KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİRİNCİ MERTEBEDEN SINIRLI TERSİNİR PANTOGRAF TİPLİ GECİKMELİ DİFERENSİYEL OPERATÖRLER VE SPEKTRUM YAPILARI

DOKTORA TEZİ

Pembe İPEK

HAZİRAN 2016
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİRİNCİ MERTEBEDEN SINIRLI TERSİNİR PANTOGRAF TİPLİ GECİKMELİ DİFERENSİYEL OPERATÖRLER VE SPEKTRUM YAPILARI

Pembe İPEK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

"DOKTOR (MATEMATİK)"

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 23 / 05 /2016

Tezin Savunma Tarihi : 09 / 06 /2016

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV

Trabzon 2016

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında

Pembe İPEK Tarafından Hazırlanan

BİRİNCİ MERTEBEDEN SINIRLI TERSİNİR PANTOGRAF TİPLİ GECİKMELİ DİFERENSİYEL OPERATÖRLER VE SPEKTRUM YAPILARI

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 24 / 05 / 2016 gün ve 1654 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**:**	**Prof. Dr. Funda KARAÇAL**	………………………………………
Üye	**:**	**Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV**	………………………………………
Üye	**:**	**Prof. Dr. Gökhan APAYDIN**	………………………………………
Üye	**:**	**Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU**	………………………………………
Üye	**:**	**Doç. Dr. Bülent YILMAZ**	………………………………………

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Doktora eğitimim boyunca, ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli hocam sayın Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV' a saygılarımı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca sayın Prof. Dr. Funda KARAÇAL hocama tezin her aşamasında öneri ve desteklerinden, sayın Prof. Dr. Gökhan APAYDIN hocama çalışma konumun fizik anabilim dalındaki yerini ve önemini açıkladığından dolayı saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen, hayatı daha da anlamlı kılan canım aileme, ailemden saydığım tüm dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi ve minnetlerimi sunarım.

Bu tez "TÜBITAK-2211 Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Pembe İPEK
Trabzon 2016

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "BİRİNCİ MERTEBEDEN SINIRLI TERSİNİR PANTOGRAF TİPLİ GECİKMELİ DİFERENSİYEL OPERATÖRLER VE SPEKTRUM YAPILARI" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV'un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 09/06/2016

Pembe İPEK

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

BİRİNCİ MERTEBEDEN SINIRLI TERSİNİR PANTOGRAF TİPLİ GECİKMELİ DİFERENSİYEL OPERATÖRLER VE SPEKTRUM YAPILARI

Pembe İPEK

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV

2016, 115 Sayfa

Bu tez çalışmasında ilk önce sonlu aralık üzerinde tanımlı vektör-fonksiyonların Hilbert uzayında birinci mertebeden lineer pantograf tipli gecikmeli diferensiyel-operatör ifadenin doğurduğu minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilmiş ve bu tip genişlemelerin spektrum yapıları incelenmiştir. Daha sonra, bu araştırma birinci mertebeden çok noktalı lineer pantograf tipli gecikmeli diferensiyel-operatör ifadeler durumuna genelleştirilmiştir. Alınan sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Minimal ve maksimal operatörler, İki ve çok noktalı pantograf tipli gecikmeli diferensiyel ifade ve operatörler, Hilbert uzayı, Vektör fonksiyonların Hilbert uzayı ve Hilbert uzaylarının direkt toplamı, Operatör, Sınırlı tersinir operatör, Spektrum ve rezolvent kümeler

PhD. Thesis

SUMMARY

BOUNDED SOLVABILITY OF PANTOGRAF TYPE DELAY DIFFERENTIAL OPERATORS OF FIRST ORDER AND STRUCTURE OF SPECTRUM

Pembe İPEK

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Zameddin ISMAILOV
2016, 115 Pages

In this thesis, firstly all boundedly solvable extensions of the minimal operator generated by first order linear pantograph type delay differential-operator expression are described in terms of boundary values in Hilbert space of vector-functions defined on finite interval and structure of spectrum of such extensions is investigated. Later on, this research is generalized to first order multipoint linear pantograph type delay differential-operator expression. The results which have been obtained in this thesis are supported by examples.

Key Words: Minimal and maximal operators, Second and multipoint linear pantograph type delay differential expression and operators, Hilbert space, Hilbert space of vector-functions and the direct sum of Hilbert spaces, Operator, Boundedly solvable operator, Spectrum and resolvent sets

SEMBOLLER DİZİNİ

$L(H)$	: H lineer normlu uzayında lineer sınırlı operatörler uzayı
$L^2(H,(a,b))$	: $[a,b]$ aralığından H Hilbert uzayına tanımlanan Lebesgue ölçülebilir vektör-fonksiyonların Hilbert uzayı
$R_\lambda(A)$	: A operatörünün rezolvent operatörü
$\rho(A)$	: A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(A)$	: A operatörünün spektrumu
$\sigma_p(A)$	: A operatörünün ayrık spektrumu
$\sigma_c(A)$	: A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(A)$	: A operatörünün kalan spektrumu
$D(A)$	: A operatörünün tanım kümesi
$R(A)$	: A operatörünün görüntü kümesi
$\mathrm{Ker}\, A$	: A operatörünün çekirdeği
$\dim H$	: H uzayının boyutu
$\oplus$	: Direkt toplam

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Hilbert uzayında lineer yoğun tanımlı kapalı bir operatörün genişlemeleri teorisi John von Neumann'ın meşhur $[1]$ (*Allgemeine Eigenwerttheorie Hermetischer Funktionaloperatoren*, Math. Ann., 102, (1929-1930) 49-131) çalışmasından sonra hızla gelişmeye başlamıştır. Bu çalışmada Neumann tarafından bir Hilbert uzayında lineer simetrik kapalı defekt sayıları eşit olan bir operatörün tüm self-adjoint genişlemelerinin genel gösterimi bulunmuş ve uygulamalarla desteklenmiştir.

Sonraki yıllarda J.M. Calkin, M.G. Krein, M.Sh. Birman, M.I. Vishik, F.S. Rofe-Beketov, A.A. Dezin, M.O. Otelbayev ve ekibi, V.I. Gorbachuk, M.L. Gorbachuk, A.N. Kochubei, N.I. Pivtorak ve Z.I. İsmailov vs çalışmalarında çeşitli tip genişlemeler (maksimal simetrik, maksimal dissipatif, maksimal accumulatif, selfadjoint, maksimal sektöryel, sınırlı tersinir, kompakt tersinir, normal tersinir, regüler tersinir vs) ve spektral analizleri esas araştırma konusu olmuşlardır.

Bir Hilbert uzayında lineer kapalı yoğun tanımlı bir operatörün sınırlı tersinir genişlemeleri konusu, ilk olarak M.I. Vishik'in $[2]$ *(On Linear Boundary Problems for Differential Equations,* Doklady Akad. Nauk SSSR, 65 (1949) 785-788(in Russian)) ve $[3]$ (*On General Boundary Problems for Eliptic Differential Equations,* Amer. Math. Soc. Transl. II, 24 (1963) 107-172) çalışmalarında ele alınmış ve önemli sonuçlara ulaşılmıştır.

Şimdi $[3]$ çalışmasının kısa bir özeti verilsin:

L_0, bir H ayrılabilir Hilbert uzayında lineer kapalı yoğun tanımlı bir operator olsun, öyleki $L_0 : D(L_0) \subset H \to H$ operatörünün $L_0^{-1} : R(L_0) \subset H \to H$ tersi var ve $\|L_0^{-1}\| < \infty$. Bu halde $R(L_0) \subset H$ kapalı bir altuzaydır.

Benzer şekilde, M_0, lineer kapalı yoğun tanımlı bir operator olsun, öyleki $M_0 : D(M_0) \subset H \to H$ operatörünün $M_0^{-1} : R(M_0) \subset H \to H$ tersi var ve $\|M_0^{-1}\| < \infty$. Bu halde de $R(M_0) \subset H$ kapalı bir altuzaydır.

Ayrıca, her $f_0 \in D(L_0)$ ve $g_0 \in D(M_0)$ için $(L_0 f_0, g_0)_H = (f_0, M_0 g_0)_H$ olduğu kabul edilsin. Öte yandan $L := M_0^*$ ve $M := L_0^*$ olsun.

O halde aşağıdaki önermeler doğrudur:

Teorem [3]:

(1) $R(L) = H$, $R(M) = H$;

(2) L_0 operatörünün her $\tilde{L}$, $\tilde{L} : L_0 \subset \tilde{L} \subset L$ genişlemesinin H ’ de kapanışı vardır;

(3) L_0 operatörünün aşağıdaki koşulları sağlayan en az bir $\tilde{L}$, $L_0 \subset \tilde{L} \subset L$, genişlemesi vardır;

i. $R(\tilde{L}) = H$;

ii. $\tilde{L}$ ’ nın $\tilde{L}^{-1}$ tersi var ise $\|\tilde{L}^{-1}\| < \infty$.

(4) Eğer L_0^{-1} , M_0^{-1} operatörleri H ’ de kompakt ise (3) de sözü geçen $\tilde{L}$ operatörünün $\tilde{L}^{-1} : H \to H$ kompakt olacak şekilde bir genişlemesi mevcuttur.

Teorem [3]: L operatörünün tanım kümesi

$$D(L) = D(L_0) \oplus \tilde{L}^{-1} V \oplus U$$

şeklinde direkt toplam gibi yazılabilir. Burada; $V = KerM$, $U = KerL$ ve $\tilde{L}$, L_0 operatörünün bir önceki teoremde bahsedilen herhangi sınırlı tersinir bir genişlemesidir.

Son olarak $[3]$ ’ten ileride kullanılacak olan önemli bir sonuc verilsin:

Teorem [3]: $L_0 : D(L_0) \subset H \to H$, $M_0 : D(M_0) \subset H \to H$ operatörlerinin sırasıyla $R(L_0)$ ve $R(M_0)$ üzerinde L_0^{-1}, M_0^{-1} ile gösterilen sınırlı ters operatörleri var olsun. $\hat{L}$, $L_0 \subset \hat{L} \subset L$ olsun. $\hat{L}$ genişlemesinin bir sınırlı tersinir genişleme olması için gerek ve yeter şart $\hat{L}$ ’ nın tanım kümesinin

$$D\left(\hat{L}\right)=D\left(L_0\right)\oplus\left(\tilde{L}^{-1}+C\right)V$$

şeklinde yazılabilmesidir. Burada; $\tilde{L}\ \left(L_0\subset\tilde{L}\subset L\right)$, L_0'ın bir sınırlı tersinir genişlemesi, $V=KerM$, $U=KerL$ ve $C:D\left(C\right)=V\rightarrow R\left(C\right)\subset U$ şeklinde sınırlı bir operatördür.

Ayrıca Vishik'in bu çalışmasında, L_0 operatörünün tüm normal tersinir, regüler tersinir ve kompakt tersinir genişlemelerinin genel ifadesi verilmiş, daha sonra simetrik bir operatörün tüm self-adjoint genişlemeleri ifade edilmiş ve en son olarak alınan sonuçlar eliptik tip diferensiyel operatörlere uygulanmıştır. M.I. Vishik' in bu $\left[3\right]$ çalışmasının kısa özeti $\left[2\right]$ çalışmasında da verilmiştir. Ancak $\left[2\right]$ ve $\left[3\right]$ çalışmalarında bakılan genişlemelerin spektral problemlerine yer verilmediği görülmektedir.

1979 yılında ise simetrik ve pozitif tanımlı bir operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemelerinin sınır değerleri dilinde ifadesi A.N. Kochubei tarafından $\left[4\right]$ (*On Extensions of Positive Defined Symmetric Operator,* Doklady Akademii Nauk, Ukrain SSR, 3 (1979) 168-171 (in Russian)) çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada ilk olarak bir Hilbert uzayında simetrik pozitif tanımlı bir operator için pozitif sınır değerler uzayı tanımlanmış ve daha sonra aşağıdaki esas teoremin doğruluğu ispatlanmıştır.

Teorem [4]: H bir Hilbert uzayı, $A:D\left(A\right)\subset H\rightarrow H$ simetrik pozitif tanımlı bir operator ve $\left(\mathcal{H},\gamma_1,\gamma_2\right)$ üçlüsü, A operatörünün pozitif sınır değerler uzayı olsun.

$B:\mathcal{H}\rightarrow\mathcal{H}$ bir lineer sınırlı operator olmak üzere, A^* operatörünün $\gamma_2 f=B\gamma_1 f$, $f\in D\left(A^*\right)$ koşulunu sağlayan elemanların oluşturduğu lineer manifolduna kısıtlanışı A operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesidir.

Tersine, A operatörünün her sınırlı tersinir genişlemeleri A^* operatörünün $\gamma_2 f=B\gamma_1 f$, $f\in D\left(A^*\right)$ lineer manifolduna bir kısıtlanışıdır. Burada $B:\mathcal{H}\rightarrow\mathcal{H}$ lineer sınırlı operatörü, bu sınırlı tersinir genişleme tarafından tek biçimde tanımlanmaktadır. Fakat bu çalışmada bu genişlemelerin spektral analizi konusu ele alınmamıştır.

1980 yılında ise A.A. Dezin, $[5]$ (*General Problems in the Theory of Boundary Value Problems,* Nauka, Moskow, 1980(in Russian); *A Introduction to a General Problems in the Theory of Boundary Value Problems,* Springer-Verlag, 1987) kitabında $V \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ sınırlı bir bölge olmak üzere $L^2\left(V,(a,b)\right)$, $0 < b < \infty$ vektör-fonksiyonların Hilbert uzayında bir sınıf birinci mertebeden operator katsayılı diferensiyel operatörlerin sınırlı tersinirliğini ve spektrum yapısını araştırmıştır.

Genişlemeler ve kısıtlamalar teorisinde daha önce yapılan çalışmalarda $([1]-[5])$ bakılan operatörlerin lineer ve uzayın Hilbert uzayı olması önemli koşullardan olmuştur. B.K.Kokebaev, M. Otelbaev ve A.N. Shynybekov' un $[6]$ (*On The Theory of Contraction and Extension of Operators. I,* Izv. Akad. Nauk Kazakh. SSR, Ser. Fiz.-Mat., 5 (1982) 24-26 (in Russian)) ve $[7]$ *(On The Theory of Contraction and Extension of Operators. II*, Izv. Akad. Nauk Kazakh. SSR, Ser. Fiz.-Mat.,*1(110), (1983), 24-26*) çalışmalarında ise genişletilen veya kısıtlanan operatörlerin lineer olması ve uzayın Hilbert uzayı olmasından vazgeçilerek tüm sınırlı tersinir genişlemelerin (veya kısıtlanışların) tanım kümeleri dilinde ifadesi verilmiştir.

Örneğin $[6]$ çalışmasında; X ve Y iki additif tam Hausdorf topolojik uzay, $A: D(A) \subset X \to Y$ bir additif operatör ve $R(A) = Y$ olmak üzere A operatörünün tüm sınırlı tersinir kısıtlanışlarının tam ifadesi aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem [6]: A_C , A' nın bir sınırlı tersinir kısıtlanışı olsun. Her $K: Y \to KerA$ sürekli operatörü için $A_K^{-1} f = A_C^{-1} f + Kf$, $f \in Y$ şeklinde tanımlanan $A_K^{-1}: Y \to X$ operatörü A'nın bir tersinir kısıtlanışının tersidir.

Tersine, eğer A_K , A' nın bir sınırlı tersinir kısıtlanışı ise yukarıdaki bağıntıyı sağlayan bir sürekli $K: Y \to KerA$ dönüşümü vardır.

$[8]$ (*On Questions of Extension and Restriction of Operator,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 6 (1983) 1307-1310 (in Russian)) çalışması ise $[6]$ ve $[7]$ çalışmalarının Banach uzayı durumunda alınan sonuçları kapsamaktadır. Bu çalışmalarda da sınırlı tersinir genişlemeler için benzer teoremler ispatlanmıştır. Ancak $[$6-8$]$ çalışmalarında ifadesi verilen sınırlı tersinir genişlemelerin spektral problemlerine değinilmemiştir.

Bu alanda yapılan çalışmalardan biri de Z.I. Ismailov'un $[9]$ (*Description of All Regular Operators for First-Order Differential Equations in a Hilbert Space,* Ukrain. Mat. Zh.,3 (1985) 361-363 (in Russian)) çalışmasıdır.

Özel durumda bu makalede H bir kompleks Hilbert uzayı ve $A:D(A)\subset H\to H$ bir selfadjoint operatör olmak üzere $l(u)=iu'+Au(t)$ şeklindeki diferensiyel-operator ifadesinin vektör-fonksiyonların $L^2(H,(0,b)),\ b<\infty$ Hilbert uzayında doğurduğu L_0 minimal ve L maksimal operatörleri tanımlanarak L_0 minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri (ve bazı alt sınıfları) sınır değerleri dilinde aşağıdaki teoremdeki biçimde ifade edilmiştir.

Teorem [9]: L_0 minimal operatörünün $L^2(H,(0,b)),\ b<\infty$ uzayında her $\tilde{L}$ sınırlı tersinir genişlemesi, $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi ve

$$(K+E)u(0)=Kexp(iAb)u(b)$$

sınır değer koşulu tarafından doğurulmaktadır. Burada $K\in L(H)$ ve $E:H\to H$ birim operatördür. $K\in L(H)$ operatörü $\tilde{L}$ genişlemesi tarafından tek biçimde tanımlanmaktadır. Yani, $\tilde{L}=L_K$.

Tersine, L maksimal operatörünün $D(L)$ tanım kümesinin yukarıdaki sınır değer koşullarını sağlayan vektör-fonksiyonların oluşturduğu lineer manifolda kısıtlanışı L_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesidir. Bu çalışmada da tersinir genişlemelerin spektral analizine yer verilmemiştir.

1985 yılında N.I. Pivtorak'ın $[10]$ (*Solvable Boundary Value Problems for an Operator-Differential Equations of Parabolic Type,* Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., 9 (1985) 104-107) çalışmasında birinci mertebeden parabolik tip negatif olmayan selfadjoint katsayılı diferensiyel-operatör ifadesinin $L^2(H,(0,T)),\ T<\infty$ Hilbert uzayında tüm sınırlı tersinir genişlemelerinin sınır değer koşulları dilinde ifadesi verilmiştir. Bu çalışmada aşağıdaki sonuca ulaşılmıştır:

Teorem [10]: L_0 ve L sırasıyla,

$$l(u) = u'(t) + Au(t), \ \ A : D(A) \subset H \to H, A = A^* \geq 0$$

diferensiyel-operatör ifadesinin $L^2(H,(0,T)),\ T < \infty$ Hilbert uzayında ürettiği minimal ve maksimal operatörleri olsun.

Her $B \in L(H)$ için $l(\cdot)$ diferensiyel-operatör ifadesinin

$$\left(E + A^{1/2}\right)^{-1} u(0) = B\left(E + A^{1/2}\right)\left(u(T) - e^{TA}u(0)\right)$$

sınır değer koşulu ile $L^2(H,(0,T))$ uzayında doğurduğu L_B operatörü L_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesidir.

Tersine, L_0 minimal operatörünün $L^2(H,(0,T))$ Hilbert uzayında her $\tilde{L}$ sınırlı tersinir genişlemesi $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi ve bir $B \in L(H)$ operatörü ile yukarıdaki sınır değer koşulu ile üretilir. Bu durumda, $B \in L(H)$ operatörü $\tilde{L}$ ile tek biçimde belirlenir. Yani, $\tilde{L} = L_B$.

Bu çalışmada da sınırlı tersinir genişlemelerin spektral analizi bulunmamaktadır.

Operatör katsayılı lineer diferensiyel denklemlerin genel teorisi, S.G. Krein [11], Yu. L. Daletskii ve M.G. Krein [12], A.A. Dezin [5], V.I. Gorbachuk ve M.I. Gorbachuk [13], S.Yakubov ve Y. Yakubov [14], F.S. Rofe-Beketov ve A.M. Kholkin [15] kitaplarında detaylı bir şekilde verilmiştir.

Matematikte *"pantograf"* sözcüğü ilk olarak J.R. Ockendon ve A.B. Tayler tarafından [16] (*The Dynamics of a Current Collection System for an Electric Locomotive*, Proceeding of the Royal Society of London A: Mathematical and Physical Sciences, 322, (1971) 447-468) çalışmasında literatüre dahil edilmiştir. Bu çalışmada elektrik lokomotifinde akım toplama sisteminin dinamiği araştırılmıştır.

Pantograf tipli gecikmeli diferensiyel denklemler olarak da bilinen lineer pantograf diferensiyel denklemlerin genel teorisi ilk olarak 20. yüzyıl'da T. Kato ve J.B. Mc. Leod $[17]$, L. Fox ve ekibi $[18]$, A. Iserles $[19]$ tarafından çalışılmıştır.

Bu denklemler, bir elektrikli demiryolu sistemine havai destekleme hattında dalga hareketi içeren bir endüstriyel problemin matematiksel modeli olarak ortaya çıkması nedeniyle bu denklemlere genellikle pantograf tipli denklemler denilmiştir.

Bunun yanı sıra tıp, biyoloji, ekonomi, kontrol ve elektrodinamik alanındaki bazı önemli modeller $[16]$, $[18-22]$ çalışmalarında araştırılmıştır.

Bu anlamda K. Mahler ve V.A. Ambarsumian'ın çalışmaları bu alanda yapılan ilk çalışmalar olarak kabul edilmektedir. Şimdi bu çalışmaların kısa bir özeti verilsin:

1940 yılında K. Mahler, $[23]$ (*On a Special Functional Equation*, J. London Math. Soc., 15 (1940) 115-123) çalışmasında

$$\frac{f(z+w)-f(z)}{w}=f(qz),\ w\neq 0,\ 0<q<1$$

fonksiyonel denkleminin çözümleri için asimptotik formüller elde etmiştir. Bu çalışmada ilk olarak

$$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{zq^{xi}}dx$$

dönüşümü yardımı ile bir $F(z,w,q)$ özel çözümü inşa edilmiştir. Bu halde $w\to 0$ için bu özel çözüm

$$F(z,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}n(n-1)}z^n}{n!}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Yazar, yukarıdaki fonksiyonel denklemin her bir $f(z)$ çözümünün pozitif bir sabitten büyük olduğunu, her sonlu aralıkta sınırlı olduğunu ve yeterince büyük z 'ler için $f(z)=e^{o(1)}F(z)$ eşitliğinin sağlandığını göstermiştir. Ayrıca,

$$logf(z) \sim (logz)^2 / (2log(1/q))$$

olduğu sonucu elde edilmiştir.

1944 yılında V.A. Ambarzumian, $[24]$ (*On the Theory of Brightness Fluctuations in the Milky Way*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS, 44 (1944) 223-226) isimli makalesinde;

(1) Her temel dV hacmi bir birim cisim açısında ηdV enerji miktarında ışın yaysın,

(2) Emen bulutlar uzayı öyle doldursun ki keyfi bir x uzunluğundaki segment tarafından kesilen bulutların sayısı νx parametreli Poisson dağılımına bağlı olsun,

(3) Eğer bir yıldızın ışığı bir bulut içerisinden geçerse ışığın $1-q$ kadar sabit kısmı emilsin

varsayımları altında galaktik(samanyolu) ekvator düzleminde verilen bir yöndeki tam parlaklığın I 'ya ulaşacağı olasılık için bir $P(I)$ dağılım fonksiyonu elde etmiştir. Buradan $P(I)$ fonksiyonunun

$$\nu P(I) + \eta P'(I) = \nu P(I/q)$$

diferensiyel denklemini sağladığı görülmüştür. Bu denklemlerden $P(I)$'nın momentlerinin hesaplanabilir olduğu vurgulanmış ve aynı zamanda (3) varsayımının esnetilebileceği gösterilmiştir.

Pantograf tipli diferensiyel denklemler için bakılan problemlere karşılık gelen özdeğer ve özvektörlerin bulunması oldukça zor olduğundan ve yeni bir teknik gerektirdiğinden dolayı çözümlerin hesaplanması için sayısal analiz yöntemleri önemli rol oynamaktadır $[25-30]$.

Literatürde bakılan çalışmaların büyük çoğunluğunda birinci mertebeden pantograf veya genelleştirilmiş pantograf tipli gecikmeli diferensiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin sayısal çözümlerinin bulunması esas odak noktası olmuştur.

Örneğin, 1993 yılında M. Buhmann ve A. Iserles, $[21]$ (*Stability of the Discretized Pantograph Differential Equation*, Mathematics of Computation, 60, 202 (1993) 575-589) çalışmasında;

$$y'(t) = ay(t) + by(\theta(t)) + cy'(\theta(t)),\ t \geq 0$$

şeklindeki genelleştirilmiş pantograf tipli diferensiyel denklem için $y(0)=y_0$ başlangıç değer probleminin bazı koşullar altında sayısal çözümlerini araştırmışlardır.

2008 yılında E. Ishiwata, Y. Muroya ve H. Brunner'in $[31]$ (*A-Super-Attainable Order in Collocation Methods for Differential Equations with Proportional Delay*, Applied Mathematics and Computation 198, (2008) 227-236) çalışmasında ise

$$\begin{cases} y'(t)=ay(t)+by(qt)+f(t),\ t>0,\ 0<q<1, \\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

şeklindeki pantograf tipli gecikmeli diferensiyel denklem için nonlineer nonhomojen başlangıç değer problemine Runge-Kutta sayısal çözüm yöntemi uygulanarak araştırma yapılmıştır. Bu problem

$$u(t)=y(t)-y_0,\ t>0$$

fonksiyon dönüşümü yapılarak

$$\begin{cases} u'(t)-au(t)-bu(qt)=f(t)+ay_0+by_0,\ t>0 \\ u(0)=0 \end{cases}$$

şeklinde lineer probleme dönüştürülebilir.

2009 yılında I. Ali, H. Brunner, T. Tang'ın $[30]$ (*A Spectral Method For Pantograph-Type Delay Differential Equations and Its Convergence Analysis*, Journal of Computational Mathematics, 27, 2-3 (2009) 254-265) çalışmasında

$$\begin{cases} u'(x)=a(x)u(qx),\ 0<x\le T,\ 0<q<1,\ a\in C^1[0,T], \\ u(0)=y_0 \end{cases}$$

şeklindeki pantograf tipli diferensiyel denklemler için başlangıç değer probleminin sayısal çözüm yöntemi verilmiştir. Yine bu problem $y(x)=u(x)-y_0$ fonksiyon dönüşümü yapılarak

$$\begin{cases} y'(x)=a(x)y(qx)+y_0a(x),\ 0<x\le T, \\ y(0)=0 \end{cases}$$

yani,

$$\begin{cases} y'(x) - a(x)y(qx) = y_0 a(x), \; 0 < x \le T, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

bir lineer pantograf tipli diferensiyel denklem için başlangıç değer problemine dönüştürülebilir.

2009 yılında ise I. Ali, H. Brunner ve T. Tang' ın $[32]$ (*Spectral Methods for Pantograph-Type Differential and Integral Equations with Multiple Delays*, Front. Math. China, 4,1 (2009) 49-61) çalışmasında;

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)y(q_i t), \; t \in [0,T], \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

şeklinde pantograf tipli çoklu-gecikmeli (multiple-delay) diferensiyel denklem için başlangıç değer probleminin yaklaşık düzgün çözümlerinin analitik çözüme yakınsaklık özellikleri araştırılmıştır.

Her ne kadar fark gecikmeli birinci mertebeden diferensiyel denklemler için bakılan başlangıç değer veya sınır değer problemleri için adım-adım (step-by-step) veya ardışık devam (constinuation prosess) metodu var olsa da $[33]$ (Bellman, R. ve Cooke, K. L., *Differential-Difference Equations*, 462p., Academic Press, New York, London, 1963) pantograf tipli diferensiyel denklemler için bakılan problemler için böyle bir yöntem mevcut değildir.

Diğer taraftan, pantograf tipli diferensiyel denklemlerin genel çözümlerinin gösterimi için uygun karakteristik denklemlerin çözümü çoğu zaman bulunamadığından, bu teoride adi diferensiyel denklemler için kullanılan geleneksel yöntemler uygulanabilir değildir.

Bu tezin amacı birinci mertebeden pantograf tipli gecikmeli diferensiyel denklemler için bakılan başlangıç veya sınır değer problemlerinin genel çözümünün genel gösterimi olmamasına rağmen, sınırlı tersinir genişlemelerin tanım kümesindeki fonksiyonların analitik ifadesi yani, rezolvent operatörün evolüsyon operatörleri dilinde ifadesini verebilmektir.

Pantograf tipli gecikmeli diferensiyel denklemler için bakılan başlangıç veya sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği, uygun diferensiyel operatörlerin tersinirlik ve sınırlı tersinirlik özellikleri veya genelde uygun operatörün spektral özellikleri ile direkt bağlantılı olduğundan bu tip problemlerin Operatörler ve Spektral Teorisi açısından incelenmesi ayrıca bir merak konusu oluşturmaktadır.

Bu zamana kadar bu alanda yapılan çalışmalardan bu tez çalışmasının farkı, örneğin aşağıdaki ST2 durumunda, $Au(t) := A(t)u(\alpha t),\ u \in L^2(H,(0,1))$ operatörünün, yani $Au(t) = (A(t) \otimes P_\alpha)u(t)$, $A(\cdot) \otimes P_\alpha : [0,1] \to L^2(H) \otimes L^2(0,1)$ operatörünün spektrum yapısının bulunamaması ve sonuçta uygun evolüsyon operatörünün var olup olmaması sorunu ile karşı karşıya kalınmasıdır.

Bütün bu bahsedilenler tez konusunu önemli ve güncel yapan faktörlerdir.

Bu tez çalışmasında aşağıdaki araştırmaların yapılması amaçlanmaktadır.

