KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SO(2) GRUBUNUN BANACH UZAYLARINDAKİ SÜREKLİ LİNEER GÖSTERİMLERİ İÇİN FOURIER SERİLERİ TEORİSİ VE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Mehmet KUNT

MART 2014
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SO(2) GRUBUNUN BANACH UZAYLARINDAKİ SÜREKLİ LİNEER GÖSTERİMLERİ İÇİN FOURİER SERİLERİ TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Matematikçi Mehmet KUNT

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :10/02/2014
Tezin Savunma Tarihi :17/03/2014

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ

Trabzon 2014

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Mehmet KUNT Tarafından Hazırlanan

SO(2) GRUBUNUN BANACH UZAYLARINDAKİ SÜREKLİ LİNEER GÖSTERİMLERİ İÇİN FOURİER SERİLERİ TEORİSİ VE UYGULAMALARI

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 11 / 02 / 2014 gün ve 1540 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

DOKTORA TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ**	....
Üye	**: Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV**	....
Üye	**: Prof. Dr. Ekrem YANMAZ**	....
Üye	**: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ**	....
Üye	**: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU**	....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, $SO(2)$ grubunun Banach uzaylarındaki sürekli lineer gösterimleri için Fourier serileri teorisi araştırılmış ve bazı uygulamaları incelenmiştir.

Öncelikle tez konusunun belirlenmesinden çalışmanın bu hale getirilmesine kadar yardımlarını esirgemeyen, değerli bilgilerini özveriyle paylaşan ve bana her zaman destek olan sayın hocam Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ'a, tez önerisi ve raporlar aşamasında tezin şekillenmesinde emeği geçen sayın hocalarım Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV ve Prof. Dr. Ekrem YANMAZ'a teşekkür eder, şükranlarımı sunarım.

Lisansüstü öğrenimim boyunca vermiş oldukları desteklerden dolayı KTÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerinde sayın Prof. Dr. İhsan ÜNVER ve sayın Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ beyler ile bölüm başkanımız sayın Prof. Dr. Funda KARAÇAL hanımefendilere manevi desteklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca KTÜ Matematik Bölümünden tüm hocalarıma, tüm çalışma arkadaşlarıma ve hayatım boyunca desteklerini hiç esirgemeyen sevgili annem, babam ve eşime çok teşekkür ederim.

Bu çalışma, Karadeniz Teknik Üniversitesi Araştırma Projeleri Yönetim Birimi tarafından 2010.111.3.1 Kod No'lu Doktora Tezi Projesi olarak desteklenmiştir.

Mehmet KUNT
Trabzon 2014

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “$SO(2)$ GRUBUNUN BANACH UZAYLARINDAKİ SÜREKLİ LİNEER GÖSTERİMLERİ İÇİN FOURİER SERİLERİ TEORİSİ VE UYGULAMALARI” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Abdullah Çavuş’un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

17 / 03 / 2014

Mehmet KUNT

İÇİNDEKİLER

Doktora Tezi

ÖZET

$SO(2)$ GRUBUNUN BANACH UZAYLARINDAKİ SÜREKLİ LİNEER GÖSTERİMLERİ İÇİN FOURİER SERİLERİ TEORİSİ VE UYGULAMALARI

Mehmet KUNT

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ
2014, 80 Sayfa

Bu tezin amacı, $SO(2)$ grubunun Banach uzaylarında sürekli lineer gösterimleri için Fourier serilerini, temel özelliklerini ve bazı uygulamalarını araştırmaktır.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1'de çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Bölüm 2 beş kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda, $SO(2)$ grubunun bir Banach uzayında bir lineer gösterimi, sınırlı lineer gösterim ve sürekli lineer gösterim tanımlanarak bazı özellikleri incelenmiştir. İkinci kısımda, sürekli lineer gösterimlerin Fourier serileri tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Üçüncü kısımda, infinitesimal üretici D ve onun tanım kümesi $H(D)$ tanımlanmıştır. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $R_\lambda : H \to H$ yarı-rezolvent operatörü tanımlanarak bazı özellikleri incelenmiştir. Dördüncü kısımda, D operatörü için integral teoremi verilmiştir. D'nin rezolvent(=yarı-rezolvent) operatörünün bir eşdeğeri D'nin spektrum noktaları için tanımlanmış, açık ifadesi verilmiştir. Beşinci kısımda, Banach uzaylarındaki n. dereceden sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denklemin periyodik çözümlerinin varlığı üzerine teoremler elde edilmiş ve periyodik çözümlerin varlığı durumunda bütün periyodik çözümlerinin açık ifadesi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fourier serileri, Grupların lineer gösterimleri, İnfinitesimal üretici, Rezolvent operatör, Periyodik çözümler, İntegral teoremi.

PhD. Thesis

SUMMARY

THE THEORY OF FOURIER SERIES FOR CONTINUOUS LINEAR REPRESENTATIONS OF THE $SO(2)$ GROUP IN BANACH SPACES AND APPLICATIONS

Mehmet KUNT

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ
2014, 80 Pages

The aim of this thesis is to study the fundamental properties of Fourier series for a continuous linear representation of $SO(2)$ group in a Banach space and to give some applications of those.

This thesis consists of two main chapters. In Chapter 1, some definitions and theorems which are crucial for our study are stated. Chapter 2 contains five parts. In the first part, a linear representation of the $SO(2)$ group in a Banach space, bounded linear representation, continuous linear representation are defined and some properties of them are investigated. In the second part, Fourier series of the continuous linear representation are defined and some properties of them are investigated. In the third part, the infinitesimal generator D and its domain $H(D)$ are defined. The quasi-resolvent operator $R_\lambda : H \to H$ is defined for all $\lambda \in \mathbb{C}$ and some properties of R_λ are investigated. In the fourth part, the theorem on integral for the operator D is given. An analog of the resolvent (= quasi-resolvent) operator of D is defined for points of the spectrum of D and its evident form is given. In the fifth part, theorems on the existence of periodic solutions of a linear differential equation of the nth order with constant coefficients in Banach spaces are obtained and in the case of the existence of periodic solutions, evident forms of all periodic solutions are given.

Key Words: Fourier series; Linear representations of groups; Infinitesimal generator; Resolvent operator; Periodic solution; Theorem on integral.

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{T}$	: Kompleks düzlemde birim çember
$\mathbb{F}$	: Cisim
$SO(2)$	: 2×2 Tipinde determinantı bir olan ortogonal matrislerin kümesi
$(G,*)$	: G Kümesi "$*$" işlemine göre grup
$\cong$	: Grup izomorfisi
$\operatorname{Ker} h$	: h grup homomorfisinin çekirdeği
$(H, \oplus, \mathbb{F}\odot)$	: H Kümesi $\mathbb{F}$ cismi üzerinde "$\oplus$" ve"$\odot$" işlemlerine göre lineer uzay
$C([a,b], \mathbb{R})$	: $[a,b]$'den $\mathbb{R}$'ye tüm sürekli fonksiyonların kümesi
$\|\cdot\|$	: Norm fonksiyonu
$\forall$	: Her
$\exists$	: En az
$\therefore$	: Öyle ki
$<, >, \leq, \geq$	: Eşitsizlikler
$\sim$	: Normların denkliği
$(H, \|\cdot\|)$	: H, $\|\cdot\|$ normuna göre normlu uzay
$:=$	: Tanım olarak eşittir
$L(X,Y)$	: X'den Y'ye tüm lineer dönüşümlerin kümesi
$B(X,Y)$	: X'den Y'ye tüm lineer sınırlı dönüşümlerin kümesi
$B(X)$	: $B(X,X)$
$\cup, \subset$	: Birleşim, Alt küme
θ_X	: X'in toplamaya göre birim elemanı
sup	: Üst sınırların en küçüğü
mak , min	:En büyük, En küçük
$\emptyset$	: Boş küme
$\setminus$	: Kümelerin farkı

∞	: Sonsuz
$D_n(t)$	: n. Dirichlet çekirdeği
$K_n(t)$	: n. Fejer çekirdeği
$\lvert\cdot\rvert$	: Mutlak değer
$\sum$	: Toplam
α	: Lineer gösterim
α_x	: α lineer gösteriminin x noktasında yörüngesi
H_c	: Süreklilik noktaları kümesi
$\in$	: Elemanı
$F_n(x)$	: α Lineer gösterimine göre x elemanının n. Fourier katsayısı
$S_n(x)$	: α Lineer gösterimine göre x elemanının Fourier serisinin n. kısmi toplamı
$\psi_n(x)$	: α Lineer gösterimine göre x elemanının Fourier serisinin$n$. Cesaro ortalaması
$Spec(x)$	: x'in spektrumu
$Spec(H)$	: H'nın nokta spektrumu, D'nin spektrumu
H_f	: Spektrumu sonu olan elemanların kümesi
D	: Sonsuz küçük üretici
$H(D)$	: α'nın türev noktaları kümesi
R_λ	: Rezolvent operatör
R_{im}	: Yarı-rezolvent operatör
$\mathbb{C} \setminus Spec(H)$	: D'nin rezolvent kümesi
$\sigma(D)$	: D operatörünün spektrumu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Matematiğin büyük kısmı köklerini fizikten alır. Bir fonksiyonun Fourier serisi kendisine yakınsar mı, daha genel olarak bir fonksiyon Fourier serisi ile tanımlanabilir mi? Yani bir fonksiyonun Fourier katsayıları biliniyorsa fonksiyon bulunabilir mi ve nasıl bulunur? Bu tür serilerle çalışmak ve özel olarak bir trigonometrik seri ile bir fonksiyonun yeniden düzenlenmesi probleminin temeli, bir telin titreşimi (salınım) ve katılarda ısı iletimi gibi fiziksel problemlere dayanır. Fourier serilerinin ne anlama geldiğini anlamak ve hangi düşünce ile bu iki fizik probleminin çözüleceği matematiksel analizin temeline ve gelişmesine büyük katkılarda bulunmuştur. Cantor'un sonsuz kümeler teorisi, Riemann ve Lebesgue integralleri, serilerin toplamsallığı Fourier serileri araştırmaları sonucu ortaya çıkan teoriler arasındadır.

1747 yılında J. D'Alembert bir telin titreşimi ile ilgili dalga denklemini üretip bir çözüm verdi. 1755 yılında D. Bernoulli şimdi Fourier serileri olarak bilinen serilerle daha ileri bir çözüm ortaya koydu. 1804 yılında J. Fourier katıların ısı iletimi ile ilgili çalışmalarına başladı ve üç yıllık verimli çalışmanın sonucu olarak temel ısı iletimi denklemlerini keşfetti, onları çözmek için yeni metotlar geliştirdi, bazı pratik problemleri analiz etmek için metotlarını kullandı ve teorisini desteklemek için deneysel kanıtlar elde etti. Bu çalışmalarını topladığı " The Analytical Theory of Heat " fizik tarihinde en önemli kitaplardan biridir [1].

Fakat J. Fourier, Fourier serileri ile ilgili matematik sınavlarında doğru olarak değerlendirilecek bir ifade kullanmadı veya ispatlamadı. J. Fourier'in çalışmalarını alıp matematiğe kazandıran ve modern analiz için sağlam buluşlara önderlik eden P. Dirichlet'tir.

P. Dirichlet sürekli veya belki de integrallenebilir her fonksiyonun her noktada Fourier serisinin yakınsak olduğunu düşünüyordu ki, bu düşünce Riemann, Weierstrass, Dedekind gibi döneminin diğer ünlü matematikçileri tarafından paylaşılıyordu. Fakat bu düşünce P. Du Bois-Reymond tarafından Sürekli bir fonksiyon örneği verilip onun bir noktada Fourier serisinin ıraksak olduğu gösterilerek çürütüldü [2].

Bu noktada Fourier serilerinin yakınsaklığı için iki yol ortaya çıkıyor;

1. Fonksiyon üzerindeki şartları arttırmak,
2. Yakınsaklığı zayıflatmak.

1828 yılında P. Dirichlet grafiği çizilemeyen bir fonksiyona örnek olarak

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & eğer\ x \quad rasyonel\ ise \\ 0 \ , & eğer\ x\ irrasyonel\ ise \end{cases}$$

karakteristik fonksiyonu verdi. Bu fonksiyon sürekli olmadığından J. Fourier'in metodu ile Fourier katsayıları hesaplanamaz. Bununla birlikte P. Dirichlet çizilebilen (yani Parçalı düzgün) her fonksiyon için, eğer x sürekli olduğu nokta ise Fourier serisinin kendisine yakınsadığını, eğer x sıçrama noktası ise Fourier serisinin $\frac{1}{2}\left(f(x_+) + f(x_-)\right)$ ortalama değerine yakınsadığını gösterdi ki bu ilk büyük yakınsaklık sonucudur.

1904 yılında L. Fejer herhangi sürekli fonksiyonun Fourier serisinin Cesaro toplamsal ve bu yeni düşünce ile fonksiyona düzgün yakınsadığını ispatladı [3].

Günümüzde ise klasik Fourier serleri teorisi, aslında $SO(2)$ grubunun klasik fonksiyonel uzaylardaki sürekli lineer gösterimleri teorisidir. Fourier serilerine ait klasik teorideki temel bilgiler Zigmund [4], Kahane J. P., Salem, R. [5], Kahane J. –P. [6] kitaplarında Khavin, V. P. [7], Kislyakov, S. V. [8] ve Gurarij, V. P. [9] surveylerinde detaylı şekilde verilmiştir. Banach uzaylarındaki Fourier serileri teorisine ait temel bilgiler Edwards, R. E. [10] ve Engel, K. –J., Nagel, R. [11] kitaplarında verilmiştir.

$\mathbb{T} = \{e^{it} : t \in [0,2\pi)\}$ grubunun Banach uzaylarında sürekli lineer gösterimleri için Fourier Katsayıları ve Fourier serileri tez danışmanım Prof. Dr. Abdullah Çavuş ve tez komitesi üyelerinden Prof. Dr. Djavvat Khadjiev' in [12-17] çalışmalarında incelenmiştir. $SO(2)$ grubu bir kompakt topolojik gruptur. Kompakt grupların harmonik analizine ait temel bilgiler Hewitt E., Ross, K. A. [18,19] ve Zelobenko D. P.[20] kitaplarında verilmiştir.

Bu çalışmada, düzlemin dönmelere göre $SO(2)$ grubu tekrar tanıtılmaktadır. Bu grubun kompakt bir abel grubu olduğu gösterilerek bu grubun bir kompleks Banach uzayındaki periyodik lineer gösterimlerine göre Fourier katsayıları ve Fourier katsayıları ile tanımlanan yarı-rezolvent operatörlerin sağladığı bazı fonksiyonel eşitlikler ile ilgili bazı teoremler ve bu teoremler kullanılarak, kompleks Banach uzaylarında bazı diferansiyel denklemler için çözümler verilmektedir. Elde edilen sonuçlar [21]'de yayınlanmıştır.

1.2. Metrik Uzaylar

Tanım 1.2.1: [22, s.3] $X \neq \emptyset$ verilen bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon ise d'ye X üzerinde tanımlı bir metrik ve (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir.

M1) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ 'dır.

M2) $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0$ 'dır ancak ve ancak $x = y$ ise.

M3) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$ 'dir.

M4) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 'dir.

Örnek 1.2.2: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $|\cdot|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için $|x| := \begin{cases} x \ , \ x \geq 0 \ ise \\ -x \ , \ x < 0 \ ise \end{cases}$ mutlak değer fonksiyonu olsun. Bu durumda $e: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için$e(x, y) := |x - y|$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metrik ve $(\mathbb{R}, e)$ bir metrik uzaydır. $(\mathbb{R}, e)$ metrik uzayına Öklid uzayı denir.

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, $|\cdot|: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ için $|z| = |x + iy| := \sqrt{x^2 + y^2}$ modül fonksiyonu olsun. $\forall z, w \in \mathbb{C}$ için

$$e_c(z, w) := |z - w|$$

fonksiyonu $\mathbb{C}$ üzerinde bir metriktir ve $(\mathbb{C}, e_c)$ bir metrik uzaydır.

Örnek 1.2.3: $a, b \in \mathbb{R}$ için $a < b$ olmak üzere $B([a, b], \mathbb{R}) := \{f: [a, b] \to \mathbb{R} : \exists M_f \geq 0 \text{ öyle ki } \forall x \in [a, b] \text{ için } |f(x)| \leq M_f\}$ olsun. Bu durumda $d_\infty: B([a, b], \mathbb{R}) \times B([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\forall f, g \in B([a, b], \mathbb{R})$ için

$$d_\infty(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$$

fonksiyonu $B([a, b], \mathbb{R})$ üzerinde bir metriktir ve $(B([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ bir metrik uzaydır.

Çözüm:

$f, g \in B([a, b], \mathbb{R})$ keyfi olsun. Bu takdirde $M_f, M_g \geq 0$ sayıları mevcuttur $\therefore$ $\forall x \in [a, b]$ için $|f(x)| \leq M_f$ ve $|g(x)| \leq M_g$ 'dir.

O halde $\forall x \in [a, b]$ için $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_f + M_g$ 'dir. Dolayısıyla $M_f + M_g$ sayısı $\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. O halde $d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} \leq M_f + M_g$ 'dir.

$f, g \in B([a, b], \mathbb{R})$ keyfi olduğundan $d_\infty: B([a, b], \mathbb{R}) \times B([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$'dir.

M1) $f, g \in B([a, b], \mathbb{R})$ keyfi olsun. $\forall x \in [a, b]$ için

$0 \leq |f(x) - g(x)| \leq \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\} = d_\infty(f,g)$ 'dir. $f,g \in B([a,b],\mathbb{R})$ keyfi olduğundan $\forall f,g \in B([a,b],\mathbb{R})$ için $d_\infty(f,g) \geq 0$ 'dır.

M2) $f,g \in B([a,b],\mathbb{R})$ için $d_\infty(f,g) = 0$ olsun. O halde $\forall x \in [a,b]$ için $0 \leq |f(x) - g(x)| \leq \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\} = d_\infty(f,g) = 0$ olduğundan $\forall x \in [a,b]$ için $|f(x) - g(x)| = 0$ 'dır. Dolayısıyla $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) = g(x)$ yani $f = g$ 'dir.

Tersine $g \in B([a,b],\mathbb{R})$ için $f = g$ olsun. O halde $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) = g(x)$ olduğundan $\forall x \in [a,b]$ için $|f(x) - g(x)| = 0$ 'dir. Dolayısıyla $d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\} = 0$ 'dır.

M3) $\forall f,g \in B([a,b],\mathbb{R})$ için

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$$
$$= \sup\{|g(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} = d_\infty(g,f) \text{ 'dir.}$$

M4) $f,g,h \in B([a,b],\mathbb{R})$ keyfi olsun. $\forall x \in [a,b]$ için $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| = d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$ olduğundan $d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$ sayısı $\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. O halde $d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\} \leq d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$ 'dir. f,g,h fonksiyonları keyfi olduğundan $\forall f,g,h \in B([a,b],\mathbb{R})$ için $d_\infty(f,g) \leq d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$ 'dir.

O halde $(B([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$ bir metrik uzaydır.

Örnek 1.2.4: (X,d) bir metrik uzay, $\emptyset \neq Y \subset X$ olsun. $d_{\downarrow Y\times Y}: Y \times Y \to \mathbb{R}$, $\forall x,y \in Y$ için $d_{\downarrow Y\times Y}(x,y) = d(x,y)$, fonksiyonu Y üzerinde bir metriktir. $(Y, d_{\downarrow Y\times Y})$ metrik uzayına (X,d) metrik uzayının bir alt metrik uzayı denir. $(Y, d_{\downarrow Y\times Y})$ yerine kısalık için (Y,d) sembolü kullanılır.

Tanım 1.2.5: [22, s.18]

(X,d) bir metrik uzay, $a \in X$ sabit bir nokta, $r > 0$ verilen bir sayı olsun $B(a,r) \coloneqq \{x : x \in X \text{ ve } d(x,a) < r\} \subset X$, $\bar{B}(a,r) \coloneqq \{x : x \in X \text{ ve } d(x,a) \leq r\} \subset X$ ve $S(a,r) \coloneqq \{x : x \in X \text{ ve } d(x,a) = r\} \subset X$ kümelerine sırasıyla a merkezli r yarıçaplı açık top, kapalı top ve küre denir.

Tanım 1.2.6: [22, s.19] (X,d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $x_0 \in A$ olsun. $B(x_0, r_0) \subset A$ olacak şekilde bir $r_0 > 0$ sayısı bulunabilirse $x_0 \in A$ noktasına A kümesinin bir iç noktası denir.

A kümesinin bütün iç noktalarının kümesine A kümesinin içi denir ve $\overset{\circ}{A}$ ile gösterilir.

$\overset{\circ}{A} := \{x : x \in A \; ve \; \exists r_x > 0 \; öyle \; ki \; B(x, r_x) \subset A\}$ ’dir.

Tanım1.2.7: [22, s.18-19] (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A = \overset{\circ}{A}$ ise A alt kümesine X’in d metriğine göre bir açık alt kümesi denir.

Tanım 1.2.8: [22, s.18] (X, d) bir metrik uzay ve $K \subset X$ olsun. Eğer $K^c = X \backslash K$ alt kümesi X’in d metriğine göre bir açık alt kümesi ise K kümesine X’in d metriğine göre bir kapalı alt kümesi denir.

Tanım 1.2.9: [22, s.25] (X, d) bir metrik uzay, $\{x_n\} \subset X$ verilen bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilir $\therefore$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$ için $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası varsa; $\{x_n\}$ dizisine d metriğine göre yakınsak bir dizi ve $x_0 \in X$ noktasına $\{x_n\}$ dizisinin d metriğine göre bir limit noktası denir.

Teorem 1.2.10: [22, s.26] (X, d) bir metrik uzay, $\{x_n\} \subset X$ olsun. $\{x_n\}$ dizisi d metriğine göre yakınsak bir dizi ise limiti tektir.

İspat:

$x_0, y_0 \in X$ noktaları $\{x_n\}$ dizisinin d metriğine göre iki limit noktası olsun.

$\varepsilon > 0$ keyfi bir sayı olsun. O halde $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ sayısına karşılık $N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ mevcuttur $\therefore$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $d(x_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ ’dir.

$N := \text{mak}\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$ şeklinde tanımlanırsa $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq N$ için

$0 \leq d(x_0, y_0) \leq d(x_n, x_0) + d(x_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ’dur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $0 \leq d(x_0, y_0) < \varepsilon$’dur. O halde $d(x_0, y_0) = 0$ olduğundan $x_0 = y_0$ ’dir.

Notasyon 1.2.11: (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ olsun. $\{x_n\}$ dizisi d metriğine göre yakınsak ve limiti x_0 ise bu durum; $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \overset{d}{=} x_0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$, $n \to +\infty$ için $x_n \to x_0$ veya kısaca $x_n \to x_0$ sembollerinden biri ile gösterilir.

Tanım 1.2.12: [22, s.21] (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $M \subset X$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $(B(x, \varepsilon) \backslash \{x\}) \cap M \neq \emptyset$ ise $x \in X$ noktasına $M \subset X$ alt kümesinin bir yığılma noktası (limit noktası) denir.

$M \subset X$ alt kümesinin bütün yığılma noktalarının kümesi M' ile gösterilir.

$\overline{M} = M \cup M' \subset X$ alt kümesine M ’nin kapanışı denir.

Önerme 1.2.13: [23, s.14] (X, d) bir metrik uzay, $M \subset X$ olsun. Bu takdirde

i) $\overline{M} \subset X$ bir kapalı alt kümedir.

ii) M kapalıdır ancak ve ancak $M = \overline{M}$ ise.

İspat:

i) $\overline{M}^c \subset X$ ’in açık olduğu gösterilirse $\overline{M}$ kapalı olur.

a-) $\overline{M}^c = \emptyset$ olsun. Bu takdirde $\overline{M}^c$ açık alt kümedir.

b-) $\overline{M}^c \neq \emptyset$ olsun. $x_0 \in \overline{M}^c$ keyfi fakat sabit olsun. O halde $x_0 \notin \overline{M} = M \cup M'$ ’dir. Bu takdirde $x_0 \notin M$ ve $x_0 \notin M'$ ’dir.

$x_0 \notin M'$ olduğundan $\exists r_0 > 0$ sayısı mevcuttur $\therefore$ $(B(x_0, r_0) \setminus \{x_0\}) \cap M = \emptyset$ ’dir. $x_0 \notin M$ olduğundan

$$B(x_0, r_0) \cap M = \emptyset \text{ ’dir.} \tag{1.1}$$

İddia: $B(x_0, r_0) \cap M' = \emptyset$ ’dir.

Aksini varsayalım $B(x_0, r_0) \cap M' \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap M'$ mevcuttur. $x_1 \in B(x_0, r_0)$ olduğundan $\exists r_1 > 0 \therefore B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$ ’dir.

Öte yandan $x_1 \in M'$ olduğundan $(B(x_1, r_1) \setminus \{x_1\}) \cap M \neq \emptyset$ ’dir. Bu durumda $\exists x_2 \in (B(x_1, r_1) \setminus \{x_1\}) \cap M$ ve $x_0 \notin M$ olduğundan $x_2 \neq x_1$ ve $x_2 \neq x_0$ ’dır.

Bu durumda $x_2 \in [(B(x_1, r_1) \setminus \{x_1\}) \cap M] \subset [(B(x_0, r_0) \setminus \{x_0\}) \cap M] \neq \emptyset$ ’dir. Bu ise $(B(x_0, r_0) \setminus \{x_0\}) \cap M = \emptyset$ olmasıyla çelişir. Çelişki $B(x_0, r_0) \cap M' \neq \emptyset$ olduğunu varsaymaktan kaynaklanır. Yani

$$B(x_0, r_0) \cap M' = \emptyset \text{ ’dir.} \tag{1.2}$$

(1.1) ve (1.2) ’den $B(x_0, r_0) \cap \overline{M} = \emptyset$ ’dir. Dolayısıyla $B(x_0, r_0) \subset \overline{M}^c$ ’dir. $x_0 \in \overline{M}^c$ bir iç noktadır ve $x_0 \in \overline{M}^c$ keyfi olduğundan $\overline{M}^c$ bir açık alt kümedir.

ii) $M = \overline{M}$ olsun. i) ’den $\overline{M}$ kapalı olduğundan M ’de kapalıdır.

Tersine M kapalı olsun. $M = \overline{M}$ olduğu gösterilmelidir. Aksini varsayalım $M \neq \overline{M}$ olsun. O halde $M \subset M \cup M' = \overline{M}$ ’dir. Bu durumda $\exists x_0 \in M' \therefore x_0 \in M^c$ ’dir. M kapalı olduğundan M^c açık ve $x_0 \in M^c$ olduğundan $\exists r_0 > 0 \therefore B(x_0, r_0) \subset M^c$ ’dir. Bu durumda $(B(x_0, r_0) \setminus \{x_0\}) \cap M = \emptyset$ olur ki bu $x_0 \in M'$ olması ile çelişir. Çelişki M kapalı iken $M \neq \overline{M}$ olduğunu varsaymaktan kaynaklanır. O halde M kapalı ise $M = \overline{M}$ olmak zorundadır.

Teorem 1.2.14: [22, s.30] (X,d) bir metrik uzay, $\emptyset \neq M \subset X$ ve $x \in X$ olsun. $x \in \overline{M}$ olması için gerek ve yeter koşul M 'nin noktalarından oluşan ve x 'e yakınsayan bir dizinin mevcut olmasıdır.

İspat:

a) $x \in \overline{M}$ ise M 'nin noktalarından oluşan ve x 'e yakınsayan bir dizi mevcuttur.

$x \in \overline{M}$ olsun. $x \in M$ veya $x \in M'$ 'dir.

$x \in M$ ise olan $\{x_n\} \coloneqq \{x\} \subset M$ dizisi için $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} x = x$ 'dir.

$x \in M'$ ise $\forall r > 0$ için $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$ 'dir. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left(B\left(x,\frac{1}{n}\right) \setminus \{x\}\right) \cap M \neq \emptyset$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ doğal sayısına karşılık $\exists x_n \in M \therefore$ $0 < d(x_n,x) < \frac{1}{n}$ 'dir. Sıkıştırma teoreminden $\{x_n\} \subset M$ için $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ 'dir.

Dolayısıyla $x \in \overline{M}$ ise M 'nin noktalarından oluşan ve x 'e yakınsayan bir dizi mevcuttur.

b) M 'nin noktalarından oluşan ve x 'e yakınsayan bir dizinin mevcut ise $x \in \overline{M}$ 'dir.

$x \in X$ için $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ olan bir $\{x_n\} \subset M$ dizisi mevcut olsun.

Eğer $x \in \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ise $\{x_n\} \subset M$ olduğundan $x \in M \subset \overline{M}$ 'dir.

Eğer $x \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ise $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ olduğundan $\forall r > 0$ sayısına karşılık $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(r)$ için $0 < d(x_n,x) < r$ olacak şekilde bir $N(r) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı mevcuttur. O halde $x_{N(r)} \in (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap M \neq \emptyset$ olduğundan $x \in \overline{M}$ 'dir.

Dolayısıyla M 'nin noktalarından oluşan ve x 'e yakınsayan bir dizinin mevcut ise $x \in \overline{M}$ 'dir.

a) ve b) 'den $x \in \overline{M}$ olması için gerek ve yeter koşul M 'nin noktalarından oluşan ve x 'e yakınsayan bir dizinin mevcut olmasıdır.

Sonuç 1.2.15: (X,d) bir metrik uzay, $\emptyset \neq M \subset X$ olsun. $M \subset X$ kapalı bir alt küme olması için gerek ve yeter koşul M 'nin noktalarından oluşan ve yakınsak olan her dizinin limitinin M 'ye ait olmasıdır.

İspat:

a) $M \subset X$ kapalı bir alt küme ise M 'nin noktalarından oluşan ve yakınsak olan her dizinin limitinin M 'ye aittir.

$M \subset X$ kapalı bir alt küme, $\{x_n\} \subset M$ yakınsak ve bir $x \in X$ için $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$ olan bir dizi olsun. Teorem.1.2.14 'den $x \in \overline{M}$ 'dir. M kapalı olduğundan Önerme.1.2.13 'den $M = \overline{M}$ 'dir. O halde $x \in M$ 'dir. $\{x_n\} \subset M$ keyfi olduğundan, $M \subset X$ kapalı bir alt küme ise M 'nin noktalarından oluşan ve yakınsak olan her dizinin limitinin M 'ye aittir.

b) Tersine M 'nin noktalarından oluşan ve yakınsak olan her dizinin limitinin M 'ye ait ise $M \subset X$ kapalı bir alt kümedir.

$x \in \overline{M}$ keyfi olsun. Teorem.1.2.14 'den $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$ olan bir $\{x_n\} \subset M$ dizisi mevcuttur. Hipoteze göre $x \in M$ 'dir. $x \in \overline{M}$ keyfi olduğundan $\overline{M} \subset M \subset M \cup M' = \overline{M}$ 'dir. O halde $M = \overline{M}$ olduğundan Önerme.1.2.13 'den M kapalıdır.

a) ve b) 'den $M \subset X$ kapalı bir alt küme olması için gerek ve yeter koşul M 'nin noktalarından oluşan ve yakınsak olan her dizinin limitinin M 'ye ait olmasıdır.

