftrightarrow$ $a)\ x\equiv ur(n),\quad ry-sx=1$ veya
$b)\ x\equiv -ur(n),\ ry-sx=-1$

dir.

İspat: Teorem 2.2.5' ten açıktır.

Teorem 2.3.2: $\mathcal{U}$ üst yarı düzleminde, $F_{u,n}$ alt grafının kenarları kesişmez.

Teorem 2.3.3: $\Gamma_o(n)$, $F_{u,n}$ nin köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder.

İspat: Öncelikle $\Gamma_o(n)$ nin $F_{u,n}$ nin köşelerini transitif olarak hareket ettiğini gösterelim.

$v,w\in[\infty]$, $F_{u,n}$ nin iki köşesi olsun. $\Gamma_o\left(\dfrac{n}{h}\right),\hat{\mathbb{Q}}(h)$ üzerinde hareket ettiğinden

$\exists g=\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d\end{pmatrix}\in\Gamma_o\left(\dfrac{n}{h}\right)\therefore g(v)=w$ dir. $v,w\in[\infty]$ olduğundan $v=\dfrac{r}{sn},w=\dfrac{x}{yn}$

şeklindedir. Bu durumda; $g(v)=w\Rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ c\frac{n}{h} & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ sn\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ yn\end{pmatrix}$ olduğundan

$cr\dfrac{n}{h}+dsn=yn\ \Rightarrow cr+dsh=yh\Rightarrow h|c$ dir. Dolayısıyla; $g\in\Gamma_o(n)$ dir.

Yani; $\Gamma_o(n),[\infty]$ nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder. Ayrıca;

$g:[\infty]\to[\infty], g\in\Gamma_o(n)$ birebir ve örtendir. Dolayısıyla; g köşeler üzerinde bir permütasyondur.

Şimdi; $\Gamma_o(n)$ nin $F_{u,n}$ nin kenarlarını transitif olarak permüte ettiğini gösterelim.

$\frac{r}{sn}\to\frac{x}{yn}\in F_{u,n}$ ve $\frac{a}{bn}\to\frac{c}{dn}\in F_{u,n}$ iki kenar olsun. Buradan;

$\left(\frac{r}{sn},\frac{x}{yn}\right),\left(\frac{a}{bn},\frac{c}{dn}\right)\in O(\infty,n_o\frac{n}{h})$ dır. O halde;

$\exists h=\begin{pmatrix} k & l \\ m\frac{n}{h} & t\end{pmatrix}\in\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)\therefore\ g(\frac{r}{sn},\frac{x}{yn})=(\frac{a}{bn},\frac{c}{dn})$ dır. Yani;

$\begin{pmatrix} k & l \\ m\frac{n}{h} & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & x \\ sn & yn\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c \\ bn & dn\end{pmatrix}$ olduğundan $mr\frac{n}{h}+tsn=bn\Rightarrow h|m$ dir. Dolayısıyla;

$g\in\Gamma_o(n)$ elde edilir. Diğer taraftan; her $g\in\Gamma_o\left(\frac{n}{h}\right)$ dönüşümü kenarlar kümesinden kenarlar kümesine bir permütasyondur. Sonuç olarak; $\Gamma_o(n)$, $F_{u,n}$ nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder. $\Gamma_o(n)$, $F_{u,n}$ nin köşelerini transitif olarak permute ettiğinden her bir köşeye farklı köşeler karşılık gelir. Böylece; farklı kenarlara, farklı kenarlar karşılık gelir.

Teorem 2.3.4: $v, F_{u,n}$ de bir köşe olmak üzere;

$T(v)=-v$ ile verilen dönüşümü $F_{u,n}\to F_{-u,n}$ bir izomorfizmadır.

İspat: $F_{u,n}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_n:=\left\{\frac{x}{yn}\middle| x,y\in\mathbb{Z}\right\}$ ve $F_{-u,n}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_{-n}=[\infty]_n$ dir. $T(v)=-v$ fonksiyonunun, $[\infty]$ kümesi üzerinde birebir ve örten olduğu açıktır. Şimdi T nin yapı koruyan olduğunu gösterelim. $\frac{a}{bn}\to\frac{c}{dn}\in F_{u,n}$ olsun. O halde; $x\equiv\mp ur(n),\ ry-sx=\mp1$ dir. Farz edelim ki $x\equiv ur(n), ry-sx=1$ olsun. Yani; $c\equiv ua(n),\ ad-bc=1$ dir. Buradan; $-c\equiv-(-u)(-a)(n),\ (-a)d-bc=-1$

dir. Dolayısıyla; $\frac{-a}{bn} \to \frac{-c}{dn} \in F_{-u,n}$ elde edelim. Benzer şekilde; $x \equiv -ur(n), ry - sx = -1$ kabul edilerek aynı sonuç elde edilir. Sonuç olarak; T dönüşümü bir izomorfizmadır.

Teorem 2.3.5: $v, F_{u,n}$ de bir köşe olmak üzere $m|n$ ise; $v, F_{u,n}$ nin bir köşesi olmak üzere; $T(v) = \frac{nv}{m}$ ile verilen dönüşüm $F_{u,n}$ den $F_{u,m}$ nin bir alt grafına bir izomorfizmadır.

İspat: $F_{u,n}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_n$ ve $F_{u,m}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_m$ dir.

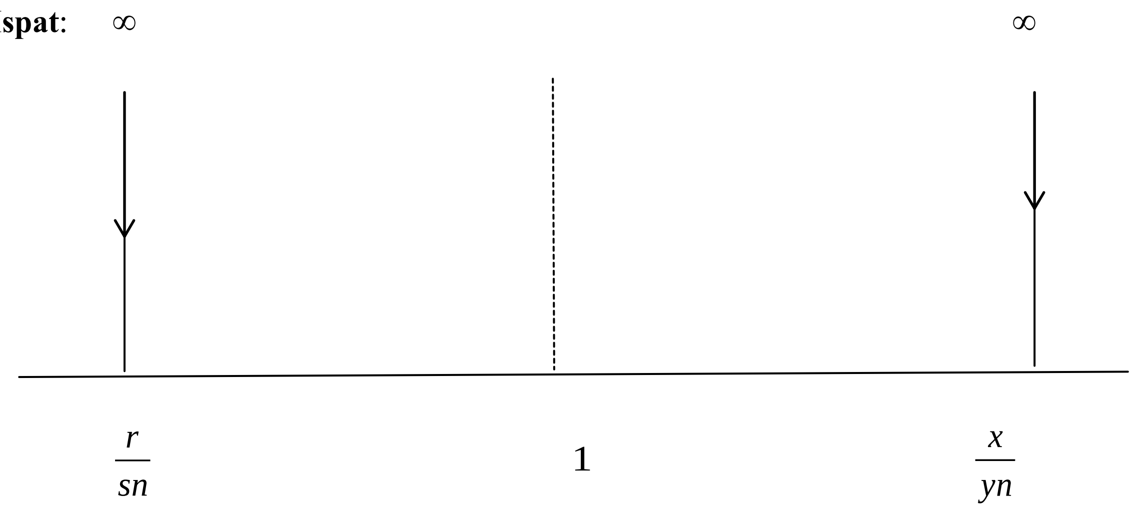
$T:[\infty]_n \to [\infty]_n$, $T(v) = \frac{nv}{m}$ dönüşümünün birebir olduğu açıktır. T yapı koruyandır.

$v = \frac{r}{sn} \to \frac{x}{yn} = w \in F_{u,n}$ olsun. $T(v) = \frac{r}{sn} \to \frac{x}{yn} = T(w) \in F_{u,n}$ olduğunu görelim. Farz edelim ki Lemma 2.3.1 (a) sağlansın. Bu durumda; $x \equiv ur(n), ry - sx = 1$dır. $m|n$ olduğundan $x \equiv ur(m),\ ry - sx = 1$ dir. $\frac{r}{sm} \to \frac{x}{ym} F_{u,m}$ dir. Benzer şekilde Lemma 2.3.1 (b) şıkkı için de yapılır. Bu bize; T nin $F_{u,n}$ den $F_{u,m}$ ye bir monomorfizma olduğunu söyler. Dolayısıyla; $F_{u,m}$ nin bir alt grafına izomorfizmadır.

Sonuç 2.3.6: Yukarıdaki Teoremde $n = 1$ alınırsa; $F_{u,n}$ nin bütün köşeleri için $f: v \to nv$ ile verilen dönüşüm $F_{u,n}$ den $F_{1,1}$ nin bir alt grafına bir izomorfizmadır.

Lemma 2.3.7: $F_{u,n}$ 'de hiçbir kenar, $\operatorname{Re} z = 1$ doğrusunu kesmez.

İspat:



Şekil 6. $F_{u,n}$ Grafı

Farz edelim ki $\frac{r}{sn}, \frac{x}{yn} \in F_{u,n}$; $\frac{r}{sn} < 1 < \frac{x}{yn}$ ve $\frac{r}{sn} \to \frac{x}{yn}$ koşullarını sağlayan iki köşe olsun. O halde; $\frac{r}{sn} < 1 < \frac{x}{yn}$ eşitsizliğini n ile çarparsak $\frac{r}{s} < n < \frac{x}{y}$ dir. Öte yandan; $\frac{r}{sn} \to \frac{x}{yn}$ olduğundan $ry - sx = -1$ yani; $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in F$ dir. Bu ise; $\infty \to n \in F$ ve $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in F$ olduğundan bu iki kenarın F de kesişmesiyle çelişir. Dolayısıyla; $\frac{r}{sn}, \frac{x}{yn} \in F_{u,n}$ köşeleri $\operatorname{Re} z = 1$ doğrusunu kesmez.

Lemma 2.3.8: $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\frac{3n+2}{3(n+1)} \in F_{1,3}$ köşesi; $\frac{3n+2}{3(n+1)} > \frac{3n-1}{3n}$ olmak üzere; $\frac{3n+2}{3(n+1)} \to \frac{3n-1}{3n}$ şartını sağlayan en uzak köşedir.

İspat: $\frac{x}{3y} \to \frac{3n-1}{3n} \in F_{1,3}$ olsun. O halde; $nx - y(3n-1) = 1$ ve $3n-1 \equiv x(3)$ dir.

Buradan $y = \frac{nx-1}{3n-1}$ ve $x \equiv 2(3) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \therefore x = 3k+2$ dir. O halde;

$y=\dfrac{n(3k+2)-1}{3n-1}=\dfrac{3nk+2n-1}{3n-1}$ dir. $y\in\mathbb{Z}$ olduğundan $3nk+2n-1\equiv 0(3n-1)$

olmalıdır. Buradan; $k\equiv n(3n-1)$ dir. O halde; $\exists l\in\mathbb{Z}\therefore k=(3n-1)l+n$ olup

$y=3nl+n+1$ dir. $f:\mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{Q}$ fonksiyonunu $\forall l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için

$f(l):=\dfrac{3((3n-1)l+n)+2}{3(3nl+n+1)}$ olarak tanımlayalım. $\forall l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $f'(l)<0$

olduğundan f fonksiyonu azalandır. Dolayısıyla; maksimum değeri $l=0$ noktasında alır.

O halde; $f(0)=\dfrac{3n+2}{3n+3}$ dır. Buradan; $x=3n+2$ ve $y=n+1$ elde edilir. Dolayısıyla;

$\dfrac{x}{3y}=\dfrac{3(n+1)-1}{3(n+1)}$ dir.

Lemma 2.3.9: $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\dfrac{3n+4}{3(n+1)}\in F_{1,3}$ köşesi; $\dfrac{3n+1}{3n}>\dfrac{3n+4}{3n+3}$ olmak üzere;

$\dfrac{3n+1}{3n}\to\dfrac{3n+4}{3n+3}$ şartını sağlayan en uzak köşedir.

İspat: $\dfrac{3n+1}{3n}\to\dfrac{x}{3y}$ olsun. O halde; $y(3n+1)-nx=1$ ve $x\equiv 3n+1(3)\Rightarrow x\equiv 1(3)$ dir.

O halde; $y=\dfrac{nx+1}{3n+1}$ ve $x\equiv 1(3)\Rightarrow\exists k\in\mathbb{Z}\therefore\ x=3k+1$ dir. Öte yandan;

$y=\dfrac{nx+1}{3n+1}=\dfrac{n(3k+1)+1}{3n+1}$ ve $y\in\mathbb{Z}$ olduğundan $3nk+n+1\equiv 0(3n+1)$ dir. Buradan;

$k\equiv n+1(3n+1)$ olup $\exists l\in\mathbb{Z}\therefore k=(3n+1)l+n+1$ dir. O halde;

$y=\dfrac{n(3\big((3n+1)l+n+1\big)+1)+1}{3n+1}=3nl+n+1$dir. $f:\forall l\in\mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{Q}$

fonksiyonunu $\forall l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $f(l):=\dfrac{3((3n+1)l+n+1)+1}{3(3nl+n+1)}$ olarak tanımlayalım.

$\forall l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $f'(l)>0$ olduğundan f fonksiyonu artandır. Dolayısıyla; minimum

değeri $l=0$ noktasında alır. O halde; $f(0)=\dfrac{3n+4}{3n+3}$ dır. Buradan; $l=0$olduğundan

$x=3n+4$ ve $y=n+1$ elde edilir. Dolayısıyla; $\dfrac{x}{3y}=\dfrac{3(n+1)+1}{3(n+1)}$ dir.

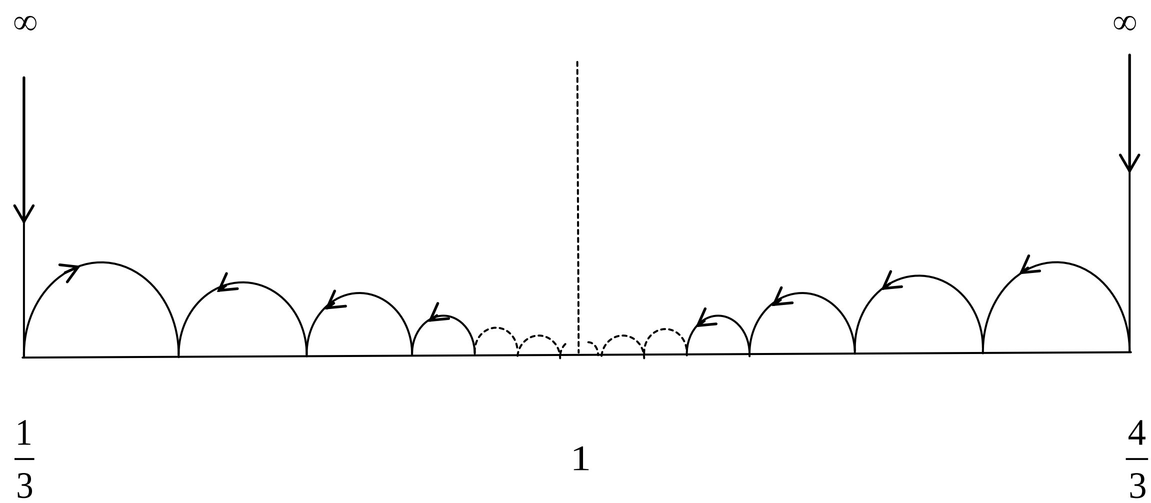
Lemma 2.3.10: $\left\{\dfrac{3n-1}{3n},\dfrac{3k+1}{3k}\,\middle|\, k\in\mathbb{N}\cup\{0\},n\in\mathbb{N}\right\}$ kümesinde $\dfrac{3n-1}{3n}$ elemanını $\dfrac{3k+1}{3k}$ elemanına birleştiren en kısa yoldaki kenar sayısı $n+k+1$ dir.

