

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**MANYETİK ORTAMDA MAGNETOHİDRODİNAMİK KANAL AKIM
PROBLEMLERİNİN SINIR ELEMANLAR VE SONLU ELEMANLAR
YÖNTEMLERİ BİRLEŞİMİ İLE ÇÖZÜMÜ**

DOKTORA TEZİ

Harun SELVİTOPI

**EYLÜL 2016
TRABZON**



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :

Trabzon

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında
Harun SELVİTOPI Tarafından Hazırlanan

MANYETİK ORTAMDA MAGNETOHİDRODİNAMİK KANAL AKIM
PROBLEMLERİNİN SINIR ELEMANLAR VE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMLERİ
BİRLEŞİMİ İLE ÇÖZÜMÜ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 23 /08/2016 gün ve 1666 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Münevver TEZER

M. Tezer

Üye : Prof. Dr. Mustafa TÜRKYILMAZOĞLU

M. Turkyilmazoglu

Üye : Prof. Dr. Orhan AYDIN

O. Aydın

Üye : Prof. Dr. Funda KARAÇAL

F. Karacal

Üye : Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN

S. Han Aydın

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Doktora eğitimim boyunca bilgisinden ve tecrübesinden faydalandığım, bu süreçte desteğini hiç esirgemeyen doktora tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN'a şükranlarımı sunarım.

Doktora tez döneminde fikir ve düşüncelerini esirgemeyen Prof. Dr. Orhan AYDIN'a teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım hocalarım ve matematiğe ilk adımımı attığım günden lisans eğitimim sonuna kadar, matematiksel düşünme yetisi kazanmamı sağlayan Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü ve Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi OFMA Matematik Eğitimi Bölümü hocalarıma teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen, bütün zor durumlarda her daim arkamda duran aileme engin sabır ve hoşgörülerinden ötürü sonsuz şükranlarımı sunarım.

Son olarak, doktora eğitimim boyunca maddi olarak desteğini aldığım Türkiye Bilimsel ve Teknoloji Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)-bilim insanı destekleme birimine teşekkür ederim.

Harun SELVİTOPI

Trabzon 2016

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Manyetik Ortamda Magnetohidrodinamik Kanal Akım Problemlerinin Sınır Elemanlar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri Birleşimi ile Çözümü” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN’ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 21/09/2016


Harun SELVİTOPI

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ	IV
İÇİNDEKİLER	V
ÖZET	VIII
SUMMARY	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
TABLolar DİZİNİ	XVI
SEMBOLLER DİZİNİ	XVII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Laplace Denklemi Tarihsel Gelişimi	1
1.3. MHD- Magnetohidrodinamik Denklemleri ve Tarihsel Gelişimi	2
1.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi ve Tarihsel Gelişimi	4
1.4.1. Kararlı Sonlu Elemanlar Yöntemi	6
1.5. Sınır Elemanlar Yöntemi ve Tarihsel Gelişimi	7
1.6. MHD Akım Denklemleri ile İlgili Yapılan Çalışmalar	9
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	10
2.1. Sonlu Elemanlar Yönteminin Diferensiyel Denklemlere Uygulanması	10
2.1.1. Ayrıklaştırma	10
2.1.2. Elemanlar	11
2.1.3. 2-D Elemanlar	12
2.1.4. Şekil Fonksiyonları	13
2.1.5. Üçgen Eleman Şekil Fonksiyonları	14
2.2. Laplace Denklemi İçin Sonlu Elemanlar Yöntemi Formülasyonu	15
2.2.1. Laplace Denklemi İçin Zayıf Hal	15
2.2.2. Laplace Denklemi İçin Varyasyonel Hal	17
2.2.3. Üçgen Eleman İçin Sayısal İntegral	19
2.3. Sınır Elemanlar Yönteminin Diferensiyel Denklemlere Uygulanması	22

2.3.1.	Laplace Denklemi İçin Sınır Elemanlar Yöntemi	22
2.3.2.	Laplace Denklemi İçin Temel Çözüm.....	24
2.3.3.	Sınırın Ayrıklaştırılması	25
2.3.4.	Sabit Eleman.....	26
2.3.5.	Doğrusal Eleman	28
2.4.	Manyetik Ortamca Yalıtkan Duvarlı MHD Kanal Problemi İçin Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	31
2.4.1.	MHD Kanal Problemi İçin Kararlı (Stabilize) Sonlu Elemanlar Yöntemi Formülasyonu	33
2.5.	Manyetik Ortamda MHD Denklemlerinin Fiziksel Yorumu ve Matematiksel Formülasyonu	37
2.5.1.	Sınır Elemanlar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri Birleşimi Formülasyonu	40
2.5.2.	Manyetik Ortamda ve Manyetik Katı Cisim Etrafında MHD Kanal Problemi	42
2.5.3.	Manyetik Ortamda ve Manyetik Ortamda Manyetik Katı Cisim Etrafında MHD Kanal Problemleri İçin Kararlı (Stabilize) Sonlu Elemanlar Yöntemi... ..	44
3.	BULGULAR.....	50
3.1.	Laplace Denklemi.....	50
3.1.1.	Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Laplace Denklemine Sayısal Çözümü.....	50
3.1.2.	Sınır Elemanlar Yönteminde Laplace Denklemi İçin L_2 Norm.....	53
3.2.	MHD Kanal Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü	55
3.2.1.	Kare Kanal İçerisindeki MHD Kanal Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü.....	56
3.2.2.	Çember Kanal İçerisindeki MHD Kanal Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü.....	62
3.3.	Kare ve Çember Anular Bölgede MHD Akım Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü	67
3.3.1.	Kare Anular Bölgede MHD Akım Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü.....	67
3.3.2.	Çember Anular Bölgede MHD Akım Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü.....	71
3.4.	Manyetik Ortamda MHD Kanal Probleminin Sınır Elemanlar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri Birleşimi ile Çözümü	73
3.4.1.	Kare Bölgede Manyetik Ortamdaki MHD Kanal Probleminin Sınır Elemanlar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri Birleşimi ile Çözümü.....	73

3.4.2.	Çember Bölgede Manyetik Ortamdaki MHD Kanal Probleminin Sınır Elemanlar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri Birleşimi ile Çözümü.....	78
3.5.	Manyetik Ortamda Manyetik Katı Cisim Etrafında MHD Kanal Probleminin Sınır Elemanlar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri Birleşimi ile Çözümü.....	82
3.5.1.	Kare Bölgede Manyetik Ortamda Manyetik Katı Cisim Etrafında MHD Kanal Probleminin Sınır Elemanlar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri Birleşimi ile Çözümü.....	833
3.5.2.	Çember Bölgede Manyetik Ortamda Manyetik Katı Cisim Etrafında MHD Kanal Probleminin Sınır Elemanlar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri Birleşimi ile Çözümü.....	86
4.	SONUÇLAR.....	90
5.	ÖNERİLER.....	91
6.	KAYNAKLAR.....	92
	ÖZGEÇMİŞ	

Doktora Tezi

ÖZET

MANYETİK ORTAMDA MHD KANAL AKIM PROBLEMLERİNİN SINIR ELEMANLAR VE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMLERİ BİRLEŞİMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Harun SELVİTOPI

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN

2016, 96 Sayfa

Bu tez de manyetik alanca iletken cisim etrafında ve manyetik alanca iletken sonsuz boyutlu ortamda bulunan kanal içerisindeki akışkan akım probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemlerinin birleşimi ile çözümü incelenmiştir. Bu kapsamda ilk olarak iç ve dış bölge Laplace problemlerinin ve kanal içerisindeki MHD problemlerinin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Daha sonra kanal bölgesinde sonlu elemanlar ve dış bölgede sınır elemanlar yöntemi kullanılarak problemin en genel halinin sonlu elemanlar ve sınır elemanlar yöntemi birleşimi formülasyonu elde edilmiş ve elde edilen formülasyon ile problem değişik parametre değerleri için test edilmiş ve sonuçlar yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Manyetik alan etkisi altında dış bölge akışkan akım problemi, Sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi

PhD. Thesis

SUMMARY

THE SOLUTION MAGNETOHYDRODYNAMIC DUCT FLOW PROBLEMS IN A
CONDUCTING MEDIUM BY USING THE COUPLING OF BOUNDARY ELEMENTS AND
FINITE ELEMENTS METHODS

Harun SELVİTOPI

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program

Supervisor: Assoc. Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN

2016, 96 Pages

In this thesis, we have analyzed the finite element and boundary element coupling solution of the MHD duct flow problem around a conducting solid and inside an unbounded conducting medium. Firstly, the numerical solution of interior and exterior Laplace equations and MHD duct equations are considered. Then, the most general form of the proposed problem is solved numerically with finite element and boundary element coupling approach by using the finite element method in the duct domain and the boundary element method on the external region. Proposed formulation is tested for different values of the problem parameters and obtained solutions are analyzed.

Key Words: The magnetohydrodynamic duct flow problem, finite element method and boundary element method coupling.

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Ayırıklaştırma noktalarının numaralandırma sırası	11
Şekil 2. Bir sonlu elemanlar modelinde ayırıklaştırma noktaları ve elemanlar	12
Şekil 3. İki boyutlu elemanlar	13
Şekil 4. Sayısal İntegral Bölge Dönüşümü	19
Şekil 5. İç ve Dış Bölge Problemlerinde Birim Normal Vektörlerin Yönü ve Düğüm Noktalarının Hareket Yönü.....	30
Şekil 6. MHD kanal problemi için çember ve kare kesit çözüm bölgeleri	31
Şekil 7. Manyetik ortamda MHD kanal problemi için çember ve kare kesit çözüm bölgeleri	37
Şekil 8. Manyetik ortamda manyetik katı cisim etrafında MHD kanal problemi için çember ve kare kesit çözüm bölgeleri	42
Şekil 9. Laplace denklemi için sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm (solda) ve $u(x, y) = e^x \cdot \sin(y)$ gerçek çözüm (sağda)	51
Şekil 10. Laplace denklemi için sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm (solda) ve $u(r, \theta) = r(\cos\theta + \sin(\theta))$ gerçek çözüm (sağda).....	53
Şekil 11. Laplace denklemi için sonlu elemanlar yöntem ile sayısal çözüm (solda) ve $u(r, \theta) = r^2(\cos 2\theta + \sin(2\theta))$ gerçek çözüm (sağda)	53
Şekil 12. Laplace denklemi iç bölge için sınır elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm (solda) ve $u(r, \theta) = r^2(\cos 2\theta + \sin(2\theta))$ gerçek çözüm (sağda)	55
Şekil 13. Laplace denklemi iç bölge için sınır elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm (solda) ve $u(r, \theta) = r^{-1} \cdot \cos(-\theta) + r^{-1} \cdot \sin(-\theta)$ gerçek çözüm (sağda).....	55
Şekil 14. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1, \theta = \pi/2$	57
Şekil 15. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 10, \theta = \pi/2$	58
Şekil 16. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 50, \theta = \pi/2$	58
Şekil 17. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 100, \theta = \pi/2$	59

Şekil 18. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 500, \theta = \pi/2$	59
Şekil 19. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1000, \theta = \pi/2$	60
Şekil 20. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 10, \theta = 0$	60
Şekil 21. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 10, \theta = \pi/4$	61
Şekil 22. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 500, \theta = \pi/2$	61
Şekil 23. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1, \theta = \pi/2$	62
Şekil 24. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 10, \theta = \pi/2$	63
Şekil 25. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 50, \theta = \pi/2$	63
Şekil 26. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 100, \theta = \pi/2$	64
Şekil 27. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 500, \theta = \pi/2$	64
Şekil 28. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1000, \theta = \pi/2$	65
Şekil 29. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1, \theta = 0$	65
Şekil 30. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1, \theta = \pi/4$	66

Şekil 31. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 100, \theta = 0$	66
Şekil 32. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 100, \theta = \pi/4$	67
Şekil 33. Kare kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1, \theta = \pi/2$	68
Şekil 34. Kare kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 10, \theta = \pi/2$	68
Şekil 35. Kare kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 50, \theta = \pi/2$	69
Şekil 36. Kare kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 100, \theta = \pi/2$	69
Şekil 37. Kare kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 500, \theta = \pi/2$	70
Şekil 38. Kare kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1000, \theta = \pi/2$	70
Şekil 39. Çember kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1, \theta = \pi/2$	71
Şekil 40. Çember kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 10, \theta = \pi/2$	71
Şekil 41. Çember kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 100, \theta = \pi/2$	72
Şekil 42. Çember kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 500, \theta = \pi/2$	72
Şekil 43. Çember kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1000, \theta = \pi/2$	73

- Şekil 44. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 1, Rm_{dış} = 1, Rh = 1, Re = 1, M = 1, \theta = \pi/2$ 74
- Şekil 45. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = \pi/2$ 74
- Şekil 46. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{kanal} = 50, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 5, M = 50, \theta = \pi/2$ 75
- Şekil 47. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{kanal} = 100, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 10, M = 100, \theta = \pi/2$ 75
- Şekil 48. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{kanal} = 500, Rm_{dış} = 1, Rh = 50, Re = 10, M = 500, \theta = \pi/2$ 76
- Şekil 49. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{kanal} = 1000, Rm_{dış} = 1, Rh = 100, Re = 10, M = 1000, \theta = \pi/2$ 76
- Şekil 50. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = 0$ 77
- Şekil 51. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = \pi/4$ 77
- Şekil 52. Çember kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{kanal} = 1, Rm_{dış} = 1, Rh = 1, Re = 1, M = 1, \theta = \pi/2$ 78
- Şekil 53. Çember kesitli kanal içerisinde MHD kanal probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = \pi/2$ 79

- Şekil 54. Çember kesitli kanal içerisinde MHD kanal probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{kanal} = 50, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 5, M = 50, \theta = \pi/2$ 79
- Şekil 55. Çember kesitli kanal içerisinde MHD kanal probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{kanal} = 100, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 10, M = 100, \theta = \pi/2$ 80
- Şekil 56. Çember kesitli kanal içerisinde MHD kanal probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{kanal} = 500, Rm_{dış} = 1, Rh = 50, Re = 10, M = 500, \theta = \pi/2$ 80
- Şekil 57. Çember kesitli kanal içerisinde MHD kanal probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{kanal} = 1000, Rm_{dış} = 1, Rh = 100, Re = 10, M = 1000, \theta = \pi/2$ 81
- Şekil 58. Çember kesitli kanal içerisinde MHD kanal probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = 0$ 81
- Şekil 59. Çember kesitli kanal içerisinde MHD kanal probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = \pi/4$ 82
- Şekil 60. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri,
 $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 1, Rm_{dış} = 1, Rh = 1, Re = 1, M = 1, \theta = \pi/2$ 83
- Şekil 61. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = \pi/2$ 83
- Şekil 62. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 50, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 5, M = 50, \theta = \pi/2$ 84
- Şekil 63. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 100, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 10, M = 100, \theta = \pi/2$ 84

- Şekil 64. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 500, Rm_{dış} = 1, Rh = 50, Re = 10, M = 500, \theta = \pi/2$ 85
- Şekil 65. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 1000, Rm_{dış} = 1, Rh = 100, Re = 10, M = 1000, \theta = \pi/2$ 85
- Şekil 66. Çember kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 1, Rm_{dış} = 1, Rh = 1, Re = 1, M = 1, \theta = \pi/2$ 86
- Şekil 67. Çember kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = \pi/2$ 87
- Şekil 68. Çember kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 50, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 5, M = 50, \theta = \pi/2$ 87
- Şekil 69. Çember kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 100, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 10, M = 100, \theta = \pi/2$ 88
- Şekil 70. Çember kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 500, Rm_{dış} = 1, Rh = 50, Re = 10, M = 500, \theta = \pi/2$ 88
- Şekil 71. Çember kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 1000, Rm_{dış} = 1, Rh = 100, Re = 10, M = 1000, \theta = \pi/2$... 89

TABLULAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. Sonlu elemanlar yönteminde Laplace denklemi için $L2$ norm.....	51
Tablo 2. Kutupsal koordinatlarda sonlu elemanlar yönteminde Laplace denklemi için $L2$ norm ve en büyük hata	52
Tablo 3. 2-Boyutlu uzayda sınır elemanlar yönteminde $u(r, \theta) = r^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + r^2 \cdot \sin(2 \cdot \theta)$ gerçek çözümü ile iç bölge problemi için $L2$ norm ve en büyük hata.....	54
Tablo 4. 2-Boyutlu uzayda sınır elemanlar yönteminde $u(r, \theta) = r^{-1} \cdot \cos(-\theta) + r^{-1} \cdot \sin(-\theta)$ gerçek çözümü ile dış bölge problemi için $L2$ norm ve en büyük hata.....	54
Tablo 5. 2-Boyutlu kare kanal kesitinde MHD probleminde hız için $L2$ norm ve en büyük hata.....	56
Tablo 6. 2-Boyutlu kare kanal kesitinde MHD probleminde manyetik alan için $L2$ norm ve en büyük hata.....	57

SEMBOLLER DİZİNİ

$a(u, v)$: Bilineer form
$\ell(u, v)$: Lineer form
F	: Büyük (Global) vektör
G	: Büyük (Global) matris
H	: Büyük (Global) matris
$H^1(\Omega)$: $L^2(\Omega)$ uzayının alt uzayı
I	: Bölge üzerindeki integral
J	: Jacobian matrisi
K^e	: Eleman matrisi
K	: Büyük (Global) matris
$L^2(\Omega)$: Ω bölgesindeki ikinci dereceden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
\vec{n}	: Çözüm bölgesi sınırı üzerindeki birim normal vektör $\vec{n} = (n_x, n_y)$
N_i^e	: Eleman için şekil fonksiyonları
Q^e	: Eleman sınır integral vektörü
Q	: Büyük (Global) sınır integral vektörü
u_h^e	: Bilinmeyen fonksiyonun eleman üzerinde ayrıklaştırılmış çözümü
u^*	: Laplace denklemi için temel çözüm (fundamental solution)
ω	: Ağırlık (test) fonksiyonu
Γ	: Bölge sınırı
ϵ	: Rezidü
Ω	: Problem tanım bölgesi
$\partial\Omega$: Ω bölgesinin sınırı
Δ_i	: Dirac-delta fonksiyonu
∇	: Gradyan $\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}\right)$
∇^2	: Laplace $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu tezde manyetik alanca iletken ortamda ve manyetik alanca iletken cisim etrafındaki kanal içerisindeki Magnetohidrodinamik (MHD) akım problemlerinin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi ile çözümü incelenecektir. Öncelikle fiziksel problemin matematiksel formülasyonu elde edilip, problemin sayısal çözümü bulunacaktır. Daha sonra ise elde edilen sonuçlar yorumlanacaktır.

Çözümü elde edilecek problem matematiksel olarak Laplace denklemi ve MHD denklemleri türünden ifade edileceğinden dolayı, ilk olarak bu denklemler hakkında genel bilgiler verilecektir.

1.2. Laplace Denklemi Tarihsel Gelişimi

Laplace kısmi diferensiyel denklemi $\nabla^2\phi = 0$ ilk olarak Pierre-Simon Laplace tarafından ortaya konulmuştur. Laplace denklemi birçok fiziksel problemin matematiksel modelini vermektedir. Uygulamalı matematik ve mühendisliğin birçok dalında karşımıza çıkar. Örneğin; ϕ iki boyutlu uzayda sıkışmaz bir kanalın girdapsız akışının hız potansiyeli ve akış fonksiyonu, iki boyutlu uzayda sabit iletkenliğin sabit ısı dağılımı, sabit öz dirençli bir alanın manyetik potansiyel veya elektrik dağıtımı olup Laplace denklemi ile tanımlanır.

Laplace denkleminin çözümleri, özellikle elektrik ve yer çekim potansiyeli ile akışkan potansiyelinin davranışını açıkladığı için elektromanyetizma, astronomi ve akışkanlar dinamiği gibi birçok bilim alanında önemlidir.

Laplace denklemi bazı özel durumlarda (özel sınır şartları altında) analitik olarak çözülebilmektedir. Genel durumdaki çözümü için ise birçok sayısal çözüm yöntemi kullanılmıştır. Southwell (1946) ve Allen (1959) Laplace denkleminin sayısal çözümlerini sonlu farklar yöntemi ile elde etmişlerdir. 1962 yılında ise R. D. Bhargava ve H. C. Radhakrishnar tarafından Laplace denkleminin sayısal çözümü için Green formülüne dayanan yeni bir sayısal yöntem önerilmiştir [1]. 1986 yılında R. Rangogni ve R. Occhi geliştirilmiş Laplace denklemini sınır elemanlar yöntemini kullanarak sayısal olarak çözmüşlerdir [2]. Ge JI ve O. Burkan Isgor (2006) doğrusal olmayan (non-linear) sınır

şartları altındaki Laplace denklemi için doğrudan aşamalı çözüm yöntemi ve aşamalı çözüm iterasyon yöntemlerini kullanarak sayısal çözümlerini elde etmişlerdir [3]. 2014 yılında ise Cynthia Anne Sabonis tarafından yapılan yüksek lisans tezinde, Laplace denklemi için yerel konformal dönüşüm teknikleri ile sayısal çözüm verilmiştir [4].

1.3. MHD- Magnetohidrodinamik Denklemleri ve Tarihsel Gelişimi

Magnetohidrodinamik-MagnetoHydroDynamics (MHD), plazmalar, akıcı metaller, tuzlu su ve elektrolitler gibi elektrikçe iletken akışkanların manyetik alan etkisi altında dinamiğini inceleyen bir bilim dalıdır. İsminden de anlaşılacağı üzere, MHD kısaltması, Magneto (manyetik alan), Hydro (akışkan) ve Dynamics (hareket) kelimelerinin birleşiminden oluşmaktadır.

MHD konusunda bilinen ilk çalışma 1937 yılında Hartmann tarafından kanal içerisindeki sıvı metal üzerinde gerçekleştirilmiştir [5]. MHD alanındaki diğer önemli çalışma ise 1950 yılında başlatılan ve 1970 yılında Nobel Fizik ödülüne layık görülen Hannes Alfvén'in dış bölgeden uygulanan manyetik alan etkisi altındaki gaz dinamiğinin incelenmesidir. MHD'nin en önemli özelliği, akışkan üzerinde güç oluşturan ve manyetik alanı kendisi değiştiren hareketli iletken bir akışkandaki akımlara neden olabilecek manyetik alan olmasıdır [6].

Mühendislik, fizik ve diğer pek çok alanda pratik uygulamaları olan (nükleer reaktörlerdeki soğutma sistemlerinde, kan basınç cihazlarındaki akım ölçümlerinde, elektromanyetik pompalarda, v.b.) kanal içerisindeki MHD akımı üzerinde Hartmann ve Lazarus (1937) ve Shercliff (1953,1956)'den başlamak üzere, analitik ve sayısal pek çok çalışmalar gerçekleştirilmiştir [5,7].

MHD problemleri fiziksel ve matematiksel olarak, akışkan dinamiğinin temel denklemleri olan Navier-Stokes denklemleri ve elektromanyetizmanın Maxwell denklemleri kullanılarak kısmi diferensiyel denklem takımları ile modellenirler. Bu diferensiyel denklemler ilişkili ve eş zamanlı olacak şekilde analitik ya da sayısal olarak çözülmelidirler.

MHD teorisini 1942 yılında ilk ortaya atan Hannes Alfvén Magneto-Hydrodynamic Waves and Sunspots (1944) isimli çalışmasında güneşin manyetik alanıyla ilgili çalışmasını ortaya koymuş ve manyetik alanın güneş lekeleri yüzeyine yakın oluşmadığı onun güneş merkezine yakın ortaya çıktığı ve güneşin genel manyetik alanının gücünden

manyetik doğrular boyunca dışa doğru taşınan yeni bir tür dalga olarak “magneto-hydro-dinamik dalga” oluşturduğunu savunmuştur. Bu teoriye göre dalga güneş merkezine yakın bir yerdeki bozunumdan, ilk önce kutuplara yakın bölgelerdeki güneş yüzeyine ulaşır ve daha sonra ekvatora doğru ilerler. Daha sonraları MHD birçok alanda ilgiyle çalışılan bir konu haline gelmiştir. 1960’lı yıllarda Nasa’dan Papell uygun sürfaktanla 10nm’nin altında magnetit parçacıkları çok iyi karıştırdı ve böylece nanomagnetit, kutupsuz çözücülerde etkileyici bir şekilde dağılabildi. Papell’in bu çalışmasını kendisine özgü birçok fiziksel özellik gösteren bir manyetik akım üretmesi izledi [8,9].

Genel olarak manyetik akım, bu manyetik akımın doğal elektrik iletkenliğine bağlı olarak iletken veya iletken olmayan olarak sınıflandırılabilir. Bir dış bölge manyetik alan etkisi altında bir iletken manyetik alan hareketi akım için başlatılmış (indüklenmiş) bir elektrik akıma sebep olan bir elektromotor gücü üretir. Bu başlatılmış elektrik alanın varlığı, başlatılmış bir manyetik alanın oluşturulmasına dönüşür. Aynı zamanda başlatılmış elektrik alan, akışkan elemanların üzerinde Lorentz gücü oluşturmak için bütün manyetik alan ile reaksiyona girer. Ancak Lorentz gücü kendisini oluşturan mekanizmaya karşı koyacak şekilde hareket eder. Bu nedenle Lorentz gücü (o), genelde akım elemanının hız alanını düşürecek şekilde hareket eder. Aslında Hartmann, Papell’in çalışmasından önce 1937 yılının başlarında teoriksel ve deneyle dayanarak manyetik Poiseuille akımının doğasını başarılı bir şekilde göstermiştir. Hartmann’ın bu çalışması daha sonraları çok iyi bilinen Hartmann akışı olarak adlandırılmıştır. Hartmann’ın bu çalışmasından hareketle kendisinden sonra Hartmann sayısı olarak adlandırılan boyutsuz bir parametre ortaya çıkmıştır. Hartmann parametresi (sayısı) temelde manyetik alan ve iç güçler arasındaki yakınlığın önemini tasvir eder [8].

Finlayson 1970 yılında düzgün dikey dış manyetik alan etkisi altında manyetik akımın davranışını teorik olarak ortaya koyan bir çalışma yapmıştır. Chang ve Lundgren, Hartmann akımıyla ilgili kapsamlı bir çalışma yapmıştır. Chang ve Lundgren, yaptıkları bu çalışmada daha üst ve daha alt yüzeyler arasındaki akımın Hartmann sayısı yükselirken düzleşme eğilimi gösterdiğini ortaya koymuşlardır. Ayrıca, akımın bütün hızının Hartmann sayısının değişiminden etkilendiğini göstermişlerdir [8,10,11].

1999 yılında Yamaguchi ve arkadaşları nümerik ve deneysel simülasyonlar ile bir dışsal manyetik alana bağlı olarak iki boyutlu kapalı bir alanda manyetik akımın kararsızlığını çalışmışlardır [8,12]. 2012 yılında ise Sheng Lun Hung ve Jik Chang Leong iç silindir sabit bir dönüş hızıyla hareket ederken dış silindirin sabit fakat düzgün olmayan

dışsal manyetik alan etkisi altındayken, manyetik bir akışkanın dolu olduğu halka bölgede nümerik çalışmalar yaptılar. Yapılan bu çalışmalardan hareketle manyetik akım; geniş ölçüde çeşitli mühendislik uygulamalarında kullanıldı [8].

1.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi ve Tarihsel Gelişimi

Bu kısımda, mühendislik problemleri başta olmak üzere pek çok fiziksel ve matematiksel problemin çözümünde kullanılan Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) hakkında bilgiler verilecektir.

Sonlu elemanlar yöntemi, diferensiyel denklemlerle ifade edilen problemlerin çözümü için kullanılan etkin bir sayısal yöntemdir. Sonlu elemanlar yöntemi, karmaşık veya büyük bölgelerde tanımlı olan problemlerin, daha basit alt bölgelere ayrıştırılarak, her bir alt bölge üzerinde daha esnek koşullar altında elde edilen çözümlerin birleşiminden, tam çözüme yaklaşık bir çözümün bulunduğu sayısal bir yöntemdir.

Sonlu Elemanlar Yönteminin üç temel niteliği vardır;

1. İlk olarak, geometrik olarak karmaşık olan çözüm bölgesi sonlu elemanlar olarak adlandırılan geometrik olarak daha basit alt bölgelere ayrılır. Bu alt bölgeler “Eleman” olarak adlandırılır. Elemanlar arasındaki bağlantı, düğüm noktaları adı verilen noktalarla sağlanır.
2. İkinci olarak, her elemandaki çözüm, cebirsel polinomların lineer kombinasyonundan oluşan elemanlar arasında da sürekli fonksiyonlar olarak tanımlanır.
3. Son olarak, bilinmeyen fonksiyonlar, her bir eleman üzerinde tanımlanan denklemlerin belirli noktalardaki çözümleri ile elde edilir.

Kullanılan yaklaşım fonksiyonları genellikle polinomlardan seçilir. Seçilen polinomların derecesi ise çözülecek problemin tanım denkleminin derecesine ve çözüm yapılacak elemandaki ayrıklaştırma nokta sayısına bağlıdır. Sonlu elemanlar yönteminde, eleman bazında bilinmeyenler, denklemin çözümünün ayrıklaştırma noktalarındaki değerleridir.

Sonlu elemanlar yöntemi her ne kadar yeni bir sayısal çözüm yöntemi gibi algılanıyor olsa da, kullanımı çok eski dönemlere dayanmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminin ilk kullanımı iki bin yıl önce geometri alanında olmuştur. Eski geometriciler sonlu elemanlar yöntemini, π 'nin yaklaşık değerini bulmak, dairenin alanını ve çevresini hesaplamak için kullanmışlardır. Daire örneğinde, daireyi düzenli poligonlara ayırıp

basitleştirilmiş problemi çözmek, sonlu elemanlar yönteminin önemli karakteristiğini göstermektedir. Sonlu elemanlar yönteminin kullanım yaygınlığı ve başarısı bilgisayarın hızlı gelişimi ile artmış ve yaygınlaşmıştır [13].

Sonlu elemanlar yöntemi modern anlamda yapı analizi alanında kullanılmıştır. Alexander Hrennikoff (1941) ve Mc Henry (1943)'nin yarı analitik analiz metotlarını geliştirdikleri çalışmaları bu alandaki ilk çalışmalardır. Hrennikoff ve Henry gerilme çözümleri için bir boyutlu doğru elemanlarını kullanmışlardır. Richard Courant gerilme çözümlerini varyasyonel bir formda kullanmayı önermiştir. Daha sonra, Courant yaklaşık nümerik çözümler elde etmek için problemin tüm tanım bölgesini oluşturan alt üçgensel bölgeler üzerinde parçalı şekil fonksiyonlarını tanıtmıştır. Levy 1947 yılında esnek (diğer adı ile kuvvet) yöntemini geliştirmiştir. Levy'nin bu yöntemle elde ettiği denklemler analitik olarak kolayca çözülebilecek denklemler olduğundan çok fazla tercih edilmemiştir. Ancak, bilgisayar yazılımlarının gelişmesi ile Levy'nin önerdiği yöntem kullanılmaya başlanmıştır. Argyis ve Kelsey (1954) enerji prensibini kullanarak "matrix structural analysis" (matrislerin yapısal analizi) yöntemini geliştirmişlerdir. Bu gelişme, enerji prensibinin sonlu elemanlar yönteminde önemli bir rol oynamasını sağlamıştır. Turner ve diğ. (1956) iki boyutlu elemanlar üzerinde çalışmalar yapmışlardır. Kafes eleman, kiriş eleman, iki boyutlu üçgen ve dikdörtgen elemanlar için eleman matrisini (rijitlik matrisini) oluşturmuşlardır. "Sonlu elemanlar" terimi ilk defa Ray W. Clough (1960) tarafından üçgen ve dikdörtgen elemanların düzlemsel gerilme analizinde uygulanmaya başlandığında kullanılmıştır. Sonlu elemanlar yönteminin üç boyutlu problemlere uygulanması, iki boyutlu teoriden sonra kolayca gerçekleşmiştir (Argyis (1964)).

Melosh (1961) düzgün bükümlü dikdörtgensel plaka elemanının eleman matrisini geliştirmiştir. İlk gerçek kabuk elemanlar aksenal ve simetrik elemanlar olup üç boyutlu yapı analizinde kullanılmışlardır (Grafton ve Strome (1963)). Bu kabuk elemanları silindirik ve diğer kabuk elemanları izlemiştir (Gallagher (1962)). 1960'lı yılların başlarında doğrusal olmayan (non-linear) problemlerle ilgilenilmeye başlanmıştır. Turner ve diğ. (1960) geometrik olarak doğrusal olmayan problemler için bir çözüm tekniği geliştirmişlerdir. Sonlu elemanlar yöntemiyle kararlılık analizi ise ilk olarak Martin (1965) tarafından incelenmiştir. Daha sonraları statik problemlerin yanısıra dinamik problemler de sonlu elemanlar yöntemiyle incelenmeye başlanmıştır (Olgierd Zienkiewicz ve diğ. (1966) ve Koenig ve Davids (1966)). 1943 yılında ise Richard Courant bir burulma problemini bölgesel sürekli doğrusal yaklaşım kullanarak çözmüştür.

Yapı alanı dışındaki problemlerin sonlu elemanlar yöntemiyle çözümü 1960'lı yıllarda başlamıştır. Olgierd Zienkiewicz ve Cheung (1965) sonlu elemanlar yöntemini kullanarak Poisson diferensiyel denklemini çözmüştür. Doctors (1970) da sonlu elemanlar yöntemini potansiyel akışa uygulamıştır. Sonlu elemanlar yönteminde sıkça kullanılan “varyasyonel formülasyon” terimi ilk kez Melosh (1963) tarafından kullanılmış ve “ağırlıklı rezidü yöntemi” nin sonlu elemanlar yönteminde uygulanması ise Szabo ve Lee (1969) tarafından gerçekleştirilmiştir. Daha sonraları sonlu elemanlar yöntemi geliştirilerek ısı transferi, yeraltı sularının akışı, manyetik alan ve diğer birçok alandaki problemlerin çözümlerinde kullanılmıştır [14,15].

1970'li yıllardan itibaren genel amaçlı sonlu elemanlar paket programları ortaya çıkmaya başlamıştır. Günümüzde Ansys, Abaqus, Adina, COMSOL Multiphysics, Nastran, Sap 2000 gibi ticari, FreeFEM, Calculix, Elmer, GetFEM++, OOFEM gibi açık kaynak kodlu pek çok sonlu elemanlar analizi yapan paket program mevcuttur. Ayrıca günümüzde, sonlu elemanlar metodu ve mühendislik problemlerine uygulamalarıyla ilgili binlerce makale ve pek çok kitap yayınlanmıştır. İlerleyen bilgisayar teknolojisi doğrultusunda sonlu elemanlar yöntemi de geliştirilerek daha verimli ve hızlı yöntemleri gerçekleştirilmektedir [15].

1.4.1. Kararlı Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sınır katman problemlerinde ve konveksiyon ağırlıklı akışkanlar mekaniği problemlerinde eşit aralıklı ayrıklaştırmada, standart sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sayısal sonuçlarda, gerçek çözümde olmayan kararsızlıklar ve salınımlar (osilasyonlar) meydana gelmektedir. Meydana gelen bu sayısal hataları ve kararsızlıkları gidermek için kararlı (stable) sonlu elemanlar yöntemleri geliştirilmiştir. Geliştirilen bu kararlı sonlu elemanlar yöntemlerinden bazıları; “Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) sonlu elemanlar yöntemi”, “Pressure-Stabilization Petrov-Galerkin (PSPG) sonlu elemanlar yöntemi”, “Bubble-stabilized sonlu elemanlar yöntemi”, “Galerkin Least-Squares Stabilization yöntemi“ vs. gibidir.

Kararlı sonlu elemanlar yöntemlerinin geliştirilmesine 1970'li yılların sonlarına doğru daha çok yoğunlaşmıştır. Hughes ve Brook [16]'daki çalışmalarında, kararlı yöntemlerin varlığını özetlemişlerdir. Hughes ve Brook 1979 yılında Streamline Upwind

Petrov-Galerkin yöntemini ortaya attılar [17] ve daha sonraları Hughes, Tezyuvar ve arkadaşları bu konuyla ilgili pek çok çalışma yaptılar [18,19].

