

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**AĞSIZ ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN YÖNTEMİNİN OPTİMİZASYONU VE**  
**ADAPTİF ALGORİTMALARLA UYGULAMALARI**

**DOKTORA TEZİ**

**Süleyman ŞENGÜL**

**MAYIS 2016**  
**TRABZON**



**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**AĞSIZ ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN YÖNTEMİNİN OPTİMİZASYONU VE  
ADAPTİF ALGORİTMALARLA UYGULAMALARI**

**Süleyman ŞENGÜL**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde  
DOKTOR (MATEMATİK)  
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12 / 04 / 2016**

**Tezin Savunma Tarihi : 20 / 05 / 2016**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erhan COŞKUN**

**Trabzon 2016**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Matematik Anabilim Dalında  
Süleyman ŞENGÜL Tarafından Hazırlanan**

**AĞSIZ ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN YÖNTEMİNİN OPTİMİZASYONU VE  
ADAPTİF ALGORİTMALARLA UYGULAMALARI**

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 26 /04/2016 gün ve 1650 sayılı  
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda  
**DOKTORA TEZİ**  
olarak kabul edilmiştir.

**Jüri Üyeleri**

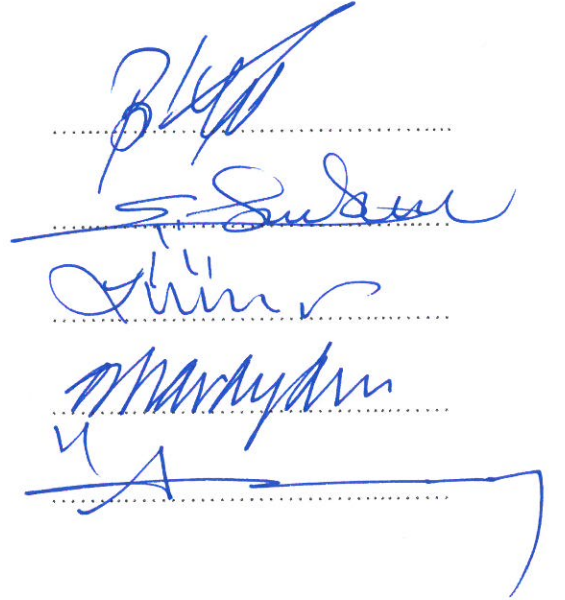
**Başkan : Prof. Dr. Bülent KARASÖZEN**

**Üye : Prof. Dr. Erhan COŞKUN**

**Üye : Prof. Dr. İhsan ÜNVER**

**Üye : Prof. Dr. Orhan AYDIN**

**Üye : Prof. Dr. Ömer AKIN**

The image shows four handwritten signatures in blue ink, each written over a horizontal dotted line. The signatures are: 1. Bülent Karasözen (Chairman), 2. Erhan Coşkun, 3. İhsan Ünver, and 4. Orhan Aydın. The signature of Ömer Akın is not visible.

**Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ**

**Enstitü Müdürü**

## ÖNSÖZ

Bu çalışmada ağsız yöntemler içerisinde Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi incelenmiş olup bu yöntem için adaptif algoritmalar önerilmiştir.

Bu çalışmanın hazırlanması süreci boyunca önerileri, yönlendirmeleri ve sağladığı motivasyonla bana rehberlik yapan, tecrübelerini esirgemeyen ve her daim yanımda olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erhan COŞKUN'a en içten dileklerle saygı ve minnetimi sunuyorum. Aynı zamanda bu tez aşamasında değerli görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan tez izleme jüri üyesi hocalarım, Sayın Prof. Dr. İhsan ÜNVER ve Sayın Prof. Dr. Orhan AYDIN'a ve tez jürisi üyelerim Sayın Prof. Dr. Bülent KARASÖZEN ve Sayın Prof. Dr. Ömer AKIN'a teşekkürü bir borç bilirim. Yine yetişmemde emeği geçen matematik bölümündeki tüm değerli hocalarıma çok teşekkür ediyorum.

Ayrıca tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini her daim arkamda hissettiğim aileme, eğitim-öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan tüm hocalarıma, yardımlarını ve desteğini esirgemeyen mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Süleyman ŞENGÜL  
Trabzon 2016

## **TEZ ETİK BEYANNAMESİ**

Doktora Tezi olarak sunduğum ‘‘Ağsız Eleman Bağımsız Galerkin Yönteminin Optimizasyonu ve Adaptif Algoritmalarla Uygulamaları’’ başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Erhan COŞKUN’un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 20 / 05 / 2016

Süleyman ŞENGÜL

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ .....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER .....	V
ÖZET .....	VIII
SUMMARY .....	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	X
TABLolar DİZİNİ.....	XV
ALGORİTMALAR DİZİNİ .....	XVI
SEMBOLLER DİZİNİ .....	XVII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş .....	1
1.2. Diferensiyel Denklemlerin Güçlü, Zayıf ve Varyasyonel Şekilleri.....	2
1.3. Ağsız Yöntemler.....	5
1.4. Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi .....	6
1.5. Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi(HEKKY).....	9
1.6. Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi(HEKKY) ile Şekil Fonksiyonlarının Oluşturulması.....	12
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	15
3. BULGULAR.....	20
3.1.1. Ağırlık Fonksiyonları ve Özellikleri.....	20
3.1.2. Şekil Fonksiyonlarının Özellikleri.....	28
3.1.3. Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi(Element Free Galerkin Method(EFG)) .	46
3.1.4. Sayısal İntegrasyon.....	51
3.1.5. Düzgün Dağıtılmış Düğüm Noktaları İçin Sistem Matrisini Oluşturmada Gerekli Aritmetik İşlem Sayısı .....	58
3.1.5.1. $O(1)$ İşlemde Sistem $K$ Matrisinin Hesaplanması .....	61
3.1.6. Şekil Fonksiyonlarını Elde Etmek İçin Gerekli Aritmetik İşlem Sayısı.....	64
3.1.6.1. $O(1)$ İşlemde Sistem Şekil Fonksiyonlarının ve Türevlerinin Hesaplanması..	71

3.1.7.	Sonlu Farklar Yöntemi, Sonlu Elemanlar Yöntemi ve Eleman Bağımsız Galerkin Yönteminin Karşılaştırılması.....	73
3.1.8.	Ağırsız Yöntemlerde Adaptivite .....	80
3.1.9.	Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi ile Yaklaşım Hatası.....	81
3.1.10.	Çözümü Zamanla Değişmeyen Problemler İçin Adaptif Yaklaşım-1 .....	84
3.1.11.	Çözümü Zamanla Değişmeyen Problemler İçin Adaptif Yaklaşım-2.....	95
3.1.12.	Ağırsız Yöntemin Özdeğer Problemlerine Uygulanması .....	101
3.2.	Başlangıç-Sınır Değer Problemlerine Ağırsız Eleman Bağımsız Galerkin Yönteminin Uygulanması.....	108
3.2.1.	Neumann Sınır Şartlı Başlangıç Değer Problemleri.....	108
3.2.1.1.	İleri Euler Yöntemi .....	112
3.2.1.2.	Crank-Nicolson Yöntemi.....	113
3.2.1.3.	Geri Euler Yöntemi.....	114
3.2.2.	Dirichlet Sınır Şartlı Başlangıç Sınır Değer Problemi.....	119
3.2.3.	Zaman Bağımlı Kısmi Diferensiyel Denklemler İçin Adaptivite.....	126
3.2.4.	Konveksiyon Problemleri İçin Adaptivite .....	131
3.3.	2 Boyutlu Uzayda Ağırsız Yöntem .....	135
3.3.1.	2 Boyutlu Uzayda Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi .....	135
3.3.2.	2 Boyutlu Uzayda Şekil Fonksiyonlarının Elde Edilmesi .....	137
3.3.3.	2 Boyutlu Uzayda Ağırlık Fonksiyonları .....	139
3.3.4.	Şekil Fonksiyonlarının Etkin Şekilde Hesaplanması.....	141
3.3.5.	Düğüm Noktalarının Etki Alanları .....	143
3.3.6.	Şekil Fonksiyonlarının Özellikleri.....	148
3.3.7.	2 Boyutlu Uzayda Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi.....	161
3.3.8.	Sayısal İntegrasyon.....	164
3.3.9.	Sistem Matrisini Hesaplamak İçin Gerekli Kayan Nokta Aritmetik İşlem(Floating Point Operation(Flop)) Sayısı .....	166
3.3.10.	2 Boyutlu Uzayda Düzgün Dağıtılmış Düğüm Noktaları İçin Aritmetik İşlem Sayısının Optimizasyonu .....	171
3.3.11.	2 Boyutlu Uzayda Şekil Fonksiyonlarını Hesaplama Gerekli Aritmetik İşlem Sayısı.....	174
3.3.12.	Şekil Fonksiyonlarının Öteleme Özelliği Yardımıyla $K$ Matrisinin Elde Edilmesi .....	183
3.3.13.	2 Boyutlu Adaptif Bir Yöntem .....	191

3.3.13.1. Yapılan Çalışmalar .....	191
3.3.13.2. Adaptif Algoritma.....	193
3.3.13.3. Adaptif Yöntem ile 2 Değişkenli Fonksiyonlarda Ağ Üretimi.....	196
3.3.13.4. Hessian Tabanlı Adaptif Yöntemin İki Boyutlu Problemlere Uygulanması ..	201
4. SONUÇLAR.....	212
5. ÖNERİLER.....	213
6. KAYNAKLAR .....	214
7. EKLER .....	224
ÖZGEÇMİŞ	





Doktora Tezi

ÖZET

AĞSIZ ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN YÖNTEMİNİN OPTİMİZASYONU VE ADAPTİF ALGORİTMALARLA UYGULAMALARI

Süleyman ŞENGÜL

Karadeniz Teknik Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
Danışman: Prof. Dr. Erhan COŞKUN  
2016, 223 Sayfa, 2 Ek Sayfa

Bu çalışmada, diferensiyel denklemlerin çözümü için güncel yöntemler olarak kabul edilen ağsız yöntemler içerisinde Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi göz önüne alınmıştır. Eleman Bağımsız Galerkin yönteminde şekil fonksiyonları Hareketli En Küçük Kareler yöntemi ile elde edilmektedir. Ağsız yöntemler, sonlu elemanlar yöntemindeki belirli kurallara uyması gereken ağ inşa işlemini gerektirmeyerek, sayısal hesaplamaların daha pratik biçimde elde edilmesine imkân vermektedirler.

Birinci bölümde hareketli en küçük kareler yöntemi ile elde edilen şekil fonksiyonlarının ötelemeye göre değişmez olması gibi bazı yeni özellikleri türetilerek, bu özellikler yardımıyla şekil fonksiyonları mevcut uygulamalara kıyasla çok daha az aritmetik işlem sayısı ile elde edilmiştir. Şekil fonksiyonlarının elde edilen bu özellikleri sistem matrisinin oluşturulma yükünü de büyük ölçüde azaltmıştır. Ayrıca 1 boyutlu problemlerde elde edilen yaklaşık çözümlerin duyarlılığını artırmak için adaptif algoritmalar önerilmiştir ve çözümü zamanla değişmeyen(stasyoner) problemler üzerinde test yapılmıştır.

İkinci bölümde söz konusu adaptif algoritmalar zaman bağımlı ve tek boyutlu problemlere genişletilmiş ve lineer ve lineer olmayan problemler üzerinden uygulamalar gerçekleştirilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde ise bir boyutlu uzayda elde edilen şekil fonksiyonunun özelliklerinin 2 boyutlu uzayda da geçerli olduğu ispatlanarak sistem matrisini elde etmede gerekli aritmetik işlem sayısı önemli derecede azaltılmıştır. Ayrıca 2 boyutlu uzayda Hessian tabanlı adaptif bir algoritma önerilerek zaman bağımsız ve 2 boyutlu kısmi türevli denklemler üzerinde uygulamalar gerçekleştirilmiştir.

Elde edilen sonuçlar önerilen adaptif algoritmalarla elde edilen sonuçların, düzgün ağ ile elde edilenlere kıyasla daha hassas olduğunu göstermektedir. Fakat artan adaptivite adımlarının, hesaplama yükünü artırdığından büyük boyutlu problemler için paralel algoritmaların kullanılması gerekli olabilir.

**Anahtar Kelimeler:** Ağsız Yöntemler, Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi, Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi, Şekil fonksiyonları, İnterpolasyon

PhD. Thesis

SUMMARY

OPTIMIZATION OF MESHLESS GALERKIN METHOD AND APPLICATIONS WITH SOME  
NEW ADAPTIVE ALGORITHMS

Süleyman ŞENGÜL

Karadeniz Technical University  
The Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Mathematics Graduate Program

Supervisor: Prof. Dr. Erhan COŞKUN  
2016, 223 Pages, 2 Appendix Pages

In this study, among the family of Meshless Methods, we consider Element Free Galerkin Method for solving differential equations. In Element Free Galerkin Method, shape functions are obtained using Moving Least Square Method. Unlike the Finite Element Methods, Meshless Methods do not require construction of a mesh, thus enable us to determine approximate solution using less computational effort.

In the first Section, some new properties of shape functions including translation invariance property are derived and these properties are used to obtain shape functions on a given computational domain with considerably less number of floating point operations. This approach also has led to construction of associated algebraic system with less computation work as compared to conventional practice. Furthermore, adaptive algorithms are proposed for one dimensional stationary problems to have better accuracy in approximate solution.

In Section two, the adaptive algorithms are generalized to time-dependent linear and nonlinear problems.

In Section three, we show that the translation invariance property of shape functions also hold in two dimensional domains and that this property leads to considerable computational savings. Furthermore, a Hessian based adaptive strategy is proposed and implemented for some problems on two dimensional domains.

The results show that solutions obtained by adaptive algorithms are much more accurate, however, as the number of steps in adaptivity increases, the computational load also increases which then may require appropriate parallel algorithms for large size problems.

**Key Words:** Meshless methods, Element Free Galerkin Method, Moving Least Square Method, Shape functions, Adaptivity , Interpolation

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa No

Şekil 1. Düğüm noktaları ve ağırsız yöntemdeki sayısal yaklaşım .....	12
Şekil 2. $x_6 = 0.5$ düğüm noktasındaki ağırlık fonksiyonu $w(y - x_6)$ .....	23
Şekil 3. $y$ noktasına etki eden ağırlık fonksiyonları .....	25
Şekil 4. Aynı eksen de şekil ve ağırlık fonksiyonlarının grafikleri(-:şekil, :ağırlık) .....	29
Şekil 5. $d_{max} = 3$ alınması durumunda 0.5 merkezli şekil ve ağırlık fonksiyonları ....	32
Şekil 6. (W2) ağırlık fonksiyonları için $d_{max} = 2$ değerine karşılık gelen grafikler....	33
Şekil 7. (W3) ağırlık fonksiyonları için $d_{max} = 2, \beta = 0.3$ değerlerine karşılık gelen grafikler.....	33
Şekil 8. Farklı $d_{mi}$ parametreleri için 0.5 merkezli şekil fonksiyonları .....	35
Şekil 9. $d_{mi} = x_{i+1} - x_i$ seçildiği durum için ağırlık fonksiyonları .....	36
Şekil 10. $d_{mi} = 3(x_{i+1} - x_i)$ değeri için şekil fonksiyonlarının grafikleri .....	44
Şekil 11. Düğüm noktaları arası uzaklık 0.1 için (1) probleminin sayısal çözümü.....	54
Şekil 12. Düğüm noktaları arası uzaklık 0.05 için (1) probleminin sayısal çözümü .....	54
Şekil 13. Düzgün dağıtılmamış düğüm noktaları için (1)'in sayısal çözümü.....	55
Şekil 14. (52) probleminin eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile çözümü .....	57
Şekil 15. (1) problemi için $h = 0.1$ seçilmesi durumunda yöntemlerin (62)'de verilen hata grafikleri.....	75
Şekil 16. (1) problemi için $h = 0.05$ seçilmesi durumunda yöntemlerin (62)'de verilen hata grafikleri.....	75
Şekil 17. (64) probleminin farklı $\epsilon$ değerleri için analitik çözüm grafikleri.....	76
Şekil 18. (64) probleminde $h = 0.1$ seçilmesi durumunda yöntemlerin (62)'de verilen hata grafikleri.....	77
Şekil 19. (64) probleminde $h = 0.05$ değeri için yöntemlerin (62)'de verilen hata grafikleri .....	77
Şekil 20. (65) probleminde $h = 0.1$ için (62)'de verilen hata grafiği .....	78
Şekil 21. (1) probleminde $a = 0.01$ parametresi ve düzgün düğüm noktaları için sayısal çözümün bağıl hata dağılımı.....	86
Şekil 22. (ALG-2) algoritması ile oluşturulan $r$ -adaptif düğüm noktaları .....	87
Şekil 23. (1) probleminin $r$ -adaptif düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözümünün bağıl hata dağılımı.....	87

Şekil 24. (1) probleminin düzgün düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm grafiği.....	88
Şekil 25. (1) probleminin $r$ -adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözüm grafiği.....	88
Şekil 26. Düzgün düğüm noktaları için (73) probleminin sayısal çözüm grafiği.....	89
Şekil 27. $\varepsilon = 0.005$ için (73) probleminin $r$ -adaptif çözüm grafiği .....	89
Şekil 28. $h = 2, k = 5$ için (74) probleminin düzgün düğüm noktaları ile sayısal çözümü.....	92
Şekil 29. $h = 2, k = 5$ için (74) probleminin $r$ -adaptif yöntem ile sayısal çözümü .....	92
Şekil 30. Farklı parametre değerleri için (74) probleminin $r$ -adaptif ağırsız yöntem ile sayısal çözümü.....	93
Şekil 31. $h = 1, k = 2$ için (74) probleminin düzgün düğüm noktaları ile sayısal çözümü.....	94
Şekil 32. (74) problemde $h = 1, k = 2$ için Homotopi yöntemi ile ağırsız yöntemin uygulanması.....	95
Şekil 33. (1) ile verilen problemde $a = 0.005$ için $h$ -adaptif çözüm grafiği .....	97
Şekil 34. (1) ile verilen problemde $a = 0.001$ için $h$ -adaptif çözüm grafiği .....	98
Şekil 35. (76) problemde $a = 0.01$ için $h$ -adaptif çözüm grafiği .....	98
Şekil 36. (76) problemde $a = 0.01$ için düzgün düğüm noktaları ile elde edilen çözüm grafiği.....	99
Şekil 37. (74) problemde $k = 10, h = 2$ için $h$ -adaptif çözüm grafiği .....	99
Şekil 38. (74) problemde $k = 30, h = 5$ için $h$ -adaptif çözüm grafiği .....	100
Şekil 39. (74) problemde $k = 70, h = 10$ için $h$ -adaptif çözüm grafiği.....	100
Şekil 40. (79) probleminin sayısal özdeğerleri için mutlak hata grafiği.....	103
Şekil 41. (79) problemde bazı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar .....	104
Şekil 42. (83) problemi için bazı özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar .....	106
Şekil 43. (87) probleminin ileri Euler yöntemiyle $t = 0.05$ 'deki sayısal çözümü.....	116
Şekil 44. (87) probleminin ileri Euler yöntemiyle elde edilen kararsız çözümü .....	116
Şekil 45. (87)'deki ısı probleminin Crank-Nicolson yöntemi ile çözümü.....	117
Şekil 46. $\Delta t = 0.2$ için (87) probleminin Crank-Nicolson yöntemi ile çözümü .....	118
Şekil 47. (114) probleminin $t = 0.4$ anında Crank-Nicolson yöntemi ile çözümü.....	121
Şekil 48. $t = 4.3669 \times 10^{-7}$ anında (114) probleminin açık yöntem ile çözümü .....	121
Şekil 49. (114) probleminin açık yöntem ile elde edilen kararsız çözümü.....	122
Şekil 50. Kararlılığın sağlanmadığı durum için (87) probleminin sayısal çözümü .....	126

Şekil 51. $h = 3, k = 5$ parametre değerleri için (122) probleminin $r$ -adaptif çözümleri .....	128
Şekil 52. $h = 3, k = 5$ parametre değerleri için (122) probleminin $r$ -adaptif çözümleri .....	129
Şekil 53. $h = 10, k = 15$ parametre değerleri için (122) probleminin $r$ -adaptif çözümleri .....	129
Şekil 54. $h = 30, k = 15$ parametre değerleri için (122) probleminin $r$ -adaptif çözümleri .....	130
Şekil 55. Örnek 1'deki için $h$ -adaptif çözüm grafikleri .....	132
Şekil 56. Örnek 2 için $h$ -adaptif çözüm grafikleri .....	133
Şekil 57. $v = 5, k = 3$ için bazı zaman değerlerinde $h$ -adaptif çözüm grafikleri .....	134
Şekil 58. (0.5,0.5) merkezli düğüm noktasındaki şekil fonksiyonu.....	140
Şekil 59. (0.5,0.5) merkezli düğüm noktasındaki şekil fonksiyonunun $x$ 'e göre türevi .....	141
Şekil 60. (0.5,0.5) merkezli düğüm noktasındaki şekil fonksiyonunun $y$ 'ye göre türevi .....	141
Şekil 61. $d_{max} = 2$ için keyfi bir $\mathbf{X} = (x, y)$ noktasının destek bölgesi.....	145
Şekil 62. $d_{max} = 2$ için köşe ve sınır hücrelere etki eden düğüm noktaları .....	146
Şekil 63. $\Omega^o, \Omega^o$ ve $\Omega^{ol}$ kümelerinin elemanları.....	147
Şekil 64. $d_{max} = 2$ için $(x, y)$ noktasının destek bölgesindeki düğüm noktaları .....	159
Şekil 65. İntegral hücreleri ve düğüm noktalarının şematik gösterimi .....	166
Şekil 66. İntegral hücreleri.....	168
Şekil 67. Öteleme özelliği kullanılmadığı durumda (167)'de verilen $R$ matrisini hesaplamadaki CPU zamanları .....	186
Şekil 68. Öteleme özelliği kullanılması durumunda (167)'de verilen $R$ matrisini hesaplamadaki CPU zamanları .....	186
Şekil 69. Öteleme özelliği kullanılmadığı durumda $K$ matrisini hesaplamadaki CPU zamanları.....	187
Şekil 70. Öteleme özelliği kullanıldığı durumda $K$ matrisini hesaplamadaki CPU zamanları.....	187
Şekil 71. Problem 1 için $y = 0.4$ 'deki çözüm grafikleri .....	190
Şekil 72. Problem 2'nin $y = 0.4$ 'deki çözüm grafikleri.....	190
Şekil 73. Problem 3'ün $y = 0.4$ 'deki çözüm grafikleri.....	190
Şekil 74. Adaptivite yapılan integral hücresi .....	194
Şekil 75. Adaptif düğüm noktası .....	195

Şekil 76.	Örnek 1'deki $f$ fonksiyonunun grafiği.....	196
Şekil 77.	Örnek 1'deki fonksiyon için düzgün ve 1. adaptif düğüm noktaları.....	196
Şekil 78.	Örnek 1'deki fonksiyon için 3. ve 4. adaptif düğüm noktaları .....	197
Şekil 79.	4. adaptif düğüm noktaları .....	197
Şekil 80.	Örnek 2'deki fonksiyonun grafiği .....	198
Şekil 81.	Örnek 2'deki $f$ fonksiyonu için elde edilen adaptif düğüm noktaları .....	198
Şekil 82.	Örnek 3'deki fonksiyonun grafiği .....	199
Şekil 84.	Örnek 3'deki fonksiyon için 3. ve 4. adaptif düğüm noktaları .....	200
Şekil 85.	Örnek 4'teki fonksiyonun grafiği .....	200
Şekil 86.	Sınır katman problemi için adaptif düğüm noktaları .....	201
Şekil 87.	Örnek 1 için düzgün düğüm noktaları.....	202
Şekil 88.	Örnek 1 için düzgün düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm.....	202
Şeki 89.	Örnek 1 için 1. adaptif düğüm noktaları .....	203
Şekil 90.	Örnek 1 için 1. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm .....	203
Şekil 91.	Örnek 1 için 2. adaptif düğüm noktaları .....	203
Şekil 92.	Örnek 1 için 2. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözüm .....	204
Şekil 93.	Örnek 1 için 3. adaptif düğüm noktaları .....	204
Şekil 94.	Örnek 1 için 3. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözüm grafiği.....	205
Şekil 95.	Örnek 2 için düzgün düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm.....	205
Şekil 96.	Örnek 2 için adaptif düğüm noktaları .....	206
Şekil 97.	Örnek 2 için 1. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm .....	206
Şekil 98.	Örnek 2 için 2. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm .....	207
Şekil 99.	Örnek 2 için 3. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm .....	207
Şekil 100.	Örnek 3 için düzgün düğüm noktaları için çözüm grafikleri.....	207
Şekil 101.	Örnek 4 için adaptif düğüm noktaları.....	208
Şekil 102.	Örnek 3 için 1. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözüm grafikleri....	208
Şekil 103.	Örnek 3 için 2. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözüm grafikleri....	209
Şekil 104.	Örnek 3 için 3. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözüm grafikleri....	209
Şekil 105.	Örnek 3 için 4. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözüm grafikleri....	209
Şekil 106.	Örnek 3 için düzgün düğüm noktaları .....	210
Şekil 107.	Örnek 3 için 1. adaptif düğüm noktaları.....	210

Şekil 108. Örnek 3 için 2. adaptif düğüm noktaları.....	210
Şekil 109. L shaped problemi için adaptif çözüm grafiği.....	211



## TABLolar DİZİNİ

### Sayfa No

Tablo 1. Şekil fonksiyonları ve $x$ eksenindeki bölgenin alanı.....	36
Tablo 2. Farklı $d_{max}$ ve $a$ değerleri için (50)'de verilen hata değerleri .....	53
Tablo 3. Düğüm noktaları arası uzaklığın farklı değerleri için (51)'deki hata değerleri ..	55
Tablo 4. Neumann sınır şartlı problem için EFG yönteminin (51)'deki hata değerleri ....	57
Tablo 5. Şekil fonksiyonlarının elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısı.....	66
Tablo 6. Şekil fonksiyonlarının türevlerinin elde edilmesinde aritmetik işlem sayısı .....	69
Tablo 7. Düzgün düğüm noktaları için öteleme özelliği kullanılmadığı durumda sistem matrisi için CPU değerleri .....	72
Tablo 8. Düzgün düğüm noktaları için öteleme özelliği kullanılması durumunda sistem matrisi için CPU değerleri .....	72
Tablo 9. Farklı $h$ değerleri için yöntemlerin (63) ile verilen $E$ hata normları .....	76
Tablo 10. Farklı $h$ değerleri için yöntemlerin (63)'de verilen $E$ hata normları .....	78
Tablo 11. Farklı $h$ değerleri için yöntemlerin (63)'de verilen $E$ hata normları .....	79
Tablo 12. (79) probleminin analitik ve sayısal özdeğerleri.....	103
Tablo 13. (83) probleminin analitik ve sayısal özdeğerleri.....	105
Tablo 14. $h = k = 1$ parametre değerleri için (85) probleminin özdeğerleri.....	107
Tablo 15. $A$ matrisinin özdeğerleri.....	115
Tablo 16. $\Delta t = 0.2$ için Crank-Nicolson yönteminin mutlak hata tablosu .....	118
Tablo 17. Şekil fonksiyonlarının elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısı.....	176
Tablo 18. Şekil fonksiyonlarının $x$ değişkenine göre türevinin elde edilmesindeki aritmetik işlem sayısı .....	179
Tablo 19. Şekil fonksiyonlarının $x$ 'e göre türevlerinin elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısı .....	181
Tablo 20. Şekil fonksiyonlarının türevlerinin bir integral hücrelerinde elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısı .....	183
Tablo 21. (165)'de verilen $K$ matrisini elde etmede CPU zamanları ve (171)'deki oran .	188
Tablo 22. Poisson probleminin farklı $d_{max}$ parametreleri için (172)'deki hata tablosu...	189
Tablo 23. Adaptif çözümlerdeki hata .....	209



## ALGORİTMALAR DİZİNİ

	<b><u>Sayfa No</u></b>
ALG 1. 1 boyutlu uzayda sayısal integral alma.....	52
ALG 2. $r$ -adaptif düğüm noktaları .....	85
ALG 3. $h$ -adaptif düğüm noktaları .....	96
ALG 4. 2 boyutlu uzayda sayısal integral alma.....	165
ALG 5. 2 boyutlu uzayda Hessian tabanlı adaptif algoritma .....	194



## SEMBOLLER DİZİNİ

$A$	: Potansiyel fonksiyonu
$\tau$	: Boyutsuz sıcaklık parametresi
$\kappa$	: Ginzburg Landau parametresi
$\Psi$	: Düzen fonksiyonu
$\lambda$	: Özdeğer
$x_i$	: Düğüm noktaları
$\phi_i^h$	: $i$ . şekil fonksiyonu
$\phi_h$	: 1 boyutlu uzayda şekil fonksiyonları vektörü
$\Phi_h$	: 2 boyutlu uzayda şekil fonksiyonları vektörü
$A_h$	: Gram matrisi
$B_h$	: Sağ yan matrisi
$w_i$	: $i$ . düğüm noktasındaki ağırlık fonksiyonu
$u^h$	: Yaklaşım fonksiyonu
$\delta_{ij}$	: Kronecker delta fonksiyonu
$\rho(A)$	: $A$ matrisinin spektral yarıçapı
$\Omega$	: Problemin tanım bölgesi
$\Gamma$	: Problemin sınır bölgesi
$\Delta x$	: Yer değişkeninin $x$ yönündeki adım uzunluğu
$\Delta y$	: Yer değişkeninin $y$ yönündeki adım uzunluğu
$\Delta t$	: Zaman adım uzunluğu
$\Omega_i$	: Tanım 2 ile verilen $i$ . düğümün etki alanı
$\Omega_d^x$	: Tanım 3 ile verilen keyfi bir $x$ noktasının destek bölgesi
$\Omega_{td}$	: Tanım 5 ile verilen tamamen $\Omega$ destekli şekil fonksiyonlarının kümesi
$\dot{\Omega}$	: (148) ile verilen 2 boyutlu uzaydaki düğüm noktalarının kümesi
$\Omega^\circ$	: (149) ile verilen 2 boyutlu uzayda herhangi bir $(x, y)$ noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktalarının kümesi
$\overline{\Omega^\circ}$	: (150) ile verilen 2 boyutlu uzayda $(x - \Delta x, y)$ noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktalarının kümesini

$\Omega^{\circ\downarrow}$	: (151) ile verilen 2 boyutlu uzayda $(x, y - \Delta y)$ noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktalarının kümesini
$W^{\circ}$	: 2 boyutlu uzayda herhangi bir $(x, y)$ noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktaları ile ilişkili ağırlık fonksiyonları kümesi
$\overline{W^{\circ}}$	: 2 boyutlu uzayda $(x - \Delta x, y)$ noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktaları ile ilişkili ağırlık fonksiyonları kümesi
$W^{\circ\downarrow}$	: 2 boyutlu uzayda $(x, y - \Delta y)$ noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktaları ile ilişkili ağırlık fonksiyonları kümesi
$r$	: Normalleşmiş yarıçap
$d_{mi}$	: 1 boyutlu uzayda (28) ile verilen etkinlik yarıçapı
$d_{max}$	: (28)'de verilen etkinlik yarıçapını belirleyen parametre
$c_i$	: (28)'de verilen $i$ . şekil fonksiyonunun etkinlik yarıçapını belirleyen parametre
$d_{mx}$	: 2 boyutlu uzayda (139) ile verilen $x$ yönündeki etkinlik yarıçapı
$d_{my}$	: 2 boyutlu uzayda (139) ile verilen $y$ yönündeki etkinlik yarıçapı
$c_{xi}$	: (139)'da verilen 2 boyutlu uzayda $i$ . şekil fonksiyonunun $x$ yönündeki etkinlik yarıçapını belirleyen parametre
$c_{yi}$	: (139)'da verilen 2 boyutlu uzayda $i$ . şekil fonksiyonunun $y$ yönündeki etkinlik yarıçapını belirleyen parametre
$u_i$	: Düğüm parametreleri
$n$	: Düğüm noktası sayısı
$m$	: Gauss noktası sayısı
$N$	: 2 boyutlu uzayda $x$ yönündeki aralık sayısı
$M$	: 2 boyutlu uzayda $y$ yönündeki aralık sayısı
$\alpha$	: Penaltı parametresi

# 1. GENEL BİLGİLER

## 1.1. Giriş

Diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri için Sonlu Farklar ve Sonlu Elemanlar yöntemlerinin yanı sıra, özellikle 1990'lı yıllarda geliştirilmeye başlanan Ağsız yöntemler mevcuttur. Ağsız yöntemler, Sonlu Fark yöntemlerindeki geometri kısıtlaması ve Sonlu Elemanlar yöntemindeki sabit şekil fonksiyonlarını kullanan kısıtlamalarını ortadan kaldırarak, şekil fonksiyonlarını çözüm sürecinin bir parçası olarak elde etmektedirler.

Günümüze kadar birçok ağsız yöntem geliştirilmiş olup bunları diferensiyel denklemin güçlü şeklini kullanan ağsız yöntemler, zayıf şeklini kullanan ağsız yöntemler ve yerel zayıf şeklini kullanan ağsız yöntemler olarak üç gruba ayırabiliriz. Güçlü şekli kullanan ağsız yöntemlerden bazıları Genel Sonlu Farklar Yöntemi(General Finite Difference Method (GFDM)), Ağsız Kolokasyon(Collacation) Yöntemleri ve Sonlu Nokta Yöntemidir. Zayıf şeklini kullanan ağsız yöntemlere örnek olarak Yayılan Eleman Yöntemi(Diffuse Element Method(DEM)), Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi(Element Free Galerkin(EFG) Method), Radyal Nokta İnterpolasyon Yöntemi(Radial Basis Point Interpolation Method(RPIM)) verilebilir. Yerel zayıf şeklini kullanan ağsız yöntemlerden bazıları ise Ağsız Yerel Petrov-Galerkin(The Meshless Local Petrov-Galerkin(MLPG)) Yöntemi ve Yerel Radyal Nokta İnterpolasyon Yöntemidir(The Local Radial Point Interpolation Method(LRPIM))(Liu ve Gu, 2005). Dolayısı ile ağsız yöntemlerin iyi bir şekilde analiz edilebilmesi için bir diferensiyel denklemin güçlü, zayıf ve yerel zayıf şekillerinin bilinmesi gerekmektedir.

Bu çalışma 3 bölümden oluşmaktadır. 1. bölümde bir diferensiyel denklemin güçlü, zayıf ve varyasyonel şekilleri sınır katmanı içeren bir problem üzerinde verilmiş ve bu şekilleri kullanan ağsız yöntemlere değinilmiştir. Ayrıca, bu ağsız yöntemlerden biri olan ve bu çalışmanın temelini oluşturan Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi ile ilgili genel bilgiler verilmiş olup bu yöntemdeki şekil fonksiyonlarının bazı yeni özellikleri elde edilmiştir. Söz konusu özellikler yardımıyla şekil fonksiyonlarının daha etkin bir biçimde elde edilebileceği ispatlanmış ve nümerik verilerle de bu öneri doğrulanmıştır. Ayrıca bu yöntem için 1 boyutlu uzayda düğüm noktalarının yer değiştirmesi ve yeni düğüm noktası eklenmesi temeline dayalı iki adaptif algoritma önerilerek çözümü zamanla

değişmeyen(stasyonel) problemlere uygulanmıştır. 2. bölümde adi diferensiyel denklemler için geliştirilen adaptif algoritmalar zaman bağımlı diferensiyel denklemlere genişletilmiştir. 3. bölümde ise 2 boyutlu uzayda Hareketli En Küçük Kareler yöntemi ile şekil fonksiyonlarının elde edilmesi aşamaları anlatılarak 1 boyutlu uzayda şekil fonksiyonları için elde edilen özelliklerin 2 boyutlu uzayda da geçerli olduğu gösterilmiştir. Bu özellikler yardımıyla Eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile verilen problemin sistem matrisini elde etmede gerekli aritmetik işlem sayısı önemli ölçüde azaltılmıştır. Ayrıca 2 boyutlu uzaydaki problemler için Hessian tabanlı adaptif bir algoritma önerilerek farklı problemler üzerinde test edilmiştir. Test sonuçlarından önerilen algoritmalar ile denklemin çözümündeki ani değişim bölgelerinde, çözümü iyi temsil eden yaklaşımların elde edildiği gösterilmiştir.

## 1.2. Diferensiyel Denklemlerin Güçlü, Zayıf ve Varyasyonel Şekilleri

Sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi ağırsız yöntemler de diferensiyel denklemlerin güçlü, zayıf veya varyasyonel şekillerine uygulanırlar. Yapılan çalışmaları vermeden önce diferensiyel denklemlerin bu şekillerini bir örnek problem üzerinde inceleyelim.

**Örnek 1.** Sınır katmanı içeren

$$-a \frac{d^2 u}{dx^2} + u = 1, a: \text{sabit}, a > 0 \quad (1)$$

$$u(0) = 0, u(1) = 0 \quad (2)$$

problemini göz önüne alalım(Strang, 1986). (1) diferensiyel denkleminin problemin “güçlü şekli” adı verilir. Denklemin zayıf şekli ise aşağıdaki gibi elde edilir.

(1) diferensiyel denkleminin her iki tarafı elemanları

$V = \{v: v, [0,1]$  aralığında sürekli,  $v'$  parçalı sürekli ve  $[0,1]$  aralığında sınırlı fonksiyon,  $v(0) = v(1) = 0\}$

lineer uzayından alınmış,  $v \in V$ , test fonksiyonu ile çarpılır ve tanım aralığı üzerinde integre edilirse

$$\int_0^1 \left( -a \frac{d^2 u}{dx^2} + u \right) v dx = \int_0^1 1 v dx$$

bulunur. Buradan

$$-a \int_0^1 \frac{d^2 u}{dx^2} v dx + \int_0^1 u v dx = \int_0^1 v dx$$

elde edilir. Birinci integral terimine kısmi integral alma metodu uygulanırsa

$$\int_0^1 \frac{d^2 u}{dx^2} v dx = \frac{du}{dx} v \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$

bulunur. Bu bağıntı son denklemde yerine yazılırsa

$$-a \frac{du}{dx} v \Big|_{x=0}^{x=1} + a \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_0^1 u v dx = \int_0^1 v dx \quad (3)$$

elde edilir.  $v \in V$  olduğundan  $v$  fonksiyonu sınır koşullarını sağlar. Dolayısı ile (3) bağıntısındaki sınır teriminin değeri

$$- \frac{du}{dx} v \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{du}{dx} (0) v(0) - \frac{du}{dx} (1) v(1) = 0$$

dir. Dolayısı ile (3)'teki sınır terimi düşer ve

$$a \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_0^1 u v dx = \int_0^1 v dx, \forall v \in V \quad (4)$$

bağıntısı elde edilir. (4) bağıntısına (1) diferensiyel denkleminin “zayıf şekli” denir.

Sonlu Elemanlarda kullanılan diğer bir yöntem Ritz yöntemidir. Bu yöntem problemin varyasyonel şekline uygulanır. Varyasyonel şekilde, bir fonksiyonel ile çalışılır ve bu fonksiyoneli minimize eden denklem, (1) diferensiyel denkleme karşılık gelir. İkinci mertebeden  $Lv = f$  denkleminin varyasyonel şekli ise  $\forall v \in V$  test fonksiyonu için

$$\min I(v) = \langle Lv, v \rangle - 2 \langle f, v \rangle \text{ veya } \min I(v) = \frac{1}{2} \langle Lv, v \rangle - \langle f, v \rangle$$

ile verilir (Strang, 1986). Burada,  $L$ , (1) diferensiyel denkleminin lineer operatörü ve  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ise iç çarpımdır.  $I$ 'ya ise “fonksiyonel” adı verilir. Burada tanımlanan iç çarpım, reel değerli  $u$  ve  $v$  için

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x) v(x) dx$$

şeklindedir. (1) diferensiyel denklemi için

$$L = -a \frac{d^2}{dx^2} + 1, f = 1$$

olduğundan  $I(v)$  fonksiyoneli

$$\begin{aligned} I(v) &= \langle Lv, v \rangle - 2\langle f, v \rangle = \int_0^1 (-av'' + v)v dx - 2 \int_0^1 1v dx \\ &= \int_0^1 (-av''v + v^2 - 2v) dx \end{aligned}$$

olarak bulunur.  $I(v)$  fonksiyonelindeki ilk terime

$$\int_0^1 v''v dx = vv'|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 v'v' dx$$

kısmi integral alma metodu uygulanırsa

$$I(v) = -avv'|_{x=0}^{x=1} + a \int_0^1 (v')^2 dx + \int_0^1 v^2 dx - 2 \int_0^1 v dx$$

elde edilir.  $v \in V$  olduğundan  $v(0) = v(1) = 0$ 'dır. Dolayısı ile  $I(v)$  fonksiyonelindeki ilk terim düşer. Buradan  $I(v)$  fonksiyoneli

$$I(v) = \int_0^1 (a(v')^2 + v^2 - 2v) dx \quad (5)$$

olarak bulunur.  $\min I(v)$ 'ye (1)-(2) probleminin "varyasyonel şekli" adı verilir.

Eğer  $u \in C^2[0,1]$  ise problemin güçlü şekli, zayıf şekli ve varyasyonel şekli arasında

$$(1) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$$

bağıntısı mevcuttur. Yani,

$$(D) - a \frac{d^2u}{dx^2} + u = 1, u(0) = u(1) = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümü ve

$$(M) \forall v \in V \text{ için } \exists u \in V: I(u) \leq I(v)$$

$$(V) \forall v \in V \text{ için } \exists u \in V: a \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 v dx$$

olmak üzere

$$(D) \Leftrightarrow (M) \Leftrightarrow (V)$$

denklik bağıntısı geçerlidir (Johnson, 2009).

### 1.3. Ağsız Yöntemler

Ağ, önceden tanımlı düğümler ve aralarındaki ilişkilerinden oluşan bir graf olarak düşünülebilir. Sonlu farklar yönteminde ağlar ızgara, sonlu hacimler yönteminde hacim ve hücre, sonlu elemanlar yönteminde ise eleman olarak adlandırılmaktadır. Bu yöntemlerde problemin çözüm aşamasına geçilmeden önce çözüm ağı tanımlanmalıdır.

Sonlu elemanlar yönteminde ağlar, elemanlardan oluşan yapılardır. Bu elemanlar bir boyutlu uzayda doğru parçaları, iki boyutlu uzayda üçgenler veya dikdörtgenler iken üç boyutlu uzayda prizmalar olarak seçilir. Problemin çözüm aşamasına geçilmeden önce elemanlar tanımlanır ve elemanlar üzerinde şekil fonksiyonları oluşturulur. Fakat elemanlar oluşturulurken uyulması gereken koşullara dikkat edilmelidir. Örneğin, hiçbir üçgenin köşesi komşu üçgenin kenarı ile çakışmamalıdır. Ağsız yöntemlerde ise çözüm öncesinde ağ tanımlanmış olması gerekmemektedir. Sadece çözüm bölgesi içerisinde düğüm noktaları almak yeterlidir. Bu düğüm noktalarının yerlerinin seçimi tamamen keyfi olup problemin yapısına uygun olarak belirlenir. Bu noktalar arasında herhangi bir iletişime gerek yoktur. Şekil fonksiyonları ise seçilen düğüm noktaları ile birlikte çözümün bir parçası olarak elde edilir.

Sonlu elemanlar yöntemi sürekli çözüme sahip olan problemlerde iyi sonuçlar verirken çatlak simülasyonu gibi geometride süreksizlik içeren problemlerde sorunlar yaşanmaktadır. Bu sorunlardan bir tanesi süreksizlik içeren bölge etrafında ağ oluşturulması problemidir. Böyle problemlerde bu bölge etrafında ağ oluşturulması aşaması çok zaman harcanmasına neden olmaktadır. Ayrıca sonlu elemanlar yönteminde adaptivite uygulanırken geometri tekrardan daha çok elemanlara bölünür ve bu elemanlar üzerinde şekil fonksiyonları tanımlanır. Bu ise problemin çözüm süresini artırdığı gibi adaptiviteyi de negatif yönde etkilemektedir(Pekedis ve Yıldız, 2010).

Ağsız yöntemlerde herhangi bir ağ oluşturmaya gerek olmadığından süreksizlik içeren problemlerde, süreksiz bölgenin etrafına düğüm noktaları sıkça serpilerek problem çözülür. Dolayısı ile sadece problemin yapısının bilinmesi düğüm noktalarının yerlerinin belirlenmesi için yeterlidir ve doğal olarak ağ oluşturmada karşılaşılan zorluklar bu yöntemde görülmez. Ayrıca şekil fonksiyonları çözümün bir parçası olarak elde edildiğinden sisteme yeni düğüm noktası eklenmesine veya sistemden nokta çıkarılmasına çok uygun bir yöntemdir. Bu yüzden, ağsız yöntemlere adaptivite sonlu elemanlara göre daha kolay uygulanabilmektedir.



Çalışmamızda genel olarak ağırsız yöntemler içerisinde Eleman Bağımsız Galerkin yöntemini inceliyoruz. Bu yöntemde şekil fonksiyonları Hareketli En Küçük Kareler yöntemi ile elde edilmektedir. Öncelikle hareketli en küçük kareler yöntemini inceliyoruz. Ancak bu yönteme değinmeden önce ağırlıklı en küçük kareler yöntemi ile eğri uydurma problemine kısaca göz atalım.

#### 1.4. Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi

Eğri uydurma problemlerinde en çok kullanılan yöntemler arasında en küçük kareler yöntemi ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemi gösterilebilir. Bu yöntemler, bir deney sonucu veya bir araştırma sonucu elde edilen verilere yeterince yakın noktalardan geçen fonksiyonu belirleme problemidir. En küçük kareler yöntemi literatürde çokça bilinen ve kullanılan bir yöntem olduğu için bu bölümde sadece ağırlıklı en küçük kareler yöntemine değinilmektedir. En küçük kareler yöntemi hakkında detaylı bilgi için [(Fasshauer, 2007)]'ye bakınız.

$(x_i, f(x_i)), i = 1, 2, \dots, n$  veri çiftleri verilmiş olsun. Burada,  $x_i \in \mathbb{R}^s$ ,  $s \geq 1$  ve  $f(x_i) \in \mathbb{R}$ 'dir. Yaklaşım uzayı ise

$$\Pi_d^s = \langle p_1, p_2, \dots, p_m \rangle, m < n$$

ile gösterilsin. Burada,  $p_i, i = 1, 2, \dots, m$  'ler en çok  $d$ . dereceden  $s$  değişkenli polinomlardır.

Ağırlıklı en küçük kareler yöntemi,  $x_i$  noktalarına karşılık gelen  $f(x_i), i = 1, 2, \dots, n$  değerleri ile  $u$  yaklaşım fonksiyonu arasındaki farkın  $l_2$  normunu minimize eder. Bu uzaydaki norm

$$\langle f, g \rangle_w = \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)w(x_i) \quad (6)$$

iç çarpımı ile tanımlanan

$$\|f\|_{2,w}^2 = \sum_{i=1}^n [f(x_i)]^2 w(x_i) \quad (7)$$

indirgenmiş normdur. Burada,  $w(x_i), i = 1, 2, \dots, n$  'ler skaler ağırlıklardır.  $u \in \Pi_d^s$  olduğundan yaklaşım fonksiyonu

$$u(x) = \sum_{j=1}^m c_j p_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^s \quad (8)$$

şeklinde yazılır. Burada,  $c_j$ 'ler,  $j = 1, 2, \dots, m$  bilinmeyen katsayılarıdır. Dolayısı ile ağırlıklı en küçük kareler yöntemi

$$\min \|f - u\|_{2,w}$$

edecek şekilde bilinmeyen katsayıları belirler.  $\Pi_d^s$  uzayında  $f$  fonksiyonu için en iyi  $u$  yaklaşımı

$$f - u \perp \Pi_d^s \quad (9)$$

ile belirlenir. (9)'dan

$$\langle f - u, p_k \rangle_w = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

elde edilir. (8)'deki yaklaşım fonksiyonu (10)'da yerine yazılırsa

$$\langle f - \sum_{j=1}^m c_j p_j, p_k \rangle_w = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

bulunur. İç çarpımın özellikleri ile

$$\langle f, p_k \rangle_w - \left\langle \sum_{j=1}^m c_j p_j, p_k \right\rangle_w = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\Leftrightarrow \langle f, p_k \rangle_w - \sum_{j=1}^m c_j \langle p_j, p_k \rangle_w = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^m c_j \langle p_j, p_k \rangle_w = \langle f, p_k \rangle_w, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\Leftrightarrow Ac = f_p \quad (11)$$

olarak elde edilir. (11) sistemindeki  $A$  matrisinin elemanları  $A_{jk} = \langle p_j, p_k \rangle_w$ ,  $1 \leq j, k \leq m$  olup bu matrise ‘‘Gram matrisi’’ adı verilir.  $f_p = [\langle f, p_1 \rangle_w \ \langle f, p_2 \rangle_w \ \cdots \ \langle f, p_m \rangle_w]^T$  vektörüne ‘‘sağ yan vektörü’’ adı verilir. (11)’e ise ‘‘normal eşitlik’’ denir.

Bu problem bir lineer cebir problemi olarak da düşünülebilir.  $(x_i, f(x_i))$  veri çiftleri için (8) ile verilen en iyi yaklaşımı bulmaya çalışalım. Bu takdirde bu veri çiftleri (8) yaklaşımında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m c_j p_j(x_1) &= f(x_1) \\ \sum_{j=1}^m c_j p_j(x_2) &= f(x_2) \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^m c_j p_j(x_n) &= f(x_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Matris formunda ise  $G_{n \times m}$  matrisinin elemanları  $G_{ij} = p_j(x_i)$ ,  $f$  vektörünün elemanları  $f_i = f(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$  olmak üzere

$$Gc = f \quad (12)$$

şeklinde yazılabilir.  $n > m$  olduğundan genelde (12) sisteminin çözümü mevcut değildir. Fakat (12) sistemi yerine  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  değerleri birbirinden farklı olduğu için tek çözümü mevcut olan

$$G^T W G c = G^T W f \quad (13)$$

sistemi çözdürülerek bilinmeyen katsayılar belirlenir. Burada  $W = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_n)$  diagonal ağırlık matrisidir. (11) ile (13)’deki denklem sistemleri karşılaştırıldığında  $A = G^T W G$ ,  $f_p = G^T W f$  olduğu görülür (Fasshauer, 2007).

### 1.5. Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi(HEKKY)

Lancaster ve Salkauskas(Lancaster ve Salkauskas, 1981) tarafından yaklaşım teorisinde kullanılan hareketli en küçük kareler yöntemi, eleman bağımsız Galerkin yönteminde şekil fonksiyonlarını elde etmede kullanılmıştır. Bu yaklaşımın ağırlıklı en küçük kareler yönteminden en önemli farkı yöntemde kullanılan iç çarpım ve bu iç çarpım ile elde edilen normdur. Hareketli en küçük kareler yönteminde iç çarpım

$$\langle f, g \rangle_{w,y} := \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)w(x_i, y), y \in \mathbb{R} \text{ sabit} \quad (14)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $w(x_i, \cdot), i = 1, 2, \dots, n, y$ 'nin bir fonksiyonudur. Dikkat edilirse ağırlıklı en küçük kareler yönteminde tanımlanan iç çarpımdaki ağırlıklar sabit iken hareketli en küçük kareler yönteminde  $y$ 'nin fonksiyonudur. Dolayısı ile (14)'teki iç çarpımın tanımı, problem içerisinde tanımlı ikinci bir değişken getirir. Böylece problem için aranan yaklaşım (8)'den farklı olarak

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^m c_j(y)p_j(x), x \in \mathbb{R}^s \quad (15)$$

şeklinde araştırılır. Burada  $x$ 'i global,  $y$ 'yi ise yerel değişken olarak düşünebiliriz. Bu değişkenler aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Tanım 1.** Tanım kümesi üzerinde değerler alan değişkene “global değişken”, ve yine tanım kümesinde fakat sadece ağırlık fonksiyonlarının sıfırdan farklı olduğu bölgelerde değerler alan değişkene ise “yerel(local) değişken” adı verilir.

(15)'den aranan  $c_j$ 'lerin sabitler olmayıp yerel değişkene bağlı olduğu görülür. Dolayısı ile minimize edilmesi gereken fonksiyon yeni norma göre

$$\|f - u(\cdot, y)\|_{w,y}^2 = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - u(x_i, y)]^2 w(x_i, y) \quad (16)$$

şeklindedir. (15)'deki  $u(\cdot, y)$  yaklaşımı ile (16) bağıntısı minimize edilerek bilinmeyen fonksiyonlar belirlenir. Bununla birlikte ağırlıklar  $y$  ile gösterilen yerel değişken ile hareket ettiğinden yönteme “hareketli en küçük kareler yöntemi” adı verilir.

(16)'nın minimize edilmesi için ağırlıklı en küçük kareler yöntemindeki işlemler tekrarlanırsa normal eşitlik

$$\sum_{j=1}^m c_j(y) \langle p_j, p_k \rangle_{w_y} = \langle f, p_k \rangle_{w_y}, k = 1, 2, \dots, m \quad (17)$$

şeklinde bulunur. Dolayısı ile (17) sistemi, hesaplanması gereken her bir  $y$  değerinde yeniden çözülmesi gerekir. Bu bir dezavantaj olarak görünse de  $m$  ve  $s$ 'nin küçük değerlerinde (17) sisteminin çözümü analitik olarak hesaplanabilir. Böylece her bir  $y$  değeri için bir lineer sistem çözmekten kaçınılabılır.

(17) sisteminin matris formu ise

$$A(y)c(y) = f_p(y) \quad (18)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $A(y)$  matrisinin elemanları

$$A_{jk}(y) = \langle p_j, p_k \rangle_{w_y} = \sum_{i=1}^n p_j(x_i) p_k(x_i) w(x_i, y) \quad (19)$$

şeklinde olup bilinmeyenlerin oluşturduğu vektör

$$c(y) = [c_1(y) \quad c_2(y) \quad \dots \quad c_m(y)]^T$$

dir. Sağ yan vektörü ise

$$f_p(y) = [\langle f, p_1 \rangle_{w_y} \quad \langle f, p_2 \rangle_{w_y} \quad \dots \quad \langle f, p_m \rangle_{w_y}]^T$$

dir.

Herhangi bir  $y$  noktasında (18) sisteminin çözümünün mevcut olması için  $A(y)$  matrisi tersinir olmalıdır. Bunun sağlanması için hesaplama yapılacak her bir  $y$  noktasında  $A(y)$  matrisi veri kümesinden belli sayıda nokta içermesi sınırlaması probleme eklenir. Bu sınırlamaya Kesim 3.1.1'de değinilmiştir. Bu koşul sağlandığı durumda polinom tabanı

lineer bağımsız olduğundan ve ağırlık fonksiyonları pozitif olarak seçildiğinden dolayı Gram matrisi simetrik ve pozitif tanımlıdır (Fasshauer, 2007).

Gram matrisinin genel yapısını görmek için aşağıdaki bazı özel durumları göz önüne alalım.

**Örnek 1.**  $s = 1, d = 1$  olsun. Bu takdirde  $m = 2$  olup  $\prod_d^s = \langle 1, x \rangle$ 'dir. Dolayısı ile (19)'da elde edilen Gram matrisi

$$A(y) = \begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle_{w_y} & \langle 1, x \rangle_{w_y} \\ \langle x, 1 \rangle_{w_y} & \langle x, x \rangle_{w_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w(x_i, y) & \sum_{i=1}^n x_i w(x_i, y) \\ \sum_{i=1}^n x_i w(x_i, y) & \sum_{i=1}^n x_i^2 w(x_i, y) \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.  $f_p$  sağ yan vektörü ise

$$f_p(y) = \begin{bmatrix} \langle f, 1 \rangle_{w_y} \\ \langle f, x \rangle_{w_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n f(x_i) w(x_i, y) \\ \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) w(x_i, y) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu takdirde  $A(y)_{2 \times 2} c(y)_{2 \times 1} = f_p(y)_{2 \times 1}$  sistemi analitik olarak çözümlenerek bilinmeyenler kolaylıkla hesaplanır. Bu şekilde elde edilen  $u$  yaklaşımına “1 boyutlu uzayda lineer yaklaşım” adı verilir.

**Örnek 2.**  $s = 2, d = 1$  olsun. Bu takdirde  $m = 3$  olup problem 2 boyutlu bir problemdir. Dolayısı ile  $\prod_d^s = \langle 1, x, y \rangle$  olup Gram matrisi

$$A(z) = \begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle_{w_z} & \langle 1, x \rangle_{w_z} & \langle 1, y \rangle_{w_z} \\ \langle x, 1 \rangle_{w_z} & \langle x, x \rangle_{w_z} & \langle x, y \rangle_{w_z} \\ \langle y, 1 \rangle_{w_z} & \langle y, x \rangle_{w_z} & \langle y, y \rangle_{w_z} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w(x_i, y_i, z) & \sum_{i=1}^n x_i w(x_i, y_i, z) & \sum_{i=1}^n y_i w(x_i, y_i, z) \\ \sum_{i=1}^n x_i w(x_i, y_i, z) & \sum_{i=1}^n x_i^2 w(x_i, y_i, z) & \sum_{i=1}^n x_i y_i w(x_i, y_i, z) \\ \sum_{i=1}^n y_i w(x_i, y_i, z) & \sum_{i=1}^n x_i y_i w(x_i, y_i, z) & \sum_{i=1}^n y_i^2 w(x_i, y_i, z) \end{bmatrix}$$

ve sağ yan vektörü

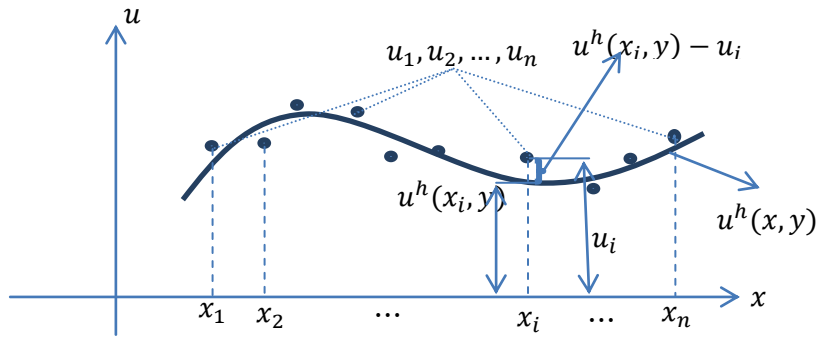
$$f_p(z) = \begin{bmatrix} \langle f, 1 \rangle_{w_z} \\ \langle f, x \rangle_{w_z} \\ \langle f, y \rangle_{w_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) w(x_i, y_i, z) \\ \sum_{i=1}^n x_i f(x_i, y_i) w(x_i, y_i, z) \\ \sum_{i=1}^n y_i f(x_i, y_i) w(x_i, y_i, z) \end{bmatrix}$$

dir. Bu yaklaşıma ise “2 boyutlu uzayda lineer yaklaşım” adı verilir.

**Not.** Ağırlık fonksiyonları genellikle  $|y - x_i|$ 'nin fonksiyonu olarak ifade edildiğinden bundan sonraki bölümlerde  $w(x_i, y)$  yerine  $w(y - x_i)$  notasyonu kullanılmaktadır.

### 1.6. Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi(HEKKY) ile Şekil Fonksiyonlarının Oluşturulması

Belytschko ve arkadaşları(Belytschko vd., 1994) eleman bağımsız Galerkin yönteminde şekil fonksiyonlarını elde etmek için hareketli en küçük kareler yöntemini kullanmışlardır. Bu yöntem ile şekil fonksiyonlarının elde edilmesi aşamaları aşağıdaki gibidir.



Şekil 1. Düğüm noktaları ve ağırsız yöntemdeki sayısal yaklaşım

Kesim 1.5'te bahsedildiği üzere hareketli en küçük kareler yönteminde düğüm değerleri(Şekil 1'de  $u_i, i = 1, 2, \dots, n$ 'ler) ile yaklaşım fonksiyonu (Şekil 1'deki  $u^h(x, y)$ ) arasındaki farkın  $w_y$  normunun minimum olması amaçlanır. Burada  $u_i$ 'ler,  $x_i$  noktasındaki düğüm değerleri olup genel olarak  $u_i \neq u(x_i, x_i)$  dir.

Eğer 1 boyutlu uzayda lineer taban fonksiyonları kullanılırsa (15)'den yaklaşım  $h = \max \{x_{i+1} - x_i\}, i = 1, 2, \dots, n - 1$  olmak üzere

$$u^h(x, y) = a_0(y) + a_1(y)x = [1 \ x] \begin{bmatrix} a_0(y) \\ a_1(y) \end{bmatrix} = p^T(x)a(y) \quad (20)$$

şeklinde olup normal eşitlik ise Kesim 1.5'de Örnek 1'den

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w(y - x_i) & \sum_{i=1}^n x_i w(y - x_i) \\ \sum_{i=1}^n x_i w(y - x_i) & \sum_{i=1}^n x_i^2 w(y - x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(y) \\ a_1(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w(y - x_i) u_i \\ \sum_{i=1}^n x_i w(y - x_i) u_i \end{bmatrix} \quad (21)$$

olarak elde edilir. (21) denklem sisteminin sağındaki ifade

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w(y - x_i) u_i \\ \sum_{i=1}^n x_i w(y - x_i) u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(y - x_1) & w(y - x_2) & \dots & w(y - x_n) \\ x_1 w(y - x_1) & x_2 w(y - x_2) & \dots & x_n w(y - x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \\ = B_h(y)u$$

$$\Rightarrow B_h(y) = \begin{bmatrix} w(y - x_1) & w(y - x_2) & \dots & w(y - x_n) \\ x_1 w(y - x_1) & x_2 w(y - x_2) & \dots & x_n w(y - x_n) \end{bmatrix} \quad (22)$$

şeklinde yazılabilir. Bilinmeyenlerin oluşturduğu vektör ise

$$a(y) = \begin{bmatrix} a_0(y) \\ a_1(y) \end{bmatrix}$$

olarak alınırsa (21) denklem sistemi

$$A_h(y)a(y) = B_h(y)u \quad (23)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $A_h(y)$  matrisi



$$A_h(y) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w(y-x_i) & \sum_{i=1}^n x_i w(y-x_i) \\ \sum_{i=1}^n x_i w(y-x_i) & \sum_{i=1}^n x_i^2 w(y-x_i) \end{bmatrix} \quad (24)$$

dir.

Bilinmeyenlerin oluşturduğu vektör (23)'ten

$$a(y) = A_h^{-1}(y)B_h(y)u$$

olarak bulunur. Dolayısı ile aranan yaklaşım (20)'den

$$u^h(x, y) = p^T(x)a(y) = p^T(x)A_h^{-1}(y)B_h(y)u \quad (25)$$

şeklinde bulunur. (25)'teki yaklaşım fonksiyonu ise

$$u^h(x, y) = \phi_h(x, y)u$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\phi_h(x, y) = [\phi_1^h(x, y) \quad \phi_2^h(x, y) \quad \dots \quad \phi_n^h(x, y)] = p^T(x)A_h^{-1}(y)B_h(y) \quad (26)$$

şeklinindedir. Sonuç olarak aranan yaklaşım

$$u^h(x, y) = \phi_h(x, y)u = [\phi_1^h(x, y) \quad \phi_2^h(x, y) \quad \dots \quad \phi_n^h(x, y)] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n \phi_i^h(x, y)u_i \quad (27)$$

dir. Buradaki  $\phi_i^h(x, y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  fonksiyonuna “şekil fonksiyonu” adı verilir ve

$$\phi_i^h(x, y) = \sum_{j=0}^m p_j(x) \left( A_h^{-1}(y)B_h(y) \right)_{ji} = p^T A_h^{-1}(B_h)_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (28)$$

dir. Burada  $(B_h)_i$ ,  $B_h$  matrisinin  $i$ . sütunudur (Dolbow ve Belytschko, 1998).

## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Ağısız yöntemlerin gelişimi Kolokasyon(Collocation) yönteminden 70 yıl daha eskiye dayanır(Slater, 1934; Frazer vd. 1937). İlk ağısız yöntemlerden bazıları keyfi ağların seçilmesi ile oluşturulan Genel Sonlu Farklar Yöntemidir(General Finite Difference Method(GFDM))(Girault, 1974; Pavlin ve Perrone, 1975; Snell vd. 1981; Liszka ve Orkisz, 1980; Krok ve Orkisz, 1989) (Liu ve Gu, 2005). Bu çalışmalardan sonra farklı ağısız yöntem türleri geliştirilmiştir. Bu yöntemleri problemin güçlü şeklini kullanan ağısız yöntemler, zayıf şeklini kullanan ağısız yöntemler ve yerel zayıf şeklini kullanan ağısız yöntemler olarak üç gruba ayırabiliriz.

Güçlü şekli kullanan yöntemlerde genel olarak Kolokasyon tekniği ile düğüm noktalarında ve sınırlarda problem ayrıklaştırılarak sayısal çözümler elde edilir. Bu yöntemlerden bazıları Genel Sonlu Farklar Yöntemi(GFDM), (Girault, 1974; Pavlin ve Perrone, 1975), Ağısız Kolokasyon Yöntemleri(Kansa, 1990; Wu, 1992) ve Sonlu Nokta Yöntemidir(Finite Point Method(FPM))(Onate vd., 1996). Güçlü şekli kullanan yöntemler basit bir algoritmaya sahip olması ve tamamen ağısız yöntem olması gibi özelliklerden dolayı avantajlı bir yöntemdir. Fakat genelde kararsız ve özellikle türev içeren sınır koşullu problemlerde hatalı sonuçlar vermesi en önemli dezavantajlarıdır. Araştırmacılar türev içeren sınır koşulları için Hermite tip şekil fonksiyonları veya türev içeren sınırlarda düzgün ağ yapısı kullanmak gibi farklı yöntemler ile bu dezavantajı ortadan kaldırmaya çalışmaktadırlar(Liu ve Gu, 2005).

Zayıf şekli kullanarak elde edilen çözümlerde türev içeren sınır koşulları probleme doğrudan uygulandığı ve güçlü şekildeki türevlerin bir derece düşük mertebesine kadar türevlerin hesaplanması gerektiğinden güçlü şekle göre daha avantajlıdır. Bu şekil kullanılarak elde edilen yöntemlerden bazıları problemin genel(global) zayıf şeklini kullanırken bazıları ise yerel(local) zayıf şeklini kullanmaktadır. Genel zayıf şekilde problemin çözüm bölgesinde integral alınması gerekirken yerel zayıf şekilde integraller, çözüm bölgesinin bir alt bölgesi olan  $\Omega_q \subset \Omega$  ve bu bölgenin sınırı olan  $\Gamma_q$  üzerinde tanımlanır. Genel zayıf şekilde integrallerin sayısal olarak hesaplanması için genel artalan(background) hücrelerinin tanımlanması gerekirken yerel zayıf şekilde buna ihtiyaç yoktur. Bu yüzden genel zayıf şekil yaklaşımları tamamen ağısız yöntem olmayıp yerel zayıf şekil yaklaşımları tamamen ağısız yöntem olarak adlandırılır(Liu ve Gu, 2005).

Genel zayıf şeklin kullanıldığı ağsız yöntemler 1990'lı yılların öncesine dayanmakla birlikte günümüze kadar bu alanda birçok çalışma yapılmıştır. Nayroles ve arkadaşları(Nayroles vd.,1992) hareketli en küçük kareler yaklaşımını(Moving Least Square(MLS) Method) (Lancaster ve Salkauskas, 1981) kullanarak Yayılan Eleman Yöntemini(Diffuse Element Method(DEM)) geliştirmişlerdir. Belytschko ve arkadaşları(Belytschko vd., 1994a) ise DEM yöntemini baz alan Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemini(Element Free Galerkin Method(EFG)) geliştirmişlerdir. Bu yöntem birkaç farklılık haricinde DEM ile aynıdır. Bu farklılıklar olarak esas sınır koşullarının uygulanması için Lagrange çarpanları yönteminin kullanılması, şekil fonksiyonlarının türevlerinin tam olarak hesaplanması gösterilebilir. Radyal Nokta İnterpolasyon Yöntemi (Radial Basis Point Interpolation Method(RPIM)) ise 2001'de G.R. Lui ve Gu(Liu ve Gu, 2001c), 2000'de G.R. Lui ve Wang(Wang ve Liu, 2000) tarafından geliştirilmiştir. Bu yöntemde şekil fonksiyonlarını elde etmede kullanılan polinomsal Nokta İnterpolasyon Yönteminde(Point Interpolation Method(PIM))(Liu ve Gu, 1999) oluşan matrisin singülerliğinden kurtulmak için PIM'e radyal taban fonksiyonları eklenmiştir. Bir diğer genel zayıf şekil yaklaşımı ise 1995 yılında Liu ve arkadaşları(Liu vd., 1995) tarafından önerilen Çekirdek Üreten Parçacık Yöntemidir(The Reproducing Kernel Particle Method(RKPM) (Liu ve Gu, 2005)). Bu yöntemin ana fikri orijinal çekirdeğin düzenleyici bir fonksiyon yardımıyla oluşturulmasıdır.

Bir diğer zayıf şekil yaklaşımı Babuska ve Melenk tarafından önerilen bir yöntem olan Birimin Parçalanması Yöntemidir(Partition of Unity)(Babushka ve Melenk, 1997). Bu yöntemin temelini, parçalanmış birimin alınıp herhangi bir yaklaşım tabanı ile çarpılması ile yeni ve daha iyi bir yaklaşım tabanının elde edilmesidir. Duarte ve Oden birimlerin parçalanması ile yeni fonksiyonlar bulmayı arzularken, hp-bulutları(hp-cloud)(Duarte ve Oden, 1995) yöntemini geliştirmişlerdir.

Yerel zayıf şekli kullanan yöntemler olarak Ağsız Yerel Petrov-Galerkin(The Meshless Local Petrov-Galerkin(MLPG)) Yöntemi(Atluri ve Zhu, 1998a) ve Yerel Radyal Nokta İnterpolasyon Yöntemi(The Local Radial Point Interpolation Method(LRPIM))(Liu ve Gu, 2000b) verilebilir. MLPG yönteminde şekil fonksiyonları EFG yöntemindeki gibi hareketli en küçük kareler yöntemi ile hesaplanırken LRPIM yönteminde RPIM'deki radyal taban fonksiyonları kullanılır. Bu yöntemlerde sayısal integral alma işlemi için bir hücre yapısının tanımlanmasına ihtiyaç duyulmamakta, sadece yerel bölgelerin ve yerel bölge sınırlarının tanımlanması yeterli olmaktadır(Liu ve Gu, 2005).

Bu çalışmada bu yöntemler içerisinde EFG yöntemi kullanılmıştır. Bu yüzden bundan sonraki kısımlarda sadece bu yöntemin kullanıldığı çalışmalara yer verilmiştir. Bu yöntemde düğüm noktaları arasında herhangi bir eleman tanımlanmadığından süreksizlik içeren problemlere kolayca uygulanabilmektedir. Yöntem, Belystchko, T. ve arkadaşları tarafından süreksizlik içeren çatlak büyümeleri problemlerine(Belystchko vd., 1995, 1995, 1996, 2000) uygulanmıştır. Krysl, P. ve Belystchko, T. tarafından önce ince kabuk problemlerine(Krysl ve Belystchko, 1996) daha sonra ise ince levha problemlerine(Krysl ve Belystchko, 1996) uygulanmıştır. Lu, Y.Y. ve arkadaşları(Lu vd., 1995) ise dalga yayılımı ve dinamik kırılmalar üzerinde yöntemi uygulamışlardır. Süreksizlik içeren katı mekaniği problemlerine çeşitli araştırmacılar tarafından uygulanmış(Cordes ve Moren, 1996, Xu ve Saigal, 1998, Yanjin vd., 2009, Li ve Belystchko, 2001, Xin vd., 2007 vb.) ve yöntem üzerinde gerilme enerjisi tabanlı hata analizleri yapılmıştır(Chung ve Belytscko, 1998). Cingoski, V. ve arkadaşları(Cingoski, V., 1998), Parreira, G. ve arkadaşları(Parreira, 2006) elektromanyetik alan hesaplama problemlerine, Brighent, R.(Brighent, 2005) 3 boyutlu kırılma mekaniği problemlerine, Belinda, J. ve arkadaşları(Belinda vd., 2005, 2006) izotropik olmayan simetrik levhaların elastik ve elasto-plastik analiz problemlerine uygulamışlardır. Singh, I.V. ve Jain, P.K.(Singh ve Jain, 2005) tarafından ısı transfer problemine uygulanarak bu problem için paralel algoritma önermişlerdir. Fortan ve MPI programları kullanılarak yapılan paralelleştirme ile hem hızlanmanın hem de etkinliğin arttığını gözlemlemişlerdir. Feng, D. ve arkadaşları(Feng, 2015) yer radarı modellenmesinin nümerik simülasyonlarında EFG yöntemini uygulamışlardır. Yöntemi, Wang, H.S. ve arkadaşları(Wang vd., 2015) lineer ve lineer olmayan materyallerin termo-mekanik dinamik kırılma problemlerine, Zhang ve arkadaşları (Zhang vd., 2008) ise MHD akış problemlerine uygulamışlardır EFG yönteminin uygulandığı diğer problemlerden bazıları ise giriş problemi(Pandey vd., 2013), 3. dereceden lineer olmayan Kdv denklemi(Wang vd., 2010), elektromanyetik alan hesaplama problemleri(Liu vd., 2004; Yu ve Jia, 2008; Louai, 2007; Hao vd., 2001; Xuan vd., 2004), Burger denklemi(Zhang vd., 2008), Eddy akım problemleri(Bottauscio vd., 2006), kararsız lineer olmayan ısı akış problemleri(Singh vd., 2007) vd. olarak verilebilir. Ağsız yöntem Çalışkan(Çalışkan, 2006) tarafından ise bazı tek boyutlu problemlere uygulanmıştır.

Hareketli en küçük kareler(Moving Least Square(MLS)) yönteminde oluşabilecek iyi durumda olmayan(ill-conditioned) matrisi önlemek için interpolate hareketli en küçük kareler

yöntemi(Interpolating Moving Least Square(IMLS)) yöntemi önerilmiştir. Bu yöntemde taban fonksiyonları dikleştirilerek şekil fonksiyonları hareketli en küçük kareler yöntemi ile elde edilmiştir. Bu sayede iyi durumlu(well-conditioned) bir sistem denklemi elde edilmiş olup şekil fonksiyonları Kronecker delta fonksiyon özelliğini sağlarlar:  $\phi_i, i$ . şekil fonksiyonu olmak üzere

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

dir. Dolayısı ile sınır koşulları doğrudan probleme uygulanabilmektedir. IMLS yöntemi birçok probleme uygulanmış olup bunlardan bazıları 2 boyutlu çatlak problemleri(Cheng ve Li, 2006, Zhang, 2008), elastodinamik problemleri(Zhang vd., 2013, Peng vd., 2014), elastoplastik problemleri(Cheng vd., 2013), potansiyel problemleri(Ren ve Cheng, 2012), biyolojik popülasyon problemleri(Zhang vd., 2014), ısı tranfer problemleri(Zhang vd., 2013, Zhao ve Ren, 2014) genelleştirilmiş Benjamin-Bono-Mahony-Burger ve düzenlenmiş(regularized) uzun dalga problemleri(Dehghan vd., 2015) 3 boyutlu dalga denkleminde(Zhang, 2012), vb. dir. IMLS yönteminin kompleks değişkenli yaklaşımı ise 2 boyutlu Schrödinger denkleminde(Zhang vd., 2014), potansiyel problemlerine(Cheng vd., 2012, Li, 2015)), büyük şekil değiştirme(deformasyon) problemlerine(Cheng vd., 2012, Li vd., 2012), büyük şekil değiştirmeli elastoplastik problemlerine(Li vd., 2014, Peng ve Cheng, 2011), çatlak problemlerine(Cheng ve Li, 2006), konveksiyon-difüzyon problemlerine(Wang ve Cheng, 2013), elastise problemlerine(Bai vd., 2012, Peng vd., 2009) vb. uygulanmıştır. IMLS-Ritz yöntemi ise sistem denkleminin Ritz yöntemi ile elde edildiği problemlere IMLS yaklaşımının uygulanması ile elde edilen yaklaşımdır. Bu yöntem 2 boyutlu elastodinamik problemlerine(Zhang vd., 2015, Wang ve Liew, 2015), elastise problemlerine(Zhang ve Liew, 2014) vb. uygulanmıştır.

Belytstchko ve arkadaşları tarafından süreksizlik içeren problemler için birimin parçalanması temeline dayanan XFEM yöntemi önerilmiştir. Bu yöntem ile süreksiz bölge, alınan elemanların tekrar ayrıklaştırılmasına veya düğümlerin yerlerinin tekrar düzenlemesine ihtiyaç duyulmadan analiz edilmiştir. Bu yöntemde süreksiz bölge komşuluğunda farklı taban fonksiyonları tanımlanarak yaklaşım uzayına eklenmiştir. Kullanılan yeni taban fonksiyonlarına güçlendirilmiş(enriched) fonksiyonlar adı verilir(Ghorashi, 2015). XFEM yöntemi eleman bağımsız Galerkin yönteminde süreksizlik içeren problemlere genişletilmiştir. Geliştirilen bu yöntem genişletilmiş eleman bağımsız Galerkin(XEFG) yöntemi adı verilir. Bu yöntem ilk olarak Belytstchko ve arkadaşları

tarafından süreksizlik içeren çatlak problemlerine uygulanmıştır(Belystchko vd., 1995, 1995, 1996). Daha sonra yöntem kohezif(cohesive) kırılma problemlerine(Rabzuck ve, Zi, 2006, Goudarzi ve Mohammadi, 2015), lineer elastik kırılma problemlerine(Ventra vd., 2006), kırılma mekaniğine(Belystchko vd., 1994, Sukumar vd., 1997, Brighenti, 2015, Xu ve Saigal, 1998, Rao ve Rahman, 2000, Fleming vd., 1997), iki materyalin arayüzündeki kırılma problemleri(Pathak vd., 2012), çatlak büyümelerine(Jameel ve Harmain, 2015), termo mekanik problemlerine(Wang, 2015), betonarme yapılar içerisindeki çatlak başlangıcı ve büyümesi problemlerine(Rabzuck vd., 2008) vb. uygulanmıştır.