Önerme 1.2.16: (X, d) bir metrik uzay, $\emptyset \neq M \subset X$ ve $x \in X$ olsun. $x \in \overline{M}$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $d(x_\varepsilon, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_\varepsilon \in M$ mevcut olmasıdır.

İspat:

a) $x \in \overline{M}$ ise $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $d(x_\varepsilon, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_\varepsilon \in M$ mevcuttur.

$x \in \overline{M}$ olsun. $\overline{M} = M \cup M'$ olduğundan $x \in M$ veya $x \in M'$ 'dir.

$x \in M$ ise $x_\varepsilon := x$ alınırsa $x_\varepsilon = x \in M$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $d(x_\varepsilon, x) = d(x, x) = 0 < \varepsilon$ 'dir.

$x \in M'$ ise Tanım 1.2.12 'den $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $(B(x, \varepsilon) \backslash \{x\}) \cap M \neq \emptyset$ 'dir. O halde $\exists x_\varepsilon \in M \therefore x_\varepsilon \neq x$ ve $d(x_\varepsilon, x) < \varepsilon$ 'dir.

b) Tersine $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $d(x_\varepsilon, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_\varepsilon \in M$ mevcut ise $x \in \overline{M}$ 'dir.

$\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $d(x_\varepsilon, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_\varepsilon \in M$ mevcut olsun.

$x \in M$ ise $x \in M \subset M \cup M' = \overline{M}$ 'dir.

$x \notin M$ ise $x_\varepsilon \in (B(x, \varepsilon) \backslash \{x\}) \cap M \neq \emptyset$ olduğundan $x \in M' \subset M \cup M' = \overline{M}$ 'dir.

Dolayısıyla $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $d(x_\varepsilon, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_\varepsilon \in M$ mevcut ise $x \in \overline{M}$ 'dir.

Tanım 1.2.17: [22, s.28] (X,d) bir metrik uzay, $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık; $m,n \geq N(\varepsilon)$ olan $\forall m,n \in \mathbb{N}$ için $d(x_m,x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilirse $\{x_n\}$ dizisine (X,d) metrik uzayında bir Cauchy dizisi denir.

Teorem 1.2.18: [22, s.29] Bir metrik uzayda yakınsak olan her dizi bir Cauchy dizisidir.

İspat:

(X,d) bir metrik uzay, $\{x_n\} \subset X$ dizisi yakınsak ve $x_0 \in X$ için $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$ olan bir dizi olsun. Bu takdirde $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır $\therefore$ $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için $d(x_n,x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ 'dir. O halde $\forall m,n \in \mathbb{N},\ m,n \geq N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için $d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x_0) + d(x_n,x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ 'dir. O halde $\{x_n\} \subset X$ yakınsak dizisi bir Cauchy dizisidir.

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Yani bir metrik uzayda Cauchy dizisi olan bir dizinin yakınsak olması gerekmez.

Örnek 1.2.19: $(\mathbb{R},e)$ metrik uzayının bir alt metrik uzayı olan $\big((0,1],e\big)$ metrik uzayında $\left\{\frac{1}{n}\right\} \subset (0,1]$ dizisi bir Cauchy dizisidir, fakat yakınsak değildir.

Çözüm:

$\varepsilon > 0$ keyfi olsun. Doğal sayılar kümesi üstten sınırlı olmadığından $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde en az bir $k \in \mathbb{N}$ doğal sayısı mevcuttur. En küçük eleman prensibine göre $\left\{k\colon k \in \mathbb{N}, \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ kümesinin en küçük elemanı mevcuttur [24, s.8].

$$N(\varepsilon) \coloneqq \text{E.K.E.}\left\{k\colon k \in \mathbb{N}, \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

seçilirse, $\forall m,n \in \mathbb{N}\ m,n \geq N(\varepsilon)$ için $\frac{1}{m},\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$ olduğundan $e\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ 'dur. Dolasyısıyla $\forall m,n \in \mathbb{N}\ m,n \geq N(\varepsilon)$ için $e\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right) < \varepsilon$ 'dur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\left\{\frac{1}{n}\right\} \subset (0,1]$ dizisi $\big((0,1],e\big)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

Fakat $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisi $\big((0,1], e\big)$ metrik uzayında yakınsak değildir. Aksini varsayalım. Bir $x_0 \in (0,1]$ için $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = x_0$ olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N^*(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır $\therefore \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N^*(\varepsilon)$ için $e\left(\frac{1}{n}, x_0\right) = \left|\frac{1}{n} - x_0\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ 'dir.

$N_\varepsilon \coloneqq \text{mak}\{N(\varepsilon), N^*(\varepsilon)\}$ şeklinde tanımlanırsa $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon$ için $0 < x_0 = |x_0| = \left|x_0 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right| \leq \left|x_0 - \frac{1}{n}\right| + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ 'dir. O halde $\varepsilon = x_0 > 0$ alınırsa $0 < x_0 < x_0$ çelişkisi ortaya çıkar. Bu çelişki $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisinin $\big((0,1], e\big)$ metrik uzayında yakınsak olmadığını gösterir.

Tanım 1.2.20: [22, s.28] (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) metrik uzayına bir tam metrik uzay denir.

Örnek 1.2.21: $(B([a,b], \mathbb{R}), d_\infty)$ bir tam metrik uzaydır.

Çözüm:

$\{f_n\} \subset B([a,b], \mathbb{R})$ bir cauchy dizisi olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı mevcuttur $\therefore \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N(\varepsilon)$ için
$d_\infty(f_n, f_m) \coloneqq \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in [a,b]\} < \frac{\varepsilon}{3}$ 'dir.
Dolayısıyla $\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N(\varepsilon)$ ve $\forall x \in [a,b]$ için

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ 'dir.} \tag{1.3}$$

O halde $\forall x \in [a,b]$ için $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{R}$ reel sayı dizisinin cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi $e(x,y) = |x - y|$ Öklid metriğine göre bir tam metrik uzay olduğundan [22, s.33] $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{R}$ dizisi $(\mathbb{R}, e)$ metrik uzayında yakınsaktır.

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \coloneqq \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlansın.

$\forall x \in [a,b]$ için $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ olduğundan $\exists N_x(\varepsilon) \in \mathbb{N} \therefore \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_x(\varepsilon)$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ 'dir.} \tag{1.4}$$

$x \in [a,b]$ keyfi fakat sabit olsun. $n_x \in \mathbb{N}$ doğal sayısı $n_x \geq N(\varepsilon), N_x(\varepsilon)$ olacak şekilde seçilirse (1.3) ve (1.4) 'den

$$|f(x)| = \left|f(x) - f_{n_x}(x) + f_{n_x}(x) - f_{N(\varepsilon)}(x) + f_{N(\varepsilon)}(x)\right|$$
$$\leq \left|f(x) - f_{n_x}(x)\right| + \left|f_{n_x}(x) - f_{N(\varepsilon)}(x)\right| + \left|f_{N(\varepsilon)}(x)\right| < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + M_{f_{N(\varepsilon)}} \text{ 'dir.}$$

$x \in [a,b]$ keyfi olduğundan $\forall x \in [a,b]$ için $|f(x)| < \frac{2\varepsilon}{3} + M_{f_{N(\varepsilon)}}$ 'dir. O halde $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ 'dir.

Öte yandan $\forall x \in [a,b]$ için $n_x \in \mathbb{N}$ doğal sayısı yine $n_x \geq N(\varepsilon), N_x(\varepsilon)$ olacak şekilde seçilirse (1.3) ve (1.4) 'den $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$ için

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|f_n(x) - f_{n_x}(x) + f_{n_x}(x) - f(x)\right|$$
$$\leq \left|f_n(x) - f_{n_x}(x)\right| + \left|f_{n_x}(x) - f(x)\right| < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \tfrac{2\varepsilon}{3} \text{'dir.}$$

Dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$ için

$d_\infty(f_n, f) = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$ 'dir. O halde $\{f_n\} \subset B([a,b],\mathbb{R})$ dizisi $(B([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$ metrik uzayında $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ fonksiyonuna yakınsaktır. Dolayısıyla $(B([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$ bir tam metrik uzaydır.

Tanım 1.2.22: [22, s.619] (X,d) bir metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ açık kümelerin ailesi M 'nin keyfi bir açık örtümü olsun ($M \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$). Eğer bu açık örtümün sonlu bir alt örtümü varsa ($M \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}$ ise) M 'ye (X,d) metrik uzayında kompakt bir küme denir.

Tanım 1.2.23: [22, s.619] (X,d) bir metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. $\forall\{x_n\} \subset M$ dizisinin d metriğine göre M kümesinde yakınsak olan bir $\{x_{k_n}\} \subset \{x_n\}$ alt dizisi varsa M 'ye (X,d) metrik uzayında dizisel kompakt bir küme denir.

Teorem 1.2.24: [22, s.619] (X,d) bir metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. M 'nin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul M 'nin dizisel kompakt olmasıdır.

Tanım 1.2.25: (X,d_X), (Y,d_Y) iki metrik uzay, $A \subset X$, $x_0 \in A'$ ve $f: A \subset X \to Y$ olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $0 < d_X(x,x_0) < \delta$ olan $\forall x \in A$ için $d_Y(f(x),L) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta \equiv \delta(x_0,\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabilirse $f: A \subset X \to Y$ fonksiyonunun $x_0 \in A'$ noktasında limiti vardır ve $L \in Y$ 'ye f 'nin x_0 noktasındaki bir limiti denir.

$f: A \subset X \to Y$ fonksiyonunun $x_0 \in A'$ noktasında bir limiti varsa tektir ve bu durum $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ veya $x \to x_0$ için $f(x) \to L$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.26: [22, s.20] (X, d_X), (Y, d_Y) iki metrik uzay, $\emptyset \neq A \subset X$, $x_0 \in A$ ve $f: A \to Y$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $d_X(x, x_0) < \delta$ olan $\forall x \in A$ için $d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\exists \delta \equiv \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ sayısı bulunabilirse $f: A \to Y$ fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında süreklidir denir.

Eğer $f: A \to Y$ fonksiyonu A 'nın her noktasında sürekli ise f 'ye A kümesinde sürekli bir fonksiyondur denir.

Tanım 1.2.27: (X, d_X), (Y, d_Y) iki metrik uzay, $\emptyset \neq A \subset X$, $x_0 \in A$ ve $f: A \to Y$ olsun. $\overset{d_X}{\lim\limits_{n \to +\infty}} x_n = x_0$ olan $\forall \{x_n\} \subset A$ için $\overset{d_Y}{\lim\limits_{n \to +\infty}} f(x_n) = f(x_0)$ ise $f: A \to Y$ fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında dizisel süreklidir denir.

Teorem 1.2.28: [22, s.31] (X, d_X), (Y, d_Y) iki metrik uzay ve $f: X \to Y$ olsun. f fonksiyonunun $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $x_0 \in X$ noktasında dizisel sürekli olmasıdır.

Teorem 1.2.29: [22, s.30] (X, d) bir tam metrik uzay, $Y \subset X$ olsun. (Y, d) alt metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul Y 'nin kapalı olmasıdır.

Örnek 1.2.30: $C([a, b], \mathbb{R}) \coloneqq \{f: [a, b] \to \mathbb{R}: f \text{ sürekli}\}$ kümesi d_∞ metriğine göre $(B([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ metrik uzayının bir alt uzayı olup $(C([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ bir tam metrik uzaydır.

Çözüm:

$f \in C([a, b], \mathbb{R})$ keyfi fakat sabit olsun. $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ süreklidir. [25, s.126] 'dan kapalı bir aralıkta sürekli bir fonksiyon bu aralıkta sınırlı olduğundan $f \in B([a, b], \mathbb{R})$ 'dir. $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ keyfi olduğundan $C([a, b], \mathbb{R}) \subset B([a, b], \mathbb{R})$ 'dir.

O halde $(C([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$, $(B([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ metrik uzayınını bir alt uzayıdır.

Örnek.1.2.11 'den $(B([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ bir tam metrik uzay olduğundan $C([a, b], \mathbb{R})$ 'nin kapalı olduğunu göstermek yeterlidir.

$\{f_n\} \subset C([a, b], \mathbb{R})$, $(B([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ metrik uzayında yakınsak ve bir $f \in (B([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ için $\overset{d_\infty}{\lim\limits_{n \to +\infty}} f_n = f$ olan bir dizi ve $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$ için $d_\infty(f_n, f) = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. Dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ 'dir.} \tag{1.5}$$

$x_0 \in [a,b]$ keyfi fakat sabit olsun. $f_{N(\varepsilon)} \in C([a,b],\mathbb{R})$ olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ sayınına karşılık $|x - x_0| < \delta$ olan $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left|f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \textbf{(1.6)}$$

olacak şekilde bir $\delta(x_0,\varepsilon) > 0$ sayısı mevcuttur. O halde $|x - x_0| < \delta$ olan $\forall x \in [a,b]$ için (1.5) ve (1.6) 'dan

$|f(x) - f(x_0)| = \left|f(x) - f_{N(\varepsilon)}(x) + f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(x_0) + f_{N(\varepsilon)}(x_0) - f(x_0)\right|$

$\leq \left|f(x) - f_{N(\varepsilon)}(x)\right| + \left|f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(x_0)\right| + \left|f_{N(\varepsilon)}(x_0) - f(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ 'dir.

$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan f $x_0 \in [a,b]$ 'de süreklidir. $x_0 \in [a,b]$ keyfi olduğundan $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ 'dir. $\{f_n\} \subset C([a,b],\mathbb{R})$ keyfi olduğundan Sonuç.1.2.15 'den $C([a,b],\mathbb{R})$ kapalıdır. Dolayısıyla $(C([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$ bir tam metrik uzaydır.

Önerme 1.2.31: (X, d_X), (Y, d_Y) iki metrik uzay olsun. Bu takdirde $d_{X\times Y}: (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) \in (X \times Y) \times (X \times Y)$ için $d_{X\times Y}\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) \coloneqq d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2)$ olarak tanımlanırsa $d_{X\times Y}$, $X \times Y$ üzerinde bir metriktir.

İspat:

M1) $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$ için $d_X(x_1,x_2) \geq 0$, $d_Y(y_1,y_2) \geq 0$ olduğundan $d_{X\times Y}\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2) \geq 0$ 'dır.

M2) $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$ için $d_{X\times Y}\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = 0$ olsun. O halde $d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2) = 0$ olduğundan $d_X(x_1,x_2) = 0$, $d_Y(y_1,y_2) = 0$ 'dir. d_X ve d_Y metrik olduğundan $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ 'dir. Dolayısıyla $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ 'dir.

Tersine $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$ için $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ olsun. O halde $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ 'dir. d_X ve d_Y metrik olduğundan $d_X(x_1,x_2) = 0$, $d_Y(y_1,y_2) = 0$ 'dir. Dolayısıyla $d_{X\times Y}\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2) = 0$ 'dir.

M3) $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$ için

$$\begin{aligned} d_{X\times Y}\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) &= d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2) = d_X(x_2,x_1) + d_Y(y_2,y_1) \\ &= d_{X\times Y}\big((x_2,y_2),(x_1,y_1)\big) \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

M4) $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in X \times Y$ için

$$\begin{aligned} d_{X\times Y}\big((x_1,y_1),(x_3,y_3)\big) &= d_X(x_1,x_3) + d_Y(y_1,y_3) \\ &\leq \big(d_X(x_1,x_2) + d_X(x_2,x_3)\big) + \big(d_Y(y_1,y_2) + d_Y(y_2,y_3)\big) \end{aligned}$$

$$= \big(d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2)\big) + \big(d_X(x_2,x_3) + d_Y(y_2,y_3)\big)$$
$$= d_{X\times Y}\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) + d_{X\times Y}\big((x_2,y_2),(x_3,y_3)\big) \text{ 'dir.}$$

O halde $d_{X\times Y}$ fonksiyonu $X \times Y$ kümesi üzerinde bir metrik ve $(X \times Y, d_{X\times Y})$ bir metrik uzay olduğunu gösterir.

$(X \times Y, d_{X\times Y})$ metrik uzayına (X, d_X), (Y, d_Y) metrik uzaylarının çarpım uzayı denir.

1.3. Lineer Uzaylar, Norm ve Normlu Lineer Uzaylar

Tanım 1.3.1: [22, s.51] $\emptyset \neq H$ bir küme, $\mathbb{F} \equiv \mathbb{R}$ reel sayılar cismi veya $\mathbb{F} \equiv \mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi olsun. Sırasıyla toplama ve skaler ile çarpma denilen $\oplus: H \times H \longrightarrow H$, $(x,y) \longrightarrow x \oplus y$, $\odot: \mathbb{F} \times H \longrightarrow H$, $(\lambda, x) \to \lambda \odot x$ ikili işlemleri aşağıdaki koşullarını sağlıyorsa H ya $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir reel veya kompleks lineer uzay denir ve bu durum $(H, \oplus, \mathbb{F}\odot)$ üçlüsü ile gösterilir.

L1) $\forall x, y, z \in H$ için $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ 'dir.

L2) $\forall x \in H$ için $x \oplus \theta_H = x$ olacak şekilde bir tek $\theta_H \in H$ mevcuttur.

L3) $\forall x \in H$ için $x \oplus x^{-1} = \theta_H$ olacak şekilde bir tek $x^{-1} \in H$ mevcuttur.

L4) $\forall x, y \in H$ için $x \oplus y = y \oplus x$ 'dir.

L5) $\forall x \in H$, $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{F}$ için $\lambda \odot (\beta \odot x) = (\lambda\beta) \odot x$,

L6) $\forall x \in H$, $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{F}$ için $(\lambda + \beta) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\beta \odot x)$,

L7) $\forall x, y \in H$, $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ için $\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$,

L8) $\forall x \in H$, $1 \in \mathbb{F}$ için $1 \odot x = x$.

H 'nın elemanlarına vektörler, $\mathbb{F}$ 'nin elemanlarına skalerler denir.

Kısalık için $(H, \oplus, \mathbb{F}\odot)$ lineer uzayındaki "$\oplus$" ve "$\odot$" işlemleri "+" ve "." olarak alınacaktır.

Örnekler 1.3.2:

1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi reel lineer uzaydır. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi hem reel lineer uzay hem de kompleks lineer uzaydır.

2. $C([a,b],\mathbb{R}) \coloneqq \{f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ } sürekli\}$ kümesi, $\forall f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $(f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x)$ ve $(\lambda f)(x) \coloneqq \lambda f(x)$ işlemlerine göre bir reel lineer uzaydır.

3. $M_{2\times2}(\mathbb{R}) = \left\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;:\; a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$ kümesi $\forall A,B \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ ve $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ için $A+B$ matrislerdeki toplama işlemi ve λA matrislerdeki skalerle çarpma işlemi olmak üzere bir reel lineer uzaydır.

4. $M_{2\times2}(\mathbb{C}) = \left\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;:\; a,b,c,d \in \mathbb{C}\right\}$ kümesi $\forall A,B \in M_{2\times2}(\mathbb{C})$ ve $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ için $A+B$ matrislerdeki toplama işlemi ve λA matrislerdeki skalerle çarpma işlemi olmak üzere bir kompleks lineer uzaydır.

Tanım 1.3.3: [22, s.53] H bir reel veya kompleks lineer uzay, $\emptyset \neq L \subset H$ olsun. $\forall x,y \in L$ ve $\forall\lambda,\beta \in \mathbb{F}$ için $\lambda x + \beta y \in L$ ise L ’ye H ’nın bir alt lineer uzayı denir.

Örnek 1.3.4: $L \coloneqq \{f \in C([a,b],\mathbb{R}) : \; f \; sabit\} \subset C([a,b],\mathbb{R})$ bir alt lineer uzaydır.

Çözüm:

$\emptyset \neq L \subset C([a,b],\mathbb{R})$ olduğu açıktır. $\forall f,g \in L$ ve $\forall\lambda,\beta \in \mathbb{R}$ için f ve g sabit olduğundan $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) = m$, $g(x) = n$ olacak şekilde $m,n \in \mathbb{R}$ sayıları mevcuttur. O halde $\forall x \in [a,b]$ için $(\lambda f + \beta g)(x) = \lambda f(x) + \beta g(x) = \lambda m + \beta n \in \mathbb{R}$ sabit olduğundan $\lambda f + \beta g \in L$ ’dir. Dolayısıyla $L \subset C([a,b],\mathbb{R})$ bir alt lineer uzaydır.

Tanım 1.3.5: [22, s.59] H bir reel veya kompleks lineer uzay ve $\|\cdot\| : H \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. $\|\cdot\|$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\|\cdot\|$ ’ya H üzerinde bir norm ve $(H,\|\cdot\|)$ ikilisine bir (reel veya kompleks) normlu lineer uzay denir.

N1) $\forall x \in H$ için $\|x\| \geq 0$ ’dır,

N2) $x \in H$ için $\|x\| = 0$ ’dır ancak ve ancak $x = \theta_H$ ise,

N3) $\forall x \in H$, $\forall\lambda \in \mathbb{F}$ için $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ ’dir,

N4) $\forall x,y \in H$ için $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ’dir.

Örnek 1.3.6: $\|\cdot\|_\infty : B([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall f \in B([a,b],\mathbb{R})$ için $\|f\|_\infty \coloneqq \sup\{|f(x)| : \; x \in [a,b]\}$ şeklinde tanımlanırsa; $\|\cdot\|_\infty$ fonksiyonu $B([a,b],\mathbb{R})$ reel lineer uzayı üzerinde bir norm ve $(B([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ bir reel normlu lineer uzaydır.

Çözüm:

N1) $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ olsun. $\forall x \in [a,b]$ için $|f(x)| \geq 0$ olduğundan $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : \; x \in [a,b]\} \geq 0$ ’dir. O halde $\forall f \in B([a,b],\mathbb{R})$ için $\|f\|_\infty \geq 0$ ’dır.

N2) $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ için $\|f\|_\infty = 0$ olsun. $\sup\{|f(x)| : \; x \in [a,b]\} = 0$ ’dır. Dolayısıyla $\forall x \in [a,b]$ için $0 \leq |f(x)| \leq 0$ olduğundan $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) = 0$ ’dır. O halde $f = \theta_{B([a,b],\mathbb{R})}$ ’dir

Tersine $f = \theta_{B([a,b],\mathbb{R})}$ ise $\forall x \in [a,b]$ için $\theta_{B([a,b],\mathbb{R})}(x) = 0$ olduğundan

$\|f\|_\infty = \left\|\theta_{B([a,b],\mathbb{R})}\right\|_\infty = \sup\{\left|\theta_{B([a,b],\mathbb{R})}(x)\right| : x \in [a,b]\} = \sup\{0\} = 0$ ’dır.

N3) $f \in B([a,b],\mathbb{R})$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$\lambda = 0$ ise;

$\|\lambda f\|_\infty = \|0f\|_\infty = \left\|\theta_{B([a,b],\mathbb{R})}\right\|_\infty = 0 = 0\|f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$ ’dir.

$\lambda \neq 0$ ise; $\forall x \in [a,b]$ için $|(\lambda f)(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda|\|f\|_\infty$ olduğundan

$\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|\|f\|_\infty$ ’dir. **(1.7)**

$\forall x \in [a,b]$ için $|f(x)| = \frac{1}{|\lambda|}|(\lambda f)(x)| \leq \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$ olduğundan $\forall x \in [a,b]$ için $|\lambda||f(x)| \leq \|\lambda f\|_\infty$ ’dir. O halde

$|\lambda|\|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty$ ’dir. **(1.8)**

(1.7) ve (1.8) ’den $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$ ’dir. Dolayısıyla $\forall f \in B([a,b],\mathbb{R})$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$ ’dir.

N4) $f, g \in B([a,b],\mathbb{R})$ olsun.

$\forall x \in [a,b]$ için $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ olduğundan $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ ’dir.

Dolayısıyla $\|\cdot\|_\infty$ fonksiyonu $B([a,b],\mathbb{R})$ üzerinde bir norm ve $(B([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ bir reel normlu lineer uzaydır.

Örnek 1.3.7: $\|\cdot\|_{2\times2}: M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ için $\left\|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right\|_{2\times2} := \sup\{|a|,|b|,|c|,|d|\}$ şeklinde tanımlanırsa; $\|\cdot\|_{2\times2}$ fonksiyonu $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ reel lineer uzayında bir norm ve $(M_{2\times2}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{2\times2})$ bir reel normlu lineer uzaydır.

Çözüm:

N1) $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ için $|a|,|b|,|c|,|d| \geq 0$ olduğundan $\sup\{|a|,|b|,|c|,|d|\} \geq 0$ ’dir. Bu durumda $\left\|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right\|_{2\times2} \geq 0$ ’dır.

N2) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ için $\left\|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right\|_{2\times2} = 0$ olsun. $\sup\{|a|,|b|,|c|,|d|\} = 0$ olduğundan $|a|,|b|,|c|,|d| = 0$ ’dır. O halde $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \theta_{M_{2\times2}(\mathbb{R})}$ ’dir.

Tersine $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \theta_{M_{2\times2}(\mathbb{R})}$ için $\left\|\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\|_{2\times2} = \sup\{|0|,|0|,|0|,|0|\} = 0$ ’dır.

N3) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

$\lambda = 0$ ise;

$\left\| \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\|_{2\times2} = \left\| 0 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\|_{2\times2} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|_{2\times2} = 0 = |\lambda| \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|_{2\times2}$ ’dir.

$\lambda \neq 0$ ise;

$|a|, |b|, |c|, |d| \leq \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|_{2\times2}$ olduğundan $|\lambda||a|, |\lambda||b|, |\lambda||c|, |\lambda||d| \leq |\lambda| \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|_{2\times2}$ ’dir. O halde

$$\left\| \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\|_{2\times2} = \left\| \begin{matrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{matrix} \right\|_{2\times2} = \sup\{|\lambda a|, |\lambda b|, |\lambda c|, |\lambda d|\}$$

$$= \sup\{|\lambda||a|, |\lambda||b|, |\lambda||c|, |\lambda||d|\} \leq |\lambda| \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|_{2\times2} \qquad \textbf{(1.9)}$$

Tersine $|\lambda||a|, |\lambda||b|, |\lambda||c|, |\lambda||d| \leq \sup\{|\lambda||a|, |\lambda||b|, |\lambda||c|, |\lambda||d|\} = \left\| \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\|_{2\times2}$

olduğundan $|a|, |b|, |c|, |d| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left\| \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\|_{2\times2}$ ’dir. O halde

$\left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|_{2\times2} = \sup\{|a|, |b|, |c|, |d|\} \leq \frac{1}{|\lambda|} \left\| \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\|_{2\times2}$ olduğundan

$$|\lambda| \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|_{2\times2} \leq \left\| \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\|_{2\times2} \text{ ‘dir.} \qquad \textbf{(1.10)}$$

(1.9) ve (1.10) ’dan $\left\| \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\|_{2\times2} = |\lambda| \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|_{2\times2}$ ’dir.

N4) $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ için

$|a + e| \leq |a| + |e| \leq \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|_{2\times2} + \left\| \begin{matrix} e & f \\ g & h \end{matrix} \right\|_{2\times2}$,

$|b + f| \leq |b| + |f| \leq \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|_{2\times2} + \left\| \begin{matrix} e & f \\ g & h \end{matrix} \right\|_{2\times2}$,

$|c + g| \leq |c| + |g| \leq \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|_{2\times2} + \left\| \begin{matrix} e & f \\ g & h \end{matrix} \right\|_{2\times2}$,

$|d + h| \leq |d| + |h| \leq \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|_{2\times2} + \left\| \begin{matrix} e & f \\ g & h \end{matrix} \right\|_{2\times2}$ olduğundan

$\left\| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\|_{2\times2} = \left\| \begin{matrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{matrix} \right\|_{2\times2} = \sup\{|a + e|, |b + f|, |c + g|, |d + h|\}$

$$\leq \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|_{2\times 2} + \left\| \begin{matrix} e & f \\ g & h \end{matrix} \right\|_{2\times 2} \text{ ’dir.}$$

Dolayısıyla $\|\cdot\|_{2\times 2}$ fonksiyonu $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ üzerinde bir norm ve $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{2\times 2})$ bir reel normlu lineer uzaydır.

Örnek 1.3.8: $|\cdot|: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ modül fonksiyonu olmak üzere Örnekler.1.3.2-4 ’den $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ’nin bir kompleks lineer uzay olduğu biliniyor. $\|\cdot\|_{2\times 2}: M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ için $\left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|_{2\times 2} := \sup\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$ şeklinde tanımlanırsa Örnek.1.3.7 ’ye benzer şekilde $\|\cdot\|_{2\times 2}$ fonksiyonu $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ kompleks lineer uzayında bir norm ve $(M_{2\times 2}(\mathbb{C}), \|\cdot\|_{2\times 2})$ bir kompleks normlu lineer uzaydır.

Tanım 1.3.9: [22, s.59] $(H, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay olsun. $d_{\|\cdot\|}: H \times H \to R$ fonksiyonu $\forall x, y \in H$ için $d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|$ şeklinde tanımlanırsa; $d_{\|\cdot\|}$ fonksiyonu H üzerinde bir metrik ve $(H, d_{\|\cdot\|})$ bir metrik uzaydır. $d_{\|\cdot\|}$ metriğine H üzerinde $\|\cdot\|$ normu ile üretilen metrik denir.

Bundan sonra $(H, d_{\|\cdot\|})$ metrik uzayı yerine kısaca $(H, \|\cdot\|)$ sembolü kullanılacaktır.

$(H, \|\cdot\|)$ bir reel veya kompleks normlu lineer uzay ise $\|\cdot\|$ normunun ürettiği metriğe göre bir metrik uzay olduğundan; önceki bölümde verilen açık top, kapalı top, küre, iç nokta, limit noktası, bir kümenin içi, bir kümenin kapanışı, açık küme, kapalı küme, bir dizinin yakınsaklığı, cauchy dizisi, kompaktlık, dizisel kompaktlık, limit, süreklilik ve dizisel süreklilik kavramları normlu lineer uzaylarda normun ürettiği metriğe göre tanımlanır.

Örnek 1.3.6 ’da ki $B([a, b], \mathbb{R})$ reel lineer uzayında tanımlanan $\|\cdot\|_\infty$ normunun ürettiği metrik Örnek 1.2.3 ’de ki d_∞ metriğidir. Yani $d_{\|\cdot\|_\infty} = d_\infty$ ’dur.

Tanım 1.3.10: [22, s.75] H bir reel veya kompleks lineer uzay, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ normları H üzerinde iki norm olsun. $\forall x \in H$ için

$$\lambda \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \mu \|x\|_1$$

olacak şekilde $\lambda, \mu > 0$ sayıları mevcut ise $\|\cdot\|_1$ normu $\|\cdot\|_2$ normuna denktir denir ve bu durum $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ ile gösterilir.

Örnek 1.3.11: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ reel lineer uzayında $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $\|(x, y)\|_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $\|(x, y)\|_2 = |x| + |y|$ şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\mathbb{R}^2$ üzerinde birer norm ve $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ ’dir.