İspat: $\dfrac{3n-1}{3n}$ ve $\dfrac{3k+1}{3k}$, $k,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ köşelerini birleştiren en kısa uzunluklu yol L olsun. $\dfrac{3n-1}{3n}<1<\dfrac{3k+1}{3k}$ olduğundan Lemma 2.3.10 dan açıkça görülüyor ki $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n-1}{3n}=1$ ve $\dfrac{1}{0}\to\dfrac{1}{3}\to\dfrac{2}{3}\leftarrow\dfrac{5}{6}\leftarrow\dfrac{8}{9}\leftarrow\dfrac{11}{12}\leftarrow\cdots\leftarrow\dfrac{3n-1}{3n}$ yolu; $n+1$ kenardan oluşur. Diğer taraftan; $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{3k+1}{3k}=1$ ve

$\dfrac{4}{3}\to\dfrac{7}{6}\to\dfrac{10}{9}\to\dfrac{13}{12}\to\cdots\to\dfrac{3k+1}{3k}$ yolu; $k-1$ tane kenardan oluşur. Buradan;

$$\underbrace{\frac{3k+1}{3k}\leftarrow\cdots\leftarrow\frac{10}{9}\leftarrow\frac{7}{6}\leftarrow\frac{4}{3}}_{k-1\text{ tane}}\underbrace{\leftarrow\frac{1}{0}\to}_{1\text{ tane}}\underbrace{\frac{1}{3}\to\frac{2}{3}\leftarrow\frac{5}{6}\leftarrow\frac{8}{9}\leftarrow\frac{11}{12}\leftarrow\cdots\leftarrow\frac{3n-1}{3n}}_{n+1\text{ tane}}$$ dir.

Sonuç olarak; $n+k+1$ tane kenar vardır.



Şekil 7. $F_{1,3}$ Grafı

Lemma 2.3.11: $X := \left\{ \frac{3n-1}{3n}, \frac{3k+1}{3k} \middle| k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{N} \right\}$ olmak üzere;

$d : X \times X \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ fonksiyonu, $\forall (x, y) \in X \times X$ için

$$d(x,y) := "x \text{ ile } y \text{ yi birleştiren en kısa yoldaki kenar sayısı}"$$

şeklinde tanımlanırsa; d fonksiyonu, X kümesi üzerinde bir metriktir.

İspat: i) $\forall (x, y) \in X \times X$ için $d(x, y) \geq 0$ olduğu açıktır.

ii) $\forall (x, y) \in X \times X$ için

$$\begin{aligned} d(x,y) &= x \text{ ile } y \text{ yi birleştiren en az kenar sayısı} \\ &= y \text{ ile } x \text{ 'yi birleştiren en az kenar sayısı} = d(y,x) \end{aligned}$$

dir.

iii) $d(x, y) = 0$ olsun. O halde; "x ile y yi birleştiren en az kenar sayısı" sıfırdır.

Buradan; $x = y$ dir. Çünkü; X kümesinin herhangi iki elemanı birbiri ile birleştirilebilir.

Tersine olarak; "x ile y 'yi birleştiren kenar sayısı" sıfır ise; tanım gereği $d(x, y) = 0$

dır.

Yani; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ dir.

iv) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ dir. (*)

Gerçekten;

a) $x = y = z$ ise; (*) eşitsizliği sağlanır.

b) $x = y \neq z$ olsun.

$d(x, x) \leq d(y, z) + d(z, y) \Rightarrow 0 \leq d(y, z)$ olur. Dolayısıyla, (*) eşitliği sağlanır.

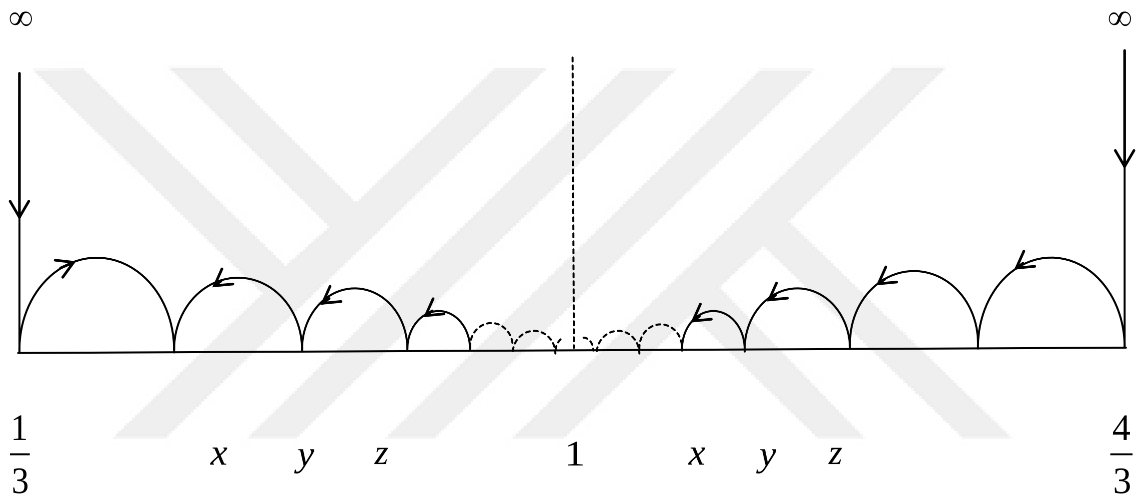
c) $x \neq y = z$ ise; $(*)$ eşitliği sağlanır.

b) şıkkına benzer şekilde yapılır.

d) $x = z \neq y$ ise; $(*)$ eşitliği sağlanır.

b) şıkkına benzer şekilde yapılır.

e) $x \neq y \neq z$ olsun. Bu durumda; aşağıdaki koşulları incelemek gerekir:



Şekil 8. $F_{1,3}$ Grafında bir yol

1) $\frac{1}{3} < x < y < z < 1$ olsun. Farz edelim ki $d(x,y) = u,\ d(z,y) = t$ olsun. O halde;

Şekil 8 den $d(x,z) = u + t$ dir. O halde; $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \Rightarrow u \leq u + t + t$ olduğundan $(*)$ eşitsizliği sağlanır.

2) $\frac{1}{3} < x < z < y < 1, \frac{1}{3} < y < x < z < 1,\ \frac{1}{3} < y < x < z < 1,\ \frac{1}{3} < y < z < x < 1,$ $\frac{1}{3} < z < y < x < 1,\ \frac{1}{3} < z < x < y < 1$ koşulları da 1)'dekine benzer şekilde yapılır.

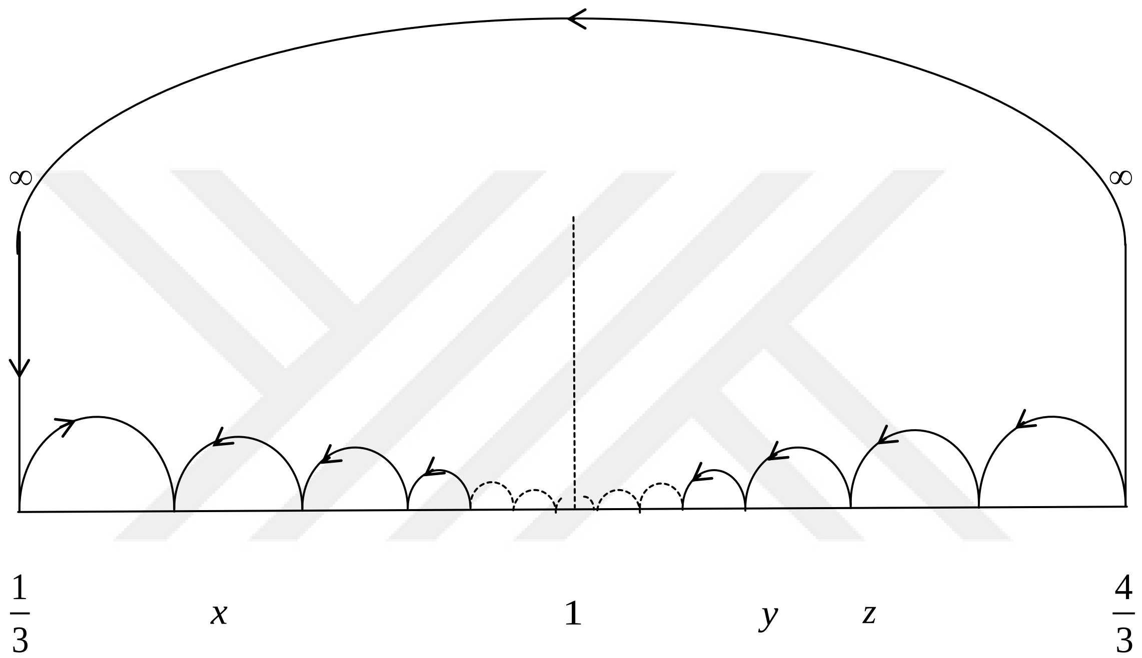
3) $1 < x < y < z < \frac{4}{3}$ olsun. Farz edelim ki $d(x,y) = u,\ d(z,y) = t$ olsun. O halde;

Şekil 8 den $d(x,z) = u + t$ dir. O halde; $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \Rightarrow u \leq u + t + t$

olduğundan $(*)$ eşitsizliği sağlanır.

4) $1 < x < z < y < \frac{4}{3}, 1 < y < x < z < \frac{4}{3}, 1 < y < x < z < \frac{4}{3}, 1 < y < z < x < \frac{4}{3},$

$1 < z < y < x < \frac{4}{3}, 1 < z < x < y < \frac{4}{3}$ koşulları da 3)'dekine benzer şekilde yapılır.



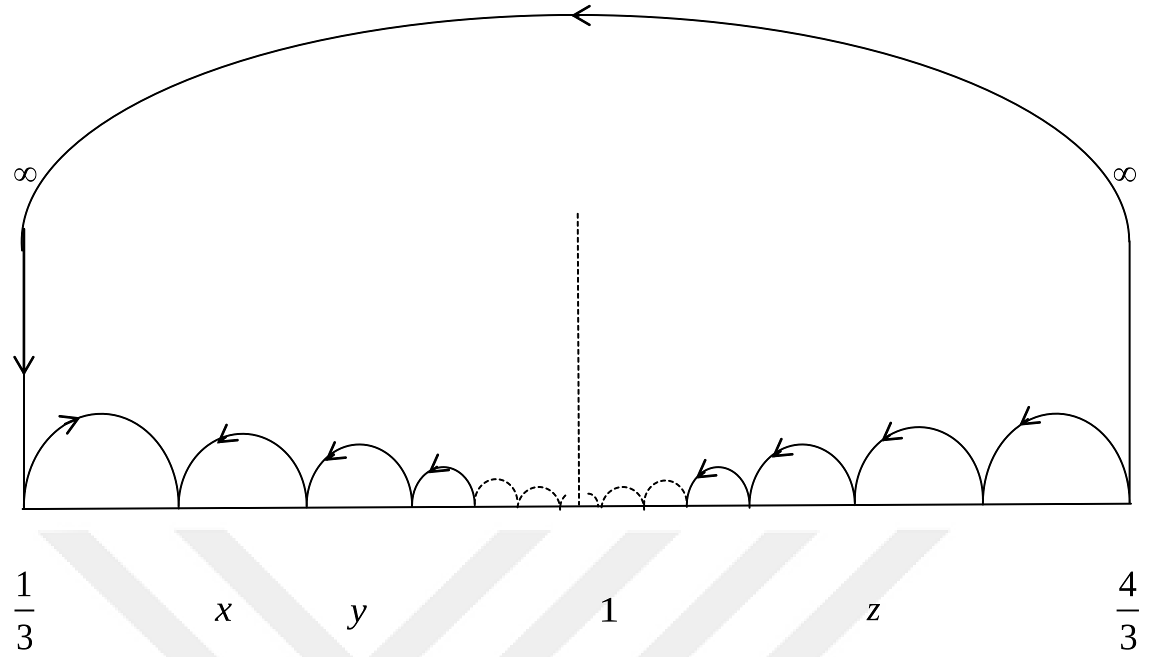
Şekil 9. $F_{1,3}$ Grafında bir yol

5) $\frac{1}{3} < x < 1 < y < z < \frac{4}{3}$ olsun. Farz edelim ki $d(x, y) = u,\ d(z, y) = t$ olsun. O halde; Şekil 9 dan $u > t$ ve $d(x, z) = u - t$ dir. O halde;

$d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y) \Rightarrow u \le u - t + t = u$ olduğundan $(*)$ eşitsizliği sağlanır.

6) $\frac{1}{3} < x < 1 < z < y < \frac{4}{3}, \frac{1}{3} < y < 1 < x < z < \frac{4}{3}, \frac{1}{3} < y < 1 < z < x < \frac{4}{3},$

$\frac{1}{3} < z < 1 < x < y < \frac{4}{3}, \frac{1}{3} < z < 1 < y < x < \frac{4}{3}$ koşulları 5)'dekine benzer şekilde yapılır.



Şekil 10. $F_{1,3}$ Grafında bir yol

7) $\frac{1}{3} < x < y < 1 < z < \frac{4}{3}$ olsun. Farz edelim ki $d(x,y) = u,\ d(z,y) = t$ olsun. O halde; Şekil 2.10 dan $t > u$ ve $d(x,z) = t - u$ dir. O halde;

$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \Rightarrow u \le 2t - u \Rightarrow u \le t$ olduğundan (*) eşitsizliği sağlanır.

8) $\frac{1}{3} < x < z < 1 < y < \frac{4}{3}$, $\frac{1}{3} < y < z < 1 < x < \frac{4}{3}$, $\frac{1}{3} < y < x < 1 < z < \frac{4}{3}$,

$\frac{1}{3} < z < y < 1 < x < \frac{4}{3}$, $\frac{1}{3} < z < x < 1 < y < \frac{4}{3}$ koşulları da 7)'dekine benzer şekilde yapılır. Dolayısıyla; $\forall x, y, z \in X$ için $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ olduğundan d, X üzerinde bir metriktir.

Sonuç 2.3.12: $n, m \in \mathbb{N}$**,** $n < m$ olsun. Bu takdirde; $x_n, y_m \in X$ aynı formda ise;

$$\text{Yani;} \qquad d(x,y) = |m - n - 1| = \begin{cases} x_n = \dfrac{3n-1}{3n}, y_m = \dfrac{3m-1}{3m} & \text{ise;} \\ x_n = \dfrac{3n+1}{3n}, y_m = \dfrac{3m+1}{3m} & \text{ise;} \end{cases}$$

dir.

İspat: $x_n, y_m \in X$ aynı formda olduğundan ya $x_n = \dfrac{3n-1}{3n}, y_m = \dfrac{3m-1}{3m}$ ya da

$x_n = \dfrac{3n+1}{3n}, y_m = \dfrac{3m+1}{3m}$ şeklindedir. Biliyoruz ki $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n < m$ ise; $\exists k \in \mathbb{N} \therefore$

$m = n + k$ dır. O halde; Lemma 2.3.10 ile Lemma 2.3.11'den $d(x, y) = |m - n - 1|$ dir.