### 3. BULGULAR

Bu bölümde ilk olarak ağırlık fonksiyonlarının genel özelliklerini vererek şekil fonksiyonlarının sağladığı yeni özellikleri elde ediyoruz. Söz konusu özellikleri daha sonra sistem matrisinin elde edilmesinde kullanarak sistemin işlem yükünü optimize etmeyi amaçlıyoruz.

#### 3.1.1. Ağırlık Fonksiyonları ve Özellikleri

Bu bölümde literatürde en çok kullanılan ağırlık fonksiyonları verilerek bir düğüm noktasının etki alanına ve destek bölgesine değinilmektedir. Ayrıca (24)'teki  $A_h$  matrisinin tersinir olması için gerekli koşullar belirtilmektedir.

Şekil fonksiyonlarının elde edilmesi aşamalarından görüleceği üzere ağırlık fonksiyonlarının seçimi hareketli en küçük kareler yaklaşımında önemli rol oynamaktadır. Şimdiye kadar yapılan çalışmalarda  $w(y - x_i)$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ , fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde seçilmiştir:

- Ağırlık fonksiyonlarının sıfırdan farklı değerler aldığı destek bölgesi içerisinde  $w(y - x_i) > 0$
- $w(y - x_i)$  ağırlık fonksiyonu, destek bölgesi içerisinde  $x_i$  noktasının solunda monoton artan,  $x_i$  noktasının sağında monoton azalan fonksiyon
- $w(y - x_i)$  sürekli bir fonksiyondur.

Son özellik ile polinom taban fonksiyonlarının kullanıldığı hareketli en küçük kareler yöntemi için  $w(y - x_i)$  ağırlık fonksiyonları  $C^1$  sınıfından ise  $\phi_i^h(x, y)$  şekil fonksiyonları da  $C^1$  sınıfındadır(Lancaster ve Saulkauskas, 1981). Yukarıdaki özellikler sağlandığı sürece ağırlık fonksiyonlarının seçimi keyfidir. Araştırmacılar tarafından farklı ağırlık fonksiyonları kullanılsa da genel olarak kullanılan ağırlık fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

#### 1. Kübik spline fonksiyon(W1)

$$w(y - x_i) \equiv w(r) = \begin{cases} 2/3 - 4r^2 + 4r^3, & r \leq 0.5 \\ 4/3 - 4r + 4r^2 - 4/3r^3, & 0.5 < r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$

## 2. Kuadratik spline fonksiyon(W2)

$$w(y - x_i) \equiv w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$

## 3. Üstel fonksiyon(W3)

$$w(y - x_i) \equiv w(r) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{r}{\beta}\right)^2}, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$

Yukarıdaki fonksiyonlarda  $\beta$  bir sabit ve  $r = \|y - x_i\|/d_{mi}$  olup  $r$  'ye "normalleştirilmiş yarıçap" denir.  $d_{mi} > 0$  'a ise  $i$ . düğümün etki alanının boyutu adı verilir.  $w(y - x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ise " $x_i$  merkezli ağırlık fonksiyonu" olarak adlandırılır(Liu ve Gu, 2005).

Etki alanın boyutu  $d_{mi}$  bir düğümde

$$d_{mi} = d_{max}c_i \quad (29)$$

ile hesaplanır. Burada,  $d_{max}$  statik problemlerde tipik olarak 2.0 ile 4.0 arasında seçilen skaler parametredir.  $c_i, i = 1, 2, \dots, n$  ise  $A_h$  matrisinin tersinir olması için seçilen bir parametre olup kullanıcı tarafından belirlenir. Fakat bir boyutlu problemlerde genelde bir düğümün komşu düğümlere olan maksimum uzaklığı olarak seçilebilir. Bu sayede her bir düğümün destek bölgesi içerisinde en az iki komşu düğüm noktası bulunur(Dolbow ve Belytschko, 1998).

(28)'de verilen şekil fonksiyonlarının özelliklerini vermeden önce bu bölümde kullanacağımız bazı tanımları verelim.

**Tanım 2.**  $\Omega \subset \mathbb{R}$  problemin tanım bölgesi,  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  'ler  $\Omega$  'da seçilen düğüm noktaları ve herhangi  $i, 1 \leq i \leq n$ , için  $\Omega_i = \{x \in \Omega | \phi_i^h(x, y) \neq 0\}$  olsun. Bu takdirde  $\Omega_i$  bölgesine  $\phi_i^h(x, y)$ 'nin "etki alanı (influence domain)" adı verilir.

**Teorem 1.**  $x_i$  merkezli şekil fonksiyonunun etki alanı,  $\Omega_i = [x_i - d_{mi}, x_i + d_{mi}] \cap \Omega$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 'dir.

**İspat.** (28) ile

$$\phi_i^h(x, y) = p^T(x)A_h^{-1}(y)(B_h(y))_i, i = 1, 2, \dots, n$$

olup burada  $(B_h)_i$ ,  $B_h$  matrisinin  $i$ . sütunudur.  $p, A_h$  ve  $B_h$  matrisleri yerlerine yazılırsa



$$\phi_i^h(x, y) = [1 \ x] \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w(y - x_i) & \sum_{i=1}^n x_i w(y - x_i) \\ \sum_{i=1}^n x_i w(y - x_i) & \sum_{i=1}^n x_i^2 w(y - x_i) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w(y - x_i) \\ x_i w(y - x_i) \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, n$$

bulunur. Son bağıntıdan görüleceği üzere

$$w(y - x_i) \neq 0 \Rightarrow \phi_i^h(x, y) \neq 0$$

dır. Ağırlık fonksiyonlarının tanımı ile

$$\frac{|y - x_i|}{d_{mi}} \leq 1$$

ise ağırlık fonksiyonlarının değerleri sıfırdan farklıdır. Buradan eğer

$$x_i - d_{mi} \leq y \leq x_i + d_{mi}$$

ise  $w(y - x_i) \neq 0$  'dır. Ayrıca  $y \in \Omega$  olduğundan eğer  $y \in [x_i - d_{mi}, x_i + d_{mi}] \cap \Omega$  ise  $\phi_i^h(x, y) \neq 0$  'dır. Böylece

$$\Omega_i = [x_i - d_{mi}, x_i + d_{mi}] \cap \Omega, i = 1, 2, \dots, n$$

elde edilir. Burada  $\Omega_i, x_i$  düğüm noktasına ait  $y$  yerel değişkeninin “yaşam bölgesidir”.

**Sonuç 1.**  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  merkezli ağırlık fonksiyonu ile şekil fonksiyonunun etki alanları birbirine eşittir.

Bu bölümde kullanacağımız bir diğer önemli kavram ise bir noktanın destek bölgesidir. Tanım 3’de destek bölgesi tanımlanmaktadır.

**Tanım 3.**  $\Omega$  tanım bölgesinde seçilen bir  $x$  noktasının  $\Omega$  içerisinde kalan  $d_{mi}$  yarıçaplı komşuluğuna  $x$  noktasının “destek bölgesi (support domain)” adı verilir. Bir  $x$  noktasının destek bölgesi  $\Omega_d^x \subseteq \Omega$  ile gösterilir.

**Not.** Teorem 1 ve Tanım 3 ile  $\Omega$  tanım bölgesi ve  $x_i, 1 \leq i \leq n$ ’ler tanım bölgesinde seçilen düğüm noktaları olsunlar. Eğer  $x \in \Omega$  noktası, seçilen düğüm noktalarından herhangi birisine eşit ise bu takdirde  $\Omega_d^x = \Omega_i$ ’dir.

**Önerme 1.**  $\Omega_d^x \subseteq \Omega$ ,  $x$  noktasının destek bölgesi ve  $x_i$ , bir düğüm noktası olmak üzere eğer  $x_i \in \Omega_d^x$  ise  $\phi_i^h(x, y) \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$  'dir. Ayrıca  $x_i \notin \Omega_d^x$  ise  $\phi_i^h(x, y) = 0$  'dir.

**İspat.**  $x_i \in \Omega_d^x$  olduğundan  $x_i \in [x - d_{mi}, x + d_{mi}]$ 'dir. Buradan

$$x - d_{mi} \leq x_i \leq x + d_{mi}$$

elde edilir. Eşitsizliklerin her iki tarafı  $-x - x_i$  ile toplanırsa

$$-x_i - d_{mi} \leq -x \leq -x_i + d_{mi}$$

$$\Rightarrow x_i - d_{mi} \leq x \leq x_i + d_{mi}$$

bulunur. Yani,  $\Omega_i, x_i$ 'nin etki alanı olmak üzere Teorem 1 ile  $x \in \Omega_i$ 'dir. Buradan, Tanım 2 ile  $\phi_i^h(x, y) \neq 0$  elde edilir.

Şimdi  $x_i \notin \Omega_d^x$  ise  $\phi_i^h(x, y) = 0$  olduğunu gösterelim. Bu takdirde  $x_i \notin \Omega_d^x$  olduğundan  $|x - x_i| > d_{mi}$ 'dir. Yani,  $x \notin \Omega_i$ 'dir. Dolayısı ile  $\phi_i^h(x, y) = 0$ 'dir.

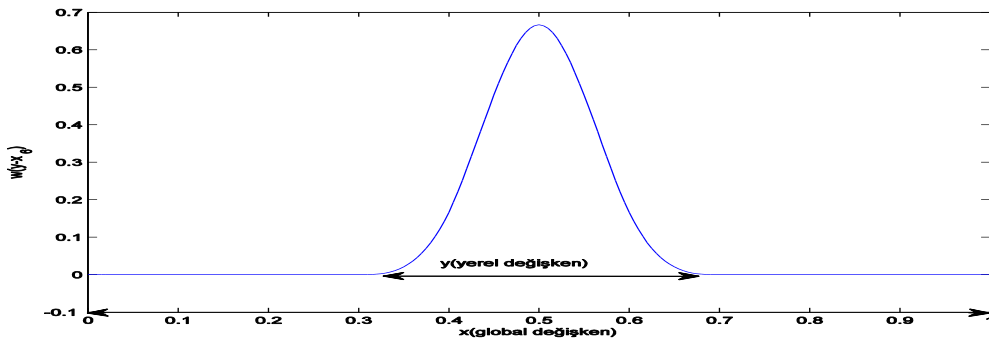
Sonuç 1 ve Önerme 1 ile  $\Omega_d^x$ , herhangi bir  $x \in \Omega$  noktasının destek bölgesi ve  $x_i \in \Omega_d^x$  ise  $w(x - x_i) \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$  olduğu açıktır.

**Tanım 4.**  $\Omega$  tanım bölgesi ve  $x_i, i = 1, 2, \dots, n, \Omega$ 'daki düğüm noktaları olsunlar. Herhangi bir  $i, 1 \leq i \leq n$  için  $w(y - x_i) \neq 0, y \in \Omega$  ise  $y$ 'ye " $x_i$  ile ilişkili yerel değişken" veya " $x_i$  merkezli ağırlık fonksiyonu ile ilişkili yerel değişken" adı verilir ve

$$\Omega_y(x_i) = \{y \in \Omega | w(y - x_i) \neq 0\} \subset \Omega$$

kümesine de  $y$ 'nin "yaşam bölgesi" adını veriyoruz.

Yukarıda tanımlanan kümeleri bir örnek üzerinde görmek için  $[0,1]$  aralığında aralarındaki uzaklık 0.1 olacak şekilde 11 adet düğüm noktası alalım. Bu takdirde  $d_{max} = 2$  ve (W1) ağırlık fonksiyonu için  $x_6 = 0.5$  düğüm noktasına karşılık gelen ağırlık fonksiyonunun grafiği Şekil 2'deki gibidir.



Şekil 2.  $x_6 = 0.5$  düğüm noktasındaki ağırlık fonksiyonu ( $w(y - x_6)$ )

Şekil 2'deki  $x_6 = 0.5$  düğüm noktası merkezli ağırlık fonksiyonun sıfırdan farklı değerler aldığı bölge,  $y$  yerel değişkeninin yaşam bölgesidir. Sonuç 1 ile ağırlık fonksiyonun etki alanı ile şekil fonksiyonunun etki alanı birbirine eşit olduğundan

$\phi_6^h(x, y)$ 'nin etki alanı  $\Omega_6 = [0.3, 0.7]$  aralığıdır. Dikkat edilirse bu aralık  $x_6$  noktasının destek bölgesine eşittir. Yani,  $x = 0.5$  düğüm noktası olmak üzere  $\Omega_6 = \Omega_6^x$ 'dir. Ayrıca  $y$  yerel değişkenin yaşam bölgesinde ağırlık fonksiyonunun değeri sıfırdan farklı olduğundan  $y$  değişkeni  $x_6$  ile ilişkili yerel değişkendir.

Öte yandan Tanım 1'de verilen global ve yerel değişkenlerin tanımlı olduğu bölgeler Şekil 2'de gösterilmiştir. Global değişken, problemin tanım bölgesi olan  $\Omega = [0, 1]$  aralığında tanımlı iken yerel değişken ağırlık fonksiyonunun sıfırdan farklı değerler aldığı  $[0.3, 0.7]$  aralığında tanımlıdır. Yerel değişkenin tanımlı olduğu bu bölge  $x_6$  düğüm noktası için  $y$ 'nin yaşam bölgesidir. Yani,  $\Omega_y(x_6) = [0.3, 0.7]$ 'dir. Fakat diğer düğüm noktaları için, tanımlanan ağırlık fonksiyonlarının sıfırdan farklı değerler aldığı bölgeler değiştiği için  $y$ 'nin yaşam bölgesi de değişir. Dolayısı ile global değişken, hareketli olmayan bir değişken iken yerel değişken, hareketli bir değişkendir. Bu yerel değişkenin hareketi şekil fonksiyonlarını oluşturur.

**Not.** Yerel, global değişkenler ve destek bölgesi tanımı ile

$$\phi_i^h(x, y) = \begin{cases} \phi_i^h(y), & y \in \Omega_d^x \\ 0, & y \notin \Omega_d^x \end{cases}$$

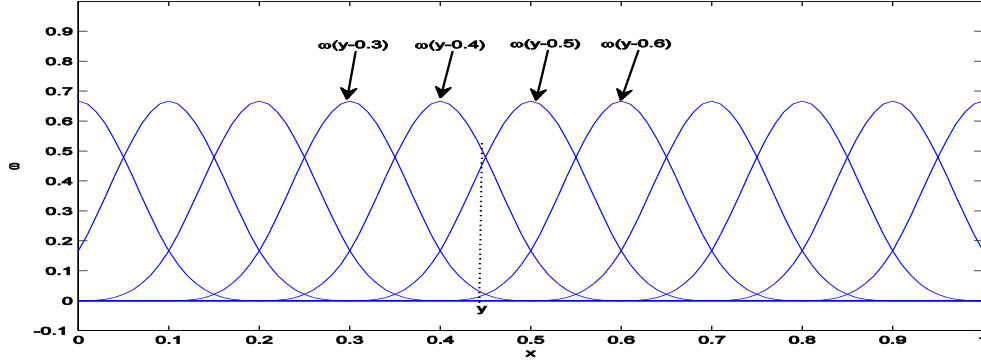
olduğu açıktır.

**Not.** Bundan sonraki bölümlerde anlam karmaşasına sebep olmayacağı düşüncesi ile  $y$  yerel değişkeni vurgulamayarak  $\phi_i^h(x, y)$  şekil fonksiyonunu sadece  $y$  yerel değişkenin fonksiyonu olarak düşüneceğiz ve  $y$  yerine de  $x$  değişkenini kullanacağız.

**Önerme 2.** Herhangi bir  $x$  noktasının destek bölgesi  $\Omega_d^x$  olsun. Bu takdirde  $x$  noktası sadece  $\Omega_d^x$  içerisinde yer alan düğüm noktası merkezli ağırlık fonksiyonları ile ilişkili noktadır.

**İspat.**  $x_i \in \Omega_d^x$  ve  $x_i$  bir düğüm noktası olsun. Bu takdirde Önerme 1 ile  $\phi_i^h(x) \neq 0$ 'dır. Ağırlık fonksiyonları ile şekil fonksiyonlarının etki alanları birbirlerine eşit olduğundan  $w(x - x_i) \neq 0$  elde edilir. Dolayısı ile  $x$  noktası,  $x_i$  merkezli ağırlık fonksiyonu ile ilişkilidir. Şimdi  $x_i \notin \Omega_d^x$  olsun. Önerme 1 ile  $\phi_i^h(x) = 0$ 'dir. Dolayısı ile  $w(x - x_i) = 0$  olduğundan  $x$  noktası, destek bölgesi dışında bulunan düğüm noktaları merkezli ağırlık fonksiyonları ile ilişkili değildir.

Örneğin,  $\Omega = [0,1]$  tanım aralığında eşit uzaklıklı 11 adet düğüm noktası alalım. Eğer  $d_{max} = 2$  seçilirse ağırlık fonksiyonlarının grafiği Şekil 3'deki gibi elde edilir.



Şekil 3.  $y$  noktasına etki eden ağırlık fonksiyonları

Şekil 3'den görüleceği üzere  $x \in (0.4, 0.5)$  noktası için  $x_4 = 0.3$ ,  $x_5 = 0.4$ ,  $x_6 = 0.5$ ,  $x_7 = 0.6$  merkezli düğüm noktaları  $x$  noktası ile ilişkilidir. Dikkat edilirse bu noktalar  $\Omega_d^x = (x - 0.2, x + 0.2)$  destek bölgesi içerisinde yer alan düğüm noktalarıdır. Ayrıca bu noktada diğer ağırlık fonksiyonlarının değerlerinin sıfır olduğu Şekil 3'den görülmektedir. Dolayısı ile şekil fonksiyonlarının keyfi bir  $x$  noktasındaki değerlerini hesaplamak için sadece o nokta ile ilişkili ağırlık fonksiyonlarının belirlenmesi yeterlidir. Çünkü bu noktada diğer şekil fonksiyonlarının değerleri sıfıra eşittir.

**Not.** Yukarıda belirtildiği üzere keyfi bir  $x$  noktasında şekil fonksiyonlarının değerlerinin belirlenmesi için o nokta ile ilişkili ağırlık fonksiyonları sayısının belirlenmesi yeterlidir. Dolayısı ile bu bölümde aksi belirtilmedikçe (21)'deki toplamların sayısı olan  $n$  ile  $x$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonlarının sayısı gösterilmektedir.

Herhangi bir  $x$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonları belirlendikten sonra şekil fonksiyonlarının elde edilebilmesi için  $A_h$  matrisinin tersinin var olduğu garanti edilmelidir. Teorem 2,  $A_h$  matrisinin tersinir olduğunu gösterir.

**Teorem 2.** Hareketli en küçük kareler yönteminde lineer taban fonksiyonları için herhangi bir  $x$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı  $n$  olsun. Eğer  $n \geq 2$  ise (24) ile verilen  $A_h$  matrisi pozitif tanımlıdır.

**İspat.** Lineer cebirden bilindiği üzere bir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

matrisinin pozitif tanımlı olması için  $a_{11} > 0$  ve  $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} > 0$  olmalıdır. Bu özellik yardımıyla tümevarım yöntemini kullanarak Teorem 2'yi ispat edelim.

$n = 2$  için.  $x \in \Omega$  ve  $x_1, x_2 \in \Omega_d^x$  için

$$A_h(x) = \begin{bmatrix} w(x - x_1) + w(x - x_2) & x_1w(x - x_1) + x_2w(x - x_2) \\ x_1w(x - x_1) + x_2w(x - x_2) & x_1^2w(x - x_1) + x_2^2w(x - x_2) \end{bmatrix}$$

dir. Bu durumda ağırlık fonksiyonlarının özelliklerinden

$$w(x - x_1) + w(x - x_2) > 0$$

ve

$$\det(A_h) = (w(x - x_1) + w(x - x_2))(x_1^2w(x - x_1) + x_2^2w(x - x_2)) - (x_1w(x - x_1) + x_2w(x - x_2))^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(A_h) &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)w(x - x_1)w(x - x_2) \\ &= (x_1 - x_2)^2w(x - x_1)w(x - x_2) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısı ile  $A_h(x)$  matrisi pozitif tanımlı bir matristir.

$n = k - 1$  için  $A_h(x)$  matrisi pozitif tanımlı olsun.

$n = k$  için. Bu durumda

$$A_h(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k w(x - x_i) & \sum_{i=1}^k x_i w(x - x_i) \\ \sum_{i=1}^k x_i w(x - x_i) & \sum_{i=1}^k x_i^2 w(x - x_i) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_h(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k-1} w(x - x_i) + w(x - x_k) & \sum_{i=1}^{k-1} x_i w(x - x_i) + x_k w(x - x_k) \\ \sum_{i=1}^{k-1} x_i w(x - x_i) + x_k w(x - x_k) & \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2 w(x - x_i) + x_k^2 w(x - x_k) \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısı ile

$$A_{11} := \sum_{i=1}^{k-1} w(x - x_i) + w(x - x_k)$$

olarak tanımlanırsa tümevarım kabulü ve ağırlık fonksiyonlarının özelliklerinden

$$\sum_{i=1}^{k-1} w(x - x_i) > 0, w(x - x_k) > 0 \Rightarrow A_{11} > 0$$

dir.  $A_h$  matrisinin determinanti ise

$$\det(A_h) = \sum_{i=1}^k w(x - x_i) \sum_{i=1}^k x_i^2 w(x - x_i) - \left( \sum_{i=1}^k x_i w(x - x_i) \right)^2$$

dir. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \det(A_h) &= \sum_{i=1}^{k-1} w(x - x_i) \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2 w(x - x_i) - \left( \sum_{i=1}^{k-1} x_i w(x - x_i) \right)^2 \\ &\quad + x_k^2 w(x - x_k) \sum_{i=1}^{k-1} w(x - x_i) - 2x_k w(x - x_k) \sum_{i=1}^{k-1} x_i w(x - x_i) \\ &\quad + w(x - x_k) \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2 w(x - x_i) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan ise

$$\begin{aligned} \det(A_h) &= \det(A_h^{k-1}) \\ &\quad + w(x - x_k) \left( x_k^2 \sum_{i=1}^{k-1} w(x - x_i) - 2x_k \sum_{i=1}^{k-1} x_i w(x - x_i) + \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2 w(x - x_i) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $\det(A_h^{k-1})$ ,  $n = k - 1$  kabulündeki  $A_h$  matrisinin determinantıdır. Son bağıntı düzenlenirse

$$\det(A_h) = \det(A_h^{k-1}) + w(x - x_k) \sum_{i=1}^{k-1} (x_k - x_i)^2 w(x - x_i)$$

bulunur. Tümevarım kabulü ve ağırlık fonksiyonunun özelliklerinden

$$\det(A_h) > 0$$

elde edilir. Dolayısı ile  $n = k$  için de  $A_h$  matrisi pozitif tanımlıdır. Sonuç olarak  $n \geq 2$  için  $A_h$  matrisi tersinirdir.

Teorem 2 ile  $A_h$  matrisi tersinir olduğundan şekil fonksiyonları hareketli en küçük kareler yöntemi ile tek türlü elde edilebilir. Dikkat edilirse Teorem 2’de  $n \geq 2$  koşulu mevcuttur. Öte yandan (29)’daki  $d_{mi}$  parametresi her bir düğüm noktası en az iki düğüm noktası ile ilişkili olacak şekilde tanımlandığından  $n \geq 2$  şartı sağlanmış olur.

$A_h$  matrisinin tersi mevcut olmasına rağmen sayısal işlemlerde matrisin tersi hesaplanmaz. Matrisin tersi bulunması yerine bir denklem sistemi çözülerek istenilen

yaklaşım elde edilir. Belytschko ve arkadaşları şekil fonksiyonlarını hesaplamak için matrisin tersinin bulunması yerine aşağıdaki yöntemi önermişlerdir(Dolbow ve Belytschko, 1998).

Şekil fonksiyonlarını

$$\phi_i^h(x) = p^T(x)A_h^{-1}(x)(B_h)_i(x) = \gamma^T(x)(B_h)_i(x) \quad (30)$$

şeklinde yazalım. Dolayısı ile

$$A_h(x)\gamma(x) = p(x) \quad (31)$$

dir. Yani,  $A_h$  matrisinin tersini hesaplamak yerine  $\gamma(x)$ , (31) denklem sisteminde hesaplanır ve (30)'da yerine yazılarak şekil fonksiyonları elde edilir.

Şekil fonksiyonlarının özelliklerini incelerken kullanacağımız literatürde mevcut olmayan tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonlarının tanımını verelim.

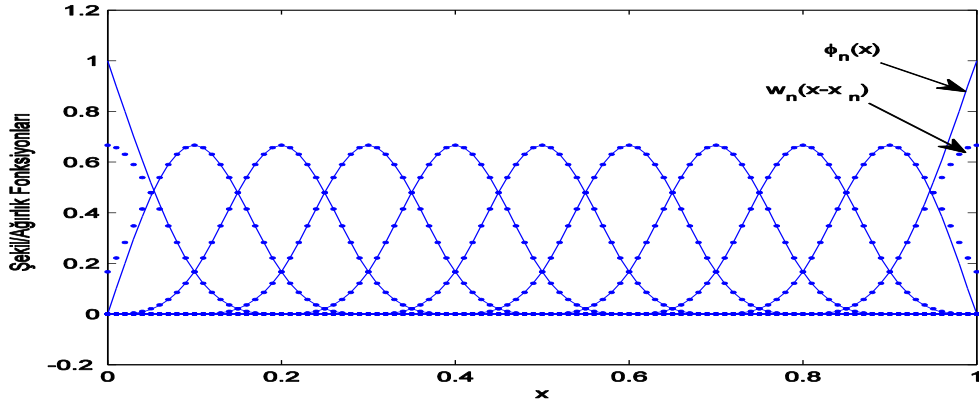
**Tanım 5.**  $\Omega$  tanım bölgesi olmak üzere destek bölgesi tamamen tanım bölgesi içerisinde kalan şekil fonksiyonlarına “tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonları” adı verilir. Yani,  $\Omega_d^x, x_i, i = 1, 2, \dots, n$  merkezli şekil fonksiyonunun destek bölgesi olmak üzere eğer  $\Omega_d^x \subset \Omega$  ise  $x_i$  merkezli şekil fonksiyonu tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonudur. Tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonlarının kümesini  $\Omega_{td}$  ile gösteriyoruz.

Örneğin, Şekil 3'den görüleceği üzere,  $d_{max} = 2$  için  $[0.3, 0.7]$  aralığında yer alan düğüm noktaları merkezli şekil fonksiyonları tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonlarıdır.

### 3.1.2. Şekil Fonksiyonlarının Özellikleri

Bu bölümde eşit aralıklı dağıtılmış düğüm noktaları için şekil fonksiyonlarının bazı özellikleri verilmektedir. Fakat ilk önce (W1) ağırlık fonksiyonlarının ve bu ağırlık fonksiyonları ile elde edilen şekil fonksiyonlarının grafiklerini düğüm noktaları arasındaki uzaklığı eşit alarak bir örnek üzerinde inceleyelim.

**Örnek 1.**  $[0,1]$  aralığında eşit uzaklıklı 11 adet düğüm noktası ve  $d_{max} = 2$  alalım. Düğüm noktalarının her biri için birer şekil ve ağırlık fonksiyonu mevcuttur. Bu fonksiyonların grafikleri aynı eksen üzerinde çizilerek davranışları gözlemlenebilir. Bu takdirde Şekil 4 elde edilir.



Şekil 4. Aynı eksen de şekil ve ağırlık fonksiyonlarının grafikleri(-:şekil, ·:ağırlık)

Şekil 4'den görüleceği üzere  $d_{max} = 2$  için tamamen  $\Omega$  destekli şekil ve ağırlık fonksiyonları aynı grafiğe sahiptir. Dolayısı ile Teorem 3'ün doğruluğu grafik ile görülmüş olur.

**Teorem 3.**  $n$ , kullanılan düğüm noktası sayısı olmak üzere  $d_{max} = 2$  için (W1) ağırlık fonksiyonları kullanılarak hareketli en küçük kareler yöntemi ile elde edilen  $\phi_i^h(x)$ ,  $i = 3, 4, \dots, n - 2$  şekil fonksiyonları ile  $w(x - x_i)$ ,  $i = 3, 4, \dots, n - 2$  ağırlık fonksiyonları birbirine eşittir. Yani,  $\Omega_{td}$  destekli şekil ve ağırlık fonksiyonları birbirine eşittir.

**İspat.** Şekil 4'den  $\forall x \in (x_i, x_{i+1}), i = 2, 3, \dots, n - 2$  aralığı için  $x$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısının 4 olduğu görülür. Bu ağırlık fonksiyonları

$$w(x - x_{i-1}), w(x - x_i), w(x - x_{i+1}), w(x - x_{i+2}), i = 2, 3, \dots, n - 2$$

dir. (W1) ağırlık fonksiyonlarının tanımından ise

$$w(x - x_{i-1}) = \frac{4}{3} - 4 \frac{x - x_{i-1}}{d_{mi}} + 4 \left( \frac{x - x_{i-1}}{d_{mi}} \right)^2 - \frac{4}{3} \left( \frac{x - x_{i-1}}{d_{mi}} \right)^3$$

$$w(x - x_i) = \frac{2}{3} - 4 \left( \frac{x - x_i}{d_{mi}} \right)^2 + 4 \left( \frac{x - x_i}{d_{mi}} \right)^3$$



$$w(x - x_{i+1}) = \frac{2}{3} - 4 \left( \frac{x - x_{i+1}}{d_{mi}} \right)^2 - 4 \left( \frac{x - x_{i+1}}{d_{mi}} \right)^3$$

$$w(x - x_{i+2}) = \frac{4}{3} + 4 \frac{x - x_{i+2}}{d_{mi}} + 4 \left( \frac{x - x_{i+2}}{d_{mi}} \right)^2 + \frac{4}{3} \left( \frac{x - x_{i+2}}{d_{mi}} \right)^3$$

elde edilir.  $h$  düzgün düğüm noktaları arası uzaklık olmak üzere  $x_{i-1} = x_i - h$ ,  $x_{i+1} = x_i + h$ ,  $x_{i+2} = x_i + 2h$  olduğundan

$$w(x - x_{i-1}) = \frac{4}{3} - 4 \frac{h}{d_{mi}} + 4 \frac{h^2}{d_{mi}^2} - \frac{4}{3} \frac{h^3}{d_{mi}^3} + \left( -\frac{4}{d_{mi}} + 8 \frac{h}{d_{mi}^2} - 4 \frac{h^2}{d_{mi}^3} \right) (x - x_i)$$

$$+ \left( \frac{4}{d_{mi}^2} - 4 \frac{h}{d_{mi}^3} \right) (x - x_i)^2 - \frac{4}{3d_{mi}^3} (x - x_i)^3$$

$$w(x - x_i) = \frac{2}{3} - \frac{4}{d_{mi}^2} (x - x_i)^2 + \frac{4}{d_{mi}^3} (x - x_i)^3$$

$$w(x - x_{i+1}) = \frac{2}{3} - 4 \frac{h^2}{d_{mi}^2} + 4 \frac{h^3}{d_{mi}^3} + \left( 8 \frac{h}{d_{mi}^2} - 12 \frac{h^2}{d_{mi}^3} \right) (x - x_i)$$

$$+ \left( -\frac{4}{d_{mi}^2} + 12 \frac{h}{d_{mi}^3} \right) (x - x_i)^2 - \frac{4}{d_{mi}^3} (x - x_i)^3$$

$$w(x - x_{i+2}) = \frac{4}{3} - 8 \frac{h}{d_{mi}} + 16 \frac{h^2}{d_{mi}^2} - \frac{32}{3} \frac{h^3}{d_{mi}^3} + \left( \frac{4}{d_{mi}} - 16 \frac{h}{d_{mi}^2} + 16 \frac{h^2}{d_{mi}^3} \right) (x - x_i)$$

$$+ \left( \frac{4}{d_{mi}^2} - 8 \frac{h}{d_{mi}^3} \right) (x - x_i)^2 + \frac{4}{3d_{mi}^3} (x - x_i)^3$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{i=1}^n w(x - x_i) = 4 - 12 \frac{h}{d_{mi}} + 16 \frac{h^2}{d_{mi}^2} - 8 \frac{h^3}{d_{mi}^3}$$

dir. Düğüm noktaları arası uzaklık eşit seçildiğinden (29)'daki  $c_i$  parametresi  $h$ 'a eşittir.

Dolayısı ile  $d_{mi} = 2h$  olup

$$\sum_{i=1}^n w(x - x_i) = 1$$

bulunur. (24)'deki  $A_h(x)$  matrisinde hesaplanması gereken diğer terim

$$\sum_{j=1}^n x_j w(x - x_j) = x_{i-1} w(x - x_{i-1}) + x_i w(x - x_i)$$

$$+ x_{i+1} w(x - x_{i+1}) + x_{i+2} w(x - x_{i+2})$$

$$= (x_i - h) w(x - x_{i-1}) + x_i w(x - x_i) + (x_i + h) w(x - x_{i+1}) + (x_i + 2h) w(x - x_{i+2})$$

$$\begin{aligned}
&= x_i \sum_{i=1}^n w(x - x_i) + h(-w(x - x_{i-1}) + w(x - x_{i+1}) + 2w(x - x_{i+2})) \\
&= x_i + h(-w(x - x_{i-1}) + w(x - x_{i+1}) + 2w(x - x_{i+2}))
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\sum_{j=1}^n x_j w(x - x_j) = x_i + \left(12 \frac{h}{d_{mi}} - 32 \frac{h^2}{d_{mi}^2} + 24 \frac{h^3}{d_{mi}^3}\right) (x - x_i)$$

elde edilir.  $d_{mi} = 2h$  seçildiğinden parantez içerisindeki terim 1'e eşit olur ve

$$\sum_{j=1}^n x_j w(x - x_j) = x_i + x - x_i = x$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n x_j^2 w(x - x_j) &= x_{i-1}^2 w(x - x_{i-1}) + x_i^2 w(x - x_i) \\
&\quad + x_{i+1}^2 w(x - x_{i+1}) + x_{i+2}^2 w(x - x_{i+2}) \\
&= (x_i - h)^2 w(x - x_{i-1}) + x_i^2 w(x - x_i) \\
&\quad + (x_i + h)^2 w(x - x_{i+1}) + (x_i + 2h)^2 w(x - x_{i+2}) \\
&= x_i^2 \sum_{j=1}^n w(x - x_j) + 2x_i h(-w(x - x_{i-1}) + w(x - x_{i+1}) + 2w(x - x_{i+2})) \\
&\quad + h(w(x - x_{i-1}) + w(x - x_{i+1}) + 4w(x - x_{i+2})) \\
&= x_i^2 + 2x_i(x - x_i) + h^2(w(x - x_{i-1}) + w(x - x_{i+1}) + 4w(x - x_{i+2})) \\
&= x_i^2 + 2x_i(x - x_i) + h^2 \left(-24 \frac{h}{d_{mi}^3} + 16 \frac{1}{d_{mi}}\right) (x - x_i)^2 \\
&\quad + \frac{22}{3} - 36 \frac{h}{d_{mi}} + 64 \frac{h^2}{d_{mi}^2} - 40 \frac{h^3}{d_{mi}^3} \\
&= x_i^2 + 2x_i(x - x_i) + h^2 \left(\frac{1}{h^2} (x - x_i)^2 + \frac{1}{3}\right) = x^2 + \frac{h^2}{3}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısı ile şekil fonksiyonları elde edilirken hesaplanması gereken  $A_h(x)$  matrisinin elemanları

$$\sum_{i=1}^n w(x - x_i) = 1; \quad \sum_{i=1}^n x_i w(x - x_i) = x; \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 w(x - x_i) = x^2 + \frac{h^2}{3}$$

olarak bulunur. Dolayısı ile

$$A_h(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 + \frac{h^2}{3} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan ise

$$p^T(x)A_h^{-1}(x) = \frac{3}{h^2} [1 \quad x] \begin{bmatrix} x^2 + \frac{h^2}{3} & -x \\ -x & 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{h^2} \left[ x^2 + \frac{h^2}{3} - x^2 \quad x - x \right]$$

dir. Böylece

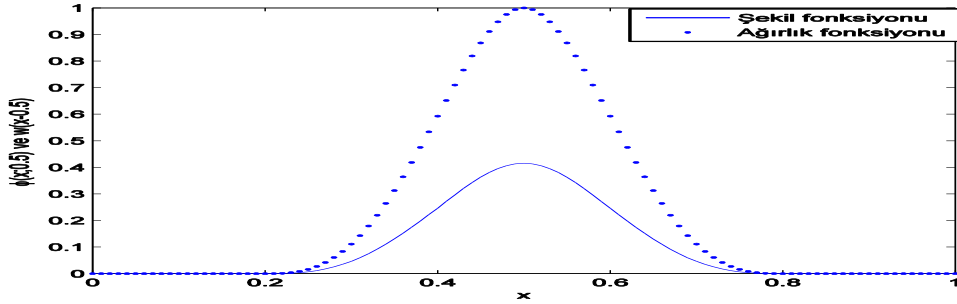
$$p^T(x)A_h^{-1}(x) = [1 \quad 0]$$

elde edilir. Sonuç olarak şekil fonksiyonları

$$\begin{aligned} \phi_h(x) &= p^T(x)A_h^{-1}(x)B_h(x) \\ &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} w(x-x_1) & w(x-x_2) & \dots & w(x-x_n) \\ x_1w(x-x_1) & x_2w(x-x_2) & \dots & x_nw(x-x_n) \end{bmatrix} \\ &= [w(x-x_1) \quad w(x-x_2) \quad \dots \quad w(x-x_n)] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yani,  $\forall x \in (x_i, x_{i+1}), i = 2, 3, \dots, n-2$  için şekil fonksiyonları, ağırlık fonksiyonlarına eşittir.

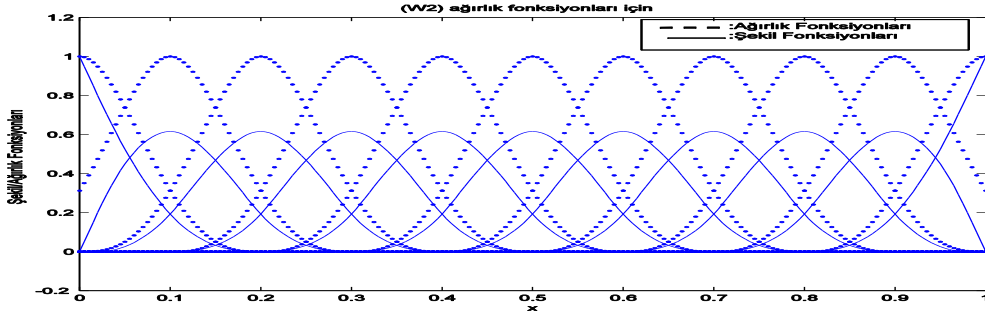
**Not.** Teorem 3 sadece  $d_{max} = 2$  seçilmesi durumunda doğrudur. Diğer durumlar için Teorem 3 geçerli değildir. Örneğin,  $d_{max} = 3$  alınması durumunda  $x = 0.5$  merkezli şekil ve ağırlık fonksiyonlarının grafikleri Şekil 5'deki gibi elde edilir.



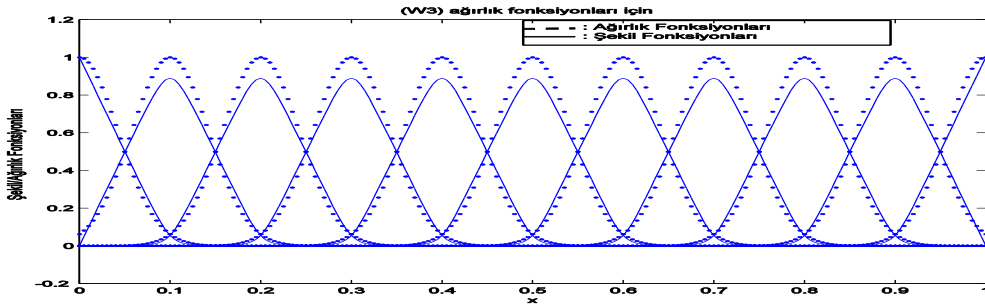
Şekil 5.  $d_{max} = 3$  alınması durumunda 0.5 merkezli şekil ve ağırlık fonksiyonları

Şekil 5'den  $d_{max} = 3$  için şekil ve ağırlık fonksiyonlarının Teorem 3'ü sağlamadığı görülmür. Dolayısı ile Teorem 3 sadece  $d_{max} = 2$  seçildiği eşit aralıklı düğüm noktaları için geçerlidir.  $d_{max} \neq 3, d_{max} \neq 2$  için de Teorem 3'ün sağlanmadığı grafiksel olarak gözlemlenebilir.

Öte yandan Teorem 3 sadece (W1) ağırlık fonksiyonlarının kullanılması durumunda geçerlidir. Dolayısı ile Kesim 3.1.1’de belirtilen (W2) ve (W3) ağırlık fonksiyonları için bu Teorem doğru değildir. Gerçekten, Şekil 6 ve 7’de Teorem 3’ün diğer ağırlık fonksiyonları için doğru olmadığı görülmektedir.



Şekil 6. (W2) ağırlık fonksiyonları için  $d_{max} = 2$  değerine karşılık gelen grafikler



Şekil 7. (W3) ağırlık fonksiyonları için  $d_{max} = 2, \beta = 0.3$  değerlerine karşılık gelen grafikler

Önerme 3,  $w$  ve  $cw, c \in \mathbb{R}$  ağırlık fonksiyonları ile üretilen şekil fonksiyonlarının birbirine eşit olduğunu gösterir.

**Önerme 3.** (W1) ağırlık fonksiyonları için  $w(x - x_i)$  ve  $cw(x - x_i), c \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ ’ler aynı şekil fonksiyonlarını üretirler.

**İspat.**  $w(x - x_i)$ ’lerin ürettikleri şekil fonksiyonlarını  $\phi_h(x)$  ile gösterelim. Göstermemiz gereken  $\forall c \in \mathbb{R}$  için  $cw(x - x_i)$ ’lerin ürettiği şekil fonksiyonları  $\phi_h(x)$ ’dir. Gerçekten, hareketli en küçük kareler yönteminde şekil fonksiyonları (26) ile

$$\phi_h(x) = p^T(x)A_h^{-1}(x)B_h(x)$$

şeklindedir. Burada

$$p(x) = [1 \ x]^T$$

$$A_h(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w(x - x_i) & \sum_{i=1}^n x_i w(x - x_i) \\ \sum_{i=1}^n x_i w(x - x_i) & \sum_{i=1}^n x_i^2 w(x - x_i) \end{bmatrix}$$

ve

$$B_h(x) = \begin{bmatrix} w(x - x_1) & w(x - x_2) & \dots & w(x - x_n) \\ x_1 w(x - x_1) & x_2 w(x - x_2) & \dots & x_n w(x - x_n) \end{bmatrix}$$

dir.  $cw(x - x_i)$  ağırlık fonksiyonları kullanılarak elde edilen şekil fonksiyonlarındaki  $A_h$  ve  $B_h$  matrisleri  $A_h^1$  ve  $B_h^1$  ile gösterilirse bu matrisler

$$A_h^1(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n cw(x - x_i) & \sum_{i=1}^n cx_i w(x - x_i) \\ \sum_{i=1}^n cx_i w(x - x_i) & \sum_{i=1}^n cx_i^2 w(x - x_i) \end{bmatrix}$$

$$B_h^1(x) = \begin{bmatrix} cw(x - x_1) & cw(x - x_2) & \dots & cw(x - x_n) \\ cx_1 w(x - x_1) & cx_2 w(x - x_2) & \dots & cx_n w(x - x_n) \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. Matrislerin özelliğinden dolayı  $A_h^1$  ve  $B_h^1$  matrisleri

$$A_h^1(x) = c \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w(x - x_i) & \sum_{i=1}^n x_i w(x - x_i) \\ \sum_{i=1}^n x_i w(x - x_i) & \sum_{i=1}^n x_i^2 w(x - x_i) \end{bmatrix}$$

$$B_h^1(x) = c \begin{bmatrix} w(x - x_1) & w(x - x_2) & \dots & w(x - x_n) \\ x_1 w(x - x_1) & x_2 w(x - x_2) & \dots & x_n w(x - x_n) \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Dolayısı ile  $A_h^1$  ve  $B_h^1$  matrisleri  $A_h$  ve  $B_h$  matrislerinin  $c$  katına eşittir.

Yani,

$$A_h^1(x) = cA_h(x), B_h^1(x) = cB_h(x)$$

dir.  $cw(x - x_i)$  ağırlık fonksiyonları ile elde edilen şekil fonksiyonları  $\phi_h^1$  ile gösterilsin.

Bu takdirde (26) ile

$$\phi_h^1(x) = p^T(x)(A_h^1)^{-1}(x)B_h^1(x)$$

şeklinde elde edildiğinden ve matrislerin özeliğinden

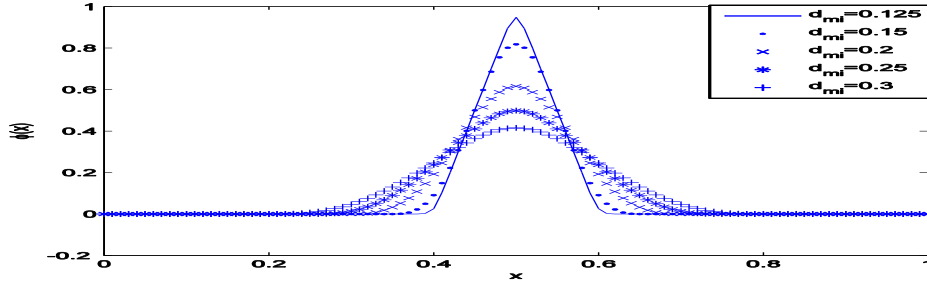
$$(A_h^1)^{-1}(x) = \frac{1}{c} A_h^{-1}(x)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\phi_h^1(x) &= p^T(x) \frac{1}{c} A_h^{-1}(x) c B_h(x) = \frac{1}{c} c p^T(x) A_h^{-1}(x) B_h(x) \\ &= p^T(x) A_h^{-1}(x) B_h(x) = \phi_h(x)\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısı ile her bir ağırlık fonksiyonunun keyfi bir reel sayı ile çarpılması ağırlık fonksiyonlarının değerlerini değiştirse bile şekil fonksiyonları üzerinde etkisi yoktur.

Ağırlık fonksiyonlarının tanımından,  $d_{mi}$  etkinlik yarıçapının değeri değiştikçe ağırlık fonksiyonlarının sıfırdan farklı değerler aldığı aralıkların değiştiği açıktır. Yani, ağırlık fonksiyonlarının sıfırdan farklı değerler aldığı aralık  $d_{mi}$  değerine göre genişler veya daralır. Dolayısı ile buna bağlı olarak şekil fonksiyonlarının sıfırdan farklı değerler aldığı bölgeler bu parametreye göre değişir. Şekil 8 bu özelliği grafiksel olarak ortaya koymaktadır.



Şekil 8. Farklı  $d_{mi}$  parametreleri için 0.5 merkezli şekil fonksiyonları

Şekil 8'den görüleceği üzere  $d_{mi}$  parametresi büyüdükçe şekil fonksiyonlarının sıfırdan farklı olduğu aralık genişlerken fonksiyonun almış olduğu maksimum değer azalmaktadır. Fakat her bir  $d_{mi}$  parametresi için “tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonlarının grafikleri ile  $x$  ekseninde kalan alan değişmemektedir”. Örneğin,  $[0,1]$  aralığında aralarındaki uzaklık eşit ve 0.1 olan 11 adet düğüm noktası alınarak elde edilen Şekil 8'deki grafiklerin aşağısında kalan alanlar sayısal olarak hesaplanırsa hepsinin 0.1'e eşit olduğu elde edilir.

Tablo 1'de ise düğüm noktaları arası uzaklığın farklı değerleri için tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonları ile  $x$  ekseninde kalan bölgenin alanının sayısal değerleri verilmiştir.

Tablo 1. Şekil fonksiyonları ve  $x$  eksenindeki bölgenin alanı

Düğüm noktaları arası uzaklık	Alan
0.1	0.1
0.05	0.05
0.01	0.01
0.005	0.005

Tablo 1'den tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonları için şekil fonksiyonları ile  $x$  ekseninde kalan bölgenin alanı, düğüm noktaları arasındaki uzaklığa eşit olduğu sayısal olarak gözlemlenmektedir.

Şekil 8'den görüleceği üzere  $d_{mi}$  parametresinin değeri şekil fonksiyonu üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. Bu parametredeki değişimin şekil fonksiyonları üzerindeki değişimini gözlemlemek için farklı etkinlik yarıçapları ile elde edilen şekil fonksiyonlarını inceleyelim. Bu durumda aşağıdaki sonuçları elde ediyoruz.

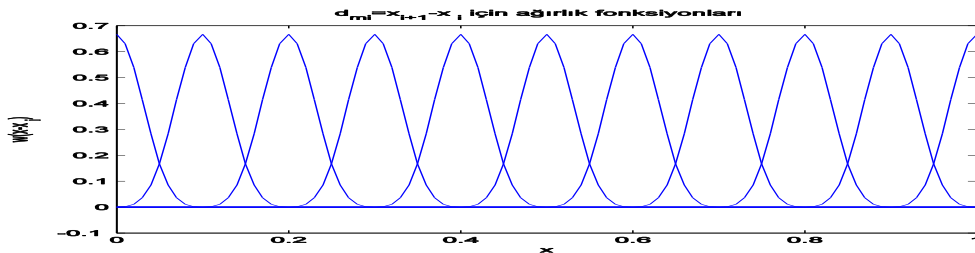
**Önerme 4.** Düzgün dağıtılmış düğüm noktaları için  $d_{mi}$  iki düğüm noktası arasındaki uzaklık olarak, yani

$$d_{mi} = x_{i+1} - x_i = h, i = 1, 2, \dots, n - 1$$

olarak seçilirse

1.  $(x_i, x_{i+1}), i = 1, 2, \dots, n - 1$  aralığında elde edilen  $\phi_h(x)$  şekil fonksiyonları,  $w(x - x_i), i = 1, 2, \dots, n$  ağırlık fonksiyonlarının seçiminden bağımsızdır.
2.  $\phi_h(x)$ 'ler  $(x_i, x_{i+1})$  aralığında sonlu elemanlar yöntemi şekil fonksiyonlarına dönüşür.

**İspat:**  $d_{mi} = x_{i+1} - x_i = h$  seçilmesi durumunda (W1) ağırlık fonksiyonları ile  $x = 0:0.1:1$  düğüm noktaları için elde edilen ağırlık fonksiyonlarının grafikleri Şekil 9'daki gibidir.

Şekil 9.  $d_{mi} = x_{i+1} - x_i$  seçildiği durum için ağırlık fonksiyonları

İspat için sadece keyfi bir  $(x_i, x_{i+1}), i = 1, 2, \dots, n-1$  aralığındaki şekil fonksiyonlarının çakıştığını göstermemiz yeterlidir. Şekil 9'dan  $\forall x \in (x_i, x_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$  için  $x$  ile ilişkili ağırlık fonksiyonları  $x_i$  ve  $x_{i+1}$  merkezli ağırlık fonksiyonlarıdır. Dolayısı ile  $\forall x \in (x_i, x_{i+1})$  için

$$A_h(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w(x-x_i) & \sum_{i=1}^n x_i w(x-x_i) \\ \sum_{i=1}^n x_i w(x-x_i) & \sum_{i=1}^n x_i^2 w(x-x_i) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} w(x-x_i) + w(x-x_{i+1}) & x_i w(x-x_i) + x_{i+1} w(x-x_{i+1}) \\ x_i w(x-x_i) + x_{i+1} w(x-x_{i+1}) & x_i^2 w(x-x_i) + x_{i+1}^2 w(x-x_{i+1}) \end{bmatrix}$$

ve

$$B_h(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & w(x-x_i) & w(x-x_{i+1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_i w(x-x_i) & x_{i+1} w(x-x_{i+1}) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Bu durumda  $A_h(x)$  matrisinin determinanı

$$|A_h(x)| = (x_{i+1} - x_i)^2 w(x-x_i) w(x-x_{i+1})$$

olup

$$\phi_h(x) = [1 \ x] A_h^{-1}(x) B(x) = \left[ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \ \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \ 0 \ \dots \ 0 \right]$$

olarak bulunur. Dolayısı ile  $\forall x \in (x_i, x_{i+1})$  için şekil fonksiyonları, ağırlık fonksiyonlarından bağımsız lineer fonksiyonlar olarak elde edilir. Ayrıca elde edilen şekil fonksiyonları ile sonlu elemanlar yöntemindeki lineer şekil fonksiyonları birbirine eşit olduğu görülür.  $\forall i = 1, 2, \dots, n-1$  için elde edilen özellik doğru olduğundan diğer aralıklarda da aynı özellik mevcuttur.

Sonuç olarak, düğüm noktaları arasındaki uzaklık etkinlik yarıçapı olarak seçilirse sonlu elemanları ile elde edilen lineer şekil fonksiyonları ile hareketli en küçük kareler yöntemi kullanılarak elde edilen şekil fonksiyonları çakışır.

**Not.**  $d_{mi} = h = x_{i+1} - x_i$  seçilmesi durumunda düğüm noktalarında hareketli en küçük kareler yöntemi ile şekil fonksiyonları elde edilemez. Gerçekten, Teorem 2 ile (24)'de tanımlanan  $A_h$  matrisinin tersinin mevcut olması için keyfi bir  $x$  noktası en az 2 adet ağırlık fonksiyonu ile ilişkili olmalıdır. Etkinlik yarıçapı iki düğüm noktası arasındaki uzaklık seçildiğinden düğüm noktaları arasındaki bölgelerde 2 adet ağırlık fonksiyonu içerilmesi koşulu sağlanır. Fakat  $x = x_i, i = 1, 2, \dots, n$  düğüm noktası seçilirse bu nokta ile



ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı 1'dir. Çünkü bu nokta sadece  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  merkezli ağırlık fonksiyonu ile ilişkilidir. Dolayısı ile

$$w(x_i - x_i) \neq 0, w(x_j - x_i) = 0, j = 1, 2, \dots, n, j \neq i.$$

Bu durumda  $x_i$ 'deki şekil fonksiyonunun değerini hesaplamak için gerekli olan  $A_h$  matrisi

$$A_h(x_i) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n w(x_i - x_j) & \sum_{j=1}^n x_j w(x_i - x_j) \\ \sum_{j=1}^n x_j w(x_i - x_j) & \sum_{j=1}^n x_j^2 w(x_i - x_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(x_i - x_i) & x_i w(x_i - x_i) \\ x_i w(x_i - x_i) & x_i^2 w(x_i - x_i) \end{bmatrix}$$

şeklinde dir.  $x = x_i$  noktasındaki  $A_h$  matrisinin determinanı

$$|A_h(x_i)| = x_i^2 w_i^2 - x_i^2 w_i^2 = 0$$

dır. Dolayısı ile  $A_h$  matrisi singülerdir. Böylece hareketli en küçük kareler yöntemi ile elde edilen şekil fonksiyonları  $x = x_i, i = 1, 2, \dots, n$  düğüm değerlerinde elde edilemez.

Şekil fonksiyonlarının genel formülünün verildiği (28) bağıntısından görüleceği üzere şekil fonksiyonlarının açık ifadesi için  $A_h(x)$  matrisinin tersi hesaplanmalıdır.  $2 \times 2$ 'lik matrislerin tersi hesaplanırken matrisin determinanı bulunmalıdır. Önerme 5'de  $A_h(x)$  matrisinin determinanı için genel bir formül elde edilmiştir.

**Önerme 5.** Hareketli en küçük kareler yönteminde herhangi bir  $x$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonları  $w(x - x_i), i = 1, 2, \dots, k, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ , şeklinde gösterilsin. Bu takdirde (24)'deki  $A_h(x)$  matrisinin determinanı

$$|A_h(x)| = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k (x_i - x_j)^2 w(x - x_i) w(x - x_j) \quad (32)$$

dır.

**İspat.** Tümevarım yöntemi ile ispat edelim.

$k = 2$  olsun. Teorem 2'nin ispatından

$$|A_h(x)| = (x_2 - x_1)^2 w(x - x_1) w(x - x_2)$$

dir. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^1 \sum_{j=i+1}^2 (x_i - x_j)^2 w(x - x_i) w(x - x_j) = \sum_{j=2}^2 (x_1 - x_j)^2 w(x - x_1) w(x - x_j)$$

$$= (x_2 - x_1)^2 w(x - x_1) w(x - x_2)$$

olduğundan  $k = 2$  için önerme doğrudur.

$k = n$  için önerme doğru olsun. Yani,

$$|A_h(x)| = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i - x_j)^2 w(x - x_i) w(x - x_j)$$

olsun.

$k = n + 1$  için doğruluğunu gösterelim. Her aralığa  $k$  adet ağırlık fonksiyonu etki ettiğinden dolayı

$$A_h(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w(x - x_i) + w(x - x_{n+1}) & \sum_{i=1}^n x_i w(x - x_i) + x_{n+1} w(x - x_{n+1}) \\ \sum_{i=1}^n x_i w(x - x_i) + x_{n+1} w(x - x_{n+1}) & \sum_{i=1}^n x_i^2 w(x - x_i) + x_{n+1}^2 w(x - x_{n+1}) \end{bmatrix}$$

dir. Buradan  $A_h$  matrisinin determinanı

$$\begin{aligned} A_h(x) &= \left( \sum_{i=1}^n w(x - x_i) \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 w(x - x_i) \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i w(x - x_i) \right)^2 \\ &\quad + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 w(x - x_i) \right) w(x - x_{n+1}) + x_{n+1}^2 \left( \sum_{i=1}^n w(x - x_i) \right) w(x - x_{n+1}) \\ &\quad - 2x_{n+1} \left( \sum_{i=1}^n x_i w(x - x_i) \right) w(x - x_{n+1}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.  $A_h$  matrisinin determinantındaki ilk iki terim,  $k = n$  durumundaki  $A_h(x)$  matrisinin determinantına eşittir. Dolayısı ile tümevarım kabulü ile

$$\begin{aligned} |A_h(x)| &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i - x_j)^2 w(x - x_i) w(x - x_j) + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 w(x - x_i) \right) w(x - x_{n+1}) \\ &\quad + x_{n+1}^2 \left( \sum_{i=1}^n w(x - x_i) \right) w(x - x_{n+1}) - 2x_{n+1} \left( \sum_{i=1}^n x_i w(x - x_i) \right) w(x - x_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} |A_h(x)| &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i - x_j)^2 w(x - x_i) w(x - x_j) \\ &\quad + w(x - x_{n+1}) \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_{n+1}x_i + x_{n+1}^2) w(x - x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |A_h(x)| &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i - x_j)^2 w(x - x_i) w(x - x_j) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (x_i - x_j)^2 w(x - x_i) w(x - x_j) \Big|_{j=n+1} \\ \Rightarrow |A_h(x)| &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} (x_i - x_j)^2 w(x - x_i) w(x - x_j) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısı ile  $k = n + 1$  için de önerme doğrudur.

$A_h(x)$  matrisinin determinanı yardımıyla 1 boyutlu uzayda eşit aralıklı dağıtılmış düğüm noktaları için şekil fonksiyonlarının genel formülü Önerme 6'daki gibi verilir.

**Önerme 6.** Hareketli en küçük kareler yönteminde herhangi bir  $x$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonları  $w(x - x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , şeklinde gösterilsin. Bu takdirde (28) ile verilen  $i$ . şekil fonksiyonu

$$\phi_i^h(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{(x - x_j)(x_i - x_j)}{|A_h(x)|} w(x - x_i) w(x - x_j), i = 1, 2, \dots, k$$

dir. Burada  $|A_h(x)|$ , Önerme 5'de elde edilen  $A_h$  matrisinin determinantıdır.

**İspat.** (28) ile şekil fonksiyonları

$$\phi_i^h(x) = p^T(x) A_h^{-1}(x) (B_h(x))_i, i = 1, 2, \dots, k$$

şeklindedir.

$$A_h(x) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k w(x - x_j) & \sum_{j=1}^k x_j w(x - x_j) \\ \sum_{j=1}^k x_j w(x - x_j) & \sum_{j=1}^k x_j^2 w(x - x_j) \end{bmatrix}$$

olduğundan  $|A_h(x)|$ , Önerme 5'deki gibi olmak üzere

$$A_h^{-1}(x) = \frac{1}{|A_h(x)|} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k x_j^2 w(x - x_j) & - \sum_{j=1}^k x_j w(x - x_j) \\ - \sum_{j=1}^k x_j w(x - x_j) & \sum_{j=1}^k w(x - x_j) \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısı ile

$$\begin{aligned}
\phi_i^h(x) &= [1 \quad x] \frac{1}{|A_h(x)|} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k x_j^2 w(x-x_j) & -\sum_{j=1}^k x_j w(x-x_j) \\ -\sum_{j=1}^k x_j w(x-x_j) & \sum_{j=1}^k w(x-x_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(x-x_i) \\ x_i w(x-x_i) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{|A_h(x)|} \left( \left( \sum_{j=1}^k x_j^2 w(x-x_j) \right) w(x-x_i) - x \left( \sum_{j=1}^k x_j w(x-x_j) \right) w(x-x_i) \right. \\
&\quad \left. - x_i \left( \sum_{j=1}^k x_j w(x-x_j) \right) w(x-x_i) + x x_i \left( \sum_{j=1}^k w(x-x_j) \right) w(x-x_i) \right) \\
&= \frac{1}{|A_h(x)|} \left( \sum_{j=1}^k (x_j^2 - x_i x_j - x x_j + x x_i) w(x-x_i) w(x-x_j) \right) \\
&= \frac{1}{|A_h(x)|} \left( \sum_{j=1}^k (x_j(x_j - x_i) - x(x_j - x_i)) w(x-x_i) w(x-x_j) \right) \\
&= \frac{1}{|A_h(x)|} \left( \sum_{j=1}^k (x-x_j)(x_i-x_j) w(x-x_i) w(x-x_j) \right), i = 1, 2, \dots, k
\end{aligned}$$

bulunur.  $i = j$  için  $x_i - x_j = 0$  olduğundan

$$\phi_i^h(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{(x-x_j)(x_i-x_j)}{|A_h(x)|} w(x-x_i) w(x-x_j)$$

elde edilir.

Şekil 4, 6 veya 7'deki şekil fonksiyonlarının grafiklerinden tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonlarının birbirlerinin ötelemesi olduğu grafiksel olarak gözlemlenir. Önerme 6 yardımıyla bu özelliğin eşit sayıda düğüm noktası içeren iç bölgelerde sağlandığını ispat edelim. Bunun için ilk önce  $A_h(x)$  matrisinin determinantının ötelemeye göre değişmez olduğunu gösterelim.

**Önerme 7.** Hareketli en küçük kareler yönteminde,  $h > 0$  düğüm noktaları arası uzaklık ve  $\Omega_{td}$  ise tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonlarının kümesi olmak üzere  $x - h \in \Omega_{td}$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonları  $w(x - x_i), i = 1, 2, \dots, k, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ , şeklinde gösterilsin. Eğer  $x \in \Omega_{td}$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonlarının sayısı da  $k$  ise (24)'deki  $A_h$  matrisi için

$$|A_h(x - h)| = |A_h(x)|$$

dir. Yani,  $|A_h(x)|$  ötelemeye göre değişmezdir.

**İspat.** Önerme 5 ile

$$|A_h(x - h)| = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k (x_i - x_j)^2 w(x - h - x_i) w(x - h - x_j)$$

dir.  $x - h$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonları  $w(x - x_i), i = 1, 2, \dots, k$  ve  $x$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı  $k$  olduğundan  $x$  ile ilişkili ağırlık fonksiyonları  $w(x - x_i), i = 2, 3, \dots, k + 1$ 'dir. Buradan Önerme 5 ile

$$|A_h(x)| = \sum_{i=2}^k \sum_{j=i+1}^{k+1} (x_i - x_j)^2 w(x - x_i) w(x - x_j)$$

elde edilir.  $|A_h(x - h)|$  bağınsındaki indis değeri bir arttırılırsa

$$|A_h(x - h)| = \sum_{i=2}^k \sum_{j=i+1}^{k+1} (x_{i-1} - x_{j-1})^2 w(x - h - x_{i-1}) w(x - h - x_{j-1})$$

bulunur. Burada  $w(x - h - x_{i-1}), w(x - x_{i-1})$  ağırlık fonksiyonunun  $x - h$ 'daki değeridir. Ağırlık fonksiyonları tanımı ile ağırlık fonksiyonlarının birbirinin ötelemesi olduğu açıktır. Yani,

$$w(x - x_i) = w(x - h - x_{i-1})$$

dir. Dolayısı ile

$$|A_h(x - h)| = \sum_{i=2}^k \sum_{j=i+1}^{k+1} (x_{i-1} - x_{j-1})^2 w(x - x_i) w(x - x_j)$$

elde edilir. Düzgün dağıtılmış düğüm noktaları için  $x_{i-1} = x_i - h, x_{j-1} = x_j - h$  olduğundan

$$|A_h(x - h)| = \sum_{i=2}^k \sum_{j=i+1}^{k+1} (x_i - x_j)^2 w(x - x_i) w(x - x_j)$$

dir. Sonuç olarak

$$|A_h(x-h)| = |A_h(x)|$$

bulunur.

Önerme 6 ve 7 yardımıyla şekil fonksiyonlarının ötelemeye göre değişmez olduğu Teorem 4’de verilmektedir.

**Teorem 4.** Hareketli en küçük kareler yönteminde  $h$  düğüm noktaları arası uzaklık ve  $\Omega_{td}$  ise tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonlarının kümesi olmak üzere  $x-h \in \Omega_{td}$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonları  $w(x-x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , şeklinde gösterilsin. Eğer  $x \in \Omega_{td}$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonlarının sayısı  $k$  ise (28) ile verilen  $\phi_i^h$  için

$$\phi_i^h(x-h) = \phi_{i+1}^h(x), i = 1, 2, \dots, k-1$$

dir.

**İspat.** Önerme 6 ile şekil fonksiyonlarının  $x-h$ ’daki değeri

$$\phi_i^h(x-h) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{(x-h-x_j)(x_i-x_j)}{|A_h(x-h)|} w(x-h-x_i)w(x-h-x_j)$$

şeklinde yazılır. Burada  $w(x-h-x_{i-1})$ ,  $w(x-x_{i-1})$  ağırlık fonksiyonunun  $x-h$ ’daki değeridir.  $x$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonları  $w(x-x_i)$ ,  $i = 2, 3, \dots, k+1$  olduğundan

$$\phi_{i+1}^h(x) = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i+1}}^{k+1} \frac{(x-x_j)(x_{i+1}-x_j)}{|A_h(x)|} w(x-x_{i+1})w(x-x_j)$$

dir. Önerme 7 ile  $|A_h(x)| = |A_h(x-h)|$  olduğundan

$$\phi_i^h(x-h) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{(x-h-x_j)(x_i-x_j)}{|A_h(x)|} w(x-h-x_i)w(x-h-x_j)$$

bulunur. Toplam indisi 1 birim sağa kaydırılarak

$$\phi_i^h(x-h) = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i+1}}^{k+1} \frac{(x-h-x_{j-1})(x_i-x_{j-1})}{|A_h(x)|} w(x-h-x_i)w(x-h-x_{j-1})$$

elde edilir. Ağırlık fonksiyonları birbirinin ötelemesi olduğundan dolayı

$$w(x-h-x_{j-1}) = w(x-x_j), w(x-h-x_i) = w(x-x_{i+1})$$

özelliğini sağlar. Buradan

$$\phi_i^h(x-h) = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i+1}}^{k+1} \frac{(x-h-x_{j-1})(x_i-x_{j-1})}{|A_h(x)|} w(x-x_{i+1})w(x-x_j)$$

elde edilir. Ayrıca,  $x_{i+1} = x_i + h, x_{j-1} = x_j - h$  olduğundan

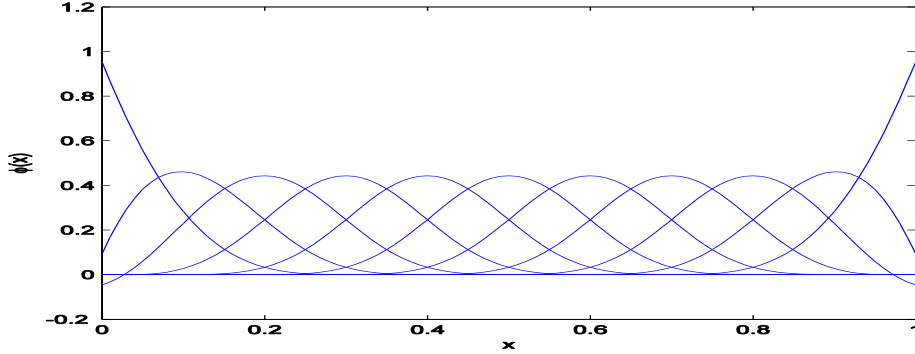
$$\phi_i^h(x-h) = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i+1}}^{k+1} \frac{(x-x_j)(x_{i+1}-x_j)}{|A_h(x)|} w(x-x_{i+1})w(x-x_j)$$

bulunur. Dolayısı ile

$$\phi_i^h(x-h) = \phi_{i+1}^h(x), i = 1, 2, \dots, k-1$$

bağıntısı elde edilir.

**Örnek.** Teorem 4'ün geçerli olduğu bölgeleri düğüm noktalarını  $0:0.1:1$  ve  $d_{mi}$  parametresini  $3(x_{i+1} - x_i)$  seçerek gösterelim. Seçilen  $d_{max}$  değeri için şekil fonksiyonlarının grafikleri Şekil 10'daki gibidir.



Şekil 10.  $d_{mi} = 3(x_{i+1} - x_i)$  değeri için şekil fonksiyonlarının grafikleri

Teorem 4 ile öteleme özelliğinin sağlanması için  $x-h$  ve  $x$  noktaları ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayıları eşit olmalıdır. Ağırlık fonksiyonları ve şekil fonksiyonlarının etki alanları birbirine eşit olduğundan Şekil 10'dan görüleceği üzere  $d_{max} = 3$  için  $x \in (0,0.1)$  veya  $x \in (0.9,1)$  ise  $x$  ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı 4 iken,  $x \in (0.1,0.2)$  veya  $x \in (0.8,0.9)$  için bu sayı 5'dir.  $x \in (x_i, x_{i+1}), i = 3, 4, \dots, n-3$  aralıklarında seçilmesi durumunda ise her bir aralık için  $x$  ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı eşit ve 6'dır. Burada  $n$ , düğüm noktası sayısıdır. Dolayısı ile öteleme özelliği

(0,2,0.8) aralığında sağlanır. Örneğin, 0.35,0.45,0.55,0.65 noktalarındaki şekil fonksiyonlarının değerleri

$$\phi_h(0.35) = [0 \ 0.0041 \ 0.1116 \ 0.3843 \ 0.3843 \ 0.1116 \ 0.0041 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\phi_h(0.45) = [0 \ 0 \ 0.0041 \ 0.1116 \ 0.3843 \ 0.3843 \ 0.1116 \ 0.0041 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\phi_h(0.55) = [0 \ 0 \ 0 \ 0.0041 \ 0.1116 \ 0.3843 \ 0.3843 \ 0.1116 \ 0.0041 \ 0 \ 0]$$

$$\phi_h(0.65) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.0041 \ 0.1116 \ 0.3843 \ 0.3843 \ 0.1116 \ 0.0041 \ 0]$$

olup öteleme özelliğini sağlamaktadır. Fakat  $x \in (0,0.1)$  ve  $x + h \in (0.1,0.2)$  noktaları ile ilişkili ağırlık fonksiyonları sayıları birbirine eşit olmadığından bu bölgelerde öteleme özelliği sağlanmaz. Benzer durum  $x \in (0.1,0.2)$  için de ve  $(x_{n-2}, x_{n-1}), (x_{n-1}, x_n)$  aralıkları için de geçerlidir. Örneğin, 0.05,0.15 ve 0.25 noktalarındaki şekil fonksiyonlarının değerleri

$$\phi_h(0.05) = [0.5595 \ 0.3813 \ 0.0590 \ 0.0003 \ 0 \ \dots \ 0]$$

$$\phi_h(0.15) = [0.1145 \ 0.3887 \ 0.3832 \ 0.1096 \ 0.0040 \ 0 \ \dots \ 0]$$

$$\phi_h(0.25) = [0.0041 \ 0.1116 \ 0.3843 \ 0.3843 \ 0.1116 \ 0.0041 \ 0 \ \dots \ 0]$$

şeklinindedir. Dolayısı ile Teorem 4'ün bu bölgelerde sağlanmadığı görülür. Benzer durum diğer bölgeler için de geçerlidir.

**Not.**  $d_{max} = 2(x_{i+1} - x_i)$  için öteleme özelliği sadece  $(x_1, x_2)$  ve  $(x_{n-1}, x_n)$  aralıklarında sağlanmaz. Çünkü bu aralıklarda seçilen keyfi bir  $x$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonları sayısı 3 iken diğer aralıklarda bu sayı 4'tür.

#### Kronecker Delta Fonksiyon Özelliği

Sayısal yöntemlerin sağlaması istenilen özelliklerden biri de Kronecker delta fonksiyon özelliğidir. Yani,

$$\phi_i^h(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

dir. Örneğin, sonlu elemanlar yönteminde şekil fonksiyonları bu özelliği sağlayacak şekilde seçilir. Bu sayede sayısal yaklaşımlarda sınır koşulları doğrudan sisteme uygulanabilir. Fakat bu özellik hareketli en küçük kareler yöntemi ile elde edilen şekil fonksiyonlarında geçerli değildir. Gerçekten, farklı etkinlik yarıçapları alınarak Şekil 4 ve 10'daki gibi elde edilen şekil fonksiyonlarından görüleceği üzere  $\phi_i^h(x_i) \neq 1$ ,



$i = 1, 2, \dots, n$  'dir. Ağsız yöntemler bu özelliği sağlamadığından sınır koşullarının sağlanması için farklı yöntemlerin probleme uygulanması gerekir. Günümüze kadar sınır koşullarının sağlanması için birçok yöntem geliştirilmiş olup bunlardan en çok kullanılanları Lagrange çarpanları yöntemi(Belytschko vd., 1994) ve penaltı yöntemidir(Zhu ve Atluri, 1998). Bu çalışmada sınır koşulları için penaltı yöntemi kullanılmaktadır. Bu yöntemin probleme nasıl uygulandığı eleman bağımsız Galerkin yöntemi kısmında değinilmektedir(Mukherjee ve Mukherjee, 1997).

#### Diklik(Ortogonalite) Özelliği

Hareketli en küçük kareler yöntemi ile elde edilen şekil fonksiyonları diklik özelliğini sağlamazlar. Örneğin,  $[0,1]$  aralığında eşit aralıklı 11 adet düğüm noktası ve  $d_{mi} = 0.2$  alınırsa

$$\int_0^1 \phi_4^h(x)\phi_5^h(x)dx \cong 0.0184 \neq 0$$

bulunur. Dolayısı ile şekil fonksiyonları dik değildir.

**Not.** Bundan sonraki kısımlarda  $i$ . şekil fonksiyonu  $\phi_i^h(x)$  kısaca  $\phi_i(x)$  ile gösterilmektedir. Ayrıca Kesim 3.1.1'den farklı olarak  $n$  ile düğüm noktası sayısı gösterilmektedir.

#### 3.1.3. Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi(Element Free Galerkin Method(EFG))

Şekil fonksiyonlarının elde edilmesi aşamasından sonra verilen problemlerin ağsız yöntemler yardımıyla nasıl çözüldüğünü inceleyelim. Bu çalışmada ağsız yöntemler içerisinde eleman bağımsız Galerkin yöntemini kullanıyoruz.

Eleman bağımsız Galerkin yöntemi diferensiyel denklemin zayıf şekli ile çalışır ve test fonksiyonları olarak şekil fonksiyonları seçilir. Fakat sonlu elemanlar yöntemindeki gibi Dirichlet sınır koşulları probleme doğrudan uygulanamaz. Çünkü şekil fonksiyonları Kronecker delta fonksiyon özelliğini sağlamazlar. Dolayısı ile sınır koşullarını sağlamak için ekstra yöntem ihtiyacı vardır. Verilen problemin sayısal çözümünün sınır şartlarını sağlanması için Penaltı yöntemi, Lagrange yöntemi, sınır bölgelerde sonlu elemanlar şekil fonksiyonunu kullanan yöntem(Krongauz ve Belytschko, 1996) vb. yöntemleri önerilir. Bu çalışmada ise Penaltı yöntemi kullanılmaktadır.

Penaltı yönteminde (5) ile verilen problemin varyasyonel şekline sınır bölgelerinde

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} (u(x) - u_\Gamma) \alpha (u(x) - u_\Gamma)^T dx \quad (33)$$

terimi eklenir. Burada  $\Gamma_u$ , Dirichlet sınır şartına sahip sınır bölgeleri,  $u_\Gamma$  bu sınırlardaki sınır değerleridir.  $\alpha \in \mathbb{R}$ 'ye ise Penaltı parametresi adı verilir. Örneğin, (1) problemi için sınır bölgeleri  $x = 0, x = 1$  olup sınır değerleri ise  $u(0) = u(1) = 0$ 'dir. Eleman bağımsız Galerkin yöntemi problemin zayıf şekline uygulandığından (33)'ün zayıf şekli bulunmalıdır. Kesim 1.2'de tanımlanan  $V$  kümesinden seçilen  $v$  test fonksiyonu için (33)'ün zayıf şekli

$$\int_{\Gamma_u} (u(x) - u_\Gamma) \alpha v(x) dx$$

şeklindedir. Dolayısı ile (1) problemine Penaltı yöntemi uygulanırsa problemin zayıf şekline

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_u} (u(x) - u_\Gamma) \alpha v(x) dx &= (u(0) - 0) \alpha v(0) + (u(1) - 0) \alpha v(1) \\ &= u(0) \alpha v(0) + u(1) \alpha v(1) \end{aligned} \quad (34)$$

terimi eklenir.

