KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOTANJANT DEMETTE BAZI NATURAL METRİKLER HAKKINDA

DOKTORA TEZİ

FİLİZ OCAK

NİSAN 2014
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOTANJANT DEMETTE BAZI NATURAL METRİKLER HAKKINDA

Filiz OCAK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26.03.2014
Tezin Savunma Tarihi : 25.04.2014

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ömer PEKŞEN
İkinci Danışman : Prof. Dr. Arif SALİMOV

Trabzon 2014

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Filiz OCAK Tarafından Hazırlanan

KOTANJANT DEMETTE BAZI NATURAL METRİKLER HAKKINDA

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 01 / 04 / 2014 gün ve 1547 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

DOKTORA TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. Ziya YAPAR**	....
Üye	**: Prof. Dr. Ömer PEKŞEN**	....
Üye	**: Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV**	....
Üye	**: Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ**	....
Üye	**: Prof. Dr. Yusuf YAYLI**	....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Tezin her aşamasında ve doktora eğitimim boyunca yardımlarını esirgemeyen ve beni her zaman yüreklendiren hocam Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV'a ve değerli fikirlerinden faydalandığım hocam Sayın Prof. Dr. Ömer PEKŞEN'e emeklerinden dolayı en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Eğitim-öğretim hayatım boyunca büyük ilgi ve destekleri ile her zaman yanımda olan canım aileme ve eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması TÜBİTAK'ın 112T111 numaralı projesi tarafından desteklenmiştir ve doktora öğrenimim süresince burs vererek maddi açıdan beni destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na da teşekkürlerimi sunarım.

Filiz OCAK

Trabzon 2014

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Kotanjant Demette Bazı Natural Metrikler Hakkında” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanlarım Prof. Dr. Ömer PEKŞEN ve Prof. Dr. Arif Salimov’un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 25/04/2014

Filiz OCAK

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ……………………………………………………………………………….III
TEZ BEYANNAMESİ……………………………………………………….…...IV
İÇİNDEKİLER…………………………………………………………………..……V
ÖZET …………………………………………………………………..……………...VII
SUMMARY………………………………………………………………………..VIII
SEMBOLLER DİZİNİ…………………………….………………………………IX
1. GENEL BİLGİLER……………………………..…………………………..1
1.1. Giriş………………………………………………..…………………….....1
1.2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar……………………………..……………..…3
1.3. Tensör Alanları……………………………………………………..…………..5
1.4. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Lineer (Afin) Konneksiyon……....…...7
1.5. Burulma ve Eğrilik Tensörleri……………………….………………...…………9
1.6. Burulması Sıfır Olan Uzaylar……………………………………………..…..11
1.7. Eşafin ve Riemann Konneksiyonları…………..……………….………………..13
1.8. Kotanjant Demet…………………………………………………...………….18
1.8.1. Kotanjant Demette Temel 1-Form…………………………………….…..…..20
1.8.2. (0,s) Tipli Tensör Alanlarının Dikey (Vertical) Liftleri………………….……..21
1.8.3. Vektör Alanlarının Tam (Complete) Liftleri…….…………………..………..23
1.8.4. Kovaryant Türevin Tam Lifti……………………………………..………..24
1.8.5. Vektör Alanlarının Yatay (Horizontal) Liftleri…….…………………………....25
1.8.6. Adapte Çatı………………………………………………………...………….26
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR.…………………………………27
2.1. Natural Metrik…………………………………………………..……………….27
2.2. $T^{*}M^{n}$ de ${}^{S}g$ Sasaki Metriği……………………………...……………..……29
2.2.1. ${}^{S}g$ in Levi-Civita Konneksiyonu…………………..…………………….....……31
2.2.2. ${}^{S}\nabla$ in Eğrilik Tensörü………………………………………………...……34
2.2.3. ${}^{S}g$ Metriğine Göre Metrik Konneksiyonunun Skalar Eğriliği……………..…...40
2.2.4. $\left(T^{*}M^{n}, {}^{S}g\right)$ de Para-Norden Yapılar……………………….....……..………...43

2.2.5. Vektör Alanlarının Tam Liftinin Paraholomorfik Olması……………….……..45
2.3. T^*M^n de ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll Metriği…………………....………..….…..48
2.3.1. ${}^{CG}g$ nin Levi-Civita Konneksiyonu…………………………………..………49
2.3.2. ${}^{CG}\nabla$ nin Eğrilik Tensörü…………………………………………..……….53
2.3.3. ${}^{CG}g$ nin Jeodezikleri……….………………………………………….….……..63
3. SONUÇLAR……………………………………………………….….……..65
4. ÖNERİLER…………………………………………...……….…….……….66
5. KAYNAKLAR……………………………………………………...……..67
ÖZGEÇMİŞ 71

Doktora Tezi

ÖZET

KOTANJANT DEMETTE BAZI NATURAL METRİKLER HAKKINDA

Filiz OCAK

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Ömer PEKŞEN
İkinci Danışman: Prof. Dr. Arif SALİMOV
2014, 70 Sayfa

Bu tezde, Kotanjant demette natural metrik sınıfından olan Sasaki ve Cheeger-Gromoll metriklerinin diferensiyel geometrisi çalışılmıştır. Kotanjant demette, ${}^{S}g$, Sasaki metriği ve ${}^{CG}g$, Cheeger-Gromoll metriklerinin adapte çatıda, Levi-Civita konneksiyonları ve eğrilik problemleri incelenmiştir. Ayrıca, Sasaki metriğinin para-Nordenlik özelliği sunulmuştur. Son olarak, Kotanjant demette Cheeger-Gromoll metriğinin jeodezikleri araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sasaki metrik, Cheeger-Gromoll metrik, Kotanjant demet, Para-Norden metrik, Jeodezikler

PhD. Thesis

SUMMARY

ON SOME NATURAL METRICS IN THE COTANGENT BUNDLE

Filiz OCAK

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Ömer PEKŞEN
Co-Supervisor: Prof. Dr. Arif SALİMOV
2014, 70 Pages

In this thesis, the differential geometry of Sasakian and Cheeger-Gromoll metric which are in the class of natural metric on the cotangent bundle are studied. Levi-Civita connection and curvature problems of Sasakian metric ${}^{S}g$ and Cheeger-Gromoll metric ${}^{CG}g$ are investigated with respect to the adapted frame. Also, para-Nordenian properties of the Sasakian metric on the cotangent bundle are presented. Finally, geodesics of Cheeger-Gromoll metric on the cotangent bundle are investigated .

Key Words: Sasakian metric, Cheeger-Gromoll metric, Cotangent bundle, Para-Nordenian metric, Geodesics

SEMBOLLER DİZİNİ

C	: Tam Lift
H	: Yatay Lift
V	: Dikey Lift
L_X	: X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
$R_{ijk}{}^h$	: Eğrilik Tensörü
S_{ij}^h	: Burulma Tensörü
Γ_{ij}^k	: Christoffel Sembolü
π	: Tabii İzdüşüm
∇_X	: X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
TM^n	: M^n Manifoldunun Tanjant Demeti
T_pM^n	: $p \in M^n$ Noktasındaki Tanjant Uzay
T^*M^n	: M^n Manifoldunun Kotanjant Demeti
$T_p^*M^n$	: $p \in M^n$ Noktasındaki Kotanjant Uzay
$\Im_p^q\left(M^n\right)$	: (p,q)- tipli tensör modülü

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Differensiyellenebilir manifoldlar üzerindeki geometrik yapıların incelenmesi modern diferensiyel geometrinin önemli araştırma konularından birini oluşturmaktadır. Tanjant demetlerin diferensiyel geometrisi 1960'lı yıllarda, Davies [12], Yano ve Davies [47,48], Dombrowski [13], Ledger ve Yano [19, 20], Tachibana ve Okumuro [39], Sasaki [37] ve Yano [44, 45] gibi bilimsel çalışmalarla başlamıştır.

Tanjant demetlerde tensör alanları ve konneksiyonlarının, dikey (vertikal) ve tam (complete) liftleri teorisini Yano ve Kobayashi [53, 54, 55] , yatay (horizontal) lift teorisini Yano ve Ishihara [49, 50, 51] geliştirmiştir.

Kotanjant demetlerde lift teorisi ilk olarak Yano ve Petterson [57, 58] çalışmalarıyla başlamıştır. Yano ve Ishihara'nın [52] çalışmasında ise, hem tanjant hem de kotanjant demetlerdeki dikey, tam, yatay ve diagonal liftlerle ilgili elde edilmiş önemli sonuçlara yer verilmiştir. 1970 yılında Morimoto [22] tanjant demette tensör alanları ve konneksiyonların liftleri hakkında çalışmalarda bulunmuştur. Ayrıca Talantova and Shirokov [41] çalışmasında, tanjant demet ile dual cebir üzerinde inşa edilmiş holomorf manifoldlar arasında bir bağlantı elde edilmiş ve bu bağlantı, lift konusunda milat kabul edilebilecek yeni bir yaklaşım ortaya çıkarmıştır. Bu yaklaşımın sonucu olarak synectic lift denilen liftlerin incelenmesine başlanmıştır.

1958 yılında, Sasaki [37] çalışmasında, M diferensiyellenebilir manifoldunun TM tanjant demetinde, M nin g Riemannian metriğini kullanarak $\hat{g}$ metriğini üretmiştir. Bugün bu metrik, Sasaki metriği olarak adlandırılmaktadır.

Tanjant demette Lie parantezinin $[\ ,\ ]$ ifadesi Dombrowski [13] tarafından verilmiştir. TM de Sasaki metriğinin $\hat{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu ve $\hat{R}$ Riemannian eğrilik tensörü Kowalski [17] tarafından hesaplanmıştır. Kowalski [17], Aso [7], Musso ve Tricerri [25]; (M,g) ve $(TM,\hat{g})$ manifoldlarının geometrik özellikleri arasında ilginç bağlantılar bulmuşlardır.

Kowalski [17] çalışmasında baz manifoldunda g metriği flat olmazsa Sasaki metriğiyle TM nin lokal olarak simetrik olmayacağını göstermiştir. Musso ve Tricerri [25] çalışmasında, Sasaki metriğinin sabit skalar eğrilikli olması için gerek ve yeter şartın (M,g) nin lokal olarak Euclidean olması gerektiğini göstermiştir.

Tensör demette (1,q), (0,q) ve (p,q) tipli daha genel durumlarda Sasaki metriği ve onun jeodezikleri, Dombrowski [13], Salimov ve Cengiz [30], Salimov, Gezer ve Akbulut [31] tarafından çalışılmıştır.

Frame demette Sasaki metriği ilk olarak Mok [21] tarafından çalışılmıştır.

Akbulut, Özdemir ve Salimov [4] çalışmasında, kotanjant demette Sasaki metriğine (diagonal lift) göre Levi-Civita konneksiyonu doğal yolla hesaplanmıştır ve jeodezikleri araştırılmıştır. Tensör demette jeodezikler ise Cengiz ve Salimov [10] tarafından araştırılmıştır.

1972 de Cheeger ve Gromoll [11] (M,g) Riemannian manifoldunun TM tanjant demetinde, Cheeger-Gromoll metriği adıyla anılan $\tilde{g}$ yeni metriğini üretmişlerdir. TM de, Cheeger-Gromoll metriğinin açık formülü ilk olarak Musso ve Tricerri [25] tarafından verilmiştir. Teorik fizikte benzer bir metrik Tamm [42] tarafından verilmiştir. Sekizawa [38], TM de Cheeger-Gromoll metriğine göre $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunu ve $\tilde{R}$ eğrilik tensörünü hesaplamıştır. (M,g) ve $(TM,\tilde{g})$ nin geometrik özellikleri arasında yeni bağlantılar da bulmuştur. Gudmundsson ve Kappos [14,15] bu sonuçları tamamlamıştır. Ayrıca, eğer baz manifoldda, metrik sabit kesit (sectional) eğrilikli ise Cheeger-Gromoll metriğinin skalar eğriliğinin sabit olmayacağını göstermişlerdir. Abbasi ve Sarih [1] çalışmasında Cheeger-Gromoll metriğiyle TM nin sabit kesit (sectional) eğrilikli uzay olmadığını ispatlanmıştır.

Tanjant demette Cheeger-Gromoll metriğine göre jeodezikler Salimov ve Kazimova [34] de araştırılmıştır.

Tanjant demette doğal parakompleks yapıya göre paraholomorfik Cheeger-Gromoll metriği Salimov ve Akbulut [29] çalışmasında incelenmiştir.

Salimov, Gezer ve Aslancı [32] kotanjant demette hemen hemen kompleks yapının tam liftini de hemen hemen kompleks yapı olma şartını araştırmıştır.

Sasaki ve Cheeger-Gromoll metriklerininin genelleştirildiği daha genel metrik, Anastasiei [5] tarafından verilmiştir. Bu çalışmada dikey (vertikal) ve yatay (horizontal) dağılımların ortogonalliği korunmuştur. Yatay dağılım baz manifolddakiyle aynıdır ve nihayet Sasaki ve Cheeger-Gromoll metriklerinin bu metriğin özel bir durumu olduğunu göstermiştir. Bu metrikler Munteanu [23, 24] tarafından da çalışılmıştır.

Bu tezde, kotanjant demette natural metrik sınıfından olan ${}^{S}g$ Sasaki metriği ve ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriğinin adapte çatıya göre, Levi-Civita konneksiyon bileşenleri ve bu konneksiyonlara ait eğrilik tensörleri araştırılmaktadır. Kotanjant demette Sasaki metriğinin para- Nordenlik özelliği ve son olarak da kotanjant demette Cheeger-Gromoll metriğine göre jeodezikler incelenmektedir.

1.2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 1.1: M bir Hausdorff uzayı olmak üzere herhangi bir $U \subset M$ açık kümesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine tanımlanan

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizmine M de n-boyutlu koordinat sistemi veya harita, U açık bölgesine de φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir. Bazen harita (U,φ) şeklinde de gösterilir.

Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in \mathbb{R}^n$$

olur. Buradaki $x^1, ..., x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Tanım 1.2: M Hausdorff topolojik uzayının n-boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \quad \left(A - \text{indisler kümesi}\right)$$

ise M ye n-boyutlu topolojik manifold veya sadece n-boyutlu manifold denir.

Tanım 1.3: M bir Hausdorff uzayı ve k ise $0 \le k \le \infty$ şartını sağlayan tamsayı olsun**.** Aşağıdaki şartları sağlayan $\left\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A,\ U_\alpha \subset M\right\}$ lokal koordinatlar ailesine M üzerinde C^k sınıfından n-boyutlu atlas adı verilir:

i) Lokal haritaların U_α bölgesi M yi örter, yani M n-boyutlu topolojik manifolddur.

ii) Keyfi $\alpha,\beta\in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $\left(U_\alpha,\varphi_\alpha\right)$ ve $\left(U_\beta,\varphi_\beta\right)$ haritalarının C^k uzlaşma şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u_\beta^i = u_\beta^i\left(u_\alpha^j\right),\ i, j = 1,\ldots,n\right)$ denir. Burada u_β^i, $\left(U_\beta,\varphi_\beta\right)$ haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları ve u_α^j ise $\left(U_\alpha,\varphi_\alpha\right)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ olması halinde, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. (ii) şartı, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından diffeomorfizm olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobiyen matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 1.4: $\left\{\left(U_\alpha,\varphi_\alpha\right)\right\}$ ve $\left\{\left(U_\beta,\varphi_\beta\right)\right\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $\left(U_\alpha,\varphi_\alpha\right)$ ve $\left(U_\beta,\varphi_\beta\right)$ haritaları C^k uzlaşmış ise yani $\left\{\left(U_\alpha,\varphi_\alpha\right)\right\}$ ve $\left\{\left(U_\beta,\varphi_\beta\right)\right\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

Haritaların C^k uzlaşması bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı C^k atlaslar kümesini denk atlasların ayrık denklik sınıflarına ayırır.