Johnson SUPG yöntemini “Streamline Diffusion Methods (SD)” olarak benimsedi ve Johnson-arkadaşları zaman bağımlı problemlerle ilgili birçok çalışma yaptılar. 1981 yılında Johnson ve Nävert yöntemi ilk defa teoriksel ve sayısal olarak sistematik bir şekilde analiz ettikleri çalışmayı bir konferans kitapçığında yayınladılar [20]. Nävert 1982 yılında sonlu elemanlar yönteminin kararlılığı ile ilgili tez çalışmasını yayınladı [21]. Johnson, Hansbo ve Szepessy [22,23,24,25,26] sıkışabilir Euler denklemi ve sıkışmaz Navier-Stokes denklemlerini içeren korunum yasası için Streamline Diffusion yönteminin kararlılığı, yakınsaklığı ve doğruluğu (accuracy) üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Diğer bir kararlılık (stabilizasyon) yaklaşımı ise Guermond, tarafından önerilmiştir. Bu yaklaşımda sonlu elemanlar yönteminin uygulandığı bölge iki alt bölgeye ayrılmıştır. Bu alt bölgelerden birisi kaba ağ ile ayrıştırılıp, diğer bölge ise daha ince ağ ile ayrıştırılmıştır. Kararlılık parametresi sadece daha ince ağ ile ayrıştırılan bölgede probleme uygulanmıştır [27,28]. Bu son yöntem daha sonra Hughes ve arkadaşları tarafından varyasyonel çok ölçekli yöntemler olarak geliştirilmiştir [29,30,31,32].

Burman ve Hansbo konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemleri ve Stokes problemleri için bir kenar (edge) kararlılık yöntemi önermiştir. Bu yöntemde elemanın sınırları boyunca hareket eden gradyanın en küçük kareler kararlılığı kullanılmıştır [33,34].

Son dönemlerde ise Guermond ve arkadaşları entropi fonksiyonelinin rezidüsünü kullandıkları yeni bir kararlılık yöntemi önermişlerdir [35,36]. Zingan ve arkadaşları 2013 yılında entropi yönteminin sınır şartları ve zaman ayrıştırılması ile ilgili etkili bir çalışma yapmışlardır [37].

Kararlı sonlu elemanlar yöntemleri arasında en çok kullanılan yöntem Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) sonlu elemanlar yöntemidir. Bu tezde de SUPG sonlu elemanlar yöntemi kullanılacaktır.

1.5. Sınır Elemanlar Yöntemi ve Tarihsel Gelişimi

Sınır elemanlar yöntemi, sınır değer problemlerini çözmek için en çok kullanılan sayısal çözüm yöntemidir. Bu yöntemin ana fikri orijinal diferensiyel denkleme karşılık gelen bir integral denklemi bulmak ve bu integral denklemini ayrıklaştırma tekniği ile

çözmektir. Homojen kısmi diferensiyel denklemler için sadece sınır ayrıklaştırması yeterlidir, bu tür ayrıklaştırma gerçek çözüme daha yakın sayısal çözümler elde edilmesini sağlar ve yöntemin temel avantajı bu şekilde yapılan ayrıklaştırmadır [38].

Sınır elemanlar yöntemi hakkında ilk kitap Brebbia (1978) tarafından yayınlanmıştır. Brebbia bu kitabında sınır elemanlar yönteminin de, sonlu elemanlar yöntemi ve diğer birçok sayısal yöntemde olduğu gibi, ağırlıklı kalanlar yönteminin özel bir hali olduğunu ispatlamıştır.

Sınır elemanlar yöntemi ile ilgili ilk kapsamlı çalışma ve mühendislik biliminin birçok alanında ki uygulamaları Banerjee ve Butterfield (1981), tarafından yayınlanan kitapta verilmiştir. Aynı konu hakkında başka bir genel ve kapsamlı çalışma ise Brebbia, Telles, ve Wrobel (1984) tarafından yayınlanan kitapta verilmiştir. Sınır elemanlar yöntemi gün geçtikçe daha da çok kullanılan bir sayısal yöntem haline gelmektedir. Sınır elemanlar yöntemi, akışkanlar mekaniği, elastik olmayan problemler, potansiyel teori, elektromanyetikler ve manyetik alan etkisi altındaki akışkan problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır.

Sınır elemanlar yönteminde, integral denklemlerin çözümünde kullanılan büyüklüklere bağlı olarak direkt sınır elemanlar yöntemi ve direkt olmayan sınır elemanlar yöntemi olmak üzere, iki farklı yaklaşım kullanılmaktadır. Direkt olmayan sınır eleman yaklaşımında integral denklemler fiziksel anlamı olmayan büyüklükler kullanılarak çözümlenip, sınır büyüklükleri belirlenmektedir. Direkt olmayan sınır elemanlar yaklaşımında ya birinci temel çözümün (fundamental solution) ya da ikinci temel çözümün süper pozisyonları kullanılır. Direkt yaklaşımda ise, integral denklemler doğrudan sınır büyüklükleri cinsinden yazılıp, bilinen ve bilinmeyen sınır büyüklükleri birbirine bağlanmaktadır [39]. Brebbia ve Butterfield (1978) direkt ve direkt olmayan sınır elemanlar yaklaşımının eşdeğer olduğunu göstermiş olmasına rağmen; bilim insanları ve özellikle mühendisler tarafından çok tercih edildiği için, sınır elemanlar yaklaşımı denildiği zaman direkt sınır eleman yaklaşımı anlaşılmaktadır.

Sınır elemanlar yöntemi, genel potansiyel teori, potansiyel akışkan akımı, akustik, elektrik ve manyetik alan teorisi, elastostatik, elastodinamik, süreksiz ısı transferi, akışmaz esneklik, esneklik, su dalgaları, akışmaz akışkan akımı, Navier-Stokes akımı, dalga yayılımı, termoelastik ve diğer birçok zaman bağımlı mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılır [40].

1.6. MHD Akım Denklemleri ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Dairesel veya karesel kesitli kanal içerisindeki, kanal duvarı ve dış ortamın yalıtkan olduğu, MHD akım problemi için hız ve başlatılmış (indüklenmiş) manyetik alan ile ilgili bazı teoriksel (analitik) formüller Dragoş L. ve Shercliff J.A. tarafından elde edilmiştir [7,41]. Kanal içerisindeki MHD akım problemiyle ilgili sayısal bazı yaklaşımlar sonlu elemanlar yöntemi ile Carabineanu A., Dinu A. ve sınır elemanlar yöntemi ile de Meir A. J. tarafından verilmiştir [42,43]. Meir A. J. problemin zayıf formunun, hata analiziyle birlikte, varlık ve tekliliğini incelemiştir [43]. Dış ortam yalıtkan iken çeşitli duvar şartları ile birlikte kanal ve boru içerisindeki MHD akım probleminin çözümü için birçok sayısal yöntem kullanılmıştır. Bu çalışmalar; Sheu ve Lin [44] sonlu farklar yöntemi, Sing ve Lal [45], Barnett [46], Neslitürk ve Tezer-Sezgin [47] sonlu elemanlar yöntemi, Liu ve Zhu [48], Tezer-Sezgin ve Aydın [49], Tezer-Sezgin ve Bozkaya [50] sınır elemanlar yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Neslitürk ve Tezer-Sezgin [47] yüksek Hartmann sayısı için MHD akım problemini kararlı(stabilize)-sonlu elemanlar yöntemi ile çözmüştür. Keyfi arakesit ve duvar şartları için MHD denklemlerinin sayısal çözümü bazı ağırsız yöntemler kullanılarak da yapılmıştır [51,52].

Tezer-Sezgin ve Bozkaya [53] sınır elemanlar yöntemini kullanarak MHD denklemlerinin sonsuz bölgede sayısal çözümünü yapmışlardır. Bozkaya ve Tezer-Sezgin sınır elemanlar yöntemini kullanarak sonsuz bir şeritte MHD denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir [54]. MHD akımının dış bölgenin iletken olduğu düşünülen modeli için bir sonlu elemanlar-sınır elemanlar yöntemleri birleşim yaklaşımı Lungu [55] tarafından verilmiştir ancak bu genel durum için hesaplamalar elde edilememiştir. Tezer-Sezgin ve Aydın dış bölgenin iletken olarak düşünüldüğü MHD akımı için 2012 yılında sınır elemanlar yöntemini (BEM) ve 2014 yılında ise ikili karşılıklı sınır elemanlar yöntemini (DRBEM) kullanarak sayısal çözüm elde etmişlerdir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, tezde kullanılan sayısal yöntemler ve problemin matematiksel modellemesinden ortaya çıkan diferensiyel denklemler tanıtılacak. Daha sonra ilgili sayısal yöntem ile denklemlerin nasıl formüle edileceği ve çözüm aşamaları verilecektir.

2.1. Sonlu Elemanlar Yönteminin Diferensiyel Denklemlere Uygulanması

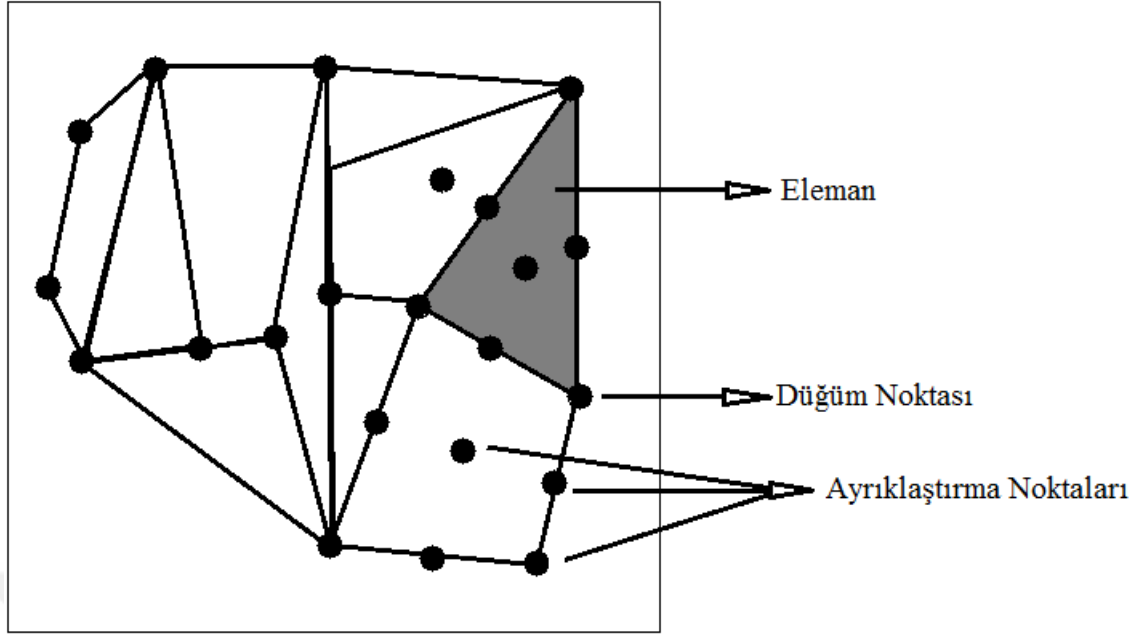
Bu bölümde sonlu elemanlar yönteminin diferensiyel denklemlere uygulanması incelenecektir.

Bu aşamada izlenecek adımlar şunlardır: [56]

- Bölgenin sonlu elemanlara bölünmesi.
- Zayıf veya ağırlıklı integral formülasyonunun elde edilmesi.
- Şekil fonksiyonlarının seçimi.
- Zayıf form üzerinden sonlu elemanlar yönteminin geliştirilmesi.
- Alt eleman matrisinde elde edilen denklemlerin ana matrise yerleştirilmesi.
- Sınır şartlarının uygulanması
- Elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözümü.

2.1.1. Ayrıklaştırma

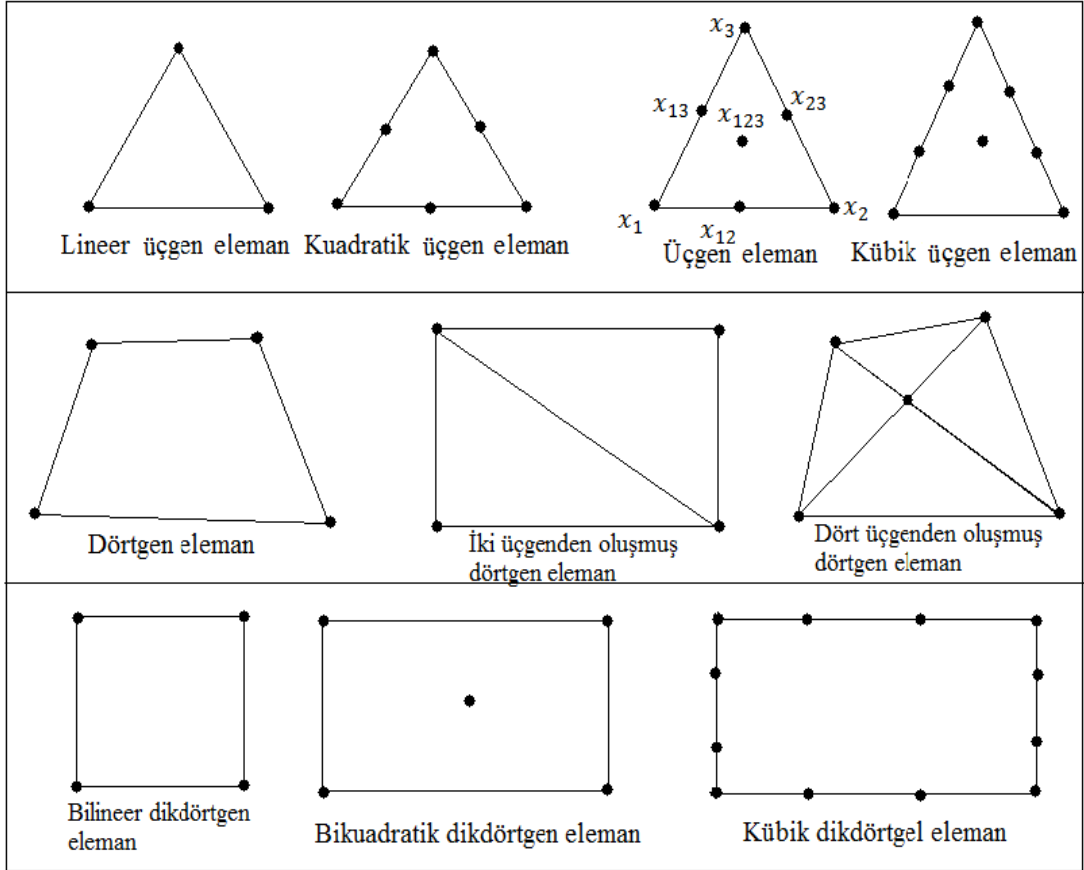
Sonlu elemanlar probleminin ilk ve en önemli adımlarından biri, eleman türünün belirlenmesi ve problemin çözüm bölgesinin belirlenen elemanın türüne göre alt bölgelere (elemanlara) ayrılmasıdır. Problemin tanım bölgesinin ayrıklaştırılması, problemin çözümünde gerekli olacak bellek miktarını, işlem süresini ve yaklaşık çözümün yakınsaklığını etkilemektedir. Problemin çözüm bölgesine en uygun eleman türü kullanılmalıdır. Eleman türüne ek olarak, elemanların boyutları ve sayıları da, tanımlanan problemi en iyi düzeyde temsil edecek ve hesaplamaları da en aza indirgeyecek şekilde seçilmelidir. Örneğin, fonksiyon belli bölgelerde ani değişim gösteriyor ise, bu bölgelerde elemanlar daha yoğun olarak seçilmelidir. Sayısal çözüm, seçilen elemanların çözüm bölgesini temsil etme oranında elde edilecek sonuçlar gerçek çözüme yaklaşmış olacaktır.



Şekil 2. Bir sonlu elemanlar modelinde ayrıklaştırma noktaları ve elemanlar

2.1.3. 2-D Elemanlar

İki boyutlu uzayda genelde üçgen ve dörtgen türü elemanlar tercih edilmektedir. Bu grubun temel elemanı, üç düğümlü üçgen elemandır. Üçgen eleman üzerinde altı, dokuz ve daha fazla ayrıştırma noktaları da seçilebilir. Ayrıklaştırma nokta sayısı, seçilecek şekil fonksiyonunun derecesine göre belirlenir. Düzgün olmayan bölgeler, daha düzgün ve geometrik olarak daha basit alt bölgelere ayrıştırılabildiğinden, bu tür bölgelerin ayrıklaştırılmasında genellikle üçgen eleman kullanılır. Bu sebeplerden dolayı üçgen eleman, daha kullanışlı ve daha çok tercih edilen eleman türüdür. Ayrıklaştırma noktaları sadece üçgenin köşe noktalarında alınırsa bu tür üçgen elemana doğrusal (lineer) üçgen eleman, ayrıklaştırma noktaları üçgenin köşe noktalarında ve her bir kenarlarında bir nokta olacak şekilde seçilirse bu tür eleman türüne ise kuadratik (quadratic) üçgen eleman denir. Dörtgen eleman ise daha çok tanım bölgesinin geometrik yapısına uygun olduğu problemlerde tercih edilen eleman türüdür. Dörtgen elemanda dört ya da daha fazla ayrıklaştırma noktası olabilir. Dörtgen eleman, problem bölgesi düzgün bir yapıda ise, daha çok özel durum olan dikdörtgen eleman şeklinde seçilir [15, 56].



Şekil 3. İki boyutlu elemanlar [58]

2.1.4. Şekil Fonksiyonları

Sonlu elemanlar yönteminde bilinmeyen fonksiyon, bölgenin ayrıklaştırılması ile elde edilen eleman üzerinde seçilen ayrıklaştırma noktalarında tanımlanan şekil fonksiyonlarının (N_i) doğrusal (lineer) kombinasyonu olarak; bilinmeyen fonksiyon $u(x)$, e elemanı üzerinde yaklaşık olarak düğüm noktalarındaki u_i^e değerleri kullanılarak

$$u(x) \approx u_h^e(x) = \sum_{i=1}^n u_i^e N_i^e(x) \quad (2.1)$$

formunda tanımlanır. İki boyutlu uzayda şekil fonksiyonlarının özellikleri, seçimi ve bu çalışmada kullanılan şekil fonksiyonları aşağıda tanıtılmıştır.

2.1.5. Üçgen Eleman Şekil Fonksiyonları

Üçgen elemanlarla modelleme de ilk adım, çözüm bölgesinin üçgenlerle ayrıklaştırılmasıdır. Ayrıklaştırma yapılırken dikkat edilmesi gereken temel şart bölgenin hiç boşluk kalmayacak şekilde üçgenlere ayrılması ve üçgenlerin birbiri üzerine çıkmamasıdır. Standart ayrıklaştırmalarda üçgenlerin birbirlerine köşelerinden bağlı olması gerekir. Yani; bir üçgenin köşesi diğer bir üçgenin kenarına gelmemelidir. Bu temel şartların yanı sıra sayısal çözümün gerçek çözüme yakınsaklığını etkileyen başka şartlarda vardır. Üçgenlerin eşkenar üçgene yakın seçilmesi sayısal çözümün gerçek çözüme daha yakın olmasını sağlamaktadır. Üçgenlerin iç açısı küçüldükçe sayısal çözüm ile gerçek çözüm arasındaki hata artmaktadır. Üçgenin iç açısını küçültmek yerine aynı bölge için birden fazla boyutu daha küçük fakat iç açısı daha büyük üçgen kullanmak gerçek çözüme daha yakınsak sayısal çözüm elde etmemizi sağlar. Üçgenleri tanımlamak için köşe noktalarından faydalanılır. Üçgenlerin köşe noktaları düğüm noktalarını oluşturmaktadır. Dolayısıyla bir üçgen elemanın üç düğüm noktası ve üç kenarı bulunmaktadır.

Üçgenlerin köşe noktaları yazılırken bütün üçgenler için aynı dönüş yönü kullanılmalıdır. Bu dönüş yönü ya saat yönünde ya da saat yönünün tersi yönde olmalıdır. Bir üçgenin köşe noktaları yazılırken istenilen köşeden başlanabilir. Dikkat edilmesi gereken husus hangi noktadan başlanırsa başlansın diğer iki noktanın kullanılan dönüş yönüne göre seçilmesi gerekliliğidir. Bu kurallar doğrultusunda bölge üçgenlere ayrıklaştırılır. Her bir üçgen üzerinde de noktalar seçilerek kullanılacak şekil fonksiyonları belirlenir.

Bu çalışmada kullanılan sadece üçgenin köşe noktaları göz önünde bulundurularak birim üçgen üzerinde $[0,1]$ aralığında tanımlı (ξ, η) değişkenleri ile tanımlanan boyutsuz doğrusal (lineer) şekil fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$N_1(\xi, \eta) = \xi$$

$$N_2(\xi, \eta) = \eta$$

$$N_3(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta .$$

2.2. Laplace Denklemi İçin Sonlu Elemanlar Yöntemi Formülasyonu

Sonlu elemanlar yöntemi formülasyonu elde edilirken önce problemin güçlü hali, zayıf hale indirgenir. Daha sonra ise problemin zayıf hali üzerinden, varyasyonel hal elde edilir.

2.2.1. Laplace Denklemi İçin Zayıf Hal

İlk olarak bazı fonksiyon uzaylarını tanımlayalım.

$$L^2(\Omega) = \left\{ u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) \mid u' \in L^2(\Omega) \}$$

$$V = H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \mid u = 0, \partial\Omega \}$$

Burada;

$L^2(\Omega)$; Ω bölgesindeki ikinci dereceden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı,

$H^1(\Omega)$; $L^2(\Omega)$ uzayının alt uzayı,

$V = H_0^1(\Omega)$; $H^1(\Omega)$ uzayının, Ω sınırında sıfır değeri alan alt uzayını simgelemektedir.

Verilen diferensiyel denklemin güçlü halini sağlayan $u \in V$ için, problemin güçlü hali homojen formda yazılır. Sonra denklem bir ω ağırlık (test) fonksiyonu ile çarpılır ve problemin tanım bölgesi üzerinden integrali alınır ve sifıra eşitlenir. Bu yöntemle ağırlıklı rezidü yöntemi (weighted residual method) denir.

2-boyutlu uzayda Ω bölgesinin sınırı $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ olmak üzere Dirichlet ve Neumann türü sınır koşulları türünden $u(x,y)$ bilinmeyen fonksiyonu için Laplace denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x,y) = 0 & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y)|_{(x,y) \in \partial\Omega_1} = u_0 & \partial\Omega_1 \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial n}|_{(x,y) \in \partial\Omega_2} = q_0 & \partial\Omega_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

2-boyutlu uzayda $\partial\Omega_1$ üzerinde Dirichlet türü sınır koşulu olduğu için ω ağırlık fonksiyonu, öyleki $\forall \omega \in H_0^1(\Omega)$ olacaktır. Başka bir ifade ile $\partial\Omega_1$ üzerinde $\omega = 0$ alınır. ω ağırlık fonksiyonu olmak üzere Laplace denkleminin Ω bölgesi üzerinde ağırlıklı rezidü yöntemi uygulanırsa; ilk olarak

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) \omega d\Omega = 0 \quad (2.3)$$

eşitliği elde edilir. (2.3) eşitliğinde $\nabla^2 u \cdot \omega$ terimi için Divergence teoremi uygulanırsa;

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) \omega d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \omega d\Omega + \oint_{\partial\Omega_1} (\vec{n} \cdot \nabla u) \cdot \omega ds + \oint_{\partial\Omega_2} (\vec{n} \cdot \nabla u) \cdot \omega ds = 0 \quad (2.4)$$

eşitliği elde edilir. $\partial\Omega_1$ sınırı üzerinde $\omega = 0$ olacağından, $\oint_{\partial\Omega_1} (\vec{n} \cdot \nabla u) \cdot \omega ds = 0$ olur.

Burada $\vec{n} = (n_x, n_y)$, $\partial\Omega$ sınırı üzerindeki birim normal vektörü göstermektedir. Sınır integralinde;

$$\vec{n} \cdot \nabla u = q_n = (n_x, n_y) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \quad (2.5)$$

olarak alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa; (2.4) denklemi, aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \omega d\Omega - \oint_{\partial\Omega_2} q_n \cdot \omega ds = 0 \quad (2.6)$$

Elde edilen denklem, alan integralleri için bi-lineer formda

$$a(u, \omega) = \int_{\Omega} (u \cdot \omega) d\Omega$$

ve sınır integrali için lineer formda

$$\ell(q_n, \omega) = \int_{\partial\Omega_2} (q_n \cdot \omega) d\Omega$$

şeklinde tanımlanır ise denklemin zayıf hali

$$a(\nabla u, \nabla \omega) - \ell(q_n, \omega) = 0 \quad (2.7)$$

eşitliği ile yazılabilir.

Problemin (2.7)'deki haline, (2.4)'deki halinin zayıf hali denir.

Problemin zayıf haline ihtiyaç duyulmasının sebebi;

- Türev mertebesi bir derece düşer.
- Türev mertebesindeki bu bir derece düşüş, seçilen şekil fonksiyonlarının birinci mertebeden türevlenebilmesini yeterli kılacaktır.
- Denklemin zayıf halinin sadece düğüm noktalarında sağlanması koşulunu sağlaması beklenir.

Sayısal çözümdeki bu esnekliklerden dolayı (2.7), denklemin zayıf hali olarak adlandırılır.

Ancak, denklemin güçlü hali zayıf halini de sağlarken, zayıf halinin güçlü halini sağlaması gerekmez.

2.2.2. Laplace Denklemi İçin Varyasyonel Hal

Bilinmeyen u fonksiyonu Ω bölgesindeki her bir e elemanı üzerinde;

$$u(x) \approx u_h^e(x) = \sum_{i=1}^n u_i^e N_i^e(x)$$

ayrıklaştırılmış formda tanımlansın.

Yukarıdaki eşitlikte $u_i^e = u(x_i)$ ve $N_i^e(x)$, δ_{ij} kronecker delta fonksiyonunu göstermek üzere,

$$N_i^e(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

özelliğini sağlayan lineer şekil fonksiyonlarıdır.

Yaklaşık çözümün gerçek çözüme yakınsaması için $u_h^e(x)$ yaklaşımı üzerinde aşağıdaki koşullar belirtilir: [59]

- $u_h^e(x)$ her bir eleman üzerinde ve elemanların bağlantı noktalarında sürekli olmalıdır.
- Baz polinomları her biri lineer bağımsız olan terimlerden oluşmalıdır.
- $u_h^e(x)$ yaklaşımını temsil eden polinomlar tam olmalıdır.

Sonlu elemanlar yaklaşımının problemin zayıf halinde yerine yazılarak elde edilen integral eşitliği, problemin tanım (çözüm) bölgesinin ayrıklaştırıldığı her bir alt bölge üzerinde hesaplanır. Bu işlemler sonucu elde ettiğimiz integral denkleminde problemin varyasyonel (ayrıklaştırılmış) hali denir.

Sonlu elemanlar yöntemi formülasyonunda (2.7) denkleminde u fonksiyonu yerine (2.1) eşitliğindeki yaklaşım yazılırsa;

$$\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial x} \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right\} dx dy - \oint_{\partial \Omega_e} q_n \cdot \omega ds = 0 \quad (2.8)$$

integral denklemi elde edilir. Problemin (2.8) deki hali, problemin her bir eleman üzerinde ayrıklaştırılmış hali olarak adlandırılır. Galerkin yönteminde ω ağırlık fonksiyonu da şekil fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilir. Ağırlık fonksiyonunun da şekil fonksiyonları türünden ifadesi;

$$\nabla \omega = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x}, \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \quad \text{ve} \quad \nabla u = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}, \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \quad (2.9)$$

şeklindedir.

Bi-lineer ve lineer formda problemin varyasyonel hali

$$a(\nabla u_h, \nabla \omega_h) - \ell(q_h, \omega_h) = 0$$

eşitliği ile tanımlanabilir. Daha ayrıntılı olarak (2.9)'daki ifadeler (2.8)'de kullanılarak j . eleman üzerindeki düğüm noktalarında bilinmeyen fonksiyon değerleri için cebirsel denklemler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\int_{\Omega_e} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) u_i^e \right\} dx dy - \oint_{\partial\Omega_e} q_n \cdot N_j^e ds = 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

veya

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) dx dy \right\} u_i^e - \oint_{\partial\Omega_e} q_n \cdot N_j^e ds = 0 \quad j=1,2,\dots,n \quad (2.10)$$

(2.10) denklemindeki terimleri gruplandırmak için aşağıdaki tanımlar yapılsın.

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) dx dy$$

$$Q_j^e = \oint_{\partial\Omega_e} q_n \cdot N_j^e ds$$

Bu tanımlar (2.11) denkleminde kullanılırsa;

$$\sum_{i=1}^n K_{ij}^e u_i^e = Q_j^e \quad j=1,2,\dots,n \quad (2.11)$$

şeklindeki denklem sistemi formunda ifade edilebilir. (2.11) denklem sistemi

$$[K^e]\{u^e\} = \{Q^e\} \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilir.

(2.12) eşitliğinde $[K^e]$ matrisi $n \times n$ tipinde, pozitif tanımlı ve simetrik eleman matrisini, $\{Q^e\}$ ise $n \times 1$ tipinde eleman vektörünü göstermektedir.

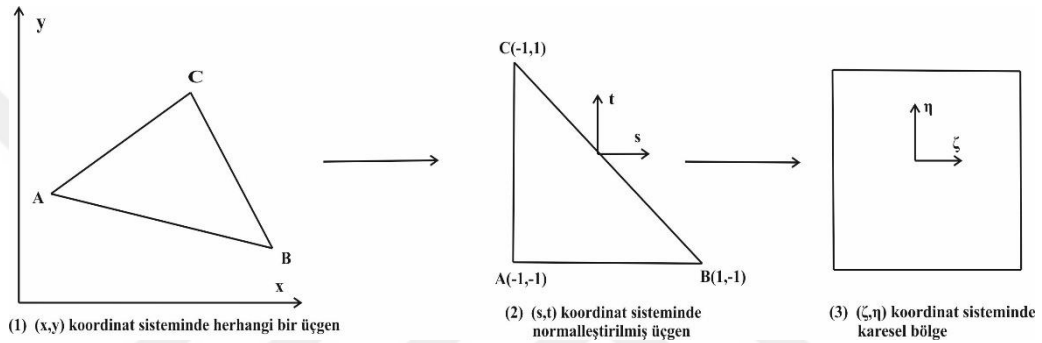
Her bir eleman için, eleman matris ve vektörü hesaplanır. Elde edilen eleman matris ve vektörleri kullanılarak elemanlar üzerindeki noktaların birbirlerine olan etkileri problem çözüm bölgesindeki tüm bilinmeyenlere karşılık gelen büyük (ana) sisteme etki ettirilir (global assembly procedure). Elde edilen büyük sistem ise aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$[K]\{u\} = \{Q\} \quad (2.13)$$

Büyük sistemin çözümü yapılmadan önce sınır koşulları sisteme etki ettirilir [15].

2.2.3. Üçgen Eleman İçin Sayısal İntegral

Sonlu elemanlar yönteminde, üçgen eleman üzerinde alan integralleri sayısal olarak hesaplanırken genellikle birim üçgen bölge üzerinde Gauss-Kuadratur yöntemi kullanılır. Bu yöntemi uygulayabilmek için gerekli olan Gauss noktaları ve karşılık gelen ağırlık katsayıları ise literatürde tablo halinde sonlu sayıda verilmiştir. Bu tez de, alternatif olarak Farzana Hussain ve M. S. Karim [60] tarafından önerilen sayısal integral hesaplama yöntemi kullanılacaktır.



Şekil 4. Sayısal İntegral Bölge Dönüşümü

Herhangi bir üçgensel bölge üzerinden integral hesaplanırken; Şekil-4'deki (1) üçgensel bölgesi, önce (2)'deki üçgensel bölgeye, daha sonra ise (2)'deki üçgensel bölge, (3)'deki karesel bölgeye dönüştürülür. Bu dönüşüm sayesinde karesel bölge üzerinde istenilen derecede Legendre polinomunun kökleri hesaplanarak, istenilen sayıda nokta kullanılıp sayısal integral hesaplanır.

Yukarıdaki bölge dönüşümleri aşağıdaki gibidir.

Şekil-4'de (1)'deki herhangi bir üçgensel bölgeyi (2)'deki normalleştirilmiş üçgensel bölgeye dönüştürelim:

(1)'deki üçgensel bölgenin köşe noktaları $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ olsun. Burada $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{R}$ dir. $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$I = \int_{\Omega} f(x, y) dx dy \quad (2.14)$$

integralini hesaplayalım. Önce bölge dönüşümleri verilecek olursa;

$$x = a_1 + b_1s + c_1t \quad (2.15)$$

$$y = a_2 + b_2s + c_2t$$

eşitlikleri ile yapılır. Şekil fonksiyonları ise;

$$N_1 = \frac{-1}{2}(s + t), N_2 = \frac{1}{2}(s + 1), N_3 = \frac{1}{2}(t + 1) \text{ gibidir.}$$

(2.15)'deki eşitliklerde Şekil-4 (1) ve (2)'deki bölgelerin köşe noktaları kullanılırsa;

$$x_1 = a_1 - b_1 - c_1$$

$$y_1 = a_2 - b_2 - c_2$$

$$x_2 = a_1 + b_1 - c_1$$

$$y_2 = a_2 + b_2 - c_2$$

$$x_3 = a_1 - b_1 + c_1$$

$$y_3 = a_2 - b_2 - c_2$$

(2.16)

eşitlikleri elde edilir. (2.16)'deki eşitlikler matris-vektör formunda yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

şeklinde olacaktır. (2.16) eşitliklerinden $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ ifadeleri, $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ türünden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$a_1 = \frac{x_2 + x_3}{2}$$

$$b_1 = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

$$c_1 = \frac{x_3 - x_1}{2}$$

$$a_2 = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{2}$$

$$c_2 = \frac{y_3 - y_1}{2}$$

(2.17)

Jacobian matrisinin determinanı ise;

$$\begin{aligned}
|J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_2 - x_1}{2} & \frac{x_3 - x_1}{2} \\ \frac{y_2 - y_1}{2} & \frac{y_3 - y_1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\left(\frac{y_3 - y_1}{2}\right) - \left(\frac{x_3 - x_1}{2}\right)\left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4} \{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\} = \frac{ALAN}{4}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda (2.14)'deki integral;

$$I = \frac{ALAN}{4} \int_{t=-1}^1 \int_{s=-1}^{-t} f(x(s,t), y(s,t)) dt ds \quad (2.18)$$

integraline dönüşür. Bu işlemlerle Şekil-4 (1) bölgesi (2) bölgesine dönüştürülmüş olur. Son olarak (2) bölgesini (3) bölgesine dönüştürmek için

$$s = \zeta, t = \frac{(1 - \zeta)(1 + \eta)}{2} - 1$$

alınıp (2.17)'deki eşitliklerle birlikte (2.15) eşitliklerinde kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x_2 + x_3}{2} + \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\zeta + \left(\frac{x_3 - x_1}{2}\right)\left(\frac{(1 - \zeta)(1 + \eta)}{2} - 1\right) \\
y &= \frac{y_2 + y_3}{2} + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)\zeta + \left(\frac{y_3 - y_1}{2}\right)\left(\frac{(1 - \zeta)(1 + \eta)}{2} - 1\right)
\end{aligned} \quad (2.19)$$

elde edilir. Yine bu bölge dönüşümü için Jacobain matrisinin determinanı hesaplandığında;

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial \zeta} & \frac{\partial s}{\partial \eta} \\ \frac{\partial t}{\partial \zeta} & \frac{\partial t}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -(1 + \eta) & \frac{1 - \zeta}{2} \end{vmatrix} = \frac{1 - \zeta}{2}$$

olarak bulunur. Bu dönüşümleri, (2.18) integralinde kullanırsak;

$$\begin{aligned}
I &= \frac{ALAN}{4} \int_{\zeta=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 f\left(x\left(\zeta, \frac{(1 - \zeta)(1 + \eta)}{2} - 1\right), \right. \\
&\quad \left. y\left(\zeta, \frac{(1 - \zeta)(1 + \eta)}{2} - 1\right)\right) \left(\frac{1 - \zeta}{2}\right) dt ds
\end{aligned} \quad (2.20)$$

elde edilir. Dolayısıyla; I integrali

$$I = ALAN \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{1 - \zeta_i}{8}\right) w_i w_j f\left(\zeta_i, \frac{(1 - \zeta_i)(1 + \eta_j)}{2} - 1\right) \quad (2.21)$$

şeklinde sayısal olarak hesaplanır.

Şekil fonksiyonları ise;

$$N_1 = \frac{1}{4}(\zeta\eta - \zeta - \eta + 1), N_2 = \frac{1}{2}(\zeta + 1), N_3 = \frac{1}{4}(\eta - \zeta - \zeta\eta + 1)$$

gibi olacaktır [60].