(ST-1) Vektör-fonksiyonların $L^2(H,(0,1))$ Hilbert uzayında

$$l(u) = u'(t) + \sum_{m=1}^{n} A_m(t)u(\alpha_m(t))$$

şeklinde (özel durumda, $\alpha_m(t) = \alpha_m t$) lineer pantograf tipli diferensiyel-operatör ifadesinin doğurduğu minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemelerinin sınır değerleri dilinde genel gösterimi araştırılacak ve bu tip genişlemelerin spektrum yapıları irdelenecektir. Burada H bir ayrılabilir Hilbert uzayı, her $m = 1,2,...,n$ için $\alpha_m : [0,1] \to [0,1]$, $\alpha_m \in C^1[0,1]$ bir fonksiyon, $A_m : [0,1] \to L(H)$ bir operatör-fonksiyondur;

(ST-2) Vektör-fonksiyonların $L^2(H,(0,1))$ Hilbert uzayında

$$l(u) = u'(t) + A(t)u(\alpha t),\ 0 < \alpha < 1$$

bir sınıf pantograf tipli gecikmeli diferensiyel-operatör ifadesi tarafından üretilen minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemelerinin sınır değerleri dilinde genel gösterimi araştırılacak ve bu tip genişlemelerin spektrum yapısı incelenecektir. Burada; H, bir ayrılabilir Hilbert uzayı, $A(\cdot) : [0,1] \to L(H)$ operatör-fonksiyon ve $\|A(t)\|_H \in L_1(0,1)$;

(ST-3) Vektör-fonksiyonların $L^2(H,(0,1))$ Hilbert uzayında

$$l(u)=u'(t)+\sum_{m=1}^{n}A_m(t)u\left(\alpha_m|t-\lambda_m|^{\gamma_m}\right)$$

şeklinde gösterilecek birinci mertebeden lineer fonksiyonel diferensiyel-operatör ifadesi ele alınacaktır. Burada, H, bir ayrılabilir Hilbert uzayı, her $m=1,2,...,n$ için $A_m(\cdot):[0,1]\to L(H)$ operatör-fonksiyonu düzgün operatör topolojisinde sürekli ve $0<\alpha_m\le 1,\ 0\le\lambda_m\le 1,\ 0<\gamma_m\le 1$ şeklindedir. $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi tarafından $L^2(H,(0,1))$ Hilbert uzayında üretilen minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilecek ve bu tip genişlemelerin spektrum yapısı araştırılacaktır;

(ST-4) Her $n\ge 1$ için H_n bir ayrılabilir Hilbert uzayı, $-\infty<\inf\limits_{n\ge1} a_n<\sup\limits_{n\ge1} b_n<\infty$, $\inf\limits_{n\ge1}|J_n|>0$ özellikleri ile $J_n=(a_n,b_n)\subset\mathbb{R}$ ve $\mathcal{H}_n=L^2(H_n,J_n)$ olmak üzere $\mathcal{H}=\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ Hilbert uzayında

$$l(u)=(l_n(u_n)),\ u=(u_n)$$

birinci mertebeden lineer çok noktalı fonksiyonel (özel durumda pantograf) diferensiyel-operator ifadesi tarafından üretilen minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemelerinin sınır değerleri dilinde genel gösterimi araştırılacak ve bu tip genişlemelerin spektrum yapısı incelenecektir. Burada; her $n\ge 1$ için $l_n(u_n)=u_n{}'(t)+A_n(t)u(\alpha_n(t))$, $A_n(\cdot):[a_n,b_n]\to L(H_n)$ operatör-fonksiyonu düzgün operatör topolojisinde sürekli, $\sup\limits_{n\ge1}\sup\limits_{t\in J_n}\|A_n(t)\|<\infty$, $\alpha_n:[a_n,b_n]\to[a_n,b_n]$ fonksiyonları tersinir ve α_n, $\left(\alpha_n^{-1}\right)'\in C[a_n,b_n]$.

Ayrıca, $\sup\limits_{n\ge1}\left(\left\|\left(\alpha_n^{-1}(t)\right)'\right\|_\infty\right)^{1/2}<\infty$ koşulu sağlanır.

Alınan sonuçlar örneklerle desteklenecektir.

1.2. Gerekli Kavram ve Açıklamalar

Bu tez çalışmasında kullanılacak bazı önemli kavram ve sonuçlar şöyle verilebilir:

Tanım 1.2.1 (Metrik Uzay, ([34], s. 11)): X boş olmayan bir küme ve

$$d: X \text{ x } X \rightarrow [0,+\infty), \quad (x,y) \rightarrow d(x,y)$$

bir fonksiyon olsun. Eğer d fonksiyonu her $x,y,z \in X$ için

(M1) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ (*özdeşlik aksiyomu*);

(M2) $d(x,y)=d(y,x)$ (*simetriklik aksiyomu*);

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ (*üçgen eşitsizliği*)

özelliklerini sağlıyorsa ona X kümesi üzerinde bir *uzaklık fonksiyonu* veya *metrik,* (X,d) ikilisine bir *metrik uzay* ve yukarıda verilen $(M_1)-(M_3)$ özelliklerine ise *metrik aksiyomları* denir.

Örnek 1.2.2 ([34]): $X=\mathbb{R}$ olmak üzere

$$d: \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \ (x,y) \rightarrow d(x,y)=|x-y|$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ üzerinde *mutlak değer metriği* denir. Gerçekten, her $x,y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y)=|x-y| \geq 0$. Ayrıca,

(**M1**) Her $x,y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y)=|x-y|=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$;

(**M2**) Her $x,y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y)=|x-y|=|(-1)(y-x)|=|(-1)||y-x|=d(y,x)$;

(**M3**) Her $x,y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x,y)=|x-y|=|x-z+z-y| \leq |x-z|+|z-y|=d(x,z)+d(z,y)$$

aksiyomları sağlanır. O halde $(\mathbb{R},d)$ bir metrik uzaydır ve bu metrik uzaya bir boyutlu *Euclid uzayı* denir.

Tanım 1.2.3 (Ayrılabilir Uzay, ([34], s. 19)): Bir (X,d) metrik uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa bu uzaya *ayrılabilir* (*separable*) *uzay* denir.

Örneğin; $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ rasyonel sayılar kümesi $(\mathbb{R},d)$, $d(x,y)=|x-y|$, $x,y\in\mathbb{R}$ metrik uzayında yoğun olduğundan dolayı $(\mathbb{R},d)$ metrik uzayı ayrılabilir bir metrik uzaydır.

Tanım 1.2.4 (Lineer Uzay, ([34], s. 3)): X boş olmayan bir küme ve F ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun.

$$+ : X \text{ x } X \to X,\ (x,y)\to x+y,\ x,y\in X$$
$$\bullet : F \text{ x } X \to X,\ (a,x)\to ax,\ \alpha\in F,\ x\in X$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemleri denilen işlemler tanımlansın. Bu işlemler her $x,y,z\in X$ ve $a,b\in F$ için aşağıdaki koşulları sağlasın:

1. $x+y=y+x$;

2. $x+(y+z)=(x+y)+z$;

3. $\forall x\in X$ için $x+0=x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0\in X$ vardır;

4. $\forall x\in X$ için $x+(-x)=0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x\in X$ vardır;

5. $\forall x\in X$ için $1\cdot x=x$;

6. $a(x+y)=ax+ay$;

7. $(a+b)x=ax+bx$;

8. $(ab)x=a(bx)$.

Bu durumda X ’e F cismi üzerinde bir *lineer uzay* (*vektör uzayı*) adı verilir. F ’ nın elemanlarına *skaler*, X ’ in elemanlarına ise *vektör* veya *nokta* adı verilir. $F=\mathbb{R}$ alınırsa X ’e bir *reel lineer uzay* ve $F=\mathbb{C}$ alınırsa X ’e bir *kompleks lineer uzay* denir.

Örnek 1.2.5 ([34], s.5): S bir küme ve X , F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Bu durumda, $F(S,X):=\{f:S\to X \text{ bir fonksiyon}\}$ olmak üzere F ailesi

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \ , f, g \in F(S, X)$$
$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x) \ , \alpha \in K \ , f \in F(S, X)$$

işlemleri altında bir lineer uzaydır.

Örnek 1.2.6 ([34], s.5): X ve Y iki lineer uzay olsun. Bu durumda, $X \times Y$ uzayı

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \ , (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$$
$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \ , \alpha \in F, \ (x, y) \in X \times Y$$

cebirsel işlemleri altında bir lineer uzaydır.

Tanım 1.2.7 (Lineer Manifold, ([34], s. 3)): X , F cismi üzerinde bir lineer uzay ve Y, X 'in bir boş olmayan alt kümesi olsun. Y , X lineer uzayındaki cebirsel işlemlere göre kendi başına bir lineer uzay oluşturuyorsa Y ' ye, X ' de bir *lineer manifold* (veya X ' in bir *lineer alt uzayı*) denir.

Örnek 1.2.8 : $X \subset \ell_p(F)$, $p \geq 1$ olmak üzere $X := \{(x_n) \in \ell_p(F) : (x_n) = (0, x_2, x_3, ...)\}$

kümesi $\ell_p(F)$'de bir lineer manifoldur.

Gerçekten $(x_n) = (0, x_2, x_3, ...)$, $(y_n) = (0, y_2, y_3, ...) \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}(\alpha x_n + \beta y_n) &= (0, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, ...) \\ &= (0, \alpha x_2, \alpha x_3, ...) + (0, \beta y_2, \beta y_3, ...) \\ &= \alpha(0, x_2, x_3, ...) + \beta(0, y_2, y_3, ...) \\ &= \alpha(x_n) + \beta(y_n)\end{aligned}$$

olup buradan X kümesi lineer manifoldur.

Tanım 1.2.9 ([35], s. 53): X , bir F cismi üzerinde lineer uzay ve $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in X$ olarak verilsin. α_1, α_2, α_3, ..., $\alpha_n \in F$ olmak üzere

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + ... + \alpha_n x_n$$

şeklindeki sonlu toplama x_1, x_2, x_3, ..., $x_n \in X$ elemanlarının bir *lineer kombinasyonu* denir.

$\varnothing \neq M \subset X$ ise M 'den alınan her sonlu sayıdaki vektörlerin lineer kombinasyonlarının tümünün kümesine M ' nin *lineer örtüsü* denir ve $spanM$ olarak gösterilir. Başka bir deyişle,

$$spanM := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;:\; x_i \in M,\, \alpha_i \in K,\, i = 1, \ldots, n,\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $spanM$, X 'de bir lineer manifolddur ve ona M ' nin *ürettiği lineer manifold* adı verilir.

Tanım 1.2.10 (Normlu Lineer Uzay, ([34], s. 31)): X , F cismi üzerinde tanımlı bir lineer uzay olsun. Eğer

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R},\; x \to \|x\|$$

dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in F$ için

(N1) $\|x\| \geq 0;$

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R},\; x \to \|x\|$ dönüşümüne X üzerinde *norm* ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir *lineer normlu uzayı* veya *normlu uzay* adı verilir. Yukarıda verilen (N1) - (N4) özelliklerine *norm aksiyomları* denir.

Örnek 1.2.11 ([34], s.35): X ve Y aynı bir F cismi üzerinde iki normlu uzay olsun. Bu durumda $X \times Y$ lineer uzayı

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon altında bir normlu uzaydır.

Örnek 1.2.12 ([34], s.35): $\ell_p(F) := \left\{ (x_n) : x_n \in F, n \geq 1 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$, $1 \leq p < +\infty$ lineer uzayı $\|(x_n)\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$, $(x_n) \in \ell_p(F)$ fonksiyonu altında bir normlu uzaydır.

Tanım 1.2.13 ([36], $s.255$)): Bir X kümesi üzerinde tanımlı, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$-değerli, Σ-ölçülebilir, $|f|^p$, $1 \leq p < \infty$ fonksiyonunun bir μ ölçümüne göre integralinin sonlu olduğu μ-denklik sınıflarının oluşturduğu aile $L^p\left(X, \sum, \mu\right)$ ile gösterilir.

Bu $L^p\left(X, \sum, \mu\right)$ lineer uzayı

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

fonksiyonu altında bir normlu uzaydır ([36], $s.257$).

Tanım 1.2.14 (Yakınsak Dizi, ([35], $s.67$)): $\left(X, \|\cdot\|_X\right)$ normlu uzay, $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer $x \in X$ için

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

ise (x_n) dizisi $x \in X$ elemanına $\|\cdot\|_X$ *normuna göre yakınsaktır* denir ve $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{\|\ \|_X} x$ ya da $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ notasyonlarının biriyle gösterilir.

Örnek 1.2.15: $L^2(0,1)$ uzayında alınan $x_n(t) = t^n$, $n \geq 1$ fonksiyon dizisi $x(t) = 0$ fonksiyonuna yakınsaktır. Gerçekten;

$$\|x_n - x\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^2 \, dt = \int_0^1 |t^n - 0|^2 \, dt = \int_0^1 t^{2n} dt = \left. \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

olup sonuç olarak $\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\|_{L_2} = 0$ olduğu elde edilir.

Tanım 1.2.16 (Cauchy Dizisi, ([34], $s.12$; $s.36$)): $\left(X, \|\cdot\|_X\right)$ lineer normlu bir uzay ve $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer

$\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall m,n > n_\varepsilon$ için $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$

olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine $(X, \|\cdot\|)$ içinde bir *Cauchy dizisi* denir.

Örnek 1.2.17: $C([0,1],\mathbb{R}) := \{ f \mid f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ ve sürekli} \}$ olmak üzere

$(f_n) \subset C([0,1],\mathbb{R})$ dizisi $f_n(t) := t^n$, $t \in [0,1]$, $n \geq 1$ şeklinde tanımlansın. (f_n) dizisi $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$, $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ lineer normlu uzayında bir Cauchy dizisi olup $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)|$, $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ lineer normlu uzayında bir Cauchy dizisi değildir. Gerçekten;

İlk olarak (f_n) dizisinin $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normlu uzayında Cauchy dizisi olduğu gösterilsin. $n,m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ olsun. Bu halde $n > m$ olduğu için

$$\int_0^1 |t^n - t^m|\,dt = \int_0^1 (t^m - t^n)\,dt = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{m}$$

olduğu elde edilir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon := \left[\!\left[\frac{1}{\varepsilon} \right]\!\right] + 1$ alınırsa her $m,n > n_\varepsilon$ için $\|f_n - f_m\|_1 < \frac{1}{m} < \varepsilon$ olduğundan $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$ olduğu bulunur. Öyleyse (f_n) dizisi $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisidir.

Şimdi (f_n) dizisinin $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ lineer normlu uzayında bir Cauchy dizisi olmadığı gösterilsin. Aksine (f_n) dizisinin $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ lineer normlu uzayında bir Cauchy dizisi olduğu varsayılsın. $n,m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ olsun. Bu halde $n > m$ olduğu için

$$\|f_n - f_m\|_\infty := \sup_{[0,1]} |t^n - t^m| = \sup_{[0,1]} (t^m - t^n)$$

eşitliği elde edilir. Kolay hesaplamalarla

$$\sup_{[0,1]}\left(t^m - t^n\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}}\left(1-\frac{m}{n}\right)$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\| f_n - f_m \|_\infty = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}}\left(1-\frac{m}{n}\right)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $m = k \in \mathbb{N}$ ve $n = 2k \in \mathbb{N}$ alınırsa

$$\| f_n - f_m \|_\infty = \left(\frac{k}{2k}\right)^{\frac{k}{2k-k}}\left(1-\frac{k}{2k}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

olur ki bu durumda $\varepsilon := \frac{1}{8}$ için $\frac{1}{4} < \frac{1}{8}$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $\left(f_n\right)$ dizisinin $\left(C\left([0,1],\mathbb{R}\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ lineer normlu uzayında bir Cauchy dizisi olmadığı görülür.

Tanım 1.2.18 (Banach Uzay, ([34], s. 16; s. 48)): Bir $\left(X, \|\cdot\|\right)$ lineer normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir elemana yakınsıyorsa bu $\left(X, \|\cdot\|\right)$ lineer normlu uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* adı verilir.

Örnek 1.2.19: $X = L^p\left([a,b]\right)$, $a,b \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ lineer uzayı

$$\| f \|_{L^p} := \| [f] \|_{L^p} = \left(\int_{[a,b]} \left| f(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L^p\left([a,b]\right)$$

normuna göre bir Banach Uzayıdır.

Bu $L^p\left([a,b]\right)$ uzayının lineer olduğu Minkowski Eşitsizliğinin bir sonucudur. Normlu uzay olduğu kolayca gösterilebilir. Tamlığı ise Riesz-Fischer teoreminden açıktır. $L^\infty\left([a,b]\right)$ uzayının da bir Banach Uzayı olduğu da kolayca gösterilebilir [35].

Örnek 1.2.20. $C([0,1],\mathbb{R})$ lineer uzayı $\|\cdot\|_1 : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\,dt$ normuna göre bir Banach uzayı değildir. Gerçekten, $C([0,1],\mathbb{R})$ uzayının normlu lineer uzay olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi onun tam uzay olmadığını gösterilsin. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \le t \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right) + 1 & , \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < t \le \frac{1}{2} \\ 1 & , \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

şeklinde bir $(f_n) \subset C[0,1]$ dizisi tanımlanıp bu dizinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilsin. $m,n \in \mathbb{N}$ için $m < n$ sayılarını alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_1 &= \int_0^1 |f_n - f_m|(x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)} |f_n - f_m|(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)}^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)} |f_n - f_m|(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\frac{1}{2}} |f_n - f_m|(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f_n - f_m|(x)\,dx \end{aligned}$$

$|f_n(x)| \le 1,\ n \ge 1$ eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\|_1 &\le \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)}^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)} |f_m|\,dx + \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\frac{1}{2}} |f_n - f_m|\,dx \\ &\le \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2m}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \\ &\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} \to 0 \end{aligned}$$

Böylece $\|f_n - f_m\|_1 \xrightarrow[m<n]{m\to\infty} 0$ olup (f_n) bir Cauchy dizisidir. Şimdi ise (f_n) dizisinin $\|\cdot\|_1$ normunda yakınsamadığı gösterilsin.

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

tanımlansın.

$$\|f_n - \varphi\|_1 = \int_0^1 |f_n - \varphi| dx = \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\frac{1}{2}} |f_n| dx \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Yani $\int_0^1 |f_n - \varphi|(x) dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Keyfi bir $f \in C[0,1]$ alınsın. $f \in C[0,1]$ ve $\varphi \notin C[0,1]$ olduğundan $\int_0^1 |f - \varphi|(x) dx \ne 0$. Öte yandan

$$0 \le \int_0^1 |f - \varphi|(x) dx \le \int_0^1 |f - f_n|(x) dx + \int_0^1 \le |f_n - \varphi|(x) dx$$

eşitliğinden $\int_0^1 |f - f_n|(x) dx \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Çünkü aksi halde $\int_0^1 |f - \varphi|(x) dx = 0$ olmalıdır, bu ise olamaz. Sonuç olarak (f_n) dizisi $C[0,1]$ uzayında $\|\cdot\|_1$ normu altında hiçbir fonksiyona yakınsamaz. Dolayısıyla $C([0,1],\mathbb{R})$ lineer uzayı $\|.\|_1$ normuna göre bir Banach uzayı değildir.

Tanım 1.2.21 (İç Çarpım Uzayı, ([34], s. 51; s. 53)): $F = \mathbb{R}(\text{veya } \mathbb{C})$ olmak üzere X bir lineer uzay olsun. Eğer $(\cdot,\cdot)_X : X \text{ x } X \to F$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(\cdot,\cdot)_X$ ’ ye X üzerinde bir *iç çarpım*, $\left(X, (\cdot,\cdot)_X\right)$ ikilisine de *iç çarpım uzayı* (veya *ön Hilbert uzayı*) denir.

(İç₁) $\forall x \in X$ için $(x,x)_X \ge 0$ ve $(x,x)_X = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

(İç₂) $\forall x, y \in X$ için $(x,y)_X = \overline{(y,x)_X}$ (kompleks eşlenik);

(İç₃) $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için $(\alpha x, y)_X = \alpha (x,y)_X$;

(İç4) $\forall x,y,z\in X$ için $(x+y,z)_X=(x,z)_X+(y,z)_X$.

$F=\mathbb{R}$ durumunda her $x,y\in X$ için $(x,y)_X=(y,x)_X$ eşitliği doğrudur. Ayrıca İç2 ve İç4 ifadelerinden $\forall x,y,z\in X$ ve $\forall\alpha,\beta\in F$ için

a) $(\alpha x+\beta y,z)_X=\alpha(x,z)_X+\beta(y,z)_X$;

b) $(x,\alpha y)_X=\overline{\alpha}(x,y)_X=\alpha(x,y)_X$;

c) $(x,\alpha y+\beta z)_X=\overline{\alpha}(x,y)_X+\overline{\beta}(x,z)_X$

formüllerinin doğruluğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 1.2.22 ([37]): $\alpha\in C[a,b]\,,\alpha(t)>0$, $t\in[a,b]$ olmak üzere

$$(f,g)_{L^2}=\int_a^b\alpha(t)\,f(t)\overline{g(t)}dt\ ,\ f,g\in L^2(a,b)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm $L^2(a,b)$ lineer uzayı üzerinde bir iç çarpım fonksiyonudur. Gerçekten;

(İç1) Her $f\in L^2(a,b)$ için $(f,f)_{L^2}=\int_a^b\alpha(t)\,f(t)\overline{f(t)}dt=\int_a^b\alpha(t)\left|f(t)\right|^2dt\geq 0$,

Eğer $(f,f)_{L^2}=\int_a^b\alpha(t)\,f(t)\overline{f(t)}dt=\int_a^b\alpha(t)\left|f(t)\right|^2dt=0$ ise her $t\in[a,b]$ için $\alpha(t)>0$ olduğundan her $t\in[a,b]$ için $\left|f(t)\right|=0$ $\lambda-h.h.y$ olup buradan her $t\in[a,b]$ için $f(t)=0$ $\lambda-h.h.y$, yani $(f,f)=0$ ise $f=0$ $\lambda-h.h.y$ olduğu bulunur.

Tersine, eğer $f=0$ ise

$$(f,f)_{L^2}=\int_a^b\alpha(t)\,f(t)\overline{f(t)}dt=\int_a^b\alpha(t)\left|f(t)\right|^2dt=\int_a^b 0\,dt=0$$

olup $(f,f)_{L^2}=0$ eşitliği elde edilir;

(İç2) Her $f,g\in L^2(a,b)$ için

$$(f,g)_{L^2}=\int_a^b \alpha(t)f(t)\overline{g(t)}dt=\overline{\int_a^b \overline{\alpha(t)f(t)}g(t)dt}=\overline{\int_a^b \alpha(t)g(t)\overline{f(t)}dt}=\overline{(g,f)_{L^2}}\,;$$

(İç3) Her $f\in L^2(a,b)$ ve $\beta\in\mathbb{C}$ için

$$(\beta f,g)_{L^2}=\int_a^b \beta\alpha(t)f(t)\overline{g(t)}dt=\beta\int_a^b \alpha(t)f(t)\overline{g(t)}dt=\beta(f,g)_{L^2}\,;$$

(İç4) Her $f,g,h\in L^2(a,b)$ için

$$\begin{aligned}(f+h,g)_{L^2}&=\int_a^b \alpha(t)\big(f(t)+h(t)\big)\overline{g(t)}dt=\int_a^b\Big(\alpha(t)f(t)\overline{g(t)}+\alpha(t)h(t)\overline{g(t)}\Big)dt\\&=\int_a^b \alpha(t)f(t)\overline{g(t)}dt+\int_a^b \alpha(t)h(t)\overline{g(t)}dt=(f,g)_{L^2}+(h,g)_{L^2}\end{aligned}$$

Tanım 1.2.23 (İç Çarpımın Ürettiği Norm, ([34], s. 56)): $\left(X,(\cdot,\cdot)_X\right)$ bir iç çarpım uzayı olsun.

$$\|x\|_X=(x,x)_X^{1/2},\ \ \|\cdot\|_X : X\to\mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir norm olup ve bu norma *iç çarpımın ürettiği norm* denir.

Tanım 1.2.24 (Hilbert Uzayı, ([34], s. 63)): Eğer bir iç çarpım uzayı iç çarpımın ürettiği norma göre tam ise bu iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* adı verilir.

Örnek 1.2.25 ([34], s.64 [37], s.40) : $(\cdot,\cdot):\ell_2\times\ell_2\to F$, $(z,w):=\sum_{n=1}^{\infty} z_n\overline{w_n}$, $z=(z_n)\in l_2$, $w=(w_n)\in\ell_2$ fonksiyonu ℓ_2 uzayı üzerinde bir iç çarpım fonksiyonudur ve ℓ_2 uzayı bu iç çarpıma göre bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.2.26 (Sobolev Uzayı, ([13], s. 50 − 51)): $L^2(H,(a,b))$, $a,b\in\mathbb{R}$ lineer uzayında $\|f\|^2_{L^2(H,(a,b))}+\|f'\|^2_{L^2(H,(a,b))}<\infty$ koşulunu sağlayan $f:[a,b]\to H$ vektör-fonksiyonların oluşturduğu aile $W_2^1(H,(a,b))$ ile gösterilir. Bu durumda $W_2^1(H,(a,b))$ lineer uzayı

$$(f,g)_{W_2^1(H,(a,b))} := (f,g)_{L^2(H,(a,b))} + (f',g')_{L^2(H,(a,b))}, \quad f,g \in W_2^1(H,(a,b))$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır. Bu uzaya *Sobolev uzayı* da denir. Ayrıca

$$\overset{0}{W_2^1}(H,(a,b)) = \{ f \in W_2^1(H,(a,b)) : f(a) = f(b) = 0 \}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.27 (Vektör-Fonksiyonlar, ([13]): B bir Banach uzayı ve $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olsun. $f : I \to B$ şeklindeki fonksiyona *vektör-fonksiyon* denir.

Tanım 1.2.28 (Süreklilik, ([13])): Bir $f(t)$ vektör-fonksiyonu bir $t_0 \in I$ noktası için eğer

$$\lim_{t \to t_0} \| f(t) - f(t_0) \| = 0$$

ise f vektör-fonksiyonuna $t_0 \in I$ noktasında *süreklidir* denir. Diğer taraftan, I aralığının her bir noktasında sürekli olan f vektör-fonksiyonuna I aralığı üzerinde *süreklidir* denir.

Tanım 1.2.29 (Diferensiyellenebilirlik, ([13], s. 13)): $f : I \to B$ bir vektör-fonksiyon ve $t_0 \in I$ bir nokta olsun. Eğer

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} - y \right\| = 0$$

olacak şeklinde bir $y \in B$ vektörü mevcutsa f vektör-fonksiyonuna $t_0 \in I$ noktasında *diferensiyellenebilir* denir. Buradaki $y \in B$ vektörüne de f vektör-fonksiyonunun $t_0 \in I$ noktasındaki *türevi* adı verilir.

Eğer f vektör-fonksiyonu I aralığının her bir noktasında diferensiyellenebilir ise f 'ye I aralığı üzerinde *diferensiyellenebilir* denir.

Tanım 1.2.30 ([13], s. 17): H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun.

$$\int_a^b \| f(t) \|_H^2 \, dt < +\infty$$

koşulunu sağlayan $f:[a,b]\to H$ vektör-fonksiyonlarının oluşturduğu lineer uzay $L^2(H,(a,b))$ ile gösterilir. Bu uzay

$$(f,g)_{L^2(H,(a,b))} := \int_a^b (f(t),g(t))_H \, dt, \quad f,g\in L^2(H,(a,b))$$

iç çarpımın doğurduğu norm ile bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.2.31 ($[34], s.7; [38], s.238$): X ve Y iki lineer normlu uzay olsun. $A:D(A)\subset X\to Y$ olan her dönüşüme *operatör* adı verilir. Bu durumda

$D(A):=\{x\in X: Ax \text{ tanımlı}\}\subset X$ kümesine A operatörünün *tanım kümesi*,

$R(A):=AD(A)=\{y=Ax:\ x\in D(A)\}\subset Y$ kümesine A operatörünün *değer kümesi*,

$Ker\,A:=\{x\in X: Ax=0\}\subset X$ kümesine ise A operatörünün *sıfır kümesi* veya *çekirdeği*

denir.

Tanım 1.2.32 (Lineer Operatör, ($[35], s.82$)): X ve Y aynı bir F cismi üzerinde iki lineer uzay, $D(A)$, X 'de bir lineer manifold ve $A:D(A)\subset X\to Y$ bir operatör olsun. Eğer her $x,y\in D(A)$ ve her $\alpha,\beta\in F$ için

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha A(x)+\beta A(y)$$

ise A operatörüne X üzerinde bir *lineer operatör* denir.

Örnek 1.2.33: $X=Y=L^2(0,1)$ ve $A:L^2(0,1)\to L^2(0,1)$, $Au=u'(t)$, $D(A)=\{u\in L^2(0,1): u'\in L^2(0,1)\}=W_2^1(0,1)$ ise A bir lineer operatördür. Gerçekten, $\forall u,v\in W_2^1(0,1)$ ve $\forall \alpha,\beta\in F$ için $\alpha u+\beta v\in W_2^1(0,1)$ olup

$$A(\alpha u+\beta v)=(\alpha u+\beta v)'(t)=(\alpha u)'(t)+(\beta v)'(t)=\alpha u'(t)+\beta v'(t)=\alpha Au+\beta Av.$$

Yani, A bir lineer operatördür.

Örnek 1.2.34: $A:C[a,b]\to C[a,b]$, $Af(t)=f(a)+1,\ f\in C[a,b]$ şeklinde tanımlanan operatör lineer değildir. Gerçekten; $f,\ g\in C[a,b]$, $f(t)=g(t)=1$ ve $\alpha=\beta=1$ için $f+g\in C[a,b]$ olup

$$A(f+g)(t)=(f+g)(a)+1=f(a)+g(a)+1=1+1+1=3 \text{ ve}$$

$$Af(t)+Ag(t)=(f(a)+1)+(g(a)+1)=1+1+1+1=4$$

bulunur ki $A(f+g)(t)=3\neq 4=Af(t)+Ag(t)$ olduğundan A operatörü lineer değildir.

Tanım 1.2.35 (Birim Operatör, ([35], s. 84)): $A:X\to X$ operatörü verilsin. $\forall x\in X$ için $A(x)=x$ ise A operatörüne *birim operatör* veya *özdeşlik operatörü* adı verilir. I veya I_X şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.36 (Sınırlı Operatör, ([35], s. 91)): X ve Y iki lineer normlu uzaylar ve $A:X\to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x\in X$ için

$$\|Ax\|_Y\leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde sabit bir $c>0$ sayısı varsa A operatörüne *sınırlı operatör* denir. X 'den Y 'ye tüm sınırlı operatörlerin oluşturduğu aile $L(X,Y)$, özel olarak $X=Y$ ise bu aile $L(X)$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.37 ([37], s.55) : $k(t,s)$ fonksiyonu $D=[a,b]$ x $[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$ karesel bölgesi üzerinde kompleks değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $f\in L^2(a,b)$ için $Kf(t):=\int_a^b k(t,s)\,f(s)ds$ şeklinde bir operatör tanımlansın. Bu operatör lineer sınırlı bir operatördür. Gerçekten K operatörünün lineer olduğu açık olup sınırlı olduğu gösterilsin. Her $f\in L^2(a,b)$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\left(\int_a^b |k(t,s)\,f(s)|ds\right)^2\leq\int_a^b |k(t,s)|^2 ds\int_a^b |f(s)|^2 ds$$

olup

$$\|Kf\|_{L^2(a,b)}^2 = \int_a^b \left(\int_a^b |k(t,s)\, f(s)| ds \right)^2 dt \le \|f\|_{L^2(a,b)}^2 \int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt$$

bulunur. Buradan her $f \in L^2(a,b)$ için $Kf \in L^2(a,b)$ ve

$$\|Kf\|_{L^2(a,b)} \le \left(\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt \right)^{1/2} \|f\|_{L^2(a,b)}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $K : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ operatörünün sınırlı olduğu görülür.

Örnek 1.2.38 ([34], s.92): $C([a,b],\mathbb{R}) := \{ f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ sürekli} \}$ ve $C^1([a,b],\mathbb{R}) := \{ f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R}\,,\ f' : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ var ve } f' \text{ sürekli} \}$ olmak üzere $S : C^1([0,1],\mathbb{R},\|\cdot\|_\infty) \subset C([0,1],\mathbb{R},\|\cdot\|_\infty) \to C([0,1],\mathbb{R},\|\cdot\|_\infty)$, $\|f\|_\infty := \sup_{[0,1]} |f(x)|$, $S(f) := f'$, $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ şeklinde tanımlanan dönüşüm lineer olup sınırlı bir dönüşüm değildir.