Sonuç 2.3.13: $X := \left\{ \dfrac{mn-1}{mn}, \dfrac{mk+1}{mk} \middle| n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$ olsun. Bu takdirde;

$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 3, \forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\dfrac{mn-1}{mn}, \dfrac{mn+1}{mn}$ elemanlarını birbirine bağlayan en kısa yoldaki kenar sayısı $n + k + 1$ dir.

İspat: $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 3, \forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$\dfrac{1}{0} \to \dfrac{1}{m} \to \dfrac{m-1}{m} \leftarrow \dfrac{2m-1}{2m} \leftarrow \cdots \leftarrow \dfrac{mn-1}{mn}$ ve $\dfrac{1}{0} \to \dfrac{m+1}{m} \to \cdots \dfrac{mn+1}{mn}$ olduğundan için

$\dfrac{mn-1}{mn}, \dfrac{mn+1}{mn}$ elemanlarını birbirine bağlayan en kısa yoldaki kenar sayısı $n + k + 1$ dir.

(Açıkca; $\underbrace{\dfrac{mn+1}{mk} \leftarrow \cdots \leftarrow \dfrac{m+1}{m}}_{k-1} \underset{1}{\leftarrow} \underbrace{\dfrac{1}{0} \to \dfrac{1}{m} \to \dfrac{m-1}{m} \leftarrow \dfrac{2m-1}{2m} \leftarrow \cdots \leftarrow \dfrac{mn-1}{mn}}_{n+1}$ şeklindedir.)

Sonuç 2.3.14: $n, r, m \in \mathbb{N}, m \geq 3$, $n < r$ olsun. Bu takdirde; $x_n, y_r \in X$ aynı formda ise;

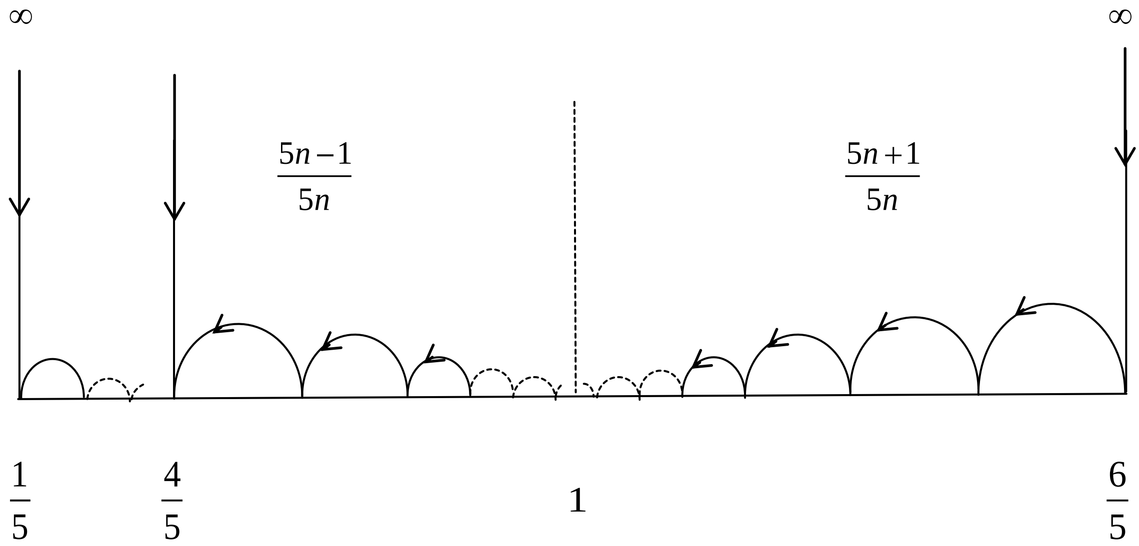
$$d(x, y) = |r - n - 1| \qquad \text{dir.}$$

İspat. $x_n, y_r \in X$ aynı formda olduğundan ya $x_n = \dfrac{mn-1}{mn}, y_r = \dfrac{mr-1}{mr}$ ya da

$x_n = \dfrac{mn+1}{mn}, y_r = \dfrac{mr+1}{mr}$ şeklindedir. Biliyoruz ki $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n < r$ ise; $\exists k \in \mathbb{N} \therefore$

$r = n + k$ dır. O halde; Lemma 2.3.10 ile Lemma 2.3.11'den $d(x, y) = |r - n - 1|$ dir.

Şimdi $u = 1, n = 5$ için $F_{1,5}$ alt graflarını inceleyelim:



Şekil 11. $F_{1,5}$ Grafı

Teorem 2.3.15. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\dfrac{5n+1}{5n}\in F_{1,5}$ köşesinin gidebileceği en uzak köşe $\dfrac{5n+6}{5n+5}\in F_{1,5}$ köşesidir.

İspat: $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\dfrac{5n+1}{5n}\in F_{1,5}$ köşesi; $\dfrac{5n+1}{5n}>\dfrac{5n+6}{5n+5}$ olmak üzere;

$\dfrac{5n+1}{5n}\rightarrow\dfrac{5n+6}{5n+5}$ şartını sağlayan en küçük köşe olduğunu gösterelim.

$\dfrac{5n+1}{5n}\rightarrow\dfrac{x}{5y}\in F_{1,5}$ olsun. O halde; $y(5n+1)-nx=1$ ve $x\equiv 5n+1(5)$ dir. O halde;

$y=\dfrac{nx+1}{5n+1}$ ve $\exists k\in\mathbb{Z}\therefore\ x=5k+1$ dir. Öte yandan; $y=\dfrac{n(5k+1)+1}{5n+1}$, $y\in\mathbb{Z}$ olduğundan

$5nk+n+1\equiv 0(5n+1)$ dir. Buradan; $5nk+k-k+n+1\equiv 0(5n+1)\ \Rightarrow k\equiv n+1(5n+1)$

$\Rightarrow\exists l\in\mathbb{Z}\therefore\ k=(5n+1)l+n+1$ dir. O halde; $y=\dfrac{n(5((5n+1)l+n+1)+1)+1}{5n+1}=5nl+n+1$

dir. $f:\mathbb{N}\cup\{0\}\rightarrow\mathbb{Q}$ fonksiyonunu $\forall l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $f(l):=\dfrac{5((5n+1)l+n+1)+1}{5(5nl+n+1)}$ olarak

tanımlayalım. $\forall l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $f'(l)>0$ dır. O halde; f fonksiyonu artandır.

Dolayısıyla minumum değerini $l=0$ noktasında alır. O halde; $f(0)=\dfrac{5(n+1)+1}{5(n+1)}=\dfrac{5n+6}{5n+5}$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.16: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{5n-1}{5n} \in F_{1,5}$ köşesinin gidebileceği en uzak köşe $\dfrac{5n+4}{5n+5} \in F_{1,5}$ köşesidir.

İspat: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{5n-1}{5n} \in F_{1,5}$ köşesi, $\dfrac{5n-1}{5n} < \dfrac{5n+4}{5n+5}$ olmak üzere; $\dfrac{5n+4}{5n+5} \to \dfrac{5n-1}{5n}$ şartını sağlayan en büyük köşe olduğunu gösterelim.

$\dfrac{x}{5y} \to \dfrac{5n-1}{5n} \in F_{1,5}$ olsun. O halde; $nx - y(5n-1) = 1$ ve $5n-1 \equiv x(5)$ dir. O halde;

$y = \dfrac{nx-1}{5n-1}$ ve $\exists k \in \mathbb{Z} \therefore\ x = 5k+4$ dir. Öte yandan; $y = \dfrac{n(5k+4)-1}{5n-1} \in \mathbb{Z}$ olduğundan

$5nk + 4n - 1 \equiv 0(5n-1)$ dir. Buradan; $5nk - k + k + 4n - 1 \equiv 0(5n-1)$

$\Rightarrow k \equiv 1 - 4n(5n-1) \Rightarrow k \equiv n(5n-1)$ dir. $\Rightarrow \exists l \in \mathbb{Z} \therefore\ k = (5n-1)l + n$ dir. O halde;

$y = \dfrac{n(5((5n-1)l+n)+4)-1}{5n-1} = 5nl + n + 1$ dir. $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Q}, \forall l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$f(l) := \dfrac{5((5n-1)l+n)+4}{5(5nl+n+1)}$ fonksiyonunu tanımlayalım. $\forall l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $f'(l) < 0$ dır. O halde; f fonksiyonu azalandır. Dolayısıyla maksimum değerini $l = 0$ noktasında alır. O halde; $f(0) = \dfrac{5n+4}{5(n+1)}$ olup ispat biter.

Şimdi Şekil 2.6 'daki $\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{4}{5}\right) \cap \mathbb{Q}$ aralığını inceleyelim.

Teorem 2.3.17: $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \in \Gamma_o(5)$ olmak üzere; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T^n\left(\dfrac{1}{0}\right) \to T^n\left(\dfrac{1}{5}\right)$ dır.

İspat: Tümevarım yöntemiyle yapalım. $n=1$ için $T\left(\dfrac{1}{0}\right) = \dfrac{1}{5} \to T\left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{4}{15}$ olduğundan doğrudur. n için doğru olsun. Yani; n için $T^n\left(\dfrac{1}{0}\right) \to T^n\left(\dfrac{1}{5}\right)$ doğru olsun. $n+1$ için doğru olduğunu gösterelim. $n \in \mathbb{N}$ için $T^n\left(\dfrac{1}{0}\right) \to T^n\left(\dfrac{1}{5}\right)$ doğru olduğundan

$T^{n+1}\left(\dfrac{1}{0}\right) = T\left(T^n\left(\dfrac{1}{0}\right)\right) \to T\left(T^n\left(\dfrac{1}{5}\right)\right) = T^{n+1}\left(\dfrac{1}{5}\right)$ dir. Dolayısıyla, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$T^n\left(\dfrac{1}{0}\right) \to T^n\left(\dfrac{1}{5}\right)$ dir.

Sonuç 2.3.18: $\forall k \in \mathbb{N}$ için $T^k\left(\frac{1}{0}\right) \rightarrow T^{k+1}\left(\frac{1}{0}\right)$ dır.

İspat: $\forall k \in \mathbb{N}$ için $T^k\left(\frac{1}{0}\right) \rightarrow T^k\left(\frac{1}{5}\right)$ olduğundan $T^k\left(\frac{1}{0}\right) \rightarrow T^k\left(\frac{1}{5}\right) = T^k\left(T\left(\frac{1}{0}\right)\right) = T^{k+1}\left(\frac{1}{0}\right)$

dir. $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \in \Gamma_o(5)$ olmak üzere; $T : \left[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right) \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \forall z \in \mathbb{Q}$ için $T(z) = \dfrac{-z+1}{-5z+4}$

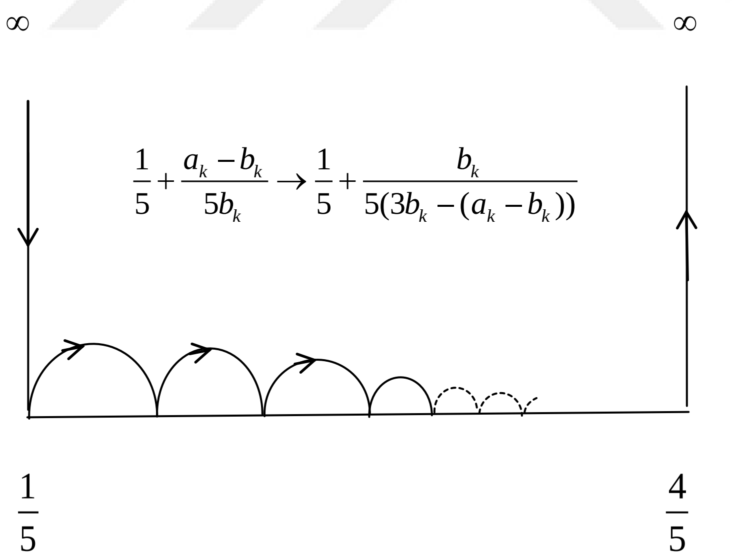
dir. Şimdi dönüşümün sabit noktalarını bulalım. $T(z) = z$ olsun. Buradan,

$\dfrac{-z+1}{-5z+4} = z \Rightarrow 5z^2 - 5z + 1 = 0$ dır. O halde; $z_{1,2} = \dfrac{5 \mp \sqrt{5}}{2.5}$ dir.

Özel olarak; $a_k, b_k \in \mathbb{Z}, (a_k, b_k) = 1$ olmak üzere; $T^k\left(\frac{1}{0}\right) = \dfrac{a_k}{5b_k}$ olsun. O halde;

$\dfrac{a_k}{5b_k} = T^k\left(\frac{1}{0}\right) \rightarrow T^{k+1}\left(\frac{1}{0}\right) = T\left(T^k\left(\frac{1}{0}\right)\right) = T\left(\dfrac{a_k}{5b_k}\right) = \dfrac{-a_k + 5b_k}{-5a_k + 20b_k}$ dır. O halde;

$\dfrac{1}{5} + \dfrac{a_k - b_k}{5b_k} \rightarrow \dfrac{1}{5} + \dfrac{b_k}{5(3b_k - (a_k - b_k))}$ dir.



Şekil 12. $F_{1,5}$ Grafında bir yol

Lemma 2.3.19: $T=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -5 & 4\end{pmatrix}\in\Gamma_o(5)$ olmak üzere; $\left\{T^k\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi kesin monoton artan ve $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\to T^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\to T^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\to\cdots$ yolu, sonsuz bir yoldur.

İspat: $T=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -5 & 4\end{pmatrix}\in\Gamma_o(5)$ olmak üzere; $T:\left[\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)\cap\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},\forall z\in\mathbb{Q}$ için $T(z)=\dfrac{-z+1}{-5z+4}$ idi. Açıkça görülüyor ki T dönüşümü $\left[\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)\cap\mathbb{Q}$ aralığı üzerinde kesin monoton artandır. Dolayısıyla, $\left\{T^k\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi kesin monoton artandır.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\to T^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\to T^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\to\cdots$$

yolunun sonsuz bir yol olduğu açıktır.

Lemma 2.3.20: a,b; $\frac{1}{5}\le\frac{a}{5b}<\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ koşulunu sağlayan herhangi iki doğal sayı olsun. Bu takdirde;

i) $\dfrac{a}{5b}<T\left(\dfrac{a}{5b}\right)<\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$ dir.

ii) $\dfrac{a}{5b}\to T\left(\dfrac{a}{5b}\right),F_{1,5}$'de bir kenardır $\Leftrightarrow a=\dfrac{5b-\sqrt{5b^2+4}}{2}$ ve $5b^2+4=u^2$ olan $\exists u\in\mathbb{N}$ dır.

İspat:

i) $\dfrac{a}{5b}<\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$ olduğundan $5b-2a>\sqrt{5}b\Rightarrow(5b-2a)^2>5b^2$ dir. Buradan;

$4a^2-20ab+20b^2>0\Rightarrow a^2-5ab+5b^2>0$ dır. Her tarafı 5 ile çarparsak

$5a^2-25ab+25b^2>0$ dır. Buradan;

$$\frac{a}{5b}<\frac{-a+5b}{-5a+20b}=T\left(\frac{a}{5b}\right)\text{ dır.}\qquad\ldots.(*)$$

$a^2-5ab+5b^2>0$ olduğundan $5(a-4b)^2<(3a-10b)^2$ dir. Öte yandan; $\dfrac{a}{5b}<\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}<\dfrac{2}{5}$ olduğundan $\dfrac{a}{b}<2$ dir. Buradan; $a-4b<0,3a-10b<0$ dır. $5(a-4b)^2<(3a-10b)^2$

eşitsizliğinin her iki tarafının karekökünü alırsak $\sqrt{5}(a-4b) > 3a-10b$ olur.