2.3. Sınır Elemanlar Yönteminin Diferensiyel Denklemlere Uygulaması

Sınır elemanlar yönteminde verilen problem, problemin temel çözümü kullanılarak, çözüm bölgesinin sınırı üzerindeki bir sınır integral denkleme dönüştürülür. Çözüm bölgesinin sınırı, sınır elemanlarına bölünür ve üzerindeki bütün düğüm noktaları düşünüldüğünde sonuçta bir integral denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden, çözüm bölgesi sınırındaki tüm düğüm noktalarına karşılık gelen birim normal vektörler bulunur. Bulunan bu birim normal vektörler ve problemin sınır koşulu da kullanılarak çözüm elde edilir.

2.3.1. Laplace Denklemi İçin Sınır Elemanlar Yöntemi

Ω bölgesinin sınırı $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ olmak üzere sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi Dirichlet ve Neumann türü sınır koşullarında tanımlı Laplace denklemi

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x, y) = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y)|_{(x,y) \in \partial\Omega_1} = u_0 & \partial\Omega_1 = \Gamma_1 \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial n}|_{(x,y) \in \partial\Omega_2} = q_0 & \partial\Omega_2 = \Gamma_2 \end{cases} \quad (2.22)$$

eşitlikleri ile tanımlanmış olsun. Burada n , $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ sınırı üzerinde, yönü dışa doğru olan ve belirli noktalardaki değerleri bilinen normal vektörü göstermektedir.

Yukarıdaki denklemde bilinmeyen fonksiyon u ve normal türevi q nun gerçek değerleri ile yaklaşık değerlerinin yer değiştirmesinden doğan hatayı minimize etmek için denklem u^* ağırlık fonksiyonu ile ortogonalleştirilir. Burada $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$, problemin tanım bölgesinin sınırı boyunca normal türevi ifade etmektedir.

Yani, ϵ rezidüleri, u ve q yaklaşık değerleri göstermek üzere, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\Omega} &= \nabla^2 u \neq 0 && \Omega \text{ bölgesinde} \\
\epsilon_1 &= u - u_0 \neq 0 && \Gamma_1 \text{ üzerinde} \\
\epsilon_2 &= q - q_0 \neq 0 && \Gamma_2 \text{ üzerinde}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Ağırlıklı rezidü yöntemi kullanılarak yukarıdaki rezidüleri, u^* ve q^* ağırlık fonksiyonları olmak üzere (2.23) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\int_{\Omega} \epsilon_{\Omega} u^* d\Omega + \int_{\Gamma_1} \epsilon_{\Gamma_1} q^* d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} \epsilon_{\Gamma_2} u^* d\Gamma_2 = 0 \tag{2.24}$$

Bu yöntemdeki asıl amaç rezidüleri sıfır yapmaya çalışmaktır. (2.24) denkleminde rezidüleri yazılırsa;

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u u^* d\Omega + \int_{\Gamma_1} (u - u_0) q^* d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} (q - q_0) u^* d\Gamma_2 = 0 \tag{2.25}$$

integral denklemi elde edilir.

Green eşitliği aşağıdaki gibidir.

$$\int_{\Omega} \omega \nabla^2 u d\Omega = \int_{\partial\Omega} \omega \frac{\partial u}{\partial n} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \omega \nabla u d\Omega \tag{2.26}$$

(2.25) denkleminde Green eşitliği kullanılırsa (2.25) denklemi;

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u^* d\Omega + \int_{\Gamma_1} (u - u_0) q^* d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} (q - q_0) u^* d\Gamma_2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.27}$$

şeklinde ifade edilir. Bir kez daha Green eşitliği uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} q u^* d\Gamma + \int_{\Omega} u \nabla^2 u^* d\Omega - \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - u_0) q^* d\Gamma_1 \\
&\quad - \int_{\Gamma_2} (q - q_0) u^* d\Gamma_2 = 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

eşitliği elde edilir.

(2.28) denklemindeki u^* ağırlık fonksiyonu aşağıdaki gibi seçildi.

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 u^* d\Omega = -c_i u_i \tag{2.29}$$

Burada $i = (x_i, y_i)$ ve $u_i = u(x_i, y_i)$ olmak üzere $c_i = c(x_i, y_i)$ katsayısının değeri i , noktasının yerine bağlıdır. (2.29) daki eşitliği ve (2.22) deki sınır şartlarını (2.28) denkleminde kullanırsak (2.28) denklemi;

$$c_i u_i - \int_{\Gamma_1} (q u^* - u_0 q^*) d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} (q_0 u^* - u q^*) d\Gamma_2 = 0 \tag{2.30}$$

şeklini alır [61].

u^* ağırlık fonksiyonu çözümü aranan Laplace diferensiyel denklemin temel çözümü olarak alınır.

2.3.2. Laplace Denklemi İçin Temel Çözüm

Laplace denkleminin temel çözümü u^* , denklemi sağlamalıdır ve temel çözüm bir i , noktasında hareket eden birim kaynak tarafından üretilen alan olarak tanımlanır.

u^* , temel çözümü kutupsal koordinatlarda tanımlı Laplace denklemini $u^* = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \frac{\partial u^*}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2}$ sağlar. Laplace denkleminin radyal yönde simetrik özelliğinden dolayı sadece r değişkenine bağlıdır. Başka bir deyişle $u^* = u^*(r)$.

Ayrıca u^* , temel çözümü aşağıdaki Poisson denklemini sağlar.

$$\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0 \quad (2.31)$$

Burada Δ_i Dirac delta fonksiyonunu göstermektedir. Dirac delta fonksiyonu $i = (x_i, y_i)$ noktasında sonsuza yaklaşır ve diğer noktalarda ise sıfırdır. Δ_i , Dirac delta fonksiyonunun bölge üzerindeki integrali 1'dir. Bu eşitlikler kullanıldığında

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \frac{\partial u^*}{\partial r})}{\partial r} = -\frac{\Delta_i}{2\pi r} \text{ denkleminin çözümünden } u^*(r) = \frac{1}{2\pi} \ln(r) + c_1 \ln(r) + c_2$$

c_1 ve c_2 sabitleri türünden çözümü elde edilir. c_2 sabiti genellikle sıfır alınır. c_1 sabiti için $2\pi r \frac{\partial u^*}{\partial r} = -1$ impulse koşulu sağlatıldığında $c_1 = 0$ olarak elde edilir.

Sonuç olarak Laplace denklemi için temel çözüm;

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln(r) \text{ olarak elde edilir.}$$

Dirac delta fonksiyonunun bölge üzerinden integrali;

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 u^* d\Omega = \int_{\Omega} u (-\Delta_i) d\Omega = -c_i u_i \quad (2.32)$$

şeklindedir. Burada;

$$u = u(x_i, y_i) \text{ ve } c_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x_i, y_i) \in \Gamma \\ 1 & (x_i, y_i) \in \Omega \end{cases} \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

(2.32) denkleminin temel çözümünde yer alan r , Dirac delta fonksiyonun uygulandığı nokta ile çözüm bölgesindeki herhangi bir nokta arasındaki uzaklığı göstermektedir.

(2.30) denkleminde bazı sadeleştirmeler yapılarak, u_0 , u 'nun bilinen değeri ve q_0 , q 'nun bilinen değeri olmak üzere;

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \Gamma_2 \text{ üzerinde} \\ u_0 & \Gamma_1 \text{ üzerinde} \end{cases}$$

ve

$$\tilde{q} = \begin{cases} q & \Gamma_1 \text{ üzerinde} \\ q_0 & \Gamma_2 \text{ üzerinde} \end{cases}$$

\tilde{u} ve \tilde{q} değerleri elde edilir. Elde edilen bu değerler (2.30) denkleminde kullanılır ise; $\vec{r} = (x, y)$ ve $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ olmak üzere denklem;

$$c_i \tilde{u}_i - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\tilde{q} \ln|\vec{r} - \vec{r}_i| - \tilde{u} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} (\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma = 0 \quad (2.33)$$

şeklini alır [62].

2.3.3. Sınırın Ayırıklaştırılması

Bu kısımda çözüm bölgesinin sınırının ayırıklaştırılması verilecektir. İki boyutlu uzaydaki çözüm bölgesinin sınırı N tane elemana (aralığa) bölünür. Çözüm bölgesinin sınırındaki değerleri bilinmeyen noktalara düğüm noktaları (node) adı verilir. Eğer düğüm noktası elemanın orta noktası olarak seçilirse bu tür elemana sabit (constant) eleman, elemanın uç noktaları düğüm noktaları olarak seçilirse bu tür elemana doğrusal (linear) eleman, düğüm noktaları elemanın uç noktalarıyla birlikte orta noktası olarak seçilir ise bu tür elemana ise kuadratik (quadratic) eleman denir. Bu tezdeki problemin çözümü için sınır elemanlar yönteminde doğrusal eleman türü kullanılacaktır. Son olarak (2.33) denkleminin ayırıklaştırılmış şekli aşağıdaki gibi elde edilir.

$$c_i \tilde{u}_i - \frac{1}{2\pi} \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} \left(\sum_{m=1}^n \tilde{q}_m N_m \right) \ln|\vec{r} - \vec{r}_i| d\Gamma_e + \frac{1}{2\pi} \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} \left(\sum_{m=1}^n \tilde{u}_m N_m \right) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} d\Gamma_e = 0 \quad (2.34)$$

Burada \tilde{u}_m ve \tilde{q}_m fonksiyonları m . düğüm noktasındaki çözüm ve normal türevlerdir. N_m ise e elemanı için şekil (shape) fonksiyonu, N , çözüm bölgesinin sınırı üzerindeki eleman sayısı, n , ise e elemanı üzerindeki düğüm nokta sayısını göstermektedir.

2.3.4. Sabit Eleman

Problemin çözüm bölgesinin sınırının N elemana bölündüğü kabul edilsin. u ve q 'nun değerleri eleman üzerindeki her bir noktada eşit ve elemanın orta noktasındaki düğüm noktasının değerine eşit olduğu varsayılır. Bu tip elemanlarda elemanın uç noktaları sadece problemin çözüm bölgesinin sınırını geometrik olarak tanımlamak için kullanılır. Bu tip elemanların düğüm noktalarında sınır her zaman düzgündür ve düğüm noktası elemanın orta noktasındadır. Dolayısıyla c_i sabit katsayısı $\frac{1}{2}$ 'ye eşittir. Sabit elemanda N_m şekil fonksiyonları her bir eleman için sabit ve 1'dir. Bu kısıtlardan hareketle (2.34) denkleminde sabit eleman yöntemi kullanılır ise denklem;

$$\frac{1}{2}\tilde{u}_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} \tilde{u}_j - \sum_{j=1}^N G_{ij} \tilde{q}_j = 0 \quad (2.35)$$

olarak ifade edilir. \hat{H}_{ij} ve G_{ij} ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ij} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} d\Gamma_j \\ G_{ij} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \ln|\vec{r} - \vec{r}_i| d\Gamma_j \end{aligned} \quad (2.36)$$

$r_i = (x_i, y_i)$ ve $r = (x, y)$ sınır boyunca düğüm noktalarında değişmektedir ve $r = (x, y)$ j 'nci elemanda bulunmaktadır.

$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ fonksiyonuna Kronecker-delta fonksiyonu (Kronecker-deltası)

denilmektedir. $i = j$ iken $\frac{1}{2}\tilde{u}_i = \frac{1}{2}$ ve $i \neq j$ iken $\frac{1}{2}\tilde{u}_i = 0$ olacağından

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}$$

olarak ifade edilebilir. Böylece (2.35) denklemini;

$$\sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} \tilde{u}_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} \tilde{q}_j \quad (2.37)$$

olarak yazılır. i , düğüm noktasının 1'den N 'e kadar hareket ettiğini ve temel çözümün her bir düğüm noktasına sıra ile uygulandığını düşünelim. Bu durumda (2.37) denkleminin sırası ile her bir sınır noktasına uygulanması ile bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu denklem sistemi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$[H]\{u\} = [G]\{q\} \quad (2.38)$$

Bu denklem sisteminde H ve G , $N \times N$ tipinde matrisler ve u ile q ise N , boyutlu vektörlerdir. Bu denklem sisteminde u vektörünün N_1 ve q vektörünün ise N_2 noktada değeri bilinmektedir ($N_1 + N_2 = N$). Dolayısıyla (2.38) denklem sisteminde sadece N bilinmeyen vardır. (2.38)'de bu sınır şartlarını üretmek için sistemde H ve G matrislerinin sütunları bir taraftan diğer tarafa taşınarak yeniden düzenlenir. Bütün bilinmeyenlerin sistemin sol tarafına taşınması ile sistem;

$$Ax = F \quad (2.39)$$

matris-vektör sistemine dönüşür.

Burada x , u ve q vektörlerindeki bilinmeyen sınır değerlerinden oluşmaktadır. F ise u ve q vektörlerindeki bilinen değerler ile H ve G matrislerindeki karşılık gelen sütunların çarpılması ile elde edilir.

Böylece (2.39) denklemi çözülebilir ve bu çözüm ile sınırdaki bütün değerler bulunur. Dolayısıyla sınırdaki değerlerin bilinmesi çözüm bölgesinin içindeki u veya u 'nun türev değerlerinin de bulunmasını sağlar. İç bölgedeki herhangi bir i , noktasında u 'nun değerini aşağıdaki eşitlik ile bulunur

$$\tilde{u}_i = \int_{\Gamma} \tilde{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \tilde{u} q^* d\Gamma. \quad (2.40)$$

Burada temel çözüm i iç noktasında hareket eder ve u ve q 'nun bütün değerleri bilinmektedir. Dolayısıyla çözüm direkt olarak integrasyona bağlı olmuş olur.

Şimdi ise aynı ayrıklaştırmayı sınır integralleri için kullanırsak;

$$\tilde{u}_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} \tilde{q}_j - \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} \tilde{u}_j \quad (2.41)$$

elde edilir.

Son denklemdeki G_{ij} ve \hat{H}_{ij} katsayı matrisleri her bir iç nokta için ayrı ayrı hesaplanmalıdır. $i \neq j$ durumunda G_{ij} ve \hat{H}_{ij} katsayı matrisleri farklı sayısal integrasyon yöntemleri kullanılarak hesaplanabilir.

$i = j$ olması durumunda ise temel çözüm singüler (singular) olur. Dolayısıyla singülerliği devre dışı bırakmak için daha kesin veya en az hata veren bir sayısal integrasyon algoritmasına ihtiyaç vardır. Bu tür integraller için yüksek mertebeden

integrasyon yöntemleri veya logaritmik integrasyonlar gibi özel formüller kullanılması gerekmektedir.

Sabit eleman için G_{ii} ve \hat{H}_{ii} analitik olarak hesaplanabilir. $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$ olduğu için $\hat{H}_{ii} = 0$ 'dır. G_{ii} ise analitik olarak, l elemanın boyu olmak üzere

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \ln \left(\frac{2}{l} \right) + 1 \right\} \quad (2.42)$$

değerini alır.

2.3.5. Doğrusal Eleman

Bu tür elemanlarda düğüm noktaları elemanın uç noktaları olarak seçilir. N elemana ayrıklaştırılan sınır için sınır elemanlar yöntemi uygulanırsa, denklem;

$$c_i \tilde{u}_i - \frac{1}{2\pi} \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_j} \left(\sum_{j=1}^2 \tilde{q}_j N_j \right) \ln |\vec{r} - \vec{r}_i| d\Gamma_j + \frac{1}{2\pi} \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_j} \left(\sum_{m=1}^2 \tilde{u}_j N_j \right) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} d\Gamma_j = 0 \quad (2.43)$$

şeklinde yazılır.

Lineer eleman yönteminde eleman üzerinde ki herhangi bir noktada u ve q 'nun değerleri elemanın düğüm noktaları ve N_1, N_2 gibi iki interpolasyon fonksiyonunun bir lineer kombinasyonu olarak tanımlanabilir. Bu lineer kombinasyon boyutsuz koordinatlar da;

$$u(\xi) = N_1 u_1 + N_2 u_2 = [N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$q(\xi) = N_1 q_1 + N_2 q_2 = [N_1 \ N_2] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır.

ξ koordinatı boyutsuzdur ve -1 'den 1 'e değişir. Bu ξ koordinatında tanımlanan interpolasyon fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\
N_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Herhangi bir j , elemanı üzerindeki integraller aşağıdaki gibi yazılabilir. (2.43) denkleminin sol tarafı:

$$\int_{\Gamma_j} (\tilde{u})q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [N_1 \ N_2] q^* d\Gamma \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [h_{ij}^1 \ h_{ij}^2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlikteki h_{ij}^1 ve h_{ij}^2 terimleri her bir j elemanı için aşağıdaki gibi

$$h_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} N_1 q^* d\Gamma \tag{2.47}$$

ve

$$h_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} N_2 q^* d\Gamma \tag{2.48}$$

eşitlikleri ile yazılır.

Yine (2.44) denkleminin sağ tarafı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\int_{\Gamma_j} (\tilde{q})u^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [N_1 \ N_2] u^* d\Gamma \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = [g_{ij}^1 \ g_{ij}^2] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

Bu denklemdeki g_{ij}^1 ve g_{ij}^2 terimleri.

$$g_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} N_1 u^* d\Gamma \tag{2.50}$$

ve

$$g_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} N_2 u^* d\Gamma \tag{2.51}$$

olarak yazılır.

Çözüm bölgesinin sınırı doğrusal elemanlara ayrıştırıldığı zaman j . elemanın 2. düğüm noktası ile $j + 1$. elemanın 1. düğüm noktası çakışmaktadır. Dolayısıyla \hat{H}_{ij} matrisinin elemanları; j . elemanın h_{ij}^1 terimi ile $j - 1$. elemanın h_{ij}^2 teriminin toplamına eşittir.

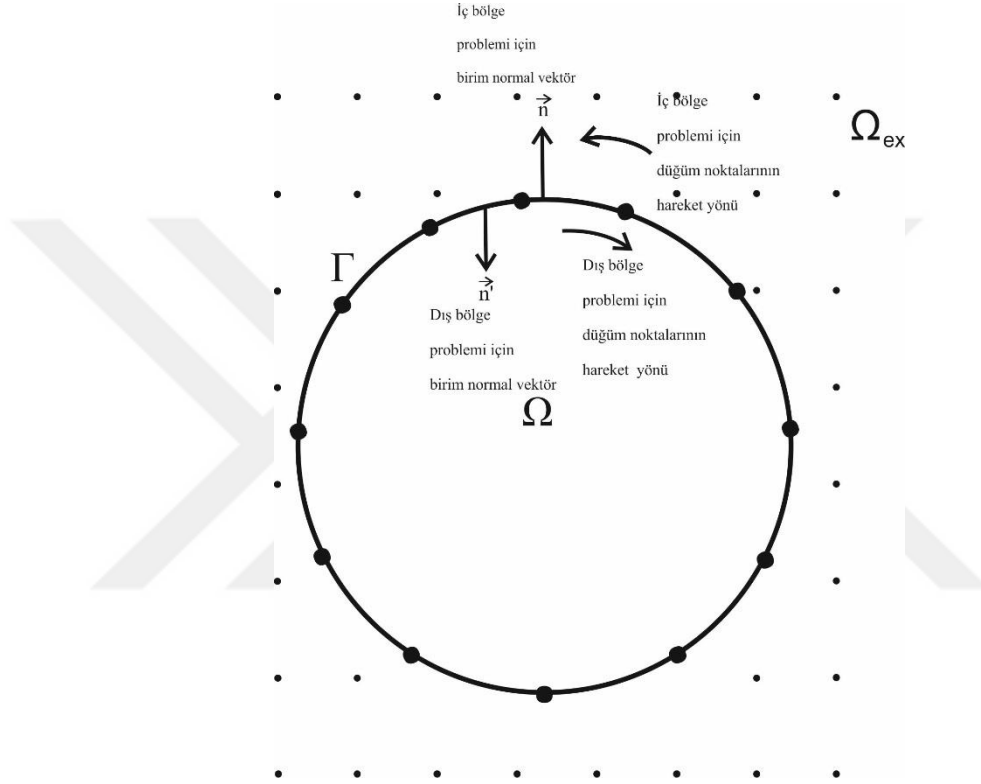
Ayrıklaştırılmış halde yazılan

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij} q_j \quad (2.52)$$

eşitliği matris-vektör formunda

$$[H]\{u\} = [G]\{q\} \quad (2.53)$$

olarak yazılır [63].



Şekil 5. İç ve dış bölge problemlerinde birim normal vektörlerin yönü ve düğüm noktalarının hareket yönü

Sınır elemanlar yönteminde eğer problem iç bölge problemi ise, problemin çözüm bölgesinin sınırı üzerindeki her bir elemanın birim normal vektörünün yönü çözüm bölgesinin dışına doğru olacaktır [Şekil 5]. Dolayısıyla birim normal vektörlerin yönü dış bölgeye doğru olacaktır. Sınır üzerindeki düğüm noktalarının hareket yönünü tayin etmek için sağ el kuralı uygulanır. Bu durumda sınır üzerinde saat yönünün tersi yönde hareket edilir.

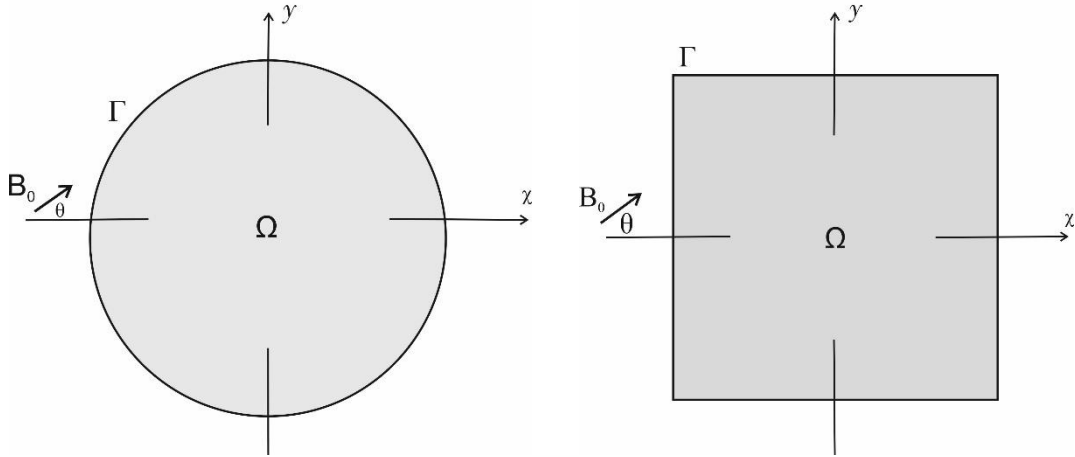
Eğer problem dış bölge problemi ise sınır üzerindeki her bir elemanın birim normal vektörünün yönü yine çözüm bölgesinin dışına doğru olacaktır. Bu durumda birim normal vektörlerin yönü iç bölgeye doğru olacaktır. Sınır üzerindeki düğüm noktalarının dönüş yönü için iç bölge probleminde olduğu gibi sağ el kuralı uygulanır. Bu durumda hareket yönü saat yönünde olacaktır. Ayrıca, dış bölge problemlerinde

$$H^{ii} = 2\pi - \sum_{j=1}^N H^{ij} \quad i \neq j \text{ için} \quad (2.54)$$

olarak hesaplanır [64].

2.4. Manyetik Ortamca Yalıtkan Duvarlı MHD Kanal Problemi İçin Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bu bölümde yeterince uzunluktaki bir kanal içerisinde, manyetik alanca iletken bir sıvının akışının manyetik alan etkisi altındaki hız ve manyetik alan profilleri elde edilmeye çalışılacaktır. Kanal duvarlarının sabit (duvarlarda hız sıfır) ve manyetik alanca yalıtkan olduğu kabul edilmektedir. Problem, kanalın kesiti üzerinde çözülmektedir. Kanal kesitinin çember, dikdörtgen veya annular olduğu kabul edilmektedir [Şekil 6].



Şekil 6. MHD kanal problemi için çember ve kare kesit çözüm bölgeleri

Dışardan etki ettirilen sabit değerli manyetik alanın x yönünde θ -açısı ile uygulandığı kabul edilmektedir. İki boyutlu uzayda MHD akım probleminin modeli, $V = V(x, y)$ hız alanı ve $B = B(x, y)$ manyetik alan değişkenleri türünden

$$\nabla^2 V(x, y) + M \left(\cos\theta \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) + \sin\theta \frac{\partial B}{\partial y}(x, y) \right) = -1 \quad \Omega \text{ bölgesinde} \quad (2.55)$$

$$\nabla^2 B(x, y) + M \left(\cos\theta \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) + \sin\theta \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) \right) = 0$$

ilişkili haldeki kısmi diferensiyel denklem sistemi ve

$$V = 0, B = 0 \quad \Gamma \text{ sınırı üzerinde} \quad (2.56)$$

sınır koşulları ile tanımlanır. (2.55)'de M Hatmann sayısını göstermektedir.

Denklemler ilişkili halde olduklarından dolayı, denklemler aynı anda çözülmelidirler.

Denklemlerin sayısal olarak çözümü sonlu elemanlar yöntemi ile gerçekleştirilecektir.

$M_x = M \cdot \cos\theta$, $M_y = M \cdot \sin\theta$ ve ω_1 ve ω_2 ağırlık (test) fonksiyonları olmak üzere (2.55)'deki denklemler ağırlık fonksiyonları ile çarpılıp çözüm bölgesi üzerinden integral alınır;

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla^2 V) \omega_1 d\Omega + M_x \int_{\Omega} \frac{\partial B}{\partial x} \omega_1 d\Omega + M_y \int_{\Omega} \frac{\partial B}{\partial y} \omega_1 d\Omega &= - \int_{\Omega} \omega_1 d\Omega \\ \int_{\Omega} (\nabla^2 B) \omega_2 d\Omega + M_x \int_{\Omega} \frac{\partial V}{\partial x} \omega_2 d\Omega + M_y \int_{\Omega} \frac{\partial V}{\partial y} \omega_2 d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

eşitlikleri elde edilir.

(2.57) denklemlerine 2-boyutlu uzay için Divergence teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nabla V \cdot \nabla \omega_1 d\Omega + M_x \int_{\Omega} \frac{\partial B}{\partial x} \omega_1 d\Omega + M_y \int_{\Omega} \frac{\partial B}{\partial y} \omega_1 d\Omega &= - \int_{\Omega} \omega_1 d\Omega \\ - \int_{\Omega} \nabla B \cdot \nabla \omega_2 d\Omega + M_x \int_{\Omega} \frac{\partial V}{\partial x} \omega_2 d\Omega + M_y \int_{\Omega} \frac{\partial V}{\partial y} \omega_2 d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

eşitlikleri elde edilir. Γ sınırında Dirichlet türü ($V = B = 0$) sınır koşulu olduğundan Divergence teoreminden gelen sınır integralleri düşecektir. Denklemler bi-lineer form kullanılarak

$$\begin{aligned} a(\nabla V, \nabla \omega_1) - M_x a\left(\frac{\partial B}{\partial x}, \omega_1\right) - M_y a\left(\frac{\partial B}{\partial y}, \omega_1\right) &= a(1, \omega_1) \\ a(\nabla B, \nabla \omega_2) - M_x a\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \omega_2\right) - M_y a\left(\frac{\partial V}{\partial y}, \omega_2\right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

eşitlikleri ile tanımlanabilir.

Galerkin yaklaşımı kullanıldığı için (2.59) denklemlerinde ağırlık fonksiyonları da şekil fonksiyonları türünden ifade edilip, aşağıdaki eşitlikler kullanılır ise

$$\nabla\omega_1 = \nabla\omega_2 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x}, \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right), \quad \nabla V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}, \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) V_i^e$$

$$\nabla B = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}, \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) B_i^e$$

eleman üzerindeki düğüm noktalarındaki bilinmeyen fonksiyon değerleri için cebirsel denklemler;

$$\int_{\Omega_e} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) V_i^e - \left(M_x \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} N_j^e + M_y \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} N_j^e \right) B_i^e \right\} dx dy = \int_{\Omega_e} N_j^e dx dy \quad (2.60)$$

$$\int_{\Omega_e} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) B_i^e - \left(M_x \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} N_j^e + M_y \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} N_j^e \right) V_i^e \right\} dx dy = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen bu cebirsel denklemleri gruplandırmak için,

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega \quad R_j = \int_{\Omega} N_j d\Omega \quad (2.61)$$

$$C_{ij} = M_x \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j + M_y \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \quad (2.62)$$

tanımları yapılır ve bu tanımlar (2.60) denklem sisteminde kullanılırsa; aşağıdaki matris-vektör sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} K & C \\ C & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.63)$$

2.4.1. MHD Kanal Problemi İçin Kararlı (Stabilize) Sonlu Elemanlar Yöntemi Formülasyonu

MHD kanal probleminin büyük Hartmann sayısı değerleri için denklemler konveksiyon baskın olduğundan dolayı standart sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal olarak

çözümünde elde edilen sonuçlarda, gerçek çözümde olmayan kararsızlıklar ve salınımların olduğu gözlemlenmektedir. Bu kararsızlıkları ve hataları gidermek için sonlu elemanlar yönteminde stabilizasyon kullanılmalıdır. Bu bölümde MHD kanal problemi için kararlı (stabilize) sonlu elemanlar yöntemi formülasyonu verilecektir.

Problemin elde edilen çözümünü kararlı hale getirebilmek için kararlılık parametresi olarak adlandırılan bir parametre çarpımı altında probleme bazı terimler eklenir ve problemin yeni halinin her bir eleman üzerinde çözümü elde edilir. Elde edilen bu sayısal çözümler kararlı olacaktır. Kararlılık parametresinin değeri ve formülasyonu, değişik kararlı sonlu eleman yöntemleri için farklılık göstermektedir. Bu tezdeki problemlerin kararlı sayısal çözümleri için, Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) kararlı sonlu elemanlar yöntemi kullanılacaktır [15].

SUPG yöntemini uygulayabilmek için, bilinmeyen fonksiyonların ilişkili halde oldukları halinin ayrıklaştırılmış denklemlere dönüştürülmesi gerekmektedir.

Bunun için ilk olarak

$$\begin{cases} U_1(x, y) = V(x, y) + B(x, y) \\ U_2(x, y) = V(x, y) - B(x, y) \end{cases}$$

dönüşümlerini tanımlar. bu dönüşümleri taraf tarafa toplar ve çıkarırsak;

$$V(x, y) = \frac{U_1(x, y) + U_2(x, y)}{2}, B(x, y) = \frac{U_1(x, y) - U_2(x, y)}{2}$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik (2.55) denklem sisteminde yerine yazılır ise; (2.55) sistemi

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{U_1(x, y) + U_2(x, y)}{2} \right) + M_x \frac{\partial \left(\frac{U_1(x, y) - U_2(x, y)}{2} \right)}{\partial x} \\ + M_y \frac{\partial \left(\frac{U_1(x, y) - U_2(x, y)}{2} \right)}{\partial y} = -1 \end{aligned}$$

Ω bölgesinde (2.64)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{U_1(x, y) - U_2(x, y)}{2} \right) + M_x \frac{\partial \left(\frac{U_1(x, y) + U_2(x, y)}{2} \right)}{\partial x} \\ + M_y \frac{\partial \left(\frac{U_1(x, y) + U_2(x, y)}{2} \right)}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (2.64)'deki denklemler taraf tarafa toplanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$-\nabla^2(U_1(x, y)) - M_x \frac{\partial(U_1(x, y))}{\partial x} - M_y \frac{\partial(U_1(x, y))}{\partial y} = 1 \quad (2.65)$$

denklemini elde edilir. İkinci olarak (2.70)'deki denklemler taraf tarafa çıkarılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$-\nabla^2(U_2(x, y)) + M_x \frac{\partial(U_2(x, y))}{\partial x} + M_y \frac{\partial(U_2(x, y))}{\partial y} = 1 \quad (2.66)$$

denklemini elde edilir. Benzer işlemler sınır koşullarına uygulandığında ise

$$U_1 = 0, U_2 = 0 \quad \Gamma \text{ üzerinde} \quad (2.67)$$

sınır koşulları elde edilir.

Bir birinden bağımsız haldeki konveksiyon difüzyon formuna dönüştürülen bu denklemlere kararlılık (stabilizasyon) terimlerini eklemeyen önce, kararlılık (stabilizasyon) parametresi τ_k nin tanımlanması gerekir.

Konveksiyon-difüzyon formundaki denklemler için stabilizasyon parametresi; h_k sonlu elemanlar bölgesindeki k . üçgen elemanın boyutu (en uzun kenarını), a konveksiyon teriminin katsayısı olmak üzere; $\|a\|_k$ k . eleman üzerindeki a katsayısının normunu, P_k , k . eleman için Peclet sayısını, τ_k , k . eleman için kararlılık parametresini, ε ise difüzyon teriminin katsayısını göstermek üzere; Peclet sayısı

$$P_k = \frac{\|a\|_k \cdot h_k}{6\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanır. τ_k kararlılık parametresi ise;

$$\tau_k = \begin{cases} \frac{h_k}{2\|a\|_k} & P_k \geq 1 \\ \frac{h_k^2}{12\varepsilon} & P_k < 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Buna göre MHD denklemleri için stabilizasyon parametresi Peclet sayısı $P_k = \frac{M \cdot h_k}{6}$ olmak üzere τ_k kararlılık parametresi ise;

$$\tau_k = \begin{cases} \frac{h_k}{2M} & P_k \geq 1 \\ \frac{h_k^2}{12} & P_k < 1 \end{cases}$$

olarak elde edilir.

(2.65) ve (2.66) denklemlerine τ_k , kararlılık parametresi eklenip, ω ağırlık fonksiyonu olmak üzere, denklemlerin zayıf halleri bulunursa;

$$\begin{aligned}
& (\nabla U_1, \nabla \omega_1) - a \left(M_x \frac{\partial U_1}{\partial x} + M_y \frac{\partial U_1}{\partial y}, \omega_1 \right) \\
& \quad + \tau_k \cdot a \left(M_x \frac{\partial U_1}{\partial x} + M_y \frac{\partial U_1}{\partial y}, M_x \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + M_y \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right) \\
& = a(1, \omega_1) - \tau_k \cdot a \left(1, M_x \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + M_y \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}
& (\nabla U_2, \nabla \omega_2) + a \left(M_x \frac{\partial U_2}{\partial x} + M_y \frac{\partial U_2}{\partial y}, \omega_2 \right) \\
& \quad + \tau_k \cdot a \left(M_x \frac{\partial U_2}{\partial x} + M_y \frac{\partial U_2}{\partial y}, M_x \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + M_y \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right) \\
& = a(1, \omega_2) + \tau_k \cdot a \left(1, M_x \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + M_y \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{2.69}$$

denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
V(x, y) &= \frac{U_1(x, y) + U_2(x, y)}{2} \\
B(x, y) &= \frac{U_1(x, y) - U_2(x, y)}{2}
\end{aligned} \tag{2.70}$$

(2.70) geri dönüşüm eşitlikleri kullanılır ise bi-lineer formda

$$\begin{aligned}
& a(\nabla V, \nabla \omega_1) - a \left(M_x \frac{\partial B}{\partial x} + M_y \frac{\partial B}{\partial y}, \omega_1 \right) \\
& \quad + \tau_k \cdot a \left(M_x \frac{\partial V}{\partial x} + M_y \frac{\partial V}{\partial y}, M_x \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + M_y \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right) = a(1, \omega_1)
\end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}
& a(\nabla B, \nabla \omega_2) - a \left(M_x \frac{\partial V}{\partial x} + M_y \frac{\partial V}{\partial y}, \omega_2 \right) \\
& \quad + \tau_k \cdot a \left(M_x \frac{\partial B}{\partial x} + M_y \frac{\partial B}{\partial y}, M_x \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + M_y \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right) \\
& = -\tau_k \cdot a \left(1, M_x \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + M_y \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{2.72}$$

denklemleri elde edilir.