Kesim 3.1.2'de elde edilen şekil fonksiyonlarının grafiklerinden görüleceği üzere şekil fonksiyonlarının sınırlardaki değerleri sıfıra eşit değildir. Eleman bağımsız Galerkin yönteminde test fonksiyonları olarak şekil fonksiyonları seçildiğinden test fonksiyonları  $v(0) = v(1) = 0$  koşullarını sağlamaz. Bu durumda (3) denklemindeki sınır teriminin değeri sıfıra eşit olmaz. Bu durumda (1) probleminin zayıf şekli (3) ile

$$-a \frac{du}{dx}(1)v(1) + a \frac{du}{dx}(0)v(0) + a \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_0^1 u v dx = \int_0^1 v dx$$

olarak elde edilir. Penaltı teriminin eklenmesi ile problemin zayıf şekli

$$\begin{aligned} a \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_0^1 u v dx + \alpha (u(0)v(0) + u(1)v(1)) \\ -a \frac{du}{dx}(1)v(1) + a \frac{du}{dx}(0)v(0) = \int_0^1 v dx \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Öte yandan sınır koşullarının probleme uygulanması için Penaltı terimi,  $\alpha$ , çok büyük seçilmelidir. Bundan dolayı zayıf şekildeki iki sınır teriminden biri olan penaltı terimini içeren sınır terimi

$$\alpha(u(0)v(0) + u(1)v(1))$$

diğer sınır terimine göre çok büyük değerler alır. Dolayısı ile

$$-a \frac{du}{dx}(1)v(1) + a \frac{du}{dx}(0)v(0)$$

sınır terimi, penaltı terimini içeren sınır terimine göre ihmal edilebilir. Dolayısı ile problemin zayıf şekli

$$a \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_0^1 uv dx + \alpha(u(0)v(0) + u(1)v(1)) = \int_0^1 v dx \quad (35)$$

olarak elde edilir.

Ağsız yöntemlerde çözüm

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i \quad (36)$$

şeklinde araştırılır ve eleman bağımsız Galerkin yönteminde test fonksiyonları olarak şekil fonksiyonları seçildiğinden,  $v(x) = \phi_j(x), j = 1, 2, \dots, n$ , (35) bağıntısı ile

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( a \int \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx \right) u_i + \sum_{i=1}^n \left( \int \phi_i(x) \phi_j(x) dx \right) u_i \\ + \sum_{i=1}^n \alpha \left( \phi_i(0) \phi_j(0) + \phi_i(1) \phi_j(1) \right) u_i = \int_0^1 \phi_j(x) dx, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $n$ , düğüm noktası sayısıdır. Son bağıntı düzenlenirse

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( a \int_0^1 \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx + \int_0^1 \phi_i(x) \phi_j(x) dx + \alpha \left( \phi_i(0) \phi_j(0) + \phi_i(1) \phi_j(1) \right) \right) u_i \\ = \int_0^1 \phi_j(x) dx, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (37)$$

bulunur. (37) denklem sisteminde

$$K_{ij} := \int_0^1 \left( a\phi_i'(x)\phi_j'(x) + \phi_i(x)\phi_j(x) \right) dx + \alpha \left( \phi_i(0)\phi_j(0) + \phi_i(1)\phi_j(1) \right) \quad (38)$$

$$f_j := \int_0^1 \phi_j(x) dx \quad (39)$$

ve bilinmeyenlerin oluşturduğu vektör

$$U := [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$$

olarak tanımlanırsa

$$KU = f \quad (40)$$

elde edilir.  $K$  ve  $f$  matrislerine “sistem matrisleri” ve (40) denklem sistemine ise (1) probleminin “sistem denklemi” adı verilir. Bu sistem çözülerek bilinmeyen  $U$  vektörü bulunur ve (36)’da yerine yazılarak  $u^h(x)$  yaklaşımı hesaplanır.

Sistem denkleminden görüleceği üzere çözümün elde edilmesi için şekil fonksiyonlarının 1. türevleri hesaplanmalıdır. Önerme 8 şekil fonksiyonunun 1. türevinin analitik ifadesini verir.

**Önerme 8.** (28) ile verilen şekil fonksiyonunun  $x$  değişkenine göre türevi

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i^h(x)}{dx} &\equiv \left( \phi_i^h(x) \right)' = \left( p^T(x) A_h^{-1}(x) (B_h(x))_i \right)' \\ &= \left( p^T(x) \right)' A_h^{-1}(x) (B_h(x))_i + p^T(x) \left( A_h^{-1}(x) \right)' (B_h(x))_i + p^T(x) A_h^{-1}(x) \left( (B_h(x))_i \right)' \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n$ 'dir. Burada

$$\left( p^T(x) \right)' \equiv \frac{d(p^T(x))}{dx} = [0 \quad 1] \quad (41)$$

$$\left( A_h^{-1}(x) \right)' \equiv \frac{d(A_h^{-1}(x))}{dx} = -\left( A_h^{-1}(x) \right) \left( A_h(x) \right)' \left( A_h^{-1}(x) \right) \quad (42)$$

$$(A_h(x))' \equiv \frac{dA_h(x)}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{dw}{dx} (x - x_i) p(x_i) p^T(x_i) \quad (43)$$

$$((B_h(x))_i)' \equiv \frac{d(B_h(x))}{dx} = \frac{dw}{dx} (x - x_i) p(x_i) \quad (44)$$

dir(Dolbow ve Belytschko, 1998).

**İspat.** Çarpmanın türevi kuralı ile şekil fonksiyonun türevinin Önerme 8'deki gibi olduğu açıktır. Ayrıca  $p(x)$ ,  $A_h(x)$  ve  $B_h(x)$  matrislerinin tanımı ile (41), (43) ve (44) bağıntıları kolaylıkla elde edilir. (42) bağıntısının doğruluğunu gösterelim. Bunun için (31) bağıntısından yararlanalım. (31) bağıntısına göre

$$A_h(x)\gamma(x) = p(x)$$

olduğundan

$$\gamma(x) = A_h^{-1}(x)p(x) \quad (45)$$

dir. (45) bağıntısının iki tarafının  $x$  değişkenine göre türevi alınırsa

$$\gamma'(x) = (A_h^{-1}(x))' p(x) + A_h^{-1}(x) p'(x) \quad (46)$$

elde edilir. Ayrıca (31) bağıntısının iki tarafının  $x$ 'e göre türevi alınırsa

$$(A_h(x))' \gamma(x) + A_h(x) \gamma'(x) = p'(x) \quad (47)$$

bulunur. (45) ve (46) bağıntıları (47)'de yerine yazılırsa

$$(A_h(x))' A_h^{-1}(x) p(x) + A_h(x) (A_h^{-1}(x))' p(x) + A_h(x) A_h^{-1}(x) p'(x) = p'(x)$$

$$\Rightarrow (A_h(x))' A_h^{-1}(x) p(x) + A_h(x) (A_h^{-1}(x))' p(x) + p'(x) = p'(x)$$

$$\Rightarrow A_h(x) (A_h^{-1}(x))' p(x) = -(A_h(x))' A_h^{-1}(x) p(x)$$

$$\Rightarrow (A_h^{-1}(x))' p(x) = -A_h^{-1}(x) (A_h(x))' A_h^{-1}(x) p(x)$$

elde edilir. Buradan (42) bağıntısının doğruluğu görülür(Liu ve Gu, 2005).

Önerme 8'deki türevler ağırlık fonksiyonlarının türevlerini içerir. Bundan sonraki kısımlarda ağırlık fonksiyonları olarak (W1) ağırlık fonksiyonları kullanılmakta olup bu fonksiyonların  $x$  değişkenine göre türevi

$$\frac{dw(x - x_i)}{dx} = \frac{dw}{dr} \frac{dr}{dx} = \begin{cases} (-8r + 12r^2)sgn(x - x_i), & r \leq 1/2 \\ (-4 + 8r - 4r^2)sgn(x - x_i), & 1/2 < r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (48)$$

şeklindedir(Dolbow ve Belytschko, 1998).

### 3.1.4. Sayısal İntegrasyon

(40)'daki sistem denklemini elde etmek için  $K$  ve  $f$  matrislerindeki integraller sayısal olarak hesaplanmalıdır. Sayısal integraller için literatürde olan yöntemlerden bazıları orta nokta yöntemi, yamuk yöntemi, Simpson yöntemi, Romberg yöntemi, Gauss integral yöntemi vb. şeklinde verilebilir. Bu çalışmada Gauss integral yöntemi kullanılmaktadır.

Gauss yöntemi ile, verilen bir  $f(x)$  fonksiyonunun  $[a, b]$  aralığındaki integralini hesaplamak için ilk olarak integralin sınırları  $-1$  ve  $1$ 'e dönüştürülür. Bunun için  $x = \alpha + \beta\xi$  değişken dönüşümü yapılır. Sınırlar  $-1$  ve  $1$ 'e dönüşeceği için

$$a = \alpha - \beta$$

$$b = \alpha + \beta$$

denklemler sistemi elde edilir. Buradan  $\alpha = (a + b)/2$ ,  $\beta = (b - a)/2$  bulunur. Dolayısı ile integral

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f(\alpha + \beta\xi)|J|d\xi$$

halini alır. Burada  $|J| = \beta$ 'ye Jakobiyen determinanti denir.  $[-1,1]$  aralığındaki integral  $\xi_i$ 'ler Gauss noktaları ve  $\omega_i$ 'ler ağırlıkları olmak üzere

$$\int_{-1}^1 f(\alpha + \beta\xi)|J|d\xi = \sum_{i=1}^m \omega_i f(\alpha + \beta\xi_i)|J| \quad (49)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $m$ , Gauss noktası sayısıdır. Gauss yönteminde kullanılan Gauss noktaları ve ağırlıkları Ek-1’de verilmiştir.

Bu çalışmada 1 boyutlu uzayda elde edilen integrallerin sayısal olarak hesaplanması için aşağıdaki algoritma kullanılmaktadır:

-----  
 Algoritma(ALG-1): 1 boyutlu uzayda sayısal integral alma

1. Girdi:  $n$ : düğüm noktası sayısı,  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ : düğüm noktaları  
 $m$ : Gauss nokta sayısı,  $\xi_j, j = 1, 2, \dots, m$ : Gauss noktaları,  $\omega_j, j = 1, 2, \dots, m$ : ağırlıkları
  2.  $K$  matrisi ve  $f$  vektörünün elemanlarını sıfırla
  3. İntegral alınacak aralıkları belirle:  $[x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, \dots, n - 1$
  4. Değişken dönüşümü ile integral aralığını  $[-1, 1]$ ’e dönüştür
  5.  $j = 1$ ’den  $m$ ’e kadar aşağıdaki işlemleri yap:
    - 5.1.  $\alpha + \beta \xi_j$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonlarını belirle
    - 5.2. Hareketli en küçük kareler yöntemi ile  $\alpha + \beta \xi_j$  noktası ile ilişkili şekil fonksiyonlarının değerlerini hesapla
    - 5.3. (49) ile sayısal integralleri hesapla
    - 5.4. Hesaplanan integralleri  $K$  matrisi ve  $f$  vektöründe ilgili yere ata
  6. 4 ve 5’deki işlemleri  $n - 1$  aralık için uygula
  7. Çıktı:  $K$  matrisi ve  $f$  vektörü
- 

ALG-1’de sistem denklemindeki integrallerin sayısal olarak elde edilme algoritması verildi. Şimdi eleman bağımsız Galerkin yöntemini bir probleme uygulayarak sayısal çözümlerin davranışını gözlemleyelim.

Ağırsız yöntemlerde problemin çözümünde düğüm noktasının etki alanı önemli yer tutar. Kesim 3.1.2’de düzgün düğüm noktaları için etki alanını belirleyen en önemli parametrenin  $d_{max}$  olduğu ve kullanıcı tarafından belirlenmesi gerektiği belirtilmişti. Aşağıdaki örnekte bu parametrenin farklı değerleri için (1)’deki sınır değer problemi ağırsız eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile çözülmekte ve en uygun  $d_{max}$  parametre değeri belirlenmektedir.

**Örnek 1.** (1) problemini göz önüne alalım. Problemin tanım bölgesi eşit uzaklıklı 10 alt aralığa bölünsün ve bu aralıkların uç noktaları düğüm noktaları olarak alınsın. Bu düğüm

noktaları için  $a, d_{max}$  parametrelerinin farklı değerlerinde eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile oluşan

$$e = \sqrt{h \sum_{i=1}^n (u_{gerçek} - u_{sayisal})^2} \quad (50)$$

hatasını hesaplayalım. Bu hata değerleri Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. Farklı  $d_{max}$  ve  $a$  değerleri için (50)’de verilen hata değerleri

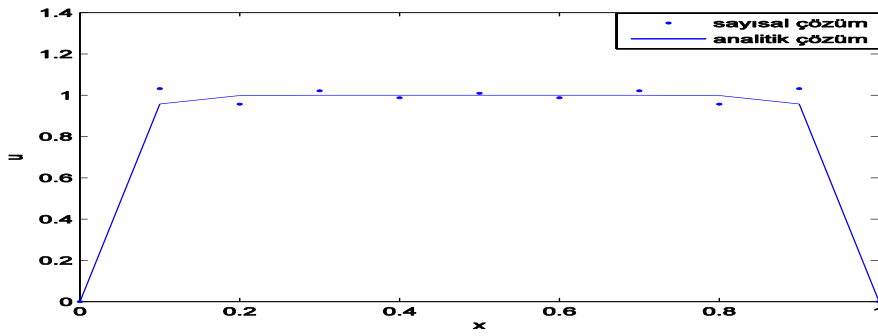
$d_{max}$	$e(a = 1)$	$e(a = 0.1)$	$e(a = 0.01)$
1.6	$7.3283 \times 10^{-4}$	0.0035	0.0123
1.7	$5.8317 \times 10^{-4}$	0.0025	0.0084
1.8	$2.5394 \times 10^{-4}$	0.0015	0.0044
1.9	$1.2209 \times 10^{-4}$	$7.2818 \times 10^{-4}$	0.0027
2	$7.2576 \times 10^{-5}$	$6.892 \times 10^{-4}$	0.0062
2.1	$1.9446 \times 10^{-4}$	0.0015	0.0110
2.2	$3.5393 \times 10^{-4}$	0.0025	0.0164
2.3	$5.3506 \times 10^{-4}$	0.0037	0.0223
2.4	$7.1069 \times 10^{-4}$	0.0048	0.0287
2.5	$8.7216 \times 10^{-4}$	0.0060	0.0361
2.6	0.0011	0.0073	0.0447
2.7	0.0013	0.0087	0.0550
2.8	0.0015	0.0103	0.0670
2.9	0.0017	0.0120	0.0803
3	0.0020	0.0134	0.0949
3.1	0.0022	0.0148	0.1105
3.2	0.0024	0.0162	0.1268
3.3	0.0026	0.0178	0.01450
3.4	0.0029	0.0196	0.1667
3.5	0.0032	0.0226	0.1951

Tablo 2’den  $a = 1$  ve  $a = 0.1$  için en az hata değerinin  $d_{max} = 2$ ’de  $a = 0.01$  için en az hata değerinin  $d_{max} = 1.9$ ’da olduğu gözlemlenir. Ayrıca  $a = 0.001$  için  $d_{max} = 2$ ’deki hata değeri en küçük 3. hata değeridir. Dolayısı ile eleman bağımsız Galerkin yönteminde  $d_{max}$  parametresi hatanın az olduğu 2 değeri olarak seçilebilir.



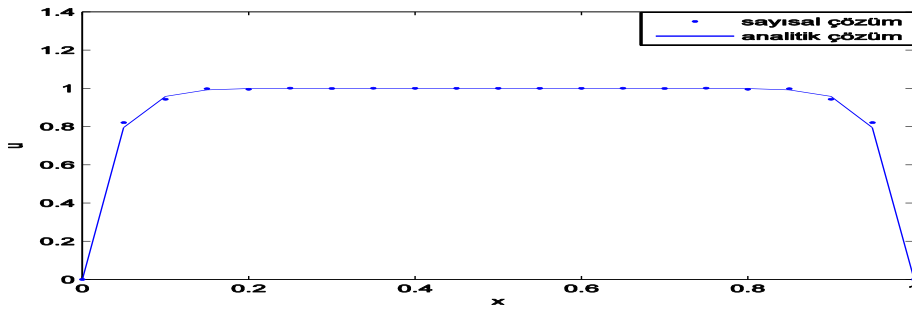
**Not.** 1 boyutlu uzayda yaptığımız çalışmalarda  $d_{max}$  değeri 2’de sabit tutularak sayısal çözümler elde edilmektedir.

**Örnek 2.** Örnek 1’de belirlenen  $d_{max}$  değeri ile problemin sayısal çözüm grafiklerini gözlemleyelim.  $a$ ’nın küçük değerleri için (1) problemi sınır katmanı içerir. Bu durumda sayısal çözümlerin davranışını gözlemlemek için  $a = 0.001$  seçelim. Bu takdirde düğüm noktaları arası uzaklık eşit ve 0.1 seçilmesi durumunda Şekil 11’deki çözüm grafiği elde edilir.



Şekil 11. Düğüm noktaları arası uzaklık 0.1 için (1) probleminin sayısal çözümü

Şekil 11’den görüleceği üzere çözümün hızlı değiştiği bölgelerde geniş aralıklı düğüm noktalarının alınması hataların oluşmasına neden olur. Bu hataların azaltılması için ya düğüm noktaları arası uzaklık azaltılmalı ya da hataların fazla olduğu yerlerde daha fazla düğüm noktası alınmalıdır. Eğer düğüm noktaları arası uzaklık yarıya indirilirse Şekil 12’deki çözüm grafiği elde edilir.



Şekil 12. Düğüm noktaları arası uzaklık 0.05 için (1) probleminin sayısal çözümü

Şekil 12'den görüleceği üzere düğüm noktaları arası uzaklığın yarıya düşürülmesi yöntemdeki hataları azaltmıştır. Düğüm noktaları arası uzaklık yarıya düşürüldüğünde

$$E = \|u(x) - u^h(x)\|_{\infty} \quad (51)$$

hataların hangi oranda değiştiğini gözlemlemek için Tablo 3'ü inceleyelim.

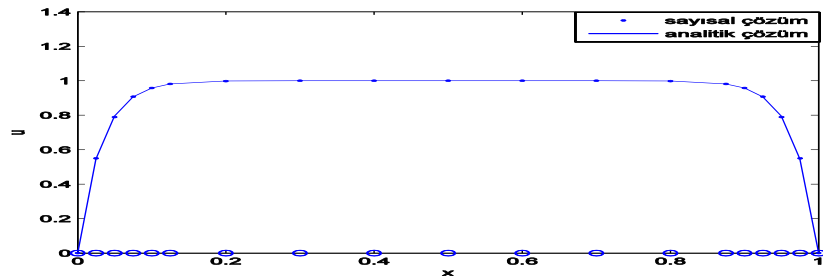
Tablo 3. Düğüm noktaları arası uzaklığın farklı değerleri için (51)'deki hata değerleri

Düğüm noktaları arası uzaklık	$E = \ u(x) - u^h(x)\ _{\infty}$
0.1	0.0743
0.05	0.0265
0.025	0.0077
0.0125	0.0021
0.0625	$5.7258 \times 10^{-4}$

Tablo 3'de farklı düğüm noktaları için (51)'de verilen  $E$  hatasının değerleri verilmiştir.

**Not.** Tablo 3'den görüleceği üzere düğüm noktaları arası uzaklık yarıya indirildiğinde yöntemin hatası 4 kat azalmaktadır. Dolayısı ile yöntemin kesme hatasının  $O(h^2)$  olduğu sayısal olarak gözlemlenmiş olur.

Yöntemdeki hataları azaltmanın bir diğer yolu ise hatanın fazla olduğu bölgelere yeni düğüm noktaları eklenmesidir. Ağsız yöntem, sisteme yeni nokta eklenmesine uygun bir yöntem olduğu için bu probleme kolayca uygulanabilir. Örneğin, hatanın fazla olduğu bölgeler olan sınır bölgelerde çok, diğer bölgelerde az düğüm noktası alınmasıyla elde edilen çözüm grafiği Şekil 13'deki gibidir.



Şekil 13. Düzgün dağıtılmamış düğüm noktaları için (1)'in sayısal çözümü

Şekil 13'den görüleceği üzere düğüm noktaları sınır bölgelere yığılmış olup diğer bölgelerde geniş bir ağ seçilmiştir. Bu şekilde seçilen düğüm noktaları için çözümler birbiriyle uyumludur. Bu durumda düğüm noktaları arasındaki eşit uzaklığın küçültülmesi yöntemine göre daha az işlem yapıldığı için daha hızlı çözümler elde edilir. Bu şekilde elde edilen çözümlere “adaptif çözümler” adı verilir. Bu çözümlere ileri ki bölümlerde daha detaylı değinilmektedir.

**Örnek 3.** Ağsız eleman bağımsız Galerkin yöntemini Neumann sınır şartlı problemlerde test etmek için

$$-\varepsilon u'' + u = \tanh(5x), u'(-1) = -1, u'(1) = 1 \quad (52)$$

problemini göz önüne alalım. Eleman bağımsız Galerkin yöntemi problemin zayıf şekline uygulandığı için (52) probleminin zayıf şekli bulunmalıdır. Bunun için denklemin her iki tarafı  $v$  test fonksiyonu ile çarpılarak  $-1$ 'den  $1$ 'e integral alınır ve integralin özellikleri kullanılırsa

$$-\varepsilon \int_{-1}^1 u'' v dx + \int_{-1}^1 u v dx = \int_{-1}^1 \tanh(5x) v dx$$

elde edilir. Son bağıntıda 1. terime kısmi integral alma uygulanırsa

$$-\varepsilon u' v \Big|_{x=-1}^{x=1} + \varepsilon \int_{-1}^1 u' v' dx + \int_{-1}^1 u v dx = \int_{-1}^1 \tanh(5x) v dx$$

bulunur. Sınır koşulları son bağıntıda yerine yazılırsa problemin zayıf şekli

$$-\varepsilon (v(1) + v(-1)) + \varepsilon \int_{-1}^1 u' v' dx + \int_{-1}^1 u v dx = \int_{-1}^1 \tanh(5x) v dx$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse Dirichlet sınır şartlı problemlerden farklı olarak sınır koşullarının sisteme sağlatılması için ekstra bir yöntem ihtiyacı yoktur. Yani, sınır şartları probleme doğrudan uygulanır.

Ağsız yöntemlerde çözüm (36)'daki gibi araştırıldığından çözüm zayıf şekilde yerine yazılır ve test fonksiyonları olarak şekil fonksiyonları seçilirse sistem denklemi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( \varepsilon \int_{-1}^1 \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx + \int_{-1}^1 \phi_i(x) \phi_j(x) dx \right) u_i \\ = \int_{-1}^1 \tanh(5x) \phi_j(x) dx + \varepsilon (\phi_j(1) + \phi_j(-1)), j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada  $n$ , düğüm noktası sayısıdır. Kesim 3.1.3'de yapıldığı gibi

$$K_{ij} := \varepsilon \int_{-1}^1 \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx + \int_{-1}^1 \phi_i(x) \phi_j(x) dx$$

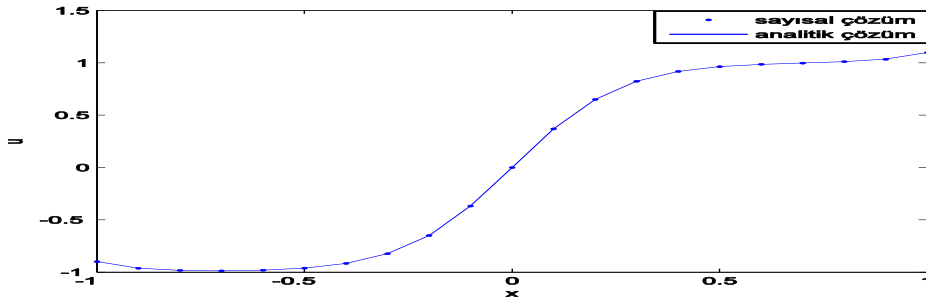
$$f_j := \int_{-1}^1 \tanh(5x) \phi_j(x) dx + \varepsilon (\phi_j(1) + \phi_j(-1)), 1 \leq i, j \leq n$$

şeklinde tanımlanırsa

$$Ku = f$$

sistem denklemleri elde edilir. Bu sistem çözülürken sayısal çözümler elde edilir.

Eğer  $\varepsilon = 0.01$  için düğüm noktaları arası uzaklık eşit ve 0.1 olarak seçilirse Şekil 14'deki çözüm grafiği elde edilir.



Şekil 14. (52) probleminin eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile çözümü

Şekil 14'den görüleceği üzere gerçek çözüm ile sayısal çözüm birbirini ile uyumludur. Dolayısı ile Neumann sınır şartlı problemlerde sınır koşulları için ekstra bir yöntem kullanılmadan sayısal çözümler elde edilebilmektedir.

Örnek 1'de elde edilen kesme hatasının Neumann sınır şartlı problemlerde de sağlandığını gözlemlemek için farklı düğüm noktaları için (51)'de verilen  $E$  hatalarını karşılaştıralım. Bu takdirde Tablo 4 elde edilir.

Tablo 4. Neumann sınır şartlı problem için EFG yönteminin (51)'deki hata değerleri

Düğüm noktaları arası uzaklık	$E = \ u(x) - u^h(x)\ _\infty$
0.1	0.0193
0.05	0.0047
0.025	0.0013
0.0125	$3.4795 \times 10^{-4}$

Tablo 4’den görüleceği üzere Örnek 1’de olduğu gibi düğüm noktaları arası uzaklık yarıya düşürüldüğünde hata değerleri 4 kat azalmaktadır. Dolayısı Örnek 1’deki sayısal olarak gözlenen yöntemin kesme hatasının  $O(h^2)$  olduğu bu örnekte de gözlemlenmiş olur.

Örnek 1’den görüleceği üzere çözümü hızlı değişen problemlerde eşit adım uzunluklu düğüm noktalarının kullanılması durumunda düğüm noktaları arası uzaklık çok küçük seçilmesi gerekir. Bu durumda ise bilgisayarın işlem yükü artar. Dolayısı ile sayısal çözümlerin elde edilmesi uzun süre alabilir.

Öte yandan şekil fonksiyonlarının özellikleri yardımıyla düğüm noktası sayısının fazla olması durumunda sistem matrisini oluşturmak için gerekli işlem sayısı azaltılabilir.

Bir işlemi yapmak için gerekli toplam çarpma ve bölme işlemi sayısına “kayan nokta aritmetik işlem sayısı veya aritmetik işlem sayısı”(flop(floating point operation)) adı verilir. Kesim 3.1.2’de elde edilen şekil fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak düzgün dağıtılmış düğüm noktaları için aritmetik işlem sayısı azaltılabilir.

### 3.1.5. Düzgün Dağıtılmış Düğüm Noktaları İçin Sistem Matrisini Oluşturmada Gerekli Aritmetik İşlem Sayısı

Düzgün dağıtılmış düğüm noktaları kullanılması durumunda Kesim 3.1.4 Örnek 1’de olduğu gibi çözümü hızlı değişim gösteren bölgelerdeki hataları azaltmak için düğüm noktaları arasındaki uzaklığın çok küçük seçilmesi gerekir. Bu ise sistem matrisini oluşturmada gerekli olan aritmetik işlem sayısını artırır. Dolayısı ile (38) ve (39)’daki integralleri hesaplamak çok büyük işlem yükü gerektirir. Bu durumu gözlemlemek için düzgün dağıtılmış düğüm noktaları için (38) ile tanımlanan  $K$  matrisindeki sadece

$$N_{ij} := \int_0^1 \phi_i(x)\phi_j(x)dx \quad (53)$$

integralini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısını hesaplayalım. Bunun için  $[0,1]$  aralığında düzgün olarak dağıtılmış  $n$  adet düğüm noktası alalım. Bu noktaları  $0 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = 1$  ile gösterelim ve düğüm noktaları arası eşit uzaklık ise  $h = x_{i+1} - x_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$  olsun.

Kesim 3.1.4 Örnek 1’de eleman bağımsız Galerkin yöntemi için en uygun  $d_{max}$  değerinin 2 olduğu gözlemlenmişti. Dolayısı ile aritmetik işlem sayısını  $d_{max} = 2$  değeri

için hesaplamak uygundur.  $d_{max}$ 'in diğer değerleri için benzer işlemler ile toplam aritmetik işlem sayısı belirlenebilir. Bu takdirde Önerme 9 doğrudur.

**Not.** Aritmetik işlem sayıları hesaplanırken her bir çarpma veya bölme işlemi bir işlem olarak kabul edilmekte toplama ve çıkarma işlemleri dikkate alınmamaktadır.

**Not.** Gauss yöntemi ile integraller hesaplanırken Gauss nokta sayısı 3 veya 4 olarak seçilebilir. Kesim 3.1.4'deki problemlerde Gauss noktası  $m$ , 3 alınarak sayısal çözümler elde edilmiştir. Elde edilen sayısal çözümlerden  $m = 3$  seçilmesinin uygun olduğu gözlemlenir. Bundan sonraki kısımlarda Gauss nokta sayısı  $m = 3$  seçilmektedir.

**Önerme 9.**  $\Omega = [a, b]$  aralığında tanımlanmış bir problem için düzgün dağıtılmış düğüm noktaları  $a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, d_{max} = 2$  ve düğüm noktaları arası uzaklık  $h$  olarak seçilsin. Bu takdirde

$$N_{ij} = \int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx, i, j = 1, 2, \dots, n \quad (54)$$

matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı(integral alma işleminde ALG-1 algoritmasının kullanılması durumunda)

$$O(n)$$

kadardır.

**İspat.** Kesim 3.1.4'de verilen ALG-1 algoritması ile

$$N_{ij} = \int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx = \sum_{l=1}^{n-1} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \phi_i(x)\phi_j(x)dx, i, j = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde hesaplanır. Öte yandan Kesim 3.1.2'den bilindiği üzere  $d_{max} = 2$  için  $[x_1, x_2], [x_{n-1}, x_n]$  aralıklarında seçilen bir  $x$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı 3 iken diğer bölgelerde 4'tür. Dolayısı ile ilk ve son aralıklarda  $N$  matrisinin  $3 \times 3$ 'lük kısmı sıfırdan farklı iken diğer aralıklarda  $4 \times 4$ 'lük kısmı sıfırdan farklıdır. İlk olarak  $[x_l, x_{l+1}]$ ,  $l = 2, 3, \dots, n - 2$  aralıklarında  $N$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısını hesaplayalım ve bunu diğer aralıklara genişletelim.

$x \in [x_l, x_{l+1}], l = 2, 3, \dots, n - 2$  keyfi olsun. Bu takdirde

$$z(\xi) = \frac{x_{l+1} + x_l}{2} + \frac{x_{l+1} - x_l}{2}\xi, |J| = \frac{x_{l+1} - x_l}{2}$$

olmak üzere

$$\int_{x_l}^{x_{l+1}} \phi_i(x)\phi_j(x)dx = \int_{-1}^1 \phi_i(z(\xi))\phi_j(z(\xi))|J|d\xi = \sum_{s=1}^m \omega_s \phi_i(z(\xi_s))\phi_j(z(\xi_s))|J|$$

dir. Burada  $m$ , Gauss yönteminde seçilen Gauss nokta sayısıdır. Dolayısı ile  $N$  matrisinin  $[x_l, x_{l+1}]$  aralığında tek bir elemanını hesaplamak için  $3m$  adet çarpma işlemi yapılır. Bu aralıkta  $N$  matrisinin  $4 \times 4$ 'lük kısmı sıfırdan farklı olduğu için  $[x_l, x_{l+1}]$  aralığında  $N$  matrisini hesaplamak için toplamda

$$16 \cdot 3m = 48m$$

çarpma işlemi yapılması gerekir.  $x$  noktasına 4 adet ağırlık fonksiyonu etki ettiği aralık sayısı  $n - 3$  olduğundan bu aralıklarda  $N$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$48(n - 3)m$$

dir. Öte yandan birinci ve sonuncu aralıklarda  $N$  matrisinin  $3 \times 3$ 'lük kısmı sıfırdan farklı olduğundan bu aralıkların herbirindeki toplam aritmetik işlem sayısı  $9 \cdot 3m$ 'dir. Bu aralıkların sayısı 2 olduğundan bu aralıklarda  $N$  matrisini hesaplamak için

$$54m$$

aritmetik işlem yapılır. Dolayısı ile  $N$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$48(n - 3)m + 54m$$

dir.  $m = 3$  seçildiğinden  $N$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$48(n - 3)m + 54m = 144n - 270 \equiv O(n)$$

olarak elde edilir.

**Teorem 5.**  $\Omega = [a, b]$  aralığında tanımlanmış bir problem için düzgün dağıtılmış düğüm noktaları  $a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ,  $d_{max} = 2$  ve düğüm noktaları arası uzaklık  $h$  olarak seçilsin. Bu takdirde (38)'de tanımlanan  $K$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı(integral alma işleminde ALG-1 algoritmasının kullanılması durumunda)

$$O(n)$$

kadardır.

**İspat.** Önerme 9'daki  $N$  matrisi (38)'deki  $K$  matrisinde sadece

$$\int_0^1 \phi_i(x)\phi_j(x)dx$$

integraline karşılık gelir. Fakat (38)'de  $K$  matrisi

$$K_{ij} = \int_0^1 \left( a\phi_i'(x)\phi_j'(x) + \phi_i(x)\phi_j(x) \right) dx + \alpha \left( \phi_i(0)\phi_j(0) + \phi_i(1)\phi_j(1) \right)$$

şeklinde elde edilmişti. Dolayısı ile  $K$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı,  $N$  matrisi için Önerme 9'da hesaplanan aritmetik işlem sayısına

$$\int_0^1 \phi_i'(x)\phi_j'(x)dx, \alpha \left( \phi_i(0)\phi_j(0) + \phi_i(1)\phi_j(1) \right)$$

integrallerini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayıları eklenmesi ile bulunur.

$$\int_0^1 \phi_i'(x)\phi_j'(x)dx$$

matrisini elde etmek için gerekli aritmetik işlem sayısı  $N$  matrisi ile aynıdır. Ayrıca, Kesim 3.1.2'de elde edilen ağırlık fonksiyonlarının grafiklerinden görüleceği üzere  $x = 0$  ve  $x = 1$  noktaları ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı 2 olduğundan elemanları

$$\phi_i(0)\phi_j(0), \phi_i(1)\phi_j(1)$$

olan matrisin  $2 \times 2$ 'lik kısmı sıfırdan farklıdır. Dolayısı ile bu işlem için gerekli aritmetik işlem sayısı  $4$ 'tür. Sonuç olarak  $K$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$2(48(n-3)m + 54m) + 2 \cdot 4$$

dir. Gauss nokta sayısı 3 seçildiğinden  $K$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$288n - 532 \equiv O(n)$$

olarak elde edilir

Dikkat edilirse düğüm noktası sayısının büyük olduğu durumlarda Teorem 5 ile  $K$  matrisinin hesaplanması için gerekli aritmetik işlem sayısı da büyük değerler alır. Bu ise bilgisayarın işlem yükünü ve hesaplama süresini artırır. Dolayısı ile bu sayının azaltılması problemlerin çözümü için önemlidir.

### 3.1.5.1. $O(1)$ İşlemlerde Sistem $K$ Matrisinin Hesaplanması

Hızlı değişim gösteren fonksiyonlarda sık düğüm noktalarının alınması problemin sayısal çözümündeki hataların azaltılması açısından önemli olsa da problemin işlem yükünü artırır. Çünkü Teorem 5'ten görüleceği üzere fazla düğüm noktası alınması aritmetik işlem sayısını artırır. Dolayısı ile aritmetik işlem sayısının azaltılması problemin



etkin bir şekilde çözülmesi için önemlidir. Bu bölümde Kesim 3.1.2’de türetilen şekil fonksiyonu özellikleri yardımıyla düzgün dağıtılmış düğüm noktaları için aritmetik işlem sayısı azaltılmaktadır.

**Önerme 10.**  $\Omega = [a, b]$  aralığında tanımlanmış bir problem için düzgün dağıtılmış düğüm noktaları  $a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ,  $d_{max} = 2$  ve düğüm noktaları arası uzaklık  $h$  olarak seçilsin. Eğer

$$N_{ij} = \int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx, i, j = 1, 2, \dots, n \quad (55)$$

ile verilen  $N = (N_{ij})$  matrisi şekil fonksiyonlarının öteleme özelliği kullanılarak hesaplanırsa  $N$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$O(1)$$

kadardır.

**İspat.** Teorem 4 ile  $d_{max} = 2$  seçilmesi durumunda düzgün olarak dağıtılmış düğüm noktaları için  $[x_2, x_{n-1}]$  aralığında öteleme özelliği sağlanır. Çünkü keyfi bir  $x \in (x_i, x_{i+1})$ ,  $2 \leq i \leq n - 2$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı her bir aralıkta eşit ve 4’tür. Bu takdirde  $3 \leq i \leq n - 2$  için

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x)\phi_j(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1}(x)\phi_{j+1}(x)dx$$

dir. Gerçekten,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x)\phi_j(x)dx = \int_{x_{i-h}}^{x_i} \phi_i(x)\phi_j(x)dx$$

integralinde  $\xi = x + h$  değişken dönüşümü yapılırsa

$$\int_{x_{i-h}}^{x_i} \phi_i(x)\phi_j(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+h}} \phi_i(\xi - h)\phi_j(\xi - h)d\xi$$

elde edilir. Şekil fonksiyonları öteleme özelliğini sağladığından

$$\int_{x_i}^{x_{i+h}} \phi_i(\xi - h)\phi_j(\xi - h)d\xi = \int_{x_i}^{x_{i+h}} \phi_{i+1}(\xi)\phi_{j+1}(\xi)d\xi = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1}(\xi)\phi_{j+1}(\xi)d\xi$$

bulunur. Yani, öteleme özelliğinin geçerli olduğu bölgelerde integral değerleri de birbirine eşittir. Dolayısı ile  $N$  matrisi hesaplanırken sadece  $(x_2, x_3)$  aralığında integral değerleri hesaplanır ve öteleme özelliğinin geçerli olduğu diğer bölgelerde bu değerler ötelenerek

sisteme eklenir. Böylece diğer bölgelerde çarpma veya bölme işlemi yapılmadan sistem matrisleri elde edilir. Fakat sınır bölgelere komşu aralıklarda öteleme özelliği mevcut olmadığından bu bölgelerdeki integraller ayrıca hesaplanmalıdır.

$(x_i, x_{i+1}), 2 \leq i \leq n-2$ , aralıklarında öteleme özelliği ile sadece  $(x_2, x_3)$  aralığında  $N$  matrisi hesaplandığından  $(x_2, x_{n-1})$  içerisinde kalan aralıklarda  $N$  matrisinin hesaplanması için gerekli aritmetik işlem sayısı Önerme 9'un ispatı ile  $48m$ 'dir. Burada,  $m$ , Gauss nokta sayısıdır.  $(x_1, x_2)$  ve  $(x_{n-1}, x_n)$  aralıklarında öteleme özelliği mevcut olmadığından bu bölgelerdeki toplam aritmetik işlem sayısı ise  $54m$ 'dir. Dolayısı ile öteleme özelliği yardımıyla  $N$  matrisini oluşturmak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$54m + 48m = 102m = 306 \equiv O(1) \quad (56)$$

dır.

**Teorem 6.**  $\Omega = [a, b]$  aralığında tanımlanmış bir problem için düzgün dağıtılmış düğüm noktaları  $a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, d_{max} = 2$  ve düğüm noktaları arası uzaklık  $h$  olarak seçilsin. Eğer (38)'de tanımlanan  $K$  matrisi şekil fonksiyonlarının öteleme özelliği kullanılarak hesaplanırsa  $K$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$O(1)$$

kadardır.

**İspat.** Önerme 10'da tanımlanan  $N$  matrisi,  $K$  matrisinde sadece

$$\int_0^1 \phi_i(x) \phi_j(x) dx$$

integraline karşılık gelir. (38)'de  $K$  matrisi

$$K_{ij} = \int_0^1 \left( \alpha \phi_i'(x) \phi_j'(x) + \phi_i(x) \phi_j(x) \right) dx + \alpha \left( \phi_i(0) \phi_j(0) + \phi_i(1) \phi_j(1) \right)$$

şeklinde elde edildiğinden  $K$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı, Önerme 10'da hesaplanan aritmetik işlem sayısına

$$\int_0^1 \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx, \alpha \left( \phi_i(0) \phi_j(0) + \phi_i(1) \phi_j(1) \right)$$

integrallerini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayılarının eklenmesi ile bulunur.

$$\int_0^1 \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx$$

matrisini elde etmek için gerekli aritmetik işlem sayısı  $N$  matrisi ile aynıdır. Ayrıca Teorem 5'in ispatından bilindiği üzere

$$\phi_i(0)\phi_j(0), \phi_i(1)\phi_j(1)$$

elemanlarını hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı 4'e eşittir. Sonuç olarak  $m = 3$  seçildiğinden  $K$  matrisinin hesaplanması için gerekli aritmetik işlem sayısı öteleme özelliği kullanıldığı durumda

$$2 \cdot 102m + 2 \cdot 4 = 204m + 8 = 620 \equiv O(1)$$

dir.

### 3.1.6. Şekil Fonksiyonlarını Elde Etmek İçin Gerekli Aritmetik İşlem Sayısı

Kesim 3.1.5.1'de öteleme özelliği kullanılarak sadece sistem matrisini elde etmek için gerekli aritmetik işlem sayılarındaki kazanç hesaplanmıştır. Öte yandan öteleme özelliğinin mevcut olduğu bölgelerde sadece bir aralıkta  $K$  matrisi hesaplandığı için diğer bölgelerde şekil fonksiyonlarının değerlerinin elde edilmesi gerekmez. Dolayısı ile öteleme özelliği ile integrallerde elde edilen  $O(n)$  kazancı yanında şekil fonksiyonlarının elde edilmesi sürecinde de bir kazanç sağlanır.

Bu bölümde şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin bir noktadaki değerlerini elde etmek için gerekli aritmetik işlem sayısı hesaplanmaktadır. Bu sayede öteleme özelliği ile sistem matrisinin elde edildiği durumlardaki toplam kazanç araştırılmaktadır. Öte yandan bu bölümde işlem sayısının azaltılması için ağırlık fonksiyonları olarak (W1) ağırlık fonksiyonları yerine (W2) ağırlık fonksiyonları kullanılmaktadır. Çünkü, (W1) ağırlık fonksiyonları parçalı sürekli tanımlandığı için bu fonksiyonlar yardımıyla aritmetik işlem sayısında genel bir formül elde etmek (W2) fonksiyonuna göre daha zordur. Gerçekten, herhangi bir  $x$  noktası ile ilişkili düğüm noktalarında tanımlanan ağırlık fonksiyonlarının hangilerinde

$$2/3 - 4r^2 + 4r^3$$

fonksiyonun hangilerinde

$$4/3 - 4r + 4r^2 - 4/3r^3$$

fonksiyonun kullanılacağı belirlenmesi işlemi genel  $d_{mi}$ 'ler için çok zordur. Dolayısı ile bu bölümde aritmetik işlem sayısı için genel bir formül elde etmede (W2) ağırlık fonksiyonları kullanılmaktadır.

**Önerme 11.**  $\Omega = [a, b]$  aralığında düzgün olarak dağıtılmış düğüm noktaları  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  olsun. Eğer herhangi bir  $x \in (a, b)$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonlarının sayısı  $N_x$  ise (W2) ağırlık fonksiyonu ile (26)'da verilen  $\phi_h(x)$  şekil fonksiyonları vektörünün elde edilmesi için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$18N_x + 6$$

kadardır.

**İspat.** (W2) ağırlık fonksiyonları Kesim 3.1.1'de  $r = |x - x_i|/d_{mi}$  olmak üzere

$$w(x - x_i) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştı. Buradan  $x$  ile ilişkili olan bir ağırlık fonksiyonunun bu noktadaki değerini hesaplamak için 10 adet aritmetik işlem gerekir.  $x$  ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı  $N_x$  olduğundan ağırlık fonksiyonlarını elde etmek için gerekli aritmetik işlem sayısı  $10N_x$ 'dir. Öte yandan Kesim 1.6'dan bilindiği üzere şekil fonksiyonlarının bir noktadaki değerlerinin hesaplanması için  $A_h(x)$  ve  $B_h(x)$  matrisleri hesaplanmalıdır. Eğer  $x$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonları  $w_1, w_2, \dots, w_{N_x}$  ile gösterilirse

$$A_h(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_x} w(x - x_i) & \sum_{i=1}^{N_x} x_i w(x - x_i) \\ \sum_{i=1}^{N_x} x_i w(x - x_i) & \sum_{i=1}^{N_x} x_i^2 w(x - x_i) \end{bmatrix}$$

dir.  $A_h$  matrisinin elemanlarından görüleceği üzere  $A_h$ 'ın 1. satır 1. sütun elemanında çarpma veya bölme işlemi mevcut olmadığından bu elemanı elde etmek için gerekli aritmetik işlem sayısı sıfırdır.  $A_h$ 'nın 1. satır 2. sütun ve 2. satır 1. sütun elemanlarını elde etmede gerekli aritmetik işlem sayıları  $N_x$  olup bu sayı matrisin son elemanı için  $2N_x$ 'dir. Dolayısı ile  $A_h$  matrisini elde etmek için gerekli aritmetik işlem sayısı  $3N_x$ 'dir.

$B_h$  matrisi ise

$$B_h(x) = \begin{bmatrix} w(x - x_1) & w(x - x_2) & \dots & w(x - x_{N_x}) & 0 & \dots & 0 \\ x_1 w(x - x_1) & x_2 w(x - x_2) & \dots & x_{N_x} w(x - x_{N_x}) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlandığından  $B_h$  matrisinin sadece 2. satırında çarpma işlemi yapılır. Dolayısı ile  $B_h$  matrisinin hesaplanmasında gerekli aritmetik işlem sayısı  $N_x$ 'dir. Şekil fonksiyonları

$$\phi_h(x) = [1 \ x](A_h(x))^{-1} B_h(x)$$

şeklinde tanımlandığından  $A_h(x)$  matrisinin tersinin hesaplanması için gerekli aritmetik işlem sayısı hesaplanmalıdır.  $2 \times 2$ 'lik matrisin tersi matrisin determinantı yardımıyla

$$(A_h(x))^{-1} = \frac{1}{|A_h(x)|} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_x} x_i^2 w(x - x_i) & - \sum_{i=1}^{N_x} x_i w(x - x_i) \\ - \sum_{i=1}^{N_x} x_i w(x - x_i) & \sum_{i=1}^{N_x} w(x - x_i) \end{bmatrix}$$

ile hesaplanır.  $|A_h(x)|$  hesaplanması için 2 çarpma işlemi yapılır.  $A_h(x)$  matrisinin tersinde herbir terim  $|A_h(x)|$  ile bölüldüğünden ters alma işlemi için gerekli aritmetik işlem sayısı 6'dır.

Öte yandan

$$\phi_h(x) = [1 \ x](A_h(x))^{-1} B_h(x)$$

ile  $i$ . şekil fonksiyonu

$$\phi_i^h(x) = (\alpha_{11} + \alpha_{21}x)\beta_{1i} + (\alpha_{12} + \alpha_{22}x)\beta_{2i}$$

şeklinde bulunur. Burada  $\alpha_{kl}, 1 \leq k, l \leq 2$ ,  $(A_h(x))^{-1}$  matrisinin elemanlarını gösterirken  $\beta_{ki}, 1 \leq k \leq 2, 1 \leq i \leq N_x$  ise  $B_h$  matrisinin  $i$ . sütunudur. Dolayısı ile  $\phi_i^h(x)$ 'ı hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı 4'dür. Toplamda  $N_x$  adet şekil fonksiyonu hesaplanacağından  $\phi_h(x)$  şekil vektörünü hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısı  $4N_x$  olarak elde edilir. Sonuç olarak şekil fonksiyonlarının keyfi bir noktadaki değeri hesaplanırken gerekli aritmetik işlem sayısı Tablo 5'deki gibi özetlenebilir.

Tablo 5. Şekil fonksiyonlarının elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısı

	Aritmetik İşlem Sayısı
Ağırlık fonksiyonları için aritmetik işlem sayısı	$10N_x$
$A_h$ matrisi için ilave aritmetik işlem sayısı	$3N_x$
$B_h$ matrisi için ilave aritmetik işlem sayısı	$N_x$
$A_h^{-1}$ matrisi için ilave aritmetik işlem sayısı	6
$\phi_h$ vektörü için ilave aritmetik işlem sayısı	$4N_x$
Şekil fonksiyonlarının elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısı	$18N_x + 6$

Öte yandan (38)'deki  $K$  matrisinden görüleceği üzere sistem denkleminin elde edilmesi için şekil fonksiyonlarının türevlerinin Gauss noktalarındaki değerleri de hesaplanmalıdır. Dolayısı ile şekil fonksiyonlarının türevlerinin hesaplanmasında gerekli

aritmetik işlem sayıları da bulunmalıdır. Önerme 12 keyfi bir noktada şekil fonksiyonlarının türevlerini elde etmede gerekli aritmetik işlem sayısı verilmiştir.

**Önerme 12.**  $\Omega = [a, b]$  aralığında düzgün olarak dağıtılmış düğüm noktaları  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  ve herhangi bir  $x \in (a, b)$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonlarının sayısı  $N_x$  olsun.  $\phi_h(x)$ 'lerin hesaplandığını varsayalım. (W2) ağırlık fonksiyonu kullanılarak Önerme 8 ile verilen  $\phi'_h(x)$  vektörünün elde edilmesi için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$21N_x + 24$$

kadardır.

**İspat.** Önerme 8 ile şekil fonksiyonlarının türevlerinin  $x$  noktasındaki değeri

$$\phi'_h(x) = (p^T(x))' A_h^{-1}(x) B_h(x) + p^T(x) (A_h^{-1}(x))' B_h(x) + p^T(x) A_h^{-1}(x) (B_h(x))'$$

bağıntısı ile hesaplanır.  $A_h^{-1}(x), B_h(x)$  matrisleri için gerekli aritmetik işlem sayıları Tablo 5'de verilmiştir.  $\phi_h(x)$ 'ler hesaplandığından bu matrisleri hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayıları,  $\phi'_h(x)$  vektörünü hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısına eklenmemektedir. Şimdi şekil fonksiyonlarının türevlerindeki diğer matrisler için gerekli aritmetik işlem sayılarını hesaplayalım.

$$(42)'den\ bilindiği\ üzere\ (A_h^{-1}(x))'$$

$$(A_h^{-1}(x))' = -(A_h^{-1}(x))(A_h(x))'(A_h^{-1}(x))$$

ile hesaplanır.  $A_h(x)$  matrisinin türevi ise (43) ile

$$(A_h(x))' = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_x} w'(x - x_i) & \sum_{i=1}^{N_x} x_i w'(x - x_i) \\ \sum_{i=1}^{N_x} x_i w'(x - x_i) & \sum_{i=1}^{N_x} x_i^2 w'(x - x_i) \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısı ile  $(A_h(x))'$  matrisinin hesaplanmasında gerekli aritmetik işlem sayısının belirlenmesi için  $w'(x - x_i)$ 'deki aritmetik işlem sayıları belirlenmelidir. (W1) ağırlık fonksiyonlarının (48)'de elde edilen türevlerine benzer şekilde (W2) ağırlık fonksiyonlarının türevi

$$w'(x - x_i) = \begin{cases} (-12r + 24r^2 - 12r^3) \operatorname{sgn}(x - x_i), & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısı ile keyfi bir noktada şekil fonksiyonlarının türevini elde etmek için 7 adet çarpma işlemi yapılır.  $x$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı  $N_x$  olduğundan ağırlık fonksiyonlarının türevlerinin hesaplanması için gerekli aritmetik işlem sayısı  $7N_x$ 'dir.

$(A_h(x))'$  matrisi  $A_h(x)$  matrisinden farklı olarak ağırlık fonksiyonlarının türevini içerir. Dolayısı ile  $(A_h(x))'$  ve  $A_h(x)$  matrislerini hesaplamadaki aritmetik işlem sayıları aynıdır.

$(A_h^{-1}(x))'$  matrisini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısını belirlemek için

$$(A_h(x))' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}, (A_h(x))^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilsin. Bu takdirde

$$(A_h^{-1}(x))' = -(A_h^{-1}(x))(A_h(x))'(A_h^{-1}(x)) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada

$$d_{11} = -\alpha_{11}(\alpha_{11}a'_{11} + \alpha_{12}a'_{21}) - \alpha_{21}(\alpha_{11}a'_{12} + \alpha_{12}a'_{22})$$

$$d_{12} = -\alpha_{12}(\alpha_{11}a'_{11} + \alpha_{12}a'_{21}) - \alpha_{22}(\alpha_{11}a'_{12} + \alpha_{12}a'_{22})$$

$$d_{21} = -\alpha_{11}(\alpha_{21}a'_{11} + \alpha_{22}a'_{21}) - \alpha_{21}(\alpha_{21}a'_{12} + \alpha_{22}a'_{22})$$

$$d_{22} = -\alpha_{12}(\alpha_{21}a'_{11} + \alpha_{22}a'_{21}) - \alpha_{22}(\alpha_{21}a'_{12} + \alpha_{22}a'_{22})$$

dir. Dolayısı ile  $(A_h^{-1}(x))'$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı 24'tür.

$(B_h(x))'$  türev matrisi (44) ile

$$(B_h(x))' = \begin{bmatrix} w'(x-x_1) & w'(x-x_2) & \dots & w'(x-x_{N_x}) & 0 & \dots & 0 \\ x_1 w'(x-x_1) & x_2 w'(x-x_2) & \dots & x_{N_x} w'(x-x_{N_x}) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olduğundan bu matrisi hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı  $N_x$ 'dir.

Öte yandan şekil fonksiyonlarının türevlerinin hesaplanması için yukarıda hesaplanan matrisler yanında Önerme 8'de elde edilen

$$\phi'_h(x) = (p^T(x))' A_h^{-1}(x) B_h(x) + p^T(x) (A_h^{-1}(x))' B_h(x) + p^T(x) A_h^{-1}(x) (B_h(x))'$$

işlemi de yapılmalıdır. Son bağıntıdaki

$$p^T(x) (A_h^{-1}(x))' B_h(x) \text{ ve } p^T(x) A_h^{-1}(x) (B_h(x))'$$

terimlerini elde etmek için gerekli işlem sayıları  $\phi_h(x)$  ile aynı olup  $4N_x$ 'dir. Fakat

$(p^T(x))' = [0 \ 1]$  olduğundan  $(p^T(x))' A_h^{-1}(x) B_h(x)$  vektörünün  $i.$ ,  $1 \leq i \leq N_x$ , terimi

$$\left( (p^T(x))' A_h^{-1}(x) B_h(x) \right)_i = \alpha_{21} \beta_{1i} + \alpha_{22} \beta_{2i}$$

dir. Burada  $\alpha_{kl}, 1 \leq k, l \leq 2$ ,  $(A_h(x))^{-1}$  matrisinin elemanlarını gösterirken  $\beta_{ki}, 1 \leq k \leq 2, 1 \leq i \leq N_x$  ise  $B_h$  matrisinin  $i$ . sütunudur. Bu işlem için gerekli aritmetik işlem sayısı 2'dir.  $(p^T(x))' A_h^{-1}(x) B_h(x)$  vektörünün  $N_x$  terimi sıfırdan farklı olduğundan bu vektörün hesaplaması için gerekli aritmetik işlem sayısı  $2N_x$ 'dir. Dolayısı ile  $\phi_h'(x)$  vektörünü hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısı  $10N_x$ 'dir.

Sonuç olarak şekil fonksiyonlarının türevlerinin keyfi bir noktadaki değeri hesaplanırken gerekli aritmetik işlem sayısı Tablo 6'daki gibi özetlenebilir.

Tablo 6. Şekil fonksiyonlarının türevlerinin elde edilmesinde aritmetik işlem sayısı

	Aritmetik İşlem Sayısı
Ağırlık fonksiyonlarının türevleri için aritmetik işlem sayısı	$7N_x$
$A_h'$ matrisi için ilave aritmetik işlem sayısı	$3N_x$
$B_h'$ matrisi için ilave aritmetik işlem sayısı	$N_x$
$(A_h^{-1})'$ matrisi için ilave aritmetik işlem sayısı	24
$\phi_h'$ vektörü için ilave aritmetik işlem sayısı	$10N_x$
Şekil fonksiyonlarının türevlerinin elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısı	$21N_x + 24$

Önerme 11 ve 12'de şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin sadece bir noktadaki değerlerinin hesaplanmasında gerekli aritmetik işlem sayıları verilmiştir. Fakat Kesim 3.1.4'de bahsedilen sayısal integral hesabı ile  $[x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, \dots, n - 1$  aralığında  $m$  adet noktada şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin değerleri hesaplanmalıdır. Burada  $m$ , Gauss nokta sayısıdır. Problemin tanımlı olduğu  $[a, b]$  aralığında  $n - 1$  adet alt aralık olduğundan şekil fonksiyonu ve türevinin hesaplanması gereken nokta sayısı  $(n - 1)m$ 'dir.

Öte yandan  $d_{max}$ 'in farklı seçimleri için  $[x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, \dots, n - 1$  aralıklarında seçilen  $x$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonları sayısı,  $N_x$ , değiştiği için genel bir formül elde edemeyiz. Bunun yerine Kesim 3.1.5'de olduğu gibi  $d_{max} = 2$  özel seçimi için aritmetik işlem sayısı hesaplanabilir. Bu takdirde Teorem 7 elde edilir.



**Teorem 7.**  $\Omega = [a, b]$  aralığında tanımlanmış bir problem için düzgün dağıtılmış düğüm noktaları  $a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, d_{max} = 2$  ve düğüm noktaları arası uzaklık  $h$  olarak seçilsin. Eğer (38)'deki  $K$  matrisindeki şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin integral noktalarındaki değerlerinin elde edilmesi için gerekli aritmetik işlem sayısı(integral alma işleminde ALG-1 algoritmasının kullanılması durumunda)

$$O(n)$$

kadardır.

**İspat.**  $d_{max} = 2$  için  $[x_1, x_2], [x_{n-1}, x_n]$  aralıklarında seçilen bir  $x$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı 3, diğer bölgelerde seçilen  $x$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı 4'dür. Dolayısı ile  $K$  matrisini hesaplamak için her bir aralıkta  $m$  adet Gauss noktası kullanılırsa Önerme 12 ile  $[x_1, x_2], [x_{n-1}, x_n]$  aralıklarında şekil fonksiyonlarının ilgili noktalardaki değerlerini hesaplamak için

$$(18N_x + 6)m = (18 \cdot 3 + 6)m = 60m$$

aritmetik işlem gerekir. Bu sayı diğer aralıklarda eşit ve herbirinde

$$(18N_x + 6)m = (18 \cdot 4 + 6)m = 78m$$

dir. İç bölgelerdeki aralık sayısı  $n - 3$  olduğundan ve Gauss nokta sayısı 3 seçildiğinden  $K$  matrisindeki şekil fonksiyonlarının değerlerinin elde edilmesi için gerekli toplam aritmetik işlem sayısı

$$60m \cdot 2 + 78m(n - 3) = 78mn - 114m = 234n - 342 \quad (57)$$

dir. Fakat  $K$  matrisi şekil fonksiyonlarının türevlerini de içerdiğinden ilgili noktalarda bu fonksiyonların değerleri de hesaplanmalıdır. Önerme 12 ile  $[x_1, x_2], [x_{n-1}, x_n]$  aralıklarındaki şekil fonksiyonunun türevlerinin değerleri hesaplanmasında gerekli aritmetik işlem sayısı

$$(21N_x + 24)m = (21 \cdot 3 + 24)m = 87m$$

olarak bulunur. Bu değer diğer aralıkların herbirinde

$$(21N_x + 24)m = (21 \cdot 4 + 24)m = 108m$$

dir. Dolayısı ile şekil fonksiyonlarının türevlerinin hesaplanması için gerekli toplam aritmetik işlem sayısı  $m = 3$  seçildiğinden

$$87m \cdot 2 + 108m(n - 3) = 108mn - 150m = 324n - 450 \quad (58)$$

dir. Buradan  $K$  matrisindeki şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin integral noktalarındaki değerlerinin elde edilmesi için gerekli aritmetik işlem sayısı (57) ve (58)'den

$$234n - 342 + 324n - 450 = 558n - 792 \equiv O(n) \quad (59)$$

şeklinde bulunur.

### 3.1.6.1. $O(1)$ İşlemlerde Sistem Şekil Fonksiyonlarının ve Türevlerinin Hesaplanması

Kesim 3.1.5.1'deki gibi şekil fonksiyonlarının öteleme özelliği yardımıyla sistem matrisini hesaplamadaki işlem yükü azaltılabilir. Öteleme özelliği ile Teorem 8 elde edilir.

**Teorem 8.**  $\Omega = [a, b]$  aralığında tanımlanmış bir problem için düzgün dağıtılmış düğüm noktaları  $a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, d_{max} = 2$  ve düğüm noktaları arası uzaklık  $h$  olarak seçilsin. Eğer (38)'deki  $K$  matrisindeki şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin integral noktalarındaki değerlerinin elde edilmesi için gerekli aritmetik işlem sayısı (şekil fonksiyonlarının öteleme özelliği kullanılırsa)  $O(1)$  kadardır.

**İspat.** Öteleme özelliği sadece  $[x_i, x_{i+1}], i = 2, 3, \dots, n - 2$  aralıklarında geçerli olup bu bölgelerin sadece bir tanesinde şekil fonksiyonlarını ve türevlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısının belirlenmesi yeterlidir. Diğer aralıklarda bu değerler ötelenir.  $[x_2, x_3]$  aralıklarında şekil fonksiyonlarını ve türevlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayıları ise Teorem 7'nin ispatı ile sırasıyla  $78m$  ve  $108m$ 'dir. Öte yandan 1. ve sonuncu aralıkta öteleme özelliği mevcut olmadığından bu bölgelerdeki aritmetik işlem sayıları hesaplanmalıdır. Teorem 7'nin ispatı ile bu bölgelerdeki şekil fonksiyonları ve türevlerini elde etmek için gerekli aritmetik işlem sayısı sırasıyla  $120m$  ve  $174m$ 'dir. Dolayısı ile öteleme özelliği kullanılarak Gauss noktalarında şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayıları sırasıyla  $198m$  ve  $282m$  olup  $m = 3$  seçildiğinden toplamda

$$480m = 1440 \equiv O(1) \quad (60)$$

işlemlerde  $K$  matrisindeki şekil fonksiyonları ve türevleri hesaplanır.

Sistem matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısının azaltılması daha kısa sürede sayısal çözümlerin elde edilmesini sağlar. Böylece düğüm noktaları arası uzaklığın çok küçük seçildiği problemlerde hızlı bir şekilde sayısal çözümler elde edilir. Aşağıdaki örnekte (1) problemi için öteleme özelliğinin kullanıldığı ve kullanılmadığı durumlarda bilgisayarın sayısal çözümleri elde etme süreleri karşılaştırılmıştır.

**Not.** Aşağıdaki örnekte ötelemeli ve ötelemesiz durumlarda sistem matrisini elde etmede gerekli CPU zamanları karşılaştırılmıştır. Bu ölçümler Intel Core(TM) 2 Duo CPU T6400 2 GHz'lik bir bilgisayar üzerinde gerçekleştirilmiştir.

**Örnek.** Sınır katmanı içeren (1) problemini göz önüne alalım.  $\alpha = 0.1$  parametresi ve düzgün olarak dağıtılmış düğüm noktaları için sayısal çözümleri hesaplamadaki CPU(Central Processing Unit) zamanlarını karşılaştıralım. Tablo 7'de eleman bağımsız Galerkin yöntemi kullanılması durumunda farklı düğüm noktası sayıları için bilgisayarın sistem matrisini oluşturmada harcadığı CPU süreleri verilmiştir.

Tablo 7. Düzgün düğüm noktaları için öteleme özelliği kullanılmadığı durumda sistem matrisi için CPU değerleri

Düğüm noktaları arasındaki uzaklık( $\Delta x$ )	CPU(saniye)
0.1	0.0190
0.01	0.1241
0.005	0.2516
0.001	1.3538
0.0005	2.9775

Tablo 8'de ise öteleme özelliği kullanılması durumunda bilgisayarın sistem matrisini elde etmede harcadığı CPU süreleri verilmiştir.

Tablo 8. Düzgün düğüm noktaları için öteleme özelliği kullanılması durumunda sistem matrisi için CPU değerleri

Düğüm noktaları arasındaki uzaklık( $\Delta x$ )	CPU(saniye)
0.1	0.00561
0.01	0.00885
0.005	0.01466
0.001	0.09381
0.0005	0.26714

Tablo 8 ve Tablo 9 karşılaştırıldığında öteleme özelliği ile sistem matrisinin elde edilmesi CPU değerlerinde önemli bir azalmaya neden olduğu görülür. Dolayısı ile öteleme özelliği ile ağırsız yöntemlerin en önemli dezavantajı olan işlem yükünde önemli ölçüde azalma sağlanmış olup daha kısa sürede sayısal çözümler elde edilmiştir.

### 3.1.7. Sonlu Farklar Yöntemi, Sonlu Elemanlar Yöntemi ve Eleman Bağımsız Galerkin Yönteminin Karşılaştırılması

Literatürde en çok kullanılan sayısal yöntemlerden bazıları sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleridir. Bu yöntemler günümüze kadar çok çalışılmıştır. Bu bölümde bu iki yöntem ile eleman bağımsız Galerkin yöntemi sınır katmanları içeren problemler için karşılaştırılmaktadır.

**Örnek 1.** (1) ile verilen sınır değer problemini ele alalım. Bu problem için eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile sistem denklemi Kesim 3.1.3’de elde edilmişti. Bu örnekte ise sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemindeki sistem denklemi elde edilmektedir.

Sonlu farklar yöntemi ile (1) sınır değer problemini çözmek için problem ayrıklaştırılır. Problemdaki ikinci türev için merkezi türev yaklaşımı

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) \cong \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2}, i = 2, \dots, n-1$$

şeklinde olduğundan problemin ayrıklaştırılmış denklemi,  $u_i, u(x_i), i = 1, 2, \dots, n$ ’deki sayısal çözüm olmak üzere

$$-a \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + u_i = 1, i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (61)$$

dir. Sınır koşulları,  $u_1 = u_n = 0$ , (61)’de yerine yazılırsa sonlu farklardaki sistem denklemi

$$\begin{bmatrix} 2a + h^2 & -a & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a & 2a + h^2 & & & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & 2a + h^2 & & -a & & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \vdots & -a & 2a + h^2 & & -a & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a & 2a + h^2 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^2 \\ h^2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Sonlu elemanlar yönteminde ise genellikle problemin zayıf şekli olan (3) denklemi ile sayısal çözüm yapılır. (3) ile problemin zayıf şekli

$$a \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 v dx$$

olarak elde edilmişti. Sonlu elemanlar yönteminde sayısal çözüm ise ağırsız yöntemde olduğu gibi

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i$$

şeklinde araştırılır. Şekil fonksiyonları olarak lineer şekil fonksiyonları kullanıldığını varsayalım. Bu şekil fonksiyonları

$$N_i^e(x_j) = \delta_{ij}$$

özelliğini sağlayan

$$N_i^e(x) = a + bx$$

şeklindeki lineer fonksiyonlardır. Burada  $e$ , sonlu elemanlar yöntemindeki elemanları göstermektedir. Dolayısı ile şekil fonksiyonları  $k$ . eleman üzerinde

$$\left. \begin{aligned} N_i^k(x_i) &= a + bx_i = 1 \\ N_i^k(x_{i+1}) &= a + bx_{i+1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_i^k(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

$$\left. \begin{aligned} N_{i+1}^k(x_i) &= a + bx_i = 0 \\ N_{i+1}^k(x_{i+1}) &= a + bx_{i+1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_{i+1}^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

dir. Çözüm zayıf şekilde yerine yazılır ve Galerkin yöntemi kullanılırsa sistem denklemi

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & & K_{12}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 & & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_{21}^{n-1} & K_{22}^{n-1} + K_{11}^n & K_{12}^n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K_{21}^n & K_{22}^n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ \vdots \\ f_2^{n-1} + f_1^n \\ f_2^n \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$K_{ij}^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( a \frac{dN_j^e}{dx} \frac{dN_i^e}{dx} + N_j^e N_i^e \right) dx$$

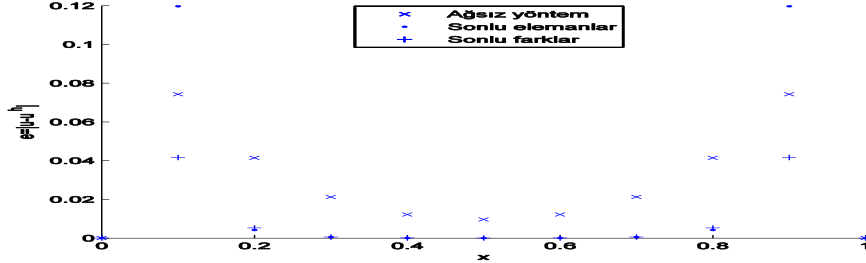
$$f_i^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i^e dx$$

dir.

Sistem denklemleri elde edilen üç yöntemi (1)'deki sınır katman problemine uygulayarak çözümlerin davranışını, çözümün hızlı değiştiği  $a = 0.001$  parametresi için inceleyelim. Bu takdirde düğüm noktaları arası uzaklık 0.1 olarak seçilirse yöntemlerin

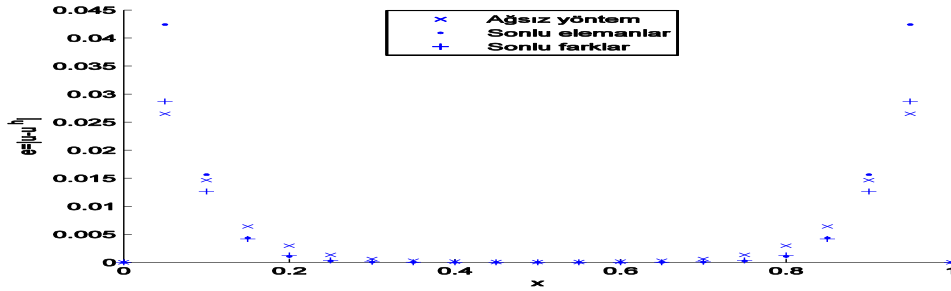
$$e = |u(x_i) - u^h(x_i)|, i = 1, 2, \dots, n \quad (62)$$

kümülatif hata grafiği Şekil 15'deki gibidir.



Şekil 15. (1) problemi için  $h = 0.1$  seçilmesi durumunda yöntemlerin (62)'de verilen hata grafikleri

Şekil 15'den görüleceği üzere çözümün hızlı değişim gösterdiği  $a$  değeri için sınır bölge komşuluğunda en küçük hata sonlu farklar yönteminde mevcut iken en büyük hata sonlu elemanlar yönteminde oluşmaktadır. Fakat çözümün yavaş değiştiği iç bölgelerde en büyük hata ağsız yöntemde meydana gelmektedir. Düğüm noktaları arası uzaklık 0.05 olarak seçilmesi durumunda ise Şekil 16'daki hata grafiği elde edilir.



Şekil 16. (1) problemi için  $h = 0.05$  seçilmesi durumunda yöntemlerin (62)'de verilen hata grafikleri

Şekil 16'dan görüleceği üzere düğüm noktaları arası uzaklık 0.05 seçilmesi durumunda ise ilk ve son hata değerlerinde ağsız yöntemin hatası iki yöntemden az iken diğer noktalarda en az hata sonlu farklar yönteminde oluşmaktadır. Ayrıca fonksiyonun yavaş değişim gösterdiği bölgelerde yöntemlerin hataları hemen hemen birbirine eşit olup sıfıra çok yakındır.

Tablo 9’da ise herbir yöntemde farklı düğüm noktaları seçilmesi durumunda oluşan

$$E = \|u(x) - u^h(x)\|_{\infty} \quad (63)$$

hata değerleri verilmiştir.

Tablo 9. Farklı  $h$  değerleri için yöntemlerin (63) ile verilen  $E$  hata normları

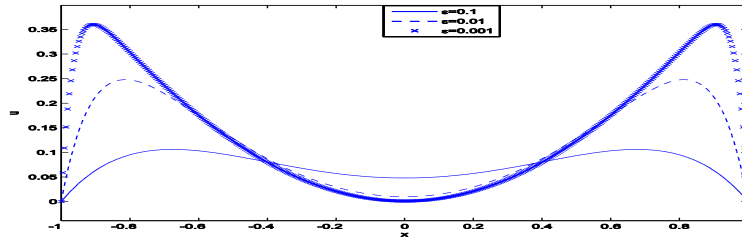
$h$	Sonlu Elemanlar yöntemi	Ağsız EFG yöntemi	Sonlu Farklar yöntemi
0.1	0.1197	0.0743	0.0416
0.05	0.0424	0.0265	0.0287
0.025	0.0099	0.0077	0.0088
0.0125	0.0024	0.0021	0.0023
0.00625	$6.0089 \times 10^{-4}$	$5.7258 \times 10^{-4}$	$5.9658 \times 10^{-4}$

Tablo 9’den görüleceği üzere düğüm noktaları arası uzaklık yarıya indirildiğinde hata 4 kat azalmaktadır. Dolayısı ile herbir yöntemin hatasının  $O(h^2)$  olduğu sayısal olarak gözlemlenir.

## Örnek 2.

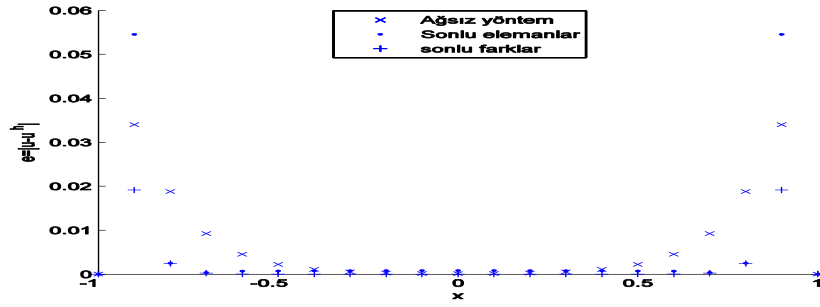
$$-\varepsilon u'' + u = 1 - \cos(x), u(-1) = u(1) = 0 \quad (64)$$

problemini gözönüne alalım. Bu problemin çözümü  $\varepsilon$ 'nin küçük değerleri için sınır bölgelerinin haricinde orta bölgede de hızlı değişen bir fonksiyon özelliği gösterdiği Şekil 17’den görülmektedir. Örnek 1’de yapıldığı gibi farklı  $h$  değerleri için yöntemlerin kümülatif hatalarını karşılaştıralım.



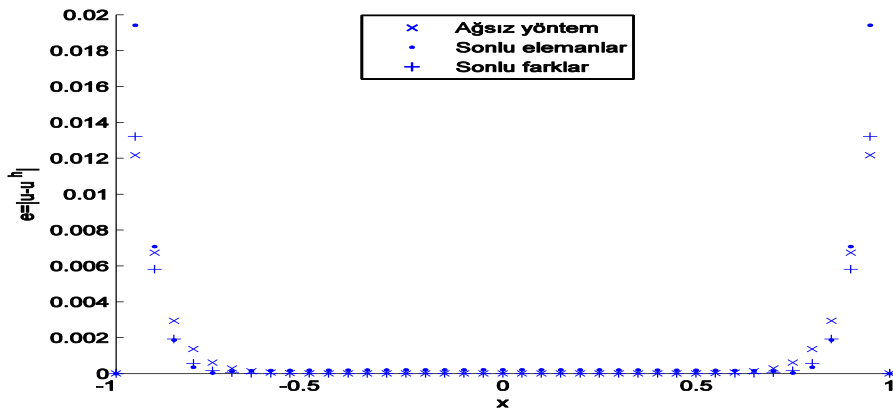
Şekil 17. (64) probleminin farklı  $\varepsilon$  değerleri için analitik çözüm grafikleri

Eğer  $\varepsilon = 0.001$  ve düğüm noktaları arası uzaklık  $h = 0.1$  olarak seçilirse yöntemlerin düğüm noktalarındaki (62)'de verilen  $e$  hatalarının grafikleri Şekil 18'deki gibidir.



Şekil 18. (64) probleminde  $h = 0.1$  seçilmesi durumunda yöntemlerin (62)'de verilen hata grafikleri

Şekil 18'den görüleceği üzere Örnek 1'de  $h = 0.1$  durumunda olduğu gibi problemin hızlı değişim gösterdiği sınıra komşu düğüm noktasında en fazla hata sonlu elemanlar en az hata ise sonlu farklar yönteminde oluşmaktadır. İç bölgelerde ise ağırsız yöntemin kümülatif hatası diğerlerinden fazla olmasına rağmen sıfırın komşuluğunda hata değerleri hemen hemen birbirine eşittir. Ayrıca  $h$  değeri yarıya indirildiğinde Örnek 1'de  $h = 0.05$  seçilmesi durumunda oluşan sonuçlara benzer sonuçların meydana geldiği Şekil 19'dan görülmektedir.



Şekil 19. (64) probleminde  $h = 0.05$  değeri için yöntemlerin (62)'de verilen hata grafikleri



Örnek 1'deki gibi farklı  $h$  değerlerine karşılık (63)'te verilen  $E$  hata değerlerini karşılaştıralım. Bu takdirde Tablo 10 elde edilir.

Tablo 10. Farklı  $h$  değerleri için yöntemlerin (63)'te verilen  $E$  hata normları

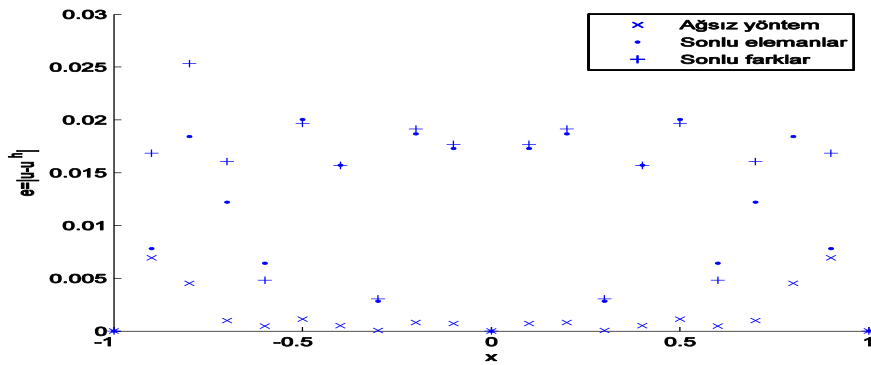
$h$	Sonlu Elemanlar yöntemi	Ağırsız EFG yöntemi	Sonlu Farklar yöntemi
0.1	0.0545	0.0340	0.0191
0.05	0.0194	0.0122	0.0132
0.025	0.0046	0.0035	0.0041
0.0125	0.0011	$9.6352 \times 10^{-4}$	0.0011
0.00625	$2.7536 \times 10^{-4}$	$2.6137 \times 10^{-4}$	$2.7457 \times 10^{-4}$

Tablo 10'da Örnek 1'deki duruma benzer olarak düğüm noktaları arası uzaklık yarıya düşürüldüğünde herbir yöntemin hatasının 4 kat azaldığı görülür.