O halde;

$$\begin{aligned}
&\sqrt{5} < \frac{3a-10}{a-4b} = 5 + \frac{10b-2a}{a-4b} \\
&\Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} < 1 + \frac{-2(a-5b)}{5a-20b} \\
&\Rightarrow \frac{5-\sqrt{5}}{5} < \frac{-2(a-5b)}{5a-20b} \\
&\Rightarrow \frac{5-\sqrt{5}}{10} > \frac{a-5b}{5a-20b} = T\left(\frac{a}{5b}\right)
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla; $T\left(\frac{a}{5b}\right) < \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ dir. $\ldots(**)$

$(*),(**)$ ’den $\frac{a}{5b} < T\left(\frac{a}{5b}\right) < \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ dir.

ii) $\frac{a}{5b} \to T\left(\frac{a}{5b}\right), F_{1,5}$ ’de bir kenar ise; $a = \frac{5b-\sqrt{5b^2+4}}{2}$ ve $5b^2+4=u^2$ olan bir $u \in \mathbb{N}$ sayısının mevcut olduğunu gösterelim.

$\frac{a}{5b} \to T\left(\frac{a}{5b}\right), F_{1,5}$ de bir kenar olsun. i) şıkkından $a^2-5ab+5b^2>0$ dır. Ayrıca; $F_{1,5}$ de kenar olma şartları göz önüne alınırsa $a^2-5ab+5b^2=1$ dir. O halde;

$4a^2-20ab+20b^2=4 \Rightarrow 4a^2-20ab+20b^2+5b^2=4+5b^2$ dir. Buradan;

$(5b-2a)^2=5b^2+4 \Rightarrow \sqrt{(5b-2a)^2}=\sqrt{5b^2+4} \Rightarrow |5b-2a|=\sqrt{5b^2+4}$ elde edilir.

$\frac{1}{5} \le \frac{a}{5b} < \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ olduğundan $5b-2a>0$ dır. ($\frac{5-\sqrt{5}}{10} < \frac{1}{2}$ dir. Gerçekten; $5-\sqrt{5} < 5 \Rightarrow -\sqrt{5} < 0$)

O halde; $5b-2a=\sqrt{5b^2+4} \Rightarrow a = \frac{5b-\sqrt{5b^2+4}}{2}$ dir. Öte yandan; $5b-2a \in \mathbb{N}$ olduğundan $\sqrt{5b^2+4} \in \mathbb{N}$ dir. O halde; $\exists u \in \mathbb{N} \therefore u^2=5b^2+4$ dir.

Tersine olarak; $a = \frac{5b-\sqrt{5b^2+4}}{2}$ ve $5b^2+4=u^2$ olan bir $u \in \mathbb{N}$ sayısının mevcut olsun. $\frac{a}{5b} \to T\left(\frac{a}{5b}\right), F_{1,5}$ de bir kenar olduğunu gösterelim.

$$T^* = \begin{pmatrix} \frac{-5b+\sqrt{5b^2+4}}{2} & b \\ -5b & \frac{5b+\sqrt{5b^2+4}}{2} \end{pmatrix}$$ dönüşümünü ele alalım. Açıkça görülüyor ki

$\det T^* = 1$ ve $T^* \in \Gamma_o(5)$ dir. Öte yandan; $T^*\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{a}{5b}$ ve $T^*\left(\frac{1}{5}\right) = T\left(\frac{a}{5b}\right)$ dir. O halde

Teorem 2.3.15'den $\frac{a}{5b} = T^*\left(\frac{1}{0}\right) \to T^*\left(\frac{1}{5}\right) = T\left(\frac{a}{5b}\right)$ dir.

Sonuç 2.3.21:

i. $\frac{1}{0} \to 0+\frac{1}{5} \to \frac{1}{5}+\frac{1}{5.3} \to \frac{1}{5}+\frac{3}{5.8} \to \cdots \to \frac{1}{5}+\frac{a_n}{5b_n} \to \frac{1}{5}+\frac{b_n}{5(3b_n-a_n)} \to \cdots$ yolu

$F_{1,5}$ de sonsuz bir yoldur.

ii. i) şıkkındaki yolun bütün köşeleri $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ dan küçüktür.

iii. $a_n = \frac{3b_n - \sqrt{5b_n^{\ 2}+4}}{2}$ ve $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}+\frac{a_n}{5b_n}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ dır.

iv. $\frac{1}{5}+\frac{a}{5b}$ köşesindeki $a,b \in \mathbb{N}$ sayıları için $5a^2+4, 5b^2+4$ birer tam karedir.

İspat:

i. Lemma 2.3.17'den açık.

ii. Lemma 2.3.18'den açık.

iii. Lemma 2.3.18 ve Lemma 2.3.19'dan açık.

iv. Lemma 2.3.20'den açık.

$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \in \Gamma_o(5)$ matrisinin ters matrisi; $T^{-1} = S = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma_o(5)$ dir. Şimdi;

$\left[\frac{3}{5}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)$ aralığında, S dönüşümünün oluşturduğu sonsuz yolu inceleyelim:

Teorem 2.3.22: $S=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & -1\end{pmatrix}\in\Gamma_o(5)$ ve a,b de $\frac{3}{5}\leq\frac{a}{5b}<\frac{5+\sqrt{5}}{10}$ koşulunu sağlayan herhangi iki doğal sayı olsun. Bu takdirde;

i. $\frac{a}{5b}<S\left(\frac{a}{5b}\right)<\frac{5+\sqrt{5}}{10}$,

ii. $\frac{a}{5b}\to S\left(\frac{a}{5b}\right), F_{1,5}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow a=\frac{5b+\sqrt{5b^2-4}}{2}$ ve $5b^2-4=u^2$ olan $\exists u\in\mathbb{N}$ dır.

İspat:

i) $\frac{a}{5b}<\frac{5+\sqrt{5}}{10}$ olduğundan $2a-5b<\sqrt{5}b\Rightarrow(2a-5b)^2<5b^2$ dir. Buradan;

$4a^2-20ab+20b^2<0\Rightarrow a^2-5ab+5b^2<0$ dır. Her tarafı 5 ile çarparsak

$5a^2-25ab+25b^2<0$ dır. Buradan;

$$\frac{a}{5b}<\frac{4a-5b}{5a-5b}=S\left(\frac{a}{5b}\right)\text{ dır.}\qquad\ldots.(I)$$

Öte yandan; S dönüşümü $\left[\frac{3}{5},\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\cap\mathbb{Q}$ üzerinde monoton artan ve

$S\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)=\frac{5+\sqrt{5}}{10}$ olduğundan $S\left(\frac{a}{5b}\right)<\frac{5+\sqrt{5}}{10}$ dır. $\ldots.(II)$

$(I),(II)$ ’den $\frac{a}{5b}<S\left(\frac{a}{5b}\right)<\frac{5+\sqrt{5}}{10}$ dir.

ii) $\frac{a}{5b}\to S\left(\frac{a}{5b}\right), F_{1,5}$ de bir kenar ise; $a=\frac{5b+\sqrt{5b^2-4}}{2}$ ve $5b^2-4=u^2$ olan bir $u\in\mathbb{N}$ sayısının mevcut olduğunu gösterelim.

$\frac{a}{5b}\to S\left(\frac{a}{5b}\right), F_{1,5}$ de bir kenar olsun. $a^2-5ab+5b^2<0$ ve $F_{1,5}$ de kenar olma şartları göz önüne alınırsa; $a^2-5ab+5b^2=-1$ dir. O halde;

$-4a^2+20ab-20b^2=4\Rightarrow-4a^2+20ab-20b^2-5b^2=4-5b^2$ dir. Buradan;

$(2a-5b)^2=-4+5b^2\Rightarrow|2a-5b|=\sqrt{5b^2-4}$ elde edilir. $\frac{3}{5}<\frac{a}{5b}<\frac{5+\sqrt{5}}{10}$ olduğundan

$2a-5b>0$ dır. O halde; $2a-5b=\sqrt{5b^2-4} \Rightarrow a=\dfrac{5b+\sqrt{5b^2-4}}{2}$ dir. Öte yandan;

$2a-5b \in \mathbb{N}$ olduğundan $\sqrt{5b^2-4} \in \mathbb{N}$ dir. O halde; $\exists u \in \mathbb{N} \therefore u^2=5b^2-4$ dir.

Tersine olarak; $a=\dfrac{5b+\sqrt{5b^2-4}}{2}$ ve $5b^2-4=u^2$ olan bir $u \in \mathbb{N}$ sayısının mevcut olsun. $\dfrac{a}{5b} \to S\left(\dfrac{a}{5b}\right), F_{1,5}$ de bir kenar olduğunu gösterelim.

Hipotezden; $\dfrac{a}{5b}=\dfrac{\dfrac{5b+\sqrt{5b^2-4}}{2}}{5b}$, $S\left(\dfrac{a}{5b}\right)=\dfrac{\dfrac{10b+4\sqrt{5b^2+4}}{2}}{5(\dfrac{3b+\sqrt{5b^2-4}}{2})}$ dir. Buradan;

$$\frac{5b+\sqrt{5b^2-4}}{2}.\frac{3b+\sqrt{5b^2-4}}{2}-b.\frac{10b+4\sqrt{5b^2-4}}{2}=$$
$$=\frac{15b^2+5b\sqrt{5b^2-4}+3b\sqrt{5b^2-4}+5b^2-4-20b^2-8b\sqrt{5b^2-4}}{4} \text{ dir.}$$
$$=-1$$

Öte yandan; $\dfrac{10b+4\sqrt{5b^2+4}}{2} \equiv -\dfrac{5b+\sqrt{5b^2-4}}{2}(5)$ dir.

Gerçekten; $\dfrac{10b+4\sqrt{5b^2+4}}{2}+\dfrac{5b+\sqrt{5b^2-4}}{2}=5(\dfrac{3b+\sqrt{5b^2-4}}{2}) \equiv 0(5)$ dir. Dolayısıyla; kenar olma şartları göz önüne alındığında $\dfrac{a}{5b} \to S\left(\dfrac{a}{5b}\right), F_{1,5}$ de bir kenardır.

Sonuç 2.3.23:

i. $\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{5} \to \dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{5.2} \to \dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5.5} \to \cdots \to \dfrac{4}{5}-\dfrac{a_n}{5b_n} \to \dfrac{4}{5}-\dfrac{b_n}{5(3b_n-a_n)} \to \cdots$ yolu $F_{1,5}$ de artan sırada sonsuz bir yoldur.

ii. i) şıkkındaki yolun bütün köşeleri $\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$ dan küçüktür.

iii. $a_n=\dfrac{3b_n-\sqrt{5b_n{}^2-4}}{2}$ ve $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{a_n}{5b_n}\right)=\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$ dır.

iv. $\dfrac{4}{5}-\dfrac{a}{5b}$ köşesindeki $a,b \in \mathbb{N}$ sayıları için $5a^2-4, 5b^2-4$ birer tam karedir.

İspat: Açık.

Sonuç 2.3.24: $5b^2+4$ sayısını tam kare yapan $b\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ sayıları,

$$0,1,3,8,\ldots,x,y,3y-x,\ldots \qquad (*)$$

şeklindedir.

İspat: Lemma 2.3.20 ve Sonuç 2.3.21'den açıktır.

Sonuç 2.3.25: $5b^2-4$ sayısını tam kare yapan $b\in\mathbb{N}$ sayıları,

$$1,2,5,13,\ldots,x,y,3y-x,\ldots \qquad (**)$$

şeklindedir.

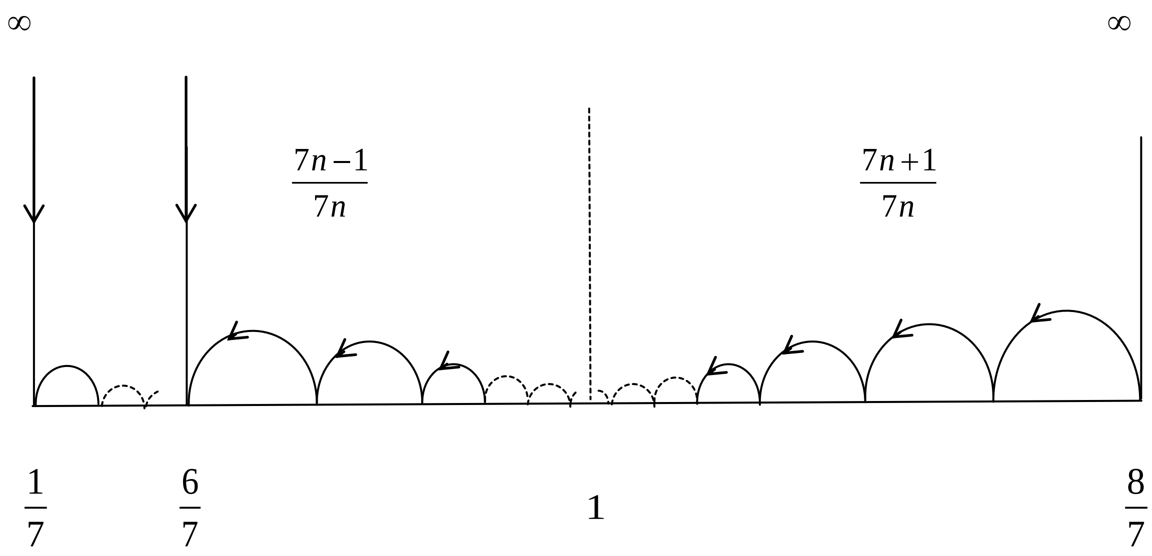
İspat: Teorem 2.3.22 ve Sonuç 2.3.23'den açıktır.

Sonuç 2.3.26: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri sırasıyla, (*) ve (**) koşulunu sağlayan iki dizi olsun. Bu takdirde;

Bu iki dizinin elemanlarıyla elde edilen $(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n,\ldots)$ dizisi Fibonacci dizisidir.

İspat: $\forall n\in\mathbb{N}$ için $b_n=b_{n-1}+a_n$ ve $a_n=a_{n-1}+b_{n-1}$ olduğundan ispat tümevarım yöntemiyle kolayca görülür.

Şimdi; $F_{1,7}$ alt grafını göz önüne alalım.



Şekil 13. $F_{1,7}$ Grafı

Bu alt grafda; $\left\{\frac{7n-1}{7n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \left\{\frac{7n+1}{7n}\right\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ dizilerinin elemanları, $F_{1,7}$ alt grafının köşeleri olup bu köşelerin gittiği en uzak kenarları oluşturur. Öte yandan; $\left[\frac{1}{7},\frac{6}{7}\right]$ aralığı göz önüne alındığında ise; $\frac{1}{7} \to \frac{x}{7y} \in F_{1,7}$ olsun. O halde; $F_{1,7}$ ’deki kenar olma şartlarından $y-x=-1$ ve $x \equiv -1(7)$ dir. Buradan; $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere; $\frac{x}{7y}=\frac{7k+6}{7(7k+5)}$ elde edilir. O halde;

$f:\mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{Q}$, $\forall l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $f(l)=\frac{7l+6}{7(7l+5)}$ şeklinde tanımlarsak; $\forall l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $f'(l)<0$ olur. O halde; f fonksiyonu monoton azalan olup $l=0$ noktasında maksimum değerini alır. Buradan; $f(0)=\frac{6}{7.5}$ dir.