Elde edilen bu cebirsel denklemleri sınıflandırmak için,

$$\bar{K}_{ij} = \nabla N_i \nabla N_j + \tau_k M^2 \left[\left(\cos \theta \frac{\partial N_j}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right]$$

$$C_{ij} = M \left(\cos \theta \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot \sin \theta \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \cdot N_i$$

sonsuzda manyetik indüksiyon ile paraleldir. Dolayısıyla dıştan uygulanan B_0 yoğunluklu manyetik alanın y -ekseni doğrultusunda olduğu kabul edilir. Kanal duvarının ve dış bölgenin elektriksel iletken olduğunu, elektriksel iletkenlikleri ile manyetik geçirgenliklerinin aynı olduğu kabul edilmektedir. Boyutsuz formdaki kararlı MHD denklemleri aşağıdaki gibi verilir;

Süreklilik denklemi:

$$\text{div } \mathbf{V} = 0 \quad (2.74)$$

Navier-Stokes denklemleri:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\text{grad } p + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{V} + R_h \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.75)$$

Maxwell denklemleri:

$$\text{curl } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{curl } \mathbf{B} = \mathbf{J}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0 \quad (2.76)$$

Ohm kanunu:

$$\mathbf{J} = R_m (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (2.77)$$

şeklinde. Burada \mathbf{V} , \mathbf{B} , \mathbf{E} ve \mathbf{J} sırasıyla hız alanı, manyetik alan, elektrik alanı ve elektrik akımını göstermektedir. R_e, R_h, R_m sırası ile Reynold sayısı, manyetik basınç ve manyetik Reynold sayısını göstermektedir. Bu parametreler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$R_e = \frac{L_0 V_0}{\nu_0}, \quad R_h = \frac{B_0^2}{\rho_0 \mu_1 V_0^2}, \quad R_m = \sigma \mu L_0 V_0$$

L_0, V_0, ρ_0 sırasıyla karakteristik uzunluk, karakteristik hız ve boru içerisindeki akışkanın yoğunluğu, B_0 dış bölgedeki manyetik alanın yoğunluğu, μ ve σ ise ortamın manyetik geçirgenlik ve elektriksel iletkenliğini göstermektedir. $\nu_0 = \frac{\tilde{\mu}}{\rho_0}$, $\tilde{\mu}$ akışkanın akışmazlık (vizkozite) katsayısıdır.

Şimdi (2.1)-(2.4) denklemlerini kanalın iç bölgesi Ω_{kanal} , kanal duvarı Ω_{duvar} ve dış bölge $\Omega_{dış}$ olarak kabul edilirse, tüm bölge $\Omega = \Omega_{kanal} \cup \Omega_{duvar} \cup \Omega_{dış}$ üzerinde, denklemler:

$$\frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{V} + R_h (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla P \quad (2.78)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} + R_m (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} = 0 \quad (2.79)$$

şeklinde ifade edilir. x ve y 'nin fonksiyonları olarak sadece z -yönünde bileşenlere sahip hız alanı $\mathbf{V} = V(0,0,V(x,y))$ ve manyetik alan $\mathbf{B} = V(0,B_0,B(x,y))$ olarak yazılır. z -yönünde hiçbir varyasyon yoktur. $V(x,y)$ ve $B(x,y)$ aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$V(x,y) = \begin{cases} V_z(x,y) & \Omega_{kanal} \\ 0 & \Omega_{duvar} \\ 0 & \Omega_{dış} \end{cases} \text{ ve } B(x,y) = \begin{cases} B_z(x,y) & \Omega_{kanal} \\ B_{duvar} & \Omega_{duvar} \\ B_{dış}(x,y) & \Omega_{dış} \end{cases} \quad (2.80)$$

P toplam basıncı göstermek üzere aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P = p + R_h \frac{B_z^2}{0} \text{ ve } \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{R_e}$$

Kanalın duvarının; duvardaki elektriksel iletkenlik ile dış ortamdaki elektriksel iletkenliğin eşit olabileceği kadar çok ince olduğu düşünülür. Böylece; indüklenmiş manyetik alan, $B_{duvar} = B_{dış}$ olarak alınabilir. Bu şartlar altında MHD denklemi kanal içerisinde ve dış bölgede aşağıdaki forma dönüşür.

$$\nabla^2 V_z(x,y) + R_e R_h \left(\cos\theta \frac{\partial B_z}{\partial x}(x,y) + \sin\theta \frac{\partial B_z}{\partial y}(x,y) \right) = -1 \quad \Omega_{kanal} \text{ bölgesinde} \quad (2.81)$$

$$\nabla^2 B_z(x,y) + R_{m_1} \left(\cos\theta \frac{\partial V_z}{\partial x}(x,y) + \sin\theta \frac{\partial V_z}{\partial y}(x,y) \right) = 0$$

$$\nabla^2 B_{dış}(x,y) = 0 \quad \Omega_{dış} \text{ bölgesinde} \quad (2.82)$$

kanal duvarı ($\Gamma = \partial\Omega_{iç}$)'nda; $V_z = 0$ ve indüklenmiş manyetik alanlar için süreklilik şartı ise, n ve n' , sırasıyla $\Omega_{iç}$ ve $\Omega_{dış}$ bölgelerinin sınırlarındaki birim dış normal vektörleri, R_{m_1} ve R_{m_2} ise sırasıyla borunun içerisi ve dış bölgedeki manyetik Reynold sayılarını göstermek üzere, aşağıdaki gibidir:

$$B_z(x, y) = B_{dt\zeta}(x, y) \quad \Gamma \text{ üzerinde} \quad (2.83)$$

$$\frac{1}{R_{m_1}} \frac{\partial B_z(x, y)}{\partial n} = \frac{1}{R_{m_2}} \frac{\partial B_{dt\zeta}(x, y)}{\partial n'} \quad \Gamma \text{ üzerinde} \quad (2.84)$$

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} B_{dt\zeta}(x, y) = 0 \quad (2.85)$$

Kanal içerisinde denklem (2.81) V_z hızına ve B_z manyetik alanına göre ilişkilidirler. Yine kanal duvarında (kanal sınırında) sınır şartlarını veren denklemler (2.83) ve (2.84) B_z ve $B_{dt\zeta}$ indüklenmiş manyetik alanlarına göre ilişkilidirler. Bu yüzden (2.81) ve (2.83) denklemleri, $V_z = 0$ şartı ve (2.83), (2.84) kanal içerisindeki ve dışarısındaki indüklenmiş manyetik alan şartları da göz önünde bulundurularak, birlikte çözülmelidirler.

2.5.1. Sınır Elemanlar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri Birleşimi Formülasyonu

MHD akım probleminde denklemlerin ve sınır şartlarının (koşullarının) birbirleriyle ilişkili olduğu açıkça görülmektedir. Dolayısıyla bütün denklemler eş zamanlı olarak (aynı anda) çözülmelidir. Sınır elemanlar ve sonlu elemanlar birleşimi yöntemi formülasyonunda, dış bölge sınır değer probleminde sınır elemanlar yönteminin avantajı kullanılacaktır. Bu nedenle dış bölgede tanımlı Laplace denklemi sınır elemanlar yöntemi ile, kanaldaki MHD akım denklemleri ise sonlu elemanlar yöntemi ile ayrıklaştırılacaktır.

Laplace denkleminin $B^* = \frac{1}{2\pi} \ln(r)$ temel çözümü ve 2. Green özdeşliği, Γ sınırındaki standart sınır elemanlar yöntemi integralleri için kullanılır ise, $B^{dt\zeta}$ ve $\frac{\partial B^{dt\zeta}}{\partial n}$ bilinmeyenleri için;

$$c_i B_i^{dt\zeta} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial B^*}{\partial n} B^{dt\zeta} - B^* \frac{\partial B^{dt\zeta}}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (2.86)$$

eşitliği elde edilir.

N_1 ve N_2 interpolasyon fonksiyonlarını kullanarak doğrusal eleman ile $B^{dt\zeta}$ bilinmeyen fonksiyonu yaklaşık olarak $B^{dt\zeta} = N_1 B_1^{dt\zeta} + N_2 B_2^{dt\zeta}$ eşitliği ile ifade edilebilir.

Böylece; ayrıklaştırılmış sınır integral denklemleri aşağıdaki standart sınır elemanlar yöntemi matris-vektör denklemlerini meydana getirir.

$$[H^{dt\zeta}] \{B^{dt\zeta}\} = [G^{dt\zeta}] \left\{ \frac{\partial B^{dt\zeta}}{\partial n} \right\} \quad (2.87)$$

Burada;

$$H_{i,j}^{dış} = \int_{\Gamma_j} \phi_k \frac{\partial \ln(r)}{\partial n} d\Gamma_j, \quad G_{i,j}^{dış} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \phi_k}{\partial n} \ln(r) d\Gamma_j; \quad k = 1,2$$

şeklindedir.

MHD akım denklemi kanal içerisinde Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile çözülebilir.

$V = (H_0^1(\Omega))^2$ fonksiyon uzayından seçilen (V, B) bilinmeyenlerine karşılık (u, ω) ağırlık fonksiyonları ile b-lineer ve lineer formlarda

$$\begin{aligned} a(\nabla V_z, \nabla u) - ReRh a \left(\cos\theta \frac{\partial B_z}{\partial x}(x, y) + \sin\theta \frac{\partial B_z}{\partial y}(x, y), u \right) - a(1, u) \\ + a(\nabla B_z, \nabla \omega) - Rm_1 a \left(\cos\theta \frac{\partial V_z}{\partial x}(x, y) + \sin\theta \frac{\partial V_z}{\partial y}(x, y), \omega \right) \\ - a \left(\frac{\partial B_z}{\partial n}, \omega \right) = 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Problemin varyasyonel formülasyonu $\Omega_{iç}$ bölgesinin ayrıklaştırılması ile elde edilen uzayda seçilen (V_h, B_h) bilinmeyenlerine karşılık (u_h, ω_h) ağırlık fonksiyonları türünden

$$\begin{aligned} a(\nabla V_{z_h}, \nabla u_h) - ReRh a \left(\cos\theta \frac{\partial B_{z_h}}{\partial x}(x, y) + \sin\theta \frac{\partial B_{z_h}}{\partial y}(x, y), u_h \right) - a(1, u_h) \\ + a(\nabla B_{z_h}, \nabla \omega_h) - Rm_1 a \left(\cos\theta \frac{\partial V_{z_h}}{\partial x}(x, y) + \sin\theta \frac{\partial V_{z_h}}{\partial y}(x, y), \omega_h \right) \\ - l \left(\frac{\partial B_{z_h}}{\partial n}, \omega_h \right) = 0 \end{aligned}$$

ifade edilir.

Ω_{kanal} bölgesini lineer üçgensel elemanlar kullanarak ayrıklaştırsak, lineer denklemlerin sistemi matris-vektör formunda aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} K & C_b & 0 \\ C_v & K & Q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_z \\ B_z \\ \frac{\partial B_z}{\partial n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Burada; K, C_b, C_v ve Q matrisleri $M = \begin{bmatrix} m^{kanal,kanal} & m^{kanal,dış} \\ m^{dış,kanal} & m^{dış,dış} \end{bmatrix}$ formunda matrisin bölüntüleri olarak tanımlanır ve açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilirler.

$$K_{ij} = \int_{\Omega_{kanal}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$C_{bij} = ReRh \int_{\Omega_{kanal}} \left(\cos\theta \frac{\partial N_j}{\partial x}(x, y) + \sin\theta \frac{\partial N_j}{\partial y}(x, y), u_h \right) N_i d\Omega$$

$$C_{vij} = Rm_1 \int_{\Omega_{kanal}} \left(\cos\theta \frac{\partial N_j}{\partial x}(x, y) + \sin\theta \frac{\partial N_j}{\partial y}(x, y), u_h \right) N_i d\Omega$$

$$Q_i = \int_{\Gamma_{kanal}} N_i d\Gamma, \quad R_i = \int_{\Omega_{kanal}} N_i d\Omega$$

Eğer normal türev sınır şartları kullanılırsa; Γ sınırı üzerinde

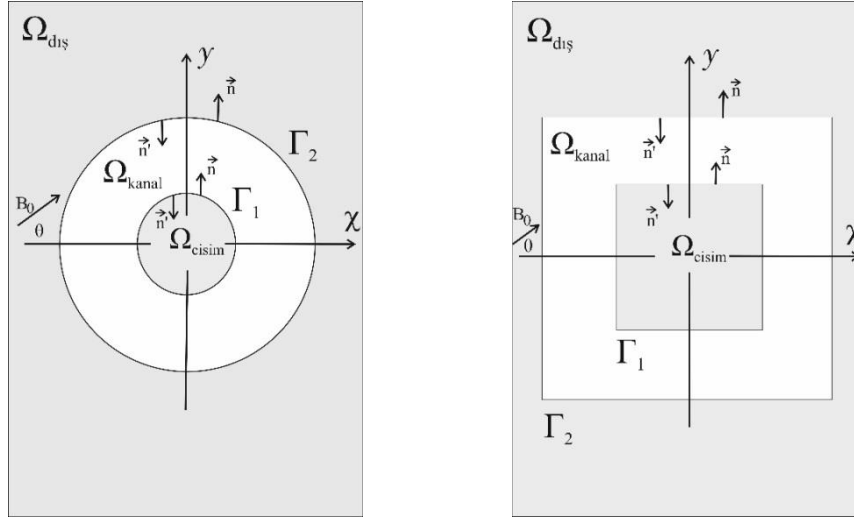
$$\frac{1}{Rm_2} \frac{\partial B^{d1s}}{\partial n} = \frac{1}{Rm_1} \frac{\partial B_z}{\partial n} \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial n} = \frac{Rm_1}{Rm_2} \frac{\partial B^{d1s}}{\partial n}$$

bağıntısı elde edilir.

Bu şartlar altında denklemlerin büyük matris-vektör formu aşağıdaki gibi olur

$$\begin{bmatrix} K^{k,k} & C_b^{k,d} & C_b^{k,k} & 0 \\ C_v^{k,d} & K^{k,k} & K^{k,k} & -\frac{Rm_1}{Rm_2} Q^d \\ C_v^{k,k} & K^{k,k} & K^{k,k} & 0 \\ 0 & H & 0 & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_z \\ B^d \\ B_z \\ \frac{\partial B_z}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.5.2. Manyetik Ortamda ve Manyetik Katı Cisim Etrafında MHD Kanal Problemi



Şekil 8. Manyetik ortamda manyetik katı cisim etrafında MHD kanal problemi için çember ve kare kesit çözüm bölgeleri

Bir önceki bölümde tanımlanan kanal içerisinde manyetik alanca iletken katı bir cisim olduğu durumda [Şekil 8] probleme ilave denklem ve ilave sınır şartları eklenir.

Problemin bu halinin matematiksel modeli

$$\begin{cases} \nabla^2 V + Re \cdot Rh \cdot \frac{\partial B^{kanal}}{\partial y} = -1 \\ \nabla^2 B^{kanal} + Rm_f \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \Omega_{kanal}, \text{ bölgesinde}$$

$$\nabla^2 B^{dış} = 0 \quad \Omega_{dış}, \text{ bölgesinde}$$

$$\nabla^2 B^{cisim} = 0 \quad \Omega_{cisim}, \text{ bölgesinde}$$

kısmi diferensiyel denklemleri ve

$$\begin{cases} V^{kanal}(x, y) = 0 \\ B^{kanal}(x, y) = B^{cisim}(x, y) \\ \frac{1}{Rm_{cisim}} \frac{\partial B^{cisim}}{\partial n} = \frac{1}{Rm_{kanal}} \frac{\partial B^{kanal}}{\partial n} \end{cases} \quad (x, y) \in \Gamma_1 \quad \text{ve} \quad \begin{cases} V^{kanal}(x, y) = 0 \\ B^{kanal}(x, y) = B^{dış}(x, y) \\ \frac{1}{Rm_{kanal}} \frac{\partial B^{kanal}}{\partial n'} = \frac{1}{Rm_{dış}} \frac{\partial B^{dış}}{\partial n'} \end{cases} \quad (x, y) \in \Gamma_2$$

Burada *kanal, cisim, dış* sırası ile kanal, kanal içerisindeki manyetik ortam ve dış bölgedeki manyetik ortamı temsil etmektedir. Yine *Re, Rh, Rm* sırası ile Reynold sayısı, manyetik basınç ve manyetik Reynold sayısını temsil etmektedir.

Laplace denkleminin temel çözümü $B^* = \frac{1}{2\pi} \ln(r)$ ve 2. Green özdeşliğini Γ_1 ve Γ_2 sınırındaki standart sınır elemanlar yöntemi integralleri için kullanılır ise; B^{cisim} ve $\frac{\partial B^{cisim}}{\partial n}$ ve $B^{dış}$ ve $\frac{\partial B^{dış}}{\partial n}$ bilinmeyenleri için,

$$c_i B_i^{cisim} + \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial B^*}{\partial n} B^s - B^* \frac{\partial B^{cisim}}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (2.88)$$

$$c_i B_i^{dış} + \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial B^*}{\partial n} B^{dış} - B^* \frac{\partial B^{dış}}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \quad (2.89)$$

denklemleri elde edilir.

MHD kanal probleminin çözümünde kullanılan adımlar tekrar edilirse; ϕ_1 ve ϕ_2 interpolasyon fonksiyonlarını kullanarak lineer eleman ile B^{cisim} ve $B^{dış}$ bilinmeyenlerine yaklaşırsa, $B^{cisim} = \phi_1 B_1^{cisim} + \phi_2 B_2^{cisim}$ ve $B^{dış} = \phi_1 B_1^{dış} + \phi_2 B_2^{dış}$ elde edilir. Böylece; ayrıklaştırılmış sınır integral denklemleri aşağıdaki standart sınır elemanlar yöntemi matris-vektör denklemlerini oluşturur.

$$[H^{cisim}]\{B^{cisim}\} = [G^{cisim}]\left\{\frac{\partial B^{cisim}}{\partial n}\right\} \quad \text{ve} \quad [H^{dış}]\{B^{dış}\} = [G^{dış}]\left\{\frac{\partial B^{dış}}{\partial n}\right\}.$$

Yukarıdaki denklemlerdeki H ve G matrisleri ise;

$$H_{i,j}^{l,k} = \int_{\Gamma_{l_j}} \phi_k \frac{\partial \ln(r)}{\partial n} d\Gamma_{l_j}, \quad G_{i,j}^{l,k} = \int_{\Gamma_{l_j}} \frac{\partial \phi_k}{\partial n} \ln(r) d\Gamma_{l_j}, \quad l = kanal, dış \text{ ve } k = 1, 2$$

formundadır.

Kanal içerisindeki (Ω_{kanal} bölgesinde) ilişkili denklemler standart Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözüleceğinden bir önceki kısımda yapılan işlemler problemin bu modeli için de aynen uygulanır.

Normal türev sınır şartları kullanılarak;

$$\Gamma_1 \text{ sınırı üzerinde } \frac{\partial B^{kanal}}{\partial n} = \frac{Rm_{kanal}}{Rm_{cisim}} \frac{\partial B^{cisim}}{\partial n} \quad \text{ve} \quad \Gamma_2 \text{ sınırı üzerinde } \frac{\partial k_{kanal}}{\partial n'} = \frac{Rm_{kanal}}{Rm_{dış}} \frac{\partial B^{dış}}{\partial n'}$$

elde edilir.

Bu işlemler sonucunda elde ettiğimiz çözüm denklemlerinin büyük sistem denklemleri aşağıdaki gibidir

$$\begin{bmatrix} K^{k,k} & C_b^{k,c} & C_b^{k,d} & C_b^{k,k} & 0 & 0 \\ C_v^{c,k} & K^{c,c} & K^{c,d} & K^{c,k} & \frac{Rm_k}{Rm_c} Q^c & 0 \\ C_v^{k,k} & K^{k,c} & K^{k,d} & K^{k,k} & 0 & 0 \\ C_v^{d,k} & K^{d,c} & K^{d,d} & K^{d,k} & 0 & \frac{Rm_k}{Rm_d} Q^d \\ 0 & H^c & 0 & 0 & G^c & 0 \\ 0 & 0 & H^d & 0 & 0 & G^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^k \\ B^c \\ B^d \\ \frac{\partial B^c}{\partial n} \\ \frac{\partial B^d}{\partial n'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.5.3. Manyetik Ortamda ve Manyetik Ortamda Manyetik Katı Cisim Etrafında MHD Kanal Problemleri İçin Kararlı (Stabilize) Sonlu Elemanlar Yöntemi

Manyetik ortamda ve manyetik ortamda manyetik katı cisim etrafındaki MHD kanal problemlerinde kanal içerisindeki denklemler yüksek Hartmann sayısı değerleri durumunda kararlı sayısal sonuçlar elde edilebilmesi için kararlı sonlu elemanlar yöntemi ile çözülmelidir. Kanal içerisindeki denklemlere kararlı sonlu elemanlar yöntemini uygularken ilk önce gerekli bazı dönüşümler kullanılacaktır. Kanal içerisindeki MHD denklemleri aşağıdaki gibi verilsin.

$$\nabla^2 V^{kanal}(x, y) + M \left(\cos\theta \frac{\partial B^{kanal}}{\partial x}(x, y) + \sin\theta \frac{\partial B^{kanal}}{\partial y}(x, y) \right) = -1$$

Ω_{kanal} bölgesinde (2.90)

$$\nabla^2 B^{kanal}(x, y) + M \left(\cos\theta \frac{\partial V^{kanal}}{\partial x}(x, y) + \sin\theta \frac{\partial V^{kanal}}{\partial y}(x, y) \right) = 0$$

R_e, R_h, R_m sırası ile Reynold sayısı, manyetik basınç ve manyetik Reynold sayısını göstermek üzere, $M = \sqrt{Re \cdot Rh \cdot Rm}$, Hartmann sayısını ifade etmektedir.

$M_x = M \cdot \cos\theta$ ve $M_y = M \cdot \sin\theta$ olmak üzere;

$$\begin{cases} U_1(x, y) = V_1(x, y) + B_1(x, y) \\ U_2(x, y) = V_1(x, y) - B_1(x, y) \end{cases} \text{ ve } \begin{cases} B_1(x, y) = \frac{ReRh}{M} B^{kanal}(x, y) \\ V_1(x, y) = V^{kanal}(x, y) \end{cases}$$

dönüşümleri tanımlansın. Bu dönüşümdeki denklemler taraf tarafa toplanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$V_1(x, y) = V^{kanal}(x, y) = \frac{U_1(x, y) + U_2(x, y)}{2}$$

elde edilir.

Dönüşümdeki denklemler taraf tarafa çıkarılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$B_1(x, y) = \frac{ReRh}{M} B^{kanal}(x, y) = \frac{U_1(x, y) - U_2(x, y)}{2} \Rightarrow B^{kanal}(x, y) = \frac{M}{ReRh} \frac{U_1(x, y) - U_2(x, y)}{2}$$

elde edilir. Elde edilen V^{kanal} ve B^{kanal} (2.90) denkleminde kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{U_1(x, y) + U_2(x, y)}{2} \right) + M_x \frac{\partial \left(\frac{U_1(x, y) - U_2(x, y)}{2} \right)}{\partial x} \\ + M_y \frac{\partial \left(\frac{U_1(x, y) - U_2(x, y)}{2} \right)}{\partial y} = -1 \end{aligned}$$

Ω_{kanal} bölgesinde (2.91)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{U_1(x, y) - U_2(x, y)}{2} \right) + M_x \frac{\partial \left(\frac{U_1(x, y) + U_2(x, y)}{2} \right)}{\partial x} \\ M_y \frac{\partial \left(\frac{U_1(x, y) + U_2(x, y)}{2} \right)}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

kısmi diferensiyel denklemleri elde edilir. (2.91)'deki denklemler taraf tarafa toplanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$-\nabla^2(U_1(x, y)) - M_x \frac{\partial(U_1(x, y))}{\partial x} - M_y \frac{\partial(U_1(x, y))}{\partial y} = 1 \quad (2.92)$$

denklemi elde edilir. (2.91)'deki denklemler taraf tarafa çıkarılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$-\nabla^2(U_2(x, y)) + M_x \frac{\partial(U_2(x, y))}{\partial x} + M_y \frac{\partial(U_2(x, y))}{\partial y} = 1 \quad (2.93)$$

denklemi elde edilir.

h_k sonlu elemanlar bölgesindeki k . üçgen elemanın en uzun kenarını, a konveksiyon teriminin katsayı olmak üzere; $\|a\|_k$ k . eleman üzerindeki a katsayısının normunu, P_k , k . eleman için Peclet sayısını, τ_k , k . eleman için kararlılık parametresini, ε ise difüzyon teriminin katsayısını göstermek üzere; Peclet sayısı

$$P_k = \frac{\|a\|_k h_k}{6\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanır. τ_k kararlılık parametresi ise;

$$\tau_k = \begin{cases} \frac{h_k}{2\|a\|_k} & P_k \geq 1 \\ \frac{h_k^2}{12\varepsilon} & P_k < 1 \end{cases}$$

gibi seçilir.

(2.92) ve (2.93) denklemlerine τ_k , kararlılık parametresi eklenip, ω ağırlık fonksiyonu olmak üzere, denklemlerin zayıf halleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} & (\nabla U_1, \nabla \omega) - \left(M_x \frac{\partial U_1}{\partial x} + M_y \frac{\partial U_1}{\partial y}, \omega \right) - \oint_{\Gamma} \frac{\partial U_1}{\partial n} \cdot \omega ds \\ & + \tau_k \left[\left(M_x \frac{\partial U_1}{\partial x} + M_y \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) \cdot \left(M_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + M_y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] = \omega - \tau_k \left(M_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + M_y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} & (\nabla U_2, \nabla \omega) + \left(M_x \frac{\partial U_2}{\partial x} + M_y \frac{\partial U_2}{\partial y}, \omega \right) - \oint_{\Gamma} \frac{\partial U_2}{\partial n} \cdot \omega ds \\ & + \tau_k \left[\left(M_x \frac{\partial U_2}{\partial x} + M_y \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) \cdot \left(M_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + M_y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] = \omega + \tau_k \left(M_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + M_y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.95)$$

denklemleri elde edilmiştir.

(2.94) ve (2.95) denklemleri taraf tarafa toplanıp gerekli düzenlemeler yapılır ise;

$$\begin{aligned} & (\nabla V_1, \nabla \omega) - \left(M_x \frac{\partial B_1}{\partial x} + M_y \frac{\partial B_1}{\partial y}, \omega \right) - \oint_{\Gamma} \frac{\partial V_1}{\partial n} \cdot \omega ds \\ & + \tau_k \left[\left(M_x \frac{\partial V_1}{\partial x} + M_y \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \cdot \left(M_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + M_y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] = \omega \end{aligned} \quad (2.96)$$

denklemini elde edilir. (2.96) denkleminde, kanal duvarında $V = 0$ Dirichlet türü sınır şartı olduğundan $\oint_{\Gamma} \frac{\partial V_1}{\partial n} \cdot \omega ds$ sınır integrali sıfır olacaktır.

(2.94) denkleminde (2.95) denklemini çıkarılıp gerekli düzenlemeler yapılır ise;

$$\begin{aligned}
& (\nabla B_1, \nabla \omega) - \left(M_x \frac{\partial V_1}{\partial x} + M_y \frac{\partial V_1}{\partial y}, \omega \right) - \oint_{\Gamma} \frac{\partial B_1}{\partial n} \cdot \omega ds \\
& + \tau_k \left[\left(M_x \frac{\partial B_1}{\partial x} + M_y \frac{\partial B_1}{\partial y} \right) \left(M_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + M_y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] = -\tau_k \left[M_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + M_y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right]
\end{aligned} \tag{2.97}$$

denklemleri elde edilir. (2.96) ve (2.97) denklemlerinde

$$\begin{cases} B_1(x, y) = \frac{ReRh}{M} B^{kanal}(x, y) \\ V_1(x, y) = V^{kanal}(x, y) \end{cases}$$

olduğu kullanılıp (2.97) denklemini $\frac{M}{ReRh}$ ifadesi ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned}
& (\nabla V^{kanal}, \nabla \omega) - ReRh \left(\cos\theta \frac{\partial B^{kanal}}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial B^{kanal}}{\partial y}, \omega \right) \\
& + \tau_k M^2 \left[\left(\cos\theta \frac{\partial V^{kanal}}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial V^{kanal}}{\partial y} \right) \cdot \left(\cos\theta \frac{\partial \omega}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] = \omega \\
& (\nabla B^{kanal}, \nabla \omega) - R_m \left(\cos\theta \frac{\partial V^{kanal}}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial V^{kanal}}{\partial y}, \omega \right) - \oint_{\Gamma} \frac{\partial B^{kanal}}{\partial n} \cdot \omega ds \\
& + \tau_k M^2 \left[\left(\cos\theta \frac{\partial B^{kanal}}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial B^{kanal}}{\partial y} \right) \cdot \left(\cos\theta \frac{\partial \omega}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] \\
& = -\tau_k R_m \left[\left(\cos\theta \frac{\partial \omega}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Ω_{kanal} bölgesinde

denklemler sistemi elde edilir.

Elde edilen bu cebirsel denklemleri sınıflandırmak için Galerkin yönteminde ağırlık fonksiyonu ve şekil fonksiyonları eşit alınır, ve

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{ij} = \int_{\Omega_{iç}} & \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right. \\
& \left. + \tau_k M^2 \left(\cos\theta \frac{\partial N_j}{\partial y} + \sin\theta \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \left(\cos\theta \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right) d\Omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{L}_{ij} &= \int_{\Omega_{ic}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right. \\
&\quad \left. + \tau_k M^2 \left(\cos\theta \frac{\partial N_j}{\partial y} + \sin\theta \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \left(\cos\theta \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right) d\Omega \\
&\quad - \oint_{\Gamma} \frac{\partial N_j}{\partial n} \cdot N_i \\
C_{bij} &= ReRh \int_{\Omega_{ic}} \left(\left(\cos\theta \frac{\partial N_j}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \cdot N_i \right) d\Omega \\
C_{vij} &= Rm \int_{\Omega_{ic}} \left(\left(\cos\theta \frac{\partial N_j}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \cdot N_i \right) d\Omega \\
R_i &= \int_{\Omega_{ic}} N_i d\Omega \qquad \bar{F}_i = -\tau_k R_m \int_{\Omega_{ic}} \left(\cos\theta \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega
\end{aligned}$$

tanımları elde edilir.

Eğer normal türev sınır şartları kullanılırsa; Γ sınırı üzerinde

$$\frac{1}{Rm_2} \frac{\partial B^{dt\varsigma}}{\partial n} = \frac{1}{Rm_1} \frac{\partial B^{ic}}{\partial n} \Rightarrow \frac{\partial B^{ic}}{\partial n} = \frac{Rm_1}{Rm_2} \frac{\partial B^{dt\varsigma}}{\partial n}$$

bağıntısı elde edilir.

Yukarıda yapılan tanımlar ve elde edilen sınır şartları altında manyetik ortamda MHD kanal problemi için, denklemlerin büyük matris-vektör hali aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} \bar{K}^{k,k} & C_b^{k,d} & C_b^{k,k} & 0 \\ C_v^{k,d} & \bar{L}^{k,k} & \bar{K}^{k,d} & -\frac{Rm_1}{Rm_2} Q^d \\ C_v^{k,k} & \bar{K}^{k,d} & \bar{K}^{k,k} & 0 \\ 0 & H & 0 & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^k \\ B^d \\ B^k \\ \frac{\partial B^d}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i \\ \bar{F}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Manyetik ortamda manyetik katı cisim etrafında MHD kanal problemi için normal türev sınır şartları;

$$\Gamma_1 \text{ sınırı üzerinde } \frac{\partial B^{kanal}}{\partial n} = \frac{Rm_{kanal}}{Rm_{cisim}} \frac{\partial B^{cisim}}{\partial n} \text{ ve } \Gamma_2 \text{ sınırı üzerinde } \frac{\partial B^{kanal}}{\partial n'} = \frac{Rm_{kanal}}{Rm_{dt\varsigma}} \frac{\partial B^{dt\varsigma}}{\partial n'}$$

şeklinde elde edilir.

Problemin manyetik ortamda manyetik katı cisim etrafındaki modelinin büyük matris-vektör halini elde etmek için, yukarıda kullandığımız cebirsel denklem sınıflandırmalarını ve normal türev şartlarını kullanarak elde ettiğimiz çözüm denklemlerinin büyük sistem denklemleri aşağıdaki gibidir

$$\begin{bmatrix}
 \bar{K}^{k,k} & C_b^{k,c} & C_b^{k,d} & C_b^{k,k} & 0 & 0 \\
 C_v^{c,k} & \bar{L}^{c,c} & \bar{K}^{c,d} & \bar{K}^{c,k} & \frac{Rm_k}{Rm_c} Q^c & 0 \\
 C_v^{k,k} & \bar{K}^{k,c} & \bar{K}^{k,d} & \bar{K}^{k,k} & 0 & 0 \\
 C_v^{d,k} & \bar{K}^{d,c} & \bar{L}^{d,d} & \bar{K}^{d,k} & 0 & \frac{Rm_k}{Rm_d} Q^d \\
 0 & H^c & 0 & 0 & G^c & 0 \\
 0 & 0 & H^d & 0 & 0 & G^d
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 V^k \\
 B^c \\
 B^d \\
 B^k \\
 \frac{\partial B^c}{\partial n} \\
 \frac{\partial B^d}{\partial n'}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 R_i \\
 \bar{F}_i \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}
 .$$



3. BULGULAR

Bu bölümde, bir önceki bölümde verilen matematiksel modellemede kullanılan kısmi diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri ilgili sayısal yöntem veya yöntemler ile elde edilecek ve varsa gerçek çözüm ile karşılaştırmaları yapılacaktır

3.1. Laplace Denklemi

Manyetik ortamda MHD kanal akım probleminin modellemesinde, dış ortamda, manyetik alanca iletken cisim üzerinde ve MHD denklemlerinde Laplace operatörü bulunmaktadır. Bundan dolayı bu bölümde Laplace denkleminin sonlu elemanlar ve sınır elemanlar yöntemleri ile çözümleri üzerine incelemeler yapılacaktır.

İlk olarak Laplace denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü iki farklı analitik çözümü olan problem için test edilecektir. Daha sonra sınır elemanlar yöntemi ile Laplace denkleminin iç bölge ve dış bölge problemi olarak çözümleri incelenecektir. Dış bölge problemlerinde sınır elemanlar yönteminin avantajı kullanılacaktır

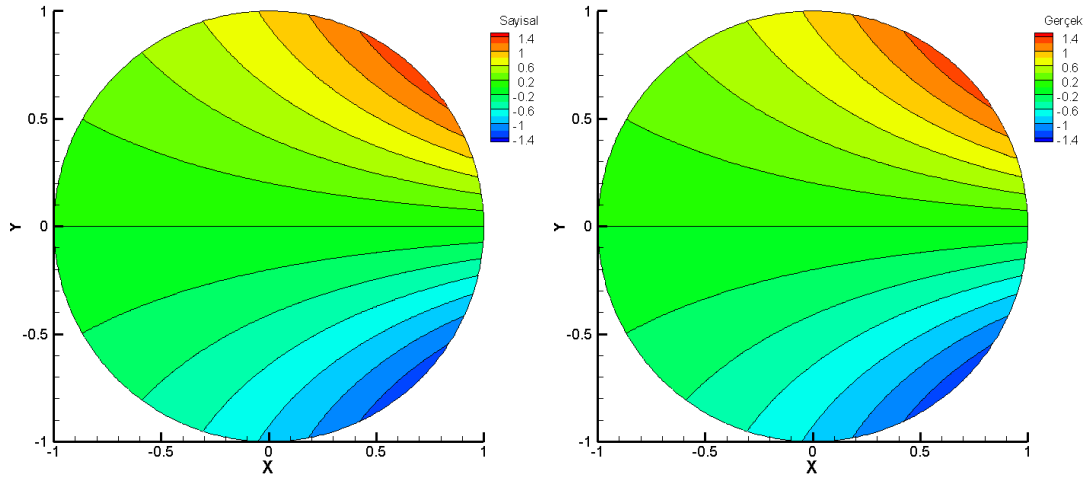
3.1.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Laplace Denkleminin Sayısal Çözümü

İlk örnek olarak iki boyutlu uzayda birim çember üzerinde Laplace denklemini sağlayan $u(x, y) = e^x \cdot \sin(y)$ fonksiyonunun sınır değerleri kullanılarak, sonlu elemanlar yöntemi ile Dirichlet türü sınır koşulları ile çözümü elde edilmiştir. Tablo 1 de farklı eleman sayıları kullanılarak elde edilen sayısal çözüm ile gerçek çözüm kullanılarak hesaplanan $L2$ normu ve en büyük hata değerleri verilmiştir. Kaba ağ (176 doğrusal üçgen eleman) ile elde edilen sonuçların yakınsak olmasına rağmen, eleman sayısı artırıldığında beklendiği üzere $L2$ normunun ve en büyük hata değerinin oldukça küçüldüğü gözlemlenmektedir.