### Örnek 3. Salınım yapan

$$-\varepsilon u'' + u = \sin(10x), u(-1) = 0, u(1) = 0 \quad (65)$$

problemini gözönüne alalım. Bu takdirde  $\varepsilon = 0.01$  ve düğüm noktaları arası uzaklık  $h = 0.1$  seçilmesi durumunda (62)'deki hata değerleri Şekil 20'deki gibidir.



Şekil 20. (65) probleminde  $h = 0.1$  için (62)'de verilen hata grafiği

Şekil 20'den görüleceği üzere Örnek 1 ve 2'den farklı olarak düğüm noktalarında en az hata ağırsız eleman bağımsız Galerkin yönteminde oluşmaktadır.

Eğer yöntemlerin (63)'deki  $E$  hatalarına bakılırsa Örnek 1 ve 2'deki durumlara benzer sonuçların meydana geldiği Tablo 11'den açıktır.

Tablo 11. Farklı  $h$  değerleri için yöntemlerin (63)'de verilen  $E$  hata normları

$h$	Sonlu Elemanlar yöntemi	Ağsız EFG yöntemi	Sonlu Farklar yöntemi
0.1	0.02	0.0069	0.0253
0.05	0.0052	0.0017	0.0063
0.025	0.0013	$4.2747 \times 10^{-4}$	0.0016
0.0125	$3.292 \times 10^{-4}$	$1.0339 \times 10^{-4}$	$3.9398 \times 10^{-4}$
0.00625	$8.2307 \times 10^{-5}$	$2.4144 \times 10^{-5}$	$9.8491 \times 10^{-5}$

Örnek 1-3'den yöntemlerin kümülatif hatalarının  $O(h^2)$  olduğu sayısal olarak gözlemlenir. Ayrıca hata değerlerinin tabloları karşılaştırıldığında, Örnek 1 ve 2'de en fazla hata değerinin sonlu elemanlar yönteminde Örnek 3'de ise sonlu farklar yönteminde, en az hata değerlerinin ise eleman bağımsız Galerkin yönteminde olduğu gözlemlenir.

Öte yandan literatürdeki çalışmalardan bilindiği üzere

$$\|u(x) - u^h(x)\|_{\infty} \leq O(h^2) \text{ (Johnson, 2009)} \quad (66)$$

sonlu farklar yöntemi için

$$\|u(x) - u^h(x)\|_{\infty} \leq O(h^2) \text{ (Chen, 2013)} \quad (67)$$

ağsız eleman bağımsız Galerkin yöntemi için

$$\|u(x) - u^h(x)\|_{\infty} \leq O(h^2) \text{ (Haussler, 1998)} \quad (68)$$

dir. (68)'de  $|\phi_i(x)| \leq c, n_d$ , destek bölgesindeki düğüm noktası sayısıdır. Dolayısı ile sayısal olarak gözlemlenen yöntemlerin hataları  $O(h^2)$  olduğu son eşitsizliklerden doğrulanır.

Eleman bağımsız Galerkin yönteminde hata değerlerinin diğer yöntemlere göre az olmasının yanı sıra şekil fonksiyonları çözümün bir parçası olarak elde edildiğinden sisteme yeni nokta eklenmesi veya sistemden nokta çıkartılması işlemine çok uygundur.

Bu ise yöntemi adaptivite için çok uygun hale getirir. Dolayısı ile yöntemde oluşan hatalar uygun yerlere düğüm noktaları konulması ile kolaylıkla azaltılabilir. Bunun için yöntemin hangi bölgelerde fazla hata değerine sahip olduğu belirlenmelidir. Kesim 3.1.9’da hareketli en küçük kareler yönteminin yaklaşım hatası hesaplanarak yöntemin hatası hangi bölgelerde fazla olduğu araştırılmıştır. Bu sayede Kesim 3.1.10 ve 3.1.11’de bu bölgelerdeki hataları azaltmak için adaptif yöntemler önerilmiştir.

### 3.1.8. Ağsız Yöntemlerde Adaptivite

Eleman bağımsız Galerkin yöntemi, hızlı değişen fonksiyonlarda iyi sonuç vermesi için düğüm noktaları arası uzaklığın küçük seçilmesi gerektiğine değinilmişti. Düzgün düğüm noktaları için düğüm noktaları arası mesafenin küçük seçilmesi ise bilgisayarın fazla işlem yapmasına neden olduğundan dolayı Kesim 3.1.5 ve 3.1.6’da şekil fonksiyonlarının özellikleri yardımıyla daha hızlı ve daha az CPU gerektiren çözümler elde edilmişti. Fakat düzgün düğüm noktaları arası mesafenin küçük seçilmesi, hatanın çok küçük olduğu bölgelere de noktalar eklenmesine neden olur.

Öte yandan düğüm noktaları arası uzaklığın düzgün olarak azaltılması yerine hatanın fazla olduğu bölgelere daha fazla nokta yığılması ile daha iyi sonuçlar elde etmek mümkündür. Bu sayede çok fazla düğüm noktası almadan daha az maliyetli çözümler elde edilebilir. Düğüm noktalarının hatanın fazla olduğu bölgelere yığılması ile elde edilen çözümlere “adaptif çözüm”, bu yönteme ise “adaptif yöntem” adı verilir. Ağsız yöntemlerde düğüm noktalarının seçimi tamamen keyfi olduğundan adaptiviteye uygun bir yöntemdir.

Günümüzde sayısal yöntemler üzerinde yapılan çalışmalarda birçok adaptif yöntem önerilmiştir. Bu yöntemleri üç kategori altında toplamak mümkündür:

1. Düğüm noktalarının yerleri değiştirilmesi ile yapılan adaptivite( $r$ -adaptivite)
2. Yeni düğüm noktası eklenmesi ile yapılan adaptivite( $h$ -adaptivite)
3. Polinom derecesinin arttırılması ile yapılan adaptivite( $p$ -adaptivite)

1. yöntemde başlangıçta alınan düğüm noktalarının sayısı değiştirilmeden sadece düğüm noktalarının yerlerinin değiştirilmesi ile problemin sayısal çözümü hesaplanır. Buna “ $r$ -adaptivite” adı verilir. Bunun için de yöntemin hangi bölgelerde fazla hata yaptığı önceden belirlenerek o bölgelere hatanın az olduğu bölgelerden noktalar alınarak eklenir.

2. yöntemde ise başlangıçta alınan düğüm noktalarına ek olarak hatanın fazla olduğu bölgelere yeni noktalar eklenmesi ile yapılır. Buna “*h*-adaptivite” adı verilir. 1. adaptif yöntemde olduğu gibi hatanın fazla olduğu bölgeler önceden belirlenerek bu bölgelere noktalar eklenir.

3. yöntemde ise şekil fonksiyonları elde edilirken yaklaşım uzayında alınan polinomların sayısı artırılarak yapılan adaptivitedir. Bu sayede şekil fonksiyonlarının etki alanı içerisindeki bilinmeyen değerleri daha iyi bir şekilde elde edilmesi sağlanır. Bu yöntemde “*p*-adaptivite” adı verilir.

Ayrıca *h*-adaptivite ve *p*-adaptivite yöntemlerinin birleştirilmesi ile oluşturulan “*hp*-adaptivite” de çok popüler olarak kullanılan yöntemdir.

Bir yöntemde adaptif bir yaklaşım geliştirebilmek için yöntemin hatasının tahmin edilmesi gerekir. Bu sayede elde edilen hatayı minimize edecek şekilde yöntemler geliştirilebilir. Kesim 3.1.9’da ağırsız yöntemlerde şekil fonksiyonlarının hareketli en küçük kareler yöntemi ile elde edilmesi durumunda oluşan yaklaşım hatası için bir tahmin verilmektedir.

### 3.1.9. Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi ile Yaklaşım Hatası

Bu bölümde 1 boyutlu uzayda hareketli en küçük kareler yönteminin bazı özellikleri verilerek yöntemin yaklaşım hatası için bir üst limit hesaplanmaktadır. Böylece hatanın büyük olduğu bölgeler belirlenerek düğüm noktalarının bu bölgelere yığılması sağlanmaktadır.

1 boyutlu uzayda ağırsız yöntemlerde yaklaşım

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{n_d} \phi_i(x)u_i$$

şeklindedir. Burada  $n_d$ ,  $x$  noktasının destek bölgesindeki düğüm noktası sayısıdır. 1 boyutta lineer uyumluluk, eğer  $u_i$  lineer bir alana karşılık gelen düğüm değerleri ise  $u^h(x)$  bu lineer alan ile tekrar üretilebilir olduğunu belirtir. Diğer bir ifade ile eğer  $\forall \alpha_i, i = 0,1$  için

$$u_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i$$

ise

$$u^h(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

dir.  $u_i$  düğüm değerleri çözümde yerine yazılırsa lineer uyumluluk ile

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{n_d} \phi_i(x)(\alpha_0 + \alpha_1 x_i) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n_d} (\alpha_0 \phi_i(x) + \alpha_1 x_i \phi_i(x)) = \alpha_0 + \alpha_1 x. \quad (69)$$

elde edilir.

(69) bağıntısı  $\forall \alpha_i, i = 0,1$  için doğru olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n_d} \phi_i(x) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n_d} x_i \phi_i(x) = x$$

elde edilir. Denklemlerin her iki tarafının  $x$  değişkenine göre türevleri alınır

$$\sum_{i=1}^{n_d} \phi_i'(x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n_d} x_i \phi_i'(x) = 1$$

bulunur. Burada  $\phi_i'$  şekil fonksiyonlarının  $x$  değişkenine göre türevini ifade eder (Krongauz ve Belytschko, 1997).

Hata, gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki farka eşittir. Yani,

$$e(x) = u^h(x) - u(x) = \sum_{i=1}^{n_d} \phi_i(x) u_i - u(x) \quad (70)$$

hata fonksiyonudur.  $u(x)$  fonksiyonu  $x$  noktasında Taylor yaklaşımına sahip olan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde  $x_i, i = 1, 2, \dots, n_d$  düğüm noktalarındaki Taylor açılımı

$$u(x_i) = u(x) + u'(x)(x_i - x) + \frac{1}{2} u''(\bar{x})(x_i - x)^2, \bar{x} = x + v(x_i - x), 0 < v < 1$$

şeklindedir. Bu açılım (70) hata fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u^h(x) - u(x) &= \sum_{i=1}^{n_d} \phi_i(x) \left( u(x) + u'(x)(x_i - x) + \frac{1}{2} u''(\bar{x})(x_i - x)^2 \right) - u(x) \\
\Rightarrow u^h(x) - u(x) &= \left( \sum_{i=1}^{n_d} \phi_i(x) - 1 \right) u(x) + \sum_{i=1}^{n_d} \phi_i(x)(x_i - x) u'(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_d} \phi_i(x)(x_i - x)^2 u''(\bar{x})
\end{aligned}$$

elde edilir. Hareketli en küçük kareler yönteminin uyumluluk özelliği ile ilk 2 terim sıfıra eşit olur ve hata

$$u^h(x) - u(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_d} \phi_i(x)(x_i - x)^2 u''(\bar{x})$$

olarak elde edilir. Şekil fonksiyonları sınırlı fonksiyonlar olduğundan  $\exists c > 0: 1 \leq i \leq n_d$  için

$$|\phi_i(x)| \leq c$$

dir. Ayrıca  $\phi_i(x)$  fonksiyonları bir kompakt destek bölgesine sahiptir ve

$$|x_i - x| \leq h_i$$

dir. Dolayısı ile hatanın  $L_2$  normu (68)'de verilen sonsuz norma benzer olarak

$$\|u^h(x) - u(x)\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} c h^2 \|u''(\bar{x})\|_{L_2(\Omega)} \quad (71)$$

şeklinde bulunur. Burada,  $h = \max_{1 \leq i \leq n_d} h_i$ 'dir. Benzer şekilde türevlerin yaklaşım hatası da hesaplanabilir. Fakat şekil fonksiyonunun türevi

$$|\phi_i'(x)| \leq c/h_i$$

ile sınırlıdır. Dolayısı ile  $x$  değişkenine göre türev için yaklaşım hatası

$$\left\| (u^h(x))' - u'(x) \right\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} c h \|u''(\bar{x})\|_{L_2(\Omega)} \quad (72)$$

olarak bulunur(Haussler-Combe ve Korn, 1998).

### 3.1.10. Çözümü Zamanla Değişmeyen Problemler İçin Adaptif Yaklaşım-1

(71) eşitsizliğinden görüleceği üzere hata ikinci türev ile orantılıdır. Yani, problemin ikinci türevinin büyük değerler aldığı bölgelerdeki yaklaşım hataları da büyüktür. Dolayısı ile bu bölgelerde fazla düğüm noktası alınarak bu bölgelerde oluşacak hatalar azaltılabilir.

Bu bölümde adaptivite, düğüm noktalarının yerlerinin değiştirilmesi ( $r$ -adaptivite) ile yapılmaktadır. Yani, başlangıçta alınan düğüm noktaları sayısı sabit kalmak üzere düğüm noktalarının yerlerinin değiştirilmesi ile adaptivite uygulanmaktadır. İkinci türevin az olduğu bölgelerdeki düğüm noktaları fazla olduğu bölgelere kaydırılmak suretiyle adaptivite gerçekleştirilmektedir.

Düğüm noktalarının yerleri değiştirilerek yapılan adaptif çalışmalarda “monitör fonksiyonlarından” yararlanılmaktadır. Günümüzde en çok kullanılan monitör fonksiyonu yay uzunluğu (arc-length) monitör fonksiyonu olarak adlandırılan

$$M(x) = \sqrt{1 + u_x^2}$$

fonksiyonudur (Thompson, vd., 1985). Bu fonksiyon yardımıyla tanım aralığı eşit yay uzunluklarına sahip alt aralıklara ayrılır. Bu aralıkların uç noktaları yeni düğüm noktaları olarak alınarak adaptif düğüm noktaları oluşturulur. Günümüze kadar ağırsız yöntemlerde bu fonksiyon kullanılarak düğüm noktalarının yerlerinin değiştirilmesi ile yapılan çalışmalarda çoğunlukla radyal nokta interpolasyon yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları Biazer ve Hosami (Biazer ve Hosami, 2015), Kwok ve Ling (Kwok ve Ling, 2010), Sarra (Sarra, 2005), Sharanazari (Shanazari, 2012), Sharanazari ve Hosami (Shanazari ve Hosami, 2012) olarak verilebilir. Bu çalışmada ise eleman bağımsız Galerkin yöntemi için bir  $r$ -adaptivite öneriyoruz ve monitör fonksiyonunu seçerken sonlu fark yaklaşımlarını kullanıyoruz.

Bir  $x$  noktasındaki 1. mertebeden türev için sayısal türev yaklaşımları

$$u'(x) \cong \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h), h \rightarrow 0, (\text{İleri fark yaklaşımı})$$

$$u'(x) \cong \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + O(h), h \rightarrow 0, (\text{Geri fark yaklaşımı})$$

$$u'(x) \cong \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h^2), h \rightarrow 0, (\text{Merkezi fark yaklaşımı})$$

ile verilir. Bu türevlerden hareketle 2. mertebeden türev için yaklaşımlar

$$u''(x) \cong \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h} + O(h^2)$$

$$\cong \frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} + O(h)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu yaklaşımdan hareketle her bir aralıktaki 2. mertebeden türev değerleri  $|u'_{i+1} - u'_i|$  ile hesaplanmakta ve monitör fonksiyonu olarak bunların toplamı seçilmektedir:

$$M = \sum_{i=1}^{n-1} |u'_{i+1} - u'_i|.$$

Burada,  $u'_i = (u^h)'(x_i)$  ve  $n$  düğüm noktası sayısıdır. Dolayısı ile düğüm noktalarının yerleri, her bir aralıktaki  $|u'_{i+1} - u'_i|$  değeri  $M/n$ 'ye eşit olacak şekilde belirlenmektedir. Böylece problemin 2. türevinin küçük olduğu bölgelerde düğüm değerleri arasındaki uzaklık büyük, diğer bölgelerde ise küçük seçilerek adaptif düğüm noktaları elde edilmiş olur. Önerilen adaptif yöntemin algoritması ise aşağıdaki gibidir.

-----

Algoritma(ALG-2):  $r$ -adaptif düğüm noktaları

1. Girdi:  $a, b$ : problemin sınırları ( $\Omega = [a, b]$ ),  $u_i$ : Düzgün düğüm noktaları kullanılarak ağsız yöntem ile elde edilen sayısal çözümler,  $u'_i$ : Düzgün düğüm noktaları kullanılarak ağsız yöntem ile elde edilen sayısal çözümlerin türevleri

2. Parametre:  $n$ : düğüm noktası sayısı,  $maxag$ : maksimum ağ genişliği

3. Monitör fonksiyonunun değerini hesapla:

$$M = \sum_{i=1}^{n-1} |u'_{i+1} - u'_i|$$

4.  $M/n$  ile her bir adımdaki fark değerini hesapla.

5. Yeni düğüm noktalarını oluştur:

5.1.  $x_1 = a$  al.

5.2. Eğik atış yöntemi ile  $|u'_{i+1} - u'_i| = M/n$  olacak şekilde  $x_i, i = 2, 3, \dots, n$  yeni düğüm noktalarını belirle.

5.3. Eğer son nokta  $x_n < b$  ise yeni düğüm noktalarına  $b$  noktası ekle.

5.4. Düğüm noktaları arasındaki uzaklık maksimum ağ genişliğinden ( $maxag$ ) büyük ise bu bölgelere nokta ekle.

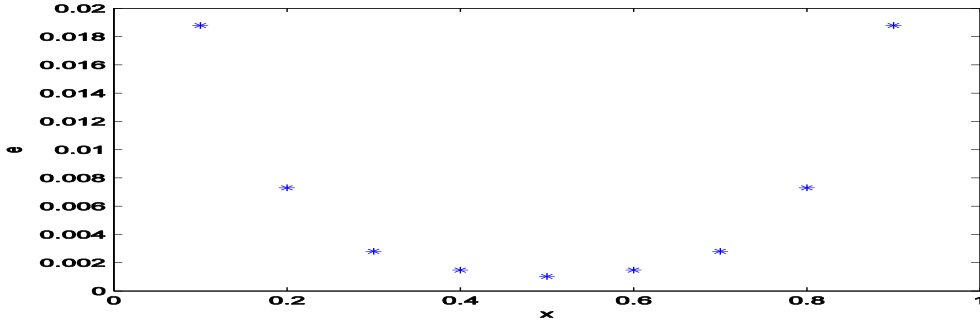


5.5. 5.4’de eklenen nokta sayısı kadar aralarındaki uzaklık en küçük olan düğüm noktalarından birini sistemden çıkart.

#### 6. Çıktı: Adaptif düğüm noktaları

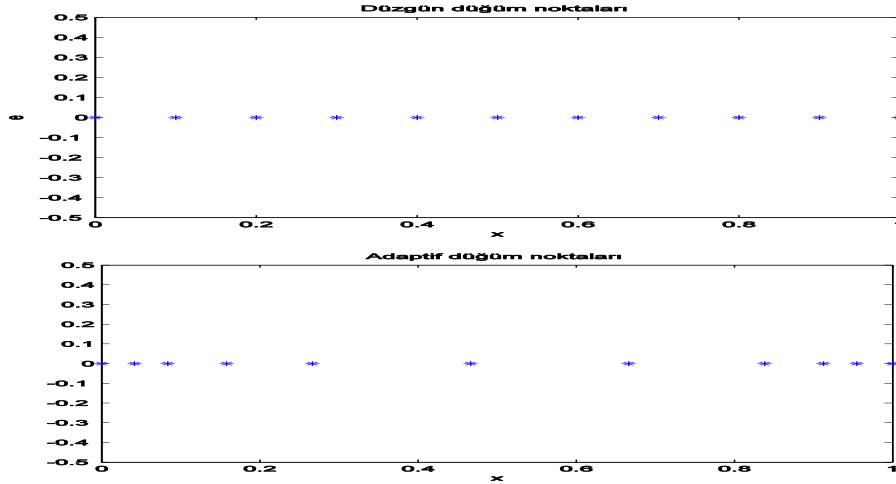
(ALG-2)’de dikkat edilirse algoritmanın 5. aşamasında tekrar bir adaptivite yapılması ihtiyacı doğmuştur. Çünkü bazı bölgelerde ikinci türev değeri sıfıra çok yakın olması düğüm noktaları arasındaki uzaklıkların çok büyük seçilmesine neden olur. Bu durumda (71)’deki hata  $O(h^2)$  ile orantılı olduğundan bu bölgelerde ikinci türevden dolayı hata azalırken,  $h^2$  terimi hatanın artmasına neden olur. Dolayısı ile düğüm noktaları arasındaki uzaklık maksimum ağ genişliği ile kısıtlanarak bu bölgelerdeki  $h^2$  teriminden gelecek hatalar azaltılmıştır. Fakat bu durumda sisteme fazladan düğüm noktası eklenmesi durumu ile karşılaşıldığından (5.5)’de ikinci türevin büyük değerler aldığı bölgelerdeki çok sık düğüm noktalarından çıkarılma işlemi gerçekleştirilmiştir.

**Örnek 1.** (1) ile verilen sınır katman problemine adaptif algoritmayı uygulayalım. Başlangıçta  $[0,1]$  aralığında 0.1 aralıklı 11 düğüm noktası alınsın.  $a = 0.01$  parametre değeri için düzgün düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözümün bağıl hata ( $e = |u(x_i) - u^h(x_i)|/|u^h(x_i)|$ ) dağılımı Şekil 21’deki gibidir.



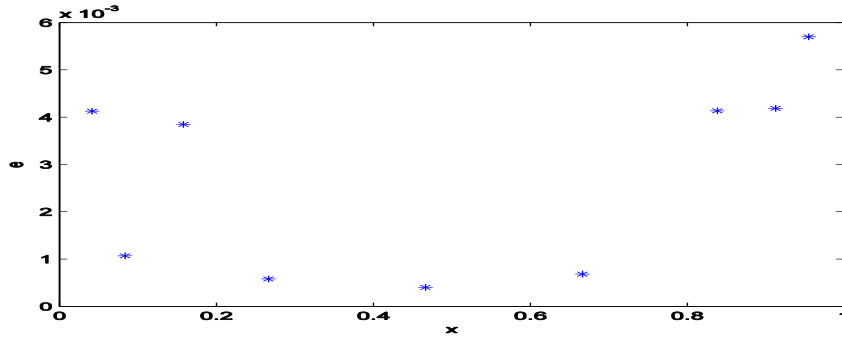
Şekil 21. (1) probleminde  $a = 0.01$  parametresi ve düzgün düğüm noktaları için sayısal çözümün bağıl hata dağılımı

Şekil 21’den görüleceği üzere sınır katmanı içeren bölgelerde yöntemin hatası büyüktür. Bu bölgelerdeki hatayı azaltmak için probleme ALG-2’deki adaptivite uygulanırsa problemin yeni düğüm noktaları Şekil 22’deki gibi elde edilir.



Şekil 22. (ALG-2) algoritması ile oluşturulan  $r$ -adaptif düğüm noktaları

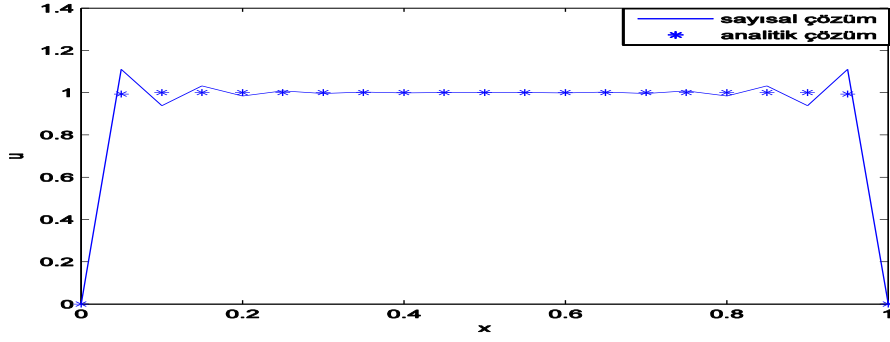
Şekil 22'den görüleceği üzere adaptif yöntem düzenli düğüm noktalarını ikinci türevin büyük olduğu sınır katmanı içeren bölgelere yığılmıştır. Bu adaptif düğüm noktaları için yöntemin bağıl hata dağılımı ise Şekil 23'deki gibidir.



Şekil 23. (1) probleminin  $r$ -adaptif düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözümünün bağıl hata dağılımı

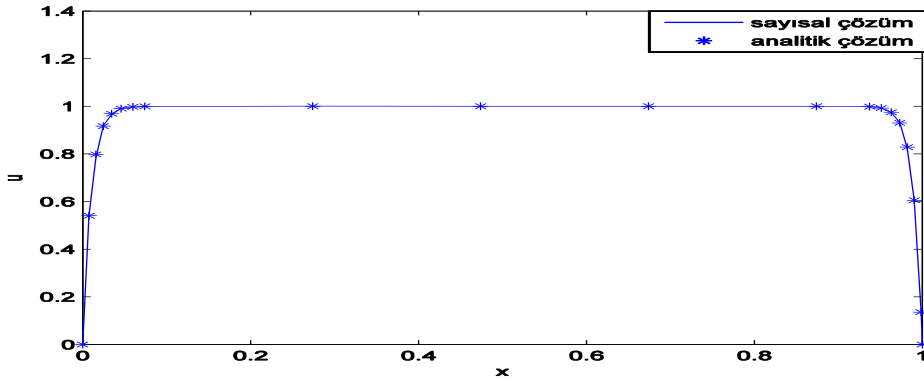
Şekil 21 ve 23'den görüleceği üzere sınır katmanı içeren bölgelerdeki hata değerleri azalmıştır. Böylece sisteme yeni nokta eklenmeden daha az işlem yükü içeren çözüm elde edilir.

$a$ 'nın küçük değerleri için sınır bölgelerinde fonksiyon çok hızlı bir değişim gösterir. Bu şekildeki fonksiyonlarda adaptif yöntemin davranışını incelemek için  $a$  parametresini 0.001 ve düğüm noktaları arası uzaklığı 0.05 olarak seçelim. Bu takdirde düzenli düğüm noktaları için sayısal çözümün grafiği Şekil 24'deki gibi elde edilir.



Şekil 24. (1) probleminin düzgün düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm grafiği

Şekil 24'den görüleceği üzere sınıra yakın bölgelerde yöntem iyi sonuçlar vermemektedir. Probleme aynı parametreler ile adaptivite uygulanırsa adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözüm Şekil 25'deki gibidir.



Şekil 25. (1) probleminin  $r$ -adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözüm grafiği

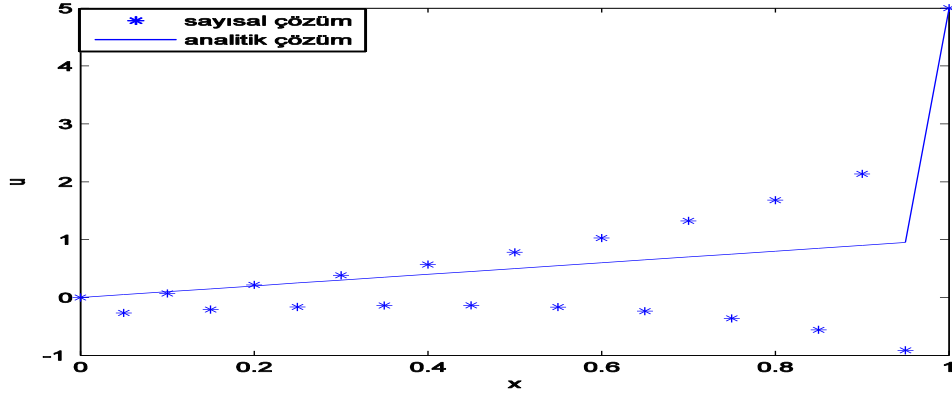
Şekil 25'den adaptif düğüm noktalarının sınır katman bölgelerine yığıldığı ve bu bölgelerde oluşan hataların azaldığı görülür. Elde edilen çözüm ise analitik çözüm ile uyumludur.

## Örnek 2.

$$-\varepsilon u'' + u' = 1, u(0) = 0, u(1) = 5 \quad (73)$$

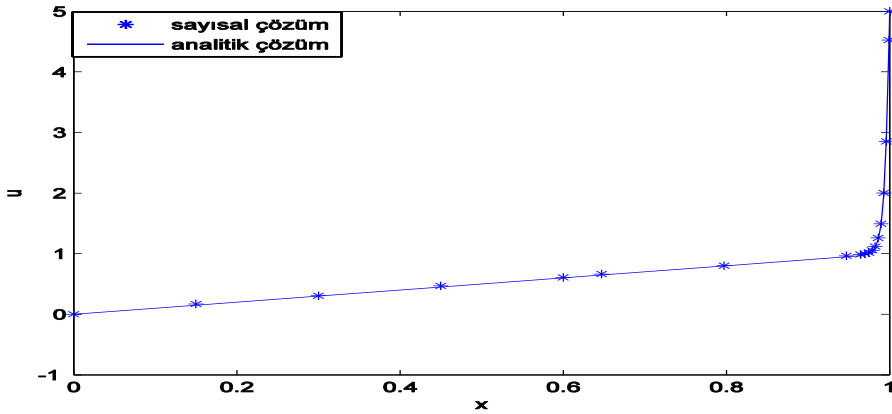
problemini göz önüne alalım. (73) problemi  $x = 1$  noktası komşuluğunda hızlı değişen bir fonksiyondur. Dolayısı ile adaptif yöntemin düğüm noktalarını bu sınıra yığması beklenir.

Eğer  $\varepsilon = 0.005$  ve başlangıçtaki düğüm noktaları arası uzaklık ise 0.05 olarak seçilirse düzgün düğüm noktaları için ağırsız eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile elde edilen çözüm grafiği Şekil 26'daki gibidir.



Şekil 26. Düzgün düğüm noktaları için (73) probleminin sayısal çözüm grafiği

Şekil 26'dan görüleceği üzere düzgün düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm gerçek çözüme yakınsamamaktadır. Eğer probleme ALG-2'deki adaptivite uygulanırsa Şekil 27'deki adaptif çözüm grafiği elde edilir.



Şekil 27.  $\varepsilon = 0.005$  için (73) probleminin  $r$ -adaptif çözüm grafiği

Şekil 27'den adaptif düğüm noktalarının sınır bölgesi komşuluğuna yığıldığı görülmektedir. Ayrıca düzgün düğüm noktaları için oluşan hatalar adaptif yöntemde görülmemekte ve gerçek çözümle uyumlu çözüm grafiği elde edilmektedir.

**Örnek 3.** Neumann sınır şartına sahip lineer olmayan

$$\begin{aligned}\frac{\Psi''}{k^2} + (1 - \tau - A^2 - \Psi^2)\Psi &= 0 \\ A'' &= A\Psi^2\end{aligned}\tag{74}$$

$$\Psi'(-l) = \Psi'(l) = 0, A'(-l) = A'(l) = h$$

Ginzburg-Landau modelini göz önüne alalım(Gökdoğan, 2010). Burada,  $\kappa$ , Ginzburg Landau parametresi,  $\tau$ , boyutsuz sıcaklık parametresi,  $h$ , uygulanan manyetik alan şiddeti,  $\Psi$ , düzen fonksiyonu ve  $A$  ise potansiyel fonksiyonudur.

(74) probleminin zayıf şekli iki denklemin her iki tarafının  $v$  test fonksiyonu ile çarpılarak birinci elemanlara kısmi integral alma işlemi ile

$$\begin{aligned}\int_{-l}^l \left( -\frac{\Psi'}{k^2} v' + (1 - \tau - A^2 - \Psi^2)\Psi v \right) dx &= 0 \\ \int_{-l}^l (A'v' + A\Psi^2 v) dx + h(v(-l) - v(l)) &= 0\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ağsız yöntemlerdeki çözüm

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \sum_{i=1}^n \phi_i(x)u_i \\ A(x) &= \sum_{i=1}^n \phi_i(x)v_i\end{aligned}$$

şeklinde araştırıldığından çözümün zayıf şekilde yerine yazılması ve test fonksiyonu olarak  $\phi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 'lerin seçilmesi ile sistem denklemi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \left( \int_{-l}^l \left( -\frac{1}{k^2} \phi_i'(x)\phi_j'(x) + (1 - \tau)\phi_i(x)\phi_j(x) \right) dx \right) u_i \\ + \int_{-l}^l \left( -\left( \sum_{i=1}^n \phi_i(x)v_i \right)^2 \left( \sum_{i=1}^n \phi_i(x)u_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n \phi_i(x)u_i \right)^3 \right) \phi_j(x) dx = 0 \\ \sum_{i=1}^n \left( \int_{-l}^l \phi_i'(x)\phi_j'(x) dx \right) v_i + \int_{-l}^l \left( \left( \sum_{i=1}^n \phi_i(x)u_i \right)^2 \left( \sum_{i=1}^n \phi_i(x)v_i \right) \right) dx \\ + h(\phi_j(-l) - \phi_j(l)) = 0, j = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Eğer

$$\begin{aligned} u &= [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n]^T \\ v &= [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]^T \\ \phi &= [\phi_1(x) \ \phi_2(x) \ \cdots \ \phi_n(x)] \end{aligned}$$

olarak alınır

$$\begin{aligned} Ku + \int_{-l}^l (-(\phi v)^2(\phi u) - (\phi u)^3)\phi_j(x)dx &= 0 \\ Mv + \int_{-l}^l (\phi u)^2(\phi v)dx + h(\phi_j(-l) - \phi_j(l)) &= 0, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (75)$$

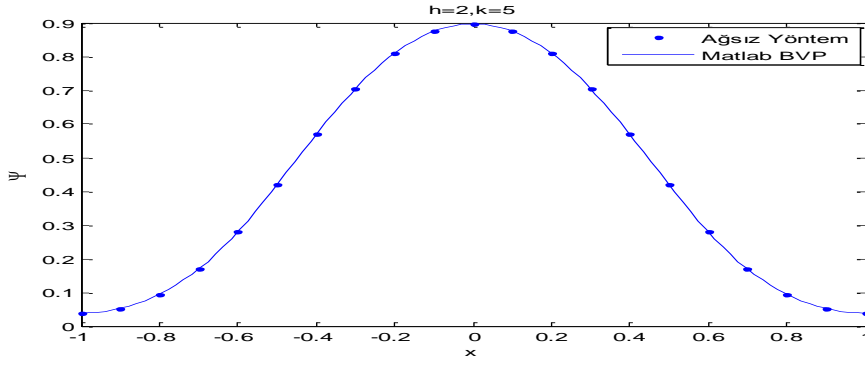
sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} K &= \int_{-l}^l \left( -\frac{1}{k^2} \phi_i'(x)\phi_j'(x) + (1 - \tau)\phi_i(x)\phi_j(x) \right) dx \\ M &= \int_{-l}^l \phi_i'(x)\phi_j'(x) dx \end{aligned}$$

dir. (75) sistemi  $u_i, v_i, i = 1, 2, \dots, n$  bilinmeyenli  $2n$  adet denklemden oluşan lineer olmayan bir sistemdir. Bu durumda  $u_i, v_i, i = 1, 2, \dots, n$  bilinmeyenlerinin belirlenmesinde lineer olmayan sistemler için Newton yöntemi kullanılabilir. Fakat bu yöntemin uygulanması için bir başlangıç değeri gerekir ve bu değerin seçimi Newton yönteminde önemli yer tutar. Çünkü aranan çözümün komşuluğunda seçilmeyen başlangıç değerlerinde sayısal çözüm, problemin farklı bir çözümüne yakınsayabilir veya hiç yakınsama olmayabilir. Bu çalışmada (75) problemi için başlangıç değeri, sınır şartlarını sağlayan fonksiyonlar seçilmekte veya homotopy yönteminden yararlanılarak belirlenmektedir(Coşkun vd., 2011).

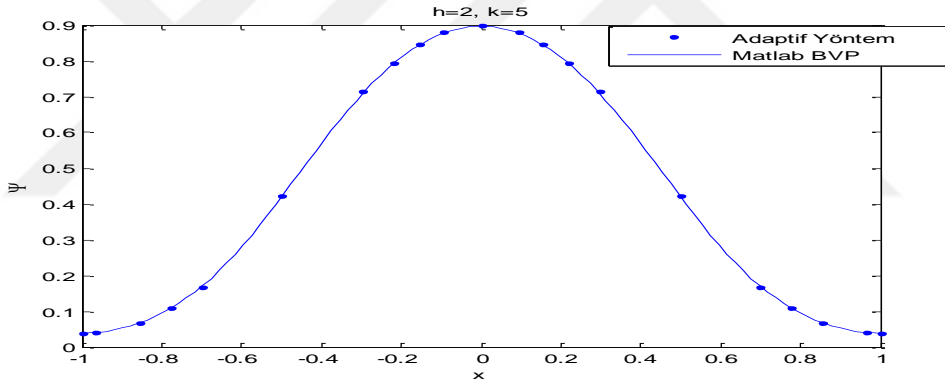
(74) probleminin analitik çözümü mevcut olmayıp literatürde sayısal yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bu çalışmada elde edilen sayısal çözümler MATLAB BVP çözümleri ile karşılaştırılmakta ve analizler yapılmaktadır. Başlangıç koşulları ise sınır koşullarını sağlayan  $[\cos(\pi x) ; hx]$  veya  $[1; hx]$  vektörleri seçilmektedir.

Örneğin,  $l = 1, h = 2, k = 5$  ve düzgün düğüm noktaları arası uzaklık 0.1 olarak seçilirse ağsız yöntem ve MATLAB BVP çözümleri ile elde edilen  $\Psi$  çözümlerinin grafiği Şekil 28'deki gibi elde edilir.



Şekil 28.  $h = 2, k = 5$  için (74) probleminin düzgün düğüm noktaları ile sayısal çözümü

Şekil 28'den görüleceği üzere sayısal çözümler uyumludur.  $\Psi$  için (ALG-2) algoritması ile oluşturulan adaptif yaklaşım grafikleri ise Şekil 29'daki gibidir.

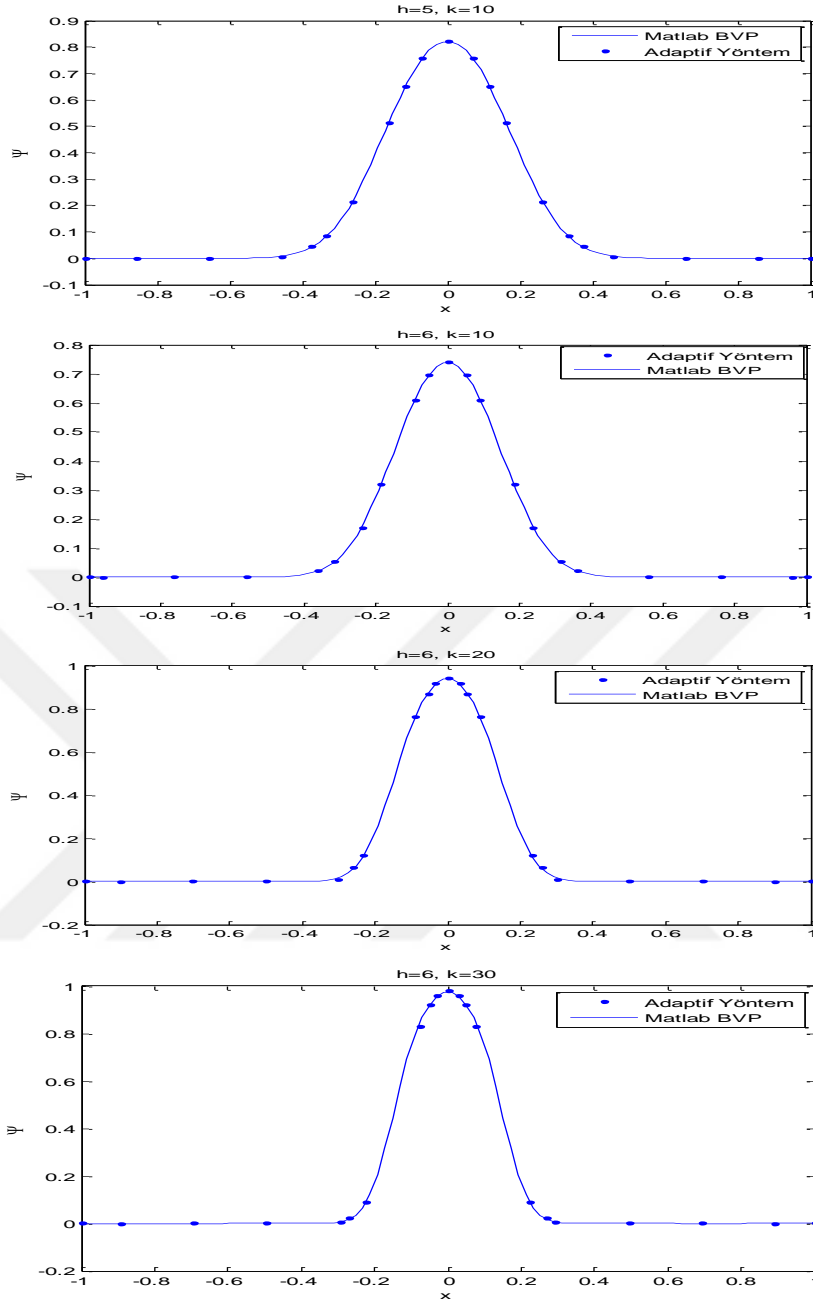


Şekil 29.  $h = 2, k = 5$  için (74) probleminin  $r$ -adaptif yöntem ile sayısal çözümü

Şekil 29'dan görüleceği üzere adaptif çözüm ile MATLAB BVP çözümü uyumludur. Ayrıca adaptif yöntem düğüm noktalarını 2. türevin büyük olduğu bölgelere yığmaktadır.

$h, k$  parametrelerinin büyük değerleri için problemin çözümleri  $x = 0$  noktası komşuluğunda hızlı değişim gösterir. Dolayısı ile adaptif yöntemin düğüm noktalarını bu bölgelere kaydırması beklenir. Bu durumu gözlemlemek için farklı  $h, k$  parametrelerinde adaptif çözümün davranışlarını inceleyelim.

$h, k$  parametrelerinin farklı değerleri için adaptif çözüm ile MATLAB BVP çözümlerinin grafikleri Şekil 30'daki gibi elde edilir.

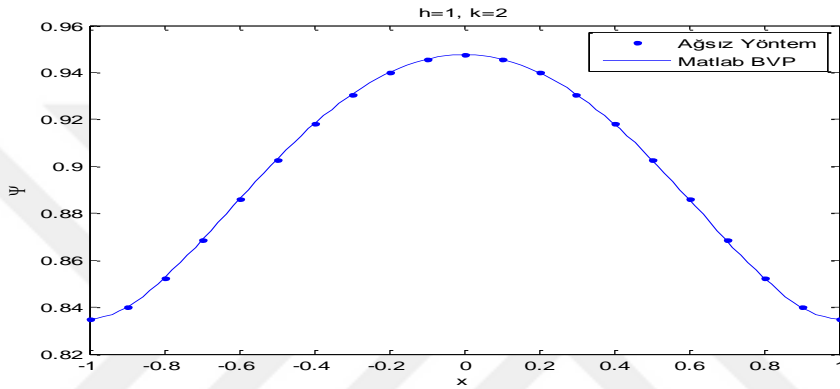


Şekil 30. Farklı parametre değerleri için (74) probleminin  $r$ -adaptif ağsız yöntem ile sayısal çözümü

Şekil 30'dan adaptif yöntem ile, başlangıçta 0.1 aralıklı seçilen düğüm noktalarının problemin hızlı değişim gösterdiği  $x = 0$ 'nın komşuluğuna kaydırıldığı görülür. Diğer bölgelerde ise maksimum ağ uzunluğu ile düğüm noktaları alınmıştır. Dolayısı ile adaptif yöntem düğüm noktalarını istenilen bölgelere yığıldığı gözlemlenmiş olur. Ayrıca adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözümler, MATLAB BVP çözümleri ile elde edilen çözümler ile uyumludur.



Lineer olmayan problemin çözümü için kullanılan Newton yönteminde başlangıç koşullarının seçimi önemli bir yer tutar. Örneğin, problemdeki parametreler  $h = 1$ ,  $k = 2$  olarak seçildiğini varsayalım. Eğer Newton yönteminde başlangıç koşulları olarak sınır koşullarını sağlayan  $\Psi = \cos(\pi x)$  ve  $A = hx$  fonksiyonları seçilirse eşit adım uzunluklu ağsız yöntem yakınsamamaktadır. Çünkü sistem matrisi singüler olmaktadır. Eğer başlangıç koşulları  $\Psi = 1$  ve  $A = hx$  olarak seçilirse başlangıç koşulları sınır koşullarını sağlar. Bu durumda çözüm Şekil 31'deki görüldüğü üzere gerçek çözüme yakınsar.

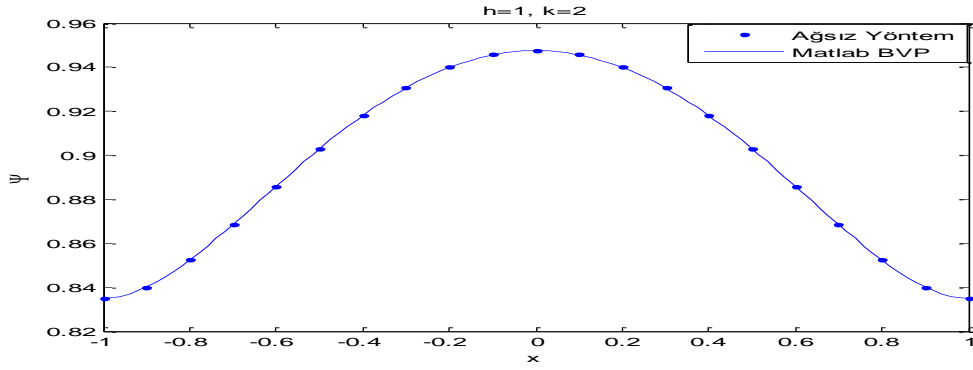


Şekil 31.  $h = 1$ ,  $k = 2$  için (74) probleminin düzgün düğüm noktaları ile sayısal çözümü

$h = 1, k = 2$  durumunda olduğu gibi seçilen farklı başlangıç değerlerinde bazı  $h, k$  parametresi için yöntemde yakınsama olmayabilir. Örneğin,  $h = 10, k = 20$  parametrelerinde  $\Psi = 1$  ve  $A = hx$  başlangıç koşullarında yakınsama olmaz iken  $\Psi = \cos(\pi x)$  ve  $A = hx$  başlangıç koşullarında yakınsama meydana gelir.

Yukarıdaki örneklerden görüleceği üzere başlangıç koşulunun seçimi problemin çözümünde önemli bir yer tutar. Günümüzde de başlangıç değerlerinin seçimi için yöntemler geliştirilmektedir. Geliştirilen yöntemlerden biri de Homotopi yöntemidir(Coşkun vd., 2011). Bu yöntem başlangıç değerlerinin seçiminde önemli bir avantaj sağlar. Ek 2'de Homotopi yöntemi ile ilgili genel bilgi verilmiştir.

Eşit adım uzunluklu ağsız yöntemde  $h = 1, k = 2$  parametreleri ve  $\Psi = \cos(\pi x)$ ,  $A = hx$  başlangıç değerleri ile yakınsama olmamıştı. Aynı parametre ve başlangıç koşulları için Homotopi yöntemi kullanılırsa Şekil 32 elde edilir.



Şekil 32. (74) probleminde  $h = 1$ ,  $k = 2$  için Homotopi yöntemi ile ağsız yöntemin uygulanması

Şekil 32'den görüleceği üzere Newton yönteminden farklı olarak Homotopi yönteminde alınan başlangıç değerleri için yakınsama meydana gelmektedir. Bu durum diğer başlangıç değerleri için de geçerlidir. Dolayısı ile Homotopi yöntemi başlangıç değerlerinin seçiminde önemli bir avantaj sağlanmasına neden olur. Öte yandan Homotopi yöntemi ile elde edilen sayısal çözüm grafikleri Newton yöntemi ile elde edilen çözümlerle aynı olduğundan Homotopi yöntemi ile elde edilen diğer sayısal çözümler grafiksel olarak gösterilmemiştir.

### 3.1.11. Çözümü Zamanla Değişmeyen Problemler İçin Adaptif Yaklaşım-2

Adaptif yaklaşım-1'de düğüm noktalarının yerlerinin değiştirilmesi ile adaptivite yapılmıştı. Bu bölümde ise sisteme yeni düğüm noktaları eklenmesi ile yapılan  $h$ -adaptif bir yöntem önerilmektedir.

(71) eşitsizliği ile verilen yaklaşım hatasından görüleceği üzere çözümün ikinci türevinin büyük olduğu bölgelerde aralık uzunluğunun küçük seçilmesi veya tersine ikinci türevin küçük olduğu bölgelerde aralık uzunluğunun geniş seçilmesi hatayı azaltır. Başka bir ifadeyle, fonksiyonun ikinci türevinin büyük değerler aldığı bölgelerde sık düğüm noktaları ve küçük değerler aldığı bölgelerde daha geniş aralıklı düğüm noktaları almak gerekir. Fakat problemin analitik çözümü bilinmediğinden dolayı çözümün ikinci türevinin, hangi bölgelerde büyük hangi bölgelerde küçük değerler aldığı bilinmemektedir. Bunun için ilk olarak problemin ikinci türevi sayısal olarak hesaplanarak çözümün davranışı hakkında bir ön bilgiye sahip olmalıyız. Bu tahmin 1. adaptif yöntemde eşit adım uzunluklu ağsız yöntemin sayısal türevi ile yapılmıştır. Bu çalışmada ise Coşkun, 2011'de

sayısal integral alma için uyguladığı strateji takip edilmiştir(Coşkun vd., 2011). Bu çalışma ile adaptif yöntemin algoritması ALG-3'deki gibi verilir.

-----

Algoritma(ALG-3):  $h$ -adaptif düğüm noktaları

1. Girdi:  $a$ : sol sınır değeri,  $b$ : sağ sınır değeri,  $u_i$ : Düzgün düğüm noktaları kullanılarak ağsız yöntem ile elde edilen sayısal çözümler
  2. Parametre:  $maxag$ :düğüm noktaları arasındaki maksimum uzaklık(0.2),  $minag$ :düğüm noktaları arasındaki minimum uzaklık (0.01) ,  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ : ağırlıklar ( $\sum_{i=1}^3 \omega_i = 1$ ) ,  $h$ :sayısal türev hesabı için adım uzunluğu, $h_1$ : ağ genişliği için adım uzunluğu,  $\epsilon$ : ağ parametresi
  3.  $X = a; x = X$ ; başlangıç değerleri olarak al.
  4. Adaptif düğüm noktalarını belirle:
    - $x_1 = a$  seç ve  $x < b$  olduğu sürece aşağıdaki işlemler tekrarla:
      - i. İnterpolasyon yöntemi yardımıyla  $D_2f_{i-1}, D_2f_i, D_2f_{i+1}$  değerlerini hesapla:
 
$$|D_2f(x_i)| = |D_2f_i| = \frac{|f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)|}{h^2}$$
      - ii. Ağ genişliğini hesapla:
 
$$h_1 = \frac{\epsilon}{\omega_1|D_2f_{i-1}| + \omega_2|D_2f_i| + \omega_3|D_2f_{i+1}|}$$
      - iii.  $h_1 = \min(h_1, maxag)$  ; %ağ genişliği en fazla  $maxag$
      - iv.  $h_1 = \max(h_1, minag)$  ; %ağ genişliği en az  $minag$
      - v.  $x = x + h_1$ ; %sonraki düğüm noktası
      - vi.  $X = [X; x]$ ; %düğüm noktasının ağa ilavesi
      - vii.  $X(end) = b$ ; %Son ağ noktası
  5. Çıktı: Adaptif düğüm noktaları
- 

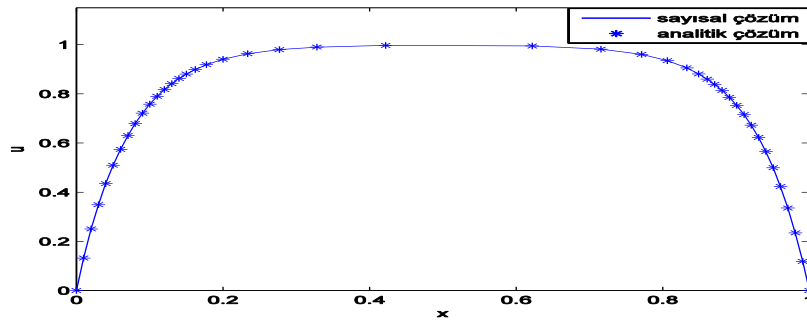
Bu yaklaşımda dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta başlangıçtaki düzgün düğüm noktaları ile sadece düğüm noktalarındaki sayısal değerlerin hesaplanmasıdır. Öte yandan 4.i'den görüleceği üzere adaptif yöntemin uygulanması için  $f(x_i + h), f(x_i - h)$  değerlerinin hesaplanması gerekir. Bu değerlerin hesaplanmasında 4.i'de belirtildiği gibi interpolasyon polinomları kullanılmaktadır.

Adaptif yöntemdeki bir diğer önemli nokta ise  $x_i$  noktası ve komşuluğundaki noktalarda 2. türevin hesaplanmasıdır. Böyle bir adaptiviteye ihtiyaç olmasının en önemli

nedeni hızlı değişim gösteren fonksiyonlar için fonksiyonun 2. türevi bir  $x$  noktasında sıfıra yakın değerler almasına rağmen  $x$ 'in komşuluğunda büyük değerler alabilmesidir. Böyle bir adaptivite yapılmadığı durumda  $x_i$  noktasında 2. türev çok küçük olduğundan maksimum ağ genişliği ile diğer düğüm noktası belirlenir. Böylece komşu bölgeki hızlı değişim gösteren bölge ihmal edilmiş olur. Bu takdirde ise bu bölgedeki çözümlerde hata değerleri büyük olacağından sayısal çözümler gerçek çözümlle uyumlu olmayabilir. Böyle durumun meydana gelmemesi için komşu noktadaki 2. türevler göz önüne alınarak adaptivite uygulanmaktadır. Fakat komşu noktalara verilen ağırlık değerleri  $\omega_1, \omega_3$  merkezdeki ağırlık değeri olan  $\omega_2$ 'den küçük değerler seçilerek ağırlık  $x_i$  noktasındaki 2. türeve verilir.

Aşağıda, önerilen adaptif yöntemin bazı problemlere uygulamaları verilmiştir. Bu uygulamalarda adaptif yöntemdeki parametreler  $\varepsilon = 1/3, h_1 = h = 0.1, \omega_1 = \omega_3 = 0.25, \omega_2 = 0.5$  olarak seçilmiştir.

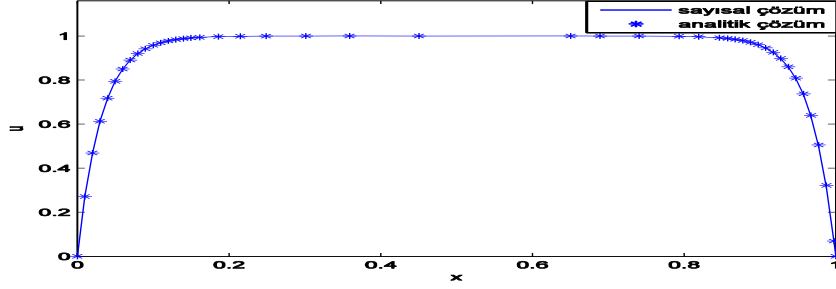
**Örnek 1.** (1) ile verilen sınır değer probleminde  $a$  parametresinin küçük değerlerinde sınır katmanı oluşturuğu gözlemlenmişti. Bu durumlarda önerilen adaptif yöntemin davranışını gözlemlmek için  $a = 0.005$  olarak seçelim. Bu takdirde Şekil 33'deki adaptif çözüm elde edilir.



Şekil 33. (1) ile verilen problemde  $a = 0.005$  için  $h$ -adaptif çözüm grafiği

$a = 0.005$  parametresi için adaptif yöntemde 43 adet düğüm noktası kullanılarak Şekil 33'deki gerçek çözümlle uyumlu sayısal çözüm elde edilir. Ayrıca düğüm noktalarının sınır bölgelere yığıldığı şekilden gözlemlenir.

$a$  parametresinin daha küçük değerlerinde çözüm sınırın komşuluğunda daha hızlı değişeceğinden bu durumlarda adaptif yöntemi test etmek için  $a = 0.001$  alalım. Bu takdirde adaptif ve gerçek çözümün birbiri ile uyumlu olduğu Şekil 34 elde edilir.

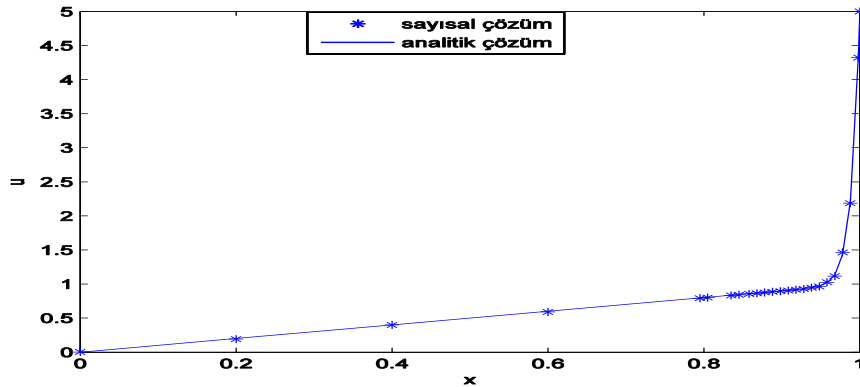


Şekil 34. (1) ile verilen problemde  $a = 0.001$  için  $h$ -adaptif çözüm grafiği

**Örnek 2.** Sağ sınırdaki sınır katmanını içeren

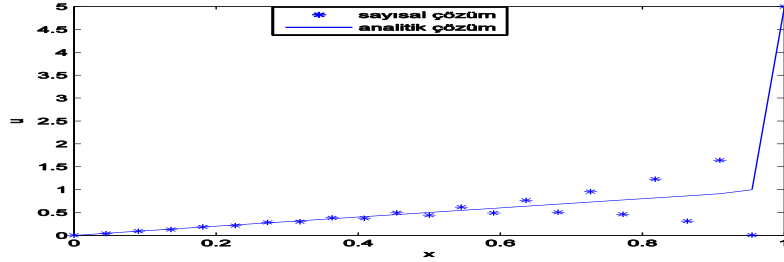
$$\begin{aligned} -au'' + u' &= 1 \\ u(0) &= 0, u(1) = 5 \end{aligned} \quad (76)$$

problemimizi göz önüne alalım.  $a = 0.01$ , başlangıçtaki düğüm noktaları arası uzaklık  $h = 0.025$  ve ALG-3'deki  $\varepsilon$  parametresi 0.1 olarak seçilirse adaptif çözüm grafiği Şekil 35'deki gibi elde edilir.



Şekil 35. (76) probleminde  $a = 0.01$  için  $h$ -adaptif çözüm grafiği

Şekil 35'den görüleceği üzere adaptif düğüm noktaları çözümün hızlı değiştiği  $x = 1$  noktası komşuluğuna yığılmıştır. Adaptif yöntem ile toplamda 23 adet nokta kullanılarak gerçek çözümle uyumlu bir grafik elde edilmiştir. Aynı sayıda nokta düzgün dağıtılmış düğüm noktaları için kullanılırsa Şekil 36 elde edilir.

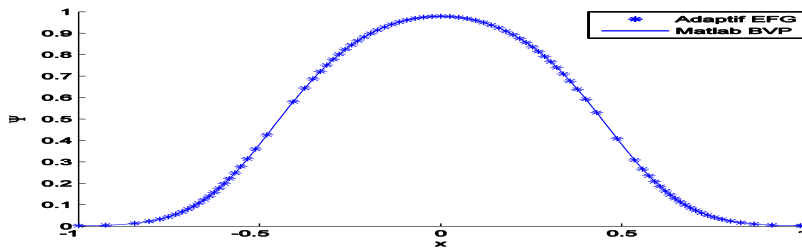


Şekil 36. (76) probleminde  $a = 0.01$  için düzgün düğüm noktaları ile elde edilen çözüm grafiği

Şekil 36, 23 adet düğüm noktasının problemin tanım bölgesine eşit uzaklıklı dağıtılması ile elde edilen sayısal çözüm grafiğini göstermektedir. Şekilden görüleceği üzere çözümün hızlı değiştiği bölgede hatalar çok büyüktür. Fakat adaptif yöntem ile düğüm noktaları hatanın fazla olduğu bu bölgeye yığılarak gerçek çözümle uyumlu bir çözüm grafiği elde edilmiştir.

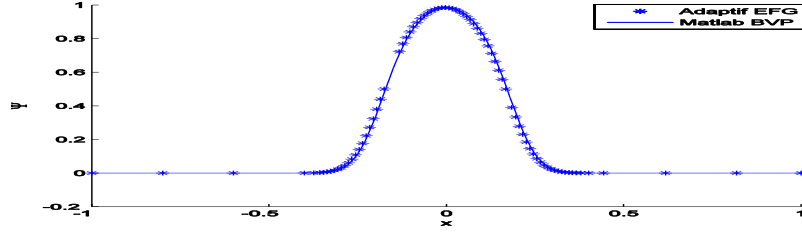
**Örnek 3.** Kesim 3.1.10'de Örnek 3'deki Ginzburg-Landau modelini ele alalım. Bilindiği üzere  $k, h$ 'nın büyük değerlerinde problemin çözümü hızlı değişen bir fonksiyon özelliği gösterir. Bu durumlar için ALG-3'de önerilen adaptif düğüm noktalarını kullanarak elde edilen çözüm ile MATLAB BVP çözücülerinin grafiklerini karşılaştıralım.

İlk olarak küçük  $k$  ve  $h$  değerleri için adaptif çözümün davranışını inceleyelim. Eğer  $k = 10, h = 2$  olarak seçilirse adaptif çözüm grafiği Şekil 37'deki gibi elde edilir.



Şekil 37. (74) probleminde  $k = 10, h = 2$  için  $h$ -adaptif çözüm grafiği

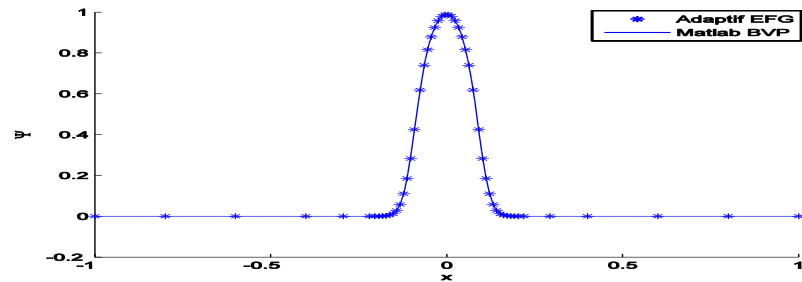
Şekil 37'den görüleceği üzere adaptif yöntem ile problemin ikinci türevinin fazla olduğu bölgelerde fazla düğüm noktası alınmıştır. Bu adaptif düğüm noktaları ile elde edilen ağsız çözüm ve MATLAB BVP ile elde edilen çözüm birbiri ile uyumludur. Eğer  $k = 30$  ve  $h = 5$  olarak seçilirse Şekil 38'deki çözüm grafiği elde edilir.



Şekil 38. (74) probleminde  $k = 30, h = 5$  için  $h$ -adaptif çözüm grafiği

Şekil 38'den  $k = 10, h = 2$  durumunda elde edilen adaptif düğüm noktalarına benzer şekilde 2. türevin fazla olduğu bölgelerde sık düğüm noktası alındığı diğer bölgelerde ise maksimum uzaklıklı düğüm noktaları kullanıldığı görülmektedir. Elde edilen sayısal çözümler de birbiriyle uyumludur.

Büyük  $k$  ve  $h$  değerleri için adaptif düğüm noktalarını ve bu düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözümün grafiğini gözlemlemek için  $k = 70, h = 10$  alalım. Bu takdirde problemin çözümü  $x = 0$  noktasının komşuluğunda hızlı değişen bir fonksiyon özelliği gösterir. Bu durumda adaptif yöntem probleme uygulanırsa Şekil 39'daki çözüm grafiği elde edilir.



Şekil 39. (74) probleminde  $k = 70, h = 10$  için  $h$ -adaptif çözüm grafiği

Şekil 39'dan çözümü hızlı değişen problemlerde de adaptif noktaların fonksiyonun hızlı değişim gösterdiği bölgelere yığıldığı ve bu düğüm noktaları ile elde edilen ağsız çözümün MATLAB BVP çözümleri ile elde edilen çözümle uyumlu olduğu görülür.

### 3.1.12. Ağsız Yöntemin Özdeğer Problemlerine Uygulanması

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = \lambda w(x)y, x \in [a, b] \quad (77)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada  $p(x) > 0$  fonksiyonu sürekli türevlenebilir bir fonksiyon,  $q(x)$  ve  $w(x) > 0$   $[a, b]$ 'de sürekli fonksiyonlardır. (77) diferensiyel denkleminin sıfırdan farklı çözüme sahip olduğu  $\lambda$  değerlerine diferensiyel denklemin “özdeğerleri” adı verilir. Bu özdeğerlere karşılık gelen çözümlere ise “özfonksiyonlar” denir.

(77) probleminin sınır koşulları ise genel olarak

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (78)$$

şeklinde verilir. Bu şekilde tanımlanan sınır-değer probleminin özdeğerlerinin elde edilmesi için bazı yöntemler geliştirilmiştir. Bu çalışmada ise ağsız eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile verilen diferensiyel denklemin özdeğerleri sayısal olarak hesaplanmaktadır.

**Örnek 1.** Genel formu (77) ile verilen özdeğer probleminin bir özel hali olan

$$y'' + \lambda y = 0$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada (77) diferensiyel denklemindeki parametreler  $p(x) = w(x) = 1, q(x) = 0$  olarak seçilmiştir. Sınır koşulları olarak  $y'(0) = y'(1) = 0$  olarak seçilirse özdeğer problemi

$$y'' + \lambda y = 0, y'(0) = y'(1) = 0 \quad (79)$$

olarak elde edilir. Bu problemin özdeğerleri

$$\lambda = (n\pi)^2, n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde olup özfonksiyonları ise

$$y_n(x) = \cos(n\pi x), n = 0, 1, 2, \dots$$

dir.



Eleman bağımsız galerkin yöntemi ile (79) diferensiyel denkleminin özdeğerlerini bulmak için problemin zayıf şekli hesaplanmalıdır. (79) diferensiyel denkleminin her iki tarafı  $v$  test fonksiyonu ile çarpılarak 1. terime kısmi integral alma uygulanırsa

$$y'v|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 y'v' dx + \lambda \int_0^1 yv dx = 0$$

bağıntısı elde edilir. Sınır koşullarının yerine yazılmasıyla problemin zayıf şekli

$$- \int_0^1 y'v' dx + \lambda \int_0^1 yv dx = 0 \quad (80)$$

şeklinde bulunur. Ağsız yöntemlerdeki çözüm (36) ile

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)u_i$$

şeklinde araştırıldığından çözüm zayıf şekilde yerine yazılır ve test fonksiyonları olarak  $\phi_j(x), j = 1, 2, \dots, n$  olarak seçilirse

$$\sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_j'(x) dx \right) u_i = \lambda \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 \phi_i(x)\phi_j(x) dx \right) u_i, j = 1, 2, \dots, n \quad (81)$$

elde edilir. Dolayısı ile sistem denklemini

$$Mu = \lambda Ku \quad (82)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$K_{ij} := \int_0^1 \phi_i(x)\phi_j(x) dx$$

$$M_{ij} := \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_j'(x) dx, j = 1, 2, \dots, n$$

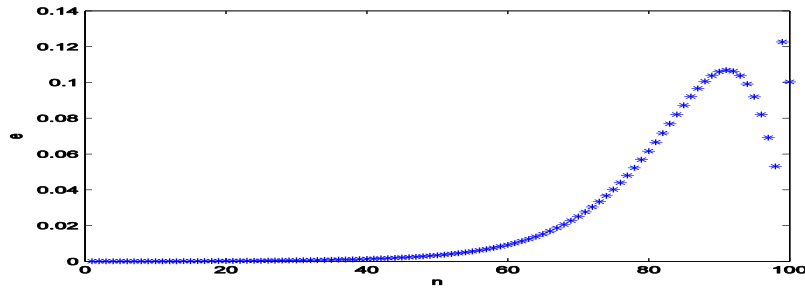
dir. (82) denklem sistemi MATLAB *eigs* komutu ile çözümlenerek özdeğerler ve öz fonksiyonlar hesaplanır.

Örneğin, düğüm noktaları arası uzaklık 0.01 olarak seçilmesi durumunda MATLAB eig komutu ile hesaplanan özdeğerler ve gerçek özdeğerlerin karşılaştırılması Tablo 12'deki gibidir.

Tablo 12. (79) probleminin analitik ve sayısal özdeğerleri

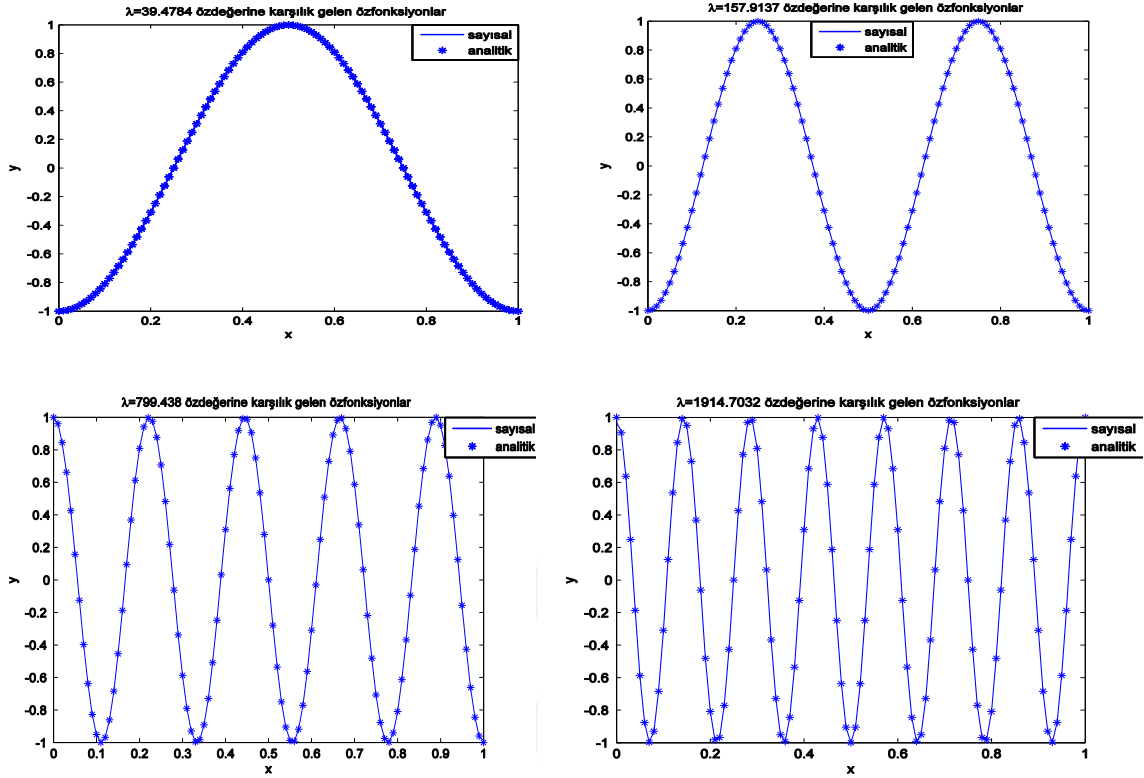
$n$	Özdeğerler ( $\lambda = n^2\pi^2$ )	EFG ile yaklaşımlar ( $\lambda_s$ )	Bağıl hata ( $e =  \lambda - \lambda_s / \lambda $ )
1	9.869604	9.869609	0.00000047
2	39.478417	39.478491	0.00000188
3	88.826439	88.826815	0.00000423
10	986.9604401	987.0078647	0.00004805
20	3947.8417604	3948.6623801	0.00020786
30	8882.6439609	8887.5567022	0.00055307
40	15791.3670417	15812.5302008	0.00134017
50	246740.1100272	247579.886089	0.00340348
60	355305.7584392	358578.967048	0.00921237
70	483610.6156533	495723.227743	0.02504620

Düğüm noktaları arası uzaklık 0.01 olması durumunda sayısal olarak hesaplanan ilk 100 özdeğer için mutlak hata grafiği ise Şekil 40'daki gibidir.



Şekil 40. (79) probleminin sayısal özdeğerleri için mutlak hata grafiği

Şekil 40 ve Tablo 12'den görüleceği üzere ilk 40 özdeğer gerçek çözüme yakın sonuçlar verirken büyük özdeğerlerde hata değerleri artmaktadır. Düğüm noktaları arası uzaklık azaltılarak daha hassas çözümler elde etmek mümkündür. Yöntemin iyi sonuçlar verdiği bazı  $\lambda$  özdeğerlerine karşılık elde edilen öz fonksiyon grafikleri ise Şekil 41'deki gibidir.



Şekil 41. (79) probleminde bazı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar

## Örnek 2.

$$y'' + \lambda y = 0, y(0) = y(1) = 0 \quad (83)$$

Dirichlet sınır şartlı probleminin özdeğerlerini eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile hesaplayalım.

(83) probleminin özdeğerleri Örnek 1'deki özdeğerler gibi

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, n = 1, 2, \dots$$

olup bu özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar ise

$$y_n(x) = \sin(n\pi x), n = 1, 2, \dots$$

dir. Öte yandan problemin sayısal özdeğerlerini eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile hesaplamak için problemin zayıf şekli bulunmalıdır. Problem Dirichlet sınır şartlı bir problem olduğu için probleme Penaltı yöntemi uygulanmalıdır. Sınır değerleri sıfıra eşit olduğundan Penaltı yöntemi ile Örnek 1'de (80) denkleminde elde edilen zayıf şekle

$$y(0)av(0) + y(1)av(1)$$

terimi eklenir. Burada  $\alpha$ , Penaltı parametresi iken  $v$ , test fonksiyonudur. Dolayısı ile problemin zayıf şekli

$$-\int_0^1 y'v' dx + \lambda \int_0^1 yv dx + y(0)\alpha v(0) + y(1)\alpha v(1) = 0$$

olarak elde edilir. Örnek 1'deki gibi ağsız yöntemlerdeki çözüm zayıf şekilde yerine yazılır ve test fonksiyonları olarak şekil fonksiyonları seçilirse sistem denklemi (82)'deki gibi

$$Mu = \lambda Ku \quad (84)$$

şeklinde elde edilir. Fakat Örnek 1'den farklı olarak Penaltı yöntemi ile eklenen terimlerden dolayı

$$K_{ij} := \int_0^1 \phi_i(x)\phi_j(x) dx$$

$$M_{ij} := \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_j'(x) dx + \phi_i(0)\alpha\phi_j(0) + \phi_i(1)\alpha\phi_j(1), j = 1, 2, \dots, n$$

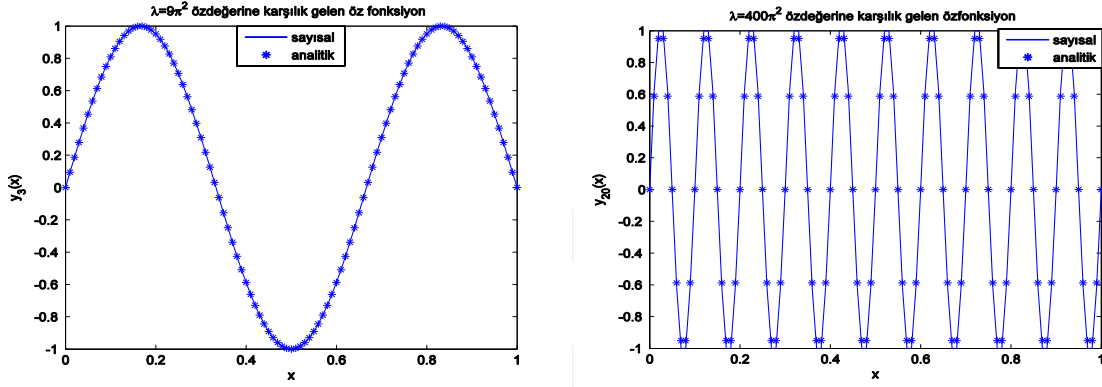
dir. Örnek 1'de yapıldığı gibi (84) sistem denklemi düğüm noktaları arası uzaklık eşit ve 0.01, penaltı parametresi  $\alpha = 10^6$  seçilerek MATLAB eigs komutu ile çözdürülürse Tablo 13 elde edilir.

Tablo 13. (83) probleminin analitik ve sayısal özdeğerleri

$n$	Özdeğerler ( $\lambda = n^2\pi^2$ )	EFG ile yaklaşımlar ( $\lambda_s$ )	Bağıl hata ( $e =  \lambda - \lambda_s / \lambda $ )
1	9.869604	9.869564	0.000004039394
2	39.478417	39.4782556	0.000004104685
3	88.826439	88.8260652	0.000004214602
4	157.9136704	157.9129805	0.000004368944
5	246.74011	246.7389826	0.000004569189
10	986.9604401	986.9542484	0.000006273479
20	3947.8417604	3947.7962674	0.000011523516
30	8882.6439609	8882.7243902	0.0000090546535
40	15791.3670417	15794.9892545	0.0002293793034
50	246740.1100272	247073.390657	0.0013507355155
60	355305.7584392	357307.073731	0.0056326565047

Neumann sınır şartlı problemde olduğu gibi Dirichlet sınır şartlı problem için de eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile elde edilen öz değerlerde bağıl hata değerleri  $n$ 'in küçük değerleri için sıfıra çok yakın değerler alırken  $n$  değeri arttıkça hata değerleri de artmaktadır.

