KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR VE NULL SCROLL HİPERYÜZEYLER

DOKTORA TEZİ

Gül TUĞ

ŞUBAT 2017
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR VE NULL SCROLL HİPERYÜZEYLER

Gül TUĞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30 / 01 /2017
Tezin Savunma Tarihi : 17 / 02 /2017

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU**
İkinci Danışman : **Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKCİ**

Trabzon 2017

ÖNSÖZ

Akademik hayatım boyunca benden hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen, hedeflerim doğrultusunda beni daima cesaretlendiren ve hazırlamış olduğum bu tezin her aşamasında bana fikirleriyle yol gösteren, değerli hocam Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKCİ'ye, ayrıca doktora tezimi tamamlamamda, benden her türlü yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU'na, sonsuz teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Tüm hayatım boyunca ve akademik çalışmalarım esnasında, çok kıymetli destekleriyle yanımda olan ve tüm zorlukları birlikte aştığımız, canım anneme, çok sevdiğim eşime ve tüm aileme, en samimi duygularımla teşekkür ederim.

Gül TUĞ
Trabzon 2017

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Lightlike Altmanifoldlar ve Null Scroll Hiperyüzeyler" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanlarım Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU ve Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKCİ'nin sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 17/02/2017

Gül TUĞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No.

Doktora Tezi

ÖZET

LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR VE NULL SCROLL HİPERYÜZEYLER

Gül TUĞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU
İkinci Danışman: Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKCİ
2017, 60 Sayfa

Bu tezde,spacelike altmanifoldlar boyunca lightlike hiperyüzeyler için ikinci temel form incelenmiş ve bu hiperyüzeylerin screen konformalliği araştırılmıştır. Ayrıca, R_{ν}^{m+n} de lightlike altmanifoldlar boyunca null scroll hiperyüzeyler tanımlanmış ve bazı geometrik özellikleri incelenmiştir. Bu hiperyüzeyler için, tamamen geodezik ve tamamen umbilik olma şartları incelenerek, bunlarla ilgili yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Spacelike altmanifoldlar, Lightlike hiperyüzeyler, Lightlike altmanifoldlar, Null Scroll hiperyüzeyler.

-

PhD. Thesis

SUMMARY

LIGHTLIKE SUBMANIFOLDS AND NULL SCROLL HYPERSURFACES

Gül TUĞ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU
Co-Supervisor: Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKCİ
2017, 60 Pages

In this thesis, the second fundamental form is analyzed for the lightlike hypersurfaces along spacelike submanifolds and it is investigated the screen conformality of these hypersurfaces. Also, the null scroll hypersurfaces along lightlike submanifolds in R_{ν}^{m+n} are described and some geometric properties of them are studied. For these hypersurfaces, by investigating the conditions for being totally geodesic and totally umbilic, it is obtained new results relating them.

Key Words: Spacelike submanifolds, Lightlike hypersurfaces, Lightlikesubmanifolds, Null Scroll hypersurfaces.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No.

SEMBOLLER DİZİNİ

A	: Şekil Operatörü
B	: Lokal İkinci Temel Form
h	: İkinci Temel Form
K	: Kesit Eğriliği
$ltr(TM)$	: Lightlike Transversal Uzay
$LG\left(n^T, n^S\right)$	: Lightkoni Gauss Dönüşümü
$LH_M\left(n^T\right)$	: n^T ye İlişkin Lightlike Hiperyüzey
$RadT_uM$	: $u \in M$ Noktasında Radikal Uzay
R_{XY}	: Riemann Eğrilik Tensörü
$S(TM)$	: Screen Distirbüsyon
$S(TM)^{\perp}$	: $S(TM)$ ye Ortogonal Tümleyen Demet
$S(TM^{\perp})$	: Screen Transversal Vektör Demeti
TM	: M Manifoldunun Tanjant Demeti
$tr\left(TM\right)$	: Transversal Vektör Demeti
II	: İkinci Temel Form Tensörü
∇	: Levi-Civita Konneksiyonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Işık, bir elektromanyetik dalga olarak, her doğrultuda ve her gözlemciye göre sabit hızda yayılır. Bu keşif Einstein tarafından, 1905 yılında Özel Görelilik Teorisi'nde açıklanmış ve matematiğe dökülmüştür. 1915 yılında Einstein bu teorisini, Newton'un yerçekimi teorisini kapsayacak şekilde geliştirmiş ve Genel Görelilik Teorisi'ni ortaya koymuştur (URL-1, 2016).Genel görelilik bize uzay ve zamandan oluşan dört boyutlu bir evren modeli sunar. Genel görelilik, her şeyden önce bir çekim kuramıdır ancak bu, uzayın eğriliğinden ileri gelen bir çekimdir. Uzay, zamanı da içine alan bir dört boyutludur ve yoğun kütle tarafından bükülmüş, eğrilmiştir. Bu kuram, ışığın doğrusal yolla yayılmadığını, güneş gibi büyük kütleli yıldızların veya karadelikler gibi yüksek çekim kuvvetine sahip bölgelerin çevresinden geçerken büküldüğünü söyler. Büyük Patlama ve karadelikler kuramları genel görelilik temelli kuramlardır. Hawking, genel görelilikle ilgili olarak şöyle der: "Einstein'ın çok sayıda deneyle uyum gösteren görelilik kuramı, zaman ve uzayın birbiriyle ayrılmaz biçimde bağlı olduğunu kanıtlar. Uzay, zaman olmaksızın bükülemez. Bu nedenle zamanın bir şekli vardır" (Hawking, 2001).

Fizikte ve matematikte, matematikçi Hermann Minkowski anısına adlandırılan Minkowski uzayı veya Minkowski uzay-zamanı, Einstein'ın özel görelilik kuramının en uygun biçimde gösterimlendiği matematiksel yapıdır (URL-2, 2016). Matematikçiler Minkowski metriğini daha zarif yollarla tanımlamayı ve Görelilik Kuramını sağlam bir matematiksel yapı içine almayı severler. Bu yönde yapılanlar öğrenilmeye değecek zerafet ve çekiciliktedir. Benzer şekilde, halen aktif çalışma alanı olan Gauge Kuramı, String Kuramı gibi kuramlar da Einstein'in kullandığı tensör yerine başka matematiksel yapılar koymaktadır (Karaçay, 2016).

Minkowski uzayı özel bir metrik sayesinde geliştirilmiş olan bir uzay biçimidir. Bu uzayda null (lightlike) vektörler özel bir yere sahiptir. Bu vektörler sayesinde tanımlanan null eğriler, görelilik teorisinden yola çıkılarak geliştirilen klasik string teorisinde de kullanılmaktadır (Ferrandez vd., 2001). Kara delik teorisi de yine Einstein'ın genel görelilik kuramıyla tanımlanmıştır. Kara delikler, çekim alanı her türlü maddesel oluşumun ve ışınımın kendisinden kaçmasına izin vermeyecek derecede güçlü olan, kütlesi büyük kozmik cisimlerdir. Doğrudan gözlemlenememekle birlikte, çeşitli dalga boylarını kullanan dolaylı gözlem teknikleri sayesinde keşfedilmişlerdir. Olay Ufku (Event Horizon), bir kara delikte ışık ve maddenin artık kaçamadığı bölgeyi sınırlayan kuşaktır. Olay ufku, herhangi bir fiziksel incelemede bulunulamayan bir uzay parçasıdır. Kara deliğin olay ufkunda teorik olarak zaman tümüyle durmaktadır. Olay Ufku geometrik olarak bir lightlike (ışıksı) hiperyüzey formundadır (URL-3).

20. yüzyılın ikinci yarısından itibaren Riemann ve yarı Riemann geometrileri, diferansiyel geometride ve fizik alanındaki uygulamalarında aktif rol oynamışlardır. Berger’in “Riemannian Geometry During the Second Half of the Twentieth Century” kitabı, 1950’den beri Riemann geometrisindeki önemli gelişmeleri içermektedir. 1970’lerin ortalarında ilgi, Lorentz geometrisine ve Genel Görelilik teorisinde kullanılan matematiğe dönmüştür. Lorentz geometrisi ile ilgili çoğu çalışma Beem vd.’nin (1996) “Global Lorentzian Geometry” kitabında incelenmiştir.

Her Yarı-Riemann manifoldunda doğal olarak null (lightlike) alt uzaylar bulunduğundan, Duggal ve Bejancu (1996) altmanifoldların genel teorisindeki boşluğu doldurmak adına, lightlike (dejenere) altmanifoldların geometrisi üzerine bir kitap yayınlamıştır. Daha sonra Duggal ve Şahin 2010’da, lightlike geometride elde ettikleri yeni geometrik sonuçları ve fizik alanındaki uygulamaları içeren bir kitap yayınlamışlardır.

Izumiya vd. 2004 yılında yayınladıkları “The lightcone Gauss map of a spacelike surface in Minkowski 4-space”, “Umbilicity of space-like submanifolds of Minkowski space” ve “Singularities of evolutes of hypersurfaces in Hyperbolic space”, 2006 yılında yayınladıkları “Singularities of lightlike hypersurfaces in Minkowski four-space”, Izumiya ve Fuster 2007 yılında yayınladıkları “The lightlike flat geometry on spacelike submanifolds of codimension two in Minkowski space” adlı çalışmalarında, Lorentz-Minkowski uzayında ek boyutu 2 olan spacelike altmanifoldların lightlike geometrisini oluşturmuşlardır. Daha sonra Izumiya (2014), genel ek boyutlu spacelike altmanifoldlar boyunca lightlike hiperyüzeyleri incelemiştir. Burada regle yüzeylere benzer bir yapı oluşturmuşlardır.

Regle yüzeyler, klasik diferansiyel geometride, farklı geometrik şartlar altında birçok bilim insanı tarafından çalışılmıştır (Baikoussis ve Blair, 1992; Baikoussis vd., 1993; Chen vd., 1990; Kim, 2009; Kim vd., 2002, 2003, 2007; Kim ve Yoon 2000, 2004). “Null scroll" olarak adlandırılan yüzeyler ise Minkowski uzayında regle yüzeylerin özel bir sınıfıdır. Bunlar, dayanak eğrisi ve doğrultman vektörü null (lightlike) olan yüzeylerdir (Kim ve Yoon, 2004). Null scroll yüzeyler hakkındaki çalışmalar, Choi vd. (1998), Pak ve Yoon

(2000), Balgetir ve Ergüt (2003, 2004), Abdel-Baky ve Aldossary (2013) ile verilen referanslarda mevcuttur.

Bu tezde, spacelike altmanifoldlar boyunca lightlike hiperyüzeyler için ikinci temel form incelenmiş, bu hiperyüzeylerin screen konformalliği araştırılmıştır. Ayrıca, $\mathbb{R}_{\nu}^{m+n}$ de lightlike altmanifoldlar boyunca null scroll hiperyüzeyler tanımlanarak, bazı geometrik özellikleri incelenmiştir.

1.2. Riemann Manifoldları

Tanım 1.2.1. X bir küme ve τ, X kümesinin alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (X,τ) ikilisine bir topolojik uzay adı verilir:

1. $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$,
2. I bir indis kümesi olmak üzere, $\{A_i\}_{i\in I}$, $A_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$,
3. J sonlu bir indis kümesi olmak üzere, $\{A_j\}_{j\in J}$, $A_j \in \tau$ ise $\bigcap_{j\in J} A_j \in \tau$.

X kümesinin her elemanına topolojik uzayın bir noktası ve τ ailesine ait olan alt kümelerine de topolojik uzayın açıkları denir (Şahin, 2012).

Tanım 1.2.2. M bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise M ye bir n-boyutlu topolojik manifold denir:

1. M bir Haussdorf uzayıdır,

2. M nin her bir açık alt kümesi E^n veya E^n in bir açık alt kümesine homeomorftur,

3. M sayılabilir çoklukta açık kümelerle örtülebilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 1.2.3. M bir n-boyutlu topolojik manifold ve U da E^n in bir açık alt kümesi olsun. O halde U bir ψ homeomorfizmi ile M nin bir W açık alt kümesine eşlenebilir öyle ki,

$$\psi \ : U \subset E^n \rightarrow W \subset M$$

olmak üzere, (ψ, W) ikilisine bir *koordinat komşuluğu* veya *harita* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 1.2.4. M bir n-boyutlu topolojik manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ olsun. E^n de U_α ya bir ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık küme W_α olsun. Böylece (ψ_α, W_α) haritalarının $\{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ koleksiyonuna bir *atlas* veya *koordinat komşuluğu sistemi* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 1.2.5. M bir n-boyutlu topolojik manifold ve M nin bir atlası $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ olsun. Eğer, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ ve $\forall \alpha, \beta \in I$ olmak üzere,

$$\varphi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta \text{ ve } \varphi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$$

biçiminde verilen $\varphi_{\alpha\beta}$ ve $\varphi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler, S ye M üzerinde C^k sınıfından bir *diferensiyellenebilir yapı* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 1.2.6. M bir n-boyutlu topolojik manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanıyorsa, M ye bir *diferensiyellenebilir manifold* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 1.2.7. $X \neq \emptyset$ ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in X$ için,

1. $x \neq y$ için $d(x, y) > 0$,
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$,
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir (Şahin, 2012).

Tanım 1.2.8. V bir reel vektör uzayı olsun. Bir $b : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineer fonksiyonuna *simetrik bilineer form* denir eğer $\forall (v, w) \in V \times V$ için $b(v, w) = b(w, v)$ ise(O'Neill, 1983).

Tanım 1.2.9. M bir diferensiyellenebilir manifold ve bu manifold üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda,

$$g\ :\ \chi(M)\times\chi(M)\rightarrow C^{\infty}(M)$$

ile tanımlı g simetrik bilineer formu pozitif tanımlı ise yani $\forall X,Y\in\chi(M)$ için $g(X,Y)\geq 0$ ve $g(X,X)=0\Leftrightarrow X=0$ şartı sağlanıyorsa, g ye *Riemann metriği* veya *metrik tensör* denir. Bu durumda (M,g) ikilisine bir *Riemann manifoldu* denir (Şahin, 2012).

Tanım 1.2.10. M_1 ve M_2 diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\pi\ :\ M_1\rightarrow M_2$ diferensiyellenebilir örten dönüşüm olsun. Bu durumda eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $E(M_1,M_2,\pi)$ ye M_1 üzerinde vektör demeti adı verilir.

1. $\forall p\in M_2$, $\pi^{-1}(p)$ vektör uzayı yapısına sahiptir. Bu uzayın boyutu her zaman sabit kabul edilmektedir. $\pi^{-1}(p)$ vektör uzayına vektör demetinin *lifi* denir ve L_p ile gösterilir.

2. $\forall p\in M_2$ için, M_2 de p noktasının komşuluğu U ve $n\geq 0$ olmak üzere,

$$h\ :\ U\times\mathrm{R}^n\rightarrow\pi^{-1}(U)$$

diffeomorfizmi vardır öyle ki $\forall q\in U$ için

$$\begin{array}{rcl} h_q:\mathrm{R}^n & \rightarrow & \pi^{-1}(U) \\ y & \rightarrow & h(q,y) \end{array}$$

dönüşümü bir izomorfizmdir. Bu durumda M_1 manifolduna taban manifoldu, M_2 manifolduna üs manifoldu, π dönüşümüne izdüşüm, $\pi^{-1}(p)$ uzayına p noktasındaki *lif* ve (U,h) ikilisine de M_1 manifoldunun koordinat haritası denir. Eğer U, M_2 olarak alınırsa E vektör demetine *aşikar vektör demeti* denir (Şahin, 2012).

Tanım 1.2.11. f, E vektör demetinin M_2 üst manifoldundan M_1 taban manifolduna bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer, $\pi \circ f = I$ ise f dönüşümüne E vektör demetinin bir *çapraz kesiti (cross section)* denir. Burada I, M üzerindeki birim dönüşümdür (Şahin, 2012).

Tanım 1.2.12. M bir C^∞- manifold olsun. M nin herhangi bir noktadaki tanjant uzayı T_pM ile gösterilsin. Her p noktasındaki tanjant uzayların ayrık birleşimine *tanjant demet* denir ve

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

ile gösterilir. Tanjant demet üzerinde bir $\pi : TM \to M$ izdüşümü vardır öyle ki $(p,v) \in TM$ için $\pi(p,v) = p$ dir. Bu durumda TM üzerinde C^∞ yapı tanımlıdır (Brickell ve Clark, 1970).

Bir tanjant demetin çapraz kesiti (cross section), M manifoldu üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanıdır (Şahin, 2012).

Bundan sonra bir M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.13. M bir n-boyutlu manifold olsun. M üzerinde

$$\begin{aligned} D : M &\to \bigcup T_pM \\ p &\to D_p \subset T_pM \end{aligned}$$

öyle ki $boy(D_p) = r$ dönüşümüne r boyutlu distribüsyon denir. $X \in \chi(M)$ için $X_p \in D_p$ ise X vektör alanına D distribüsyonuna aittir denir. Eğer her p noktası için D_p alt uzayına ait r-tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör varsa, D distribüsyonuna diferensiyellenebilirdir denir (Şahin, 2012).

Tanım 1.2.14. Bir C^∞ $F : N \to M$ dönüşümüne *immersiyon (submersiyon)* denir eğer, her noktada $rankF = boyN$ $(boyM)$ ise (Boothby, 2003).

Eğer F birebir immersiyon ise N ile M nin $\tilde{N} = F(N)$ alt kümesi arasında birebir eşleme sağlayacaktır. Bu eşleme $\tilde{N}$ alt kümesini bir topoloji ve C^∞ yapı ile donatır ve $\tilde{N}$ ya bir *altmanifold* (veya *immersed altmanifold*) denir. Bu durumda $F : N \to \tilde{N}$ bir diffeomorfizm olur. (Boothby, 2003).