Tanım 1.5: M Hausdorff uzayı üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir.

C^k-yapısının tüm C^k atlaslarının birleşiminin oluşturduğu C^k atlasına maksimal C^k atlas adı verilir.

M üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k-yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan da, X üzerindeki her bir C^k-yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar. C^0-yapıya topolojik yapı, C^k, $\left(1 \leq k \leq \infty\right)$yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞ sınıfından olan yapılara bakılacaktır .

Tanım 1.6: M, sayılabilir baza sahip bir Hausdorff uzay olsun. M üzerinde n-boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞-yapısı verilmiş ise M uzayına n-boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold veya düzgün manifold denir ve M^n ile gösterilir. [35]

1.3. Tensör Alanları

Tanım 1.7: M^n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_a\left(M^n\right)$, $\forall a\in M^n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M^n manifoldunun $\forall a\in M^n$ noktasına $T_a\left(M^n\right)$ uzayından bir X_a vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna bir vektör alanı denir.

f, M^n manifoldunda bir dönüşüm ise Xf de M^n manifoldunda

$$(Xf)(a)=X_a f$$

ile tanımlanan bir dönüşümdür. M^n nin $U\subset M^n$ koordinat komşuluğunda bir vektör alanı

$$X=\xi^i\partial_i$$

olarak yazılır. Buradaki ξ^i ler U daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani,

$$\xi^i=\xi^i\left(x^1,...,x^n\right),\quad i=1,...,n$$

şeklindedir.

a noktasında M^n nin $T_a\left(M^n\right)$ tanjant uzayının dual uzayı $T_a^*\left(M^n\right)$ olsun. $T_a^*\left(M^n\right)$ ye $a\in M^n$ noktasındaki kovektör uzayı denir. Bu uzayın elemanlarına da kovektörler denir [56].

Tanım 1.8: Her $a\in M^n$ noktasına bir ve yalnız bir $\omega_a\in T_a^*$ kovektörünü karşılık getiren ω dönüşümüne M^n üzerinde kovektör alanı adı verilir [35].

Tanım 1.9: B_n, n-boyutlu bir vektör uzayı ve B_n^* ise onun dual uzayı olsun. $\vec{x}_j\in B_n$, $j=1,...,q$ ve $\overset{i}{\xi}\in B_n^*$, $i=1,...,p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega=t\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{p}{\xi}\right)$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, bu fonksiyona bir multilineer fonksiyon denir. Mesela birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$t\left(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y},\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{p}{\xi}\right)=\lambda t\left(\vec{x},\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{p}{\xi}\right)+\mu t\left(\vec{y},\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{p}{\xi}\right)$$

biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \times B_n \times ... \times B_n}_{q} \times \overbrace{B_n^* \times ... \times B_n^*}^{p} \to \mathbb{R}$$

operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör adı verilir ve $T_q^p(B_n)$ ile gösterilir. (p,q) sembolüne ise tensörün tipi denir. $(p,0)$ tipli tensöre kontravaryant tensörler (p-kovektör değişkenlerinin sayısı), $(0,q)$ tipli tensörlere (q vektör değişkenlerinin sayısı) ise kovaryant tensörler denir [35].

M^n, C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere $\forall m \in M^n$ noktasındaki her bir (p,q) tipli tensör için uygun bir $T_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

Tanım 1.10: M^n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p(m)$, $\forall m \in M^n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olsun. M^n manifoldunun $\forall m \in M^n$ noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayında bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren t fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı denir.

Eğer $p=1,\ q=0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani, (1,0) tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p=q=0$ ise her $m \in M^n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Bu yüzden (0,0) tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

$U \subset M^n$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise, $\forall x \in U$ için $df|_x \in T_1^0(x)$ olur. Böylece f fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü (0,1) tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

(p,q) tipli tensör alanı T olsun. (0,1) tipli tensör alanları $\theta_1,...,\theta_p$ ve vektör alanları $X_1,...,X_q$ olmak üzere

$$T(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q)(m) = T_m(\theta_1(m),...,\theta_p(m),X_1(m),...,X_q(m))$$

ifadesi reel değerli bir fonksiyon tanımlar. Özellikle x^i koordinatlarına göre T tensör alanının bileşenleri

$$T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} = T\left(dx^{i_1},...,dx^{i_p},\partial_{j_1},...,\partial_{j_q}\right)$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır.

T tensör alanının bileşenleri C^∞ sınıfından fonksiyonlar ise T tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir. C^∞ sınıfından olan (0,1) tipli tensör alanına 1-form (Pfaffian form) denir.

(p,q) tipli T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart her $\theta_1,...,\theta_p$ 1-formları ve her C^∞ sınıfından $X_1,...,X_q$ vektör alanları için $T\left(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q\right)$ fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır [8].

1.4. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Lineer (Afin) Konneksiyon

Tanım 1.11: M^n manifoldu üzerinde vektör alanlarının modülü $\Im_0^1\left(M^n\right)$ olmak üzere

$$\nabla:\Im_0^1\left(M^n\right)\times\Im_0^1\left(M^n\right)\to\Im_0^1\left(M^n\right),\quad \nabla\left(X,Y\right)=\left(\nabla Y\right)\left(X\right)=\nabla_X Y$$

dönüşümü

1 . $\nabla_{fX+gY}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$

2. $\nabla_Z fX+gY=\left(Zf\right)X+f\nabla_Z X+\left(Zg\right)Y+g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X:\Im_0^1\left(M^n\right)\to\Im_0^1\left(M^n\right)$$

dönüşümüne kovaryant diferensiyellenme denir [16].

M^n manifoldu üzerinde U koordinat komşuluğundaki $\left\{x^1,...,x^n\right\}$ lokal koordinatlarını ve bu komşulukta ki $\partial_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ doğal vektör alanlarını göz önüne alalım. $\nabla_{\partial_i}=\nabla_i$ gösterimini kabul edelim. ∇_i yi ∂_j vektör alanlarına uygulayalım. Sonuç vektör alanı olduğundan dolayı

$$\nabla_i\partial_j=\Gamma_{ij}^k\partial_k$$

yazabiliriz. Burada $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k\left(x\right)$, U komşuluğunda belirli C^∞ sınıfından fonksiyonlardır [56].

$X=X^i\partial_i$ ve $Y=Y^j\partial_j$ için kovaryant türevinin koordinatlarını bulalım. ∇'nın 1. ve 2. özelliğini kullanılarak,

$$\left(\nabla Y\right)\left(X\right)=\nabla_X Y=X^i\left(\partial_i Y^j+\Gamma^j_{ik}Y^k\right)\partial_k$$

bulunur. Eğer bu eşitlikte $X=\partial_i$ alırsak,

$$\left(\nabla Y\right)_i=\nabla_i Y=\left(\partial_i Y^j+\Gamma^j_{ik}Y^k\right)\partial_k$$

yazılır. $\left(\nabla Y\right)_i^j=\left(\nabla_i Y\right)^j=\nabla_i Y^j$ şeklinde gösterirsek,

$$\nabla_i Y^j=\partial_i Y^j+\Gamma^j_{ik}Y^k$$

elde edilir. Bu ise (1,1) tipli tensör alanı olan ∇Y kovaryant türevinin doğal çatıdaki koordinatlarıdır.

Şimdi, $\omega\in\Im^0_1\left(M^n\right)$ kovektör alanının $\nabla\omega$ kovaryant türevinin doğal çatıdaki koordinatlarını bulalım. $\nabla\omega\in\Im^0_2\left(M^n\right)$ ve $\omega\left(X\right)\in\Im^0_0\left(M^n\right)$ olduğu açıktır. Buna göre $\omega\left(X\right)$'e ∇_Y, $Y\in\Im^1_0\left(M^n\right)$ operatörünü uygularsak,

$$\nabla_Y\left(\omega\left(X\right)\right)=\left(\nabla_Y\omega\right)\left(X\right)+\omega\left(\nabla_Y X\right)$$

yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned}\left(\nabla\omega\right)\left(Y,X\right)&=\left(\nabla_Y\omega\right)\left(X\right)=\nabla_Y\left(\omega\left(X\right)\right)-\omega\left(\nabla_Y X\right)\\&=Y\left(\omega\left(X\right)\right)-\omega\left(\nabla_Y X\right)\end{aligned}$$

yazılır. Burada $X=\partial_i$ ve $Y=\partial_j$ alırsak,

$$\begin{aligned}\left(\nabla\omega\right)_{ji}&=\left(\nabla_j\omega\right)_i=\delta^k_j\partial_k\omega_i-\omega\left(\nabla_j\partial_i\right)\\&=\partial_j\omega_i-\omega\left(\Gamma^k_{ji}\partial_i\right)=\partial_j\omega_i-\Gamma^k_{ji}\omega_k\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki $\left(\nabla\omega\right)_{ji}$ gösterimi $\nabla_j\omega_i$ anlamında kullanılmıştır. Böylece, $\nabla_j\omega_i$, $\nabla\omega$ kovaryant türevinin koordinatlarla ifadesi

$$\nabla_j\omega_i=\partial_j\omega_i-\Gamma^k_{ji}\omega_k$$

biçiminde elde edilir. $\left(\nabla_Y\omega\right)\left(X\right)$ eşitliğinde $X=\partial_i$, $Y=\partial_j$ ve $\omega=dx^k$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\left(\nabla_j dx^k\right)\left(\partial_i\right)&=\partial_j\left(dx^k\left(\partial_i\right)\right)-dx^k\left(\nabla_j\partial_i\right)\\&=\partial_j\left(\delta^k_i\right)-dx^k\left(\Gamma^s_{ji}\partial_s\right)\\&=-\Gamma^s_{ji}\delta^k_s=-\Gamma^k_{ji}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $dx^k\left(\partial_i\right)=\partial_i dx^k=\delta^k_i$ olduğunu dikkate alırsak,

$$\nabla_j dx^k=-\Gamma^k_{ji}dx^i$$

buluruz.

$t \in \Im_q^p\left(M^n\right)$ tensör alanının kovaryant türev formülünün doğal çatıdaki ifadesi,

$$\nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \left(\nabla t\right)_{kj_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \left(\nabla_k t\right)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

$$= \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\mu=1}^{p} \Gamma_{km}^{i_\mu} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} - \sum_{\lambda=1}^{q} \Gamma_{kj_\lambda}^{m} t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

biçimindedir [35].

1.5. Burulma ve Eğrilik Tensörleri

M^n, afin konneksiyonlu uzayında $f = f(u^1,...,u^n)$ diferensiyellebilir fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_k f du^i$ ifadesi, koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır ve df fonksiyonu du^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f$$

ile gösterilir. Bu kovektöre f fonksiyonunun gradienti, f fonksiyonuna ise bu kovektör alanının potansiyel fonksiyonu denir.

Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \tag{1.1}$$

olmasıdır [43]. Burada $[.,.]$ sembolü tensörler üzerindeki antisimetrikleşme işlemini göstermektedir.

Gradient kovektör V_i nin kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma_{ji}^k V_k \tag{1.2}$$

biçimindedir. (1.2) denkleminde j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (1.1) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j}V_{i]} = S_{ij}^{k}V_{k} \tag{1.3}$$

bulunur. Burada

$$S_{ij}^{k} = \Gamma_{[ij]}^{k} \tag{1.4}$$

olarak verilmiştir. (1.3) eşitliğinin sol tarafı tensör, sağ tarafındaki V_k da (0,1) tipli tensör olduğundan S_{ij}^{k} da (1,2) tipli tensör olur. S_{ij}^{k} tensörü ∇ konneksiyonunun burulma tensörünün doğal çatıdaki koordinatlarıdır. $S_{ij}^{k} = -S_{ji}^{k}$ olduğu açıktır [35].

M^n manifoldundaki X, Y vektör alanları için burulma tensörünün invaryant formda yazılışı

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

biçimindedir. Burada $[X,Y]$, X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi olup

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlanır [56].

M^n manifoldundaki X, Y, Z vektör alanları için eğrilik tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{1.5}$$

biçimindedir [16].

R nin X, Y ve Z değişkenlerine göre lineerlik şartını sağladığı kolayca gösterilebilir. Bu takdirde, $R(X,Y)Z \in \Im_0^1(M^n)$ olduğundan dolayı $R \in \Im_3^1(M^n)$ olur. (1.5) eşitliğinde $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ $Z = \partial_k$ alınarak R'nin doğal çatıdaki koordinatlarını

$$R_{ijk}{}^{s} = \partial_i \Gamma_{jk}^{s} - \partial_j \Gamma_{ik}^{s} + \Gamma_{im}^{s}\Gamma_{jk}^{m} - \Gamma_{jm}^{s}\Gamma_{ik}^{m}$$

biçiminde yazarız. Bazen R eğrilik tensörüne ∇ konneksiyonunun Riemannian Christoffel tensörü de denir. (1.5) eşitliğinden

$$R_{ijk}{}^{s} = -R_{jik}{}^{s}$$

elde edilir [35].

1.6. Burulması Sıfır Olan Uzaylar

Afin konneksiyonlu uzaylar içerisinde burulması sıfır olan (burulmasız) uzaylar çok önemli bir sınıf teşkil ederler. Bu tür uzaylarda konneksiyon katsayıları simetrik olur. Yani,

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \Leftrightarrow S^k_{ij} = 0$$

biçimindedir. Burulma tensörünün invaryant formu kullanılarak burulmasız uzaylarda

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

olduğu bulunur.

Burulmasız uzaylarda, normal koordinat sistemi adı verilen yeni bir koordinat sistemi tanımlanır. Şimdi bu sistemin nasıl verileceğini gösterelim. O noktasının $U \subset M^n$ komşuluğundaki ∂_i çatısına göre koordinatları $\overset{\circ}{u}{}^i$, konneksiyon katsayılarının da bu koordinat sistemine göre O noktasındaki değeri $\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}$ olsun. $U \subset M^n$ komşuluğunda yeni $u^{i'}$ koordinatlarını

$$u^{i'} = \delta^{i'}_k \{(u^k - \overset{\circ}{u}{}^k) + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{pq}(u^p - \overset{\circ}{u}{}^p)(u^q - \overset{\circ}{u}{}^q)\} \tag{1.6}$$

biçiminde tanımlayalım. Burada $\delta^{i'}_k$ Kronecker deltasıdır. Bu dönüşümün diferensiyellenebilir olduğu açıktır ve

$$\begin{aligned} A^{i'}_i &= \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} = \delta^{i'}_i + \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ip}(u^p - \overset{\circ}{u}{}^p), \\ A^{i'}_{ij} &= \frac{\partial^2 u^{i'}}{\partial u^i \partial u^j} = \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} \end{aligned} \tag{1.7}$$

biçiminde olur. Burada O noktasında ve civarında $\det(A^{i'}_i) \neq 0$ şartı sağlanır. Bu ise (1.6) dönüşümünün difeomorfizm olması demektir. Yani, (1.6) dönüşümü diferensiyellenebilir manifold üzerinde bakabileceğimiz koordinat dönüşümleri sınıfına dahildir.