(83) problemi için  $\lambda = 9\pi^2$  ve  $\lambda = 400\pi^2$  öz değerlerine karşılık gelen sayısal öz fonksiyon ve analitik öz fonksiyon grafikleri ise Şekil 42'deki gibidir.



Şekil 42. (83) problemi için bazı özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar

Şekil 42'den görüleceği üzere eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile elde edilen öz fonksiyonlar ile analitik öz fonksiyonlar birbiri ile uyumludur.

**Örnek 3.** Süper iletkenlikte önemli bir yer tutan Ginzburg-Landau modelini göz önüne alalım. Bu problem (77) ile verilen özdeğer probleminde  $p(x) = 1$ ,  $q(x) = k^2 h^2 x^2$ ,  $w(x) = k^2$  alınması ile elde edilen

$$y'' + k^2(\lambda - h^2 x^2)y = 0, y'(0) = y'(1) = 0 \quad (85)$$

Neumann sınır şartlarına sahip özdeğer problemi olarak verilir(Gökdoğan, 2010). Burada,  $\kappa$ , Ginzburg Landau parametresi,  $h$ , uygulanan manyetik alandır. Denklemin zayıf şekli

$$\int_0^1 y'v' dx + k^2 h^2 \int_0^1 x^2 y v dx = \lambda k^2 \int_0^1 y v dx$$

şeklindedir. Ağsız yöntemlerdeki (36) çözümü zayıf şekilde yerine yazılırsa sistem denklemi test fonksiyonu olarak şekil fonksiyonlarının seçilmesi ile

$$\sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx + k^2 h^2 \int_0^1 x^2 \phi_i(x) \phi_j(x) dx \right) u_i$$

$$= \lambda k^2 \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 \phi_i(x) \phi_j(x) dx \right) u_i, j = 1, 2, \dots, n$$
(86)

şeklinde elde edilir.

$h, k$  parametrelerinin farklı değerlerinde (85) probleminin özdeğerleri için geliştirilen en güvenilir yazılımlardan biri SLEIGN2 yazılımıdır. Öte yandan (85) problemine bazı yaklaşımlar geliştirilerek SLEIGN2 ile karşılaştırılmaları yapılmıştır (Gökdoğan, 2010). Tablo 14'de ise ağsız yöntemde düğüm noktaları arası uzaklığın 0.01 alınması durumunda elde edilen sonuçlar ile SLEIGN2 ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Tablo 14.  $h = k = 1$  parametre değerleri için (85) probleminin özdeğerleri

SLEIGN2 programı	Ağsız Yöntem
0.3249	0.3249
10.2600	10.2600
39.8253	39.8254
89.1657	89.1660
158.2503	158.2515
247.0755	247.0784
355.6405	355.6466
483.9450	483.9562
631.9888	632.0080
799.7719	799.8029
987.2943	987.3417

Tablo 14'den SLEIGN2 ve eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile elde edilen sonuçların birbirlerine yakın olduğu görülür.

### 3.2. Başlangıç-Sınır Değer Problemlerine Ağsız Eleman Bağımsız Galerkin Yönteminin Uygulanması

Kesim 3.1.3 ile 3.1.12 arasında ağsız eleman bağımsız Galerkin yöntemi adi diferensiyel denklemlere uygulanarak bu yöntemler için adaptif yöntemler önerildi. Bu bölümde ağsız eleman bağımsız Galerkin yöntemi 1 boyutlu zaman bağımlı problemlere uygulanarak adi diferensiyel denklemler için önerilen adaptif yöntemler zaman bağımlı problemlere genişletilmektedir. Ağsız yöntem Neumann sınır şartlı ve Dirichlet sınır şartlı zaman bağımlı problemlere ayrı ayrı uygulanmaktadır.

#### 3.2.1. Neumann Sınır Şartlı Başlangıç Değer Problemleri

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < p, t \geq 0, p \in \mathbb{R}^+ \quad (87)$$

ısı denklemini

$$u_x(0, t) = u_x(p, t) = 0, t > 0 \quad (88)$$

sınır koşulları ve

$$u(x, 0) = T_0 \sin^2(\pi x/P), 0 < x < p, T_0, P \in \mathbb{R} \quad (89)$$

başlangıç değeri ile ele alalım. Problemin analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{1}{2} T_0 \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{P}\right) e^{-\frac{4\pi^2 t}{P^2}} \right]$$

dir. Problemin sayısal çözümünü ağsız eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile belirleyelim.

Eleman bağımsız Galerkin yöntemi problemin zayıf şekline uygulandığı için (87) probleminin zayıf şekli bulunmalıdır. Bunun için (87) denkleminin her iki tarafı  $v$  test fonksiyonu ile çarpılarak 0'dan  $p$ 'ye  $x$  değişkenine göre integral alınırsa

$$\int_0^p \frac{\partial u}{\partial t} v dx = \int_0^p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v dx. \quad (90)$$

elde edilir. (90) bağıntısının sağ tarafındaki integrale kısmi integral alma uygulanırsa

$$\int_0^p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v dx = \frac{\partial u}{\partial x} v \Big|_{x=0}^{x=p} - \int_0^p \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (91)$$

bulunur. (88)'deki sınır koşulları ile

$$\frac{\partial u}{\partial x} v \Big|_{x=0}^{x=p} = 0$$

dır. Dolayısı ile (87) diferensiyel denkleminin zayıf şekli

$$\int_0^p \frac{\partial u}{\partial t} v dx + \int_0^p \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = 0 \quad (92)$$

olarak elde edilir.

Analitik çözümdeki gibi ağırsız yöntemler zaman bağımlı problemlere uygulanırken çözüm, değişkenlerine ayırma yöntemi ile hesaplanır. Bu yöntemle göre çözüm

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) T_i(t) = \phi(x) T(t) \quad (93)$$

şeklinde araştırılır. (93)'de

$$\phi(x) = [\phi_1(x) \phi_2(x) \dots \phi_n(x)]$$

şekil fonksiyonları ve

$$T(t) = [T_1(t) T_2(t) \dots T_n(t)]^T$$

ise bilinmeyen fonksiyonlardır. (93) çözümü (92) zayıf şekilde yerine yazılırsa

$$\int_0^p \left( \phi(x) \frac{\partial T}{\partial t} \right) v dx + \int_0^p \left( T(t) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} dx = 0 \quad (94)$$

elde edilir. Eleman bağımsız Galerkin yönteminde test fonksiyonları olarak şekil fonksiyonları seçildiğinden (94) bağıntısı

$$\int_0^p \left( \phi(x) \frac{\partial T}{\partial t} \right) \phi_j(x) dx + \int_0^p \left( T(t) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} dx = 0, j = 1, 2, \dots, n$$



olarak bulunur. Toplam sembolü ile son bağıntı

$$\int_0^p \left( \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \frac{\partial T_i(t)}{\partial t} \right) \phi_j(x) dx + \int_0^p \left( \sum_{i=1}^n T_i(t) \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} dx = 0 \quad (95)$$

$j = 1, 2, \dots, n$ , şeklinde ifade edilebilir. (95)'de toplam ile integral yer değiştirir ve  $T_i(t)$ 'ler integral değişkeninden bağımsız olduğundan integral dışarısına alınırsa  $j = 1, 2, \dots, n$  için

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T_i(t)}{\partial t} \int_0^p \phi_i(x) \phi_j(x) dx + \sum_{i=1}^n T_i(t) \int_0^p \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} dx = 0, \quad (96)$$

elde edilir. Eğer

$$K_{ij} := \int_0^p \phi_i(x) \phi_j(x) dx$$

$$M_{ij} := \int_0^p \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} dx$$

olarak tanımlanırsa (96) bağıntısı

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T_i(t)}{\partial t} K_{ij} + \sum_{i=1}^n T_i(t) M_{ij} = 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (97)$$

şeklinde ifade edilebilir. (97) bağıntısı matris formunda

$$K\dot{T} + MT = 0 \quad (98)$$

olarak yazılır. Burada

$$\dot{T} = \left[ \frac{\partial T_1(t)}{\partial t} \quad \frac{\partial T_2(t)}{\partial t} \quad \dots \quad \frac{\partial T_n(t)}{\partial t} \right]^T$$

dir. (98) denklem sistemindeki bilinmeyen  $T(t)$  çözümü sayısal olarak elde edilmelidir. Bunun için sayısal türev yaklaşımları kullanılabilir.

$[0, t]$  aralığı eşit aralıklı  $N + 1$  adet alt aralığa bölünsün. Bu aralıkların uç noktalarını  $0 = t_0 < t_2 < \dots < t_N = t$  ve bu noktalar arası uzaklığı ise  $\Delta t$  ile gösterelim. Ayrıca  $t = t_m, m = 0, 1, \dots, N$ , anındaki  $T$  değerlerinin tutulduğu vektörü

$$T^{(m)} = [T_1^{(m)} \ T_2^{(m)} \ \dots \ T_n^{(m)}]$$

ve  $t = 0$  anındaki  $T$  değerlerinin tutulduğu vektörü ise

$$T^{(0)} = [T_1^{(0)} \ T_2^{(0)} \ \dots \ T_n^{(0)}]$$

ile gösterelim. Bu takdirde  $t = t_m, m = 0, 1, \dots, N$ , anında (98) denkleme

1.  $\dot{T}$  için ileri fark yaklaşımı uygulanırsa

$$K \frac{T^{(m+1)} - T^{(m)}}{\Delta t} + MT^{(m)} = 0 \quad (99)$$

elde edilir. Bu yönteme “ileri Euler yöntemi” adı verilir.

2.  $\dot{T}$  için geri fark yaklaşımı uygulanırsa

$$K \frac{T^{(m)} - T^{(m-1)}}{\Delta t} + MT^{(m)} = 0 \quad (100)$$

elde edilir. Bu yönteme “geri Euler yöntemi” adı verilir.

3.  $\dot{T}$  için ileri fark yaklaşımı uygulanır ve denklemdaki  $T$  için  $t = t_m$  ve  $t = t_{m+1}$  anlarındaki değerlerin ortalaması alınır

$$K \frac{T^{(m+1)} - T^{(m)}}{\Delta t} + M \frac{T^{(m)} + T^{(m+1)}}{2} = 0 \quad (101)$$

elde edilir. Bu yönteme “Crank-Nicolson yöntemi” adı verilir.

Yukarıda bahsedilen yöntemlerden ileri Euler yöntemi açık yöntem olarak bilinirken geri Euler ve Crank Nicolson yöntemleri kapalı yöntemlerdir. Aşağıda bu yöntemler ayrı ayrı incelenmekte ve bu yöntemler ile (87) probleminin sayısal çözümleri elde edilmektedir.

### 3.2.1.1. İleri Euler Yöntemi

(99) bağıntısı düzenlenirse yaklaşım

$$KT^{(m+1)} = (K - \Delta tM)T^{(m)} \quad (102)$$

şeklinde elde edilir. (102) sistemi lineer denklem çözümler yardımıyla çözdürülerek ilgili çözümler bulunur. Fakat açık yöntemde dikkat edilmesi gereken en önemli noktalardan biri  $\Delta t$  adım uzunluğunun seçimidir. Çünkü zaman adım uzunluğu belli bir değerden büyük seçilirse sonuçlar istenildiği gibi olmayabilir. Bu yüzden yöntemin kararlılık analizinin yapılması gerekmektedir.

**Tanım 6.**  $T^{(m+1)} = g(T^{(m)})$ ,  $m = 1, 2, \dots$  için eğer  $\exists C \in \mathbb{R}$  öyle ki sabit adım uzunluğu ile  $\|T^{(m)}\| \leq C$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , özelliği sağlanıyorsa yönteme “mutlak kararlıdır” denir.

İleri Euler yöntemi gibi açık yöntemlerde çözümlerin sınırlı olması için  $\Delta t$ 'nin seçimi üzerinde bir sınırlama gerekir. İleri Euler yönteminin mutlak kararlı olması için gerekli olan şartı vermeden önce bu bölümde kullanacağımız bazı tanım ve önermeleri verelim.

**Tanım 7.**  $\lambda_i$ 'ler  $A_{n \times n}$  matrisinin özdeğerleri olmak üzere

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i| : i = 1, 2, \dots, n\}$$

ya  $A$  matrisinin “spektral yarıçapı” adı verilir.

**Önerme 13.** Eğer  $\|A\| \leq 1$  ise  $T^{(m+1)} = AT^{(m)}$  yaklaşımı mutlak kararlıdır.

**Önerme 14.**  $\rho, A$  matrisinin spektral yarıçapı olmak üzere  $\rho(A) \leq \|A\|$ 'dir.

**Önerme 15.**  $\rho, A$  matrisinin spektral yarıçapı olsun. Eğer  $\rho(A) \leq 1$  ise  $T^{(m+1)} = AT^{(m)}$  yaklaşımı mutlak kararlıdır.

**Önerme 16.**  $f$  rasyonel bir fonksiyon olmak üzere  $\rho(f(A)) = f(\rho(A))$ 'dir (Smith, 1985).

Önerme 15 ve 16'yı ileri Euler yöntemine uygulamak için (102) bağıntısının her iki tarafı  $K^{-1}$  ile çarpılırsa

$$K^{-1}KT^{(m+1)} = K^{-1}(K - \Delta tM)T^{(m)}$$

$$T^{(m+1)} = (I - \Delta tK^{-1}M)T^{(m)}$$

elde edilir. Eğer  $A = K^{-1}M$  olarak tanımlanırsa yaklaşım

$$T^{(m+1)} = (I - \Delta t A)T^{(m)} \quad (103)$$

şeklinde ifade edilir. Önerme 15 ile çözümün sınırlı olması için (103)'deki  $I - \Delta t A$  matrisinin spektral yarıçapı 1'den küçük veya eşit olmalıdır. Yani,

$$\rho(I - \Delta t A) \leq 1$$

bağıntısı sağlanmalıdır. Önerme 16 ile

$$\rho(I - \Delta t A) = |1 - \Delta t \rho(A)| = |1 - \Delta t \lambda_i(A)| \leq 1 \quad (104)$$

elde edilir. Burada  $\lambda_i(A)$ ,  $A$  matrisinin öz değerlerini göstermektedir. (104) eşitsizliğinden

$$\Delta t \leq \frac{2}{|\lambda_{\max}(A)|} \leq \frac{2}{|\lambda_i(A)|}$$

bulunur. Dolayısı ile çözümün sınırlı olması için

$$\Delta t \leq \frac{2}{|\lambda_{\max}(A)|} \quad (105)$$

sağlamalıdır. (105)'deki şartı sağlayan adım uzunluğu için yöntem mutlak kararlıdır.

### 3.2.1.2. Crank-Nicolson Yöntemi

(101) bağıntısı düzenlenirse

$$\left(K + \frac{\Delta t}{2}M\right)T^{(m+1)} = \left(K - \frac{\Delta t}{2}M\right)T^{(m)} \quad (106)$$

sistemi elde edilir.

Açık yöntemde yapılan kararlılık analizine benzer şekilde (106)'ün her iki tarafı

$\left(K + \frac{\Delta t}{2}M\right)^{-1}$  ile çarpılırsa

$$T^{(m+1)} = \left( K + \frac{\Delta t}{2} M \right)^{-1} \left( K - \frac{\Delta t}{2} M \right) T^{(m)} \quad (107)$$

bulunur. (107) bağıntısı düzenlenirse

$$\begin{aligned} T^{(m+1)} &= \left( K \left( I + \frac{\Delta t}{2} K^{-1} M \right) \right)^{-1} \left( K \left( I - \frac{\Delta t}{2} K^{-1} M \right) \right) T^{(m)} \\ \Rightarrow T^{(m+1)} &= \left( I + \frac{\Delta t}{2} K^{-1} M \right)^{-1} K^{-1} K \left( I - \frac{\Delta t}{2} K^{-1} M \right) T^{(m)} \\ \Rightarrow T^{(m+1)} &= \left( I + \frac{\Delta t}{2} K^{-1} M \right)^{-1} \left( I - \frac{\Delta t}{2} K^{-1} M \right) T^{(m)} \end{aligned}$$

elde edilir. Kesim 3.2.1.1’de yapıldığı gibi çözümün sınırlı olması için

$$\rho \left( \left( I + \frac{\Delta t}{2} K^{-1} M \right)^{-1} \left( I - \frac{\Delta t}{2} K^{-1} M \right) \right) \leq 1$$

sağlanmalıdır. Buradan ise eğer  $A := K^{-1}M$  olarak tanımlanırsa Önerme 16 ile

$$\begin{aligned} \left| \left( 1 + \frac{\Delta t}{2} \lambda_i(A) \right)^{-1} \left( 1 - \frac{\Delta t}{2} \lambda_i(A) \right) \right| &\leq 1 \\ \Rightarrow \frac{\left| 1 - \frac{\Delta t}{2} \lambda_i(A) \right|}{\left| 1 + \frac{\Delta t}{2} \lambda_i(A) \right|} &\leq 1 \end{aligned} \quad (108)$$

elde edilir. (108) eşitsizliğinden  $A$  matrisinin özdeğerleri pozitif olduğu sürece Crank-Nicolson yönteminin şartsız kararlı olduğu görülür.

### 3.2.1.3. Geri Euler Yöntemi

(100) bağıntısı ile geri Euler yaklaşımı

$$(K + \Delta t M) T^{(m)} = K T^{(m-1)} \quad (109)$$

dir.

Geri fark yaklaşımının mutlak kararlılığı için (109)’daki  $T^{(m)}$  terimi yalnız bırakılır. Denklemin her iki tarafı  $(K + \Delta t M)^{-1}$  ile çarpılırsa

$$T^{(m)} = (K + \Delta t M)^{-1} K T^{(m-1)}$$

elde edilir. Buradan ise

$$T^{(m)} = (I + \Delta t (K^{-1} M))^{-1} K^{-1} K T^{(m-1)}$$

$$\Rightarrow T^{(m)} = (I + \Delta t (K^{-1} M))^{-1} T^{(m-1)}$$

bulunur.  $A = K^{-1} M$  şeklinde tanımlanırsa çözümün sınırlı olması için

$$\rho((I + \Delta t A)^{-1}) \leq 1$$

sağlanmalıdır. Dolayısı ile sistemin mutlak kararlılık kriteri

$$\left| (1 + \Delta t \lambda_i(A))^{-1} \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|1 + \Delta t \lambda_i(A)|} \leq 1 \quad (110)$$

olarak elde edilir. (110)'dan Crank-Nicolson yönteminde olduğu gibi  $A$  matrisinin özdeğerleri reel ve pozitif olduğu sürece (87) problemi için geri Euler yöntemi ile elde edilen çözümün sınırlı olduğu elde edilir.

**Örnek 1.** (87) başlangıç sınır değer problemi için ileri Euler yöntemi ile problemin kararlı veya kararsız olduğu  $\Delta t$  değerlerini sayısal olarak belirleyerek çözümlerin davranışlarını inceleyelim. Eğer (87) probleminde  $p = 1$  ve (88)'deki başlangıç şartında  $T_0 = 1$  seçilirse problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 1, t \geq 0$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \sin^2(\pi x)$$

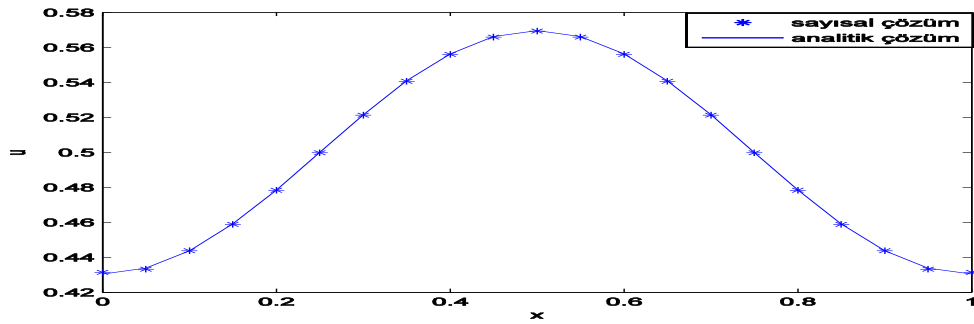
olarak elde edilir. Eğer düğüm noktaları arasındaki uzaklık eşit ve 0.1 olarak seçilirse  $A = K^{-1} M$  matrisinin özdeğerleri Tablo 15'deki gibi elde edilir.

Tablo 15.  $A$  matrisinin özdeğerleri

1037.4	978.9	759.1	552.1	386.1	258.9
162.1	89.9	39.7	9.9		

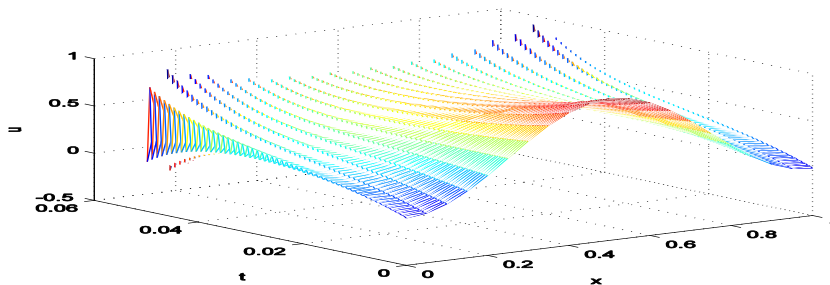
Tablo 15'den  $A$  matrisinin özdeğerlerinin hepsinin pozitif olduğu görülmektedir. Dolayısı ile Crank-Nicolson ve Geri Euler yöntemlerinin şartsız kararlı olduğu elde edilir. Fakat ileri Euler yönteminin mutlak kararlı olması için seçilebilecek en büyük  $\Delta t$  değerinin (105)'den 0.0018 olduğu görülür. Öte yandan düğüm noktaları arasındaki uzaklık eşit ve 0.05 seçilmesi durumunda ise yöntemin mutlak kararlı olması için seçilebilecek en büyük  $\Delta t$  değeri  $4.5905 \times 10^{-4}$  olarak bulunur. Dolayısı ile açık yöntem kullanıldığında problemin çözümünün davranışını gözlemlemek için zaman adım uzunluğu çok küçük seçilmesi gerekir iken kapalı yöntemlerde böyle bir sınırlama yoktur.

Açık yöntemin kararlı olduğu  $\Delta t$  değerinde çözümün davranışını gözlemlemek için düğüm noktaları arası uzaklık 0.05 ve  $\Delta t = 4.5905 \times 10^{-4}$  olarak seçilirse  $t = 0.05$  anındaki çözüm grafiği Şekil 43'deki gibi elde edilir.



Şekil 43. (87) probleminin ileri Euler yöntemiyle  $t = 0.05$ 'deki sayısal çözümü

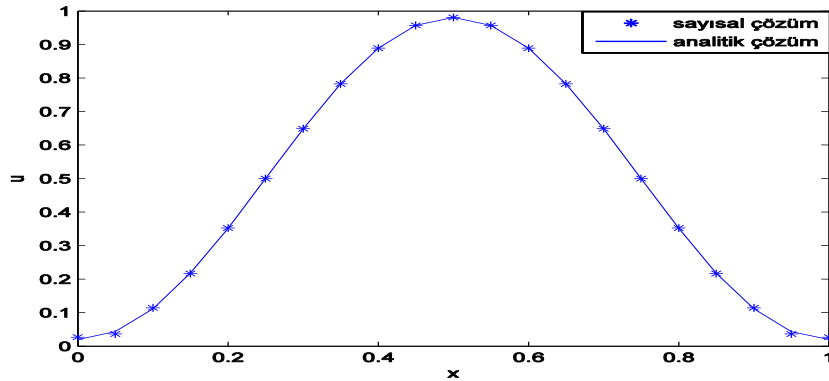
Şekil 43'den görüleceği üzere çözüm kararlı bir yapıya sahip olup gerçek çözümle uyumludur. Eğer  $\Delta t$  değeri problemin kararlılık şartından büyük ve  $\Delta t = 4.7 \times 10^{-4}$  olarak seçilirse Şekil 44'deki kararsız çözüm grafiği elde edilir.



Şekil 44. (87) probleminin ileri Euler yöntemiyle elde edilen kararsız çözümü

Şekil 44'den görüleceği üzere  $\Delta t$  değeri kararlılık şartından çok az büyük seçildiği durumda bile sayısal çözümün davranışı bozulmaktadır. Dolayısı ile ileri Euler yönteminde (105) koşulunun sağlanması gerekir. Fakat (105) koşulunun sağlandığı  $\Delta t$  değeri çok küçük olacağından problemin büyük zaman değerlerindeki davranışının belirlenmesi bilgisayara büyük bir işlem yükü getirir. Bunun yerine zaman adım uzunlukları eşit olarak seçmek yerine adaptif olarak dağıtılarak ilgili zaman değerlerinde çözümler belirlenebilir.

Öte yandan Crank-Nicolson ve geri Euler yöntemleri düğüm noktaları arası uzaklık 0.1 veya 0.05 seçilmesi durumlarında  $K^{-1}M$  matrisinin özdeğerleri pozitif olduğu için şartsız kararlıdır. Bu ise adım uzunluğunun açık yöntemin aksine daha büyük seçilebileceğini gösterir. Örneğin, düğüm noktaları arası uzaklık 0.05 seçilmesi durumunda açık yöntemde kararlılık için  $\Delta t \leq 4.5905 \times 10^{-4}$  sağlanmalıdır. Fakat Crank-Nicolson yönteminde  $\Delta t = 0.001$  seçilmesi durumunda  $t = 0.1$  anındaki çözüm grafiği Şekil 45'deki gibi elde edilir.

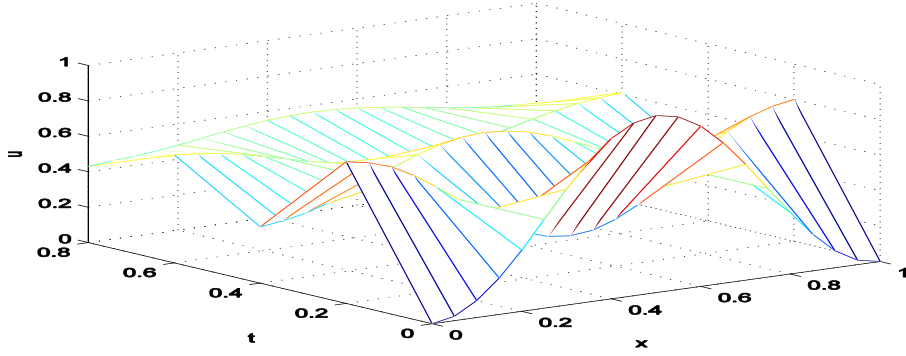


Şekil 45. (87)'deki ısı probleminin Crank-Nicolson yöntemi ile çözümü

Şekil 45'den sayısal çözümün kararlı ve gerçek çözüm ile uyumlu olduğu görülmektedir. Böylece Crank-Nicolson yönteminde açık yöntemden daha büyük adım uzunluğu seçilerek daha az işlem yükü ile sayısal çözümlerin elde edilebileceği gözlemlenir.

Özdeğerler pozitif olduğundan yöntemin her  $\Delta t$  değerinde kararlı bir yapıya sahip olduğunu gözlemlemek için adım uzunluğunu 0.2 gibi büyük bir değer seçelim. Bu durumda Şekil 46'daki kararlı çözüm grafiği elde edilir.





Şekil 46.  $\Delta t = 0.2$  için (87) probleminin Crank-Nicolson yöntemi ile çözümü

$\Delta t = 0.2$  için sayısal çözüm kararlı bir yapıda olmasına rağmen hata değerleri fazladır. Gerçekten, Tablo 16'da bazı noktalarda elde edilen mutlak hata değerlerinden görüleceği üzere yöntemin hatası küçük  $\Delta t$  değerlerine göre fazladır.

Tablo 16 .  $\Delta t = 0.2$  için Crank-Nicolson yönteminin mutlak hata tablosu

$(x, t)$	Mutlak hata
(0.05,0.2)	0.2780
(0.1,0.2)	0.2368
(0.15,0.2)	0.1718
(0.5,0.4)	0.1744
(0.55,0.4)	0.1659
(0.6,0.4)	0.1411

Özetle,  $A = K^{-1}M$  matrisi pozitif tanımlı ise geri Euler ve Crank-Nicolson yöntemleri ile

$$KT + MT = 0$$

sistemi için elde edilen  $T^{(m)}$  çözümleri sınırlıdır. Yani,  $m \rightarrow \infty$  için  $\exists L \in \mathbb{R}$  öyle ki  $|T^{(m)}| \leq L$ 'dir. Fakat ileri Euler yöntemi ile elde edilen çözümün sınırlı olması için

$$\Delta t \leq \frac{2}{\rho(A)}$$

kriterinin sağlanması gerekir.

### 3.2.2. Dirichlet Sınır Şartlı Başlangıç Sınır Değer Problemi

Kesim 3.1.3'de belirtildiği üzere Dirichlet sınır şartlı bir problem için şekil fonksiyonları Kronecker delta fonksiyon özelliklerine sahip olmadıklarından yöntem sınır koşullarını sağlamaz. Sınır şartlarının sağlanması için Penaltı yöntemi veya Lagrange yöntemi gibi özel yöntemler probleme uygulanmalıdır. Kesim 3.1.3'de Penaltı yönteminden bahsedilmiş olup bu yöntem adi diferensiyel denklemlere uygulanmıştır. Bu bölümde Penaltı yöntemi kısmi diferensiyel denklemlere uygulanmaktadır.

Kesim 3.1.3'de bahsedildiği üzere Penaltı yönteminde problemin varyasyonel şekline sınır bölgelerinde

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} (u(x) - u_\Gamma) \alpha (u(x) - u_\Gamma)^T dx \quad (111)$$

terimini eklenir. Kısmi diferensiyel denklemler zaman bağımlı olduğu için (111) formu kısmi diferensiyel denklemlerde

$$I = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} (u(x, t) - u_\Gamma) \alpha (u(x, t) - u_\Gamma)^T dx \quad (112)$$

şeklindedir. Dolayısı ile Dirichlet sınır şartlı problemlerde problemin zayıf şekline  $I$ 'nin 1. varyasyonu olan

$$\frac{\delta I}{\delta u} = \int_{\Gamma_u} (u(x, t) - u_\Gamma) \alpha \delta u(x, t) dx \quad (113)$$

terimi eklenir.

#### Örnek 1.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, 0 < x < \pi, t \geq 0 \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, u(x, 0) = \sin(x) \end{aligned} \quad (114)$$

Dirichlet sınır şartlı başlangıç sınır değer problemini göz önüne alalım.

(114) probleminin analitik çözümü

$$u(x, t) = e^{-t} \sin(x)$$

dir. Sınır şartları Dirichlet olduğundan (114) difensiyel denkleminin zayıf şeklini bulmak için probleme Penaltı yönteminin uygulanması gerekir. (113) ile problemin zayıf şekline

$$\int_{\Gamma_1} (u(x, t) - u(0, t))\alpha_1 v d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} (u(x, t) - u(1, t))\alpha_2 v d\Gamma_2$$

terimi eklenmelidir. Burada  $\Gamma_1: (0, t), t > 0$  ve  $\Gamma_2: (\pi, t), t > 0$  doğrularıdır.  $\alpha_1, \alpha_2$  ise Penaltı parametreleridir. Dolayısı ile problemin zayıf şekli Kesim 3.2.1'de yapılan işlemlere benzer işlemler ile

$$\int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial t} v dx + \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \int_{\Gamma_1} (u(x, t) - u(0, t))\alpha_1 v d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} (u(x, t) - u(1, t))\alpha_2 v d\Gamma_2 = 0$$

şeklinde bulunur. Ağsız yöntemlerde çözüm (93) ile

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) T_i(t) = \phi(x) T(t)$$

şeklinde araştırıldığından Kesim 3.2.1'deki gibi

$$K\dot{T} + MT = 0 \tag{115}$$

sistemi elde edilir. (115) denklem sistemindeki  $K$  matrisi

$$K_{ij} := \int_0^\pi \phi_i(x) \phi_j(x) dx$$

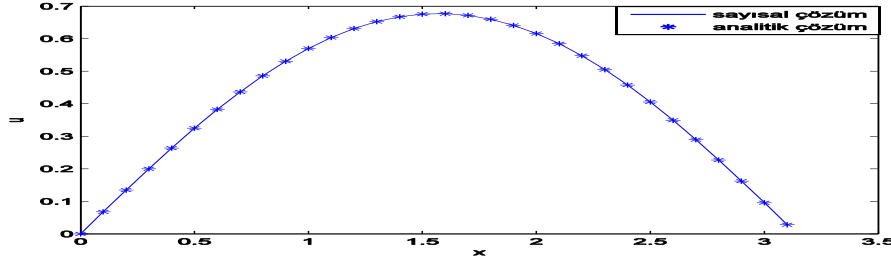
dir.  $M$  matrisi ise penaltı terimlerinden dolayı

$$M_{ij} = \int_0^\pi \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} dx + \alpha_1 \phi_i(0) \phi_j(0) + \alpha_2 \phi_i(1) \phi_j(1)$$

şeklinde bulunur.

Eğer problemin sayısal çözümü için Crank-Nicolson yöntemi kullanılırsa Kesim 3.2.1.2'den bilindiği üzere  $K^{-1}M$  matrisinin özdeğerleri reel ve sıfırdan büyük olduğu sürece problem şartsız kararlıdır.  $\Delta x$  parametresi 0.1 seçilmesi durumunda  $A = K^{-1}M$  matrisinin en büyük özdeğeri 4121819212.473792 ve en küçük özdeğeri ise 24.992115'dir. Dolayısı ile yöntem şartsız kararlıdır. Bu takdirde  $\Delta t = 0.05$  değeri için

yöntem kararlı olup  $t = 0.4$  anındaki çözüm grafiği Şekil 47'deki gibi gerçek çözümle uyumludur.

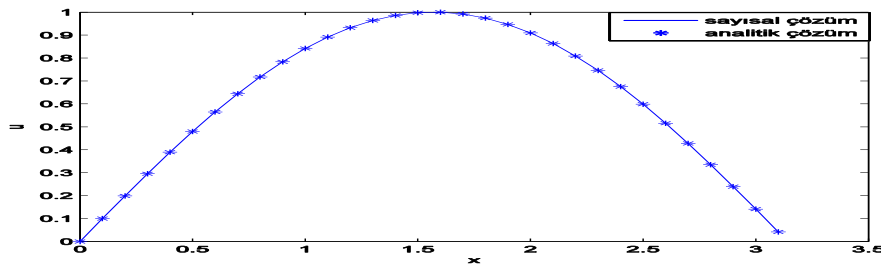


Şekil 47. (114) probleminin  $t = 0.4$  anında Crank-Nicolson yöntemi ile çözümü

Eğer probleme kapalı yöntem yerine açık yöntem (ileri Euler) uygulanırsa adım uzunluğu için

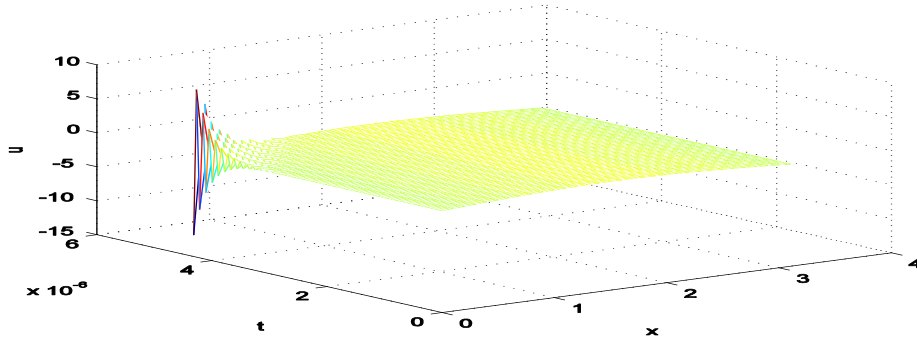
$$\Delta t \leq \frac{2}{\lambda_{\max}(K^{-1}M)}$$

kararlılık kriterine dikkat edilmesi gerekir. Düğüm noktaları arası uzaklık  $\Delta x = 0.1$  seçilmesi durumunda kararlılık şartı  $\Delta t \leq 4.8521 \times 10^{-8}$  şeklinde elde edilir. Dolayısı ile seçilebilecek maksimum  $\Delta t$  değeri için bilgisayarın harcayacağı CPU zamanı çok fazladır. Bu yüzden açık yöntem ile sayısal çözümün grafiklerini büyük zaman değerleri için gözlemlemek çok fazla işlem yükü gerektirir. Ancak çok küçük zaman aralığında çözüm grafikleri elde edilerek çözümler karşılaştırılabilir. Şekil 48'de  $t = 4.3669 \times 10^{-7}$  anında sayısal çözüm ile analitik çözümün grafikleri çizdirilmiştir.



Şekil 48.  $t = 4.3669 \times 10^{-7}$  anında (114) probleminin açık yöntem ile çözümü

Eğer problem  $\Delta t \leq 4.8521 \times 10^{-8}$  kararlılık şartının sağlanmadığı bir  $\Delta t$  değeri için ileri Euler Yaklaşımı ile çözülmürse Şekil 49'daki kararsız çözüm grafiği elde edilir. Burada,  $\Delta t = 5.4 \times 10^{-8}$  olarak seçilmiştir.



Şekil 49. (114) probleminin açık yöntem ile elde edilen kararsız çözümü

**Not.** Neumann sınır şartlı problemler ile Dirichlet sınır şartlı problemlerde açık yöntemin kullanıldığı örnekler üzerindeki kararlılık koşulları karşılaştırıldığında, Dirichlet sınır şartlı problemde zaman adım uzunluğu üzerindeki kısıtlama Neumann sınır şartına sahip probleme göre çok küçüktür. Gerçekten, düğüm noktaları arası uzaklık 0.1 seçilmesi durumunda Kesim 3.2.1 Örnek 1’de kararlılık şartı 0.0018 iken Kesim 3.2.2 Örnek 1’de  $4.8521 \times 10^{-8}$ ’dir. Bunun en önemli sebebi penaltı yönteminin kullanılmasıdır. Çünkü sınır koşulları sağlanması için penaltı parametresi büyük seçilmesi gerekir. Dolayısı ile (115) sistem denklemindeki  $M$  matrisinin elemanları büyük değerlere sahiptir. Bu durumda  $K^{-1}M$  matrisinin özdeğerlerinin en büyüğü Dirichlet sınır şartlı problemlerde çok büyüktür. Dolayısı ile  $2/\lambda_{\max}(K^{-1}M)$  değeri çok küçük olacağından Dirichlet sınır şartlı problemde zaman adım uzunluğunun çok küçük seçilmesi gerekir.

Önerme 13 ile çözümlerin sınırlı olması için

$$T^{(m+1)} = AT^{(m)}$$

sisteminde  $\|A\| \leq 1$  koşulu sağlanmalıdır.  $\|A\| \leq 1$  olması için gerek ve yeter şart ise  $\rho(A) \leq 1$ ’dir.  $A$ ’nın spektral yarıçapının 1’den küçük ve eşit olduğu durumlarda analiz Neumann ve Dirichlet sınır şartlı problemler için Kesim 3.2.1 ve 3.2.2’de yapıldı ve çözümün sınırlı olması için ileri Euler yönteminin sağlaması gereken kriter elde edildi. Şimdi,  $A$  matrisinin normunu kullanarak ileri fark yaklaşımında çözümlerin sınırlı olması için gerekli olan koşulları elde edelim.

İleri fark yaklaşımında

$$T^{(m+1)} = AT^{(m)}, s = 1, 2, 3, \dots$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
s = 1 &\Rightarrow T^{(2)} = AT^{(1)} \\
s = 2 &\Rightarrow T^{(3)} = AT^{(2)} = A^2T^{(1)} \\
s = 3 &\Rightarrow T^{(4)} = AT^{(3)} = A^3T^{(1)} \\
&\vdots \\
s = n &\Rightarrow T^{(n+1)} = AT^{(n)} = A^nT^{(1)}
\end{aligned} \tag{116}$$

şeklinde bulunur. (116) bağıntısının her iki tarafının normu alınırsa

$$\|T^{(n+1)}\| = \|A^nT^{(1)}\| \leq \|A^n\|\|T^{(1)}\| \leq \|A\|^n\|T^{(1)}\| \tag{117}$$

elde edilir. (117) eşitsizliğinden çözümün sınırlı olması için

$$\|A\| \leq 1 \tag{118}$$

olmalıdır. Burada norm olarak  $A$  matrisinin sonsuz normunu seçebiliriz.

Norm üzerinden hesaplamalara devam edebilmek için  $K^{-1}M$  matrisinin genel şekli

$$K^{-1}M := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{119}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$A = I - \Delta t K^{-1}M = \begin{bmatrix} 1 - \Delta t a_{11} & \Delta t a_{12} & \dots & \Delta t a_{1n} \\ \Delta t a_{21} & 1 - \Delta t a_{22} & \dots & \Delta t a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta t a_{n1} & \Delta t a_{n2} & \dots & 1 - \Delta t a_{nn} \end{bmatrix} \tag{120}$$

şeklindedir. Bu şekilde tanımlanan  $A$  matrisi için aşağıdaki teorem doğrudur.

**Teorem 9.**  $K^{-1}M$  matrisi köşegen baskın bir matris ve  $a_{ii}$ , (120)'de tanımlanan  $A$  matrisinin mutlak değerce en büyük satır toplamına sahip olduğu satırdaki köşegen elemanı olsun. Eğer  $a_{ii} > 0$  ise ileri Euler yönteminin mutlak kararlı olması için yeter şart  $\Delta t \leq 1/a_{ii}$  olmasıdır.

**İspat.** (102) ile (98) denklemini için ileri Euler yaklaşımı

$$KT^{(m+1)} = (K - \Delta tM)T^{(m)}$$

şeklindedir. Son bağıntının her iki tarafı  $K^{-1}$  ile çarpılırsa yaklaşım

$$T^{(m+1)} = (I - \Delta tK^{-1}M)T^{(m)}$$

olarak elde edilir.  $A := I - \Delta tK^{-1}M$  olarak tanımlanırsa ileri Euler yaklaşımı ile elde edilen çözümlerin sınırlı olduğunun gösterilmesi için

$$\|A\|_{\infty} \leq 1$$

olduğu gösterilmelidir.  $K^{-1}M$  ve  $A$  matrisleri (119) ve (120)'deki gibi tanımlanırsa

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} (\Delta t(|a_{j1}| + |a_{j2}| + \dots + |a_{j,i-1}| + |a_{j,i+1}| + \dots + |a_{jn}|) + |1 - \Delta ta_{ji}|)$$

$1 \leq i \leq n$ , şeklindedir. Hipotez ile  $A$  matrisinin mutlak değerce en büyük satır toplamına sahip satırı  $i$ . satır olduğundan

$$\|A\|_{\infty} = \Delta t(|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|) + |1 - \Delta ta_{ii}|$$

dir. Ayrıca  $K^{-1}M$  matrisi köşegen baskın olduğu için

$$|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}| \leq |a_{ii}|, 1 \leq i \leq n$$

eşitsizliği doğrudur. Dolayısı ile

$$\begin{aligned} \Delta t(|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|) + |1 - \Delta ta_{ii}| \\ \leq \Delta t|a_{ii}| + |1 - \Delta ta_{ii}| \end{aligned}$$

elde edilir.  $\Delta t \leq 1/a_{ii}$  ve  $a_{ii} > 0$  olduğundan  $1 - \Delta ta_{ii} \geq 0$ 'dır.

$$\|A\|_{\infty} \leq \Delta t|a_{ii}| + |1 - \Delta ta_{ii}| = \Delta ta_{ii} + 1 - \Delta ta_{ii} = 1$$

bulunur. Yani,  $\|A\|_{\infty} \leq 1$ 'dir.

Teorem 10 ise Teorem 9'da verilen  $\Delta t \leq 1/a_{ii}$  şartının sağlanmadığı durumda ileri Euler yönteminin mutlak kararlı olması için  $\Delta t$  adım uzunluğunun sağlaması gereken kriteri gösterir.

**Teorem 10.**  $a_{ii}$ , (120)'de tanımlanan  $A$  matrisinin mutlak değerce en büyük satır toplamına sahip olduğu satırdaki köşegen elemanı olsun. Eğer  $a_{ii} > 0$  ve  $1/a_{ii} < \Delta t$  ise ileri Euler yönteminin mutlak kararlı olması için yeter şart  $\Delta t \leq 2/\|K^{-1}M\|_{\infty}$  olmasıdır.

**İspat.** Teorem 9'un ispatındaki işlemlere benzer şekilde

$$\|A\|_{\infty} = \Delta t(|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|) + |1 - \Delta ta_{ii}|$$

elde edilir.  $1/a_{ii} < \Delta t$  ve  $a_{ii} > 0$  olduğundan  $1 - \Delta ta_{ii} < 0$  olup

$$\begin{aligned} \|A\|_{\infty} &= \Delta t(|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|) - 1 + \Delta ta_{ii} \\ &= \Delta t(|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|) - 1 + \Delta t|a_{ii}| \end{aligned}$$

$$= \Delta t(|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}| + |a_{ii}|) - 1$$

bulunur. (119)'da tanımlanan  $K^{-1}M$  matrisi ile

$$|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}| \leq \|K^{-1}M\|_{\infty}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \|A\|_{\infty} &= \Delta t(|a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}| + |a_{ii}|) - 1 \\ &\leq \Delta t\|K^{-1}M\|_{\infty} - 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Hipotez ile

$$\|A\|_{\infty} \leq \Delta t\|K^{-1}M\|_{\infty} - 1 \leq \frac{2}{\|K^{-1}M\|_{\infty}} \|K^{-1}M\|_{\infty} - 1 = 1$$

bulunur. Dolayısı ile  $\|A\|_{\infty} \leq 1$ 'dir.

**Örnek.** Kesim 3.2.1'de Örnek 1'deki Neumann sınır şartlı problemi göz önüne alalım. Örnek 1'de açık yöntemin kararlı olması için  $\Delta t \leq 2/\rho(K^{-1}M)$  şartının sağlanması gerektiği elde edilmişti. Ayrıca düğüm noktaları arası uzaklık eşit ve 0.1 seçilmesi durumunda  $\Delta t \leq 0.0018$ , 0.05 seçilmesi durumunda ise  $\Delta t \leq 4.5905 \times 10^{-4}$  olduğu gözlemlenmişti. Düğüm noktaları arasındaki uzaklığın aynı seçilmesi durumunda Teorem 9 ve 10'da elde edilen sonuçlar ile açık yöntemde  $\Delta t$  zaman adım uzunluğu üzerindeki kısıtlamaları bulalım.

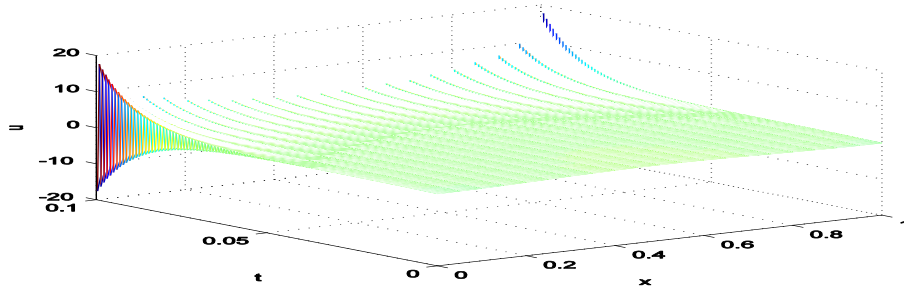
Eğer düğüm noktaları arası uzaklık eşit ve 0.1 seçilirse  $K^{-1}M$  matrisi 1. satır 1. sütun elemanı 422.3107 iken 1. satır 2. sütun elemanı  $-441.5759$ 'dir. Yani  $K^{-1}M$  matrisi köşegen baskın olma özelliğini sağlamaz. Dolayısı ile Teorem 9'un hipotezi sağlanmaz. Dolayısı ile Teorem 10'dan açık yöntemin mutlak kararlı olması için eğer  $\Delta t \geq 1/a_{ii}$  ise

$$\Delta t \leq \frac{2}{\|K^{-1}M\|_{\infty}}$$

şartını sağlaması gerekir. Eğer düğüm noktaları arası uzaklık 0.1 olarak seçilirse yöntemin mutlak kararlı olması için  $\Delta t \leq 0.0018$  sağlanması gerektiği gözlemlenir. Düğüm noktaları arası uzaklık 0.05 seçilmesi durumunda ise bu değer  $\Delta t \leq 4.5 \times 10^{-4}$ 'dür. Elde edilen bu sonuçlar spektral yarıçap ile elde edilen sonuçlar ile uyumludur.

Yöntemin mutlak kararlı olmadığı  $\Delta t$  değerinde çözümün davranışını gözlemlemek için düğüm noktaları arası uzaklığı 0.05 alalım. Bu durumda çözümün kararlı olması için  $\Delta t \leq 4.5 \times 10^{-4}$  olmalıdır. Bu şartın sağlanmadığı  $\Delta t = 4.7 \times 10^{-4}$  değerinde çözümün davranışı Şekil 50'deki gibidir.





Şekil 50. Kararlılığın sağlanmadığı durum için (87) probleminin sayısal çözümü

Şekil 50'den mutlak kararlılık değerinden büyük  $\Delta t$  değerlerinde çözümün kararsız yapıya sahip olduğu görülür. Çözümün kararlı olduğu durumlarda Örnek 1'deki çözüm grafikleri elde edildiği için bu örnekte kararlı çözüm grafikleri gösterilmemiştir.

### 3.2.3. Zaman Bağımlı Kısmi Diferensiyel Denklemler İçin Adaptivite

Kesim 3.1.10 ve 3.1.11'de adi diferensiyel denklemler için bazı adaptif yaklaşımlar geliştirilerek stasyonel problemlere uygulanmıştı. Bunlardan biri düğüm noktalarının yerlerinin değiştirilmesi ile yapılan adaptivite diğeri ise yeni düğüm noktası eklenmesi ile yapılan adaptivitedir. Bu bölümde ise düğüm noktalarının yerlerinin değiştirilmesi ile yapılan  $r$ -adaptivite kısmi diferensiyel denklemlere genişletilmektedir.

Düğüm noktalarının yerleri değiştirilerek uygulanan adaptif algoritma Kesim 3.1.10 ALG 2'de ayrıntılı olarak verilmişti. Kısmi diferensiyel denklemlerde en önemli problem bu adaptivitenin uygulanma zamanının belirlenmesidir. Bu bölümde adaptivitenin uygulanma zamanı, belli zaman aralıklarında

$$M = \sum_{i=1}^{n-1} |u'_{i+1} - u'_i|$$

monitör fonksiyonunun değerlerine bakılarak belirlenmektedir. Eğer önceki zaman değerindeki toplam fark  $M_{eski}$  ve ilgili zaman değerindeki toplam fark  $M_{yeni}$  ile gösterilirse adaptivitenin uygulanacağı zaman değeri

$$\frac{|M_{yeni} - M_{eski}|}{M_{eski}} \quad (121)$$

değerinin kullanıcı tarafından belirlenen bir toleranstan büyük olduğu andır. Yani, eğer (121) değeri belirli bir tolerans değerinden büyük oluyorsa o zaman değerinde probleme adaptivite uygulanır.

**Örnek.** Kesim 3.1.10'da ele alınan Ginzburg-Landau problemini zaman bağımlı probleme genişletelim. Bu problem

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + (1 - \tau - A^2 - \Psi^2) \Psi \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - A \Psi^2\end{aligned}\quad (122)$$

ile verilir. Başlangıç ve sınır koşulları ise

$$\begin{aligned}\Psi'(-1, t) &= \Psi'(1, t) = 0, A'(-1, t) = A'(1, t) = h \\ \Psi(x, 0) &= \cos(\pi x), A(x, 0) = hx\end{aligned}\quad (123)$$

olarak verilmiş olsun (Gökdoğan, 2010). Problemin zayıf şekli Kesim 3.1.10 Örnek 3'den

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} v + \frac{1}{k^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - (1 - \tau - A^2 - \Psi^2) \Psi v \right) dx &= 0 \\ \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial A}{\partial t} v + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + A \Psi^2 v \right) dx + hv(1) - hv(-1) &= 0\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Kısmi diferensiyel denklemler için ağsız yöntemlerde çözüm (93)'den

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \sum_{i=1}^n \phi_i(x) T_i(t) = \phi(x) T(t) \\ A(x, t) &= \sum_{i=1}^n \phi_i(x) S_i(t) = \phi(x) S(t)\end{aligned}$$

şeklinde araştırılır. Burada

$$\begin{aligned}\phi(x) &= [\phi_1(x) \phi_2(x) \cdots \phi_n(x)] \\ T(t) &= [T_1(t) T_2(t) \cdots T_n(t)] \\ S(t) &= [S_1(t) S_2(t) \cdots S_n(t)]\end{aligned}$$

dir. Çözüm zayıf şekilde yerine yazılır ve test fonksiyonları olarak şekil fonksiyonları seçilirse (72)'den

$$K\dot{T} = \left(-\frac{1}{k^2}M + (1 - \tau)K\right)T - \int_{-1}^1 (-(\phi S)^2(\phi T) - (\phi T)^3)\phi_j(x)dx = 0$$

$$K\dot{S} = -MS - \int_{-1}^1 (\phi T)^2(\phi S)dx + h(\phi_j(-1) - \phi_j(1)) = 0, j = 1, 2, \dots, n$$

olarak elde edilir. Burada

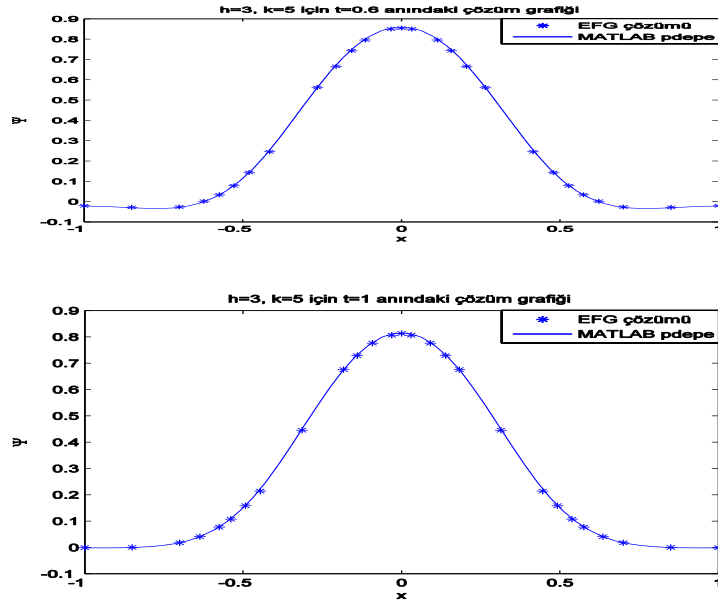
$$K = \int_{-1}^1 \phi_i(x)\phi_j(x)dx$$

$$M = \int_{-1}^1 \phi'_i(x)\phi'_j(x)dx$$

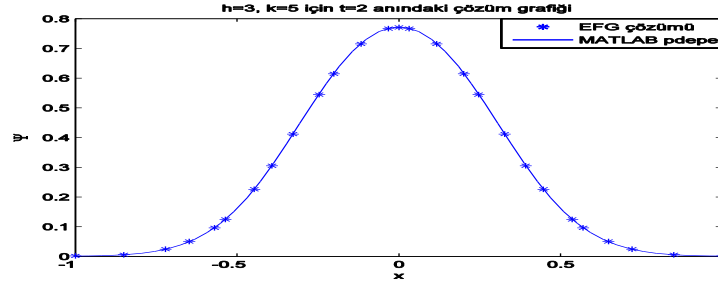
$$u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T, v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T$$

bulunur. Zaman değişkeninin türevini içeren diferensiyel denklemler Kesim 3.1.10'daki gibi açık veya kapalı yöntemler ile çözülebileceği gibi MATLAB Ode çözücüler yardımıyla da çözümler elde edilebilir. Bu örnekte MATLAB Ode çözücüler yardımıyla çözümler elde edilmiştir.

Örneğin,  $h = 3, k = 5$  parametreleri ve başlangıçta  $-1:0.08:1$  düğüm noktaları için adaptivite uygulanırsa  $[0,4.5]$  zaman aralığında 0.1 tolerans değeri için probleme üç kez adaptivite uygulandığı gözlemlenir. Bu zaman değerleri 0.4, 0.8 ve 1.8'dir. Bu durumda adaptivitenin uygulandıktan sonraki bazı tipik zaman değerlerinde  $\Psi$  için  $r$ -adaptif çözüm ile MATLAB pdepe çözümlerinin elde ettiği çözüm grafikleri Şekil 51 ve 52'deki gibidir.



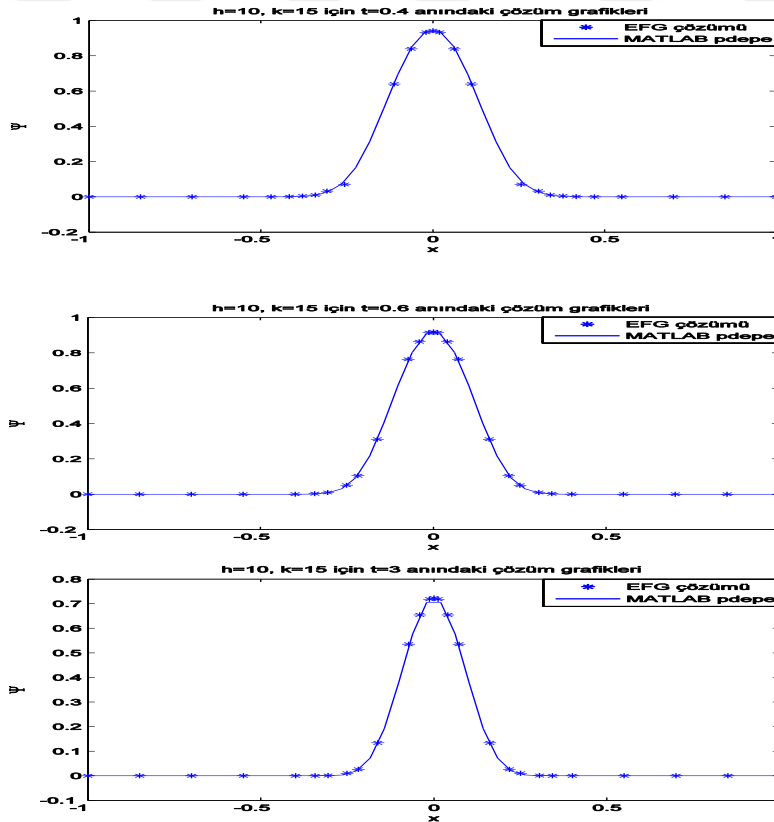
Şekil 51.  $h = 3, k = 5$  parametre değerleri için (122) probleminin  $r$ -adaptif çözümleri



Şekil 52.  $h = 3, k = 5$  parametre değerleri için (122) probleminin  $r$ -adaptif çözümleri

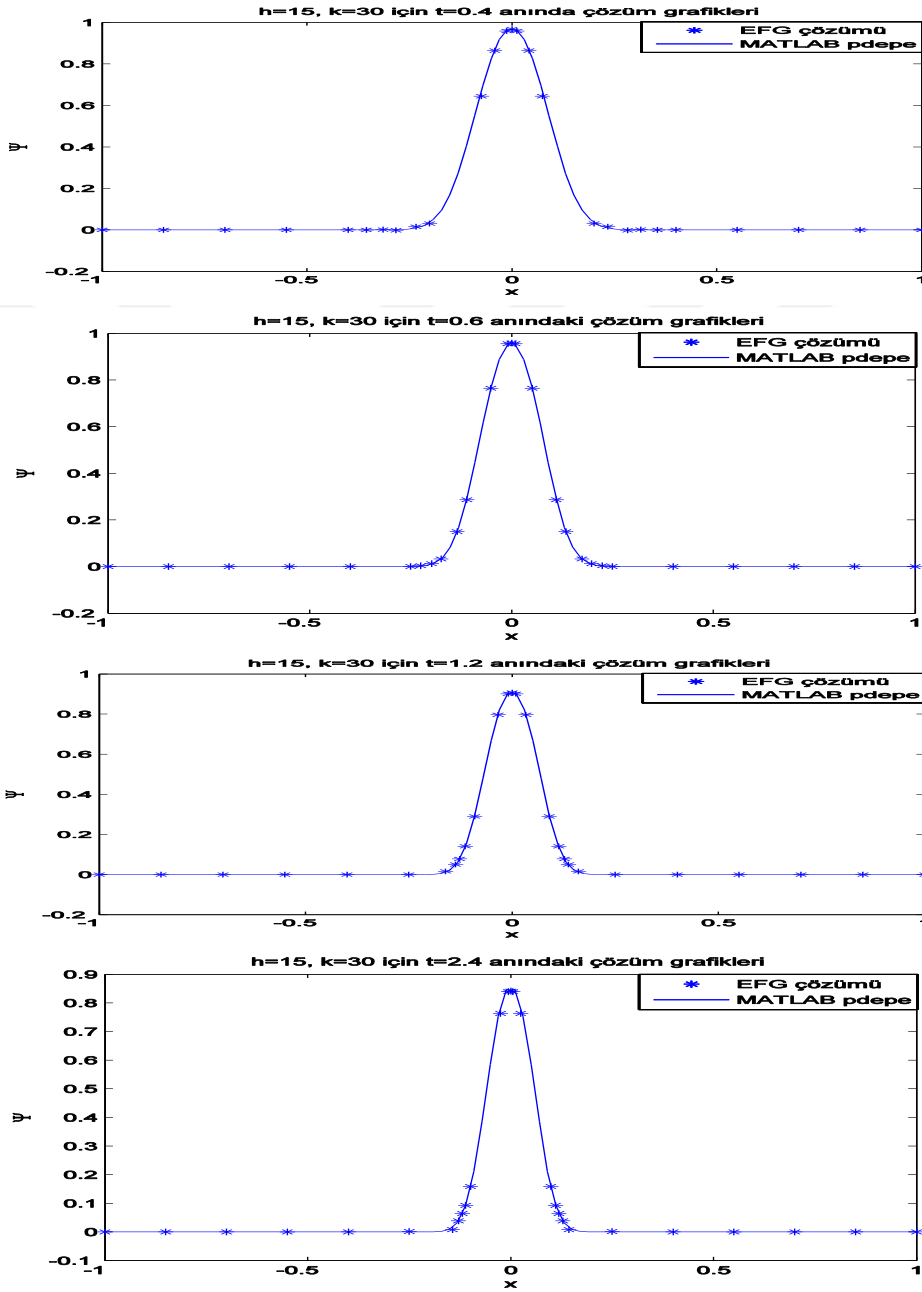
Şekil 51 ve 52'den görüleceği üzere adaptivite ile başlangıçtaki düğüm noktaları ikinci türevin büyük olduğu bölgelere kaydırılmış olup adaptif çözüm ile MATLAB pdepe çözümlerinin sonuçları ilgili zaman değerlerinde birbiri ile uyumludur.

Farklı  $h$  ve  $k$  parametre değerlerinde çözüm grafiklerini incelemek için  $h = 10, k = 15$  alalım. Bu durumda  $[0,4.6]$  aralığında 0.2 ve 0.4 zamanlarında iki adaptivite uygulanır ve Şekil 53'deki çözüm grafikleri elde edilir.



Şekil 53.  $h = 10, k = 15$  parametre değerleri için (122) probleminin  $r$ -adaptif çözümleri

Büyük  $h$  ve  $k$  değerlerinde çözüm grafikleri sıfır noktası komşuluğunda hızlı değişim gösterir. Bu durumda adaptif yöntemin sonuçlarını gözlemlemek için  $k = 30, h = 15$  alalım. Bu takdirde 0.2, 0.4, 1 ve 2.2 zaman değerlerinde dört kez adaptivite uygulanır ve Şekil 54'deki çözüm grafikleri elde edilir.



Şekil 54.  $h = 30, k = 15$  parametre değerleri için (122) probleminin  $r$ -adaptif çözümleri

Farklı  $h$  ve  $k$  değerleri için elde edilen adaptif çözüm grafiklerinden görüleceği üzere  $r$ -adaptif yöntem ile düğüm noktaları problemin hızlı değişim gösterdiği bölgeye yığılmış olup sayısal çözümler birbirleriyle uyumludur.

### 3.2.4. Konveksiyon Problemleri İçin Adaptivite

Kesim 3.2.3'deki düğüm noktalarının yerlerinin değiştirilmesi ile yapılan adaptivite, sadece konveksiyon terimi içeren kısmi diferensiyel denklemlere uygulanamamaktadır. Çünkü difüzyon terimi mevcut olmadığından yayılım gerçekleşmeyecek ve başlangıçtaki çözüm her bir zaman anında belirli bir hızda bozulmadan taşınacaktır. Bu durumda adaptivitenin uygulanacağı zamanı belirleyen parametre

$$\frac{|M_{yeni} - M_{eski}|}{M_{eski}}$$

herhangi bir zaman anında aynı değere sahip olacaktır. Dolayısı ile başlangıçtaki adaptif ağ hiç değiştirilmeyecektir. Fakat konveksiyon teriminden dolayı taşınım olacağından problem için başlangıçta alınan ağ ilerleyen zaman değerlerinde kötü sonuçların elde edilmesine neden olacaktır. Bu yüzden konveksiyon problemlerinde farklı bir adaptiviteye ihtiyaç vardır.

Konveksiyon problemlerinde uygulayacağımız adaptivite Kesim 3.1.11'de (ALG-3) algoritması ile verilen ve sisteme yeni düğüm noktaları eklenmesi ile yapılan  $h$ -adaptivitedir. Bu adaptivite belirli zaman aralıklarında probleme uygulanarak çözüm grafikleri elde edilmektedir. Bu yöntemde ikinci türev yaklaşımı sonlu farklar yöntemi ile elde edilerek 2. türevin çok küçük olduğu bölgelerde maksimum ağ uzunluğu, 2. türevin çok büyük olduğu bölgelerde minimum ağ uzunluğu kullanılmaktadır. Diğer bölgelerde ise önerilen adaptif yöntem ile düğüm noktaları oluşturulmaktadır.

#### Örnek 1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0, x \in [-10, 10], v \in \mathbb{R}$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}$$

problemini göz önüne alalım. Problemin zayıf şekli  $w$  test fonksiyonu olmak üzere

$$\int_{-10}^{10} \frac{\partial u}{\partial t} w dx + v \int_{-10}^{10} \frac{\partial u}{\partial x} w dx = 0$$

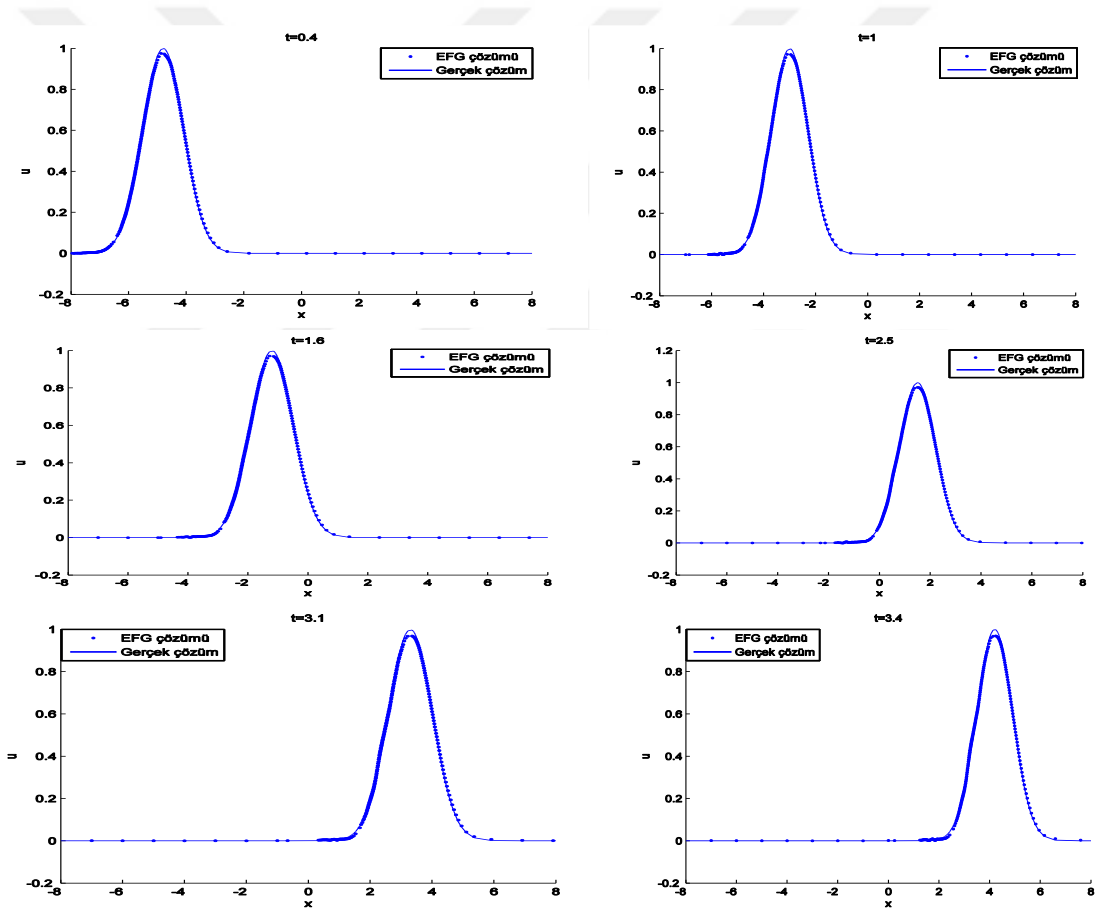
dir. Problemin çözümü  $u(x,t), v > 0$  hızıyla sağa doğru hareket ettiğinden dolayı adaptivitenin uygulanma zamanı bu parametreye göre belirlenebilir. Bu çalışmada adaptivite zamanı olarak  $\delta \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\frac{\delta}{v}$$

seçilmektedir. Bu takdirde  $v = 3, \delta = 0.9$  olarak seçilirse probleme adaptivite 0.3 adım uzunlukları ile uygulanır. Ayrıca önerilen adaptif algoritmadaki parametreler

$$w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{1}{2}, w_3 = \frac{1}{4}, \varepsilon = \frac{1}{100}$$

olarak seçilmesi durumunda Şekil 55'deki çözüm grafikleri elde edilir.



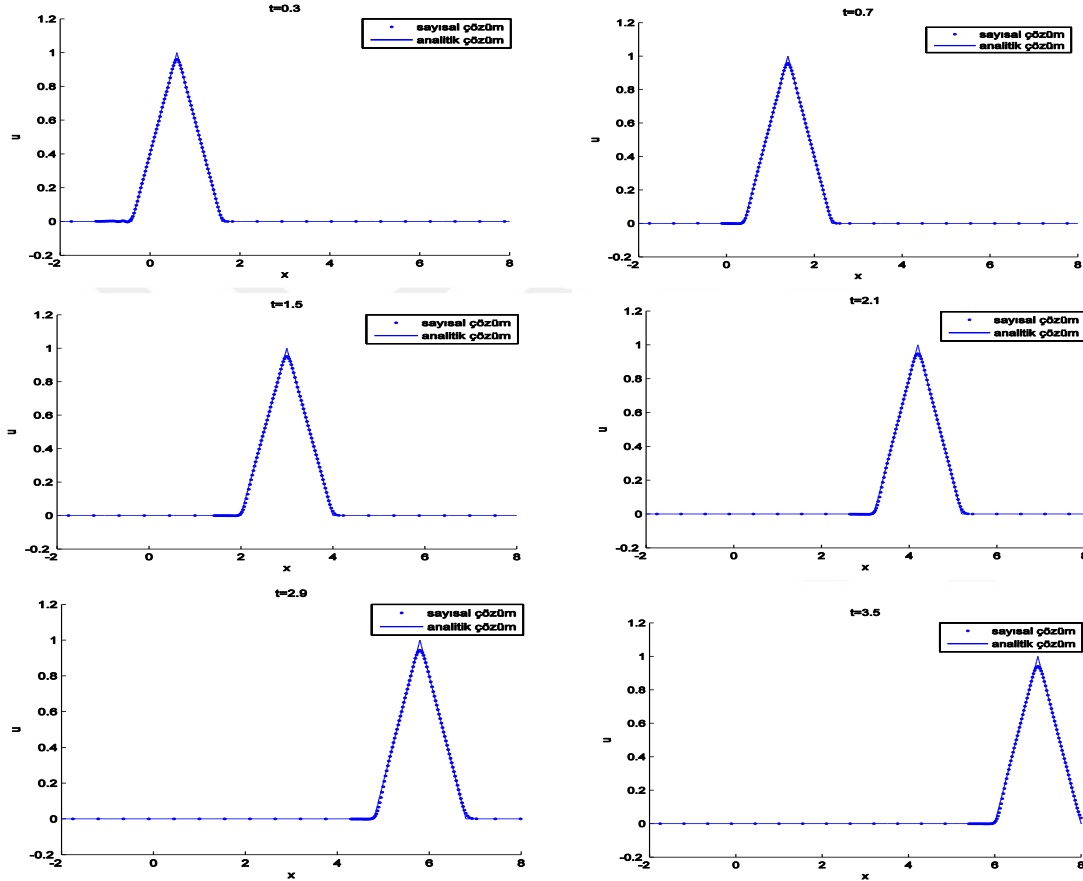
Şekil 55.Örnek 1'deki için  $h$ -adaptif çözüm grafikleri

Şekil 55'den görüleceği üzere çözümler birbirine uyumlu olup ikinci türevin fazla olduğu bölgelerde çok nokta alınmış, az olduğu bölgelerde maksimum ağ genişliği kullanılmıştır.

**Örnek 2.** Örnek 1'deki problemde başlangıç değeri olarak

$$u(x, 0) = \begin{cases} x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ -x + 2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak seçelim. Bu durumda 1. örnekteki parametreler ile Şekil 56'daki çözüm grafikleri elde edilir.



Şekil 56. Örnek 2 için  $h$ -adaptif çözüm grafikleri

Çözümlerden adaptif yöntemin düğüm noktalarını problemin 2. türevinin fazla olduğu bölgeye yığıldığı ve böylece gerçek çözümle uyumlu grafiklerin elde edildiği görülür.

**Örnek 3.**  $u_t + vu_x = ku_{xx}$ ,  $-\infty \leq x \leq \infty$ ,  $t \geq 0$ ,  $k, v$ : sabit

şeklinde verilen difüzyon-konveksiyon denklemini ele alalım. Problemin başlangıç koşulu ise

$$u(x, 0) = 1 - Heaviside(x)$$

olarak verilsin. Bu takdirde problemin gerçek çözümü

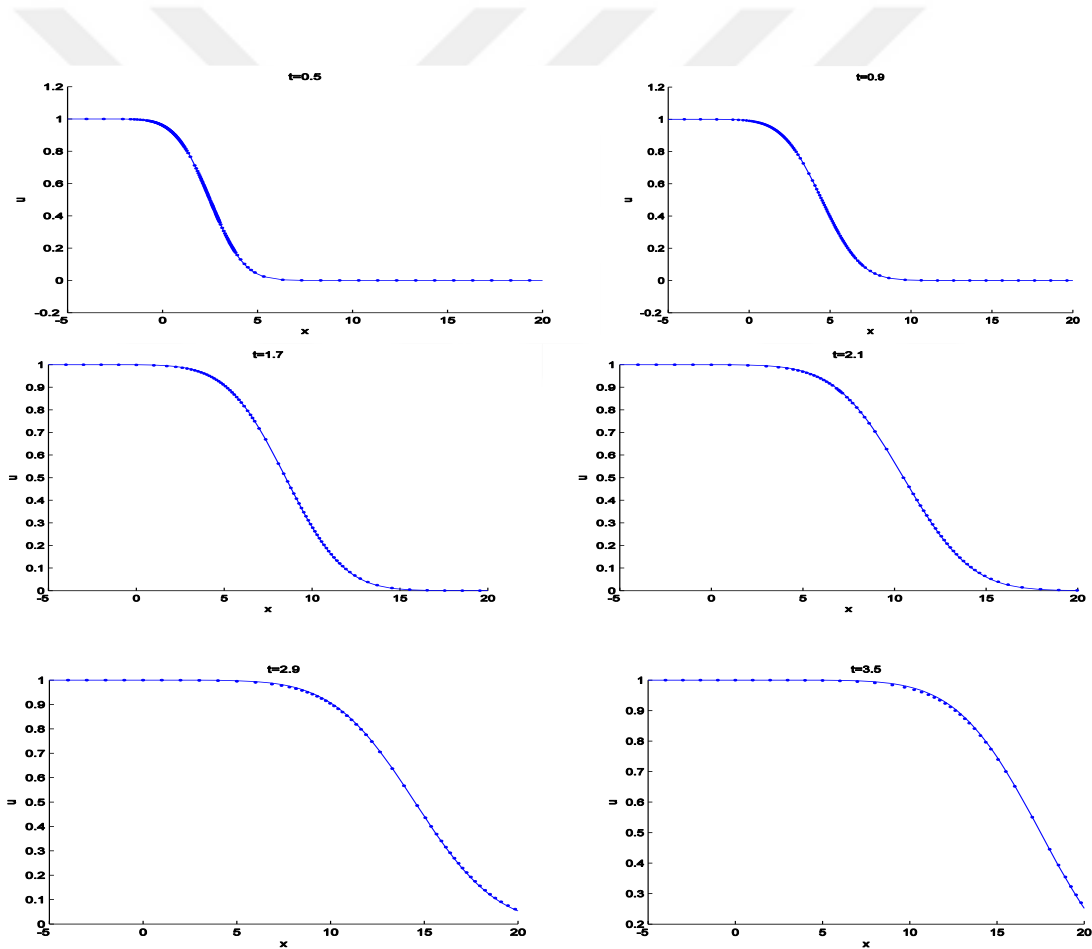


$$u(x, t) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{v - xt}{2\sqrt{kt}}\right), & x < vt \\ \operatorname{erfc}\left(\frac{x - vt}{2\sqrt{kt}}\right), & x \geq vt \end{cases}$$

dir(Farlow,1993). Burada

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt; \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

dir. Bu takdirde çözümler  $v$  hızı ile taşındığı için probleme adaptivitenin uygulanma zamanı olarak  $1/v$  seçilebilir. Burada Örnek 1'deki  $\delta$  parametresi 1 olarak seçilmiştir. Bu takdirde  $v = 5, k = 3$  için adaptif yöntem  $\Delta t = 0.2$  aralıklarla uygulanarak Şekil 57'deki çözüm grafikleri elde edilir.