Örnek 1.2.1. E lemniskat eğrisi olmak üzere, $j : E \to \mathbb{R}^2$ öyle ki $j(s) = (\sin 2s, \sin s)$ birebir dönüşümü verilsin. Jacobien matrisi $\begin{bmatrix} 2\cos 2s & \cos s \end{bmatrix}$ olup, rankı heryerde 1 olduğundan j bir immersiyondur ve E eğrisi $\mathbb{R}^2$ nin bir altmanifoldudur (Brickell ve Clark, 1970).

Tanım 1.2.15. Bir $F : N \to M$ birebir immersiyonuna *embedding* denir öyle ki F, N den M ye bir homeomorfizmdir. Bu embedding dönüşümünün görüntüsüne bir *embedded altmanifold* denir (Boothby, 2003).

Tanım 1.2.16. Ek boyutu 1 olan altmanifolda bir *hiperyüzey* denir (Şahin, 2012).

Tanım 1.2.17. M bir C^∞ manifold olsun.

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

fonksiyonu için, $\forall X, Y, Z \in \chi(M), \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere;

1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$
2) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M üzerinde bir *afin konneksiyon* ve ∇_X ifadesine de X *e göre kovaryant türev operatörü* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 1.2.18. M bir Riemann manifoldu olsun. ∇, M üzerinde bir afin konneksiyon ve $\langle , \rangle$ M üzerindeki iç çarpım olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa ∇ ya M üzerinde bir *Riemann konneksiyonu* denir:

1) ∇, C^{∞} sınıfındandır,
2) M nin bir U bölgesi üzerinde C^{∞} olan $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall P \in U$ için,

$$X_P\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle_P + \langle Y, \nabla_X Z\rangle_P$$

dir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 1.2.19. M bir hiperyüzey ve M nin diferensiyellenebilir birim normal vektör alanı N olsun. $\mathbb{R}^n$ de Riemann konneksiyonu ∇ olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için, $A(X) = \nabla_X N$ şeklinde tanımlı A dönüşümüne M üzerinde *şekil operatörü* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 1.2.20. M, $\mathbb{R}^n$ de bir hiperyüzey ve M nin diferensiyellenebilir birim normal vektör alanı N olmak üzere,

$$\begin{aligned} \eta : M &\longrightarrow S^{n-1} \\ P &\longrightarrow \eta(P) = N(P) \end{aligned}$$

dönüşümü M hiperyüzeyini $\mathbb{R}^n$ deki S^{n-1} birim hiperküresine resmeder. Bu şekilde tanımlanmış olan diferensiyellenebilir η dönüşümüne *Gauss dönüşümü* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 1.2.21. M, $\mathbb{R}^n$ de bir hiperyüzey ve $P \in M$ noktasında şekil operatörü A olmak üzere, $\exists \lambda \epsilon R$ için $A = \lambda I_{n-1}$ ise P noktasına M üzerinde bir *umbilik nokta* denir.

Tanım 1.2.22. M, $\mathbb{R}^n$ de bir hiperyüzey ve $P \in M$ noktasında şekil operatörü A olsun. $X_P \in T_P M$ için $\langle A(X_P), X_P\rangle = 0$ oluyorsa, X_P ye M nin bir *asimptotik doğrultusu* denir. M üzerinde X_P yi teğet kabul eden eğriye ise bir *asimptotik çizgi* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 1.2.23. M , $\mathbb{R}^n$ de bir hiperyüzey ve M üzerinde bir C^∞ eğri α olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T ve M nin Riemann konneksiyonu ∇ olmak üzere, $\nabla_T T = 0$ ise α ya M üzerinde bir *geodezik eğri* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

1.3. Yarı Riemann Manifoldları

Tanım 1.3.1. Bir b simetrik bilineer formu;

1) Pozitif (negatif) tanımlıdır eğer, $v \neq 0$ için $b(v,v) > 0$ (<0) ise,
2) Pozitif (negatif) yarı tanımlıdır eğer, $\forall v \in V$ için $b(v,v) \geq 0$ (≤ 0) ise,
3) Non-dejeneredir eğer, $\forall w \in V$ için $b(v,w) = 0$ iken $v = 0$ ise(O'Neill, 1983).

Tanım 1.3.2. Bir b simetrik bilineer formunun *indeksi*, $b\,|_W$ nın negatif tanımlı olduğu $W \subset V$ alt uzayının boyutu olan en büyük sayıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 1.3.3. Bir $\bar{M}$ diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir $\bar{g}$ metrik tensörü, sabit indeksli, simetrik, non-dejenere $(0,2)$ tensör alanıdır. Diğer bir deyişle $\bar{g}$, $\bar{M}$ manifoldunun her p noktasına $T_p\bar{M}$ de bir $\bar{g}_p$ skalar çarpımı karşılık getirir ve $\bar{g}_p$ nin indeksi her noktada aynıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 1.3.4. Bir yarı-Riemann manifoldu, $\bar{g}$ metriği ile donatılmış bir diferensiyellenebilir manifolddur. $0 \leq v \leq n = boy\bar{M}$ indeks olmak üzere, $v = 0$ ise $\bar{M}$ bir Riemann manifoldudur ve bu durumda her $\bar{g}_p$ pozitif tanımlı bir iç çarpımdır. Eğer $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise $\bar{M}$ bir Lorentz manifoldudur(O'Neill, 1983).

$\bar{g}(v,w)$ yerine alternatif olarak $\langle v,w \rangle$ gösterimini kullanacağız. $0 \leq v \leq n$ olmak üzere, indeksi v olan R_v^n yarı Öklid uzayı,

$$\left\langle v_p, w_p \right\rangle = -\sum_{i=1}^{v} v^i w^i + \sum_{j=v+1}^{n} v^j w^j$$

metriği ile verilir. $v=0$ olduğunda R_v^n yarı Öklid uzayı R^n Öklid uzayına indirgenir. $n \geq 2$ için R_1^n ye Lorentz - Minkowski *n*- uzayı denir ve *n*=4 durumu, relativistik uzay - zamanın en basit halidir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.3.5. Bir $\bar{M}$ yarı Riemann manifoldunda v teğet vektörü,

1) $\langle v,v\rangle > 0$ veya $v=0$ ise *spacelike,*

2) $\langle v,v\rangle < 0$ ise *timelike,*

3) $\langle v,v\rangle = 0$ ise *lightlike (null)*

vektör adını alır. $T_p\bar{M}$ deki tüm lightlike (null) vektörlerin kümesine *null koni* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.3.6.

i. x ve y vektörleri R_1^3 de timelike vektörler olsunlar. $\exists\theta \geq 0$ öyle ki $\langle x,y\rangle = -\|x\|\|y\|\cosh\theta$ sayısı x ve y vektörleri arasındaki *hiperbolik açıdır.*

ii. x ve y vektörleri bir timelike alt uzayı geren spacelike vektörler ise $\exists\theta \geq 0$ öyle ki $\langle x,y\rangle = \|x\|\|y\|\cosh\theta$ sayısı x ve y vektörleri arasındaki *merkezi açıdır.*

iii. x ve y vektörleri bir spacelike alt uzayı geren spacelike vektörler ise $\exists\theta \geq 0$ öyle ki $\langle x,y\rangle = \|x\|\|y\|\cos\theta$ sayısı x ve y vektörleri arasındaki *spacelike açıdır.*

iv. x bir spacelike vektör ve y bir timelike vektör ise $\exists\theta \geq 0$ öyle ki $\langle x,y\rangle = \|x\|\|y\|\sinh\theta$ sayısı x ve y vektörleri arasındaki *Lorentzian timelike açıdır* (Birman ve Nomizo, 1984).

Tanım 1.3.6. $\bar{M}$ bir yarı - Riemann manifoldu olsun. $\bar{M}$ üzerinde bir $\alpha(s)$ eğrisine spacelike, timelike veya lightlike (null) eğri denir eğer, tüm hız vektörleri sırasıyla spacelike, timelike veya lightlike (null) ise (O'Neill, 1983).

Teorem 1.3.7. $\bar{M}$ bir yönlendirilmiş Lorentz manifoldu ve $\gamma : I \subset R \to M$ yay paremetresi ile parametrelendirilmiş bir null eğri olsun. $\{\gamma'(t), \gamma''(t), ..., \gamma^{(n)}(t)\}$ kümesi

$T_{\gamma(t)}M$ nin bir bazı olmak üzere, $\{L, W_1, N, W_2, ..., W_m\}$, $m = n-2$ olacak şekilde bir tek Frenet çatısı vardır öyle ki $i \in \{3, ..., m-1\}$ için,

$$\begin{aligned}
L' &= W_1, \\
W_1' &= -k_1 L + N, \\
N' &= -k_1 W_1 + k_2 W_2, \\
W_2' &= k_2 L + k_3 W_3, \\
W_i' &= -k_i W_{i-1} + k_{i+1} W_{i+1}, \\
W_m' &= -k_m W_{m-1}
\end{aligned}$$

dir. Burada $\forall i \geq 2$ için eğrilik fonksiyonları $k_i > 0$ dır. Ayrıca aşağıdaki özellikler sağlanır;

1) $1 \leq i \leq m-1$ olmak üzere $\{\gamma'(t), \gamma''(t), ..., \gamma^{(i)}(t)\}$ ve $\{L, W_1, N, W_2, ..., W_{i-2}\}$ aynı yönlendirmeye sahiptir,
2) $\{L, W_1, N, W_2, ..., W_m\}$ pozitif yönlendirilmiştir (Ferrandez vd., 2002).

Teorem 1.3.8. Bir $\bar{M}$ yarı - Riemann manifoldunda bir tek $\bar{\nabla}$ konneksiyonu vardır öyle ki $\forall X, V, W \in \chi(\bar{M})$ için,

1) $[V, W] = \bar{\nabla}_V W - \bar{\nabla}_W V,$
2) $X\langle V, W\rangle = \langle \bar{\nabla}_X V, W\rangle + \langle V, \bar{\nabla}_X W\rangle$

sağlanır. Bu durumda $\bar{\nabla}$ ya $\bar{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.3.7. Bir $\bar{M}$ yarı – Riemann manifoldunda $\bar{\nabla}$ konneksiyonu,

$$\bar{\nabla} : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \to \chi(\bar{M})$$

olacak şekilde bir fonksiyondur öyle ki,

1) $\bar{\nabla}_V W$, V ye göre $\Im(\bar{M})$ lineer,
2) $\bar{\nabla}_V W$, W ye göre R lineer,
3) $f \in \Im(M)$ için $\bar{\nabla}_V (fW) = (Vf)W + f\bar{\nabla}_V W$

dır (O'Neill, 1983).

Tanım 1.3.8. $\bar{M}$ bir yarı - Riemann manifoldu ve $\bar{\nabla}$ de $\bar{M}$ üzerinde Levi Civita konneksiyonu olsun. $X, Y, Z \in \chi(\bar{M})$ olmak üzere, bir $R\ :\ \chi(\bar{M})^3 \to \chi(\bar{M})$ öyle ki,

$$R_{XY}Z = \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z - \left[\bar{\nabla}_X, \bar{\nabla}_Y\right]Z$$

fonksiyonu $\bar{M}$ üzerinde (1,3) tensör alanıdır ve *Riemann eğrilik tensörü* olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

Lemma 1.3.1. Π, $\bar{M}$ yarı - Riemann manifoldunun p noktasındaki bir non-dejenere tanjant düzlem olsun. Bu durumda,

$$K(v,w) = \frac{\langle R_{vw}v, w\rangle}{Q(v,w)}$$

değeri, Π için $\{v, w\}$ bazının seçiminden bağımsızdır. $K(\Pi)$ ye *kesit eğriliği* adı verilir. Burada,

$$Q(v,w) = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2$$

dir. Ayrıca, Π nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart, $Q(v,w) \neq 0$ olmasıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 1.3.9. Bir $\bar{M}$ yarı - Riemann manifoldunun her p noktasındaki eğrilik tensörü R sıfır ise bu manifolda *flat* denir (O'Neill, 1983).

Önerme 1.3.1. $\forall p \in \bar{M}$ için $K = 0$ ise $R = 0$ dır (O'Neill, 1983).

1.3.1. Yarı-Riemann Manifoldlarının Altmanifoldları

Bir $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı - Riemann manifoldunun diferensiyellenebilir bir altmanifoldu (M, g) ile gösterilsin. M üzerinde bir X vektör alanı, M nin her p noktasına $\bar{M}$ de bir X_p teğet vektörü karşılık getirir. X *düzgün* vektör alanıdır denir eğer, $f \in \Im(\bar{M})$ için $Xf \in \Im(M)$ ise. Bu şekildeki düzgün vektör alanlarının kümesine $\bar{\chi}(M)$ denecek olursa, her $Y \in \chi\left(\bar{M}\right)$ vektör alanının kısıtlanışı $Y|_M \in \bar{\chi}(M)$ dir.

$n+k$ boyutlu $\bar{M}$ yarı - Riemann manifoldunun bir n-boyutlu M altmanifoldu için, her noktada $T_p(M)$ tanjant uzayı $T_p(\bar{M})$ nin non-dejenere bir alt uzayıdır. Dolayısıyla aşağıdaki direkt toplam yazılabilir,

$$T_p(\bar{M}) = T_p(M) \oplus T_p(M)^{\perp}.$$

Burada $T_p^{\perp}(M)$ alt uzayı da non-dejeneredir. $boyT_p^{\perp}(M) = k$ dır ve M nin *ek boyutu* olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

$$\bar{\nabla} \; : \; \chi(M) \times \bar{\chi}(M) \to \bar{\chi}(M)$$

fonksiyonu M üzerinde $\bar{M}$ den indirgenmiş konneksiyondur. Bu durumda $\forall V, W \in \chi\left(M\right)$ için, $\nabla_V W = \tan \bar{\nabla}_V W$ dır öyle ki $\tan : T_p(\bar{M}) \to T_p(M)$ ortogonal izdüşümdür. ∇ ise M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonudur. Benzer şekilde, $\forall V, W \in \chi\left(M\right)$ için,

$$II \; : \; \chi\left(M\right) \times \chi\left(M\right) \to \chi\left(M\right)^{\perp}$$

$$II(V, W) = nor\,\bar{\nabla}_V$$

fonksiyonu bilineer ve simetriktir. Burada $nor \; : \; T_p(\bar{M}) \to T_p(M)^{\perp}$ ortogonal izdüşüm ve II ikinci temel form tensörüdür. Yani $\forall V, W \in \chi\left(M\right)$ için,

$$\bar{\nabla}_V W = \nabla_V W \oplus II(V,W)$$

yazılabilir (O'Neill, 1983).

Sonuç 1.3.1.1. K ve $\bar{K}$ sırasıyla M ve $\bar{M}$ nin kesit eğrilikleri olsunlar. $\{v,w\}$ M de bir non-dejenere teğet düzlemin bazı olmak üzere,

$$K(v,w) = \bar{K}(v,w) + \frac{\langle II(v,v), II(w,w)\rangle - \langle II(v,w), II(v,w)\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2} \tag{1.1}$$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.3.1.1. Bir (M,g) yarı - Riemann hiperyüzeyi *tamamen geodeziktir* denir eğer $II = 0$ ise (Duggal, 2015).

Tanım 1.3.1.2. Bir (M,g) yarı - Riemann hiperyüzeyi *tamamen umbiliktir* denir eğer $II = \rho g$ ise (Duggal, 2015).

1.3.2. Yarı - Riemann Manifoldlarında Lightlike Hiperyüzeyler

Bu bölümde, bir $\bar{M}$ yarı - Riemann manifoldunda bir M lightlike hiperyüzeyinin diferensiyel geometrisine değinilmiştir. Bu amaçla, M üzerinde bir non dejenere screen distribüsyon ve buna karşılık gelen lightlike transversal vektör demeti tanımları verilmiştir. Bunlar yardımıyla, lineer konneksiyon, ikinci temel form, şekil operatörü ve benzeri indirgenmiş geometrik kavramlar tanımlanmıştır.

$\forall p \in M$ için T_pM teğet uzay, $\left(T_p\bar{M}, \bar{g}_p\right)$ uzayının bir hiperdüzlemidir. Her noktada normal uzay,

$$T_pM^{\perp} = \left\{v \in T_p\bar{M} \mid g_p(v,w) = 0,\ \forall w \in T_pM\right\}$$

ile tanımlanır.

g metriği M üzerinde dejenere olsun. Bu durumda, M üzerinde bir $\xi \neq 0$ vektör alanı vardır öyle ki $\forall X \in \chi(TM)$ için $g(\xi, X) = 0$ dır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 1.3.2.1. T_pM de *radikal (null) uzay,*

$$RadT_pM = \{\xi \in T_pM\} \mid g_p(\xi, X) = 0, \ \forall X \in T_pM$$

ile tanımlanır. $RadT_uM$ nin boyutuna g metriğinin *nulluk derecesi* denir ve M hiperyüzeyine de $\bar{M}$ de bir *lightlike hiperyüzey* adı verilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

$\forall p \in M$ noktasında $T_pM^{\perp}$ ile gösterilen normal uzay da dejenere olup, $RadT_pM = T_pM \cap T_pM^{\perp}$ şeklinde yazılır. M hiperyüzeyi için $T_pM^{\perp}$ in boyutu 1 olduğundan $boy(RadT_pM) = 1$ dir. Dolayısıyla $RadT_pM = T_pM^{\perp}$ olur. $RadTM$ ye M nin bir *radikal (null) distribüsyonu* denir.

TM tanjant demetinde, $TM^{\perp}$ normal demetine tümleyen bir demet $S(TM)$ ile gösterilsin. Bu durumda,

$$TM = RadTM \oplus_{orth} S(TM)$$

şeklinde yazılır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 1.3.2.2. $S(TM)$ demeti M üzerinde bir *screen distribüsyon* olarak adlandırılır ve non-dejenere alt uzaydır (Duggal ve Bejancu, 1996).