Şimdi ise yukarıda baktığımız türevlerin O noktasındaki değerlerini bulalım. Bu türevler

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'},\ A_{ij}^{i'} = \delta_k^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$$

biçimindedir. Bunları

$$\Gamma_{jk}^{i} = A_{i'}^{i} A_j^{j'} A_k^{k'} \Gamma_{j'k'}^{i'} + A_{i'}^{i} A_{jk}^{i}$$

eşitliğinde kullanırsak,

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{jk}^{i} = \delta_j^{j'} \delta_k^{k'} \delta_{i'}^{i} \overset{\circ}{\Gamma}{}_{j'k'}^{i'} + \delta_{i'}^{i} \delta_l^{i'} \overset{\circ}{\Gamma}{}_{kj}^{l}$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}_{j'k'}^{i'} = 0$$

olduğu bulunur. Yani, burulmasız uzaylarda her bir $O \in M^n$ noktasında öyle bir koordinat sistemi dahil edebiliriz ki, bu sistemdeki konneksiyon katsayıları sıfır olur. Bu sisteme normal koordinat sistemi denir. Bu sistem kullanılarak eğrilik tensörünün her bir O noktasındaki bileşenlerini

$$R_{ijk}{}^{s} = \partial_i \Gamma_{jk}^{s} - \partial_j \Gamma_{ik}^{s} \quad \left(\Gamma_{ij}^{k} = 0\right)$$

biçiminde daha sade olarak yazılabilir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1. $R_{(rs)k}{}^{i} = 0,$

2. $R_{[rsk]}{}^{i} = 0,$

3. $\nabla_{[t} R_{rs]k}{}^{i} = 0$ (Bianchi-Padov eşitliği).

Bu eşitliklerin tensör karakter taşıdığını dikkate alırsak, bunların ispatını normal koordinat sisteminde incelemek yeterli ve daha kolaydır.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayda simetrik ve regüler (0,2) a_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu tensörün tersi $\tilde{a}^{ij}$ olmak üzere a_{ij} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij}$$

olarak gösterilsin. Bu şartlar dahilinde burulmasız uzayın konneksiyon katsayılarını bulalım. Bu eşitlikte indislerin yeri dairesel olarak değiştirilerek aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$\partial_k a_{ij} - \Gamma_{ki}^{m} a_{mj} - \Gamma_{kj}^{m} a_{mi} = a_{kij},$$

$$\partial_i a_{jk} - \Gamma_{ij}^{m} a_{mk} - \Gamma_{ik}^{m} a_{jm} = a_{ijk},$$

$$\partial_j a_{ki} - \Gamma^m_{jk} a_{mi} - \Gamma^m_{ji} a_{km} = a_{jki}.$$

Son iki eşitlik toplanır, toplamdan birinci eşitlik çıkartılırsa,

$$2\Gamma^m_{ij} a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - (a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij})$$

bulunur. Bu eşitlikte $\tilde{a}^{rk}$ ya göre kontraksiyon işlemi yapılırsa,

$$\Gamma^r_{ij} = \left\{ {r \atop ij} \right\} - \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} (a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij})$$

elde edilir. Bu ifadeye a_{ij} tensörü için Christoffel sembolü veya parantezi denir. Buradan

$$\left\{ {r \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} (\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij})$$

biçimindedir [35].

1.7. Eşafin ve Riemann Konneksiyonları

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaya bakalım. Bu uzayda koordinatları $e_{i_1 \ldots i_n}$ olan esas n vektör alanı verilmiş olsun.

$$V = e_{i_1 \ldots i_n} v_1^{i_1} v_2^{i_2} \ldots v_n^{i_n} \tag{1.8}$$

skalerine $v_1^{i_1} v_2^{i_2} \ldots v_n^{i_n}$ vektör alanları üzerine kurulan paralel yüzün hacmi denir.

Tanım 1.12: Eğer $v_1^{i_1},\ v_2^{i_2}, \ldots, v_n^{i_n}$ vektörlerinin keyfi eğri boyunca paralel taşınması durumunda V hacmi korunursa, yani $dV = 0$ ise verilen uzaya eşafin uzay denir.

dx^i lerin lineer bağımsızlığına göre

$$dV = \left(\partial_i V\right) dx^i = 0$$

şartından, $\partial_i V = \nabla_i V = 0$ bulunur. (1.8) eşitliğinden kovaryant türev alırsak,

$$\nabla_k e_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$$

bulunur. Böylece eşafin uzayın konneksiyonunu (veya sadece eşafin konneksiyon) son eşitlikle de karakterize edebilir. Bu eşitliği açık olarak yazarsak

$$\partial_k e_{i_i \ldots i_n} - \Gamma^s_{ki_1} e_{si_2 \ldots i_n} - \ldots - \Gamma^s_{ki_n} e_{i_1 \ldots s} = 0$$

bulunur. Buradan da $e_{i_1 \ldots i_n}$ esas n vektörün özelliğine göre

$$\partial_k e_{12\ldots n} - \Gamma^s_{k1} e_{s2\ldots n} - \ldots - \Gamma^s_{km} e_{12\ldots s} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $e = e_{12\ldots n}$ olarak gösterirsek,

$$\Gamma^s_{ks} = \partial_k \ln e \tag{1.9}$$

biçiminde yazılır. (1.9) eşitliği eşafin konneksiyonu karakterize eder. Eşafin konneksiyonunun katsayılarından oluşan Γ^s_{ks} toplamının gradient kovektör alanı olduğu (1.9) eşitliğinden görülür. [35]

Tanım 1.13: R eğrilik tensörü yardımıyla tanımlanan

$$R_{ij} = R_{kij}{}^{k}$$

tensörüne Ricci tensörü denir [43].

Burada eğrilik tensörünün ifadesi kullanılırsa,

$$R_{ij} = R_{kij}{}^{k} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^k_{kj} + \Gamma^k_{kl} \Gamma^l_{ij} - \Gamma^l_{ki} \Gamma^k_{lj}$$

elde edilir. Buradan da $R_{ij} = R_{kij}{}^{k}$ Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şartın (1.9) olduğu görülür. Böylece eşafin konneksiyon, Ricci tensörünün

$$R_{ij} = R_{ji}$$

simetriklik şartı ile de karakterize edildiğini ifade edebiliriz. Burulmasız uzaylarda (1.9) özdeşliğini kullanırsak,

$$R_{rsk}{}^{k} = R_{rs} - R_{sr}$$

elde ederiz. Buradan da eşafin konneksiyonunun

$$R_{rsk}{}^{k} = 0$$

şartı ile de karakterize edildiğini buluruz.

Tanım 1.14: i) M^n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde (0,2) tipli, simetrik ve regüler g_{ij} esas tensör alanı verilmişse M^n ye Riemann manifoldu denir.

ii) Riemann manifoldu üzerinde $\nabla_k g_{ij} = 0$ şartını sağlayan burulmasız lineer konneksiyona Riemann konneksiyonu adı verilir [35].

M^n de, $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ lokal koordinat sistemi verilsin. Bu lokal koordinat sistemine göre, g nin bileşenleri g_{ij} ler

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad i, j = 1, ..., n$$

şeklindedir. g_{ij} lere g nin kovaryant bileşenleri denir. g nin kontravaryant bileşenleri g^{ij} ler

$$g^{ij} = g\left(dx^i, dx^j\right), \quad i, j = 1, ..., n$$

şeklinde belirlidir. Buradan

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k, \quad \delta_i^k = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

elde edilir.

$\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ ye göre X vektörünün bileşenleri X^i ise, yani, $X = X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ dir, bu takdirde kovektöre (1-form) karşılık gelen X_i bileşenleri, X^i ler ile aşağıdaki şekilde ilişkilidir:

$$X^i = g^{ij} X_j, \; X_i = g_{ij} X^j.$$

$T_x(M)$ tanjant uzayı ve onun duali $T_x^*(M)$ uzayındaki g iç çarpımı, x noktasındaki (r,s) tipli T_s^r tensör uzayına da genelleştirilebilir. K ve L, $\{x^1, ..., x^n\}$ koordinatlarına göre bileşenleri $K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ ve $L_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ olan x noktasındaki (r,s) tipli tensörler olmak üzere, K ve L nin iç çarpımı

$$g(K, L) = g_{i_1 k_1} ... g_{i_r k_r} g^{j_1 t_1} ... g^{j_s t_s} K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} L_{t_1 \dots t_s}^{k_1 \dots k_r}$$

şeklindedir [56].

Teorem 1.1: [56] M bir Riemann manifoldu olmak üzere $S = 0$ ve $\nabla_X g = 0$ olacak şekilde bir tek afin konneksiyon vardır.

İspat: Varlık: M üzerinde X ve Y vektör alanları verilsin. Bu durumda M de herhangi bir Z vektör alanı için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = {} & Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ & + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g(X,[Z,Y]) \end{aligned} \tag{1.10}$$

ile $\nabla_X Y$ tanımlansın. $(X,Y)\to\nabla_X Y$ şeklinde tanımlanan bu dönüşüm M de bir afin konneksiyondur. $\nabla_X Y$ nin (1.10) tanımı kullanılarak $S(X,Y)=0$ ve

$$Xg(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)$$

bulunur ve buradan $\nabla_X g=0$ olduğu görülür, yani ∇, M de bir metrik konneksiyondur.

Teklik: $\nabla_X g=0$ ve $S=0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$[X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X$$

şeklindedir ve

$$Xg(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)$$

ile ifade edilebilir. Ayrıca

$$\nabla_X Y=\nabla_Y X+[X,Y]$$

ifadesi

$$g(Y,\nabla_X Z)=Xg(Y,Z)-g(\nabla_X Y,Z)$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$Xg(Y,Z)=g(\nabla_X Z,Y)+g(\nabla_Y X,Z)+g([X,Y],Z) \tag{1.11}$$

denklemi elde edilir. Benzer şekilde

$$Yg(Z,X)=g(\nabla_Y X,Z)+g(\nabla_Z Y,X)+g([Y,Z],X) \tag{1.12}$$

ve

$$Zg(X,Y)=g(\nabla_X Z,Y)+g(\nabla_Z Y,X)+g([Z,X],Y) \tag{1.13}$$

olur. (1.12) ve (1.13) denklemlerinin toplamından (1.11) denklemini çıkarırsak, Kozsul eşitliği denen (1.10) denklemini elde ederiz. (1.10) denklemi ile verilen ∇ konneksiyonuna Riemann konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir. □

Tanım 1.15: X, Y ortonormal bazlar olmak üzere, π kesitinin $K(\pi)$ kesit eğriliği,

$$K(\pi) = -R(X,Y,X,Y) = -(R(X,Y)X,Y) \tag{1.14}$$

şeklinde tanımlanır.

Simetri ve lineerlik özelliğinden X, Y, X', Y' vektör çifti ile $X = \alpha X' + \beta Y'$ $Y = \gamma X' + \delta Y'$ yazılırsa

$$(1/\Delta^2)(R(X',Y')X',Y') = (R(X,Y)X,Y)$$

elde edilir. Burada $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$, katsayılar determinantıdır. Eğer X', Y' bir ortonormal baz ise bu takdirde $\Delta = \pm 1$ olur, dolayısıyla $K(\pi)$ seçilen vektör çiftinden bağımsız olur. Herhangi lineer bağımsız vektör çifti için $\Delta^2 = (X',X')(Y',Y') - (X',Y')^2$ olduğu kullanılırsa

$$K(\pi) = -\frac{(R(X',Y')X',Y')}{(X',X')(Y',Y') - (X',Y')^2}$$

elde edilir. Lokal koordinatlarda ise ifadesi

$$K(\pi) = -\frac{R_{ijkl}\alpha^i\beta^j\alpha^k\beta^l}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\alpha^i\beta^j\alpha^k\beta^l} \tag{1.15}$$

şeklindedir [9].

$T_x(M)$ tanjant uzayında her p düzlemi ve M manifoldunun her x noktası için, $K(p)$ bir sabit ise bu durumda M manifolduna sabit eğrilikli uzay denir. Sabit eğrilikli Riemann manifolduna da bir uzay form denir [56].

Teorem 1.2: [56] Sabit k eğrilikli uzay için,

$$R(X,Y)Z = k\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right]$$

şeklindedir.

$R_{jkl}{}^{l}$, eğrilik tensörünün, g_{ij}, metrik tensörünün lokal koordinat sistemine göre bileşenleri ise, bu takdirde $R_{ijkl} = g_{im}R_{jkl}{}^{m}$ ile verilen R_{ijkl}, (0,4) tipli Riemann eğrilik tensörünün bileşenleridir.

Eğer M, k sabit eğrilikli uzay ise, bu takdirde

$$R_{ijkl} = k(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \text{ veya } R_{jkl}{}^{i} = k(\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk})$$

şeklindedir [56].

Tanım 1.16: R_{ij} Ricci tensörü olmak üzere, r skalar eğriliği,

$$r = tr_g Ric = Ric_i^i = g^{ij} R_{ij}$$

biçiminde belirlidir [6].

1.8. Kotanjant Demet

Tanım 1.17: M^n **,** n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve $T_p^* M^n$ ise $P \in M^n$ noktasındaki kotanjant uzayı olsun. Yani P noktasındaki $T_p M^n$ tanjant uzayının dual uzayı olsun.

$$T^* M^n = \bigcup_{P \in M^n} T_p^* M^n$$

kümesine kotanjant demet denir.

$T^* M^n$ nin her $\tilde{P}$ noktası için, $\tilde{P} \to P$ karşılık gelerek, $\pi : T^* M^n \to M^n$ demet izdüşümünü belirler. $\pi^{-1}(P)$ kümesi, yani $T_p^* M^n$, $P \in M^n$ üzerinde fibredir (lif) ve M^n baz uzayıdır. Burada doğal olarak $\overset{o}{f} : M_n \to T^* M^n$ kesiti (cross-section) vardır, öyle ki $\overset{o}{f}(P)$, M^n nin her P noktası için $T_p^* M^n$ nin sıfır kovektörüdür. $\overset{o}{f}$ kesiti (cross-section) veya $\overset{o}{f}(M^n)$ görüntüsü sıfır kesit olarak adlandırılır. $\overset{o}{f}(M^n)$ sıfır kesiti M^n baz uzayıyla tanımlıdır ve böylece M^n in kendisi $T^* M^n$ in alt manifoldudur.

M^n baz uzayının $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluklar sistemi ile örtüldüğünü farz edelim. Burada (x^h), U komşuluğunda tanımlı lokal koordinat sistemidir. R^n, R üzerinde n-boyutlu vektör uzayı olmak üzere, $\pi^{-1}(U) \subset T^* M^n$ açık kümesi $U \times R^n$ direk çarpımına diferensiyellenebilir homeomorfiktir. $\tilde{P} \in T_p^* M^n$ $(P \in U)$ noktası (P, p) sıralı çifti ile gösterilir ve $p \in R^n$ kovektörünün bileşenleri $T_P^* M^n$ kotanjant uzayında dx^h doğal çatıya göre $\tilde{P}$ nın (p_i) bileşenleri ile verilir.