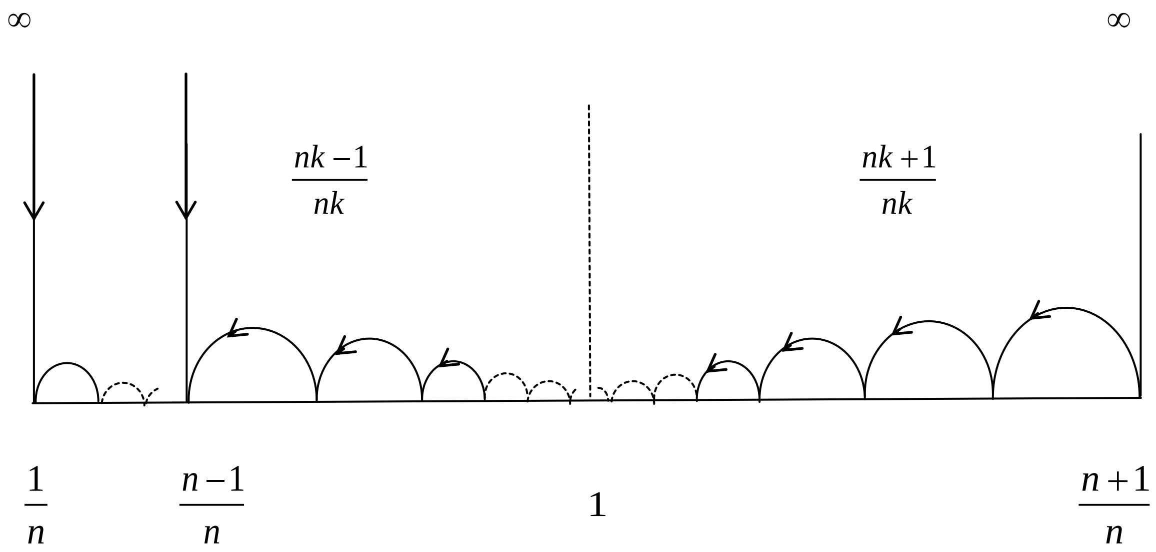
Bu şekilde devam edildiğinde açıkça görülüyor ki bu köşelerin gittiği en uzak köşelerin oluşturduğu yol;

$$\frac{1}{0}\to\frac{1}{7}\to\frac{6}{7.5}\to\frac{29}{7.24}\to\cdots\to\frac{a_k}{7b_k}\to\frac{a_{k+1}}{7b_{k+1}}\to\frac{5a_{k+1}-a_k}{7(5b_{k+1}-b_k)}\to\cdots \qquad (*)$$

şeklindedir. Ayrıca; $T=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -7 & 6\end{pmatrix}\in\Gamma_o(7)$ dönüşümü, $(*)$ ’daki sonsuz yolunu oluşturur. Bu dönüşümün sabit noktaları ise; $z_{1,2}=\frac{7\mp\sqrt{3.7}}{7.2}$ dir.

Bu şekilde devamla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

- $n\in\mathbb{N}$ sayısı tek ise;



Şekil 14. $F_{1,n}$ Grafı

$\left\{\frac{nk-1}{nk}\right\}_{k\in\mathbb{N}}, \left\{\frac{nk+1}{nk}\right\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ dizilerinin elemanları, $F_{1,n}$ alt grafının köşeleri olup bu köşelerin gittiği en uzak kenarları oluşturur. Öte yandan; $\left[\frac{1}{n},\frac{n-1}{n}\right]$ aralığı göz önüne alındığında ise;

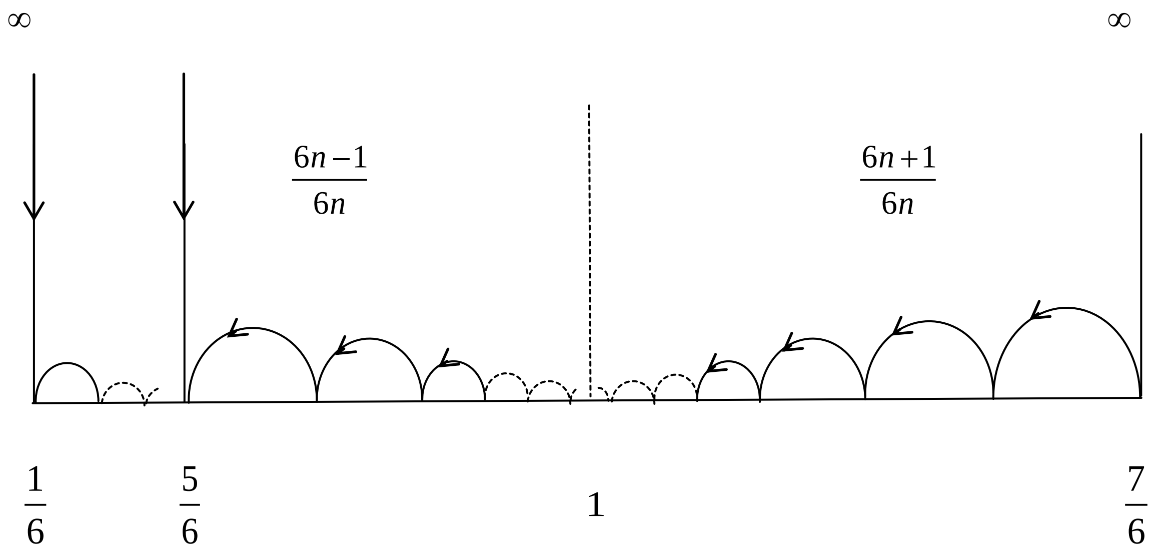
$$\frac{1}{0}\to\frac{1}{n}\to\cdots\to\frac{a_k}{nb_k}\to\frac{a_{k+1}}{nb_{k+1}}\to\frac{(n-2)a_{k+1}-a_k}{n\left((n-2)b_{k+1}-b_k\right)}\to\cdots \quad (**)$$

sonsuz yolu oluşur.

Daha fazlası olarak; $T=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -n & n-1\end{pmatrix}\in F_{1,n}$ dönüşümü, (**) ’daki sonsuz yolunu oluşturur.

Bu dönüşümün sabit noktaları ise; $z_{1,2}=\dfrac{n\mp\sqrt{(n-4).n}}{n.2}$ dır.

Şimdi; $n\in\mathbb{N}$ ve $n\geq 6$ olmak üzere; n sayısının ÇİFT sayı olma durumlarını inceleyelim. $n=6$ olsun. $F_{1,6}$ alt grafını göz önüne alalım.



Şekil 15. $F_{1,6}$ Grafı

Bu alt grafda; $\left\{\frac{6n-1}{6n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \left\{\frac{6n+1}{6n}\right\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ dizilerinin elemanları, $F_{1,6}$ alt grafının köşeleri olup bu köşelerin gittiği en uzak kenarları oluşturur. Öte yandan; $\left[\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right]$ aralığı göz önüne alındığında ise; $\frac{1}{6}\rightarrow\frac{x}{6y}\in F_{1,6}$ olsun. O halde; $F_{1,6}$ 'deki kenar olma şartlarından $y-x=-1$ ve $x\equiv -1(6)$ dir. Buradan; $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere; $\frac{x}{7y}=\frac{6k+5}{6(6k+4)}$ elde edilir. O halde;

$f:\mathbb{N}\cup\{0\}\rightarrow\mathbb{Q}, \forall l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $f(l)=\frac{6l+5}{6(6l+4)}$ şeklinde tanımlarsak; $\forall l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $f'(l)<0$ olur. O halde; f fonksiyonu monoton azalan olup $l=0$ noktasında maksimum değerini alır. Buradan; $f(0)=\frac{5}{6.4}$ dir.

Bu şekilde devam edildiğinde açıkça görülüyor ki bu köşelerin gittiği en uzak köşelerin oluşturduğu yol;

$$\frac{1}{0}\rightarrow\frac{1}{6}\rightarrow\frac{5}{6.4}\rightarrow\frac{19}{6.15}\rightarrow\cdots\rightarrow\frac{a_k}{6b_k}\rightarrow\frac{a_{k+1}}{6b_{k+1}}\rightarrow\frac{4a_{k+1}-a_k}{6(4b_{k+1}-b_k)}\rightarrow\cdots \qquad (***)$$

şeklindedir. Ayrıca; $T=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -6 & 5\end{pmatrix}\in\Gamma_o(6)$ dönüşümü, (***) 'daki sonsuz yolunu oluşturur.

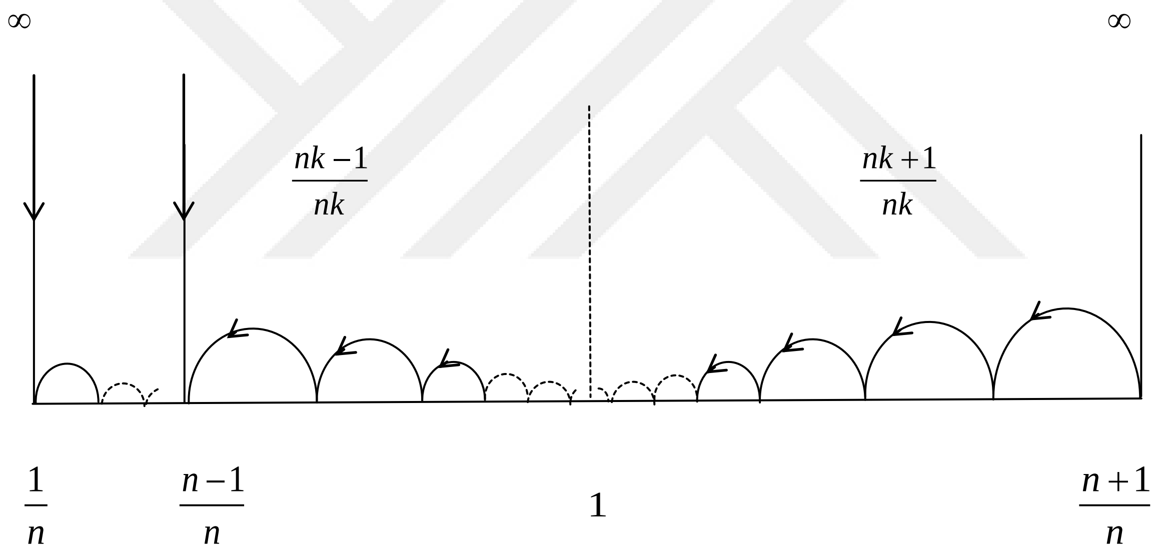
Bu dönüşümün sabit noktaları ise; $z_{1,2}=\dfrac{6\mp\sqrt{2.6}}{6.2}$ dir.

Bu şekilde devamla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

- $n\in\mathbb{N}, n\geq 6$ sayısı çift ise;

$\left\{\dfrac{nk-1}{nk}\right\}_{k\in\mathbb{N}}, \left\{\dfrac{nk+1}{nk}\right\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ dizilerinin elemanları, $F_{1,n}$ alt grafının köşeleri olup bu köşelerin gittiği en uzak köşeleri oluşturur. Öte yandan; $\left[\dfrac{1}{n},\dfrac{n-1}{n}\right]$ aralığı göz önüne alındığında ise;

$$\frac{1}{0}\to\frac{1}{n}\to\cdots\to\frac{a_k}{nb_k}\to\frac{a_{k+1}}{nb_{k+1}}\to\frac{(n-2)a_{k+1}-a_k}{n\left((n-2)b_{k+1}-b_k\right)}\to\cdots(I)$$ sonsuz yolu oluşur.



Şekil 16. $F_{1,n}$ Grafı, n çift

Daha fazlası olarak; $T=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -n & n-1\end{pmatrix}\in\Gamma_o(n)$ dönüşümü, (I) 'deki sonsuz yolunu oluşturur. Bu dönüşümün sabit noktaları $z_{1,2}=\dfrac{n\mp\sqrt{(n-4).n}}{n.2}$ dır.

Yukarıdaki sonuçlar göz önüne alındığında aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 2.3.27: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ için $\left\{\frac{nk-1}{nk}\right\}_{k\in\mathbb{N}}, \left\{\frac{nk+1}{nk}\right\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ dizilerinin elemanları, $F_{1,n}$ alt grafında köşeler olup keyfi bir diziden alınan iki ardışık köşe birbirlerine bir h-doğrusu ile bağlanabilen en uzak köşelerdir.

İspat: Öncelikle $\left\{\frac{nk-1}{nk}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisini ele alalım ve $\frac{n(k+1)-1}{n(k+1)}$ noktasının,

$\frac{n(k+1)-1}{n(k+1)} > \frac{nk-1}{nk}$ ve $\frac{n(k+1)-1}{n(k+1)} \to \frac{nk-1}{nk}$ koşullarını sağlayan en uzak köşe olduğunu gösterelim. $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ olan sabit bir doğal sayı, $k \in \mathbb{N}$ keyfi alınan bir nokta ve $x, y \in \mathbb{N}$, $\frac{x}{ny} \to \frac{nk-1}{nk}$ olan keyfi iki nokta olsun. O halde; $kx - y(nk-1) = 1$ ve $nk-1 \equiv x(n)$ dir. Buradan; $x = mn + n - 1$ olan bir m doğal sayısı vardır ve $y = \frac{kx-1}{nk-1}$ dir. $y = \frac{k(mn+n-1)-1}{nk-1}$ ve $y \in \mathbb{Z}$ olduğundan $m \equiv k(nk-1)$ dir. O halde; $m = (nk-1)l + k$ olan bir $l \in \mathbb{Z}$ sayısı vardır. $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Q}$, $\forall l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$f(t) := \frac{n((n-1)t+k)+n-1}{n(nkt+k+1)}$ şeklinde tanımlayalım. Buradan; $\forall t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $f'(t) < 0$ dır. Buradan; $t = 0$ noktası bu fonksiyonun maksimum noktasıdır. Dolayısıyla; $f(0) = \frac{n(k+1)-1}{n(k+1)}$ dır. Bu ise aradığımız köşe olup ispat biter.

$\left\{\frac{nk+1}{nk}\right\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ dizisi ise; benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.3.28: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$, $K = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -n & n-1 \end{pmatrix} \in \Gamma_o(n)$ olmak üzere; $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

i) $K^k \left(\frac{1}{0}\right) \to K^k \left(\frac{1}{n}\right)$ dir.

ii) $K^k \left(\frac{1}{0}\right) \to K^{k+1} \left(\frac{1}{0}\right)$ dir.

iii) $\left\{K^k\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi kesin monoton artan ve $K^1\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}\to K^2\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}\to K^3\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}\to\cdots$ yolu sonsuz bir yoldur.

İspat: i) $K=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -n & n-1\end{pmatrix}\in\Gamma_o(n)$ ve $n,\ n\geq 4$ keyfi fakat sabit bir doğal sayı olsun.

Tüme varım yöntemiyle;

$k=1$ için $K\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}=\frac{1}{n}\to K\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\end{pmatrix}=\frac{n-1}{(n-2)n}$ olduğundan doğrudur.

k için doğru olsun.