$T\bar{M}|_M$ de, $S(TM)$ ye ortogonal tümleyen demet $S(TM)^{\perp}$ ile gösterilsin. $S(TM)^{\perp}$ demeti de non-dejenere vektör demeti olup, rankı 2 dir. Bu durumda M boyunca,

$$T\bar{M}|_M = S(TM) \perp S(TM)^{\perp}$$

ayrışımı yazılabilir. Ayrıca $RadTM = TM^{\perp}$ vektör demeti, $S(TM)^{\perp}$ in bir alt demetidir.

$(\bar{M}, \bar{g})$ yarı - Riemann manifoldunda bir lightlike hiperyüzey $(M, g, S(TM))$ ile ifade edilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Teorem 1.3.2.1. $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı - Riemann manifoldunda bir lightlike hiperyüzey $(M, g, S(TM))$ olsun. Bu durumda M üzerinde rankı 1 olan bir tek $tr(TM)$ vektör demeti vardır öyle ki $TM^{\perp}$ de bir $U \subset M$ koordinat komşuluğunda, her sıfırdan farklı ξ kesiti için,

$$\bar{g}(N, \xi) = 1,\ \bar{g}(N, N) = \bar{g}(N, W) = 0,\ \forall W \in \chi(S(TM))|_U .$$

olacak şekilde bir tek $N \in \chi(tr(TM))$ kesiti vardır (Duggal ve Bejancu, 1996).

$TM^{\perp}$ in $S(TM)^{\perp}$ deki tümleyen vektör demeti F olsun. $V \in \chi(F|_U)$, $V \neq 0$ olmak üzere $\bar{g}(V, \xi) \neq 0$ dır, aksi halde $S(TM)^{\perp}$ dejenere olurdu. O halde,

$$N = \frac{1}{\bar{g}(\xi, V)}\left\{V - \frac{\bar{g}(V, V)}{2\bar{g}(\xi, V)}\xi\right\}$$

biçiminde yazılan vektör alanı Teorem 1.3.2.1' in şartlarını sağlar.

$\forall u \in M$ için $tr(TM)$ bir lightlike vektör demetidir ve $tr(TM)_p \cap T_pM = \{0\}$ dır. O halde,

$$T\bar{M}|_M = TM \oplus tr(TM)$$

biçiminde yazılabilir. $tr(TM)$ ye M nin $S(TM)$ ye göre *lightlike transversal vektör demeti* denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

1.3.3. Lightlike Hiperyüzeyler Üzerinde İndirgenmiş Geometrik Yapı

$\bar{\nabla}$ ile, $\bar{M}$ üzerinde $\bar{g}$ metriğine göre Levi-Civita konneksiyonu gösterilsin. Bu durumda, $\forall X,Y \in \chi(TM)$ ve $V \in \chi(tr(TM))$ olmak üzere *Gauss - Weingarten formülleri,*

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X,Y) \\ \bar{\nabla}_X V &= -A_V X + \nabla^t_X V \end{aligned} \tag{1.2}$$

ile verilir. Burada $\nabla_X Y$ ve $A_V X$ vektör alanları $\chi(TM)$ ye, $h(X,Y)$ ve $\nabla^t_X V$ vektör alanları ise $\chi(tr(TM))$ ye aittir. ∇ ise M üzerinde bir torsiyonsuz indirgenmiş lineer konneksiyondur. h ve A_V sırasıyla M nin $\bar{M}$ deki *ikinci temel formu* ve *şekil operatörü* olarak adlandırılır. ∇^t_X, $tr(TM)$ de indirgenmiş lineer konneksiyondur (Duggal ve Bejancu, 1996).

Lokal olarak bir $U \subset M$ komşuluğu üzerinde, Teorem 1.3.2.1. deki şartları sağlayan $\{\xi, N\}$ kesitlerive $\forall X,Y \in \chi(TM|_U)$ için, bir simetrik bilineer form B ve 1-form τ aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \bar{g}\left(h(X,Y),\xi\right) \\ \tau(X) &= \bar{g}(\nabla^t_X N,\xi). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + B(X,Y)N \\ \bar{\nabla}_X N &= -A_N X + \tau(X)N \end{aligned}$$

eşitlikleri *lokal Gauss Weingarten formülleri* olarak adlandırılır. B ye M nin *lokal ikinci temel formu* denir. Ayrıca $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyon olduğundan, $\forall X \in \chi(TM|_U)$ için,

$$B(X,\xi) = 0$$

olur (Duggal ve Şahin, 2010).

Önerme 1.3.3.1. $S(TM)$ ve $S(TM)'$, M üzerinde screen distribüsyonlar olsunlar. h ve h' de sırasıyla $tr(TM)$ ve $tr(TM)'$ ye göre ikinci temel formlar olsunlar. Bu durumda bir $U \subset M$ komşuluğunda $B = B'$ dür yani, M nin lokal ikinci temel formları screen distribüsyonun seçiminden bağımsızdır.

Sonuç 1.3.3.1. Bir lightlike hiperyüzeyin ikinci temel formu dejeneredir (Duggal ve Şahin, 2010).

Lightlike manifoldlarda bir başka ikinci temel form ve dolayısıyla farklı bir şekil operatörü şu şekilde tanımlanır:

P dönüşümü, $\chi(TM)$ nin $\chi(S(TM))$ üzerine bir izdüşümü olsun. Bu durumda, $W \in \chi(TM^{\perp})$ ve $\forall X, Y \in \chi(TM)$ için,

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + h^*(X, PY)$$
$$\nabla_X W = -A^*_W X + \nabla^{*t}_X W$$

yazılabilir. Burada $\nabla^*_X Y$ ve $A^*_W X$ vektör alanları $\chi\left(S(TM)\right)$ ye, $h^*\left(X, Y\right)$ ve $\nabla^{*t}_X W$ vektör alanları ise $\chi\left(TM^{\perp}\right)$ e aittir. ∇^* ise $S(TM)$ üzerinde bir indirgenmiş lineer konneksiyondur. h^* ve A^*_W sırasıyla $S(TM)$ nin *screen ikinci temel formu* ve *screen şekil operatörü* olarak adlandırılır. Benzer şekilde, $\forall X, Y \in \chi(TM)$ için,

$$C(X, PY) = \bar{g}\left(h^*(X, PY), N\right)$$
$$\varepsilon(X) = \bar{g}(\nabla^{*t}_X \xi, N).$$

Bu durumda $\varepsilon(X) = -\tau(X)$ olup,

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + C(X, PY)\xi$$
$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X - \tau(X)\xi$$

dir. $C(X,PY)$ ye $S(TM)$ nin *lokal screen ikinci temel formu* denir. M ve $S(TM)$ nin lokal ikinci temel formları şekil operatörleri ile aşağıdaki gibi ilişkilidir;

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= g(A^*_\xi X,Y) \\ C(X,PY) &= g(A_N X,PY) \end{aligned} \qquad (1.4)$$

öyle ki $\bar{g}(A^*_\xi X,N)=0$ ve $\bar{g}(A_N Y,N)=0$ dır (Duggal ve Şahin, 2010).

Önerme 1.3.3.2.

1. ∇^* konneksiyonu $S(TM)$ üzerinde bir metrik konneksiyondur.
2. ∇ konneksiyonu M üzerinde,

$$(\nabla_X g)(Y,Z)=B(X,Y)\bar{g}(Z,N)+B(X,Z)\bar{g}(Y,N)$$

eşitliğini sağlar (Duggal ve Şahin, 2010).

Önerme 1.3.3.3. $(\bar{M},\bar{g})$ yarı - Riemann manifoldunda bir lightlike hiperyüzey $(M,g,S(TM))$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır;

1. M nin şekil operatörü A_N , bir sıfır eigen değerine sahiptir.
2. $S(TM)$ nin screen ikinci temel formu da dejeneredir.
3. $S(TM)$ nin screen şekil operatörü A^*_ξ, M nin ikinci temel formuna göre simetriktir.
4. $S(TM)$ üzerinde ∇^* konneksiyonu bir metrik konneksiyondur.
5. $\xi \in \chi(RadTM)$ kesitinin integral eğrisi, sırasıyla ∇ ve $\bar{\nabla}$ konneksiyonlarına göre, M ve $\bar{M}$ de bir null geodeziktir (Duggal ve Şahin, 2010).

Örnek 1.3.2.1. $(\mathbb{R}^4_2,\bar{g})$ 4 boyutlu yarı Öklidyen uzay olmak üzere, $\left\{\partial_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ $i=0,\dots,3$ bazına göre,

$$\bar{g}(x,y) = -\sum_{i=0}^{1} x_i y_i + \sum_{j=2}^{3} x_j y_j \text{ öyle ki } x = \sum_{i=0}^{4} x_i \partial_i, \; y = \sum_{i=0}^{4} y_i \partial_i$$

ile verilsin. $x_0 = x_1 + \sqrt{2}\sqrt{(x_2)^2 + (x_3)^2}$ ile verilen M hiperyüzeyi, R_2^4 de bir lightlike hiperyüzeydir. $RadTM$,

$$\xi = \sqrt{(x_2)^2 + (x_3)^2}\,(\partial_0 - \partial_1) + \sqrt{2}\,(x_2\partial_2 + x_3\partial_3)$$

vektör alanı tarafından gerilir. Ayrıca,

$$N = \frac{1}{4\left((x_2)^2 + (x_3)^2\right)}\left\{\sqrt{(x_2)^2 + (x_3)^2}\,(-\partial_0 + \partial_1) + \sqrt{2}\,(x_2\partial_2 + x_3\partial_3)\right\}$$

bulunur. $S(TM)$ ise,

$$W_1 = \partial_0 + \partial_1$$
$$W_2 = -x_3\partial_2 + x_2\partial_3$$

vektör alanları tarafından gerilir (Duggal ve Şahin, 2010).

1.3.4. Screen Konformal Lightlike Hiperyüzeyler

Bilinmektedir ki bir non-dejenere altmanifoldun ikinci temel formu ve şekil operatörü, metrik tensör dolayısıyla ilişkilidir. Buna karşın lightlike hiperyüzeylerde, M ve $S(TM)$ nin ikinci temel formları ve şekil operatörleri arasında karşılıklı bir ilişki vardır. Bu nedenle, lightlike hiperyüzeylerin geometrisi bir screen distribüsyon seçimine bağlıdır. Burada dikkat edilmesi gereken, $S(TM)$ non-dejenere olduğundan geometrisi klasik anlamdadır.

Tanım 1.3.4.1. $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı - Riemann manifoldunda bir lightlike hiperyüzey $(M, g, S(TM))$ olsun. Bu hiperyüzeye *lokal screen konformaldir* denir eğer, bir $U \subset M$ komşuluğunda, M ve $S(TM)$ üzerindeki şekil operatörleri için,

$$A_N = \phi A_\xi^* \tag{1.5}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir diferensiyellenebilir ϕ dönüşümü varsa.

Özel olarak ϕ dönüşümü sabit ise M ye *screen homotetiktir* denir. $U = M$ olması durumunda screen konformallik globaldir (Duggal ve Şahin, 2010).

Teorem 1.3.4.1. Bir $(\bar{M}, \bar{g})$ Lorentz manifoldunda bir lightlike hiperyüzey (M, g) olmak üzere,

$$(\widetilde{TM}) = TM/RadTM$$

ve $\pi: \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(\widetilde{TM})$ izdüşümü verilsin. Burada $\tilde{X} = \pi(X)$ ve $g(\tilde{X}, \tilde{Y}) = g(X, Y)$ dir. Ayrıca $V \in \Gamma(RadTM)$ ve $X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere,

$$\widetilde{A_V}: \Gamma(\widetilde{TM}) \longrightarrow \Gamma(\widetilde{TM})$$

öyle ki $\tilde{A}_V(\tilde{X}) = -\pi\left(\bar{\nabla}_X V\right)$ ile tanımlanan dönüşüm, self adjoint bir dönüşümdür. $S(TM)$ seçilen bir screen distribüsyon ve $P_S : \Gamma(TM) \to \Gamma(S(TM))$ karşılık gelen izdüşüm olsun. $V \in \Gamma(RadTM)$ null normal kesiti için,

$$A_V = A_V^* |_{S(TM)} : \Gamma(S(TM)) \to \Gamma(S(TM))$$

tanımlansın öyle ki A_V^*, $S(TM)$ üzerindeki şekil operatörüdür. $\tilde{P}_S(\tilde{X}) = P_S(X)$ olacak şekilde bir $\tilde{P}_S : \Gamma(\widetilde{TM}) \longrightarrow \Gamma(S(TM))$ dönüşümü verildiğinde, bu dönüşüm bir vektör demeti izomorfizmi olup,

$$\tilde{P}_S(\tilde{A}_V(\tilde{X})) = \tilde{P}_S(-\pi\left(\bar{\nabla}_X V\right)) = P_S(-\nabla_X V) = P_S(-\bar{\nabla}_{P_S(X)} V) = A_V\left(P_S(X)\right)$$

dir (Global Null Splitting Theorem, Duggal ve Şahin, 2010).

1.3.5. $\mathbb{R}_1^3$ ve $\mathbb{R}_1^4$ Lorentz Uzaylarında Lightlike Hiperyüzeyler

$\bar{g}(x,y) = -\sum_{i=0}^{v-1} x_i y_i + \sum_{j=v}^{m+1} x_j y_j$ metriği ile verilen yarı Öklid uzayı, $\left(\mathbb{R}_v^{m+2}, \bar{g}\right)$ ile gösterilsin. Bu uzayda bir M hiperyüzeyi,

$$x_A = f_A(u_0,\dots,u_m);\ rank\left[\frac{\partial f_A}{\partial u_a}\right] = m+1,\ A = 0,\dots,m+1,\ a = 0,\dots,m$$

eşitlikleri ile verilsin öyle ki f_A fonksiyonları bir $U \subset M$ komşuluğunda diferensiyellenebilirdir. Bu durumda,

$$D_A = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial u_0} & \cdots & \frac{\partial f_{A-1}}{\partial u_0} & \frac{\partial f_{A+1}}{\partial u_0} & \cdots & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial u_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_0}{\partial u_m} & \cdots & \frac{\partial f_{A-1}}{\partial u_m} & \frac{\partial f_{A+1}}{\partial u_m} & \cdots & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial u_m} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

determinantı tanımlansın (Duggal ve Bejancu, 1996).

Teorem 1.3.5.2 $\mathbb{R}_v^{m+2}$ de bir M hiperyüzeyi lightlike hiperyüzeydir ancak ve ancak, her $U \subset M$ komşuluğunda aşağıdaki eşitlik sağlanıyorsa:

$$\sum_{i=0}^{v-1}(D_i)^2 = \sum_{j=v}^{m+1}(D_j)^2 .$$

Ayrıca $RadTM = TM^{\perp}$ distribüsyonu lokal olarak, $\xi = \sum_{i=0}^{v-1}(-1)^i D_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=v}^{m+1}(-1)^{j-1} D_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ vektör alanı tarafından gerilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Durum 1. R_1^3 uzayında bir lightlike yüzey M,

$$x_0 = f_0(u_0,u_1),\ x_1 = f_1(u_0,u_1),\ x_2 = f_2(u_0,u_1)$$

eşitlikleri ile verilsin. O halde TM,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_0} = \frac{\partial f_A}{\partial u_0}\frac{\partial}{\partial x_A},\ \frac{\partial}{\partial u_1} = \frac{\partial f_A}{\partial u_1}\frac{\partial}{\partial x_A},\ A=0,1,2 \right\} \tag{1.7}$$

vektör alanları ve $TM^{\perp}$,

$$\begin{aligned} \xi &= D_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + D_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - D_2 \frac{\partial}{\partial x_2} = a\frac{\partial}{\partial u_0} + b\frac{\partial}{\partial u_1} \\ a &= \frac{1}{D_0}\left\{ D_1 \frac{\partial f_2}{\partial u_1} + D_2 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right\},\ b = -\frac{1}{D_0}\left\{ D_1 \frac{\partial f_2}{\partial u_0} + D_2 \frac{\partial f_1}{\partial u_0} \right\} \end{aligned} \tag{1.8}$$

vektör alanı tarafından gerilir. $tr(TM)$ ve $S(TM)$ vektör demetleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2(D_0)^2}\left\{ -D_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + D_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - D_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}, \\ W &= D_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + D_1 \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial f_0}{\partial u_0}\frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial f_0}{\partial u_1}\frac{\partial}{\partial u_0} \end{aligned} \tag{1.9}$$

vektör alanları tarafından gerilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Durum 2. R_1^4 uzayında bir lightlike yüzey M,

$$x_A = f_A(u_0, u_1, u_2),\ A = 0,1,2,3$$

eşitlikleri ile verilsin. O halde TM,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u_0} = \frac{\partial f_A}{\partial u_0}\frac{\partial}{\partial x_A},\ \frac{\partial}{\partial u_1} = \frac{\partial f_A}{\partial u_1}\frac{\partial}{\partial x_A},\ A=0,1,2 \right\}$$

vektör alanları ve $TM^{\perp}$,

$$\xi = D_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + D_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - D_2 \frac{\partial}{\partial x_2} = a \frac{\partial}{\partial u_0} + b \frac{\partial}{\partial u_1}$$
$$a = \frac{1}{D_0}\left\{ D_1 \frac{\partial f_2}{\partial u_1} + D_2 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right\},\ b = -\frac{1}{D_0}\left\{ D_1 \frac{\partial f_2}{\partial u_0} + D_2 \frac{\partial f_1}{\partial u_0} \right\} \tag{1.10}$$

vektör alanı tarafından gerilir. $tr(TM)$ ve $S(TM)$ vektör demetleri sırasıyla,

$$N = \frac{1}{2(D_0)^2}\left\{ -D_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + D_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - D_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right\},$$
$$W = D_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + D_1 \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial f_0}{\partial u_0}\frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial f_0}{\partial u_1}\frac{\partial}{\partial u_0} \tag{1.11}$$

vektör alanları tarafından gerilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

1.3.6. Lightlike Altmanifoldlar

$(\bar{M}, \bar{g})$, üzerinde tanımlı sabit indeksli $\bar{g}$ metriği ile $m+n$ boyutlu bir yarı Riemann manifoldu olsun. M , $\bar{M}$ de bir m boyutlu altmanifold olmak üzere $p \in M$ için,

$$T_pM^{\perp} = \left\{ v_p \in T_p\bar{M} \ : \ \bar{g}_p\left(v_p, w_p\right) = 0,\ \forall w_p \in T_pM \right\}$$

alt uzayı düşünülsün. M lightlike ise

$$RadT_pM = T_pM \cap T_pM^{\perp} \neq \{0\},\ \forall p \in M$$

radikal distribüsyonu mevcuttur. $RadTM$ nin rankı $r > 0$ olmak üzere M ye bir *r-lightlike altmanifold* denir. M için aşağıdaki 4 durum mevcuttur;

1. $0 < r < \min\{m,n\} \Rightarrow$ *r-lightlike altmanifold,*
2. $1 < r = n < m \Rightarrow$ *ko-izotropik altmanifold,*
3. $1 < r = m < n \Rightarrow$ *izotropik altmanifold,*
4. $1 < r = m = n \Rightarrow$ *tamamen lightlike altmanifold* (Duggal ve Şahin, 2010).