Tanım 1.2.39 (Sürekli Operatör, ([35], s. 96)): X ve Y iki normlu uzay, $D(A)$, X 'de bir lineer manifold, $A : D(A) \subset X \to Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(A)$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyleki $\|x - x_0\| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x \in D(A)$ için $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ ise A operatörü $x = x_0$ noktasında *süreklidir* denir. A operatörü her $x \in D(A)$ noktasında sürekli ise operatöre *sürekli operatör* denir.

Lemma 1.2.40 ([34], s. 88): X ve Y iki normlu uzay olsun ve $A : X \to Y$ lineer bir dönüşüm olsun. Aşağıdakiler denktir:

a) A düzgün süreklidir;

b) A süreklidir;

c) A sıfır noktasında süreklidir;

d) $x \in X$ ve $\|x\| = 1$ olduğunda $\|Ax\| \le k$ olacak şekilde bir k pozitif reel sayısı vardır;

e) $\forall x \in X$ için $\|Ax\| \le k\|x\|$ olacak şekilde bir k pozitif reel sayısı vardır.

Tanım 1.2.41 (Operatörün Normu, ([34], s. 97)): X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \to Y$ sınırlı lineer operatör olsun. Bu durumda

$$\|A\| := \inf\left\{M : M > 0 \text{ ve } \forall x \in X \text{ için} \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X\right\}$$

sayısına A *operatörünün normu* adı verilir.

Örnek 1.2.42: $\ell_\infty := \left\{z = (z_1, ..., z_n, ...) : (z_n) \subset \mathbb{C} \text{ sınırlı bir dizi}\right\}$ lineer uzayı üzerinde $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ normu her $z \in \ell_\infty$ için $\|z\|_\infty := \sup\limits_{n\geq 1}|z_n|$ şeklinde tanımlansın. O halde her $z \in \ell_\infty$ için $T(z) = \left(z_1, \frac{1}{2}z_2, ..., \frac{1}{n}z_n, ...\right)$ şeklinde bir T dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $z \in \ell_\infty$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $|z_n| \leq \|z\|_\infty$'dur. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $\left|\frac{1}{n}z_n\right| \leq |z_n| \leq \|z\|_\infty$ olup $T(z) \in \ell_\infty$'dur. Yani, $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ şeklinde bir dönüşümdür. Ayrıca T dönüşümü sınırlı lineer bir dönüşüm olup $\|T\| = 1$'dir.

Gerçekten; T dönüşümünün lineer bir dönüşüm olduğu açıktır. Her $z \in \ell_\infty$ için $T(z) = \left(z_1, \frac{1}{2}z_2, ..., \frac{1}{n}z_n, ...\right)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\frac{1}{n}z_n\right| \leq |z_n| \leq \|z\|_\infty$$

olduğundan

$$\|T(z)\|_\infty = \sup\left\{\left|\frac{1}{n}z_n\right| : n \in \mathbb{N}\right\} \leq \|z\|_\infty$$

eşitsizliği doğrudur. O halde $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ dönüşümü sınırlı ve $\|T\| \leq 1$'dir. Diğer taraftan $\|T\| := \sup\left\{\|T(z)\|_\infty : z \in \ell_\infty \text{ ve } \|z\|_\infty = 1\right\}$ olduğundan $e := (1, 0, ..., 0, ...) \in \ell_\infty$ için $\|e\|_\infty = 1$, $T(e) = (1, 0, ..., 0, ...)$ ve $\|T(e)\|_\infty = 1$'dir. Dolayısıyla $1 \leq \|T\|$'dir. Sonuç olarak $\|T\| \leq 1$ ve $1 \leq \|T\|$ eşitsizliklerinden $\|T\| = 1$ eşitliği elde edilir.

Tanım 1.2.43 ([35], s.104) : X bir F cismi üzerinde lineer normlu uzay olsun. $f: D(f) \subset X \to F$ olan her dönüşüme *fonksiyonel* adı verilir. Bu durumda

$D(f) := \{x \in X : f(x) \text{ tanımlı}\} \subset X$ kümesine f fonksiyonelinin *tanım kümesi*,

$R(f) := fD(f) = \{y = f(x) : x \in D(f)\} \subset F$ kümesine f fonksiyonelinin *değer kümesi*,

$Ker\, f := \{x \in X : f(x) = 0\} \subset X$ kümesine ise f fonksiyonelinin *sıfır kümesi* veya *çekirdeği*

denir.

Örnek 1.2.44 ([34], s.103) : $f \in L^2(0,1)$ olmak üzere $Af(t) := \int_0^1 f(t)\,dt$ şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. Bu halde

$$|Af(t)| = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |f(t)|\,dt \le \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 1^2\,dt\right)^{1/2} = \|f\|_{L^2}$$

olup her $f \in L^2(0,1)$ için $Af \in \mathbb{C}$ olur, yani $A: L^2(0,1) \to \mathbb{C}$ şeklinde bir fonksiyoneldir. Ayrıca A sınırlı ve $\|A\| = 1$ 'dır.

Gerçekten, her $f \in L^2(0,1)$ için

$$|Af|^2 = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right|^2 \le \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right)^2 \le \left(\int_0^1 1^2\,dt\right)\left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right) = \|f\|^2_{L^2(0,1)}$$

olup $|Af| \le \|f\|$ bağıntısı elde edilir. Buradan $\|A\| \le 1$ olduğu bulunur. Eğer $f_*(t) = 1 \in L^2(0,1)$ alınırsa $|Af_*| = 1 = 1 \cdot \|f_*\|_{L^2(0,1)}$ olup $\|A\| = 1$ bulunur.

Tanım 1.2.45 ([35], $s.$ 92): X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \to Y$ sınırlı lineer operatör olsun. Bu durumda A operatörünün normu için aşağıdaki formüller denktir:

(1) $\|A\| := \sup\left\{\dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X \text{ ve } x \neq \theta_X\right\}$ **;**

(2) $\|A\| := \sup\left\{\|Ax\|_Y : x \in X \text{ ve} \|x\|_X \leq 1\right\}$;

(3) $\|A\| := \sup\left\{\|Ax\|_Y : x \in X \text{ ve} \|x\|_X < 1\right\}$;

(4) $\|A\| := \sup\left\{\|Ax\|_Y : x \in X \text{ ve} \|x\|_X = 1\right\}$ **.**

Tanım 1.2.46 (Düzgün Operatör Topolojisinde Yakınsaklık ([35])): (T_n), H Hilbert uzayında lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer, $\|T_n - T\| \to 0$ ise $T_n \to T$ 'ye *düzgün operatör topolojisinde yakınsar* denir.

Tanım 1.2.47 (Bire Bir Operatör, ([35], s.614)): X ve Y iki lineer uzay, $D(A)$, X 'de bir lineer manifold ve $A: D(A) \subset X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x_1, x_2 \in D(A)$ için $x_1 \neq x_2$ olduğunda $Ax_1 \neq Ax_2$ oluyorsa A operatörüne *bire bir operatör* denir.

Tanım 1.2.48 (Ters Operatör, ([35], s.615): X ve Y iki lineer uzay ve $A: D(A) \subset X \to Y$ lineer operatörü bire bir olsun. Bu halde her $y = Ax \in Y$ için $S: D(S) = AD(A) \subset Y \to X$, $S: y = Ax \to x$ şeklinde tanımlanan S operatörüne A operatörünün *ters operatörü* denir ve $S = A^{-1}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.49 (Grafik, ([35], s.292)): X ve Y iki lineer uzayı olmak üzere $Z := X \oplus Y$ olsun. $A: X \to Y$ lineer operatörü için,

$$Gr(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset Z = X \oplus Y$$

alt kümesine A operatörünün *grafiği* denir.

Tanım 1.2.50 (Kapalı Operatör, ([35], s.292)): X ve Y iki normlu uzay olsun. $A: X \to Y$ lineer operatörünün grafiği $G(A)$, $Z = X \oplus Y$ de kapalı ise A operatörüne *kapalı operatör* denir. $A: X \to Y$ operatörünün grafiğinin kapalı olması

$$(x_n) \subset D(A) \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\{x_n, Ax_n\} = \{x, y\}$$

koşullarından $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ denklemini sağlaması demektir.

Teorem 1.2.51 ([35], s.293): X ve Y iki normlu uzay , $D(A)$, X ' in bir lineer manifoldu ve $A: D(A) \subset X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Bu takdirde A operatörünün kapalı operatör olması için gerek ve yeter şart $(x_n) \subset D(A)$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$ ise $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ olmasıdır.

Örnek 1.2.52 $A: L^2[0,1] \to L^2[0,1]$, $Af = f'$,

$$D(A) = \left\{ f \in L^2[0,1] : f \in AC,\ f' \in L^2[0,1],\ f(0) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanan operatör kapalıdır. Gerçekten, $n = 1, 2, ...$ için $f_n(t) = t^n$ ise $\| f_n \|^2_{L^2[0,1]} = \int_0^1 t^{2n} dt = \dfrac{1}{2n+1} \le 1$ ve $\| Af_n \|^2_{L^2[0,1]} = \int_0^1 n^2 t^{2n-2} dt = \dfrac{n^2}{2n-1} \to \infty$ olup A operatörü sınırsızdır. Şimdi A operatörünün kapalı olduğu gösterilsin. Bunu göstermek için ilk önce $KerA = \{0\}$ ve $R(A) = L^2[0,1]$ olduğu not edilsin. $g \in L^2[0,1]$ için $f(t) = \int_0^1 g(s) ds$ alınsın. Buradan $f \in D(A)$ ve $Af = g$ 'dır. $g \in L^2[0,1]$ için $A^{-1} g = f$ şeklinde tanımlanır.

$$\left| \left(A^{-1} g \right)(t) \right| \le \int_0^1 |g(s)| ds \le \left(\int_0^1 |g(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = \|g\|$$

olup A^{-1} sınırlı lineer operatördür. Buradan

$$\left\| A^{-1} g \right\|^2 = \int_0^1 \left| \left(A^{-1} g \right)(t) \right|^2 dt \le \int_0^1 \|g\|^2 dt = \|g\|^2$$

olup $\left\| A^{-1} \right\| \le 1$ 'dır.

$f_n \in D(A)$ için $f_n \to f$ ve $Af_n \to h \in L^2[0,1]$ için $f_n = A^{-1}$, $Af_n = A^{-1} h$ olarak alındığında $f = A^{-1} h \in D(A)$ ve $Af = h$ 'dır. Dolayısıyla A operatörü kapalıdır.

Tanım 1.2.53 (Kapanabilir Operatör, ([35], s. 537)): $A: X \to Y$ operatörünün $D(A) \subset D(\overline{A})$ ve her $x \in D(A)$ için $Ax = \overline{A}x$ olacak şekilde bir kapalı $\overline{A}$ operatörü varsa A' ya *kapanabilir operatör* ve $\overline{A}$ operatörüne A 'nın *kapanışı* denir.

Örnek 1.2.54 ([39]): $T: D(T) \subset L^2[0,1] \to L^2[0,1]$, $Tf := xf(1)$, $D(T) = C[0,1]$ şeklinde tanımlanan operatör kapalı değil ve kapanışı yoktur. Gerçekten $(f_n),(h_n) \subset C[0,1]$ için $(f_n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{L^2[0,1]}} u(x)$, $(h_n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{L^2[0,1]}} u(x)$ ama $f_n(1) = 1,\ h_n(1) = 0,\ n = 1,2,\cdots$ şeklinde tanımlansın. Bu halde $Tf_n = x,\ Th_n = 0$ olduğundan durum açıktır.

Tanım 1.2.55 (Operatörün Genişlemesi, [13]): X ve Y herhangi iki lineer uzay ve $A: D(A) \subset X \to Y$, $\tilde{A}: D(\tilde{A}) \subset X \to Y$ iki lineer operatör olsun. Eğer

1. $D(A) \subset D(\tilde{A})$ ve
2. $\forall f \in D(A)$ için $Af = \tilde{A}f$

ise $\tilde{A}$ operatörüne A operatörünün bir *genişlemesi* denir.

Tanım 1.2.56 (Adjoint Operatör, ([38], s. 353)): H bir Hilbert uzayı, $A: D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör ve $\overline{D(A)} = H$ olsun. Bu durumda

$$D(A^*) := \{ y \in H : \forall x \in D(A) \text{ için bir } z \in H \text{ vardır, öyleki } (Ax, y)_H = (x, z)_H \}$$

olmak üzere $A^*: D(A^*) \subset H \to H$, $A^* y := z$ şeklinde tanımlanan operatöre A operatörünün *adjoint operatörü* denir $(\{0\} \subset D(A^*))$.

Örnek 1.2.57 ([34], s.183): $H = \ell_2(F)$, $T_c: \ell_2(F) \to \ell_2(F)$, $(c_n) \in \ell_\infty(F)$ ve $T_c(x_n) := (c_n x_n)$ şeklinde tanımlanan operatörün adjointi bulunsun. Bu halde $(x_n),(y_n) \in \ell_2(F)$ ve $\alpha, \beta \in F$ için $\alpha(x_n) + \beta(y_n) \in \ell_2(F)$ olup

$$\begin{aligned} T_c(\alpha(x_n) + \beta(y_n)) &= (c_n(\alpha(x_n) + \beta(y_n))) = (c_n(\alpha(x_n)) + c_n(\beta(y_n))) \\ &= \alpha(c_n x_n) + \beta(c_n y_n) = \alpha T_c(x_n) + \beta T_c(y_n) \end{aligned}$$

bağıntısından T_c operatörünün lineerliği açıktır. Her $(x_n)\in\ell_2(F)$

$$\left\|T_c(x_n)\right\|_{\ell_2}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|c_nx_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le c\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}=c\left\|(x_n)\right\|_{\ell_2},\ c:=\sup_{n\ge1}|c_n|<+\infty$$

olup $T_c\in L(\ell_2(F))$ olduğu açıktır. O halde T_c^* adjoint operatörü var olup her $x=(x_n),\ y=(y_n)\in\ell_2(F)$ için

$$(T_cx,y)_{\ell_2}=\sum_{n=1}^{\infty}c_nx_n\overline{y_n}=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{\left(\overline{c_n}y_n\right)}=\left(x,T_c^*y\right)_{\ell_2}\ \text{ve}\ T_c^*y:=\left(\overline{c_n}y_n\right),\ y=(y_n)\in\ell_2(F)$$

olup $T_c^*=T_{\bar{c}}$.

Örnek 1.2.58: $H=L^2(0,1),\ A:H\to H,\ Af:=f'$,

$$D(A):=\left\{f\in H: f\in AC(0,1),\ f'\in H\ \text{ve}\ f(0)=f(1)=0\right\}$$

olsun. Bu halde $C_0^\infty(0,1)\subset D(A)$ olup $H=\overline{C_0^\infty(0,1)}\subset\overline{D(A)}\subset H$. Buradan $\overline{D(A)}=H$ olduğu açıktır. Şimdi

$$A^*g=-g',\ D(A^*)=\left\{g\in H\cap AC(0,1): g'\in H\right\}$$

olduğu gösterilsin. $g\in D(A^*)$ ve $A^*g=h$ olsun. O halde her $f\in D(A)$ için

$$(Af,g)_{L^2}=\int_0^1 f'(t)\overline{g(t)}dt=\left(f,A^*g\right)_{L^2}=\int_0^1 f(t)\overline{h(t)}dt\,.$$

Ayrıca $f\in D(A)$ olduğundan $f(0)=f(1)=0$ olup

$$\int_0^1 f(t)\overline{h(t)}dt=\int_0^1 f(t)d\overline{\left(\int_0^t h(s)ds+c\right)}=f(t)\overline{\left(\int_0^t h(s)ds+c\right)}\Bigg|_0^1-\int_0^1\overline{\left(\int_0^t h(s)ds+c\right)}f'(t)dt$$

$$=-\int_0^1\left(H(t)+c\right)f'(t)dt,\ H(t)=\int_0^t\overline{h(s)}ds.$$

Yukarıdakilerden $0=\int_0^1\left(\overline{g(t)}+H(t)+c\right)f'(t)dt,\ f\in D(A)$.

Eğer $f_0(t):=\int_0^t \left(\overline{d(s)}+H(s)+c_0\right)ds$ (c_0 sayısı $f_0(1)=0$ bağıntısından bulunur) ise $f_0 \in D(A)$, sonuncu bağıntıda f yerine f_0 alarak

$$0=\int_0^1 \left|\overline{g(t)}+H(t)+c_0\right|^2 dt$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$g(t)=-\overline{H(t)}-c_0=-\int_0^t h(s)ds-\overline{c_0},\ g\in AC(0,1) \text{ ve } g'=-h\in H .$$

Böylece $g\in D(A^*)$ için

$$(Af,g)_{L^2}=(f,-g')=(f,A^*g) \text{ ve } A^*g=-g' .$$

Tanım 1.2.59: H bir Hilbert uzayı, $A: D(A)\subset H\to H$ bir lineer operatör ve A^*, A operatörünün adjoint operatörü olsun.

Eğer $D(A)\subset D(A^*)$ ve her $f\in D(A)$ için $Af=A^*f$, yani

$\forall f,g\in D(A)$ için $(Af,g)_H=(f,Ag)_H$

ise A operatörüne *simetrik operatör* denir ve $A\subset A^*$ sembolüyle gösterilir ([38], s.358).

Eğer $D(A)=D(A^*)$ ve her $f\in D(A)$ için $Af=A^*f$ ise A operatörüne *self-adjoint operatör* denir ([38], s.359).

Eğer H Hilbert uzayında lineer kapalı bir A operatörü için

(i) $D(A)\subset D(A^*)$ ve

(ii) Her $f\in D(A)$ için $\|Af\|_H=\|A^*f\|_H$

ise A'ya H'da *formal normal operatör* adı verilir.

Eğer A, H Hilbert uzayında formal normal ve $D(A)=D(A^*)$ ise A operatörüne H'da *normal operatör* denir ([38], s.379).

Eğer her $f \in H$ için $AA^* f = A^* A f = f$ ise A operatörüne *üniter operatör* denir ([38], s.364).

Örnek 1.2.60 ([34], s.179): : Her $f \in C[0,1]$ için $T_f \in L\left(L^2[0,1]\right)$ operatörü $\left(T_f g\right)(t) := f(t) g(t)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda reel değerli $f \in C[0,1]$ için T_f özeşlenik operatördür. Gerçekten; her $g, h \in L^2[0,1]$ için

$$\left(T_f g, h\right)_{L^2[0,1]} = \int_0^1 f(t) g(t) \overline{h(t)} dt = \int_0^1 g(t) \overline{\overline{f(t)} h(t)} dt = \left(g, T_{\overline{f}} h\right)_{L^2[0,1]}$$

olup $\left(T_f\right)^* = T_{\overline{f}}$ olduğu bulunur. $f \in C[0,1]$ fonksiyonu reel değerli olduğundan $f = \overline{f}$ olup $\left(T_f\right)^* = T_f$ eşitliği elde edilir.

Örnek 1.2.61 ([34], s.176): Her $f \in C[0,1]$ için $T_f \in L\left(L^2[0,1]\right)$ operatörü $\left(T_f g\right)(t) := f(t) g(t)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda T_f operatörü bir normal operatördür.

Gerçekten, Örnek 1.2.60'den her $f \in C[0,1]$ için $\left(T_f\right)^* = T_{\overline{f}}$ olduğu bilinir. O halde her $g \in L^2[0,1]$ için

$$\left(T_f \left(T_f\right)^*\right)(g) = T_f\left(T_{\overline{f}}(g)\right) = T_f\left(\overline{f} g\right) = f \overline{f} g$$

ve

$$\left(\left(T_f\right)^* T_f\right)(g) = T_{\overline{f}}\left(T_f(g)\right) = T_{\overline{f}}(fg) = \overline{f} fg = f \overline{f} g$$

olup $T_f \left(T_f\right)^* = \left(T_f\right)^* T_f$ ve buradan da T_f operatörünün normal bir operatör olduğu bulunur.

Örnek 1.2.62: $A : D(A) \subset L^2[0,1] \to L^2[0,1]$, $Au := u'(t) + au(t)$, $a \in \mathbb{R}$,

$$D(A) := \left\{u \in W_2^1(0,1) : u(0) = u(1)\right\}$$

şeklinde tanımlanan operatör bir normal operatördür.

Gerçekten, bu durumda

$$A^*v = -v'(t) + av(t),$$
$$D(A^*) = \{u \in W_2^1(0,1) : u(0) = u(1)\}$$

olup $D(A) = D(A^*)$ ve her $u(t) \in L^2[0,1]$ için

$$\|Au\|_{L^2[0,1]} = \|u' + au\|_{L^2[0,1]} = \|-u' + au\|_{L^2[0,1]} = \|A^*u\|_{L^2[0,1]},$$

yani, A normaldir.

Örnek 1.2.63 ([34], s.177): $S_r : \ell_2 \to \ell_2$, $S_r(x_n) = (x_{n-1}) = (0, x_1, x_2, ...)$ sağa öteleme operatörü normal bir operatör değildir. Gerçekten; her $(y_n) \in \ell_2$ için $S_r^*(y_1, y_2, y_3, ...) = (y_2, y_3, y_4, ...) = S_l$ olduğu bilinir. O halde her $(x_n) \in \ell_2$ için

$$S_r^*(S_r(x_1, x_2, x_3, ..)) = S_l(S_r(x_1, x_2, x_3, ..)) = S_l(0, x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, x_3, ..)$$

ve

$$S_r(S_r^*(x_1, x_2, x_3, ..)) = S_r(S_l(x_1, x_2, x_3, ..)) = S_r(x_2, x_3, x_4 ...) = (0, x_2, x_3, ..)$$

olup $S_r^* S_r \neq S_r S_r^*$, yani sağa öteleme operatörü normal değildir. Benzer şekilde sola öteleme operatörünün de normal olmadığı gösterilebilir.

Örnek 1.2.64: $P : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$, $Pu(t) = u(\alpha t)$, $0 < \alpha < 1$ şeklinde tanımlanan operatör bir normal operatördür. Gerçekten bu durumda, $P^* : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$,

$$P^*v = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} v\left(\dfrac{1}{\alpha} t\right), & 0 < t < \alpha, \\ 0 & , \alpha < t < 1 \end{cases}$$

olduğu açıktır. Bu halde her $u(t) \in L^2(0,1)$ için

$$\left(P(P^*)\right)u(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} u(t), & 0 < t < \alpha, \\ 0 & , \alpha < t < 1 \end{cases}$$

ve

$$\left(P^*\left(P\right)\right)u\left(t\right)=P^*\left(u\left(\alpha t\right)\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}u\left(t\right), & 0<t<\alpha,\\ 0 & ,\ \alpha<t<1\end{cases}$$

olup $P^*P=PP^*$, yani P normaldir.

Ayrıca P dönüşümü sınırlı lineer bir dönüşüm olup $\|P\|=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Gerçekten; P dönüşümünün lineer bir dönüşüm olduğu açıktır. Her $u\in L^2\left(0,1\right)$ için

$$\|Pu\|^2=\int_0^1\left|u\left(\alpha t\right)\right|^2dt=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\left|u\left(s\right)\right|^2ds\le\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left|u\left(s\right)\right|^2ds=\frac{1}{\alpha}\|u\|^2$$

olduğundan $\|Pu\|\le\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\|u\|$ bağıntısı elde edilir. O halde $P:L^2\left(0,1\right)\to L^2\left(0,1\right)$ dönüşümü sınırlı olup $\|P\|\le\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ şeklindedir. Diğer taraftan

$$\|P\|:=\sup\left\{\frac{\|Pu\|_{L^2(0,1)}}{\|u\|_{L^2(0,1)}}:u\in L^2\left(0,1\right)\text{ ve }u\ne\theta_{L^2(0,1)}\right\}$$

olduğundan

$$u_*\left(t\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}, & 0\le t\le\alpha\\ 0 & ,\ \alpha<t\le 1\end{cases}$$

olarak alınırsa $u_*\left(t\right)\in L^2\left(0,1\right)$ olup $\dfrac{\|Pu_*\left(t\right)\|_{L^2(0,1)}}{\|u_*\left(t\right)\|_{L^2(0,1)}}=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ bulunur. Bu halde $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\le\|P\|$ bağıntısı elde edilir. Sonuç olarak $\|P\|\le\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ ve $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\le\|P\|$ eşitsizliklerinden $\|P\|=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ olarak bulunur.

Tanım 1.2.65 (Rezolvent Küme, ([35], s. 371)): H bir Hilbert uzayı ve $A:D\left(A\right)\subset H\to H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in L(H)\right\}$$

kompleks sayılar kümesine A operatörünün *rezolvent kümesi* denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) := (A - \lambda E)^{-1}$ operatörüne A operatörünün *rezolvent operatörü* (veya *çözücü operatörü*) adı verilir.

Tanım 1.2.66 (Spektrum, ([35], s. 371)): H bir Hilbert uzayı olsun. $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$ kümesine A operatörünün *spektrumu* denir. A operatörünün spektrum kümesi $\sigma(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.67 (Ayrık Spektrum, ([35], s. 371)):

$$\sigma_p(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E) \text{ operatörü bire bir değil}\right\}$$

kümesine A operatörünün *ayrık* veya *diskret spektrumu* denir. Eğer $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$ ise

$$(A - \lambda_0 E)x_0 = 0$$

denkleminin $x_0 \neq 0$ çözümü vardır. Buradaki λ_0 'a A operatörünün *özdeğeri*, x_0 ' a ise λ_0 özdeğerine uygun bir *özvektörü* denir.

Tanım 1.2.68 (Sürekli Spektrum, ([35], s. 371)):

$$\sigma_c(A) : \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E) \text{ bire bir, } \overline{R(A - \lambda E)} = H, \text{fakat } R(A - \lambda E) \neq H\right\}$$

kümesine A operatörünün *sürekli spektrumu* denir.

Tanım 1.2.69 (Kalan Spektrum, ([35], s. 371)):

$$\sigma_r(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E) \text{ bire bir, } \overline{R(A - \lambda E)} \neq H\right\}$$

kümesine A operatörünün *kalan spektrumu* denir.

$\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ ve $\sigma_r(A)$ kümeleri ayrıktır. Ayrıca spektrumun tanımından $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 1.2.70 ([38], s.299): Eğer A lineer operatörü sonlu boyutlu X lineer uzayında tanımlı bir operatör ise $\sigma_c(A)=\varnothing$ ve $\sigma_r(A)=\varnothing$.

Teorem 1.2.71 ([38]): H bir Hilbert uzay, $A\in L(H)$ olsun.

(a) Eğer $A=A^*$ ise $\sigma_r(A)=\varnothing, \sigma(A)\subset\left[-\|A\|,\|A\|\right]$,

(b) Eğer A normal bir operatör ise $\sigma_r(A)=\varnothing$.

Teorem 1.2.72 ([35], s.390): H bir Hilbert uzayı olmak üzere $A\in L(H)$ ise $\sigma(A)\neq\varnothing$.

Örnek 1.2.73 ([40], s.223): $H=L^2(0,1)$ uzayında $A:L^2(0,1)\to L^2(0,1)$ $Af(x)=\int_0^1 min(x,y)\,f(y)\,dy$ şeklinde tanımlanan operatörün spektrumu ve spektral yarıçapı bulunsun. Bu halde her $f\in L^2(0,1)$ için A operatörü

$$Af(x)=\int_0^1 min(x,y)\,f(y)\,dy=\int_0^x yf(y)\,dy+x\int_x^1 f(y)\,dy$$

şeklinde yazılabilir. İlk önce A operatörünün noktasal spektrumu incelensin. $\lambda\in\mathbb{C}$ için $Af(x)=\lambda f(x),\ f\in L^2(0,1)$ denkleminin çözümü bulunsun. Bu halde

$$\int_0^x yf(y)\,dy+x\int_x^1 f(y)\,dy=\lambda f(x)$$

denklemini çözmek için her iki tarafın türevi alınırsa

$$xf(x)+\int_x^1 f(y)\,dy-xf(x)=\lambda f'(x)$$

denklemi, yani

$$\int_x^1 f(y)\,dy=\lambda f'(x)$$

eşitliği elde edilir. Bulunan denklemin tekrar her iki tarafının türevi alınırsa

$$-f(x)=\lambda f''(x)$$

olduğu bulunur. Burada eğer $\lambda=0$ ise $f=0$ bulunur. Yani $\lambda=0\notin\sigma_p(A)$.

Şimdi $\lambda\neq 0,\ \lambda\in\mathbb{C}$ olduğu kabul edilsin. O halde yukarıdaki yapılan işlemlerden bakılan problem

$$\begin{cases} f''(x)=-\dfrac{1}{\lambda}f(x),\ f\in L^2(0,1),\ \lambda\in\mathbb{C} \\ f(0)=f'(1)=0 \end{cases}$$

sınır değer problemine dönüşür. Bu denklemin çözümü

$$f(x)=c_1e^{\frac{-i}{\sqrt{\lambda}}x}+c_2e^{\frac{i}{\sqrt{\lambda}}x},\ x\in[0,1]$$

şeklindedir. $f(0)=0$ ve $f'(1)$ sınır değerleri kullanılırsa $c_1+c_2=0$ ve $c_1\dfrac{i}{\sqrt{\lambda}}\left(e^{\frac{i}{\sqrt{\lambda}}}+e^{\frac{-i}{\sqrt{\lambda}}}\right)=0,$

buradan da $e^{\frac{2i}{\sqrt{\lambda}}}=-1$ olduğu elde edilir. Son eşitlikten $\dfrac{2i}{\sqrt{\lambda}}=ln1+iarg(-1)+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$ ve

buradan da $\dfrac{2i}{\sqrt{\lambda}}=(2k+1)\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$ olduğu görülür.

Bu sonuncudan ise A ’nın özdeğerlerinin

$$\lambda_k=\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}=\frac{1}{(k+1/2)^2\pi^2},\ k\in\mathbb{Z}$$

şeklinde olduğu bulunur, yani

$$\sigma_p(A)=\left\{\frac{1}{(k+1/2)^2\pi^2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$$

elde edilir. $A:L^2(0,1)\to L^2(0,1),\ A\in C_\infty\left(L^2(0,1)\right)$ ve $dimL^2(0,1)=+\infty$ [40] olduğundan A^{-1} sınırlı olamaz ([34], s.208). Ayrıca $0\notin\sigma_p(A)$ ve $\sigma_r(A)=\varnothing$ [38] olduğundan $0\in\sigma_c(A)$. Sonuç olarak A operatörünün spektrumunun

$$\sigma(A)=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{(k+1/2)^2\pi^2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$$

şeklinde olduğu bulunur. Diğer taraftan, A operatörünün özdeğerlerinin en büyüğü $k=0$ için $4/\pi^2$ olup $r_\sigma(A)=4/\pi^2$'dir.