Çözüm:

$\mathbb{R}^2$ üzerinde $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının birer norm olduğu kolaylıkla gösterilir. O halde $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\|(x,y)\|_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \le \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2y^2} + y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{(|x| + |y|)^2} = \big||x| + |y|\big| = |x| + |y| = \|(x,y)\|_2$$

ve

$$\frac{1}{2}\|(x,y)\|_2 = \frac{1}{2}(|x| + |y|) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}\right) \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x,y)\|_1$$

olduğundan $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $\frac{1}{2}\|(x,y)\|_2 \le \|(x,y)\|_1 \le \|(x,y)\|_2$ ’dir. Dolayısıyla $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ ’dir.

Tanım 1.3.12: $(H, \|\cdot\|)$ bir reel veya kompleks normlu uzay olsun. Eğer $(H, \|\cdot\|)$ metrik uzayı bir tam metrik uzay ise $(H, \|\cdot\|)$ normlu uzayına bir Banach uzayı denir.

Örnek 1.3.13: $(B([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ bir Banach uzayıdır.

Çözüm:

Örnek 1.2.21 ’den $(B([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ bir tam metrik uzay ve $\|\cdot\|_\infty$ normu ile üretilen metrik d_∞ olduğundan $(B([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ bir Banach uzayıdır.

Örnek 1.3.14: $C([0,1], \mathbb{R})$ reel lineer uzayı üzerinde $\|\cdot\|_1 : C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall f \in C([0,1], \mathbb{R})$ için $\|f\|_1 \coloneqq \int_0^1 |f(x)| dx$ şeklinde tanımlanırsa bir norm ve $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ reel normlu lineer uzaydır. Fakat $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ bir Banach uzayı değildir.

Çözüm:

$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge 2$ için

$$f_n(x) \coloneqq \begin{cases} 0 & , 0 \le x < \frac{1}{2} \ ise \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) & , \frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \ ise \\ 1 & , \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \le 1 \ ise \end{cases} \qquad \textbf{(1.11)}$$

şeklinde tanımlanan $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının her biri süreklidir. O halde $\{f_n\}_{n \ge 2} \subset C([0,1], \mathbb{R})$ bir dizidir.$m > n \ge 2$ olan $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx$ ’dir.

$$\Longrightarrow \|f_n - f_m\|_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f_m(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} |f_n(x) - f_m(x)| dx$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(x) - f_m(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |f_n(x) - f_m(x)| dx \text{ 'dir.}$$

$$\Longrightarrow \|f_n - f_m\|_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} |0 - 0| dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} \left| n\left(x - \frac{1}{2}\right) - m\left(x - \frac{1}{2}\right) \right| dx$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left| 1 - m\left(x - \frac{1}{2}\right) \right| dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1 - 1| dx \text{ 'dir}$$

$$\Longrightarrow \|f_n - f_m\|_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} \left| n\left(x - \frac{1}{2}\right) - m\left(x - \frac{1}{2}\right) \right| dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left| 1 - m\left(x - \frac{1}{2}\right) \right| dx \text{ 'dir.}$$

$$\Longrightarrow \|f_n - f_m\|_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} (m - n)\left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} 1 - m\left(x - \frac{1}{2}\right) dx \text{ 'dir.}$$

$$\Longrightarrow \|f_n - f_m\|_1 = \frac{m-n}{2m^2} + \frac{1}{n} - \frac{m}{2n^2} - \frac{1}{m} + \frac{1}{2m} \text{ 'dir.}$$

$$\Longrightarrow \|f_n - f_m\|_1 = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{n}{2m^2} - \frac{m}{2n^2} \text{ 'dir.}$$

$$\Longrightarrow \|f_n - f_m\|_1 = \frac{2m-n}{2m^2} + \frac{2n-m}{2n^2} < \frac{2m}{2m^2} + \frac{2n}{2n^2} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{2}{n} \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyla $m > n \geq 2$ olan $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\|f_n - f_m\|_1 < \frac{2}{n} \text{ 'dir.} \tag{1.12}$$

O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $N(\varepsilon) := E.K.E.\left\{k : k \in \mathbb{N}\ ve\ \frac{2}{k} < \varepsilon\right\}$ şeklinde tanımlanırsa $m > n \geq 2$ olan $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $n \geq N(\varepsilon)$ seçilirse (1.12) 'den $\|f_n - f_m\|_1 < \frac{2}{n} < \varepsilon$ 'dur.

O halde $\{f_n\}_{n\geq 2} \subset C([0,1], \mathbb{R})$ bir cauchy dizisidir.

Fakat $\{f_n\}_{n\geq 2} \subset C([0,1], \mathbb{R})$ dizisi $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ reel normlu lineer uzayında yakınsak değildir.

Varsayalım ki $\{f_n\}_{n\geq 2} \subset C([0,1], \mathbb{R})$ yakınsak ve bir $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ için

$$\lim_{n \to +\infty} f_n \overset{\|\cdot\|_1}{=} f \text{ olsun.}$$

O halde $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq N(\varepsilon)$ olan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|f_n - f\|_1 < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı mevcuttur. Dolayısıyla $n \geq N(\varepsilon)$ olan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon \text{ 'dur.} \tag{1.13}$$

Öte yandan $\forall x \in [0,1]$ için $|f_n(x) - f(x)| \geq 0$ olduğundan (1.13) 'den $n \geq N(\varepsilon)$ olan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx < \varepsilon$ 'dur. Dolayısıyla (1.11) 'den $\forall \varepsilon > 0$ için

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f(x)|dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |0 - f(x)|dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx < \varepsilon \text{ 'dur.}$$

$\forall \varepsilon > 0$ için $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx < \varepsilon$ olduğundan $\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx = 0$ 'dır.

Ayrıca $\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx = 0$ ise $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için $|f(x)|$ sürekli ve $|f(x)| \geq 0$ olduğundan [26, s.138] 'den $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için $|f(x)| = 0$ 'dır. O halde $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için $f(x) = 0$ 'dır.

$a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ keyfi fakat sabit alınsın. $\frac{1}{2} < a$ yani $0 < a - \frac{1}{2}$ olduğundan $\frac{1}{p_a} < a - \frac{1}{2}$, $p_a \geq N(\varepsilon)$ olan bir $p_a \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. O halde $p_a \geq N(\varepsilon)$ için $\frac{1}{2} + \frac{1}{p_a} < a$ 'dir.

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_a \geq N(\varepsilon)$ için $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{p_a} < a$ olduğundan

$(a, 1] \subset \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p_a}, 1\right] \subset \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right]$ 'dir.

O halde $\forall x \in (a, 1]$ için $x \in \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right]$ 'dir. (1.13) 'den $\forall \varepsilon > 0$ için ve $n \geq p_a \geq N(\varepsilon)$ olan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$0 \leq \int_a^1 |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx < \varepsilon$$

olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için ve $n \geq p_a \geq N(\varepsilon)$ olan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \int_a^1 |f_n(x) - f(x)|dx < \varepsilon$ 'dur. (1.11) kullanılırsa $0 \leq \int_a^1 |1 - f(x)|dx < \varepsilon$ 'dur.

Yukarıdakine benzer olarak bu $\forall x \in (a, 1]$ için $f(x) = 1$ olduğunu gösterir. O halde $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ ve $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ olduğundan $f(a) = 1$ 'dir. $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ keyfi olduğundan $\lim_{a \to \frac{1}{2}^+} f(a) = 1$ ve yine $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ olduğundan $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ 'dir.

Bu $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için $f(x) = 0$ olması ile çelişir. Çelişki bir $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ için $\overset{\|\cdot\|_1}{\lim_{n \to +\infty}} f_n = f$ olduğunu varsaymaktan kaynaklanır. Yani $\{f_n\}_{n \geq 2} \subset C([0,1], \mathbb{R})$ dizisi $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ reel normlu lineer uzayında yakınsak bir dizi değildir. Dolayısıyla $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ bir Banach uzayı değildir.

Tanım 1.3.15: [27, s.23] $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde normlu uzaylar, $x_0 \in X$ ve $f: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\|x - y\|_X < \delta$ olan $\forall x, y \in X$ için $\|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabilirse f 'ye X üzerinde düzgün süreklidir denir.

Tanım 1.3.16: [22, s.82] X, Y aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki lineer uzay $T: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{F}$ için $T(\lambda x_1 + \beta x_2) = \lambda T(x_1) + \beta T(x_2)$ ise T ye X 'den Y 'ye bir lineer dönüşüm denir.

X 'den Y 'ye tüm lineer dönüşümlerin kümesi $L(X, Y)$ ile gösterilir. $\forall T, S \in L(X, Y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ ve $\forall x \in X$ için $(T + S)(x) \coloneqq T(x) + S(x)$,$(\lambda T)(x) = \lambda T(x)$ işlemlerine göre $L(X, Y)$ 'nin de $\mathbb{F}$ cismi üzerinde lineer uzay olduğu kolayca gösterilir.

Tanım 1.3.17: [22, s.91] $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde normlu uzaylar $T \in L(X, Y)$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ olacak şekilde $\exists M > 0$ mevcut ise T 'ye sınırlı lineer dönüşüm denir.

X 'den Y 'ye tüm sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi $B(X, Y)$ ile gösterilir. Kısalık için $B(X) \equiv B(X, X)$ alınır.

Önerme 1.3.18: $\forall T, S \in B(X, Y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ ve $\forall x \in X$ için
$(T + S)(x) \coloneqq T(x) + S(x)$ ve $(\lambda T)(x) = \lambda T(x)$ işlemlerine göre $B(X, Y) \subset L(X, Y)$ bir alt uzaydır.

İspat:

$T, S \in B(X, Y)$ keyfi olsun. $\exists M_T, M_S > 0$ mevcuttur $\therefore$ $\forall x \in X$ için
$\|T(x)\|_Y \leq M_T\|x\|_X$ ve $\|S(x)\|_Y \leq M_S\|x\|_X$ 'dir. $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{F}$ ve $\forall x \in X$ için

$$\begin{aligned}
\|(\lambda T + \beta S)(x)\|_Y &= \|(\lambda T)(x) + (\beta S)(x)\|_Y \leq \|\lambda T(x)\|_Y + \|\beta S(x)\|_Y \\
&= |\lambda|\|T(x)\|_Y + |\beta|\|S(x)\|_Y \leq |\lambda| M_T\|x\|_X + |\beta| M_S\|x\|_X \\
&= (|\lambda| M_T + |\beta| M_S)\|x\|_X
\end{aligned}$$

o halde $(\lambda T + \beta S) \in B(X, Y)$ 'dir. Tanım1.3.3 'den $B(X, Y) \subset L(X, Y)$ bir alt lineer uzaydır.

Teorem 1.3.19: $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde normlu uzaylar, $X \neq \{\theta_X\}$ ve $T \in L(X, Y)$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir.

i) T, X üzerinde düzgün süreklidir.

ii) T, X üzerinde süreklidir.

iii)T, $\theta_X \in X$ 'de süreklidir.

iv)T sınırlıdır.

İspat:

i) $\Longrightarrow$ **ii)** T, X üzerinde düzgün sürekli olsun. O halde $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\|x-y\|_X < \delta$ olan $\forall x, y \in X$ için $\|T(x) - T(y)\|_Y < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcuttur.

$x_0 \in X$ keyfi fakat sabit olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $\delta \equiv \delta(x_0, \varepsilon) := \delta(\varepsilon) > 0$ şeklinde tanımlanırsa $\|x_0 - y\|_X < \delta$ olan $\forall y \in X$ için $\|T(x_0) - T(y)\|_Y < \varepsilon$ 'dur. O halde T, $x_0 \in X$ 'de süreklidir. $x_0 \in X$ keyfi olduğundan T, X üzerinde süreklidir.

ii) $\Longrightarrow$ **iii)** T, X üzerinde sürekli olsun. O halde T, her $x \in X$ 'de süreklidir. Dolayısıyla T, $\theta_X \in X$ 'de süreklidir.

iii) $\Longrightarrow$ **vi)** T, θ_X 'de sürekli olsun. O halde $1 > 0$ için $\exists\delta > 0 \therefore \|u - \theta_X\|_X < \delta$ olan $\forall u \in X$ için $\|T(u) - T(\theta_X)\|_Y < 1$ 'dir. Yani $\|u\|_X < \delta$ olan $\forall u \in X$ için

$\|T(u)\|_Y < 1$ 'dir. **(1.14)**

$x \in X \setminus \{\theta_X\}$ keyfi olsun. $\|x\|_X \neq 0$, $\frac{\delta}{2\|x\|_X} x \in X$ ve $\left\|\frac{\delta}{2\|x\|_X} x\right\|_X = \frac{\delta}{2}\frac{\|x\|_X}{\|x\|_X} = \frac{\delta}{2} < \delta$ olduğundan (1.14) 'den $\left\|T\left(\frac{\delta}{2\|x\|_X} x\right)\right\|_Y < 1$ 'dir. $\Longrightarrow \|T(x)\|_Y < \frac{2}{\delta}\|x\|_X$ 'dir.

O halde $x \in X \setminus \{\theta_X\}$ için $\|T(x)\|_Y < \frac{2}{\delta}\|x\|_X$ 'dir. Özel olarak $\|T(\theta_X)\|_Y \leq \frac{2}{\delta}\|\theta_X\|_X$ 'dir. Dolayısıyla $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq \frac{2}{\delta}\|x\|_X$ 'dir. O halde T sınırlıdır.

iv) $\Longrightarrow$ **i)** T sınırlı olsun.

O halde $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ olacak şekilde $\exists M > 0$ mevcuttur. O halde $\forall x, y \in X$ için $\|T(x) - T(y)\|_Y = \|T(x-y)\|_Y \leq M\|x-y\|_X$ olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ için $\delta := \frac{\varepsilon}{M+1}$ şeklinde tanımlanırsa $\|x-y\|_X < \delta$ olan $\forall x, y \in X$ için $\|T(x) - T(y)\|_Y < \varepsilon$ 'dur. Dolayısıyla T, X üzerinde düzgün süreklidir.

Tanım 1.3.20: $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde normlu uzaylar, $T: X \to Y$ sınırlı bir lineer dönüşüm olsun.

$\|T\| := \inf\{M : M \geq 0 \; ve \; \forall x \in X \; için \; \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X\}$ sayısına T sınırlı lineer dönüşümünün normu denir.

Teorem 1.3.21: $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde normlu uzaylar olsun. $T \in B(X, Y)$ ise $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$ 'dir.

İspat:

$A \coloneqq \{M : M \geq 0 \; ve \; \forall x \in X \; için \; \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X\}$ olsun. Tanım 1.3.20 'den $\|T\| = \inf A$ 'dır. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|T\| < \|T\| + \frac{1}{n}$ olduğundan $\exists M_n \in A \therefore$ $0 \leq \|T\| \leq M_n \leq \|T\| + \frac{1}{n}$ 'dir. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $M_n \in A$ olduğundan A kümesinin tanımından $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|T(x)\|_Y \leq M_n\|x\|_X \leq \left(\|T\| + \frac{1}{n}\right)\|x\|_X$ 'dir. O halde $\forall x \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|T(x)\|_Y \leq \left(\|T\| + \frac{1}{n}\right)\|x\|_X$ 'dir. $x \in X$ sabit tutulup $n \to +\infty$ limit alınırsa $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$ 'dir.

Önerme 1.3.22: $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde normlu uzaylar olsun. $\|\cdot\|: B(X,Y) \to \mathbb{R}$, $\forall T \in B(X,Y)$ için
$\|T\| \coloneqq \inf\{M : M \geq 0 \; ve \; \forall x \in X \; için \; \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X\}$ fonksiyonu, $B(X,Y)$ üzerinde bir norm ve $(B(X,Y), \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır.

İspat:

$B(X,Y)$ 'deki toplama ve skalerle çarpma işlemleri ve bu işlemlere göre lineer uzay olması Örnekler 1.3.2-2 'deki gibidir.

N1) $\forall T \in B(X,Y)$ için $\|T\| \geq 0$ olduğu açıktır. Negatif olmayan sayıların infimumu negatif olamaz.

N2) $\forall x \in X$ için $\theta_{B(X,Y)}(x) = \theta_Y$ olmak üzere $\theta_{B(X,Y)}$ operatörü $B(X,Y)$ lineer uzayının sıfır elemanıdır.

$\|T\| = 0$ olsun. O halde Teorem1.3.21 'den $\forall x \in X$ için

$0 \leq \|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X = 0\|x\|_X = 0$ olduğundan $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y = 0$ 'dır. O halde $\forall x \in X$ için $T(x) = \theta_Y$ 'dir. Dolayısıyla $T = \theta_{B(X,Y)}$ 'dir.

Tersine $T = \theta_{B(X,Y)}$ olsun. O halde $\forall x \in X$ için $T(x) = \theta_Y$ olduğundan $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y = 0$ 'dir. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in X$ için $0 = \|T(x)\|_Y \leq \frac{1}{n}\|x\|_X$ 'dir. Dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n} \in \{M : M \geq 0 \; ve \; \forall x \in X \; için \; \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X\}$ 'dir. O halde $\|T\| \coloneqq \inf\{M : M \geq 0 \; ve \; \forall x \in X \; için \; \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X\} = 0$ 'dır.

N3) $T \in B(X,Y)$, $\lambda \in \mathbb{F}$ keyfi olsun.

$\lambda = 0$ ise $\forall x \in X$ için $(\lambda T)(x) = \lambda T(x) = 0T(x) = \theta_Y$ olduğundan $\lambda T = \theta_{B(X,Y)}$ 'dir. O halde $\|\lambda T\| = \|\theta_B\| = 0 = |0|\|T\| = |\lambda|\|T\|$ 'dir.

$\lambda \neq 0$ ise Teorem1.3.21 'den $\forall x \in X$ için
$\|\lambda T(x)\|_Y = |\lambda|\|T(x)\|_Y \leq |\lambda|\|T\|\|x\|_X$ olduğundan

$\|\lambda T\| \leq |\lambda|\|T\|$ ’dir. **(1.15)**

Tersine olarak Teorem1.3.21 ’den $\forall x \in X$ için $|\lambda|\|T(x)\|_Y = \|\lambda T(x)\|_Y \leq \|\lambda T\|\|x\|_X$ olduğundan $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq \frac{\|\lambda T\|}{|\lambda|}\|x\|_X$ ’dir. O halde $\|T\| \leq \frac{\|\lambda T\|}{|\lambda|}$ ’dir. Dolayısıyla

$|\lambda|\|T\| \leq \|\lambda T\|$ ’dir. **(1.16)**

(1.15) ve (1.16) ’dan $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$ ’dir. $T \in B(X,Y)$ ve $\lambda \in \mathbb{F}$ keyfi olduğundan $\forall T \in B(X,Y)$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ için $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$ ’dir.

N4) $T, S \in B(X,Y)$keyfi olsun. Teorem 1.3.21 ’den $\forall x \in X$ için

$$\|(T+S)(x)\|_Y = \|T(x) + S(x)\|_Y \leq \|T(x)\|_Y + \|S(x)\|_Y \leq (\|T\| + \|S\|)\|x\|_X$$

ve $T, S \in B(X,Y)$ keyfi olduğundan $\forall T, S \in B(X,Y)$ için $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$ ’dir.

O halde $(B(X,Y), \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır.

Teorem 1.3.23: [28, s.70] $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde normlu uzaylar, $X \neq \{\theta_X\}$ olsun. Bu takdirde $\forall T \in B(X,Y)$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) $\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X \setminus \{\theta_X\}\right\}$

ii) $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y : x \in X \setminus \{\theta_X\}\ ve\ \|x\|_X = 1\}$

iii)$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y : x \in X \setminus \{\theta_X\}\ ve\ \|x\|_X < 1\}$

iv)$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y : x \in X \setminus \{\theta_X\}\ ve\ \|x\|_X \leq 1\}$

Teorem 1.3.24: (Düzgün sınırlılık prensibi) [23, s.118] $(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ iki Banach uzayı, $S \neq \emptyset$ olsun. $\forall s \in S$ için $T_s \subseteq B(X,Y)$ olmak üzere $\forall x \in X$ için $\{\|T_s(x)\|_Y : s \in S\}$ kümesi sınırlı ise $\{\|T_s\| : s \in S\}$ kümesi de sınırlıdır.

1.4. $SO(2)$ Grubu ve Özellikleri

Tanım 1.4.1: G boş olmayan bir küme ve $\begin{aligned} *: G \times G &\longrightarrow G \\ (a,b) &\longrightarrow a * b \end{aligned}$ aşağıdaki şartları sağlayan bir ikili işlem ise G 'ye "$*$" işlemine göre bir grup denir ve bu durum $(G,*)$ ikilisi ile gösterilir;

G1) $\forall a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$,

G2) $\exists e \in G$ öyle ki $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$,

G3) $\forall a \in G$ için $\exists b \in G$ öyleki $a * b = b * a = e$,

G2 'deki e elemanının tek olduğu kolayca görülür.

G3 'deki b elemanının tek olduğu kolayca görülür. Bu tek olan b elemanına a 'nın tersi denir ve $a^{-1} \coloneqq b$ ile gösterilir [29, s.274].

Tanım 1.4.2: $(G,*)$ bir grup olsun. "$*$" işlemi $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ şartını sağlıyorsa $(G,*)$ grubuna bir değişmeli grup denir [29, s.276].

Örnekler 1.4.3:

1. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi "$+$" toplama işlemine göre birer değişmeli gruptur. Fakat "$.$" çarpma işlemine göre grup değildir. Çünkü her üç kümede de bulunan "0" sayısının çarpma işlemine göre tersi yoktur.

2. $\mathbb{T} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ birim çember olsun. $\mathbb{T}$, $\mathbb{C}$ 'deki çarpma işlemine göre değişmeli bir gruptur.

Çözüm:

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{T}$ için $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 1$ olup $z_1 z_2 \in \mathbb{T}$ 'dir.

G1) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{T}$ için $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ 'dir.

G2) $1 \in \mathbb{C}$ için $|1| = 1$ olup $1 \in \mathbb{T}$ 'dir. $\forall z \in \mathbb{T}$ için $z1 = 1z = z$ 'dir.

G3) $\forall z \in \mathbb{T}$ için $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{|1|}{|z|} = 1$ yani $\frac{1}{z} \in \mathbb{T}$ olup $z\frac{1}{z} = \frac{1}{z}z = 1$ 'dir.

G4) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{T}$ için $z_1 z_2 = z_2 z_1$ 'dir.

$\mathbb{T}$, $\mathbb{C}$ 'deki çarpma işlemine değişmeli bir gruptur.

3. $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ kümesi matrislerdeki toplama işlemine göre bir değişmeli gruptur, fakat matrislerdeki çarpma işlemine göre bir grup değildir. Çünkü bir $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ için $\det(A) = 0$ ise A 'nın çarpmaya göre tersi yoktur.

4. $M \coloneqq \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ kümesi matrislerdeki çarpma işlemine göre değişmeli olmayan bir gruptur.

Çözüm:

$\forall A, B \in M$ için $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ olduğundan $\det(AB) = \det A \det B \neq 0$ 'dir. O halde $AB \in M$ 'dir.

G1) $\forall A, B, C \in M$ için matrisler çarpma işlemine göre asosyatif olduğundan $A(BC) = (AB)C$ 'dir.

G2) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ için $\det I = 1 \neq 0$ olduğundan $I \in M$ 'dir. $\forall A \in M$ için $AI = IA = A$ 'dir.

G3) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M$ keyfi olsun. $\det A = ad - bc \neq 0$ olduğundan $B := \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ matrisi için $\det B = \frac{ad-bc}{ad-bc} = 1 \neq 0$ olduğundan $B \in M$ 'dir. Kolayca $AB = BA = I$ yani $B = A^{-1}$ olduğu görülür. O halde $\forall A \in M$ için $A^{-1} \in M$ mevcuttur.

M matrislerdeki çarpma işlemine göre bir gruptur.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in M$ için $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ olduğundan M grubu değişmeli bir grup değildir.

Tanım 1.4.4: $(G,*)$ bir grup ve $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. H'nın kendisi "$*$" işlemine göre bir grup ise H'ya G'nin bir alt grubu denir ve bu durum $H \leq G$ ile gösterilir [29, s.281].

Teorem 1.4.5: $(G,*)$ bir grup $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. $H \leq G$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ olmasıdır [29, s.281].

Önerme 1.4.6: $M := \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ olmak üzere $SO(2) = \{A \in M : A^{-1} = A^T \text{ ve } \det(A) = 1\}$ kümesi matrislerdeki çarpma işlemine göre M 'nin bir alt grubudur.

İspat:

$A, B \in SO(2)$ keyfi olsun. $A^{-1} = A^T$, $B^{-1} = B^T$ ve $\det(A) = \det(B) = 1$ olduğundan $\det(AB^{-1}) = \det A . \det B^{-1} = \det A . \det B^T = \det A . \det B = 1.1 = 1$ 'dir.

$AB^{-1}(AB^{-1})^T = AB^{-1}(B^{-1})^T A^T = AB^{-1}(B^T)^T A^{-1} = AB^{-1}BA^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

$(AB^{-1})^T AB^{-1} = (B^{-1})^T A^T AB^{-1} = (B^T)^T A^{-1}AB^{-1} = BA^{-1}AB^{-1} = BIB^{-1} = BB^{-1} = I$

olduğundan $(AB^{-1})^{-1} = (AB^{-1})^T$ 'dir. Bu durumda $AB^{-1} \in SO(2)$'dir. $A, B \in SO(2)$ keyfi olduğundan $SO(2) \leq M$ bir alt gruptur.

Önerme 1.4.7: $SO(2) = \left\{\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} : t \in [0,2\pi)\right\}$ 'dir.

İspat:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SO(2) = \{A \in M : A^{-1} = A^T \; ve \det(A) = 1\}$ keyfi fakat sabit olsun.

$A^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = A^T$ olduğundan $a = d$ ve $b = -c$ 'dir. Öte yandan $\det(A) = 1$ olduğundan $ad - bc = 1$ 'dir. O halde $a^2 + c^2 = 1$ 'dir.

[24, Sayfa 94, Theorem.3.1] 'den $a = \cos t$, $c = \sin t$ olacak şekilde bir tek $t \in [0,2\pi)$ mevcuttur. O halde $A = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$ 'dir. $A \in SO(2)$ keyfi olduğundan

$SO(2) \subset \left\{\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} : \; t \in [0,2\pi)\right\}$ 'dir.

Tersine $\theta \in [0,2\pi)$ keyfi fakat sabit olsun $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ için

$\det\left(\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\right) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ve

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T$ olduğundan

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in SO(2)$ 'dir.

$\theta \in [0,2\pi)$ keyfi olduğundan $\left\{\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} : \; t \in [0,2\pi)\right\} \subset SO(2)$ 'dir. O halde

$SO(2) = \left\{\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} : \; t \in [0,2\pi)\right\}$ 'dir.

Sonuç 1.4.8: $SO(2) \leq M$ alt grubu değişmelidir.

İspat:

$\forall A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \in SO(2)$ için

$$AB = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\beta) & -\sin(\theta+\beta) \\ \sin(\theta+\beta) & \cos(\theta+\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta+\theta) & -\sin(\beta+\theta) \\ \sin(\beta+\theta) & \cos(\beta+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = BA \text{ 'dir.}$$

Önerme 1.4.9: $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : \; |z| = 1\}$ birim çember ise $\mathbb{T} = \left\{e^{it} : t \in [0,2\pi)\right\}$ 'dir.

İspat:

$\forall t \in [0,2\pi)$ için $\left|e^{it}\right| = 1$ olduğundan $\left\{e^{it} : t \in [0,2\pi)\right\} \subset \mathbb{T}$ 'dir. Tersine $\forall z \in \mathbb{T}$ için $\mathrm{Arg}(z) \in [0,2\pi)$ olduğundan $z = |z|e^{i\mathrm{Arg}(z)} = e^{i\mathrm{Arg}(z)} \in \left\{e^{it} : t \in [0,2\pi)\right\}$ 'dir. O halde $\mathbb{T} \subset \left\{e^{it} : t \in [0,2\pi)\right\}$ 'dir. Bu durumda

$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : \; |z| = 1\} = \left\{e^{it} : t \in [0,2\pi)\right\}$ 'dir.

Tanım 1.4.10: $(K,\circ)$, $(L,*)$ iki grup olsun. Eğer $h: K \to L$ dönüşümü $\forall a, b \in K$ için $h(a \circ b) = h(a) * h(b)$ koşulunu sağlıyorsa h 'ya bir grup homomorfisi denir.

Eğer $h: K \to L$ bir grup homomorfisi ve bire-bir ise h 'ya bir grup izomorfisi denir.

Eğer $h: K \to L$ bir grup izomorfisi ve $h(K) = L$ ise (yani örtense) $(K,\circ)$ ve $(L,*)$ gruplarına birbirine izomorftur denir ve bu durum $K \cong L$ ile gösterilir [29, s.279-280].

Önerme 1.4.11: $SO(2) \cong \mathbb{T}$ 'dir.

İspat:

$\mathbb{T} = \left\{e^{it} : t \in [0,2\pi)\right\}$ ve $SO(2) = \left\{\begin{bmatrix}\cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t\end{bmatrix} : t \in [0,2\pi)\right\}$ olduğundan $f: \mathbb{T} \longrightarrow SO(2)$, $\forall t \in [0,2\pi)$ için $f\left(e^{it}\right) := \begin{bmatrix}\cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t\end{bmatrix}$ dönüşümü göz önüne alınsın.

$\forall t_1, t_2 \in [0,2\pi)$ için

$$f\left(e^{it_1}e^{it_2}\right) = f\left(e^{i(t_1+t_2)}\right) = \begin{bmatrix}\cos(t_1+t_2) & -\sin(t_1+t_2) \\ \sin(t_1+t_2) & \cos(t_1+t_2)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2 & -\cos t_1 \sin t_2 - \sin t_1 \cos t_2 \\ \cos t_1 \sin t_2 + \sin t_1 \cos t_2 & \cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos t_1 & -\sin t_1 \\ \sin t_1 & \cos t_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos t_2 & -\sin t_2 \\ \sin t_2 & \cos t_2\end{bmatrix} = f\left(e^{it_1}\right)f\left(e^{it_2}\right)$$

olduğundan $f: \mathbb{T} \longrightarrow SO(2)$ bir grup homomorfisidir.

$f\left(e^{it_1}\right) \neq f\left(e^{it_2}\right)$ olmak üzere $t_1, t_2 \in [0,2\pi)$ keyfi olsun. O halde

$\begin{bmatrix}\cos t_1 & -\sin t_1 \\ \sin t_1 & \cos t_1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}\cos t_2 & -\sin t_2 \\ \sin t_2 & \cos t_2\end{bmatrix}$ 'dir.

Bu iki matrisin farkı olabilmesi için $\cos t_1 \neq \cos t_2$ veya $\sin t_1 \neq \sin t_2$ olmalıdır. Dolayısıyla $\cos t_1 + i \sin t_1 \neq \cos t_2 + i \sin t_2$ 'dir. O halde $e^{it_1} \neq e^{it_2}$ 'dir. O halde $\left(e^{it_1}\right) \neq f\left(e^{it_2}\right)$ olan $\forall t_1, t_2 \in [0,2\pi)$ için $e^{it_1} \neq e^{it_2}$ olduğundan $f: \mathbb{T} \longrightarrow SO(2)$ bire-bir 'dir.

$\begin{bmatrix}\cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t\end{bmatrix} \in SO(2)$ keyfi olsun. Açıkça $e^{it} \in \mathbb{T}$ olduğundan

$f\left(e^{it}\right) = \begin{bmatrix}\cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t\end{bmatrix}$ yani $f: \mathbb{T} \longrightarrow SO(2)$ örtendir. O halde $SO(2) \cong \mathbb{T}$ 'dir.