Bu tezde *r-lightlike altmanifold* olması durumu göz önüne alınacaktır. Bu durumda, $RadTM$ nin TM deki tümleyen distribüsyonu $S(TM)$ ile gösterilir ve *screen distribüsyon* adını alır. Açıkça $S(TM)$, $\bar{g}$ metriğine göre non-dejenere alt uzaydır. Dolayısıyla aşağıdaki ortogonal direkt toplam yazılabilir;

$$TM = RadTM \oplus_{ort} S(TM).$$

$TM^{\perp} = \bigcup_{p\in M} T_pM^{\perp}$ olmak üzere, $RadTM = TM \cap TM^{\perp}$ dir. Diğer yandan, $RadTM$ nin $TM^{\perp}$ de tümleyen vektör demeti $S(TM^{\perp})$ ile gösterilir ve screen transversal vektör demeti olarak adlandırılır. Bu durumda aşağıdaki ortogonal direkt toplam yazılabilir;

$$TM^{\perp} = RadTM \oplus_{ort} S(TM^{\perp}).$$

$S(TM^{\perp})$, $\bar{g}$ metriğine göre non-dejenere olduğundan,

$$T\bar{M}\,|_M = S(TM) \perp S(TM)^{\perp}$$

yazılabilir öyle ki $S(TM)^{\perp}$, $T\bar{M}$ de $S(TM)$ ye dik tümleyen vektör demetidir.

Bilinmektedir ki bir non-dejenere altmanifoldda, normal demet tanjant demete dik ve tümleyendir. Ancak yukarıda görülmektedir ki, lightlike altmanifoldlarda normal demet tanjant demete diktir ancak tümleyen değildir. Bu iki demetin arakesiti $RadTM$ null vektör demetidir. Bu ise $\bar{M}$ deki bir vektörü, M de bir teğet ve bir normal bileşen olarak ayrılamayacağı anlamına gelir. Problemi çözmek adına $T\bar{M}$, 4 tane kesişmeyen tümleyen vektör demetine ayrılır (Duggal ve Şahin, 2010).

Teorem 1.3.6.1. $\left(M, g, S(TM), S(TM^{\perp})\right)$, $\bar{M}$ de bir r-lightlike altmanifold olsun. U, M nin bir koordinat komşuluğu ve $\{\xi_i\}$ $\left(i = 1,\ldots,r\right)$, $RadTM$ nin bir bazı olsun. Bu durumda $\{N_i\}$ diferensiyellenebilir kesitleri mevcuttur öyle ki,

$$\bar{g}\left(\xi_i, N_j\right) = \delta_{ij}$$
$$\bar{g}\left(N_i, N_j\right) = 0, \quad i, j = 1,\ldots,r$$

sağlanır (Duggal ve Şahin, 2010).

$ltr(TM) = Span\{N_i\}$ ye *lightlike transversal vektör demeti* denir. $tr(TM) = ltr(TM) \oplus_{ort} S(TM^{\perp})$ olup,

$$T\bar{M}|_M = TM \oplus tr(TM) = S(TM) \perp S(TM^{\perp}) \perp \left(RadTM \oplus ltr(TM)\right)$$

yazılabilir. Bu durumda M boyunca $\bar{M}$ üzerinde bir quasi-ortonormal baz,

$$\left\{\xi_1,...,\xi_r, N_1,...,N_r, X_{r+1},...,X_m, W_{r+1},...,W_n\right\}$$

şeklindedir. Burada $\left\{\xi_1,...,\xi_r\right\}$, $RadTM$ nin bir lightlike bazı, $\left\{N_1,...,N_r\right\}$, $ltr(TM)$ nin bir lightlike bazı, $\left\{X_{r+1},...,X_m\right\}$ ve $\left\{W_{r+1},...,W_n\right\}$ sırasıyla $S(TM)$ ve $S(TM^{\perp})$ in ortonormal bazlarıdır. $\left(M, g, S(TM), S(TM^{\perp})\right)$, $\bar{M}$ de bir r-lightlike altmanifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X,Y) \\ \bar{\nabla}_X V &= -A_V X + \nabla^t_X V \end{aligned} \tag{1.12}$$

eşitlikleri sağlanır öyle ki burada $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu, $\nabla_X Y$ ve $\nabla^t_X V$ sırasıyla, M ve $tr(TM)$ üzerinde tanımlı lineer konneksiyonlardır. ∇, torsiyonsuz indirgenmiş lineer konneksiyondur. Ayrıca, $A_V X$ ve $h(X,Y)$ de sırasıyla M üzerindeki şekil operatörü ve ikinci temel formdur (Duggal ve Şahin, 2010).

$S(TM^{\perp}) \neq \{0\}$ olmak üzere, L ve S sırasıyla, $tr(TM)$ den $ltr(TM)$ ve $S(TM^{\perp})$ üzerine tanımlı izdüşümler olsunlar. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &h^l(X,Y) = L(h(X,Y)) \text{ ve } h^s(X,Y) = S(h(X,Y)) \\ &h(X,Y) = h^l(X,Y) + h^s(X,Y) \end{aligned} \tag{1.13}$$

ile tanımlanan h^l ve h^s sırasıyla *lightlike ikinci temel form* ve *screen ikinci temel form* adını alır (Duggal ve Şahin, 2010).

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Spacelike Altmanifoldlar Boyunca Lightlike Hiperyüzeyler

$x=(x_0,x_1,...,x_n), y=(y_0,y_1,...,y_n)\in \mathbb{R}^{n+1}$ olmak üzere x ve y nin pseudo skalar çarpımı,

$$\langle x,y\rangle=-x_0y_0+\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda $(\mathbb{R}^{n+1},\langle,\rangle)$ ikilisine Lorentz-Minkowski $n+1$ uzayı denir ve $\mathbb{R}_1^{n+1}$ ile gösterilir. Sıfırdan farklı bir $x\in\mathbb{R}_1^{n+1}$ vektörüne spacelike, timelike veya lightlike denir eğer, sırasıyla $\langle x,x\rangle>0, \langle x,x\rangle<0$ veya $\langle x,x\rangle=0$ ise. Bir vektörün normu $\|x\|=\sqrt{|\langle x,x\rangle|}$ ile tanımlanır. Tepe noktası a olan light-koni,

$$LC_a=\left\{x=(x_0,x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x-a,x-a\rangle=0\right\} \tag{2.2}$$

ile verilir. Burada $LC^*=LC_0\setminus\{0\}$ gösterimi kullanılacaktır.

$U\subset\mathbb{R}^s$ olmak üzere $X : U\to\mathbb{R}_1^{n+1}$, ek boyutu k olan bir spacelike embedding olsun. Bu durumda $s+k=n+1$ dir. $M=X(U)$ gösterimi kullanılacak olursa, X dönüşümünün spacelike olması, her p noktasında T_pM tanjant uzayının bir spacelike alt uzay olması demektir. Yani bu alt uzay, $\forall p\in M$ için tamamen spacelike vektörlerden oluşur. Ayrıca $\forall p=X(u)$ ve $u=(u_1,...,u_s)$ için T_pM uzayı, $\left\{X_{u_1}(u),...,X_{u_s}(u)\right\}$ vektör alanları tarafından gerilir (Izumiya ve Sato, 2013).

Bir $p\in\mathbb{R}_1^{n+1}$ noktasında pseudo normal uzay N_pM ile gösterilir. T_pM bir spacelike alt uzay olduğundan, N_pM pseudo normal uzay, $T_p\mathbb{R}_1^{n+1}$ de bir k boyutlu Lorentz alt uzayıdır. N_pM de aşağıdaki gibi iki çeşit pseudo-küre mevcuttur,

$$N_p(M;-1)=\{v\in N_pM \mid \langle v,v\rangle=-1\}$$
$$N_p(M;1)=\{v\in N_pM \mid \langle v,v\rangle=1\}$$

dolayısıyla M üzerinde iki çeşit küresel demet aşağıdaki gibidir:

$$N(M;-1)=\bigcup_{p\in M} N_p(M;-1)$$
$$N(M;1)=\bigcup_{p\in M} N_p(M;1)$$

$\mathbb{R}_1^{n+1}$ de M altmanifoldu için Whitney toplam ayrışımı,

$$T\mathbb{R}_1^{n+1}|_M = TM \oplus NM$$

biçimindedir (Izumiya ve Sato, 2013).

$e_0=(1,0,...,0)$ M boyunca birim timelike vektör alanı olmak üzere, $\forall v\in T\mathbb{R}_1^{n+1}|_M$ için $v=v_1+v_2$ yazılabilir öyle ki $v_1\in T_pM$ ve $v_2\in N_pM$. Eğer v bir timelike vektör ise v_2 timelike vektördür. $\pi_{NM}\ :\ T\mathbb{R}_1^{n+1}|_M\to NM$ bir izdüşüm olmak üzere, $\pi_{NM}(e_0)$ M boyuca bir timelike normal vektör alanıdır. Yani her zaman bir $n^T(u)\in N_p(M;-1)$ birim timelike normal vektör alanı mevcuttur. O halde N_pM de bir $k-1$ boyutlu pseudo-ortonormal tümleyen alt uzay $\left(Sp\{n^T(u)\}\right)^{\perp}$ olacaktır ve bir pseudo-normal kesit $n^S(u)\in \left(Sp\{n^T(u)\}\right)^{\perp}\cap N(M;1)$ seçilebilir. Bu durumda, $\langle n^S,n^S\rangle=1$ ve $\langle n^S,n^T\rangle=0$ olur. Bir $k-2$ boyutlu spacelike birim küre,

$$N_1(M)_p\left[n^T\right]=\left\{\xi\in N_p(M;1) \mid \langle \xi,n^T\rangle=0\right\} \tag{2.3}$$

mevcuttur. NM üzerinde birim spacelike $k-2$ küresel demet,

$$N_1(M)\left[n^T\right]=\bigcup_{p\in M} N_1(M)_p\left[n^T\right] \tag{2.4}$$

ile tanımlanır. M boyunca her n^T birim normal vektör alanı için keyfi bir $n^S \in N_1(M)_p\left[n^T\right]$ birim spacelike normal vektör alanı bulunabilir. Açıkça $n^T(u) \pm n^S(u)$ lightlike vektörlerlerdir. Burada $n^T + n^S$, M boyunca bir lightlike normal vektör alanı olarak alınacaktır.

$$LG\left(n^T, n^S\right) : U \to LC^*$$

öyle ki $LG\left(n^T, n^S\right)(u) = n^T(u) + n^S(u)$ ile tanımlanan dönüşüm $M = X(U)$ nun $\left(n^T, n^S\right)$ çiftine göre *lightkoni Gauss dönüşümü* olarak adlandırılır.

X_{u_i} ler spacelike vektör alanları olduklarından, $M = X(U)$ üzerinde bir Riemann metriği, yani lightkoni birinci temel form, $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} du_i du_j$ öyle ki $\tilde{g}_{ij} = \langle X_{u_i}, X_{u_j} \rangle$ ile tanımlanır. Ayrıca lightkoni ikinci temel form da

$$h_{ij}\left(n^T, n^S\right)(u) = \langle -\left(n^T + n^S\right)_{u_i}(u), X_{u_j}(u) \rangle$$

ile verilir (Izumiya ve Sato, 2013).

Tanım 2.1.1. $LG\left(n^T\right) : N_1(M)\left[n^T\right] \to LC^*$ öyle ki $LG\left(n^T\right)(u,\xi) = n^T(u) + \xi$ ile tanımlanan dönüşüme $N_1(M)\left[n^T\right]$ küresel demetinin lightkoni Gauss görüntüsü denir (Izumiya ve Sato, 2013).

Benzer şekilde, $N_1(M)\left[n^T\right]$ nin De Sitter ve Hiperbolik Gauss dönüşümleri de sırasıyla, $DG\left(n^T\right)(u,\xi) = \xi$ ve $HG\left(n^T\right)(u,\xi) = n^T(u)$ olarak tanımlanabilir.

Tanım 2.1.2. $p = X(u)$ olmak üzere

$$LH_M\left(n^T\right) : N_1(M)\left[n^T\right] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_1^{n+1}$$

öyle ki,

$$LH_M\left(p,\xi,t\right)=X(u)+t\left(n^T+\xi\right)\left(u\right)=X(u)+tLG\left(n^T\right)\left(u,\xi\right) \tag{2.5}$$

ile tanımlanan hiperyüzeye M boyunca n^T ye ilişkin lightlike hiperyüzey denir (Izumiya ve Sato, 2013).

2.2. Spacelike Altmanifoldlar Boyunca Lightlike Hiperyüzeylerin Screen İkinci Temel Formu

$\mathbb{R}_1^{n+1}$ de bir spacelike altmanifold $M=X(U)$ olmak üzere, Tanım 2.1.2. de verilen şekilde, M boyunca bir lightlike hyperyüzey düşünülsün. İşlem kolaylığı açısından $LH_M\left(u,\xi,t\right)=Y\left(u,\xi,t\right)$ gösterimi kullanılacaktır. $\tilde{U}=N_1(M)[n^T]\times\mathbb{R}$ olmak üzere, bu hiperyüzey $Y(\tilde{U})=\tilde{M}$ ile ifade edilsin. Görülebilir ki $boyT_P\tilde{M}=n$ dir. $T_P\tilde{M}$ nin bir bazı,

$$\begin{aligned}
&Y_{u_i}(u,\xi,t)=X_{u_i}(u)+t\left(n_{u_i}^T+\xi_{u_i}\right)\left(u\right) \quad i=1,\dots,s\\
&Y_{\xi_m}(u,\xi,t)=t\xi_{\xi_m}\left(u\right) \quad m=1,\dots,k-2\\
&Y_t(u,\xi,t)=\left(n^T+\xi\right)\left(u\right)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

olarak hesaplanır öyle ki $\left\{u_i\right\}\in U$ $\left(i=1,\dots,s\right)$ ve $\left\{\xi_m\right\}\in N_1(M)[n^T]$ $\left(m=1,\dots,k-2\right)$. Burada Y_{u_i} ve Y_{ξ_m} spacelike, Y_t ise lightlike vektör alanlarıdır. Yine işlem kolaylığı açısından $a_1=u_1,\dots,a_s=u_s,a_{s+1}=\xi_1,\dots,a_{n-1}=\xi_{k-2},a_n=t$ gösterimleri kullanılsın. $\tilde{M}=Y(\tilde{U})$ üzerinde bir pseudo Riemann metriği, yani birinci temel form, $ds^2=\sum_{i=1}^{n}\tilde{g}_{ij}da_ida_j$ öyle ki $\tilde{g}_{ij}=\langle Y_{a_i},Y_{a_j}\rangle$ ile tanımlanır. $V\in Rad(T\tilde{M})$ ve $\tilde{M}$ üzerinde bir screen distribüsyon $S(T\tilde{M})=Sp\left\{Y_{u_i},Y_{\xi_m}\right\}$ olsun. Bu durumda, Teorem 1.3.4.1. göz önünde bulundurulduğunda, $S(T\tilde{M})$ nin lightkoni ikinci temel formu;

$$\tilde{h}_{ij}\left(n^T\right)=\langle-\pi\left(V_{a_i}\right),Y_{a_j}\rangle \quad i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,n-1 \tag{2.7}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.2.1. $S(T\tilde{M})$ nın Lightkoni Weingarten eşitlikleri aşağıdaki gibidir:

$$\pi\left(V_{a_i}\right)=-\sum_{j=1}^{n-1}\tilde{h}_i^j\left(n^T\right)Y_{a_j},\ i=1,...,n \tag{2.8}$$

öyle ki $\tilde{h}_i^j\left(n^T\right)=\left(\tilde{h}_{ik}\left(n^T\right)\right)\left(\tilde{g}^{kj}\right)$, $\tilde{g}^{kj}=\left(\tilde{g}_{kj}\right)^{-1}$ ve π dönüşümü $\chi\left(T\tilde{M}\right)$ nin $\chi\left(S(T\tilde{M})\right)$ üzerine bir izdüşümüdür.