Örnek 1.2.74: $H=L^2(0,1)$ uzayında $V:L^2(0,1)\to L^2(0,1),\ Vf(x)=\int_0^x f(t)dt,\ f\in L^2(0,1)$ lineer sınırlı V operatörünün spektrumu $\sigma(V)=0$ şeklindedir. Gerçekten, bir $\lambda\in\mathbb{C}$ için $(V-\lambda E)f=g,\ f,g\in L^2(0,1)$ spektrum problemine bakılsın. İlk olarak,

(a) $g=0$, $\lambda\neq 0$ durumu incelensin. Bu durumda problem $(V-\lambda E)f=0$ şeklinde olup buradan

$$\int_0^x f(t)dt=\lambda f(x),\ f\in L^2(0,1)$$

şeklindedir. Bu integral denklem

$$\begin{cases} f(x)=\lambda f'(x)\ \lambda\ h.h.y \\ f(0)=0 \end{cases}$$

diferensiyel denklem olan sınır-değer problemine dönüşür. Son eşitlikten

$$f'(x)=\frac{1}{\lambda}f(x)\quad \lambda-h.h.y$$

olup buradan ise $f(x)$ çözümü

$$f(x)=e^{\frac{1}{\lambda}x}c$$

şeklinde olur. Burada $f(0)=0$ sınır değer şartı yerine yazılırsa $f(x)=0\ \lambda\, h.h.y$ bulunur. Bu $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda\neq 0$ sayısının özdeğer olamayacağı anlamına gelir. Şimdi

$(b)\, g=0$, $\lambda=0$ durumu incelensin. Bu halde $Vf=0$ olup

$$\int_0^x f(t)\,dt = 0,\ f \in L^2(0,1)$$

olur. Buradan $f(x) = 0\ \lambda\, h.h.y$ olduğu bulunur. Bu ise $\lambda = 0$ sayısının özdeğer olamayacağı anlamına gelir. Böylece (a) ve (b) durumlarından $\sigma_p(V) = \varnothing$ olduğu elde edilir.

(c) $g \neq 0$, $\lambda \neq 0$ durumu ele alınsın. Bu durumda $(V - \lambda E) f = g,\ f, g \in L^2(0,1)$, yani

$$\int_0^x f(t)\,dt - \lambda f(x) = g(x),\ f, g \in L^2(0,1)$$

olur. Burada $h(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ alınırsa integral denklemi diferensiyel denklemine dönüşür. Bu denklemin genel çözümü

$$h(x) = e^{\frac{1}{\lambda}x} c - \frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-s)} g(s)\,ds$$

şeklindedir. $h(0) = 0$ olduğundan $c = 0$ olup buradan

$$h(x) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-s)} g(s)\,ds$$

eşitliği doğrudur. $h(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ olduğundan

$$(V - \lambda E)^{-1} g(x) = f(x) = h'(x) = \left(-\frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-s)} g(s)\,ds\right)' = -\frac{1}{\lambda} g(x) - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-s)} g(s)\,ds$$

çözümü elde edilir. Son eşitlikten $R_\lambda(V) = (V - \lambda E)^{-1}$'in var olduğu ve $(V - \lambda E)^{-1} \in L\left(L^2(0,1)\right)$ olduğu elde edilir. Sonuç olarak $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \rho(V)$ olup $\sigma(V) = \{0\}$ şeklindedir.

(d) $g \neq 0$, $\lambda = 0$ durumunda ise $0 \in \sigma_c(V)$ olduğu açıktır. Böylece $\sigma(V) = \sigma_c(V) = \{0\}$ bulunur. Bu durumda $r_\sigma(V) = 0$ şeklindedir.

Örnek 1.2.75: $H = L^2(0,1)$ uzayında ve $A_i : D(A_i) \subset L^2(0,1) \to L^2(0,1),\ i = 1,...,4$ operatörü için

(1) $A_1 u := u' + au,\ D(A_1) = \overset{0}{W}{}_2^1(0,1),\ a \in \mathbb{R};$

(2) $A_2 u := u' + au,\ D(A_2) = \{u \in W_2^1(0,1) : u(0) = 0\},\ a \in \mathbb{R};$

(3) $A_3 u := u' + au,\ D(A_3) = \{u \in W_2^1(0,1) : u(0) = u(1)\},\ a \in \mathbb{R};$

(4) $A_4 u := u' + au,\ D(A_4) = W_2^1(0,1),\ a \in \mathbb{R}$

operatörlerinin spektrumları bulunsun.

(1) Her $u(t) \in \overset{0}{W}{}_2^1$ için

$$\begin{aligned}
\left(u' + au - \lambda u, e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L^2(0,1)} &= \left(u', e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L^2(0,1)} + \left(u, (a-\bar{\lambda})e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L^2(0,1)} \\
&= \left(u, e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)'_{L^2(0,1)} - \left(u, (a-\bar{\lambda})e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L^2(0,1)} + \left(u, (a-\bar{\lambda})e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L^2(0,1)} \\
&= \left(u(1), e^{(a-\bar{\lambda})}\right)_{L^2(0,1)} - \left(u(0), 1\right)_{L^2(0,1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $R(A_1 - \lambda E) \perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$ ve buradan $\overline{R(A_1 - \lambda E)} \perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$ bulunur. Başka bir deyişle, $\overline{R(A_1 - \lambda E)} \neq L_2(0,1)$. Sonuncu ve kalan spektrumunun tanımına göre

$$\sigma(A_1) = \sigma_r(A_1) = \mathbb{C}\,.$$

(2) Bu durumda $\lambda \in \mathbb{C}$ için $A_2 u = u' + au = \lambda u + f,\ f \in L^2(0,1)$ denkleminin genel çözümü

$$u(t) = ce^{(\lambda - a)t} + \int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)} f(s)\,ds$$

şeklinde olup $u(0) = 0$ sınır değer koşulundan $c = 0$ bulunur. Öyleyse, her $\lambda \in \mathbb{C}$ ve her $f \in L^2(0,1)$ için $(A_2 - \lambda)u = f$ denkleminin

$$u(t)=R_\lambda(A_2)f(t)=\int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)}f(s)ds\in W_2^1(0,1)$$

şeklinde bir tek çözümü vardır, yani her $\lambda\in\mathbb{C}$ için $(A_2-\lambda)^{-1}\in L(L^2(0,1))$. Başka bir ifadeyle $\sigma(A_2)=\varnothing,\ \rho(A_2)=\mathbb{C}$.

(3) $\lambda\in\mathbb{C}$ için $A_3u=u'+au=\lambda u,\ u\in D(A_3)$ denkleminin çözüm kümesi

$$u_\lambda(t)=ce^{-(a-\lambda)t},\ c\in\mathbb{C},\ 0\le t\le 1$$

şeklindedir. Ayrıca $u_\lambda\in W_2^1(0,1)$ olup $u(0)=u(1)$ sınır değerlerini kullanılırsa $c=ce^{-(a-\lambda)}$ olduğu elde edilir. Buradan $c\left(1-e^{-(a-\lambda)}\right)=0$ olup $c\neq 0$ için $1=e^{-(a-\lambda)}$'dır. Buradan ise $\lambda-a=2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$ olduğu bulunur. Sonuncu ve noktasal spektrumun tanımından

$$\sigma_p(A_3)=\{a+2k\pi i:k\in\mathbb{Z}\}.$$

Örnek 1.2.62'den $A_3:D(A_3)\subset L^2(0,1)\to L^2(0,1)$ operatörü normal olup Teorem 1.2.71'den bu operatörün kalan spektrumu $\sigma_r(A_3)=\varnothing$ [38].

$\lambda\neq\lambda_k=a+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$ alınsın.

$$A_3u=\lambda u+f,\ u(t),f(t)\in L^2(0,1)$$

denkleminin çözüm kümesi

$$u(t)=ce^{-(a-\lambda)t}+\int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)}f(s)ds,\ c\in\mathbb{C}$$

şeklindedir. $u(0)=u(1)$ sınır değerleri kullanılırsa

$$c=\left(1-e^{(\lambda-a)}\right)^{-1}\int_0^1 e^{(\lambda-a)(1-s)}f(s)ds$$

olup

$$R_\lambda f(t)=\left(1-e^{(\lambda-a)}\right)^{-1}\int_0^1 e^{(\lambda-a)(1+t-s)}f(s)\,ds+\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds,\ f\in L^2(0,1)$$

yani

$$R_\lambda f(t)=\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds+\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_t^1 e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi $R_\lambda f(t)\in L\left(L^2(0,1)\right)$ olduğu gösterilsin.

$$\|R_\lambda f(t)\|^2=\int_0^1\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds+\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_t^1 e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds\right|^2dt$$

$$\le 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds\right|^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_t^1 e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds\right|^2\right)dt$$

$$\le 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_0^t\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\right|ds\right)^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_t^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\right|ds\right)^2\right)$$

$$\le 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\right|ds\right)^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\right|ds\right)^2\right)dt$$

(Cauchy-Bunyokowski Eşitsizliğinden)

$$\le 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}\right|^2ds\int_0^1|f(s)|^2\,ds+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}\right|^2ds\int_0^1|f(s)|^2\,ds\right)dt$$

$$\le 2\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\right)\int_0^1\left(\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}\right|^2ds\right)dt\,\|f(t)\|^2$$

$$\le 2\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\right)\left(\frac{e^{2|a-\lambda|}-1}{2|a-\lambda|}\right)^2\|f(t)\|^2$$

Bu halde $c_\lambda := \left(2\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2 + 2\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e^{2|\lambda-a|}-1}{2|\lambda-a|}\right)$ olarak seçildiğinde

$\|R_\lambda f(t)\| \le c_\lambda \|f(t)\|$ elde edilir. Böylece eğer $\lambda \ne \lambda_k,\ k \in \mathbb{Z}$ ise $\lambda \in \rho(A_3)$. Sonuç olarak

$$\sigma(A_3) = \{a + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}.$$

(4) Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$A_4 u = u' + au = \lambda u,\ u \in W_2^1(0,1)$$

denkleminin çözüm kümesi

$$u(t) = ce^{(\lambda-a)t}$$

şeklinde olup her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $A_4 u = \lambda u$ denkleminin $u \ne 0,\ u \in W_2^1(0,1)$ şeklinde çözümü vardır. Sonuncu ve noktasal spektrum tanımına göre $\sigma(A_4) = \sigma_p(A_4) = \mathbb{C}$.

Tanım 1.2.76 (Hilbert Uzaylarının ve Operatörlerinin Direkt Toplamı, ([41], s.256)): $H_n,\ n \ge 1$ Hilbert uzaylarının sonsuz direkt toplamı ve $H_n,\ n \ge 1$ Hilbert uzayı üzerinde lineer yoğun tanımlı kapalı $A_n : D(A_n) \subset H_n \to H_n,\ n \ge 1$ operatörlerin sonsuz direkt toplamı sırasıyla

$$H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n = \left\{ u = (u_n) : u_n \in H_n,\ n \ge 1,\ \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{H_n}^2 < \infty \right\},$$

$$A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n,\ A : D(A) \subset H \to H,$$

$$D(A) = \{ u = (u_n) \in H : u_n \in D(A_n),\ n \ge 1,\ Au = (A_n u_n) \in H \}$$

şeklinde tanımlanır. Bu halde H,

$$(u,v)_H = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n, v_n)_{H_n}$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır [41].

Örneğin; $H_n := \left(\mathbb{C}, |\cdot|\right)$, $n \geq 1$ olmak üzere

$$H = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mathbb{C} = \left\{ (u_n) : u_n \in \mathbb{C},\ n \geq 1 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \right\} = \ell_2$$

şeklindedir. Ayrıca eğer

$$A_n : H_n \to H_n\ ,\ A_n u_n := \alpha_n u_n\ ,\ n \geq 1\ , \alpha_n \in \mathbb{C},\ \alpha = \sup_{n \geq 1} |\alpha_n| < \infty$$

olmak üzere

$$A : \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n \to \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n\ ,\ A = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} A_n$$

olsun. Bu halde

$$v := Au, (v_n) = \left((Au)n\right) = (\alpha_n u_n),\ n \geq 1$$

olup her $u \in H$ için

$$\|Au\|_H = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |u_n|^2 \right)^{1/2} \leq \alpha \|u\|_H$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$A : \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n \to \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} H_n$$

operatörü sınırlı bir operatördür.

Tanım 1.2.77 (Çok Noktalı Diferensiyel Operatör, ([42])) : Özel bir durumda $L^2[a,b]$ uzayında tanımlı çok noktalı lineer diferensiyel operatörün tanımı verilsin.

$$\tau := \sum_{i=0}^{n} a_i(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^i ,$$

burada $a_i : [a,b] \to \mathbb{R},\ a_i \in C^{\infty}[a,b],\ i = 1, 2, \cdots, n$ ve $[a,b]$ üzerinde $a_n(\cdot) \neq 0$ olsun.

$\pi = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b\}, [a,b]$'nin bir parçalanışı olsun. S reel $L^2[a,b]$ Hilbert uzayını göstermek üzere,

$$H^n([a,b]) := \left\{ f(t) \in S : f \in C^{n-1}[a,b],\, f^{(n-1)} \in AC[a,b],\, f^{(n)} \in S \right\}.$$

$H^n(\pi)$ ile aşağıdaki iki şartı sağlayan bütün $f(t) \in S$ fonksiyonların kümesi gösterilsin:

1. $f(t) \in S$ fonksiyonu her bir $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, m$ alt aralığında x_{i-1} ve x_i uç noktalarında sırasıyla sağ ve sol limitlere sahiptir. $i = 1, 2, \cdots, m$ için $f_i(t) = f(t)$, $x_{i-1} < t < x_i$, $f_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1}^+)$ ve $f_i(x_i) = f(x_i^-)$ şeklinde $[x_{i-1}, x_i]$ üzerinde f_i fonksiyonu tanımlansın. $f_1, f_2, \cdots, f_m$ fonksiyonlarına f ’nin *bileşenleri* denir ve $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ şeklinde yazılır.

2. $i = 1, \cdots, m$ için f_i bileşenleri $H^n[x_{i-1}, x_i]$’ye aittir. $H^n(\pi)$, $H^n[a,b]$’yi içeren S ’nin lineer bir alt uzayıdır ve keyfi $f(t) \in H^n(\pi)$ için $\tau f(t) \in S.$

Şimdi $H^n(\pi)$ üzerinde aşağıdaki şekilde bir lineer çok noktalı sınır değer fonksiyoneli tanımlansın:

$$B(f) := \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\alpha_{jl} f_l^{(j)}(x_{l-1}) + \beta_{jl} f_l^{(j)}(x_l) \right],\ f = (f_1, f_2, \cdots, f_m) \in H^n(\pi)$$

burada, $j = 0, 1, \cdots, n-1,\ l = 1, 2, \cdots, m$ için $\alpha_{jl}, \beta_{jl} \in \mathbb{R}$. Bu şekildeki bütün sınır değerler uzayı $2mn$ boyutlu lineer uzaydır.

Burada

$$B_i(f) := \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\alpha_{ijl} f_l^{(j)}(x_{l-1}) + \beta_{ijl} f_l^{(j)}(x_l) \right],\ i = 1, 2, \cdots, k$$

şeklinde k-tane lineer bağımsız çok noktalı sınır değer fonksiyonellerin kümesi verilmiş olsun. S uzayı üzerinde

$$L : \mathfrak{D}(L) \subset S \to S,\ Lf = \tau f,\ \mathfrak{D}(L) := \left\{ f \in H^n(\pi) : B_i(f) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, k \right\}$$

şeklinde tanımlanan L lineer operatörüne *çok noktalı lineer diferensiyel operatör* denir.

Sayılabilir sonsuz sayıda alt aralıklar durumunda da çok noktalı diferensiyel operatör tanımı benzer şekilde verilebilir [43].

Tanım 1.2.78 ([44], s.49) : $l(y)=(-1)^n\left(p_0y^{(n)}\right)^{(n)}+(-1)^{n-1}\left(p_1y^{(n-1)}\right)^{(n-1)}+\cdots+p_ny$ bir diferensiyel ifade olsun. Burada $p_{n-k}(x),\ x\in(a,b),\ k=0,1,\cdots,n\quad k.$ mertebeden türevlere sahip Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlardır. Eğer (a,b) aralığı sonlu ve $1/\,p_0(x),\ p_1(x),\cdots,p_n(x)$ fonksiyonları (a,b) aralığı üzerinde Lebesgue integrallenebilirse $l(\cdot)$' ye *regüler diferensiyel ifade*, diğer durumlarda *singüler diferensiyel ifade* denir.

Tanım 1.2.79 (Evolüsyon Operatörler Ailesi, Cauchy Operatörü, ([12], s.147)): J sonlu veya sonsuz bir aralık, $A(\cdot)$ bir operatör-fonksiyon olmak üzere

$$\frac{dX(t)}{dt}=A(t)X(t),$$
$$X(\tau)=E,\ \tau\in J$$

diferensiyel-operatör denklemi için bakılan başlangıç değer probleminin $X(t)=U(t,\tau),\ t,\tau\in J$ operatör çözümüne

$$\frac{d}{dt}=A(t),\ t\in J$$

diferensiyel denklemine karşılık gelen *evolüsyon operatörler ailesi* denir. Ayrıca $U(t)=U(t,0),\ t\in J$ operatörüne *Cauchy operatörü* denir.

Tanım 1.2.80 (Minimal Operatör, Maksimal Operatör, ([45])): $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ bir bölge ve $l(\cdot)=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha D^\alpha$ olsun. Burada, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n),\ D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}...D_n^{\alpha_n},\ D_k=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k},$ $1\le k\le m,\ |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m$ ve $a_\alpha=a_\alpha(x),\ x=(x_1,x_2,...,x_n)$ şeklinde bir diferensiyel ifade olsun. Ayrıca $l^+(\cdot)$ ifadesi $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesinin $L^2(\Omega)$ Hilbert uzayındaki iç çarpıma göre formal eşleniği olsun. Bu durumda

$$L_0'u=l(u),\ u\in C_0^\infty(\Omega),$$
$$L_0':C_0^\infty(\Omega)\subset L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$$

ve

$$L_0^{+\prime} u = l^+(v),\ v \in C_0^\infty(\Omega),$$
$$L_0^{+\prime} : C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

şeklinde tanımlanan operatörlerin $L^2(\Omega)$ uzayında kapanışları sırasıyla $L_0 = \overline{L}_0'$ ve $L_0^+ = \overline{L}_0^{+\prime}$ olsun. Bu halde $L_0 : D(L_0) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ operatörüne $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesinin $L^2(\Omega)$ uzayında doğurduğu *minimal operatör*, $L := (L_0^+)^*$ operatörüne ise *maksimal operatör* denir. Görüldüğü gibi $L_0 \subset L,\ L_0^+ \subset L\left(L^+ = L_0^*\right)$.

Örnek 1.2.81: $L^2(0,1)$ Hilbert uzayında

$$l(u) = u'(t)$$

şeklinde basit bir diferensiyel ifadeye bakılsın. Bu halde

$$l^+(v) = -v'(t)$$

olup

$$L_0 : \overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1 \subset L^2(0,1) \to L^2(0,1),\ L_0 u = u'(t),\ u \in \overset{0}{\mathrm{W}}{}_2^1$$
$$L_0^+ : W_2^1(0,1) \subset L^2(0,1) \to L^2(0,1),\ L_0^+ v = -v'(t),\ v \in W_2^1(0,1).$$

Ayrıca $l(\cdot)$'nın $L^2(0,1)$ uzayında doğurduğu maksimal operatör ise $L : W_2^1(0,1) \subset L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ şeklindedir.

Tanım 1.2.82: Bu tez çalışması boyunca $l(u) = u'(t) + a(t)u(\alpha t),\ \ 0 < \alpha \neq 1 < \infty,\ \ 0 < T \leq \infty$ ve $l(u) = u'(t) + a(t)u(\alpha(t)),\ \ \alpha \in C[0,T],\ \ 0 \leq T \leq \infty$ şeklindeki ifadelere sırasıyla *birinci mertebeden pantograf tipli gecikmeli diferensiyel ifade* ve *birinci mertebeden fonksiyonel diferensiyel ifade* denilecektir.

Bu diferensiyel ifadelerin, örneğin, vektör fonksiyonların Hilbert uzayında başlangıç veya sınır değer koşulları ile ürettikleri operatörlere sırasıyla *birinci mertebeden pantograf tipli gecikmeli diferensiyel operatör* ve *birinci mertebeden fonksiyonel diferensiyel operatör* denilecektir.

Örneğin,

$$l_p(u) = u'(t) + u\left(t/2\right), \; 0 < t < \infty,$$
$$l_f(u) = u'(t) + u(lnt), \; 0 < t < \infty$$

ifadeleri sırasıyla pantograf tipli gecikmeli diferensiyel ifade ve pantograf tipli fonksiyonel diferensiyel ifade olur. Ayrıca

$$L_p : \begin{cases} l_p(u) = f(t), \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

ve

$$L_f : \begin{cases} l_f(u) = f(t), \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

diferensiyel ifadelerin $L^2(0,\infty)$ Hilbert uzayında doğurduğu operatörlerine ise sırasıyla birinci mertebeden pantograf tipli gecikmeli diferensiyel operatör ve birinci mertebeden fonksiyonel diferensiyel operatör denir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. ST-1 Durumunda Sınırlı Tersinir Genişlemelerinin Gösterimi ve Spektrum Yapısı

Bu bölümde vektör-fonksiyonların $L^2(H,(0,1))$ Hilbert uzayında

$$l(u) = u'(t) + \sum_{m=1}^{n} A_m(t) u(\alpha_m t) \tag{2.1.1}$$

şeklinde gösterilecek birinci mertebeden lineer pantograf tipli gecikmeli diferensiyel-operatör ifadesi ele alınacaktır. Burada:

(1) H , $(\cdot,\cdot)_H$ iç çarpımı ve $\| \cdot \|_H$ normu ile bir ayrılabilir Hilbert uzayı;

(2) Her $m = 1,2,...,n$ için $A_m : [0,1] \to L(H)$ operatör-fonksiyonu düzgün operatör topolojisinde sürekli;

(3) Her $m = 1,2,...,n-1$ için $0 < \alpha_m < 1$ ve $\alpha_n = 1$ şeklindedir.

Ayrıca $L^2(H,(0,1))$ uzayında $(2.1.1)$ diferensiyel ifadesine karşılık gelen

$$m(u) = u'(t) \tag{2.1.2}$$

diferensiyel ifadesine de bakılacaktır.

Bu halde $(2.1.2)$ diferensiyel ifadesinin $L^2(H,(0,1))$ uzayındaki formal adjoint ifadesi

$$m^+(v) = -v'(t) \tag{2.1.3}$$

şeklinde olacaktır.

Şimdi vektör-fonksiyonların

$$D_0' := \left\{ u(t) \in L^2(H,(0,1)) : u(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) f_k,\ \varphi_k(t) \in C_0^\infty(0,1),\ f_k \in H,\ k = 1,2,...,n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında yoğun lineer manifoldu üzerinde

$$M_0'u := m(u),\ u \in D_0'$$

şeklinde bir $M_0' : D_0' \subset L^2\left(H,(0,1)\right) \to L^2\left(H,(0,1)\right)$ operatörü tanımlansın.

M_0' operatörünün $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayındaki kapanışına $(2.1.2)$ diferensiyel-operatör ifadesi tarafından üretilen minimal operatör denir ve M_0 ile gösterilir, yani $M_0 = \overline{M_0'}$.

Benzer şekilde $(2.1.3)$ diferensiyel-operatör ifadesinin $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayı üzerinde ürettiği M_0^+ minimal operatörü de tanımlanabilir.

$M_0^+\left(M_0\right)$ operatörünün $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayındaki adjointine $(2.1.2)$ $\left((2.1.3)\right)$ ifadesinin ürettiği maksimal operatörü denir ve $M\left(M^+\right)$ ile gösterilir. Yani, $M = \left(M_0^+\right)^*, M^+ = \left(M_0\right)^*$. Ayrıca $M_0 \subset M,\ M_0^+ \subset M^+$ olduğu açıktır.

Şimdi her $m = 1,2,...,n$ için

$$P_{\alpha_m}u(t) = u(\alpha_m t),\ u \in L^2\left(H,(0,1)\right)$$

şeklinde $P_{\alpha_m} : L^2\left(H,(0,1)\right) \to L^2\left(H,(0,1)\right)$ operatörü tanımlansın.

Bu halde, her $m = 1,2,...,n$ ve $u \in L^2\left(H,(0,1)\right)$ için

$$\begin{aligned}
\left\|P_{\alpha_m}u\right\|^2_{L^2(H,(0,1))} &= \int_0^1 \left(u(\alpha_m t), u(\alpha_m t)\right)_H dt \\
&= \frac{1}{\alpha_m}\int_0^{\alpha_m} \left(u(x), u(x)\right)_H dx \\
&\le \frac{1}{\alpha_m}\int_0^1 \left\|u(x)\right\|_H^2 dx \\
&= \frac{1}{\alpha_m}\left\|u\right\|^2_{L^2(H,(0,1))}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece her $m=1,2,...,n$ için $P_{\alpha_m} \in L\left(L^2\left(H,(0,1)\right)\right)$ ve $\left\|P_{\alpha_m}\right\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_m}}$ olduğu görülür. Bu durumda her $t \in [0,1]$ için

$$A_\alpha(t) := \sum_{m=1}^{n} A_m(t) \mathrm{P}_{\alpha_m}$$

şeklinde tanımlı $A_\alpha(t) : L^2\left(H,(0,1)\right) \to L^2\left(H,(0,1)\right)$ operatörü bir sınırlı lineer operatördür.

Bu kısımda, $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında $(2.1.1)$ ifadesi tarafından üretilen minimal L_0 ve maksimal L operatörleri sırasıyla

$$L_0 := M_0 + A_\alpha(t),$$
$$L_0 : \overset{0}{W}{}_2^1\left(H,(0,1)\right) \subset L^2\left(H,(0,1)\right) \to L^2\left(H,(0,1)\right),$$
$$L := M + A_\alpha(t),$$
$$L : W_2^1\left(H,(0,1)\right) \subset L^2\left(H,(0,1)\right) \to L^2\left(H,(0,1)\right)$$

şeklinde tanımlanacaktır. Şimdi $U(t,s),\ t,\mathrm{s} \in [0,1]$

$$U_t(t,s) f + A_\alpha(t) U(t,s) f = 0,\ t,s \in [0,1],$$
$$U(s,s) f = f,\ f \in H$$

homojen diferensiyel denkleminin karşılık gelen evolüsyon operatörler ailesi olsun.

H Hilbert uzayında her $s,t \in [0,1]$ için $U(t,s)$ operatörü lineer sürekli sınırlı tersinir operatördür ve $U^{-1}(t,s) = U(s,t),\ s,t \in [0,1]$ $([11])$.

Şimdi

$$Uz(t) := U(t,0) z(t),\ z \in L^2\left(H,(0,1)\right)$$

şeklinde bir $U : L^2\left(H,(0,1)\right) \to L^2\left(H,(0,1)\right)$ operatörü tanımlansın.

Bu halde $z \in L^2\left(H,(0,1)\right),\ z\!: [0,1] \to H$ diferensiyellenebilir vektör-fonksiyonları için

$$\begin{aligned} l(Uz) &= (Uz)'(t) + A_\alpha(t)Uz(t) \\ &= Uz'(t) + \left(U_t' + A_\alpha(t)U\right)z(t) \\ &= Um(z) \end{aligned}$$

bağıntısının sağlandığı açıktır. Son bağıntıdan $U^{-1}l(Uz) = m(z)$ eşitliği elde edilir.

Böylece, eğer $\tilde{L}$ operatörü L_0 minimal operatörünün herhangi bir genişlemesi, yani $L_0 \subset \tilde{L} \subset L$ ise,

$$U^{-1}L_0U = M_0,\; M_0 \subset U^{-1}\tilde{L}U = \tilde{M} \subset M,\; U^{-1}LU = M$$

bağıntılarının doğruluğu açıktır.

Örneğin, son bağıntının sağlandığı gösterilsin. M_0 ve M operatörlerinin tanım kümelerinin sırası ile

$$D(M_0) = \overset{0}{W}{}_2^1\left(H,(0,1)\right),$$
$$D(M) = W_2^1\left(H,(0,1)\right)$$

şeklinde olduğu biliniyor.

Eğer $z \in D(M)$ ise $l(Uz) = Um(z) \in L^2\left(H,(0,1)\right)$ elde edilir. Yani, $Uz \in D(L)$. Son bağıntıdan $M \subset U^{-1}LU$ olduğu görülür. Tersine, eğer $u \in D(L)$ ise

$$m\left(U^{-1}v\right) = U^{-1}(lv) \in L^2\left(H,(0,1)\right)$$

eşitliği elde edilir. Yani, $U^{-1}v \in D(M)$.

Bu halde $U^{-1}L \subset MU^{-1}$, yani $U^{-1}LU = M$ eşitliği elde edilir.

Teorem 2.1.1: $KerL_0 = \{0\}$ ve $\overline{R(L_0)} \neq L_2\left(H,(0,1)\right)$.

İspat: Teoremin ispatı için

$$KerM_0 = \{0\} \text{ ve } \overline{R(M_0)} \neq L_2\left(H,(0,1)\right)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{cases} M_0 u = u'(t) = 0, \ u \in D(M_0) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemine bakılsın. Bu durumda $u(t) = f$, $f \in H$ ve $u(1) = u(0) = f = 0$.

Böylece $KerM_0 = \{0\}$ bulunur.

Şimdi keyfi $f \in R(M_0)$ keyfi olsun. Bu halde $f_0 \in H$ için

$$\begin{aligned} \left|(f_0, f)_{L^2}\right| &= \left|\int_0^1 (f_0, f(t))_H \, dt\right| \\ &= \left(f_0, \int_0^1 f(t)\, dt\right)_H \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup $H \perp R(M_0)$. O halde $dimcokerR(M_0) \geq \dim H \geq 1.$ Öyleyse $dimcokerR(L_0) \geq \dim H \geq 1.$ Yani, $\overline{R(L_0)} \neq L_2(H,(0,1))$.

Teorem 2.1.2: $L^2(H,(0,1))$ Hilbert uzayında L_0 minimal operatörünün her $\tilde{L}$ $(L_0 \subset \tilde{L} \subset L)$ tersinir genişlemesi $(2.1.1)$ diferensiyel ifadesi ve

$$(K+E)u(0) = KU(0,1)u(1) \tag{2.1.4}$$

sınır değer koşulu ile üretilir. Burada, $K : H \to H$ sınırlı lineer operatör ve $E : H \to H$ birim operatördür. $K \in L(H)$ operatörü $\tilde{L}$ genişlemesi tarafından tek türlü belirlenir, yani, $\tilde{L} = L_K$.

Tersine, L maksimal operatörünün $K : H \to H$ keyfi bir sınırlı lineer operatör olmak üzere $(2.1.4)$ sınır değer koşulunu sağlayan $u \in W_2^1(H,(0,1))$ vektör-fonksiyonların alt uzayı üzerine kısıtlanışı, $L^2(H,(0,1))$ Hilbert uzayı üzerinde L_0 minimal operatörünün bir tersinir genişlemesidir.

İspat: İlk olarak $L^2(H,(0,1))$ uzayında M_0 minimal operatörünün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri sınır değerler dilinde ifade edilsin.

M_0 minimal operatörünün Cauchy genişlemesi denilen

$$M_C u = u'(t),\ u(0)=0$$
$$M_C := D(M_C)=\{u\in W_2^1(H,(0,1)) : u(0)=0\}\subset L^2(H,(0,1))\to L^2(H,(0,1))$$

M_C operatörüne bakılsın. M_C operatörünün M_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi olduğu ve

$$M_C^{-1} f(t)=\int_0^t f(x)dx,\ f\in L^2(H,(0,1))$$
$$M_C^{-1}: L^2(H,(0,1))\to L^2(H,(0,1))$$

olduğu açıktır.