U da $P = \pi(\tilde{P})$ nin koordinatları (x^h) ile ifade edilmek üzere, eğer (x^h, p_i) yi $P \in \pi^{-1}(U)$ noktasına karşılık getirirsek, $\pi^{-1}(U) \subset T^* M^n$ açık kümesinde (x^h, p_i) lokal koordinat sistemini buluruz. Bu takdirde $\pi^{-1}(U)$ da (x^h, p_i) koordinatlarına (x^h) den indirgenmiştir deriz veya basitçe $\pi^{-1}(U)$ da indirgenmiş (induced) koordinatlardır deriz.

$P=\pi(\tilde{P})$ noktasını ihtiva eden M^n manifoldunun diğer bir koordinat komşuluğu $\{U', x^{h'}\}$ ise, bu takdirde $\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğu $\tilde{P}$ noktasını ihtiva eder ve $\pi^{-1}(U')$'nde $\tilde{P}$ noktasının indirgenmiş koordinatları $(x^{h'}, p_i)$ ile verilir. Burada

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x) \\ p_{i'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} p_i \end{cases} \tag{1.16}$$

olarak verilir. $x^{h'}(x)$, P noktasındaki $x^1, x^2, ..., x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = p_h$, $x^{\bar{h}'} = p_{h'}$ ile gösterirsek (1.16) denklemi

$$x^{A'} = x^{A'}(x) \tag{1.17}$$

olarak yazılır.

(1.16) denkleminin Jacobiyeni

$$\frac{\partial x^{A'}}{\partial x^A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^i} & 0 \\ \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial^2 x^h}{\partial x^{i'} \partial x^{h'}} p_h & \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{h'}} \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

matrisi ile verilir. (1.16) denkleminin tersi ise

$$\begin{cases} x^h = x^h(x') \\ p_h = \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} p_{h'} \end{cases} \tag{1.19}$$

ya da

$$x^A = x^A\left(x^{'}\right) \tag{1.20}$$

olarak yazılır.

(1.19) denkleminin Jacobiyeni

$$\frac{\partial x^A}{\partial x^{A'}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} & 0 \\ \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \dfrac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^i x^h} p_{h'} & \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

matrisi ile verilir. (1.18) ve (1.21) denklemleri T^*M^n kotanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir.[52]

1.8.1. Kotanjant Demette Temel 1-Form

$\pi^{-1}(U) \in T^*M^n$ de p 1-formunun bileşenleri $(p_i, 0)$ dır. Yani (x^h, p_i) indirgenmiş koordinatlara göre $p = p_i dx^i$ dir. p $1-$formuna, T^*M^n de temel 1-form denir. p 1-temel formunun dp dış diferensiyeli 2-formdur ve $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda

$$dp = dp_i \wedge dx^i$$

olarak yazılır. Bu nedenle

$$dp = \frac{1}{2}\xi_{CB} dx^C \wedge dx^B$$

yazılırsa

$$(\xi_{CB}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j \\ -\delta_i^j & 0 \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

elde edilir. (1.22) matrisi regüler olduğundan $\xi^{BA}\xi_{CB} = \delta_C^A$ olacak şekilde ξ^{BA} ters matrisi vardır ve bu

$$\left(\xi^{BA}\right)=\begin{pmatrix} 0 & -\delta_i^h \\ \delta_h^i & 0 \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

biçimindedir. [52]

1.8.2. (0,s) Tipli Tensör Alanlarının Dikey (Vertical) Liftleri:

M^n manifoldu üzerinde $f : M^n \rightarrow R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\pi : T^* M^n \rightarrow M^n$ izdüşümü olmak üzere

$$^V f = f \circ \pi$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun kotanjant demette dikey lifti denir. Böylece tanımdan $\tilde{P} \in T_p^* M^n$ olmak üzere

$$^V f\left(\tilde{P}\right) = f\left(P\right)$$

elde edilir.

$\omega \in \Im_1^0\left(M^n\right)$ olmak üzere lokal bileşenleri

$$\tilde{\omega}^A = \tilde{\omega}_B \xi^{BA} \tag{1.24}$$

olan $T^* M^n$ kotanjant demetinde vektör alanı elde edilir. bu vektör alanına M^n manifoldunda ω 1-formunun dikey lifti denir ve $^V\omega$ ile gösterilir.

$^V\omega$ dikey liftinin lokal bileşenleri $T^* M^n$ kotanjant demette $\left(x^h, p_i\right)$ indirgenmiş koordinatlara göre

$$^V\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_i \end{pmatrix} \text{ veya } {}^V\omega = \sum_i \omega_i \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \tag{1.25}$$

şeklindedir. Açıkça, her $f \in \Im_0^0\left(M^n\right)$ için $^V\omega\left({}^V f\right) = 0$ olduğundan $^V\omega$ bir dikey vektör alanıdır.

Her bir U da dx^h doğal eş çatısı (coframe) için, $\pi^{-1}(U)$ da (1.24) ve (1.25) ten (x^h, p_i) indirgenmiş koordinatlarına göre

$$^{V}(dx^h) = \frac{\partial}{\partial p_h}$$

yazarız.

$X \in \Im_0^1(M^n)$ olmak üzere, $\pi^{-1}(U)$ da, (x^h, p_i) indirgenmiş koordinatlarına göre

$$\iota X = p_i X^i \tag{1.26}$$

yazarız. Burada X^i, U da X in bileşenleridir.

$S \in \Im_s^1(M^n)$ olsun. U da S 'nin bileşenleri $S_{i_s \ldots i_2 i_1}{}^h$ ise, bu takdirde $\pi^{-1}(U)$ da indirgenmiş koordinatlara göre

$$p_a S_{i_s \ldots i_2 i_1}{}^a dx^{i_s} \otimes dx^{i_2} \otimes dx^{i_1} \tag{1.27}$$

ifadesi $T^*(M^n)$ de (0,s) tipli tensör alanını belirtir.

$S \in \Im_s^1(M^n)$ $(s \geq 1)$ ve T^*M^n de indirgenmiş koordinatlara göre ιS in bileşenleri $\tilde{S}_{B_s \ldots B_2 B_1}$ olsun. Yani

$$\overline{S}_{B_s \ldots B_2}{}^A = \tilde{S}_{B_s \ldots B_2} \xi^{CA} \tag{1.28}$$

şeklindedir. Burada ξ^{CA} ifadesi (1.23) deki gibidir. (1.28) ifadesi T^*M^n de γS in bileşenleridir ve $\Im_{s-1}^1(T^*M^n)$ in elemanıdır. (1.27) ve (1.28) i kullanarak, $\pi^{-1}(U)$ da indirgenmiş koordinatlara göre

$$\gamma S = p_a S_{i_s \ldots i_2 i_1}{}^a dx^{i_s} \otimes \ldots \otimes dx^{i_2} \otimes \frac{\partial}{\partial p_{i_1}} \tag{1.29}$$

yazarız. Burada $S_{i_s \ldots i_2 i_1}{}^{h}$, U da S nin bileşenleridir. [52]

1.8.3. Vektör Alanlarının Tam (Complete) Liftleri:

Önerme 1.1: $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$, $T^*\left(M^n\right)$ de vektör alanları olmak üzere $Z \in \Im_0^1\left(M^n\right)$ için,

$$\tilde{X}\left(\imath Z\right) = \tilde{Y}\left(\imath Z\right) \tag{1.30}$$

ise $\tilde{X} = \tilde{Y}$ dir.

Verilen $X \in \Im_0^1(M^n)$ için, $\imath X = p_i X^i$ kotanjant demette bir fonksiyon tanımlar. X^h, U koordinat komşuluğunda X vektör alanının bileşenleri olmak üzere dış diferensiyel

$$d(\imath X) = p_i(\partial_a X^i)dx^a + X^i dp_i$$

ifadesi $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğuna göre bir 1-form tanımlar. Kotanjant demette bir vektör alanının tam lifti ${}^C X$

$${}^C\tilde{X}^A = \tilde{X}_B \xi^{BA}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\tilde{X}_B$, $d(\imath X)$ in bileşenleridir. O zaman, $\pi^{-1}(U)$ deki (x^h, p_i) indirgenmiş koordinatlara göre tam lift ${}^C X$

$$\begin{pmatrix} X^h \\ -p_i(\partial_h X^i) \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

bileşenlerine sahiptir.

Önerme 1.2: $f \in \Im_0^0\left(M^n\right)$, $X, Y \in \Im_0^1\left(M^n\right)$, $\omega \in \Im_1^0\left(M^n\right)$ ve $F \in \Im_1^1\left(M^n\right)$ olmak üzere

i) ${}^V\omega^V f = 0,$ ii) ${}^V\omega \gamma Z = {}^V\left(\omega(Z)\right),$

iii) $\left(\gamma F\right)^V f = 0,$ iv) $\left(\gamma F\right)\gamma Z = \gamma\left(FZ\right),$

v) ${}^C X^V f = {}^V\left(Xf\right),$ vi) ${}^C X \gamma Z = \gamma\left[X, Z\right]$

özellikleri sağlanır.

Lie çarpımı için aşağıdaki özellikleri ifade edelim:

Önerme 1.3: $X,Y\in \Im_0^1\left(M^n\right)$, $\omega,\theta\in \Im_1^0\left(M^n\right)$ ise bu takdirde

i) $\left[{}^V\omega,{}^V\theta\right]=0$,

ii) $\left[{}^C X,{}^V\omega\right]={}^V\left(L_X\omega\right)$,

iii) $\left[{}^C X,{}^C Y\right]={}^C\left[X,Y\right]$

dir. Burada L_X, X e göre Lie türev operatörüdür. [52]

1.8.4. Kovaryant Türevin Tam Lifti

∇, M^n de bir afin konneksiyon olsun. M^n de X vektör alanına göre ∇_X kovaryant türevinin bileşenleri

$$\nabla_X:\left(X^h, X^j\Gamma_{ji}^h\right)$$

dir. Burada X^h, X in, Γ_{ji}^h, ∇ nın bileşenleridir. ∇_X in ${}^C\left(\nabla_X\right)$ tam liftinin bileşenleri

$$ {}^C\left(\nabla_X\right)=\begin{pmatrix} X^h \\ p_a X^j\Gamma_{jh}^a \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

şeklindedir.

Önerme 1.4: Her $X\in \Im_0^1\left(M^n\right)$ için

$${}^C\left(\nabla_X\right)={}^C X+\gamma\left(\hat{\nabla}X\right)$$

dir. Burada $\hat{\nabla}$, M^n manifoldunda her $X,Y\in \Im_0^1\left(M^n\right)$ için $\hat{\nabla}_X Y=\nabla_Y X+\left[X,Y\right]$ şeklinde tanımlanan afin konneksiyondur.

Önerme 1.5: $\hat{\nabla}X=0$ olması için gerek ve yeter şart ${}^C\left(\nabla_X\right)={}^C X$ olmasıdır. [52]

1.8.5. Vektör Alanlarının Yatay (Horizontal) Liftleri

∇, M^n diferensiyellenebilir manifoldunda bir simetrik afin konneksiyon olsun. ${}^C(\nabla_X)$, ∇_X kovaryant türevinin tam lifti olmak üzere, M^n de X vektör alanı için, T^*M^n de

$${}^H X = {}^C(\nabla_X)$$

yazarız. Burada ${}^H X$ ye, X vektör alanının yatay (horizontal) lifti denir. Önerme 1.4 ten

$${}^H X = {}^C X + \gamma(\nabla_X)$$

elde edilir, çünkü $\hat{\nabla} X = \nabla X$ tir.

T^*M^n de (x^h, p_i) indirgenmiş koordinatlara göre, ${}^H X$ horizontal liftinin lokal bileşenleri

$${}^H X = \begin{pmatrix} X^h \\ p_a \Gamma^a_{hi} X^i \end{pmatrix} \text{ veya } {}^H X = X^h \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_i p_h \Gamma^h_{ij} X^j \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \tag{1.33}$$

şeklindedir.

$f \in \Im^0_0(M^n)$ ve $Z \in \Im^1_0(M^n)$ olmak üzere, X in ${}^H X$ horizontal lifti aşağıdakileri sağlar:

$${}^H X\, {}^V f = {}^V(Xf),$$

$${}^H X \gamma Z = \gamma(\nabla_X Z).$$

Önerme 1.6: $X, Y \in \Im^1_0(M^n)$ ve $\omega \in \Im^0_1(M^n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\text{i) } \left[{}^H X, {}^V \omega\right] = {}^V(\nabla_X \omega), \\ &\text{ii) } \left[{}^H X, {}^H Y\right] = {}^H[X,Y] + \gamma R(X,Y) = {}^H[X,Y] + {}^V\left(pR(X,Y)\right), \\ &\text{iii) } \left[{}^C X, {}^H Y\right] = {}^H[X,Y] + \gamma(L_X \nabla)_Y \end{aligned} \tag{1.34}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada $(L_X \nabla)_Y = \nabla_Y \nabla X + R(X,Y)$ şeklindedir. [52]

1.8.6. Adapte Çatı

∇, M^n diferensiyellenebilir manifoldunda bir simetrik afin konneksiyon olsun. M^n nin $\{U, x^h\}$ koordinat komşuluğunda

$$X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i} \ , \ \theta^{(i)} = dx^i \ , \ i = 1, \ldots, n$$

yazarız. (1.25) ve (1.33) den, $\pi^{-1}(U)$ da indirgenmiş koordinatlara göre ${}^H X_{(i)}$ ve ${}^V\theta^{(i)}$ nin bileşenleri

$$\tilde{e}_{(i)} = {}^H X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_h p_a \Gamma^a_{hi} \frac{\partial}{\partial x^{\bar{h}}}, \tag{1.35}$$

$$\tilde{e}_{(\bar{i})} = {}^V\theta^{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \tag{1.36}$$

şeklindedir. $\pi^{-1}(U)$ da $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\} = \{\tilde{e}_{(i)}, \tilde{e}_{(\bar{i})}\} = \{{}^H X_{(i)}, {}^V\theta^{(i)}\}$ ya ∇ afin konneksiyonu için adapte çatı denir.

(1.25), (1.33), (1.35) ve (1.36) kullanılarak $X \in \Im^1_0(M^n)$ in ${}^H X$ lifti ve $\omega \in \Im^0_1(M^n)$ nin ${}^V\omega$ lifti, $\{\tilde{e}_{(\beta)}\}$ adapte çatıya göre

$${}^H X = X^i \tilde{e}_{(i)} \quad \text{veya} \quad {}^H X = \left({}^H X^\alpha\right) = \begin{pmatrix} X^i \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.37}$$

$${}^V\omega = \sum_i \omega_i \tilde{e}_{(\bar{i})} \quad \text{veya} \quad {}^V\omega = \left({}^V\omega^\alpha\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_i \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

şeklindedir. Burada X^i ve ω_i sırasıyla $X \in \Im^1_0(\mathrm{M}^n)$ ve $\omega \in \Im^0_1(\mathrm{M}^n)$ nın lokal bileşenleridir. [52]

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

Bu bölümde $\left(M^n, g\right)$ Riemann manifoldunun T^*M^n kotanjant demetinde natural metrik sınıfından olan Sasaki ve Cheeger-Gromoll metriklerini inceleyeceğiz.