İspat

$$\pi\left(V_{a_i}\right)=\sum_{j=1}^{n-1}\Gamma_i^jY_{a_j}=\sum_{l=1}^{s}\Gamma_i^lY_{a_l}+\sum_{m=s+1}^{n-1}\Gamma_i^mY_{a_m}$$

şeklinde $S(T\tilde{M})$ nın bazları cinsinden yazıldığında, (2.7) eşitliği kullanılarak,

$$-\tilde{h}_{i\alpha}\left(n^T\right)=\langle\pi\left(V_{a_i}\right),Y_{a_\alpha}\rangle=\sum_{l=1}^{s}\Gamma_i^l\langle Y_{a_l},Y_{a_\alpha}\rangle=\sum_{l=1}^{s}\Gamma_i^l\tilde{g}_{l\alpha}$$

$$\tilde{h}_i^l=\sum_{\alpha=1}^{s}\tilde{h}_{i\alpha}\tilde{g}^{\alpha l}=-\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{l=1}^{s}\Gamma_i^l\left(\tilde{g}_{l\alpha}\tilde{g}^{\alpha l}\right)=-\Gamma_i^l$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\tilde{h}_i^m=-\Gamma_i^m$ olacaktır O halde,

$$\pi\left(V_{a_i}\right)=-\sum_{j=1}^{n-1}\tilde{h}_i^j\left(n^T\right)Y_{a_j} \tag{2.9}$$

olacaktır.

Sonuç 2.2.1. $\tilde{M}$ bir spacelike altmanifold boyunca lightlike hiperyüzey olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik $S(T\tilde{M})$ ve M nin lightkoni ikinci temel formları arasındaki ilişkiyi verir;

$$\tilde{h}_{i\alpha} = \sum_{\beta=1}^{s} \tilde{h}_i^{\beta} \left(g_{\alpha\beta} - 2t h_{\alpha\beta} + \frac{t^2}{\lambda^2} \sum_{l,q=1}^{n-1} \tilde{h}_{\beta}^{l} \tilde{h}_{\alpha}^{q} \tilde{g}_{lq} \right) \tag{2.10}$$

öyle ki $i = 1,\dots,n, \alpha = 1,\dots,s$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$.

İspat. (2.9) eşitliğinden,

$$-\pi\left(V_{a_i}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{h}_i^{j} Y_{a_j} = \sum_{\beta=1}^{s} \tilde{h}_i^{\beta} Y_{a_\beta} + \sum_{x=s+1}^{n-1} \tilde{h}_i^{x} Y_{a_x}$$

dir. $i = 1,\dots,n$, $\alpha = 1,\dots,s$ için $\tilde{h}_{i\alpha} = \langle -\pi\left(V_{a_i}\right), Y_{a_\alpha} \rangle$ ve $\langle Y_{a_x}, Y_{a_\alpha} \rangle = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_{i\alpha} &= \left\langle \sum_{\beta=1}^{s} \tilde{h}_i^{\beta} Y_{a_\beta} + \sum_{x=s+1}^{n-1} \tilde{h}_i^{x} Y_{a_x}, Y_{a_\alpha} \right\rangle \\
&= \sum_{\beta=1}^{s} \tilde{h}_i^{\beta} \left\langle X_{a_\beta} + t\left(n^T + \xi\right)_{a_\beta}, X_{a_\alpha} + t\left(n^T + \xi\right)_{a_\alpha} \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_{i\alpha} = \sum_{\beta=1}^{s} \tilde{h}_i^{\beta} (&\langle X_{a_\beta}, X_{a_\alpha} \rangle + t\langle \left(n^T + \xi\right)_{a_\beta}, X_{a_\alpha} \rangle + t\langle X_{a_\beta}, \left(n^T + \xi\right)_{a_\alpha} \rangle \\
&+ t^2 \langle \left(n^T + \xi\right)_{a_\beta}, \left(n^T + \xi\right)_{a_\alpha} \rangle)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Burada $\langle X_{a_\beta}, X_{a_\alpha} \rangle = g_{\alpha\beta}$, $\langle \left(n^T + \xi\right)_{a_\beta}, X_{a_\alpha} \rangle = -h_{\beta\alpha}$ ve $\langle X_{a_\beta}, \left(n^T + \xi\right)_{a_\alpha} \rangle = -h_{\alpha\beta}$ olduğu bilinmektedir. Diğer yandan $V \in RadT\tilde{M} = Sp\{Y_t\}$ olduğundan $V = \lambda\left(n^T + \xi\right)$ öyle ki $\lambda \in \mathbb{R}$ yazılabilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\lambda^2 \left\langle \left(n^T + \xi\right)_{a_\beta}, \left(n^T + \xi\right)_{a_\alpha} \right\rangle &= \langle V_{a_\alpha}, V_{a_\beta} \rangle = \langle \sum_{l=1}^{n-1} \tilde{h}_{\beta}^{l} Y_{a_l}, \sum_{q=1}^{n-1} \tilde{h}_{\alpha}^{q} Y_{a_q} \rangle \\
&= \sum_{l,q=1}^{n-1} \tilde{h}_{\beta}^{l} \tilde{h}_{\alpha}^{q} \tilde{g}_{lq} , \qquad (\alpha, \beta = 1,\dots,s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan değerler (2.11) denkleminde yerine yazıldığında istenilen eşitlik elde edilir.

2.3. Spacelike Altmanifoldlar Boyunca Screen Konformal Lightlike Hiperyüzeyler

Teorem 2.3.1. Bir spacelike altmanifold boyunca lightlike hiperyüzey $\tilde{M}$ screen konformaldir eğer, $\left(n^T - \xi\right)^i \neq 0$ ve $\dfrac{\partial\left(\xi \pm n^T\right)^i}{\partial a_j} = 0$ öyle ki $i \neq j$ $\left(i, j = 1,...,n\right)$ ise.

İspat. $\left(n^T - \xi\right)^i \neq 0$ ve $\dfrac{\partial\left(\xi \pm n^T\right)^i}{\partial a_j} = 0$ olsun. $\mathbb{R}_1^{n+1}$ üzerindeki iç çarpım ve konneksiyon sırasıyla, $\langle , \rangle$ ve $\bar{\nabla}$ ile gösterilsin. $N = \frac{1}{2}\left(\xi - n^T\right)$ ile verilen $N \in tr\left(TM\right)$ kesiti $\left\langle N, N\right\rangle = 0,$ $\left\langle N, Y_{u_i}\right\rangle = \left\langle N, Y_{\xi_m}\right\rangle = 0,$ $\left\langle N, Y_t\right\rangle = 1$ şartlarını sağlar. $X \in \chi\left(\tilde{M}\right)$ olmak üzere $B\left(X, Y_t\right) = 0$ olduğundan, $\bar{\nabla}_X Y_t = \nabla_X Y_t$ dir. Ayrıca $Y_t = \sum_{A=1}^{n}\left(n^T + \xi\right)^A \dfrac{\partial}{\partial a_A}$ ve $X = \sum_{j=1}^{n} x_j \dfrac{\partial}{\partial a_j}$ yazılabileceğinden,

$$\bar{\nabla}_X Y_t = \sum_{A=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial(n^T + \xi)^A}{\partial a_j}\frac{\partial}{\partial a_A}$$

elde edilir. $\dfrac{\partial(\xi + n^T)^i}{\partial a_j} = 0$, $i \neq j$ $\left(i, j = 1,...,n\right)$ olduğundan,

$$\bar{\nabla}_X Y_t = Z = \left(x_1 \frac{\partial(n^T + \xi)^1}{\partial a_1}, ..., x_n \frac{\partial(n^T + \xi)^n}{\partial a_n} \right)$$

öyle ki $Z \in \chi\left(T\tilde{M}\right)$ dir.

$$A^*_{Y_t} X + \tau(X) Y_t + \nabla_X Y_t = 0$$

olup, $\langle \bar{\nabla}_X N, Y_t \rangle = \tau(X)$ olduğundan ve (2.12) den, $\tau(X) = 0$ olduğu görülür.

$A^{*}_{Y_t} X = -Z$ elde edilir. $\forall X \in \chi\left(S(T\tilde{M})\right)$ için $X = \sum_{A=1}^{n} X^{A} \frac{\partial}{\partial a_A}$ yazılabilir. Bu durumda,

$$-(n^T + \xi)^1 X^1 + \sum_{A=2}^{n-1} (n^T + \xi)^A X^A = 0, \tag{2.12}$$

$$\nabla_{Y_t} X = \bar{\nabla}_{Y_t} X = \sum_{A=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(n^T + \xi\right)^i \frac{\partial X^A}{\partial a_i} \frac{\partial}{\partial a_A}$$

olur. $\frac{\partial(\xi + n^T)^i}{\partial a_j} = 0$, $i \neq j$ $\left(i, j = 1, \ldots, n\right)$ olduğundan, (2.12) denkleminin kısmi türevleri alınacak olursa, $\left\langle \nabla_{Y_t} X, Y_t \right\rangle = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $\nabla_{Y_t} X \in \chi\left(S(T\tilde{M})\right)$ ve $A_N Y_t = 0$ dır. $X, W \in \chi\left(S(T\tilde{M})\right)$ için,

$$g\left(A_N X, W\right) = C(X, W) = g(\nabla_X W, N) = \left\langle \bar{\nabla}_X W, N \right\rangle$$

dir. Ayrıca, $\left\langle \bar{\nabla}_X W, N \right\rangle = -\left\langle \bar{\nabla}_X N, W \right\rangle$ olduğundan,

$$\bar{\nabla}_X N = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} X^A \frac{\partial\left(n^T - \xi\right)^i}{\partial a_A} \frac{\partial}{\partial a_i}$$

yazılır. $\frac{\partial(\xi - n^T)^i}{\partial a_j} = 0,$ $i \neq j$ $\left(i, j = 1, \ldots, n\right)$ ve

$$g\left(A_N X, W\right) = -\langle \bar{\nabla}_X N, W \rangle$$

olduğundan, $A_N X = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} X^1 \frac{\partial\left(n^T - \xi\right)^1}{\partial a_1} \\ \vdots \\ X^n \frac{\partial\left(n^T - \xi\right)^n}{\partial a_n} \end{bmatrix}_{n \times 1}$ ve $A^{*}_{Y_t} X = -Z = -\begin{bmatrix} X^1 \frac{\partial\left(n^T + \xi\right)^1}{\partial a_1} \\ \vdots \\ X^n \frac{\partial\left(n^T + \xi\right)^n}{\partial a_n} \end{bmatrix}_{n \times 1}$ elde edilir.

Artık $A_N X = \Phi A^{*}_{Y_t} X$ eşitliğini sağlayan $\Phi = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$ dönüşümünü bulmak yeterli olacaktır α_{ij} katsayılarını belirlemek için,

$$\alpha_{11} X^1 \frac{\partial\left(n^T+\xi\right)^1}{\partial a_1} + \ldots + \alpha_{1n} X^n \frac{\partial\left(n^T+\xi\right)^n}{\partial a_n} = X^1 \frac{\partial\left(n^T-\xi\right)^1}{\partial a_1}$$

eşitliğinden görülebilir ki, ilk satırda α_{11} hariç diğer katsayılar sıfır olmalıdır. Benzer şekilde, diagonal çizgi üzerindekiler hariç, diğer katsayıların da sıfır olması gerektiği görülür. $\left\langle Y_t, N \right\rangle = 1$ olduğundan, $\alpha_{11} = -\frac{\left(n^T+\xi\right)^1}{\left(n^T-\xi\right)^1}$, $\alpha_{22} = \frac{\left(n^T+\xi\right)^2}{\left(n^T-\xi\right)^2}$,..., $\alpha_{nn} = \frac{\left(n^T+\xi\right)^n}{\left(n^T-\xi\right)^n}$ olarak hesaplanır. O halde,

$$\phi = -2 \begin{bmatrix} -\frac{\left(n^T+\xi\right)^1}{\left(n^T-\xi\right)^1} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\left(n^T+\xi\right)^2}{\left(n^T-\xi\right)^2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\left(n^T+\xi\right)^n}{\left(n^T-\xi\right)^n} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

bulunur.

Örnek 2.3.1. (u, r, ϑ, ϕ) Eddington - Finkelstein koordinatlarında Schwarzschild uzay zamanı,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) du^2 + 2du dr + r^2 d\Omega^2$$

metriği ile verilir öyle ki $m>0$ ve $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ sırasıyla standart kürenin kütlesi ve hacim elementidir. Bu kara delikte Olay Ufku,

$$r = r_0 = 2m$$

ile verilen hiperyüzeydir. Bu hiperyüzey, sabit $r = r_0$ yarıçaplı metrik küreler ve $L = 2\frac{\partial}{\partial u}$ lightlike vektör alanı tarafından üretilen lightlike hiperyüzeydir. Şimdi,

$$X(\vartheta,\phi) = (0, 2m, \vartheta, \phi)$$

spacelike altmanifoldu düşünülsün. Bu durumda teğet uzayın bir bazı $\left\{X_\vartheta = \frac{\partial}{\partial\vartheta}, X_\phi = \frac{\partial}{\partial\phi}\right\}$ olur. Görülebilir ki L vektör alanı, X spacelike altmanifoldunun normal uzayında yatar. O halde, normal uzayın bir bazı $\left\{\eta = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial r}, \zeta = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial r}\right\}$ olarak hesaplanır. ζ timelike ve η spacelike olduğundan, $\zeta = n^T$ ve $\eta = \xi$ olarak alınabilir. Dolayısıyla, X altmanifoldunun Lightkoni Gauss dönüşümü olan vektör alanı, $(n^T + \xi) = \frac{\partial}{\partial u}$ olacaktır. O halde Olay Ufku,

$$Y(u,\vartheta,\phi) = (0, 2m, \vartheta, \phi) + u(n^T + \xi)$$

biçiminde, bir spacelike altmanifold boyunca lightlike hiperyüzey olarak yazılabilir.

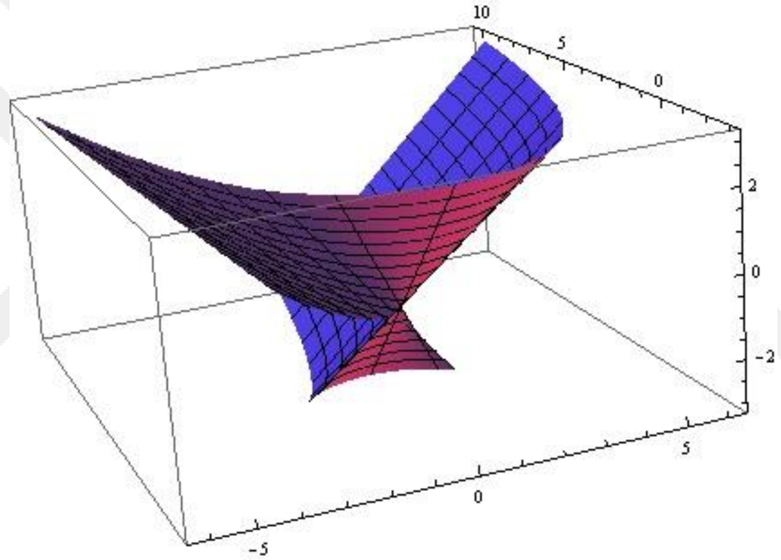
Örnek 2.3.2. $\langle x, y\rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$ metriği ile verilen $\mathbb{R}_1^3$ uzayında, $\alpha(u) = (0, u, u^2)$ spacelike eğrisi düşünülsün. Bu eğri üzerinde Frenet çatısı,

$$T = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(0,1,2u)$$
$$N = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(0,-2u,1)$$
$$B = (-1,0,0)$$

olarak hesaplanır. $B = n^T$ ve $N = \xi$ alındığında, $n^T + \xi = \left(-1, \frac{-2u}{\sqrt{1+4u^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}\right)$ olup, α boyunca lightlike yüzey,

$$Y(u,t) = \left(-t, u - \frac{2ut}{\sqrt{1+4u^2}}, u^2 + \frac{t}{\sqrt{1+4u^2}}\right) \quad t \in \mathrm{R}$$

olarak bulunur. Bu yüzey Şekil 1 de görülebilir.



Şekil 1. Lightlike yüzey

Bölüm 1.3.5. deki (1.7) eşitliği kullanılarak,

$$x_0 = -t \quad x_1 = u - \frac{2ut}{\sqrt{1+4u^2}} \quad x_2 = u^2 + \frac{t}{\sqrt{1+4u^2}}$$

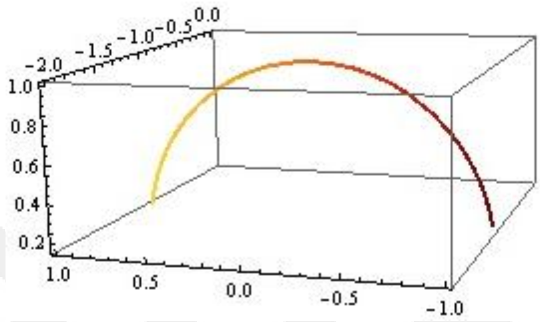
$$\frac{\partial}{\partial u} = \left(1 - \frac{2t}{\left(1+4u^2\right)^{3/2}}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(2u - \frac{4ut}{\left(1+4u^2\right)^{3/2}}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{2u}{\sqrt{1+4u^2}}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

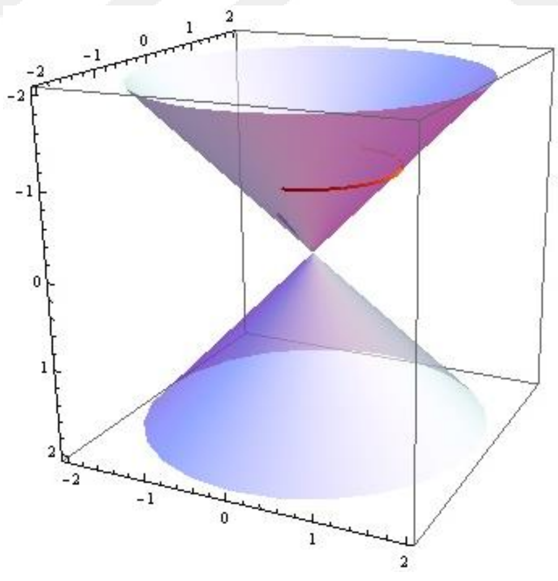
elde edilir. O halde,

$$n^T+\xi=-\frac{\partial}{\partial x_0}-\frac{2u}{\sqrt{1+4u^2}}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}\frac{\partial}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial t}$$

elde edilir. Şekil 2 ve Şekil 3 de $\alpha(u)$ eğrisinin lightkoni Gauss dönüşümü altındaki görüntüsü ve bu eğrinin lightkoni üzerinde resmedilişi görülmektedir.