Tablo 1. Sonlu elemanlar yönteminde Laplace denklemi için L_2 norm

Eleman Sayısı	L_2 Norm	En Büyük Hata
176	$0.000120 \rightarrow 10^{-4}$	$0.0039 \rightarrow 10^{-3}$
718	$0.0000169 \rightarrow 10^{-5}$	$0.0021 \rightarrow 10^{-3}$
2812	$0.00000200 \rightarrow 10^{-6}$	$0.000611 \rightarrow 10^{-4}$
11394	$0.000000252 \rightarrow 10^{-7}$	$0.000109 \rightarrow 10^{-4}$
45702	$0.0000000318 \rightarrow 10^{-8}$	$0.0000509 \rightarrow 10^{-5}$

Şekil 9. de sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen çözüm (sol) ile gerçek çözümün (sağ) iz düşüm eğri grafikleri gösterilmektedir. Gerçek çözümde yer alan ve hızlı değişim gösteren üstel fonksiyon yapısına rağmen sayısal çözüm ile gerçek çözümün uyumu bu grafikten de gözlemlenmektedir.



Şekil 9. Laplace denklemi için sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm (solda) ve $u(x, y) = e^x \cdot \sin(y)$ gerçek çözüm (sağda)

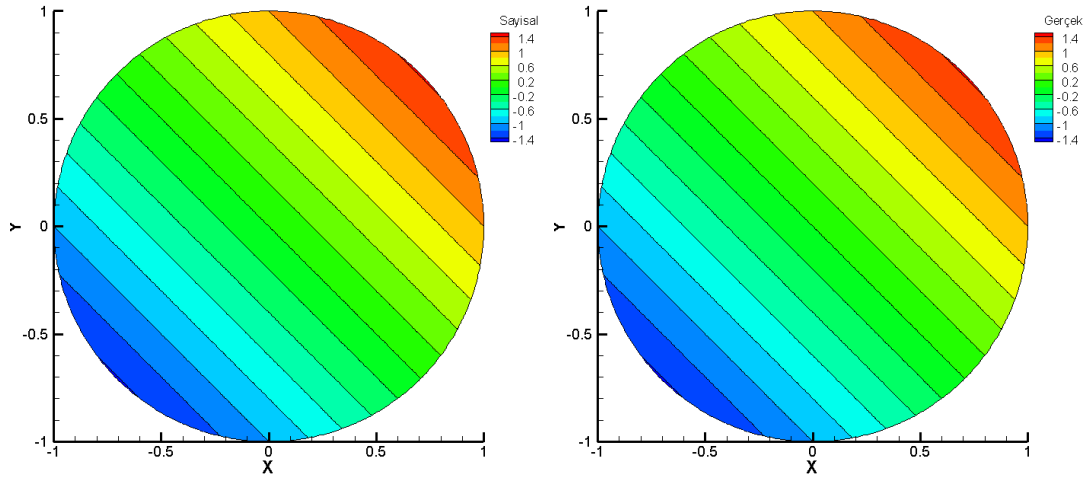
2. Örnek olarak birim çember üzerinde kutupsal koordinatlarda Laplace denklemini sağlayan $u(r, \theta) = r^s(\cos(s\theta) + \sin(s\theta))$ fonksiyonu kullanılarak, yine Dirichlet türü sınır koşulları ile sayısal çözüm elde edilmiş ve iki farklı s değeri ($s=1$ ve $s=2$) için farklı sayılarda elemanlar kullanılarak elde edilen çözümler için L_2 norm ve en büyük hata değerleri Tablo 2. de gösterilmiştir. s değeri arttıkça gerçek çözümdeki dalgalanma periyodu

arttığından dolayı sayısal çözümdeki yakınsaklığın da etkilendiği $L2$ norm ve en büyük hata değerlerinden gözlemlenmektedir.

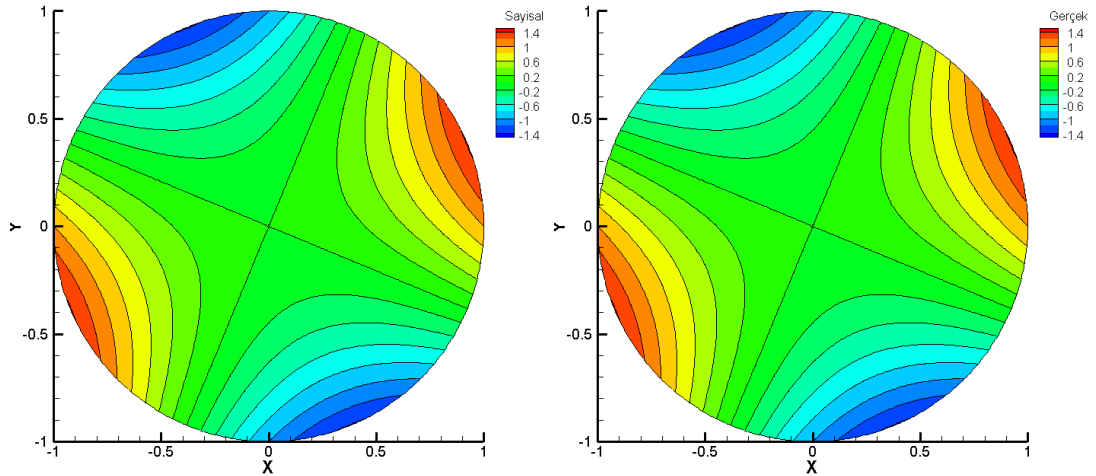
Tablo 2. Kutupsal koordinatlarda sonlu elemanlar yönteminde Laplace denklemi için $L2$ norm ve en büyük hata

Eleman Sayısı	S	$L2$ Norm	En Büyük Hata
176	1	$0.00 \dots 0137 \rightarrow 10^{-11}$	$0.00 \dots 0507 \rightarrow 10^{-13}$
	2	$0.000288 \rightarrow 10^{-4}$	$0.00 \dots 0982 \rightarrow 10^{-3}$
718	1	$0.00 \dots 0584 \rightarrow 10^{-12}$	$0.00 \dots 0982 \rightarrow 10^{-13}$
	2	$0.0000387 \rightarrow 10^{-5}$	$0.00277 \rightarrow 10^{-3}$
2812	1	$0.00 \dots 0121 \rightarrow 10^{-12}$	$0.00 \dots 0111 \rightarrow 10^{-12}$
	2	$0.00000436 \rightarrow 10^{-6}$	$0.000758 \rightarrow 10^{-4}$
11394	1	$0.00 \dots 0199 \rightarrow 10^{-15}$	$0.00 \dots 0328 \rightarrow 10^{-12}$
	2	$0.00 \dots 0546 \rightarrow 10^{-7}$	$0.000191 \rightarrow 10^{-4}$
45702	1	$0.00 \dots 0627 \rightarrow 10^{-14}$	$0.00 \dots 0543 \rightarrow 10^{-12}$
	2	$0.00 \dots 0682 \rightarrow 10^{-8}$	$0.0000650 \rightarrow 10^{-5}$

Şekil 10. da $s=1$ ve Şekil 11. de $s=2$ için sayısal çözüm ve gerçek çözüm ile elde edilen sonuçların iz düşüm eğrileri gösterilmektedir.



Şekil 10. Laplace denklemi için sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm (solda) ve $u(r, \theta) = r(\cos(\theta) + \sin(\theta))$ gerçek çözüm (sağda)



Şekil 11. Laplace denklemi için sonlu elemanlar yöntem ile sayısal çözüm (solda) ve $u(r, \theta) = r^2(\cos(2\theta) + \sin(2\theta))$ gerçek çözüm (sağda)

3.1.2. Sınır Elemanlar Yönteminde Laplace Denklemi İçin $L2$ Norm

Bu bölümde sınır elemanlar yöntemi ile iç ve dış bölge Laplace denklemlerinin çözümleri incelenecektir. Manyetik alanca iletken ortamda MHD denklemlerinin matematiksel modellemesinde dış bölgede dış bölge Laplace denklemi ve manyetik alanca iletken cisim durumunda ise cisim üzerinde iç bölge Laplace denklemi ile karşılaşılmaktadır. Problemin çözümünde iç bölge ve dış bölge Laplace denklemleri sınır elemanlar yöntemi ile çözüleceğinden dolayı, denklemlerin bağımsız çözümlerinin gerçek

çözüm olduğu durumlardaki durum incelenecek ve $L2$ norm ve en büyük hata değerleri hesaplanacaktır. Kutupsal koordinatlarda çembersel bölgede iç bölge Laplace denklemi için $u(r, \theta) = r^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + r^2 \cdot \sin(2 \cdot \theta)$ ve dış bölge Laplace denklemi için $u(r, \theta) = r^{-1} \cdot \cos(-\theta) + r^{-1} \cdot \sin(-\theta)$ fonksiyonları kullanılarak denklemler sınır elemanlar yöntemi ile çözülmüştür. Tablo 3. de iç bölge Laplace problemi için, Tablo 4. de dış bölge Laplace problemi için farklı sayıda sınır nokta sayısı ile doğrusal eleman kullanılarak denklemlerin sınır elemanlar yöntemi ile çözümlerinden elde edilen $L2$ Norm ve en büyük hata değerleri listelenmiştir. Sınır elemanlar yönteminin yakınsaklığı ve sınır nokta sayısı arttıkça $L2$ Norm ve en büyük hata değerlerinin düştüğü gözlemlenmektedir.

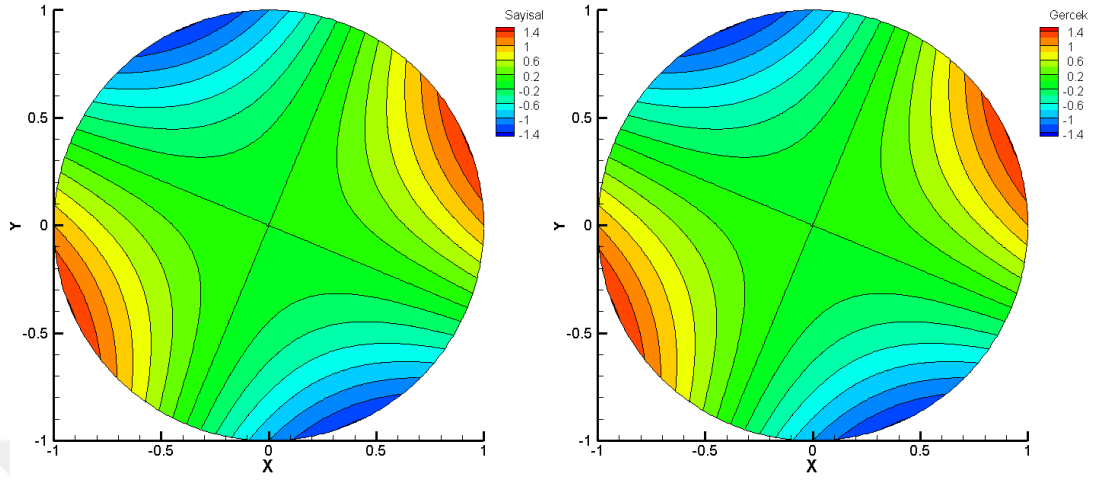
Tablo 3. 2-Boyutlu uzayda sınır elemanlar yönteminde $u(r, \theta) = r^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + r^2 \cdot \sin(2 \cdot \theta)$ gerçek çözümü ile iç bölge problemi için $L2$ norm ve en büyük hata

Sınır Nokta Sayısı	$L2$ Norm	En Büyük Hata
64	$0.0000217 \rightarrow 10^{-5}$	$0.00107 \rightarrow 10^{-3}$
128	$0.00000294 \rightarrow 10^{-6}$	$0.000279 \rightarrow 10^{-4}$
256	$0.000000379 \rightarrow 10^{-7}$	$0.0000703 \rightarrow 10^{-5}$
512	$0.000000047 \rightarrow 10^{-8}$	$0.0000179 \rightarrow 10^{-5}$
1024	$0.0000000059 \rightarrow 10^{-9}$	$0.00000449 \rightarrow 10^{-6}$
2048	$0.0000000008 \rightarrow 10^{-10}$	$0.00000112 \rightarrow 10^{-6}$

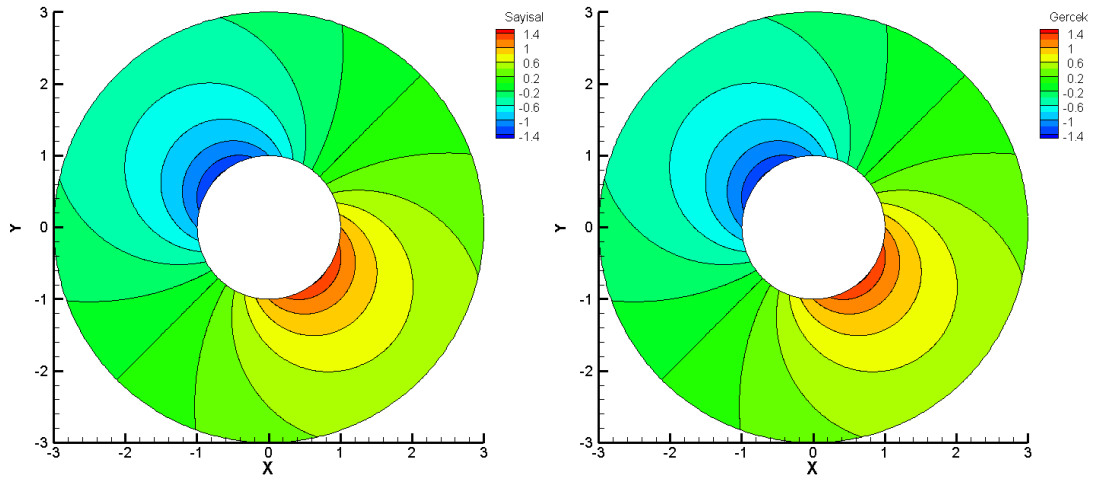
Tablo 4. 2-Boyutlu uzayda sınır elemanlar yönteminde $u(r, \theta) = r^{-1} \cdot \cos(-\theta) + r^{-1} \cdot \sin(-\theta)$ gerçek çözümü ile dış bölge problemi için $L2$ norm ve en büyük hata

Sınır Nokta Sayısı	$L2$ Norm	En Büyük Hata
64	$0.0000178 \rightarrow 10^{-5}$	$0.00101 \rightarrow 10^{-3}$
128	$0.00000229 \rightarrow 10^{-6}$	$0.000268 \rightarrow 10^{-4}$
256	$0.000000284 \rightarrow 10^{-7}$	$0.0000689 \rightarrow 10^{-5}$
512	$0.0000000346 \rightarrow 10^{-8}$	$0.0000175 \rightarrow 10^{-5}$
1024	$0.00000000455 \rightarrow 10^{-9}$	$0.0000044 \rightarrow 10^{-6}$

Şekil 12. de iç bölge Laplace problemi ve Şekil 13. de dış bölge Laplace problemi için elde edilen sayısal çözüm ve gerçek çözümün iz düşüm eğrileri gösterilmektedir.



Şekil 12. Laplace denklemi iç bölge için sınır elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm (solda) ve $u(r, \theta) = r^2(\cos(2\theta) + \sin(2\theta))$ gerçek çözüm (sağda)



Şekil 13. Laplace denklemi iç bölge için sınır elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm (solda) ve $u(r, \theta) = r^{-1}.\cos(-\theta) + r^{-1}.\sin(-\theta)$ gerçek çözüm (sağda)

3.2. MHD Kanal Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü

Bu bölümde duvarları manyetik alanca yalıtkan ve yeterince uzunluktaki kanal içerisindeki MHD kanal probleminin sonlu elemanlar yöntemi ile 2-boyutlu kanal kesitinde

çözümleri incelenecektir. Kanal kesiti olarak, kare, çember, çembersel ve karesel anular bölgeler olmak üzere dört farklı durum incelenecektir.

3.2.1. Kare Kanal İçerisindeki MHD Kanal Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü

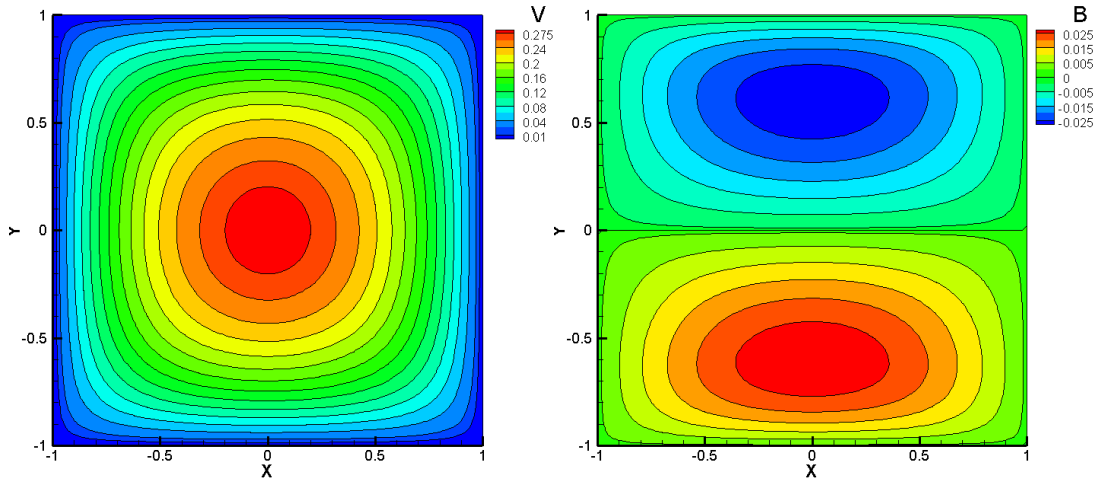
Problemin kare kesitli kanal için analitik çözümü literatürde seri formunda J.A. Shercliff tarafından verilmektedir [7]. Tablo 5. de hız (V) ve Tablo 6. da manyetik alan (B) için sayısal yöntemle elde edilen sonuçlar ile analitik çözüm kullanılarak $L2$ norm ve en büyük hata değerleri farklı Hartmann sayıları için verildi. Tablodan görüldüğü üzere sayısal çözüm yöntemi olarak stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemi kullanıldığından dolayı çok büyük Hartmann sayıları için bile yakınsak sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 5. 2-Boyutlu kare kanal kesitinde MHD probleminde hız için $L2$ norm ve en büyük hata

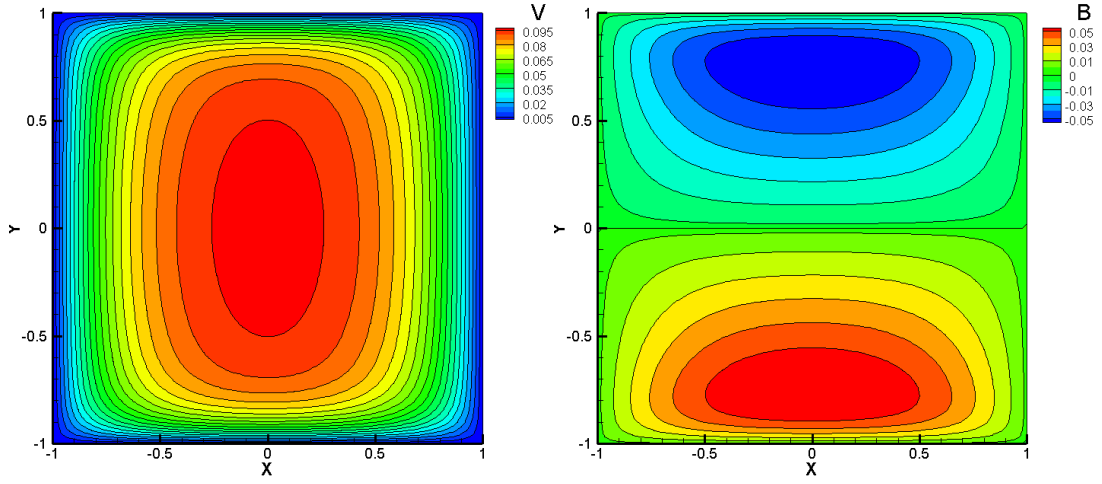
Hartmann Sayısı	$L2$ Norm	En Büyük Hata
1	$0.000000101 \rightarrow 10^{-7}$	$0.00 \dots 01 \rightarrow 10^{-10}$
10	$0.000000364 \rightarrow 10^{-7}$	$0.000113 \rightarrow 10^{-4}$
50	$0.00000108 \rightarrow 10^{-6}$	$0.00 \dots 01 \rightarrow 10^{-15}$
100	$0.00000158 \rightarrow 10^{-6}$	$0.00 \dots 01 \rightarrow 10^{-15}$
500	$0.000000647 \rightarrow 10^{-7}$	$0.00000122 \rightarrow 10^{-6}$
1000	$0.000000283 \rightarrow 10^{-7}$	$0.00000437 \rightarrow 10^{-6}$

Tablo 6. 2-Boyutlu kare kanal kesitinde MHD probleminde manyetik alan için $L2$ norm ve en büyük hata

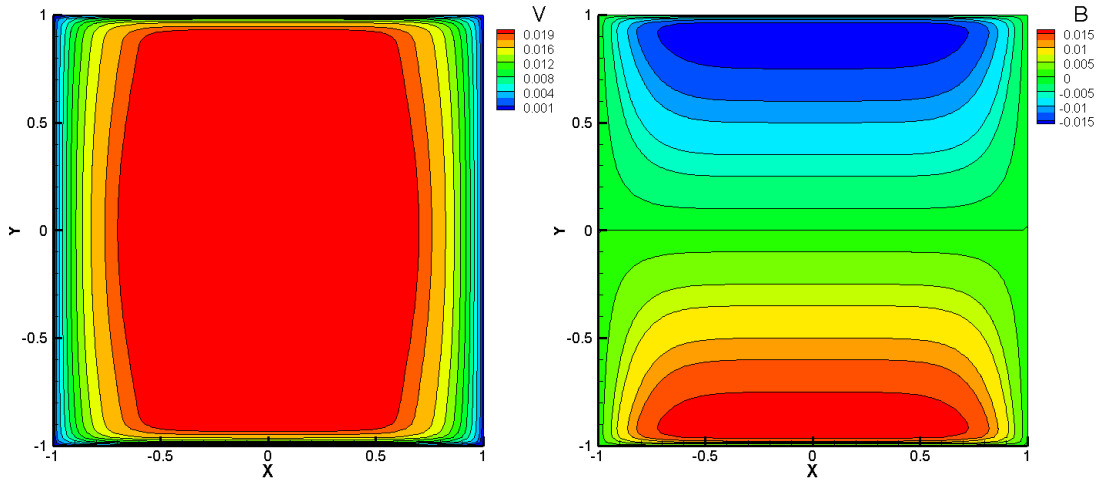
Hartmann Sayısı	$L2$ Norm	En Büyük Hata
1	$0.0000000333 \rightarrow 10^{-8}$	$0.00000676 \rightarrow 10^{-6}$
10	$0.000000364 \rightarrow 10^{-7}$	$0.000113 \rightarrow 10^{-4}$
50	$0.00000108 \rightarrow 10^{-6}$	$0.000642 \rightarrow 10^{-4}$
100	$0.00000158 \rightarrow 10^{-6}$	$0.00115 \rightarrow 10^{-3}$
500	$0.000000647 \rightarrow 10^{-7}$	$0.000470 \rightarrow 10^{-4}$
1000	$0.000000283 \rightarrow 10^{-7}$	$0.000205 \rightarrow 10^{-4}$



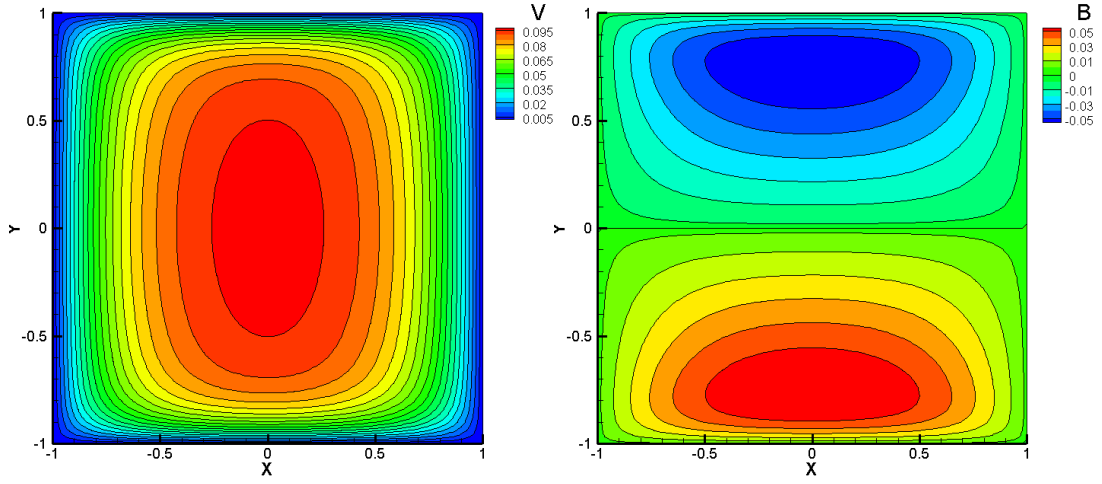
Şekil 14. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1, \theta = \pi/2$



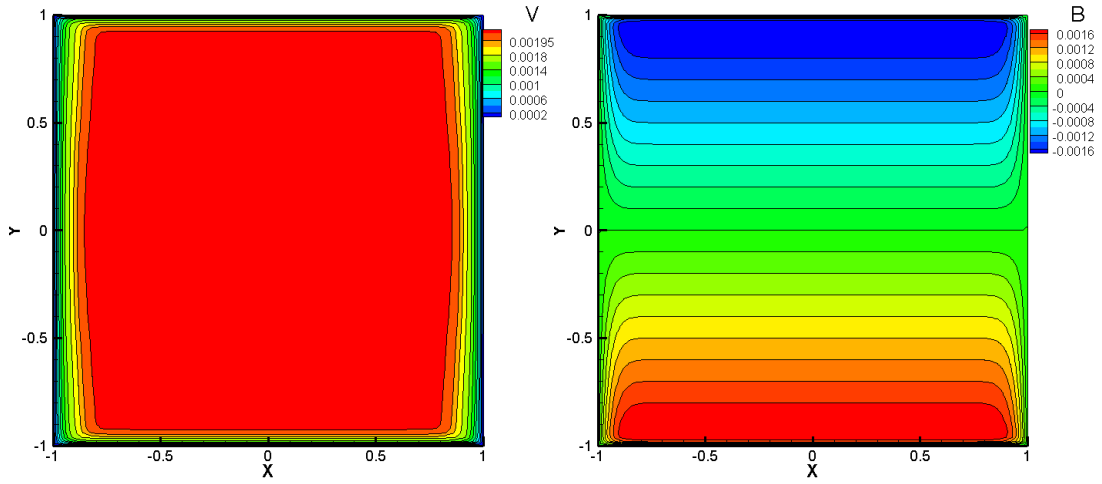
Şekil 15. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 10, \theta = \pi/2$



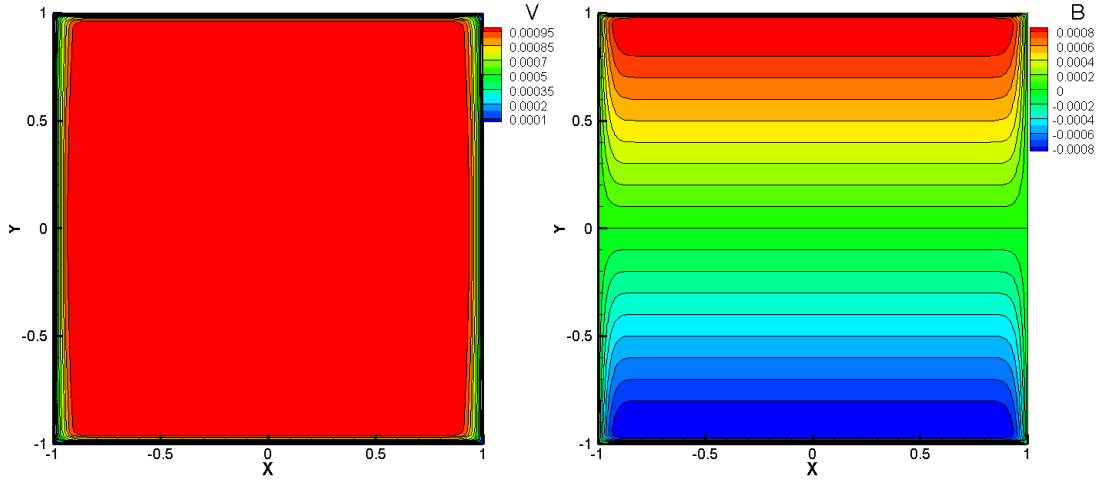
Şekil 16. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 50, \theta = \pi/2$



Şekil 17. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 100, \theta = \pi/2$

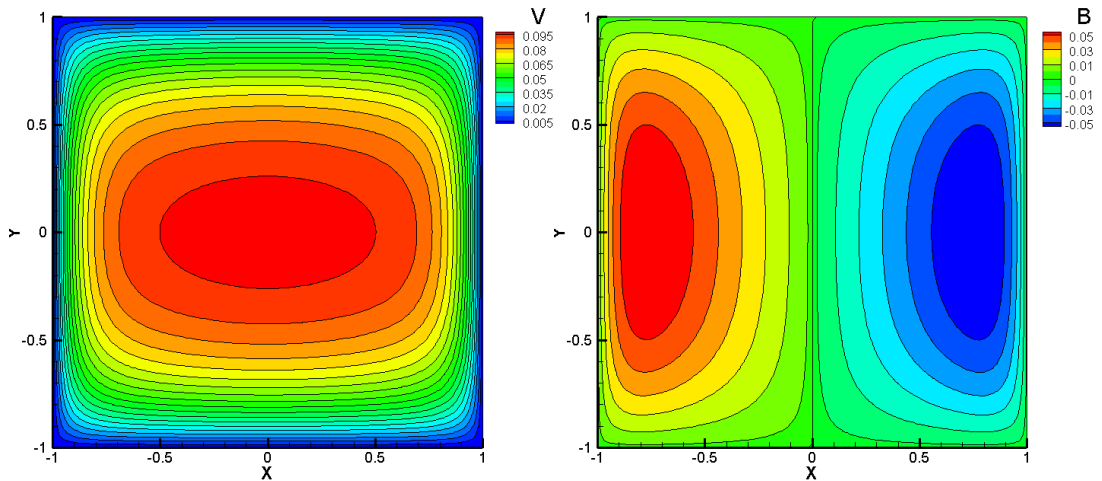


Şekil 18. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 500, \theta = \pi/2$

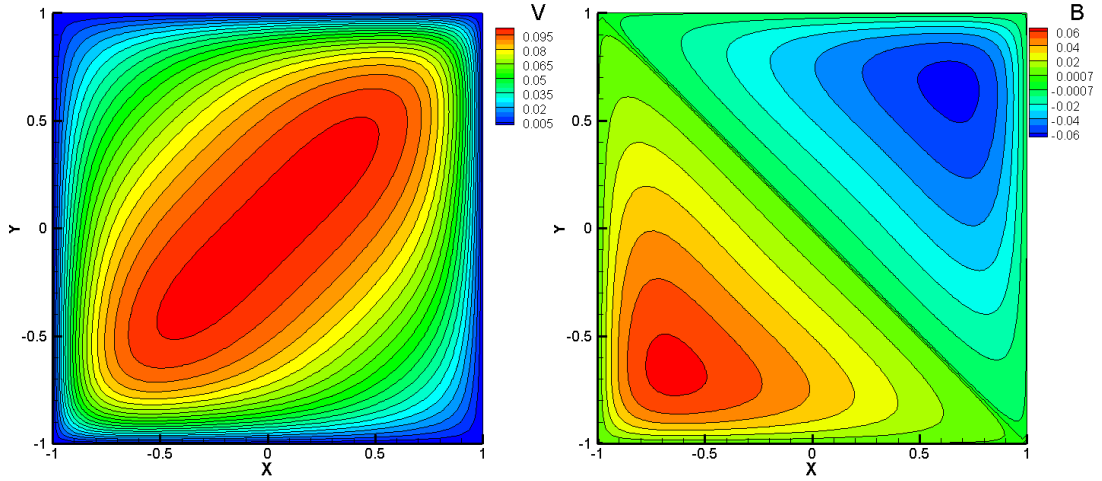


Şekil 19. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1000, \theta = \pi/2$

Şekil 14. ile Şekil 19. arasında $M=1$ den $M=1000$ 'e kadar ki Hartmann sayıları için hız ve manyetik alan iz düşüm eğrilerinin grafikleri verildi. Elde edilen sonuçların stabilliği grafiklerden de görülmektedir. Ayrıca Hartmann sayısı arttıkça, MHD problemlerinin bilinen karakteristik özelliği olan sınır katmanının oluşumu da çok açık şekilde grafiklerden gözlemlenmektedir. Teoriden de bilindiği üzere sınır katman kalınlığı paralel duvarlarda $1/M$ dik duvarlarda ise $1/\sqrt{M}$ oranında olduğu hesaplanmıştır.

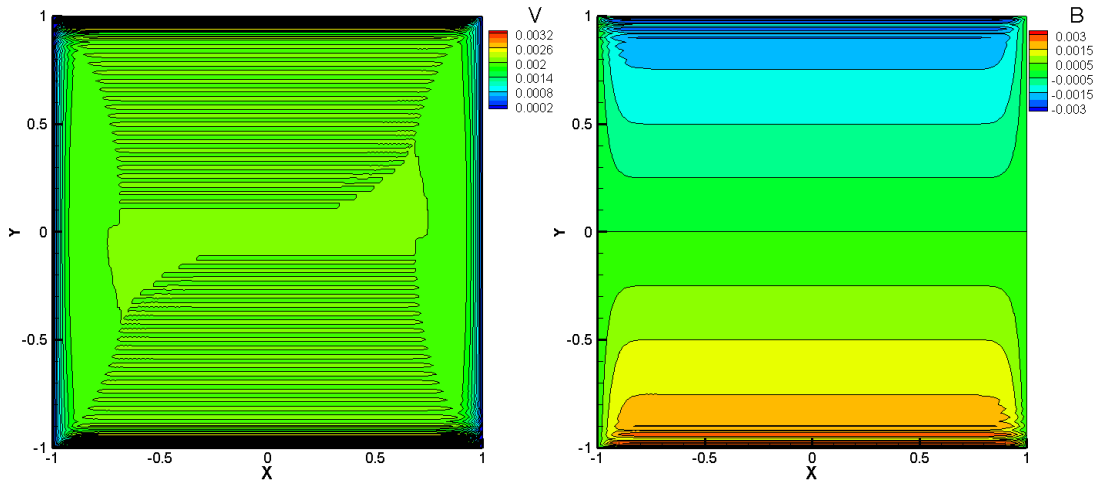


Şekil 20. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 10, \theta = 0$



Şekil 21. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 10$, $\theta = \pi/4$

Şekil 20. ile Şekil 21. arasında ise $M = 10$ için dışardan etki ettirilen manyetik alanın farklı açılardan ($\theta = 0$ ve $\theta = \pi/4$) uygulandığı durumlar gösterilmiştir. Grafiklerden de görüleceği üzere, $\theta = \pi/2$ durumundaki yapının korunduğu sadece dışardan etki ettirilen manyetik alanın açısı kadar dönme olduğu gözlemlenmektedir.