$k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. k için doğru olduğundan $K^k\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}\to K^k\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\end{pmatrix}$ dir. O halde; $K^{k+1}\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}=K\left(K^k\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}\right)\to K\left(K^k\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\end{pmatrix}\right)\to K^{k+1}\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\end{pmatrix}$ dir. $\forall k\in\mathbb{N}$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $K^k\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}\to K^k\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\end{pmatrix}$ dir.

ii) $\forall k\in\mathbb{N}$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $K^k\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}\to K^k\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\end{pmatrix}$ olduğundan

$K^k\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}\to K^k\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\end{pmatrix}=K^k\left(K\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}\right)=K^{k+1}\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}$ dir.

iii) $K=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -n & n-1\end{pmatrix}\in\Gamma_o(n)$ matrisine karşılık gelen dönüşüm,

$K:\left[\frac{1}{n},\frac{n-1}{n}\right)\cap\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},\ \ \forall z\in\mathbb{Q}$ için $K(z)=\frac{-z+1}{-nz+(n-1)}$ dir. $\forall z\in\mathbb{Q}$ için $K'(z)>0$ dir. Öte yandan; $K^k\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}\to K^{k+1}\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}$ olduğundan $\left\{K^k\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi kesin monoton artan ve $K^1\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}\to K^2\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}\to K^3\begin{pmatrix}\frac{1}{0}\end{pmatrix}\to\cdots$ yolu, sonsuz bir yoldur.

Teorem 2.3.29: $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 4$**,** $K=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -n & n-1\end{pmatrix}\in\Gamma_o(n)$ ve a,b**;** $\frac{1}{n}\leq\frac{a}{nb}<\frac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$

koşulunu sağlayan herhangi iki doğal sayı olsun. Bu takdirde;

i. $\frac{a}{nb}<K\left(\frac{a}{nb}\right)<\frac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$,

ii. $\frac{a}{nb}\to K\left(\frac{a}{nb}\right), F_{1,n}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow a=\frac{nb-\sqrt{n(n-4)b^2+4}}{2}$ ve

$n(n-4)b^2+4=u^2$ olan $\exists u\in\mathbb{N}$ dır.

İspat:

i) $\frac{a}{nb}<\frac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$ olduğundan $2a-nb<-\sqrt{n(n-4)}b\Rightarrow\left(nb-2a\right)^2>(n^2-4n)b^2$

dir. Buradan; $4a^2-4nab+4nb^2>0\Rightarrow a^2-nab+nb^2>0$ dır. Her tarafı n ile çarparsak

$na^2-n^2ab+n^2b^2>0$ dır. Buradan;

$$\frac{a}{nb}<\frac{-a+nb}{-an+(n-1)b}=K\left(\frac{a}{nb}\right) \text{ dır.} \qquad \ldots.(I)$$

Öte yandan; K dönüşümü $\left[\frac{1}{n},\frac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}\right)\cap\mathbb{Q}$ üzerinde monoton artan ve

$K\left(\frac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}\right)=\frac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$ olduğundan $S\left(\frac{a}{nb}\right)<\frac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$ dır. $\ldots.(II)$

$(I),(II)$'den $\frac{a}{nb}<K\left(\frac{a}{nb}\right)<\frac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$ dir.

ii) $\frac{a}{nb}\to K\left(\frac{a}{nb}\right), F_{1,n}$ de bir kenar ise; $a=\frac{nb-\sqrt{n(n-4)b^2+4}}{2}$ ve

$n(n-4)b^2+4=u^2$ olan bir $u\in\mathbb{N}$ sayısının mevcut olduğunu gösterelim.

$\frac{a}{nb}\to K\left(\frac{a}{nb}\right), F_{1,n}$ de bir kenar olsun. $a^2-nab+nb^2>0$ ve $F_{1,n}$'de kenar olma

şartları göz önüne alınırsa; $a^2-nab+nb^2=1$ dir. O halde;

$4a^2-4nab+4nb^2=4\Rightarrow 4a^2-4nab+4nb^2+n(n-4)b^2=4+n(n-4)b^2$ dir. Buradan;

$(2a-nb)^2=4+n(n-4)b^2\Rightarrow|2a-nb|=\sqrt{n(n-4)b^2+4}$ elde edilir.

$\dfrac{1}{n} < \dfrac{a}{nb} < \dfrac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$ olduğundan $2a - nb < 0$ dır. O halde;

$nb - 2a = \sqrt{n(n-4)b^2+4} \Rightarrow a = \dfrac{nb-\sqrt{n(n-4)b^2+4}}{2}$ dir. Öte yandan; $nb-2a \in \mathbb{N}$ olduğundan $\sqrt{n(n-4)b^2+4} \in \mathbb{N}$ dir. O halde; $\exists u \in \mathbb{N} \therefore u^2 = n(n-4)b^2+4$ dir.

Tersine olarak; $a = \dfrac{nb-\sqrt{n(n-4)b^2+4}}{2}$ ve $u^2 = n(n-4)b^2+4$ olan bir $u \in \mathbb{N}$ sayısının mevcut olsun.

$\dfrac{a}{nb} \to K\left(\dfrac{a}{nb}\right), F_{1,n}$ de bir kenar olduğunu gösterelim.

Hipotezden; $\dfrac{a}{nb} = \dfrac{\dfrac{nb-\sqrt{n(n-4)b^2+4}}{2}}{nb}$, $K\left(\dfrac{a}{nb}\right) = \dfrac{\dfrac{nb+\sqrt{n(n-4)b^2+4}}{2}}{n(\dfrac{(n-2)b+\sqrt{n(n-4)b^2+4}}{2})}$ dir.

Buradan; $\dfrac{nb-\sqrt{n(n-4)b^2+4}}{2} . \dfrac{(n-2)b+\sqrt{n(n-4)b^2+4}}{2} - b. \dfrac{nb+\sqrt{n(n-4)b^2+4}}{2} = -1$

dir. Öte yandan; $\dfrac{nb+\sqrt{n(n-4)b^2+4}}{2} \equiv -\dfrac{nb-\sqrt{n(n-4)b^2+4}}{2} (n)$ dir. Gerçekten;

$\dfrac{nb+\sqrt{n(n-4)b^2+4}}{2} + \dfrac{nb-\sqrt{n(n-4)b^2+4}}{2} = \dfrac{2nb}{2} = nb \equiv 0(n)$ dir. Dolayısıyla; kenar olma şartları göz önüne alındığında $\dfrac{a}{nb} \to K\left(\dfrac{a}{nb}\right), F_{1,n}$ de bir kenardır.

Sonuç 2.3.30: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ olsun. Bu takdirde;

i. $K = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -n & n-1 \end{pmatrix} \in \Gamma_o(n)$ dönüşümün sabit noktaları $z_{1,2} = \dfrac{n \mp \sqrt{(n-4).n}}{n.2}$ dir ve K dönüşümü, $\left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{n-1}{n}\right]$ aralığında

$$\frac{1}{0} \to 0 + \frac{1}{n} \to \frac{1}{n} + \frac{1}{n.(n-2)} \to \cdots \to \frac{1}{n} + \frac{a_k}{nb_k} \to \frac{1}{n} + \frac{b_k}{n\left((n-2)b_k - a_k\right)} \to \cdots \quad (*)$$

sonsuz yolunu oluşturur.

ii. i) şıkkındaki yolun bütün köşeleri $\dfrac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$ dan küçüktür.

iii. $\dfrac{1}{n}+\dfrac{a}{nb}$ köşesindeki $a,b\in\mathbb{N}$ sayıları için $n(n-4)a^2+4, n(n-4)b^2+4$ birer tam karedir.

iv. $a_k=\dfrac{(n-2)b_k-\sqrt{n(n-4)b_k{}^2+4}}{2}$ ve $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{a_k}{nb_k}\right)=\dfrac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$ dır.

İspat: i) $K=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -n & n-1\end{pmatrix}\in\Gamma_o(n)$ dönüşümün sabit noktalarının $z_{1,2}=\dfrac{n\mp\sqrt{(n-4).n}}{n.2}$ olduğu açıktır. Öte yandan; Teorem 2.3.28'in iii) şıkkı $(*)$ daki sonsuz yolunu oluşturur.

ii) Teorem 2.3.29'dan açıktır.

iii) Teorem 2.3.29'dan açıktır.

iv) $a_k=\dfrac{(n-2)b_k-\sqrt{n(n-4)b_k{}^2+4}}{2}$ olduğu Teorem 2.3.29'dan açıktır. Ayrıca; $\dfrac{1}{n}+\dfrac{a_k}{nb_k}$ sayısı $(*)$ daki sonsuz yolun genel terimidir. Öte yandan; Teorem 2.3.28'in iii) şıkkından bu yol monoton artan ve ii) şıkkından $(*)$ yolunun bütün köşeleri $\dfrac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$ dan küçüktür. $\dfrac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$ sayısı $\left\{\dfrac{1}{n}+\dfrac{a_k}{nb_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir üst sınırı hatta en küçük üst sınırıdır. Bilindiği üzere; monoton artan ve üstten sınırlı dizilerin limiti vardır ve bu limit dizinin en küçük üst sınırına eşittir. Dolayısıyla; $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{a_k}{nb_k}\right)=\dfrac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$ dir.

Teorem 2.3.31: $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 4$ olsun. Bu takdirde;

$n(n-4)b^2+4=u^2$ sayısını tam kare yapan $b\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ sayıları;

$$0,1,(n-2),\ldots,x,y,(n-2)y-x,\ldots \qquad \text{dir.}$$

İspat: Teorem 2.3.29 ve Sonuç 2.3.30'dan açık.

NOT: Teorem 2.3.31 deki $n(n-4)b^2+4=u^2$ sayısının, $n=3m+2\in\mathbb{N}$ değeri için [8]'deki Teorem 2.3.20 elde edilir. Dolayısıyla; Teorem 2.3.31, [8]'deki Teorem 2.3.20 nin genelleştirilmiş halidir.

Teorem 2.3.32: $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 4$ olsun. Bu takdirde;

$$n(n-4)b^2-4 \text{ sayısı bir tam karedir} \Leftrightarrow n=5 \text{ dir.}$$

İspat: $n=5$ için $n(n-4)b^2-4$ sayısının tam kare olduğu Teorem 2.3.22'den açık.

Tersine olarak; $n(n-4)b^2-4$ sayısı bir tam kare olsun. O halde; $\exists u \in \mathbb{N} \therefore$ $n(n-4)b^2-4=u^2$ dir. Buradan; $n^2b^2-4nb^2-4=(nb-2)^2-8=u^2$ dir. $nb-2:=t$ olsun. O halde; $u^2-t^2=8$ olup $\underbrace{(u+t)(u-t)}_{\substack{1 \quad 8\\ 8 \quad 1\\ 2 \quad 4\\ 4 \quad 2}}=8$ şeklindedir. Çarpanlar (1,8) ve (8,1) olarak alınırsa $u,t \notin \mathbb{Z}$ dir. Diğer taraftan; (2,4) ve (4,2) çözüldüğünde ise $u=3, t=1$ elde edilir. Yani; $u=nb-2=3$ dir. O halde; $nb=5$ ve $b \in \mathbb{Z}$ olduğundan $b=\frac{5}{n}$ den $n=5$ dir.

Sonuç 2.3.33: $\forall n \in \mathbb{N}-\{5\}, n \geq 4$ için $n(n-4)b^2-4$ sayısı bir tam kare olamaz.

Teorem2.3.34: $F_{u,n}$ de, $u \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ve $n=2u+1$ olmak üzere; $\frac{u}{n} \to \frac{x}{yn}$ olsun. Bu takdirde; $\frac{u}{n}$ köşesinin gittiği en uzak köşe $\frac{u(u+3)+1}{n(u+3)}$ dir.

İspat: $u \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ve $n=2u+1$ olmak üzere; $\frac{u}{n} \to \frac{x}{yn}$ olduğundan $uy-x=-1, x \equiv -u^2(n)$ dir. O halde; $y=\frac{x-1}{u}, x=nt-u^2$ olan bir $t \in \mathbb{Z}$ mevcuttur. Buradan; $y=\frac{nt-u^2-1}{u} \Rightarrow nt-u^2-1 \equiv 0(u), nt-1 \equiv 0(u)$ dır. $n=2u+1$ olduğundan $2u+1\ t \equiv 1(u) \Rightarrow t \equiv 1(u)$ dir. O halde; $t=uk+1$ olan bir $k \in \mathbb{Z}$ mevcut, $y=2uk+2+k-u$ ve $x=2u^2k+2u+uk+1-u^2$ elde edilir. Buradan;

$$f:\mathbb{N}\cup\{0\} \to \mathbb{Q}, \ \forall l \in \mathbb{N}\cup\{0\} \text{ için } f(k):=\frac{x}{ny}=\frac{2u^2k+2u+uk+1-u^2}{(2u+1)(2uk+2+k-u)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. f fonksiyonu monoton artandır ve $k=1$ için $f'(1)=\frac{u^2+3u+1}{(2u+1)(u+3)}=\frac{u^2+3u+1}{n(u+3)}$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Yukarıdaki teorem göz önüne alındığında; $\frac{u}{n}$ köşesinin gittiği en uzak köşe $\frac{u(u+3)+1}{n(u+3)}$ dir. $\frac{u(u+3)+1}{n(u+3)}$ nin gittiği en uzak köşe ise; $\frac{(u^2+3u+1)(u+3)-u}{n\left[(u+3)^2-1\right]}$ dir.

Sonuç olarak; $\frac{u}{n} \to \frac{u(u+3)+1}{n(u+3)} \to \frac{(u^2+3u+1)(u+3)-u}{n\left[(u+3)^2-1\right]} \to \cdots$ sonsuz yolu oluşur.

$\frac{u}{n} \to \cdots \to \frac{a_k}{nb_k} \to \frac{a_{k+1}}{nb_{k+1}} \to \frac{a_{k+2}}{nb_{k+2}} = \frac{a_{k+1}(u+3)-a_k}{n\left[b_{k+1}(u+3)-b_k\right]} \to \cdots$ yolu elde edilir. Öte yandan;

$$T = \begin{pmatrix} -u & u+1 \\ -(2u+1) & 2u+3 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n) \quad \text{dönüşümü bu yolu oluşturur.}$$

Gerçekten;

$$\begin{pmatrix} -u & u+1 \\ -(2u+1)=-n & 2u+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a_k}{nb_k} \end{pmatrix} = \frac{-a_k u + b_k(2u+1)(u+1)}{-a_k(2u+1)+b_k(2u+1)(2u+3)} = \frac{a_{k+1}}{nb_{k+1}}$$

$$\begin{pmatrix} -u & u+1 \\ -(2u+1)=-n & 2u+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a_{k+1}}{nb_{k+1}} \end{pmatrix} = \frac{-ua_{k+1}+n(u+1)b_{k+1}}{-na_{k+1}+n(2u+3)b_{k+1}} = \frac{a_{k+2}}{nb_{k+2}} \quad \text{dir.}$$

Teorem 2.3.35.[1]: $u,n \in \mathbb{N}$, $1 < k_o < n$ ve k_o, $u^2 + k_o u + 1 \equiv 0(n)$ koşulunu sağlayan en küçük sayı olmak üzere; $\varphi = \begin{pmatrix} -u & \frac{u^2+k_o u+1}{n} \\ -n & u+k_o \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ dönüşümünü göz önüne alalım.