Şekil 2. Lightkoni Gauss görüntüsü



Şekil 3. Lightkoni üzerinde Gauss dönüşümünün resmi

$\left\{\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial t}\right\}$ bazına göre $n^T+\xi=\left(\left(n^T+\xi\right)^1,\left(n^T+\xi\right)^2\right)=(0,1)$ şeklinde yeniden yazılır. $a_1=u$ ve $a_2=t$ olduğundan,

$$\frac{\partial\left(n^T+\xi\right)^1}{\partial a_2}=\frac{\partial\left(n^T+\xi\right)^2}{\partial a_1}=0$$

olur. Teorem 2.3.1. gereğince lightlike yüzey $Y(u,t)$ screen konformaldir.

Örnek 2.3.3. $\beta(u)=\left(0,\cos u,\sin u\right)$ spacelike eğrisi düşünülsün. Bu eğri üzerinde Frenet çatısı,

$$T=\left(0,-\sin u,\cos u\right)$$
$$N=(0,\cos u,\sin u)$$
$$B=(-1,0,0)$$

olarak hesaplanır. $B=n^T$ ve $N=\xi$ alındığında, $n^T+\xi=\left(-1,\cos u,\sin u\right)$ olarak hesaplanır. O halde β eğrisi boyunca lightlike yüzey,

$$Y(u,t)=\left(-t,\left(t+1\right)\cos u,\left(t+1\right)\sin u\right)$$

olur. Örnek 2.3.2. dekine benzer şekilde $n^T+\xi=(t+1)^2\frac{\partial}{\partial u}=\left((t+1)^2,0\right)$ olarak hesaplanır. $\frac{\partial\left(n^T+\xi\right)^1}{\partial a_2}\neq 0$ olduğundan Teorem 2.3.1. deki şartlar sağlanmaz.

Teorem 2.3.2. $\tilde{M}$ bir spacelike altmanifold boyunca bir lightlike hiperyüzey olsun. Bu durumda M nin Gauss dönüşümü $LG\left(n^T\right)$, $\tilde{M}$ de bir geodezik çizgidir.

İspat. $LG\left(n^T\right)=Y_t=\left(n^T+\xi\right)$ bir lightlike vektör olduğundan $\mathbb{R}_1^{n+1}$ de bir geodeziktir ve dolayısıyla $\bar{\nabla}_{Y_t}Y_t=0$ dır. Ayrıca $B(X,Y)=g(A_\xi^*X,Y)$ ve $A_\xi^*\xi=0,\quad \xi\in RadTM$ olduğu bilinmektedir (Duggal ve Şahin, 2010). Bu durumda,

$$\bar{\nabla}_{Y_t}Y_t=\tilde{\nabla}_{Y_t}Y_t+B(Y_t,Y_t)N$$

eşitliğinden, $\tilde{\nabla}_{Y_t} Y_t = 0$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

2.4. $\mathbb{R}_{\nu}^{m+n}$ de Lightlike Altmanifoldlar Boyunca Null Scroll Hiperyüzeyler

$\mathbb{R}_{\nu}^{m+n}$ de bir m boyutlu $r-lightlike$ altmanifold $X(U) = M$ ile verilsin. $\{\xi_1, ..., \xi_r\}$ vektör alanları $Rad(TM)$ nin bir bazı ve $\{W_{r+1}, ..., W_n\}$ vektör alanları da $S(TM^{\perp})$ in bir bazı olsun. O halde M boyunca $S(TM)^{\perp}$ de bir pseudo ortonormal baz,

$$\{\xi_1, ..., \xi_r, N_1, ..., N_r, W_{r+1}, ...W_n\}$$

olur öyle ki $\{N_1, ..., N_r\}$ vektör alanları $ltr(TM)$ nin bir bazıdır. $S(TM^{\perp})$ bir non-dejenere alt uzay olduğundan M için iki durum mevcuttur:

Durum 1. $\{W_{r+1}, ..., W_n\}$ vektör alanlarının hepsi spacelike (timelike) olsunlar. Bu durumda, genelliği bozmaksızın, bir timelike (spacelike) birim vektör alanı $n^T(u) = \dfrac{a_1\xi_1(u) + b_1 N_1(u)}{\|a_1\xi_1(u) + b_1 N_1(u)\|}$ $(a_1, b_1 \in \mathbb{R})$ olarak seçilsin. Diğer yandan, $r-1$ tane ortogonal birim spacelike (timelike) vektör alanları,

$$U_{k-1}(u) = \frac{a_k\xi_k(u) + b_k N_k(u)}{\|a_k\xi_k(u) + b_k N_k(u)\|} \tag{2.13}$$

$(a_k, b_k \in \mathbb{R},\ k = 2, ..., r)$ ile tanımlansın.

$p = X(u)$ olmak üzere $W_p = Span\{U_1(p), ..., U_{r-1}(p), W_{r+1}(p), ..., W_n(p)\}$ bir non-dejenere alt uzaydır. Budurumda, bir spacelike (timelike) birim pseudo küre,

$$S_p^{n-1} = \{w \in W_p \ :\ \langle w, w\rangle = 1\}$$

ile tanımlansın. M üzerinde bir pseudo küresel demet $S^{n-1}=\bigcup_{p\in M} S_p^{n-1}$ olacaktır. Bir $n^S(u)\in S^{n-1}$ birim spacelike (timelike) vektör alanı, θ_j $\left(j=1,...,n-2\right)$ pseudo küresel parametreler ile ifade edilebilir. Açıkça $\left\langle n^S, n^T\right\rangle=0$ dır. O halde $n^T\left(u\right)\pm\ n^S\left(u\right)$ vektör alanları lightlike olup $\left\{\xi_1,...,\xi_r,N_1,...,N_r\right\}$ vektör alanlarından lineer bağımsızdır. $n^T\left(u\right)+n^S\left(u\right)$ vektör alanı M boyunca bir lightlike transversal vektör alanı belirtir.

Tanım 2.4.1.

$Y\ :\ S^{n-1}\times\mathrm{R}\to\mathrm{R}_q^{m+n}$ öyle ki,

$$Y(u,\theta,t)=X(u)+t(n^T+n^S)(u),\ t\in\mathrm{R}$$

$u=(u_1,...,u_m),\ \theta=(\theta_1,...,\theta_{n-2})$ ile verilen hiperyüzeye M boyunca bir null scroll denir.

Durum 2. Şimdi $\left\{W_{r+1},...W_s\right\}$ vektör alanları spacelike ve $\left\{W_{s+1},...,W_n\right\}$ vektör alanları timelike olsunlar. Bu durumda, genelliği bozmaksızın, $a_1,...,a_\mu,b_1,...,b_\mu\in\mathrm{R}$, $\mu<r$ olmak üzere, aşağıdaki ortogonal timelike vektör alanları seçilsin:

$$\begin{aligned} n_1(u)&=\frac{a_1\xi_1(u)+b_1N_1(u)}{\left\|a_1\xi_1(u)+b_1N_1(u)\right\|}\\ n_2(u)&=\frac{a_2\xi_2(u)+b_2N_2(u)}{\left\|a_2\xi_2(u)+b_2N_2(u)\right\|}\\ &\vdots\\ n_\mu(u)&=\frac{a_\mu\xi_\mu(u)+b_\mu N_\mu(u)}{\left\|a_\mu\xi_\mu(u)+b_\mu N_\mu(u)\right\|}\end{aligned}\tag{2.14}$$

Benzer şekilde, $a_{\mu+1},...,a_r,b_{\mu+1},...,b_r\in\mathrm{R}$ olmak üzere, $r-\mu$ tane ortogonal spacelike vektör alanı,

$$
\begin{aligned}
U_1(u) &= \frac{a_{\mu+1}\xi_{\mu+1}(u) + b_{\mu+1}N_{\mu+1}(u)}{\left\| a_{\mu+1}\xi_{\mu+1}(u) + b_{\mu+1}N_{\mu+1}(u) \right\|} \\
U_2(u) &= \frac{a_{\mu+2}\xi_{\mu+2}(u) + b_{\mu+2}N_{\mu+2}(u)}{\left\| a_{\mu+2}\xi_{\mu+2}(u) + b_{\mu+2}N_{\mu+2}(u) \right\|} \\
&\vdots \\
U_{r-\mu}(u) &= \frac{a_r\xi_r(u) + b_r N_r(u)}{\left\| a_r\xi_r(u) + b_r N_r(u) \right\|}
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

olsun. $p = X(u)$ noktasında W_p^1 ve W_p^2 öyle ki,

$$
\begin{aligned}
W_p^1 &= Span\left\{n_1(p),...,n_\mu(p), W_{s+1}(p),...,W_n(p)\right\} \\
W_p^2 &= Span\left\{U_1(p),...,U_{r-\mu}(p), W_{r+1}(p),...,W_s(p)\right\}
\end{aligned}
$$

non-dejenere alt uzayları mevcuttur. $\upsilon = s - \mu - 1, \quad \vartheta = n - s + \mu - 1$ olmak üzere, sırasıyla W_p^2 ve W_p^1 de S_p^ν ve H_p^ϑ birim pseudo küreler,

$$
\begin{aligned}
S_p^\upsilon &= \left\{ w \in W_p^2 \ : \ \langle w, w \rangle = 1 \right\} \\
H_p^\vartheta &= \left\{ w \in W_p^1 \ : \ \langle w, w \rangle = -1 \right\}
\end{aligned}
$$

ile tanımlanır. O halde, M üzerinde $S^\upsilon = \bigcup_{p \in M} S_p^\nu$ ve $H^\vartheta = \bigcup_{p \in M} H_p^\vartheta$ pseudo küresel demetlerdir. Bir spacelike birim vektör alanı $n^S(u) \in S^\upsilon$ ve timelike birim vektör alanı $n^T(u) \in H^\vartheta$ sırasıyla ψ_j ve ϕ_l $\left(j = 1,...,\upsilon - 1, l = 1,...,\vartheta - 1 \right)$ pseudo küresel parametreler ile ifade edilebilir. Açıkça $\left\langle n^S, n^T \right\rangle = 0$ dır. Dolayısıyla $n^T\left(u\right) \pm n^S\left(u\right)$ vektör alanları lightlike olup $\left\{ \xi_1,...,\xi_r, N_1,...,N_r \right\}$ vektör alanlarından lineer bağımsızdır. $n^T\left(u\right) + n^S\left(u\right)$ vektör alanı M boyunca bir lightlike transversal vektör alanı belirtir.

Tanım 2.4.2. $Y \ : \ S^\upsilon \times H^\vartheta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_q^{m+n}$ öyle ki,

$$
Y(u, \psi, \phi, t) = X(u) + t(n^T + n^S)(u), \quad t \in \mathbb{R}
$$

$u=(u_1,...,u_m),\quad \phi=(\phi_1,...,\phi_{\vartheta-1}),\quad \psi=(\psi_1,...,\psi_{\upsilon-1})$ ile verilen hiperyüzeye M boyunca bir null scroll denir.

M boyunca null scroll hiperyüzey her iki durumda da $\tilde{M}$ ile gösterilecektir. Bir $P\in\tilde{M}$ noktasında $T_P\tilde{M}$ teğet uzay,

$$\begin{aligned} Y_{u_i}(u,\theta,t) &= X_{u_i}(u)+t\left(n^T+n^S\right)_{u_i}(u), \qquad i=1,...,m \\ Y_{\theta_j}(u,\theta,t) &= t\left(n^T+n^S\right)_{\theta_j}(u), \qquad j=1,...,n-2 \\ Y_t(u,\theta,t) &= \left(n^T+n^S\right)(u) \end{aligned} \tag{2.16}$$

vektör alanları tarafından gerilir. Burada dikkat edilmesi gereken, M Durum 2 deki gibi ise $\theta=(\theta_1,...,\theta_{n-2})=(\phi_1,...,\phi_{\vartheta-1},\psi_1,...,\psi_{\upsilon-1})$ olarak alınır. Buradan, Y_t null ve Y_{θ_j} null olmayan vektör alanlarıdır. Y_{u_i} vektör alanları spacelike, timelike veya null olabilirler. $\tilde{M}$, $m+n-1$ boyutlu bir hiperyüzeydir.

$\alpha=1,...,q$ ve $\beta=q+1,...,m$ olmak üzere, Y_{u_α} null olmayan ve Y_{u_β} null vektör alanları olsunlar. İşlem kolaylığı açısından,

$$a_1=u_1,...,a_m=u_m,a_{m+1}=\theta_1,...,a_{m+n-2}=\theta_{n-2},a_{m+n-1}=t$$

gösterimleri kullanılacaktır. $\tilde{M}$ üzerinde indirgenmiş pseudo Riemann metriği, yani birinci temel form, $ds^2=\sum_{i,j=1}^{m+n-1}\tilde{g}_{ij}da_ida_j$ öyle ki $\tilde{g}_{ij}=\langle Y_{a_i},Y_{a_j}\rangle$ ile tanımlanır. $\varepsilon_i=\pm1$ ve $\lambda_i^j=0$ ya da ±1 olmak üzere, Y_{a_i} ve Y_{a_j} vektör alanlarının null veya null olmayan olmaları göz önünde bulundurularak, $\tilde{g}_{ij}$ matris formunda,

$$\begin{bmatrix}
\varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \varepsilon_q & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_{q+1}^{q+2} & \dots & \lambda_{q+1}^{m-q} & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_{m+n-1}^{q+1} \\
0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{q+2}^{q+1} & 0 & \dots & \lambda_{q+2}^{m-q} & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_{m+n-1}^{q+2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & & 0 & \lambda_{m}^{q+1} & \lambda_{m}^{q+2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_{m+n-1}^{m-q} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{m+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \varepsilon_{m+2} & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{m+n-2} & 0 \\
0 & 0 & & 0 & \lambda_{m+n-1}^{q+1} & \lambda_{m+n-1}^{q+2} & \dots & \lambda_{m+n-1}^{m-q} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \tag{2.17}$$

olarak hesaplanır.

Teorem 2.4.1. Bir lightlike altmanifold boyunca null scroll hiperyüzey flat manifolddur.

İspat. $\tilde{g}_{ij}$ bileşenlerinin hepsi sabit olduğundan, Tanım gereğince tüm Christoffel sembolleri sıfırdır. Dolayısıyla Riemann eğrilik tensörü her noktada sıfırdır. O halde Tanım 1.3.9. gereğince bu hiperyüzey flattır.

Teorem 2.4.2. Bir lightlike altmanifold boyunca null scroll hiperyüzey Ricci flat manifolddur.

İspat. Riemann eğrilik tensörü her noktada sıfır olduğundan Ricci eğriliği sıfırdır.

Bir yarı-Riemann manifoldu Ricci flat ise bu bir vakum uzay-zamandır [O'Neill]. Yani bu bölge maddeden yoksundur. Kara delikler ise buna en güzel örnektir.

Sonuç 2.4.1. M lightlike altmanifoldu üzerindeki her parametre eğrisi için, $\tilde{M}$ hiperyüzeyinde n-boyutlu bir null scroll altmanifold ya da n-boyutlu bir regle altmanifold mevcuttur.

İspat. $\{\xi_1,...,\xi_r,O_{r+1},...,O_m\}$ kümesi TM nin bir bazı olsun. Burada $\{O_{r+1},...,O_m\}\in S(TM)$ dir. $u=(u_1,...,u_m)$ olup, genelliği bozmaksızın ξ_1 , u_1 parametre eğrisi için teğet vektör olarak düşünülsün. Açıkça bu bir null eğridir. Bu eğri üzerinde her noktada $\left(n^T+n^S\right)(u_1,...,u_m)=\left(n^T+n^S\right)(u_1)$ lightlike vektörü tanımlanabilir. O halde u_1 parametre eğrisi için, $\tilde{M}$ hiperyüzeyinde bir n-boyutlu,

$$Y(u_1,\theta,t)=X(u_1)+t(n^T+n^S)(u_1),\ t\in\mathbb{R}$$

null scroll altmanifoldu mevcuttur. Benzer şekilde, her bir $u_2,...,u_r$ parametre eğrisi için de bir null scroll altmanifold bulunur.

Yine genelliği bozmaksızın, u_{r+1} parametre eğrisinin teğet vektörü de O_{r+1} olsun. Yani bu eğri null olmayan (timelike ya da spacelike) eğridir. O halde u_{r+1} parametre eğrisi için, $\tilde{M}$ hiperyüzeyinde bir n-boyutlu,

$$Y(u_{r+1},\theta,t)=X(u_{r+1})+t(n^T+n^S)(u_{r+1}),\ t\in\mathbb{R}$$

regle altmanifoldu mevcuttur. Bu regle altmanifold, null olmayan dayanak eğrisi ve null doğrultman vektör alanına sahiptir. Benzer şekilde, her bir $u_{r+2},...,u_m$ parametre eğrisi için de bir regle altmanifold bulunur.