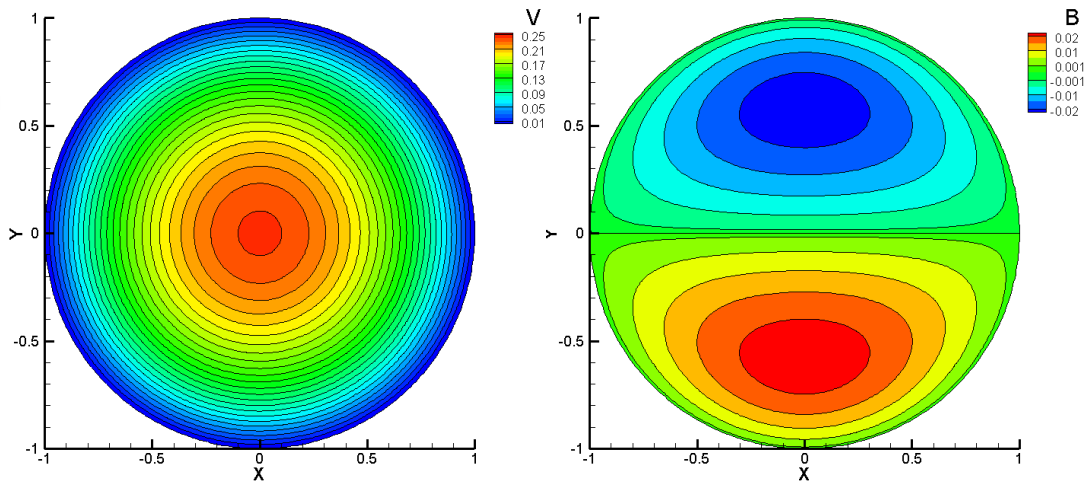
Şekil 22. Kare kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 500$, $\theta = \pi/2$

Şekil 22. de ise sonlu elemanlar yönteminde stabilizasyon kullanımının etkisi gösterilmiştir. Stabilizasyon kullanılmadığında, standart sonlu elemanlar yöntemi ile elde

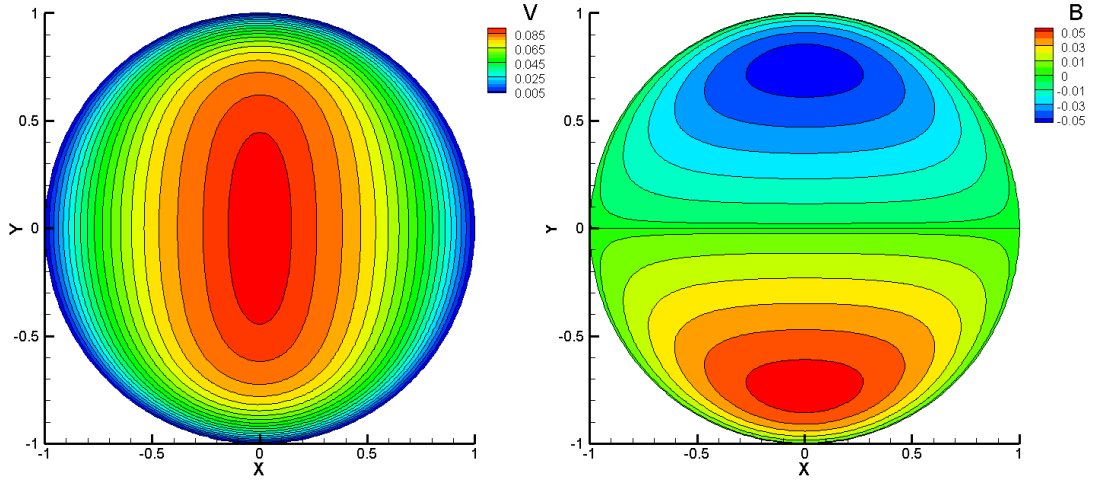
edilen sonuçlardaki bozukluklar büyük Hartmann sayı değerleri için özellikle hız bileşeninde gözlemlenmektedir.

3.2.2. Çember Kanal İçerisindeki MHD Kanal Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü

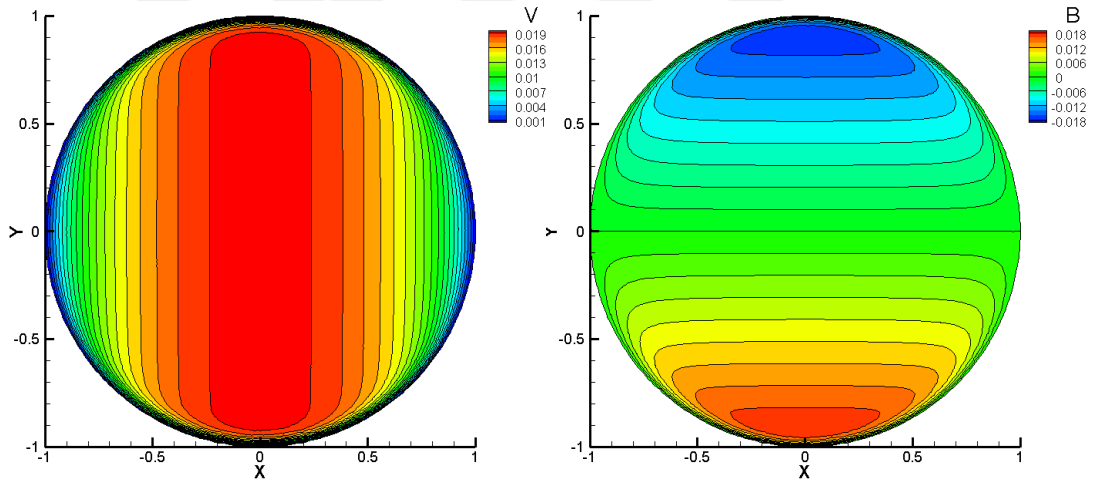
Bu bölümde ise bir önceki bölümde kare kanal kesiti için elde edilen sonuçların çember kesitli kanal durumu incelenmiştir.



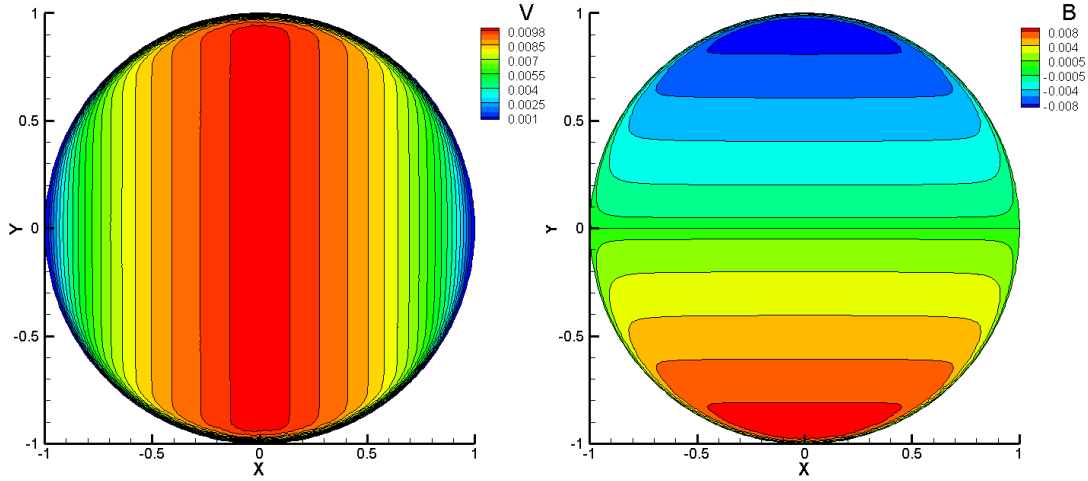
Şekil 23. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1, \theta = \pi/2$



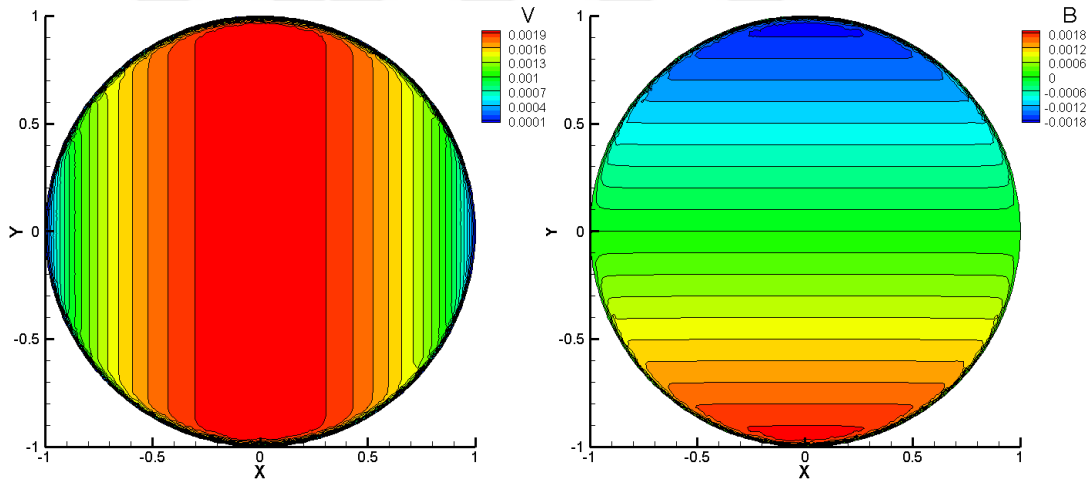
Şekil 24. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 10, \theta = \pi/2$



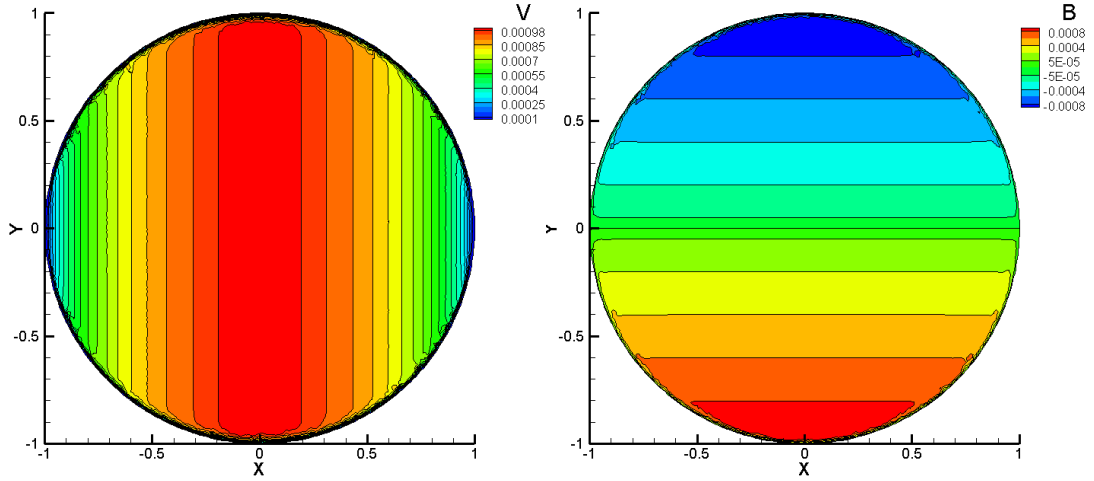
Şekil 25. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 50, \theta = \pi/2$



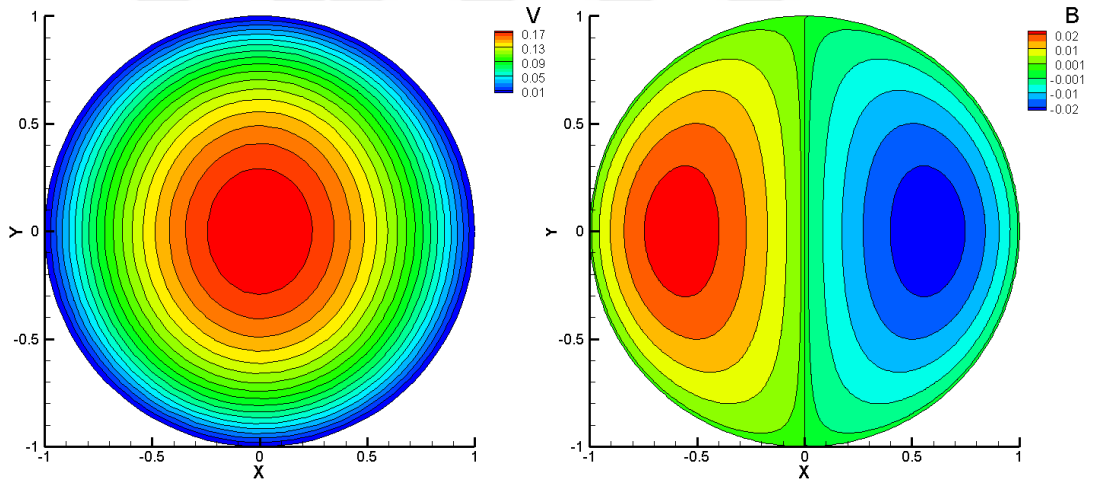
Şekil 26. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 100, \theta = \pi/2$



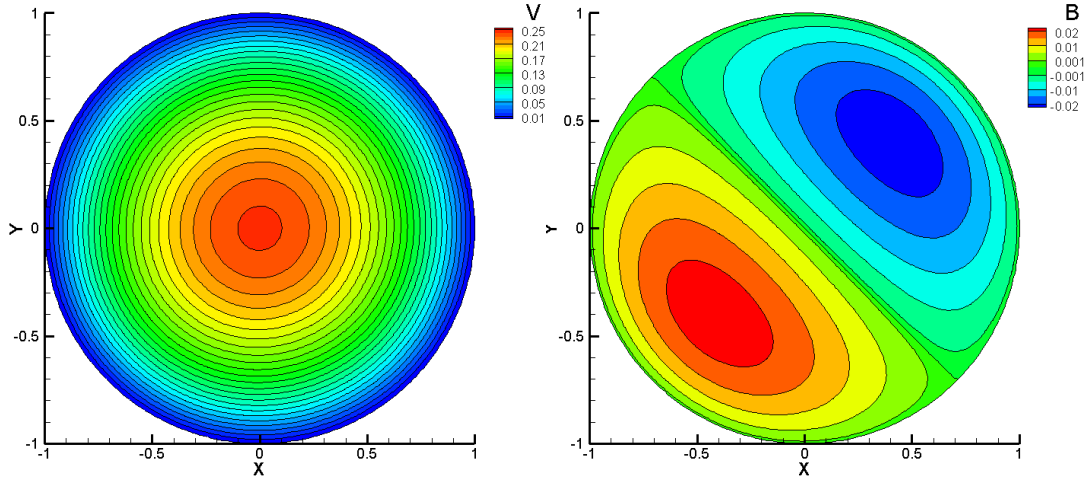
Şekil 27. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 500, \theta = \pi/2$



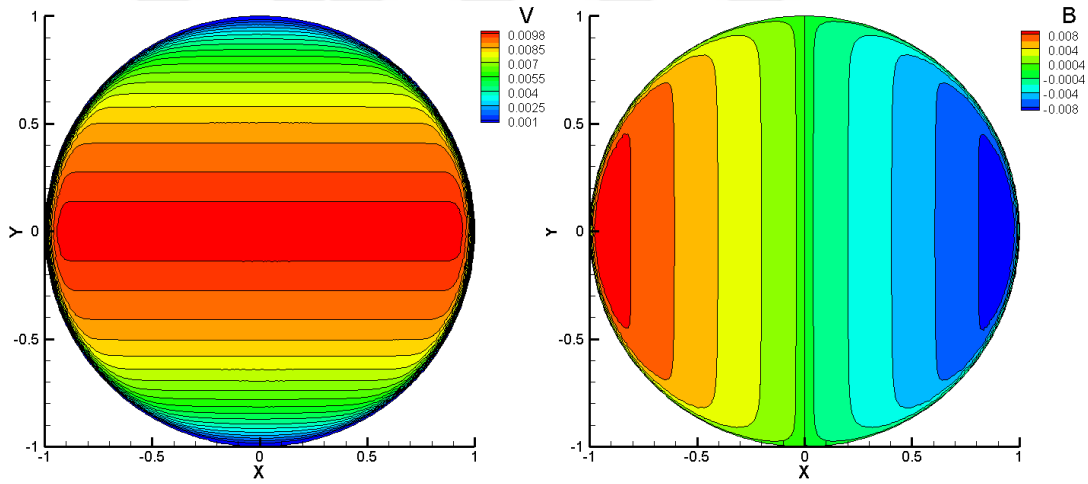
Şekil 28. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1000, \theta = \pi/2$



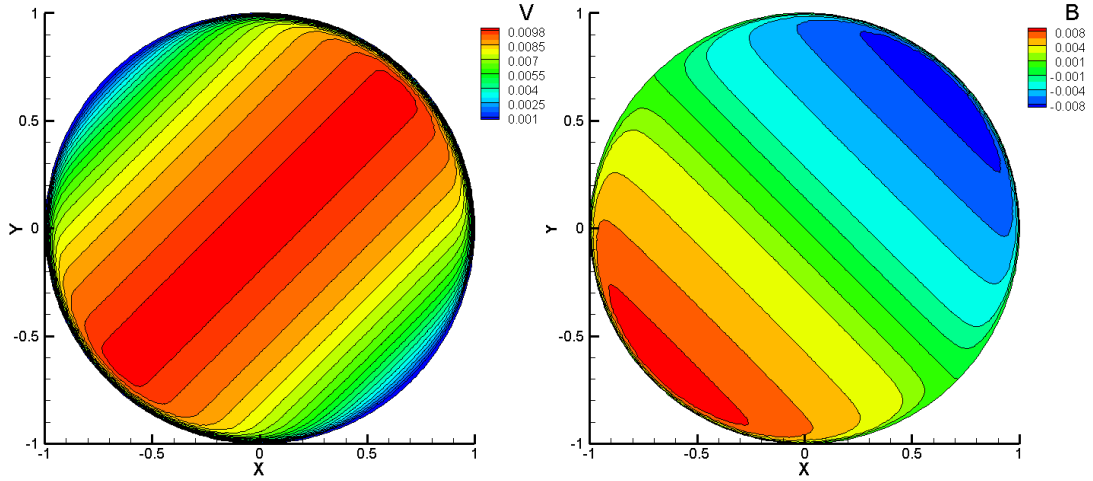
Şekil 29. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1, \theta = 0$



Şekil 30. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1$, $\theta = \pi/4$



Şekil 31. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 100$, $\theta = 0$



Şekil 32. Çember kanal kesitinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 100$, $\theta = \pi/4$

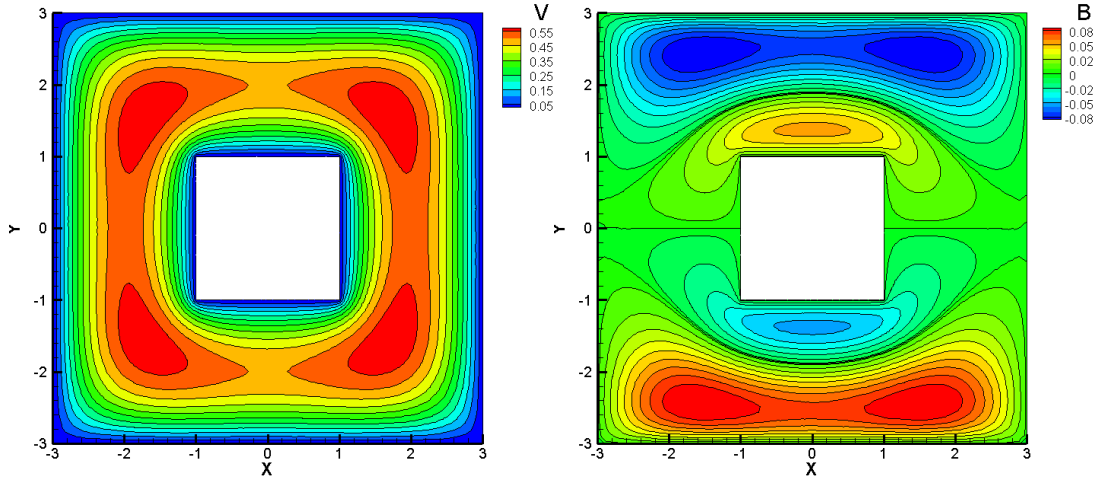
Şekil 23. ile Şekil 32. arasındaki grafiklerden görüleceği üzere, kare kesitli kanal ile benzer şekilde, Hartman sayı değeri arttıkça manyetik alana paralel duvarlarda oluşan yoğun sınır katmanı, farklı açı ile manyetik alan uygulandığında yapıdaki dönme çember kesitli kanalda da gözlemlenmektedir.

3.3. Kare ve Çember Anular Bölgede MHD Akım Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü

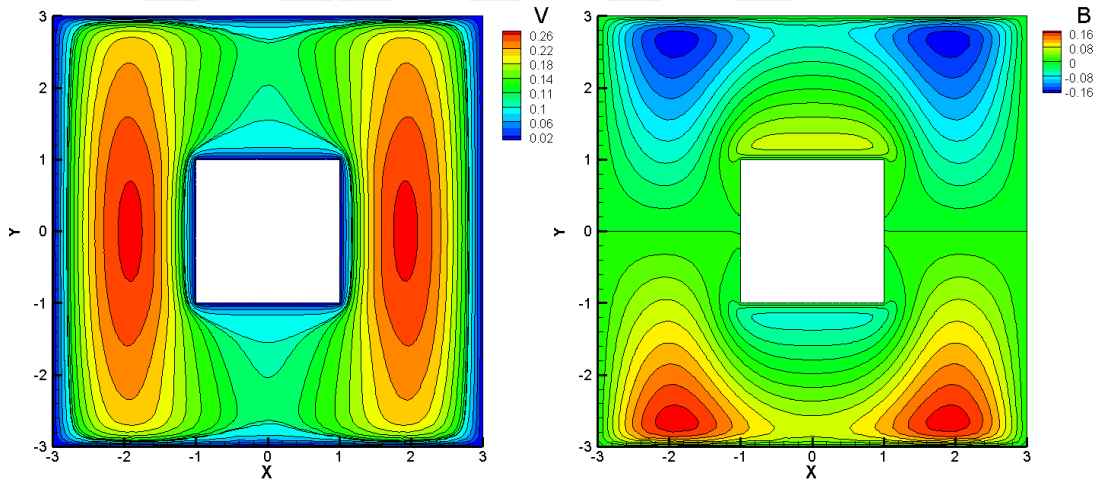
Bu kısımda çember ve kare anular bölgede MHD kanal probleminin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümleri incelenecektir.

3.3.1. Kare Anular Bölgede MHD Akım Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü

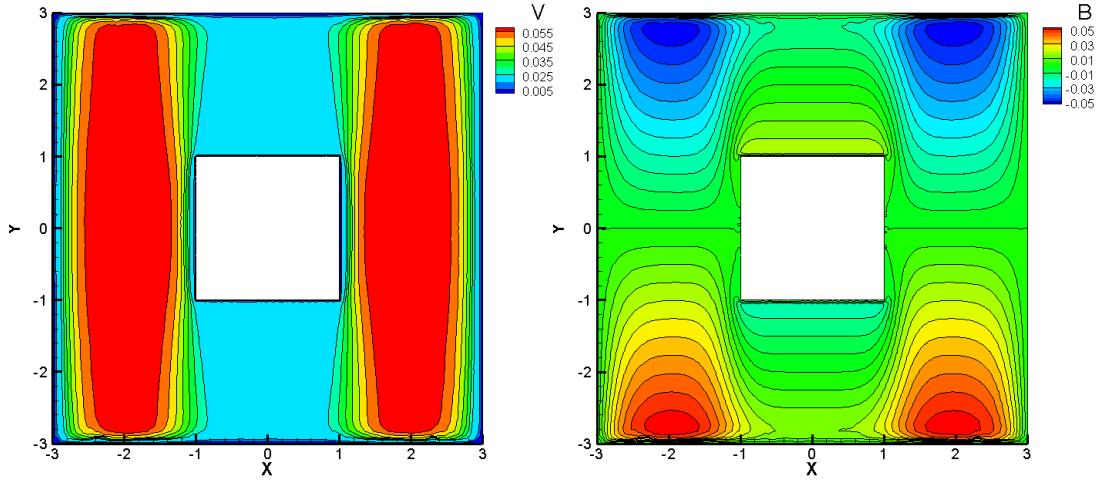
İlk olarak, iki kare arasında kalan anular bölgede duvarların manyetik alanca yalıtılan olduğu kanal içerisindeki MHD probleminin sayısal yöntemle çözümü incelenecektir.



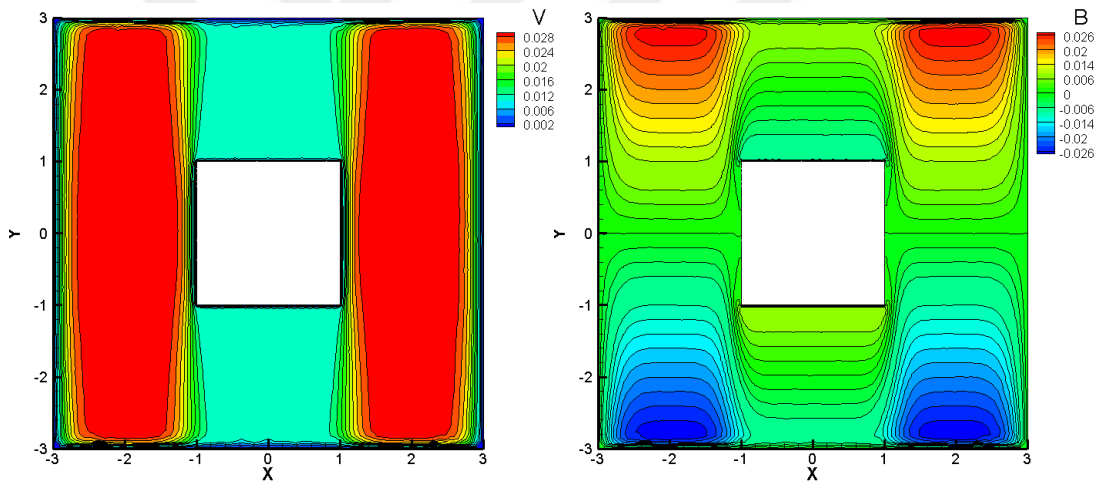
Şekil 33. Kare kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1, \theta = \pi/2$



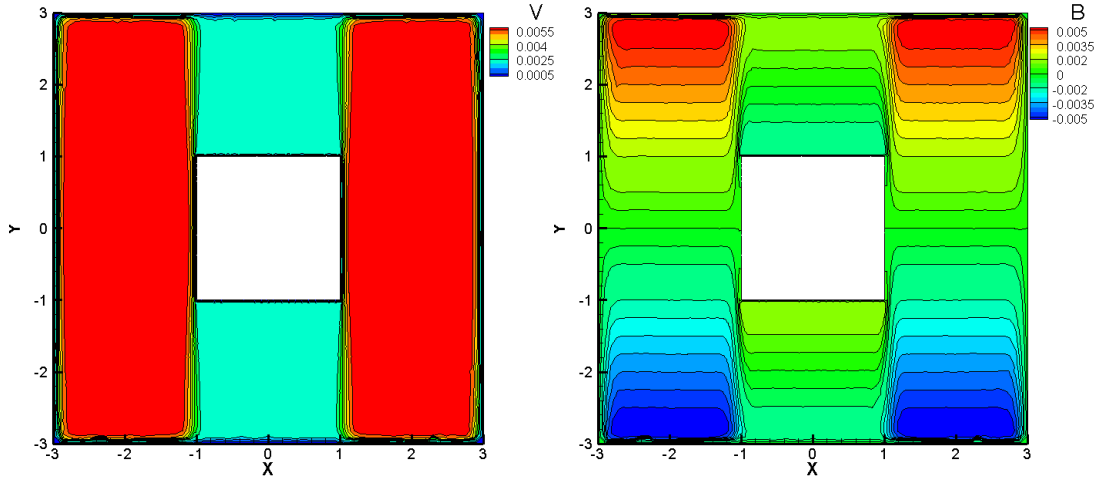
Şekil 34. Kare kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 10, \theta = \pi/2$



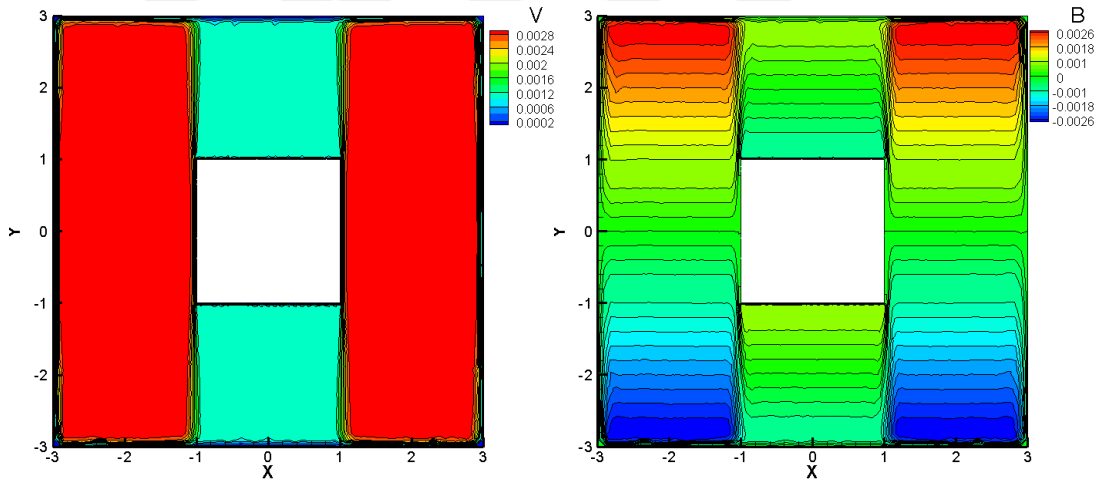
Şekil 35. Kare kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 50, \theta = \pi/2$



Şekil 36. Kare kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 100, \theta = \pi/2$



Şekil 37. Kare kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 500, \theta = \pi/2$

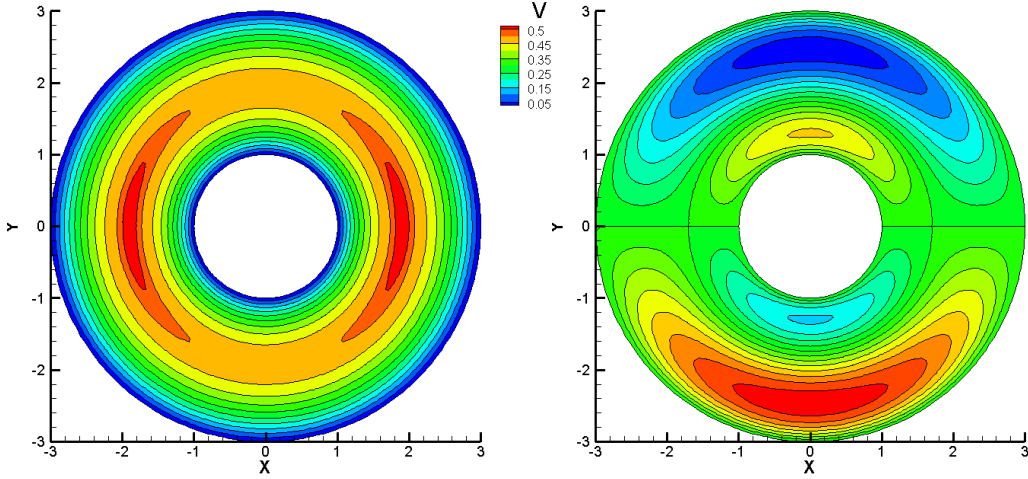


Şekil 38. Kare kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1000, \theta = \pi/2$

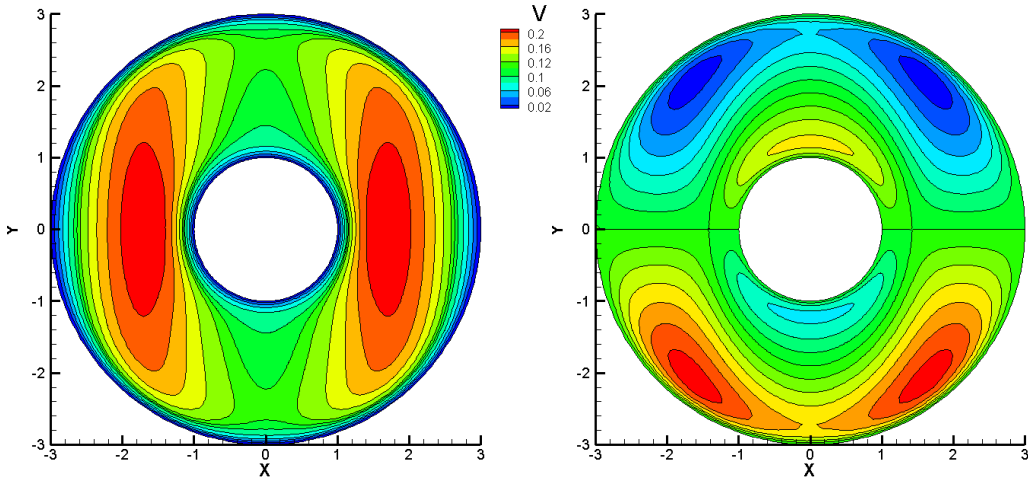
Şekil 33. ile Şekil 38. arasındaki grafiklerde farklı Hartmann sayıları için elde edilen hız ve manyetik alan iz düşüm eğrileri gösterilmektedir. Grafiklerden görüleceği üzere sınır katmanları dışarıdan uygulanan manyetik alana paralel olarak oluşmakta ve Hartmann sayısı arttıkça iç duvarlar genişliğince kanal içerisinde hemen hemen bir durağanlık gözlemlenmektedir.

3.3.2. Çember Anular Bölgede MHD Akım Probleminin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü

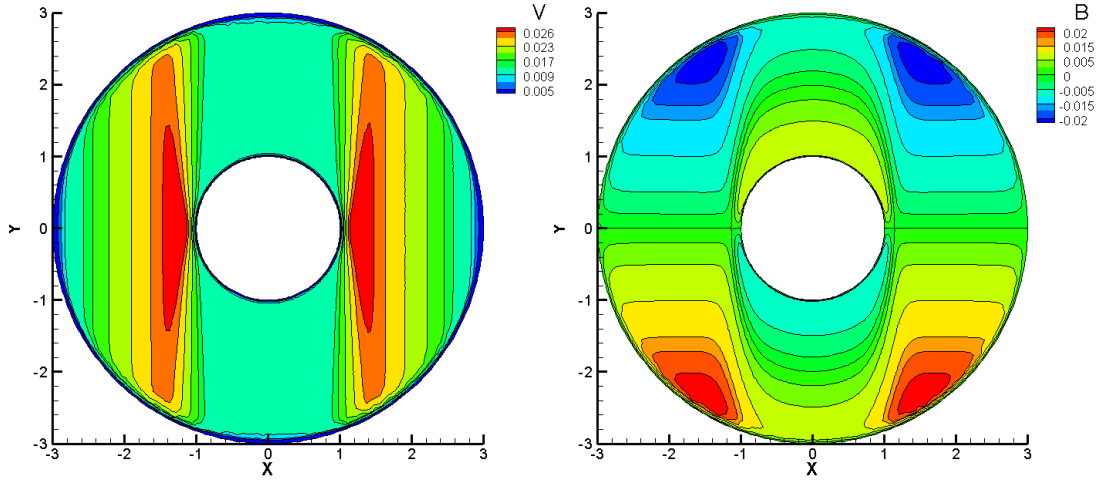
Bu bölümde, bir önceki bölümde karesel anular bölge için elde edilen sonuçların çembersel anular bölgedeki durumları incelenecektir.