φ dönüşümü ;

$$\frac{1}{0} \to \frac{u}{n} \to \frac{u}{n} + \frac{1}{nk_o} \to \frac{u}{n} + \frac{1}{n(k_o^{\,2}-1)} \to \cdots \to \frac{a_k}{nb_k} \to \frac{a_{k+1}}{nb_{k+1}} \to \frac{a_{k+2}}{nb_{k+2}} = \frac{a_{k+1}k_o - a_k}{n(b_{k+1}k_o - b_k)} \to \cdots$$

sonsuz yolunu verir.

İspat: Açık.

Teorem 2.3.36: $u,n \in \mathbb{N}$, $(u+1)^2 \equiv 0(n)$, $u+1 \le n$ olmak üzere;

$$\varphi = \begin{pmatrix} -u & \frac{(u+1)^2}{n} \\ -n & u+2 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n) \quad \text{dönüşümünü göz önüne alalım. Bu takdirde;}$$

i. φ dönüşümü paraboliktir.

ii. Sabit noktası $\frac{u+1}{n}$ dir.

iii. $\forall k \in \mathbb{N}$ olmak üzere; $\frac{1}{0} \to \frac{u}{n} \to \frac{2u+1}{2n} \to \frac{3u+2}{3n} \to \cdots \to \frac{ku+(k-1)}{kn} \to \cdots$

sonsuz yolu oluşur. Dahası; bu yolun köşeleri $\left\{\frac{ku+(k-1)}{kn}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin elemanlarıdır.

İspat: i. Açık.

ii. $\varphi(z) = \dfrac{-uz + \frac{(u+1)^2}{n}}{-nz+u+2}$ dir. Buradan; $\varphi(z_o) = z_o$ için

$\dfrac{-uz_o + \frac{(u+1)^2}{n}}{-nz_o+u+2} = z \Rightarrow \; nz_o^{\,2} - z_o(2u+2) + \dfrac{(u+1)^2}{n} = 0$ eşitliğinden $z_o = \dfrac{u+1}{n}$ elde edilir.

iii.

$$\begin{pmatrix} -u & \frac{(u+1)^2}{n} \\ -n & u+2 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{u}{n}$$

$$\begin{pmatrix} -u & \frac{(u+1)^2}{n} \\ -n & u+2 \end{pmatrix}\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{2u+1}{2n}$$

$$\begin{pmatrix} -u & \frac{(u+1)^2}{n} \\ -n & u+2 \end{pmatrix}\left(\frac{2u+1}{2n}\right) = \frac{3u+2}{3n}$$

$$\vdots$$

Bu şekilde devamla sonsuz yolu oluşur. Öte yandan; açıkça görülüyor ki $\left\{\frac{ku+(k-1)}{kn}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi sonsuz yolunun köşelerini oluşturur.

Teorem 2.3.37: $u, n \in \mathbb{N}$, $(u+1)^2 \equiv 0(n)$, $u+1 \le n$ olsun.

Bu takdirde; sonsuz yol oluşturan $\left\{\frac{ku+(k-1)}{kn}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin ardışık köşeleri arasındaki uzaklık $\forall k \in \mathbb{N}, k \ge 2$ için $\dfrac{1}{(k-1)kn}$ dir.

İspat: Tümevarım yoluyla ispatlayalım.

$k = 2$ için $\left|\dfrac{u}{n} - \dfrac{2u+1}{2n}\right| = \dfrac{1}{1.2.n}$ dir.

k için doğru olsun. $\left|\dfrac{(k-1)u+k-2}{(k-1)n}-\dfrac{ku+(k-1)}{kn}\right|=\dfrac{1}{k(k-1)n}$ dir.

$k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. $\left|\dfrac{ku+(k-1)}{kn}-\dfrac{(k+1)u+k}{(k+1)n}\right|=\dfrac{1}{k(k+1)n}$ dir.

Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.38: $u,n\in\mathbb{N}$, $(u+1)^2\equiv 0(n)$, $u+1\leq n$ olmak üzere;

$\varphi=\begin{pmatrix} -u & \dfrac{(u+1)^2}{n} \\ -n & u+2 \end{pmatrix}\in\Gamma_0(n)$ nin, $n=\beta(u+1)$ ve $\beta|u+1$ olmak üzere; sabit noktası $\dfrac{1}{\beta}$

dır. Dahası; $1\leq l\leq k$ ve $\alpha_l\leq\beta_l$ olmak üzere; $(u+1)=P_1^{\alpha_1}\ldots P_l^{\alpha_l}$, $n=P_1^{\beta_1}\ldots P_k^{\beta_k}$ için

$$\frac{u+1}{n}=P_1^{\alpha_1-\beta_1}\ldots P_1^{\alpha_m-\beta_m}\ldots P_l^{\alpha_l-\beta_k}\Rightarrow\frac{1}{\beta}=P_1^{\alpha_1-\beta_1}\ldots P_l^{\alpha_l-\beta_k}$$ dir.

Sonuç 2.3.39: $(u+1)=p\in\boldsymbol{P}$ ise; $\dfrac{u+1}{n}=1\ veya\ \dfrac{1}{u+1}$ dir.

Sonuç 2.3.40.[1]: $(u+1)^2\equiv 0(n)$ olduğundan $F_{u,n}$ üçgen içermez.

Teorem 2.3.41.[9]: $u,n\in\mathbb{N}$, $(u+1)^2\equiv 0(n)$, $u+1\leq n$ için

$\varphi=\begin{pmatrix} -u & \dfrac{(u+1)^2}{n} \\ -n & u+2 \end{pmatrix}$, $h=\begin{pmatrix} \dfrac{(u+1)}{n} & -\dfrac{(u+n+1)}{n} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ olmak üzere;

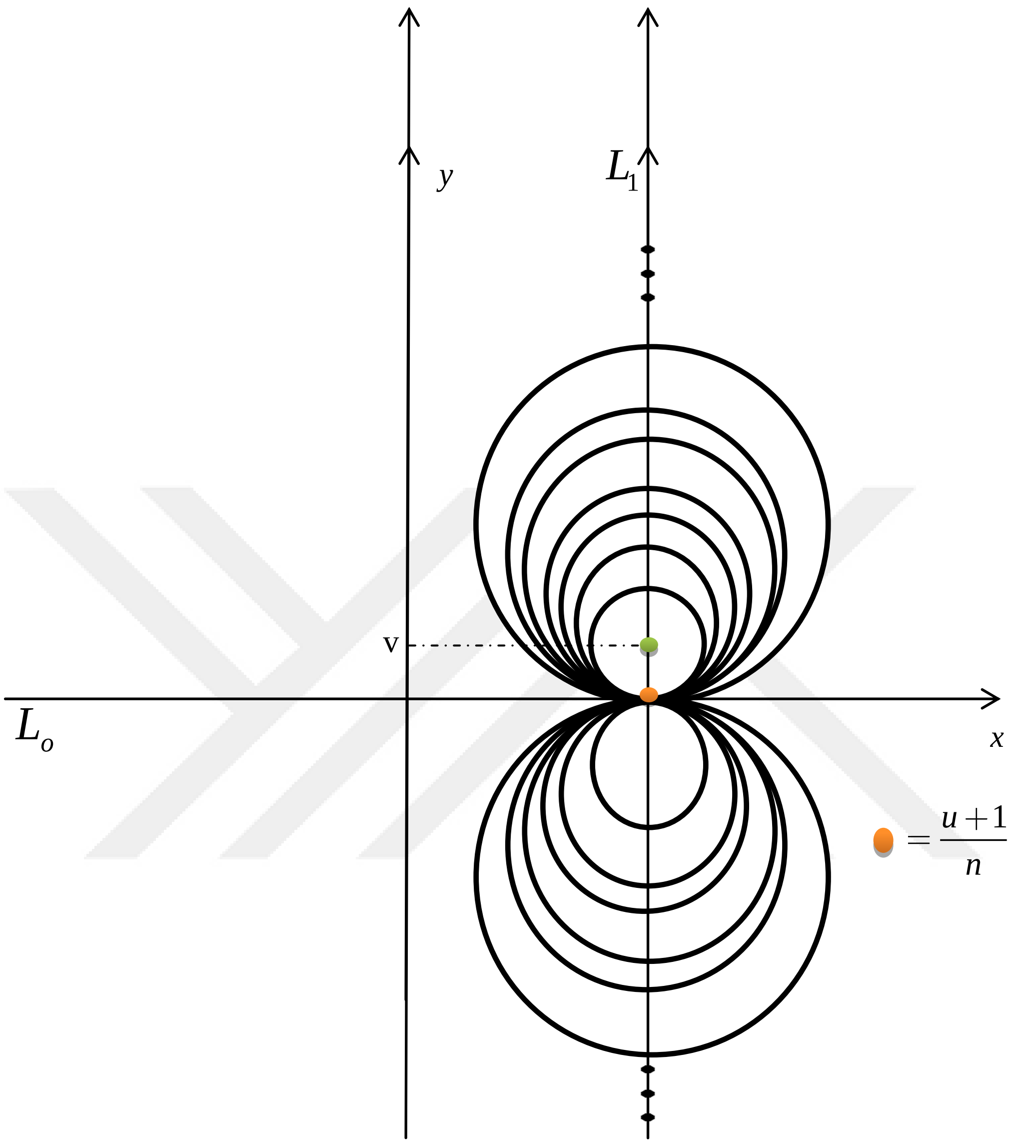
i. $g=h^{-1}\circ\varphi\circ h$ dönüşümü $g(z)=z+n$ dir.

ii. φ nin sabit bıraktığı çemberler kümesi $\left(x-\dfrac{u+1}{n}\right)^2+(y-|v|)^2=|v|^2$ dir.

İspat: i) $h^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{(u+n+1)}{n} \\ -1 & \dfrac{(u+1)}{n} \end{pmatrix}$ olduğundan, $g=h^{-1}\circ\varphi\circ h=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ yani

$g(z)=z+n$ dir.

ii) Öncelikle g nin bir sabit çemberini bulalım. $g(z)=z+n$ olduğundan L_o; 0 ve $g(0)=n$ den geçen g nin bir sabit çemberi, $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ dur. g nin bütün sabit çemberleri $K_o=L_o\cup\{\infty\}$ doğrusuna paralel doğrulardır. Bu durumda;



Şekil 17. φ nin sabit bıraktığı çemberler

$v \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $\left(\frac{u+1}{n}, v\right)$ merkezli ve $|v|$ yarıçaplı çemberlerdir.

Yani; $M_v : \left(x - \frac{u+1}{n}\right)^2 + (y - |v|)^2 = |v|^2$ çemberleridir.

3. İRDELEME

Bu tezde; $\Gamma_o\begin{pmatrix} n \\ h \end{pmatrix}$ kongrüans alt grupları tanıtılmış, $\hat{\mathbb{Q}}(h)$ kümesi üzerindeki hareketleri incelenmiş, bu hareketlerin oluşturduğu alt yörüngesel grafları ve kenar olma şartları verilmiştir. Yapılan çalışmalar sonucu $\forall n \in \mathbb{N}$ için $F_{1,n}$ alt yörüngesel graflarında $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ için $\left\{\frac{nk-1}{nk}\right\}_{k\in\mathbb{N}}, \left\{\frac{nk+1}{nk}\right\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ dizilerinin birbirini en uzak köşelere resmeden köşelerin dizileri olduğu ve bu köşelerin belli bir dönüşüm altında resmedildiği ispatlanmıştır. Öte yandan; bu köşelerin oluşturduğu sonsuz yolun elemanlarının belli bir kural altında oluştuğu ve özel olarak $n=5$ için $F_{1,5}$ grafında Fibonacci Sayı dizisi elde edilmiştir. Daha sonra $\forall n \in \mathbb{N}$ için $F_{1,n}$ alt yörüngesel graflarında kenar olma koşulunu incelenirken $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ için $n(n-4)b^2+4=u^2$ sayılarını tam kare yapan $b \in \mathbb{N}$ sayıları;

$$0,1,(n-2),\ldots,x,y,(n-2)y-x,\ldots \qquad \text{ve}$$

$n(n-4)b^2-4$ sayılarının birer tam kare olması için gerek ve yeter şartın $n=5$ olması gerektiği yani; $\forall n \in \mathbb{N}-\{5\}, n \geq 4$ için $n(n-4)b^2-4$ sayısılarının birer tam kare olamayacağı ispatlanmıştır. Daha sonra; $\forall u \in \mathbb{N}$ için $F_{u,2u+1}$ alt yörüngesel grafları incelenmiş ve bu graflarda da biribirini en uzak köşelere resmeden köşeler bulunmuştur. Son olarak; [1] deki Teorem 10 un $k_o=2$ olma durumu incelenmiştir.

4. SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen önemli sonuçlar aşağıdaki verilmiştir.

1. Teorem 2.1.3: "$\approx$" denklik bağıntısının tam h tane bloğu vardır

ve bu bloklar $\left[\dfrac{1}{k\frac{n}{h}}\right]$, $k \in \{0,1,2...,h-1\}$ şeklindedir.

2. Teorem 2.2.5:

$$\frac{r}{s\frac{n}{h}} \to \frac{x}{y\frac{n}{h}},\ \mathcal{G}\left(u,n_o\frac{n}{h}\right) \text{ da bir kenardır } \Leftrightarrow \begin{cases} a)\ x \equiv ur\left(n_o\frac{n}{h}\right),\ ry - sx = n_o \\ b)\ x \equiv -ur\left(n_o\frac{n}{h}\right),\ ry - sx = -n_o \end{cases}$$

3. Sonuç 2.2.6: $u^2 \not\equiv n_0\left(n_o\frac{n}{h}\right)$ ve $uv \equiv -1\left(n_o\frac{n}{h}\right)$ olsun. Bu takdirde; $\mathcal{G}\left(u,n_o\frac{n}{h}\right)$ ve $\mathcal{G}\left(v,n_o\frac{n}{h}\right)$ eşleşmiştir.

4. Sonuç 2.2.7: $\mathcal{G}\left(u,n_o\frac{n}{h}\right)$ kendi eşleşmiştir $\Leftrightarrow$ $u^2 \equiv -1\left(n_o\frac{n}{h}\right)$ dir.

5. Lemma 2.3.1: $\dfrac{r}{sn} \to \dfrac{x}{yn} \in F_{u,n} \Leftrightarrow$ $a)\ x \equiv ur(n),\quad ry - sx = 1$ veya $b)\ x \equiv -ur(n),\ ry - sx = -1$

dir.

6. Lemma 2.3.8: $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\dfrac{3n+2}{3(n+1)} \in F_{1,3}$ köşesi; $\dfrac{3n+2}{3(n+1)} > \dfrac{3n-1}{3n}$ olmak üzere; $\dfrac{3n+2}{3(n+1)} \to \dfrac{3n-1}{3n}$ şartını sağlayan en uzak köşedir.

7. Lemma 2.3.9: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{3n+4}{3(n+1)} \in F_{1,3}$ köşesi; $\dfrac{3n+1}{3n} > \dfrac{3n+4}{3n+3}$ olmak üzere;

$\dfrac{3n+1}{3n} \to \dfrac{3n+4}{3n+3}$ şartını sağlayan en uzak köşedir.