2.1. Natural Metrik

Her $x \in M^n$ için, $\pi^{-1}(x) = T_x^*M^n$ kotanjant uzayında $g^{-1} = \left(g^{ij}\right)$ skaler çarpımı her $\omega, \theta \in \Im_1^0\left(M^n\right)$ olmak üzere

$$g^{-1}(\omega, \theta) = g^{ij}\omega_i\theta_j$$

şeklinde tanımlanır [26].

Tanım 2.1: M^n, g metrikli Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y \in \Im_0^1\left(M^n\right)$ ve $\omega, \theta \in \Im_1^0\left(M^n\right)$ için, T^*M^n kotanjant demette $\bar{g}$ Riemann metriği

i) $\bar{g}\left({}^H X, {}^H Y\right) = g(X, Y)$,

ii) $\bar{g}\left({}^H X, {}^V \omega\right) = 0$

şartlarını sağlıyorsa, M^n de g Riemann metriğine göre naturaldir denir.

T^*M^n de $\bar{g}$ natural metriğinin $\bar{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu için aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 2.1: [3] M^n, g metrikli Rieman manifoldu ve T^*M^n, M^n in kotanjant demeti olsun. T^*M^n'de $\bar{g}$ Riemann metriği, M^n de g metriğine göre natural ise bu takdirde her $X, Y \in \Im_0^1\left(M^n\right)$ve $\omega, \theta \in \Im_1^0\left(M^n\right)$ için $\bar{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu aşağıdakileri sağlar:

i) $\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{{}^H X}{}^H Y, {}^H Z\right) = g\left(\nabla_X Y, Z\right)$,

ii) $\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{{}^H X}{}^H Y, {}^V \omega\right) = \dfrac{1}{2}\bar{g}\left({}^V \omega, {}^V\left(pR(X, Y)\right)\right)$,

iii) $\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{{}^H X}{}^V \omega, {}^H Z\right) = \dfrac{1}{2}\bar{g}\left({}^V\left(pR(Z, X)\right), {}^V \omega\right)$,

iv) $\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{{}^HX}{}^V\omega,{}^V\theta\right)=\frac{1}{2}\left({}^HX\left(\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)\right)-\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V\left(\nabla_X\theta\right)\right)+\bar{g}\left({}^V\theta,{}^V\left(\nabla_X\omega\right)\right)\right),$

v) $\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{{}^V\omega}{}^HY,{}^HZ\right)=-\frac{1}{2}\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V\left(pR(Y,Z)\right)\right),$ (2.1)

vi) $\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{{}^V\omega}{}^HY,{}^V\theta\right)=\frac{1}{2}\left({}^HY\left(\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)\right)-\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V\left(\nabla_Y\theta\right)\right)-\bar{g}\left({}^V\theta,{}^V\left(\nabla_Y\omega\right)\right)\right),$

vii) $\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{{}^V\omega}{}^V\theta,{}^HZ\right)=\frac{1}{2}\left(-{}^HZ\left(\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)\right)+\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V\left(\nabla_Z\theta\right)\right)+\bar{g}\left({}^V\theta,{}^V\left(\nabla_Z\omega\right)\right)\right),$

viii) $\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{{}^V\omega}{}^V\theta,{}^V\xi\right)=\frac{1}{2}\left({}^V\omega\left(\bar{g}\left({}^V\theta,{}^V\xi\right)\right)+{}^V\theta\left(\bar{g}\left({}^V\xi,{}^V\omega\right)\right)-{}^V\xi\left(\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)\right)\right).$

İspat: Her $X,Y,Z\in\Im_0^1\left(M^n\right)$ ve $i,j,k\in\{H,V\}$ olmak üzere, $\bar{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu için Koszul formülü

$$2\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{{}^iX}{}^jY,{}^kZ\right)={}^iX\left(\bar{g}\left({}^jY,{}^kZ\right)\right)+{}^jY\left(\bar{g}\left({}^kZ,{}^iX\right)\right)-{}^kZ\left(\bar{g}\left({}^iX,{}^jY\right)\right)$$
$$-\bar{g}\left({}^iX,\left[{}^jY,{}^kZ\right]\right)+\bar{g}\left({}^jY,\left[{}^kZ,{}^iX\right]\right)+\bar{g}\left({}^kZ,\left[{}^iX,{}^jY\right]\right)$$

şeklindedir [15]. T^*M^n de eğer $i,j,k\in\{V\}$ ise, X,Y,Z yerine $\omega,\theta,\xi\in\Im_1^0\left(M^n\right)$ yazarız. Koszul formülü, Önerme1.3 i), Önerme 1.6 i)-ii) ve Tanım 2.1 kullanılarak ispat aşağıdaki gibi yapılır.

i) $$2\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{{}^HX}{}^HY,{}^HZ\right)={}^HX\left(\bar{g}\left({}^HY,{}^HZ\right)\right)+{}^HY\left(\bar{g}\left({}^HZ,{}^HX\right)\right)-{}^HZ\left(\bar{g}\left({}^HX,{}^HY\right)\right)$$
$$-\bar{g}\left({}^HX,\left[{}^HY,{}^HZ\right]\right)+\bar{g}\left({}^HY,\left[{}^HZ,{}^HX\right]\right)+\bar{g}\left({}^HZ,\left[{}^HX,{}^HY\right]\right)$$
$$={}^HX\left(\bar{g}\left({}^HY,{}^HZ\right)\right)+{}^HY\left(\bar{g}\left({}^HZ,{}^HX\right)\right)-{}^HZ\left(\bar{g}\left({}^HX,{}^HY\right)\right)$$
$$-\bar{g}\left({}^HX,\left[{}^HY,{}^HZ\right]\right)+\bar{g}\left({}^HY,\left[{}^HZ,{}^HX\right]\right)+\bar{g}\left({}^HZ,\left[{}^HX,{}^HY\right]\right)$$
$$=2g\left(\nabla_XY,Z\right).$$

ii) $$2\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{{}^HX}{}^HY,{}^V\omega\right)={}^HX\left(\bar{g}\left({}^HY,{}^V\omega\right)\right)+{}^HY\left(\bar{g}\left({}^V\omega,{}^HX\right)\right)-{}^V\omega\left(\bar{g}\left({}^HX,{}^HY\right)\right)$$
$$-\bar{g}\left({}^HX,\left[{}^HY,{}^V\omega\right]\right)+\bar{g}\left({}^HY,\left[{}^V\omega,{}^HX\right]\right)+\bar{g}\left({}^V\omega,\left[{}^HX,{}^HY\right]\right)$$
$$=-{}^V\omega^V\left(g\left(X,Y\right)\right)-\bar{g}\left({}^HX,{}^V\left(\nabla_Y\omega\right)\right)$$
$$+\bar{g}\left({}^HY,{}^V\left(-\nabla_X\omega\right)\right)+\bar{g}\left({}^V\omega,{}^H\left[X,Y\right]+{}^V\left(pR\left(X,Y\right)\right)\right)$$
$$=\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V\left(pR\left(X,Y\right)\right)\right).$$

iii) ve v), ii) ye benzer şekilde hesaplanır.

iv) $2\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{{}^H X}{}^V\omega,{}^V\theta\right)={}^H X\left(\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)\right)+{}^V\omega\left(\bar{g}\left({}^V\theta,{}^H X\right)\right)-{}^V\theta\left(\bar{g}\left({}^H X,{}^V\omega\right)\right)$

$$-\bar{g}\left({}^H X,\left[{}^V\omega,{}^V\theta\right]\right)+\bar{g}\left({}^V\omega,\left[{}^V\theta,{}^H X\right]\right)+\bar{g}\left({}^V\theta,\left[{}^H X,{}^V\omega\right]\right)$$

$$={}^H X\left(\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)\right)+\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V(-\nabla_X\theta)\right)+\bar{g}\left({}^V\theta,{}^V(\nabla_X\omega)\right)$$

$$={}^H X\left(\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)\right)-\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V(\nabla_X\theta)\right)+\bar{g}\left({}^V\theta,{}^V(\nabla_X\omega)\right).$$

vi) ve vii) ,iv) e benzer şekilde hesaplanır.

viii) Bu kısım ise iki kovektör alanının dikey (vertikal) liftinin, Lie türevinin sıfır olması kullanılarak elde edilir. Yani,

$$2\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{{}^V\omega}{}^V\theta,{}^V\xi\right)={}^V\omega\left(\bar{g}\left({}^V\theta,{}^V\xi\right)\right)+{}^V\theta\left(\bar{g}\left({}^V\xi,{}^V\omega\right)\right)-{}^V\xi\left(\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)\right)$$

$$-\bar{g}\left({}^V\omega,\left[{}^V\theta,{}^V\xi\right]\right)+\bar{g}\left({}^V\theta,\left[{}^V\xi,{}^V\omega\right]\right)+\bar{g}\left({}^V\xi,\left[{}^V\omega,{}^V\theta\right]\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left({}^V\omega\left(\bar{g}\left({}^V\theta,{}^V\xi\right)\right)+{}^V\theta\left(\bar{g}\left({}^V\xi,{}^V\omega\right)\right)-{}^V\xi\left(\bar{g}\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)\right)\right). \qquad \square$$

Sonuç 2.1: M^n, g metrikli Riemann manifoldu ve T^*M^n de M^n in $\bar{g}$ natural metrikli kotanjant demeti olsun. Bu takdirde $\bar{\nabla}$, Levi-Civita konneksiyonu, her $X,Y\in\Im_0^1\left(M^n\right)$ için

$$\bar{\nabla}_{{}^H X}{}^H Y={}^H(\nabla_X Y)+\frac{1}{2}{}^V\left(pR(X,Y)\right) \tag{2.2}$$

şeklindedir [3].

İspat: Teorem 2.1 in (i) ve (ii) kısmından elde edilir.

2.2. T^*M^n de ${}^S g$ Sasaki Metriği

Bu kısımda $\left(M^n,g\right)$ Riemann manifoldunun T^*M^n kotanjant demetinde ${}^S g$ Sasaki metriği ve bu metriğin diferensiyel geometrisi incelenmiştir. Adapte çatıda ${}^S g$ metriğinin Levi-Civita konneksiyonunun bileşenleri ve bu konneksiyona ait Riemann eğrilik tensörü hesaplanmıştır. Ayrıca $\left(M^n,g\right)$ ve $\left(T^*M^n,{}^S g\right)$ manifoldlarının geometrik özellikleri arasında yeni bağlantılar da elde edilmiştir.

Tanım 2.2: ([4,26]) (M^n, g) Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y \in \Im_0^1(M^n)$ ve $\omega, \theta \in \Im_1^0(M^n)$ için, T^*M^n de ${}^S g$ Sasaki metriği aşağıdaki üç eşitlikle tanımlanmaktadır:

$$ {}^S g\left({}^V\omega, {}^V\theta\right) = {}^V\left(g^{-1}(\omega,\theta)\right) = g^{-1}(\omega,\theta)\circ\pi, \tag{2.3} $$

$$ {}^S g\left({}^V\omega, {}^H Y\right) = 0, \tag{2.4} $$

$$ {}^S g\left({}^H X, {}^H Y\right) = {}^V\left(g(X,Y)\right) = g(X,Y)\circ\pi \ . \tag{2.5} $$

T^*M^n de (0,2) tipli her tensör , ${}^H X$ ve ${}^V\omega$ tipli vektör alanları vasıtasıyla tamamen tanımlanır [52].

(1.31) ve (1.32) den, $X \in \Im_0^1(M^n)$ nin ${}^C X$ tam lifti için

$$ {}^C X = {}^H X - {}^V\left(p(\nabla X)\right), \tag{2.6} $$

eşitliğini göz önüne alalım. Burada $p(\nabla X) = p_i\left(\nabla_h X^i\right)dx^h$ şeklindedir.

(2.3), (2.4), (2.5) ve (2.6) yı kullanarak

$$ {}^S g\left({}^C X, {}^C Y\right) = {}^V\left(g(X,Y)\right) + {}^V\left(g^{-1}\left(p(\nabla X), p(\nabla Y)\right)\right), \tag{2.7} $$

elde ederiz. $g^{-1}\left(p(\nabla X), p(\nabla Y)\right) = g^{ij}\left(p_l \nabla_i X^l\right)\left(p_k \nabla_j Y^k\right)$ şeklindedir [4].

${}^S g \in \Im_2^0(T^*M^n)$ tensör alanı ${}^C X$ ve ${}^C Y$ tipli vektör alanları vasıtasıyla da tanımlanabilmektedir [52]. Dolayısıyla (2.7) şartı, T^*M^n de ${}^S g$ Sasaki metriği için alternatif bir tanımdır.

(1.35) ve (1.36) da verilmiş olan $\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\} = \left\{\tilde{e}_{(i)}, \tilde{e}_{(\bar{i})}\right\} = \left\{{}^H X_{(i)}, {}^V\theta^{(i)}\right\}$ adapte çatısı kullanılarak

$$ {}^S g_{\bar{i}\,\bar{j}} = {}^S g\left(\tilde{e}_{(\bar{i})}, \tilde{e}_{(\bar{j})}\right) = {}^V\left(g^{-1}\left(dx^i, dx^j\right)\right) = g^{ij}, $$

$${}^{S}g_{\bar{i}\,j} = {}^{S}g\left(\tilde{e}_{(\bar{i})}, \tilde{e}_{(j)}\right) = 0,$$

$${}^{S}g_{i\,j} = {}^{S}g\left(\tilde{e}_{(i)}, \tilde{e}_{(j)}\right) = {}^{V}\left(g\left(\partial_i, \partial_j\right)\right) = g_{i\,j}\,,$$

elde edilir. Yani $\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\}$ adapte çatısına göre ${}^{S}g$ Sasaki metriğinin bileşenlerinin

$$ {}^{S}g = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & g^{ij} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

olduğu elde edilir.

2.2.1. ${}^{S}g$ in Levi-Civita Konneksiyonu

$\pi^{-1}(U)$ da $\tilde{\varpi}^{\alpha}$ lokal 1-formlarını

$\tilde{\varpi}^{\alpha} = \bar{A}^{\alpha}{}_{B}\, dx^{B}\,,$

şeklinde tanımlarız. Burada

$$ A^{-1} = \left(\bar{A}^{\alpha}{}_{B}\right) = \begin{pmatrix} \bar{A}^{i}{}_{j} & \bar{A}^{i}{}_{\bar{j}} \\ \bar{A}^{\bar{i}}{}_{j} & \bar{A}^{\bar{i}}{}_{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^{i}_{j} & 0 \\ -p_a\Gamma^{a}_{ij} & \delta^{j}_{i} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

şeklindedir. (2.9) matrisi $\tilde{e}_{\beta} = A_{\beta}{}^{A}\partial_{A}$ ((1.35) ve (1.36) da verilmiştir) dönüşümünü sağlayan

$$ A = \left(A_{\beta}{}^{A}\right) = \begin{pmatrix} A_{j}{}^{i} & A_{\bar{j}}{}^{i} \\ A_{j}{}^{\bar{i}} & A_{\bar{j}}{}^{\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^{i}_{j} & 0 \\ p_a\Gamma^{a}_{ij} & \delta^{j}_{i} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

matrisinin tersidir. $\left\{\tilde{\varpi}^{\alpha}\right\}$ kümesi $\left\{\tilde{e}_{(\beta)}\right\}$ adapte çatısının dual eş çatısı(coframe)dır. Yani $\tilde{\varpi}^{\alpha}\left(\tilde{e}_{\beta}\right) = \bar{A}^{\alpha}{}_{B}A_{\beta}{}^{B} = \delta^{\alpha}_{\beta}$ şeklindedir.