Önerme 1.4.12: $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{2\times 2})$ normlu lineer uzayında $SO(2)$ grubu normun ürettiği metriğin topolojisine göre bir kompakt topolojik gruptur [30, s.4].

İspat:

$\left\{\begin{bmatrix}\cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n\end{bmatrix}\right\} \subset SO(2)$ keyfi olsun.

$\{\cos\theta_n\} \subset \mathbb{R}$ dizisi sınırlı olduğundan Bolzano–Weierstrass teoreminden

$\lim_{n \to +\infty} \cos\theta_{k_n} = A$ olacak şekilde bir $A \in \mathbb{R}$ sayısı mevcuttur.

$\{\sin\theta_{k_n}\} \subset \mathbb{R}$ dizisi sınırlı olduğundan Bolzano–Weierstrass teoreminden $\lim_{n \to +\infty} \sin\theta_{k_{l_n}} = B$ olacak şekilde bir $B \in \mathbb{R}$ mevcuttur. O halde $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq N_1(\varepsilon)$ olan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left|\sin\theta_{k_{l_n}} - B\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı mevcuttur.

$\lim_{n \to +\infty} \cos\theta_{k_n} = A$ olduğundan $\lim_{n \to +\infty} \cos\theta_{k_{l_n}} = A$ 'dir. O halde $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq N_2(\varepsilon)$ olan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left|\cos\theta_{k_{l_n}} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı mevcuttur. Dolayısıyla $\forall\varepsilon > 0$ sayısına $N(\varepsilon) \coloneqq \text{mak}\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ doğal sayısı karşılık getirilirse $n \geq N(\varepsilon)$ olan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|\begin{bmatrix} \cos\theta_{k_{l_n}} & -\sin\theta_{k_{l_n}} \\ \sin\theta_{k_{l_n}} & \cos\theta_{k_{l_n}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}\right\|_{2\times2} = \sup\left\{\left|\cos\theta_{k_{l_n}} - A\right|, \left|\sin\theta_{k_{l_n}} - B\right|\right\}$$

$$< \sup\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

olduğundan $\lim_{n \to +\infty} \begin{bmatrix} \cos\theta_{k_{l_n}} & -\sin\theta_{k_{l_n}} \\ \sin\theta_{k_{l_n}} & \cos\theta_{k_{l_n}} \end{bmatrix} \overset{\|\cdot\|_{2\times2}}{=} \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$ 'dir. Öte yandan $1 = \lim_{n \to +\infty} 1 = \lim_{n \to +\infty} \cos^2\theta_{k_{l_n}} + \sin^2\theta_{k_{l_n}} = A^2 + B^2$ olduğundan $\det\left(\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}\right) = A^2 + B^2 = 1$'dir. $A^2 + B^2 = 1$ olduğundan $A = \cos\beta$, $B = \sin\beta$ olacak şekilde bir tek $\beta \in [0,2\pi)$ mevcut yani $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \in SO(2)$ 'dir.

Dolayısıyla $\left\{\begin{bmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{bmatrix}\right\} \subset SO(2)$ dizisinin $SO(2)$ 'de yakınsak alt dizisi mevcut olduğundan Tanım 1.2.23 'e göre $SO(2)$ dizisel kompakttır. Teorem 1.2.24 'e göre $SO(2)$ kompakttır.

Şimdi $SO(2)$ kompakt grubunun topolojik grup olduğunu gösterelim.

Önerme 1.2.31 'e göre $M_{2\times2}(\mathbb{R}) \times M_{2\times2}(\mathbb{R})$ 'deki norm

$\forall\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \times M_{2\times2}(\mathbb{R})$ için

$\left\|\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right)\right\| = \left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix}\right\|_{2\times2} + \left\|\begin{matrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{matrix}\right\|_{2\times2}$ olduğundan

$\forall\left(\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\right) \in SO(2) \times SO(2)$ için

$$\left\|\left(\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\right)\right\| = \left\|\begin{matrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{matrix}\right\|_{2\times 2} + \left\|\begin{matrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{matrix}\right\|_{2\times 2}$$

’dir.

$f: SO(2)\times SO(2) \to SO(2)$

$$f\left(\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos(\theta+\beta) & -\sin(\theta+\beta)\\ \sin(\theta+\beta) & \cos(\theta+\beta)\end{bmatrix}$$

çarpım fonksiyonu göz önüne alınsın.

$\left(\begin{bmatrix}\cos\theta_0 & -\sin\theta_0\\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\beta_0 & -\sin\beta_0\\ \sin\beta_0 & \cos\beta_0\end{bmatrix}\right) \in SO(2)\times SO(2)$ keyfi fakat sabit olsun. $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ şeklinde tanımlanırsa

$$\left\|\left(\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix}\cos\theta_0 & -\sin\theta_0\\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\beta_0 & -\sin\beta_0\\ \sin\beta_0 & \cos\beta_0\end{bmatrix}\right)\right\| < \delta$$

olan $\forall\left(\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\right) \in SO(2)\times SO(2)$ için

$$\left\|f\left(\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\right) - f\left(\begin{bmatrix}\cos\theta_0 & -\sin\theta_0\\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\beta_0 & -\sin\beta_0\\ \sin\beta_0 & \cos\beta_0\end{bmatrix}\right)\right\|_{2\times 2} =$$

$$= \left\|\begin{bmatrix}\cos(\theta+\beta) & -\sin(\theta+\beta)\\ \sin(\theta+\beta) & \cos(\theta+\beta)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\cos(\theta_0+\beta_0) & -\sin(\theta_0+\beta_0)\\ \sin(\theta_0+\beta) & \cos(\theta_0+\beta_0)\end{bmatrix}\right\|_{2\times 2} =$$

$$= \left\|\begin{matrix}\cos(\theta+\beta)-\cos(\theta_0+\beta_0) & -\sin(\theta+\beta)+\sin(\theta_0+\beta_0)\\ (\sin(\theta+\beta)-\sin(\theta_0+\beta_0)) & \cos(\theta+\beta)-\cos(\theta_0+\beta_0)\end{matrix}\right\|_{2\times 2} =$$

$$= \sup\{|\cos(\theta+\beta)-\cos(\theta_0+\beta_0)|, |\sin(\theta+\beta)-\sin(\theta_0+\beta_0)|\}$$

$$\le |\cos\theta-\cos\theta_0| + |\sin\theta-\sin\theta_0| + |\cos\beta-\cos\beta_0| + |\sin\beta-\sin\beta_0|$$

$$\le 2\sup\{|\cos\theta-\cos\theta_0|, |\sin\theta-\sin\theta_0|\} + 2\sup\{|\cos\beta-\cos\beta_0|, |\sin\beta-\sin\beta_0|\}$$

$$= 2\left\|\begin{matrix}\cos\theta-\cos\theta_0 & -(\sin\theta-\sin\theta_0)\\ \sin\theta-\sin\theta_0 & \cos\theta-\cos\theta_0\end{matrix}\right\|_{2\times 2} + 2\left\|\begin{matrix}\cos\beta-\cos\beta_0 & -(\sin\beta-\sin\beta_0)\\ \sin\beta-\sin\beta_0 & \cos\beta-\cos\beta_0\end{matrix}\right\|_{2\times 2}$$

$$= 2\left\|\left(\begin{bmatrix}\cos\theta-\cos\theta_0 & -(\sin\theta-\sin\theta_0)\\ \sin\theta-\sin\theta_0 & \cos\theta-\cos\theta_0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\beta-\cos\beta_0 & -(\sin\beta-\sin\beta_0)\\ \sin\beta-\sin\beta_0 & \cos\beta-\cos\beta_0\end{bmatrix}\right)\right\|$$

$$= 2\left\|\left(\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix}\cos\theta_0 & -\sin\theta_0\\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\beta_0 & -\sin\beta_0\\ \sin\beta_0 & \cos\beta_0\end{bmatrix}\right)\right\|$$

$< 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ’dir.

O halde $\left(\begin{bmatrix}\cos\theta_0 & -\sin\theta_0\\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cos\beta_0 & -\sin\beta_0\\ \sin\beta_0 & \cos\beta_0\end{bmatrix}\right) \in SO(2)\times SO(2)$ keyfi noktasında f süreklidir. Dolayısıyla $f: SO(2)\times SO(2) \to SO(2)$ süreklidir.

$g: SO(2) \to SO(2), \forall \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in SO(2)$ için

$$g\left(\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

her elemanı tersine götüren fonksiyonu göz önüne alınsın. $\begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix} \in SO(2)$ keyfi fakat sabit olsun. $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\delta \coloneqq \varepsilon$ şeklinde tanımlanırsa

$\left\|\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix}\right\|_{2\times 2} < \delta$ olan $\forall \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in SO(2)$ için

$$\left\|g\left(\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\right) - g\left(\begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix}\right)\right\|_{2\times 2} =$$

$$= \left\|\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix}\right\|_{2\times 2} = \left\|\begin{matrix} \cos\theta - \cos\theta_0 & \sin\theta - \sin\theta_0 \\ -(\sin\theta - \sin\theta_0) & \cos\theta - \cos\theta_0 \end{matrix}\right\|_{2\times 2}$$

$$= \sup\{|\cos\theta - \cos\theta_0|, |\sin\theta - \sin\theta_0|\} = \left\|\begin{matrix} \cos\theta - \cos\theta_0 & -(\sin\theta - \sin\theta_0) \\ \sin\theta - \sin\theta_0 & \cos\theta - \cos\theta_0 \end{matrix}\right\|_{2\times 2}$$

$$= \left\|\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix}\right\|_{2\times 2} < \delta = \varepsilon \text{ 'dir.}$$

O halde $\begin{bmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix} \in SO(2)$ keyfi noktasında g süreklidir. Dolayısıyla $g: SO(2) \to SO(2)$ süreklidir.

$SO(2)$ kompakt topolojik gruptur.

Önerme 1.4.13: $SO(2)$, $\mathbb{R}^2$ 'nin (veya $\mathbb{C}$ kompleks düzlemin) tüm dönmelerinin grubudur.

İspat:

$z = \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ keyfi bir eleman olsun. Yani z 'nin orjine olan uzaklığı $r > 0$ ve ox −ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α olsun. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in SO(2)$ keyfi bir eleman olmak üzere $w = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ olduğundan $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in SO(2)$ elemanı z 'yi orjine olan uzaklığını değiştirmeden ox −ekseni ile yaptığı açıyı pozitif yönde θ açısı kadar döndürür. $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ keyfi olduğundan $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in SO(2)$ elemanı $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ 'deki tüm noktaları orjine olan uzaklıklarını değiştirmeden pozitif yönde θ açısı kadar döndürür.

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ olduğundan $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in SO(2)$ elemanı orjini sabit bırakır. O halde $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in SO(2)$ elemanı $\mathbb{R}^2$ 'yi θ açısı kadar pozitif yönde döndürür. Önerme 1.4.7 'den $SO(2)$, $\mathbb{R}^2$ 'nin tüm dönmelerinin grubudur.

Notasyon 1.4.14: $t \in [0,2\pi)$ sayısın verildiğinde, buna karşılık gelen $\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \in SO(2)$ elemanı 2π- periyodlu olduğundan, $SO(2)$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar $2\pi -$ periyodlu fonksiyonlar olarak göz önüne alınacak ve kısalık açısından $t, s \in [0,2\pi)$ sayıları için

$\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t+s) & -\sin(t+s) \\ \sin(t+s) & \cos(t+s) \end{bmatrix}$ olduğundan

$\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \in SO(2)$ yerine $t \in SO(2)$ sembolü kullanılacaktır. Yani $SO(2)$ 'nin elemanları $[0,2\pi)$ 'nin elemanları olarak alınacaktır.

Ayrıca $SO(2)$ üzerinde tanımlı vektör değerli bir f fonksiyonun integrali $\int_{SO(2)} f(t)dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt$ olarak alınacaktır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. $SO(2)$ Grubunun Banach Uzaylarındaki Lineer Gösterimleri

$(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve

$$GL(H) \coloneqq \{A \in B(H) : A^{-1} \in B(H)\} \subset B(H)$$

olsun. $GL(H)$ kümesi dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir gruptur.

Tanım 2.1.1: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve $\alpha: SO(2) \longrightarrow GL(H)$ bir grup homomorfisi ise α 'ya $SO(2)$ grubunun H Banach uzayındaki bir lineer gösterimi denir [31].

Burada $\forall t \in SO(2)$ için $\alpha(t) \in GL(H) \subset B(H)$ olduğundan $\alpha(t): H \longrightarrow H$ lineer sınırlı tersinir operatördür ve Bölüm1.3 'deki lineer sınırlı operatörlerin özelliklerini sağlar.

$\alpha: SO(2) \longrightarrow GL(H)$ bir lineer gösterimi ise $\alpha(0) = I$ 'dir. Ayrıca
$\alpha(0) = \alpha\big(t + (-t)\big) = \alpha(t)\alpha(-t) = I$ olduğu göz önüne alınırsa $\alpha^{-1}(t) = \alpha(-t)$ 'dir.

Tanım 2.1.2: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir lineer gösterimi olsun. $\forall x \in H$, $\forall t \in SO(2)$ için $\|\alpha(t)x\| = \|x\|$ ise α 'ya $\|.\|$ normuna göre bir izometri denir [31].

Tanım 2.1.3: $(H, \|.\|_H)$, $(V, \|.\|_V)$ iki kompleks Banach uzayı ve α, β; sırasıyla $SO(2)$ 'nin H ve V 'de iki lineer gösterimi olsun. $\forall x \in H$, $\forall t \in SO(2)$ için
$B(\alpha(t)x) = \beta(t)B(x)$ olacak şekilde bir $B: H \longrightarrow E$ lineer homeomorfizması mevcut ise α gösterimi β gösterimine denktir denir [31].

Tanım 2.1.4: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H'da bir lineer gösterimi ve $x \in H$ olsun. $\forall t \in SO(2)$ için $\alpha_x(t) \coloneqq \alpha(t)x$ değerini alan $\alpha_x: SO(2) \to H$ dönüşümüne α lineer gösteriminin $x \in H$ elemanına göre yörünge dönüşümü denir [31].

Tanım 2.1.5: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir lineer gösterimi ve $x \in H$ olsun. $\alpha_x: SO(2) \to H$ yörünge dönüşümü sürekli ise $x \in H$ noktasına α gösteriminin bir süreklilik noktası denir.

$H_c \coloneqq \{x \in H: x, \alpha \text{ lineer gösteriminin bir süreklilik noktası}\} \subset H$
kümesine α gösteriminin süreklilik noktalarının kümesi denir.

$H_c \subset H$, alt kümesi H 'nın bir kapalı alt lineer uzayı olduğu kolaylıkla gösterilir.

Tanım 2.1.6: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir lineer gösterimi olsun. $H = H_c$ ise α gösterimine bir sürekli lineer gösterim denir [31].

Tanım 2.1.7: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir lineer gösterimi olsun. $\forall t \in SO(2)$ için $\|\alpha(t)\| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcut ise α gösterimine bir sınırlı lineer gösterim denir.

Önerme 2.1.8:

$(H, \|.\|)$ normlu bir kompleks lineer uzay, α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir lineer gösterimi ve $x \in H$ olsun. α_x yörünge dönüşümünün sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \in SO(2)$ 'de sürekli olmasıdır.

İspat:

a) α_x yörünge dönüşümü $SO(2)$ 'de sürekli ise $0 \in SO(2)$ 'de sürekli olduğu açıktır.

b) α_x yörünge dönüşümü $0 \in SO(2)$ 'de sürekli ise $SO(2)$ 'de süreklidir.

$t_0 \in SO(2)$ keyfi fakat sabit olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ ve $|t| < \delta_0$ olan $\forall t \in SO(2)$ için $\|\alpha_x(t) - \alpha_x(0)\| < \frac{\varepsilon}{\|\alpha(t_0)\|+1}$ olan $\delta_0 \equiv \delta_0(\varepsilon, 0) > 0$ sayısı mevcuttur. Dolayısıyla $|t - t_0| < \delta_0$ olan $\forall t \in SO(2)$ için

$$\|\alpha_x(t - t_0) - \alpha_x(0)\| < \frac{\varepsilon}{\|\alpha(t_0)\|+1} \text{ 'dir.} \qquad \textbf{(2.1)}$$

O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta \coloneqq \delta_0$ olarak tanımlanırsa $|t - t_0| < \delta_0$ olan $\forall t \in SO(2)$ için

$$\begin{aligned}
\|\alpha_x(t) - \alpha_x(t_0)\| &= \|\alpha(t)x - \alpha(t_0)x\| = \|\alpha(t - t_0 + t_0)x - \alpha(t_0)x\| \\
&= \|\alpha(t_0)\alpha(t - t_0)x - \alpha(t_0)x\| = \|\alpha(t_0)[\alpha(t - t_0)x - x]\| \\
&\overset{\text{Teorem 1.3.21}}{\leq} \|\alpha(t_0)\|\|\alpha(t - t_0)x - x\| = \|\alpha(t_0)\|\|\alpha_x(t - t_0) - \alpha_x(0)\| \\
&\overset{(2.1)}{<} \|\alpha(t_0)\| \frac{\varepsilon}{\|\alpha(t_0)\| + 1} < \varepsilon
\end{aligned}$$

olduğundan α_x yörünge dönüşümü $t_0 \in SO(2)$ 'de süreklidir. $t_0 \in SO(2)$ keyfi olduğundan α_x yörünge dönüşümü $SO(2)$ 'de süreklidir.

Önerme 2.1.9: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir lineer gösterimi ve $x \in H_c$ olsun. Bu takdirde; $h_x: SO(2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall t \in SO(2)$ için $h_x(t) \coloneqq \|\alpha(t)x\|$ dönüşümü $SO(2)$ 'de süreklidir.

İspat:

$x \in H_c$ ve $t_0 \in SO(2)$ keyfi fakat sabit olsun. Önerme 2.1.8 'den α_x yörünge dönüşümü $t_0 \in SO(2)$ 'de süreklidir. O halde $\forall \varepsilon > 0$ ve $|t - t_0| < \delta_0$ olan $\forall t \in SO(2)$

için $\|\alpha_x(t)-\alpha_x(t_0)\|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta_0 \equiv \delta_0(\varepsilon,t_0)>0$ sayısı mevcuttur. Dolayısıyla $\forall\varepsilon>0$ için $\delta\coloneqq\delta_0$ şeklinde tanımlanırsa $|t-t_0|<\delta$ olan $\forall t\in SO(2)$ için $|h_x(t)-h_x(t_0)| = |\|\alpha(t)x\|-\|\alpha(t_0)x\|| \le \|\alpha(t)x-\alpha(t_0)x\| = \|\alpha_x(t)-\alpha_x(t_0)\|<\varepsilon$ olduğundan h_x, t_0 'da süreklidir. $t_0\in SO(2)$ keyfi olduğundan h_x, $SO(2)$ 'de süreklidir.

Teorem 2.1.10: $(H,\|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir sürekli lineer gösterimi ise α lineer gösterimi sınırlıdır.

İspat:

α gösterimi sürekli olduğundan $H=H_c$ 'dir. Önerme 2.1.9 'dan $\forall x\in H$ için $h_x\colon SO(2)\longrightarrow\mathbb{R}$, $\forall t\in SO(2)$ için $h_x(t)\coloneqq\|\alpha(t)x\|$ dönüşümü $SO(2)$ 'de süreklidir. Önerme 1.4.13 'den $SO(2)$ kompakttır. Kompakt küme üzerindeki bir sürekli fonksiyon sınırlı olduğundan $\forall x\in H$ için $h_x\colon SO(2)\longrightarrow\mathbb{R}$ sınırlıdır. O halde $\forall t\in SO(2)$ için $|h_x(t)|\le K_x$ olacak şekilde $K_x>0$ sayısı mevcuttur.

O halde $\forall x\in H$ için $\{|h_x(t)|\colon t\in SO(2)\}=\{\|\alpha(t)x\|\colon t\in SO(2)\}\le K_x$ olduğundan $\{\|\alpha(t)x\|\colon t\in SO(2)\}$ kümesi sınırlıdır. Teorem 1.3.24 'den $\{\|\alpha(t)\|\colon t\in SO(2)\}$ kümesi de sınırlıdır. O halde $\mathrm{Sup}\{\|\alpha(t)\|\colon t\in SO(2)\}<+\infty$ 'dir. $M\coloneqq 1+\mathrm{Sup}\{\|\alpha(t)\|\colon t\in SO(2)\}>0$ şeklinde tanımlanırsa $\forall t\in SO(2)$ için $\|\alpha(t)\|\le \mathrm{Sup}\{\|\alpha(t)\|\colon t\in SO(2)\}\le M$ 'dir. Tanım 2.1.7 'den α gösterimi sınırlıdır.

Uyarı 2.1.11: Bu teoremin tersi genelde doğru değildir. Yani bir Banach uzayında sınırlı bir lineer gösterim sürekli olmak zorunda değildir.

Örnek 2.1.12:

$$l_\infty=\left\{\{a_n\}\subset\mathbb{C} : \ \forall n\in\mathbb{N} \text{ için } |a_n|\le K_{\{a_n\}} \text{ olacak şekilde } K_{\{a_n\}}>0 \text{ sayısı mevcuttur}\right\}$$

sınırlı diziler uzayı göz önüne alınsın.

$\forall\{a_n\},\{b_n\}\in l_\infty$ ve $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ için $\{a_n\}+\{b_n\}:=\{a_n+b_n\}$ ve $\lambda\{a_n\}\coloneqq\{\lambda a_n\}$ şeklinde tanımlanan işlemlere göre l_∞ bir kompleks lineer uzaydır.

$\forall\{a_n\}\in l_\infty$ için $\|\{a_n\}\|_\infty\coloneqq\mathrm{Sup}\{|a_n| : \ n\in\mathbb{N}\}\le K_{\{a_n\}}<+\infty$ şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_\infty = l_\infty\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun l_∞ 'da norm ve $(l_\infty,\|.\|_\infty)$ kompleks normlu lineer uzayı bir Banach uzayıdır [22, s.61].

$\forall t\in SO(2)$, $\forall\{a_n\}\in l_\infty$ için $\alpha(t)\{a_n\}\coloneqq\left\{e^{int}a_n\right\}$ şeklinde tanımlanan α, $SO(2)$ 'nin l_∞ 'da bir sınırlı lineer gösterimidir fakat α, $SO(2)$ 'nin l_∞ 'da sürekli lineer gösterimi değildir.

Çözüm:

$t\in SO(2)$ keyfi fakat sabit olsun.

$\forall\{a_n\} \in l_\infty$ için $\alpha(t)\{a_n\} = \{e^{int}a_n\}$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|e^{int}a_n| = |e^{int}||a_n| = 1|a_n| \leq K_{\{a_n\}}$ 'dir. O halde $\alpha(t)\{a_n\} := \{e^{int}a_n\} \in l_\infty$ 'dur. Dolayısıyla $\alpha(t): l_\infty \longrightarrow l_\infty$ 'dir. $\forall\{a_n\}, \{b_n\} \in l_\infty$, $\forall\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}\alpha(t)(\mu_1\{a_n\} + \mu_2\{b_n\}) = \alpha(t)\{\mu_1 a_n + \mu_2 b_n\} &= \{e^{int}(\mu_1 a_n + \mu_2 b_n)\}\\ &= \{e^{int}\mu_1 a_n + e^{int}\mu_2 b_n\} = \mu_1\{e^{int}a_n\} + \mu_2\{e^{int}b_n\}\\ &= \mu_1\alpha(t)\{a_n\} + \mu_2\alpha(t)\{b_n\}\end{aligned}$$

olduğundan $\alpha(t): l_\infty \longrightarrow l_\infty$ lineerdir.

$\forall\{a_n\} \in l_\infty$ için

$$\begin{aligned}\|\alpha(t)\{a_n\}\|_\infty = \|\{e^{int}a_n\}\|_\infty &= \mathrm{Sup}\{|e^{int}a_n| : n \in \mathbb{N}\}\\ &= \mathrm{Sup}\{|e^{int}||a_n| : n \in \mathbb{N}\} \overset{|e^{int}| = 1}{=} \mathrm{Sup}\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\} = \|\{a_n\}\|_\infty\end{aligned}$$

'dir. Tanım 1.3.20'den $\|\alpha(t)\| \leq 1$ olduğundan $\alpha(t): l_\infty \longrightarrow l_\infty$ sınırlıdır.

O halde $\alpha(t) \in B(l_\infty)$ 'dir.

$\alpha^{-1}(t): l_\infty \longrightarrow l_\infty$, $\forall\{a_n\} \in l_\infty$ için $\alpha^{-1}(t)\{a_n\} := \{e^{-int}a_n\}$ dönüşümünün $\alpha(t)$ 'nin tersi olduğu kolayca gösterilir.

O halde $\alpha(t) \in GL(l_\infty)$ 'dur. $t \in SO(2)$ keyfi olduğundan $\forall t \in SO(2)$ için $\alpha(t) \in GL(l_\infty)$ 'dur.

Dolayısıyla $\alpha: SO(2) \longrightarrow GL(l_\infty)$ 'dur.

$\forall t_1, t_2 \in SO(2)$, $\forall\{a_n\} \in l_\infty$ için

$$\alpha(t_1 + t_2)\{a_n\} = \{e^{in(t_1+t_2)}a_n\} = \{e^{int_1}e^{int_2}a_n\} = \alpha(t_1)\{e^{int_2}a_n\} = \alpha(t_1)\alpha(t_2)\{a_n\}$$

olduğundan $\forall t_1, t_2 \in SO(2)$ için $\alpha(t_1 + t_2) = \alpha(t_1)\alpha(t_2)$ 'dir. O halde Tanım 1.4.11 'den $\alpha: SO(2) \longrightarrow GL(l_\infty)$ bir grup homomorfisidir. Tanım 2.1.1 'den α, $SO(2)$ 'nin l_∞ 'da bir lineer gösterimidir.

$\forall t \in SO(2)$ için $\|\alpha(t)\| \leq 1$ 'dir. Dolayısıyla α, $SO(2)$ 'nin l_∞ 'da bir sınırlı lineer gösterimidir.

Fakat α, $SO(2)$ 'nin l_∞ 'da bir sürekli lineer gösterimi değildir. α, $SO(2)$ 'nin l_∞ 'da bir sürekli lineer gösterimi olduğu varsayılsın. Tanım 2.1.5-2.1.6 ve Önerme 2.1.8 'den $\forall\{a_n\} \in l_\infty$ için $\alpha_{\{a_n\}}: SO(2) \longrightarrow l_\infty$ yörünge dönüşümü $0 \in SO(2)$ 'de süreklidir. O halde $\{1,1,1,\dots\} \in l_\infty$ için $\alpha_{\{1,1,1,\dots\}}: SO(2) \longrightarrow l_\infty$ yörünge dönüşümü $0 \in SO(2)$ 'de süreklidir.

Dolayısıyla $\forall\varepsilon > 0$ ve $|t| < \delta(\varepsilon)$ olan $\forall t \in SO(2)$ için

$\left\|\alpha_{\{1,1,1,\dots\}}(t)-\alpha_{\{1,1,1,\dots\}}(0)\right\|_\infty<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)>0$ sayısı mevcuttur. O halde $\frac{1}{2}>0$ olduğundan $|t|<\delta_0$ olan $\forall t\in SO(2)$ için

$$\left\|\alpha_{\{1,1,1,\dots\}}(t)-\alpha_{\{1,1,1,\dots\}}(0)\right\|_\infty<\frac{1}{2} \tag{2.2}$$

olacak şekilde bir $\delta_0\equiv\delta_0\left(\frac{1}{2}\right)>0$ sayısı mevcuttur.

$\delta_0>0$ olduğundan $\left|\frac{\pi}{n_0}\right|=\frac{\pi}{n_0}<\delta_0$ olacak şekilde bir $n_0\in\mathbb{N}$ doğal sayısı mevcuttur. (2.2) 'den $\left\|\alpha_{\{1,1,1,\dots\}}\left(\frac{\pi}{n_0}\right)-\alpha_{\{1,1,1,\dots\}}(0)\right\|_\infty<\frac{1}{2}$ 'dir. O halde

$$\frac{1}{2}>\left\|\alpha_{\{1,1,1,\dots\}}\left(\frac{\pi}{n_0}\right)-\alpha_{\{1,1,1,\dots\}}(0)\right\|_\infty=\left\|\alpha\left(\frac{\pi}{n_0}\right)\{1,1,1,\dots\}-\alpha(0)\{1,1,1,\dots\}\right\|_\infty$$

$$=\left\|\left\{e^{in\frac{\pi}{n_0}}\right\}-\{1,1,1,\dots\}\right\|_\infty=\left\|\left\{e^{in\frac{\pi}{n_0}}-1\right\}\right\|_\infty=\text{Sup}\left\{\left|e^{in\frac{\pi}{n_0}}-1\right|:n\in\mathbb{N}\right\}$$

$$\geq\left|e^{in_0\frac{\pi}{n_0}}-1\right|=|-1-1|=2$$

'dir. Dolayısıyla $\frac{1}{2}>2$ çelişkisi ortaya çıkar. Çelişki α sınırlı lineer gösteriminin bir sürekli lineer gösterim olduğunu varsaymaktan kaynaklanır. O halde α, $SO(2)$ 'nin l_∞ 'da sürekli lineer gösterimi değildir.

Önerme 2.1.13: $(H,\|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir sınırlı lineer gösterimi olsun. Bu takdirde; $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $H_n:=\left\{x\in H:\forall t\in SO(2) \text{ için } \alpha(t)x=e^{int}x\right\}\subset H$, H 'nın bir kapalı lineer alt uzayıdır.

İspat:

$x,y\in H_n$, $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{C}$ keyfi olsun. $\forall t\in SO(2)$ için $\alpha(t)\in GL(H)$ olduğundan $\alpha(t)[\mu_1x+\mu_2y]=\mu_1\alpha(t)x+\mu_2\alpha(t)y=\mu_1e^{int}x+\mu_2e^{int}y=e^{int}[\mu_1x+\mu_2y]$ 'dir. O halde $\forall t\in SO(2)$ için $\alpha(t)[\mu_1x+\mu_2y]=e^{int}[\mu_1x+\mu_2y]$ olduğundan $\mu_1x+\mu_2y\in H_n$ 'dır. Tanım 1.3.3 'den $H_n\subset H$ bir lineer alt uzaydır.

α, $SO(2)$ 'nin H 'daki bir sınırlı lineer gösterimi olduğundan Tanım 2.1.7 'den $\forall t\in SO(2)$ için

$$\|\alpha(t)\|\leq M \text{ 'dir.} \tag{2.3}$$

olacak şekilde bir $M>0$ sayısı mevcuttur.

$n \in \mathbb{Z}$ keyfi fakat sabit olsun. $\{x_m\} \subseteq H_n$ dizisi $\lim_{m \to +\infty} x_m = x$ olan keyfi bir dizi olsun. $\forall m \in \mathbb{N}$ için $x_m \in H_n$ olduğundan $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall t \in SO(2)$ için

$$\alpha(t)x_m = e^{int}x_m \text{ 'dir.} \qquad \textbf{(2.4)}$$

$\lim_{m \to +\infty} x_m = x$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için ve $m \geq N(\varepsilon)$ olan $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)} \qquad \textbf{(2.5)}$$

olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı mevcuttur.