Şimdi $\tilde{M}$ operatörü $L^2(H,(0,1))$ uzayında M_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi olsun. Bu durumda $\tilde{M}$ operatörünün tanım kümesinin

$$D(\tilde{M})=D(M_0)\oplus(M_C^{-1}+K)V$$

direkt toplam şeklinde yazılabileceği biliniyor. Burada, $V = KerM = H,\ K\in L(H)$ [2,3].

Böylece her bir $u(t)\in D(\tilde{M})$ için

$$u(t)=u_0(t)+M_C^{-1}f+Kf,\ u_0\in D(M_0),\ f\in H$$

elde edilir. Yani, $u(t)=u_0(t)+tf+Kf,\ u_0\in D(M_0),\ f\in H.$

Böylece

$$u(0)=Kf,$$
$$u(1)=f+Kf=(K+E)f$$

eşitlikleri elde edilir. Bu son bağıntılardan

$$(K+E)u(0)=Ku(1) \tag{2.1.5}$$

eşitliği bulunur.

Ayrıca $K \in L(H)$ operatörünün tekliği $[2]$ den açıktır. Böylece $\tilde{M} = M_K$.

Bu halde teoremin iddiasının gerek şartı ispatlanmış olur.

Tersine, eğer M_K, $(2.1.2)$ diferensiyel ifadesi ve $(2.1.5)$ sınır koşulu tarafından üretilen bir operatör ise M_K sınırlı, tersi sınırlı ve

$$M_K^{-1} : L^2\left(H,(0,1)\right) \to L^2\left(H,(0,1)\right)$$
$$M_K^{-1} f(t) = \int_0^t f(x)dx + K\int_0^1 f(x)dx,\ f \in L^2\left(H,(0,1)\right).$$

Sonuç olarak, $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında M_0 minimal operatörünün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri $K : H \to H$ keyfi sınırlı lineer operatör olmak üzere $(2.1.2)$ diferensiyel ifadesi ve $(2.1.5)$ sınır koşulu tarafından üretilir.

Şimdi genel duruma dönülsün. Bunun için $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında

$$U : L^2\left(H,(0,1)\right) \to L^2\left(H,(0,1)\right),$$
$$(Uz)(t) := U(t,0)z(t),\ \mathrm{z} \in L^2\left(H,(0,1)\right)$$

operatörü tanımlansın. $U(t,s)$, $s,t \in [0,1]$, evolüsyon operatör ailesinin özelliklerinde

$$\left(U^{-1}z\right)(t) = U(0,t)z(t).$$

Diğer taraftan

$$U^{-1}L_0U = M_0,\ M_0 \subset U^{-1}\tilde{L}U = \tilde{M} \subset M,\ U^{-1}LU = M$$

bağıntılarından U operatörü $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında L_0 ve M_0 minimal operatörlerinin sınırlı tersinir genişlemeleri kümeleri arasında birebir bir dönüşüm oluşturmaktadır.

$L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında $\tilde{L}$, L_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{M} = U^{-1}\tilde{L}U$ operatörünün $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında M_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi olmasıdır.

Bu halde, $u \in D(L)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$(K+E)U(0,0)u(0)=KU(0,1)u(1)$$

olmasıdır. Yani, $(K+E)u(0)=KU(0,1)u(1)$ olmasıdır.

Böylece teorem tamamen ispatlanmış olur.

Sonuç 2.1.3: $L^2(H,(0,1))$ uzayında

$$l(u)=u'(t)+A(t)u(\alpha t),\ 0<\alpha<1$$

pantograf tipli gecikmeli diferensiyel ifadesi ve

$$(K+E)u(0)=KU(0,1)u(1)$$

sınır değer koşulu tarafından üretilen L_0 minimal operatörünün her L_K sınırlı tersinir genişlemesinin $R_\lambda(L_K),\ \lambda \in \rho(L_K)$ resolvent operatörü

$$R_\lambda(L_K)f(t)=U(t,0)\left[\left(E+K\left(1-e^{\lambda}\right)\right)^{-1}K\int_0^1 e^{\lambda(1-s)}U(0,s)f(s)ds+\int_0^t e^{\lambda(t-s)}U(0,s)f(s)ds\right],$$
$$f \in L^2(H,(0,1))$$

şeklindedir.

Not 2.1.4: Genelde keyfi $A \in L(H)$ operatörü için $AP_\alpha \neq P_\alpha A$.

Gerçekten, eğer $(Af)(t)=tf(t),\ f \in L^2(H,(0,1)),\ A: L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ olarak alınırsa $0<\alpha<1$ ve $f \in L^2(H,(0,1))$ için

$$\begin{aligned}(AP_\alpha)f(t) &= A(P_\alpha f(t))\\ &= A(f(\alpha t))\\ &= tf(\alpha t), \qquad 0<t<1,\\ (P_\alpha A)f(t) &= P_\alpha(Af(t))\\ &= P_\alpha(tf(t))\\ &= (\alpha t)f(\alpha t), \qquad 0<t<1\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Sonuç 2.1.5: Keyfi $t \in (0,1)$ ve keyfi $u \in W_2^1(H,(0,1))$ için $(A_\alpha u)(\alpha t) = A_\alpha u(\alpha t)$ olsun. Bu halde $L^2(H,(0,1))$ uzayında L_0 minimal operatörünün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri

$$l(u) = u'(t) + A(t)u(\alpha t),\ 0<\alpha<1$$

diferensiyel ifadesi ve

$$(K+E)u(0) = K\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}A^n u(\alpha^n),\ K \in L(H) \tag{2.1.6}$$

sınır koşulu tarafından üretilir.

Bu teoremin tersi de doğrudur.

Dikkat edilirse $(2.1.6)$ eşitliğindeki sağ taraftaki seri yakınsaktır. Gerçekten, keyfi $u \in W_2^1(H,(0,1))$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{(-1)^n}{n!}A^n u(\alpha^n)\right\|_H \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|A\|^n}{n!}\max_{[0,1]}\|u\|_H < \infty.$$

Sonuç 2.1.6: $L^2(H,(0,1))$ uzayında

$$l(u) = u'(t) + u(\alpha t),\ 0<\alpha<1$$

pantograf tipli diferensiyel ifadesi tarafından üretilen L_0 minimal operatörünün tüm L_K sınırlı tersinir genişlemeleri $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi ve

$$(K+E)u(0) = K\left[u(1) - \frac{u(\alpha)}{1!} + \frac{u(\alpha^2)}{2!} - \ldots\right] = K\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u(\alpha^n)}{n!}$$

sınır koşulu ile ifade edilir.

Sonuç 2.1.7: $L^2(H,(0,1))$ uzayında

$$l(u) = u'(t) + u(\alpha_1 t) + u(\alpha_2 t)$$

birinci dereceden pantograf tipli diferensiyel operatör ifadesi tarafından üretilen minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi ve

$$(K+E)u(0)=K\Big[u(1)-\big(u(\alpha_1)+u(\alpha_2)\big)+\frac{1}{2!}\Big(u\big(\alpha_1^2\big)+2u(\alpha_1\alpha_2)+u\big(\alpha_2^2\big)\Big)$$
$$-\frac{1}{3!}\Big(u\big(\alpha_1^3\big)+u\big(\alpha_1\alpha_2^2\big)+2u\big(\alpha_1^2\alpha_2\big)+2u\big(\alpha_1\alpha_2^2\big)+u\big(\alpha_1^2\alpha_2\big)+u\big(\alpha_2^3\big)\Big)+\dots\Big]$$

sınır koşulu ile ifade edilir.

Not 2.1.8: Her $m=1,2,...,n$ için $\varphi_m:[0,1]\to[0,1],\ \varphi_m>0(<0),\ \varphi_m\in C^1[0,1]$, $P_{\varphi_m}:L^2(H,(0,1))\to L^2(H,(0,1)),\ P_{\varphi_m}u(t)=u(\varphi_m(t))$ ve $A_\varphi(t):=\sum_{m=1}^{n}A_m(t)P_{\varphi_m}$ olmak üzere Teorem 2.1.2

$$l_\varphi(u):=u'(t)+\sum_{m=1}^{n}A_m(t)u(\varphi_m(t))$$

diferensiyel ifadesi için de genelleştirilebilir.

Teorem 2.1.9: $L^2(H,(0,1))$ uzayında $l_\varphi(\cdot)$ gecikmeli diferensiyel-operatör ifadesine karşılık gelen minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri $l_\varphi(\cdot)$ diferensiyel ifadesi ve

$$(K+E)u(0)=KU_\varphi(0,1)u(1)$$

sınır değer koşulu ile belirlenir. Burada $K:H\to H$ sınırlı lineer operatör ve her $t,s\in[0,1]$ için $U_\varphi(t,s),\ \ U_\varphi(s,s)=f,\ f\in H$ sınır koşulu ile

$$\left(U_\varphi\right)_t'(t,s)+A_\varphi(t)U(t,s)=0,\ t,s\in[0,1]$$

homojen diferensiyel denklemine karşılık gelen evolüsyon operatörler ailesidir.

Bu teoremin tersi de doğrudur.

Şimdi burada $L^2(H,(0,1))$ uzayında L_0 minimal operatörünün sınırlı tersinir genişlemelerinin spektrum yapısı incelenecektir.

İlk olarak aşağıdaki teorem ispatlanılsın.

Teorem 2.1.10: Eğer $\tilde{L}$ operatörü L_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi ve $\tilde{M} = U^{-1}\tilde{L}U$ operatörü M_0 minimal operatörünün ona karşılık gelen sınırlı tersinir genişleme ise bu genişlemelerin spektrumları için $\sigma(\tilde{L}) = \sigma(\tilde{M})$ bağıntısı doğrudur.

İspat: L_K , L_0 minimal operatörünün $(2.1.1)$ pantograf tipli diferensiyel-operatör ifadesi ve $(2.1.4)$ sınır değer koşulu tarafından üretilen bir sınırlı tersinir genişlemesinin spektrum problemi düşünülsün. Yani, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $f \in L^2(H,(0,1))$ olmak üzere

$$L_K u = \lambda u + f$$

denklemine bakılsın. Buradan

$$(L_K - \lambda E)u = f,$$

ya da $(UM_K U^{-1} - \lambda E)u = f$ denklemleri elde edilir. Bu halde $U(M_K - \lambda)(U^{-1}u) = f$ bağıntısı bulunur.

Böylece teorem ispatlanmış olur.

Şimdi sınırlı tersinir genişlemelerin spektrum yapısı hakkındaki aşağıdaki teorem ispatlanılsın.

Teorem 2.1.11: $L^2(H,(0,1))$ Hilbert uzayında L_K , L_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi ise L_K operatörünün spektrumu

$$\sigma(L_K) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda = ln\left|\frac{\mu+1}{\mu}\right| + iarg\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right) + 2n\pi i, \mu \in \sigma(K) \backslash \{0,-1\}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

şeklindedir.

İspat: İlk olarak $L^2(H,(0,1))$ uzayında M_0 minimal operatörünün $M_K = U^{-1}L_K U$ sınırlı tersinir genişlemesinin spektrumu araştırılsın.

Bu halde $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $f \in L^2(H,(0,1))$ olmak üzere

$$M_K u = \lambda u + f$$

denklemine bakılsın. Yani,

$$u' = \lambda u + f,$$
$$(K+E)u(0) = Ku(1),\ K \in L(H)$$

sınır değer problemi incelensin. Açıkca görüldüğü üzere $L^2(H,(0,1))$ uzayında

$$u' = \lambda u + f$$

diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$u_\lambda(t) = e^{\lambda t} f_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\,ds,\ f_0 \in H$$

şeklindedir. Böylece $(K+E)u_\lambda(0) = Ku_\lambda(1)$ sınır koşulundan

$$\left(E + K\left(1-e^{\lambda}\right)\right) f_0 = K\int_0^1 e^{\lambda(1-s)} f(s)\,ds \tag{2.1.7}$$

eşitliği elde edilir.

Her $\lambda_m = 2m\pi i,\ m \in \mathbb{Z}$ için $(2.1.7)$ eşitliğinden

$$f_0^{(m)} = K\int_0^1 e^{\lambda_m(1-s)} f(s)\,ds,\ m \in \mathbb{Z},\ f_0^{(m)} \in H$$

bulunur. Sonuç olarak, bu durumda M_K operatörünün resolvent operatörü

$$R_{\lambda_m}(M_K) f(t) = Ke^{\lambda_m t}\int_0^1 e^{\lambda_m(1-s)} f(s)\,ds + \int_0^t e^{\lambda_m(t-s)} f(s)\,ds,\ f \in L^2(H,(0,1)),\ m \in \mathbb{Z}$$

şeklindedir. Bu durumda her $m \in \mathbb{Z}$ için $R_{\lambda_m}(M_K) \in L\left(L^2(H,(0,1))\right)$ olduğu açıktır.

Şimdi $\lambda \neq 2m\pi i,\ m \in \mathbb{Z},\ \lambda \in \mathbb{C}$ olduğu kabul edilsin. Bu halde $(2.1.7)$ ifadesi kullanılarak

$$\left(K - \frac{1}{e^{\lambda}-1}E\right) f_0 = \frac{1}{1-e^{\lambda}} K\int_0^1 e^{\lambda(1-s)} f(s)\,ds,\ f_0 \in H,\ f \in L^2(H,(0,1))$$

denklemi elde edilir. Böylece $\lambda \in \sigma(M_K)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\mu = \frac{1}{e^{\lambda}-1} \in \sigma(K).$$

Bu durumda $\mu \neq 0$ için

$$e^{\lambda} = \frac{\mu+1}{\mu},\ \mu \in \sigma(K),\ \mu \neq -1$$

elde edilir. Bu halde

$$\lambda_n = ln\left|\frac{\mu+1}{\mu}\right| + iarg\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right) + 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}$$

bulunur.

Sonuncu bağıntı ve Teorem 2.1.10 kullanılarak teoremin iddiası ispatlanılmış olur.

Şimdi özel durumlarda sınırlı tersinir genişlemelerin özdeğerlerinin asimptotik davranışları için bir sonuç ispatlanılacaktır.

Teorem 2.1.12: $K : H \to H$ sınırlı lineer bir operatör, $K \neq 0$ ve $\sigma(K) = \sigma_p(K)$ olsun. Ayrıca her $\mu \in \sigma_p(K)$ için $|\mu| \geq \alpha > 0$ ve $|\mu+1| \geq \beta > 0$ olacak şekilde $\alpha, \beta > 0$ sayıları da var olsun. Bu durumda $n \to \infty$ için $\lambda_n(L_K) \sim 2n\pi$ sağlanır. Yani, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\lambda_n(L_K)|}{2n\pi}$ limiti vardır ve $0 < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\lambda_n(L_K)|}{2n\pi} < \infty$ sağlanır.

İspat: Bu durumda her $n \geq 1$ için

$$|\lambda_n(M_K)|^2 = ln^2\left|\frac{\mu+1}{\mu}\right| + \left|arg\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right) + 2n\pi\right|^2$$

elde edilir. Her $\mu \in \sigma_p(K)$ için

$$\left|\frac{\mu+1}{\mu}\right| \geq \frac{\beta}{|\mu|} \geq \frac{\beta}{\|K\|} > 0$$
$$\left|\frac{\mu+1}{\mu}\right| \leq 1+\frac{1}{|\mu|} \leq 1+\frac{1}{\alpha}$$

bağıntılarından

$$ln\frac{\beta}{\|K\|} \leq ln\left|\frac{\mu+1}{\mu}\right| \leq ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$$

bulunur. Böylece her $\mu \in \sigma_p(K)$ için

$$min\left\{\left|ln\left(\frac{\beta}{\|K\|}\right)\right|, \left|ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right|\right\} \leq \left|ln\left|\frac{\mu+1}{\mu}\right|\right| \leq max\left\{\left|ln\left(\frac{\beta}{\|K\|}\right)\right|, \left|ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right|\right\}$$

bağıntısı doğrudur. Ayrıca her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$(2n\pi)^2 \leq \left|arg\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)+2n\pi\right|^2 \leq (2(n+1)\pi)^2$$

bağıntısı da sağlanır. Sonuç olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(2n\pi)^2\left(1+\frac{1}{4n^2\pi^2} min^2\left\{\left|ln\left(\frac{\beta}{\|K\|}\right)\right|, \left|ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right|\right\}\right)$$
$$\leq |\lambda_n(M_k)|^2$$
$$\leq (2n\pi)^2\left(\left(\frac{2(n+1)\pi}{2n\pi}\right)^2 + \frac{1}{(2n\pi)^2} max^2\left\{\left|ln\left(\frac{\beta}{\|K\|}\right)\right|, \left|ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right|\right\}\right)$$

bağıntısı elde edilir. Bu ise $n \to \infty$ için $\lambda_n(M_k) \sim 2n\pi$ olduğu anlamına gelir.

Şimdi bazı örnekler verilsin.

Örnek 2.1.13: $(H,|.|_H) = (\mathbb{C},|.|)$, $A(t) = a(t) \in C(\mathbb{R})$ olsun. Teorem 2.1.2' e göre $L^2(0,1)$ Hilbert uzayında $0<\alpha<1$ olmak üzere $l(u) = u'(t) + a(t)u(\alpha t)$ diferensiyel ifadesi tarafından üretilen L_0 minimal operatörünün tüm L_k sınırlı tersinir genişlemeleri $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi ve

$$(k+1)u(0)=kexp\left(\int_0^1 a(t)P_\alpha dt\right)$$

sınır değer koşulu ile üretilir.

Ayrıca bu genişlemelerin resolvent operatörü her $\lambda\in\rho(L_k)$ için

$$R_\lambda(L_k)f(t)=exp\left(-\int_0^t a(x)P_\alpha dx\right)\left[\left(1+k\left(1-e^\lambda\right)^{-1}\right)k\int_0^1 exp\left(\lambda(1-s)+\int_0^s a(x)P_\alpha dx\right)f(s)ds\right.$$
$$\left.+\int_0^t exp\left(\lambda(t-s)+\int_0^s a(x)P_\alpha dx\right)f(s)ds\right],\ f\in L^2(0,1)$$

şeklindedir ve $k\neq 0,-1$ olduğu durumlarda L_k genişlemelerinin spektrumu

$$\sigma(L_k)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=ln\left|\frac{k+1}{k}\right|+iarg\left(\frac{k+1}{k}\right)+2n\pi i,n\in\mathbb{Z}\right\}$$

şeklindedir.

Örnek 2.1.14: $\left(H,\|.\|_H\right)=\left(\mathbb{C},|.|\right),\ a,b\in C(\mathbb{C})$ olsun. $L^2(0,1)$ Hilbert uzayında

$$l(u)=u'(t)+a(t)u(t)+b(t)u(\alpha t),\ 0<\alpha<1$$

pantograf tipli diferensiyel ifadesi düşünülsün. Teorem 2.1.2' e göre L_0 minimal operatörünün tüm L_k sınırlı tersinir genişlemeleri $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi ve

$$(k+1)u(0)=kexp\left(\int_0^1\left(a(s)+b(s)P_\alpha\right)ds\right)u(1),\ k\in\mathbb{C}$$

sınır değer koşulu tarafından üretilir ve tersi de doğrudur.

Ayrıca bu genişlemelerin resolvent operatörü her $\lambda\in\rho(L_k)$ için

$$R_\lambda(L_k)f(t)=exp\left(-\int_0^t\left(a(s)+b(s)P_\alpha\right)ds\right)$$
$$\left[\left(1+k\left(1-e^\lambda\right)^{-1}\right)k\int_0^1 exp\left(\lambda(1-s)+\int_0^s\left(a(x)+b(x)P_\alpha\right)dx\right)f(s)ds\right.$$
$$\left.+\int_0^t exp\left(\lambda(t-s)+\int_0^s\left(a(x)+b(x)P_\alpha\right)dx\right)f(s)ds\right],\ f\in L^2(0,1)$$

şeklindedir. Ayrıca Teorem 2.1.11' e göre $k \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0),(-1,0)\}$ için L_k sınırlı tersinir genişlemelerinin spektrumu

$$\sigma(L_k) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda = ln\left|\frac{k+1}{k}\right| + iarg\left(\frac{k+1}{k}\right) + 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

şeklindedir. Şimdi $L^2(0,1)$ Hilbert uzayında

$$u'(t) = a(t)u(\alpha t) + b(t)u(t) + f(t)$$

diferensiyel denklemi ile $u(0) = u_0$ başlangıç sınır değer problemi düşünülsün. Burada, $a(\cdot),\ b(\cdot) \in C[0,1],\ f \in L^2[0,1]$ ve $u_0 \in \mathbb{C}$. Bu problemi çözmek için

$$y(t) = u(t) - u_0,\ 0 < t < 1$$

şeklinde dönüşüm yapılsın. Bu durumda problem

$$y'(t) = a(t)y(\alpha t) + b(t)y(t) + g(t),\ y(0) = 0,$$
$$g(t) = f(t) - (a(t) + b(t))u_0$$

problemine dönüşür. Son problem

$$y'(t) + A_\alpha(t)y(t) = g(t),\ y(0) = 0,$$
$$A_\alpha(t) = -a(t)P_\alpha - b(t)E$$

şeklinde yazılabilir. Bu halde Sonuç 2.1.3'den $K = 0$ için yukarıdaki Cauchy probleminin çözümü

$$y(t) = R_0(L_c)g(t) = L_c^{-1}g(t) = U(t,0)\int_0^t U(0,x)g(x)dx,$$
$$g(t) = f(t) - (a(t) + b(t))u_0$$

şeklinde analitik olarak ifade edilebilir.

Bu probleme başka bir yaklaşım [31] çalışmasında verilmiştir.

Örnek 2.1.15: $L^2(0,1)$ Hilbert uzayında

$$u'(t)+\int_0^t u(\alpha x)dx = f(t),\ 0<\alpha<1,\ u(0)=u_0$$

birinci dereceden integro-diferensiyel denklemi düşünülsün. $u(t)$ bilinmeyen fonksiyonu için

$$y(t)=u(t)-u_0,\ 0<t<1$$

şeklinde dönüşüm yapılırsa başlangıç değer integral diferensiyel denklemi için

$$y'(t)+\int_0^t y(\alpha x)dx = g(t),\ y(0)=0,$$
$$g(t)=f(t)-u_0 t$$

elde edilir. Son denklem

$$y'(t)+P_\alpha y(t)=g(t),\ y(0)=0$$

şeklinde yazılabilir. Bu problemin analitik çözümü

$$y(t)=\int_0^t e^{-P_\alpha(t-s)}g(s)ds$$

şeklindedir. Sonuç olarak,

$$u(t)=u_0+\int_0^t e^{-P_\alpha(t-s)}\left(f(s)-u_0 s\right)ds$$
$$=u_0-e^{-P_\alpha t}\int_0^t se^{P_\alpha s}dsu_0+e^{-P_\alpha t}\int_0^t e^{P_\alpha s}f(s)ds,\ 0<t<1$$

şeklindedir.

Örnek 2.1.16: $L^2\left((-1,1)\times(0,1)\right)$ Hilbert uzayında

$$l(u)=\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+xu(\alpha t,x),\ x\in(-1,1),\ 0<t<1,\ 0<\alpha<1$$

diferensiyel ifadesi tarafından üretilen minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi ve

$$(K+E)u(0,x)=KU(0,1)u(1,x),\ K\in L\left(L^2(-1,1)\right)$$

sınır değer koşulu ile belirlenir. Burada $U(t,s)$ ise $t,s\in[0,1]$ için

$$U_t'(t,s)+xP_\alpha U(t,s)=0,\ t,s\in[0,1],$$
$$U(s,s)f=f,\ f\in L^2(-1,1)$$

operatör denkleminin çözümüdür. Ayrıca $P_\alpha : L^2(0,1)\to L^2(0,1)$ operatörü $P_\alpha u(t)=u(\alpha t),\ u\in L^2(0,1)$.

Not 2.1.17: Burada alınan sonuçların benzerleri ispatlarda uygun değişiklikler yapılmak üzere

$$(1)\ \ l_1(u)=u'(t)+\sum_{m=1}^{n}A_m(t)u\left(\alpha_m(t)\right),$$

$$(2)\ \ l_2(u)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k u'\left(\beta_k(t)\right)+\sum_{j=1}^{n}A_j(t)u\left(\gamma_j(t)\right)$$

diferensiyel-operatör ifadelerinin $L^2\left(H,(0,1)\right)$ Hilbert uzayında doğurduğu minimal operatörlerin tüm sınırlı tersinir genişlemelerinin genel gösterimleri ve spektral yapıları için de doğrudur $[51,52]$.

Not 2.1.18: Eğer

$$\gamma_j(t)=a_j t+b_j,\ j=1,2,...,n$$
$$\beta_k(t)=c_k t+d_k,\ k=1,2,...,m$$

ve

(1) $a_j>0$ ise $b_j\ge 0$ ve $a_j+b_j\le 1$,

(2) $a_j<0$ ise $b_j\le 1$ ve $a_j+b_j\ge 0$,

(3) $c_j > 0$ ise $d_j \geq 0$ ve $c_j + d_j \leq 1$,

(4) $c_j < 0$ ise $d_j \leq 1$ ve $c_j + d_j \geq 0$.

ise $l_2(\cdot)$ diferensiyel ifadesi pantograf tip diferensiyel ifade göstermektedir

Şimdi sonuncu durumu yansıtan bazı örnekler verilsin $[52]$.

Örnek 2.1.19:

$$\begin{cases} u'(x) = a(x)u(qx), \; 0 < x \leq T \\ u(0) = u_0, \; 0 < q < 1, \; a \in C^1[0,T] \end{cases}$$

pantograf tipli gecikmeli diferensiyel denklemi için sınır değer problemine bakılsın.

Bu problemi çözmek için

$$y(x) = u(x) - u_0, \; 0 < t \leq T$$

şeklinde dönüşüm yapılsın. Bu durumda yukarıdaki problem

$$\begin{cases} y'(x) - a(x)y(qx) = a(x)u_0, \; 0 < x \leq T, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

şeklindeki sınır değer problemine dönüşür. Bu halde yukarıdaki Cauchy probleminin çözümü

$$y(t) = L_c^{-1}(a(t)u_0) = \int_0^t U(t,s)a(s)dsu_0$$

şeklinde analitik olarak ifade edilebilir. Burada $U(t,s), \; t,s \in [0,\mathrm{T}]$ uygun evolüsyon operatörler ailesidir.

Bu problemin çözümüne, başka bir yaklaşım $[30]$ çalışmasında verilmiştir.

Örnek 2.1.20: Aşağıdaki şekilde

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + by(qt) + f(t), \; 0 < t \leq 1, \\ y(0) = y_0, \; 0 < q < 1 \end{cases}$$

sınır değer problemine bakılsın. $y(t)$ bilinmeyen fonksiyonu için

$$u(t)=y(t)-y_0,\ 0<t<1$$

şeklinde dönüşüm yapılırsa sonuncu sınır değer problemi

$$\begin{cases} u'(t)=\left(aE+bP_q\right)u(t)+\left(ay_0+by_0+f(t)\right),\ 0<t<1, \\ u(0)=0 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Sonuncu Cauchy probleminin analitik çözümü

$$u(t)=\int_0^t U(t,s)\left(f(s)+ay_0+by_0\right)ds$$

yani,

$$y(t)=y_0+\int_0^t U(t,s)\left(f(s)+ay_0+by_0\right)ds$$

şeklindedir. Burada $U(t,s),\ t,s\in[0,1]$ uygun evolüsyon operatörler ailesidir.

Bu problemin çözümüne başka bir yaklaşım $[31,46]$ çalışmalarında verilmiştir.

Örnek 2.1.21: Aşağıdaki şekilde birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklem için

$$\begin{cases} u'(1-t)=a(t)u(\alpha t)+b(t),\ 0<t\le 1, \\ u(0)=u_0,\ 0<\alpha<1,\ \alpha\in C^1[0,1] \end{cases}$$

sınır değer problemi düşünülsün.

Açıkça görülür ki bu problem $y(t)=u(t)-u_0$ olmak üzere

$$\begin{cases} y'(1-t)-a(t)y(\alpha t)=b(t)+a(t)u_0,\ 0<t\le 1 \\ y(0)=0 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $P_1y(t)=y(1-t),\ P_2y(t)=y(\alpha t)$ ise sonuncu sınır değer problemi

$$\begin{cases} y'(t)+\left(-P_1^{-1}\alpha(t)P_2\right)y(t)=P_1^{-1}\left(b(t)+a(t)u_0\right), \\ y(0)=0 \end{cases}$$

Cauchy problemine denktir. Buradan

$$u(t)=\int_0^t U(t,s)\left(b(1-s)+a(1-s)u_0\right)ds+u_0$$

elde edilir. Burada $U(t,s),\ t,s\in[0,1]$ uygun evolüsyon operatörler ailesidir.

2.2. ST-2 Durumunda Sınırlı Tersinir Genişlemelerinin Gösterimi ve Spektrum Yapısı

Bu kesimde vektör-fonksiyonların $L^2\left(H,(0,1)\right)$ Hilbert uzayında

$$l(u)=u'(t)+A(t)u(\alpha t),\ 0<\alpha<1 \tag{2.2.1}$$

bir sınıf pantograf tipli gecikmeli diferensiyel-operatör ifadesi tarafından üretilen minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemelerinin genel gösterimi araştırılacak ve bu tip genişlemelerin spektrum yapısı incelenecektir. Burada:

(1) $H,\ (\cdot,\cdot)$ iç çarpımı ve $\|\cdot\|$ normu ile bir ayrılabilir Hilbert uzayı;

(2) $A(\cdot):[0,1]\to L(H)$ operatör-fonksiyonu $\|A(t)\|_H\in L_1(0,1)$ koşulunu sağlar.

İlk olarak $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında $(2.2.1)$ diferensiyel ifadesine karşılık gelen

$$m(u)=u'(t) \tag{2.2.2}$$

diferensiyel ifadesine bakılacaktır.

Bilinen yöntem ile $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında $(2.2.1)\ \left((2.2.2)\right)$ diferensiyel ifadesine karşılık gelen $L_0\left(M_0\right)$ minimal ve $L\left(M\right)$ maksimal operatörleri tanımlanabilir.

Şimdi $P_\alpha u(t)=u(\alpha t),\ u\in L^2(H,(0,1))$ şeklinde $P_\alpha : L^2(H,(0,1))\to L^2(H,(0,1))$ operatörü tanımlansın. Dikkat edilirse $(2.2.1)$ diferensiyel ifadesi P_α operatörü dilinde

$$l(u)=u'(t)+A(t)P_\alpha u(t)$$

şeklinde yazılabilir. Bu halde

$$\int_0^1 \|P_\alpha u(t)\|_H^2\,dt=\int_0^1 \|u(\alpha t)\|_H^2\,dt=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \|u(x)\|_H^2\,dx\le\frac{1}{\alpha}\|u\|^2_{L^2(H,(0,1))}$$

elde edilir. Böylece $\|P_\alpha\|\le\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{1/2}$.

Şimdi $A_\alpha(t)=A(t)P_\alpha,\ t\in[0,1]$ şeklinde $A_\alpha : L^2(H,(0,1))\to L^2(H,(0,1))$ operatörü tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 2.2.1: Keyfi sabit $s\in[0,1]$ için

$$exp\left(-\int_s^t A_\alpha(x)\,dx\right),\ t\in[0,1]$$

operatörü $L^2(H,(0,1))$ üzerinde sınırlı lineerdir.