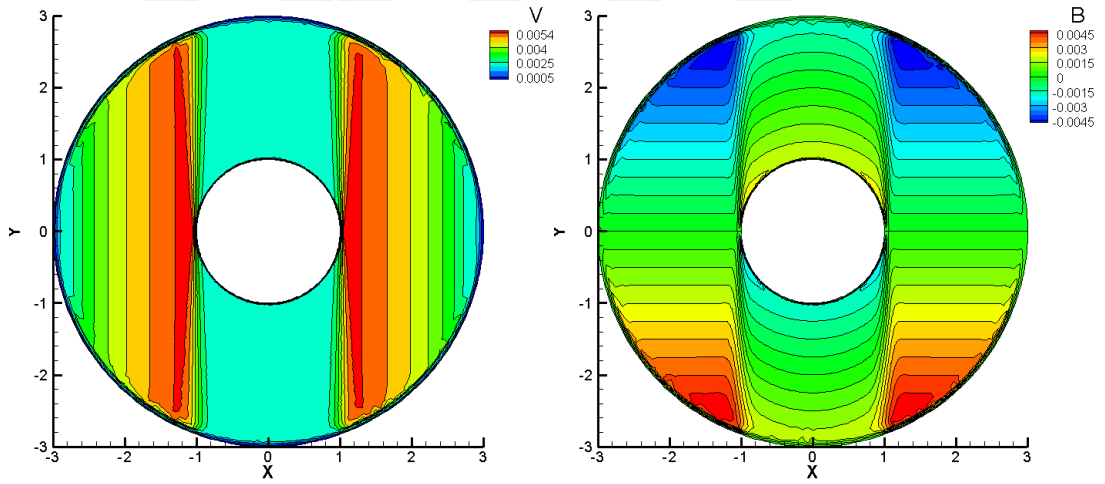
Şekil 39. Çember kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1, \theta = \pi/2$



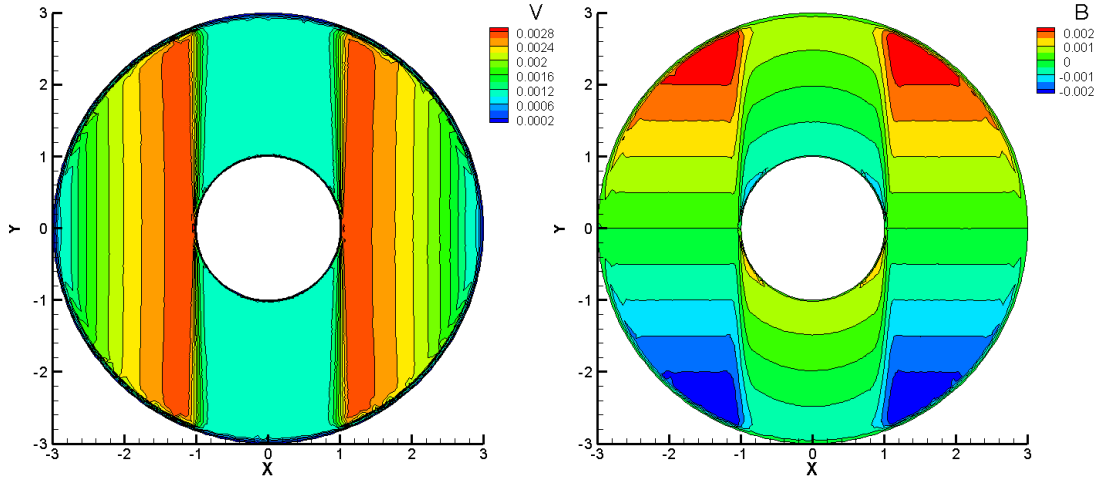
Şekil 40. Çember kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 10, \theta = \pi/2$



Şekil 41. Çember kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 100, \theta = \pi/2$



Şekil 42. Çember kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 500, \theta = \pi/2$



Şekil 43. Çember kesitli anular kanal içerisinde MHD probleminin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $M = 1000, \theta = \pi/2$

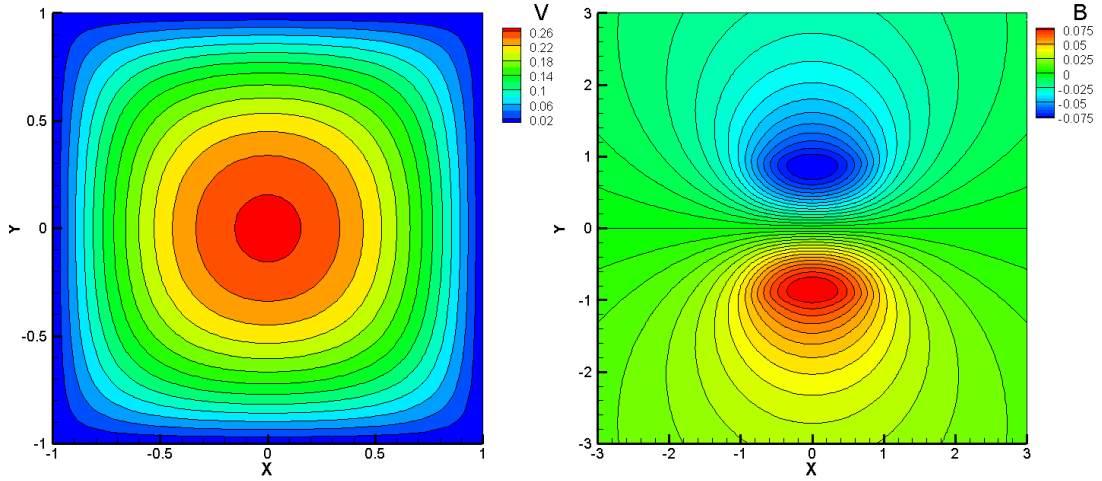
Şekil 39. ile Şekil 43. arasındaki grafiklerde gözlemleneceği üzere, karesel anular bölgedeki yapılara benzeri yapılar çembersel anular bölge de elde edilmektedir. Hartmann sayısı arttıkça iç duvarlar genişliğince oluşan yığılmanın çembersel anular bölgede daha az olduğu görülmektedir.

3.4. Manyetik Ortamda MHD Kanal Probleminin Sınır Elemanlar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri Birleşimi ile Çözümü

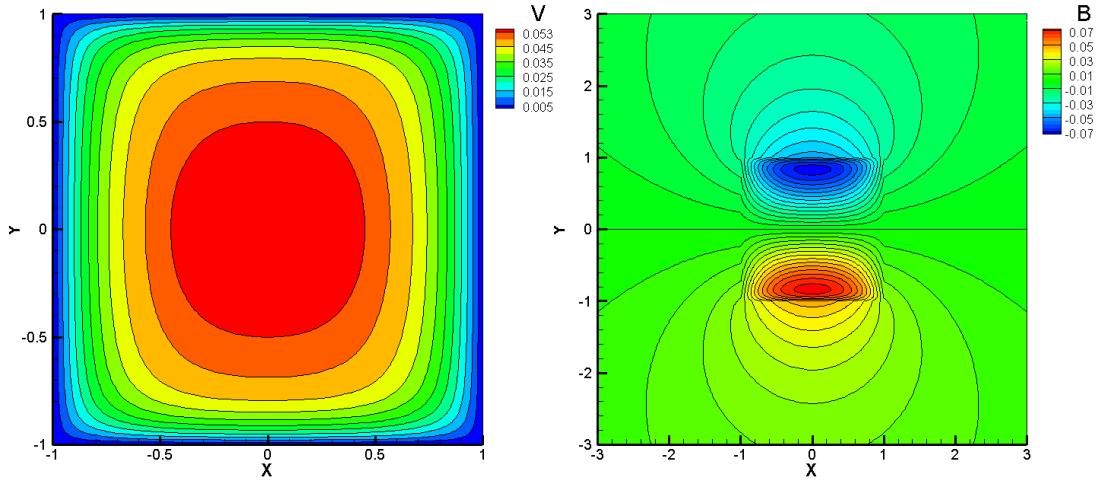
Bu bölümde tezde sayısal çözümü incelenen ana problemin, kanal içerisinde cisim olmadığı durumunda dışta sınır elemanlar ve içte sonlu elemanlar yöntemi birleşimi ile elde edilen sonuçlar incelenecektir.

3.4.1. Kare Bölgede Manyetik Ortamdaki MHD Kanal Probleminin Sınır Elemanlar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri Birleşimi ile Çözümü

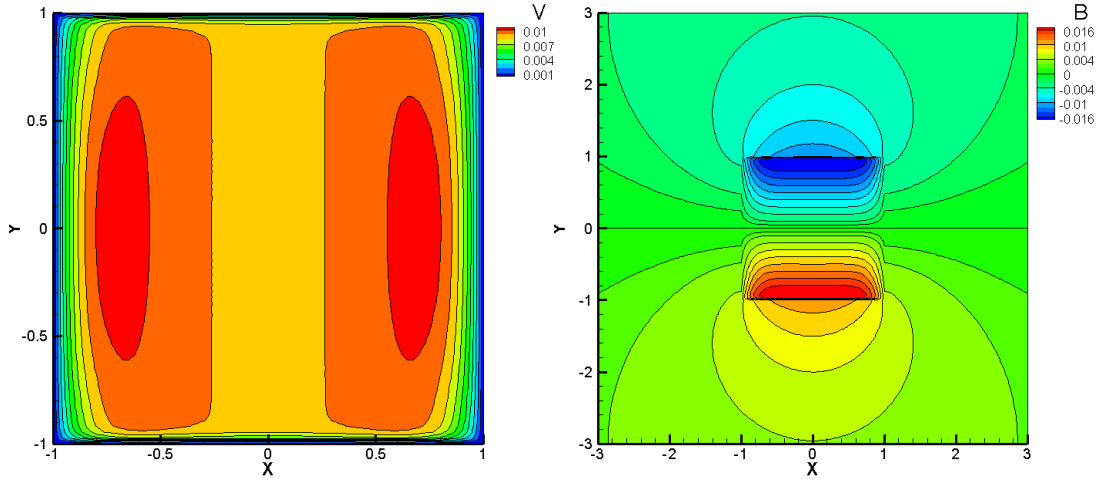
Bu bölümde bir önceki bölümde manyetik ortamda MHD kanal probleminin kare kanal durumu incelenecektir.



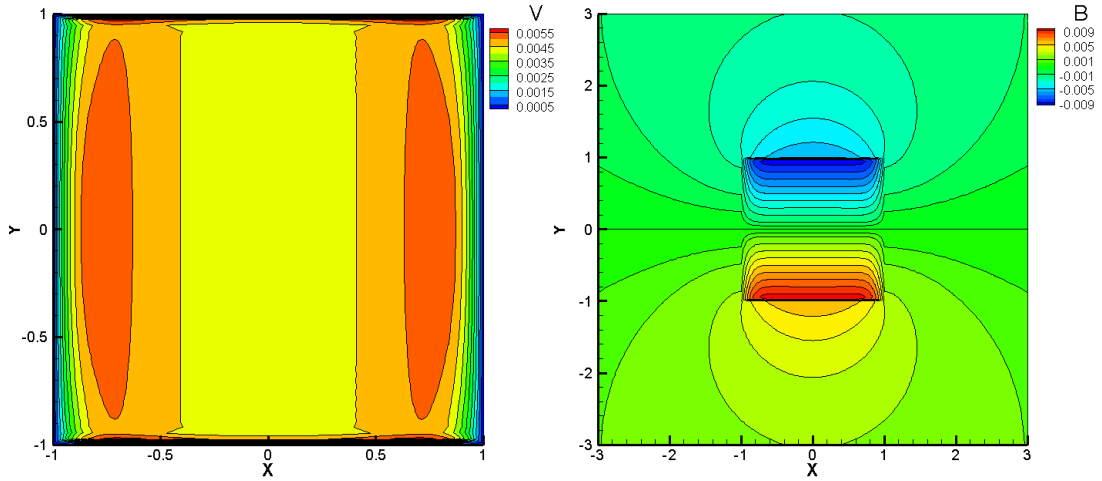
Şekil 44. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 1, Rm_{dış} = 1, Rh = 1, Re = 1, M = 1, \theta = \pi/2$



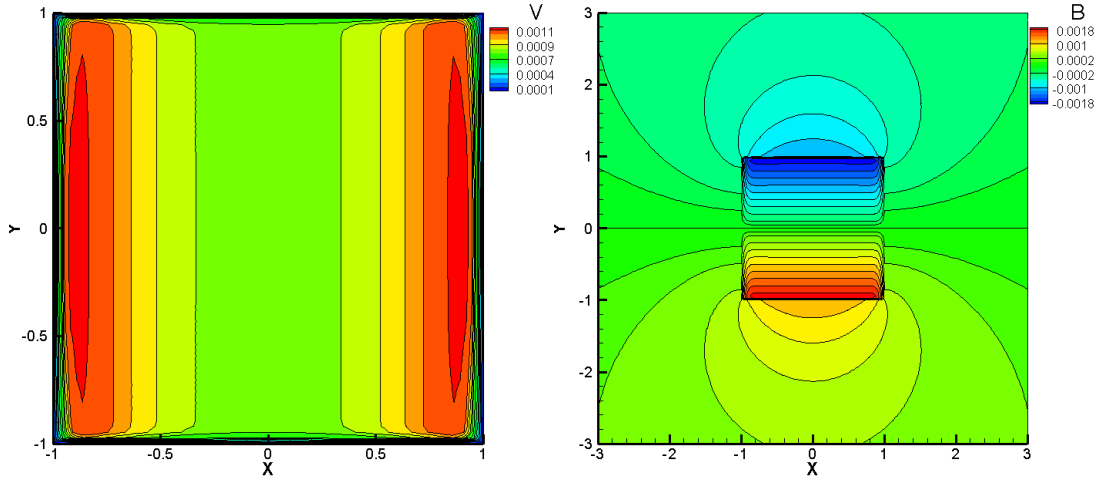
Şekil 45. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = \pi/2$



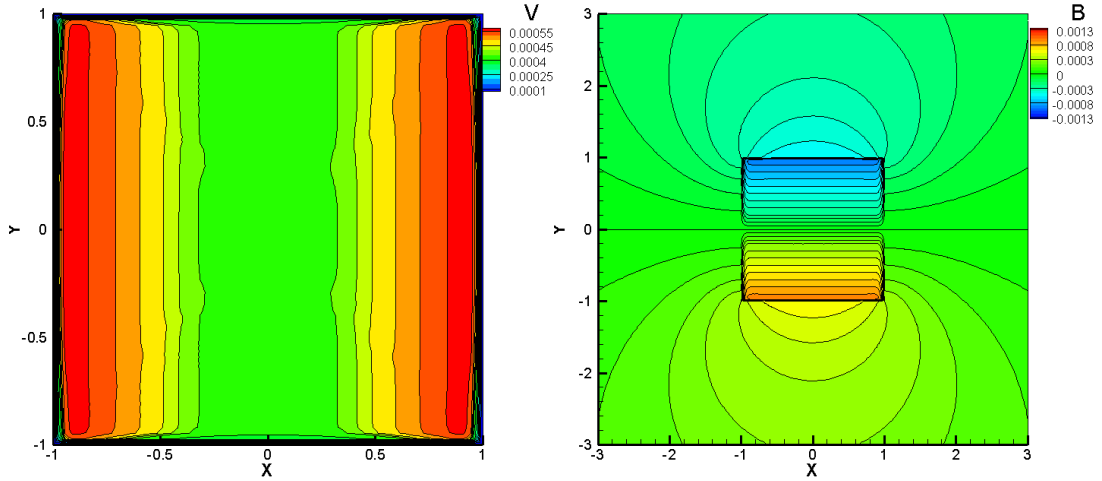
Şekil 46. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 50, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 5, M = 50, \theta = \pi/2$



Şekil 47. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 100, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 10, M = 100, \theta = \pi/2$



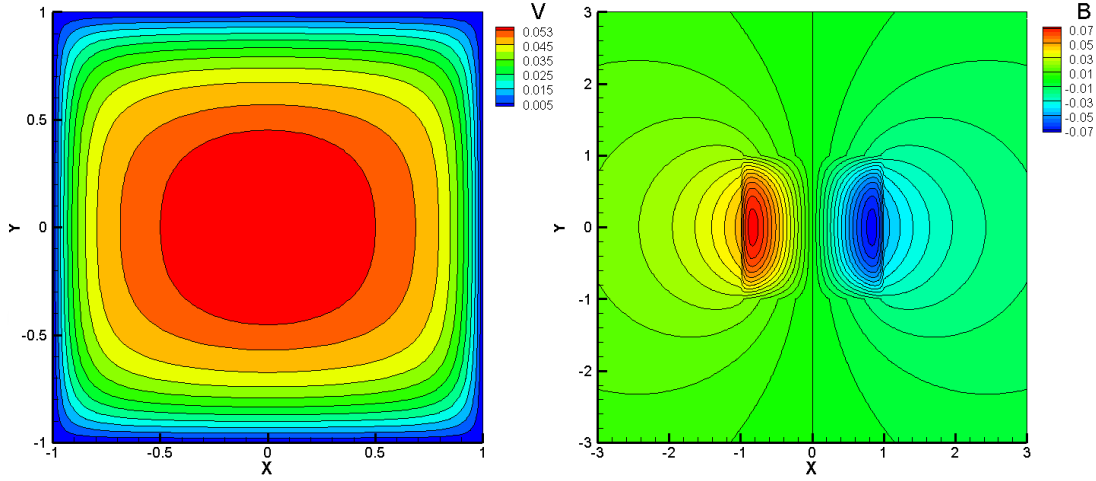
Şekil 48. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 500, Rm_{dış} = 1, Rh = 50, Re = 10, M = 500, \theta = \pi/2$



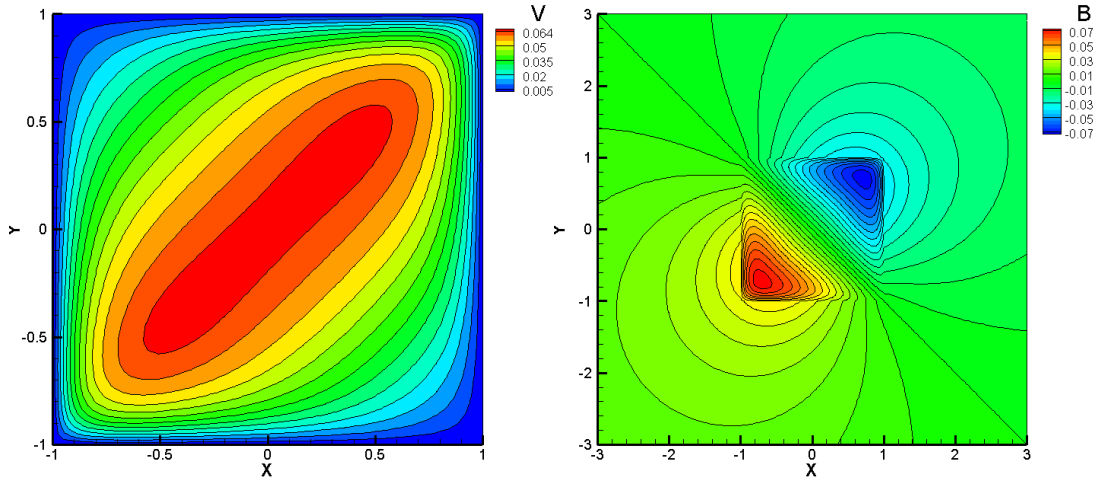
Şekil 49. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 1000, Rm_{dış} = 1, Rh = 100, Re = 10, M = 1000, \theta = \pi/2$

Şekil 44. ile Şekil 49. arasında farklı problem parametre değerleri ile elde edilen sonuçların grafikleri verilmiştir. Grafiklerden görüleceği üzere $Rm_{kanal} = Rm_{dış}$ olduğu durumda kanal bölgesinden dış ortama doğru çıkarken manyetik alan iz düşüm eğrilerinin düzgün bir şekilde devamlılık göstermesine rağmen Rm_{kanal} değeri arttıkça aynı iz düşüm eğrilerinin bir kırılma ile dış ortama doğru devam ettiği gözlemlenmektedir. Duvarları manyetik alanca yalıtkan MHD kanal problemine benzer şekilde, problem parametre

değerleri arttığında Hartmann sayısının da büyümesinden dolayı hem hız hem de manyetik alan bileşenlerinde kanal duvarlarına doğru sınır katmanının oluşumu görülmektedir. Ayrıca, özellikle problem parametre değerleri büyüdükçe köşe noktalarında ve bu noktalara yakın yerlerde bozuklukların oluştuğu gözlemlenmektedir.



Şekil 50. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = 0$

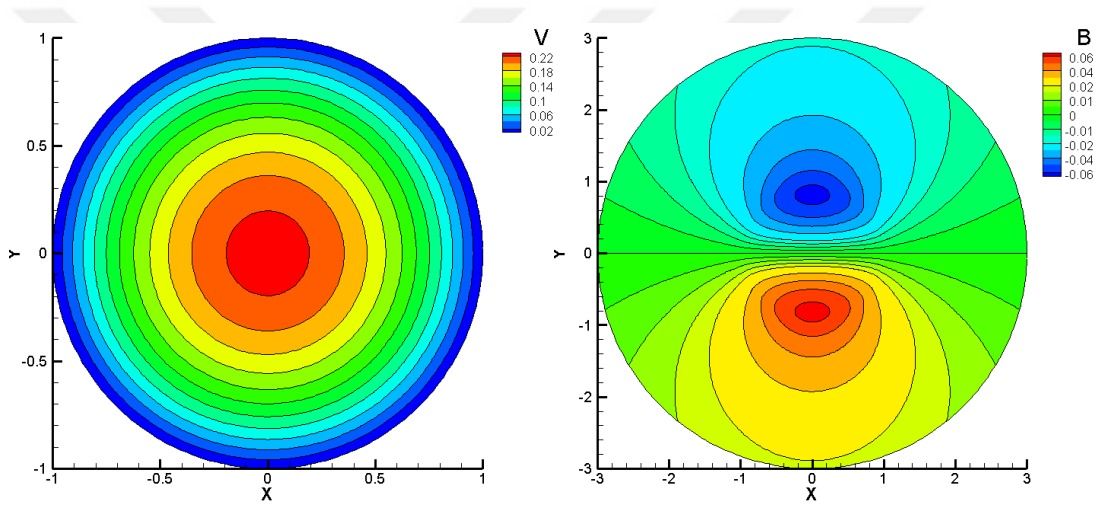


Şekil 51. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = \pi/4$

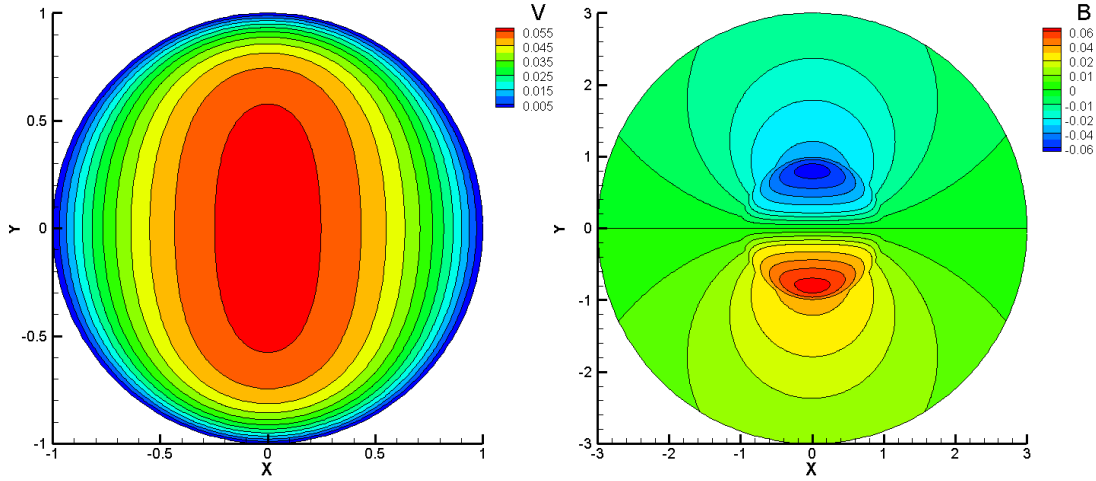
Şekil 50. ile Şekil 51. grafiklerinde ise yine duvarları manyetik alanca yalıtkan MHD kanal problemine benzer şekilde dışardan etki ettirilen manyetik alanın farklı açılardan uygulanmasında hem kanal içerisinde hem de dış ortamda oluşan yapının da aynı açı miktarı ile döndüğü gözlemlenmektedir.

3.4.2. Çember Bölgede Manyetik Ortamdaki MHD Kanal Probleminin Sınır Elemanlar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri Birleşimi ile Çözümü

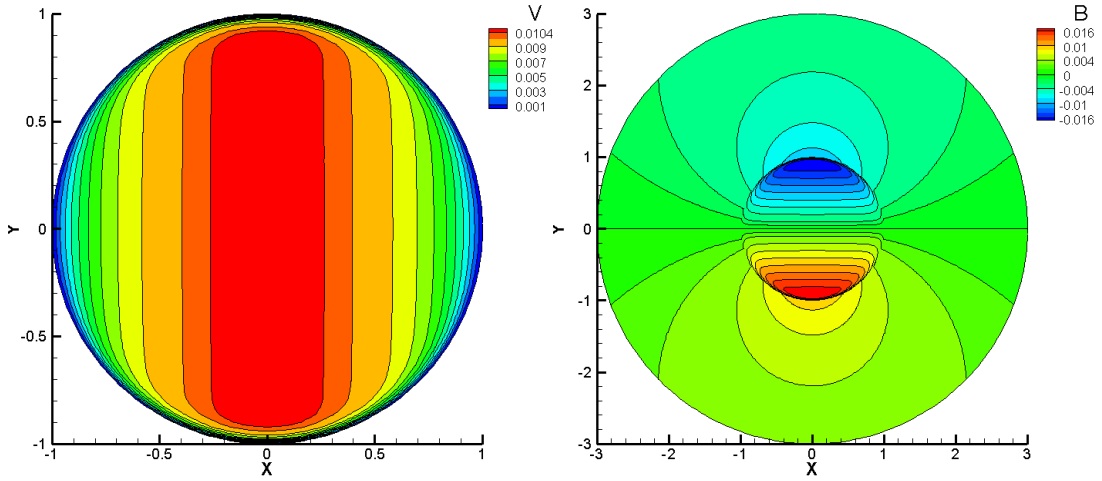
Bu bölümde bir önceki bölümde kare kanal için elde edilen sonuçların çember kanal durumu incelenecektir.



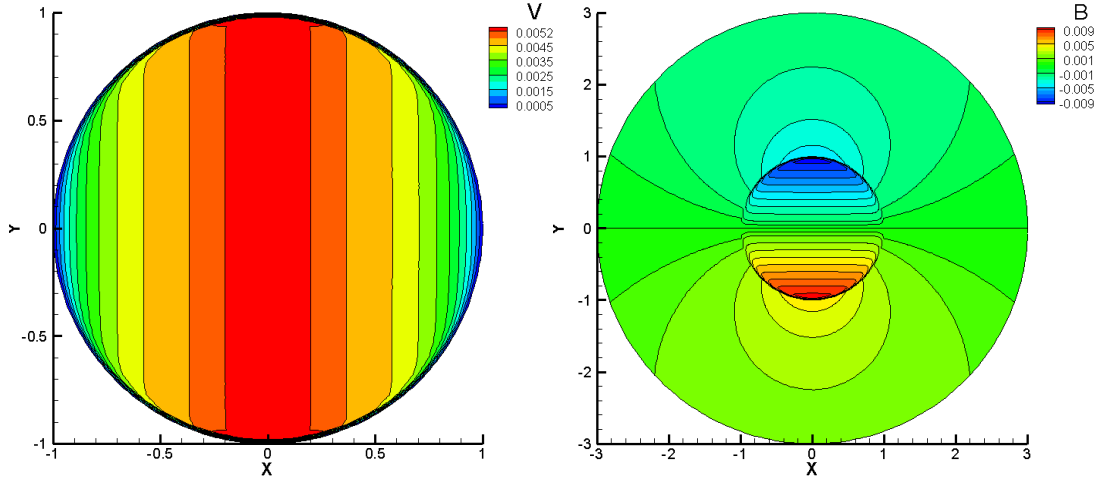
Şekil 52. Çember kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 1, Rm_{dış} = 1, Rh = 1, Re = 1, M = 1, \theta = \pi/2$



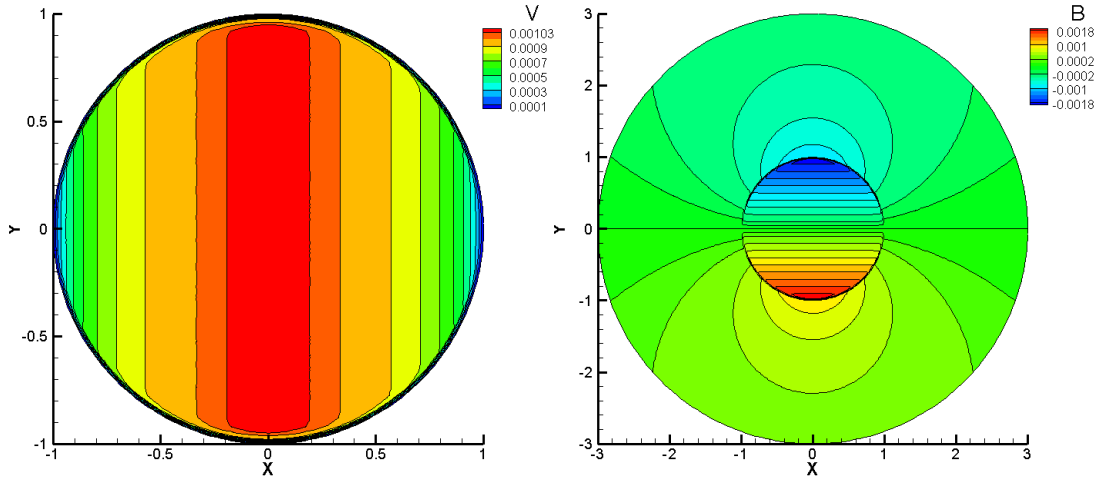
Şekil 53. Çember kesitli kanal içerisinde MHD kanal probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = \pi/2$



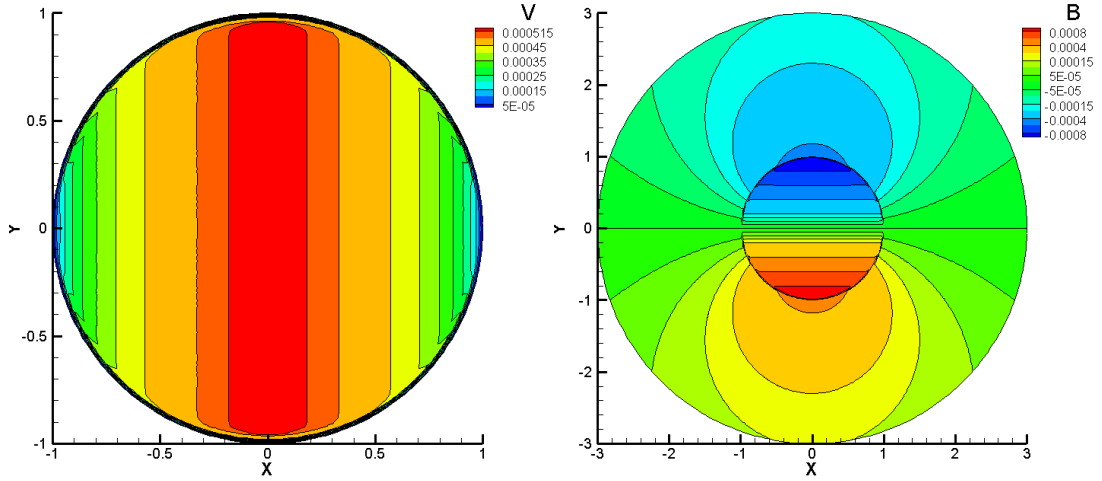
Şekil 54. Çember kesitli kanal içerisinde MHD kanal probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 50, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 5, M = 50, \theta = \pi/2$



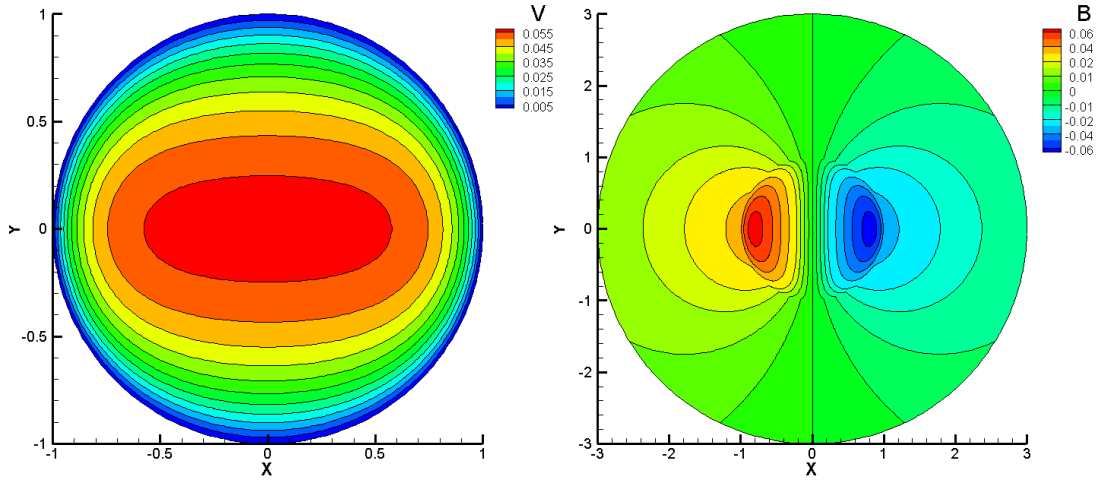
Şekil 55. Çember kesitli kanal içerisinde MHD kanal probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 100, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 10, M = 100, \theta = \pi/2$



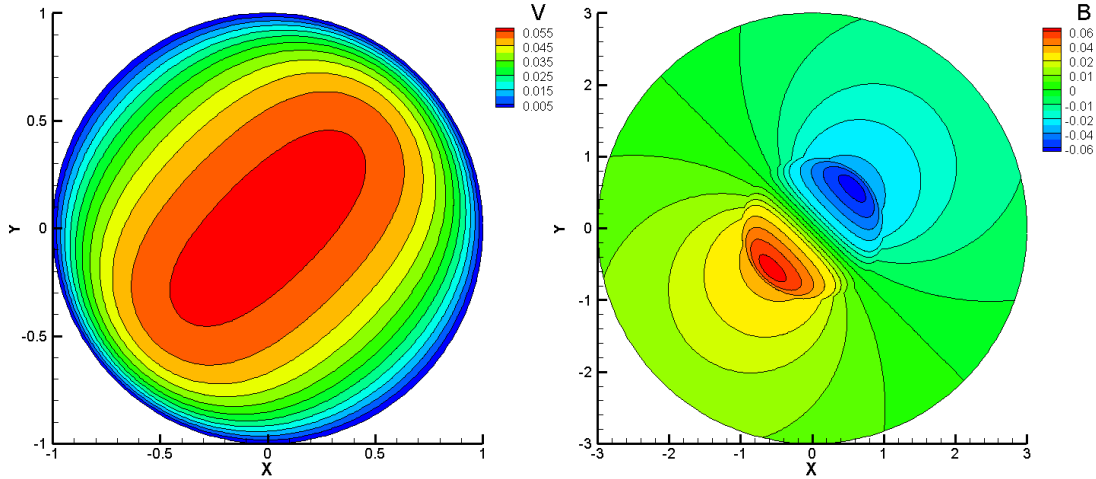
Şekil 56. Çember kesitli kanal içerisinde MHD kanal probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 500, Rm_{dış} = 1, Rh = 50, Re = 10, M = 500, \theta = \pi/2$



Şekil 57. Çember kesitli kanal içerisinde MHD kanal probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 1000, Rm_{dış} = 1, Rh = 100, Re = 10, M = 1000, \theta = \pi/2$



Şekil 58. Çember kesitli kanal içerisinde MHD kanal probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = 0$



Şekil 59. Çember kesitli kanal içerisinde MHD kanal probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = \pi/4$

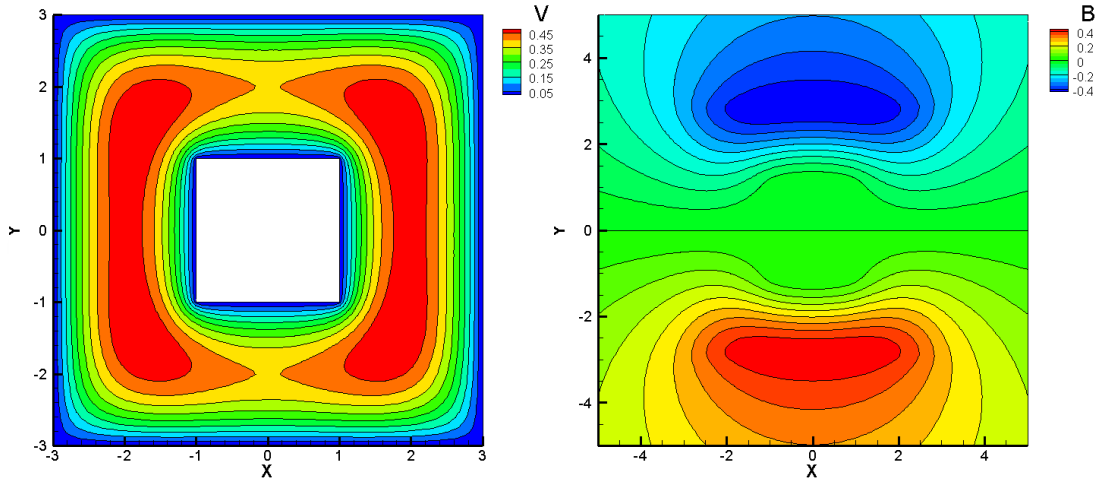
Şekil 52. ile Şekil 59. arasındaki grafiklerde kare kanal için uygulanan farklı problem parametre değerleri ile aynı şekilde çember kanal için elde edilen sonuçlar gösterilmektedir. Kare kanala benzer yapılar çember kanal için de elde edildiği görülmektedir. Kare kesitli durumda köşelerde karşılaşılan bozuklukların çember kesit durumunda görülmediği, bundan dolayı bölgenin tamamında düzgün bir yapının olduğu görülmektedir.