O halde $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t \in SO(2)$ için

$$\begin{aligned}
\left\|\alpha(t)x - e^{int}x\right\| &= \left\|\alpha(t)x - \alpha(t)x_N + \alpha(t)x_N - e^{int}x\right\| \\
&\leq \|\alpha(t)x - \alpha(t)x_N\| + \left\|\alpha(t)x_N - e^{int}x\right\| \\
&\overset{(2.4)}{=} \|\alpha(t)(x - x_N)\| + \left\|e^{int}x_N - e^{int}x\right\| \\
&\leq \|\alpha(t)\|\|x - x_N\| + \left\|e^{int}(x - x_N)\right\| \\
&\overset{(2.3)}{\leq} M\|x - x_N\| + \left\|e^{int}(x - x_N)\right\| \\
&= M\|x - x_N\| + \left|e^{int}\right|\|x - x_N\| = M\|x - x_N\| + \|x - x_N\| \\
&\overset{(2.5)}{\leq} M\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
\end{aligned}$$

olduğundan $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t \in SO(2)$ için $\left\|\alpha(t)(x) - e^{int}x\right\| < \varepsilon$ 'dur. Dolayısıyla $\forall t \in SO(2)$ için $\alpha(t)x = e^{int}x$ 'dir. O halde $x \in H_n$ 'dir. $\{x_m\} \subseteq H_n$ dizisi $\lim_{m \to +\infty} x_m = x$ olan keyfi bir dizi ve $x \in H_n$ olduğundan Sonuç 1.2.15 'den H_n lineer alt uzayı kapalıdır. $n \in \mathbb{Z}$ keyfi olduğundan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $H_n \subset H$ alt uzayı kapalıdır.

Sonuç 2.1.14: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir sınırlı lineer gösterimi olsun. Bu takdirde; H 'da $\|.\|$ normuna denk olan bir $\|.\|_\alpha$ normu mevcuttur öyle ki α, $SO(2)$ 'nin H 'daki lineer gösterimi $\|.\|_\alpha$ normuna göre izometridir [31].

İspat:

α, $SO(2)$ 'nin H 'da bir sınırlı lineer gösterimi olsun. Tanım 2.1.7 'den $\forall t \in SO(2)$ için $\|\alpha(t)\| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcuttur. Teorem 1.3.21 'den

$\forall t \in SO(2), \forall x \in H$ için $\|\alpha(t)x\| \leq M\|x\|$ 'dir.

O halde $\forall x \in H$ için $\{\|\alpha(t)x\| : \forall t \in SO(2)\}$ kümesi üstten sınırlıdır. $\forall x \in H$ için $\|x\|_\alpha := \mathrm{Sup}\{\|\alpha(t)x\| : t \in SO(2)\}$ şeklinde tanımlana $\|.\|_\alpha : H \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir norm olduğu kolayca gösterilir.

$\forall x \in H$ için

$\|x\| = \|\alpha(0)x\| \leq \mathrm{Sup}\{\|\alpha(t)x\| : t \in SO(2)\} = \|x\|_\alpha \leq \mathrm{Sup}\{M\|x\| : t \in SO(2)\} = M\|x\|$

olduğundan $\forall x \in H$ için $\|x\| \leq \|x\|_\alpha \leq M\|x\|$ 'dir. Dolayısıyla Tanım 1.3.10 'dan $\|.\| \sim \|.\|_\alpha$ 'dır.

$\forall t \in SO(2), \forall x \in H$ için

$$\begin{aligned}\|\alpha(t)x\|_\alpha &= \mathrm{Sup}\{\|\alpha(s)\alpha(t)x\| : s \in SO(2)\} = \mathrm{Sup}\{\|\alpha(s+t)x\| : s \in SO(2)\} \\ &= \mathrm{Sup}\{\|\alpha(s)x\| : s \in SO(2)\} = \|x\|_\alpha\end{aligned}$$

olduğundan Tanım 2.1.2 'den α gösterimi $\|.\|_\alpha$ normuna göre izometridir.

2.2. $SO(2)$ Grubunun Banach Uzaylarındaki Lineer Gösterimleri için Fourier Serileri

Tanım 2.2.1: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir lineer gösterimi ve $x \in H_c$ olsun.

$\forall k \in \mathbb{Z}$ için $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\alpha(t)xdt$ integrali mevcut olduğundan [32, s.314-322]

$F_k(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{SO(2)} e^{-ikt}\alpha(t)xdt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\alpha(t)xdt$ şeklinde tanımlanan $F_k(x) \in H$ elemanına x 'in α lineer gösterimine göre k. Fourier katsayısı ve $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k(x)$ serisine x 'in α lineer gösterinine göre Fourier serisi denir. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$S_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} F_k(x)$ şeklinde tanımlanan $S_n(x) \in H$ elemanına x 'in α lineer gösterinine göre $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k(x)$ Fourier serisinin n. simetrik kısmi toplamı ve $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$\psi_n(x) := \frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}$ şeklinde tanımlanan $\psi_n(x) \in H$ elemanına x 'in α lineer gösterimine göre Fourier serisinin n. Cesa'ro ortalaması denir [16].

Teorem 2.2.2: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir lineer gösterimi ve $x \in H_c$ olsun. Bu takdirde;

i) $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $F_n(x) \in H_n$ 'dir,

ii) $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $F_n(x) \in H_c$ 'dır.

İspat:

f, 2π-periyodik fonksiyon ise $\forall c \in \mathbb{R}$ için

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_c^{2\pi+c} f(x)dx \qquad \textbf{(2.6)}$$

olduğu kolaylıkla gösterilir.

i) $n \in \mathbb{Z}$ keyfi olsun. Tanım 2.2.1 'den $F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inu}\alpha(u)xdu$ 'dir. O halde $\forall t \in SO(2)$ için $e^{int}F_n(x) = e^{int}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inu}\alpha(u)xdu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in(u-t)}\alpha(u)xdu$ 'dir. $u - t = k$ dönüşümü uygulanırsa $u = 0 \Longrightarrow k = -t$, $u = 2\pi \Longrightarrow k = 2\pi - t$, $du = dk$ olduğundan

$$\begin{aligned} e^{int}F_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in(u-t)}\alpha(u)xdu = \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{2\pi-t} e^{-ink}\alpha(t+k)xdk \\ &\overset{(2.6)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ink}\alpha(t+k)xdk = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ink}\alpha(t)\alpha(k)xdk \\ &= \alpha(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ink}\alpha(k)xdk\right) = \alpha(t)F_n(x) \end{aligned}$$

'dir. O halde $\forall t \in SO(2)$ için

$$\alpha(t)F_n(x) = e^{int}F_n(x) \text{ 'dir.} \qquad \textbf{(2.7)}$$

$n \in \mathbb{Z}$ keyfi olduğundan Önerme 2.1.14 ve (2.7) 'den $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $F_n(x) \in H_n$ 'dir.

ii) $t_0 \in SO(2)$, $n \in \mathbb{Z}$ keyfi fakat sabit, $\varepsilon > 0$ keyfi olsun.

$f: [0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\forall t \in [0,2\pi)$ için $f(t) = e^{int}$ dönüşümü $[0,2\pi)$ 'de süreklidir. Dolayısıyla $t_0 \in SO(2)$ 'de de süreklidir. $|t - t_0| < \delta$ olan $\forall t \in SO(2)$ için

$$|f(t) - f(t_0)| = \left|e^{int} - e^{int_0}\right| < \frac{\varepsilon}{\|F_n(x)\|+1} \qquad \textbf{(2.8)}$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ sayısı mevcuttur. O halde $|t - t_0| < \delta$ olan $\forall t \in SO(2)$ için

$$\begin{aligned} \left\|\alpha_{F_n(x)}(t) - \alpha_{F_n(x)}(t_0)\right\| &= \|\alpha(t)F_n(x) - \alpha(t_0)F_n(x)\| \\ &\overset{(2.7)}{=} \left\|e^{int}F_n(x) - e^{int_0}F_n(x)\right\| = \left\|\left(e^{int} - e^{int_0}\right)F_n(x)\right\| \\ &\le \left|e^{int} - e^{int_0}\right|\|F_n(x)\| \overset{(2.8)}{<} \frac{\varepsilon}{\|F_n(x)\|+1}\|F_n(x)\| < \varepsilon \end{aligned}$$

’dir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta(\varepsilon, t_0) > 0 \therefore |t - t_0| < \delta$ olan $\forall t \in SO(2)$ için $\left\|\alpha_{F_n(x)}(t) - \alpha_{F_n(x)}(t_0)\right\| < \varepsilon$ ’dir. Dolayısıyla $\alpha_{F_n(x)}$ yörünge dönüşümü $t_0 \in SO(2)$ ’de süreklidir. $t_0 \in SO(2)$ keyfi olduğundan $\alpha_{F_n(x)}$ yörünge dönüşümü $SO(2)$ ’de süreklidir. Tanım 2.1.5 ’den $F_n(x) \in H_c$ ’dir. $n \in \mathbb{Z}$ keyfi olduğundan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $F_n(x) \in H_c$ ’dir.

Teorem 2.2.3: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ ’nin H ’da bir lineer gösterimi ve $x \in H_c$ olsun. Bu takdirde; $\lim\limits_{|n| \to +\infty} F_n(x) = \theta_H$ ’dır.

İspat:

Tanım 2.2.1 ’den $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)x dt \text{ ’dir.} \tag{2.9}$$

O halde

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\left(t-\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\right)}\alpha(t)xdt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\left(t-\frac{\pi}{n}\right)}e^{-i\pi}\alpha(t)xdt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\left(t-\frac{\pi}{n}\right)}\alpha(t)xdt$$

’dir. $t - \frac{\pi}{n} = u$ dönüşümü uygulanırsa $t = 0 \implies u = -\frac{\pi}{n}$, $t = 2\pi \implies u = 2\pi - \frac{\pi}{n}$, $dt = du$ olduğundan

$$F_n(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi-\frac{\pi}{n}} e^{-inu}\alpha\left(u + \frac{\pi}{n}\right)xdu \overset{(2.6)}{=} -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inu}\alpha\left(u + \frac{\pi}{n}\right)xdu$$

$$F_n(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha\left(t + \frac{\pi}{n}\right)xdt \text{ ’dir.} \tag{2.10}$$

(2.9), (2.10) taraf tarafa toplanırsa

$$2F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)xdt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha\left(t + \frac{\pi}{n}\right)xdt$$

$$2F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\left(\alpha(t)(x) - \alpha\left(t + \frac{\pi}{n}\right)(x)\right)dt$$

$$F_n(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\left(\alpha(t)x - \alpha\left(t + \frac{\pi}{n}\right)x\right)dt$$

’dir. O halde

$$\|F_n(x)\| = \left\|\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\left(\alpha(t)x - \alpha\left(t + \frac{\pi}{n}\right)x\right)dt\right\|$$

$$\leq \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\|e^{-int}\left(\alpha(t)x-\alpha\left(t+\frac{\pi}{n}\right)x\right)\right\|dt$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left|e^{-int}\right|\left\|\alpha(t)x-\alpha\left(t+\frac{\pi}{n}\right)x\right\|dt$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\|\alpha(t)x-\alpha\left(t+\frac{\pi}{n}\right)x\right\|dt=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\|\alpha_x(t)-\alpha_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right\|dt$$

olduğundan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\|F_n(x)\| \leq \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\|\alpha_x(t)-\alpha_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right\|dt \text{ 'dir.} \qquad \textbf{(2.11)}$$

$\varepsilon > 0$ keyfi fakat sabit olsun. $x \in H_c$ olduğundan Tanım 2.1.5 'den α_x yörünge dönüşümü $SO(2)$ 'de süreklidir. Önerme 1.4.12 'den $SO(2)$ kompakt olduğundan α_x yörünge dönüşümü $SO(2)$ 'de düzgün süreklidir. O halde $|t_1 - t_2| < \delta_\varepsilon$ olan
$\forall t_1, t_2 \in SO(2)$ için

$$\|\alpha_x(t_1) - \alpha_x(t_2)\| < \varepsilon \qquad \textbf{(2.12)}$$

olacak şekilde bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı mevcuttur. $t \in SO(2)$ keyfi fakat sabit olsun.
$\lim\limits_{|n| \longrightarrow +\infty} t + \frac{\pi}{n} = t$ olduğundan $\delta_\varepsilon > 0$ için $|n| \geq N$ olan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\left|t + \frac{\pi}{n} - t\right| < \delta_\varepsilon \qquad \textbf{(2.13)}$$

olacak şekilde bir $N(\delta_\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı mevcuttur.

(2.12), (2.13) 'den $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta_\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} \therefore |n| \geq N$ olan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\left|t + \frac{\pi}{n} - t\right| < \delta_\varepsilon$ olduğundan $\left\|\alpha_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - \alpha_x(t)\right\| < \varepsilon$ 'dur.

$t \in SO(2)$ keyfi olduğundan $\forall t \in SO(2)$ ve $\varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $|n| \geq N$ olan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\left\|\alpha_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - \alpha_x(t)\right\| < \varepsilon \text{ 'dir.} \qquad \textbf{(2.14)}$$

(2.11) ve (2.14) 'den $\varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N} \therefore |n| \geq N$ olan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için
$\|F_n(x)\| \leq \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\|\alpha_x(t)-\alpha_x\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\right\|dt < \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon dt = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ 'dir.

$\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N} \therefore |n| \geq N$ olan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$\|F_n(x)-\theta_H\| = \|F_n(x)\| < \varepsilon$ 'dir. O halde $\lim\limits_{|n|\to+\infty} F_n(x) = \theta_H$ 'dir.

Sonuç 2.2.4: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir sürekli lineer gösterimi olsun. Bu takdirde; $\forall x \in H$ için $\lim\limits_{|n|\to+\infty} F_n(x) = \theta_H$ 'dir [16].

İspat:

Tanım 2.1.6 ve Teorem 2.2.3 'den açıktır.

Önerme 2.2.5: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir lineer gösterimi ve $x \in H_c$ olsun. Bu takdirde; $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}$ n. Dirichlet çekirdeği [33, s.80] ise $S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\alpha(t)x dt$ 'dir.

İspat:

$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} F_k(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\alpha(t)x dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}\right)\alpha(t)x dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\right)\alpha(t)x dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)\alpha(t)x dt \overset{(2.6)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\alpha(t)x dt \text{ 'dir.}$$

Önerme 2.2.6: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir lineer gösterimi ve $x \in H_c$ olsun. Bu takdirde; $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)$ n. Fejer çekirdeği [33, s.80] ise $\psi_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\alpha(t)x dt$ 'dir [16].

İspat:

$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\psi_n(x) = \frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)\right) \overset{\text{Önerme 2.2.5}}{=}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_0(t)\alpha(t)x dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_1(t)\alpha(t)x dt + \cdots + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\alpha(t)x dt\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n+1}\left[D_0(t)+D_1(t)+\cdots+D_n(t)\right]\alpha(t)x dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)\right]\alpha(t)x dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\alpha(t)x dt \text{ 'dir.}$$

Teorem 2.2.7: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir lineer gösterimi ve $x \in H_c$ olsun. Bu takdirde; $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi_n(x) = x$ 'dir.

İspat:

Bilindiği üzere $K_n(t)$ Fejer çekirdeği aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) $\forall t \in [-\pi, \pi]$, $t \neq 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $K_n(t) \geq 0$ 'dır.

ii) $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$ 'dir.

iii)$\forall 0 < \xi < \pi$ için $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\xi}^{\pi} K_n(t)dt = 0$ 'dır [33, s.82].

iii) 'den Fejer çekirdeğinin aşağıdaki özelliği sağladığı açıktır.

iv) $\forall 0 < \xi < \pi$ için $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\xi \le |t| \le \pi} K_n(t)dt = 0$ 'dır.

$\varepsilon > 0$ keyfi fakat sabit olsun.

$x \in H_c$ olsun. Tanım 2.1.5 'den α_x yörünge dönüşümü $SO(2)$ 'de süreklidir. Önerme 1.4.12 'den $SO(2)$ kompakt olduğundan α_x yörünge dönüşümü $SO(2)$ 'de sınırlıdır. O halde $\forall t \in SO(2)$ için

$$\|\alpha_x(t)\| \le M \quad \textbf{(2.15)}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcuttur.

Tanım 2.1.5 ve Önerme 2.1.8 'den α_x yörünge dönüşümü $0 \in SO(2)$ 'de süreklidir. O halde $|t| < \delta$ olan $\forall t \in SO(2)$ için

$$\|\alpha_x(t) - \alpha_x(0)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \textbf{(2.16)}$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$, $(\delta < \pi)$ sayısı mevcuttur.

(2.16) 'daki $0 < \delta < \pi$ için iv) 'den $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \le |t| \le \pi} K_n(t)dt = 0$ olduğundan $n \ge N_\varepsilon$ olan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\delta \le |t| \le \pi} K_n(t)dt - 0\right| = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \le |t| \le \pi} K_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{4(M+1)} \quad \textbf{(2.17)}$$

olacak şekilde bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı mevcuttur.

O halde $n \ge N_\varepsilon$ olan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\|\psi_n(x) - x\| &= \left\|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\alpha(t)x dt - x\right\| = \left\|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\alpha(t)x dt - \alpha(0)x\right\| \\
&\overset{ii)}{=} \left\|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\alpha(t)x dt - \alpha(0)x\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\alpha(t)x dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\alpha(0)x dt\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)(\alpha(t)x - \alpha(0)x)dt\right\|
\end{aligned}$$

$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(t)|\|\alpha(t)x-\alpha(0)x\|dt$

$\overset{i)}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\|\alpha(t)x-\alpha(0)x\|dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\|\alpha_x(t)-\alpha_x(0)\|dt$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}K_n(t)\|\alpha_x(t)-\alpha_x(0)\|dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}K_n(t)\|\alpha_x(t)-\alpha_x(0)\|dt$

$\overset{(2.16)}{<}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}K_n(t)\frac{\varepsilon}{2}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}K_n(t)\|\alpha_x(t)-\alpha_x(0)\|dt$

$\leq\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}K_n(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}K_n(t)(\|\alpha_x(t)\|+\|\alpha_x(0)\|)dt$

$\overset{(2.15)}{\leq}\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}K_n(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}K_n(t)2Mdt$

$=\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}K_n(t)\,dt+2M\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}K_n(t)dt$

$\leq\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\,dt+2M\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}K_n(t)dt$

$=\frac{\varepsilon}{2}+2M\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}K_n(t)dt$

$\overset{(2.17)}{<}\frac{\varepsilon}{2}+2M\frac{\varepsilon}{4(M+1)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ ’dir.

$\varepsilon>0$ keyfi olduğundan $\forall\varepsilon>0$ sayısına karşılık $n\geq N_\varepsilon$ olan $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\|\psi_n(x)-x\|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ mevcuttur. O halde $\lim\limits_{n\to+\infty}\psi_n(x)=x$ ’dir.

Sonuç 2.2.8: $(H,\|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ ’nin H ’da bir sürekli lineer gösterimi olsun. Bu takdirde; $\forall x\in H$ için $\lim\limits_{n\to+\infty}\psi_n(x)=x$ ’dir [16].

İspat:

Tanım 2.1.6 ve Teorem 2.2.7 ’den açıktır.

Sonuç 2.2.9: $(H,\|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ ’nin H ’da bir lineer gösterimi ve $x,y\in H_c$ olsun. Bu takdirde;

i) $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $F_n(x)=\theta_H$ ise $x=\theta_H$ ’dır.

ii) $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $F_n(x)=F_n(y)$ ise $x=y$ ’dir [16].

İspat:

$x,y\in H_c$ olsun.

i) $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $F_n(x)=\theta_H$ olsun. O halde $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}F_k(x)=\sum_{k=-n}^{n}\theta_H=\theta_H$ olduğundan $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için $\psi_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}=\frac{\theta_H+\theta_H+\cdots+\theta_H}{n+1}=\theta_H$ ’dır.

Dolayısıyla Teorem 2.2.7 ’den $x = \lim_{n \to +\infty} \psi_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \theta_H = \theta_H$ ’dır.

ii) $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $F_n(x) = F_n(y)$ olsun. Bu takdirde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)xdt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)ydt$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)xdt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)ydt = \theta_H$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}(\alpha(t)x - \alpha(t)y)dt = \theta_H$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)(x - y)dt = \theta_H$$

olduğundan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $F_n(x - y) = \theta_H$ ’dır. i) ’den $x - y = \theta_H$ olduğundan $x = y$ ’dir.

Tanım 2.2.10: $(H, \|.\|)$ normlu bir kompleks lineer uzay ve α; $SO(2)$ ’nin H ’da bir lineer gösterimi olsun. $H_{S_p} \coloneqq \langle\{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\rangle$ ile tanımlanır [16].

Sonuç 2.2.11: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ ’nin H ’da bir sınırlı lineer gösterimi ise $\overline{H_{S_p}} = H_c$ ’dir [16].

İspat:

$n \in \mathbb{Z}$ keyfi fakat sabit olsun. Önerme 2.1.13 ’den

$H_n \coloneqq \{x \in H : \forall t \in SO(2) \text{ için } \alpha(t)x = e^{int}x\} \subset H$ lineer alt uzaydır.

$x \in H_n$ keyfi olsun. $\forall t \in SO(2)$ için $\alpha(t)x = e^{int}x$ ’dir.

$f : [0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\forall t \in [0,2\pi)$ için $f(t) \coloneqq e^{int}$ dönüşümü $[0,2\pi)$ ’de sürekli olduğundan $0 \in SO(2)$ ’de süreklidir. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için, $|t| < \delta$ olan $\forall t \in SO(2)$ için

$$|f(t) - f(0)| = \left|e^{int} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{\|x\| + 1}$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcuttur.

O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $|t| < \delta$ olan $\forall t \in SO(2)$ için

$$\|\alpha_x(t) - \alpha_x(0)\| = \|\alpha(t)x - \alpha(0)x\| = \|\alpha(t)x - x\| = \left\|e^{int}x - x\right\|$$

$$= \left\|\left(e^{int} - 1\right)x\right\| = \left|e^{int} - 1\right|\|x\| < \frac{\varepsilon}{\|x\| + 1}\|x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcuttur. Dolayısıyla α_x yörünge dönüşümü $0 \in SO(2)$ ’de süreklidir. Tanım 2.1.5 ve Önerme 2.1.8 ’den $x \in H_c$ ’dır. $x \in H_n$ keyfi olduğundan $H_n \subset H_c$ ’dır. $n \in \mathbb{Z}$ keyfi olduğundan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $H_n \subset H_c$ ’dır.

Tanım 2.2.10 ’dan

$H_{S_p} = \langle\{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\rangle = \{x = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i : m \in \mathbb{N}, 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{m} \text{ için } \mu_i \in \mathbb{C}, x_i \in H_i\}$ olduğundan $H_{S_p} \subset H_c$ ’dır. $H_c \subset H$ kapalı bir alt uzay olduğundan

$$\overline{H_{S_p}} \subset \overline{H_c} = H_c \text{ 'dir} \tag{2.18}$$

Tersine $x \in H_c$ keyfi olsun. Teorem 2.2.2-i 'den $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $F_n(x) \in H_n$ 'dir. O halde $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} F_k(x) \in H_{S_p} = \langle \{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \rangle$ 'dir.

O halde $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\psi_n(x) = \frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1} \in H_{S_p}$ 'dir.

Teorem 2.2.7 'den $\lim_{n \to +\infty} \psi_n(x) = x$ olduğundan Teorem 1.2.14 'den $x \in \overline{H_{S_p}}$ 'dır. $x \in H_c$ keyfi olduğundan

$$H_c \subset \overline{H_{S_p}} \text{ 'dir.} \tag{2.19}$$

O halde (2.18) ve (2.19) 'dan $\overline{H_{S_p}} = H_c$ 'dir.

Tanım 2.2.12: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir sürekli lineer gösterimi olsun. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\forall x \in H$ noktasında $\boldsymbol{F_n}(x) := F_n(x)$ değerini alan $\boldsymbol{F_n}: H \longrightarrow H$ operatörüne H 'nın n. Fourier operatörü denir. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\boldsymbol{F_n}(.) \in B(H)$ 'dır.

Önerme 2.2.13: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, $H \neq \{\theta_H\}$ ve α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir izometrik sürekli lineer gösterimi olsun. Bu takdirde;

i) $\forall t \in SO(2)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ ve $\forall x \in H$ için $\boldsymbol{F_n}(\alpha(t)x) = \alpha(t)\boldsymbol{F_n}(x)$ 'dir.

ii) $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\boldsymbol{F_n^2}(.) = \boldsymbol{F_n}(.)$ 'dir.

iii) $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\exists y_n \in H \backslash \{\theta_H\}$ öyle ki $\boldsymbol{F_n}(y_n) \neq \theta_H$ 'dır.

iv) $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\|\boldsymbol{F_n}(.)\| = 1$ 'dir.

v) $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $x \in H_n \Longrightarrow \boldsymbol{F_n}(x) = x$ 'dir.

vi) $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\boldsymbol{F_n}(.)H := \{\boldsymbol{F_n}(.)x = F_n(x) : x \in H\} = H_n$ 'dir.

vii) $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$ için $\boldsymbol{F_n}(.) \circ \boldsymbol{F_m}(.) = 0$ 'dır.

viii) $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$ için $H_n \cap H_m = \{\theta_H\}$ 'dır [16].

İspat:

i) $\forall t \in SO(2)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ ve $\forall x \in H$ için

$$F_n(\alpha(t)x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ins}\alpha(s)\alpha(t)x ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ins}\alpha(s+t)x ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ins}\alpha(t)\alpha(s)x ds = \alpha(t)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ins}\alpha(s)x ds = \alpha(t)F_n(x) \text{ 'dir.}$$

ii) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in H$ için

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}^{2}(.)x = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}(.)(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}(.)x) = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}(.)\big(F_n(x)\big) = F_n\big(F_n(x)\big)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)F_n(x)dt \overset{2.2.2.Teorem-i}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}e^{int}F_n(x)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_n(x)dt = F_n(x)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = F_n(x) = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}(.)x$$

olduğundan

$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}^{2}(.) = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}(.)$ ’dir. **(2.20)**

iii)$H \neq \{\theta_H\}$ ise $\exists x_0 \in H\backslash\{\theta_H\}$ ’dır. Sonuç 2.2.9-i ’den $F_{n_0}(x_0) \neq \theta_H$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{Z}$ tam sayısı mevcuttur. O halde $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in_0t}\alpha(t)x_0dt \neq \theta_H$ ’dır. Dolayısıyla

$\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}e^{i(n-n_0)t}\alpha(t)x_0dt \neq \theta_H$

$\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)e^{i(n-n_0)t}x_0dt \neq \theta_H$

$\forall n \in \mathbb{Z}$ için $F_n\big(e^{i(n-n_0)t}x_0\big) \neq \theta_H$

olduğundan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $y_n := e^{i(n-n_0)t}x_0$ şeklinde tanımlanırsa $y_n \in H\backslash\{\theta_H\}$ ve $F_n(y_n) \neq \theta_H$ ’dır.

iv)$n \in \mathbb{Z}$ keyfi olsun. Teorem 1.3.23 ’den

$$\|\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}(.)\| = \sup\left\{\frac{\|\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}(.)x\|}{\|x\|} : x \in H\backslash\{\theta_H\}\right\} = \sup\left\{\frac{\|F_n(x)\|}{\|x\|} : x \in H\backslash\{\theta_H\}\right\}$$

$$\overset{iii)}{\geq} \frac{\|F_n(y_n)\|}{\|y_n\|} > 0$$

olduğundan

$\|\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}(.)\| > 0$ ’dır. **(2.21)**

Öte yandan α, $SO(2)$ ’nin H ’daki bir izometrik lineer gösterimi olduğundan Tanım 2.1.2 ’den $\forall x \in H$ için

$$\|\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}}(.)x\| = \|F_n(x)\| = \left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)xdt\right\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\|e^{-int}\alpha(t)x\right\|dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|e^{-int}\right|\|\alpha(t)x\|dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|\alpha(t)x\|dt$$

$$\overset{\alpha\ izo.}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x\|dt = \|x\| \text{ ’dir.}$$

Dolayısıyla $\forall x \in H$ için $\|\boldsymbol{F_n}(.)x\| \leq \|x\|$ olduğundan Tanım1.3.20 'den

$\|\boldsymbol{F_n}(.)\| \leq 1$ 'dir. **(2.22)**

(2.20) 'den $\forall x \in H$ için $F_n(x) = F_n^2(x)$ olduğundan $\forall x \in H$ için $\|F_n(x)\| = \|F_n^2(x)\| = \left\|\boldsymbol{F_n}(.)\big(F_n(x)\big)\right\| \leq \|\boldsymbol{F_n}(.)\|\|F_n(x)\|$'dir. O halde $\forall x \in H \backslash \{\theta_H\}$ için $\frac{\|F_n(x)\|}{\|x\|} \leq \|\boldsymbol{F_n}(.)\| \frac{\|F_n(x)\|}{\|x\|}$ 'dir. Dolayısıyla

$$\|\boldsymbol{F_n}(.)\| = \sup\left\{\frac{\|F_n(x)\|}{\|x\|} \ : x \in H\backslash\{\theta_H\}\right\} \leq \sup\left\{\|\boldsymbol{F_n}(.)\| \frac{\|F_n(x)\|}{\|x\|} \ : x \in H\backslash\{\theta_H\}\right\}$$

$$= \|\boldsymbol{F_n}(.)\| \sup\left\{\frac{\|F_n(x)\|}{\|x\|} \ : x \in H\backslash\{\theta_H\}\right\} = \|\boldsymbol{F_n}(.)\|^2 \text{ 'dir.}$$

(2.21) 'den

$1 \leq \|\boldsymbol{F_n}(.)\|$ 'dir. **(2.23)**

O halde (2.22) ve (2.23) 'den $\|\boldsymbol{F_n}(.)\| = 1$ 'dir. $n \in \mathbb{Z}$ keyfi olduğundan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\|\boldsymbol{F_n}(.)\| = 1$ 'dir.

v) $n \in \mathbb{Z}$ keyfi fakat sabit olsun. $x \in H_n$ ise $\forall t \in SO(2)$ için $\alpha(t)x = e^{int}x$ 'dir. O halde

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)x dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}e^{int}x dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x dt = x\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = x$$

'dir. $n \in \mathbb{Z}$ keyfi olduğundan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $x \in H_n$ ise $F_n(x) = x$ 'dir.

vi) $n \in \mathbb{Z}$ keyfi olsun.