$\left\{\tilde{e}_{\beta}\right\}$ adapte çatısı non-holonomik olduğundan,

$\left[\tilde{e}_{\gamma}, \tilde{e}_{\beta}\right] = \Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha}\tilde{e}_{\alpha}$

elde edilir. Burada $\Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha} = \left(\tilde{e}_{\gamma} A_{\beta}{}^{A} - \tilde{e}_{\beta} A_{\gamma}{}^{A}\right) \bar{A}^{\alpha}{}_{A}$ şeklindedir.

$\Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha}$ non- holonomik objelerinin sıfır olmayan bileşenleri

$$\begin{cases} \Omega_{l\bar{j}}{}^{\bar{i}} = -\Omega_{\bar{j}l}{}^{\bar{i}} = -\Gamma^{j}_{li}, \\ \Omega_{lj}{}^{\bar{i}} = p_a R_{lji}{}^{a} \end{cases} \tag{2.11}$$

şeklindedir. Burada $R_{lji}{}^{a}$, ∇_g nin R eğrilik tensörünün lokal bileşenleridir [4].

${}^{S}\nabla$, ${}^{S}g$ Sasaki metriğiyle belirlenen Levi – Civita konneksiyonu olsun. ${}^{S}\nabla_{\tilde{e}_{\gamma}} \tilde{e}_{\beta} = {}^{S}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} \tilde{e}_{\alpha}$ eşitliğini kullanalım. ${}^{S}\nabla_{X} Y - {}^{S}\nabla_{Y} X = [X, Y]$, $\forall X, Y \in \Im^{1}_{0}\left(T^{*}M^{n}\right)$ eşitliğinden

$${}^{S}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} - {}^{S}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha} \tag{2.12}$$

yazarız.

$\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\}$ adapte çatısına göre $\left({}^{S}\nabla_{X}\, {}^{S}g\right)(Y, Z) = 0$ denkleminden

$$\tilde{e}_{\delta}\, {}^{S}g_{\gamma\beta} - {}^{S}\Gamma^{\varepsilon}_{\delta\gamma}\, {}^{S}g_{\varepsilon\beta} - {}^{S}\Gamma^{\varepsilon}_{\delta\beta}\, {}^{S}g_{\gamma\varepsilon} = 0 \tag{2.13}$$

elde edilir.

(2.12) ve (2.13) ten

$${}^{S}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\, {}^{S}g^{\alpha\varepsilon}\left(\tilde{e}_{\gamma}\, {}^{S}g_{\varepsilon\beta} + \tilde{e}_{\beta}\, {}^{S}g_{\gamma\varepsilon} - \tilde{e}_{\varepsilon}\, {}^{S}g_{\gamma\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(\Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha} + \Omega^{\alpha}_{.\,\gamma\beta} + \Omega^{\alpha}_{.\,\beta\gamma}\right) \tag{2.14}$$

bulunur, burada $\Omega^{\alpha}_{.\,\gamma\beta} = {}^{S}g^{\alpha\varepsilon}\, {}^{S}g_{\delta\beta} \Omega_{\varepsilon\gamma}{}^{\delta}$ ve $\left({}^{S}g\right)^{-1} = \left({}^{S}g^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} g^{ij} & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix}$ şeklindedir.

(1.35), (1.36), (2.8), (2.11) i göz önüne alarak, $\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\}$ adapte çatısına göre ${}^{S}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ nın bileşenlerini

$$\begin{cases} {}^S\Gamma^h_{ji} = \Gamma^h_{ji} \ , & {}^S\Gamma^h_{\bar{j}\bar{i}} = {}^S\Gamma^{\bar{h}}_{\bar{j}i} = {}^S\Gamma^{\bar{h}}_{\bar{j}\bar{i}} = 0 \ , \\ {}^S\Gamma^h_{j\bar{i}} = \dfrac{1}{2} p_m R^{h\ \ im}_{.\ j.} \ , & {}^S\Gamma^h_{\bar{j}i} = \dfrac{1}{2} p_m R^{h\ \ jm}_{.\ i.} \ , \\ {}^S\Gamma^{\bar{h}}_{ji} = \dfrac{1}{2} p_m R_{jih}{}^m \ , & {}^S\Gamma^{\bar{h}}_{j\bar{i}} = -\Gamma^i_{jh} \end{cases} \tag{2.15}$$

şeklinde buluruz. Burada $R^{h\ \ im}_{.\ j.} = g^{hl} g^{ki} R_{ljk}{}^m$ şeklindedir [4].

$\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Im^1_0\left(T^*M^n\right)$ ve $\tilde{X} = \tilde{X}^\alpha \tilde{e}_\alpha$, $\tilde{Y} = \tilde{Y}^\beta \tilde{e}_\beta$ olsun . $\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\}$ adapte çatısına göre, $\tilde{Y}$ boyunca ${}^S\nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X}$ kovaryant türevinin bileşenleri

$${}^S\nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X}^\alpha = \tilde{Y}^\gamma \tilde{e}_\gamma \tilde{X}^\alpha + {}^S\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \tilde{X}^\beta \tilde{Y}^\gamma , \tag{2.16}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2: [27] $\left(M^n, g\right)$ Riemann manifoldu olsun ve ${}^S\nabla$, ${}^Sg$ Sasaki metriğiyle donatılmış T^*M^n kotanjant demetinin Levi – Civita konneksiyonu olsun. Bu takdirde, her $X, Y \in \Im^1_0\left(M^n\right)$ ve $\omega, \theta \in \Im^0_1\left(M^n\right)$ için, ${}^S\nabla$ aşağıdakileri sağlar:

i) ${}^S\nabla_{{}^V\omega} {}^V\theta = 0$,

ii) ${}^S\nabla_{{}^V\omega} {}^HY = \dfrac{1}{2} {}^H\left(R(\tilde{p}, \tilde{\omega})Y\right)$,

iii) ${}^S\nabla_{{}^HX} {}^V\theta = {}^V\left(\nabla_X \theta\right) + \dfrac{1}{2} {}^H\left(R(\tilde{p}, \tilde{\theta})X\right)$,

iv) ${}^S\nabla_{{}^HX} {}^HY = {}^H\left(\nabla_X Y\right) + \dfrac{1}{2} {}^V\left(pR\left(X, Y\right)\right)$.

Burada $\tilde{\omega} = g^{-1} \circ \omega \in \Im^1_0\left(M^n\right)$, $\tilde{\theta} = g^{-1} \circ \theta \in \Im^1_0\left(M^n\right)$ ve $\tilde{p} = g^{-1} \circ p \in \Im^1_0\left(M^n\right)$ şeklindedir.

İspat: (1.35), (1.36), (1.37), (1.38), (2.15) ve (2.16) kullanılarak,

i) ${}^S\nabla_{{}^V\omega} {}^V\theta = {}^V\omega^\alpha \left(e_\alpha {}^V\theta^\beta + {}^S\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} {}^V\theta^\gamma\right)$

$$= {}^V\omega^i \left(e_i {}^V\theta^\beta + {}^S\Gamma^\beta_{ik} {}^V\theta^k + {}^S\Gamma^\beta_{i\bar{k}} {}^V\theta^{\bar{k}}\right) + {}^V\omega^{\bar{i}} \left(e_{\bar{i}} {}^V\theta^\beta + {}^S\Gamma^\beta_{\bar{i}k} {}^V\theta^k + {}^S\Gamma^\beta_{\bar{i}\bar{k}} {}^V\theta^{\bar{k}}\right)$$

$$= {}^{V}\omega^{i}\left(e_{i}\,{}^{V}\theta^{j} + {}^{S}\Gamma^{j}_{ik}\,{}^{V}\theta^{k} + {}^{S}\Gamma^{j}_{i\bar{k}}\,{}^{V}\theta^{\bar{k}}\right) + {}^{V}\omega^{\bar{i}}\left(e_{\bar{i}}\,{}^{V}\theta^{j} + {}^{S}\Gamma^{j}_{\bar{i}k}\,{}^{V}\theta^{k} + {}^{S}\Gamma^{j}_{\bar{i}\bar{k}}\,{}^{V}\theta^{\bar{k}}\right)$$

$$+ {}^{V}\omega^{i}\left(e_{i}\,{}^{V}\theta^{\bar{j}} + {}^{S}\Gamma^{\bar{j}}_{ik}\,{}^{V}\theta^{k} + {}^{S}\Gamma^{\bar{j}}_{i\bar{k}}\,{}^{V}\theta^{\bar{k}}\right) + {}^{V}\omega^{\bar{i}}\left(e_{\bar{i}}\,{}^{V}\theta^{\bar{j}} + {}^{S}\Gamma^{\bar{j}}_{\bar{i}k}\,{}^{V}\theta^{k} + {}^{S}\Gamma^{\bar{j}}_{\bar{i}\bar{k}}\,{}^{V}\theta^{\bar{k}}\right)$$

$$= 0,$$

ii) $${}^{S}\nabla_{{}^{V}\omega}\,{}^{H}Y = {}^{V}\omega^{\alpha}\left(e_{\alpha}\,{}^{H}Y^{\beta} + {}^{S}\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}\,{}^{H}Y^{\gamma}\right)$$

$$= {}^{V}\omega^{i}\left(e_{i}\,{}^{H}Y^{\beta} + {}^{S}\Gamma^{\beta}_{ik}\,{}^{H}Y^{k} + {}^{S}\Gamma^{\beta}_{i\bar{k}}\,{}^{H}Y^{\bar{k}}\right) + {}^{V}\omega^{\bar{i}}\left(e_{\bar{i}}\,{}^{H}Y^{\beta} + {}^{S}\Gamma^{\beta}_{\bar{i}k}\,{}^{H}Y^{k} + {}^{S}\Gamma^{\beta}_{\bar{i}\bar{k}}\,{}^{H}Y^{\bar{k}}\right)$$

$$= {}^{V}\omega^{\bar{i}}\left(e_{\bar{i}}\,{}^{H}Y^{j} + {}^{S}\Gamma^{j}_{\bar{i}k}\,{}^{H}Y^{k} + {}^{S}\Gamma^{j}_{\bar{i}\bar{k}}\,{}^{H}Y^{\bar{k}}\right) + {}^{V}\omega^{\bar{i}}\left(e_{\bar{i}}\,{}^{H}Y^{\bar{j}} + {}^{S}\Gamma^{\bar{j}}_{\bar{i}k}\,{}^{H}Y^{k} + {}^{S}\Gamma^{\bar{j}}_{\bar{i}\bar{k}}\,{}^{H}Y^{\bar{k}}\right)$$

$$= \omega_{i}\left(e_{\bar{i}}Y^{j} + \frac{1}{2}p_{m}R^{j\;\;im}_{.\;k.}Y^{k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}p_{m}g^{il}g^{js}R_{skl}{}^{m}Y^{k}\omega_{i}$$

$$= \frac{1}{2}{}^{H}\left(R(\tilde{p},\tilde{\omega})Y)\right),$$

iii) $${}^{S}\nabla_{{}^{H}X}\,{}^{V}\theta = {}^{H}X^{\alpha}\left(e_{\alpha}\,{}^{V}\theta^{\beta} + {}^{S}\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}\,{}^{V}\theta^{\gamma}\right)$$

$$= {}^{H}X^{i}\left(e_{i}\,{}^{V}\theta^{\beta} + {}^{S}\Gamma^{\beta}_{ik}\,{}^{V}\theta^{k} + {}^{S}\Gamma^{\beta}_{i\bar{k}}\,{}^{V}\theta^{\bar{k}}\right) + {}^{H}X^{\bar{i}}\left(e_{\bar{i}}\,{}^{V}\theta^{\beta} + {}^{S}\Gamma^{\beta}_{\bar{i}k}\,{}^{V}\theta^{k} + {}^{S}\Gamma^{\beta}_{\bar{i}\bar{k}}\,{}^{V}\theta^{\bar{k}}\right)$$

$$= {}^{H}X^{i}\left(e_{i}\,{}^{V}\theta^{j} + {}^{S}\Gamma^{j}_{ik}\,{}^{V}\theta^{k} + {}^{S}\Gamma^{j}_{i\bar{k}}\,{}^{V}\theta^{\bar{k}}\right) + {}^{H}X^{i}\left(e_{i}\,{}^{V}\theta^{\bar{j}} + {}^{S}\Gamma^{\bar{j}}_{ik}\,{}^{V}\theta^{k} + {}^{S}\Gamma^{\bar{j}}_{i\bar{k}}\,{}^{V}\theta^{\bar{k}}\right)$$

$$= X^{i}\left(\frac{1}{2}p_{m}R^{j\;\;km}_{.\;i.}\theta_{k}\right) + X^{i}\left(e_{i}\theta_{j} - \Gamma^{k}_{ij}\theta_{k}\right)$$

$$= {}^{V}\left(\nabla_{X}\theta\right) + \frac{1}{2}{}^{H}\left(R(\tilde{p},\tilde{\theta})X\right),$$

iv) Sonuç 2.1'in direkt sonucudur. □

2.2.2. ${}^{S}\nabla$ in Eğrilik Tensörü

${}^{S}R$, ${}^{S}\nabla$ in eğrilik tensörü olsun. Bu takdirde

$${}^{S}R\left(\tilde{e}_{(\alpha)},\tilde{e}_{(\beta)}\right)\tilde{e}_{(\gamma)} = {}^{S}\nabla_{\alpha}\,{}^{S}\nabla_{\beta}\tilde{e}_{(\gamma)} - {}^{S}\nabla_{\beta}\,{}^{S}\nabla_{\alpha}\tilde{e}_{(\gamma)} - \Omega_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon}\,{}^{S}\nabla_{\varepsilon}\tilde{e}_{(\gamma)},$$

şeklindedir. Burada ${}^{S}\nabla_{\alpha} = {}^{S}\nabla_{\tilde{e}_{(\alpha)}}$ olarak alınmıştır. $\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\}$ adapte çatısına göre ${}^{S}R$ eğrilik tensörünün bileşenleri

$${}^{s}R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma} = \tilde{e}_{\alpha}\,{}^{s}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma} - \tilde{e}_{\beta}\,{}^{s}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} + {}^{s}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\varepsilon}\,{}^{s}\Gamma^{\varepsilon}_{\beta\gamma} - {}^{s}\Gamma^{\sigma}_{\beta\varepsilon}\,{}^{s}\Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\gamma} - \Omega_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon}\,{}^{s}\Gamma^{\sigma}_{\varepsilon\gamma}$$

şeklinde elde edilir [52]. (2.11) ve (2.15) i göz önüne alarak ,

$$
\begin{aligned}
{}^{s}R_{ki\,j}{}^{l} &= R_{ki\,j}{}^{l} - \frac{1}{2} p_m p_a R_{kit}{}^{a} R^{l\ \ tm}_{.\ j.} + \frac{1}{4} p_m p_a \left(R^{l\ \ tm}_{.\ k.} R_{ijt}{}^{a} - R^{l\ \ tm}_{.\ i.} R_{kjt}{}^{a} \right), \\
{}^{s}R_{k\bar{i}\,j}{}^{l} &= \frac{1}{2} p_m \nabla_k R^{l\ \ im}_{.\ j.}, \\
{}^{s}R_{ki\bar{j}}{}^{l} &= \frac{1}{2} p_m \left(\nabla_k R^{l\ \ jm}_{.\ i.} - \nabla_i R^{l\ \ jm}_{.\ k.} \right), \\
{}^{s}R_{ki\,j}{}^{\bar{l}} &= \frac{1}{2} p_m \left(\nabla_k R_{ijl}{}^{m} - \nabla_i R_{kjl}{}^{m} \right), \\
{}^{s}R_{ki\bar{j}}{}^{\bar{l}} &= R_{ikl}{}^{j} - \frac{1}{4} p_m p_a \left(R_{ktl}{}^{m} R^{t\ \ ja}_{.\ i.} - R_{itl}{}^{m} R^{t\ \ ja}_{.\ k.} \right), \\
{}^{s}R_{\bar{k}i\,j}{}^{\bar{l}} &= \frac{1}{2} R_{ijl}{}^{k} - \frac{1}{4} p_m p_a R_{itl}{}^{m} R^{t\ \ ka}_{.\ j.}, \\
{}^{s}R_{\bar{k}\bar{i}\,j}{}^{l} &= R^{l\ \ im}_{.\ j.} + \frac{1}{4} p_m p_a \left(R^{l\ \ km}_{.\ t.} R^{t\ \ ia}_{.\ j.} - R^{l\ \ im}_{.\ j.} R^{l\ \ ka}_{.\ j.} \right), \\
{}^{s}R_{\bar{k}i\bar{j}}{}^{l} &= \frac{1}{2} R^{l\ \ jk}_{.\ i.} + \frac{1}{4} p_m p_a R^{l\ \ km}_{.\ t.} R^{t\ \ ja}_{.\ i.}, \\
{}^{s}R_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}}{}^{\bar{l}} &= {}^{s}R_{k\bar{i}\bar{j}}{}^{\bar{l}} = {}^{s}R_{\bar{k}\bar{i}\,j}{}^{\bar{l}} = {}^{s}R_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}}{}^{l} = {}^{s}R_{\bar{k}i\bar{j}}{}^{\bar{l}} = 0
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

buluruz [28].