İspat: Bu halde

$$\begin{aligned}\left\|exp\left(-\int_s^t A_\alpha(x)\,dx\right)u(t)\right\|^2_{L^2(H,(0,1))} &\le \int_0^1\left\|exp\left(-\int_s^t A_\alpha(x)\,dx\right)\right\|^2 \|u(t)\|_H^2\,dt\\ &\le\int_0^1 exp\left(2\left\|\int_s^t A_\alpha(x)\,dx\right\|\right)\|u(t)\|_H^2\,dt\\ &\le\int_0^1 exp\left(2\int_s^t \|A_\alpha(x)\|\,dx\right)\|u(t)\|_H^2\,dt\end{aligned}$$

$$\leq \int_0^1 exp\left(2\int_0^1 \left\|A_\alpha(x)\right\| dx\right)\left\|u(t)\right\|_H^2 dt$$
$$= exp\left(2\int_0^1 \left\|A_\alpha(x)\right\| dx\right)\left\|u(t)\right\|_{L^2(H,(0,1))}^2$$
$$\leq exp\left(2(\alpha)^{-1/2}\left\|A(x)\right\|_{L^1(0,1)}\right)\left\|u(t)\right\|_{L^2(H,(0,1))}^2.$$

Buradan keyfi sabit $s\in[0,1]$ için

$$\left\|exp\left(-\int_s^t A_\alpha(x)dx\right)u(t)\right\| \leq exp\left((\alpha)^{-1/2}\left\|A(x)\right\|_{L^1(0,1)}\right),\ t\in[0,1]$$

elde edilir.

Şimdi $U(t,s),\ t,s\in[0,1]$

$$\begin{cases} U_t(t,s)f + A_\alpha U(t,s)f = 0,\ t,s\in[0,1], \\ U(s,s)f = f,\ f\in H \end{cases}$$

homojen diferensiyel denkleminin karşılık gelen evolüsyon operatörler ailesi olsun.

H Hilbert uzayında her $s,t\in[0,1]$ için $U(t,s)$ operatörü lineer sınırlı ve sınırlı tersinir operatördür ve $U^{-1}(t,s)=U(s,t),\ s,t\in[0,1]$ ([11]).

Şimdi $Uz(t):U(t,0)z(t),\ z\in L^2(H,(0,1))$ şeklinde bir $U:L^2(H,(0,1))\to L^2(H,(0,1))$ operatörü tanımlansın. Bu halde $z\in L^2(H,(0,1)),\ z:[0,1]\to H$ diferensiyellenebilir vektör-fonksiyonları için

$$\begin{aligned} l(Uz) &= (Uz)'(t) + A_\alpha(t)Uz(t) \\ &= Uz'(t) + \left(U_t' + A_\alpha(t)U\right)z(t) \\ &= Um(z) \end{aligned}$$

bağıntısının sağlandığı açıktır. Son bağıntıdan $U^{-1}l(Uz)=m(z)$ eşitliği elde edilir. Böylece, eğer $\tilde{L}$ operatörü L_0 minimal operatörünün herhangi bir genişlemesi, yani $L_0 \subset \tilde{L} \subset L$ ise,

$$U^{-1}L_0U = M_0,\ M_0 \subset U^{-1}\tilde{L}U = \tilde{M} \subset M,\ U^{-1}LU = M$$

bağıntılarının doğruluğu açıktır. Bu bağıntıların doğruluğu Bölüm 2.1.' dekine benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi aşağıdaki önermenin doğruluğu gösterilsin.

Teorem 2.2.2: $KerL_0 = \{0\}$ ve $\overline{R(L_0)} \neq L^2(H,(0,1))$.

İspat: Teoremin ispatı için

$$KerM_0 = \{0\} \text{ ve } \overline{R(M_0)} \neq L^2(H,(0,1))$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{cases} M_0u = u'(t) = 0,\ u \in D(M_0), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemine bakılsın. Bu durumda $u(t) = f,\ f \in H$ ve $u(1) = u(0) = f = 0$ elde edilir. Böylece $KerM_0 = \{0\}$ bulunur.

Şimdi bir $f \in L^2(H,(0,1))$ için $M_0u(t) = f(t)$

yani,

$$\begin{cases} u'(t) = f(t) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemi düşünülsün. Bu halde

$$u'(t) = f(t)$$

diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$u(t) = f_0 + \int_0^t f(s)\,ds$$

şeklinde olup $u(0) = u(1) = 0$ sınır koşullarından

$$f_0 = 0 \text{ ve } \int_0^1 f(s)\,ds = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, keyfi $h \in H$ ve alınan her $f \in R(M_0)$ için

$$(h, f)_{L^2(H,(0,1))} = \int_0^1 (h, f(t))_H\,dt = \left(h, \int_0^1 f(t)\,dt\right) = 0$$

bulunur. Yani, $H \perp R(M_0)$. Öyleyse, $codim\overline{R(M_0)} \geq \dim H > 0.$ O halde $dimcoker\overline{R(L_0)} \geq \dim H > 0.$ Yani, $\overline{R(L_0)} \neq L^2(H,(0,1))$.

Teorem 2.2.3: $L^2(H,(0,1))$ Hilbert uzayında L_0 minimal operatörünün her $\tilde{L},\ L_0 \subset \tilde{L} \subset L$ sınırlı tersinir genişlemesi $(2.2.1)$ diferensiyel ifadesi ve

$$(K+E)u(0) = KU(0,1)u(1) \tag{2.2.3}$$

sınır değer koşulu ile üretilir. Burada, $K : H \to H$ lineer sınırlı operatör ve $E : H \to H$ birim operatördür. $K \in L(H)$ operatörü $\tilde{L}$ genişlemesi tarafından tek türlü belirlenir, yani, $\tilde{L} = L_K$.

Tersine, L maksimal operatörünün, $K : H \to H$ keyfi bir lineer sınırlı operatör olmak üzere $(2.2.3)$ sınır değer koşulunu sağlayan $u \in W_2^1(H,(0,1))$ vektör-fonksiyonların alt uzayı üzerine kısıtlanışı, L_0 minimal operatörünün $L^2(H,(0,1))$ Hilbert uzayı üzerinde bir sınırlı tersinir genişlemesidir.

İspat: İlk olarak $L^2(H,(0,1))$ uzayında M_0 minimal operatörünün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri sınır değerler dilinde ifade edilsin. M_0 minimal operatörünün Cauchy genişlemesi denilen

$$M_C u = u'(t),\ u(0)=0$$
$$M_C := D(M_C) = \{u \in W_2^1(H,(0,1)) : u(0)=0\} \subset L^2(H,(0,1)) \to L^2(H,(0,1))$$

M_C operatörüne bakılsın. M_C operatörünün M_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi olduğu ve

$$M_C^{-1} f(t) = \int_0^t f(x)dx,\ f \in L^2(H,(0,1))$$

olduğu açıktır.

Şimdi $\tilde{M}$ operatörü $L^2(H,(0,1))$ uzayında M_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi olsun. Bu durumda $\tilde{M}$ operatörünün tanım kümesinin

$$D(\tilde{M}) = D(M_0) \oplus (M_C^{-1} + K)V$$

direkt toplam şeklinde yazılabileceği biliniyor. Burada, $V = KerM = H,\ K \in L(H)$ $[2,3]$.

Böylece her bir $u(t) \in D(\tilde{M})$ için

$$u(t) = u_0(t) + M_C^{-1} f + Kf,\ u_0 \in D(M_0),\ f \in H$$

elde edilir. Yani, $u(t) = u_0(t) + tf + Kf,\ u_0 \in D(M_0),\ f \in H.$

Bu halde

$$u(0) = Kf,$$
$$u(1) = f + Kf = (K+E) f$$

eşitlikleri elde edilir. Bu son bağıntılardan

$$(K+E)u(0) = Ku(1) \tag{2.2.4}$$

eşitliği bulunur.

Ayrıca $K \in L(H)$ operatörünün tekliği $[2]$ den açıktır. O halde $\tilde{M} = M_K$.

Böylece teoremin iddiasının gerek şartı ispatlanmış olur.

Tersine, eğer M_K, $(2.2.2)$ diferensiyel ifadesi ve $(2.2.4)$ sınır koşulu tarafından üretilen bir operatör ise bu durumda M_K sınırlı, tersi sınırlı ve

$$M_K^{-1} : L^2\left(H,(0,1)\right) \to L^2\left(H,(0,1)\right)$$
$$M_K^{-1} f(t) = \int_0^t f(x)\,dx + K\int_0^1 f(x)\,dx,\ f \in L^2\left(H,(0,1)\right).$$

Sonuç olarak, $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında M_0 minimal operatörünün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri $K : H \to H$ keyfi sınırlı lineer operatör olmak üzere $(2.2.2)$ diferensiyel ifadesi ve $(2.2.4)$ sınır koşulu tarafından üretilir.

Şimdi genel duruma dönülsün. Bunun için $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında

$$(Uz)(t) = U(t,0)z(t),\ z \in L^2\left(H,(0,1)\right)$$

şeklinde bir $U : L^2\left(H,(0,1)\right) \to L^2\left(H,(0,1)\right)$ operatörü tanımlansın. $U(t,s),\ s,t \in [0,1]$, evolüsyon operatör ailesinin özelliklerinden $\left(U^{-1}z\right)(t) = U(0,t)z(t)$.

Diğer taraftan $U^{-1}L_0U = M_0,\ M_0 \subset U^{-1}\tilde{L}U = \tilde{M} \subset M,\ U^{-1}LU = M$ bağıntılarından U operatörü $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında L_0 ve M_0 minimal operatörlerinin sınırlı tersinir genişlemeleri kümeleri arasında birebir bir dönüşüm oluşturmaktadır.

$L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında $\tilde{L}$, L_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{M} = U^{-1}\tilde{L}U$ operatörünün $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında M_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi olmasıdır. Bu halde, $u \in D\left(\tilde{L}\right)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$(K+E)U(0,0)u(0) = KU(0,1)u(1)$$

olmasıdır. Yani, $(K+E)u(0) = KU(0,1)u(1)$ olmasıdır.

Böylece teorem tamamen ispatlanmış olur.

Sonuç 2.2.4: $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında

$$l(u)=u'(t)+A(t)u(\alpha t),\ 0<\alpha<1$$

pantograf tipli gecikmeli diferensiyel ifadesi ve

$$(K+E)u(0)=KU(0,1)u(1)$$

sınır değer koşulu tarafından üretilen L_0 minimal operatörünün her L_K sınırlı tersinir genişlemesinin $R_\lambda(L_K),\ \lambda\in\rho(L_K)$ resolvent operatörü

$$R_\lambda(L_K)f(t)=U(t,0)\left[\left(E+K\left(1-e^{\lambda}\right)\right)^{-1}K\int_0^1 e^{\lambda(1-s)}U(0,s)f(s)ds+\int_0^t e^{\lambda(t-s)}U(0,s)f(s)ds\right],$$
$$f\in L^2\left(H,(0,1)\right)$$

şeklindedir.

Sonuç 2.2.5: Keyfi $t\in(0,1)$ için $A(t)=A=\text{sabit}$ olsun. Bu halde $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında L_0 minimal operatörünün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri

$$l(u)=u'(t)+A(t)u(\alpha t),\ 0<\alpha<1$$

diferensiyel ifadesi ve

$$(K+E)u(0)=K\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}A^n u(\alpha^n),\ K\in L(H)$$

sınır koşulu tarafından üretilir. Bu teoremin tersi de doğrudur.

Sonuç 2.2.6: $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında

$$l(u)=u'(t)+u(\alpha t),\ 0<\alpha<1$$

pantograf tipli diferensiyel ifadesi tarafından üretilen L_0 minimal operatörünün tüm L_K sınırlı tersinir genişlemeleri $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi ve

$$\left(K+E\right)u\left(0\right)=K\left[u\left(1\right)-\frac{u\left(\alpha\right)}{1!}+\frac{u\left(\alpha^{2}\right)}{2!}+...\right]=K\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n!}u\left(\alpha^{n}\right)$$

sınır koşulu ile ifade edilir.

Şimdi burada $L^2\left(H,\left(0,1\right)\right)$ uzayında L_0 minimal operatörünün sınırlı tersinir genişlemelerinin spektrum yapısı incelenecektir.

İlk olarak aşağıdaki teorem ispatlanılsın.

Teorem 2.2.7: Eğer $\tilde{L}$ operatörü L_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi ve $\tilde{M}=U^{-1}\tilde{L}U$ operatörü M_0 minimal operatörünün ona karşılık gelen sınırlı tersinir genişleme ise bu genişlemelerin spektrumları için $\sigma\left(\tilde{L}\right)=\sigma\left(\tilde{M}\right)$ bağıntısı doğrudur.

İspat: L_K , L_0 minimal operatörünün $\left(2.2.1\right)$ pantograf tipli diferensiyel-operatör ifadesi ve $\left(2.2.4\right)$ sınır değer koşulu tarafından üretilen bir sınırlı tersinir genişlemesinin spektrum problemi düşünülsün. Yani, $\lambda\in\mathbb{C}$ ve $f\in L^2\left(H,\left(0,1\right)\right)$ olmak üzere

$$L_K u=\lambda u+f$$

denklemine bakılsın. Buradan

$$\left(L_K-\lambda E\right)u=f,$$

ya da $\left(UM_K U^{-1}-\lambda E\right)u=f$ denklemleri elde edilir. Bu halde $U\left(M_K-\lambda\right)\left(U^{-1}u\right)=f$ bağıntısı bulunur.

Böylece teorem ispatlanmış olur.

Şimdi sınırlı tersinir genişlemelerin spektrum yapısı hakkındaki aşağıdaki teorem ispatlanılsın.

Teorem 2.2.8: $L^2\left(H,\left(0,1\right)\right)$ Hilbert uzayında L_K , L_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi ise L_K operatörünün spektrumu

$$\sigma\left(L_K\right)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=ln\left|\frac{\mu+1}{\mu}\right|+iarg\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)+2n\pi i,\mu\in\sigma\left(K\right)\setminus\left\{0,-1\right\},n\in\mathbb{Z}\right\}$$

şeklindedir.

İspat: İlk olarak $L^2\left(H,\left(0,1\right)\right)$ uzayında M_0 minimal operatörünün $M_K=U^{-1}L_KU$ sınırlı tersinir genişlemesinin spektrumu araştırılsın.

Bu halde $\lambda\in\mathbb{C}$ ve $f\in L^2\left(H,\left(0,1\right)\right)$ olmak üzere

$$M_Ku=\lambda u+f$$

denklemine bakılsın. Yani,

$$\begin{cases}u'=\lambda u+f,\\ \left(K+E\right)u\left(0\right)=Ku\left(1\right),\ K\in L\left(H\right)\end{cases}$$

sınır değer problemi incelensin. Açıkca görüldüğü üzere $L^2\left(H,\left(0,1\right)\right)$ uzayında

$$u'=\lambda u+f$$

diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$u_\lambda\left(t\right)=e^{\lambda t}f_0+\int_0^t e^{\lambda(t-s)}f\left(s\right)ds,\ f_0\in H$$

şeklindedir. Böylece $\left(K+E\right)u_\lambda\left(0\right)=Ku_\lambda\left(1\right)$ sınır koşulundan

$$\left(E+K\left(1-e^{\lambda}\right)\right)f_0=K\int_0^1 e^{\lambda(1-s)}f\left(s\right)ds \tag{2.2.5}$$

eşitliği elde edilir.

Her $\lambda_m=2m\pi i,\ m\in\mathbb{Z}$ için $\left(2.2.5\right)$ eşitliğinden

$$f_0^{(m)}=K\int_0^1 e^{\lambda_m(1-s)}f\left(s\right)ds,\ m\in\mathbb{Z},\ f_0^{(m)}\in H$$

bulunur. Sonuç olarak, bu durumda M_K operatörünün resolvent operatörü

$$R_{\lambda_m}\left(M_K\right) f\left(t\right) = Ke^{\lambda_m t}\int_0^1 e^{\lambda_m(1-s)} f\left(s\right)ds + \int_0^t e^{\lambda_m(t-s)} f\left(s\right)ds,\ f \in L^2\left(H,\left(0,1\right)\right),\ m \in \mathbb{Z}$$

şeklindedir. Bu durumda her $m \in \mathbb{Z}$ için $R_{\lambda_m}\left(M_K\right) \in L\left(L^2\left(H,\left(0,1\right)\right)\right)$ olduğu açıktır.

Şimdi $\lambda \neq 2m\pi i,\ m \in \mathbb{Z},\ \lambda \in \mathbb{C}$ olduğu kabul edilsin. Bu halde $\left(2.2.5\right)$ ifadesi kullanılarak

$$\left(K - \frac{1}{e^{\lambda}-1}E\right) f_0 = \frac{1}{1-e^{\lambda}} K\int_0^1 e^{\lambda(1-s)} f\left(s\right)ds,\ f_0 \in H,\ f \in L^2\left(H,\left(0,1\right)\right)$$

denklemi elde edilir. Böylece $\lambda \in \sigma\left(M_K\right)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\mu = \frac{1}{e^{\lambda}-1} \in \sigma\left(K\right).$$

Bu durumda $\mu \neq 0$ için

$$e^{\lambda} = \frac{\mu+1}{\mu},\ \mu \in \sigma\left(K\right),\ \mu \neq 1$$

elde edilir. Bu halde

$$\lambda_n = ln\left|\frac{\mu+1}{\mu}\right| + iarg\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right) + 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}$$

bulunur. Sonuncu bağıntı ve Teorem 2.2.7 kullanılarak teoremin iddiası ispatlanılmış olur.

Şimdi bazı örnekler verilsin.

Örnek 2.2.9: $\left(H,\|\cdot\|\right) = \left(\mathbb{C},|\cdot|\right),\ A\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{t}},\ t \in \left(0,1\right)$

olsun. Teorem 2.2.3' e göre $L^2\left(0,1\right)$ Hilbert uzayında $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $l\left(u\right) = u'\left(t\right) + \frac{1}{\sqrt{t}}u\left(\alpha t\right)$ diferensiyel ifadesi tarafından üretilen L_0 minimal operatörünün tüm L_k sınırlı tersinir genişlemeleri $l\left(\cdot\right)$ diferensiyel ifadesi ve

$$\left(k+1\right)u\left(0\right)=kexp\left(-\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} P_\alpha dt\right)u\left(1\right),\ k\in\mathbb{C}$$

sınır değer koşulu ile üretilir. Ayrıca bu genişlemelerin resolvent operatörü her $\lambda\in\rho\left(L_K\right)$ için

$$R_\lambda\left(L_k\right)f\left(t\right)=exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}}P_\alpha dx\right)\left[\left(1+k\left(1-exp\left(\lambda\right)\right)^{-1}\right)k\int_0^1 exp\left(\lambda\left(1-s\right)+\int_0^s \frac{1}{\sqrt{x}}P_\alpha dx\right)f\left(s\right)ds\right.$$
$$\left.+\int_0^t exp\left(\lambda\left(t-s\right)+\int_0^s \frac{1}{\sqrt{x}}P_\alpha dx\right)f\left(s\right)ds\right]$$

şeklindedir ve $k\neq 0,-1$ olduğu durumlarda L_k genişlemelerinin spektrumu

$$\sigma\left(L_k\right)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=ln\left|\frac{k+1}{k}\right|+i\arg\left|\frac{k+1}{k}\right|+2n\pi i,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$$

şeklindedir.

Örnek 2.2.10: $L^2\left(\left(-1,1\right)\times\left(0,1\right)\right)$ Hilbert uzayında

$$l\left(u\right)=\frac{\partial u\left(t,x\right)}{\partial t}+t^\lambda sinxu\left(\alpha t,x\right),\ x\in\left(-1,1\right),\ 0<t<1,\ \lambda<\frac{-1}{2},\ 0<\alpha<1$$

diferensiyel ifadesi tarafından üretilen minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri $l\left(\cdot\right)$ diferensiyel ifadesi ve

$$\left(K+E\right)u\left(0,x\right)=KU\left(0,1\right)u\left(1,x\right),\ K\in L\left(L^2\left(-1,1\right)\right)$$

sınır değer koşulu ile belirlenir. Burada $U\left(t,s\right)$ ise $t,s\in\left[0,1\right]$ için

$$\begin{cases} U_t'\left(t,s\right)f+t^\lambda sin\left(\cdot\right)P_\alpha U\left(t,s\right)f=0, \\ U\left(s,s\right)f=\left(f\right),\ f\in L^2\left(-1,1\right) \end{cases}$$

operatör denkleminin çözümüdür. Ayrıca $P_\alpha:L^2\left(0,1\right)\to L^2\left(0,1\right)$ operatörü $P_\alpha u\left(t\right)=u\left(\alpha t\right),\ u\in L^2\left(0,1\right)$.

2.3. ST-3 Durumunda Sınırlı Tersinir Genişlemelerinin Gösterimi ve Spektrum Yapısı

Bu bölümde vektör-fonksiyonların $L^2\left(H,(0,1)\right)$ Hilbert uzayında

$$l(u)=u'(t)+\sum_{m=1}^{n}A_m(t)u\left(\alpha_m\left|t-\lambda_m\right|^{\gamma_m}\right) \qquad (2.3.1)$$

şeklinde gösterilecek birinci mertebeden lineer fonksiyonel diferensiyel-operatör ifadesi ele alınacaktır. Burada:

(1) H, $(\cdot,\cdot)_H$ iç çarpımı ve $\|\cdot\|$ normu ile bir ayrılabilir Hilbert uzayıdır;

(2) her $m=1,2,...,n$ için $A_m(\cdot):[0,1]\to L(H)$ operatör-fonksiyonu düzgün operatör topolojisinde süreklidir;

(3) her $m=1,2,...,n$ için $0<\alpha_m\le 1,\ 0\le\lambda_m\le 1,\ 0<\gamma_m\le 1$ şeklindedir.

Ayrıca $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında $(2.3.1)$ diferensiyel ifadesine karşılık gelen

$$m(u)=u'(t) \qquad (2.3.2)$$

diferensiyel ifadesine de bakılacaktır.

Bilinen yöntem ile $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında $(2.3.2)$ diferensiyel ifadesine karşılık gelen M_0 minimal ve M maksimal operatörleri tanımlanabilir.

Şimdi

$$P(\alpha_m,\lambda_m,\gamma_m)u(t)=u\left(\alpha_m\left|t-\lambda_m\right|^{\gamma_m}\right),\ u\in L^2\left(H,(0,1)\right),\ m=1,2,..,n$$

şeklinde $P(\alpha_m,\lambda_m,\gamma_m):L^2\left(H,(0,1)\right)\to L^2\left(H,(0,1)\right)$ operatörü tanımlansın.

Bu halde her $u \in L^2\left(H,(0,1)\right)$ ve $m = 1,2,...,n$ için

$$\left\| P(\alpha_m,\lambda_m,\gamma_m)u \right\|^2_{L^2(H,(0,1))} = \int_0^1 \left\| u\left(\alpha_m |t-\lambda_m|^{\gamma_m}\right) \right\|^2_H dt$$

$$= \int_0^{\lambda_m} \left\| u\left(\alpha_m |t-\lambda_m|^{\gamma_m}\right) \right\|^2_H dt + \int_{\lambda_m}^1 \left\| u\left(\alpha_m |t-\lambda_m|^{\gamma_m}\right) \right\|^2_H dt$$

$$= \frac{1}{\gamma_m}\left(\frac{1}{\alpha_m}\right)^{\frac{1}{\gamma_m}} \int_0^{\alpha_m(\lambda_m)^{\gamma_m}} \left\| u(x) \right\|^2_H x^{\frac{1-\gamma_m}{\gamma_m}} dx$$

$$+ \frac{1}{\gamma_m}\left(\frac{1}{\alpha_m}\right)^{\frac{1}{\gamma_m}} \int_0^{\alpha_m(1-\lambda_m)^{\gamma_m}} \left\| u(x) \right\|^2_H x^{\frac{1-\gamma_m}{\gamma_m}} dx$$

$$\le \frac{2}{\gamma_m}\left(\frac{1}{\alpha_m}\right)^{\frac{1}{\gamma_m}} \left\| u \right\|^2_{L^2(H,(0,1))}$$

elde edilir. Böylece, her $m = 1,2,...,n$ için $P(\alpha_m,\lambda_m,\gamma_m) \in L\left(L^2\left(H,(0,1)\right)\right)$ ve $\left\| P(\alpha_m,\lambda_m,\gamma_m) \right\| \le \sqrt{\frac{2}{\gamma_m}}\left(\frac{1}{\alpha_m}\right)^{\frac{1}{2\gamma_m}}$ olduğu görülür.

Bu durumda her $t \in [0,1]$ için $A(t;\alpha,\lambda,\gamma) : L^2\left(H,(0,1)\right) \to L^2\left(H,(0,1)\right)$ $A(t;\alpha,\lambda,\gamma) = \sum_{m=1}^{n} A_m(t) P(\alpha_m,\lambda_m,\gamma_m)$ operatörü bir sınırlı lineer operatördür.

Bu kesimde, $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında $(2.3.1)$ ifadesi tarafından üretilen minimal L_0 ve maksimal L operatörleri sırasıyla

$$L_0 := M_0 + A(t;\alpha,\lambda,\gamma),$$
$$L_0 : \overset{0}{W}{}^1_2\left(H,(0,1)\right) \subset L^2\left(H,(0,1)\right) \to L^2\left(H,(0,1)\right),$$
$$L := M + A(t;\alpha,\lambda,\gamma),$$
$$L : W^1_2\left(H,(0,1)\right) \subset L^2\left(H,(0,1)\right) \to L^2\left(H,(0,1)\right)$$

şeklinde tanımlanacaktır.

Şimdi $U(t,s),\ t,s\in[0,1]$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U(t,s)}{\partial t}f+A(t;\alpha,\lambda,\gamma)U(t,s)f=0,\ t,s\in[0,1],\\ U(s,s)f=f,\ f\in H\end{cases}$$

problemine karşılık gelen evolüsyon operatörler ailesi olsun.

H Hilbert uzayında her $s,t\in[0,1]$ için $U(t,s)$ operatörü lineer sürekli sınırlı tersinir operatördür ve $U^{-1}(t,s)=U(s,t),\ s,t\in[0,1]$ ([11]).

Şimdi

$$Uz(t):=U(t,0)z(t),\ z\in L^2(H,(0,1))$$

şeklinde bir $U:L^2(H,(0,1))\to L^2(H,(0,1))$ operatörü tanımlansın. Bu halde $z\in L^2(H,(0,1)),\quad z:[0,1]\to H$ diferensiyellenebilir vektör-fonksiyonları için

$$\begin{aligned}l(Uz)&=(Uz)'(t)+A(t;\alpha,\lambda,\gamma)Uz(t)\\&=Uz'(t)+\left(U_t'+A(t;\alpha,\lambda,\gamma)U\right)z(t)\\&=Um(z)\end{aligned}$$

bağıntısının sağlandığı açıktır. Son bağıntıdan $U^{-1}l(Uz)=m(z)$ eşitliği elde edilir. Böylece, eğer $\tilde{L}$ operatörü L_0 minimal operatörünün herhangi bir genişlemesi, yani $L_0\subset\tilde{L}\subset L$ ise $U^{-1}L_0U=M_0,\ M_0\subset U^{-1}\tilde{L}U=\tilde{M}\subset M,\ U^{-1}LU=M$ bağıntılarının doğruluğu açıktır.

Görüldüğü gibi $L^2(H,(0,1))$ uzayında L_0 operatörünün çekirdeği ve görüntü kümesi için $KerL_0=\{0\}$ ve $\overline{R(L_0)}\neq L^2(H,(0,1))$ bağıntıları doğrudur.

Teorem 2.3.1: $L^2(H,(0,1))$ Hilbert uzayında L_0 minimal operatörünün her $\tilde{L}\left(L_0\subset\tilde{L}\subset L\right)$ sınırlı tersinir genişlemesi $(2.3.1)$ diferensiyel ifadesi ve

$$(K+E)u(0)=KU(0,1)u(1) \qquad (2.3.3)$$

sınır değer koşulu ile üretilir. Burada, $K:H\to H$ lineer sınırlı operatör ve $E:H\to H$ birim operatördür. $K\in L(H)$ operatörü $\tilde{L}$ genişlemesi tarafından tek türlü belirlenir, yani, $\tilde{L}=L_K$.

Tersine, L maksimal operatörünün $K:H\to H$ keyfi bir lineer sınırlı operatör olmak üzere $(2.3.3)$ sınır değer koşulunu sağlayan $u\in W_2^1\left(H,(0,1)\right)$ vektör-fonksiyonların alt uzayı üzerine kısıtlanışı, $L^2\left(H,(0,1)\right)$ Hilbert uzayı üzerinde L_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesidir.

İspat: İlk olarak $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında M_0 minimal operatörünün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri sınır değerler dilinde ifade edilecektir. M_0 minimal operatörünün Cauchy genişlemesi denilen

$$\begin{aligned}
&M_c: D(M_c)\subset L^2\left(H,(0,1)\right)\to L^2\left(H,(0,1)\right),\\
&M_c u=u'(t) \text{ ve } M_c := D(M_c)=\left\{u\in W_2^1\left(H,(0,1)\right): u(0)=0\right\}
\end{aligned}$$

operatörüne bakılsın. M_C operatörünün M_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi olduğu ve

$$M_c^{-1}: L^2\left(H,(0,1)\right)\to L^2\left(H,(0,1)\right),\ \ M_c^{-1}f(t)=\int_0^t f(x)dx,\ f\in L^2\left(H,(0,1)\right)$$

olduğu açıktır.

Şimdi $\tilde{M}$ operatörü $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında M_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi olsun. Bu durumda $\tilde{M}$ operatörünün tanım kümesinin

$$D(\tilde{M})=D(M_0)\oplus\left(M_C^{-1}+K\right)V$$

direkt toplam şeklinde yazılabileceği biliniyor. Burada, $V=KerM=H,\ K\in L(H)$ $([2,3])$.

Bu halde her bir $u(t)\in D(M)$ için

$$u(t)=u_0(t)+M_C^{-1}f+Kf,\ u_0\in D(M_0),\ f\in H$$

elde edilir. Yani, $u(t)=u_0(t)+tf+Kf,\ u_0\in D(M_0),\ f\in H.$ Böylece

$$u(0)=Kf,$$
$$u(1)=f+Kf=(K+E)f$$

eşitlikleri elde edilir. Bu son bağıntılardan

$$(K+E)u(0)=Ku(1) \qquad (2.3.4)$$

eşitliği bulunur.

Ayrıca $K\in L(H)$ operatörünün tekliği $[2]$ çalışmasından açıktır. Bu durumda $\tilde{M}=M_K$.

Sonuçta teoremin iddiasının gerek şartı ispatlanmış olur. Tersine, eğer M_K, $(2.3.2)$ diferensiyel ifadesi ve $(2.3.4)$ sınır koşulu tarafından üretilen bir operatör ise bu durumda M_K sınırlı tersinir ve

$$M_K^{-1}:L^2(H,(0,1))\to L^2(H,(0,1))$$
$$M_K^{-1}f(t)=\int_0^t f(x)dx+K\int_0^1 f(x)dx,\ f\in L^2(H,(0,1)).$$

Sonuç olarak, $L^2(H,(0,1))$ uzayında M_0 minimal operatörünün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri $K:H\to H$ keyfi sınırlı lineer operatör olmak üzere $(2.3.2)$ diferensiyel ifadesi ve $(2.3.4)$ sınır koşulu tarafından üretilir.