$y \in \boldsymbol{F_n}(.)H$ keyfi olsun, Teorem 2.2.2-i 'den $y \in H_n$ 'dir. O halde

$\boldsymbol{F_n}(.)H \subseteq H_n$ 'dir. **(2.24)**

$x \in H_n$ keyfi olsun, v) 'den $x = F_n(x)$ olduğundan $x \in \boldsymbol{F_n}(.)H$ 'dir. o halde

$H_n \subseteq \boldsymbol{F_n}(.)H$ 'dir. **(2.25)**

(2.24) ve (2.25) 'den $\boldsymbol{F_n}(.)H = H_n$ 'dir. $n \in \mathbb{Z}$ keyfi olduğundan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\boldsymbol{F_n}(.)H = H_n$ 'dir.

vii) $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$, $\forall x \in H$ için

$\big(\boldsymbol{F_n}(.)\circ\boldsymbol{F_m}(.)\big)x = \boldsymbol{F_n}(.)F_m(x) = F_n\big(F_m(x)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)F_m(x)dt$

$$\overset{Teorem\ 2.2.2-i}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}e^{imt}F_m(x)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}F_m(x)dt$$

$$= F_m(x)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}dt \overset{n\neq m}{=} F_m(x)0 = 0$$

olduğundan $\boldsymbol{F_n}(.)\circ\boldsymbol{F_m}(.) = 0$ ’dır.

viii) $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, için $x \in \{H_n \cap H_m\}\backslash\{\theta_H\}$ keyfi olsun. O halde

$\forall t \in SO(2)$ için $\alpha(t)x = e^{int}x$, $\alpha(t)x = e^{imt}x$ ’dir.

$\forall t \in SO(2)$ için $e^{int}x = e^{imt}x$’dir. $\forall t \in SO(2)$ için $e^{i(n-m)t}x = x$ ’dir.

$\forall t \in SO(2)$ için $\big(e^{i(n-m)t} - 1\big)x = \theta_H$ ’dır. $x \neq \theta_H$ olduğundan

$\forall t \in SO(2)$ için $e^{i(n-m)t} - 1 = 0$ ’dır. $\forall t \in SO(2)$ için $e^{i(n-m)t} = 1$ ’dir.

$\forall t \in SO(2)$ için $\exists k_t \in \mathbb{Z}$ öyle ki $i(n-m)t = 2\pi k_t i$ ’dir.

$\forall t \in SO(2)$ için $\exists k_t \in \mathbb{Z}$ öyle ki $k_t = \frac{n-m}{2\pi}t$ ’dir.

$f\colon[0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\forall t \in [0,2\pi)$ için $f(t) \coloneqq k_t = \frac{n-m}{2\pi}t$ fonksiyonu süreklidir. O halde $f\colon[0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{Z}$ sabittir. Dolayısıyla $\forall t \in [0,2\pi)$ için $\frac{n-m}{2\pi}t = f(0) = 0$ ’dır. $t = 1$ için $\frac{n-m}{2\pi} = 0$ olduğundan $n = m$ ’dir. $H_n \cap H_m \neq \{\theta_H\}$ ise $n = m$ ’dir. O halde $\forall n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$ için $H_n \cap H_m = \{\theta_H\}$ ’dir.

2.3. $\boldsymbol{R_\lambda}$ Yarı - Rezolvent Operatörü

Bu kısımda α; $SO(2)$ ’nin H ’da bir lineer gösterimine göre H ’nın sınırlı lineer R_λ yarı-rezolvent operatörleri tanımlanacak ve bu operatörlerin bazı özellikleri incelenecektir. Elde edilen sonuçlar [21] ’de yayınlanmıştır.

Tanım 2.3.1: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ ’nin H ’da bir lineer gösterimi ve $x \in H_c$ olsun.

$$Spec(x) \coloneqq \{in : n \in \mathbb{Z} :\ F_n(x) \neq \theta_H\} \quad \textbf{(2.26)}$$

kümesine $x \in H$ elemanının α lineer gösterimine göre spektrumu denir.

α, $SO(2)$ ’nin H ’da bir sürekli lineer gösterimi olmak üzere

$Spec(H) := \bigcup_{\substack{x \neq \theta_H \\ x \in H}} Spec(x)$ kümesine $(H, \|.\|)$ Banach uzayının α sürekli lineer gösterimine göre spektrumu denir.

Önerme 2.3.2: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir sürekli lineer gösterimi olsun.

$$H_f = \{x \in H : Spec(x) \text{ Sonlu}\} \subset H \qquad \textbf{(2.27)}$$

bir lineer alt uzaydır.

İspat:

$x, y \in H_f$ keyfi olsun. o halde (2.26) ve (2.27) 'den

$Spec(x) = \{in : n \in \mathbb{Z} : F_n(x) \neq \theta_H\}, Spec(y) = \{im : m \in \mathbb{Z} : F_m(y) \neq \theta_H\}$ kümeleri sonludur. Dolayısıyla

$Spec(x) = \{in : n \in \mathbb{Z} : F_n(x) \neq \theta_H\} = \{in_1, in_2, \dots, in_k : n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}\}$

$Spec(y) = \{im : m \in \mathbb{Z} : F_m(y) \neq \theta_H\} = \{im_1, im_2, \dots, im_s : m_1, m_2, \dots, m_s \in \mathbb{Z}\}$

olduğundan $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_1, n_2, \dots, n_k, m_1, m_2, \dots, m_s\}$ için Tanım 2.2.12 'den $F_n(\mu_1 x + \mu_2 y) = \mu_1 F_n(x) + \mu_2 F_n(y) = \theta_H$ 'dir.

O halde $Spec(\mu_1 x + \mu_2 y) \subset \{Spec(x) \cup Spec(y)\}$ 'dir. $Spec(x) \cup Spec(y)$ sonlu olduğundan $Spec(\mu_1 x + \mu_2 y)$ 'de sonludur. Dolayısıyla $\mu_1 x + \mu_2 y \in H_f$ 'dir.

$x, y \in H_f$ keyfi olduğundan Tanım 1.3.3 'den $H_f \subset H$ bir lineer alt uzaydır.

Sonuç 2.3.3: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ 'nin H 'da sürekli lineer gösterimi ise $\overline{H_f} = H$ 'dır.

İspat:

$\overline{H_f} \subset H$ olduğu açıktır. $x \in H$ keyfi olsun. Sonuç 2.2.8 'den $\lim\limits_{n \to +\infty} \psi_n(x) = x$ 'dir. Öte yandan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\psi_n(x) \in H_f$ olduğundan Teorem 1.2.14 'den $x \in \overline{H_f}$ 'dir. $x \in H$ keyfi olduğundan $H \subset \overline{H_f}$ 'dir. Dolayısıyla $\overline{H_f} = H$ 'dır.

Tanım 2.3.4: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ 'nin H 'daki bir izometrik sürekli lineer gösterimi olsun. $x \in H$ için $Dx := \lim\limits_{t \to 0} \frac{\alpha(t)x - x}{t} \in H$ ise $x \in H$ elemanına α 'nın bir türev noktası denir. $H(D) = \{x \in H : x, \alpha'\text{nın türev noktası } \} \subset H$ kümesine α 'nın türev noktalarının kümesi denir. $Spec(H)$ kümesine D 'nin spektrumu, $\mathbb{C} \setminus Spec(H)$ kümesine D 'nin rezolvent kümesi denir. [11, s.45]

Önerme 2.3.5: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir izometrik sürekli lineer gösterimi olsun. Bu takdirde;

i) $H(D) \subset H$ bir lineer alt uzay olup $H_f \subset H(D)$ ve $\overline{H(D)} = H$ 'dır,

ii) $H(D)$, $\alpha(SO(2))$-invaryant olup $\forall t \in SO(2)$, $\forall x \in H(D)$ için $\alpha(t)Dx = D\alpha(t)x$ 'dir,

iii) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in H(D)$ için $DF_n(x) = F_n(Dx) = inF_n(x)$ 'dir.

İspat:

i) $x, y \in H(D)$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ keyfi olsun.

$$D(\mu_1 x + \mu_2 y) = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t)(\mu_1 x + \mu_2 y) - (\mu_1 x + \mu_2 y)}{t}$$

$$= \mu_1 \lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t)x - x}{t} + \mu_2 \lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t)y - y}{t} = \mu_1 Dx + \mu_2 Dy \in H$$

olduğundan Tanım 1.3.3 'den $H(D) \subset H$ bir lineer alt uzaydır.

$x \in H_f$ keyfi olsun. Bu takdirde $Spec(x) := \{in : n \in \mathbb{Z} : F_n(x) \neq \theta_H\}$ sonlu olduğundan $\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k(x) = \sum_{k=-m}^{m} F_k(x)$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}$ tam sayısı mevcuttur. Sonuç 2.2.9-ii ve Önerme 2.2.13-ii,vii 'den

$$x = \sum_{k=-m}^{m} F_k(x) \text{ 'dir.} \qquad \textbf{(2.28)}$$

Teorem 2.2.2-i 'den $\forall k \in \mathbb{Z}$ için $F_k(x) \in H_k$ olduğundan $\forall t \in SO(2)$ için $\alpha(t)F_k(x) = e^{ikt}F_k(x)$ 'dir.

$$Dx = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t)x - x}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t)\sum_{k=-m}^{m} F_k(x) - \sum_{k=-m}^{m} F_k(x)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \sum_{k=-m}^{m} \frac{\alpha(t)F_k(x) - F_k(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \sum_{k=-m}^{m} \left(\frac{e^{ikt} - 1}{t}\right) F_k(x)$$

$$= \sum_{k=-m}^{m} \lim_{t \to 0} \left(\frac{e^{ikt} - 1}{t}\right) F_k(x) = \sum_{k=-m}^{m} ikF_k(x) \in H$$

olduğundan $x \in H(D)$ 'dir. $x \in H_f$ keyfi olduğundan $H_f \subset H(D)$ 'dir. Sonuç 2.3.3 'den $H = \overline{H_f} \subset \overline{H(D)} \subset H$ olduğundan $\overline{H(D)} = H$ 'dır.

ii) $x \in H(D)$, $t \in SO(2)$ keyfi olsun.

$$D\alpha(t)x = \lim_{s \to 0} \frac{\alpha(s)\alpha(t)x - \alpha(t)x}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{\alpha(t)\alpha(s)x - \alpha(t)x}{s} = \lim_{s \to 0} \alpha(t)\frac{\alpha(s)x - x}{s}$$

$$= \alpha(t) \lim_{s \to 0} \frac{\alpha(s)x - x}{s} = \alpha(t)Dx \in H$$

olduğundan $\alpha(t)x \in H(D)$ 'dir. $x \in H(D), t \in SO(2)$ keyfi olduğundan $\alpha\big(SO(2)\big)H(D) \subset H(D)$ 'dir. Tersine $H(D) = \alpha(0)H(D) \subset \alpha\big(SO(2)\big)H(D)$ olduğundan $\alpha\big(SO(2)\big)H(D) = H(D)$ yani $H(D)$, $\alpha\big(SO(2)\big)$–invaryanttır. Ayrıca $\forall t \in SO(2)$, $\forall x \in H(D)$ için $\alpha(t)Dx = D\alpha(t)x$ 'dir,

iii) $n \in \mathbb{Z}, x \in H(D)$ keyfi olsun.

$$DF_n(x) = \lim_{s\to 0} \frac{\alpha(s)F_n(x) - F_n(x)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{\alpha(s)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)xdt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)xdt}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(s)\alpha(t)xdt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)xdt}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\left(\frac{\alpha(s)\alpha(t)x - \alpha(t)x}{s}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} \lim_{s\to 0}\left(\frac{\alpha(s)\alpha(t)x - \alpha(t)x}{s}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} D\alpha(t)xdt \overset{ii)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)Dxdt = F_n(Dx) \text{ 'dir.}$$

Ayrıca Teorem 2.2.2-i 'den $F_n(x) \in H_n$ olduğundan

$$DF_n(x) = \lim_{s\to 0} \frac{\alpha(s)F_n(x) - F_n(x)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{e^{ins}F_n(x) - F_n(x)}{s} = \lim_{s\to 0} F_n(x)\frac{e^{ins}-1}{s}$$

$$= F_n(x) \lim_{s\to 0} \frac{e^{ins}-1}{s} = inF_n(x)$$

'dir. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in H(D)$ için $DF_n(x) = F_n(Dx) = inF_n(x)$ 'dir.

Tanım 2.3.6: D operatörüne α 'nın infinitesimal üreticisi denir. [11, s.45]

Önerme 2.3.7: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir izometrik sürekli lineer gösterimi ve $x \in H(D)$ olsun. Bu takdirde; α_x operatörü $SO(2)$ 'de türevlenebilir ve $\alpha_x'(t) = \alpha(t)\alpha_x'(0) = \alpha(t)Dx$ 'dir.

İspat:

$x \in H(D)$ olsun. α, $SO(2)$ 'nin H 'daki sürekli lineer gösterimi olduğundan

$$\alpha_x'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{\alpha_x(t+s) - \alpha_x(t)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{\alpha(t+s)x - \alpha(t)x}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{\alpha(t)\alpha(s)x - \alpha(t)x}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \alpha(t)\frac{\alpha(s)x - x}{s} = \alpha(t) \lim_{s\to 0} \frac{\alpha(s)x - x}{s} = \alpha(t)Dx \in H$$

olduğundan α_x operatörü $SO(2)$ 'de türevlenebilirdir. Ayrıca

$$\alpha(t)Dx = \alpha(t) \lim_{s\to 0} \frac{\alpha(s)x - x}{s} = \alpha(t) \lim_{s\to 0} \frac{\alpha(s+0)x - \alpha(0)x}{s}$$

$$= \alpha(t) \lim_{s\to 0} \frac{\alpha_x(s+0) - \alpha_x(0)}{s} = \alpha(t)\alpha_x'(0) \text{ 'dir.}$$

Tanım 2.3.8: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir izometrik sürekli lineer gösterimi olsun. $\forall x \in H$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için $\int_0^{2\pi} e^{\lambda t}\left(\int_0^t e^{-\lambda s}\alpha(s)xds\right)dt$ vektör değerli Riemann integrali mevcuttur.

$\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\forall m \in \mathbb{Z}$ için $\lambda \neq im$ ise

$$R_\lambda(x) := \frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{\lambda t}\left(\int_0^t e^{-\lambda s}\alpha(s)xds\right)dt + \frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi}\alpha(t)xdt \qquad \textbf{(2.29)}$$

şeklinde tanımlan ve $\forall m \in \mathbb{Z}$ için

$$R_{im}(x) := \frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-imt}\alpha(t)xdt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ims}\alpha(s)xds\right)dt \qquad \textbf{(2.30)}$$

değerini alan $R_\lambda : H \to H$ operatörüne ([15] ve [17]) D 'nin yarı-rezolvent operatörü denir.

Teorem 2.3.9: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir izometrik sürekli lineer gösterimi olsun. Bu takdirde:

i) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için $R_\lambda : H \to H$ bir lineer sınırlı operatördür.

ii) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\lambda \neq in$ olan $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall x \in H$ için

$$R_\lambda\big(F_n(x)\big) = F_n\big(R_\lambda(x)\big) = \frac{1}{in-\lambda}F_n(x) \text{ 'dir.} \qquad \textbf{(2.31)}$$

iii) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in H$ için

$$R_{in}\big(F_n(x)\big) = F_n\big(R_{in}(x)\big) = F_n(x) \text{ 'dir.} \qquad \textbf{(2.32)}$$

iv) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\forall x \in H$ için $R_\lambda\left(R_\mu(x)\right) = R_\mu\big(R_\lambda(x)\big)$ 'dir.

İspat:

i) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için $R_\lambda : H \to H$ operatörünün lineer olduğu (2.29), (2.30) tanımları, $\alpha(t)$ ve integralin lineerliğinden açıktır.

$\lambda \in \mathbb{C}$ keyfi ve $L := \int_0^{2\pi}\left|e^{\lambda t}\right|\left(\int_0^t\left|e^{-\lambda s}\right|ds\right)dt$ osun.

$\forall m \in \mathbb{Z}$ için $\lambda \neq im$ ise (2.29) ve α izometrik olduğundan

$$\begin{aligned}\|R_\lambda(x)\| &= \left\|\frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{\lambda t}\left(\int_0^t e^{-\lambda s}\alpha(s)xds\right)dt + \frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi}\alpha(t)xdt\right\| \\ &\leq \left\|\frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{\lambda t}\left(\int_0^t e^{-\lambda s}\alpha(s)xds\right)dt\right\| + \left\|\frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi}\alpha(t)xdt\right\|\end{aligned}$$

$$= \frac{|\lambda|}{|1-e^{2\pi\lambda}|}\left\|\int_0^{2\pi} e^{\lambda t}\left(\int_0^t e^{-\lambda s}\alpha(s)xds\right)dt\right\| + \frac{1}{|1-e^{2\pi\lambda}|}\left\|\int_0^{2\pi}\alpha(t)xdt\right\|$$

$$\leq \frac{1}{|1-e^{2\pi\lambda}|}\left[|\lambda|\int_0^{2\pi}|e^{\lambda t}|\left\|\int_0^t e^{-\lambda s}\alpha(s)xds\right\|dt + \int_0^{2\pi}\|\alpha(t)x\|dt\right]$$

$$\leq \frac{1}{|1-e^{2\pi\lambda}|}\left[|\lambda|\int_0^{2\pi}|e^{\lambda t}|\left(\int_0^t|e^{-\lambda s}|\|\alpha(s)x\|ds\right)dt + \int_0^{2\pi}\|x\|dt\right]$$

$$= \frac{1}{|1-e^{2\pi\lambda}|}\left[|\lambda|\int_0^{2\pi}|e^{\lambda t}|\left(\int_0^t|e^{-\lambda s}|\|x\|ds\right)dt + \int_0^{2\pi}\|x\|dt\right]$$

$$= \frac{1}{|1-e^{2\pi\lambda}|}\left[|\lambda|\|x\|\int_0^{2\pi}|e^{\lambda t}|\left(\int_0^t|e^{-\lambda s}|ds\right)dt + \|x\|\int_0^{2\pi}dt\right]$$

$$= \frac{1}{|1-e^{2\pi\lambda}|}\left[|\lambda|\|x\|L + \|x\|2\pi\right] = \frac{(|\lambda|L+2\pi)}{|1-e^{2\pi\lambda}|}\|x\|$$

Benzer şekilde $m \in \mathbb{Z}$ için $\lambda = im$ ise (2.30) ve α izometrik olduğundan

$$\|R_\lambda(x)\| = \|R_{im}(x)\| = \left\|\frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-imt}\alpha(t)xdt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ims}\alpha(s)xds\right)dt\right\|$$

$$\leq \frac{1+\pi}{2\pi}\left\|\int_0^{2\pi} e^{-imt}\alpha(t)xdt\right\| + \frac{1}{2\pi}\left\|\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ims}\alpha(s)xds\right)dt\right\|$$

$$\leq \frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi}|e^{-imt}|\|\alpha(t)x\|dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t|e^{-ims}|\|\alpha(s)x\|ds\right)dt$$

$$= \frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x\|dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t\|x\|ds\right)dt = \frac{1+\pi}{2\pi}2\pi\|x\| + \frac{1}{2\pi}\|x\|\frac{4\pi^2}{2}$$

$$= (1+2\pi)\|x\|$$

’dir. O halde $\|R_\lambda(x)\| \leq \left(\frac{(|\lambda|L+2\pi)}{|1-e^{2\pi\lambda}|} + (1+2\pi)\right)\|x\|$ ’dir. $\lambda \in \mathbb{C}$ keyfi olduğundan $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ için $R_\lambda: H \to H$ lineer operatörü sınırlıdır.

ii) $n \in \mathbb{Z}$ keyfi fakat sabit olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ keyfi öyle ki $\lambda \neq in$ olsun.

(2.31) eşitliğinin ispatı aşağıdaki adımları takip ederek yapılacaktır.

1. $\forall m \in \mathbb{Z}$ için $\lambda \neq im$ olmak üzere;

1.a. $x \in H_f$ ise,

1.b. $x \in H$ ise,

2. $m \neq n$ olan bir $m \in \mathbb{Z}$ için $\lambda = im$ olmak üzere;

2.a. $x \in H_f$ ise,

2.a.i. $F_m(x) = \theta_H$ ise,

2.a.ii. $F_m(x) \neq \theta_H$ ise,

2.b. $x \in H$ ise.

1. $\forall m \in \mathbb{Z}$ için $\lambda \neq im$ olsun.

1.a. $x \in H_f$ keyfi olsun.

(2.28) ’den $\exists k \in \mathbb{Z}$ için $x = \sum_{\ell=-k}^{k} F_\ell(x)$ ’dir. Teorem 2.2.2-i ’den $\forall\ell \in \mathbb{Z}$ için

$F_\ell(x) \in H_\ell$ olduğundan $\forall t \in SO(2)$ için $\alpha(t)F_\ell(x) = e^{i\ell t}F_\ell(x)$ 'dir.

$R_\lambda(x) = \frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{\lambda t}\left(\int_0^t e^{-\lambda s}\alpha(s)xds\right)dt + \frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi}\alpha(t)xdt$

$= \frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{\lambda t}\left(\int_0^t e^{-\lambda s}\alpha(s)\sum_{\ell=-k}^{k}F_\ell(x)\,ds\right)dt + \frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi}\alpha(t)\sum_{\ell=-k}^{k}F_\ell(x)\,dt$

$= \frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{\lambda t}\left(\int_0^t e^{-\lambda s}\sum_{\ell=-k}^{k}\alpha(s)F_\ell(x)\,ds\right)dt + \frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi}\sum_{\ell=-k}^{k}\alpha(t)F_\ell(x)\,dt$

$= \frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{\lambda t}\left(\int_0^t e^{-\lambda s}\sum_{\ell=-k}^{k}e^{i\ell s}F_\ell(x)\,ds\right)dt + \frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi}\sum_{\ell=-k}^{k}e^{i\ell t}F_\ell(x)\,dt$

$= \frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{\lambda t}\left(\sum_{\ell=-k}^{k}\int_0^t e^{(i\ell-\lambda)s}F_\ell(x)ds\right)dt + \frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\sum_{\ell=-k}^{k}\int_0^{2\pi}e^{i\ell t}F_\ell(x)dt$

$= \frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{\lambda t}\left(\sum_{\ell=-k}^{k}F_\ell(x)\int_0^t e^{(i\ell-\lambda)s}ds\right)dt + \frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\sum_{\ell=-k}^{k}F_\ell(x)\int_0^{2\pi}e^{i\ell t}dt$

$= \frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{\lambda t}\left(\sum_{\ell=-k}^{k}F_\ell(x)\left[\frac{e^{(i\ell-\lambda)t}}{i\ell-\lambda} - \frac{1}{i\ell-\lambda}\right]\right)dt + \frac{2\pi F_0(x)}{1-e^{2\pi\lambda}}$

$= \frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda}}\left[\int_0^{2\pi} e^{\lambda t}\left(\sum_{\ell=-k}^{k}F_\ell(x)\frac{e^{(i\ell-\lambda)t}}{i\ell-\lambda}\right)dt - \int_0^{2\pi}e^{\lambda t}\left(\sum_{\ell=-k}^{k}F_\ell(x)\frac{1}{i\ell-\lambda}\right)dt\right] + \frac{2\pi F_0(x)}{1-e^{2\pi\lambda}}$

$= \frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda}}\left[\sum_{\ell=-k}^{k}\frac{F_\ell(x)}{i\ell-\lambda}\int_0^{2\pi}e^{\lambda t}e^{(i\ell-\lambda)t}dt - \sum_{\ell=-k}^{k}\frac{F_\ell(x)}{i\ell-\lambda}\int_0^{2\pi}e^{\lambda t}dt\right] + \frac{2\pi F_0(x)}{1-e^{2\pi\lambda}}$

$= \frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda}}\left[\sum_{\ell=-k}^{k}\frac{F_\ell(x)}{i\ell-\lambda}\int_0^{2\pi}e^{i\ell t}dt - \sum_{\ell=-k}^{k}\frac{F_\ell(x)}{i\ell-\lambda}\int_0^{2\pi}e^{\lambda t}dt\right] + \frac{2\pi F_0(x)}{1-e^{2\pi\lambda}}$

$= \frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda}}\left[\frac{F_0(x)}{-\lambda}2\pi - \sum_{\ell=-k}^{k}\frac{F_\ell(x)}{i\ell-\lambda}\,\frac{e^{2\pi\lambda}-1}{\lambda}\right] + \frac{2\pi F_0(x)}{1-e^{2\pi\lambda}}$

$= -\frac{2\pi F_0(x)}{1-e^{2\pi\lambda}} - \left[\frac{\lambda}{1-e^{2\pi\lambda}}\frac{e^{2\pi\lambda}-1}{\lambda}\sum_{\ell=-k}^{k}\frac{F_\ell(x)}{i\ell-\lambda}\right] + \frac{2\pi F_0(x)}{1-e^{2\pi\lambda}} = \sum_{\ell=-k}^{k}\frac{F_\ell(x)}{i\ell-\lambda}$

Bu takdirde $R_\lambda(x) = \sum_{\ell=-k}^{k}\frac{1}{i\ell-\lambda}F_\ell(x)$ 'dir.

$F_n\big(R_\lambda(x)\big) = F_n\left(\sum_{\ell=-k}^{k}\frac{1}{i\ell-\lambda}F_\ell(x)\right) = \sum_{\ell=-k}^{k}\frac{1}{i\ell-\lambda}F_n\big(F_\ell(x)\big)$

$= \sum_{\ell=-k}^{k}\frac{1}{i\ell-\lambda}F_\ell\big(F_n(x)\big) = R_\lambda\big(F_n(x)\big) = \frac{1}{in-\lambda}F_n(x)$ 'dir.

1.b. $x \in H$ keyfi olsun.

Sonuç 2.2.8 'den $\lim\limits_{p\to+\infty}\psi_p(x) = x$ 'dir. $\forall p \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ için $\psi_p(x) \in H_f$ olduğundan 1.a. 'dan $F_n\left(R_\lambda\left(\psi_p(x)\right)\right) = R_\lambda\left(F_n\left(\psi_p(x)\right)\right) = \frac{1}{in-\lambda}F_n\left(\psi_p(x)\right)$ 'dir. F_n ve R_λ operatörleri sürekli ve $\lim\limits_{p\to+\infty}\psi_p(x) = x$ olduğundan

$F_n\big(R_\lambda(x)\big) = R_\lambda\big(F_n(x)\big) = \frac{1}{in-\lambda}F_n(x)$ 'dir.

2. $m \neq n$ olan bir $m \in \mathbb{Z}$ için $\lambda = im$ olsun.

2.a. $x \in H_f$ olsun.

2.a.i. $F_m(x) = \theta_H$ olsun. Bu takdirde (2.28) 'den $\exists k \in \mathbb{Z}$ için $x = \sum_{\substack{\ell=-k \\ \ell\neq m}}^{k}F_\ell(x)$

şeklinde olduğundan $\forall t \in SO(2)$ için

$\alpha(t)x = \alpha(t)\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k} F_\ell(x) = \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k} \alpha(t)F_\ell(x) = \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k} e^{i\ell t}F_\ell(x)$ 'dir. (2.30) 'dan

$$R_{im}(x) = \frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-imt}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k} e^{i\ell t}F_\ell(x)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ims}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k} e^{i\ell s}F_\ell(x)\,ds\right)dt$$

$$= \frac{1+\pi}{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}\int_0^{2\pi} e^{i(\ell-m)t}F_\ell(x)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}\left(\int_0^t e^{i(\ell-m)s}F_\ell(x)ds\right)dt$$

$$= \frac{1+\pi}{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}F_\ell(x)\int_0^{2\pi} e^{i(\ell-m)t}dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}F_\ell(x)\left(\int_0^t e^{i(\ell-m)s}ds\right)dt$$

$$= \frac{1+\pi}{2\pi}\theta_H - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}F_\ell(x)\frac{1}{i\ell-im}\left(e^{i(\ell-m)t}-1\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}F_\ell(x)\frac{1}{i\ell-im}e^{i(\ell-m)t}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}F_\ell(x)\frac{1}{i\ell-im}dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}F_\ell(x)\frac{1}{i\ell-im}\int_0^{2\pi} e^{i(\ell-m)t}dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}F_\ell(x)\frac{1}{i\ell-im}\int_0^{2\pi}dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\theta_H + \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}F_\ell(x)\frac{1}{i\ell-im}2\pi = \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}\frac{1}{i\ell-im}F_\ell(x)$$

olduğundan

$$R_{im}\big(F_n(x)\big) = F_n\big(R_{im}(x)\big) =$$
$$= \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}\frac{1}{i\ell-im}F_\ell\big(F_n(x)\big) = \begin{cases}\frac{1}{in-im}F_n(x)\;, & |n|\leq k \;ise\\ \theta_H\;, & n>k\;ise\end{cases} \qquad \textbf{(2.33)}$$

2.a.ii. $F_m(x)\neq\theta_H$ olsun. Bu takdirde (2.28) 'den $\exists k\in\mathbb{Z}$ için

$x = F_m(x) + \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}F_\ell(x)$ 'dir. Ayrıca $F_m\big(x-F_m(x)\big)=\theta_H$ olduğundan 2.a.i. 'den

$R_{im}\big(x-F_m(x)\big) = \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}\frac{1}{i\ell-im}F_\ell\big(x-F_m(x)\big) = \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}\frac{1}{i\ell-im}F_\ell(x)$ 'dir.

(2.29) ve (2.30) 'dan

$$\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k}\frac{1}{i\ell-im}F_\ell(x) = R_{im}\big(x-F_m(x)\big) =$$

$$= \frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-imt}\alpha(t)\big(x-F_m(x)\big)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ims}\alpha(s)\big(x-F_m(x)\big)ds\right)dt$$

$$= \frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-imt}\alpha(t)xdt - \frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-imt}\alpha(t)F_m(x)dt +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ims}\alpha(s)F_m(x)ds\right)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ims}\alpha(s)xds\right)dt$$

$$= (1+\pi)F_m(x) - (1+\pi)F_m^2(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} tF_m(x)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ims}\alpha(s)xds\right)dt$$

$$= \pi F_m(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ims}\alpha(s)xds\right)dt$$

olduğundan

$$\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k} \frac{1}{i\ell-im} F_\ell(x) + F_m(x) = (1+\pi)F_m(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ims}\alpha(s)xds\right)dt$$

$$= \frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-imt}\alpha(t)xdt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ims}\alpha(s)xds\right)dt = R_{im}(x)$$

Bu eşitlik kullanılırsa

$$F_n\big(R_{im}(x)\big) = R_{im}\big(F_n(x)\big) = \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k} \frac{1}{i\ell-im} F_\ell\big(F_n(x)\big) + F_m\big(F_n(x)\big)$$

$$= \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq m}}^{k} \frac{1}{i\ell-im} F_\ell\big(F_n(x)\big) = \begin{cases} \frac{1}{in-im}F_n(x) \ , & |n| \leq k \ ise \\ \theta_H \ , & n > k \ ise \end{cases}$$

2.a.i, 2.a.ii 'den $R_{im}\big(F_n(x)\big) = F_n\big(R_{im}(x)\big) = \begin{cases} \frac{1}{in-im}F_n(x) \ , & |n| \leq k \ ise \\ \theta_H \ , & n > k \ ise \end{cases}$ eşitliği sağlanır. Öte yandan $n > k$ ise $\theta_H = F_n(x) = \frac{1}{in-im}F_n(x)$ olacağından $x \in H_f$ ise $R_{im}\big(F_n(x)\big) = F_n\big(R_{im}(x)\big) = \frac{1}{in-im}F_n(x)$ elde edilir.