8. Lemma 2.3.10: $\left\{ \dfrac{3n-1}{3n}, \dfrac{3k+1}{3k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinde $\dfrac{3n-1}{3n}$ elemanını

$\dfrac{3k+1}{3k}$ elemanına birleştiren en kısa yoldaki kenar sayısı $n+k+1$ dir.

9. Lemma 2.3.11: $X := \left\{ \dfrac{3n-1}{3n}, \dfrac{3k+1}{3k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{N} \right\}$ olmak üzere;

$d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu, $\forall (x,y) \in X \times X$ için

$$d(x,y) := \text{"}x \text{ ile } y \text{ yi birleştiren en kısa yoldaki kenar sayısı"}$$

şeklinde tanımlanırsa; d fonksiyonu, X kümesi üzerinde bir metriktir.

10. Sonuç 2.3.12: $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ olsun. Bu takdirde; $x_n, y_m \in X$ aynı formda ise;

Yani; $$d(x,y) = |m-n-1| = \begin{cases} x_n = \dfrac{3n-1}{3n}, y_m = \dfrac{3m-1}{3m} & \text{ise;} \\ x_n = \dfrac{3n+1}{3n}, y_m = \dfrac{3m+1}{3m} & \text{ise;} \end{cases}$$

dir.

11. Sonuç 2.3.13: $X := \left\{ \dfrac{mn-1}{mn}, \dfrac{mk+1}{mk} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$ olsun. Bu takdirde;

$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\dfrac{mn-1}{mn}, \dfrac{mn+1}{mn}$ elemanlarını birbirine

bağlayan en kısa yoldaki kenar sayısı $n+k+1$ dir.

12. Sonuç 2.3.14: $n, r, m \in \mathbb{N}, m \geq 3$, $n < r$ olsun. Bu takdirde; $x_n, y_r \in X$ aynı formda ise;

$$d(x,y) = |r-n-1|$$

dir.

13. Teorem 2.3.15. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{5n+1}{5n} \in F_{1,5}$ köşesinin gidebileceği en uzak köşe $\frac{5n+6}{5n+5} \in F_{1,5}$ köşesidir.

14. Teorem 2.3.16: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{5n-1}{5n} \in F_{1,5}$ köşesinin gidebileceği en uzak köşe $\frac{5n+4}{5n+5} \in F_{1,5}$ köşesidir.

15. Teorem 2.3.17: $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \in \Gamma_o(5)$ olmak üzere; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T^n\left(\frac{1}{0}\right) \to T^n\left(\frac{1}{5}\right)$ dır.

16. Sonuç 2.3.18: $\forall k \in \mathbb{N}$ için $T^k\left(\frac{1}{0}\right) \to T^{k+1}\left(\frac{1}{0}\right)$ dır.

17. Lemma 2.3.19: $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \in \Gamma_o(5)$ olmak üzere; $\left\{T^k\left(\frac{1}{0}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi kesin monoton artan ve $T\left(\frac{1}{0}\right) \to T^2\left(\frac{1}{0}\right) \to T^3\left(\frac{1}{0}\right) \to \cdots$ yolu, sonsuz bir yoldur.

18. Lemma 2.3.20: a, b; $\frac{1}{5} \le \frac{a}{5b} < \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ koşulunu sağlayan herhangi iki doğal sayı olsun. Bu takdirde;

i) $\frac{a}{5b} < T\left(\frac{a}{5b}\right) < \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ dir.

ii) $\frac{a}{5b} \to T\left(\frac{a}{5b}\right), F_{1,5}$'de bir kenardır $\Leftrightarrow a = \frac{5b-\sqrt{5b^2+4}}{2}$ ve $5b^2+4=u^2$ olan $\exists u \in \mathbb{N}$ dır.

19. Sonuç 2.3.21:

i. $\frac{1}{0} \to 0+\frac{1}{5} \to \frac{1}{5}+\frac{1}{5.3} \to \frac{1}{5}+\frac{3}{5.8} \to \cdots \to \frac{1}{5}+\frac{a_n}{5b_n} \to \frac{1}{5}+\frac{b_n}{5(3b_n-a_n)} \to \cdots$ yolu $F_{1,5}$ de sonsuz bir yoldur.

ii. i) şıkkındaki yolun bütün köşeleri $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ dan küçüktür.

iii. $a_n = \frac{3b_n - \sqrt{5b_n^{\,2}+4}}{2}$ ve $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}+\frac{a_n}{5b_n}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ dır.

iv. $\frac{1}{5}+\frac{a}{5b}$ köşesindeki $a,b\in\mathbb{N}$ sayıları için $5a^2+4, 5b^2+4$ birer tam karedir.

20. Sonuç 2.3.24: $5b^2+4$ sayısını tam kare yapan $b\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ sayıları,

$$0,1,3,8,\ldots,x,y,3y-x,\ldots \qquad (*)$$

şeklindedir.

21. Sonuç 2.3.25: $5b^2-4$ sayısını tam kare yapan $b\in\mathbb{N}$ sayıları,

$$1,2,5,13,\ldots,x,y,3y-x,\ldots \qquad (**)$$

şeklindedir.

22. Sonuç 2.3.26: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri sırasıyla, (*) ve (**) koşulunu sağlayan iki dizi olsun. Bu takdirde; Bu iki dizinin elemanlarıyla elde edilen $(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n,\ldots)$ dizisi Fibonacci dizisidir.

23. Teorem 2.3.27: $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 4$ için $\left\{\frac{nk-1}{nk}\right\}_{k\in\mathbb{N}}, \left\{\frac{nk+1}{nk}\right\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ dizilerinin elemanları, $F_{1,n}$ alt grafında köşeler olup keyfi bir diziden alınan iki ardışık köşe birbirlerine bir h-doğrusu ile bağlanabilen en uzak köşelerdir.

24. Teorem 2.3.28: $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 4$, $K=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -n & n-1\end{pmatrix}\in\Gamma_o(n)$ olmak üzere; $\forall k\in\mathbb{N}$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için

i) $K^k\begin{pmatrix}1\\ \hline 0\end{pmatrix}\rightarrow K^k\begin{pmatrix}1\\ \hline n\end{pmatrix}$ dir.

ii) $K^k\begin{pmatrix}1\\ \hline 0\end{pmatrix}\rightarrow K^{k+1}\begin{pmatrix}1\\ \hline 0\end{pmatrix}$ dir.

iii) $\left\{K^k\begin{pmatrix}1\\ \hline 0\end{pmatrix}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi kesin monoton artan ve $K^1\begin{pmatrix}1\\ \hline 0\end{pmatrix}\rightarrow K^2\begin{pmatrix}1\\ \hline 0\end{pmatrix}\rightarrow K^3\begin{pmatrix}1\\ \hline 0\end{pmatrix}\rightarrow\cdots$ yolu sonsuz bir yoldur.

25. Teorem 2.3.29: $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 4$ **,** $K=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -n & n-1\end{pmatrix}\in\Gamma_o(n)$ ve a,b **;**

$\frac{1}{n}\leq\frac{a}{nb}<\frac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$ koşulunu sağlayan herhangi iki doğal sayı olsun. Bu takdirde;

i. $\frac{a}{nb}<K\left(\frac{a}{nb}\right)<\frac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$,

ii. $\frac{a}{nb}\to K\left(\frac{a}{nb}\right), F_{1,n}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow a=\frac{nb-\sqrt{n(n-4)b^2+4}}{2}$ ve $n(n-4)b^2+4=u^2$ olan $\exists u\in\mathbb{N}$ dır.

26. Sonuç 2.3.30: $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 4$ olsun. Bu takdirde;

i. $K=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -n & n-1\end{pmatrix}\in\Gamma_o(n)$ dönüşümün sabit noktaları $z_{1,2}=\frac{n\mp\sqrt{(n-4).n}}{n.2}$

dir ve K dönüşümü, $\left[\frac{1}{n},\frac{n-1}{n}\right]$ aralığında

$$\frac{1}{0}\to 0+\frac{1}{n}\to\frac{1}{n}+\frac{1}{n.(n-2)}\to\cdots\to\frac{1}{n}+\frac{a_n}{nb_n}\to\frac{1}{n}+\frac{b_n}{n\left((n-2)b_n-a_n\right)}\to\cdots$$

sonsuz yolunu oluşturur.

ii. i) şıkkındaki yolun bütün köşeleri $\frac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$ dan küçüktür.

iii. $\frac{1}{n}+\frac{a}{nb}$ köşesindeki $a,b\in\mathbb{N}$ sayıları için $n(n-4)a^2+4, n(n-4)b^2+4$ birer tam karedir.

iv. $a_n=\frac{(n-2)b_n-\sqrt{n(n-4)b_n^{\ 2}+4}}{2}$ ve $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{a_k}{nb_k}\right)=\frac{n-\sqrt{n(n-4)}}{2n}$ dır.

27. Teorem 2.3.31: $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 4$ olsun. Bu takdirde;

$n(n-4)b^2+4=u^2$ sayısını tam kare yapan $b\in\mathbb{N}$ sayıları;

$$0,1,(n-2),\ldots,x,y,(n-2)y-x,\ldots$$

dir.

28. Teorem 2.3.32: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ olsun. Bu takdirde;

$n(n-4)b^2-4$ sayısı bir tam karedir $\Leftrightarrow$ $n=5$ dir.

29. Sonuç 2.3.33: $\forall n \in \mathbb{N}-\{5\}, n \geq 4$ için $n(n-4)b^2-4$ sayısı bir tam kare olamaz.

30. Teorem2.3.34: $F_{u,n}$ de, $u \in \mathbb{N}$ ve $n=2u+1$ olmak üzere; $\frac{u}{n} \to \frac{x}{yn}$ olsun.

Bu takdirde; $\frac{u}{n}$ köşesinin gittiği en uzak köşe $\frac{u(u+3)+1}{n(u+3)}$ dir.

31. Teorem 2.3.35: $u,n \in \mathbb{N}$, $1<k_o<n$ ve k_o, $u^2+k_o u+1 \equiv 0(n)$ koşulunu sağlayan en küçük sayı olmak üzere; $\varphi = \begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^2+k_o u+1}{n} \\ -n & u+k_o \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ dönüşümünü göz önüne alalım.

φ dönüşümü ;

$$\frac{1}{0} \to \frac{u}{n} \to \frac{u}{n}+\frac{1}{nk_o} \to \frac{u}{n}+\frac{1}{n\ k_o^{\ 2}-1} \to \cdots \to \frac{a_k}{nb_k} \to \frac{a_{k+1}}{nb_{k+1}} \to \frac{a_{k+2}}{nb_{k+2}} = \frac{a_{k+1}k_o-a_k}{n\ b_{k+1}k_o-b_k} \to \cdots$$

sonsuz yolunu verir.

32. Teorem 2.3.36: $u,n \in \mathbb{N}$, $(u+1)^2 \equiv 0(n)$, $u+1 \leq n$ olmak üzere;

$\varphi = \begin{pmatrix} -u & \dfrac{(u+1)^2}{n} \\ -n & u+2 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu takdirde;

i. φ dönüşümü paraboliktir.

ii. Sabit noktası $\frac{u+1}{n}$ dir.

iii. $\forall k \in \mathbb{N}$ olmak üzere; $\frac{1}{0} \to \frac{u}{n} \to \frac{2u+1}{2n} \to \frac{3u+2}{3n} \to \cdots \to \frac{ku+(k-1)}{kn} \to \cdots$

sonsuz yolu oluşur. Dahası; bu yolun köşeleri $\left\{\frac{ku+(k-1)}{kn}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin elemanlarıdır.

33. Teorem 2.3.37: $u, n \in \mathbb{N}$, $(u+1)^2 \equiv 0(n)$, $u+1 \leq n$ olsun.

Bu takdirde; sonsuz yol oluşturan $\left\{\dfrac{ku+(k-1)}{kn}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin ardışık köşeleri arasındaki uzaklık $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ için $\dfrac{1}{(k-1)kn}$ dir.

34. Teorem 2.3.38: $u, n \in \mathbb{N}$, $(u+1)^2 \equiv 0(n)$, $u+1 \leq n$ olmak üzere;

35. Sonuç 2.3.39: $(u+1) = p \in \boldsymbol{P}$ ise; $\dfrac{u+1}{n} = 1$ *veya* $\dfrac{1}{u+1}$ dir.

36. Sonuç 2.3.40: $(u+1)^2 \equiv 0(n)$ olduğundan $F_{u,n}$ üçgen içermez.

37. Teorem 2.3.41: $u, n \in \mathbb{N}$, $(u+1)^2 \equiv 0(n)$, $u+1 \leq n$ için

$\varphi = \begin{pmatrix} -u & \dfrac{(u+1)^2}{n} \\ -n & u+2 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} \dfrac{(u+1)}{n} & -\dfrac{(u+n+1)}{n} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ olmak üzere;

i. $g = h^{-1} \circ \varphi \circ h$ dönüşümü $g(z) = z + n$ dir.

ii. φ nin sabit bıraktığı çemberler kümesi $\left(x - \dfrac{u+1}{n}\right)^2 + (y - |v|)^2 = |v|^2$ dir.

5. ÖNERİLER

1. Herhangi bir $u, n \in \mathbb{N}$ için $F_{u,n}$ alt yörüngesel graflarının özellikleri araştırılabilir.
2. Herhangi bir $u, n \in \mathbb{N}$ için $F_{u,n}$ alt yörüngesel graflarında tam kare veya farklı özelliklere sahip sayılar veya sayı dizileri araştıralabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Akbaş, M., On Suborbital Graphs for The Modular Group, Bull. London Math. Soc., 33 (2001) 647-652.

2. Jones, G.A., Singerman, D. ve Wicks, K., The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Notes, CUP, Cambridge, 160(1991) 316-338.

3. Rankin, R.A., Modular Forms and Functions, Cambridge University Press, 1978.

4. Jones, G.A. ve Singerman, D., Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

5. Sims, C.C., Graphs and Finite Permutation Groups, Mathematische. Zeitschrift., 95(1967) 76-86.

6. Fraleigh, J.B., A First Course in Abstract Algebra, Addison-Wesley, 1976.

7. Munkres, J.R., Topology, Second Edition, Massachusetts Institute of Technology, 2000.

8. Kör, T., Bir Tip Modüler Graf ve Fibonacci Sayıları, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2012.

9. Palka, B.C., An Introduction to Complex Function Theory, Springer Verlag, 1991.

ÖZGEÇMİŞ

Seda Öztürk, 30.04.1989 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlkokulunu Trabzon 24 Şubat İlkokul'unda, ortaokulunu ise; Trabzon Cumhuriyet İlköğretim Okulu'nda tamamladıktan sonra İngilizce Programlı Trabzon Tevfik Serdar Anadolu Lisesi'ni kazanarak okulunu dereceyle bitirdi.

2007-2008 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdi. 2011 yılında lisans eğitimini birincilikle tamamladı.

2011-2012 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Tezli Yüksek Lisans programını kazandı ve 2013-2014 Eğitim-Öğretim yılında yüksek lisansını tamamladı.

2013-2014 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Doktora programını kazandı.

Yabancı dili İngilizcedir.

2013 yılının Ekim ayında, doktora eğitimi boyunca verilen TÜBİTAK'ın 2211-A/ Genel Yurt İçi Doktora Burs programını kazandı.

2015 yılında 28. si Antalya'da Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü tarafından düzenlenen "*The 28 Th International Conference Of Jangjeon Mathematical Society*" isimli konferansta "*Young Scientist Excellence Award*" ödülünü kazandı.