Şimdi genel duruma dönülsün. Bunun için $L^2(H,(0,1))$ uzayında

$$(Uz)(t):=U(t,0)z(t),\ z\in L^2(H,(0,1))$$

şeklinde bir $U:L^2(H,(0,1))\to L^2(H,(0,1))$ operatörü tanımlansın. $U(t,s)$, $s,t\in[0,1]$, evolüsyon operatör ailesinin özelliklerinde $(U^{-1}z)(t)=U(0,t)z(t)$.

Diğer taraftan

$$U^{-1}L_0U = M_0,\ U^{-1}\tilde{L}U = \tilde{M},\ U^{-1}LU = M$$

bağıntılarından U operatörü $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında L_0 ve M_0 minimal operatörlerinin sınırlı tersinir genişlemeleri kümeleri arasında birebir bir dönüşüm oluşturmaktadır.

$L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında $\tilde{L}$, L_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{M} = U^{-1}\tilde{L}U$ operatörünün $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında M_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi olmasıdır. Bu halde, $u \in D\left(L\right)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$(K+E)U(0,0)u(0) = KU(0,1)u(1)$$

olmasıdır. Yani, $(K+E)u(0) = KU(0,1)u(1)$.

Böylece teorem tamamen ispatlanmış olur.

Sonuç 2.3.2: $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında

$$l(u) = u'(t) + A(t)u(\alpha t),\ 0 < \alpha < 1$$

pantograf tipli gecikmeli diferensiyel ifadesi ve

$$(K+E)u(0) = KU(0,1)u(1)$$

sınır değer koşulu tarafından üretilen L_0 minimal operatörünün her L_K sınırlı tersinir genişlemesinin $R_\lambda(L_K),\ \lambda \in \rho(L_K)$ resolvent operatörü

$$R_\lambda(L_K)f(t) = U(t,0)\left[\left(E + K\left(1-e^{\lambda}\right)^{-1}\right)K\int_0^1 e^{\lambda(1-s)}U(0,s)f(s)ds + \int_0^t e^{\lambda(t-s)}U(0,s)f(s)ds\right],$$
$$f \in L^2\left(H,(0,1)\right)$$

şeklindedir.

Şimdi burada $L^2\left(H,(0,1)\right)$ Hilbert uzayında L_0 minimal operatörünün sınırlı tersinir genişlemelerinin spektrum yapısı incelenecektir.

İlk olarak aşağıdaki teorem ispatlansın.

Teorem 2.3.3: Eğer $\tilde{L}$ operatörü L_0 minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi ve $\tilde{M} = U^{-1}\tilde{L}U$ operatörü M_0 minimal operatörünün ona karşılık gelen sınırlı tersinir genişleme ise bu genişlemelerin spektrumları için $\sigma\left(\tilde{L}\right) = \sigma\left(\tilde{M}\right)$ bağıntısı doğrudur.

İspat: L_0 minimal operatörünün $(2.2.1)$ pantograf tipli diferensiyel-operatör ifadesi ve $(2.2.4)$ sınır değer koşulu tarafından üretilen herhangi bir L_K sınırlı tersinir genişlemesinin spektrum problemi düşünülsün. Yani, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $f \in L^2\left(H,(0,1)\right)$ olmak üzere

$$L_K u = \lambda u + f$$

denklemine bakılsın. Buradan

$$\left(L_K - \lambda E\right)u = f,$$

ya da $\left(UM_K U^{-1} - \lambda E\right)u = f$ denklemleri elde edilir. Bu halde $U\left(M_K - \lambda\right)\left(U^{-1}u\right) = f$ bağıntısı bulunur.

Böylece teorem ispatlanmış olur.

Şimdi sınırlı tersinir genişlemelerin spektrum yapısı hakkındaki aşağıdaki teorem ispatlansın.

Teorem 2.3.4: Eğer L_K, L_0 minimal operatörünün $L^2\left(H,(0,1)\right)$ Hilbert uzayında bir sınırlı tersinir genişlemesi ise L_K operatörünün spektrumu

$$\sigma\left(L_K\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = ln\left|\frac{\mu+1}{\mu}\right| + iarg\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right) + 2n\pi i, \mu \in \sigma\left(K\right) \setminus \left\{0,-1\right\}, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

şeklindedir.

İspat: İlk olarak $L^2\left(H,(0,1)\right)$ uzayında M_0 minimal operatörünün $M_K = U^{-1}L_K U$ sınırlı tersinir genişlemesinin spektrumu araştırılsın. Bu halde $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $f \in L^2\left(H,(0,1)\right)$ olmak üzere

$$M_K u = \lambda u + f$$

denklemine bakılsın. Yani,

$$u' = \lambda u + f,$$
$$(K+E)u(0) = Ku(1),\ K \in L(H)$$

sınır değer problemi incelensin. Açıkca görüldüğü üzere $L^2(H,(0,1))$ uzayında

$$u' = \lambda u + f$$

diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$u_\lambda(t) = e^{\lambda t} f_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)ds,\ f_0 \in H$$

şeklindedir. Böylece $(K+E)u_\lambda(0) = Ku_\lambda(1)$ sınır koşulundan

$$\left(E + K\left(1-e^{\lambda}\right)\right) f_0 = K\int_0^1 e^{\lambda(1-s)} f(s)ds \qquad (2.3.5)$$

eşitliği elde edilir. Her $\lambda_m = 2m\pi i,\ m \in \mathbb{Z}$ için $(2.3.5)$ eşitliğinden

$$f_0^{(m)} = K\int_0^1 e^{\lambda_m(1-s)} f(s)ds,\ m \in \mathbb{Z},\ f_0^{(m)} \in H$$

bulunur. Sonuç olarak, bu durumda M_K operatörünün resolvent operatörü

$$R_{\lambda_m}(M_K) f(t) = Ke^{\lambda_m t}\int_0^1 e^{\lambda_m(1-s)} f(s)ds + \int_0^t e^{\lambda_m(t-s)} f(s)ds,\ f \in L^2(H,(0,1)),\ m \in \mathbb{Z}$$

şeklindedir. Bu durumda her $m \in \mathbb{Z}$ için $R_{\lambda_m}(M_K) \in L\left(L^2(H,(0,1))\right)$ olduğu açıktır.

Şimdi $\lambda_m \neq 2m\pi i,\ m \in \mathbb{Z},\ \lambda \in \mathbb{C}$ olduğu kabul edilsin. Bu halde $(2.3.5)$ ifadesi kullanılarak

$$\left(K - \frac{1}{e^{\lambda}-1}E\right) f_0 = \frac{1}{1-e^{\lambda}} K\int_0^1 e^{\lambda(1-s)} f(s)ds,\ f_0 \in H,\ f \in L^2(H,(0,1))$$

denklemi elde edilir. Böylece $\lambda \in \sigma(M_K)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\mu = \frac{1}{e^{\lambda} - 1} \in \sigma(K)$$

olmasıdır. Bu durumda $\mu \neq 0$ için

$$e^{\lambda} = \frac{\mu + 1}{\mu},\ \mu \in \sigma(K),\ \mu \neq -1$$

elde edilir. Bu halde

$$\lambda_n = ln\left|\frac{\mu+1}{\mu}\right| + iarg\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right) + 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}$$

bulunur.

Sonuncu bağıntı ve Teorem 2.3.3 kullanılarak teoremin iddiası ispatlanmış olur. Şimdi bazı örnekler verilsin.

Örnek 2.3.5: $L^2(0,1)$ Hilbert uzayında

$$u'(t) = a(t)u\left(\sqrt{t}\right),\ 0 < t < 1$$

diferensiyel denklemi ile

$$u(0) = u_0$$

başlangıç sınır değer problemi düşünülsün. Burada, $a(\cdot) \in C^1[0,1]$ ve $u_0 \in \mathbb{C}$.

Bu problemi çözmek için

$$y(t) = u(t) - u_0,\ 0 < t < 1$$

şeklinde dönüşüm yapılsın. Bu durumda problem

$$y'(t) = a(t)y\left(\sqrt{t}\right) + a(t)u_0,\ 0 < t < 1$$
$$y(0) = 0$$

problemine dönüşür. $L^2(0,1)$ Hilbert uzayında son sınır değer probleminin çözümü

$$L_c y(t) = a(t)u_0,\ 0<t<1$$
$$y(0)=0$$

şeklindeki fonksiyonel diferensiyel denkleminin çözümü olarak düşünülebilir.

Burada $L_c y(t) = y'(t) - a(t)\,y\left(\sqrt{t}\right)$.

Bu halde Sonuç 2.3.2'den yukarıdaki Cauchy probleminin çözümü

$$y(t) = L_c^{-1}\left(a(t)u_0\right) = \int_0^t U(0,s)a(s)\,ds u_0$$

şeklinde analitik olarak ifade edilebilir. Neticede

$$u(t) = \int_0^t U(0,s)a(s)\,ds u_0 + u_0,\ 0<t<1$$

elde edilir. Burada $U(t,s),\ t,s\in[0,1]$,

$$\frac{\partial U(t,s)}{\partial t} f - a(t)P_\alpha U(t,s)\,f = 0$$
$$U(s,s)\,f = f,\ f\in\mathbb{C}$$

problemine karşılık gelen evolüsyon operatörler ailesidir. Ayrıca $P_\alpha u(t) = u\left(\sqrt{t}\right),\ P_\alpha : L^2(0,1)\to L^2(0,1)$.

Teorem 2.3.1' e göre $L^2(0,1)$ uzayında

$$l(u) = u'(t) - a(t)u\left(\sqrt{t}\right),\ 0<t<1$$

diferensiyel ifadesi tarafından üretilen L_0 minimal operatörünün tüm L_k sınırlı tersinir genişlemeleri $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi ve

$$(k+1)u(0) = k exp\left(\int_0^1 a(s)P_\alpha ds\right)u(1),\ k\in\mathbb{C}$$

sınır değer koşulu ile belirlenir.

Üstelik bu genişlemelerin $R_\lambda\left(L_k\right),\ \lambda\in\rho\left(L_k\right)$ resolvent operatörü

$$R_\lambda\left(L_k\right)f\left(t\right)=exp\left(\int_0^t a\left(s\right)P_\alpha ds\right)\left[\left(1+k\left(1-e^\lambda\right)^{-1}\right)k\int_0^1 exp\left(\lambda\left(1-s\right)-\int_0^s a\left(x\right)P_\alpha dx\right)f\left(s\right)ds\right.$$
$$\left.+\int_0^t exp\left(\lambda\left(t-s\right)-\int_0^s a\left(x\right)P_\alpha dx\right)f\left(s\right)ds\right],\ f\in L^2\left(0,1\right)$$

şeklindedir ve $k\neq 0,-1$ olduğu durumlarda L_k genişlemelerinin spektrumu

$$\sigma\left(L_k\right)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=ln\left|\frac{k+1}{k}\right|+iarg\left(\frac{k+1}{k}\right)+2n\pi i,n\in\mathbb{Z}\right\}$$

şeklinde olacaktır.

Örnek 2.3.6: $L^2\left(\left(0,1\right)\times\left(0,1\right)\right)$ Hilbert uzayında

$$l\left(u\right)=\frac{\partial u\left(t,x\right)}{\partial t}+x^2u\left(\sqrt{t},\sqrt{1-x}\right),\quad 0<t,\ x<1$$

diferensiyel ifadesi tarafından üretilen minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri $l\left(\cdot\right)$ diferensiyel ifadesi ve

$$\left(K+E\right)u\left(0,x\right)=KU\left(0,1\right)u\left(1,x\right)$$

sınır değer koşulu ile belirlenir.

Burada $U\left(t,s\right)$ ise $t,s\in\left[0,1\right]$ için

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U\left(t,s\right)}{\partial t}f+x^2P_1P_2U\left(t,s\right)f=0,\ t,s\in\left[0,1\right],\\ U\left(s,s\right)f=f,\ f\in\mathbb{C}\end{cases}$$

operatör probleminin çözümüdür. Ayrıca $P_1P_2:L^2\left(\left(0,1\right)^2\right)\rightarrow L^2\left(\left(0,1\right)^2\right)$ operatörleri $P_1u\left(t,x\right)=u\left(\sqrt{t},x\right),\ P_2u\left(t,x\right)=u\left(t,\sqrt{1-x}\right)$ şeklindedir.

2.4. ST-4 Durumunda Sınırlı Tersinir Genişlemelerinin Gösterimi ve Spektrum Yapısı

Bu kesimde her $n \geq 1$ için H_n bir ayrılabilir Hilbert uzayı, $J_n = (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{H}_n = L^2(H_n, J_n)$, $-\infty < \inf\limits_{n\geq1} a_n < \sup\limits_{n\geq1} b_n < \infty$, $\inf\limits_{n\geq1} |J_n| > 0$ ve $\mathcal{H} = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ olduğu kabul edilecektir. Burada $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında

$$l(u) = (l_n(u_n)),\ u = (u_n)$$

şeklinde birinci mertebeden lineer çok noktalı fonksiyonel diferensiyel-operator ifadesi tarafından üretilen minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemelerinin genel gösterimi araştırılacak ve bu tip genişlemelerin spektrum yapısı incelenecektir. Burada:

(1) $l_n(u_n) = u_n'(t) + A_n(t)u(\alpha_n(t)),\ n \geq 1;$

(2) $A_n(\cdot):[a_n, b_n] \to L(H_n)$ operatör-fonksiyonu düzgün operatör topolojisinde süreklidir ve $\sup\limits_{n\geq1} \sup\limits_{t\in\Delta_n} \|A_n(t)\| < \infty;$

(3) Her $n \geq 1$ için $\alpha_n:[a_n, b_n] \to [a_n, b_n]$ fonksiyonları tersinir ve α_n, $(\alpha_n^{-1})^{-1} \in C[a_n, b_n]$. Ayrıca $\sup\limits_{n\geq1}\left(\left\|\left(\alpha_n^{-1}(t)\right)'\right\|_{\infty}\right)^{1/2}$ koşulu sağlanır.

Her keyfi $n \geq 1$ için $\mathcal{H}_n$ uzayında bilinen yöntem ile $l_n(\cdot)$ diferensiyel ifadesine karşılık gelen L_{n0} minimal ve L_n maksimal operatörleri tanımlanabilir.

Açıkca görüldüğü gibi keyfi $n \geq 1$ için L_{n0} minimal ve L_n maksimal operatörlerinin tanım kümeleri sırası ile $D(L_{n0}) = \overset{0}{W}{}_1^2(H_n, J_n)$, $D(L_n) = W_1^2(H_n, J_n)$ şeklindedir.

Şimdi herhangi bir $\varphi \in [a_n, b_n] \to [a_n, b_n]$ skaler fonksiyonu için

$$P_\varphi u_n(t) = u_n(\varphi(t)),\ u_n \in \mathcal{H}_n$$

şeklinde $P_\varphi : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$ operatörü tanımlansın.

Bu halde, eğer $\varphi \in C^1[a_n,b_n]$, $n \geq 1$ ve her $t \in [a_n,b_n]$ için $\varphi'(t) > 0 (<0)$ ise keyfi $u_n \in \mathcal{H}_n$ için

$$\begin{aligned}
\left\|P_\varphi u_n\right\|_{\mathcal{H}_n}^2 &= \int_{a_n}^{b_n} \left\|u_n(\varphi(t))\right\|_{H_n}^2 dt \\
&= \int_{\varphi(a_n)}^{\varphi(b_n)} \left\|u_n(\varphi(x))\right\|_{H_n}^2 \left(\varphi^{-1}\right)'(x)\,dx \\
&\leq \left| \int_{\varphi(a_n)}^{\varphi(b_n)} \left\|u_n(x)\right\|_{H_n}^2 \left|\left(\varphi^{-1}\right)'(x)\right| dx \right| \\
&\leq \left\|\left(\varphi^{-1}\right)'\right\|_\infty \int_{a_n}^{b_n} \left\|u_n(x)\right\|_{H_n}^2 dx \\
&= \left\|\left(\varphi^{-1}\right)'\right\|_\infty \left\|u_n\right\|_{\mathcal{H}_n}^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece, keyfi kesin monoton $\varphi \in C^1[a_n,b_n]$ fonksiyonu için $P_\varphi \in L(\mathcal{H}_n)$ ve $\left\|P_\varphi\right\| \leq \sqrt{\left\|\left(\varphi^{-1}\right)'\right\|_\infty}$ olduğu görülür.

Aslında $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında

$$l(u) = u'(t) + A_\alpha(t)u(t) \tag{2.4.1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada: $u = (u_n)$

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & & & 0 & \\ & A_2(t) & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & A_n(t) & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad P_\alpha = \begin{pmatrix} P_{\alpha_1} & & & 0 & \\ & P_{\alpha_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & P_{\alpha_n} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

ve $A_\alpha(t) = A(t)P_\alpha$, $A_\alpha \in L(\mathcal{H})$ şeklindedir.

Bu durumda $\mathcal{H}$ uzayında $(2.4.1)$ $\left(m(\cdot)=\dfrac{d}{dt}\right)$ ifadesi tarafından üretilen minimal operatör $L_0\left(M_0\right)$ ve maksimal operatör $L\left(M\right)$ olsun. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
&L_0 = M_0 + A_\alpha(t),\ L = M + A_\alpha(t),\\
&L_0 : D(L_0)\subset \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ L : D(L)\subset \mathcal{H}\to \mathcal{H},\\
&D(L_0)=\left\{(u_n)\in \mathcal{H} : u_n \in \overset{0}{W}{}_2^1\left(H_n, J_n\right), n\geq 1, \sum_{n=1}^{\infty}\left\|L_{n0}u_n\right\|_{\mathcal{H}_n}<\infty\right\},\\
&D(L)=\left\{(u_n)\in \mathcal{H} : u_n \in W_2^1\left(H_n, J_n\right), n\geq 1, \sum_{n=1}^{\infty}\left\|L_{n}u_n\right\|_{\mathcal{H}_n}<\infty\right\}
\end{aligned}
$$

olsun.

Bu kesimin asıl amacı $\mathcal{H}$ uzayında L_0 minimal operatörünün tüm sınırlı tersinir genişlemelerini sınır değerleri dilinde tanımlanabilmesi olacaktır.

İlk olarak aşağıdaki iddia ispatlanılsın.

Lemma 2.4.1: $\mathcal{H}$ uzayında L_0 operatörünün çekirdeği ve görüntü kümesi için

$$KerL_0=\{0\} \text{ ve } \overline{R(L_0)}\neq \mathcal{H}$$

bağıntıları doğrudur.

İspat: İlk olarak keyfi $n\geq 1$ için $KerL_{n0}=\{0\}$ olduğu ispatlanılsın. Bunun için

$$
\begin{cases}
u_n'(t)+A_n(t)P_{\alpha_n}u_n(t)=0,\\
u_n(a_n)=u_n(b_n)=0,\ n\geq 1
\end{cases}
$$

sınır değer problemine bakılsın. Bu halde $n\geq 1$ için

$$u_n'(t)+A_n(t)P_{\alpha_n}u_n(t)=0$$

diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$u_n(t)=exp\left(-\int_{a_n}^{t}A_n(s)P_{\alpha_n}ds\right)f_n,\ f_n\in H_n$$

şeklindedir.

Bu halde sınır şartlarından $f_n = 0,\ n \geq 1$ bulunur. Böylece $KerL_{n0} = \{0\},\ n \geq 1$ elde edilir. O halde $KerL_0 = \{0\}$ elde edilir.

$\overline{R(L_0)} \neq \mathcal{H}$ olduğunu göstermek için bir $n \geq 1$ için $\overline{R(L_{n0})} \neq \mathcal{H}_n$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu halde

$$L_{n0}^* u_n = -u_n'(t) + \left(A_n(t) P_{\alpha_n}\right)^* u_n(t) = 0,\ u_n \in \mathcal{H}_n,\ n \geq 1$$

sınır değer problemi düşünülsün. Son denklemin çözümleri

$$u_n(t) = exp\left(\int_{a_n}^{t} \left(A_n(s) P_{\alpha_n}\right)^* ds\right) g_n,\ g_n \in H_n$$

şeklindedir. Sonuç olarak $H_n \subset KerL^*_{n0},\ n \geq 1$ elde edilir. O halde bir $n \geq 1$ için $\overline{R(L_{n0})} \neq \mathcal{H}_n$ olup $\overline{R(L_0)} \neq \mathcal{H}$ elde edilir.

Teorem 2.4.2: Eğer $\tilde{L}$, $\mathcal{H}$ uzayında L_0 operatörünün keyfi bir genişlemesi ise

$$\tilde{L} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \tilde{L}_n$$

sağlanır. Burada, $\tilde{L}_n$, $\mathcal{H}_n$ uzayında $L_{n0},\ n \geq 1$ operatörünün bir genişlemesidir.

İspat: Bu halde keyfi $n \geq 1$ için

$$\tilde{M}_n := \left\{u_n \in D(L_n) : (u_n) \in D(\tilde{L})\right\}$$

lineer manifoldu $D(L_{n0})$ manifoldunu içerir. Yani,

$$D(L_{n0}) \subset \tilde{M}_n \subset D(L_n),\ n \geq 1$$

sağlanır. Bu durumda

$$\tilde{L}_n u_n = l_n(u_n),\ u_n \in \tilde{M}_n,\ n \geq 1$$

operatörü L_{n0} operatörünün bir genişlemesidir. Sonuç olarak, keyfi $n \geq 1$ için

$$\tilde{L}_n : D(\tilde{L}_n) = \tilde{M}_n \subset \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$$

elde edilir. Buradan $\tilde{L} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \tilde{L}_n$ bulunur.

L_0 ve L_{n0}, $n \geq 1$ operatörlerinin sınırlı tersinir genişlemeleri arasında aşağıdaki önerme doğrudur.

Teorem 2.4.3: $\tilde{L} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \tilde{L}_n$ operatörünün L_0 minimal operatörünün sınırlı tersinir bir genişlemesi olması için gerek ve yeter şartlar $\tilde{L}_n$ operatörünün L_{n0}, $n \geq 1$ minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi ve $\sup_{n\geq 1} \left\| \left(\tilde{L}_n\right)^{-1} \right\| < \infty$ olmasıdır.

İspat: Açıkca görülür ki $\tilde{L}$ genişlemesinin $\mathcal{H}$ uzayında bire-bir olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{L}$ 'nın tüm $\tilde{L}_n$, $n \geq 1$ koordinat operatörlerinin $\mathcal{H}_n$, $n \geq 1$ uzayında bire-bir olmasıdır.

Diğer taraftan $\left(\tilde{L}\right)^{-1} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{L}_n\right)^{-1}$ operatörünün $\mathcal{H}$ uzayında sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\sup_{n\geq 1} \left\| \left(\tilde{L}_n\right)^{-1} \right\| < \infty$ olmasıdır (örneğin[47, 48]).

Şimdi her $n \geq 1$ için $U_n(t,s)$, $t,s \in J_n$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_n(t,s)}{\partial t} f_n + A_n(t) P_{\alpha_n} U_n(t,s) f_n = 0, \ t,s \in J_n \\ U_n(s,s) = f_n, \ f_n \in H_n \end{cases}$$

homojen diferensiyel denklemine karşılık gelen evolüsyon operatörler ailesi olsun. H_n Hilbert uzayında her $s,t \in J_n$, $n \geq 1$ için $U_n(t,s)$ operatörü lineer sınırlı ve sınırlı tersinir olup $U_n^{-1}(t,s) = U_n(s,t)$, $s,t \in J_n$ ([11]).

Şimdi $U_n z_n(t) := U_n(t,0) z_n(t)$, $t \in J_n$ şeklinde bir $U_n : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$ operatörü tanımlansın.

Bu halde, eğer $\tilde{L}_n$, $n \geq 1$ operatörü L_{n0} minimal operatörünün herhangi bir genişlemesi, yani $L_{n0} \subset \tilde{L}_n \subset L_n$ ise

$$U_n^{-1} L_{n0} U_n = M_{n0},\ M_{n0} \subset U_n^{-1} \tilde{L}_n U_n = \tilde{M}_n \subset M_n,\ U_n^{-1} L_n U_n = M_n$$

bağıntılarının doğruluğu açıktır. Diğer taraftan her $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\|U_n\| &= \left\| exp\left(-\int_{a_n}^{t} A_n(s) P_{\alpha_n} ds \right) \right\| \\
&\leq exp\left(\int_{a_n}^{b_n} \|A_n(s)\| \|P_{\alpha_n}\| ds \right) \\
&\leq exp\left(|J_n| \|P_{\alpha_n}\| \sup_{t \in J_n} \|A_n(t)\| \right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|U_n^{-1}\| &= \left\| exp\left(\int_{a_n}^{t} A_n(s) P_{\alpha_n} ds \right) \right\| \\
&\leq exp\left(|J_n| \|P_{\alpha_n}\| \sup_{t \in J_n} \|A_n(t)\| \right) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Aşağıdaki sonuç doğrudur.

Teorem 2.4.4: $n \geq 1$ olsun. $\mathcal{H}_n$ Hilbert uzayında L_{n0} minimal operatörünün her $\tilde{L}_n,\ L_{n0} \subset \tilde{L}_n \subset L_n$ sınırlı tersinir genişlemesi $l_n(\cdot)$ diferensiyel ifadesi ve

$$(K_n + E_n) u_n(a_n) = K_n U_n(a_n, b_n) u_n(b_n) \tag{2.4.2}$$

sınır değer koşulu ile üretilir. Burada, $K_n \in L(H_n)$ lineer sınırlı operatör ve $E_n : H_n \to H_n$ birim operatördür. Ayrıca $K_n \in L(H_n)$ operatörü $\tilde{L}_n$ genişlemesi tarafından tek türlü belirlenir, yani, $\tilde{L}_n = L_K$.

Tersine, L_n maksimal operatörünün, $K_n \in L(H_n)$ keyfi bir lineer sınırlı operatör olmak üzere $(2.4.2)$ sınır değer koşulunu sağlayan vektör-fonksiyonların alt uzayı üzerine kısıtlanışı, L_{n0} minimal operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesidir.

Ayrıca keyfi $n \geq 1$ için

$$\left\| \left(\tilde{L}_n\right)^{-1} \right\| \leq |J_n|^{1/2}\, exp\left(2|J_n| \left\|P_{\alpha_n}\right\| \sup_{t \in J_n} \left\|A_n(t)\right\| \right)$$

sağlanır.

İspat: Her $n \geq 1$ için $\mathcal{H}_n$ uzayında L_{n0} minimal operatörünün tüm sınırlı tersinir $\tilde{L}_n$ genişlemeleri bölüm 2.1'de Teorem 2.1.2 ile tanımlanmıştır.

$$U_n^{-1} L_{K_n} U_n = M_{K_n}$$

bağıntısından

$$L_{K_n}^{-1} = U_n M_{K_n}^{-1} U_n^{-1}$$

elde edilir. Buradan

$$\tilde{M}_{K_n} u_n(t) = u_n'(t)$$
$$(K_n + E_n) u_n(a_n) = K_n u_n(b_n), \; n \geq 1$$

böylece $f_n \in L^2(H_n, J_n)$ için

$$\begin{aligned}
\left\| M_{K_n}^{-1} f_n \right\|_{\mathcal{H}_n}^2 &= \int_{a_n}^{b_n} \left\| K_n \int_{a_n}^{b_n} f_n(s)\,ds + \int_{a_n}^{t} f_n(s)\,ds \right\|^2 dt \\
&\leq 2\int_{a_n}^{b_n} \left\| K_n \int_{a_n}^{b_n} f_n(s)\,ds \right\|^2 dt + 2\int_{a_n}^{b_n} \left\| \int_{a_n}^{t} f_n(s)\,ds \right\|^2 dt \\
&\leq 2\left\|K_n\right\|^2 \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_n}^{b_n} \left\| f_n(s) \right\|^2 ds (b_n - a_n)\,dt + 2\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_n}^{b_n} \left\| f_n(s) \right\|^2 ds \right) dt (b_n - a_n) \\
&= \left(2\left\|K_n\right\|^2 (b_n - a_n)^2 + 2(b_n - a_n)^2 \right) \left\| f_n \right\|_{\mathcal{H}_n}^2 \\
&= 2(b_n - a_n)^2 \left(1 + \left\|K_n\right\|^2 \right) \left\| f_n \right\|_{\mathcal{H}_n}^2
\end{aligned}$$

bağıntısı sağlanır. O halde

$$\left\|M_{K_n}^{-1}\right\| \le \sqrt{2}\left|J_n\right|\left(1+\left\|K_n\right\|^2\right)^{1/2},\ n \ge 1$$

elde edilir. Buradan ve evolüsyon operatörlerinin özelliklerinden istenilen eşitsizliğin sağlanıldığı açıktır.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Diğer taraftan aşağıdaki özellik doğrudur.

Teorem 2.4.5: L_{K_n} , $\mathcal{H}_n$ uzayında L_{n0} operatörünün bir sınırlı tersinir genişlemesi ve $n \ge 1$ için $M_{K_n} = U_n^{-1} L_{K_n} U_n$ olsun. Bu halde

$$\sup_{n\ge 1}\left\|L_{K_n}^{-1}\right\| < \infty$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{n\ge 1}\left\|M_{K_n}^{-1}\right\| < \infty$$

olmasıdır.

Teorem 2.4.6: $M_{K_n} : W_2^1\left(H_n, J_n\right) \subset L^2\left(H_n, J_n\right) \to L^2\left(H_n, J_n\right),\ M_{K_n} u_n\left(t\right) = u_n'\left(t\right),$ $\left(K_n + E_n\right) u_n\left(0\right) = K_n u_n\left(1\right)$ olsun. Bu durumda

$$\sup_{n\ge 1}\left\|M_{K_n}^{-1}\right\| < \infty$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{n\ge 1}\left\|K_n\right\| < \infty$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 2.4.4’ün ispatından

$$\left\|M_{K_n}^{-1}\right\| \le \sqrt{2}\left|J_n\right|\left(1+\left\|K_n\right\|^2\right)^{1/2},\ n \ge 1$$

olduğu biliniyor. Buradan, eğer $\sup_{n\geq 1}\left\|K_n\right\| < \infty$ ise $\sup_{n\geq 1}\left\|M_{K_n}^{-1}\right\| < \infty$ elde edilir.

Şimdi tersine, $\sup_{n\geq 1}\left\|M_{K_n}^{-1}\right\| < \infty$ olsun. O halde

$$K_n \int_{a_n}^{b_n} f_n(t)\,dt = M_{K_n}^{-1} f_n(t) - \int_{a_n}^{t} f_n(t)\,dt,\ f_n \in \mathcal{H}_n,\ n \geq 1$$

bağıntısından $f_n(t) = f_n^*,\ t \in J_n,\ f_n^* \in H_n,\ n \geq 1$ olarak seçilirse

$$\left\|K_n f_n^*\right\|_{H_n} \left|J_n\right| \leq \left\|M_{K_n}^{-1} f_n^*\right\|_{H_n} + \left|J_n\right| \left\|f_n^*\right\|_{H_n},\ n \geq 1$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\left\|K_n\right\| \leq \frac{1}{\left|J_n\right|}\left\|M_{K_n}^{-1}\right\| + 1$$

bulunur. Son bağıntıdan ve $\left|J_n\right|,\ n \geq 1$ aralığının sağladığı koşullardan

$$\sup_{n\geq 1}\left\|K_n\right\| \leq \left(\inf_{n\geq 1}\left|J_n\right|\right)^{-1} \sup_{n\geq 1}\left\|M_{K_n}^{-1}\right\| + 1 < \infty$$

elde edilir.