2.b. $x \in H$ olsun.

Sonuç 2.2.8 'den $\lim\limits_{p \to +\infty} \psi_p(x) = x$ 'dir. $\forall p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\psi_p(x) \in H_f$ ve 2.a. 'dan $F_n\left(R_{im}\left(\psi_p(x)\right)\right) = R_{im}\left(F_n\left(\psi_p(x)\right)\right) = \frac{1}{in-im}F_n\left(\psi_p(x)\right)$ 'dir. F_n ve R_{im} operatörleri sürekli ve $\lim\limits_{p \to +\infty} \psi_p(x) = x$ olduğundan

$F_n\big(R_{im}(x)\big) = R_{im}\big(F_n(x)\big) = \frac{1}{in-im}F_n(x)$ 'dir.

$n \in \mathbb{Z}$ keyfi, $\lambda \in \mathbb{C}$ keyfi öyle ki $\lambda \neq in$ olduğundan 1. ve 2. 'den $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\lambda \neq in$ olan $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ ve $\forall x \in H$ için $R_\lambda\big(F_n(x)\big) = F_n\big(R_\lambda(x)\big) = \frac{1}{in-\lambda}F_n(x)$ 'dir.

iii) $n \in \mathbb{Z}$ keyfi olsun.

(2.32) eşitliğinin ispatı aşağıdaki adımları takip ederek yapılacaktır.

1. $x \in H_f$ olmak üzere;

1.a. $F_n(x) = \theta_H$ ise,

1.b. $F_n(x) \neq \theta_H$ ise,

2. $x \in H$ ise.

1. $x \in H_f$ olsun.

1.a. $F_n(x) = \theta_H$ olsun. Bu takdirde (2.28) 'den $\exists k \in \mathbb{Z}$ için $x = \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k} F_\ell(x)$ şeklinde olduğundan $\forall t \in SO(2)$ için

$$\alpha(t)x = \alpha(t)\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k} F_\ell(x) = \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k} \alpha(t)F_\ell(x) = \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k} e^{i\ell t}F_\ell(x)$$

sağlanır. (2.30) ’dan

$$R_{in}(x) = \frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k} e^{i\ell t}F_\ell(x)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ins} \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k} e^{i\ell s}F_\ell(x)\,ds\right)dt$$

$$= \frac{1+\pi}{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k}\int_0^{2\pi} e^{i(\ell-n)t}F_\ell(x)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k}\left(\int_0^t e^{i(\ell-n)s}F_\ell(x)ds\right)dt$$

$$= \frac{1+\pi}{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k} F_\ell(x)\int_0^{2\pi} e^{i(\ell-n)t}dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k} F_\ell(x)\left(\int_0^t e^{i(\ell-n)s}ds\right)dt$$

$$= \frac{1+\pi}{2\pi}\theta_H - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k} F_\ell(x)\frac{1}{i\ell-in}\left(e^{i(\ell-n)t}-1\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k} F_\ell(x)\frac{1}{i\ell-in}e^{i(\ell-n)t}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k} F_\ell(x)\frac{1}{i\ell-in}dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k} F_\ell(x)\frac{1}{i\ell-in}\int_0^{2\pi} e^{i(\ell-n)t}dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k} F_\ell(x)\frac{1}{i\ell-in}\int_0^{2\pi} dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\theta_H + \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k} F_\ell(x)\frac{1}{i\ell-in}2\pi = \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k}\frac{1}{i\ell-in}F_\ell(x)$$

O halde

$$R_{in}\big(F_n(x)\big) = F_n\big(R_{in}(x)\big) = \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k}\frac{1}{i\ell-in}F_\ell\big(F_n(x)\big) = \theta_H = F_n(x) \text{ ’dir.} \qquad \textbf{(2.34)}$$

1.b. $F_n(x) \neq \theta_H$ olsun. Bu takdirde (2.28) ’den $\exists k \in \mathbb{Z}$ için $x = F_n(x) + \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k} F_\ell(x)$ ’dir. Ayrıca $F_n\big(x - F_n(x)\big) = \theta_H$ olduğundan 1.a. ’dan

$R_{in}\big(x - F_n(x)\big) = \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k}\frac{1}{i\ell-in}F_\ell\big(x - F_n(x)\big) = \sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k}\frac{1}{i\ell-in}F_\ell(x)$ ’dir.

(2.30) ve (2.34) ’den

$$\sum_{\substack{\ell=-k\\ \ell\neq n}}^{k}\frac{1}{i\ell-in}F_\ell(x) = R_{in}\big(x - F_n(x)\big) =$$

$$= \frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)\big(x - F_n(x)\big)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ins}\alpha(s)\big(x - F_n(x)\big)ds\right)dt$$

$$= \frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)xdt - \frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)F_n(x)dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ins}\alpha(s)F_n(x)ds\right)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ins}\alpha(s)xds\right)dt$$

$$= (1+\pi)F_n(x) - (1+\pi)F_n(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} tF_n(x)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ins}\alpha(s)xds\right)dt$$

$$= \pi F_n(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ins}\alpha(s)xds\right)dt$$

olduğundan

$$\sum_{\substack{\ell=-k \\ \ell\neq n}}^{k} \frac{1}{i\ell-in} F_\ell(x) + F_n(x) = (1+\pi)F_n(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ins}\alpha(s)xds\right)dt$$

$$= \frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\alpha(t)xdt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^t e^{-ins}\alpha(s)xds\right)dt = R_{in}(x) \text{ 'dir.}$$

Bu eşitlik kullanılırsa

$$F_n\big(R_{in}(x)\big) = R_{in}\big(F_n(x)\big) = \sum_{\substack{\ell=-k \\ \ell\neq n}}^{k} \frac{1}{i\ell-in} F_\ell\big(F_n(x)\big) + F_n\big(F_n(x)\big) = F_n(x)$$

1.a. ve 1.b. ’den $x \in H_f$ ise $F_n\big(R_{in}(x)\big) = R_{in}\big(F_n(x)\big) = F_n(x)$ ’dir.

2. $x \in H$ olsun.

Sonuç 2.2.8 ’den $\lim_{p \to +\infty} \psi_p(x) = x$ ’dir. $\forall p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\psi_p(x) \in H_f$ olduğundan 1. ’den $F_n\left(R_{in}\left(\psi_p(x)\right)\right) = R_{in}\left(F_n\left(\psi_p(x)\right)\right) = F_n\left(\psi_p(x)\right)$ ’dir. F_n ve R_{in} operatörleri sürekli ve $\lim_{p \to +\infty} \psi_p(x) = x$ olduğundan

$F_n\big(R_{in}(x)\big) = R_{in}\big(F_n(x)\big) = F_n(x)$ ’dir.

$n \in \mathbb{Z}$ keyfi, olduğundan 1. ve 2. ’den $\forall n \in \mathbb{Z}$ için, $\forall x \in H$ için

$R_{in}\big(F_n(x)\big) = F_n\big(R_{in}(x)\big) = F_n(x)$ ’dir.

iv) $x \in H$, $n \in \mathbb{Z}$ keyfi olsun. $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{C}$ için

1. $\lambda = \mu = in$ ise (2.32) ’den

$$F_n\left(R_\lambda\left(R_\mu(x)\right)\right) = F_n\left(R_\mu(x)\right) = F_n(x) = F_n\big(R_\lambda(x)\big) = F_n\left(R_\mu\big(R_\lambda(x)\big)\right) \text{ 'dir.}$$

2. $\lambda = in$, $\mu \neq in$ ise (2.31) ve (2.32) ’den

$$F_n\left(R_\lambda\left(R_\mu(x)\right)\right) = F_n\left(R_\mu(x)\right) = \frac{1}{in-\mu}F_n(x) = \frac{1}{in-\mu}F_n\big(R_\lambda(x)\big) = F_n\left(R_\mu\big(R_\lambda(x)\big)\right) \text{ 'dir.}$$

3. $\lambda \neq in$, $\mu \neq in$ ise (2.32) ’den

$$F_n\left(R_\lambda\left(R_\mu(x)\right)\right) = \frac{1}{in-\lambda}F_n\left(R_\mu(x)\right) = \frac{1}{in-\lambda}\frac{1}{in-\mu}F_n(x) = \frac{1}{in-\mu}\frac{1}{in-\lambda}F_n(x)$$

$$= \frac{1}{in-\mu}F_n\big(R_\lambda(x)\big) = F_n\left(R_\mu\big(R_\lambda(x)\big)\right)$$

olduğundan 1, 2 ve 3 ’den $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{C}$ için $F_n\left(R_\lambda\left(R_\mu(x)\right)\right) = F_n\left(R_\mu\big(R_\lambda(x)\big)\right)$ ’dir. $n \in \mathbb{Z}$ keyfi olduğundan $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{C}$ için $F_n\left(R_\lambda\left(R_\mu(x)\right)\right) = F_n\left(R_\mu\big(R_\lambda(x)\big)\right)$ ’dir. Sonuç 2.2.9-ii ’den $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{C}$ için $R_\lambda\left(R_\mu(x)\right) = R_\mu\big(R_\lambda(x)\big)$ ’dir.

Sonuç 2.3.10: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ ’nin H ’da bir izometrik sürekli lineer gösterimi $a \in H$, $im \in Spec(H)$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde,

$F_m(R_\lambda(a)) = \theta_H$ olması için gerekli ve yeterli koşul $F_m(a) = \theta_H$ olmasıdır.

İspat:

$F_m(R_\lambda(a)) = \theta_H$ olsun. Teorem 2.3.9 'dan

$$F_m(a) = \begin{cases} F_m(R_\lambda(a)) & , \ \lambda = im \ ise \\ (in-\lambda)F_m(R_\lambda(a)) & , \ \lambda \neq im \ ise \end{cases} = \theta_H \text{ 'dir.}$$

Tersine $F_m(a) = \theta_H$ olsun. Teorem 2.3.9 'dan

$$F_m(R_\lambda(a)) = \begin{cases} F_m(a) & , \ \lambda = im \ ise \\ \frac{1}{in-\lambda}F_m(a) & , \ \lambda \neq im \ ise \end{cases} = \theta_H \text{ 'dir.}$$

Önerme 2.3.11: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir izometrik sürekli lineer gösterimi olsun. Bu takdirde;

i. $\forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash \{im : m \in \mathbb{Z}\}$ için $R_\lambda - R_0 = \lambda(R_\lambda \circ R_0) - \frac{1}{\lambda}F_0$ 'dir.

ii. $\forall m \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ için $R_{im} - R_0 = im(R_{im} \circ R_0) - \frac{1}{im}F_0 - \frac{1}{im}F_m$ 'dir.

İspat:

i. $x \in H$ ve $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{im : m \in \mathbb{Z}\}$ keyfi olsun.

Teorem 2.3.9 'dan $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için

$$F_n\left(\lambda(R_\lambda \circ R_0)(x) - \frac{1}{\lambda}F_0(x)\right) = F_n(\lambda(R_\lambda \circ R_0)(x)) - \frac{1}{\lambda}F_n(F_0(x)) = F_n(\lambda(R_\lambda \circ R_0)(x))$$

$$= \frac{\lambda}{in(in-\lambda)}F_n(x) = \frac{1}{in-\lambda}F_n(x) - \frac{1}{in}F_n(x) = F_n(R_\lambda(x) - R_0(x)) \text{ 'dir.}$$

$n = 0$ için

$$F_0(R_\lambda(x) - R_0(x)) = -\frac{1}{\lambda}F_0(x) - F_0(R_0(x)) = -\frac{1}{\lambda}F_0(F_0(x)) - F_0(R_0(x))$$

$$= -\frac{1}{\lambda}F_0(F_0(x)) + F_0(\lambda(R_\lambda \circ R_0)(x)) = F_0\left(\lambda(R_\lambda \circ R_0)(x) - \frac{1}{\lambda}F_0(x)\right) \text{ 'dir.}$$

O halde $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $F_n\left(\lambda(R_\lambda \circ R_0)(x) - \frac{1}{\lambda}F_0(x)\right) = F_n(R_\lambda(x) - R_0(x))$ olduğundan Sonuç 2.2.9-ii 'den $\lambda(R_\lambda \circ R_0)(x) - \frac{1}{\lambda}F_0(x) = R_\lambda(x) - R_0(x)$'dir. $x \in H$ keyfi olduğundan $R_\lambda - R_0 = \lambda(R_\lambda \circ R_0) - \frac{1}{\lambda}F_0$ 'dir.

ii. $x \in H$ ve $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ keyfi olsun.

$m \neq n$ olan $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için

$$F_n(R_{im}(x) - R_0(x)) = F_n(R_{im}(x)) - F_n(R_0(x)) \overset{(2.31)}{=} \frac{1}{in-im}F_n(x) - \frac{1}{in}F_n(x)$$

$$= \frac{im}{in(in-im)} F_n(x) \overset{(2.31)}{=} im \frac{1}{in-im} F_n\big(R_0(x)\big) \overset{(2.31)}{=} imF_n\big((R_{im} \circ R_0)(x)\big)$$

$$= F_n\big(im(R_{im} \circ R_0)(x)\big) = F_n\big(im(R_{im} \circ R_0)(x)\big) - \frac{1}{im} F_n\big(F_0(x)\big) - \frac{1}{im} F_n\big(F_m(x)\big)$$

$= F_n\left(im(R_{im} \circ R_0)(x) - \frac{1}{im} F_0(x) - \frac{1}{im} F_m(x)\right)$ 'dir.

$n = 0$ için

$$F_0\big(R_{im}(x) - R_0(x)\big) = F_0\big(R_{im}(x)\big) - F_0\big(R_0(x)\big) \overset{(2.31-32)}{=} \frac{1}{-im} F_0(x) - F_0(x)$$

$$= im \frac{1}{-im} F_0(x) - \frac{1}{im} F_0\big(F_0(x)\big) - \frac{1}{im} F_0\big(F_m(x)\big)$$

$$\overset{(2.31)}{=} im \frac{1}{-im} F_0\big(R_0(x)\big) - F_0\left(\frac{1}{im} F_0(x)\right) - F_0\left(\frac{1}{im} F_m(x)\right)$$

$$\overset{(2.31)}{=} imF_0\big((R_{im} \circ R_0)(x)\big) - F_0\left(\frac{1}{im} F_0(x)\right) - F_0\left(\frac{1}{im} F_m(x)\right)$$

$$= F_0\big(im(R_{im} \circ R_0)(x)\big) - F_0\left(\frac{1}{im} F_0(x)\right) - F_0\left(\frac{1}{im} F_m(x)\right)$$

$= F_0\left(im(R_{im} \circ R_0)(x) - \frac{1}{im} F_0(x) - \frac{1}{im} F_m(x)\right)$'dir.

$m = n$ için

$$F_m\big(R_{im}(x) - R_0(x)\big) = F_m\big(R_{im}(x)\big) - F_m\big(R_0(x)\big) \overset{(2.31-32)}{=} im \frac{1}{im} F_m(x) - \frac{1}{im} F_m(x)$$

$$\overset{(2.31)}{=} imF_m\big(R_0(x)\big) - \frac{1}{im} F_m\big(F_m(x)\big) - \frac{1}{im} F_m\big(F_0(x)\big)$$

$$\overset{(2.32)}{=} imF_m\big((R_{im} \circ R_0)(x)\big) - \frac{1}{im} F_m\big(F_m(x)\big) - \frac{1}{im} F_m\big(F_0(x)\big)$$

$$= F_m\big(im(R_{im} \circ R_0)(x)\big) - F_m\left(\frac{1}{im} F_m(x)\right) - F_m\left(\frac{1}{im} F_0(x)\right)$$

$$= F_m\left(im(R_{im} \circ R_0)(x) - \frac{1}{im} F_0(x) - \frac{1}{im} F_m(x)\right)$$

O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$F_n\big(R_{im}(x) - R_0(x)\big) = F_n\left(im(R_{im} \circ R_0)(x) - \frac{1}{im} F_0(x) - \frac{1}{im} F_m(x)\right)$$

olduğundan Sonuç 2.2.9-ii 'den

$R_{im}(x) - R_0(x) = im(R_{im} \circ R_0)(x) - \frac{1}{im} F_0(x) - \frac{1}{im} F_m(x)$ 'dir.

$x \in H$ keyfi olduğundan $R_{im} - R_0 = im(R_{im} \circ R_0) - \frac{1}{im} F_0 - \frac{1}{im} F_m$ 'dir.

2.4. Yarı-Rezolvent Operatörlerinin Bazı Özellikleri Üzerine Teoremler

Aşağıdaki iki Lemma, Teorem 2.4.3 ’ün ispatında kullanılacaktır.

Lemma 2.4.1: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ ’nin H ’da bir izometrik sürekli lineer gösterimi olsun. Bu takdirde $\forall x \in H_f$ için
$DR_0(x) = x - F_0(x)$ ’dir.

İspat:

$x \in H_f$ olsun. O halde (2.28) ’den $\exists k \in \mathbb{Z}$ için $x = \sum_{\ell=-k}^{k} F_\ell(x)$ ’dir. Önerme 2.3.5 ve Teorem 2.3.9 ’dan $n \neq 0$ için

$$F_n\big(DR_0(x)\big) = DF_n\big(R_0(x)\big) = D\frac{1}{in}F_n(x) = \frac{1}{in}DF_n(x) = \frac{1}{in}inF_n(x) = F_n(x)$$

$F_0\big(DR_0(x)\big) = DF_0\big(R_0(x)\big) = DF_0(x) = i0F_0(x) = \theta_H$ ’dir. O halde

$$DR_0(x) = DR_0\big(\textstyle\sum_{\ell=-k}^{k} F_\ell(x)\big) = \sum_{\ell=-k}^{k} DR_0\big(F_\ell(x)\big) = \sum_{\ell=-k}^{k} DF_\ell\big(R_0(x)\big)$$

$$= \sum_{\ell=-k}^{k} F_\ell\big(DR_0(x)\big) = \theta_H + \sum_{\substack{\ell=-k \\ \ell\neq 0}}^{k} F_\ell(x) = \big(\textstyle\sum_{\ell=-k}^{k} F_\ell(x)\big) - F_0(x) = x - F_0(x) \text{ ’dir.}$$

Lemma 2.4.2: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ ’nin H ’da bir izometrik sürekli lineer gösterimi ve $x \in H$ için $F_0(x) = \theta_H$ olsun. Bu takdirde
$\forall t \in SO(2)$ için

$$\alpha(t)R_0(x) = \int_0^t \alpha(s)x\, ds + R_0(x) \text{ ’dir.} \qquad \textbf{(2.35)}$$

İspat:

$x \in H$ için $F_0(x) = \theta_H$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $f_n, f{:}\, SO(2) \to H$, $\forall t \in SO(2)$ için $f_n(t) \coloneqq \alpha(t)R_0\big(\psi_n(x)\big)$, $f(t) \coloneqq \alpha(t)R_0(x)$ şeklinde tanımlansın. α, $SO(2)$ ’nin H ’da bir izometrik sürekli lineer gösterimi olduğundan $\forall t \in SO(2)$ için

$$\|\alpha(t)x - \alpha(t)\psi_n(x)\| = \|x - \psi_n(x)\| \text{ ’dir.} \qquad \textbf{(2.36)}$$

$$\|f(t) - f_n(t)\| = \big\|R_0(x) - R_0\big(\psi_n(x)\big)\big\| \text{ ’dir.} \qquad \textbf{(2.37)}$$

(2.36) ’dan $\forall t \in SO(2)$ için

$$\left\|\int_0^t \alpha(s)x ds - \int_0^t \alpha(s)\psi_n(x)ds\right\| \leq 2\pi\|x-\psi_n(x)\| \text{ 'dir.} \quad \textbf{(2.38)}$$

Öte yandan $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ için $\psi_n(x) \in H_f$, $F_0(\psi_n(x)) = F_0(x) = \theta_H$ olduğundan Lemma 2.4.1 ve Önerme 2.3.7 'den $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ ve $\forall t \in SO(2)$ için

$$f_n'(t) = \left(\alpha(t)R_0(\psi_n(x))\right)' = \alpha(t)DR_0(\psi_n(x)) = \alpha(t)\left(\psi_n(x) - F_0(\psi_n(x))\right)$$
$$= \alpha(t)(\psi_n(x) - \theta_H) = \alpha(t)\psi_n(x)$$

Yani $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ ve $\forall t \in SO(2)$ için $c_n \in H$ olmak üzere

$f_n(t) = \int_0^t \alpha(s)\psi_n(x)ds + c_n$ 'dir.

$\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ ve $t=0$ için $c_n = f_n(0) = \alpha(0)R_0(\psi_n(x)) = R_0(\psi_n(x))$ olduğundan

$$f_n(t) = \int_0^t \alpha(s)\psi_n(x)ds + R_0(\psi_n(x)) \text{ 'dir.} \quad \textbf{(2.39)}$$

(2.36-39) kullanılırsa $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ ve $\forall t \in SO(2)$ için

$$\left\|f(t) - \left(\int_0^t \alpha(s)x\,ds + R_0(x)\right)\right\| = \left\|f(t) - f_n(t) + f_n(t) - \left(\int_0^t \alpha(s)x\,ds + R_0(x)\right)\right\|$$
$$\leq \|f(t)-f_n(t)\| + \left\|f_n(t) - \int_0^t \alpha(s)x\,ds - R_0(x)\right\|$$
$$= \|f(t)-f_n(t)\| + \left\|\int_0^t \alpha(s)\psi_n(x)ds + R_0(\psi_n(x)) - \int_0^t \alpha(s)x\,ds - R_0(x)\right\|$$
$$\leq \|f(t)-f_n(t)\| + \left\|\int_0^t \alpha(s)\psi_n(x)ds - \int_0^t \alpha(s)x\,ds\right\| + \left\|R_0(\psi_n(x)) - R_0(x)\right\|$$
$$= \|f(t)-f_n(t)\| + \left\|\int_0^t \alpha(s)(\psi_n(x)-x)ds\right\| + \|R_0(\psi_n(x)-x)\|$$
$$= \|R_0(\psi_n(x)-x)\| + \left\|\int_0^t \alpha(s)(\psi_n(x)-x)ds\right\| + \|R_0(\psi_n(x)-x)\|$$
$$\leq 2\|R_0(\psi_n(x)-x)\| + \int_0^t \|\alpha(s)(\psi_n(x)-x)\|ds$$
$$= 2\|R_0(\psi_n(x)-x)\| + \int_0^t \|\psi_n(x)-x\|ds$$
$$\leq 2\|R_0\|\|\psi_n(x)-x\| + 2\pi\|\psi_n(x)-x\| = 2(\pi + \|R_0\|)\|\psi_n(x)-x\|$$

Sonuç 2.2.8'den $\forall t \in SO(2)$ için $\alpha(t)R_0(x) = f(t) = \int_0^t \alpha(s)x\,ds + R_0(x)$ 'dir.

Teorem 2.4.3: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı ve α; $SO(2)$ 'nin H 'daki bir izometrik sürekli lineer gösterimi olsun. Bu takdirde:

i) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için $H(D) = R_\lambda(H)$ 'dır;

ii) $F_m(x) = F_m(y) = \theta_H$ olan $\forall x \in H(D)$, $\forall y \in H$ ve $\forall\, im \in Spec(H)$ için $R_{im}((D-im)x) = x$, $(D-im)R_{im}(y) = y$ 'dir.

iii)$\forall x \in H(D)$, $\forall y \in H$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus Spec(H)$ için
$R_\lambda\big((D-\lambda)(x)\big) = x,\ (D-\lambda)\big(R_\lambda(y)\big) = y$ 'dir.

iv)$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus Spec(H)$ için $R_\lambda(x) = \frac{1}{1-e^{-2\pi\lambda}} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda s} \alpha(s) x ds$ 'dir.

v) D 'nin spektrumu olan $\sigma(D)$ bir nokta spektrum olup $\sigma(D) = Spec(H)$ 'dır.

İspat:

i) (2.35) 'den $F_0(x) = \theta_H$ olan $\forall x \in H$ ve $\forall t \in SO(2)$ için $f(t)$ türevlenebilir ve $f'(t) = \alpha(t)x$ 'dir. Dolayısıyla $f'(0) = \alpha(0)x = x$ 'dir.

$$f'(t) = \alpha(t)x = \alpha(t)f'(0) = \alpha(t) \lim_{s \to 0} \frac{f(s)-f(0)}{s}$$

$$= \alpha(t) \lim_{s \to 0} \frac{\alpha(s)R_0(x) - R_0(x)}{s} = \alpha(t) D R_0(x)$$

olduğundan $x = f'(0) = \alpha(0) D R_0(x) = D R_0(x)$ 'dir. O halde $F_0(x) = \theta_H$ olan $\forall x \in H$ için $R_0(x) \in H(D)$ 'dir.

$x \in H$ keyfi olsun. $F_0\big(x - F_0(x)\big) = \theta_H$ olduğundan $R_0\big(x - F_0(x)\big) \in H(D)$ 'dir. Teorem 2.3.9 ve Önerme 2.3.5 'den $R_0\big(F_0(x)\big) = F_0(x) \in H_0 \subset H_f \subset H(D)$ 'dir. $H(D)$ lineer alt uzay olduğundan

$R_0\big(x - F_0(x)\big) + R_0\big(F_0(x)\big) = R_0\big(x - F_0(x) + F_0(x)\big) = R_0(x) \in H(D)$ 'dir.

$x \in H$ keyfi olduğundan $R_0(H) \subset H(D)$ 'dir.

Tersine, $x \in H(D)$ keyfi olsun. $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için

$$F_n\big(R_0(Dx) + F_0(x)\big) = F_n\big(R_0(Dx)\big) + F_n\big(F_0(x)\big) \overset{\text{Önerme } 2.2.13 - vii}{=} F_n\big(R_0(Dx)\big)$$

$$\overset{\text{Önerme } 2.3.9 - ii}{=} \frac{1}{in} F_n(Dx) \overset{\text{Önerme } 2.3.5 - iii}{=} \frac{1}{in} in F_n(x) = F_n(x) \text{'dir.}$$

$$F_0\big(R_0(Dx) + F_0(x)\big) = F_0\big(R_0(Dx)\big) + F_0\big(F_0(x)\big) \overset{\text{Önerme } 2.2.13 - ii}{=} F_0\big(R_0(Dx)\big) + F_0(x)$$

$$\overset{\text{Önerme } 2.3.9 - iii}{=} F_0(Dx) + F_0(x) \overset{\text{Önerme } 2.3.5 - iii}{=} i0F_0(x) + F_0(x) = F_0(x) \text{ 'dir.}$$

olduğundan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $F_n\big(R_0(Dx) + F_0(x)\big) = F_n(x)$ 'dir. Sonuç 2.2.9-ii 'den $R_0(Dx) + F_0(x) = x$ 'dir. Ayrıca yine Önerme 2.3.9-iii 'den $F_0(x) = R_0\big(F_0(x)\big)$ olduğundan$R_0\big(Dx + F_0(x)\big) = x$ 'dir. O halde $x \in R_0(H)$ 'dır. $x \in H(D)$ keyfi olduğundan $H(D) \subset R_0(H)$ 'dir. O halde $H(D) = R_0(H)$ 'dir.

1. $\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için $R_0(H) = R_{im}(H)$ olduğunu gösterelim. $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ keyfi fakat sabit olsun. Önerme 2.3.11-ii ve Teorem 2.3.9-iv 'den $\forall x \in H$ için

$R_{im}(x) = R_0(x) + imR_0\big(R_{im}(x)\big) - \frac{1}{im}F_0(x) - \frac{1}{im}F_m(x)$ ’dir. $F_0(x) \in H_0,\ F_m(x) \in H_m,$ $H_0,\ H_m \subset H_f \subset H(D) = R_0(H)$ olduğundan $R_{im}(H) \subset R_0(H)$ ’dır.

Tersine Önerme 2.3.11-ii ’den $\forall x \in H$ için

$R_0(x) = R_{im}(x) - imR_{im}\big(R_0(x)\big) + \frac{1}{im}F_0(x) + \frac{1}{im}F_m(x)$ ’dir.

Teorem 2.3.9-ii-iii ’den

$F_0(x) = -imR_{im}\big(F_0(x)\big) \in R_{im}(H), F_m(x) = R_{im}\big(F_m(x)\big) \in R_{im}(H)$ ’dir.

O halde $R_0(H) \subset R_{im}(H)$’dir. $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ keyfi olduğundan $\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için $R_0(H) = R_{im}(H)$ ’dir.

2. $\forall\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{im : m \in \mathbb{Z}\}$ için $R_0(H) = R_\lambda(H)$ olduğunu gösterelim.

Önerme 2.3.11-i ve Teorem 2.3.9-iv ’den $\forall x \in H$ için

$R_\lambda(x) = R_0(x) + \lambda R_0\big(R_\lambda(x)\big) - \frac{1}{\lambda}F_0(x)$ ’dir. $F_0(x) \in H_0 \subset H_f \subset H(D) = R_0(H)$ olduğundan $R_\lambda(H) \subset R_0(H)$ ’dir. Önerme 2.3.11-i ’den $\forall x \in H$ için

$R_0(x) = R_\lambda(x) - \lambda R_\lambda\big(R_0(x)\big) + \frac{1}{\lambda}F_0(x)$ ’dir.

Teorem 2.3.9-ii ’den $F_0(x) = -\lambda R_\lambda\big(F_0(x)\big) \in R_\lambda(H)$ olduğundan $R_0(H) \subset R_\lambda(H)$ ’dir. O halde $\forall\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{im : m \in \mathbb{Z}\}$ için $R_0(H) = R_\lambda(H)$

1. ve 2. ’den $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ için $R_0(H) = R_\lambda(H)$ ’dir.

$H(D) = R_0(H)$ olduğundan $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ için $H(D) = R_\lambda(H)$ ’dir.

ii) $im \in Spec\{H\}$ keyfi olsun.

$x \in H(D)$ keyfi öyle ki $F_m(x) = \theta_H$ olsun. Önerme 2.3.5 ’den $\forall k \in \mathbb{Z}$ için

$$F_k\big((D - im)x\big) = F_k(Dx - imx) = F_k(Dx) - F_k(imx)$$
$$= ikF_k(x) - imF_k(x) = (ik - im)F_k(x) \text{ ’dir.}$$

Teorem 2.3.9 ’dan $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{m\}$ için

$$F_k\Big(R_{im}\big((D - im)x\big)\Big) = \frac{1}{ik-im}F_k\big((D - im)x\big) = \frac{1}{ik-im}(ik - im)F_k(x) = F_k(x)$$

$$F_m\Big(R_{im}\big((D - im)x\big)\Big) = F_m\big((D - im)x\big) = (im - im)F_m(x) = \theta_H = F_m(x)$$

olduğundan $\forall k \in \mathbb{Z}$ için $F_k\Big(R_{im}\big((D - im)x\big)\Big) = F_k(x)$ ’dir. Sonuç 2.2.9 ’dan $R_{im}\big((D - im)x\big) = x$ ’dir. $x \in H(D)$ ve $im \in Spec\{H\}$ keyfi olduğundan $F_m(x) = \theta_H$ olan $\forall x \in H(D)$ ve $\forall im \in Spec\{H\}$ için $R_{im}\big((D - im)x\big) = x$ ’dir.