Tanım 2.4.3. $\tilde{M}$ boyunca normal demetten alınan bir null olmayan vektör alanı $V\in N\tilde{M}$ olsun. Bu durumda, $\tilde{\nabla}$ indirgenmiş konneksiyon olmak üzere, $\tilde{M}$ üzerinde ikinci temel form aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$II(Y_{a_i},Y_{a_j})=\tilde{h}_{ij}V=\langle-\tilde{\nabla}_{Y_{a_i}}V,Y_{a_j}\rangle V \qquad i,j=1,...,m+n-1. \tag{2.18}$$

Önerme 2.4.1. Bir lightlike altmanifold boyunca null scroll hiperyüzey için Weingarten formülleri,

$$\tilde{\nabla}_{Y_{a_i}} V = -\sum_{j=1}^{m+n-1} \tilde{h}_i^j Y_{a_j}, \; i = 1,...,m+n-1$$

dir. Burada $\tilde{h}_i^j = \tilde{h}_{ik}\tilde{g}^{kj}$ ve $\tilde{g}^{kj} = \left(\tilde{g}_{kj}\right)^{-1}$ dir.

İspat.

$$\tilde{\nabla}_{Y_{a_i}} V = \sum_{j=1}^{m+n-1} \Gamma_i^j Y_{a_j}, \; i = 1,...,m+n-1$$

yazılımında Γ_i^j katsayılarını hesaplamak yeterlidir. Bunun için,

$$-h_{i\beta} = \sum_{\alpha=1}^{m+n-1} \Gamma_i^\alpha \left\langle Y_{a_\alpha}, Y_{a_\beta} \right\rangle$$

olup, bu ifade yerine yazılırsa,

$$\tilde{h}_i^j = \sum_{\beta=1}^{m+n-1} \tilde{h}_{i\beta}\tilde{g}^{\beta j} = -\sum_{\beta=1}^{m+n-1}\sum_{\alpha=1}^{m+n-1} \Gamma_i^\alpha \tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\beta j} = \Gamma_i^j$$

elde edilir.

Teorem 2.4.3. $\mathbb{R}_v^{m+n}$ de bir lightlike altmanifold boyunca null scroll hiperyüzey için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

1. $\tilde{h}_\alpha^\beta = \tilde{h}_\alpha^\alpha \tilde{h}_\beta^\beta \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$
2. $\tilde{h}_i^j = \tilde{h}_i^i \tilde{h}_j^j \varepsilon_i \varepsilon_j$
3. $\tilde{h}_i^i \tilde{h}_\alpha^\alpha = 0$

öyle ki $i, j = m+1,...,m+n-2 \;\; ,\alpha,\beta = 1,...,q$.

İspat. M lightlike altmanifoldunu düşünülsün. Bu bir yarı-Riemann altmanifoldu olduğundan, Sonuç 1.3.1.1 de verilen kesit eğriliği formülü kullanılabilir.

$\{Y_{a_\alpha}, Y_{a_\beta}\}$ $(\alpha, \beta = 1, ..., q)$ tarafından gerilen teğet uzayın non-dejenere alt uzaylarını düşünülsün. $\langle Y_{a_\alpha}, Y_{a_\alpha}\rangle = \varepsilon_\alpha$ ve $\langle Y_{a_\beta}, Y_{a_\beta}\rangle = \varepsilon_\beta$ olmak üzere,

$$Q\left(Y_{a_\alpha}, Y_{a_\beta}\right) = \langle Y_{a_\alpha}, Y_{a_\alpha}\rangle\langle Y_{a_\beta}, Y_{a_\beta}\rangle - \langle Y_{a_\alpha}, Y_{a_\beta}\rangle^2 = \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta \neq 0$$

dır. Weingarten formülleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} II(Y_{a_\alpha}, Y_{a_\alpha}) &= \tilde{h}_{\alpha\alpha}V = \tilde{h}_\alpha^\alpha \varepsilon_\alpha V \\ II(Y_{a_\beta}, Y_{a_\beta}) &= \tilde{h}_{\beta\beta}V = \tilde{h}_\beta^\beta \varepsilon_\beta V \\ II(Y_{a_\alpha}, Y_{a_\beta}) &= \tilde{h}_{\alpha\beta}V = \tilde{h}_\alpha^\beta \varepsilon_\beta V \end{aligned}$$

elde edilir. $\langle V, V\rangle = \pm 1$ olduğundan kesit eğriliği,

$$\tilde{K}(Y_{a_\alpha}, Y_{a_\beta}) = \bar{K}(Y_{a_\alpha}, Y_{a_\beta}) \pm \frac{\tilde{h}_\alpha^\alpha \tilde{h}_\beta^\beta \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta - \tilde{h}_\alpha^\beta}{\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta}$$

olur. R_v^{m+n} ve $\tilde{M}$ nın flat olduğu bilinmektedir. O halde, $\tilde{K}(Y_{a_\alpha}, Y_{a_\beta}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{h}_\alpha^\beta = \tilde{h}_\alpha^\alpha \tilde{h}_\beta^\beta \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$. Benzer şekilde, $\{Y_{a_i}, Y_{a_j}\}$ $(i, j = m+1, ..., m+n-2)$ tarafından gerilen non dejenere alt uzay için de $\tilde{K}\left(Y_{a_i}, Y_{a_j}\right) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\tilde{h}_i^j = \tilde{h}_i^i \tilde{h}_j^j \varepsilon_i \varepsilon_j$ dir. Son olarak, $\{Y_{a_\alpha}, Y_{a_j}\}$ $(\alpha = 1, ..., q, j = m+1, ..., m+n-2)$ tarafından gerilen non-dejenere alt uzay için $\tilde{K}\left(Y_{a_i}, Y_{a_j}\right) = 0 \Leftrightarrow \tilde{h}_i^i \tilde{h}_\alpha^\alpha = 0$ olur.

Teorem 2.4.3. R_v^{m+n} de bir M lightlikealtmanifoldu üzerinde h_{ij}^l ve h_{ij}^s sırasıyla, lightlike ve screen ikinci temel formlar olsunlar. Bu durumda, h_{ij}^l ve h_{ij}^s ile M boyunca null scroll hiperyüzey üzerindeki ikinci temel form arasında aşağıdaki bağıntı mevcuttur:

$$\tilde{h}_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r} c_l \left[h^l_{i\alpha} + t\sum_{k=1}^{m-r}\left(\eta_{\alpha k}h^l_{ik} + \eta_{ik}h^l_{k\alpha} + t\eta_{ik}\eta_{\alpha k}h^l_{kk}\right)\right]$$
$$+\sum_{s=r+1}^{n} d_s \left[h^s_{i\alpha} + t\sum_{k=1}^{m-r}\left(\eta_{\alpha k}h^s_{ik} + \eta_{ik}h^s_{k\alpha} + t\eta_{ik}\eta_{\alpha k}h^s_{kk}\right)\right]$$

öyle ki $i,\alpha = 1,\dots,m$ ve $c_l, d_s, \eta_{ik} \in \mathrm{R}$.

İspat. $\left(n^T + n^S\right)_{u_i} = Z_{u_i}$ ile gösterelim. $Z_{u_i} = \sum_{k=1}^{m-r}\eta_{ik}X_{u_k}$, $\eta_{ik} \in \mathrm{R}$ yazabiliriz. O halde,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{Y_{u_i}}V &= \tilde{\nabla}_{X_{u_i}}V + t\tilde{\nabla}_{Z_{u_i}}V \\ &= -A_V X_{u_i} + \nabla^t_{X_{u_i}}V + t\sum_{k=1}^{m-r}\eta_{ik}\tilde{\nabla}_{X_{u_k}}V \\ &= -\left(A_V X_{u_i} + t\sum_{k=1}^{m-r}\eta_{ik}A_V X_{u_k}\right) + \left(\nabla^t_{X_{u_i}}V + t\sum_{k=1}^{m-r}\eta_{ik}\nabla^t_{X_{u_k}}V\right)\end{aligned} \tag{2.19}$$

olup, burada A_V, ∇ ve ∇^t sırasıyla, M üzerindeki şekil operatörü, lineer konneksiyon ve normal konneksiyondur. (2.18) ve (2.19) eşitlikleri kullanılacak olursa,

$$\tilde{h}_{i\alpha} = -h_{i\alpha} - t\sum_{k=1}^{m-r}\eta_{\alpha k}h_{ik} - t\sum_{k=1}^{m-r}\eta_{ik}\left(h_{k\alpha} - t\sum_{k=1}^{m-r}\eta_{\alpha k}h_{kk}\right) \tag{2.20}$$

elde ederiz. Diğer taraftan, $c_l, d_s \in \mathrm{R}$ olmak üzere,

$$V = \sum_{l=1}^{r} c_l N_l + \sum_{s=r+1}^{n} d_s W_s$$

olacağından,

$$h_{i\alpha} = \langle -A_V X_{u_i}, X_{u_\alpha}\rangle = \sum_{l=1}^{r} c_l h^l_{i\alpha} + \sum_{s=r+1}^{n} d_s h^s_{i\alpha} \tag{2.21}$$

elde edilir. (2.21) eşitliğini (2.20) de yerine yazarsak istenilen eşitlik elde edilir.

Teorem 2.4.5. $\mathbb{R}_v^{m+n}$ de bir lightlike altmanifold boyunca null scroll hiperyüzeylerin tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart, aşağıdaki eşitliklerin sağlanmasıdır:

$$\tilde{h}_i^{\alpha} = 0, \tilde{h}_i^{\mu} = 0$$

$$\sum_{k=q+1}^{m} \tilde{h}_i^k \lambda_\beta^k = 0$$

$$\sum_{k=q+1}^{m} \tilde{h}_i^k \lambda_{m+n-1}^k = 0$$

öyle ki $i = 1, \dots, m+n-1, \mu = m+1, \dots, m+n-2, \alpha = 1, \dots, q, \beta = q+1, \dots, m.$

İspat. Daha önce de bahsedildiği gibi, $\widetilde{M}$ hiperyüzeyinin teğet uzayında, Y_t null ve Y_{θ_j} null olmayan vektör alanlarıdır. Ayrıca, $\alpha = 1, \dots, q$ ve $\beta = q+1, \dots, m$ olmak üzere, Y_{u_α} null olmayan ve Y_{u_β} null vektör alanları olsunlar. Tanım 2.4.3. gereğince $\tilde{h}_{ij} = \langle -\tilde{\nabla}_{Y_{a_i}} V, Y_{a_j} \rangle$ olduğu bilinmektedir. O halde,

$$\tilde{\nabla}_{Y_{a_i}} V = -\sum_{l=1}^{m+n-1} \tilde{h}_i^j Y_{a_l} = -(\tilde{h}_i^1 Y_{a_1} + \tilde{h}_i^2 Y_{a_2} + \dots + \tilde{h}_i^q Y_{a_q} + \tilde{h}_i^{q+1} Y_{a_{q+1}} + \dots + \tilde{h}_i^m Y_{a_m}$$

$$\tilde{\nabla}_{Y_{a_i}} V = -\sum_{l=1}^{m+n-1} \tilde{h}_i^j Y_{a_l} = -(\tilde{h}_i^1 Y_{a_1} + \tilde{h}_i^2 Y_{a_2} + \dots + \tilde{h}_i^q Y_{a_q} + \tilde{h}_i^{q+1} Y_{a_{q+1}} + \dots + \tilde{h}_i^m Y_{a_m}$$
$$+ \tilde{h}_i^{m+1} Y_{a_{m+1}} + \dots + \tilde{h}_i^{m+n-2} Y_{a_{m+n-2}} + \tilde{h}_i^{m+n-1} Y_{a_{m+n-1}})$$

olup, $\tilde{g}_{ij}$ metriğinin matris formu göz önünde bulundurulduğunda,

$$\tilde{h}_{i1} = \tilde{h}_i^1 \varepsilon_1$$
$$\vdots$$
$$\tilde{h}_{iq} = \tilde{h}_i^q \varepsilon_q$$
$$\tilde{h}_{i(q+1)} = 0 + \tilde{h}_i^{q+2} \lambda_{q+1}^{q+2} + \dots + \tilde{h}_i^m \lambda_{q+1}^m + \tilde{h}_i^{m+n-1} \lambda_{q+1}^{m+n-1}$$
$$\vdots$$
$$\tilde{h}_{im} = \tilde{h}_i^{q+1} \lambda_m^{q+1} + \dots + \tilde{h}_i^{m-1} \lambda_m^{m-1} + 0 + \tilde{h}_i^{m+n-1} \lambda_m^{m+n-1}$$

$$\tilde{h}_{i(m+1)} = \tilde{h}_i^{m+1}\varepsilon_{m+1}$$
$$\vdots$$
$$\tilde{h}_{i(m+n-2)} = \tilde{h}_i^{m+n-2}\varepsilon_{m+n-2}$$
$$\tilde{h}_{i(m+n-1)} = \tilde{h}_i^{q+1}\lambda_{m+n-1}^{q+1} + \cdots + \tilde{h}_i^{m}\lambda_{m+n-1}^{m} + 0$$

olarak hesaplanır. $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $\lambda_i^j = 0$ ya da ± 1 olduğundan,

$$\tilde{h}_{ij} = 0 \Leftrightarrow \tilde{h}_i^{\alpha} = 0, \tilde{h}_i^{j} = 0, \sum_{k=q+1}^{m} \tilde{h}_i^k \lambda_\beta^k = 0, \sum_{k=q+1}^{m} \tilde{h}_i^k \lambda_{m+n-1}^k = 0$$

$i = 1, \dots, m+n-1, j = m+1, \dots, m+n-1, \alpha = 1, \dots, q, \beta = q+1, \dots, m$dir.

Sonuç 2.4.2. M bir tamamen geodezik $r-lightlike$ altmanifold olsun. Bu durumda, Y_{u_i} $(i=1,\dots,m)$ vektör alanları $\tilde{M}$ hiperyüzeyinin asimptotik doğrultularıdır.

İspat. M totally geodezik ise $h_{ij}^l = h_{ij}^s = 0$ olacağından, Teorem 2.4.3 gereğince Y_{u_i} vektör alanları asimptotik doğrutulardır.

Sonuç 2.4.3. R_v^{m+n} de bir lightlike altmanifold boyunca null scroll hiperyüzeyin her noktasında teğet uzayda tanımlanan pseudo-çatıdaki tüm null vektörler ortogonal ise bu null scroll tamamen umbiliktir.

İspat. Kabul edelim ki pseudo çatıdaki null vektör alanları Y_{u_β} ve Y_t ortogonal olsunlar. Bu durumda $\lambda_i^j = 0$ olur. Teorem 2.4.4. ün ispatında hesaplanıldığı üzere, $\tilde{h}_{ij} = \tilde{h}_i^j \varepsilon_j = \tilde{h}_i^j \tilde{g}_{ij}$ olur ki bu ise totally umbilik olması demektir.

Örnek 2.4.1. R_1^3 de bir M lightlike altmanifoldunu,

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{2}\sinh(2s), \frac{1}{2}\cosh(2s), s\right)$$

null eğrisi olarak alalım. Bu eğri üzerindeki Frenet çatısı,

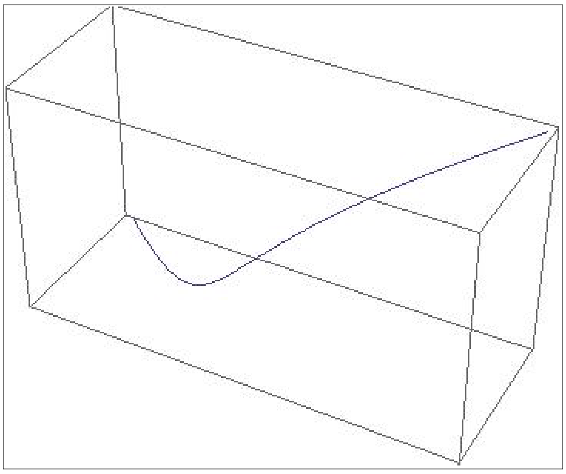
$$L=\left(\cosh(2s),\sinh(2s),1\right)$$
$$N=\left(\frac{1}{2}\cosh(2s),\frac{1}{2}\sinh(2s),-\frac{1}{2}\right)$$
$$W=\left(\sinh(2s),\cosh(2s),0\right)$$

olup, $n^T=\dfrac{L+N}{\|L+N\|}=\left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\cosh(2s),\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\sinh(2s),\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ timelike vektör alanı seçilsin. n^S spacelike vektör alanı olarak da W düşünülebilir. Bu durumda,

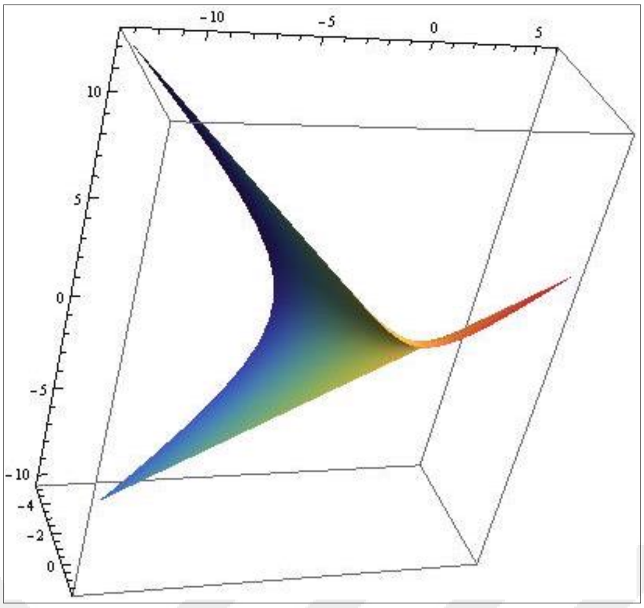
$$n^T+W=\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\cosh(2s)+\sinh(2s),\frac{3}{2\sqrt{2}}\sinh(2s)+\cosh(2s),\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

vektör alanı $\alpha(s)$ boyunca lightlike transversal vektör alanıdır. Bu durumda, $\alpha(s)$ boyunca bir null scroll yüzey aşağıdaki gibidir:

$$Y(s,t)=\alpha(s)+t\left(\frac{n^T}{\|n^T\|}+W\right)$$
$$=\left(\frac{3}{2}\sinh(2s)+\frac{3}{2\sqrt{2}}\cosh(2s),\frac{3}{2}\cosh(2s)+\frac{3}{2\sqrt{2}}\sinh(2s),s+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$



Şekil 4. $\alpha(s)$ null eğrisi



Şekil 5. Null scroll

Örnek 2.4.2. R_2^5 de bir $M = X(x_1, x_2)$ lightlike altmanifoldunu

$$x_3 = \cos x_1 \quad x_4 = \sin x_1 \quad x_5 = x_2$$

olarak alalım. Bu durumda $RadTM = TM = Span\{\xi_1, \xi_2\}$ ve $TM^{\perp} = Span\{\xi_1, W_1, W_2\}$ öyle ki,

$$\xi_1 = \partial_2 + \partial_5 \quad \xi_2 = \partial_1 - \sin x_1 \partial_3 + \cos x_1 \partial_4$$
$$W_1 = -\sin x_1 \partial_1 + \partial_3 \quad W_2 = \cos x_1 \partial_1 + \partial_4$$

olur. Dolayısıyla,

$$N_1 = \frac{1}{2}[-\partial_2 + \partial_5] \text{ ve } N_2 = \frac{1}{2}[-\partial_1 - \sin x_1 \partial_3 + \cos x_1 \partial_4]$$

olmak üzere, $ltrTM = Span\{N_1, N_2\}$ dir. $\{W_1, W_2\}$ spacelike vektör alanları olduğundan 1. durum söz konusudur. Şimdi,

$$n^T = \frac{-\xi_1 + N_1}{\left\| -\xi_1 + N_1 \right\|} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}\partial_2 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\partial_5$$

birim timelike vektör alanı alınsın.

$$U = \frac{\xi_2 + N_2}{\left\| \xi_2 + N_2 \right\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\partial_1 - \frac{3}{2\sqrt{2}}\sin x_1 \partial_3 + \frac{3}{2\sqrt{2}}\cos x_1 \partial_4$$

vektör alanı spacelike olup, $p = X(u)$ olmak üzere, $W_p = Span\{U, W_1, W_2\}_p$ dir. Buradan, bir $n^S \in S^{n-1}$ birim spacelike vektör alanı,

$$n^S = \cos\theta_1 U + \sin\theta_1 \cos\theta_2 W_1 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 W_2$$

olarak yazılabilir. O halde M boyunca lightlike transversal vektör alanı $n^T + n^S$ olup,

$$Y(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2, t) = X(x_1, x_2) + t\left(n^T + n^S\right)\left(x_1, x_2\right)$$

bir null scroll hiperyüzeydir.