Şekil 57.  $v = 5, k = 3$  için bazı zaman değerlerinde  $h$ -adaptif çözüm grafikleri

Şekil 57 konveksiyon teriminin baskın olduğu çözüm grafiklerini göstermektedir. Adaptif yöntem düğüm noktalarını fonksiyonun hızlı değişim gösterdiği bölgelere yığarak gerçek çözümle uyumlu grafikler elde edilmiştir.

### 3.3. 2 Boyutlu Uzayda Ağsız Yöntem

#### 3.3.1. 2 Boyutlu Uzayda Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi

Kesim 1.5'de 1 boyutlu uzayda hareketli en küçük kareler yöntemine değinilmiştir. Bu bölümde ise 1 boyutlu uzayda yapılan işlemler 2 boyutlu uzaya genişletilmektedir. 1 boyutlu uzayda (14)'de tanımlanan iç çarpıma benzer olarak 2 boyutlu uzayda hareketli en küçük kareler yönteminde iç çarpım

$$\langle f, g \rangle_{w_z} := \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) g(x_i, y_i) w(x_i, y_i, z), z \in \mathbb{R}^2 \text{ sabit} \quad (124)$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısı ile yaklaşım uzayı

$$\Pi_d^s = \langle p_1, p_2, \dots, p_m \rangle$$

olmak üzere 2 boyutlu uzayda yaklaşım

$$u(x, y, z) = \sum_{j=1}^m c_j(z) p_j(x, y), z \in \mathbb{R}^2 \quad (125)$$

şeklinde araştırılır. Burada  $c_j(z), j = 1, 2, \dots, m$  'ler bilinmeyen fonksiyonlardır.

$\Pi_d^s$  uzayında verilen bir  $f$  fonksiyonuna en iyi yaklaşımı bulalım.

Kesim 1.5'den bilindiği üzere  $\| \cdot \|_{w_z}$ , (124)'de tanımlanan iç çarpımın ürettiği norm olmak üzere hareketli en küçük kareler yönteminde

$$\|f - u(\cdot, \cdot, z)\|_{w_z} \quad (126)$$

normu minimize edilerek  $c_j(z)$  bilinmeyen fonksiyonları belirlenir. Buradan normal eşitlik (18) ile

$$A(z)c(z) = f_p(z) \quad (127)$$

olarak bulunur. Burada

$$A_{jk}(z) = \langle p_j, p_k \rangle_{w_z} = \sum_{i=1}^n p_j(x_i, y_i) p_k(x_i, y_i) w(x_i, y_i, z)$$

olup bilinmeyenlerin oluşturduğu vektör

$$c(z) = [c_1(z) \quad c_2(z) \quad \cdots \quad c_m(z)]^T$$

dir. Sağ yan vektörü ise

$$f_p(z) = [\langle f, p_1 \rangle_{w_z} \quad \langle f, p_2 \rangle_{w_z} \quad \cdots \quad \langle f, p_m \rangle_{w_z}]^T$$

şeklindedir. Burada  $n$ ,  $z$ 'nin destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktası sayısı,  $m$  ise bilinmeyen sayısıdır.

Eğer 2 boyutlu uzayda

$$\Pi_d^s = \langle 1, x, y \rangle$$

lineer taban fonksiyonları seçilirse  $A$  matrisinin ve  $f_p$  sağ yan vektörünün genel ifadeleri

Kesim 1.5 Örnek 2'den

$$A(z) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w(x_i, y_i, z) & \sum_{i=1}^n x_i w(x_i, y_i, z) & \sum_{i=1}^n y_i w(x_i, y_i, z) \\ \sum_{i=1}^n x_i w(x_i, y_i, z) & \sum_{i=1}^n x_i^2 w(x_i, y_i, z) & \sum_{i=1}^n x_i y_i w(x_i, y_i, z) \\ \sum_{i=1}^n y_i w(x_i, y_i, z) & \sum_{i=1}^n x_i y_i w(x_i, y_i, z) & \sum_{i=1}^n y_i^2 w(x_i, y_i, z) \end{bmatrix} \quad (128)$$

$$f_p(z) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) w(x_i, y_i, z) \\ \sum_{i=1}^n x_i f(x_i, y_i) w(x_i, y_i, z) \\ \sum_{i=1}^n y_i f(x_i, y_i) w(x_i, y_i, z) \end{bmatrix} \quad (129)$$

olarak bulunur.

**Not.** 1 boyutlu uzayda olduğu gibi 2 boyutlu uzayda da ağırlık fonksiyonları  $|z - \mathbf{X}_i|$ 'nin fonksiyonu olduğu için bundan sonraki kısımlarda ağırlık fonksiyonları  $w(z - \mathbf{X}_i)$  şeklinde gösterilmektedir. Burada,  $\mathbf{X}_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 'dir.

### 3.3.2. 2 Boyutlu Uzayda Şekil Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

1 boyutlu uzayda şekil fonksiyonlarının elde edilmesindeki genel yapı 2 veya 3 boyutlu uzayda da benzerlik gösterir. Fakat 1 boyutlu uzaydaki  $x$  değişkeni 2 boyutta  $\mathbf{X}^T = [x \ y]$  vektörü şeklindedir.

2 boyutlu uzayda ağırsız yöntemlerde lineer yaklaşım (20)'ye benzer şekilde

$$u^h(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = a_0(\mathbf{z}) + a_1(\mathbf{z})x + a_2(\mathbf{z})y = [1 \ x \ y] \begin{bmatrix} a_0(\mathbf{z}) \\ a_1(\mathbf{z}) \\ a_2(\mathbf{z}) \end{bmatrix} = p^T(\mathbf{X})a(\mathbf{z}) \quad (130)$$

olarak araştırılır. Burada  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$  olup

$$p(\mathbf{X}) = [1 \ x \ y]^T \quad (131)$$

dir. Bu takdirde normal eşitlik (127) ile

$$A_h(\mathbf{z})a(\mathbf{z}) = f_p(\mathbf{z}) \quad (132)$$

şeklindedir. Burada  $A_h$  matrisi  $\mathbf{X}_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ 'ler  $\mathbf{z}$ 'nin destek bölgesindeki düğüm noktaları olmak üzere

$$A_h(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_i) & \sum_{i=1}^n x_i w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_i) & \sum_{i=1}^n y_i w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_i) \\ \sum_{i=1}^n x_i w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_i) & \sum_{i=1}^n x_i^2 w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_i) & \sum_{i=1}^n x_i y_i w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_i) \\ \sum_{i=1}^n y_i w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_i) & \sum_{i=1}^n x_i y_i w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_i) & \sum_{i=1}^n y_i^2 w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_i) \end{bmatrix} \quad (133)$$

olup sağ yan vektörü ise (129) ile

$$f_p(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_i)u_i \\ \sum_{i=1}^n x_i w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_i)u_i \\ \sum_{i=1}^n y_i w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_i)u_i \end{bmatrix} \quad (134)$$

dir.  $u_i$ 'ler ise düğüm parametreleridir. 1 boyutta yapılan işlemlere benzer olarak  $f_p$  vektörü

$$B_h(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_1) & w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_2) & \dots & w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_n) \\ x_1 w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_1) & x_2 w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_2) & \dots & x_n w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_n) \\ y_1 w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_1) & y_2 w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_2) & \dots & y_n w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_n) \end{bmatrix} \quad (135)$$

ve

$$u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T \quad (136)$$

şeklinde iki matrisin çarpımı şeklinde yazılabilir. Buradan bilinmeyenlerin oluşturduğu  $a(\mathbf{z})$  vektörü 1 boyutlu uzayda olduğu gibi

$$a(\mathbf{z}) = A_h^{-1}(\mathbf{z})B_h(\mathbf{z})u \quad (137)$$

olarak bulunur. Sayısal yaklaşım ise

$$u^h(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = p^T(\mathbf{X})A_h^{-1}(\mathbf{z})B_h(\mathbf{z})u \quad (138)$$

şeklindedir. Eğer

$$\Phi_h(\mathbf{X}, \mathbf{z}) := p^T(\mathbf{X})A_h^{-1}(\mathbf{z})B_h(\mathbf{z}) \quad (139)$$

olarak tanımlanırsa (130)'dan sayısal yaklaşım

$$u^h(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = \Phi_h(\mathbf{X}, \mathbf{z})u \quad (140)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\Phi_h(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = [\phi_1^h(\mathbf{X}, \mathbf{z}) \phi_2^h(\mathbf{X}, \mathbf{z}) \cdots \phi_n^h(\mathbf{X}, \mathbf{z})]$$

şekil fonksiyonlarıdır. 1 boyutlu uzaydaki yaklaşıma benzer olarak şekil fonksiyonlarının toplamı ifadesi

$$\phi_i^h(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^2 p_j(\mathbf{X}) \left( A_n^{-1}(\mathbf{z}) B_h(\mathbf{z}) \right)_{ji} = p^T(\mathbf{X}) A_n^{-1}(\mathbf{z}) (B_h(\mathbf{z}))_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (141)$$

dir(Dolbow ve Belytschko, 1998).

Şekil fonksiyonlarının elde edilişi 1 boyutlu uzaya benzer iken ağırlık fonksiyonlarının seçiminde farklılık vardır. Ağırlık fonksiyonları ilgili detaylı bilgi aşağıda verilmektedir.

### 3.3.3. 2 Boyutlu Uzayda Ağırlık Fonksiyonları

2 boyutlu uzayda bir düğümün etki alanı, problemin çözüm bölgesi içerisinde bir alandır. Bu alanın şeklinin nasıl seçileceği keyfidir. Bununla birlikte, dikdörtgensel veya üçgensel bölgeler en çok kullanılanlarıdır.

Bu çalışmada dikdörtgensel etki alanına sahip olan ağırlık fonksiyonları kullanılmaktadır. Bu ağırlık fonksiyonları keyfi bir noktada

$$w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_i) \equiv w_i(\mathbf{z}) = w(r_x) \cdot w(r_y) = w_i^x \cdot w_i^y \quad (142)$$

ile verilir. Burada,  $w(r_x)$  ve  $w(r_y)$  bir boyutlu uzayda verilen ağırlık fonksiyonları olup  $r_x$  ve  $r_y$  sırasıyla

$$r_x = \frac{\|x - x_i\|}{d_{mx}}, r_y = \frac{\|y - y_i\|}{d_{my}} \quad (143)$$

dir. (143)'deki  $d_{mx}, d_{my}$  parametreleri bir boyuttaki gibi

$$d_{mx} = d_{max}c_{xi}, \quad d_{my} = d_{max}c_{yi} \quad (144)$$

şeklinde seçilir.  $c_{xi}$  ve  $c_{yi}$  parametreleri ise  $A_h$  matrisi singüler olmayacak şekilde seçilmelidir. Eğer düğüm noktaları arasındaki uzaklıklar eşit ise  $c_{xi}$  ve  $c_{yi}$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  yönlerindeki düğüm noktaları arasındaki uzaklık olarak alınabilir (Dolbow ve Belytschko, 1998).

Ağırlık fonksiyonlarının türevleri ise

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = \frac{dw_i^x}{dx} w_i^y, \quad \frac{\partial w_i}{\partial y} = \frac{dw_i^y}{dy} w_i^y \quad (145)$$

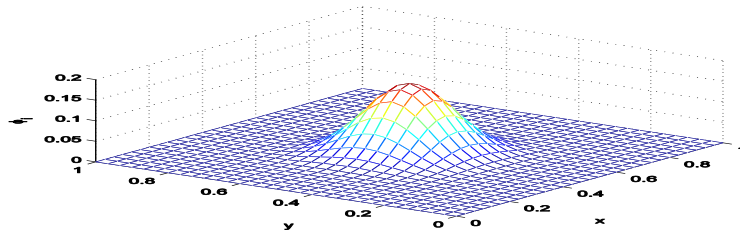
ile hesaplanır. Burada,  $\frac{dw_i^x}{dx}$  ve  $\frac{dw_i^y}{dy}$  ise (48)'deki  $r$  değişkeninin sırasıyla  $r_x$  ve  $r_y$  ile yer değiştirmesidir. Yani,

$$\frac{dw_i^x}{dx} = \begin{cases} (-8r_x + 12r_x^2) \operatorname{sgn}(x - x_i), & r_x \leq 1/2 \\ (-4 + 8r_x - 4r_x^2) \operatorname{sgn}(x - x_i), & \frac{1}{2} < r_x \leq 1 \\ 0, & r_x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{dw_i^y}{dy} = \begin{cases} (-8r_y + 12r_y^2) \operatorname{sgn}(y - y_i), & r_y \leq 1/2 \\ (-4 + 8r_y - 4r_y^2) \operatorname{sgn}(y - y_i), & \frac{1}{2} < r_y \leq 1 \\ 0, & r_y > 1 \end{cases}$$

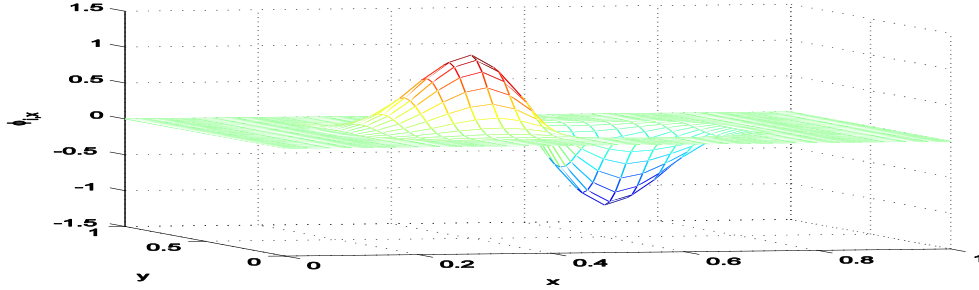
dir.

2 boyutlu uzaydaki şekil fonksiyonlarının grafiklerini gözlemlemek için  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$  bölgesini göz önüne alalım.  $[0,1]$  aralıkları eşit uzaklıklı 10'ar adet alt aralıklara bölündüğünü kabul edelim. Bu aralıkların  $x$  ve  $y$  yönlerindeki uç noktaları düğüm noktaları olsun. Bu takdirde  $(0.5,0.5)$  merkezli düğüm noktasındaki şekil fonksiyonunun grafiği Şekil 58'deki gibidir.

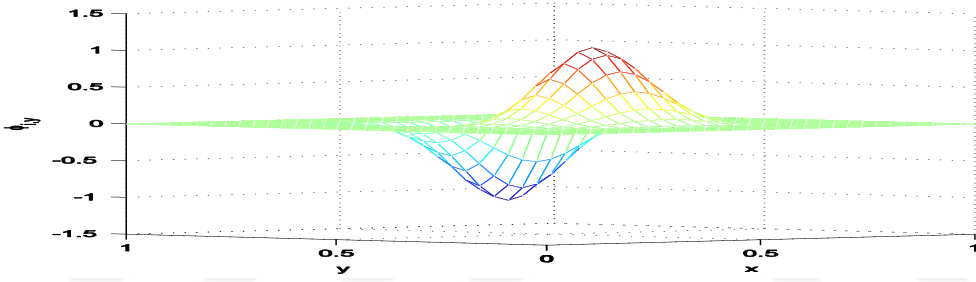


Şekil 58.  $(0.5,0.5)$  merkezli düğüm noktasındaki şekil fonksiyonu

Şekil fonksiyonunun  $x$  ve  $y$  değişkenlerine göre türevlerinin grafiği ise Şekil 59 ve 60'daki gibidir.



Şekil 59. (0.5,0.5) merkezli düğüm noktasındaki şekil fonksiyonunun  $x$ 'e göre türevi



Şekil 60. (0.5,0.5) merkezli düğüm noktasındaki şekil fonksiyonunun  $y$ 'ye göre türevi

### 3.3.4. Şekil Fonksiyonlarının Etkin Şekilde Hesaplanması

Şekil fonksiyonlarının hesaplanması için (139)'daki  $A_h^{-1}$  matrisinin hesaplanması yerine  $A_h x = b$  tipindeki bir lineer sistemin çözümü gerekir. Bunun için (139) bağıntısını

$$\Phi_h(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = p^T(\mathbf{X})A_h^{-1}(\mathbf{z})B_h(\mathbf{z}) = \gamma^T(\mathbf{X}, \mathbf{z})B_h(\mathbf{z}) \quad (146)$$

şeklinde yazalım. (146)'dan

$$A_h(\mathbf{z})\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = p(\mathbf{X}) \quad (147)$$

elde edilir. (147) denklem sisteminden bilinmeyen  $\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{z})$ 'yi hesaplamak için  $A_h(\mathbf{z})$  matrisinin  $LU$  ayrışımı yapılır. Buradan



$$L(\mathbf{z})U(\mathbf{z})\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = p(\mathbf{X}) \quad (148)$$

sistemi elde edilir. (148) denklem sisteminde

$$Y(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = U(\mathbf{z})\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{z})$$

olarak alınır

$$\begin{aligned} L(\mathbf{z})Y(\mathbf{X}, \mathbf{z}) &= p(\mathbf{X}) \\ U(\mathbf{z})\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{z}) &= Y(\mathbf{X}, \mathbf{z}) \end{aligned} \quad (149)$$

elde edilir. (149)'daki üçgenel sistemlerin çözülmesi ile aranan  $\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{z})$  vektörü belirlenir.

$u^h(\mathbf{X}, \mathbf{z})$  yaklaşımının türevini elde etmek için ise  $\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{z})$ 'nin türevi hesaplanmalıdır. Bunun için (147)'nin her iki tarafının  $x$ 'e göre türevi alınır

$$\frac{\partial(A_h(\mathbf{z}))}{\partial x}\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{z}) + A_h(\mathbf{z})\frac{\partial(\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{z}))}{\partial x} = \frac{\partial(p(\mathbf{X}))}{\partial x}$$

elde edilir. Eğer

$$\frac{\partial(\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{z}))}{\partial x} = \gamma_x(\mathbf{X}, \mathbf{z}), \quad \frac{\partial(p(\mathbf{X}))}{\partial x} = p_x(\mathbf{X})$$

şeklinde gösterilirse

$$\frac{\partial(A_h(\mathbf{z}))}{\partial x}\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{z}) + A_h(\mathbf{z})\gamma_x(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = p_x(\mathbf{X})$$

bulunur. Buradan

$$A_h(\mathbf{z})\gamma_x(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = p_x(\mathbf{X}) - \frac{\partial(A_h(\mathbf{z}))}{\partial x}\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{z}) \quad (150)$$

elde edilir. (150) denklem sisteminden aranan  $\gamma_x(\mathbf{X}, \mathbf{z})$  ise  $A_h$  matrisinin  $LU$  ayrışımı yardımı ile hesaplanır. Buradan şekil fonksiyonunun  $x$  değişkenine göre türevi

$$\frac{\partial(\Phi_h(\mathbf{X}, \mathbf{z}))}{\partial x} \equiv \Phi_x(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = \gamma_x^T(\mathbf{X}, \mathbf{z})B_h(\mathbf{z}) + \gamma^T(\mathbf{X}, \mathbf{z})\frac{\partial(B_h(\mathbf{z}))}{\partial x} \quad (151)$$

şeklinde elde edilir(Dolbow ve Belytschko, 1998). Benzer şekilde  $\Phi_h(\mathbf{X}, \mathbf{z})$ 'nin  $y$  değişkenine göre türevi ise

$$\frac{\partial(\Phi_h(\mathbf{X}, \mathbf{z}))}{\partial \mathbf{y}} \equiv \Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = \gamma_{\mathbf{y}}^T(\mathbf{X}, \mathbf{z})B_h(\mathbf{z}) + \gamma^T(\mathbf{X}, \mathbf{z}) \frac{\partial(B_h(\mathbf{z}))}{\partial \mathbf{y}} \quad (152)$$

ile hesaplanır.

### 3.3.5. Dügüm Noktalarının Etki Alanları

1 boyutlu uzayda şekil fonksiyonları için genel bir formül elde edilmiş olup düzgün dağıtılmış düğüm noktaları için tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonlarının öteleme özelliğine sahip olduğu ve  $d_{max} = 2$  seçimi için şekil fonksiyonları ile ağırlık fonksiyonlarının birbirlerine eşit olduğu ispatlanmıştır. Benzer özellikler 2 boyutlu uzaydaki şekil fonksiyonları için de geçerlidir. Bu özellikleri ispat etmeden önce 2 boyutlu uzayda şekil fonksiyonları için bir noktanın destek bölgesi hakkında bilgi vererek bu bölümde kullanacağımız bazı kümeleri tanımlayalım.

**Notasyon.** 1 boyutlu uzaydaki çalışmalardan bilindiği üzere hareketli en küçük kareler yönteminde yerel ve global değişkenler mevcuttur. 2 boyutlu uzayda tanımlanan değişkenler ile yerel değişkenin  $\mathbf{z}$  ve global değişkenin  $\mathbf{X}$  olduğu açıktır. Sadece yerel değişkenin tanımlı olduğu bölgelerde şekil fonksiyonlarının değerleri sıfırdan farklı olduğundan bu bölgelerde yerel değişkenler, global değişkenlere eşit seçilir. 1 boyutlu uzayda yapıldığı gibi 2 boyutlu uzayda da anlam karmaşasına sebep olmayacağı düşüncesi ile  $\mathbf{z}$  yerel değişkenini vurgulamayarak  $\phi_i^h(\mathbf{X}, \mathbf{z})$  şekil fonksiyonunun sadece  $\mathbf{z}$  yerel değişkenin fonksiyonu olarak düşüneceğiz ve  $\mathbf{z}$  yerine de  $\mathbf{X}$  değişkenini kullanacağız. Bu yüzden bundan sonraki kısımlarda şekil fonksiyonlarını kısaca  $\phi_i^h(\mathbf{X}, \mathbf{z}) \equiv \phi_i^h(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \equiv \phi_i^h(\mathbf{X})$  şeklinde göstereceğiz. Benzer şekilde yaklaşım fonksiyonu kısaca  $u^h(\mathbf{X}, \mathbf{z}) \equiv u^h(\mathbf{X})$ , ağırlık fonksiyonları ise  $w(\mathbf{z} - \mathbf{X}_i) \equiv w_i(\mathbf{z})$  olarak ifade edeceğiz.

Şekil fonksiyonlarının keyfi bir  $(x, y)$  noktasındaki değerini hesaplamak için (133)'deki  $A_h$  ve (135)'deki  $B_h$  matrislerinin hesaplanması gerekir. Ağırlık fonksiyonlarının tanımından görüleceği üzere her bir düğüm noktası bir etki alanına sahip olup bu bölgenin içerisindeki noktalarda ağırlık fonksiyonlarının değeri sıfırdan farklıdır. 1 boyutlu uzayda Teorem 1'de  $x_i$  düğüm noktası merkezli şekil fonksiyonunun etki alanının

$x_i$  noktasının  $d_{mi}$  komşuluğu olduğu gösterilmişti. 2 boyutlu uzayda ise Kesim 3.3.3'de tanımlanan ağırlık fonksiyonları ile  $x_i$  düğüm noktası merkezli şekil fonksiyonunun etki alanı bir dikdörtgensel bölge olup bu bölge Teorem 11'deki gibidir.

**Teorem 11.** Problemin tanım bölgesi  $\Omega$  olmak üzere  $\mathbf{X}_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$  merkezli şekil fonksiyonunun etki alanı

$$\Omega_i = [x_i - d_{mx}, x_i + d_{mx}] \times [y_i - d_{my}, y_i + d_{my}] \cap \Omega$$

dir.

**İspat.** (141) ile keyfi bir  $\mathbf{X} = (x, y)$  noktasındaki şekil fonksiyonları

$$\phi_i^h(\mathbf{X}) = p^T(\mathbf{X})A_h^{-1}(\mathbf{X})(B_h(\mathbf{X}))_i = p^T(\mathbf{X})A_h^{-1}(\mathbf{X}) \begin{bmatrix} w_i(\mathbf{X}) \\ x_i w_i(\mathbf{X}) \\ y_i w_i(\mathbf{X}) \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde tanımlandığından  $w_i(\mathbf{X}) \neq 0$  olduğu durumda şekil fonksiyonlarının değerleri sıfırdan farklıdır. Kesim 3.3.3'de tanımlanan ağırlık fonksiyonları ile  $w_i(\mathbf{X}) \neq 0$  olduğu bölge

$$r_x \leq 1 \wedge r_y \leq 1$$

dir.  $r_x$  ve  $r_y$ , 1 boyutlu uzaydaki gibi tanımlandığından Teorem 1 ile

$$x_i - d_{mx} \leq x \leq x_i + d_{mx} \wedge y_i - d_{my} \leq y \leq y_i + d_{my}$$

için  $w_i(\mathbf{X}) \neq 0$ 'dır. Son eşitsizliklerin sağlandığı bölge ise

$$\Omega_i = [x_i - d_{mx}, x_i + d_{mx}] \times [y_i - d_{my}, y_i + d_{my}]$$

dikdörtgensel bölgesidir.

1 boyutlu uzayda verilen destek bölgesi tanımı ise 2 boyutlu uzayda aşağıdaki gibi verilir.

**Tanım 8.**  $\Omega$  tanım bölgesinde seçilen bir  $\mathbf{X} = (x, y)$  noktası için

$$\Omega_d^{\mathbf{X}} = ([x - d_{mx}, x + d_{mx}] \times [y - d_{my}, y + d_{my}]) \cap \Omega$$

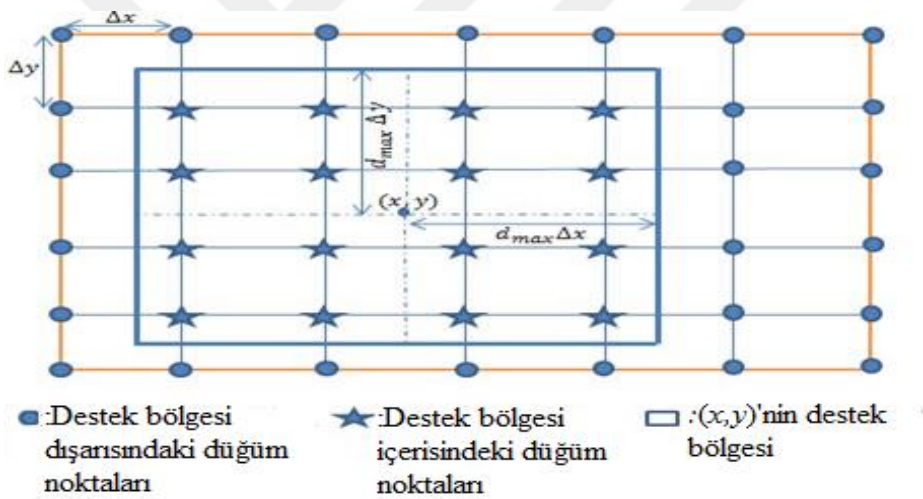
bölgesine  $\mathbf{X}$  noktasının "destek bölgesi" adı verilir.

Tanım 8 ve Teorem 11'den görüleceği üzere  $\mathbf{X} = (x, y)$  noktası olarak  $i$ . düğüm noktası,  $\mathbf{X}_i = (x_i, y_i)$ , alınırsa  $\mathbf{X}_i$  noktasının destek bölgesi ile etki alanı birbirine eşittir. Fakat etki alanı sadece düğüm noktaları için geçerli iken destek bölgesi tanım bölgesi içerisindeki herhangi bir nokta için geçerlidir.

Kesim 3.1.1'den bilindiği üzere herhangi bir  $\mathbf{X} = (x, y)$  noktası için  $w_i(\mathbf{X}) \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ise  $\mathbf{X}$  noktası  $\mathbf{X}_i$  merkezli ağırlık fonksiyonu ile ilişkili noktadır. Ayrıca

Önerme 2'den  $\mathbf{X}$  noktası sadece destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktası merkezli ağırlık fonksiyonları ile ilişkilidir. Önerme 1 ile  $\mathbf{X}_i$  düğüm noktası  $\mathbf{X}$ 'in destek bölgesi içerisinde olması durumunda  $\phi_i^h(\mathbf{X}) \neq 0$  olduğundan  $\mathbf{X}$  noktasında şekil fonksiyonlarının değerlerinin belirlenmesi için bu noktanın destek bölgesi ve bu nokta ile ilişkili ağırlık fonksiyonlarının belirlenmesi önemlidir.

Tanım 8 ile bir  $\mathbf{X} \in \Omega$  noktasının destek bölgesini belirleyen parametreler  $d_{mx}$  ve  $d_{my}$ 'dir. Düzgün düğüm noktaları için  $c_{xi}$  ve  $c_{yi}$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  yönündeki düğüm noktaları arasındaki uzaklığa eşit olduğundan  $d_{mx}$  ve  $d_{my}$ 'yi belirleyen parametre  $d_{max}$ 'dir. 1 boyutlu uzayda yapıldığı gibi  $d_{max}$  değerini 2 olarak seçelim. Bu takdirde keyfi bir  $\mathbf{X} = (x, y)$  noktasının destek bölgesi ve bu bölge içerisindeki düğüm noktaları Şekil 61'deki gibidir.

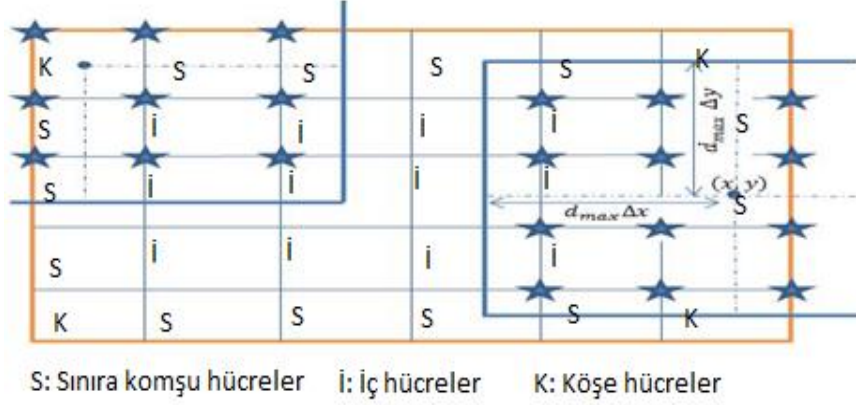


Şekil 61.  $d_{max} = 2$  için keyfi bir  $\mathbf{X} = (x, y)$  noktasının destek bölgesi

Şekil 61'de gösterilen dikdörtgenel bölge  $\mathbf{X}$  noktasının destek bölgesi olup bu bölge içerisinde kalan düğüm noktaları için  $w_i(\mathbf{X}) \neq 0$ 'dır. Yani,  $\mathbf{X}$  noktası destek bölgesi içerisindeki düğüm noktası merkezli ağırlık fonksiyonları ile ilişkili noktadır.

Öte yandan Şekil 61'den  $d_{max} = 2$  için sınıra komşu olmayan dikdörtgenel bölgede seçilen bir  $\mathbf{X}$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısının 16 olduğu görülür. Bu durum  $\mathbf{X}$ 'in bulunduğu hücreye komşu hücreler için de geçerlidir. Fakat sınıra komşu dikdörtgenel bölge içerisinde alınan noktalarda bu sayı 12'dir. Ayrıca Şekil 62'den

görülebileceği üzere köşe hücrelerde alınan  $X$  noktaları ile ilişkili ağırlık fonksiyonları sayısı 9 olup her bir köşe hücre için bu sayı aynıdır.



Şekil 62.  $d_{max} = 2$  için köşe ve sınır hücrelere etki eden düğüm noktaları

Öte yandan  $d_{max}$  değeri değiştikçe destek bölgesindeki düğüm noktaları sayısı da değişir. Örneğin,  $d_{max} = 3$  için bir iç bölgedeki herhangi bir nokta ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı 36'dır. Dolayısı ile  $d_{max}$ 'in değeri büyüdükçe şekil fonksiyonlarını hesaplamadaki işlem yükü de artar. Bu ise hesaplama süresinin artmasına neden olur. 1 boyutlu uzayda olduğu gibi bu bölümde de şekil fonksiyonlarının özellikleri yardımıyla sistem matrisini elde etmede gerekli zamanın azaltılması için bir algoritma önerilmektedir. Bu özellikleri vermeden önce bu bölümde kullanacağımız bazı kümeleri ifade edelim.

$a, b, c, d$  sabitler olmak üzere

$$\Omega = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

problemin tanım bölgesi olsun.  $[a, b]$  aralığını eşit aralıklı  $N$  adet alt aralığa,  $[c, d]$  aralığını ise  $M$  adet alt aralığa bölelim. Bu aralıkların  $x$  ve  $y$  yönlerindeki uç noktalarını sırasıyla  $x_i, i = 1, 2, \dots, N + 1$  ve  $y_j, j = 1, 2, \dots, M + 1$  ile gösterelim. Bu ayrıklaştırılmış bölge için düğüm noktaları kümesini

$$\hat{\Omega} = \{(x_i, y_j) | i = 1, 2, \dots, N + 1, j = 1, 2, \dots, M + 1\} \quad (153)$$

ile gösterelim. Herhangi bir  $(x, y)$  noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktalarının sayısını  $n$  ile ve düğüm noktalarının kümesini ise

$$\Omega^\circ(x, y) = \{X_i = (x_i, y_i) | i = 1, 2, \dots, n\} \quad (154)$$

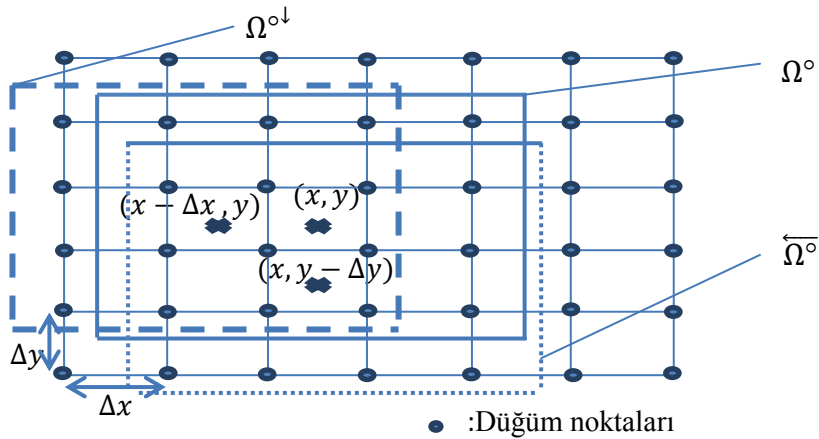
ile gösterelim. Dikkat edilirse düzgün olarak dağıtılmış düğüm noktaları için  $d_{max} \geq 2$  olduğundan  $n \geq 9$ 'dur. Ayrıca  $\Delta x$ ,  $x$  yönünde eşit olarak dağıtılmış düğüm noktaları arası uzaklık olmak üzere

$$\overline{\Omega}^\circ(x, y) = \{(x_i - \Delta x, y_i) | i = 1, \dots, m_1\} \quad (155)$$

ile  $(x - \Delta x, y)$  noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktalarının kümesini gösterelim. Burada  $m_1$ ,  $(x - \Delta x, y)$  noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktaları sayısıdır. Benzer şekilde  $\Delta y, y$  yönünde eşit olarak dağıtılmış düğüm noktaları arası uzaklık olmak üzere

$$\Omega^{\circ\downarrow}(x, y) = \{(x_i, y_i - \Delta y) | i = 1, \dots, m\} \quad (156)$$

ile  $(x, y - \Delta y)$  noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktaları kümesini gösterelim.  $m_2$ ,  $(x, y - \Delta y)$  noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktaları sayısıdır. Dikkat edilirse  $d_{max} = 2$  için sınıra yakın olmayan iç bölgelerde  $n = m_1 = m_2$  iken diğer bölgelerde  $n \neq m_1 | n \neq m_2$ 'dir. Örneğin, sağ sınıra komşu bir hücrede alınan bir noktaya etki eden düğüm noktası sayısı  $n = 12$  iken o noktanın  $\Delta x$  gerisindeki nokta sınıra komşu olmayan hücrede bir nokta olacağından bu noktaya etki eden düğüm noktası sayısı  $m_1 = 16$  olup  $m_1 \geq n$ 'dir.



Şekil 63.  $\Omega^\circ, \overline{\Omega}^\circ$  ve  $\Omega^{\circ\downarrow}$  kümelerinin elemanları

Her bir düğüm noktasında bir ağırlık fonksiyonu tanımlandığı için  $(x, y)$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonları kümeleri de tanımlanmalıdır. Herhangi bir  $(x, y)$  noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktaları kümesi  $\Omega^\circ(x, y)$  olmak üzere bu nokta ile ilişkili ağırlık fonksiyonlarının kümesi

$$W^\circ(x, y) = \{w_i(x, y) | i = 1, 2, \dots, n\}$$

olsun. Benzer şekilde  $(x - \Delta x, y)$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonlarının kümesini

$$\overline{W}^\circ(x, y) = \{w_i(x - \Delta x, y) | i = 1, 2, \dots, m_1\}$$

ve  $(x, y - \Delta y)$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonlarının kümesini

$$W^{\circ\downarrow}(x, y) = \{w_i(x, y - \Delta y) | i = 1, 2, \dots, m_2\}$$

ile gösterelim.

Ağırlık fonksiyonlarının tanımından görüleceği üzere ağırlık fonksiyonları  $x$  ve  $y$  yönlerinde öteleme özelliğini sağlar. Dolayısı ile yukarıda tanımlanan kümeler yardımıyla

$$w_i(x, y) = w_i(x - \Delta x, y), w_i(x, y) = w_i(x, y - \Delta y)$$

bağıntıları elde edilir.

### 3.3.6. Şekil Fonksiyonlarının Özellikleri

Şekil fonksiyonlarının tanımı gereği  $A_h$  matrisi tersinir olmalıdır. Bu ise etkinlik yarıçapının uygun seçimi ile sağlanır. Önerme 17 uygun etkinlik yarıçapı seçimi için  $A_h$  matrisinin tersinir olduğunu gösterir.

**Önerme 17.** Düzgün olarak dağıtılmış düğüm noktaları kümesi  $\hat{\Omega}$ , herhangi bir  $\mathbf{X} = (x, y)$  noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktalarının kümesi  $\Omega^\circ$  ve bu nokta ile ilişkili ağırlık fonksiyonları kümesi  $W^\circ$  olsun. Eğer  $n \geq 3$  ise (133) ile verilen  $A_h(\mathbf{X})$  matrisi pozitif tanımlıdır.

**İspat.**  $A_h$  matrisi alternatif olarak

$$A_h(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{X}) & \sum_{i=1}^n x_i w_i(\mathbf{X}) & \sum_{i=1}^n y_i w_i(\mathbf{X}) \\ \sum_{i=1}^n x_i w_i(\mathbf{X}) & \sum_{i=1}^n x_i^2 w_i(\mathbf{X}) & \sum_{i=1}^n x_i y_i w_i(\mathbf{X}) \\ \sum_{i=1}^n y_i w_i(\mathbf{X}) & \sum_{i=1}^n x_i y_i w_i(\mathbf{X}) & \sum_{i=1}^n y_i^2 w_i(\mathbf{X}) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_h(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{X}) & x_1 w_1(\mathbf{X}) & y_1 w_1(\mathbf{X}) \\ w_2(\mathbf{X}) & x_2 w_2(\mathbf{X}) & y_2 w_2(\mathbf{X}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n(\mathbf{X}) & x_n w_n(\mathbf{X}) & y_n w_n(\mathbf{X}) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $n$ ,  $W^\circ$  nin eleman sayısıdır. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} w_1(\mathbf{X}) & x_1 w_1(\mathbf{X}) & y_1 w_1(\mathbf{X}) \\ w_2(\mathbf{X}) & x_2 w_2(\mathbf{X}) & y_2 w_2(\mathbf{X}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n(\mathbf{X}) & x_n w_n(\mathbf{X}) & y_n w_n(\mathbf{X}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{X}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2(\mathbf{X}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_n(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}$$

olduğundan  $A_h$  matrisi

$$A_h(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{X}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2(\mathbf{X}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_n(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \quad (157)$$

şeklinde 3 matrisin çarpımı olarak ifade edilebilir.

$$C := \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}, V := \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{X}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2(\mathbf{X}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_n(\mathbf{X}) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanırsa (157)'den

$$A_h = C^T V C$$

elde edilir. Ağırlık fonksiyonlarının özellikleri ile,  $\mathbf{X} = (x, y)$  noktasının destek bölgesinde  $w_i(\mathbf{X}) > 0, i = 1, 2, \dots, n$  olduğundan  $V$  pozitif tanımlı bir matristir.  $n \geq 3$  olduğundan  $C$  matrisinin lineer bağımsız sütunlara sahip olduğu açıktır. Dolayısı ile  $C^T V C$  matrisi pozitif tanımlıdır. Gerçekten,  $\forall \mathbf{X} \neq \mathbf{0}$  için

$$\mathbf{X}^T C^T V C \mathbf{X} = (C \mathbf{X})^T V (C \mathbf{X})$$

olup  $C$  matrisi lineer bağımsız sütunlara sahip olduğundan  $C \mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ 'dır.  $V$  pozitif tanımlı olduğundan

$$(C \mathbf{X})^T V (C \mathbf{X}) > 0$$

bulunur. Dolayısı ile  $\mathbf{X}^T A_h \mathbf{X} > 0$  elde edilir. Yani,  $A_h$  matrisi pozitif tanımlıdır.

1 boyutlu uzayda olduğu gibi şekil fonksiyonlarının genel ifadesinin elde edilebilmesi için (133)'de tanımlanan  $A_h$  matrisinin determinantına ihtiyaç vardır. Önerme 18'de iki boyutlu uzayda  $|A_h|$  için genel bir formül verilmiştir.



**Önerme 18.** Düzgün olarak dağıtılmış düğüm noktaları kümesi  $\dot{\Omega}$ , herhangi bir  $\mathbf{X} = (x, y)$  noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktalarının kümesi  $\Omega^\circ(x, y)$  ve bu nokta ile ilişkili ağırlık fonksiyonları kümesi  $W^\circ(x, y)$  olsun. Bu takdirde (133) ile verilen  $A_h(\mathbf{X})$  matrisinin determinanı

$$|A_h| = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left( y_j(x_i - x_k) + y_i(x_k - x_j) + y_k(x_j - x_i) \right)^2 w_i(\mathbf{X}) w_j(\mathbf{X}) w_k(\mathbf{X})$$

dir. Burada  $n$ ,  $W^\circ$  kümesinin eleman sayısıdır.

**İspat.** (133)'de tanımlanan  $A_h$  matrisinin determinanı

$$\begin{aligned} |A_h(\mathbf{X})| &= \left( \sum_{i=1}^n w_i \right) \left( \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 w_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 w_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i w_i \right)^2 \right) \\ &\quad - \left( \sum_{i=1}^n x_i w_i \right) \left( \left( \sum_{i=1}^n x_i w_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 w_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n y_i w_i \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i w_i \right) \right) \\ &\quad + \left( \sum_{i=1}^n y_i w_i \right) \left( \left( \sum_{i=1}^n x_i w_i \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i w_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 w_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i w_i \right) \right) \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} |A_h(\mathbf{X})| &= \left( \sum_{i=1}^n w_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i^2 y_j^2 - x_i x_j y_i y_j) w_i w_j \right) \\ &\quad - \left( \sum_{i=1}^n x_i w_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_j^2 - x_j y_i y_j) w_i w_j \right) \\ &\quad + \left( \sum_{i=1}^n y_i w_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i x_j y_j - x_i^2 y_j) w_i w_j \right) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca toplamlar

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i^2 y_j^2 - x_i x_j y_i y_j) w_i w_j &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2 w_i w_j \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_j^2 - x_j y_i y_j) w_i w_j &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i y_j - x_j y_i) (y_j - y_i) w_i w_j \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i x_j y_j - x_i^2 y_j) w_i w_j &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i y_j - x_j y_i) (x_j - x_i) w_i w_j \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Gerçekten,  $i = j$  olduğu durumlarda toplamların sıfır olduğu açıktır.

Ayrıca,  $w_i w_j = w_j w_i$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $i \neq j$  olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i^2 y_j^2 - x_i x_j y_i y_j) w_i w_j &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i x_j y_i y_j) w_i w_j \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_j^2 - x_j y_i y_j) w_i w_j &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i y_j^2 + x_j y_i^2 - x_i y_i y_j - x_j y_i y_j) w_i w_j \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i x_j y_j - x_i^2 y_j) w_i w_j &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i x_j y_j + x_i x_j y_i - x_i^2 y_j - x_j^2 y_i) w_i w_j \end{aligned}$$

elde edilir. Toplamların içindeki terimler ortak paranteze alınırsa ilgili bağıntılar bulunur.

Dolayısı ile  $A_h$  matrisinin determinanı

$$\begin{aligned} |A_h(\mathbf{X})| &= \left( \sum_{i=1}^n w_i \right) \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2 w_i w_j \right) \\ &\quad - \left( \sum_{i=1}^n x_i w_i \right) \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i y_j - x_j y_i) (y_j - y_i) w_i w_j \right) \\ &\quad + \left( \sum_{i=1}^n y_i w_i \right) \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i y_j - x_j y_i) (x_j - x_i) w_i w_j \right) \\ \Rightarrow |A_h(\mathbf{X})| &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2 w_i w_j w_k \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^n (x_i y_j - x_j y_i) (y_i - y_j) x_k w_i w_j w_k \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^n (x_i y_j - x_j y_i) (x_j - x_i) y_k w_i w_j w_k \\ \Rightarrow |A_h(\mathbf{X})| &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^n \left[ (x_i y_j - x_j y_i)^2 + (x_i y_j - x_j y_i) (y_i - y_j) x_k \right. \\ &\quad \left. + (x_i y_j - x_j y_i) (x_j - x_i) y_k \right] w_i w_j w_k \end{aligned}$$

olarak elde edilir.  $k = i$  veya  $k = j$  olması durumunda determinant değerinin sıfıra eşit olduğu son bağıntıdan görülür. Ayrıca çift toplamda olduğu gibi

$$w_i w_j w_k = w_i w_k w_j = w_k w_i w_j, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j \neq k$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|A_h(\mathbf{X})| &= \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left[ (x_i y_j - x_j y_i)^2 + (x_i y_j - x_j y_i)(y_i - y_j)x_k \right. \\
&\quad + (x_i y_j - x_j y_i)(x_j - x_i)y_k + (x_i y_k - x_k y_i)^2 + (x_i y_k - x_k y_i)(y_i - y_k)x_j \\
&\quad + (x_i y_k - x_k y_i)(x_k - x_i)y_j + (x_j y_k - x_k y_j)^2 + (x_j y_k - x_k y_j)(y_j - y_k)x_i \\
&\quad \left. + (x_j y_k - x_k y_j)(x_k - x_j)y_i \right] w_i w_j w_k
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Toplam sembolünün içerisindeki terimler düzenlenirse

$$|A_h(\mathbf{X})| = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left( y_j(x_i - x_k) + y_i(x_k - x_j) + y_k(x_j - x_i) \right)^2 w_i w_j w_k$$

bulunur.

(139)'da tanımlanan şekil fonksiyonlarının tanımından görüleceği üzere şekil fonksiyonlarının açık ifadesi için  $A_h^{-1}$  matrisi hesaplanmalıdır. Lineer cebirden bilindiği üzere

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

şeklinde  $3 \times 3$ 'lük bir matrisin tersi

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

ile verilir. Dolayısı ile  $A_h$  matrisinin tersi Önerme 18'de elde edilen  $A_h$ 'in determinanti yardımıyla

$$D = A_h^{-1} = \frac{1}{|A_h(\mathbf{X})|} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada

$$d_{11} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i^2 y_j^2 - x_i x_j y_i y_j) w_i w_j$$

$$d_{12} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_i y_j - x_i y_j^2) w_i w_j$$

$$d_{13} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i x_j y_j - x_i^2 y_j) w_i w_j$$

$$d_{21} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_i y_j - x_i y_j^2) w_i w_j$$

$$d_{22} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_j^2 - y_i y_j) w_i w_j$$

$$d_{23} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_j - x_j y_j) w_i w_j$$

$$d_{31} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i x_j y_j - x_i^2 y_j) w_i w_j$$

$$d_{32} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_j - x_j y_j) w_i w_j$$

$$d_{33} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_j^2 - x_i x_j) w_i w_j$$

dir. Önerme 17'nin ispatında kullanılan toplamın özellikleri yardımıyla

$$d_{11} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2 w_i w_j$$

$$d_{12} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i y_j - x_j y_i)(y_i - y_j) w_i w_j$$

$$d_{13} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i y_j - x_j y_i)(x_j - x_i) w_i w_j$$

$$d_{21} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i y_j - x_j y_i)(y_i - y_j) w_i w_j$$

$$d_{22} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (y_i - y_j)^2 w_i w_j$$

$$d_{23} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i - x_j)(y_j - y_i) w_i w_j$$

$$d_{31} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i y_j - x_j y_i)(x_j - x_i) w_i w_j$$

$$d_{32} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i - x_j)(y_j - y_i)w_i w_j$$

$$d_{33} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i - x_j)^2 w_i w_j$$

olarak bulunur.

$A_h^{-1}$  matrisi yardımıyla (141)'de verilen şekil fonksiyonlarının genel formülü Teorem 12'deki gibi elde edilir.

**Teorem 12.** Düzgün olarak dağıtılmış düğüm noktaları kümesi  $\Omega$ , herhangi bir  $\mathbf{X} = (x, y)$  noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktalarının kümesi  $\Omega^\circ(x, y)$ , bu nokta ile ilişkili ağırlık fonksiyonları kümesi  $W^\circ(x, y)$  ve sayısı  $n$  olsun. Bu takdirde (141)'de tanımlanan  $i, i = 1, 2, \dots, n$ , şekil fonksiyonunun açık ifadesi

$$\phi_i^h(\mathbf{X}) = \frac{1}{|A_h(\mathbf{X})|} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \left( x_k y_j - x_j y_k + x(y_k - y_j) + y(x_j - x_k) \right)$$

$$(x_k y_j - x_j y_k + x_i(y_k - y_j) + y_i(x_j - x_k)) w_i(\mathbf{X}) w_j(\mathbf{X}) w_k(\mathbf{X}), 1 \leq i \leq n$$

şeklindedir. Burada  $|A_h(\mathbf{X})|$ , Önerme 18'deki  $A_h(\mathbf{X})$  matrisinin determinantıdır.

**İspat.** (141) ile

$$\phi_i^h(\mathbf{X}) = p^T(\mathbf{X}) A_h^{-1}(\mathbf{X}) (B_h(\mathbf{X}))_i, i = 1, 2, \dots, n$$

olup burada

$$p(\mathbf{X}) = [1 \ x \ y], (B_h(\mathbf{X}))_i = \begin{bmatrix} w_i(\mathbf{X}) \\ x_i w_i(\mathbf{X}) \\ y_i w_i(\mathbf{X}) \end{bmatrix}, 1 \leq i \leq n$$

dir.  $A_h^{-1}, B_i, p$  matrisleri şekil fonksiyonunda yerine yazılır ve matrislerin özellikleri kullanılırsa şekil fonksiyonları

$$\phi_i^h(\mathbf{X}) = \frac{1}{|A_h(\mathbf{X})|} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \left[ (x_k y_j - x_j y_k)^2 + (x_k y_j - x_j y_k)(y_k - y_j)x \right. \\ \left. + (x_k y_j - x_j y_k)(x_j - x_k)y + (x_k y_j - x_j y_k)(y_k - y_j)x_i \right. \\ \left. + (y_k - y_j)^2 x_i x + (x_k - x_j)(y_j - y_k)x_i y + (x_k y_j - x_j y_k)(x_j - x_k)y_i \right. \\ \left. + (x_k - x_j)(y_j - y_k)y_i x + (x_k - x_j)^2 y_i y \right] w_i(\mathbf{X}) w_j(\mathbf{X}) w_k(\mathbf{X})$$

olarak bulunur. Buradan  $i = 1, 2, \dots, n$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
\phi_i^h(\mathbf{X}) &= \frac{1}{|A_h(\mathbf{X})|} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n [(x_k y_j - x_j y_k) [x_k y_j - x_j y_k + (y_k - y_j)x + (x_j - x_k)y] \\
&\quad + (y_k - y_j)x_i [x_k y_j - x_j y_k + (y_k - y_j)x + (x_j - x_k)y] \\
&\quad + (x_j - x_k)y_i [x_k y_j - x_j y_k + (y_k - y_j)x + (x_j - x_k)y]] w_i(\mathbf{X}) w_j(\mathbf{X}) w_k(\mathbf{X}) \\
\Rightarrow \phi_i^h(\mathbf{X}) &= \frac{1}{|A_h(\mathbf{X})|} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n (x_k y_j - x_j y_k + x(y_k - y_j) + y(x_j - x_k)) \\
&\quad (x_k y_j - x_j y_k + x_i(y_k - y_j) + y_i(x_j - x_k)) w_i(\mathbf{X}) w_j(\mathbf{X}) w_k(\mathbf{X})
\end{aligned}$$

elde edilir.

Düzgün dağıtılmış düğüm noktaları için 1 boyutlu uzayda olduğu gibi 2 boyutlu uzayda da şekil fonksiyonları öteleme özelliğini sağlarlar. Fakat 2 boyutlu uzayda öteleme özelliği  $x$  yönünde veya  $y$  yönünde mevcuttur. Yani,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  yönündeki düzgün olarak dağıtılmış düğüm noktaları arasındaki uzaklık olmak üzere

$$\phi_i^h(x, y) = \phi_i^h(x - \Delta x, y), \phi_i^h(x, y) = \phi_i^h(x, y - \Delta y)$$

bağıntıları doğrudur. Fakat

$$\phi_i^h(x, y) \neq \phi_i^h(x - \Delta x, y - \Delta y)$$

dir. Bu özelliklerin ispatını yapmak için 1 boyutlu uzayda olduğu gibi ilk önce (133)'deki  $A_h(\mathbf{X})$  matrisinin determinantının öteleme özelliğini sağlandığını gösterelim.

**Önerme 19.**  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  bölgesinde düzgün olarak dağıtılmış düğüm noktalarının kümesi  $\hat{\Omega}$  ve  $\Omega_{td}$  ise tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonlarının kümesi olsun.  $\Delta x$  ve  $\Delta y$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  yönlerinde düğüm noktaları arası uzaklık olmak üzere  $(x, y) \in \Omega_{td}$ ,  $(x - \Delta x, y) \in \Omega_{td}$  ve  $(x, y - \Delta y) \in \Omega_{td}$  noktalarının destek bölgeleri içerisinde kalan düğüm noktalarının kümeleri sırasıyla  $\Omega^\circ(x, y), \overline{\Omega^\circ}(x, y), \Omega^{\circ\circ}(x, y)$ , bu düğüm noktalarındaki ağırlık fonksiyonlarının kümeleri sırasıyla  $W^\circ(x, y), \overline{W^\circ}(x, y), W^{\circ\circ}(x, y)$  olsun ve bu kümeler Kesim 3.3.5'deki gibi tanımlansın. Eğer bu üç kümenin eleman sayıları birbirine eşit ise (yani,  $n = m_1 = m_2$  ise)

$$|A_h(x - \Delta x, y)| = |A_h(x, y)| \text{ ve } |A_h(x, y - \Delta y)| = |A_h(x, y)|$$

dir. Yani,  $A_h(x, y)$  matrisinin determinantı  $x$  ve  $y$  yönünde öteleme özelliğini sağlar.

**İspat.**  $|A_h(x - \Delta x, y)| = |A_h(x, y)|$  olduğunu gösterelim. Önerme 18'de  $A_h(x, y)$  matrisinin determinanı

$$|A_h(x, y)| = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left( y_j(x_i - x_k) + y_i(x_k - x_j) + y_k(x_j - x_i) \right)^2 w_i(x, y) w_j(x, y) w_k(x, y)$$

şeklinde elde edimişti.  $(x - \Delta x, y)$  noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktalarının kümesi  $\bar{\Omega}^\circ(x, y)$  ve bu noktalarda tanımlanan ağırlık fonksiyonlarının kümesi  $\bar{W}^\circ(x, y)$  olduğundan Önerme 18 ile

$$|A_h(x - \Delta x, y)| = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left[ y_j((x_i - \Delta x) - (x_k - \Delta x)) + y_i((x_k - \Delta x) - (x_j - \Delta x)) + y_k((x_j - \Delta x) - (x_i - \Delta x)) \right]^2 w_i(x - \Delta x, y) w_j(x - \Delta x, y) w_k(x - \Delta x, y)$$

dir. Kesim 3.3.5'de belirtildiği gibi ağırlık fonksiyonları öteleme özelliğine sahip olduğundan

$$w_i(x, y) = w_i(x - \Delta x, y)$$

bağıntıları doğrudur. Bu bağıntılar  $|A_h(x - \Delta x, y)|$  'de yerine yazılır ve gerekli sadeleşmeler yapılırsa

$$|A_h(x - \Delta x, y)| = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left( y_j(x_i - x_k) + y_i(x_k - x_j) + y_k(x_j - x_i) \right)^2 w_i(x, y) w_j(x, y) w_k(x, y)$$

elde edilir. Buradan

$$|A_h(x - \Delta x, y)| = |A_h(x, y)|$$

bulunur. Yani,  $A_h(x, y)$  matrisinin determinanı  $x$  yönünde öteleme özelliğini sağlar.

Benzer şekilde  $|A_h(x, y)|$  alternatif olarak

$$\begin{aligned} |A_h(x, y)| &= \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left( y_j(x_i - x_k) + y_i(x_k - x_j) + y_k(x_j - x_i) \right)^2 w_i w_j w_k \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left( x_j(y_k - y_i) + x_i(y_j - y_k) + x_k(y_i - y_j) \right)^2 w_i w_j w_k \end{aligned}$$

şeklinde yazılırsa  $x$  yönündeki öteleme işlemlerine benzer işlemler ile  $|A_h(x, y)|$ 'nin  $y$  yönünde öteleme özelliğini sağladığı gösterilebilir.

$|A_h(x, y)|$ 'nin  $x$  ve  $y$  yönündeki öteleme özelliği yardımıyla (141)'de tanımlanan şekil fonksiyonlarının öteleme özelliğini sağladığı Teorem 13'de verilmektedir.

**Teorem 13.**  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  bölgesinde düzgün olarak dağıtılmış düğüm noktalarının kümesi  $\dot{\Omega}$  ve  $\Omega_{td}$  ise tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonlarının kümesi olsun.  $\Delta x$  ve  $\Delta y$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  yönlerinde düğüm noktaları arası uzaklık olmak üzere  $(x, y) \in \Omega_{td}$ ,  $(x - \Delta x, y) \in \Omega_{td}$  ve  $(x, y - \Delta y) \in \Omega_{td}$  noktalarının destek bölgeleri içerisinde kalan düğüm noktalarının kümeleri sırasıyla  $\Omega^\circ(x, y), \overline{\Omega^\circ}(x, y), \Omega^{\circ\downarrow}(x, y)$ , bu düğüm noktalarındaki ağırlık fonksiyonlarının kümeleri sırasıyla  $W^\circ(x, y), \overline{W^\circ}(x, y), W^{\circ\downarrow}(x, y)$  olsun ve bu kümeler Kesim 3.3.5'deki gibi tanımlansın. Eğer bu üç kümenin eleman sayıları birbirine eşit ise

$$\phi_i^h(x - \Delta x, y) = \phi_{i+1}^h(x, y), \quad \phi_i^h(x, y - \Delta y) = \phi_{i+1}^h(x, y)$$

$i = 1, 2, \dots, n - 1$ 'dir.

**İspat.** Teorem 12'de elde edilen şekil fonksiyonlarının genel formülü

$$\phi_{i+1}^h(x, y) = \frac{1}{|A_h(x, y)|} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n (x_k y_j - x_j y_k + x(y_k - y_j) + y(x_j - x_k)) \\ (x_k y_j - x_j y_k + x_{i+1}(y_k - y_j) + y_i(x_j - x_k)) w_{i+1}(x, y) w_j(x, y) w_k(x, y), \quad 1 \leq i \leq n$$

dir. Kesim 3.3.5'de tanımlanan  $W^\circ(x, y), \overline{W^\circ}(x, y)$  kümeleri ile

$$\phi_i^h(x - \Delta x, y) = \frac{1}{|A_h(x - \Delta x, y)|} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \left[ ((x_k - \Delta x) y_j - (x_j - \Delta x) y_k \right. \\ \left. + (x - \Delta x)(y_k - y_j) + y((x_j - \Delta x) - (x_k - \Delta x))) \right. \\ \left. ((x_k - \Delta x) y_j - (x_j - \Delta x) y_k + x_i(y_k - y_j) \right. \\ \left. + y_i((x_j - \Delta x) - (x_k - \Delta x))) \right] w_i(x - \Delta x, y) w_j(x - \Delta x, y) w_k(x - \Delta x, y)$$

olarak elde edilir. Kesim 3.3.5'de belirtildiği üzere  $W^\circ(x, y), \overline{W^\circ}(x, y)$  kümelerindeki ağırlık fonksiyonları için



$$w_j(x - \Delta x, y) = w_j(x, y), w_k(x - \Delta x, y) = w_k(x, y)$$

dir. Ayrıca  $w_i$ ,  $i$ . düğüm noktasının ağırlık fonksiyonu olduğundan ağırlık fonksiyonlarının öteleme özelliği ile

$$w_i(x - \Delta x, y) = w_{i+1}(x, y)$$

dir. Ağırlık fonksiyonunun için elde edilen bağıntılar  $\phi_i^h(x - \Delta x, y)$  yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\phi_i^h(x - \Delta x, y) = \frac{1}{|A_h(x - \Delta x, y)|} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n [(x_k y_j - x_j y_k + x(y_k - y_j) + y(x_j - x_k)) \\ (x_k y_j - x_j y_k + (x_i + \Delta x)(y_k - y_j) + y_i(x_j - x_k))] w_{i+1}(x, y) w_j(x, y) w_k(x, y)$$

elde edilir. Önerme 19 ile

$$\phi_i^h(x - \Delta x, y) = \frac{1}{|A_h(x, y)|} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n [(x_k y_j - x_j y_k + x(y_k - y_j) + y(x_j - x_k)) \\ (x_k y_j - x_j y_k + x_{i+1}(y_k - y_j) + y_i(x_j - x_k))] w_{i+1}(x, y) w_j(x, y) w_k(x, y)$$

bulunur. Buradan

$$\phi_i^h(x - \Delta x, y) = \phi_{i+1}^h(x, y)$$

elde edilir. Benzer işlemler ile

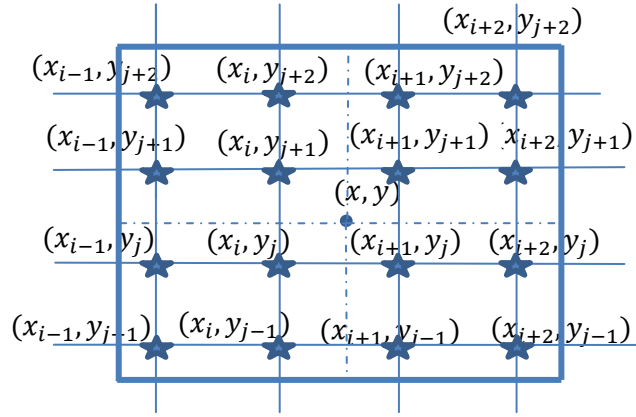
$$\phi_i^h(x, y - \Delta y) = \phi_{i+1}^h(x, y)$$

olduğu gösterilebilir. Dolayısı ile 1 boyutlu uzayda olduğu gibi 2 boyutlu uzayda da şekil fonksiyonları ötelemeye göre invarianttır.

Teorem 14 ise 1 boyutlu uzayda sadece  $d_{max} = 2$  seçilmesi durumunda tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonları için geçerli olan şekil fonksiyonları ile ağırlık fonksiyonlarının birbirine eşit olması durumunun 2 boyutlu uzayda da geçerli olduğunu gösterir.

**Teorem 14.** Düzgün olarak dağıtılmış düğüm noktaları için  $d_{max} = 2$  seçilmesi durumunda tamamen  $\Omega$  destekli şekil fonksiyonları ve ağırlık fonksiyonları birbirine eşittir.

**İspat.**  $x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_{j+1}$  aralığında keyfi bir  $(x, y)$  noktası alalım. Bu takdirde  $(x, y)$  noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktaları Şekil 64'deki gibidir.



Şekil 64.  $d_{max} = 2$  için  $(x, y)$  noktasının destek bölgesindeki düğüm noktaları

Şekil 64'de  $(x, y)$  noktasının destek bölgesi içerisinde kalan düğüm noktaları verilmiştir. Bu düğüm noktaları için ağırlık fonksiyonlarının bileşenleri

$$w_{i-1}^x(x) = \frac{4}{3} - 4 \frac{x - x_{i-1}}{d_{mx}} + 4 \left( \frac{x - x_{i-1}}{d_{mx}} \right)^2 - \frac{4}{3} \left( \frac{x - x_{i-1}}{d_{mx}} \right)^3$$

$$w_i^x(x) = \frac{2}{3} - 4 \left( \frac{x - x_i}{d_{mx}} \right)^2 + 4 \left( \frac{x - x_i}{d_{mx}} \right)^3$$

$$w_{i+1}^x(x) = \frac{2}{3} - 4 \left( \frac{x - x_{i+1}}{d_{mx}} \right)^2 - 4 \left( \frac{x - x_{i+1}}{d_{mx}} \right)^3$$

$$w_{i+2}^x(x) = \frac{4}{3} + 4 \frac{x - x_{i+2}}{d_{mx}} + 4 \left( \frac{x - x_{i+2}}{d_{mx}} \right)^2 + \frac{4}{3} \left( \frac{x - x_{i+2}}{d_{mx}} \right)^3$$

$$w_{j-1}^y(y) = \frac{4}{3} - 4 \frac{y - y_{j-1}}{d_{my}} + 4 \left( \frac{y - y_{j-1}}{d_{my}} \right)^2 - \frac{4}{3} \left( \frac{y - y_{j-1}}{d_{my}} \right)^3$$

$$w_j^y(y) = \frac{2}{3} - 4 \left( \frac{y - y_j}{d_{my}} \right)^2 + 4 \left( \frac{y - y_j}{d_{my}} \right)^3$$

$$w_{j+1}^y(y) = \frac{2}{3} - 4 \left( \frac{y - y_{j+1}}{d_{my}} \right)^2 - 4 \left( \frac{y - y_{j+1}}{d_{my}} \right)^3$$

$$w_{j+2}^y(y) = \frac{4}{3} + 4 \frac{y - y_{j+2}}{d_{my}} + 4 \left( \frac{y - y_{j+2}}{d_{my}} \right)^2 + \frac{4}{3} \left( \frac{y - y_{j+2}}{d_{my}} \right)^3$$

şeklinde olup herhangi bir düğüm noktasındaki ağırlık fonksiyonu o noktadaki  $w_i^x$  ile  $w_i^y$  bileşenlerinin çarpımıdır. Yani,  $w_i(x, y) = w_i^x(x)w_i^y(y)$ 'dir. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^n w_i(x, y) = \sum_{i=1}^n w_i^x(x)w_i^y(y) = \left[ \sum_{k=i-1}^{i+2} w_k^x(x) \right] \left[ \sum_{l=j-1}^{j+2} w_l^y(y) \right]$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i(x, y) &= \left[ \sum_{k=i-1}^{i+2} w_k^x(x) \right] \left[ \sum_{l=j-1}^{j+2} w_l^y(y) \right] \\ \sum_{i=1}^n x_i w_i(x, y) &= \left[ \sum_{k=i-1}^{i+2} x_k w_k^x(x) \right] \left[ \sum_{l=j-1}^{j+2} w_l^y(y) \right] \\ \sum_{i=1}^n y_i w_i(x, y) &= \left[ \sum_{k=i-1}^{i+2} w_k^x(x) \right] \left[ \sum_{l=j-1}^{j+2} y_l w_l^y(y) \right] \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i w_i(x, y) &= \left[ \sum_{k=i-1}^{i+2} x_k w_k^x(x) \right] \left[ \sum_{l=j-1}^{j+2} y_l w_l^y(y) \right] \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 w_i(x, y) &= \left[ \sum_{k=i-1}^{i+2} x_k^2 w_k^x(x) \right] \left[ \sum_{l=j-1}^{j+2} w_l^y(y) \right] \\ \sum_{i=1}^n y_i^2 w_i(x, y) &= \left[ \sum_{k=i-1}^{i+2} w_k^x(x) \right] \left[ \sum_{l=j-1}^{j+2} y_l^2 w_l^y(y) \right] \end{aligned}$$

dir. Teorem 3'ün ispatı ile

$$\begin{aligned} \sum_{k=i-1}^{i+2} w_x(x_k) &= \sum_{l=j-1}^{j+2} w_y(y_l) = 1 \\ \sum_{k=i-1}^{i+2} x_k w_x(x_k) &= x \\ \sum_{l=j-1}^{j+2} y_l w_y(y_l) &= y \\ \sum_{k=i-1}^{i+2} x_k^2 w_x(x_k) &= x^2 + \frac{\Delta x^2}{3} \\ \sum_{l=j-1}^{j+2} y_l^2 w_y(y_l) &= y^2 + \frac{\Delta y^2}{3} \end{aligned}$$

olduğundan  $A_h$  matrisi

$$A_h(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w_i & \sum_{i=1}^n x_i w_i & \sum_{i=1}^n y_i w_i \\ \sum_{i=1}^n x_i w_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 w_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i w_i \\ \sum_{i=1}^n y_i w_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i w_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 + \frac{\Delta x^2}{3} & xy \\ y & xy & y^2 + \frac{\Delta y^2}{3} \end{bmatrix}$$

olup

$$A_h^{-1}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 + 3 \frac{x^2}{\Delta x^2} + 3 \frac{y^2}{\Delta y^2} & -3 \frac{x}{\Delta x^2} & -3 \frac{y}{\Delta y^2} \\ -3 \frac{x}{\Delta x^2} & \frac{3}{\Delta x^2} & 0 \\ -3 \frac{y}{\Delta y^2} & 0 & \frac{3}{\Delta y^2} \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$p^T A_h^{-1} = [1 \ x \ y] \begin{bmatrix} 1 + 3 \frac{x^2}{\Delta x^2} + 3 \frac{y^2}{\Delta y^2} & -3 \frac{x}{\Delta x^2} & -3 \frac{y}{\Delta y^2} \\ -3 \frac{x}{\Delta x^2} & \frac{3}{\Delta x^2} & 0 \\ -3 \frac{y}{\Delta y^2} & 0 & \frac{3}{\Delta y^2} \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 0]$$

elde edilir. Dolayısı ile şekil fonksiyonları

$$\phi_i^h(\mathbf{X}) = p^T A^{-1} B_i = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} w_i \\ x_i w_i \\ y_i w_i \end{bmatrix} = w_i(\mathbf{X})$$

olarak bulunur.

**Notasyon.** 1 boyutlu uzayda olduğu gibi bundan sonraki kısımlarda  $i$ . şekil fonksiyonu  $\phi_i^h(\mathbf{X})$  kısaca  $\phi_i(\mathbf{X})$  ile gösterilmektedir.

### 3.3.7. 2 Boyutlu Uzayda Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi

2 boyutlu uzayda eleman bağımsız Galerkin yöntemini

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \quad (158)$$

şeklinde verilmiş olan Poisson denkleminde uygulayalım. (158) probleminin sınır şartları ise

$$u(a, y) = g(y), u(b, y) = h(y), u(x, c) = k(x), u(x, d) = l(x) \quad (159)$$

şeklinde verilmiş olsun. Bilindiği üzere eleman bağımsız Galerkin yöntemi diferensiyel denklemin zayıf şekline uygulanır. Dolayısı ile problemin zayıf şekli bulunmalıdır. Ayrıca eleman bağımsız Galerkin yönteminde şekil fonksiyonları Kronecker delta fonksiyon özelliğini sağlamadığı için Dirichlet sınır şartları probleme doğrudan uygulanamamaktadır. 1 boyutlu uzayda olduğu gibi bu bölümde de sınır şartları için Penaltı yöntemi kullanılmaktadır.

$\Omega = [a, b] \times [c, d]$ , (158) probleminin tanım bölgesi olmak üzere Poisson denkleminin varyasyonel şekli

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2fu \right] d\Omega \quad (160)$$

şeklinde dir. 1 boyutlu uzaydan bilindiği üzere Penaltı yönteminde problemin varyasyonel şekline sınır bölgelerinde

$$\int_{\Gamma} \frac{\alpha}{2} (u(x, y) - u_s)^2 d\Gamma \quad (161)$$

terimi eklenir. (161) ifadesi (160)'a eklenirse problemin varyasyonel şekli

$$I^*(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2fu \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\alpha}{2} (u(x, y) - u_s)^2 d\Gamma \quad (162)$$

olarak bulunur. Burada,  $\Gamma$  sınır bölgeleri,  $u_s$  sınır değerleri ve  $\alpha$  ise penaltı parametresidir. Dolayısı ile elemanları Kesim 1.2'de tanımlanan  $V$  kümesinden seçilen  $\forall v$  test fonksiyonu için

$$I^*(u + v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2f(u + v) \right] d\Omega \\ + \int_{\Gamma} \frac{\alpha}{2} (u + v - u_s)^2 d\Gamma$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I^*(u+v) &= \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2fu \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\alpha}{2} (u - u_s)^2 d\Gamma \right) \\
&\quad + \left( \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + fv \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \alpha (u - u_s) v d\Gamma \right) \\
&\quad + \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\alpha}{2} v^2 d\Gamma \right) \\
\Rightarrow I^*(u+v) &= I^*(u) + \frac{\delta P}{\delta u} + \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\alpha}{2} v^2 d\Gamma \right)
\end{aligned}$$

olduğundan problemin 1. varyasyoneli

$$\frac{\delta P}{\delta u} = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + fv \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \alpha (u - u_s) v d\Gamma \quad (163)$$

olarak elde edilir. (163)'deki 1. varyasyonel sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\delta P}{\delta u} = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + fv \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \alpha (u - u_s) v d\Gamma = 0$$

bulunur. Buradan problemin zayıf şekli

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] d\Omega + \alpha \int_{\Gamma} u v d\Gamma = - \int_{\Omega} f v d\Omega + \alpha \int_{\Gamma} u_s v d\Gamma \quad (164)$$

olarak elde edilir. Öte yandan problemin çözüm bölgesi dikdörtgensel bölge olduğundan 4 sınır bölgesine sahiptir. Dolayısı ile (164) bağıntısında

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} u_s v d\Gamma &= \int_a^b k(x) v(x, c) dx - \int_a^b l(x) v(x, d) dx \\
&\quad - \int_c^d g(y) v(a, y) dy + \int_c^d h(y) v(b, y) dy
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde (164) zayıf şeklinin sağ tarafındaki diğer sınır integrali 4 adet tek katlı integralin toplamı şeklinde ifade edilebilir.

Ağsız yöntemlerde çözüm

$$u^h(x, y) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, y) u_i$$

şeklinde araştırıldığından ve eleman bağımsız Galerkin yönteminde test fonksiyonları olarak şekil fonksiyonları seçildiğinden sistem denklemi

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial y} \right) d\Omega \right] u_i \\
& + \sum_{i=1}^n \alpha \left[ \int_a^b \phi_i(x, c) \phi_j(x, c) dx - \int_a^b \phi_i(x, d) \phi_j(x, d) dx \right] u_i \\
& + \sum_{i=1}^n \alpha \left[ \int_c^d \phi_i(b, y) \phi_j(b, y) dy - \int_c^d \phi_i(a, y) \phi_j(a, y) dy \right] u_i \\
& = - \int_{\Omega} f(x, y) \phi_j(x, y) d\Omega + \alpha \left( \int_a^b k(x) \phi_j(x, c) dx - \int_a^b l(x) \phi_j(x, d) dx \right) \\
& \quad + \alpha \left( \int_c^d h(y) \phi_j(b, y) dy - \int_c^d g(y) \phi_j(a, y) dy \right), j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada,  $n$  düğüm noktası sayısıdır. Sistem denklemi matris formunda ise

$$Ku = F \quad (165)$$

olarak ifade edilebilir. Burada

$$\begin{aligned}
K_{ij} &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial y} \right) d\Omega + \alpha \int_a^b \phi_i(x, c) \phi_j(x, c) dx \\
& + \alpha \left( \int_c^d \phi_i(b, y) \phi_j(b, y) dy - \int_c^d \phi_i(a, y) \phi_j(a, y) dy - \int_a^b \phi_i(x, d) \phi_j(x, d) dx \right) \\
F_j &= - \int_{\Omega} f \phi_j(x, y) d\Omega + \alpha \int_a^b (k(x) \phi_j(x, c) - l(x) \phi_j(x, d)) dx \\
& + \alpha \int_c^d (h(y) \phi_j(b, y) - g(y) \phi_j(a, y)) dy
\end{aligned}$$

dir.

### 3.3.8. Sayısal İntegrasyon

Eleman bağımsız Galerkin yönteminde sistem denklemindeki integraller hesaplanırken genel olarak Gauss yöntemi kullanılır. İlk olarak çözüm bölgesi integral hücrelerine ayrılır ve bu hücrelerde integraller sayısal olarak hesaplanarak sistem

matrisinde ilgili bölgelere eklenir. Fakat integral bölgelerinde seçilecek Gauss nokta sayısı ile bu bölgelerdeki düğüm noktası sayısı arasında bazı şartların sağlanması gerekir. Bu şartlar ve ayrıntılar için bakınız(Liu, 2003).

Bu çalışmada ise sonlu elemanlar yönteminde yapıldığı gibi düzgün dağıtılmış düğüm noktaları için çözüm bölgesi, köşe noktaları düğüm noktaları olacak şekilde dikdörtgenlere ayrılır ve bu dikdörtgenlere Gauss yöntemi uygulanır:

$$\iint_{\Omega_k} f(x,y)dxdy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi,\eta)|J|d\xi d\eta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \omega_i \omega_j f(\xi_i, \eta_j) |J| \quad (166)$$

Burada,  $\Omega_k$ ,  $k$ . integral hücresi,  $\xi_i, \eta_i, 1 \leq i \leq m$ 'ler Gauss noktaları,  $\omega_i, 1 \leq i \leq m$ 'ler ağırlıkları ve  $m$  ise Gauss nokta sayısıdır.