Böylece teorem ispatlanılmış olur.

Şimdi Teorem 2.4.4-2.4.6 kullanılarak $\mathcal{H}$ uzayında tüm sınırlı terslenebilir genişlemelerin gösterimi hakkında bir iddia formüle edilecektir.

Teorem 2.4.7: $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında L_0 minimal operatörünün her L sınırlı tersinir genişlemesi $(2.4.1)$ diferensiyel ifadesi ve

$$(K_n + E_n)u_n(a_n) = K_n U_n(a_n, b_n) u_n(b_n),\ n \geq 1$$

sınır değer koşulu ile üretilir. Burada, $K_n \in L(H_n)$, $K = \bigoplus_{n=1}^{\infty} K_n \in L\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n\right)$ ve $E_n : H_n \to H_n$ birim operatördür. K operatörü $\tilde{L}$ genişlemesi tarafından tek türlü belirlenir, yani, $\tilde{L} = L_K$. Ayrıca bu teoremin tersi de doğrudur.

Not 2.4.8: Eğer $(2.4.1)$ diferensiyel ifadesinde her $n \geq 1$ için $\alpha_n(t) = t$ $(\alpha_n(t) < t)$, $t \in [a_n, b_n]$ olarak alınırsa bu problem vektör-fonksiyonların Hilbert uzayında çok noktalı adi (gecikmeli) differensiyel operatörler teorisinin problemine karşılık gelir.

Burada son olarak $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında L_0 minimal operatörünün sınırlı tersinir genişlemelerinin spektrum yapısı incelenecektir.

İlk olarak aşağıdaki özellik ispatlanılsın.

$\mathcal{H}$ uzayında L_0 minimal operatörünün bir L_K, $K = (K_n)$ sınırlı tersinir genişlemesi için spektrum problemi düşünülsün. Yani, $\lambda \in \mathbb{C}$, $u = (u_n)$ ve $f = (f_n) \in \mathcal{H}$ olmak üzere

$$L_K u = \lambda u + f$$

denklemine bakılsın. Buradan

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} \left(L_{K_n} - \lambda E_n\right)(u_n) = (f_n)$$

denklemi elde edilir. Son bağıntı

$$\left(L_{K_n} - \lambda E_n\right)u_n = f_n,\ n \geq 1,\ \lambda \in \mathbb{C},\ f_n \in \mathcal{H}_n$$

denklemlerine indirgenir. Yani, her $n \geq 1$ için

$$U_n\left(M_{K_n} - \lambda E_n\right)U_n^{-1}u_n = f_n .$$

Böylece,

$$\sigma_p\left(L_{K_n}\right) = \sigma_p\left(M_{K_n}\right),\ \sigma_c\left(L_{K_n}\right) = \sigma_c\left(M_{K_n}\right),\ \sigma_r\left(L_{K_n}\right) = \sigma_r\left(M_{K_n}\right) \qquad (2.4.3)$$

eşitlikleri sağlanır.

Sonuç olarak, M_{K_n} operatörünün spektrum parçaları için $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $f_n \in \mathcal{H}_n$, $n \geq 1$ olmak üzere

$$M_{K_n} u = \lambda u_n + f_n$$

denklemine bakılsın. Buradan

$$\begin{cases} u_n{}' = \lambda u_n + f_n, \\ \left(K_n + E_n\right) u_n\left(a_n\right) = K_n u_n\left(b_n\right), \ n \geq 1 \end{cases}$$

sınır değer problemi elde edilir. $\mathcal{H}_n$ uzayında yukarıdaki diferensiyel denklemin genel çözümü

$$u_n\left(t,\lambda\right) = exp\left(\lambda\left(t-a_n\right)\right) f_n^0 + \int_{a_n}^{t} exp\left(\lambda\left(t-s\right)\right) f_n\left(s\right) ds, \ t \in J_n, \ f_n^0 \in H_n, \ n \geq 1$$

şeklinde olup sınır koşullarından

$$\left(E_n + K_n\left(1 - exp\left(\lambda\left|J_n\right|\right)\right)\right) f_n^0 = K_n \int_{a_n}^{b_n} exp\left(\lambda\left(b_n - s\right)\right) f_n\left(s\right) ds, \ n \geq 1$$

eşitliği elde edilir. O halde

$\lambda_{n,m} = \dfrac{2m\pi i}{\left|J_n\right|} \in \rho\left(M_{K_n}\right), \ m \in \mathbb{Z}, \ n \geq 1$ olduğunu göstermek kolaydır.

Bu halde $\lambda_{n,m} \neq \dfrac{2m\pi i}{\left|J_n\right|}, \ m \in \mathbb{Z}, \ n \geq 1$ için

$$\left(K_n - \frac{1}{exp\left(\lambda\left|J_n\right|\right)-1} E_n\right) f_n^0 = \left(1 - exp\left(\lambda\left|J_n\right|\right)\right)^{-1} K_n \int_{a_n}^{b_n} exp\left(\lambda\left(b_n - s\right)\right) f_n\left(s\right) ds, \ f_n^0 \in H_n, f \in \mathcal{H}_n, n \geq 1$$

denklemi elde edilir.

Bu sonuncu ve $(2.4.3)$ bağıntısından aşağıdaki teoremin doğruluğu elde edilir.

Teorem 2.4.9: $\lambda \in \sigma_p\left(L_{K_n}\right) \ \left(\sigma_c\left(L_{K_n}\right), \sigma_r\left(L_{K_n}\right)\right)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\mu = \frac{1}{exp\left(\lambda\left|J_n\right|\right)-1} \in \sigma_p\left(K_n\right)\left(\sigma_c\left(K_n\right), \sigma_r\left(K_n\right)\right)$$

olmasıdır.

Bu halde L_{K_n} sınırlı tersinir genişlemesinin spektrum yapısı şu şekilde ifade edilebilir:

Teorem 2.4.10: L_{K_n} sınırlı tersinir genişlemesinin ayrık spektrumu

$$\sigma_p\left(L_{K_n}\right)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=\frac{1}{|J_n|}\left\{ln\left|\frac{\mu+1}{\mu}\right|+iarg\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)+2m\pi i\right\},\mu\in\sigma_p\left(K_n\right)\backslash\{0,-1\},m\in\mathbb{Z}\right\}$$

şeklindedir. $\sigma_c\left(L_{K_n}\right)$ sürekli spektrumu ve $\sigma_r\left(L_{K_n}\right)$ kalan spektrumu için de benzer özellikler doğrudur.

Sonuç olarak, Hilbert uzayların direkt toplamı üzerindeki direkt toplam ve koordinat operatörlerinin spektrum parçaları arasındaki bağıntıdan [49] kullanılarak aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 2.4.11: $\mathcal{H}=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}\mathcal{H}_n$ uzayında $L_K=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}L_{K_n}$, $K=\left(K_n\right)$ sınırlı tersinir genişlemesinin spektrum parçaları için aşağıdaki bağıntılar doğrudur:

$$\sigma_p\left(L_K\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_p\left(L_{K_n}\right),$$

$$\sigma_c\left(L_K\right)=\left\{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_p\left(L_{K_n}\right)\right)^c\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_r\left(L_{K_n}\right)\right)^c\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_c\left(L_{K_n}\right)\right)\right\}\cup\left\{\lambda\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\rho\left(L_{K_n}\right):\sup_{n\geq1}\left\|R_\lambda\left(L_{K_n}\right)\right\|=\infty\right\}$$

ve

$$\sigma_r\left(L_K\right)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_p\left(L_{K_n}\right)\right)^c\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_r\left(L_{K_n}\right)\right).$$

Şimdi bazı örnekler verilsin.

Örnek 2.4.12: Keyfi $n\geq1$ için $H_n=\left(\mathbb{C},|\cdot|\right)$, $a_n=0$, $b_n=1$, $A_n\left(t\right)=c_n$, $c_n\in\mathbb{C}$, $\sup_{n\geq1}|c_n|<\infty$, $\alpha_n\left(t\right)=\alpha_n t$, $0<\alpha_n<1$, $\sup_{n\geq1}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)<\infty$ olsun. Bu halde $\mathcal{H}=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}\mathcal{H}_n$ Hilbert uzayında

$$l\left(u_n\right)=u_n'\left(t\right)+c_nu_n\left(\alpha_nt\right),\ n\geq1$$

diferensiyel ifadesine bakılsın. Burada $\mathcal{H}_n=L^2\left(0,1\right)$, $n\geq1$ şeklindedir.

Teorem 2.4.7'ye göre $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi tarafından üretilen L_0 minimal operatörünün tüm L_k sınırlı tersinir genişlemeleri $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi ve

$$(k_n+1)u_n(0)=k_nU_n(0,1)u_n(1)$$

sınır değer koşulları ile üretilir. Burada $n\geq 1$ için $k_n\in\mathbb{C}$ ve $\sup\limits_{n\geq 1}|k_n|<\infty$ şeklindedir.

Bu iddianın tersi de doğrudur.

Ayrıca her $n\geq 1$ için $k_n\notin\{0,-1\}$ ise $\mathcal{H}_n=L^2(0,1)$ uzayında L_{k_n} genişlemelerinin ayrık, sürekli ve kalan spektrum parçaları

$$\sigma_p\left(L_{k_n}\right)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=ln\left|\frac{k_n+1}{k_n}\right|+iarg\left(\frac{k_n+1}{k_n}\right)+2m\pi i, m\in\mathbb{Z}\right\},$$
$$\sigma_c\left(L_{k_n}\right)=\sigma_r\left(L_{k_n}\right)=\emptyset$$

şeklindedir. Böylece Teorem 2.4.11' e göre $L_k=\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty}L_{k_n}$ sınırlı tersinir genişlemelerinin spektrum parçaları

$$\sigma_p\left(L_k\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}\left\{ln\left|\frac{k_n+1}{k_n}\right|+iarg\left(\frac{k_n+1}{k_n}\right)+2m\pi i\right\},$$
$$\sigma_c\left(L_k\right)=\left\{\lambda\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\rho\left(L_{k_n}\right):\sup_{n\geq 1}\left\|R_\lambda\left(L_{k_n}\right)\right\|=\infty\right\}$$

ve

$$\sigma_r\left(L_{k_n}\right)=\emptyset$$

şeklindedir.

Örnek 2.4.13: $H_n=\left(\mathbb{C},|\cdot|\right)$, (a_n), $\sup\limits_{n\geq 1}|a_n|<\infty$ koşulunu sağlayan reel sayı dizisi, $b_n=a_n+1$, $J_n\left(a_n,b_n\right), \mathcal{H}_n=L^2\left(H_n,J_n\right)$, $l_n\left(u_n\right)=u_n'+u_n\left(\alpha_n(t)\right)$, $\alpha_n:J_n\to J_n$,

$\alpha_n(t)=(t-a_n)^2+a_n-\frac{1}{2}$, $t\in J_n$, $n\geq 1$, $\mathcal{H}=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}\mathcal{H}_n$, $l(\cdot)=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}l_n(\cdot)$ olsun. Bu halde her $n\geq 1$ için $\alpha_n(\cdot)$ fonksiyonu artan tersinir ve $\alpha_n^{-1}(t)=a_n+\sqrt{t-a_n+\frac{1}{2}}$ ve $\left(\alpha_n^{-1}(t)\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{t-a_n+\frac{1}{2}}}$

Böylece $\sup\limits_{n\geq 1}\left\|\left(\alpha_n^{-1}\right)'\right\|_\infty\leq\frac{1}{2}$.

Bu halde $\mathcal{H}$ uzayında L_0 minimal operatörünün tüm sınırlı tersinir genişlemeleri $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi ve

$$(k_n+1)u_n(a_n)=k_nU_n(a_n,b_n)u(b_n),\ n\geq 1$$

sınır koşulları tarafından üretilir ve bu iddianın tersi de doğrudur. Burada $\sup\limits_{n\geq 1}|k_n|<\infty$.

Ayrıca eğer $n\geq 1$ ve $k_n\notin\{0,-1\}$ ise L_{k_n} sınırlı tersinir genişlemelerinin spektrum parçaları

$$\sigma_p\left(L_{k_n}\right)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=ln\left|\frac{k_n+1}{k_n}\right|+iarg\left(\frac{k_n+1}{k_n}\right)+2m\pi i, m\in\mathbb{Z}\right\}$$
$$\sigma_c\left(L_{k_n}\right)=\sigma_r\left(L_{k_n}\right)=\varnothing,\ n\geq 1$$

şeklindedir. Böylece Teorem 2.4.11' e göre $L_k=\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}L_{k_n}$ sınırlı tersinir genişlemelerin spektrum parçaları

$$\sigma_p\left(L_k\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}\left\{ln\left|\frac{k_n+1}{k_n}\right|+iarg\left(\frac{k_n+1}{k_n}\right)+2m\pi i\right\},$$
$$\sigma_c\left(L_k\right)=\left\{\lambda\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\rho\left(L_{k_n}\right):\sup_{n\geq 1}\left\|R_\lambda\left(L_{k_n}\right)\right\|=\infty\right\}$$

ve

$$\sigma_r\left(L_{k_n}\right)=\varnothing$$

şeklindedir.

Not 2.4.14: Eğer $\alpha_n(t)=b_n-t,\ a_n\leq t\leq b_n,\ n\geq 1$ ise Örnek 2.4.12 ve Örnek 2.4.13 benzer şekilde incelenebilir.

3. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında aşağıdaki problemler araştırılmış ve uygun sonuçlar elde edilmiştir:

(1) H bir ayrılabilir Hilbert uzayı, $\alpha_m : [0,1] \to [0,1]$, $\alpha_m \in C^1[0,1]$, $A_m : [0,1] \to L(H)$ $m = 1, 2, ..., n$ için olmak üzere

$$l(u) = u'(t) + \sum_{m=1}^{n} A_m(t) u(\alpha_m(t))$$

şeklindeki birinci mertebeden lineer pantograf tipli (ve fonksiyonel) diferensiyel-operatör ifadesinin vektör-fonksiyonların $L^2(H,(0,1))$ Hilbert uzayında doğurduğu minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemelerinin sınır değerleri dilinde genel gösterimi elde edilmiş ve daha sonra bu tip genişlemelerin spektrum yapıları hakkında kesin bulgulara ulaşılmıştır. Elde edilen sonuçlar "Abstract and Applied Analysis"[50] , "Journal of Analysis & Number Theory"[52] dergilerinde ve "AIP Conference Proceedings" [51] kitabında yayınlanmıştır.

(2) H bir ayrılabilir Hilbert uzayı, $A(\cdot) : [0,1] \to L(H)$ operatör-fonksiyon ve $\|A(t)\|_H \in L_1(0,1)$ olmak üzere

$$l(u) = u'(t) + A(t) u(\alpha t), \; 0 < \alpha < 1$$

bir sınıf pantograf tipli gecikmeli diferensiyel-operatör ifadesinin vektör-fonksiyonların $L^2(H,(0,1))$ Hilbert uzayında doğurduğu minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemelerinin sınır değerleri dilinde genel gösterimi elde edilmiş ve daha sonra bu tip genişlemelerin spektrum yapıları hakkında kesin bulgulara ulaşılmıştır. Elde edilen sonuçlar "3rd International Conference on Applied Mathematics & Approximation Theory-AMAT 2015 Computational Analysis" [53] konferansında sunulmuş ve "Computational Analysis: AMAT 2015, Springer International Publishing, Chapter 21"[54] kitabında basına kabul edilmiştir.

(3) H, bir ayrılabilir Hilbert uzayı, her $m=1,2,...,n$ için $A_m(\cdot):[0,1]\to L(H)$ operatör-fonksiyonu düzgün operatör topolojisinde sürekli ve $0<\alpha_m\le 1,\ 0\le\lambda_m\le 1,\ 0<\gamma_m\le 1$ olmak üzere

$$l(u)=u'(t)+\sum_{m=1}^{n}A_m(t)u\left(\alpha_m\left|t-\lambda_m\right|^{\gamma_m}\right)$$

şeklinde birinci mertebeden lineer fonksiyonel (genelleştirilmiş pantograf tipli) diferensiyel-operatör ifadesinin vektör-fonksiyonların $L^2(H,(0,1))$ Hilbert uzayında doğurduğu minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemelerinin sınır değerleri dilinde genel gösterimi elde edilmiş ve daha sonra bu tip genişlemelerin spektrum yapıları hakkında kesin sonuçlara ulaşılmıştır. Elde edilen sonuçlar "Journal of Mathematical Chemistry," [55] dergisinde yayınlanmıştır.

(4) Her $n\ge 1$ için H_n bir ayrılabilir Hilbert uzayı, $J_n=(a_n,b_n)\subset\mathbb{R}$, $\mathcal{H}_n=L^2(H_n,J_n)$, $-\infty<\inf\limits_{n\ge 1}a_n<\sup\limits_{n\ge 1}b_n<\infty$, $\inf\limits_{n\ge 1}|J_n|>0$, $A_n(\cdot):[a_n,b_n]\to L(H_n)$ operatör-fonksiyonu düzgün operatör topolojisinde sürekli, $\sup\limits_{n\ge 1}\sup\limits_{t\in J_n}\left\|A_n(t)\right\|<\infty$, $\alpha_n:[a_n,b_n]\to[a_n,b_n]$ fonksiyonları sınırlı tersinir, $\alpha_n,\left(\alpha_n^{-1}\right)'\in C[a_n,b_n]$, $\sup\limits_{n\ge 1}\left(\left\|\left(\alpha_n^{-1}(t)\right)'\right\|\right)^{1/2}<\infty$ ve $l_n(u_n)=u_n'(t)+A_n(t)u(\alpha_n(t))$ olmak üzere

$$l(u)=\left(l_n(u_n)\right),\ u=(u_n)$$

şeklindeki birinci mertebeden lineer çok noktalı fonksiyonel (özel durumda pantograf) diferensiyel-operator ifadesinin $\mathcal{H}=\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ direk toplam uzayı üzerinde ürettiği minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemelerinin sınır değerleri dilinde genel gösterimi elde edilerek bu tip genişlemelerin spektrum yapısı hakkında kesin sonuçlara ulaşılmıştır. Elde edilen sonuçlar "Electronic Journal of Differential Equations" [56] dergisinde yayınlanmıştır.

4. ÖNERİLER

(1) Benzer problemler ikinci mertebeden pantograf tipli diferensiyel-operatör ifadeler için de serbest inceleme konusu olabilir.

(2) Sonlu veya sonsuz aralık üzerinde tanımlı vektör-fonksiyonların Hilbert uzayında sınırlı olmayan sabit veya değişken operatör katsayılı birinci veya ikinci mertebeden diferensiyel ifadelerin doğurduğu minimal operatörün tüm sınırlı tersinir genişlemelerinin genel gösterimi ve spektral analizi yeni bir araştırma konusu olabilir.

(3) Matematik literatürden de görüldüğü gibi bu tezde bakılan problemlerin $L_p\left(H,(0,1)\right),\ 1 \le p \le \infty,\ p \ne 2$ uzayında incelenmesi de büyük önem taşımaktadır. Bu tip problemlere M.O. Otelbayev yönteminden yararlanarak serbest şekilde bakılabilir.

(4) Bu tezde alınan sonuçların daha fazla ve faydalı uygulama alanları bulunabilir.

5. KAYNAKLAR

1. von Neumann, J., Allgemeine Eigenwerttheorie Hermetischer Funktionaloperatoren, Math. Ann., 102 (1929-1930) 49-131.

2. Vishik, M.I., On Linear Boundary Problems for Differential Equations, Doklady Akad. Nauk SSSR, 65 (1949) 785-788 (in Russian).

3. Vishik, M.I., On General Boundary Problems for Eliptic Differential Equations, Amer. Math. Soc. Transl. II, 24 (1963) 107-172.

4. Kochubei, A.N., On Extensions of Positive Defined Symmetric Operator, Doklady Akademii Nauk, Ukrain SSR, 3 (1979) 168-171 (in Russian).

5. Dezin, A.A., A Introduction to a General Problems in the Theory of Boundary Value Problems, Springer-Verlag, 1987.

6. Kokebaev, B.K., Otelbaev, M. ve Shynybekov, A.N.,On The Theory of Contraction and Extension of Operators. I, Izv. Akad. Nauk Kazakh. SSR Ser. Fiz.-Mat., 5 (1982) 24-26 (in Russian).

7. Kokebaev, B.K., Otelbaev, M. ve Shynybekov, A.N., On The Theory of Contraction and Extension of Operators. II, Izv. Akad. Nauk Kazakh. SSR Ser. Fiz.-Mat.,1, 110, (1983) 24-26.

8. Kokebaev, B.K., Otelbaev, M. ve Shynybekov, A.N. On Questions of Extension and Restriction of Operator, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 6 (1983) 1307-1310 (in Russian).

9. Ismailov, Z.I., Description of All Regular Operators for First-Order Differential Equations in a Hilbert space, Ukrain. Mat. Zh.,3 (1985) 361-363 (in Russian).

10. Pivtorak, N.I., Solvable Boundary Value Problems for an Operator-Differential Equations of Parabolic type, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., 9 (1985) 104-107.

11. Krein, S.G., Linear Differential Equations in Banach Space, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1974.

12. Daleckii, Yu.L. ve Krein, M.G., Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1974.

13. Gorbachuk, V.I. ve Gorbackhuk, M.I. Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

14. Yakubov, S. ve Yakubov, Y., Differential Operator Equations Ordinary and Partial Differential Equations, Chapman& Hall/CRC, USA, 1999.

15. Rofe-Beketov, F.S. ve Kholkin , A.M., Spectral Analysis of Differential Operators, World Scientific Monograph Series in Mathematics, vol.7 (World Scientific Publishing Co.Pte. Ltd., Hanckensack, NJ) 2005.

16. Ockendon, J.R. ve Tayler, A.B., The Dynamics of a Current Collection System for an Electric Locomotive, Proceeding of the Royal Society of London A: Mathematical and Physical Sciences, 322, (1971) 447-468.

17. Kato, T. ve Mc.Leod, J.B., The Functional Differential Equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, Bulletin of the American Mathematical Society, 77 (1971) 891-937.

18. Fox, L., Mayers, D.F., Ockendon, J.R. ve Tayler, A.B, On a Functional Differential Equation, Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, 8 (1971) 271-307.

19. Iserles, A., On the Generalized Pantograph Functional-Differential Equation, Europen Journal of Applied Mathematics, 4,1 (1993) 1-38.

20. Aiello, W.G., Freedman, H.I.ve Wu, J., Analysis of a Model Representing Stage-Structured Population Growth With State-Dependent Time Delay, SIAM Journal on Applied Mathematics, 52,3 (1992) 855-869.

21. Buhmann, M. ve Iserles, A., Stability of the Discretized Pantograph Differential Equation, Mathematics of Computation, 60,202 (1993) 575-589.

22. Spiridonov, V.P., The Factorization Method, Self-Similar Potentials and Quantum Algebras, in Special Functions 2000: Current Perspective and Future Directions, vol.30 of NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry Springer, Amsterdam, The Netherlands, (2001) 335-364.

23. Mahler, K., On a Special Functional Equation, J. London Math. Soc., 15 (1940) 115-123.

24. Ambarzumian, V.A., On the Theory of Brightness Fluctuations in the Milky Way, C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS, 44 (1944) 223-226.

25. Bellen, A., Preservation of Superconvergence in The Numerical Integration of Delay Differential Equations With Proportional Delay, IMA Journal of Numerical Analysis, 22, 4 (2002) 529-536.

26. Bellen, A. ve Zennaro, M., Numerical Methods for Delay Differential Equations, Oxford University Press, Oxford, UK, 2003.

27. Brunner, H., Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.

28. Bellen, A., Brunner, H., Maset, S. ve Torelli, L., Superconvergence in Collocation Methods on Quasi-Graded Meshes For Functional Differential Equations With Vanishing Delays, BIT: Numerical Mathematics, 46,2 (2006) 229-247.

29. Brunner, H. ve Hu, Q., Optimal Superconverges Results For Delay İntegro-Differential Equations of Pantograph Type, SIAM Journal on Numerical Analysis, 45,3 (2007) 986-1004.

30. Ali, I., Brunner, H. ve Tang, T., A Spectral Method For Pantograph-Type Delay Differential Equations and Its Convergence Analysis, Journal of Computational Mathematics, 27,2-3 (2009) 254-265.

31. Ishiwata, E., Muroya, Y. ve Brunner, H., A-Super-Attainable Order in Collocation Methods for Differential Equations with Proportional Delay, Applied Mathematics And Computation 198, (2008) 227-236.

32. Ali, I., Brunner, H. ve Tang, T., Spectral Methods for Pantograph-Type Differential and Integral Equations With Multiple Delays, Front. Math. China, 4,1 (2009) 49-61.

33. Bellman, R. ve Cooke, K.L., Differential-Difference Equations, 462p., Academic Press, New York, London, 1963.

34. Rynne, B.P. ve Youngson, M.A. Linear Functional Analysis, Springer, 2008.

35. Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John and Sons, 1978.

36. Aiprantis, D. ve Burkinshaw, O., Principles of Real Analysis, Academic Press, New York, 1998.

37. Gohberg, I.C., Goldberg, S. ve Kaashoek, M.A., Basic Classes of Linear Operators, Birkhauser, Berlin, 2003.

38. Narici, L. ve Bachman G., Functional Analysis, Academic Press, Inc. London, 1972.

39. Akhizer, N.I. ve Glazman, I.M., Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces, Dover Publications, 1994.

40. Hirsh, F. ve Lacombe, G., Elements of Functional Analysis, Verlag, New York, 1999.

41. Dunford, N. ve Schwartz, J. T., Linear Operators, I; Interscience, New York, 1958.

42. Locker, J., Self-Adjointness for Multi-Point Differential Operators, Pasific J. Math., 45 (1973) 561-570.

43. Kochubei, A.N., Symmetric Operators and Nonclassical Spectral Problems, Mat. Zametki, 25, 3 (1979) 425-434.

44. Naimark, M.A., Linear Differential Operators, Frederick Ungar Publishing Co., Inc., London, 1968.

45. Hörmander, L., On the Theory of General Partial Differential Operators, Acta Math. 94, (1955) 161-248.

46. Feng, X., An Analytic Study on the Multi-Pantograph Delay Equations with Variable Coefficient, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, 56,104,2 (2013) 205-215.

47. Naimark, M.A. ve Fomin, S.V., Continuous Direct Sums of Hilbert Spaces and Some of Their Applications, Uspehi Mat. Nauk, 10,2,64 (1955) 111-142 (in Russian).

48. Ismailov, Z.I., Otkun Çevik, E. ve Ünlüyol, E., Compact Inverses of Multipoint Normal Differential Operators for First Order, Electronic Journal of Differential Equations, 89 (2011) 1-11.

49. Otkun Çevik, E. ve Ismailov, Z.I., Spectrum of the Direct Sum of Operators, Electronic Journal of Differential Equations,210 (2012) 1-8.

50. Ismailov, Z.I. ve Ipek, P., Spectrums of Solvable Pantograph Differential-Operator for First Order, Abstract and Applied Analysis , (2014) 1-8.

51. Ismailov, Z.I., Otkun Çevik, E., Güler, B.O. ve Ipek, P., Structure of Spectrum of Solvable Pantograph Differential Operators for First Order, AIP Confence Proceedings 1611,89 (2014) 89-94.

52. Ismailov, Z.I. ve Ipek, P., Structure of Spectrum of Solvable Delay Differential Operators for First Order, Journal of Analysis&Number Theory, 7, (2015) 1-7.

53. Ismailov, Z.I. ve Ipek, P., Spectrums of Solvable Pantograph Type Delay Differential Operators for First Order, 3rd International Conference on Applied Mathematics & Approximation Theory-AMAT 2015, Mayıs 2015, TOBB Üniversitesi, Ankara, Bildiri Kitabı: 81.

54. Ismailov, Z.I. ve Ipek, P., Spectrums of Solvable Pantograph Type Delay Differential Operators for First Order, Computational Analysis:AMAT 2015, Springer International Publishing, Chapter 21, (2016) 281-292.

55. Ismailov, Z.I., Güler, B.Ö. ve Ipek, P., Solvability of First Order Functional Differential Operators, Journal of Mathematical Chemistry, 53 (2015) 2065-2077.

56. Ismailov, Z.I. ve Ipek, P., Solvability of Multipoint Differential Operators of First Order, Electronic Journal of Differential Equations, 36 (2015) 1-10.

ÖZGEÇMİŞ

Pembe İPEK, 1988 yılında Nevşehir'de doğdu. İlköğrenimini Nuh Eskiyapan İlköğretim Okulu'nda lise öğrenimini ise Rauf Denktaş Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı Lise Bölümü)'nde tamamladı. 2006-2007 Eğitim-Öğretim yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü programında lisans eğitimine başladı. 2010 yılında lisans eğitiminden matematikçi ünvanıyla mezun oldu. 2010-2011 Eğitim-Öğretim yılında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tezli Yüksek Lisans (Matematik) programına başladı. 2011-2012 Eğitim-Öğretim yılında "Weyl Çemberi Durumundaki Sturm-Liouville Operatörleri" adlı teziyle yüksek lisansını bitirdi. 2012-2013 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora (Matematik) programına kabul edildi. Ocak 2013 tarihinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı'na ÖYP Araştırma Görevlisi olarak atandı. Yabancı dili ingilizedir.

Tez konusu kapsamında yayınlanan bilimsel eserler veya makaleler ve bildiriler şunlardır:

1. Ismailov, Z.I. ve Ipek, P., Spectrums of Solvable Pantograph Differential-Operator for First Order, Abstract and Applied Analysis 2014, (2014) 1-8. (Bölüm 2.1)

2. Ismailov, Z.I., Otkun Çevik, E., Güler, B.O. ve Ipek, P., Structure of Spectrum of Solvable Pantograph Differential Operators for First Order, AIP Confence Proceedings 1611,89 (2014) 89-94. (Bölüm 2.1)

3. Ismailov, Z.I. ve Ipek, P., Structure of Spectrum of Solvable Delay Differential Operators for First Order, Journal of Analysis&Number Theory, 7, (2015) 1-7. (Bölüm 2.1)

4. Ismailov, Z.I. ve Ipek, P., Solvability of Multipoint Differential Operators of First Order, Electronic Journal of Differential Equations , 2015 (2015), 36, 1-10. (Bölüm 2.4)

5. Ismailov, Z.I. ve Ipek, P., Spectrums of Solvable Pantograph Type Delay Differential Operators for First Order, 3rd International Conference on "Applied Mathematics & Approximation Theory-AMAT 2015", ANKARA, TÜRKİYE, 28-31 Mayıs 2015, pp.81. (Bölüm 2.2)

6. Ismailov, Z.I., Güler, B.Ö. ve Ipek, P., Solvability of first order functional differential operators, Journal of Mathematical Chemistry, 53 (2015) 2065-2077. (Bölüm 2.3)

7. Ismailov, Z.I. ve Ipek, P., Spectrums of Solvable Pantograph Type Delay Differential Operators for First Order, Computational Analysis: AMAT 2015, Springer International Publishing, Chapter 21, 2016. (Bölüm 2.2)