Teorem 2.3: [28] g metriğiyle M^n Riemann manifoldu ve ${}^{S}g$ metriğiyle $T^{*}M^{n}$ kotanjant demeti verilsin. Bu takdirde $T^{*}M^{n}$ nin flat olması için gerek ve yeter şart M^n in flat olmasıdır.

İspat : İspat (2.17) numaralı eşitliğin direkt sonucudur, öyle ki $R=0$ olması ${}^{S}R=0$ olması anlamına gelir. Eğer ${}^{S}R=0$ olduğunu varsayarsak, ilk eşitlikte $\left(x^i, p_i\right)=\left(x^i, 0\right)\in T^{*}M^{n}$ noktasından

$$
\begin{aligned}
{}^{S}R_{kij}{}^{l}\Big|_{\left(x^i,0\right)} &= \left(R_{ki\,j}{}^{l} - \frac{1}{2} p_m p_a R_{kit}{}^{a} R^{l\ \ tm}_{.\ j.} + \frac{1}{4} p_m p_a \left(R^{l\ \ tm}_{.\ k.} R_{ijt}{}^{a} - R^{l\ \ tm}_{.\ i.} R_{kjt}{}^{a} \right) \right)\Bigg|_{\left(x^i,0\right)} \\
&= R_{kij}{}^{l}\left(x^i\right) = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Teorem 2.4: [28] g metriğiyle M^n Riemann manifoldu ve ${}^{S}g$ metriğiyle $T^{*}M^{n}$ kotanjant demeti verilsin. r, g nin skalar eğriliği ve ${}^{S}r$ de ${}^{S}g$ in skalar eğriliği olsun. Bu takdirde ${}^{S}r$ skalar eğriliği:

$$^{S}r = r - \frac{1}{4}\left|pR\right|^2$$

dir.

İspat: $\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\}$ adapte çatısına göre $^{S}R_{\alpha\beta} = {}^{S}R_{\sigma\alpha\beta}{}^{\sigma}$ Ricci tensor alanının bileşenleri ise, bu takdirde;

$$\begin{aligned}
^{S}r &= {}^{S}g^{\alpha\beta}\,{}^{S}R_{\alpha\beta} = {}^{S}g^{ij}\,{}^{S}R_{ij} + {}^{S}g^{\bar{i}\bar{j}}\,{}^{S}R_{\bar{i}\bar{j}} \\
&= g^{ij}\left(R_{ij} - \frac{1}{2}p_m p_a R_{kit}{}^{a}R_{.\,j.}^{k\;tm} - \frac{1}{4}p_m p_a R_{itk}{}^{m}R_{.\,j.}^{t\;ka}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}p_m p_a\left(R_{.\,k.}^{k\;tm}R_{ijt}{}^{a} - R_{.\,i.}^{k\;tm}R_{kjt}{}^{a}\right) + g_{ij}\left(-\frac{1}{2}R_{.\,k.}^{k\;ji} - \frac{1}{4}p_m p_a R_{.\,t.}^{k\;im}R_{.\,k.}^{t\;ja}\right) \\
&= r + \frac{1}{4}p_m p_a g^{ij}\left(R_{.\,k.}^{k\;tm}R_{ijt}{}^{a} - R_{.\,i.}^{k\;tm}R_{kjt}{}^{a}\right) - \frac{1}{2}p_m p_a g^{ij}R_{kit}{}^{a}R_{.\,j.}^{k\;tm} - \frac{1}{2}g^{kz}R_{zki}{}^{i} \\
&\quad - \frac{1}{4}p_m p_a g^{ij}g^{tl}g^{ks}R_{itk}{}^{m}R_{ljs}{}^{a} - \frac{1}{4}p_m p_a g^{ji}g^{tl}g^{ks}R_{itk}{}^{m}R_{ljs}{}^{a} \\
&= r + \frac{1}{4}p_m p_a g^{ij}\left(R_{.\,k.}^{k\;tm}R_{ijt}{}^{a} - R_{.\,i.}^{k\;tm}R_{kjt}{}^{a}\right) - \frac{1}{2}p_m p_a g^{ij}g^{kl}g^{ts}R_{kit}{}^{a}R_{ljs}{}^{m} \\
&\quad - \frac{1}{2}p_m p_a g^{ij}g^{kl}g^{ts}R_{ikt}{}^{a}R_{ljs}{}^{m} \\
&= r + \frac{1}{4}p_m p_a g^{ij}\left(R_{.\,k.}^{k\;tm}R_{ijt}{}^{a} - R_{.\,i.}^{k\;tm}R_{kjt}{}^{a}\right) \\
&= r - \frac{1}{4}p_m p_a g^{ij}g^{kl}g^{ts}R_{lis}{}^{m}R_{kjt}{}^{a} \\
&= r - \frac{1}{4}g^{ij}g^{kl}g^{ts}\left(pR\right)_{lis}\left(pR\right)_{kjt} \\
&= r - \frac{1}{4}\left|pR\right|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $r = R_{ij}g^{ij}$ ve $\left|pR\right|$,

$$\left|pR\right|^2 = g^{-1}\left(pR, pR\right) = g^{ij}g^{kl}g^{ts}\left(pR\right)_{lis}\left(pR\right)_{kjt}$$

şeklindedir [56]. □

Bu teoremden şu sonucu ifade ederiz.

Sonuç 2.2: [28] g metriğiyle M^n Riemann manifoldu ve ^{S}g metriğiyle $T^{*}M^{n}$ kotanjant demeti verilsin.

i) $^{S}r = 0$ ise, bu takdirde $r = 0$,

ii) $r=0$, $R\neq 0$ ise, bu takdirde ${}^{S}r\neq 0$,

iii) ${}^{S}r=0$ olması için gerek ve yeter şart $R=0$ olmasıdır, yani M^{n} in flat olmasıdır. Buradan aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 2.5: [28]$\left(M^{n},g\right)$, n>2, κ sabit eğrilikli bir Riemann manifoldu olsun. Bu takdirde $\left(T^{*}M^{n},{}^{S}g\right)$ nin ${}^{S}r$ skalar eğriliği

$$ {}^{S}r=\left(n-1\right)\kappa\left(n-\frac{1}{2}\left|p\right|^{2}\kappa\right) $$

dir. Burada $\left|p\right|^{2}=g^{ij}p_{i}p_{j}$ şeklindedir.

İspat: $\left(M^{n},g\right)$, $n>2$ κ sabit eğrilikli bir Riemann manifoldu olsun, yani

$$ R_{kmj}{}^{s}=\kappa\left(\delta_{k}^{s}g_{mj}-\delta_{m}^{s}g_{kj}\right) $$

ve

$$ r=n\left(n-1\right)\kappa, $$

eşitliklerini kullanalım ([56], [43]). Burada δ, Kronecker deltasıdır. Bu takdirde, Teorem 2.4 ten

$$ \begin{aligned} {}^{S}r &= r-\frac{1}{4}\left|pR\right|^{2} \\ &= r-\frac{1}{4}p_{m}p_{a}g^{ij}g^{kl}g^{ts}R_{lis}{}^{m}R_{kjt}{}^{a} \\ &= r-\frac{1}{4}g^{ij}g^{kl}g^{ts}p_{m}\kappa\left(\delta_{l}^{m}g_{is}-\delta_{i}^{m}g_{ls}\right)p_{a}\kappa\left(\delta_{k}^{a}g_{jt}-\delta_{j}^{a}g_{kt}\right) \\ &= r-\frac{1}{4}\kappa^{2}g^{ij}g^{kl}g^{ts}\left(p_{l}g_{is}-p_{i}g_{ls}\right)\left(p_{k}g_{jt}-p_{j}g_{kt}\right) \\ &= r-\frac{1}{4}\kappa^{2}g^{ij}g^{kl}g^{ts}\left(p_{k}p_{l}g_{is}g_{jt}-p_{l}p_{j}g_{is}g_{kt}-p_{i}p_{k}g_{ls}g_{jt}+p_{i}p_{j}g_{ls}g_{kt}\right) \\ &= r-\frac{1}{4}\kappa^{2}g^{kl}p_{k}p_{l}\delta_{s}^{j}\delta_{j}^{s}+\frac{1}{4}\kappa^{2}g^{kl}p_{l}p_{j}\delta_{s}^{j}\delta_{k}^{s}+\frac{1}{4}\kappa^{2}g^{ij}p_{i}p_{k}\delta_{s}^{k}\delta_{j}^{s}+\frac{1}{4}\kappa^{2}g^{ij}p_{i}p_{j}\delta_{s}^{k}\delta_{k}^{s} \\ &= r-\frac{1}{4}\kappa^{2}\left|p\right|^{2}n+\frac{1}{4}\kappa^{2}\left|p\right|^{2}+\frac{1}{4}\kappa^{2}\left|p\right|^{2}-\frac{1}{4}\kappa^{2}\left|p\right|^{2}n \\ &= n\left(n-1\right)\kappa-\frac{1}{2}\kappa^{2}\left|p\right|^{2}\left(n-1\right) \\ &= \left(n-1\right)\kappa\left(n-\frac{1}{2}\left|p\right|^{2}\kappa\right) \end{aligned} $$

elde ederiz. □

Teorem 2.6: [28] (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve T^*M^n de, ${}^S g$ Sasaki metriğiyle donatılmış kotanjant demeti olsun. $(T^*M^n, {}^S g)$ in ${}^S K$ kesit (sectional) eğriliği aşağıdakileri sağlar:

i) ${}^S K\left({}^V\omega, {}^V\theta\right) = 0$,

ii) ${}^S K\left({}^H X, {}^V\omega\right) = \frac{1}{4}\left|pR(\ ,X)\tilde{\omega}\right|^2$,

iii) ${}^S K\left({}^H X, {}^H Y\right) = K(X,Y) - \frac{3}{4}\left|pR(X,Y)\right|^2$.

Burada K, (M^n, g) nin kesit eğriliğidir ve $\tilde{\omega} = g^{-1} \circ \omega = (g^{ij}\omega_j) \in \Im_0^1(M^n)$, $R(\ ,X)\tilde{\omega} \in \Im_1^1(M^n)$ dir.

İspat: $(T^*M^n, {}^S g)$ de lokal ortonormal çatıda, bir kesit eğrilik

$${}^S K(P) = -{}^S R_{kmij} U^k V^m U^i V^j \quad ,$$

şeklindedir. Burada $P = (U,V)$, (U,V) ile gerilen düzlemi belirtir [16].

$\{X_i\}$ ve $\{\omega^i\}$, $i = 1,\dots,n$, M^n de sırasıyla lokal ortonormal çatı ve eş çatı olsun. Bu takdirde (2.3)-(2.5) ten $\left\{{}^H X_1,\dots,{}^H X_n, {}^V\omega^1,\dots,{}^V\omega^n\right\}$, $T^*(M^n)$ de lokal ortonormal çatıdır. $(T^*M^n, {}^S g)$, ${}^S K\left({}^H X, {}^H Y\right)$, ${}^S K\left({}^H X, {}^V\theta\right)$ ve ${}^S K\left({}^V\omega, {}^V\theta\right)$ sırasıyla $\left({}^H X, {}^H Y\right)$, $\left({}^H X, {}^V\theta\right)$ ve $\left({}^V\omega, {}^V\theta\right)$ ile gerilen düzlemi belirtir. (1.37), (1.38), (2.8) ve (2.17) yi kullanarak,

$$\begin{aligned}
\text{i) } {}^S K\left({}^V\omega, {}^V\theta\right) &= -{}^S R_{\varepsilon\gamma\alpha\beta}\, {}^V\tilde{\omega}^{\varepsilon}\, {}^V\tilde{\theta}^{\gamma}\, {}^V\tilde{\omega}^{\alpha}\, {}^V\tilde{\theta}^{\beta} \\
&= -{}^S R_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}\bar{s}}\, {}^V\tilde{\omega}^{\bar{k}}\, {}^V\tilde{\theta}^{\bar{i}}\, {}^V\tilde{\omega}^{\bar{j}}\, {}^V\tilde{\theta}^{\bar{s}} \\
&= -{}^S R_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}}{}^{L}\, {}^S g_{\bar{s}L}\, \omega_k \theta_i \omega_j \theta_s \\
&= -{}^S R_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}}{}^{l}\, {}^S g_{\bar{s}l}\, \omega_k \theta_i \omega_j \theta_s - {}^S R_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}}{}^{\bar{l}}\, {}^S g_{\bar{s}\bar{l}}\, \omega_k \theta_i \omega_j \theta_s \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\text{ii) } {}^{S}K\left({}^{H}X,{}^{V}\theta\right)=-{}^{S}R_{k\bar{i}\,j\bar{s}}\,{}^{H}\tilde{X}^{k}\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\bar{i}}\,{}^{H}\tilde{X}^{j}\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\bar{s}}$$

$$=-{}^{S}R_{k\bar{i}\,j}{}^{l}\,{}^{S}g_{\bar{s}l}X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}-{}^{S}R_{k\bar{i}\,j}{}^{\bar{l}}\,{}^{S}g_{\bar{s}\bar{l}}X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}$$

$$=\left(\frac{1}{2}R_{kjl}{}^{i}-\frac{1}{4}p_{m}p_{a}R_{ktl}{}^{m}R^{t}{}_{.\,j.}{}^{ia}\right)g^{sl}X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}$$

$$=\frac{1}{2}R_{kjl}{}^{i}X^{k}\omega_{i}X^{j}g^{sl}\omega_{s}-\frac{1}{4}p_{m}p_{a}R_{ktl}{}^{m}R^{t}{}_{.\,j.}{}^{ia}X^{k}\omega_{i}X^{j}g^{sl}\omega_{s}$$

$$=\frac{1}{2}R_{kjl}{}^{i}X^{k}\omega_{i}X^{j}\tilde{\omega}^{l}+\frac{1}{4}p_{m}p_{a}R_{tkl}{}^{m}R_{fjh}{}^{a}g^{tf}X^{k}\tilde{\omega}^{h}X^{j}\tilde{\omega}^{l}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\omega R\left(X,X\right)\tilde{\omega}\right)+\frac{1}{4}g^{tf}\left(pR\left(\ ,X\right)\tilde{\omega}\right)_{t}\left(pR\left(\ ,X\right)\tilde{\omega}\right)_{f}$$

$$=\frac{1}{4}\left|\left(pR\left(\ ,X\right)\tilde{\omega}\right)\right|^{2}$$

elde edilir.