2 boyutlu uzayda sistem denklemini sayısal olarak hesaplamak için kullanılan algoritma aşağıdaki gibidir.

-----

Algoritma(ALG-4):2 boyutlu uzayda sayısal integral alma

1. Girdi:  $n$ : düğüm noktası sayısı,  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ : düğüm noktaları  
 $m$ : Gauss nokta sayısı,  $\xi_j, \eta_j, j = 1, 2, \dots, m$ : Gauss noktaları,  
 $\omega_j, j = 1, 2, \dots, m$ :ağırlıkları,  $k$ :integral hücresi sayısı
2. (165)'de elde edilen  $K$  matrisinin ve  $F$  vektörünün elemanlarını sıfırla
3. Tanım bölgesini eşit alanlı dikdörtgensel integral hücrelerine böl ve hücrelerin köşe noktalarının koordinatlarını belirle
4. Değişken dönüşümü ile integral sınırlarını  $[-1,1]$ 'e dönüştür:

$$4.1. x = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta$$

$$y = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta + \beta_4 \xi \eta$$

değişken dönüşümü yap.

4.2. Bilinmeyen  $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, 3, 4$ 'leri belirle:

$(z_1, t_1), (z_2, t_2), (z_3, t_3), (z_4, t_4)$  integral hücrelerinin köşeleri olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix}$$

sistemlerinin çözülerek bilinmeyenleri hesapla.



5. Jakobiyeni hesapla

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2 + \alpha_4 \eta & \alpha_3 + \alpha_4 \xi \\ \beta_2 + \beta_4 \eta & \beta_3 + \beta_4 \xi \end{vmatrix}$$

6.  $j = 1$ 'den  $m$ 'e kadar aşağıdaki işlemleri yap:

6.1.  $(x, y)$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonlarını belirle

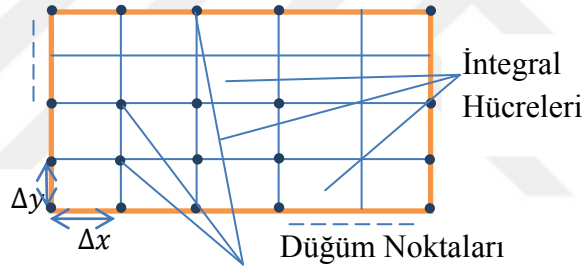
6.2. Hareketli en küçük kareler yöntemini kullanarak  $(x, y)$  noktası ile ilişkili şekil fonksiyonlarının değerlerini hesapla

6.3. (166) ile sayısal integralleri hesapla

6.4. Hesaplanan integralleri  $K$  matrisi ve  $F$  vektöründe ilgili yere ata

7. 4 ve 6 arasındaki işlemleri  $k$  integral hücresi için uygula

8. Çıktı: (165)'de elde edilen  $K$  matrisi ve  $F$  vektörü



Şekil 65. İntegral hücreleri ve düğüm noktalarının şematik gösterimi

### 3.3.9. Sistem Matrisini Hesaplamak İçin Gerekli Kayan Nokta Aritmetik İşlem(Floating Point Operation(Flop)) Sayısı

Eleman bağımsız Galerkin yönteminde (165)'deki sistem denklemini elde etmek için gerekli aritmetik işlem sayısını hesaplayalım. Bunun için ilk olarak 1 boyutlu uzayda olduğu gibi  $d_{max} = 2$  değerinde sabit tutalım ve

$$R_{ij} := \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} dx dy, 1 \leq i, j \leq n \quad (167)$$

integralini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısını bulalım.  $d_{max}$ 'ın diğer değerleri ve diğer integraller için benzer işlemler yapılabilir.  $R$  matrisini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısı Önerme 20 ile verilmektedir.

**Not.** 1 boyutlu uzayda olduğu gibi 2 boyutlu uzayda da Gauss nokta sayısını  $m = 3$  olarak seçiyoruz.

**Önerme 20.**  $\Omega = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  bölgesinde tanımlı olan (158) problemi için  $[a, b]$  aralığı eşit aralıklı  $N$  adet alt aralığa,  $[c, d]$  aralığı ise  $M$  adet alt aralığa bölünsün ve bu aralıkların  $x$  ve  $y$  yönlerindeki uç noktaları düğüm noktaları olarak alınsın. Eğer  $d_{max} = 2$  seçilirse elemanları

$$R_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} d\Omega, 1 \leq i \leq N + 1, 1 \leq j \leq M + 1$$

olan  $R$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı (integral alma işleminde ALG-4 algoritmasının kullanılması durumunda)

$$9216NM - 8064(N + M) + 7056$$

kadardır.

**İspat.** (167) integralini sayısal olarak hesaplamak için Kesim 3.3.8'de bahsedildiği gibi çözüm bölgesi dikdörtgenel bölgelere ayrılır ve elde edilen sayısal sonuçlar sistem matrisine eklenir.  $[a, b]$  aralığı  $N$  alt aralığa,  $[c, d]$  aralığı ise  $M$  alt aralığa bölündüğünden çözüm bölgesi  $NM$  adet alt dikdörtgene ayrılmış olur. Dolayısı ile

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} d\Omega = \sum_{k=1}^{NM} \iint_{\Omega_k} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} d\Omega_k$$

ile hesaplanır.

İlk olarak  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ ,  $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M$  şeklindeki tek bir integral hücrelerinde

$$\iint_{\Omega_l} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} d\Omega_l, l = 1, 2, \dots, NM \quad (168)$$

integralinin değerini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısını bulalım. (166) bağıntısı ile

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_l} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} d\Omega_l &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} |J| d\xi d\eta = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \omega_i \omega_j f(\xi_i, \eta_j) \end{aligned}$$

dir. Burada

$$f(\xi, \eta) = \frac{\partial \phi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j(\xi, \eta)}{\partial \eta} |J|, 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M$$

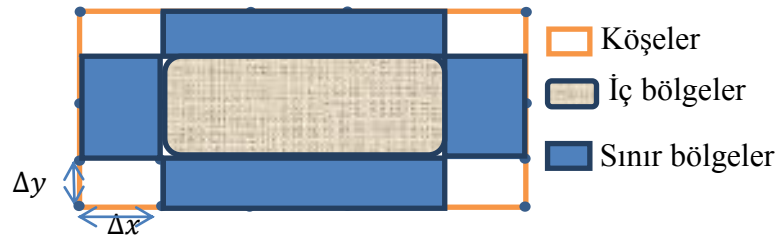
şeklindedir. Dolayısı ile bir integral hücreinde (168) integralini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı  $4m^2$ 'dir. Öte yandan Kesim 3.3.5'de belirtildiği üzere  $d_{max} = 2$  için iç bölgelerdeki herhangi bir noktaya 16, sınır bölgelerdeki herhangi bir noktaya 12, köşe bölgelerdeki herhangi bir noktaya 9 adet düğüm noktası etki eder. Bu takdirde eğer integral hücresi iç bölgede ise  $R$  matrisinin  $16 \times 16$ 'lık kısmı sıfırdan farklı olup diğerleri sıfırdır. Dolayısı ile bir iç bölgede  $R$  matrisini hesaplamak için

$$16 \cdot 16 \cdot 4 \cdot m^2 = 1024m^2$$

çarpma işlemi yapılır. Toplamda  $(N - 2)(M - 2)$  iç bölge olduğundan bu bölgelerde  $R$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$1024m^2(N - 2)(M - 2)$$

dir.



Şekil 66. İntegral hücreleri

Benzer işlemler sınır ve köşe bölgeler için de tekrarlanır. Sınır bölge içerisindeki bir integral noktası için  $R$  matrisinin  $12 \times 12$ 'lik kısmı sıfırdan farklıdır. Dolayısı ile bu hücredeki aritmetik işlem sayısı

$$12 \cdot 12 \cdot 4 \cdot m^2 = 576m^2$$

dir. Toplamda  $2(N - 2) + 2(M - 2)$  adet sınır hücresi olduğundan sınır hücrelerinde  $R$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$1152m^2((N-2) + (M-2))$$

dir. Köşe bölgelerde ise bu sayı  $9 \cdot 9 \cdot 4 \cdot m^2 \cdot 4 = 1296m^2$ 'dir. Sonuç olarak  $R$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$1024m^2(N-2)(M-2) + 1152m^2((N-2) + (M-2)) + 1296m^2 \quad (169)$$

olarak elde edilir. Gauss nokta sayısı 3 seçildiğinden (169) ile  $R$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$9216NM - 8064(N + M) + 7056$$

olarak bulunur.

Önerme 20'deki  $R$  matrisi için gerekli aritmetik işlem sayısından hareketle sistem denklemindeki  $K$  matrisini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısı Teorem 15'deki gibidir.

**Teorem 15.**  $\Omega = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  bölgesinde tanımlı olan (158) problemi için  $[a, b]$  aralığı eşit aralıklı  $N$  adet alt aralığa,  $[c, d]$  aralığı ise  $M$  adet alt aralığa bölünsün ve bu aralıkların  $x$  ve  $y$  yönlerindeki uç noktaları düğüm noktaları olarak alınsın. Eğer  $d_{max} = 2$  seçilir ise (165) sistem denklemindeki  $K$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı (integral alma işleminde ALG-4 algoritmasının kullanılması durumunda)

$$O(NM)$$

kadardır.

**İspat.** Önerme 20'de  $R$  matrisi

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} dx dy$$

şeklinde tanımlanmıştı. Fakat (165) sistem denkleminde  $K$  matrisi

$$\begin{aligned} K_{ij} = & \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial y} \right) d\Omega \\ & + \alpha \left( \int_a^b \phi_i(x, c) \phi_j(x, c) dx - \int_a^b \phi_i(x, d) \phi_j(x, d) dx \right) \\ & + \alpha \left( \int_c^d \phi_i(b, y) \phi_j(b, y) dy - \int_c^d \phi_i(a, y) \phi_j(a, y) dy \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilmişti. Dolayısı ile sistem matrisini elde etmede gerekli aritmetik işlem sayısı Önerme 20’de elde edilen sonuçlara diğer integraller için gerekli aritmetik işlem sayılarının eklenmesi ile elde edilir.

$R$  integralini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$1024m^2(N - 2)(M - 2) + 1152m^2((N - 2) + (M - 2)) + 1296m^2$$

olduğundan  $K$  matrisindeki

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial y} dx dy$$

integralini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı da aynıdır.

1 boyutlu uzaydan bilindiği üzere  $K$  matrisindeki tek katlı integral

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi_i(x, c) \phi_j(x, c) dx &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x, c) \phi_j(x, c) dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{-1}^1 \phi_i(\alpha + \beta \xi, c) \phi_j(\alpha + \beta \xi, c) |J| d\xi \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^m \omega_i \phi_i(\alpha + \beta \xi_k, c) \phi_j(\alpha + \beta \xi_k, c) |J| \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Burada,  $\alpha = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$ ,  $\beta = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$  ’dir. Ayrıca Tanım 8’den  $\Delta x, \Delta y$  sırasıyla  $x, y$  yönlerinde düğüm noktaları arası eşit uzaklık olmak üzere  $(\alpha + \beta \xi_k, c) = (\alpha + \beta \xi_k, y_1)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  noktalarının destek alanı

$$\begin{aligned} &[\alpha + \beta \xi_k - 2\Delta x, \alpha + \beta \xi_k + 2\Delta x] \times [y_1 - 2\Delta y, y_1 + 2\Delta y] \\ &= [\alpha + \beta \xi_k - 2\Delta x, \alpha + \beta \xi_k + 2\Delta x] \times [y_1, y_3], k = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

olduğundan  $[x_1, x_2]$  ve  $[x_N, x_{N+1}]$  aralıklarındaki bir integral noktası 9 adet ağırlık fonksiyonu ile ilişkili iken diğer aralıklarda alınan integral noktaları için bu sayı 12’dir. Dolayısı ile  $[x_1, x_2]$  ve  $[x_N, x_{N+1}]$  aralıklarında  $K$  matrisinin  $9 \times 9$ ’luk kısmı sıfırdan farklı iken diğer aralıklarda  $12 \times 12$ ’lik kısmı sıfırdan farklıdır. Ayrıca bir aralıkta tek katlı integrali hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı  $3m$  olduğundan

$$\int_a^b \phi_i(x, c) \phi_j(x, c) dx$$

integralini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 \cdot m + (N - 2) \cdot 12 \cdot 12 \cdot 3 \cdot m = 486m + 432(N - 2)m$$

dir.  $y = d$  doğrusu üzerindeki sınır integrali için de gerekli aritmetik işlem sayısı aynı olduğundan

$$\int_a^b \phi_i(x, c)\phi_j(x, c)dx - \int_a^b \phi_i(x, d)\phi_j(x, d)dx$$

integralleri için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$2(486m + 432(N - 2)m)$$

olarak bulunur.  $y$  eksenini  $M$  alt aralığa böldüğü için  $y$ 'ye göre integralleri hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısı ise

$$2(486m + 432(M - 2)m)$$

dir. Dolayısı ile  $K$  matrisini hesaplamada gerekli olan aritmetik işlem sayısı

$$\begin{aligned} & 2(1024m^2(N - 2)(M - 2) + 1152m^2((N - 2) + (M - 2)) + 1296m^2 \\ & \quad + 432(N - 2)m + 432(M - 2)m) + 4 \cdot 486m \\ & = (2048NM - 1792(N + M) + 1568)m^2 \\ & \quad + (864(N + M) - 1512)m \end{aligned}$$

dir.  $m = 3$  seçildiğinden  $K$  matrisini hesaplamada gerekli olan aritmetik işlem sayısı

$$18432NM - 13536(N + M) + 9576 \equiv O(NM)$$

olarak elde edilir.

Teorem 15'den görüleceği üzere  $x$  ve  $y$  yönündeki adım uzunlukları çok küçük seçildiğinde işlem yükü artar. Bu ise yapılan işlemlerin uzun zaman almasına neden olur. Bu işlem yükünü azaltmak için 1 boyutlu uzayda yapıldığı gibi şekil fonksiyonlarının özelliklerinden yararlanılabilir. 2 boyutlu uzayda da şekil fonksiyonları öteleme özelliğini sağladığından dolayı bu özelliğin geçerli olduğu bölgelerde sadece bir integral hücresinde  $K$  matrisini hesaplamak yeterlidir. Öteleme özelliğinin geçerli olduğu diğer bölgelerde elde edilen matris ötelenerek sistem matrisi oluşturulabilir.

### 3.3.10. 2 Boyutlu Uzayda Düzgün Dağıtılmış Düğüm Noktaları İçin Aritmetik İşlem Sayısının Optimizasyonu

Teorem 13 ile eşit sayıda düğüm noktasının etki ettiği integral hücrelerinde öteleme özelliği sağlanır. 1 boyutlu uzayda olduğu gibi öteleme özelliği yardımıyla sistem matrisinin elde edilmesindeki aritmetik işlem sayısı azaltılabilir. Bu takdirde (167) ile verilen  $R$  matrisi için Önerme 21 elde edilir.

**Önerme 21.**  $\Omega = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  bölgesinde tanımlı olan (158) problemi için  $[a, b]$  aralığı eşit aralıklı  $N$  adet alt aralığa,  $[c, d]$  aralığı ise  $M$  adet alt aralığa bölünsün ve bu aralıkların  $x$  ve  $y$  yönlerindeki uç noktaları düğüm noktaları olarak alınsın. Eğer  $d_{max} = 2$  seçilir ve elemanları

$$R_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} d\Omega, 1 \leq i \leq N + 1, 1 \leq j \leq M + 1$$

olan  $R$  matrisi şekil fonksiyonlarının öteleme özelliği kullanılarak hesaplanırsa  $R$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$4624m^2 = 41616$$

kadardır.

**İspat.** Kesim 3.3.5 ve Teorem 13 ile  $d_{max} = 2$  için iç bölgelerde ve köşeler hariç diğer sınır bölgelerinde öteleme özelliği ayrı ayrı sağlanır. Çünkü bu bölgelerdeki her bir hücreye etki eden ağırlık fonksiyonları sayıları birbirine eşittir. Dolayısı ile iç bölgelerde sadece 1 integral hücresinde  $R$  matrisinin hesaplanması yeterlidir. Benzer durum sınır bölgeleri için de geçerlidir. Yani, 4 sınır bölgesinin herbirinde sadece 1 integral hücresinde  $R$  matrisi hesaplanır ve bu değerler diğer hücelere ötelenir. Köşe bölgelerde bu özellik sağlanmadığı için bu bölgelerde sayısal integraller hesaplanarak sistem matrisi oluşturulur. Dolayısı ile öteleme özelliğinin kullanılması durumunda gerekli aritmetik işlem sayısı Önerme 20'nin ispatı yardımıyla

$$\text{İç bölgelerde } 16 \cdot 16 \cdot 4 \cdot m^2 = 1024m^2$$

$$\text{Sınır bölgelerde } 4 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 4 \cdot m^2 = 2304m^2$$

$$\text{Köşe bölgelerde } 9 \cdot 9 \cdot 4 \cdot m^2 \cdot 4 = 1296m^2$$

olup toplam aritmetik işlem sayısı

$$1024m^2 + 2304m^2 + 1296m^2 = 4624m^2 \quad (170)$$

olarak elde edilir. Gauss nokta sayısı 3 seçildiğinden öteleme özelliği kullanılarak hesaplanırsa  $R$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı (170) ile

$$4624 \cdot 9 = 41616$$

dir.

(169) ile (170) ifadeleri karşılaştırıldığında iç bölgelerdeki kazanç, iç bölgelerdeki aritmetik işlem sayılarının oranı ile

$$\frac{1024m^2(N-2)(M-2)}{1024m^2} = (N-2)(M-2)$$

$O((N-2)(M-2))$  olarak elde edilir. Sınır bölgelerinde ise  $O((N-2) + (M-2))$ 'lik bir kazanç vardır.  $N$  ve  $M$  sayısının büyük değerleri için iç bölgelerdeki kazanç, sınır bölgelerinden çok daha fazla olduğundan dolayı aritmetik işlem sayılarındaki toplamları etkileyen en önemli terim iç bölgelerdeki aritmetik işlem sayılarıdır. Dolayısı ile öteleme özelliği ile  $R$  matrisini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısındaki kazanç  $O((N-2)(M-2))$  olur.

Teorem 16 ise öteleme özelliği ile (165) sistem denklemindeki  $K$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısını gösterir.

**Teorem 16.**  $\Omega = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  bölgesinde tanımlı olan (158) problemi için  $[a, b]$  aralığı eşit aralıklı  $N$  adet alt aralığa,  $[c, d]$  aralığı ise  $M$  adet alt aralığa bölünsün ve bu aralıkların  $x$  ve  $y$  yönlerindeki uç noktaları düğüm noktaları olarak alınsın. Eğer  $d_{max} = 2$  seçilir ve (165) sistem denkleminde verilen  $K$  matrisi şekil fonksiyonlarının öteleme özelliği kullanılarak hesaplanırsa  $K$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$O(1)$$

kadardır.

**İspat.** Önerme 21 ile öteleme özelliğini kullanarak

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} d\Omega$$

integralini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$4624m^2$$

olduğundan  $K$  matrisindeki

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial y} d\Omega$$

integralini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı da aynıdır.



Öte yandan tek katlı integraller için Teorem 15'in ispatında belirtildiği üzere 1. ve sonuncu aralıklar hariç diğer aralıklarda seçilen bir nokta ile ilişkili düğüm noktası sayıları her bir aralıkta birbirine eşit olduğundan öteleme özelliği sağlanır. Dolayısı ile  $K$  matrisindeki tek katlı integrallerden biri öteleme özelliği ile hesaplanırsa bu integrali hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı Teorem 15'in ispatı ile

$$2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 \cdot m + 12 \cdot 12 \cdot 3 \cdot m = 918m$$

dir. Böylece öteleme özelliği kullanıldığı durumda  $K$  matrisini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısı

$$2 \cdot 4624m^2 + 4 \cdot 918m = 9248m^2 + 3672m$$

olarak elde edilir.  $m = 3$  seçildiğinden  $K$  matrisini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısı

$$9248 \cdot 9 + 3672 \cdot 3 = 94248 \equiv O(1)$$

dir.

### 3.3.11. 2 Boyutlu Uzayda Şekil Fonksiyonlarını Hesaplamada Gerekli Aritmetik İşlem Sayısı

Kesim 3.3.9 ve 3.3.10'da  $K$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayıları elde edilirken şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin herhangi bir noktadaki değerlerinin hesaplanması için gerekli aritmetik işlem sayıları hesaplanmamış olup sadece bu değerlerin bilindiği varsayımı altında  $K$  matrisini hesaplamada gerekli olan aritmetik işlem sayıları hesaplanmıştır. Dolayısı ile herhangi bir integral noktasında şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin değerlerini hesaplamada gerekli olan aritmetik işlem sayılarının bulunması gerekir.

Kesim 3.1.6'da 1 boyutlu uzayda herhangi bir integral noktasında, şekil fonksiyonlarını ve türevlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayıları belirlenerek  $K$  matrisindeki şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin tüm integral noktalarındaki değerlerinin elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısı elde edilmişti. Bu bölümde 1 boyutlu uzaydaki işlemler 2 boyutlu uzaya genişletilmektedir. Ayrıca 1 boyutlu uzayda yapıldığı gibi bu bölümde de ağırlık fonksiyonları olarak (W1) ağırlık fonksiyonları yerine (W2) ağırlık fonksiyonları kullanılmaktadır.

Önerme 22'de şekil fonksiyonlarının herhangi bir noktadaki değerlerinin elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısı verilmiştir.

**Önerme 22.**  $\Omega = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  bölgesinde tanımlı olan (158) problemi için  $[a, b]$  aralığı eşit aralıklı  $N$  adet alt aralığa,  $[c, d]$  aralığı ise  $M$  adet alt aralığa bölünsün ve bu aralıkların  $x$  ve  $y$  yönlerindeki uç noktaları düğüm noktaları olarak seçilsin. Eğer herhangi bir  $\mathbf{X} = (x, y) \in \Omega$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonlarının sayısı  $N_x$  ise Kesim 3.3.3'de verilen ağırlık fonksiyonları ile  $\Phi(\mathbf{X})$  şekil fonksiyonu vektörünün elde edilmesi için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$34N_x + 23$$

kadardır.

**İspat.** Kesim 3.3.4'deki (146) bağıntısından şekil fonksiyonları

$$\Phi(\mathbf{X}) = \gamma^T(\mathbf{X})B(\mathbf{X})$$

ile elde edilir. Burada  $\gamma$  vektörü,  $L, U$  matrisleri  $A_h$  matrisinin  $LU$  ayrışımı ile elde edilen matrisler olmak üzere

$$L(\mathbf{X})U(\mathbf{X})\gamma(\mathbf{X}) = p(\mathbf{X})$$

sisteminin çözümüdür.

(133)'de  $A_h$  matrisi  $w_i(\mathbf{X})$  ağırlık fonksiyonlarını içerdiğinden  $A_h$  matrisini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayılarının belirlenmesi için ilk olarak ağırlık fonksiyonlarını hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayıları belirlenmelidir.  $w_i, \mathbf{X}$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$w_i(\mathbf{X}) = (1 - 6r_x^2 + 8r_x^3 - 3r_x^4)(1 - 6r_y^2 + 8r_y^3 - 3r_y^4)$$

şeklindedir. Burada,  $r_x = |x - x_i|/d_{mx}, r_y = |x - y_i|/d_{my}$ 'dir. Dolayısı ile  $\mathbf{X}$  noktası ile ilişkili herhangi bir ağırlık fonksiyonunun değerini hesaplamak 21 adet aritmetik işlem gerektirir.  $\mathbf{X}$  ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı  $N_x$  olduğundan ağırlık fonksiyonlarını elde etmede gerekli aritmetik işlem sayısı  $21N_x$ 'dir.

$\mathbf{X}$  ile ilişkili ağırlık fonksiyonlarını  $w_i(\mathbf{X}), i = 1, 2, \dots, N_x$  ile gösterelim. Bu takdirde  $A_h$  matrisi

$$A_h(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_x} w_i(\mathbf{X}) & \sum_{i=1}^{N_x} x_i w_i(\mathbf{X}) & \sum_{i=1}^{N_x} y_i w_i(\mathbf{X}) \\ \sum_{i=1}^{N_x} x_i w_i(\mathbf{X}) & \sum_{i=1}^{N_x} x_i^2 w_i(\mathbf{X}) & \sum_{i=1}^{N_x} x_i y_i w_i(\mathbf{X}) \\ \sum_{i=1}^{N_x} y_i w_i(\mathbf{X}) & \sum_{i=1}^{N_x} x_i y_i w_i(\mathbf{X}) & \sum_{i=1}^{N_x} y_i^2 w_i(\mathbf{X}) \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısı ile  $A_h$  matrisini hesaplamadaki toplam aritmetik işlem sayısı  $8N_x$ 'dir.

$B_h$  matrisi ise ilişkili ağırlık fonksiyonları yardımıyla

$$B_h(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{X}) & w_2(\mathbf{X}) & \dots & w_{N_x}(\mathbf{X}) & 0 & \dots & 0 \\ x_1 w_1(\mathbf{X}) & x_2 w_2(\mathbf{X}) & \dots & x_{N_x} w_{N_x}(\mathbf{X}) & 0 & \dots & 0 \\ y_1 w_1(\mathbf{X}) & y_2 w_2(\mathbf{X}) & \dots & y_{N_x} w_{N_x}(\mathbf{X}) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olduğundan  $B_h$  matrisini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısı  $2N_x$ 'dir.

Şekil fonksiyonlarının elde edilmesinde  $A_h$  matrisinin  $LU$  ayrışımı kullanıldığından bu ayrışım için gerekli aritmetik işlem sayısı belirlenmelidir.  $3 \times 3$  tipinde bir matrise  $LU$  ayrışımı uygulamak için gerekli olan aritmetik işlem sayısı  $U$  matrisi için 11,  $L$  matrisi için 3 olup toplamda 14 aritmetik işlem gerektirir. Bu ayrışım yardımıyla  $\gamma(\mathbf{X})$ 'in elde edilmesi ise 9 aritmetik işlem gerektirir. Ayrıca

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = \gamma^T(\mathbf{X}, \mathbf{z})B(\mathbf{z})$$

çarpımından şekil fonksiyonlarının değerlerinin elde edilmesi ise her bir elemanı 3 çarpma işlemi gerektirdiğinden  $3N_x$  aritmetik işlem gerektirir.

Sonuç olarak şekil fonksiyonlarının keyfi bir noktadaki değeri hesaplanırken gerekli aritmetik işlem sayısı Tablo 17'de özetlenmiştir.

Tablo 17. Şekil fonksiyonlarının elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısı

	Aritmetik İşlem Sayısı
Ağırlık fonksiyonları için aritmetik işlem sayısı	$21N_x$
$A_h$ matrisi için ilave aritmetik işlem sayısı	$8N_x$
$B_h$ matrisi için ilave aritmetik işlem sayısı	$2N_x$
$\gamma$ vektörü için ilave aritmetik işlem sayısı	23
$\phi_h$ vektörü için ilave aritmetik işlem sayısı	$3N_x$
Şekil fonksiyonları vektörünü elde etmede gerekli aritmetik işlem sayısı	$34N_x + 23$

Şekil fonksiyonlarının türevlerinin hesaplanmasında gerekli aritmetik işlem sayıları ise Önerme 23'deki gibidir.

**Önerme 23.**  $\Omega = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  bölgesinde tanımlı olan (158) problemi için  $[a, b]$  aralığı eşit aralıklı  $N$  adet alt aralığa,  $[c, d]$  aralığı ise  $M$  adet alt aralığa bölünsün ve bu aralıkların  $x$  ve  $y$  yönlerindeki uç noktaları düğüm noktaları olarak seçilsin. Eğer herhangi bir  $\mathbf{X} = (x, y) \in \Omega$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonlarının sayısı  $N_x$  ise Kesim 3.3.3'de verilen ağırlık fonksiyonları ile  $\frac{\partial \Phi_h}{\partial x}(\mathbf{X})$  vektörünün elde edilmesi için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$65N_x + 41$$

kadardır.

**İspat.** (151) bağıntısında şekil fonksiyonlarının  $x$  değişkenine göre türevi

$$\frac{\partial(\Phi_h(\mathbf{X}))}{\partial x} \equiv \Phi_x(\mathbf{X}) = \gamma_x^T(\mathbf{X})B_h(\mathbf{X}) + \gamma^T(\mathbf{X})\frac{\partial(B_h(\mathbf{X}))}{\partial x}$$

olarak elde edilmişti. Dolayısı ile  $\gamma_x$  ve  $\partial(B_h(\mathbf{X}))/\partial x$  matrislerini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayıları belirlenmelidir.  $B_h$  matrisinin  $x$  değişkenine göre türevi ağırlık fonksiyonlarının türevlerini içerdiğinden ağırlık fonksiyonlarının türevlerini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayıları belirlenmelidir.

Ağırlık fonksiyonlarının  $x$  değişkenine göre türevleri Kesim 3.3.3'de

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = \frac{dw_i^x}{dx} w_i^y$$

olarak verilmişti. Kesim 3.1.6 Önerme 12'de ağırlık fonksiyonlarının türevlerini hesaplamadaki aritmetik işlem sayısı 7 olarak elde edilmişti. Önerme 11'de  $w_y$  ağırlık fonksiyonunu elde etmede gerekli aritmetik işlem sayısı 10 olarak bulunmuştu. Dolayısı ile ağırlık fonksiyonunun  $x$  değişkenine göre türevini elde etmede gerekli aritmetik işlem sayısı 18'dir.  $\mathbf{X}$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı  $N_x$  olduğundan ağırlık fonksiyonlarının türevlerini hesaplamadaki toplam aritmetik işlem sayısı  $18N_x$ 'dir.

$B_h$  matrisinin  $x$  değişkenine göre türevi ise eğer  $\mathbf{X}$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonları  $w_1, w_2, \dots, w_{N_x}$  ile gösterilirse

$$\frac{\partial B_h}{\partial x}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1(\mathbf{X})}{\partial x} & \frac{\partial w_2(\mathbf{X})}{\partial x} & \dots & \frac{\partial w_{N_x}(\mathbf{X})}{\partial x} & 0 & \dots & 0 \\ x_1 \frac{\partial w_1(\mathbf{X})}{\partial x} & x_2 \frac{\partial w_2(\mathbf{X})}{\partial x} & \dots & x_{N_x} \frac{\partial w_{N_x}(\mathbf{X})}{\partial x} & 0 & \dots & 0 \\ y_1 \frac{\partial w_1(\mathbf{X})}{\partial x} & y_2 \frac{\partial w_2(\mathbf{X})}{\partial x} & \dots & y_{N_x} \frac{\partial w_{N_x}(\mathbf{X})}{\partial x} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. Dolayısı ile  $B_h$  matrisinin  $x$  değişkenine göre türevini hesaplamadaki aritmetik işlem sayısı  $2N_x$ 'dir.

(150) ile  $\gamma_x$ ,

$$A_h(\mathbf{X})\gamma_x(\mathbf{X}) = p_x(\mathbf{X}) - \frac{\partial(A_h(\mathbf{X}))}{\partial x}\gamma(\mathbf{X})$$

sisteminin çözümü ile hesaplanır. Dolayısı ile  $\gamma_x$ 'i hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısının hesaplanması için  $A_h$  matrisinin  $x$  değişkenine göre türevinin hesaplanmasında gerekli aritmetik işlem sayısı belirlenmelidir.

$A_h$  matrisinin  $x$  değişkenine göre türevi

$$\frac{\partial(A_h(\mathbf{X}))}{\partial x} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_x} \frac{\partial w_i(\mathbf{X})}{\partial x} & \sum_{i=1}^{N_x} x_i \frac{\partial w_i(\mathbf{X})}{\partial x} & \sum_{i=1}^{N_x} y_i \frac{\partial w_i(\mathbf{X})}{\partial x} \\ \sum_{i=1}^{N_x} x_i \frac{\partial w_i(\mathbf{X})}{\partial x} & \sum_{i=1}^{N_x} x_i^2 \frac{\partial w_i(\mathbf{X})}{\partial x} & \sum_{i=1}^{N_x} x_i y_i \frac{\partial w_i(\mathbf{X})}{\partial x} \\ \sum_{i=1}^{N_x} y_i \frac{\partial w_i(\mathbf{X})}{\partial x} & \sum_{i=1}^{N_x} x_i y_i \frac{\partial w_i(\mathbf{X})}{\partial x} & \sum_{i=1}^{N_x} y_i^2 \frac{\partial w_i(\mathbf{X})}{\partial x} \end{bmatrix}$$

olduğundan  $\frac{\partial(A_h(\mathbf{X}))}{\partial x}$  matrisini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısı  $A_h$  matrisi ile aynı olup  $8N_x$ 'dir. Buradan

$$p_x(\mathbf{X}) - \frac{\partial(A_h(\mathbf{X}))}{\partial x}\gamma(\mathbf{X})$$

ifadesini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı 9'dur. Öte yandan

$$A_h(\mathbf{X})\gamma_x(\mathbf{X}) = p_x(\mathbf{X}) - \frac{\partial(A_h(\mathbf{X}))}{\partial x}\gamma(\mathbf{X})$$

sistemini çözmek için  $A_h$  matrisinin  $LU$  ayrışımı yapıldığından bu sistemden  $\gamma_x$ 'i elde etmek için gerekli aritmetik işlem sayısı ile Önerme 22'nin ispatında

$$A_h(\mathbf{X})\gamma(\mathbf{X}) = p(\mathbf{X})$$

sistemini çözmek için gerekli işlem sayısı birbirine eşit olduğu görülür. Yani,  $\gamma_x$ 'i hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısı 9'dur.

$$\Phi_x(\mathbf{X}) = \gamma_x^T(\mathbf{X})B_h(\mathbf{X}) + \gamma^T(\mathbf{X})\frac{\partial(B_h(\mathbf{X}))}{\partial x}$$

bağıntısından  $\Phi_x$  vektörünü elde etmek için gerekli aritmetik işlem sayısı ise  $6N_x$ 'dir.

Sonuç olarak şekil fonksiyonun  $x$ 'e göre türevinin keyfi bir noktadaki değeri hesaplanırken gerekli aritmetik işlem sayısı Tablo 18'de özetlenmiştir.

Tablo 18. Şekil fonksiyonlarının  $x$  değişkenine göre türevinin elde edilmesindeki aritmetik işlem sayısı

	Aritmetik İşlem Sayısı
Ağırlık fonksiyonları için aritmetik işlem sayısı	$21N_x$
Ağırlık fonksiyonlarının türevleri için ilave aritmetik işlem sayısı	$18N_x$
$A_h$ matrisi için ilave aritmetik işlem sayısı	$8N_x$
$\gamma$ vektörü için ilave aritmetik işlem sayısı	23
$B_h$ matrisi için ilave aritmetik işlem sayısı	$2N_x$
$A'_h$ matrisi için ilave aritmetik işlem sayısı	$8N_x$
$B'_h$ matrisi için ilave aritmetik işlem sayısı	$2N_x$
$\gamma_x$ vektörü için ilave aritmetik işlem sayısı	18
$\Phi_x$ vektörü için ilave aritmetik işlem sayısı	$6N_x$
Şekil fonksiyonlarının $x$ değişkenine göre türev vektörünün elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısı	$65N_x + 41$

Önerme 22 ve 23'de şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin sadece bir noktadaki değerlerinin hesaplanmasında gerekli aritmetik işlem sayıları verilmiştir. Teorem 17 ise (165) sistem denklemindeki  $K$  matrisini hesaplamak için gerekli olan bütün integral noktalarındaki aritmetik işlem sayısını gösterir. Fakat  $d_{max}$ 'in farklı değerleri için her bir integral hücre sine etki eden ağırlık fonksiyonu sayısı değiştiğinden Kesim 3.3.9'da olduğu gibi sadece  $d_{max} = 2$  değeri için  $K$  matrisini hesaplamada gerekli olan aritmetik işlem sayısı hesaplanmaktadır.

**Teorem 17.**  $\Omega = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  bölgesinde tanımlı olan (158) problemi için  $[a, b]$  aralığı eşit aralıklı  $N$  adet alt aralığa,  $[c, d]$  aralığı ise  $M$  adet alt aralığa bölünsün ve bu aralıkların  $x$  ve  $y$  yönlerindeki uç noktaları düğüm noktaları olarak alınsın. Eğer  $d_{max} = 2$  seçilirse integral noktalarında  $K$  matrisindeki şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin değerlerinin hesaplanması için gerekli toplam aritmetik işlem sayısı (integral alma işleminde ALG-4 algoritmasının kullanılması durumunda)

$$O(NM)$$

kadardır.

**İspat.** Problemin tanım bölgesi  $NM$  adet integral hücre sine bölündüğünden ve her bir hücrede  $m$  adet gauss noktası kullanıldığından

$$m^2 NM$$

noktada şekil fonksiyonları ve türevlerinin değerleri hesaplanmalıdır.

Önerme 22 ve 23,  $X$  noktası ile ilişkili ağırlık fonksiyonu sayısı  $N_x$  olduğu durum için geçerlidir. Dolayısı ile her bir integral hücre sine düşen ağırlık fonksiyonları sayısı belirlenmelidir. Kesim 3.3.5’de  $d_{max} = 2$  için her bir hücre ye etki eden ağırlık fonksiyonları sayıları verilmişti. Buna göre köşe bölgelerde  $N_x = 9$ , sınır bölgelerde  $N_x = 12$  ve iç bölgelerde  $N_x = 16$ ’dır (Bu bölgeler Şekil 66’da gösterilmiştir). Her bir integral hücre sine için  $m^2$  adet integral noktasında şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin değerleri bulunması gerektiğinden köşe bölgelerin her birinde şekil fonksiyonlarının  $x$  değişkenine göre türevlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı Önerme 23 ile

$$(65N_x + 41)m^2 = (65 \cdot 9 + 41)m^2 = 626m^2$$

dir. 4 köşe bölgesi olduğundan bu bölgelerde şekil fonksiyonlarının  $x$  değişkenine göre türevlerinin integral noktalarındaki değerlerini elde etmede gerekli aritmetik işlem sayısı

$$4 \cdot 626m^2 = 2504m^2$$

olarak bulunur. Benzer şekilde sınır bölgelerdeki her bir integral hücre sine de şekil fonksiyonlarının  $x$  değişkenine göre türevlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$(65N_x + 41)m^2 = (65 \cdot 12 + 41)m^2 = 821m^2$$

dir. Alt ve üst bölgede  $N - 2$ , sağ ve sol sınır bölgelerde  $M - 2$  adet integral hücre sine olduğundan bu bölgelerde şekil fonksiyonlarının  $x$  değişkenine göre türevlerinin elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısı

$$2 \cdot 821m^2(N + M - 4) = 1642m^2(N + M - 4)$$

olarak elde edilir. İç bölgelerde ise toplamda  $(N - 2)(M - 2)$  adet integral hücre sine ve her bir hücre de alınan bir nokta için 16 adet ilişkili ağırlık fonksiyonu bulunduğundan bu bölgelerdeki şekil fonksiyonlarının  $x$  değişkenine göre türevlerinin elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısı

$$(65 \cdot 16 + 41)m^2(N - 2)(M - 2) = 1081m^2(N - 2)(M - 2)$$

dir. Sonuç olarak integral noktalarında  $K$  matrisindeki  $\Phi_x$  değerlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı Tablo 19’deki gibi özetlenebilir.

Tablo 19. Şekil fonksiyonlarının  $x$ 'e göre türevlerinin elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısı

	Aritmetik İşlem Sayısı
Köşe bölgelerde $\Phi_x$ 'lerin değerlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı	$2504m^2$
Sınır bölgelerde $\Phi_x$ 'lerin değerlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı	$1642m^2(N + M - 4)$
İç bölgelerde $\Phi_x$ 'lerin değerlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı	$1081m^2(N - 2)(M - 2)$
Tüm integral noktalarında $\Phi_x$ 'lerin değerlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı	$(1081MN - 520(N + M) + 260)m^2$

$K$  matrisindeki  $\Phi_y$ 'lerin integral noktalarındaki değerlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı ise  $\Phi_x$ 'lere eşittir. Öte yandan (165) denklem sisteminde verilen  $K$  matrisinden görüleceği üzere sınır bölgelerde şekil fonksiyonlarının değerleri hesaplanmalıdır. Sınır bölgelerindeki integaller 1 boyutlu olup Teorem 15'in ispatı ile

$$\int_a^b \phi_i(x, c)\phi_j(x, c)dx = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^m \omega_i \phi_i(\alpha + \beta\xi_k, c)\phi_j(\alpha + \beta\xi_k, c)|J|$$

şeklinde hesaplanır. Dolayısı ile integral noktalarında şekil fonksiyonlarının değerleri bulunmalıdır. Önerme 22'de keyfi bir integral noktasında şekil fonksiyonunun değerinin hesaplanması için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$34N_x + 23$$

olarak elde edilmişti. 1 boyutlu integraller için her bir integral hücrelerinde  $m$  adet Gauss noktası kullanıldığından  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  aralığındaki aritmetik işlem sayısı

$$(34N_x + 23)m$$

olarak elde edilir. Öte yandan Teorem 15'in ispatından bilindiği üzere her bir hücreye etki eden ağırlık fonksiyonları sayıları farklı olup  $d_{max} = 2$  için 1. ve sonuncu aralıklarda  $N_x = 9$ , diğer aralıklarda  $N_x = 12$ 'dir. Dolayısı ile

$$\int_a^b \phi_i(x, c)\phi_j(x, c)dx$$

integralindeki şekil fonksiyonlarının değerlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı Teorem 7'nin ispatında yapılan işlemlere benzer işlemler ile

$$2 \cdot (34 \cdot 9 + 23) \cdot m + (34 \cdot 12 + 23) \cdot (N - 2) \cdot m = 658m + 431(N - 2)m$$



olarak elde edilir.  $x$  değişkeni üzerindeki diğer integral için aritmetik işlem sayısı aynı olup  $y$  değişkeni üzerindeki integral de, integral hücresi  $M$  adet alt aralığa bölüldüğünden bu integrallerin her biri için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$658m + 431(M - 2)m$$

dir. Dolayısı ile  $K$  integralindeki tek katlı integralleri hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$2(658m + 431(N - 2)m) + 2(658m + 431(M - 2)m)$$

olarak elde edilir. Böylece  $K$  matrisindeki şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin değerlerinin hesaplanması için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$\begin{aligned} & 2 \left( (1081MN - 520(N + M) + 260)m^2 + (431(N - 2) + 431(M - 2))m \right) \\ & + 4 \cdot 658m = (2162NM - 1040(N + M) + 520)m^2 \\ & + (862(N + M) - 816)m \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Öte yandan Gauss nokta sayısı  $m = 3$  olarak seçildiğinden integral noktalarında  $K$  matrisindeki şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin değerlerinin hesaplanması için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$19458NM - 6774(N + M) + 2232 \equiv O(NM)$$

olarak elde edilir.

Teorem 17,  $K$  matrisindeki şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin tüm integral noktalarındaki değerlerini hesaplamada gerekli olan aritmetik işlem sayısını gösterir. Teorem 15 ise bu şekil fonksiyonlarının bilindiği varsayımı altında  $K$  matrisini hesaplamadaki aritmetik işlem sayısını gösterir. Dolayısı ile bu iki işlemin toplamı ise  $K$  matrisini hesaplamadaki toplam aritmetik işlem sayısını verir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 2.**  $\Omega = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  bölgesinde tanımlı olan (158) problemi için  $[a, b]$  aralığı eşit aralıklı  $N$  adet alt aralığa,  $[c, d]$  aralığı ise  $M$  adet alt aralığa bölünsün ve bu aralıkların  $x$  ve  $y$  yönlerindeki uç noktaları düğüm noktaları olarak seçilsin. Eğer  $d_{max} = 2$  seçilir ve Kesim 3.3.7'de elde edilen  $K$  matrisi Kesim 3.3.8'de verilen sayısal integral alma yöntemi ile hesaplanırsa  $K$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$\begin{aligned} & (4210NM - 2832(N + M) + 2088)m^2 + (1726(N + M) - 2328)m \\ & = 37890NM - 20310(N + M) + 11808 \equiv O(NM) \end{aligned}$$

dir.

### 3.3.12. Şekil Fonksiyonlarının Öteleme Özelliği Yardımıyla $K$ Matrisinin Elde Edilmesi

Kesim 3.3.11’de  $K$  matrisindeki şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin herhangi bir integral noktasında hesaplanması için gerekli aritmetik işlem sayıları elde edilerek Sonuç 2’de  $K$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı verildi. Bu bölümde ise düzgün dağıtılmış düğüm noktaları için öteleme özelliği yardımıyla  $K$  matrisini hesaplamadaki aritmetik işlem sayısı azaltılmaktadır.

Teorem 18’de öteleme özelliği kullanılması durumunda şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin hesaplanmasında gerekli aritmetik işlem sayısı verilmektedir.

**Teorem 18.**  $\Omega = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  bölgesinde tanımlı olan (158) problemi için  $[a, b]$  aralığı eşit aralıklı  $N$  adet alt aralığa,  $[c, d]$  aralığı ise  $M$  adet alt aralığa bölünsün ve bu aralıkların  $x$  ve  $y$  yönlerindeki uç noktaları düğüm noktaları olarak alınsın. Eğer  $d_{max} = 2$  seçilir ve (165) sisteminde verilen  $K$  matrisi öteleme özelliği yardımıyla elde edilirse  $K$  matrisindeki şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin değerlerinin hesaplanması için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$O(1)$$

kadardır.

**İspat.** Kesim 3.3.10 Teorem 16’nın ispatında belirtildiği üzere eşit olarak dağıtılmış düğüm noktaları için iç bölgelerde ve sınır bölgelerde öteleme özelliği sağlanır. Dolayısı ile bu bölgelerde, sadece 1 hücredeki integral noktalarında şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin değerleri belirlenir ve sonuçlar diğer bölgelere ötelenir. Önerme 22 ve 23 yardımıyla ile bir hücrede  $K$  matrisinin  $\Omega$  üzerindeki integrallerini elde etmede gerekli aritmetik işlem sayıları Tablo 20’deki gibi verilir.

Tablo 20. Şekil fonksiyonlarının türevlerinin bir integral hücresinde elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısı

	Aritmetik İşlem Sayısı
Köşe bölgelerde $\Phi_x, \Phi_y$ ’lerin değerlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı	$626m^2$
Sınır bölgelerde $\Phi_x, \Phi_y$ ’lerin değerlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı	$821m^2$
İç bölgelerde $\Phi_x, \Phi_y$ ’lerin değerlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı	$1081m^2$

Her bir sınır hücrede ayrı ayrı öteleme özelliği mevcut olduğundan sınır hücrelerdeki toplam aritmetik işlem sayısı hesaplanması için Tablo 20’de verilen değerler 4 ile çarpılmalıdır. Köşelerde öteleme özelliği kullanılmadığından  $K$  matrisindeki

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial y} d\Omega$$

integralini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$2 \cdot 4 \cdot 626m^2 + 2 \cdot 4 \cdot 821m^2 + 2 \cdot 1081m^2 = 13738m^2$$

olarak bulunur.

Tek katlı integraller için Teorem 16’den bilindiği üzere sınırdaki aralıklar hariç diğer aralıklarda öteleme özelliği sağlanır. Önerme 22 ile keyfi bir noktada şekil fonksiyonlarının değerlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$34N_x + 23$$

dir. Her bir aralıkta  $m$  adet Gauss noktası kullanıldığından her bir aralıktaki aritmetik işlem sayısı

$$(34N_x + 23)m$$

olup sınıra komşu aralıklarda  $N_x = 9$ , diğer aralıklarda  $N_x = 12$ ’dir.  $d_{max} = 2$  için sınıra komşu bölgelerde öteleme özelliği geçerli olmadığından bu aralıklarda şekil fonksiyonlarının değerlerinin elde edilmesi için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$2 \cdot (34 \cdot 9 + 23) \cdot m = 658m$$

dir. Sınıra komşu olmayan bir iç bölgede ise şekil fonksiyonlarının integral noktalarındaki değerlerini elde etmek için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$(38 \cdot 12 + 30)m = 486m$$

dir. Diğer iç aralıklarda öteleme özelliği sağlandığından  $K$  matrisindeki

$$\int_a^b \phi_i(x, c) \phi_j(x, c) dx$$

integralindeki şekil fonksiyonlarının değerlerini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$658m + 486m = 1144m$$

olarak bulunur. 4 sınır integrali için benzer sonuçlar elde edileceğinden  $K$  matrisindeki sınır integrallerini ilgili integral noktalarında hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$4 \cdot 1144m = 4576m$$

dir.

Sonuç olarak  $K$  matrisindeki şekil fonksiyonlarının ve türevlerinin integral noktalarındaki değerlerinin hesaplanması için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$13738m^2 + 4576m$$

şeklinde bulunur. Öte yandan Gauss nokta sayısı 3 seçildiğinden öteleme özelliği yardımıyla integral noktalarında  $K$  matrisini hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısı

$$13738 \cdot 9 + 4576 \cdot 3 = 137370 \equiv O(1)$$

dir.

Teorem 16 ve 18 ile öteleme özelliği yardımıyla  $K$  matrisini hesaplamadaki toplam aritmetik işlem sayısı Sonuç 3'deki gibi elde edilir.

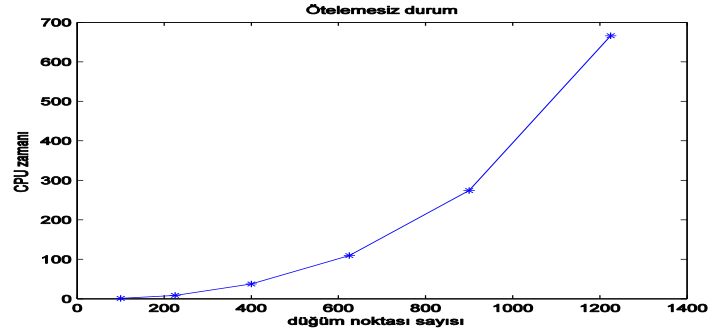
**Sonuç 3.**  $\Omega = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  bölgesinde tanımlı olan (158) problemi için  $[a, b]$  aralığı eşit aralıklı  $N$  adet alt aralığa,  $[c, d]$  aralığı ise  $M$  adet alt aralığa bölünsün ve bu aralıkların  $x$  ve  $y$  yönlerindeki uç noktaları düğüm noktaları olarak seçilsin. Eğer  $d_{max} = 2$  seçilir ve (165)'deki  $K$  matrisi öteleme özelliği yardımıyla elde edilirse  $K$  matrisini hesaplamak için gerekli aritmetik işlem sayısı

$$22986m^2 + 8248m = 231618 \equiv O(1)$$

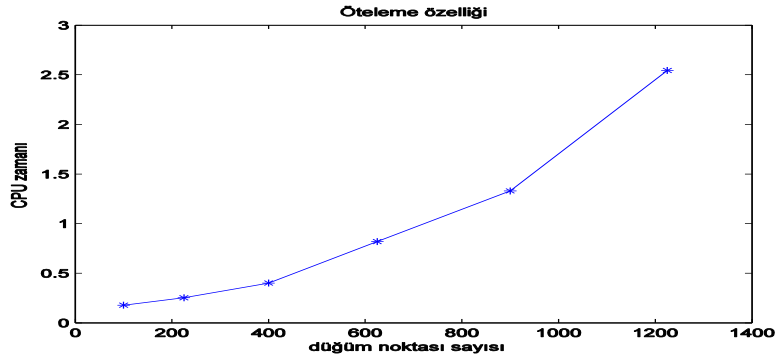
dir.

**Not.**  $d_{max} = 2$  parametre değeri için elde edilen sonuçlara benzer işlemler ile diğer parametre değerleri için de gerekli aritmetik işlem sayısını hesaplamak mümkündür. Fakat ilk önce hangi bölgelerde öteleme özelliğinin sağlandığı belirlenmelidir.

**Örnek.** Öteleme özelliği yardımıyla aritmetik işlem sayısında kazanç sağlandığı gibi buna paralel olarak CPU zamanında da önemli değişime neden olması beklenir. Bunu gözlemek için Şekil 67 ve Şekil 68'i inceleyelim. Şekil 67 toplam düğüm nokta sayısına karşılık öteleme özelliği kullanılmadan (167)'de verilen  $R$  matrisini elde etmek için gerekli CPU zamanlarını gösterirken, Şekil 68 öteleme özelliği yardımıyla gerekli CPU zamanlarını göstermektedir. Burada Gauss nokta sayısı  $m = 3$  seçilmiştir.



Şekil 67. Öteleme özelliği kullanılmadığı durumda (167)'de verilen  $R$  matrisini hesaplamadaki CPU zamanları



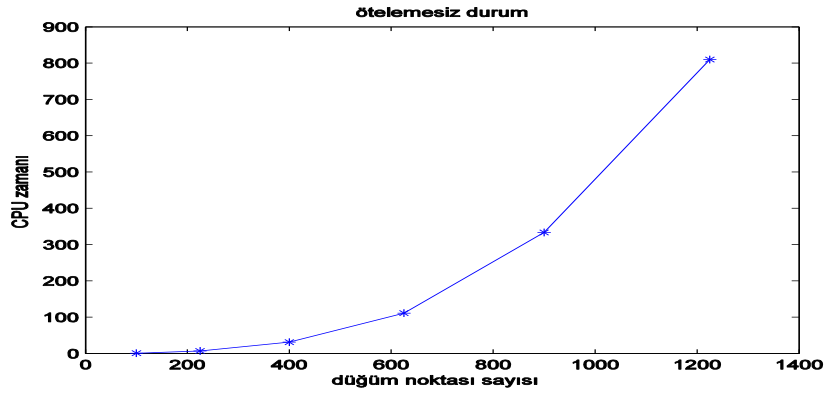
Şekil 68. Öteleme özelliği kullanılması durumunda (167)'de verilen  $R$  matrisini hesaplamadaki CPU zamanları

Şekil 67 ve Şekil 68'den görüleceği üzere düğüm noktaları sayısı artırıldığında CPU zamanlarında büyük bir fark oluşmaktadır. Bu sayede programın hızlanması sağlanarak kısa sürede sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

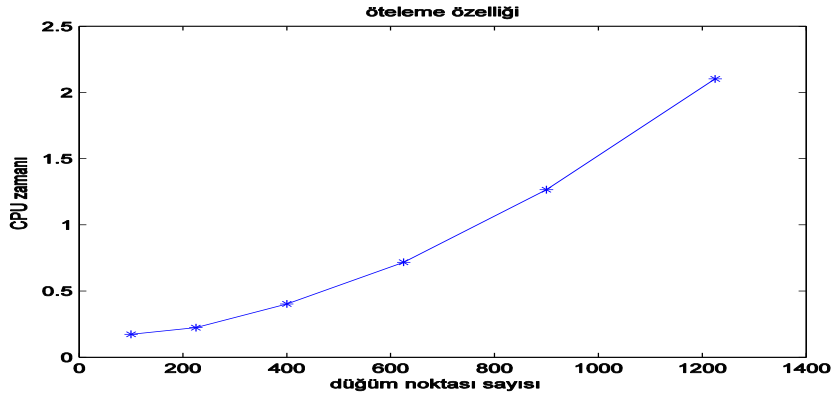
(165) ile verilen sistem denkleminde görüleceği üzere  $K$  matrisini elde etmek için  $\Omega$  üzerinden integraller hesaplanacağı gibi Penaltı yönteminden dolayı  $\Gamma$  sınır bölgelerinde de integraller hesaplanmalıdır. Sınır bölgelerde de öteleme özelliği sağlanacağından

$$\int_{\Gamma} uv d\Gamma$$

integrali hızlı bir şekilde hesaplanabilir. Dolayısı ile öteleme özelliği ile sistem denklemleri elde edilirken hem çözüm bölgesi üzerindeki integralleri hem de sınır bölgelerindeki integralleri hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayılarında önemli bir kazanç sağlanır. Böylece bilgisayarın sistem denklemini hesaplamadaki CPU zamanlarında bir kazanç sağlanmış olur. Şekil 69 ve Şekil 70 ise (165) ile verilen sistem denklemindeki  $K$  matrisini elde etmek için gerekli CPU zaman değerlerini göstermektedir.



Şekil 69. Öteleme özelliği kullanılmadığı durumda  $K$  matrisini hesaplamadaki CPU zamanları



Şekil 70. Öteleme özelliği kullanıldığı durumda  $K$  matrisini hesaplamadaki CPU zamanları

Şekil 69 ve Şekil 70'den öteleme özelliği yardımıyla sistem denkleminin elde edilmesi durumunda ötelemesiz duruma göre CPU zamanlarında büyük bir fark olduğu görülür.

Tablo 21'de ötelemeli ve ötelemesiz durumlarda  $K$  matrisini elde etmedeki CPU zamanları ve

$$Oran = \frac{\text{Ötelemesiz durumda CPU değeri}}{\text{Ötelemeli durumda CPU değeri}} \quad (171)$$

verilmiştir.

Tablo 21. (165)'de verilen  $K$  matrisini elde etmede CPU zamanları ve (171)'deki oran

Düğüm noktası sayısı	Ötelemesiz durumda CPU zamanları( $sn$ )	Ötemeli durumda CPU zamanları( $sn$ )	Oran
$10 \times 10$	0.84209	0.17222	4.88962
$15 \times 15$	6.91531	0.22294	31.0187
$20 \times 20$	31.3473	0.40171	78.0347
$25 \times 25$	111.3025	0.71629	155.3875
$30 \times 30$	333.3420	1.26498	263.5156
$35 \times 35$	809.6777	2.101735	385.2426

Tablo 21'de verilen oran değerlerinden görüleceği üzere düğüm nokta sayısının büyük değerlerinde ötelemeli durumdaki kazanç büyüktür.

Sistem denklemini elde etmek için gerekli aritmetik işlem sayıları hesaplandıktan sonra problemin sayısal çözümünü elde ederek çözüm grafiklerini inceleyelim.

**Örnek 1.** (158) ile verilen Poisson denklemini ağırsız eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile çözelim. Fakat 1 boyutlu uzayda olduğu gibi ilk olarak uygun  $d_{max}$  parametresini sayısal olarak belirleyelim.

Uygun  $d_{max}$  parametresinin seçimi için aşağıdaki üç problemi göz önüne alalım.

$$1. u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u(0, y) = 0, u(\pi, y) = 0, u(x, 0) = 0, u(x, 1) = \sin(x)$$

$$2. u_{xx} + u_{yy} = 4\cos(x^2 + y^2) - 4(x^2 + y^2)\cos(x^2 + y^2)$$

$$u(-2, y) = \sin(y^2 + 4), u(2, y) = \sin(y^2 + 4),$$

$$u(x, -2) = \sin(x^2 + 4), u(x, 2) = \sin(x^2 + 4)$$

$$3. u_{xx} + u_{yy} = 4e^{-(x^2+y^2)} + 4(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$u(-2, y) = e^{-(4+y^2)}, u(2, y) = e^{-(4+y^2)}, u(x, -2) = e^{-(4+x^2)}, u(x, 2) = e^{-(4+x^2)}$$

Bu problemlerin analitik çözümleri sırasıyla

$$u(x, y) = \frac{\sinh(y) \sin(x)}{\sinh(1)}, u(x, y) = \sin(x^2 + y^2), u(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

dir. Ele alınan problemler için 1 boyutlu uzayda olduğu gibi farklı  $d_{max}$  değerlerinde

$$e = \sqrt{\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^n (u_{gerçek} - u_{sayısal})^2} \quad (172)$$

grid normunu hesaplayalım. Burada  $\Delta x$  ve  $\Delta y$  sırasıyla düzgün dağıtılmış düğüm noktalarının  $x$  ve  $y$  yönlerindeki eşit uzaklıklarıdır. Bu takdirde  $\alpha = 10^4$  parametre değeri için Tablo 22 elde edilir.

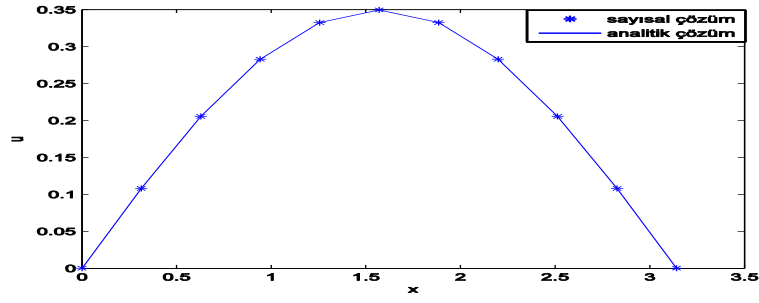
Tablo 22. Poisson probleminin farklı  $d_{max}$  parametreleri için (172)'deki hata tablosu

	Problem 1 için hata değerleri	Problem 2 için hata değerleri	Problem 3 için hata değerleri
Aralık sayısı $d_{max}$	$10 \times 10$	$20 \times 20$	$10 \times 10$
2	$4.4430 \times 10^{-4}$	0.0707	0.0011
2.25	$5.0350 \times 10^{-4}$	0.0723	0.0013
2.5	$3.7184 \times 10^{-4}$	0.0501	$4.9115 \times 10^{-4}$
2.75	$4.3078 \times 10^{-4}$	0.0271	0.0013
3	$3.3716 \times 10^{-4}$	0.0114	0.0012
3.25	$1.4687 \times 10^{-4}$	0.0044	$8.9476 \times 10^{-4}$
3.5	$1.8675 \times 10^{-4}$	0.0041	0.0017
3.75	$1.5030 \times 10^{-4}$	0.0051	0.0014
4	$1.1654 \times 10^{-4}$	0.0073	0.0012
4.25	$1.6611 \times 10^{-4}$	0.0054	$8.8692 \times 10^{-4}$
4.5	$3.8540 \times 10^{-4}$	0.0135	0.0013

Tablo 22'nin ikinci satırında  $x$  ve  $y$  eksenlerinde alınan aralık sayıları verilmiş olup diğer satırlarında her bir problem için farklı  $d_{max}$  değerlerinde oluşan hatalar gösterilmiştir. Birinci problem için en küçük iki hata değeri  $d_{max} = 4, d_{max} = 3.25$ 'de, ikinci problemde  $d_{max} = 3.5, d_{max} = 3.25$ 'de üçüncü problemde ise  $d_{max} = 2.5, d_{max} = 4.25$ 'de oluşmaktadır. Ayrıca üçüncü problemde  $d_{max} = 3.25$ 'deki hata değeri  $d_{max} = 4.25$ 'deki hata değerine çok yakındır. Bu üç problem karşılaştırıldığında her üç problemin de küçük hata değerine sahip olduğu 3.25 değeri  $d_{max}$  değeri olarak seçilebilir. Bundan sonraki kısımlarda  $d_{max} = 3.25$  seçilmekte ve sayısal çözümler bu parametre değeri ile elde edilmektedir.

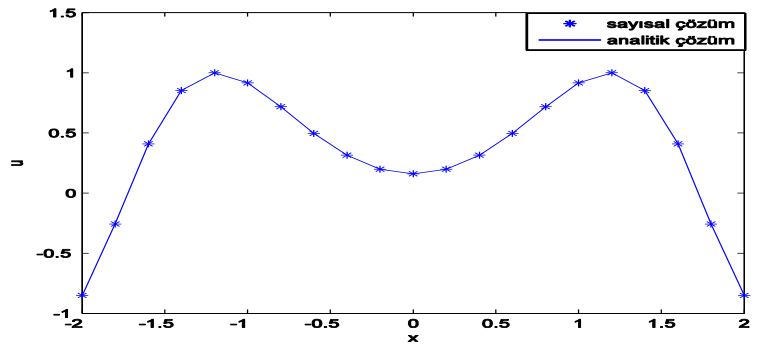
$d_{max} = 3.25$  için  $y = 0.4$  noktasındaki 1. problemin çözüm grafiği Şekil 71'deki gibidir.



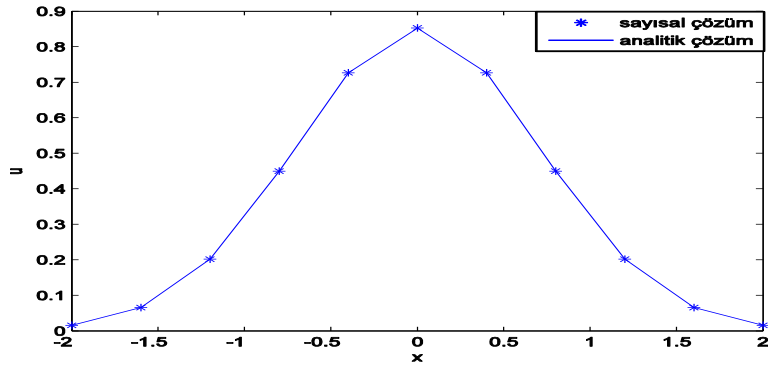


Şekil 71. Problem 1 için  $y = 0.4$ 'deki çözüm grafikleri

$y = 0.4$  noktasındaki Problem 2 ve 3'ün çözüm grafikleri ise Şekil 72 ve 73'deki gibidir.



Şekil 72. Problem 2'nin  $y = 0.4$ 'deki çözüm grafikleri



Şekil 73. Problem 3'ün  $y = 0.4$ 'deki çözüm grafikleri

Problemlerin  $y = 0.4$ 'deki çözüm grafiklerinden görüleceği üzere sayısal çözüm ile analitik çözüm birbiriyle uyumludur.

### 3.3.13. 2 Boyutlu Adaptif Bir Yöntem

#### 3.3.13.1. Yapılan Çalışmalar

Ağırsız eleman bağımsız Galerkin yönteminde hata analizi ve adaptivite ile ilgili birçok çalışma yapılmış olup bu çalışmalardan bazıları Chung ve Belytschko(Chung ve Belytschko, 1998), Rossi ve Alves(Rossi ve Alves, 2004), Gavate, Falcon ve Ruiz(Gavate vd., 2001), Gavate, Cuesta ve Ruiz(Gavate vd., 2001), Liu ve Tu(Liu ve Tu, 2002) , Lee ve Zhou(Lee ve Zhou, 2004a, 2004b), Lee, Chung ve Choi(Lee vd., 2003), Liu ve arkadaşlarının(Liu vd., 2010) çalışmalarıdır.

Bu çalışmada hareketli en küçük kareler yönteminin yaklaşım hatası tabanlı adaptif bir yöntem önerilmektedir. Yaklaşım hatası tabanlı adaptif yöntemler günümüze kadar bazı çalışmalarda kullanılmıştır. Bu çalışmalar arasında Combe ve Korn(Combe ve Korn, 1998), Le, Askes ve Gilbert(Le vd., 2010) yapmış oldukları çalışmalar gösterilebilir. Bu çalışmaların temeli hareketli en küçük kareler yönteminin 2 boyutlu uzaydaki yaklaşım hatasının büyük olduğu hücrelerin belirlenmesidir. Bu sayede yaklaşım hatasının büyük olduğu bölgelere yeni noktalar eklenerek adaptivite gerçekleştirilmektedir.

Kesim 3.1.9'da 1 boyutlu uzayda elde edilen yaklaşım hatasını 2 boyutlu uzaya genişletelim. Bilindiği üzere hata gerçek çözümle ile sayısal çözüm arasındaki farka eşittir:

$$e(\mathbf{X}) = u^h(\mathbf{X}) - u(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{X})u_i - u(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \mathbb{R}^2.$$

$u(\mathbf{X})$  fonksiyonu,  $\mathbf{X}$  noktasında Taylor yaklaşımına sahip bir fonksiyon olsun.  $u$  fonksiyonunun  $\mathbf{X}_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N$  düğüm noktalarındaki Taylor açılımı ile

$$u(\mathbf{X}_i) = u(\mathbf{X}) + u_x(\mathbf{X})(x_i - x) + u_y(\mathbf{X})(y_i - y) + \frac{1}{2}u_{xx}(\bar{\mathbf{X}})(x_i - x)^2 \\ + u_{xy}(\bar{\mathbf{X}})(x_i - x)(y_i - y) + \frac{1}{2}u_{yy}(\bar{\mathbf{X}})(y_i - y)^2, \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X} + v(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}), 0 < v < 1$$

elde edilir. Burada  $N$ ,  $\mathbf{X}_i$ 'nin destek bölgesindeki düğüm noktası sayısıdır. Taylor açılımı hata fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$e(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{X})u_i - u(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{X}) \left( u(\mathbf{X}) + u_x(\mathbf{X})(x_i - x) + u_y(\mathbf{X})(y_i - y) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}u_{xx}(\bar{\mathbf{X}})(x_i - x)^2 + u_{xy}(\bar{\mathbf{X}})(x_i - x)(y_i - y) + \frac{1}{2}u_{yy}(\bar{\mathbf{X}})(y_i - y)^2 \right) - u(\mathbf{X})$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
e(\mathbf{X}) &= \left( \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{X}) - 1 \right) u(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{X})(x_i - x)u_x(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{X})(y_i - y)u_y(\mathbf{X}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{X})(x_i - x)^2 u_{xx}(\bar{\mathbf{X}}) + \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{X})(x_i - x)(y_i - y)u_{xy}(\bar{\mathbf{X}}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{X})(y_i - y)^2 u_{yy}(\bar{\mathbf{X}})
\end{aligned}$$

elde edilir. 1 boyutlu uzaydaki uyumluluk şartları ise 2 boyutlu uzayda

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{X}) &= 1 \\
\sum_{i=1}^N x_i \phi_i(\mathbf{X}) &= x \\
\sum_{i=1}^N y_i \phi_i(\mathbf{X}) &= y
\end{aligned}$$

şeklinde olduğundan hata terimindeki ilk 3 terim sıfıra eşittir. Dolayısı ile

$$\begin{aligned}
e(\mathbf{X}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{X})(x_i - x)^2 u_{xx}(\bar{\mathbf{X}}) + \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{X})(x_i - x)(y_i - y)u_{xy}(\bar{\mathbf{X}}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{X})(y_i - y)^2 u_{yy}(\bar{\mathbf{X}})
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. 1 boyutlu uzayda yapılan işlemlere benzer olarak şekil fonksiyonları sınırlı fonksiyonlar olduğundan  $\exists c > 0: \forall i = 1, 2, \dots, N$  için

$$|\phi_i(\mathbf{X})| \leq c$$

ve  $\phi_i(\mathbf{X})$  fonksiyonları bir kompakt destek bölgesine sahip olduğundan

$$|x_i - x| \leq h_i^x, |y_i - y| \leq h_i^y$$

dir. Dolayısı ile

$$\|u^h(\mathbf{X}) - u(\mathbf{X})\|_{L^2} \leq ch^2 \left\| \frac{1}{2} u_{xx}(\bar{\mathbf{X}}) + u_{xy}(\bar{\mathbf{X}}) + \frac{1}{2} u_{yy}(\bar{\mathbf{X}}) \right\|_{L^2} \quad (173)$$

olarak elde edilir. Burada,  $h = \max_{1 \leq i \leq N} \{h_i^x, h_i^y\}$ 'dir.

Yapılan çalışmalarda genel olarak (173) eşitsizliğinin sağındaki değer belirli bir tolerans değerlerinden büyük olduğu hücelere yeni noktalar eklenerek bu bölgelerde oluşan hata değerleri azaltılmıştır.

### 3.3.13.2. Adaptif Algoritma

Bu çalışmada, 1 boyutlu uzayda önerilen adaptif yöntemlerde olduğu gibi 2 boyutlu uzayda da yaklaşım hatası tabanlı hata analizi yapılmaktadır. (173) eşitsizliğinden görüleceği üzere hata 2. türevlere bağlıdır. Fakat eleman bağımsız Galerkin yönteminde ikinci türevi hesaplamada gerekli aritmetik işlem sayısı oldukça büyük olduğu için ikinci türevlerin sayısal olarak hesaplanması gerekir. Bu çalışmada bu değerler sonlu fark yaklaşımları ile sayısal olarak hesaplanmaktadır. Ayrıca, bu çalışmada literatürdeki çalışmalardan farklı olarak her bir integral hücrelerinde

$$ch^2 \left\| \frac{1}{2} u_{xx}(\bar{X}) + u_{xy}(\bar{X}) + \frac{1}{2} u_{yy}(\bar{X}) \right\|_{L_2(\Omega)}$$

yaklaşım hatasının belli bir tolerans değerinden büyük olduğu bölgelere adaptivite uygulamak yerine Hessian matrisi tabanlı adaptif bir yöntem önerilmektedir. Bu yöntem ile her bir integral hücrelerinde

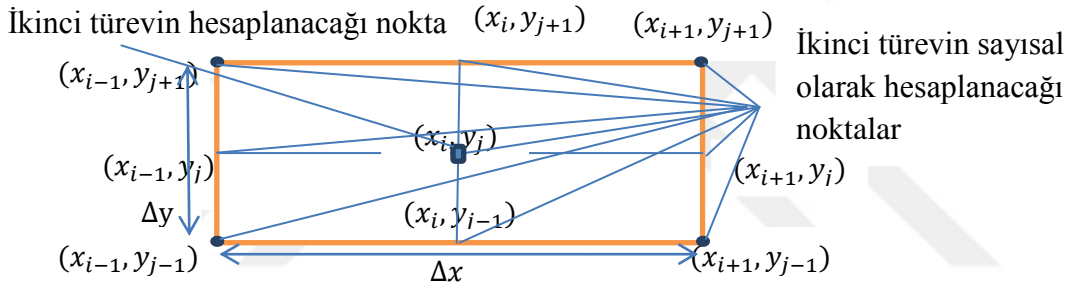
$$H = \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{bmatrix} \quad (174)$$

Hessian matrisinin sonsuz normunun kullanıcı tarafından belirlenen tolerans değerinden büyük olduğu bölgelere yeni noktalar ilave edilmektedir.

Adaptif yöntemde, dikdörtgensel integral hücrelerine bölünmüş bir bölgede, her bir integral hücrelerinin orta noktasında Hessian matrisinin sonsuz normunun sayısal değeri hesaplanmakta ve bu değer kullanıcı tarafından belirlenen tolerans değerinden büyük olduğunda orta nokta düğüm noktası olarak sisteme eklenmektedir. Ayrıca ilgili integral hücreleri 4 yeni integral hücrelerine bölünmektedir. Adaptivite için aşağıdaki algoritma önerilmektedir.

Algoritma(ALG-5): 2 boyutlu uzayda Hessian tabanlı adaptif algoritma

1. Girdi:  $u_i, i = 1, 2, \dots, n$  :ağ değerleri,  $\Delta x$ : eşit uzaklıklar ile dağıtılmış düğüm noktalarının  $x$  eksenindeki adım uzunluğu,  $\Delta y$ : eşit uzaklıklar ile dağıtılmış düğüm noktalarının  $y$  eksenindeki adım uzunluğu,  $(X_i, Y_i)$ : düğüm noktaları,  $(x_j, y_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ : integral hücrelerinin köşe noktaları
2. Parametre:  $\varepsilon$ : tolerans değeri,  $\delta$ : durdurma kriteri
3. Dikdörtgensel integral hücrelerinin köşe noktalarını belirle.
4. Ağ değerlerini kullanarak her bir integral hücresinin orta noktasında Hessian matrisini aşağıdaki gibi hesapla.



Şekil 74. Adaptivite yapılan integral hücresi

$$u_{xx}(x_i, y_j) \cong \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{(\Delta x/2)^2}$$

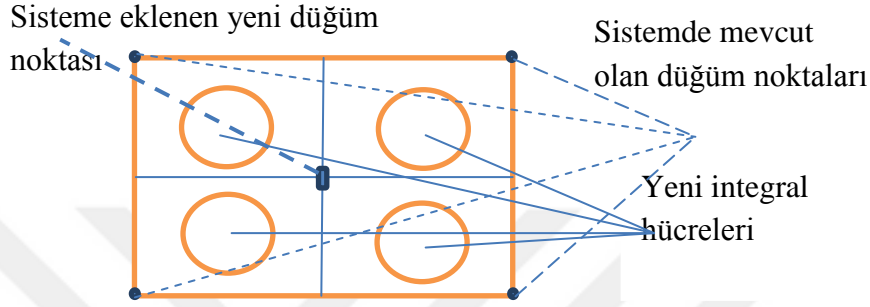
$$\begin{aligned} u_{xy}(x_i, y_j) &\cong (u_x)_y \cong \frac{u_x(x_i, y_{j+1}) - u_x(x_i, y_{j-1})}{\Delta y} \\ &\cong \frac{\frac{u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_{i-1}, y_{j+1})}{\Delta x} - \frac{u(x_{i+1}, y_{j-1}) - u(x_{i-1}, y_{j-1})}{\Delta x}}{\Delta y} \\ &\cong \frac{u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_{i-1}, y_{j+1}) - u(x_{i+1}, y_{j-1}) + u(x_{i-1}, y_{j-1})}{\Delta x \Delta y} \end{aligned}$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) \cong \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{(\Delta y/2)^2}$$

$$H = \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{bmatrix}$$

5. Her bir integral hücresinin orta noktasında sayısal olarak hesaplanan Hessian matrisinin sonsuz normunu bul.

5.1. Eğer Hessian matrisinin sonsuz normu kullanıcı tarafından belirlenen tolerans değerinden( $\varepsilon$ ) büyük ise bu noktayı düğüm noktası olarak sisteme ekle ve integral hücrelerini 4 yeni dikdörtgene ayır.



Şekil 75. Adaptif düğüm noktası

5.2. Eğer Hessian matrisinin sonsuz normu kullanıcı tarafından belirlenen toleranstan küçükse hiçbir işlem yapmadan devam et.

6. 3-5'deki işlemleri kullanıcı tarafından belirlenen en küçük dikdörtgen alanının ( $\delta$ ) oluşumuna kadar devam et.