3.5. Manyetik Ortamda Manyetik Katı Cisim Etrafında MHD Kanal Probleminin Sınır Elemanlar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri Birleşimi ile Çözümü

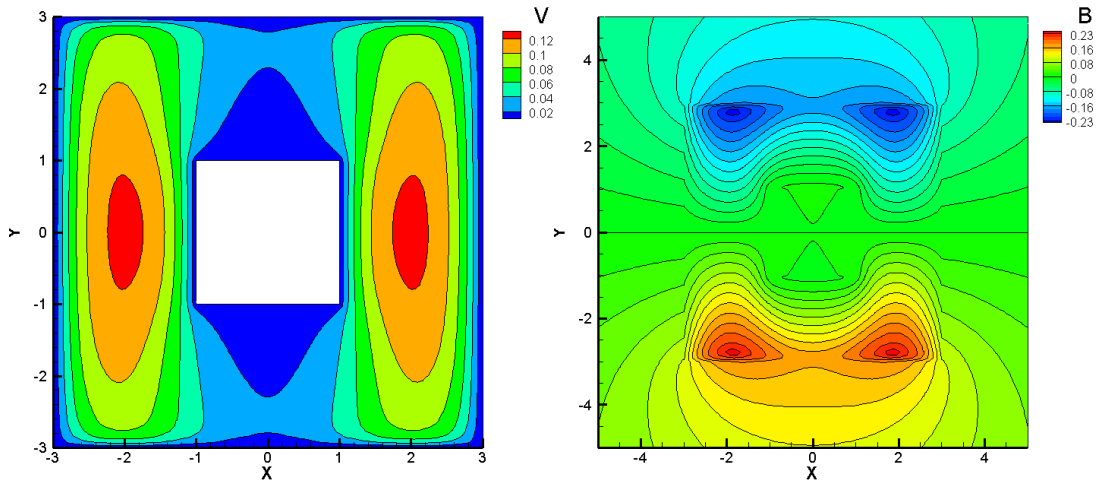
Bu bölümde bir önceki bölümde verilen problemin daha genel hali olan kanal içerisinde manyetik alanca iletken bir cismin olduğu durum incelenecek ve problemin, kanal içindeki cisim bölgesinde ve dış ortamda sınır elemanlar yöntemi, ve akışkanın bulunduğu kanal kesit bölgesinde ise sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi ile çözümü verilecektir. Kanal içerisindeki cismin de kanal ile aynı kesite sahip ve kanal gibi yeterince uzunlukta olduğu kabul edilmektedir.

3.5.1. Kare Bölgede Manyetik Ortamda Manyetik Katı Cisim Etrafında MHD Kanal Probleminin Sınır Elemanlar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri Birleşimi ile Çözümü

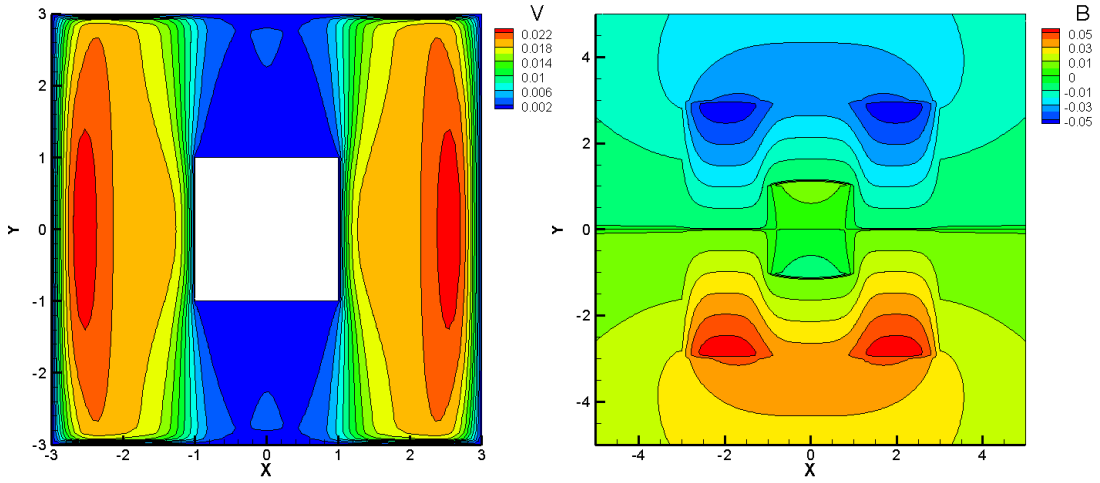
İlk olarak kanalın ve kanal içerisindeki cismin kesitinin de kare olduğu durum incelenecektir.



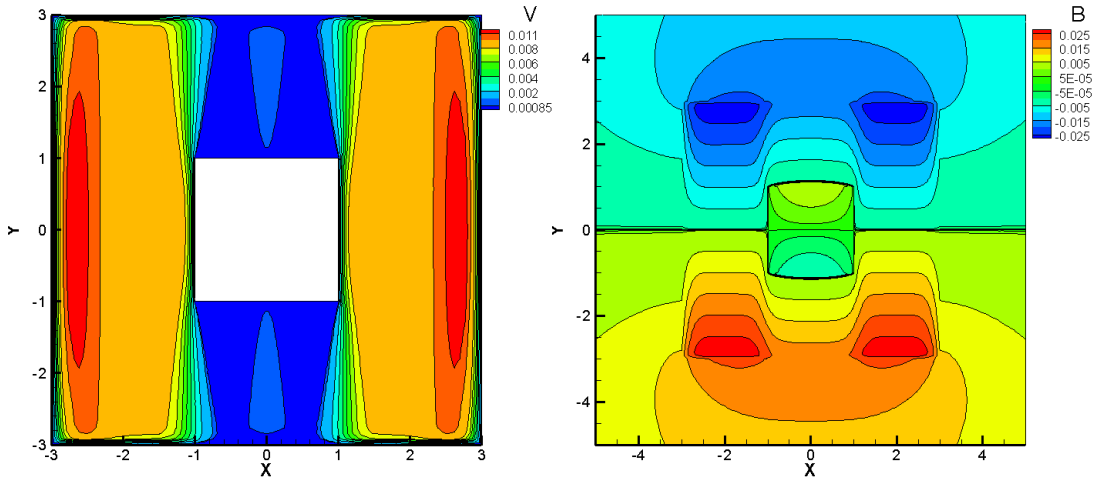
Şekil 60. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 1, Rm_{dış} = 1, Rh = 1, Re = 1, M = 1, \theta = \pi/2$



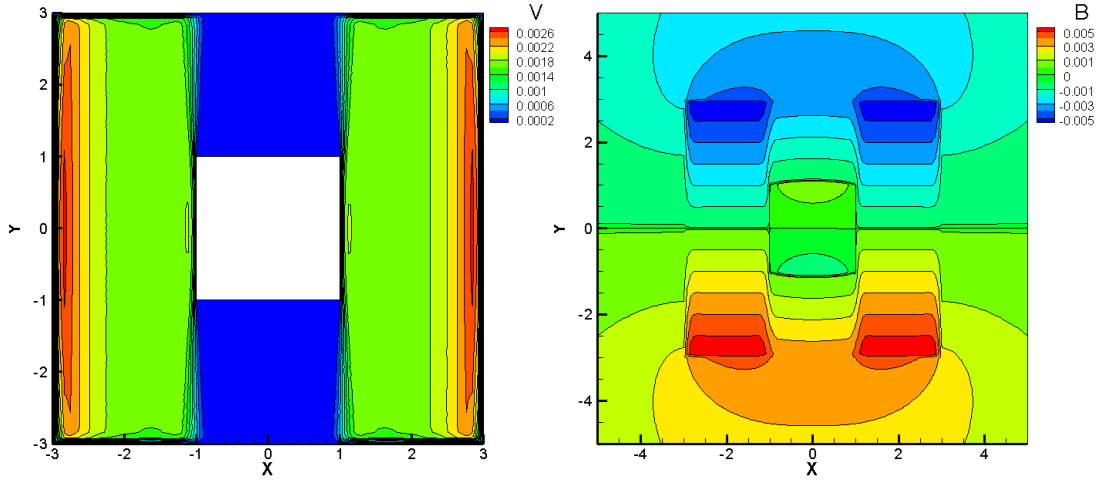
Şekil 61. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = \pi/2$



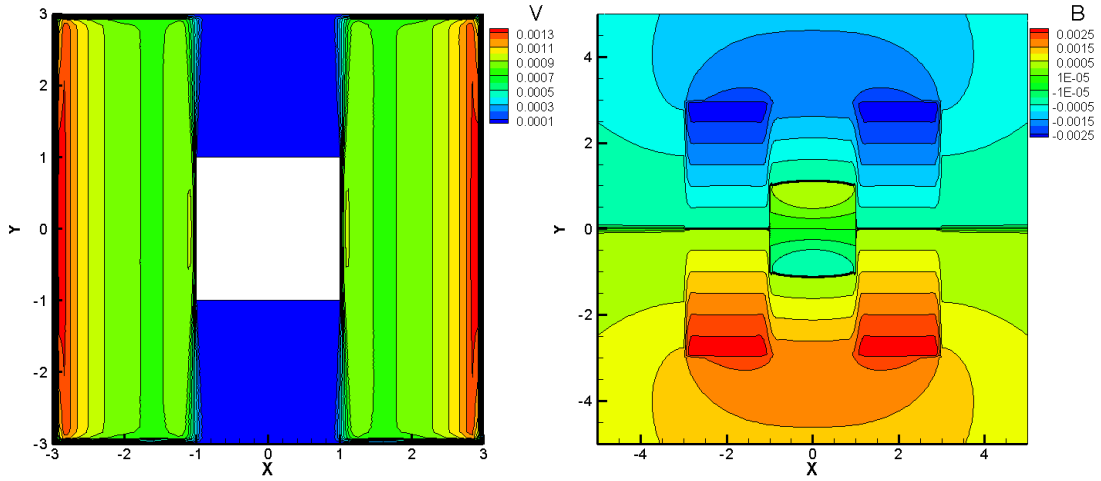
Şekil 62. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 50, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 5, M = 50, \theta = \pi/2$



Şekil 63. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 100, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 10, M = 100, \theta = \pi/2$



Şekil 64. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 500, Rm_{dış} = 1, Rh = 50, Re = 10, M = 500, \theta = \pi/2$



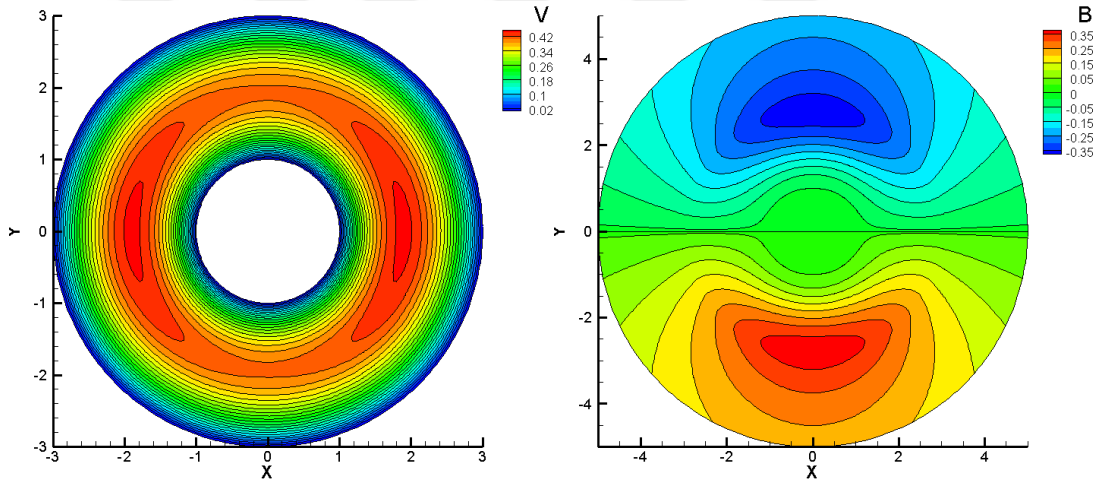
Şekil 65. Kare kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 1000, Rm_{dış} = 1, Rh = 100, Re = 10, M = 1000, \theta = \pi/2$

Şekil 60. ile Şekil 65. arasındaki grafiklerde farklı problem parametre değerleri ile elde edilen sonuçların grafikleri gösterilmektedir. Bir önceki probleme benzer şekilde $Rm_{kanal} = Rm_{dış}$ ve $Rm_{kanal} = Rm_{cisim}$ olduğu durumda manyetik alan iz düşüm eğrilerinin düzgün şekilde devam ettiği, Rm_{kanal} sayısı arttıkça eğrilerin sürekli fakat

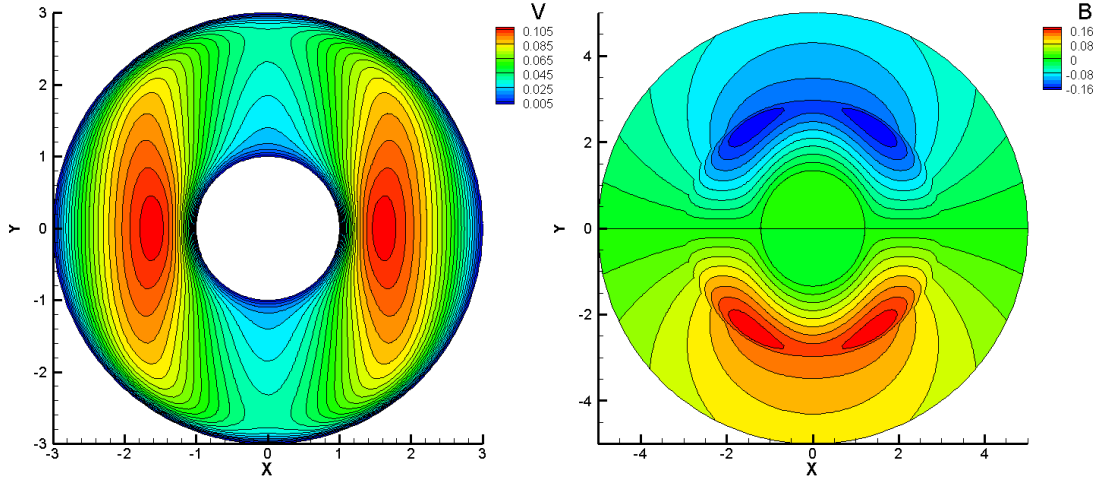
artım oranında kırılarak devam ettiği gözlemlenmektedir. Kanal içerisindeki yapının anular bölgedeki MHD probleminde görülen yapı ile benzer olduğu da gözlemlenmektedir. Özellikle problem parametre değerleri büyüdükçe köşe noktalarında ve bu noktalara yakın yerlerde bozuklukların bir önceki probleme benzer şekilde bu durumda kanalın hem dış hem de iç duvarlarına yakın köşe bölgelerinde olduğu gözlemlenmektedir.

3.5.2. Çember Bölgede Manyetik Ortamda Manyetik Katı Cisim Etrafında MHD Kanal Probleminin Sınır Elemanlar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri Birleşimi ile Çözümü

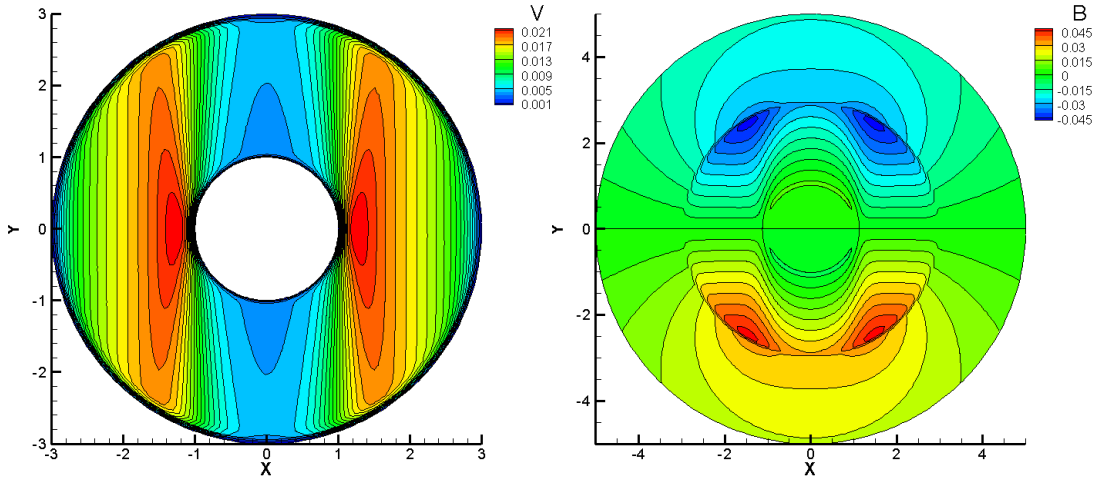
Son olarak bu bölümde kanal ve kanal içerisindeki cismin kesitlerinin çember olduğu durum incelenecektir.



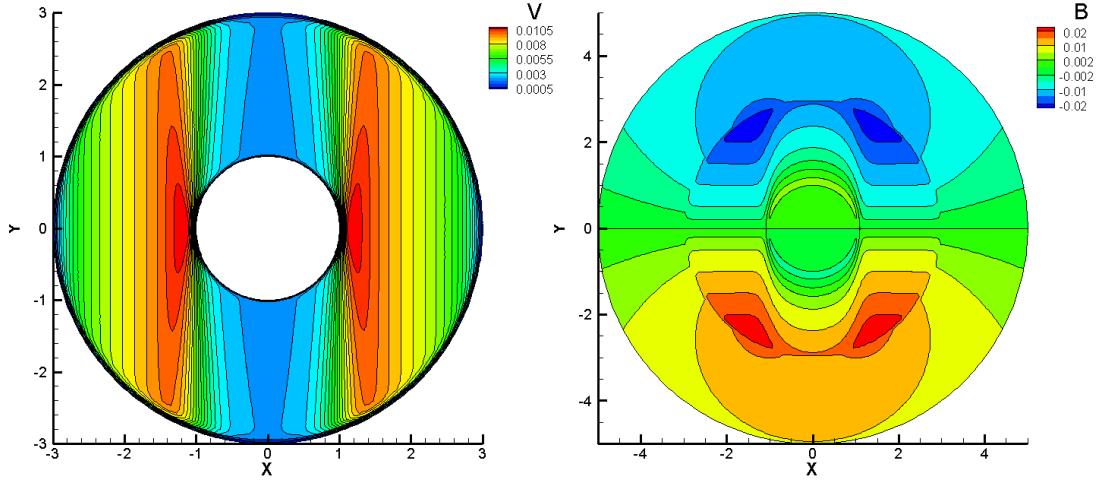
Şekil 66. Çember kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 1, Rm_{dış} = 1, Rh = 1, Re = 1, M = 1, \theta = \pi/2$



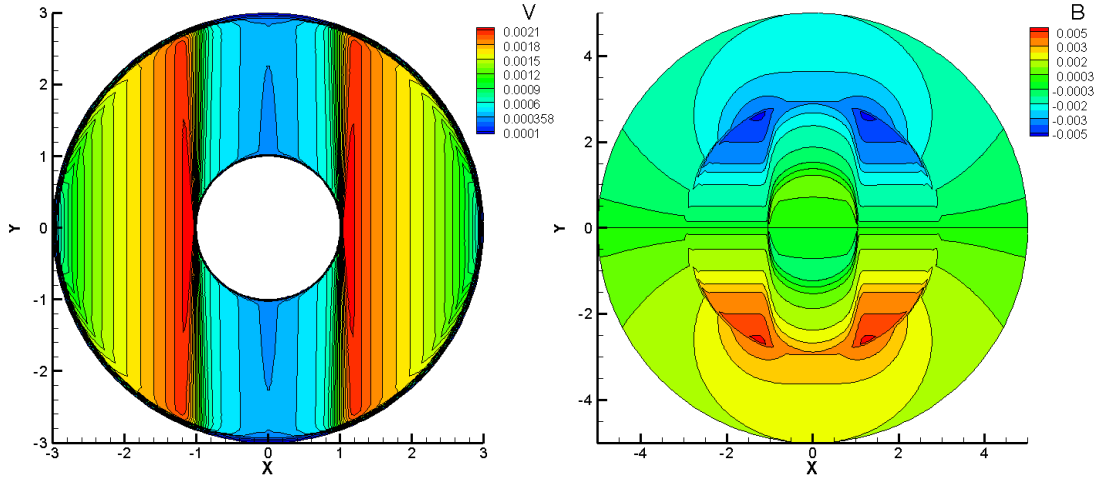
Şekil 67. Çember kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 10, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 1, M = 10, \theta = \pi/2$



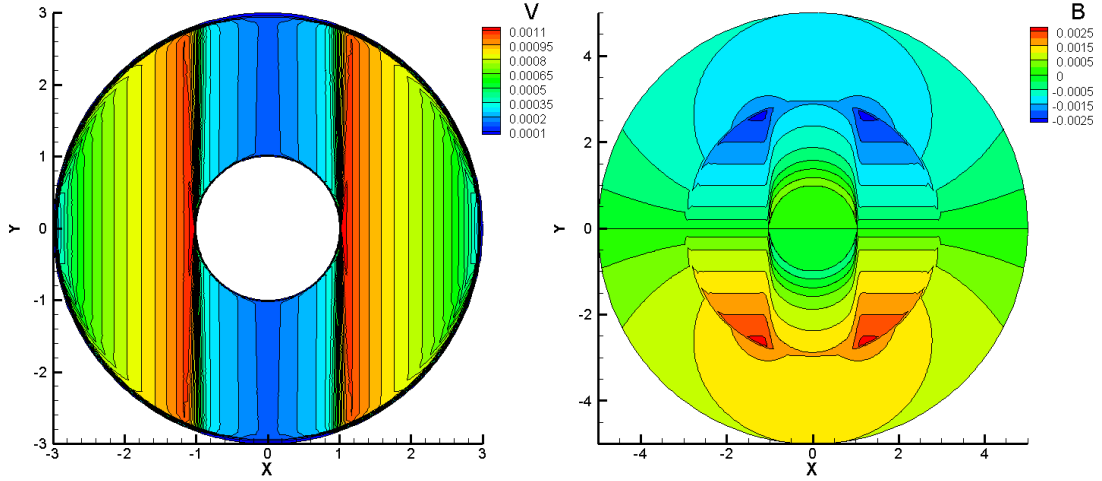
Şekil 68. Çember kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 50, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 5, M = 50, \theta = \pi/2$



Şekil 69. Çember kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 100, Rm_{dış} = 1, Rh = 10, Re = 10, M = 100, \theta = \pi/2$



Şekil 70. Çember kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 500, Rm_{dış} = 1, Rh = 50, Re = 10, M = 500, \theta = \pi/2$



Şekil 71. Çember kesitli kanal içerisinde MHD probleminin sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleri birleşimi yöntemi kullanılarak elde edilen hız (solda) ve manyetik alan (sağda) iz düşüm eğrileri, $Rm_{cisim} = 1, Rm_{kanal} = 1000, Rm_{dış} = 1, Rh = 100, Re = 10, M = 1000, \theta = \pi/2$

Şekil 66. ile Şekil 71. arasındaki grafiklerde kare kanal ve kare cisim için uygulanan farklı problem parametre değerleri ile aynı şekilde çember kanal ve çember cisim için elde edilen sonuçlar gösterilmektedir. Grafiklerden gözlemlendiği gibi kare kanala benzer yapıların elde edilmesine rağmen çember kanalda özellikle problem parametre değerleri büyüdükçe köşe noktalarında ve bu noktalara yakın yerlerde oluşan bozuklukların çember kanala nazaran daha az oluştuğu gözlemlenmektedir.

4. SONUÇLAR

Tezde kullanılan yöntem ve elde edilen sonuçlar doğrultusunda;

- Sonlu elemanlar yönteminde kararlılık (stabilizasyon) kullanarak konveksiyon baskın problemlerin kararlı çözümlerinin elde edilebildiği
- Sınır elemanlar yönteminin dış bölge problemlerine uygulanabilme avantajından dolayı sanal bir dış sınır tanımlamasına gerek duyulmadan dış bölge problemlerinin etkin bir şekilde çözülebildiği
- Sonlu elemanlar ve sınır elemanlar yöntemi birleşimi kullanarak daha küçük boyutlarda matris-vektör sistemi elde ederek bilgisayar hesaplama açısından daha ekonomik çözümlerin elde edilebildiği
- Elde edilen sonuçların literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmasında kullanılan yöntemin etkinliği

gözlemlenmiştir.

5. ÖNERİLER

Bu tezde kullanılan kararlı (stabilize) sonlu elemanlar ve sınır elemanlar yöntemi birleşimi daha farklı problemlere uygulanıp bilgisayar hesaplaması bakımından ekonomik ve sayısal yöntem olarak daha yakınsak sonuçlar elde edilebilir.

Problemin 3 boyutlu modellemesinin yapılması durumunda tezde kullanılan yöntem ile problemin daha genel halinin de çözümü elde edilebilir.



6. KAYNAKLAR

1. Bhargava, R. D. ve Radhakrishna, H. C., Numerical Solution of Two-Dimensional Laplace's Equation, Indian Institute of Technology, 29, 3 (1962) 283-293
2. Rangogni, R. ve Occhi, R., Numerical Solution of The Generalized Laplace Equation by The Boundary Element Method, Appl. Math. Modelling, 11 (1987) 393-396.
3. Ji, G. ve Isgor Burkan, O., On The Numerical Solution of Laplace's Equation With Nonlinear Boundary Conditions For Corrosion of Steel in Concrete, Joint International Conference on Computing and Decision Making in Civil and Building Engineering-Montreal, Canada, 2006.
4. Sabonis, A. C., Numerical Scheme for the Solution to Laplace's Equation Using Local Conformal Mapping Techniques, Project Report, Worcester Polytechnic Institute, 2014.
5. Hartmann, J., Hg Dynamics I. Theory of the Laminar Flow of an Electrically Conductive Liquid in an Homogenous Magnetic. FeildMathematisk-Fysiske Meddelelser, 15, 6 (1937) 1-27.
6. Alfven, H., Magneto-Hydrodynamic Waves and Sunspots, Royal Astronomical Society, 105, 1 (1945) 3-16.
7. Shercliff, J. A., Steady Motion of Conducting Fluid in a Pipe Under Transverse Magnetic Fields, Journal of Fluid Mechanics, 1, 6 (1956) 644-666.
8. Hung, L. H. ve Leong, J. C., Effects of Regional Magnetic Field on Rotating MHD Flow of Unity Magnetic Prandtl Number, Journal of Applied Mathematics, 2012 (2012) 1-17.
9. Papel, S. S., Low Viscosity Magnetic Fluid Obtained by the Colloidal Suspension of Magnetic Particles, U. S. Patent, 1965.
10. Finlayson, A. B., Convective Instability of Ferromagnetic Fluids, Journal of Machanics, 40, 4 (1970) 753-767.
11. Chang, C. C. ve Lundgren, T. S., Duct flow in Magnetohydrodynamics, Zeitschrift Fuangewandte Mathematik and Physik, 12 (1999) 100-114.
12. Yamaguchi, H., Kobori, I.ve Uehata, Y., Heat Transfer in Natural Convection of Magnetic Fluids, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 13, 4 (1999) 501-507.

13. Davies, A. J., The Finite Element Method: An Introduction with Partial Differential Equations, Second Edition, 1-6, Oxford University Press Inc., New York, 2011.
14. Logon, D. L., A First Course In The Finite Element Method, Fifth Edition, 2-4, Cengage Learning, USA, 2010.
15. Çiftçi, C., Değişken Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü, 2012.
16. Brooks, A. ve Hughes, TRJ. Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations, 32 (1982) 199-259.
17. Hughes, T. ve Brooks, A., A Multi-Dimensional Upwind Scheme with No Crosswind Diffusion, in: Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, ASME Monograph AMD-34, 19-35, 1979.
18. Hughes, T. ve Tezduyar, T., Finite Element Methods for First-Order Hyperbolic Systems with Particular Emphasis on the Compressible Euler Equations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 45 (1984) 217-284.
19. Tezduyar, T. ve Senga, M., Stabilization and Shock-Capturing Parameters in SUPG Formulation of Compressible Flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195 (2006) 1621-1632.
20. Johnson, C. ve Nävert, U., An Analysis of Some Finite Element Methods for Advection Diffusion Problems, Analytical and Numerical Approaches to Asymptotic Problems in Analysis, North-Holland, 1981.
21. Nävert, U., A Finite Element Method for Convection-Diffusion Problems, Phd Thesis, Chalmers TU, Goteborg, 1982.
22. Johnson, C., Nävert, U. ve Pitkäranta, J., Finite Element Methods for Linear Hyperbolic Problems, 45 (1984) 285-312.
23. Johnson, C. ve Saranen, J., Streamline Diffusion Methods for the Incompressible Euler and Navier-Stokes Equations, 47 (1986) 1-18.
24. Johnson, C. ve Szepessy A., Shock-Capturing Streamline Diffusion Finite Element Methods for Nonlinear Conservation Laws, Recent Developments in Computational Fluid Dynamics, AMD 95 (1988).
25. Johnson, C., Szepessy A. ve Hansbo, P., On the Convergence of Shock-Capturing Streamline Diffusion Finite Element Methods for Hyperbolic Conservation Laws, Mathematics of Computation, 54, 189 (1990) 107-129.
26. Hansbo, P., Explicit Streamline Diffusion Finite Element Methods for the Compressible Euler Equations in Conservation Variables, Journal of Computational Physics, 109 (1993) 274-288.

27. Guermond, J. L., Stabilization of Galerkin Approximations of transport Equations by Subgrid Modeling, M2AN, 33, 6 (1999) 1293-1316.
28. Guermond, J. L., Subgrid Stabilization of Galerkin Approximations of Monotone Operators, IMA Journal of Numerical Analysis, 21 (2001) 165-197.
29. Hughes, T. J. R., Feijoo, G. R., Mazzei, L. ve Quincy J. B., The Variational Multiscale Method- A Paradigm for Computational Mechanics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 166 (1988) 3-24.
30. Hughes, T. J. R., Mazzei, L. ve Jansen K. E., Large Eddy Simulation and the Variational Multiscale Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3 (2000) 47-59.
31. Hughes, T. J. R., Mazzei, L. ve Jansen K. E., Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flows by the Variational Multiscale Method, Physics of Fluids, 13 (2001) 1784-1799.
32. Bazilevs Y., Calo V., Cottrell J., Hughes T., Reali A. ve Scovazzi G., Variational Multiscale Residual-Based Turbulence Modelling for Large Eddy Simulation of Incompressible Flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197, 1-4 (2007) 173-201.
33. Burman E. ve Hansbo P., Edge Stabilization for Galerkin Approximations of Convection-Diffusion-Reaction Problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193, 15-16 (2004) 1437-1453.
34. Burman E. ve Hansbo P., Edge Stabilization for the generalized Stokes Problem: A Continuous Interior Penalty Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195, 19-22 (2006) 2393-2410.
35. Guermond J. L. ve Pasquetti R., Entropy-Based Nonlinear Viscosity for Fourier Approximations of Conservation Laws, C. R. Acad. Sci., Ser. I, 346, 801-806, 2008.
36. Guermond J. L., Pasquetti R. ve Popov B., Entropy Viscosity Method for Nonlinear Conservation Laws, Journal of Computational Physics, 230(2011), 4248-4267.
37. Zingan, V., Guermond J. L., Morel J. ve Popov B., Implementation of the Entropy Viscosity Method with the Discontinuous Galerkin Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 253, (2013) 479-490.
38. Yamada, T. ve Wrobel, L. C., Properties of Gaussian Radial Basis Functions in the Dual Reciprocity Boundary Element Method, ZAMP, 44 (1993) 1054-1067.
39. Beskos, D. E., Boundary Element Methods in Mechanics, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1987.
40. Brebbia C. A., Boundary Element Methods, Springer Verlag, Berlin, 1981.

41. Dragoş, L., Magnetofluid Dynamics, Abacus Press, London, 1975.
42. Carabineanu, A., Dinu, A, ve Oprea, I., The Application of the Boundary Element Method to the Magnetohydrodynamic Duct Flow, ZAMP, 46, (1995) 971-981.
43. Meir, A., J., Finite Element Analysis of Magnetohydrodynamic Pipe Flow, Applied Mathematics and Computation, 57 (1993) 177-196.
44. Sheu, T. W. H. ve Lin, R. K., Development of a Convection-Diffusion-Reaction Magnetohydrodynamic Solver on Nonstaggered Grids, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 45, (2004) 1209-1233.
45. Singh, B. Ve Lal, J., Finite Element Method of MHD Channel Flow with Arbitrary Wall Conductivity, Journal of Mathematical and Physical Sciences, 18 (1984) 501-516.
46. Barnett, K. E., Duct Flow with a Transverse Magnetic Field at High Hartmann Numbers, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50 (2001) 1893-1906.
47. Neslitürk, A. I. ve Tezer-Sezgin, M., Finite Element Method Solution of Electrically Driven Magnetohydrodynamic Flow, Journal of Computational and Applied Mathematics, 192 (2006) 339-352.
48. Liu, H. W. ve Zhu, S. P., The Dual Reciprocity Boundary Element Method for Magnetohydrodynamic Channel Flows, ANZIAM Journal, 44 (2002) 305-622.
49. Tezer-Sezgin, M. ve Han Aydın, S., Dual Reciprocity Boundary Element Method for Magnetohydrodynamic Flows Using Radial Basis Functions, International Journal for Computational Fluid Dynamics, 16, 1 (2002) 49-63.
50. Tezer-Sezgin, M. ve Bozkaya, C., Boundary Element Method Solution of Magnetohydrodynamic Flow in a Rectangular Duct with Conducting Walls Parallel to Applied Magnetic Field, Computational Mechanics, 41 (2008) 769-775.
51. Dehghan, M. ve Mirzai, D., Meshless Local Boundary Integral Equation (LBIE) Method for the Unsteady Magnetohydrodynamic (MHD) Flow in Rectangular and Circular Pipes, Computer Physics Communications, 180 (2009) 1458-1466.
52. Loukopoulos, V. C., Bourantas, G. C., Skouras, E. D. ve Nikiforidis, G. C., Localized Meshless Point Collocation Method for Time-Dependent Magnetohydrodynamic Flow Through Pipes Under a Variety of Wall Conductivity Conditions, Computational Mechanics, Computational Mechanics, 47, 2 (2011) 137-159.
53. Tezer-Sezgin, M. ve Bozkaya, C., The Boundary Element Solution of Magnetohydrodynamic Flow in a Infinite Region, Journal of Computational and Applied Mathematics, 252, 2 (2009) 510-521.

54. Bozkaya, C. ve Tezer-Sezgin, M., A Numerical Solution of the Steady MHD Flow Through Infinite Strips, Engineering Analysis with Boundary Elements, 36, 4 (2012) 591-599.
55. Lungu, E. ve Phoata, A., Finite Element-Boundary Element Approach of MHD Pipe Flow, In: Proceedings of Conference on Fluid Mech. and Technical Appl., Burharest, Romania, 79-88, 2005.
56. Reddy, J. N., An Introduction to the Finite Element Method, The McGraw-Hill Companies, New York, 1993.
57. Çepni, M. S. ve Deniz, R., Sonlu Elemanlar Yönteminin Dönüşümlerde Kullanılması, Jeodezi, Jeoinformasyon ve Arazi Yöntemi Dergisi, 2, 93 (2005) 20-30.
58. Breas, D., Finite Elements: Theory, Fast Solvers and Applications in Solid Mechanics, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
59. Türk, Ö., The Finite Element Method Solution of Reaction-Diffusion-Advection Equations in Air Pollution, Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Uygulamalı Matematik Enstitüsü, Ankara, 2008.
60. Farzana, H. ve Karim, S. M., Accurate Evaluation Schemes for Triangular Domain Integrals, IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering, 2, 6 (2012).
61. Aydın, H. S., Dual Reciprocity Boundary Element Method for Poisson's Equation Using Osculatory Radial Basis Functions, Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2000.
62. Gaul, L., Kögl, M. ve Wagner, M., Boundary Element Methods for Engineers and Scientists: An Introductory Course With Advanced Topics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 434-435, 2003.
63. Paris, F. ve Canas J., Boundary Element Method, Fundamentals and Applications, Oxford University Press Inc., New York, 1977.
64. Brebbia C. A. ve Dominguez, J., Boundary Elements an Introductory Course, 2nd ed., WIT Press/Computational Mechanics Publications, Southampton, 1998.

ÖZGEÇMİŞ

Harun SELVİTOPI, 1986 yılında Erzurum'da doğdu. İlköğrenimini, Ömer Duygun İlköğretim okulunda, Orta öğrenimini ise Erzurum Lisesi'nde tamamladı. 2004-2005 Eğitim-Öğretim yılında başladığı Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden 2008 yılında dereceyle mezun oldu.

2009 yılında başladığı memuriyet hayatına kısa bir süre sonra, TÜBİTAK yurtiçi doktora burs programını kazanıp, istifa ederek son verdi.

2011 yılında Öğretim Üyesi Yetiştirme Programı (ÖYP) kapsamında Erzurum Teknik Üniversitesi'ne Araştırma görevlisi olarak atandı.

2012 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü bütünleşik doktora programına kabul edildi. Halen ÖYP kapsamında Karadeniz Teknik Üniversitesindeki görevini sürdürmektedir. Yabancı dili İngilizcedir.