Örnek 2.4.3. $\mathbb{R}_4^{14}$ de bir 10 boyutlu $M = X(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}, x_{11})$ lightlike altmanifoldunu,

$$x_1 = x_{14} \quad x_2 = -x_{13} \quad x_3 = x_{12} \quad x_7 = \sqrt{1 - (x_8)^2}$$

olarak alınsın. $TM = Span\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8, Z_9, Z_{10}\}$ öyle ki

$$Z_1 = \partial_1 + \partial_{14} \quad Z_2 = \partial_2 - \partial_{13} \quad Z_3 = \partial_3 + \partial_{12} \quad Z_4 = \partial_4 \quad Z_5 = \partial_5$$
$$Z_6 = \partial_6 \quad Z_7 = -x_8\partial_7 + x_7\partial_8 \quad Z_8 = \partial_9 \quad Z_9 = \partial_{10} \quad Z_{10} = \partial_{11}$$

dir. $RadTM = Span\{Z_1, Z_2, Z_3\}$, $S(TM^{\perp}) = Span\{W = x_7\partial_7 + x_8\partial_8\}$ ve

$$ltr(TM) = Span\left\{N_1 = \frac{1}{2}[-\partial_1 + \partial_{14}], N_2 = \frac{1}{2}[-\partial_2 - \partial_{13}], N_3 = \frac{1}{2}[-\partial_3 + \partial_{12}]\right\}$$

olarak hesaplanır. Şimdi,

$$n^T = \frac{Z_1 - N_1}{\|Z_1 - N_1\|} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\partial_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\partial_{14}$$

timelike vektör alanı alınsın. Ayrıca,

$$U_1 = \frac{Z_2 + N_2}{\|Z_2 + N_2\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\partial_2 - \frac{3}{2\sqrt{2}}\partial_{13}$$
$$U_2 = \frac{Z_3 + N_3}{\|Z_3 + N_3\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\partial_3 + \frac{3}{2\sqrt{2}}\partial_{12}$$

spacelike vektör alanları seçilsin. Burada dikkat edilecek olursa, $\langle U_1, U_2 \rangle = 0$, $\langle U_1, W \rangle = \langle U_2, W \rangle = 0$ dır. Dolayısıyla, $n^S = \cos\theta_1 U_1 + \sin\theta_1 \cos\theta_2 U_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 W$ olarak yazılabilir. O halde,

$$Y(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, \theta_1, \theta_2, t)$$
$$= \left[X + t\left(n^T + n^S\right)\right]\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\right)$$

M boyunca bir null scroll hiperyüzeydir.

3. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasından elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. Bir M spacelike altmanifoldu boyunca $\tilde{M}$ lightlike hiperyüzeyinin screen ikinci temel formu ve M nin lightkoni ikinci temel formu arasında bir bağıntı elde edilmiştir.
2. Bir M spacelike altmanifoldu boyunca $\tilde{M}$ lightlike hiperyüzeyinin screen konformal olma şartları verilmiştir.
3. Schwarzschild kara deliğinde Event Horizon bölgesinin, $X(\vartheta,\phi)=(0,2M,\vartheta,\phi)$ ile verilen spacelike altmanifold boyunca bir lightlike hiperyüzey olduğu gösterilmiştir.
4. M spacelike altmanifoldunun Gauss dönüşümü $LG(n^T)$ nin, $\tilde{M}$ lightlike hiperyüzeyinde bir geodezik çizgi olduğu gösterilmiştir.
5. R_v^{m+n} de lightlike altmanifoldlar boyunca null scroll hiperyüzeyler tanımlanmıştır.
6. Bir lihgtlike altmanifold boyunca null scroll hiperyüzey için $\tilde{g}_{ij}$ metriği hesaplanarak matris formunda verilmiştir.
7. Bir lightlike altmanifold boyunca null scroll hiperyüzeyin flat ve Ricci flat olduğu gösterilmiştir.
8. M lightlike altmanifoldu üzerindeki her parametre eğrisi için, $\tilde{M}$ null scroll hiperyüzeyinde, n-boyutlu bir null scroll altmanifold ya da n-boyutlu bir regle altmanifoldun mevcut olduğu gösterilmiştir.
9. M lightlike altmanifoldunun lightlike ve screen ikinci temel formları ile $\tilde{M}$ null scroll hiperyüzeyinin ikinci temel formu arasında bir bağıntı elde edilmiştir.
10. M bir tamamen geodeziklightlike altmanifold olduğunda, Y_{u_i} $(i=1,\ldots,m)$ vektör alanlarının $\tilde{M}$ hiperyüzeyinin asimptotik doğrultuları oldukları gösterilmiştir.
11. Bir lightlike altmanifold boyunca null scroll hiperyüzeyin tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

12. Bir lightlike altmanifold boyunca null scroll hiperyüzeyin her noktasında teğet uzayda tanımlanan pseudo-çatıdaki tüm null vektörler ortogonal ise bu hiperyüzeyin tamamen umbilik olduğu gösterilmiştir.

Alınan bu sonuçlar, XIII. Geometri Sempozyumu (İstanbul), IECMSA - 2015 (Atina), Karatekin Mathematics Days (Çankırı) ve IECMSA - 2014 (Viyana) sempozyumlarında sözlü olarak sunulmuştur.

4. ÖNERİLER

1. Lightlike hiperyüzeyler Diferensiyel Geometri'de ve Fizik'te önemli bir yere sahiptir. Spacelike altmanifoldlar boyunca lightlike hiperyüzeyler için yapısal geometrik özellikler incelenebilir. Elde edilen sonuçlar kara deliklerde event horizon bölgesini analiz etmek için kullanılabilir.
2. Lightlike altmanifoldlar boyunca null scroll hiperyüzeyler için, regle hiperyüzeylerin geometrik yapısına benzer yapılar araştırılabilir . Bu hiperyüzeyler üzerinde eğriler kapsamlı bir şekilde incelenebilir. Yine bu hiperyüzeylerin görelilik teorisinde fiziksel karşılıkları incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

Abdel-Baky, R. A. ve Aldossary, M. T., 2013. On the Null Scrolls in Minkowski 3-space, IOSR Journal of Mathematics, 7, 11-16.

Baikoussis, C. ve Blair, D. E., 1992. On the Gauss map of ruled surfaces, Glasgow Math. J., 34, 355-359.

Baikoussis, C., Chen, B. Y. ve Verstraelen, L., 1993. Ruled surfaces and tubes with finite-type Gauss map, Tokyo J. Math., 16, 341-348.

Balgetir, H. ve Ergüt, M., 2003. (n - 1)-dimensional generalized null scrolls in R_n^1, Acta Math. Aca. Pae. Nyir., 19: 227-231.

Balgetir, H. ve Ergüt, M., 2004. Generalized null scrolls in the n-dimensional Lorentzian space, Act. Math. Vietn., 2, 205-216.

Berger, M., 2000. Riemannian Geometry During the Second Half of the Twentieth Century, Amer. Math. Soc.

Birman, G. ve Nomizo, K., 1984. Trigonometry in Lorentzian Geometry, Ann. Math. Mont 91, 9, 543-549.

Boothby, W. M., 2003. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, 51-79.

Brickell, F. ve Clark R. S., 1970. Differentiable Manifolds: An Introduction, Van Nostrand Reinhold Company Ltd., 12-83.

Chen, B. Y., Dillen, F., Verstraelen, L. ve Vrancken, L., 1990. Ruled surfaces of finite- type, Bull. Austral. Math. Soc., 42, 447-453.

Choi, S. M., Ki, U. H. ve Suh, Y. J., 1998. On The Gauss Map Of Null Scrolls, Tsukuba Journal of Mathematics, 22, 273-279.

Duggal, K., 2015. A Report on Null Horizons in Relativity, Journal of Physical Mathematics, 6, 2.

Duggal, K. ve Bejancu, A., 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Kluwer Academic Publishers, 37-189.

Duggal, K. ve Şahin, B., 2010. Differential Geometry of Lightlike Submanifolds, Birkhäuser Verlag AG, Almanya, 30-220.

Ferrandez, A., Gimenez, A. ve Lucas, P., 2001. Null Helices In Lorentzian Space Forms, International Journal of Modern Physics A 16, 4845–4863.

Ferrandez, A., Gimenez, A. ve Lucas, P., 2002. Null Generalized Helices in Lorentz -Minkowski Spaces, J. Phys. A: Math. Gen. 35, 8243–8251.

Galloway, G. J., 2007. Spacetime Geometry, Beijing International Mathematics Research Center, 2007 Summer School.

Güner, G. ve Ekmekci, N., 2012. On the spherical curves and Bertrand curves in Minkowski - 3 space, J. Math. Comput. Sci., 2, 4, 898 – 906.

Güner, G. ve Ekmekci, N., 2014. On the special curves in Minkowski 4 spacetime, Mathematica Aeterna, 4, 8, 863 – 867.

Hacısalihoğlu, H.H., 2000. Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 2, 19-109.

Hawking, S., 2001. The Universe in a Nutshell, Bantam Spectra, 33 s.

Izumiya, S., 2014. Total lightcone curvatures of spacelike submanifolds in Lorentz -Minkowski space, Differential Geometry and its Applications, 34, 103–127.

Izumiya, S., Kossowski, M.,Pei, D. ve Romero Fuster, M.C., 2006. Singularities of lightlike hypersurfaces in Minkowski four-space, Tohoku Math. J., 58, 71–88.

Izumiya, S., Pei, D. ve Romero Fuster, M.C., 2004. The Lightcone Gauss Map of aSpacelike Surface in Minkowski 4-space, Asian Journal of Mathematics, 8, 511–530.

Izumiya, S., Pei, D. ve Romero Fuster, M.C., 2004. Umbilicity of Spacelike submanifolds of Minkowski space, Proc. Roy. Soc. Edinburh Sect. A, 134, 375–387.

Izumiya, S., Pei, D. ve Takahashi, M., 2004. Singularities of evolutes of hypersurfaces in Hyperbolic space, Proc. the Edinburgh Math. Soc., 47, 131–153.

Izumiya, S. ve Romero Fuster, M.C., 2007. The lightlike flat geometry on spacelike submanifolds of codimension two in Minkowski space, Sel. math., 13, 23-55.

Izumiya, S. ve Sato, T., 2013. Lightlike hypersurfaces along spacelike submanifolds in Minkowski space–time, Journal of Geometry and Physics, 71, 30 – 52.

Karaçay, T., Görelilik Kuramının Matematiksel Temelleri. http://www.baskent.edu.tr/~ tkaracay/etudio/agora/mmf/mmf3_relativity.htm 20 Eylül 2016.

Kim, D. S., 2009. Ruled surfaces of finite-type in Lorentz space-times, Honam Math. J., 31, 177-183.

Kim, D. S., Kim, Y. H. ve Yoon, D. W., 2002. Extended B-scrolls and theirGauss maps, Indian J. Pure Appl. Math., 33, 1031-1040.

Kim, D. S., Kim, Y. H. ve Yoon, D. W., 2003. Characterization of generalized B-scrolls and cylinders over finite-type curves, Indian J. Pure Appl. Math., 33 , 1523-1532.

Kim, D. S., Kim, Y. H. ve Yoon, D. W., 2007. Finite-type ruled surfaces in Lorentz Minkowski space, Taiwan. J. Math., 11, 1-13.

Kim, Y. H. ve Yoon, D. W., 2000. Ruled surfaces with finite-type Gauss map in Minkowski spaces, Soochow J. Math., 26, 85-96.

Kim, Y. H. ve Yoon, D. W., 2004. Classification of ruled surfaces in Minkowski 3-spaces, J. Geom. Phys., 49, 89-100.

O'Neill, B., 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, 1-395.

Pak, J. S. ve Yoon, D. W., 2000. On null scrolls satisfying the condition H = AH, Comm. Korean Math. Soc., 3, 533-540.

Şahin, B., 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti., 15-75.

Tuğ, G. ve Ekmekci, F. N., 2017. Construction of the null scrolls along lightlike submanifolds in R_v^{m+n}, Int. Electronic J. of Geo., (Accepted).

Tuğ, G., Özdemir, Z., Aydın, S. H. ve Ekmekci, F. N., 2016. Accretive growth kinematics in Minkowski-3 space, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics , DOI: 10.1142/S0219887817500694.

URL-1, http://www.superstringtheory.com/basics/basic2.html The story so far... particles and relativity. 29 Eylül 2016.

URL-2, https://tr.wikipedia.org/wiki/Minkowski_uzay%C4%B1 Minkowski uzayı. 29 Eylül 2016.

URL-3, https://tr.wikipedia.org/wiki/Kara_delik Kara delik. 29 Eylül 2016.

ÖZGEÇMİŞ

Gül TUĞ, 1987 yılında Gümüşhane'nin Şiran ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara'da, Tevfik İleri İlköğretim Okulu ve Kurtuluş Lisesi'nde tamamladı. 2004-2005 eğitim-öğretim yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. 2008 yılında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başladı. İkinci yılın sonunda, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde, 50/d kadrosunda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı ve yatay geçişle burada yüksek lisans eğitimine devam etti. 2011 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Doktora eğitimine başladı. İyi derecede İngilizce bilmektedir, ayrıca temel düzeyde Almanca ve Fransızca eğitimi almıştır. Nisan 2016 da evlenmiş ve GÜNER olan soyadını TUĞ olarak değiştirmiştir.

Makaleler:

1. Güner G., Ekmekci N., "On the spherical curves and Bertrand curves in Minkowski-3 space", Journal of Mathematical and Computational Science, vol.2, no.4, pp.898-906, 2012.

2. Güner G., Ekmekci N., "On the special curves in Minkowski-4 spacetime", Mathematica Aeterna, vol.4, no.8, pp.863- 867, 2014.

3. Tuğ G., Özdemir Z., Aydın S.H., Ekmekci N., "Accretive growth kinematics in Minkowski-3 space", International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2016 (Accepted).

4. Tuğ G., Ekmekci N., "Construction of the null scrolls along lightlike submanifolds in R_v^{m+n}", International Electronic Journal Of Geometry, 2016 (Submitted).

5. Tuğ G., Ekmekci N., "Notes on the lightlike hypersurfaces along spacelike submanifolds", Ukrainian Mathematical Journal", 2016 (Submitted).

Bildiriler:

1. Lightlike Altmanifoldlar Boyunca Null Scroll Hiperyüzeyler, İSTANBUL, Temmuz 2015.

2. Characterization of Null Scrolls in R_v^{m+n}, ATINA, Ağustos 2015.

3. Surface Growth Kinematics in Minkowski 3 Space, ATINA, Ağustos 2015.

4. On the Lightlike Ruled Hypersurfaces Based on Spacelike Submanifolds, VIYANA, Ağustos 2014.

5. Structure of the lightike hypersurfaces along spacelike submanifolds, ÇANKIRI, Haziran 2014.

6. Spacelike Altmanifoldlar Boyunca Lightlike Hiperyüzeyler, Ankara Üniversitesi, ANKARA Kasım 2014.

7. A Study on the Spherical Null Curves and Bertrand Curves in Minkowski 4-Spacetime, KOSOVA, Eylül 2012.

8. Spherical Curves And Bertrand Curves In 3 Dimensional Minkowski Space, SAMSUN, Haziran 2011.

9. Küresel Timelike Eğriler ve Bertrand Eğrileri, TRABZON, Ekim 2010.