7. Çıktı: Adaptif düğüm noktaları

Her bir integral hücresinde Hessian matrisinin hesaplanmasında ikinci türev için sonlu fark yaklaşımları kullanılmıştır. Fakat başlangıçta düzgün düğüm noktaları ile elde edilen çözümde sadece düğüm noktalarındaki sayısal değerler,  $u_i, i = 1, 2, \dots, n$ , elde edilir. Dolayısı ile sayısal türevi hesaplamak için gerekli olan diğer noktalarındaki sayısal değerlerin hesaplanması gerekir. Bunun için kullanılan yöntem ise adaptivite uygulanmadan önce elde edilen sayısal çözümü bu noktalarda interpolate etmektir. Yani,  $u_i, i = 1, 2, \dots, n$  adaptiviteden önce ağırsız yöntem ile elde edilen düğüm parametreleri ve  $\phi_i$  ise şekil fonksiyonları olmak üzere  $(x_i, y_j)$  noktasındaki sayısal değer

$$u(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_i, y_j) u_i$$

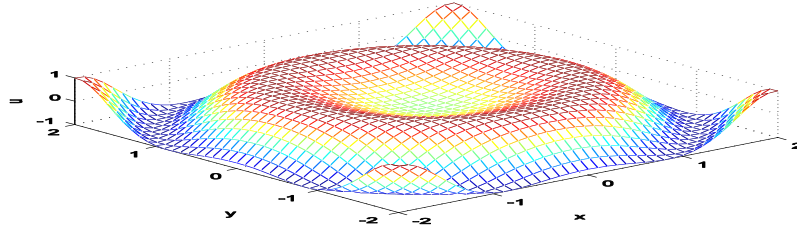
şeklinde hesaplanır.

Önerilen adaptif yöntem ile ağ oluşturma stratejisinin nasıl adaptif düğüm noktaları oluşturduğunu gözlemlemek için ilk olarak ilgili yöntemi fonksiyonlar üzerinde test edelim. Ağızsız eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile adaptif çözümlerin davranışları ise Kesim 3.3.13.4’de incelenmektedir.

### 3.3.13.3. Adaptif Yöntem ile 2 Değişkenli Fonksiyonlarda Ağ Üretimi

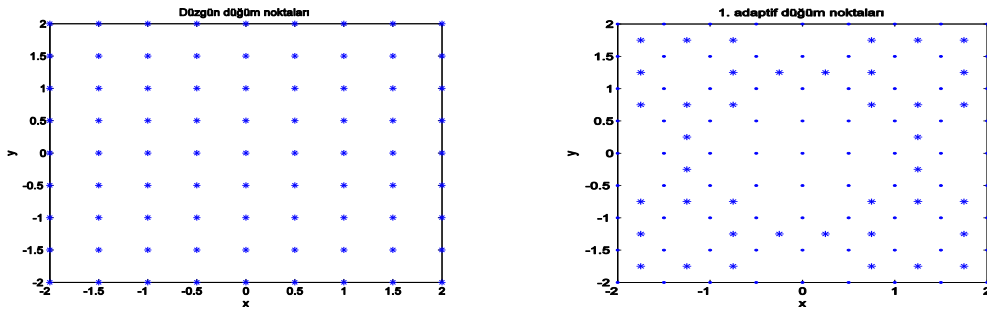
Bu bölümde farklı fonksiyonlar üzerinde Hessian tabanlı adaptivite ile adaptif düğüm noktaları elde edilmektedir. Genel olarak salınım yapan, hızlı değişen veya sınır katmanı içeren fonksiyonlar üzerinde adaptivite uygulanmaktadır.

**Örnek 1.**  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ ,  $-2 \leq x, y \leq 2$  fonksiyonunun grafiği Şekil 76’daki gibidir.

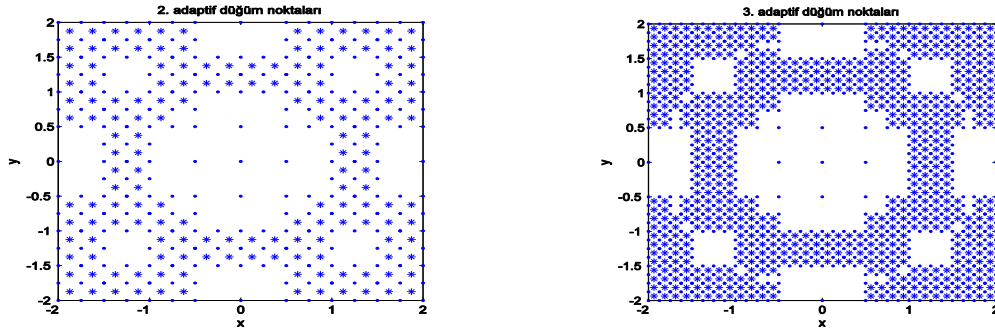


Şekil 76. Örnek 1’deki  $f$  fonksiyonunun grafiği

$f$  fonksiyonu için adaptif yöntem  $\varepsilon = 2.5$  tolerans değeri ve  $\delta = 0.001$  durdurma kriteri ile başlangıçta  $8 \times 8$ ’lik düğüm noktaları alınarak uygulanırsa Şekil 77 ve 78’deki düzgün ve adaptif düğüm noktaları elde edilir.



Şekil 77. Örnek 1’deki fonksiyon için düzgün ve 1. adaptif düğüm noktaları

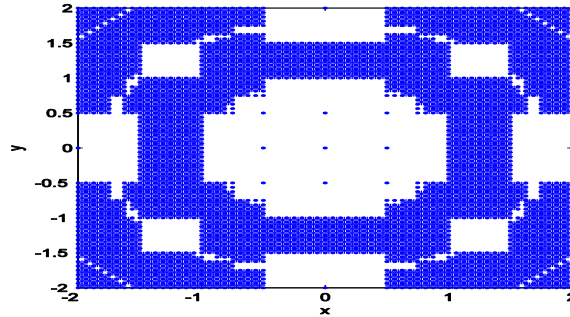


Şekil 78. Örnek 1'deki fonksiyon için 3. ve 4. adaptif düğüm noktaları

Adaptif düğüm noktalarının grafiklerinde nokta ile gösterilen düğüm noktaları adaptiviteden önceki düğüm noktalarını gösterirken yıldız ile gösterilen düğüm noktaları ise adaptivite ile sisteme eklenen düğüm noktalarını göstermektedir. 3. adaptivite ile minimum alana sahip dikdörtgenin alanı

$$0.0625 \cdot 0.0625 \cong 0.0039$$

olduğundan problemdeki durdurma kriteri sağlanmaz. Dolayısı ile probleme 4. adaptivite uygulanmalıdır. Bu takdirde Şekil 79'daki adaptif düğüm noktaları elde edilir.



Şekil 79. 4. adaptif düğüm noktaları

4. adaptivite ile en küçük alana sahip dikdörtgenin alanı

$$0.03125 \cdot 0.03125 \cong 9.765 \times 10^{-4}$$

olup durdurma şartı sağlanmış olur. Dolayısı ile tekrar bir adaptiviteye ihtiyaç yoktur.

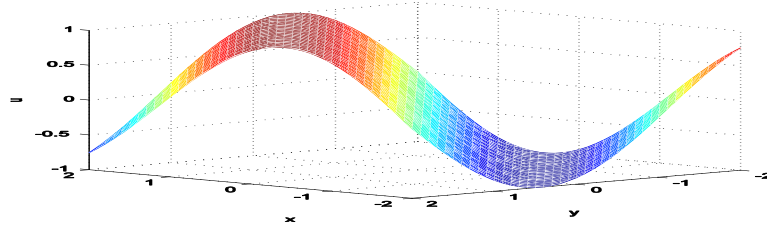
Öte yandan  $f$  fonksiyonun ve adaptif düğüm noktalarının grafiklerinden görüleceği üzere Hessian tabanlı adaptivite ile ikinci türevin büyük olduğu bölgelere yeni düğüm noktaları eklenmiştir. Dolayısı ile adaptif yöntem ile problemin ikinci türevinin büyük olduğu bölgelerde fazla düğüm noktası alındığı gözlemlenir.



**Örnek 2.** Salınım yapan fonksiyonlar üzerinde adaptivitenin düğüm noktalarını nasıl dağıttığını gözlemlemek için

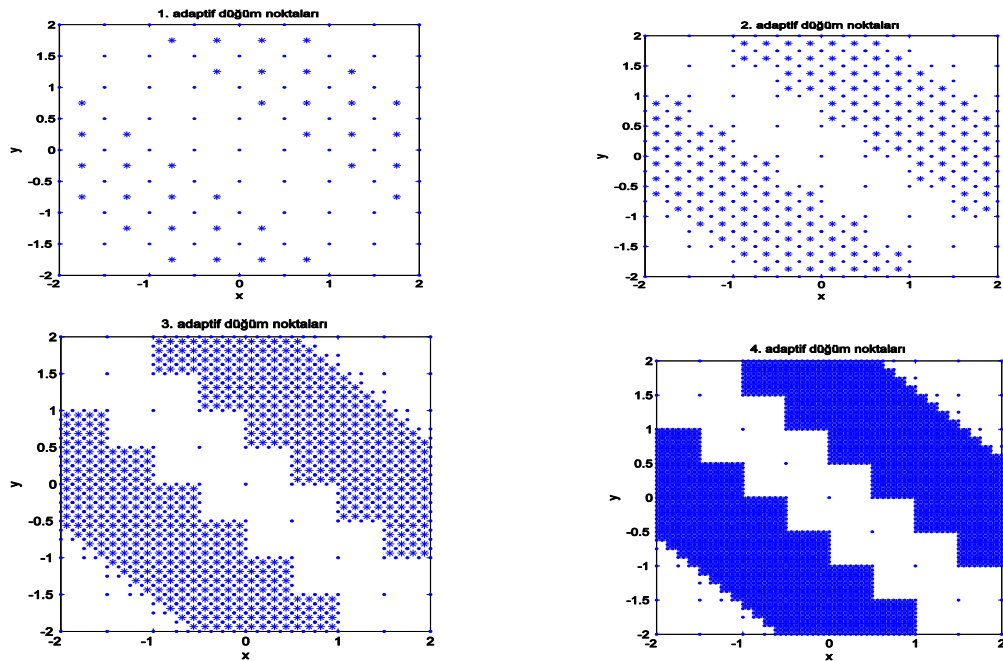
$$f(x, y) = \sin(x + y), -2 \leq x, y \leq 2$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun grafiği ise Şekil 80'deki gibidir.



Şekil 80. Örnek 2'deki fonksiyonun grafiği

Örnek 1'de olduğu gibi başlangıçta  $8 \times 8$ 'lik düğüm noktaları alalım. Bu takdirde adaptivite  $\epsilon = 1$  ve  $\delta = 0.001$  için uygulanırsa Şekil 81'deki adaptif düğüm noktaları elde edilir.

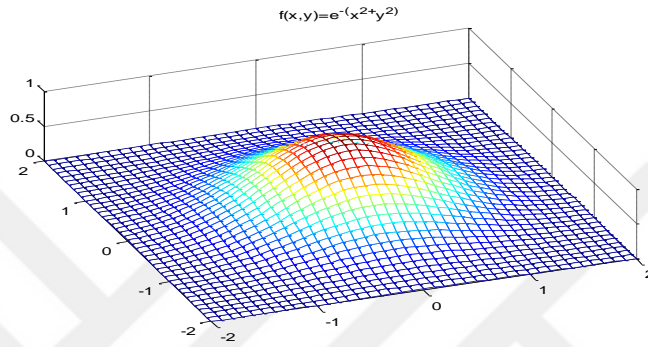


Şekil 81. Örnek 2'deki  $f$  fonksiyonu için elde edilen adaptif düğüm noktaları

Adaptif düğüm noktaları grafiklerinden görüleceği üzere salınım yapan fonksiyonlarda adaptivite ile sadece fonksiyonun ikinci türevinin fazla olduğu bölgelere yeni düğüm noktaları eklenmekte diğer bölgelerde ise başlangıçtaki düğüm noktaları değişmemektedir.

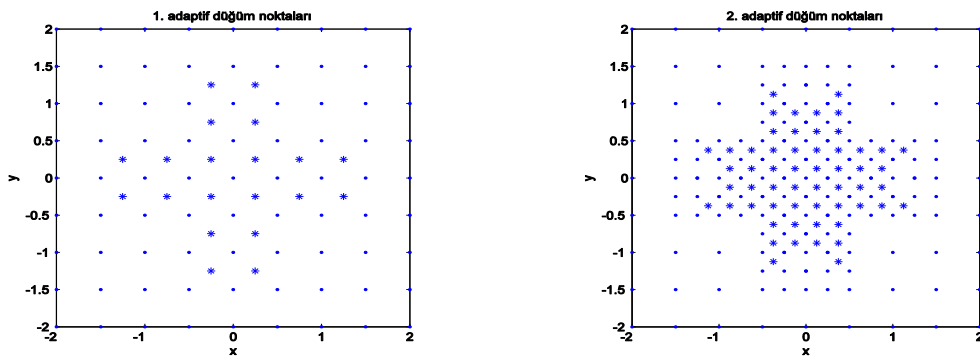
**Örnek 3.**  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ ,  $-2 \leq x, y \leq 2$

fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda fonksiyonun grafiği Şekil 82'deki gibidir.

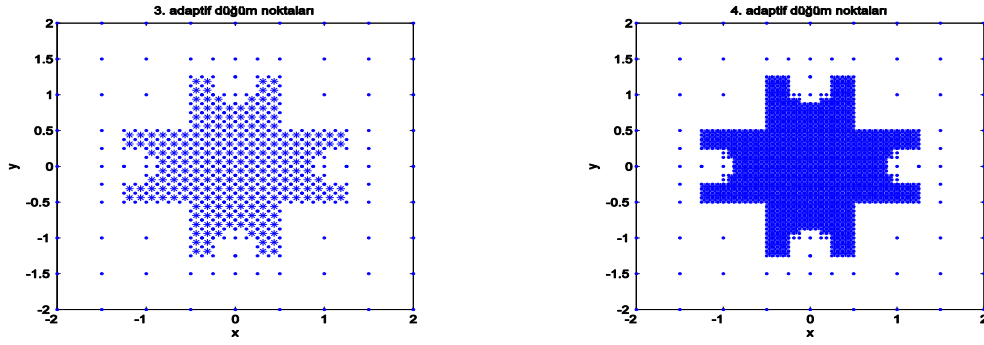


Şekil 82. Örnek 3'deki fonksiyonun grafiği

Şekil 82'den görüleceği üzere orta bölgede fonksiyonun ikinci türevi büyük değerler alırken köşe ve kenar bölgelerinde fonksiyonun değeri ve ikinci türevi değişmemektedir. Dolayısı ile adaptivite ile yeni düğüm noktalarının orta bölgelere eklenmesi beklenir. Hessian tabanlı adaptif yöntem Örnek 2'deki parametre değerleri ile probleme uygulanırsa adaptif yöntem probleme 4 kez uygulanır ve Şekil 83-84'deki adaptif düğüm noktaları elde edilir.



Şekil 83. Örnek 3'deki fonksiyon için 1. ve 2. adaptif düğüm noktaları



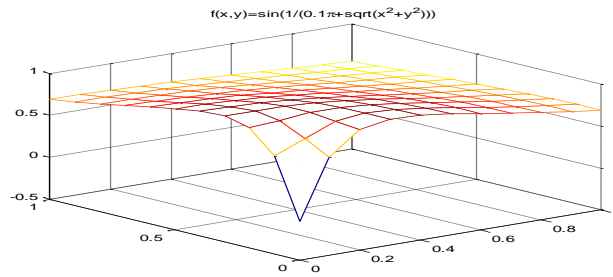
Şekil 84. Örnek 3'deki fonksiyon için 3. ve 4. adaptif düğüm noktaları

Şekil 83 ve 84'den görüleceği üzere fonksiyonun ikinci türevinin büyük olduğu bölgelerde çok sık düğüm noktaları alınmış olup diğer bölgelerde geniş aralıklı düğüm noktaları ile adaptif ağ oluşturulmuştur.

**Örnek 4.** Sınır katmanı içeren problemlerde adaptivitenin sınır katmanının olduğu bölgelerde daha fazla düğüm noktası alması beklenir. Hessian tabanlı adaptif düğüm noktalarının bu özelliği sağlayıp sağlamadığını gözlemlemek için

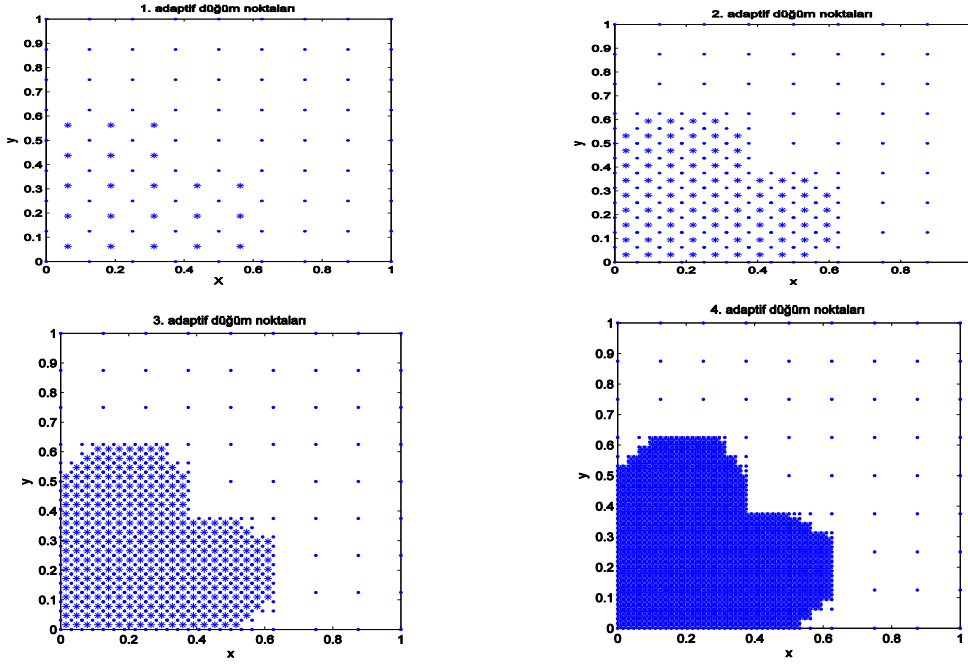
$$f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{0.1\pi + \sqrt{x^2 + y^2}}\right), 0 \leq x, y \leq 1$$

fonksiyonunu göz önüne alalım (Mitchell, 2010). Bu durumda fonksiyonun grafiği ilgili aralıkta Şekil 85'deki gibidir.



Şekil 85. Örnek 4'teki fonksiyonun grafiği

Şekil 85'den görüleceği üzere problem (0,0) noktası komşuluğunda sınır katmanı içerir. Adaptif yöntem probleme Örnek 2'deki parametre değerleri ile uygulanırsa sınır katman bölgesine fazla düğüm noktası ekleyen Şekil 86'daki adaptif düğüm noktaları elde edilir.



Şekil 86. Sınır katman problemi için adaptif düğüm noktaları

Örnek 1-4'den görüleceği üzere Hessian tabanlı adaptif yöntem ile problemin ikinci türevinin büyük değerler aldığı bölgelere düğüm noktaları eklenmiştir. Dolayısı ile hatanın fazla olduğu bölgeler doğru bir şekilde belirlenmiş olur. Kesim 3.3.13.4'te ise Hessian tabanlı adaptif yöntem diferensiyel denklemlere uygulanarak sayısal çözümler elde edilmektedir.

#### 3.3.13.4. Hessian Tabanlı Adaptif Yöntemin İki Boyutlu Problemlere Uygulanması

Bu bölümde Hessian tabanlı adaptif yöntem

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

$$u = u_0, (x, y) \in \Gamma$$

Poisson denkleminin uygulanmaktadır. Ayrıca, Kesim 3.3.13.3'deki fonksiyonlar Poisson denkleminin çözümü olacak şekilde seçilmekte ve adaptif algoritma ile elde edilen düğüm noktaları Kesim 3.3.13.3'deki sonuçlar ile karşılaştırılmaktadır. Bu bölümde adaptif düğüm noktalarındaki sayısal çözümler eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile hesaplanmaktadır.

**Örnek 1.** Çözümü  $u(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ ,  $-2 \leq x, y \leq 2$  olan Poisson denklemi

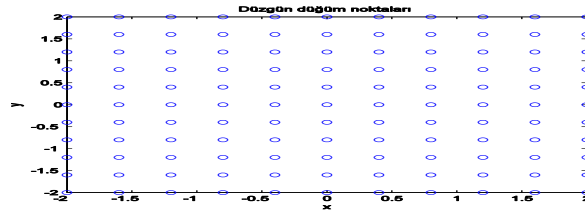
$$u_{xx} + u_{yy} = 4 \cos(x^2 + y^2) - 4(x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2)$$

ve sınır koşulları

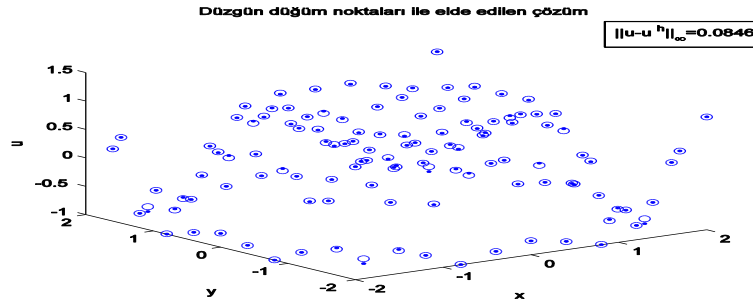
$$u(-2, y) = u(2, y) = \sin(4 + y^2)$$

$$u(x, -2) = u(x, 2) = \sin(x^2 + 4)$$

olarak verilir.  $x$  ve  $y$  eksenleri 10'ar eşit parçaya bölünerek oluşturulan düzgün düğüm noktaları Şekil 87 ve bu düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm Şekil 88'deki gibidir.



Şekil 87. Örnek 1 için düzgün düğüm noktaları

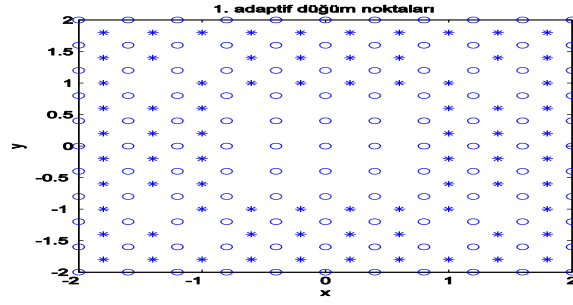


Şekil 88. Örnek 1 için düzgün düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm

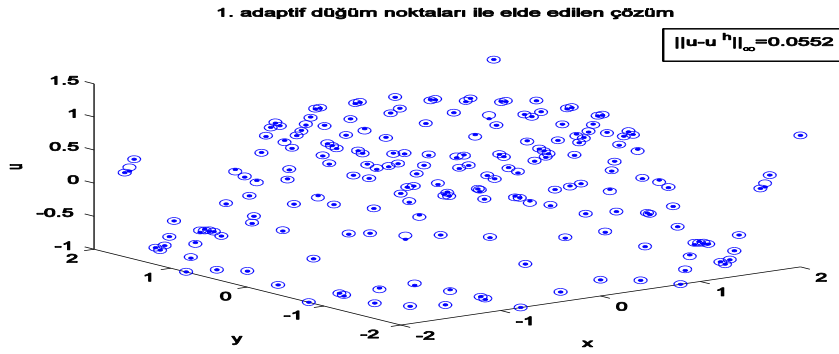
Şekil 88'den görüleceği üzere seçilen düğüm noktaları için sayısal çözüm bazı düğüm noktalarında iyi sonuç vermemektedir. Ayrıca  $u$ , gerçek çözüm ve  $u^h$ , sayısal çözüm olmak üzere

$$\|u - u^h\|_{\infty} = 0.0846$$

hata değeri oluşmaktadır. Öte yandan adaptif yöntem  $\epsilon = 2$  ve durdurma kriteri  $\delta = 0.01$  seçilerek probleme uygulanırsa Şekil 89'daki adaptif çözüm noktaları ve Şekil 90'daki sayısal çözüm grafiği elde edilir.



Şeki 89. Örnek 1 için 1. adaptif düğüm noktaları



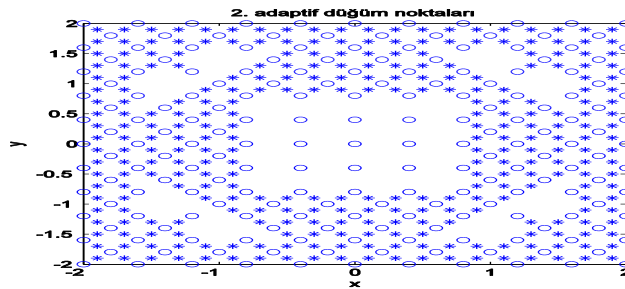
Şekil 90. Örnek 1 için 1. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm

Şekil 89 ve 90'dan görüleceği üzere fonksiyonun 2. türevinin fazla olduğu bölgelere daha fazla düğüm noktası eklenerek düzgün düğüm noktalarında oluşan hatalar azaltılmıştır. Adaptif düğüm noktaları için hata değeri ise

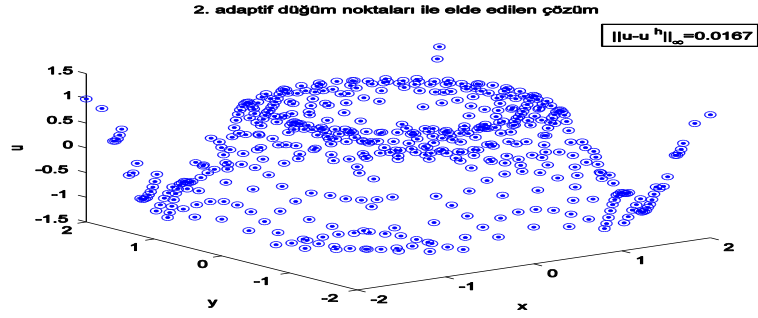
$$\|u(X) - u^h(X)\|_{\infty} = 0.0552$$

dir.

Adaptivitenin tekrar uygulanması durumunda ise Şekil 91'deki 2. adaptif düğüm noktaları ve Şekil 92'deki sayısal çözüm grafiği elde edilir.



Şekil 91. Örnek 1 için 2. adaptif düğüm noktaları

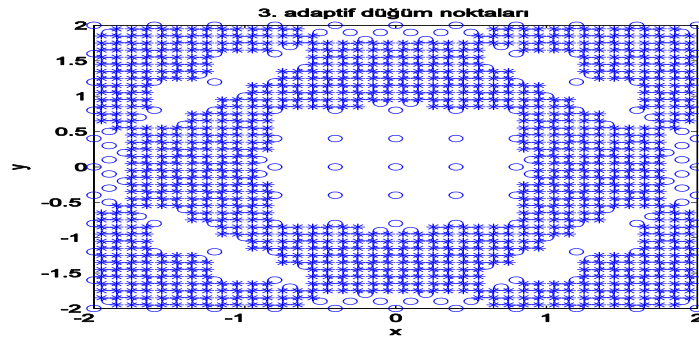


Şekil 92. Örnek 1 için 2. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözüm

Sayısal çözümden görüleceği üzere düzgün düğüm noktalarında oluşan hatalar azalmakta ve gerçek çözümle uyumlu çözüm grafikleri elde edilmektedir. Ayrıca 2. adaptif düğüm noktaları ile oluşan hata değeri ise

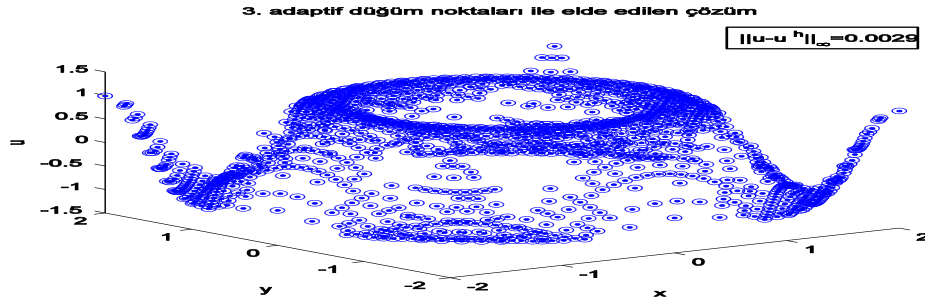
$$\|u(X) - u^h(X)\|_{\infty} = 0.0167$$

olup düzgün düğüm noktaları için oluşan hata değeri adaptif düğüm noktaları ile azaldığı gözlemlenir. 2. adaptif düğüm noktaları için dikdörtgensel integral hücrelerindeki minimum alana sahip hücrenin kenar uzunlukları 0.125'e eşit olduğundan bu hücrenin alanı 0.015625'dir. Durdurma kriteri  $\delta = 0.01$  olarak seçildiğinden probleme tekrar adaptivite uygulanmalıdır. 3. adaptive ile elde edilen düğüm noktaları ise Şekil 93'deki gibidir.



Şekil 93. Örnek 1 için 3. adaptif düğüm noktaları

Adaptif düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm ve hatanın sonsuz normu Şekil 94'deki gibidir.



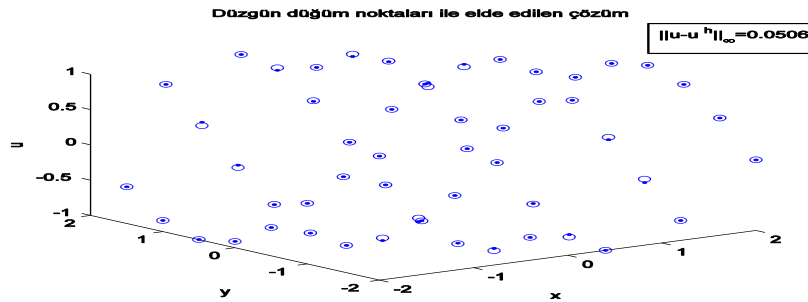
Şekil 94. Örnek 1 için 3. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözüm grafiği

3. adaptif düğüm noktaları ile problemin hatası

$$\|u(X) - u^h(X)\|_{\infty} = 0.0029$$

olup hatanın önceki sonuçlara göre azaldığı ve elde edilen adaptif düğüm noktaları fonksiyonlar kısmında üretilen adaptif düğüm noktaları ile uyumlu olduğu adaptif düğüm noktalarının şekillerinden görülmektedir.

**Örnek 2.**  $u(x, y) = \sin(x + y)$ ,  $-2 \leq x, y \leq 2$  çözümüne sahip olan probleme adaptif yöntemi  $\epsilon = 0.75$  ve  $\delta = 0.0001$  değerleri ile uygulayalım. Eğer başlangıçta  $x$  eksenini 5 ve  $y$  eksenini 8 eşit parçaya ayırırsanız düzgün düğüm noktaları ile elde edilen çözüm grafiği Şekil 95'deki gibidir.



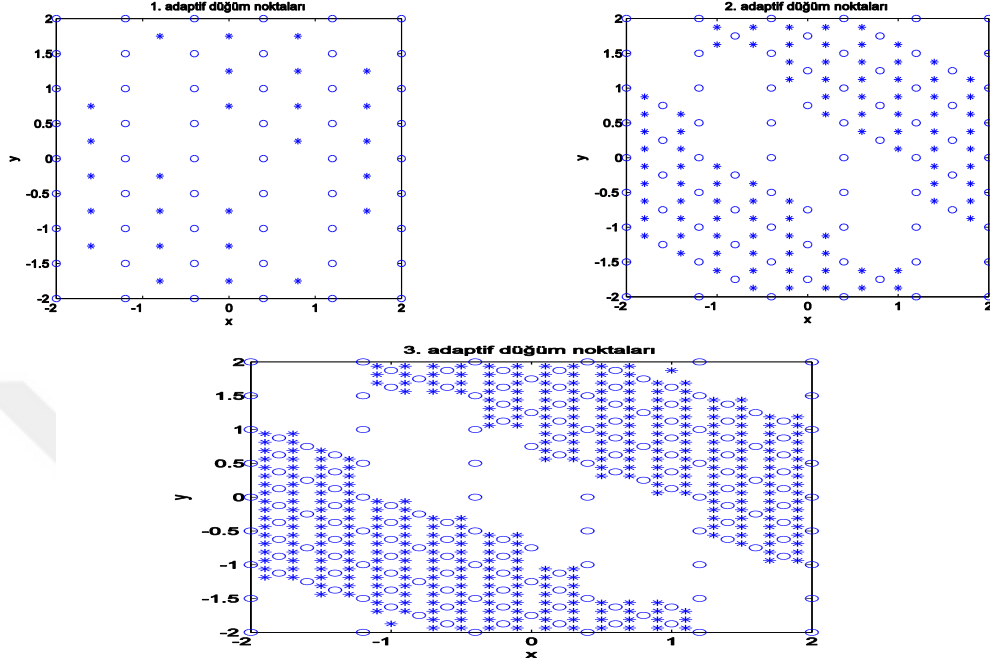
Şekil 95. Örnek 2 için düzgün düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm

Düzgün düğüm noktaları için sayısal çözüm ve analitik çözüm grafikleri genel olarak uyumlu çözümler vermesine rağmen bazı noktalarda hatalar gözlemlenmektedir. Ayrıca düzgün düğüm noktaları için maksimum hata değeri

$$\|u(X) - u^h(X)\|_{\infty} = 0.0506$$

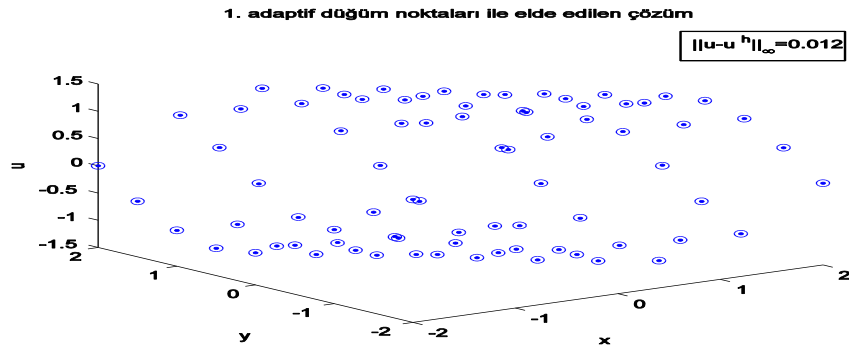


olarak elde edilir.  $\delta = 0.0001$  için probleme 3 kez adaptivite uygulanır ve Şekil 96'daki adaptif düğüm noktaları elde edilir.

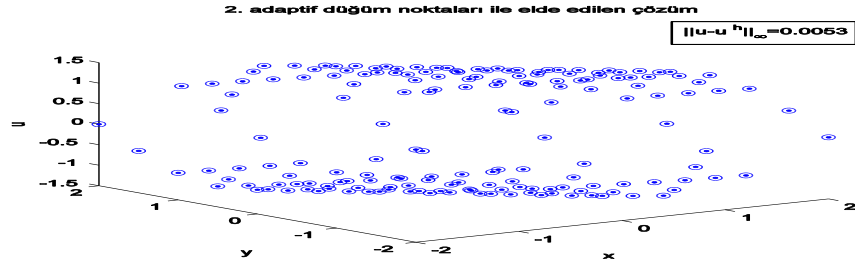


Şekil 96. Örnek 2 için adaptif düğüm noktaları

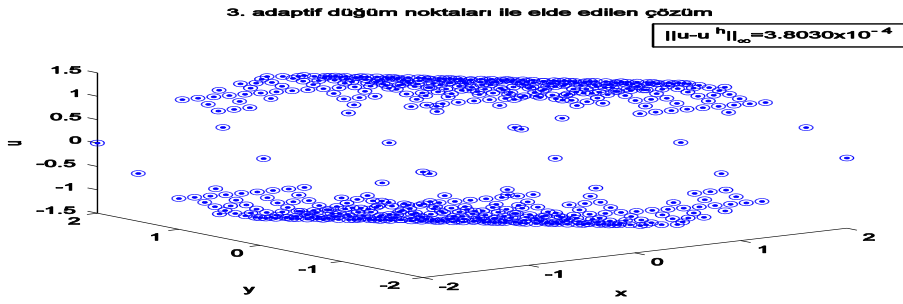
Fonksiyonlarda elde edilen adaptif düğüm noktaları ile diferensiyel denklemin sayısal çözümü kullanılarak elde edilen adaptif düğüm noktaları benzer davranışı sergileyerek fonksiyonun 2. türevinin büyük değer aldığı bölgelere yığılmışlardır. Bu durumda elde edilen adaptif çözüm grafikleri ve hata normları ise Şekil 97-99'daki gibidir.



Şekil 97. Örnek 2 için 1. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm



Şekil 98. Örnek 2 için 2. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm



Şekil 99. Örnek 2 için 3. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözüm

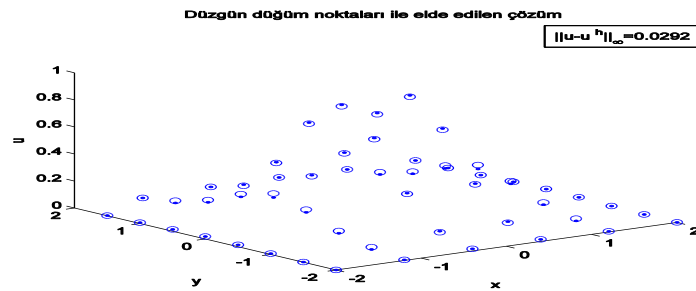
Sayısal çözüm grafiklerinden düzgün ağda belli noktalarda oluşan hatanın azaldığı ve gerçek çözümle uyumlu sayısal çözüm grafiklerinin elde edildiği gözlemlenmektedir.

**Örnek 3.** Analitik çözümü  $u(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ ,  $-2 \leq x, y \leq 2$  olan

$$u_{xx} + u_{yy} = -4e^{-(x^2+y^2)} + 4(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$u(x, -2) = u(x, 2) = e^{-(x^2+4)}, u(-2, y) = u(2, y) = e^{-(y^2+4)}$$

problemini göz önüne alalım. Örnek 3'deki gibi başlangıçta  $x$  eksenini 5,  $y$  eksenini ise 8 eşit parçaya bölünerek probleme ağsız eleman bağımsız Galerkin yöntemi uygulansın. Bu takdirde Şekil 100'deki sayısal çözüm grafiği elde edilir.

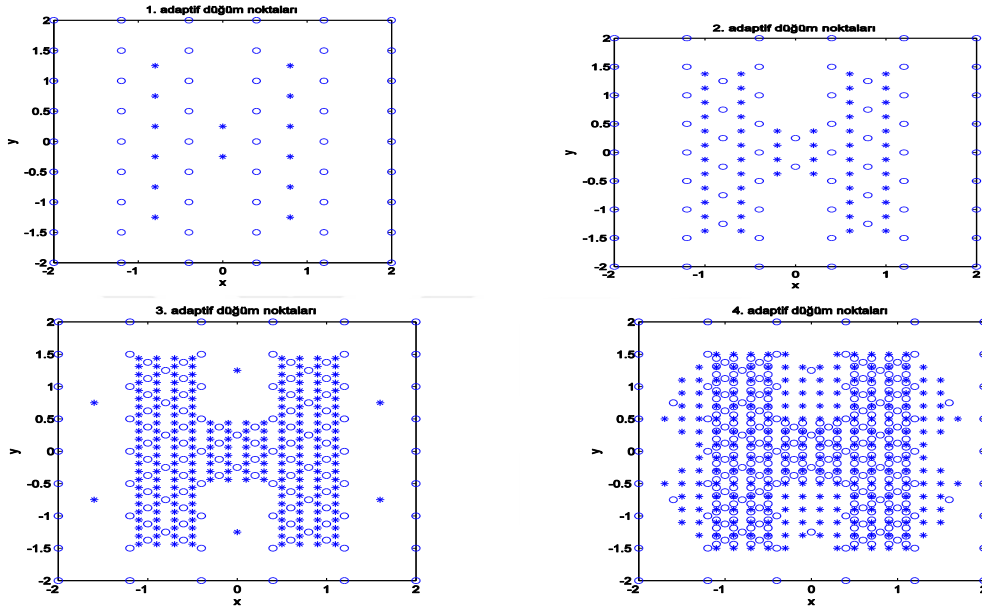


Şekil 100. Örnek 3 için düğümlü düğüm noktaları için çözüm grafikleri

Şekil 100'den görüleceği üzere düzgün düğüm noktaları ile elde edilen sayısal çözümde iç bölgelerde hatalar oluşmaktadır. Ayrıca düzgün düğüm noktaları için

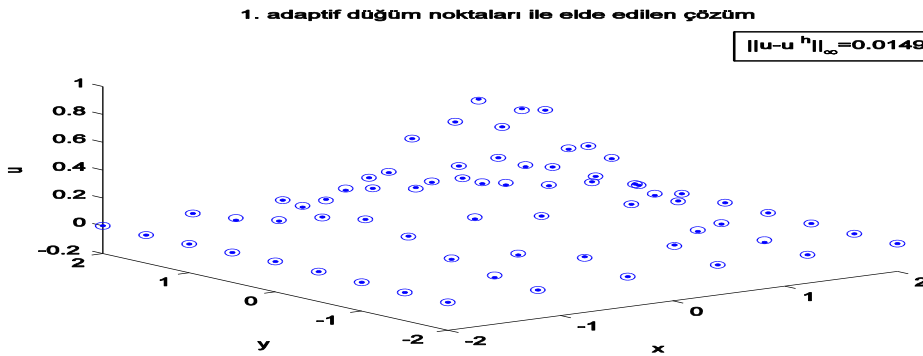
$$\|u(X) - u^h(X)\|_{\infty} = 0.0292$$

hatası elde edilir. Bu hatanın azaltılması için adaptif yöntemi  $\epsilon = 0.35$  ve  $\delta = 0.0005$  değerleri ile uygulayalım. Bu takdirde probleme 4 kez adaptivite uygulanır. Elde edilen adaptif düğüm noktaları Şekil 101'deki gibidir.

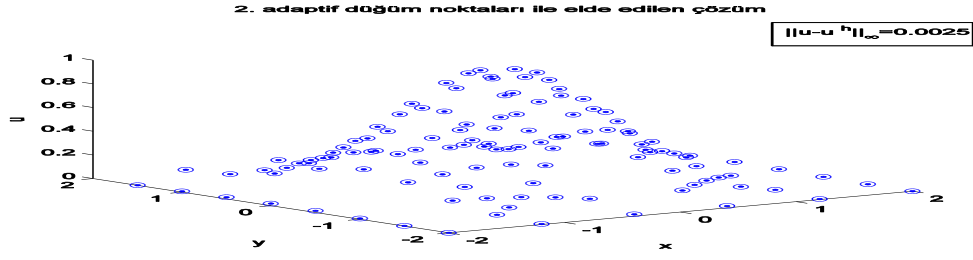


Şekil 101. Örnek 3 için adaptif düğüm noktaları

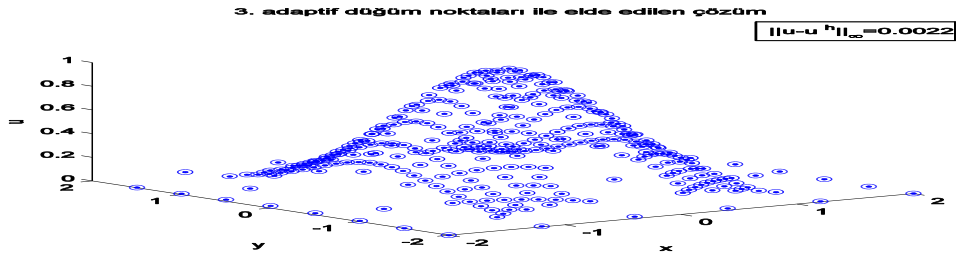
Adaptif düğüm noktalarından görüleceği üzere adaptivite ile yöntemin ikinci türevinin büyük olduğu orta bölgelere yeni düğüm noktaları eklenmiştir. Bu takdirde elde edilen sayısal çözüm grafikleri ise Şekil 102-105'deki gibidir.



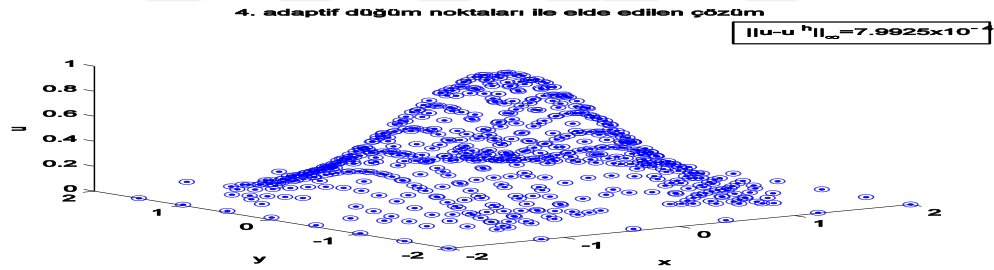
Şekil 102. Örnek 3 için 1. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözüm grafikleri



Şekil 103. Örnek 3 için 2. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözüm grafikleri



Şekil 104. Örnek 3 için 3. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözüm grafikleri



Şekil 105. Örnek 3 için 4. adaptif düğüm noktaları ile elde edilen çözüm grafikleri

Adaptif çözüm grafiklerinden görüleceği üzere düzgün düğüm noktalarında orta bölgede oluşan hatalar azalmakta gerçek çözümle uyumlu sayısal çözümler elde edilmektedir. Adaptif çözümlerdeki hatalar ise Tablo 23'de verilmiştir.

Tablo 23. Adaptif çözümlerdeki hata

	Nokta sayısı	$\ u(X) - u^h(X)\ $
Düğümler	54	0.0292
1. adaptif düğüm noktaları	68	0.0149
2. adaptif düğüm noktaları	124	0.0025
3. adaptif düğüm noktaları	354	0.0022
4. adaptif düğüm noktaları	660	$7.9925 \times 10^{-4}$

Tablo 23'den görüleceği üzere adaptif düğüm noktaları ile problemdeki hata değerleri azalmaktadır.

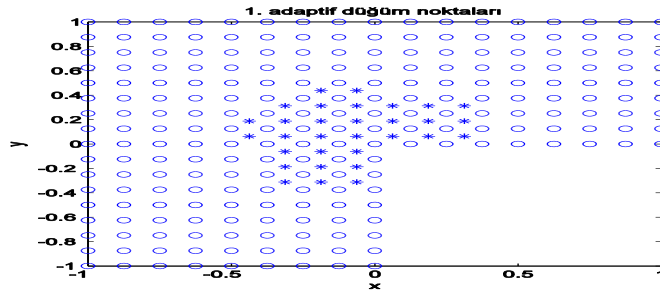
**Örnek 4.** Analitik çözümü  $u = r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  ve problemin çözüm bölgesi  $\Omega = \{-1 \leq x, y \leq 1\} \setminus \{0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0\}$  olan

$$\Delta u = 0$$

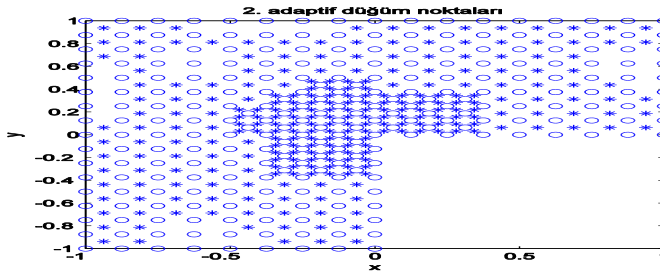
L-shaped problemini göz önüne alalım. Li ve arkadaşları(Li, 2013) tarafından sonlu elemanlar yöntemine göre adaptif olarak çözülen bu problemde adaptif düğüm noktalarının (0,0) noktasının komşuluğunda yığılması gerektiğini gözlemlemişlerdir. Ağsız yöntemde ise adaptif düğüm noktaları  $\epsilon = 0.8$  değeri için aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 106. Örnek 4 için düzgün düğüm noktaları

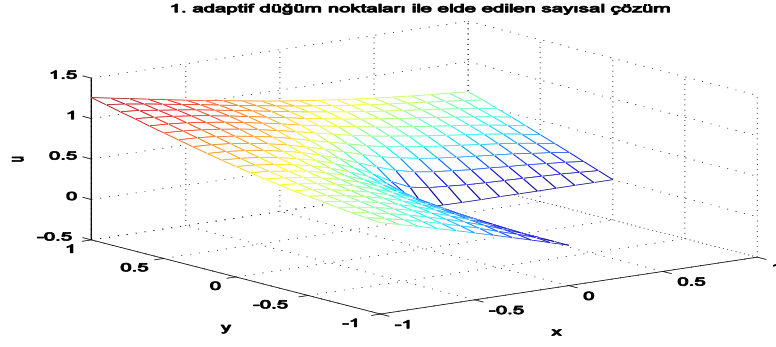


Şekil 107. Örnek 4 için 1. adaptif düğüm noktaları



Şekil 108. Örnek 4 için 2. adaptif düğüm noktaları

Şekillerden görüleceği üzere Hessian tabanlı hata analizi yardımıyla elde edilen düğüm noktaları ile sonlu elemanlar yönteminde yapılan çalışmaya benzer olarak (0,0) noktasının komşuluğunda yığılmaktadır. Problemin sayısal çözüm grafiği ise Şekil 109'daki gibidir.



Şekil 109. L shaped problemi için adaptif çözüm grafiği

#### 4. SONUÇLAR

1. Düzgün dağıtılmış düğüm noktaları için şekil fonksiyonları öteleme özelliğini sağladığı ve bu özellik yardımıyla sistem matrisinin elde edilmesinde gerekli aritmetik işlem sayısının büyük ölçüde azaldığı ispatlanmıştır. Böylece kısa sürede sayısal çözümlerin elde edilebileceği gözlemlenmiştir.

2. Hareketli en küçük kareler yönteminin yaklaşım hatası tabanlı adaptif yöntemler geliştirilerek 1 boyutlu adi diferensiyel denklemlere, zaman bağımlı diferensiyel denklemlere ve 2 boyutlu çözümü zamanla değişmeyen(stasyonel) problemlere uygulanmıştır. Yaklaşım hatasının büyük olduğu bölgeler fonksiyonun 2. türevinin veya Hessian normunun büyük değerler aldığı bölgeler olduğu gözlemlenmiş ve 1 boyutlu uzayda düğüm noktalarının bu bölgelere kaydırılması( $r$ -adaptivite) veya bu bölgelere yeni düğüm noktaları eklenmesi( $h$ -adaptivite) yoluyla adaptif algoritmalar geliştirilmiştir. Daha sonra bu algoritmalar 1 boyutlu uzayda zaman bağımlı problemlere genişletilmiştir. Ayrıca 2 boyutlu uzayda Hessian matrisi yardımıyla hatanın büyük olduğu bölgeler belirlenerek bu bölgelere yeni düğüm noktaları eklenmesi yoluyla adaptivite uygulanmış olup önerilen adaptif algoritmalar ile sayısal çözümdeki hataların azaldığı ve gerçek çözümle uyumlu sayısal çözümlerin elde edildiği gözlemlenmiştir.

3. Zaman bağımlı problemlerde ağırsız eleman bağımsız Galerkin yönteminin mutlak kararlılık analizi yapılmış olup geri Euler ve Crank Nicolson yöntemlerinin  $K^{-1}M$  matrisinin özdeğerleri reel ve pozitif olduğu sürece şartsız kararlı olduğu ileri Euler yönteminin mutlak kararlı olması için  $\Delta t \leq \frac{2}{|\lambda_{max}(K^{-1}M)|}$  şartının sağlanması gerektiği gösterilmiştir.

## 5. ÖNERİLER

1. Lineer çözümlü zamanla değişmeyen(stasyonel) problemler için 2 boyutta uygulanan Hessian tabanlı adaptif algoritmalar, lineer olmayan problemlere uygulanabilir.
2. Hessian tabanlı adaptif algoritmalar 2 boyutlu zaman bağımlı lineer veya lineer olmayan problemlere uygulanabilir.
3. Geliştirilen adaptif algoritmalar bayağı veya kısmi diferensiyel denklem sistemlerine uygulanabilir.





## 6. KAYNAKLAR

- Atluri, S.N. ve Zhu, T., 1998a. A New Meshless Local Petrov-Galerkin(MLPG) Approach in Computational Mechanics, Computational Mechanics, 22, 117-127.
- Atluri, S.N. ve Zhu, T., 1998a. A New Meshless Local Petrov-Galerkin(MLPG) Approach to Nonlinear Problems in Computer Modeling and Simulation, Computer Modelling and Simulation in Engineering, 3, 3, 187-196.
- Babushka, I. ve Melenk, J.M., 1997. The Partition of Unity Method, International Journal of Numerical Method in Engineering, 10, 4, 727-758.
- Bai, F., Li, D., Wang, J. ve Cheng, Y., 2012. An Improved Complex Variable Element-Free Galerkin (ICVEFG) Method for Two-Dimensional Elasticity Problems, Chinese Physics B, 21, 2, 1-10.
- Belinda, J., ve Dinis, L.M.J.S., 2006. Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin, Computers and Structure, 84, 1547-1559.
- Belytschko, T., Gu, L. ve Lu., Y.Y., 1994. Fracture and Crack Growth by Element Free Galerkin Methods, Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 2, 519-534.
- Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. ve, Krysl, P., 1996. Meshless Methods: An Overview and Recent Development, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139, 1-4, 3-47.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y. ve Gu, L., 1994. Element-Free Galerkin Methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, 229-256.
- Belytschko, T., Lu., Y.Y. ve Gu, L., 1995. Crack Propagation by Element-Free Galerkin Methods, Engineering Fracture Mechanics, 2, 293-315.
- Belytschko, T., Lu., Y.Y., Gu, L. ve Tabbara, M., 1995. Element-Free Galerkin Methods for Static and Dynamic Fracture, International Journal of Solids and Structures, 17-18, 2547-2570.
- Belytschko, T., Organ, D. ve Gerlach., 2000. Element-Free Galerkin Methods for Dynamic Fracture in Concrete, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 187, 385-399.
- Belytschko, T. ve Tabbara, M., 1996. Dynamic Fracture Using Element-Free Galerkin Methods, International Journal for Numerical Method in Engineering, 39, 923-938.
- Biazar, J. ve Hosami, M., 2015. An Adaptive Meshless Method of Line Based on Radial Basis Functions, Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization, 5, 2, 45-58.

- Biazar, J. ve Hosami, M., 2015. Redistribution of Nodes with Two Constraints in Meshless Method of Line to Time-Dependent Partial Differential Equations, Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations, 762034, 1-8.
- Bottauscio, O., Chiampi, M. ve Manzin, A., 2006. Element-Free Galerkin Method in Eddy-Current Problems With Ferromagnetic Media, IEEE Transactions On Magnetic, 42, 5, 1577-1584.
- Brighenti, R., 2005. Application of Element Free Galerkin Meshless Method to 3-D Fracture Mechanics Problems, Engineering Fracture Mechanics, 72, 2808-2820.
- Chen, L., 2013. Finite Difference Methods, Ders Notları.
- Cheng Y. ve Li, J., 2006. A Complex Variable Meshless Method for Fracture Problems, Science China Physics, Mechanics and Astronomy, 49, 46-59.
- Cheng, Y., Li, R. ve Peng, M., 2012. Complex Variable Element-Free Galerkin (CVEFG) Method for Viscoelasticity Problems, Chinese Physics B, 21, 9, 1-12.
- Cheng, Y.M., Bai, F.N. ve Peng, M.J., 2013. A Novel Interpolating Element Free Galerkin(IEFG) Method for Two-Dimensional Elastoplasticity, Applied Mathematical Modelling, 38, 5187-5197.
- Cheng, Y.M., Wang, J.F. ve Bai, F.N., 2012. A New Complex Variable Element-Free Galerkin Method for Two-Dimensional Potential Problems, Chinese Physics B, 21, 9, 1-10.
- Chung, H.J. ve Belytschko, T., 1998. An Error Estimate in EFG Method, Computational Mechanics, 21, 91-100.
- Cingoski, V., Miyamoto, N. ve Yamashita, H., 1998. Element-Free Galerkin Method for Electromagnetic Field Computations, IEEE Transactions On Magnetics, 34, 5, 3236-3239.
- Combe, U.H. ve Korn, C., 1998. An Adaptive Approach with Element-Free-Galerkin Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 162, 203-222.
- Cordes, L.W. ve Moran, B., 1996. Treatment of Material Discontinuity in the Element Free Galerkin Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139, 75-89.
- Coşkun, E., Ahmad, R., İsmail, A., Kerdid, N., Mohamed, M., Nouri, F.Z. ve Pani, A., 2011. Initialization Strategy for Nonlinear Systems, KSG 2011, Study Group Report, Ocak, Thuwal, Saudi Arabia, 1-12.
- Coşkun, E., Memoğlu, M. ve Şengül, S., 2011. 10. Matematik Sempozyumu, Işık Üniversitesi, Eylül, İstanbul, Bildiriler Kitabı: 45.

- Çalışkan, S., 2006. Eleman Bağımsız Galerkin ve Yerel Petrov-Galerkin Ağsız Yöntemlerinin Bir Boyutlu Mühendislik Problemlerine Uygulanması, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Dehghan, M., Abbaszadeha, M. ve Mohebbi, B., 2015. The Use of Interpolating Element-Free Galerkin Technique for Solving 2D Generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers and Regularized Long-wave Equations on Non-rectangular Domains with Error Estimate, Journal of Computational and Applied Mathematics, 286, 211–231.
- Dolbow, J. ve Belytschko, T., 1998. An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method, Archives of Computational Methods in Engineering, 5, 3, 207-241.
- Duarte, C.A. ve Oden, J.T., 1996. An hp Adaptive Method Using Clouds, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139, 237-262.
- Farlow, S.J., 1993. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Dover Publication, New York, 114-119s.
- Fasshauer, E.G., 2007. Meshfree Approximation Methods with MATLAB, World Scientific, USA, 177-203s.
- Feng, D., Guo, R., ve Wang, H., 2015. An Element Free Galerkin for Ground Penetrating Radar Numerical Simulation, Journal of Central South University, 22, 261-269.
- Fleming, M., Chus, Y.A., Morant, B. ve Belytschko, T., 1997. Enriched Element-Free Galerkin Methods for Crack Tip Fields, International Journal For Numerical Methods In Engineering, 40, 1483-1504.
- Frazer, R.A., Jones, W.P. ve Skan, S.W., 1937. Approximations to Functions and to the Solutions of Differential Equations, London: Aeronautical Research Committee, 517-549s.
- Gavete, L., Cuesta, J. ve Ruiz, A., 2002. A Numerical Comparison of Two Different Approximations of the Error in a Meshless Method, European Journal of Mechanics A/Solids, 21, 1037-1054.
- Gavete, L., Cuesta, J. ve Ruiz, A., 2002. A Procedure for Approximation of the Error in the EFG Method, International Journal for Numerical Methods In Engineering, 53, 677-690.
- Gavete, L., Falcon, S. ve Ruiz, A., 2001. An Error Indicator for the Element Free Galerkin Method, European Journal of Mechanics A/Solids, 20, 327-341.
- Girault, V., 1974. Theory of a GDM on Irregular Networks, SIAM Journal of Numerical Analysis, 11, 260-282.

- Goudarzi, M., ve Mohammadi, S., 2015. Analysis of Cohesive Cracking in Saturated Porous Media Using an Extrinsicly Enriched EFG Method, Computers and Geotechnics, 63, 183–198.
- Gökdoğan, A., 2010. Ginzburg-Landau Modeli ve Varyasyonları, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Haussler, C. U. ve Korn, C., 1998. An Adaptive Approach with the Element-Free-Galerkin Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 162, 1-4, 203-222.
- Ho, S.L., Yang, S., Machado, J.M. ve Wong, H.C., 2001. Application of Meshless Method in Electromagnetics, IEEE Transactions on Magnetics, 37, 5, 3198–202.
- Jameel, A. ve Harmain, G.A., 2015. Fatigue Crack Growth in Presence of Material Discontinuities by EFGM, International Journal of Fatigue, 81, 105–116.
- Johnson, C., 2009. Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method, Dover Publication, Mineola, New York, 17s.
- Kansa, E.J., 1990. Multiquadrics-A Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid Dynamics, Computers and Mathematical with Applications, 19, 8-9, 127-145.
- Krok, J. ve Orkisz, J., 1989. A Unified Approach to the FE Generalized Variational FD Method for Nonlinear Mechanics, Concept and Numerical Approach, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 353-362.
- Krongauz, Y. ve Belytschko, T., 1996. Enforcement of Essential Boundary Conditions in Meshless Approximations Using Finite Element, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 131, 133-145.
- Krongauz, Y. ve Belytschko, T., 1997. Consistent Pseudo-Derivatives in Meshless Methods, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 146, 3-4, 371–386.
- Krysl, P. ve Belytschko, T., 1996. Analysis of Thin Shells by Element-Free Galerkin Method, International Journal of Solids and Structures, 33, 20-22, 3057-3080.
- Krysl, P. ve Belytschko, T., 1996. Analysis of Thin Plates by Element-Free Galerkin Method, Computational Mechanics, 17, 1-2, 26-35.
- Kwok, T. ve Ling, L., 2010. Dimension-splitting Data Points Redistribution for Meshless Approximation, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235, 736-746.
- Lancaster, P. ve Salkauskas, K., 1981. Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods, Mathematics of Computation, 37, 141-158.

- Le, C.V., Askes, H. ve Gilbert, M., 2010. Adaptive Element-Free Galerkin Method Applied to the Limit Analysis of Plates, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199, 2487-2496.
- Lee, C.K. ve Zhou, C.E., 2004. On Error Estimation and Adaptive Refinement for Element Free Galerkin Method Part II: Adaptive Refinement, Computers and Structure, 82, 429-443.
- Lee, G.H., Chung, H.J. ve Choi, C.K., 2003. Adaptive Crack Propagation Analysis with the Element-Free Galerkin Method, International Journal For Numerical Methods In Engineering, 56, 331-350.
- Li, D., Bai, F., Cheng, Y. ve Liew, K.M., 2012. A Novel Complex Variable Element-Free Galerkin Method For Two-Dimensional Large Deformation Problems, Applied Mathematical Modelling, 233-236, 1-10.
- Li, D.M., Liew, K.M. ve Cheng, Y., 2014. An Improved Complex Variable Element-Free Galerkin Method for Two-Dimensional Large Deformation Elastoplasticity Problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 269, 72-86.
- Li, J., Huang, Y. ve Yang, W., 2013. An Adaptive Edge Finite Element Method For Electromagnetic Cloaking Simulation, Journal of Computational Physics, 249, 216–232
- Li, X., 2015. An Interpolating Boundary Element-Free Method for Three-Dimensional Potential Problems, Applied Mathematical Modelling, 39, 3116-3134.
- Liszka, T. ve Orkisz, J., 1980. The Finite Difference Methods at Arbitrary Irregular Grids and its Applications in Applied Mechanics, Computers and Structure, 11, 83-95.
- Liu, G.R., 2010. Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method, CRC Press, United States of America, 210-212s.
- Liu, G.R. ve Gu, Y.T., 1999. A Point Interpolation Method, Proceedings of 4th Asia-Pacific Conference on Computational Mechanic, Aralık, Singapore, 1009-1014.
- Liu, G.R. ve Gu, Y.T., 2000b. Vibration Analyses of 2-D Solids by the Local Point Interpolation Method(LPIM), Proceedings of 1st international conference on structural stability and Dynamics, Aralık, Taiwan, 411-416.
- Liu, G.R. ve Gu, Y.T., 2001c. A Local Point Interpolation Method(FR-PIM) for Free Vibration Analyses of 2-D Solids, Journal of Sound and Vibration, 246, 1, 29-46.
- Liu, G.R. ve Gu, Y.T., 2005. An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming, Springer, Netherlands, 44-45, 119-120s.
- Liu, L., Liu, G., Tong, R. ve Jin, S., 2010. An Adaptive EFG-FE Coupling Method for Elasto-Plastic Contact of Rough Surfaces, Materials Science and Engineering, 10, 012221, 1-9.

- Liu, S., Yang, Q., Chen, H., Xu, G. ve Liu, F., 2004. Improvement of The Element-Free Galerkin Method for Electromagnetic Field Calculation, IEEE Transactions On Applied Superconductivity, 14, 2, 1866-1869.
- Liu, W.K., Jun, S. ve Zhang, Y.F., 1995. Reproducing Kernel Particle Methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20, 1081-1106.
- Louai, F.Z., Nait-Said, N. ve Drid, S., 2007. Implementation of an Efficient Element-Free Galerkin Method for Electromagnetic Computation, Engineering Analysis with Boundary Elements, 31, 191–199.
- Lu, Y.Y., Belytschko, T., ve Tabbara M., 1995. Element-Free Galerkin Methods for Wave Propagation and Dynamics Fracture, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 126, 131-153.
- Mitchell, W.F., 2010. A Collection of 2D Elliptic Problems for Testing Adaptive Algorithms, NISTIR 7668, 1-21.
- Mukherjee, Y.X. ve Mukherjee, S., 1997. On Boundary Conditions in the Element-Free Galerkin Method, Computational Mechanics, 19, 264–270.
- Nayroles, B., Touzot, G. ve Villon, P., 1992. Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements, Computational Mechanics, 10, 307-318.
- Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.Z. ve Taylor, R.L., 1996. A Finite Point Method in Computational Mechanics. Applications to Convective Transport and Fluid Flow, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39, 3839-3867.
- Pandey, S.S., Kasundra, P.K. ve Daxini S.D., 2013. Introduction of Meshfree Methods and Implementation of Element Free Galerkin (EFG) Method to Beam Problem, International Journal on Theoretical and Applied Research in Mechanical Engineering(IJTARME), 2, 3, 2319 – 3182.
- Parreira, G.F., Silva, E.J., Fonseca, A.R. ve Mesquita, R.C., 2006. The Element-Free Galerkin Method in Three-Dimensional Electromagnetic Problems, IEEE Transactions On Magnetics, 42, 4, 711-714.
- Pathak, H., Singh, A. ve Singh, I.V., 2012. Numerical Simulation of Bi-material Interfacial Cracks Using EFGM and XFEM, International Journal of Mechanics and Materials in Design, 8, 9–36.
- Pavlin, V. ve Perrone N., 1975. Finite Difference Energy Reqniques for Arbitrary Meshes, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 14, 647–664.
- Peng, M.J., Li, R.X. ve Cheng, Y.M., 2014. Analyzing Three-dimensional Viscoelasticity Problems Via the Improved Element-Free Galerkin (IEFG) Method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 40, 104–113.

- Peng, M., Li, D. ve Cheng, Y., 2011. The Complex Variable Element-Free Galerkin (CVEFG) Method for Elasto-plasticity Problems, Engineering Structure, 33, 127–135.
- Peng, M., Liu, P. ve Cheng, Y., 2009. The Complex Variable Element-Free Galerkin (CVEFG) Method for Two-Dimensional Elasticity Problems, International Journal of Applied Mechanics, 1, 2, 367-385.
- Pekedis, M. ve Yıldız, H., 2010. Ağsız Yöntemler ve Sınıflandırılması, Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, 1, 16, 1-9.
- Rabczuk, T. ve Zi, G., 2006. A Meshfree Method Based on the Local Partition of Unity for Cohesive Cracks, Computational Mechanics, 39, 743–760.
- Rabczuk, T., Zi, G., Bordas, S. ve Nguyen-Xuan, H. 2008. A Geometrically Non-Linear Three-Dimensional Cohesive Crack Method for Reinforced Concrete Structures, Engineering Fracture Mechanics, 75, 4740-4758.
- Rao, B. N., ve Rahman, S., 2000. An Efficient Meshless Method for Fracture Analysis of Cracks, Computational Mechanics, 26, 398-408.
- Ren, Z. ve Cheng, Y., 2012. The Improved Element-Free Galerkin(IEFG) Method for Two-Dimensional Potential Problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, 36, 873-880.
- Rossi, R. ve Alves, M.K., 2004. Recovery Based Error Estimation and Adaptivity Applied to Modified Element-Free Galerkin Method, Computational Mechanics, 33, 194-205.
- Sarra, S.A., 2005. Adaptive Radial Basis Function Methods for Time Dependent Partial Differential Equations, Applied Numerical Mathematics, 54, 79–94.
- Shanazari, K., 2012. An Adaptive Domain Partitioning Technique for Meshfree-Type Methods, Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics, ID 817026, 1-13.
- Shanazari, K. ve Hasomi, M., 2012. Adapting Nodes in Three Dimensional Irregular Regions for Meshless-Type Methods, Numerical Algorithms, 61, 83-103.
- Singh, I.V. ve Jain, P.K., 2005. Parallel EFG Algorithm for Heat Transfer Problems, Advances in Engineering Software, 36, 554–560.
- Singh, A., Singh, I.V. ve Prakash, R., 2007. Meshless Element Free Galerkin Method for Unsteady Nonlinear Heat Transfer Problems, International Journal of Heat and Mass Transfer, 50, 1212–1219.
- Skumar, N., Moran, B., Black, T. ve Belytschko, T., 1997. Element-Free Galerkin Methods for Static and Dynamic Fracture, Computational Mechanics, 20, 170-175.

- Slater, J.C., 1934. Electronic Energy Bands in Metals, Physical Review, 45, 794-801.
- Smith, G.D., 1985. Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Oxford University Press, Oxford, 50-61s.
- Snell, C., Vesey, D.G. ve Mullord, P., 1981. The Application of a General FDM to Some Boundary Value Problems, Computers & Structure, 13, 547-552.
- Strang, G., 1986. Introduction to Applied Mathematics, Wellesley-Cambridge Press, United States of America, 165s.
- Şengül, S. ve Coşkun, E., 2015. Ağsız Hareketli En Küçük Kareler Yönteminin Optimizasyonu ve Uygulamaları, 14. Matematik Sempozyumu, Niğde Üniversitesi, Mayıs, Niğde, Bildiriler Kitabı: 151-152.
- Şengül, S. ve Coşkun, E., 2015. An Adaptive Approach for Element Free Galerkin Method and Applications, ICRA-PAM 2015, İstanbul Commerce University, Haziran, İstanbul, Bildiriler Kitabı: 223.
- Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A. ve Mastin, C.W., 1985. Numerical Grid Generation Foundation and Application, Elsevier Science Publishing, Mississippi, 261-272s.
- Ventura, G., Xu, J.X. ve Belytschko, T., 2002. A Vector Level Set Method and New Discontinuity Approximations for Crack Growth by EFG, International Journal For Numerical Methods In Engineering, 54, 923-944.
- URL 1, [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com), The MathWorks, 21 Eylül 2010.
- Wang, J. ve Cheng, Y., 2013. New Complex Variable Meshless Method for Advection-Diffusion Problems, Chinese Physics B, 22, 3, 1-7.
- Wang, J. F., Sun, F.X. ve Cheng R.J., 2010. Element-free Galerkin Method for a Kind of KdV Equation, Chinese Physics B, 19, 6, 1-6.
- Wang, J.F. ve Liew K.M., 2015. An Accurate Improved Complex Variable Element-Free Method for Numerical Solutions of Elastodynamic Problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, 50, 304-12.
- Wang, J.G. ve Liu, G.R., 2000. Radial Point Interpolation Method for Elastoplastic Problems, Proc. of the 1st Int. Conf. On Structural Stability and Dynamics, Aralık, Taipei, Taiwan, 703-708.
- Wang, H.S., 2015. An Extended Element-Free Galerkin Method for Thermo-Mechanical Dynamic Fracture in Linear And Nonlinear Materials, Computational Materials Science, 98, 366-371.
- Wu, Z., 1992. Hermite-Birkhoff Interpolation of Scattered Data by Radial Basis Functions, Approximation Theory and its Applications, 8, 1-10.



- Xu, Y., ve Saigal, S., 1998. An Element-Free Galerkin Formulation for Stable Crack Growth in an Elastic Solid, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 154, 331-343.
- Xuan, L., Zeng, Z., Shanker, B. ve Udpa, L., 2004. Element-Free Galerkin Method for Static and Quasi-static Electromagnetic Field Computation, IEEE Transactions on Magnetics, 40, 1, 12–20.
- Yu, J. ve Jia, J., 2008. Element- Free Galerkin Method for Static Electromagnetic Field Computation in 2D and 3D Inhomogeneous Medium, Automation Congress, 2008, WAC 2008, World, Eylül-Ekim, Hawaii, HI, 1-5.
- Zhang, L., Ouyang, J. ve Zhang, X., 2008. The Two-Level Element Free Galerkin Method for MHD Flow at High Hartmann Numbers, Physics Letters A, 372, 5625–5638.
- Zhang, L.W., Deng, Y.J. ve Liew, K.M., 2014. An Improved Element-Free Galerkin Method for Numerical Modelling of the Biological Population Problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, 40, 181-188.
- Zhang, L.W., Deng, Y.J., Liew, K.M. ve Cheng, Y.M., 2014. The Improved Complex Variable Element Free Galerkin Method for Two-Dimensional Schrödinger Equation, Computers and Mathematics with Applications, 68, 1093-1106.
- Zhang, L.W., Li, D.M. ve Liew, K.M., 2015. An Element-Free Computational Framework for Elastodynamic Problems Based on the IMLS-Ritz Method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 54, 39-46.
- Zhang, L.W. ve Liew K.M., 2014. An Improved Moving Least-squares Ritz Method for Two Dimensional Elasticity Problems, Applied Mathematic and Computation, 46, 268–282.
- Zho, N. ve Ren, H., 2014. The Interpolating Element-Free Galerkin Method for 2D Transient Heat Conduction Problems, Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering, ID 712834, 1-9.
- Zhu, T. ve Atluri, S.N., 1998. A Modified Collocation and a Penalty Formulation for Enforcing the Essential Boundary Conditions in the Element Free Galerkin Method, Computational Mechanics, 21, 211-222.
- Zhang, X.H., Ouyang, J. ve Zhang, L., 2009. Element-Free Characteristic Galerkin Method for Burgers' Equation, Engineering Analysis with Boundary Elements, 33, 356–362.
- Zhang, Z., Hao, S.Y, Liew, K.M. ve Cheng, Y.M., 2013. The Improved Element-Free Galerkin Method for Two-Dimensional Eleastodynamics Problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, 37, 1576-1584.

- Zhang, Z., Li, D.M., Cheng, Y.M. ve Liew, K.M., 2012. The Improved Element-Free Galerkin Method for Three-dimensional Wave Equation, Acta Mechanica Sinica, 28, 808–818.
- Zhang, Z., Liew, K.M., Cheng, Y.M. ve Lee, Y.Y., 2008. Analysis 2D Fracture Problems with the Improved Element Free Galerkin Method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 32, 241-250.
- Zhang, Z., Wang, J.F., Cheng, Y.M. ve Liew, K.M., 2013. The Improved Element-Free Galerkin Method for Three-Dimensional Transient Heat Conduction Problems, Physics, Mechanics & Astronomy, 56, 8, 1568-1580.



## 7. EKLER

### EK 1. Gauss Noktaları ve Ağırlıkları

Gauss Nokta Sayısı	Gauss Noktaları	Ağırlıkları
1	0	2
2	$\pm 0.57735$	1
3	0 $\pm 0.774597$	0.8888889 0.5555556
4	$\pm 0.339981$ $\pm 0.861136$	0.6521452 0.3478548
5	0 $\pm 0.538469$ $\pm 0.90618$	0.5688889 0.4786287 0.2369269
6	$\pm 0.23862$ $\pm 0.6612$ $\pm 0.93247$	0.467914 0.3607616 0.1713245

**EK-2****Homotopi Yöntemi**

Bir  $F$  fonksiyonunun sıfır yerlerini araştırdığımızı kabul edelim. Homotopi yöntemindeki temel iddia, sıfır yerleri bilinen düzgün bir  $G$  fonksiyonundan,  $F$  fonksiyonunun sıfır yerlerini bulmayı amaçlar. Bu amaçla bir homotopi

$$H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$H(X, 0) = G(X), H(X, 1) = F(X)$$

şeklindeki düzgün bir fonksiyon olarak tanımlanır.

$$H(X, \lambda) = \lambda F(X) + (1 - \lambda)G(X)$$

konveks homotopy olarak bilinir. Sıfır yerleri bilinen  $H(X, 0) = G(X)$  fonksiyonundan başlayarak  $\lambda = 1$  'e kadar  $H(X, \lambda) = 0$  eğrileri boyunca ilerleyerek  $H(X, 1) = F(X)$  fonksiyonunun sıfır yerlerini hesaplar.  $I(s) = (X(s), \lambda(s))$ ,  $I(0) = (a, 0)$  bir eğri olmak üzere, amacımız  $I(s_1) = (X(s_1), 1)$  gibi nümerik olarak  $s_1$  'e kadar bir eğriyi izlemektir. Bu durumda  $X(s_1), F(X) = 0$  'ın bir kökü olur.

En yaygın olarak kullanılan  $G(X)$  fonksiyonlarından biri  $a \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere  $G(X) = X - a$  seçimidir. Bir diğeri  $G(X) = F(X) - F(a)$  olup bu durumda  $H(x, \lambda)$  homotopy fonksiyonuna Newton homotopy adı verilir ve

$$H(X, \lambda) = \lambda F(X) + (\lambda - 1)(F(X) - F(a))$$

$$\Rightarrow H(X, \lambda) = F(X) + (\lambda - 1)F(a)$$

şeklinde dir. Bu durumda  $\lambda = 0$  için  $H(X, \lambda) = 0$  'ın kökü  $X = a$  'dır. Bir  $I(s)$  eğrisi ile  $(X(s_1), 1)$  noktasına ulaşmayı amaçlanmaktadır. Bunun için nümerik yöntemler verilmiştir. Burada aşağıdaki yöntem kullanılmaktadır.

$[0, 1]$  aralığında  $\lambda$

$$\lambda(i) = \frac{i}{n}, i = 0, 1, \dots, n$$

olmak üzere  $n$  alt aralığa ayrılır.  $H(X, 0) = G(X) = 0$  'ın çözümü  $x_0 = a$  başlangıç tahmininden başlayarak her bir  $\lambda(i)$  değeri için  $(x_{i-1}, \lambda_{i-1})$

$$H(x_i, \lambda_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

çözümü bir sonraki adımın başlangıç tahmini olarak kullanılarak çözümler Newton yöntemi ile elde edilir.  $\lambda_i = 1$  'deki çözüm aranan çözümdür.

## ÖZGEÇMİŞ

Süleyman ŞENGÜL, 1985 yılında Arsin-Trabzon'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini 2003 yılında Arsin'de tamamladı. 2003 yılında başladığı Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünden 2007 yılında mezun oldu. 2007-2010 yılları arasında Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansını tamamladı.

2008 yılında Rize Üniversitesi Matematik bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. 2008 Mayıs ayında Rize Üniversitesinden lisansüstü eğitimi için Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik bölümüne görevlendirildi. İyi derecede İngilizce bilmektedir.