$y \in H$ keyfi öyle ki $F_m(y) = \theta_H$ olsun. Teorem 2.3.9 ’dan

$F_k(R_{im}(y)) = \begin{cases} \frac{1}{ik-im} F_k(y) \;, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{m\}\; ise \\ F_m(y) \;, & k = m \quad ise \end{cases}$ ’dir.

O halde Önerme 2.3.5 ’den $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{m\}$ için

$$F_k((D-im)R_{im}(y)) = F_k(DR_{im}(y)) - F_k(imR_{im}(y))$$
$$= ikF_k(R_{im}(y)) - imF_k(R_{im}(y)) = (ik-im)F_k(R_{im}(y))$$
$$= (ik-im)\frac{1}{ik-im}F_k(y) = F_k(y)$$
$$F_m((D-im)R_{im}(y)) = F_m(DR_{im}(y)) - F_m(imR_{im}(y))$$
$$= imF_m(R_{im}(y)) - imF_m(R_{im}(y)) = \theta_H = F_m(y)$$

olduğundan $\forall k \in \mathbb{Z}$ için $F_k((D-im)R_{im}(y)) = F_k(y)$ ’dir. Sonuç 2.2.9-ii ’den $(D-im)R_{im}(y) = y$ ’dir. $y \in H$ ve $im \in Spec\{H\}$ keyfi olduğundan $F_m(y) = \theta_H$ olan $\forall y \in H$ ve $\forall im \in Spec\{H\}$ için $(D-im)R_{im}(y) = y$ ’dir.

iii)$\lambda \in \mathbb{C} \setminus Spec(H)$ keyfi olsun.

$x \in H(D)$ keyfi olsun. Önerme 2.3.5 ’den $\forall k \in \mathbb{Z}$ için

$$F_k((D-\lambda)x) = F_k(Dx - \lambda x) = F_k(Dx) - F_k(\lambda x)$$
$$= ikF_k(x) - \lambda F_k(x) = (ik-\lambda)F_k(x)$$ ’dir.

Teorem 2.3.9 ’dan $\forall k \in \mathbb{Z}$ için

$F_k\left(R_\lambda((D-\lambda)x)\right) = \frac{1}{ik-\lambda}F_k((D-\lambda)x) = \frac{1}{ik-\lambda}(ik-\lambda)F_k(x) = F_k(x)$ ’dir.

Sonuç 2.2.9-ii ’den $R_\lambda((D-\lambda)x) = x$ ’dir. $x \in H(D)$ ve $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Spec(H)$ keyfi olduğundan $\forall x \in H(D)$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus Spec(H)$ için $R_\lambda((D-\lambda)x) = x$ ’dir.

$y \in H$ keyfi olsun. Teorem 2.3.9 ’dan $\forall k \in \mathbb{Z}$ için $F_k(R_\lambda(y)) = \frac{1}{ik-\lambda}F_k(y)$ ’dir. O halde Önerme 2.3.5 ’den $\forall k \in \mathbb{Z}$ için

$$F_k((D-\lambda)R_\lambda(y)) = F_k(DR_\lambda(y)) - F_k(\lambda R_\lambda(y)) = ikF_k(R_\lambda(y)) - \lambda F_k(R_\lambda(y))$$
$$= (ik-\lambda)F_k(R_\lambda(x)) = (ik-\lambda)\frac{1}{ik-\lambda}F_k(y) = F_k(y)$$ ’dir.

Sonuç 2.2.9-ii ’den $(D-\lambda)R_\lambda(y) = y$ ’dir. $y \in H$ ve $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Spec(H)$ keyfi olduğundan ve $\forall y \in H$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus Spec(H)$ için $(D-\lambda)R_\lambda(y) = y$ ’dir.

iv) İii ’den $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus Spec(H)$ için R_λ rezolvent operatördür.

Rezolvent operatörün tanımından [11, 2.25 Lemma]

$R_\lambda(x) = \frac{1}{1-e^{-2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{-\lambda s}\alpha(s)x ds$ ’dir.

v) ii ve iii ’den D ’nin spektrumu olan $\sigma(D)$ bir nokta spektrum ve $\sigma(D) = Spec(H)$ ’dir.

Teorem 2.4.4: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir izometrik sürekli lineer gösterimi, $a \in H$ ve $m \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu takdirde $Dx - imx = a$ denkleminin çözümünün mevcut olması için gerekli ve yeterli koşul $F_m(a) = \theta_H$ olmasıdır.

Bu durumda çözümler $c \in H_m$ keyfi olmak üzere $x = R_{im}(a) + c$ formundadır.

İspat:

$Dx - imx = a$ denkleminin keyfi bir çözümü x olsun. Önerme 2.3.5 'den

$F_m(a) = F_m(Dx - imx) = F_m(Dx) - F_m(imx) = imF_m(x) - imF_m(x) = \theta_H$ 'dır.

Tersine $F_m(a) = \theta_H$ olsun. Teorem 2.4.3 'den $(D - im)R_{im}(a) = a$ olduğundan $x = R_{im}(a)$, $Dx - imx = a$ denkleminin bir çözümüdür.

Şimdi $Dx - imx = a$ denkleminin herhangi bir çözümü varsa bu çözümün $c \in H_m$ olmak üzere $x = R_{im}(a) + c$ formunda olduğunu gösterelim.

$F_m(a) = \theta_H$, $c \in H_m$ keyfi olsun.

$$(D - im)[R_{im}(a) + c] = (D - im)R_{im}(a) + (D - im)c = a + (D - im)c$$

$$= a + Dc - imc = a + \lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t)c - c}{t} - imc = a + \lim_{t \to 0} \frac{e^{imt}c - c}{t} - imc$$

$$= a + c \lim_{t \to 0} \frac{e^{imt} - 1}{t} - imc = a + imc - imc = a$$

olduğundan $R_{im}(a) + c$, $Dx - imx = a$ denkleminin bir çözümüdür. $c \in H_m$ keyfi olduğundan $\forall c \in H_m$ için $R_{im}(a) + c$, $Dx - imx = a$ denkleminin çözümüdür.

Öte yandan $Dx - imx = a$ denkleminin bir çözümü $y \in H$ olsun. Bu takdirde $Dy - imy = a$ 'dır. $F_m\big(y - F_m(y)\big) = \theta_H$ olduğundan Önerme 2.3.5 ve Teorem 2.4.3 'den

$$y - F_m(y) = R_{im}\big((D - im)[y - F_m(y)]\big) = R_{im}\Big(Dy - imy - \big(DF_m(y) - imF_m(y)\big)\Big)$$

$$= R_{im}\Big(Dy - imy - \big(imF_m(y) - imF_m(y)\big)\Big) = R_{im}(Dy - imy) = R_{im}(a)$$

olduğundan $y = R_{im}(a) + F_m(y) = R_{im}(a) + c$, $c \in H_m$ formundadır.

Teorem 2.4.5: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'daki bir izometrik sürekli lineer gösterimi ve $a \in H(D)$ olsun. Bu takdirde a 'nın fourier serisi H 'da kendisine yakınsaktır.

İspat:

$a \in H(D)$ keyfi olsun. $D_n(t)$ Drichlet çekirdeği olmak üzere Önerme 2.2.5 'den

$S_n(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\alpha(t)a dt$ olduğundan $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$S_n(a) - a = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)(\alpha(t)a - a)dt$ 'dir.

$$g(t) \coloneqq \begin{cases} \frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}, & t \in [-\pi,\pi] \setminus \{0\} \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $g(t)$ fonksiyonu $[-\pi,\pi]$ aralığında süreklidir.

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t} = \frac{\sin nt\cos\frac{t}{2} + \cos nt\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \sin nt\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} + \cos nt$$

$$= 2\sin nt\left(\frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t}\right) + \cos nt = \frac{2\sin nt}{t} + 2g(t)\sin nt + \cos nt$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\varphi(t) \coloneqq \begin{cases} \frac{\alpha(t)a - a}{t} & , \ t \neq 0 \\ Da & , \ t = 0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$S_n(a) - a = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{2\sin nt}{t} + 2g(t)\sin nt + \cos nt\right](\alpha(t)a - a)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\varphi(t)\sin nt\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2g(t)\sin nt\,(\alpha(t)a - a)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,(\alpha(t)a - a)dt$$

ve $2\varphi(t)$, $\alpha(t)a - a$, $2g(t)(\alpha(t)a - a)$ fonksiyonları $SO(2)$ 'de sürekli olduğundan Sonuç 2.2.4 'den $\lim_{n \to +\infty} S_n(a) = a$ 'dır. O halde a 'nın fourier serisi H 'da kendisine yakınsaktır.

Bu teorem [11] 'deki 2.26.Teoremdir. Fakat buradaki ispat metodu farklıdır.

Sonuç 2.4.6: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir izometrik sürekli lineer gösterimi ve $x \in H$ olsun. Bu takdirde;

i) $\forall\lambda \in \mathbb{C} \setminus Spec(H)$ için $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{ik-\lambda}F_k(x)$ serisi H 'da $R_\lambda(x)$ 'e yakınsaktır,

ii) $\forall im \in Spec(H)$ için $F_m(x) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq m}}^{+\infty}\frac{1}{ik-im}F_k(x)$ serisi H 'da $R_{im}(x)$ 'e yakınsaktır.

İspat:

i) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Spec(H)$, $x \in H$ keyfi olsun.

Teorem 2.4.3-i 'den $R_\lambda(x) \in \mathrm{H}(D)$ 'dir. Teorem 2.3.9-ii 'den

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k\big(R_\lambda(x)\big) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{ik-\lambda}F_k(x)$$

olduğundan Teorem 2.4.5 'den $R_\lambda(x)$ 'in fourier serisi olan $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{ik-\lambda}F_k(x)$ serisi H 'da $R_\lambda(x)$ 'e yakınsaktır.

ii) $im \in Spec(H)$, $x \in H$ keyfi olsun.

Teorem 2.4.3-i 'den $R_{im}(x) \in \mathrm{H}(D)$ 'dir. Teorem 2.3.9-iii 'den $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k\big(R_{im}(x)\big) = F_m(x) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq m}}^{+\infty} \frac{1}{ik-im} F_k(x)$ olduğundan Teorem 2.4.5 'den $R_{im}(x)$ 'in fourier serisi olan $F_m(x) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq m}}^{+\infty} \frac{1}{ik-im} F_k(x)$ serisi H 'da $R_{im}(x)$ 'e yakınsaktır.

Sonuç 2.4.7: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir izometrik sürekli lineer gösterimi ve $x \in H$ olsun. Bu takdirde;

i) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Spec(H)$ olmak üzere $x \in H(D)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ik-\lambda} F_k(y)$ olacak şekilde bir $y \in H$ elemanının mevcut olmasıdır.

ii) $im \in Spec(H)$ olmak üzere $x \in H(D)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x = F_m(y) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq m}}^{+\infty} \frac{1}{ik-im} F_k(y)$ olacak şekilde bir $y \in H$ elemanının mevcut olmasıdır.

İspat:

i) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Spec(H)$ olsun.

$x \in H(D)$ ise Teorem 2.4.3-i 'den $x = R_\lambda(y)$ olacak şekilde bir $y \in H$ elemanı mevcuttur. Sonuç 2.4.6-i 'den $x = R_\lambda(y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ik-\lambda} F_k(y)$ 'dir.

Tersine $x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ik-\lambda} F_k(y)$ olacak şekilde bir $y \in H$ elemanı mevcut ise Sonuç 2.4.6-i 'den $x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ik-\lambda} F_k(y) = R_\lambda(y)$ 'dir. O halde Teorem 2.4.3-i 'den $x = R_\lambda(y) \in R_\lambda(H) = H(D)$ 'dir.

ii) $im \in Spec(H)$ olsun.

$x \in H(D)$ ise Teorem 2.4.3-i 'den $x = R_{im}(y)$ olacak şekilde bir $y \in H$ elemanı mevcuttur. Sonuç 2.4.6-ii 'den $x = R_{im}(y) = F_m(y) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq m}}^{+\infty} \frac{1}{ik-im} F_k(y)$ 'dir.

Tersine $x = F_m(y) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq m}}^{+\infty} \frac{1}{ik-im} F_k(y)$ olacak şekilde bir $y \in H$ elemanı mevcut ise Sonuç 2.4.6-ii 'den $x = F_m(y) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq m}}^{+\infty} \frac{1}{ik-im} F_k(y) = R_{im}(y)$ 'dir. O halde Teorem 2.4.3-i 'den $x = R_{im}(y) \in R_{im}(H) = H(D)$ 'dir.

2.5. $P(D)x = a$ Şeklinde Sabit Katsayılı n. Dereceden Lineer Diferansiyel Denklemin Periyodik Çözümleri

$(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir izometrik sürekli lineer gösterimi, D, α 'nın infinitesimal üreticisi , $a \in H$ ve $I: H \to H$ birim operatör ve $i \in \{0,1,2, \dots, n-1\}$ için $c_i \in \mathbb{C}$ olamak üzere

$$P(D) \coloneqq c_0 I + c_1 D + c_2 D^2 + \cdots + c_{n-1} D^{n-1} + D^n \quad \textbf{(2.40)}$$

operatörü D 'nin n. mertebeden bir polinomu olsun. Bu kısımda

$$P(D)x = a \quad \textbf{(2.41)}$$

şeklinde lineer diferansiyel denklemin çözümleri incelenecektir.

Lemma 2.5.1: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'da bir izometrik sürekli lineer gösterimi, $a \in H$, $\lambda \in Spec(H)$ ve $m \in \mathbb{Z}$, $m > 1$ olsun. Bu takdirde,

$$(D - \lambda I)^m x = a \quad \textbf{(2.42)}$$

denkleminin çözümünün mevcut olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $F_{-i\lambda}(a) = \theta_H$ olmasıdır.

Bu durumda çözümler $b \in H_{-i\lambda}$ olmak üzere $x = R_\lambda^m(a) + b$ formundadır.

İspat:

$y \coloneqq (D - \lambda I)^{m-1} x$ şeklinde tanımlansın. O halde (2.42) denklemi $(D - \lambda I)y = a$ formunda olduğundan Teorem 2.4.4 'den bu denklemin çözümünün mevcut olması için gerekli ve yeterli koşul $F_{-i\lambda}(a) = \theta_H$ olmasıdır.

$F_{-i\lambda}(a) = \theta_H$ ise $b_1 \in H_{-i\lambda}$ olmak üzere $y = R_\lambda(a) + b_1$, $(D - \lambda I)y = a$ denkleminin çözümüdür. Bu durumda (2.42) denklemi

$$(D - \lambda I)^{m-1} x = R_\lambda(a) + b_1 \quad \textbf{(2.43)}$$

şeklinde indirgenmiş olur.

$z \coloneqq (D - \lambda I)^{m-2} x$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde (2.43) denklemi

$(D-\lambda I)z = R_\lambda(a) + b_1$ formunda olduğundan Teorem 2.4.4 'den bu denklemin çözümünün mevcut olması için gerekli ve yeterli koşul

$$F_{-i\lambda}(R_\lambda(a) + b_1) = F_{-i\lambda}\big(R_\lambda(a)\big) + F_{-i\lambda}(b_1) = F_{-i\lambda}(a) + F_{-i\lambda}(b_1) = F_{-i\lambda}(b_1) = \theta_H$$

olmasıdır. $b_1 \in H_{-i\lambda}$ olduğundan Önerme 2.2.13-v 'den $b_1 = F_{-i\lambda}(b_1) = \theta_H$ 'dır.

Ayrıca çözüm mevcut ise $b_2 \in H_{-i\lambda}$ olmak üzere

$$z = R_\lambda(R_\lambda(a) + b_1) + b_2 = R_\lambda^2(a) + R_\lambda(b_1) + b_2 = R_\lambda^2(a) + R_\lambda\big(F_{-i\lambda}(b_1)\big) + b_2$$

$$\overset{Teorem\ 2.3.9-iii}{=} R_\lambda^2(a) + F_{-i\lambda}(b_1) + b_2 = R_\lambda^2(a) + b_2$$

formundadır. Bu durumda (2.42) denklemi

$$(D-\lambda I)^{m-2}x = R_\lambda^2(a) + b_2 \tag{2.44}$$

şeklinde indirgenmiş olur. Bu şekilde devam ederek indüksiyon ile (2.42) denkleminin çözümü mevcut ise $b \in H_{-i\lambda}$ olmak üzere $x = R_\lambda^m(a) + b$ formunda olduğu elde edilir.

Teorem 2.5.2: $(H, \|.\|)$ bir kompleks Banach uzayı, α; $SO(2)$ 'nin H 'daki bir izometrik sürekli lineer gösterimi ve $a \in H$ olsun. $P(D)$, (2.40) 'daki lineer operatör.

$$P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n$$

polinomun kökleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ olmak üzere $m_1, m_2, \ldots, m_k$ bu köklerin katlılığı yani

$$P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n = (z-\lambda_1)^{m_1}(z-\lambda_2)^{m_2} \ldots (z-\lambda_k)^{m_k}$$

olsun. Bu takdirde;

i) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \notin Spec(H)$ ise (2.41) denklemi $x = R_{\lambda_1}^{m_1} R_{\lambda_2}^{m_2} \ldots R_{\lambda_k}^{m_k}(a)$ şeklinde tek bir çözüme sahiptir.

ii) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in Spec(H)$, $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_k \notin Spec(H)$ ise (2.41) denkleminin çözümünün mevcut olması için gerekli ve yeterli koşul $F_{-i\lambda_1}(a) = F_{-i\lambda_2}(a) = \cdots = F_{-i\lambda_r}(a) = \theta_H$ olmasıdır. Bu durumda çözümler $b_1 \in H_{-i\lambda_1}$, $b_2 \in H_{-i\lambda_2}, \ldots, b_r \in H_{-i\lambda_r}$ olmak üzere

$x = R_{\lambda_1}^{m_1} R_{\lambda_2}^{m_2} \ldots R_{\lambda_r}^{m_r}\left(R_{\lambda_{r+1}}^{m_{r+1}} \ldots R_{\lambda_k}^{m_k}(a)\right) + b_1 + b_2 + \cdots + b_r$ formundadır.

İspat:

i) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \notin Spec(H)$ olsun. $P(D) = (D-\lambda_1 I)^{m_1}(D-\lambda_2 I)^{m_2} \ldots (D-\lambda_k I)^{m_k}$ şeklinde ifade edilebilir. Buna göre (2.41) denklemi

$$(D-\lambda_1 I)^{m_1}(D-\lambda_2 I)^{m_2} \ldots (D-\lambda_k I)^{m_k} x = a \tag{2.45}$$

formunda yazılabilir. Öte yandan Teorem 2.4.3-iii ’den $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Spec(H)$, $x \in H(D)$ için

$$R_\lambda (D-\lambda I)x = x \tag{2.46}$$

olduğundan Teorem 2.3.9-iv, (2.45) ve (2.46) ’dan $x = R_{\lambda_1}^{m_1} R_{\lambda_2}^{m_2} \ldots R_{\lambda_k}^{m_k}(a)$, (2.41) ’in çözümüdür.

ii) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in Spec(H)$, $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_k \notin Spec(H)$ olsun. i ’den

$$(D-\lambda_1 I)^{m_1}(D-\lambda_2 I)^{m_2} \ldots (D-\lambda_r I)^{m_r} x = R_{\lambda_{r+1}}^{m_{r+1}} R_{\lambda_{r+2}}^{m_{r+2}} \ldots R_{\lambda_k}^{m_k}(a) \text{ ’dır.} \tag{2.47}$$

Lemma 2.5.1 ’den (2.47) denkleminin çözümünün mevcut olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $F_{-i\lambda_1}\left(R_{\lambda_{r+1}}^{m_{r+1}} R_{\lambda_{r+2}}^{m_{r+2}} \ldots R_{\lambda_k}^{m_k}(a)\right) = \theta_H$ olmasıdır. Sonuç 2.3.10 ’dan (2.47) denkleminin çözümünün olması için gerekli ve yeterli koşul $F_{-i\lambda_1}(a) = \theta_H$ olmasıdır. Bu durumda çözümler $b_1 \in H_{-i\lambda_1}$ olmak üzere

$$(D-\lambda_2 I)^{m_2} \ldots (D-\lambda_r I)^{m_r} x = R_{\lambda_1}^{m_1}\left(R_{\lambda_{r+1}}^{m_{r+1}} R_{\lambda_{r+2}}^{m_{r+2}} \ldots R_{\lambda_k}^{m_k}(a)\right) + b_1 \tag{2.48}$$

formundadır. Benzer şekilde Lemma 2.5.1 ’den (2.48) denkleminin çözümünün mevcut olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $F_{-i\lambda_1}(a) = F_{-i\lambda_2}(a) = \theta_H$ olmasıdır. bu durumda çözümler $b_2 \in H_{-i\lambda_2}$ olmak üzere

$$(D-\lambda_3 I)^{m_3} \ldots (D-\lambda_r I)^{m_r} x = R_{\lambda_1}^{m_1} R_{\lambda_2}^{m_2}\left(R_{\lambda_{r+1}}^{m_{r+1}} R_{\lambda_{r+2}}^{m_{r+2}} \ldots R_{\lambda_k}^{m_k}(a)\right) + b_1 + b_2$$

formundadır. Bu şekilde devam edilirse indüksiyon ile (2.41) denkleminin çözümünün mevcut olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $F_{-i\lambda_1}(a) = F_{-i\lambda_2}(a) = \cdots = F_{-i\lambda_r}(a) = \theta_H$ olmasıdır. Bu durumda çözümler $b_1 \in H_{-i\lambda_1}$, $b_2 \in H_{-i\lambda_2}$,…, $b_r \in H_{-i\lambda_r}$ olmak üzere

$x = R_{\lambda_1}^{m_1} R_{\lambda_2}^{m_2} \ldots R_{\lambda_r}^{m_r}\left(R_{\lambda_{r+1}}^{m_{r+1}} \ldots R_{\lambda_k}^{m_k}(a)\right) + b_1 + b_2 + \cdots + b_r$ formundadır.

3. İRDELEME

Bu çalışmada $SO(2)$ grubunun Banach uzaylarındaki sürekli lineer gösterimi için Fourier serisi tanımlanmış, çeşitli özellikleri incelenmiş ve bazı uygulamaları araştırılmıştır

İlk kısımda, $SO(2)$ grubunun bir Banach uzayındaki bir lineer gösterimi, sürekli lineer gösterim, sınırlı lineer gösterim ve bunlar arasındaki ilişki araştırılmıştır. İkinci kısımda, bir sürekli lineer gösterimlerin Fourier serileri tanımlanmış ve sürekli lineer gösterimi için Fejer teoremi ve Riemann-Lebesgue lemma'sının bir genelleştirilmesi ispatlanmıştır. Üçüncü kısımda, bir H Banach uzayındaki sürekli lineer gösteriminin infinitesimal üreticisi D ve onun tanım kümesi $H(D)$'nin tanımları verilmiş. $R_\lambda: H \to H$ operatörü, D'nin rezolvent kümesindeki noktalar için ve D'nin spektrum noktaları için tanımlanarak, R_λ lineer operatörünün sınırlı olduğu gösterilmiştir. Dördüncü kısımda, $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $H(D) = R_\lambda(H)$ eşitliği elde edilmiş. D operatörünün spektrumu $\sigma(D)$'nin bir nokta spektrum olduğu, $Spec(H)$, α lineer gösteriminin spektrumu olmak üzere $\sigma(D) = \{im \in Spec(H)\}$ olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca D'nin rezolvent kümesindeki her λ noktası için R_λ operatörünün D'nin rezolvent operatörüne eşit olduğu ispatlanmıştır. D için bir integral teoremi elde edilmiştir. Beşinci kısımda, Banach uzaylarındaki n. dereceden sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denklemin periyodik çözümünün varlık şartları verilerek, bu durumda bütün periyodik çözümlerin açık ifadesi D'nin rezolvent ve yarı-rezolvent operatörü dilinde verilmiştir.

4. SONUÇLAR

Yaptığımız çalışmada elde edilen başlıca sonuçlar şunlardır:

1. $SO(2)$ grubunun bir Banach uzayındaki sürekli lineer gösterimi için Fourier katsayıları kullanılarak Fejer teoremi ve Riemann-Lebesgue lemma'sının bir genelleştirilmesi verilmiştir. (Sonuç 2.2.8 ve Sonuç 2.2.4)

2. $SO(2)$ grubunun bir H Banach uzayındaki izometrik sürekli lineer gösteriminin infinitesimal üreticisi D ve onun tanım kümesi $H(D)$'nin tanımları verilerek (Tanım 2.3.4 ve Tanım 2.3.6) bazı özellikleri incelenmiştir (Önerme 2.3.5 ve Önerme 2.3.7). Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $R_\lambda: H \to H$ sınırlı lineer operatörü tanımlanarak (Tanım 2.3.8) bazı özellikleri incelenmiştir (Teorem 2.3.9, Sonuç 2.3.10 ve Önerme 2.3.11).

3. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $H(D) = R_\lambda(H)$ olduğu, D operatörünün spektrumu $\sigma(D)$'nin bir nokta spektrum olduğu ve $\sigma(D) = \{im \in Spec(H)\}$ eşitliğini sağladığı ve D'nin rezolvent kümesindeki her λ noktası için R_λ operatörünün D'nin rezolvent operatörüne eşit olduğu ispatlanmıştır (Teorem 2.4.3). D için bir integral teoremi elde edilmiştir (Teorem 2.4.4).

4. Banach uzaylarındaki n. dereceden sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denklemin periyodik çözümünün varlık şartları verilerek, bu durumda bütün periyodik çözümlerin açık ifadesi verilmiştir (Teorem 2.5.2).

5.ÖNERİLER

$SO(2) \cong \mathbb{T}$ idi. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left(SO(2)\right)^n \cong \mathbb{T}^n$'dir. Bu nedenle $\left(SO(2)\right)^n$'nin herhangi bir $(H, \|\cdot\|)$ Banach uzayındaki α lineer gösterimleri incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Fourier J., The Analytical Theory of Heat, Translated by Freeman A., Cambridge Univ. Press, London, 1878.

2. Reymond T. D. B, Untersuchungen uber die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformen, Abh. Akad. Wiss. M¨unchen, X (1876), 1-103.

3. Bahatia R., Fourier Series, The Mathematical Association of America, Washington, 2005.

4. Zigmund A., Trigonometric Series, Vols I, II, third edition, Cambridge Univ. Press, London, 2002.

5. Kahane J. P. ve Salem R., Ensembles Parfauits et Se'ries De trigonome'triques, Hermann, Paris, 1963.

6. Kahane J. P., Se'ries de Fourier Absolument Convergents, Springer, Berlin, 1971.

7. Khavin V. P., Methods and Structure Commutative Harmonic Analysis, Commutative Harmonic Analysis I, General Survey, Classical Aspects. Encycl. Math. Sci., 15 (1991) 1-111.

8. Kislyakov S. V., Classical Themes of Fourier Analysis, Commutative Harmonic Analysis I, General Survey, Classical Aspects, Encycl. Math. Sci., 15 (1991) 113-165.

9. Gurarii V. P., Group Methods in Commutative Harmonic Analysis, Commutative Harmonic Analysis II, Encycl. Math. Sci., 25 (1998) 1-325.

10. Edwards R. E., Fourier Series, A Modern Introduction, Springer-Verlag, New York, 1982.

11. Engel K. J. ve Nagel R., One-Parametric Semigroups for Linear Evolution Equations, Springer-Verlag, New York, 2000.

12. Khadjiev D. ve Karakbaev U., The description of Fourier series in symmetric spaces, Dokl. Acad. Nauk Resp. Uzbekistan, 7 (1991) 11-13.

13. Khadjiev D. ve Aripov R., Linear representation of the rotation group of a circle in local convex spaces, Dokl. Acad. Nauk Resp. Uzbekistan, 5 (1997) 5-8.

14. Khadjiev D. ve Çavuş A., The imbedding theorem for continuous linear representation of the rotation group of a circle in Banach spaces, Dokl. Acad. Nauk Resp. Uzbekistan, 7 (2000) 8-11.

15. Khadjiev D. ve Çavuş A., The resolvent operator for the infinitesimal generator of a continuous linear representation of the torus in Banach spaces, Dokl. Acad. Nauk Resp. Uzbekistan, 2 (2003) 10-13.

16. Khadjiev D. ve Çavuş A., Fourier series in Banach spaces, Inverse and III-Posed Problems Series, III-Posed and Non-Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis, 2000, Samarkand, Uzbekistan, Proceedings of the International Conference, Editor-in-Chief: M. M. Lavrent'ev, VSP, Utrecht-Boston, (2003) 71-80.

17. Khadjiev D., The widest continuous integral, J. Math. Anal. Appl. 326 (2007) 1101-1115.

18. Hewitt E. ve Ross K. A., Abstract Harmonic Analysis I, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1979.

19. Hewitt E. ve Ross K. A., Abstract Harmonic Analysis II, Springer-Verlag, New York, 1970.

20. Zelobenko D. P., Compact Lie Groups and Their Representations, Translations of Mathematical Monographs, vol.40, American Mathematical Society (AMS), VIII, 1973.

21. Çavuş A., Khadjiev D. ve Kunt M., On periodic one-parameter groups of linear operators in a Banach space and applications, Journal of Inequalities and Applications, 172 (2013) 1-17.

22. Kreyszig E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York, 1978.

23. Rynne B. P. ve Youngson M. A., Linear Functional Analysis, Second Edition, Springer-Verlag, London, 2008.

24. Lang S., Undergraduate Analysis, Second Edition, Sipringer, USA, 1983.

25. Ross, K. A., Elementary Analysis: The Theory of Calculus, Springer Science, USA, 1980.

26. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis, Third edition, McGraw-Hill, New York, 1976.

27. Dunford N. ve Schwartz J. T., Linear Operators, Part I: General Theory, Interscience Publishers, New York, 1957.

28. Conway J. B., A Course in Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1985.

29. Norman C.W., Undergraduate Algebra, a First Course, Oxford University Press, New York, 1986.

30. Hofmann K. H. ve Morris S. A., The Structure of Compact Groups, Walter de Gruyter, Berlin- New York, 2006.

31. Lybich Y. I., Introduction to the Theory of Banach Representations of Groups, Birkhauser Verlag, Berlin, 1988.

32. Lusternik L. A. ve Sobolev V. J., Elements of Functional Analysis, Gordon and Breach, New York, 1968.

33. Vretblad A., Fourier Analysis and Its Applications, Springer-Verlag, New York, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet KUNT 1981 yılında Gümüşhane'nin Kelkit ilçesinde doğdu. İlk orta ve lise öğrenimini Samsun'da tamamladı. 1999 yılında KTÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı üniversite öğrenimini 2004 yılında tamamladı. 2005 yılında KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladığı yüksek lisans öğrenimini 2008 yılında tamamlayarak aynı yıl doktora öğrenimine başladı. 2005-2011 yılları arasında KTÜ Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalıştı. 2011 yılında aynı bölüme öğretim görevlisi olarak atandı ve halen bu görevini sürdürmektedir.

2009 yılında Elif TURAN ile evlenen Mehmet KUNT iki çocuk babasıdır.

Başlıca Eserler

1. Çavuş A., Khadjiev D. ve Kunt M., On periodic one-parameter groups of linear operators in a Banach space and applications, Journal of Inequalities and Applications, 172 (2013) 1-17.