$$\text{iii) } {}^{S}K\left({}^{H}X,{}^{H}Y\right)=-{}^{S}R_{kijs}\,{}^{H}\tilde{X}^{k}\,{}^{H}\tilde{Y}^{i}\,{}^{H}\tilde{X}^{j}\,{}^{H}\tilde{Y}^{s}$$

$$=-{}^{S}R_{kij}{}^{l}g_{sl}\,{}^{H}\tilde{X}^{k}\,{}^{H}\tilde{Y}^{i}\,{}^{H}\tilde{X}^{j}\,{}^{H}\tilde{Y}^{s}-{}^{S}R_{kij}{}^{\bar{l}}g_{s\bar{l}}\,{}^{H}\tilde{X}^{k}\,{}^{H}\tilde{Y}^{i}\,{}^{H}\tilde{X}^{j}\,{}^{H}\tilde{Y}^{s}$$

$$=\left(-R_{kij}{}^{l}+\frac{1}{2}p_{m}p_{a}R_{kit}{}^{a}R^{l}{}_{.\,j.}{}^{tm}-\frac{1}{4}p_{m}p_{a}\left(R^{l}{}_{.\,k.}{}^{tm}R_{ijt}{}^{a}-R^{l}{}_{.\,i.}{}^{tm}R_{kjt}{}^{a}\right)\right)g_{sl}X^{k}Y^{i}X^{j}Y^{s}$$

$$=-R_{kij}{}^{l}g_{sl}X^{k}Y^{i}X^{j}Y^{s}+\frac{1}{2}p_{m}p_{a}R_{kit}{}^{a}R_{sjf}{}^{m}g^{tf}X^{k}Y^{i}X^{j}Y^{s}$$

$$-\frac{1}{4}p_{m}p_{a}R_{skf}{}^{m}R_{ijt}{}^{a}g^{tf}X^{k}Y^{i}X^{j}Y^{s}+\frac{1}{4}p_{m}p_{a}R_{sif}{}^{m}R_{kjt}{}^{a}g^{tf}X^{k}Y^{i}X^{j}Y^{s}$$

$$=-R_{kij}{}^{l}g_{sl}X^{k}Y^{i}X^{j}Y^{s}-\frac{1}{2}p_{m}p_{a}R_{kit}{}^{a}R_{jsf}{}^{m}g^{tf}X^{k}Y^{i}X^{j}Y^{s}$$

$$-\frac{1}{4}p_{m}p_{a}R_{skf}{}^{m}R_{ijt}{}^{a}g^{tf}X^{k}Y^{i}X^{j}Y^{s}+\frac{1}{4}p_{m}p_{a}R_{sif}{}^{m}R_{kjt}{}^{a}g^{tf}X^{k}Y^{i}X^{j}Y^{s}$$

$$=K\left(X,Y\right)-\frac{1}{2}g^{tf}\left(pR\left(X,Y\right)\right)_{t}\left(pR\left(X,Y\right)\right)_{f}$$

$$-\frac{1}{4}g^{tf}\left(pR\left(Y,X\right)\right)_{t}\left(pR\left(Y,X\right)\right)_{f}+\frac{1}{4}g^{tf}\left(pR\left(Y,Y\right)\right)_{t}\left(pR\left(X,X\right)\right)_{f}$$

$$=K\left(X,Y\right)-\frac{3}{4}\left|pR\left(X,Y\right)\right|^{2}$$

olur. □

Bu teoremden kolayca görürüz ki ${}^{S}K\left({}^{V}\omega,{}^{V}\theta\right)={}^{S}K\left({}^{H}X,{}^{V}\omega\right)={}^{S}K\left({}^{H}X,{}^{H}Y\right)$ olması için gerek ve yeter şart $R=0$ olmasıdır. Buradan şu sonucu ifade ederiz.

Sonuç 2.3: $\left(M^{n},g\right)$ bir Riemann manifoldu ve $T^{*}M^{n}$ de, ${}^{S}g$ Sasaki metriğiyle donatılmış kotanjant demeti olsun. Bu takdirde

i) $\left(T^{*}M^{n}, {}^{S}g\right)$ in sabit eğrilikli Rieman manifoldu olması için gerek ve yeter şart ${}^{S}K=0$ olmasıdır,

ii) ${}^{S}K=0$ olması için gerek ve yeter şart $\left(M^{n}, g\right)$ nin flat olmasıdır [28].

2.2.3. ${}^{S}g$ Metriğine Göre Metrik Konneksiyonunun Skalar Eğriliği

$T^{*}M^{n}$ kotanjant demette ,${}^{S}g$ Sasaki metriğinin ${}^{S}\nabla$, Levi-Civita konneksiyonu ${}^{S}\nabla\, {}^{S}g=0$ şartını sağlayan ve burulması olmayan tek konneksiyondur. Fakat $\tilde{\nabla}\, {}^{S}g=0$ şartını sağlayan başka bir konneksiyon daha vardır ve non-trivial burulma tensörüne sahiptir. Bu konneksiyona ${}^{S}g$ in metrik konneksiyonu denir [52].

$T^{*}M^{n}$ kotanjant demetinde, ∇ konneksiyonunun ${}^{H}\nabla$ yatay (horizontal) lifti, her $X, Y \in \Im_{0}^{1}\left(M^{n}\right)$ ve $\omega, \theta \in \Im_{1}^{0}\left(M^{n}\right)$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{cases} {}^{H}\nabla_{{}^{V}\theta}\, {}^{V}\omega = 0 \ , & {}^{H}\nabla_{{}^{V}\theta}\, {}^{H}Y = 0, \\ {}^{H}\nabla_{{}^{H}X}\, {}^{V}\omega = {}^{V}\left(\nabla_{X}\omega\right) \ , & {}^{H}\nabla_{{}^{H}X}\, {}^{H}Y = {}^{H}\left(\nabla_{X}Y\right) \end{cases} \tag{2.18}$$

${}^{H}\nabla_{\alpha} = {}^{H}\nabla_{\tilde{e}_{(\alpha)}}$ yazarız. ${}^{H}\nabla_{\alpha}\tilde{e}_{(\beta)} = {}^{H}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}\tilde{e}_{(\gamma)}$ olduğundan, ${}^{H}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ in farklı indislerini (2.18) i kullanarak şu şekilde buluruz:

$$\begin{cases} {}^{H}\Gamma_{ij}^{k} = {}^{H}\Gamma_{ij}^{k} \ , \quad {}^{H}\Gamma_{i\,\bar{j}}^{\bar{k}} = -{}^{H}\Gamma_{ik}^{j}, \\ {}^{H}\Gamma_{\bar{i}\,j}^{k} = {}^{H}\Gamma_{i\,\bar{j}}^{k} = {}^{H}\Gamma_{\bar{i}\,\bar{j}}^{k} = {}^{H}\Gamma_{\bar{i}\,\bar{j}}^{\bar{k}} = {}^{H}\Gamma_{i\,j}^{\bar{k}} = {}^{H}\Gamma_{\bar{i}\,j}^{\bar{k}} = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

${}^{H}\nabla$ yatay liftinin burulma tensörü T olsun . T, $T^{*}M^{n}$ de $(1,2)$ tipli antisimetrik tensör alanıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathrm{T}\left({}^{V}\omega, {}^{V}\theta\right)=0 \ , \ \mathrm{T}\left({}^{H}X, {}^{V}\theta\right)=0 \ , \ \mathrm{T}\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right)=-\gamma R\left(X,Y\right).$$

Burada R, ∇ nın eğrilik tensörüdür ve $\gamma R\left(X,Y\right)=\sum_{i} p_{h}R_{kli}^{h}X^{k}Y^{l}\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}$ şeklindedir [52].

Böylece, g lokal olarak flat olmadıkça, g ile belirlenen ∇_g, Levi-Civita konneksiyonu olsa bile, ${}^H\nabla$ konneksiyonunun sıfırdan farklı (non-trivial) burulmaya sahip olduğu görülmektedir.

Her $X,Y,Z\in\Im_0^1(M^n)$ ve $\omega,\theta,\varepsilon\in\Im_1^0(M^n)$ için (2.3), (2.4), (2.5) ve (2.18) i kullanarak ,

$$\begin{aligned}
\left({}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^Sg\right)\left({}^V\theta,{}^V\varepsilon\right) &= {}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^Sg\left({}^V\theta,{}^V\varepsilon\right)-{}^Sg\left({}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^V\theta,{}^V\varepsilon\right)-{}^Sg\left({}^V\theta,{}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^V\varepsilon\right)\\
&= {}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^V\left(g^{-1}(\theta,\varepsilon)\right)={}^V\omega^V\left(g^{-1}(\theta,\varepsilon)\right)=0\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left({}^H\nabla_{{}^HX}{}^Sg\right)\left({}^V\theta,{}^V\varepsilon\right) &= {}^H\nabla_{{}^HX}{}^Sg\left({}^V\theta,{}^V\varepsilon\right)-{}^Sg\left({}^H\nabla_{{}^HX}{}^V\theta,{}^V\varepsilon\right)-{}^Sg\left({}^V\theta,{}^H\nabla_{{}^HX}{}^V\varepsilon\right)\\
&= {}^H\nabla_{{}^HX}{}^V\left(g^{-1}(\theta,\varepsilon)\right)-{}^Sg\left({}^V(\nabla_X\theta),{}^V\varepsilon\right)-{}^Sg\left({}^V\theta,{}^V(\nabla_X\varepsilon)\right)\\
&= {}^HX^V\left(g^{-1}(\theta,\varepsilon)\right)-{}^V\left(g^{-1}(\nabla_X\theta,\varepsilon)\right)-{}^V\left(g^{-1}(\theta,\nabla_X\varepsilon)\right)\\
&= {}^V\left(Xg^{-1}(\theta,\varepsilon)\right)-{}^V\left(g^{-1}(\nabla_X\theta,\varepsilon)\right)-{}^V\left(g^{-1}(\theta,\nabla_X\varepsilon)\right)\\
&= {}^V\left(\nabla_Xg^{-1}(\theta,\varepsilon)\right)-{}^V\left(g^{-1}(\nabla_X\theta,\varepsilon)\right)-{}^V\left(g^{-1}(\theta,\nabla_X\varepsilon)\right)\\
&= {}^V\left(\left(\nabla_Xg^{-1}\right)(\theta,\varepsilon)\right)\\
&=0\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left({}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^Sg\right)\left({}^V\theta,{}^HZ\right) &= {}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^Sg\left({}^V\theta,{}^HZ\right)-{}^Sg\left({}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^V\theta,{}^HZ\right)-{}^Sg\left({}^V\theta,{}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^HZ\right)\\
&=0\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left({}^H\nabla_{{}^HX}{}^Sg\right)\left({}^V\theta,{}^HZ\right) &= {}^H\nabla_{{}^HX}{}^Sg\left({}^V\theta,{}^HZ\right)-{}^Sg\left({}^H\nabla_{{}^HX}{}^V\theta,{}^HZ\right)-{}^Sg\left({}^V\theta,{}^H\nabla_{{}^HX}{}^HZ\right)\\
&= {}^Sg\left({}^V(\nabla_X\theta),{}^HZ\right)-{}^Sg\left({}^V\theta,{}^H(\nabla_XZ)\right)=0\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left({}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^Sg\right)\left({}^HY,{}^V\varepsilon\right) &= {}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^Sg\left({}^HY,{}^V\varepsilon\right)-{}^Sg\left({}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^HY,{}^V\varepsilon\right)-{}^Sg\left({}^HY,{}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^V\varepsilon\right)\\
&=0\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left({}^H\nabla_{{}^HX}{}^Sg\right)\left({}^HY,{}^V\varepsilon\right) &= {}^H\nabla_{{}^HX}{}^Sg\left({}^HY,{}^V\varepsilon\right)-{}^Sg\left({}^H\nabla_{{}^HX}{}^HY,{}^V\varepsilon\right)-{}^Sg\left({}^HY,{}^H\nabla_{{}^HX}{}^V\varepsilon\right)\\
&=-{}^Sg\left({}^H(\nabla_XY),{}^V\varepsilon\right)-{}^Sg\left({}^HY,{}^V(\nabla_X\varepsilon)\right)\\
&=0\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left({}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^Sg\right)\left({}^HY,{}^HZ\right) &= {}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^Sg\left({}^HY,{}^HZ\right)-{}^Sg\left({}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^HY,{}^HZ\right)-{}^Sg\left({}^HY,{}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^HZ\right)\\
&= {}^H\nabla_{{}^V\omega}{}^V\left(g(X,Y)\right)={}^V\omega^V\left(g(X,Y)\right)=0\ ,
\end{aligned}$$

$$\left({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}\,{}^{S}g\right)\left({}^{H}Y,{}^{H}Z\right)={}^{H}\nabla_{{}^{H}X}\,{}^{S}g\left({}^{H}Y,{}^{H}Z\right)-{}^{S}g\left({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}\,{}^{H}Y,{}^{H}Z\right)-{}^{S}g\left({}^{H}Y,{}^{H}\nabla_{{}^{H}X}\,{}^{H}Z\right)$$
$$={}^{H}\nabla_{{}^{H}X}\,{}^{V}\left(g\left(Y,Z\right)\right)-{}^{S}g\left({}^{H}\left(\nabla_{X}Y\right),{}^{H}Z\right)-{}^{S}g\left({}^{H}Y,{}^{H}\left(\nabla_{X}Z\right)\right)$$
$$={}^{H}X\,{}^{V}\left(g\left(Y,Z\right)\right)-{}^{V}\left(g\left(\nabla_{X}Y,Z\right)\right)-{}^{V}\left(g\left(Y,\nabla_{X}Z\right)\right)$$
$$={}^{V}\left(Xg\left(Y,Z\right)\right)-{}^{V}\left(g\left(\nabla_{X}Y,Z\right)\right)-{}^{V}\left(g\left(Y,\nabla_{X}Z\right)\right)$$
$$={}^{V}\left(\nabla_{X}g\left(Y,Z\right)\right)-{}^{V}\left(g\left(\nabla_{X}Y,Z\right)\right)-{}^{V}\left(g\left(Y,\nabla_{X}Z\right)\right)$$
$$={}^{V}\left(\left(\nabla_{X}g\right)\left(Y,Z\right)\right)=0$$

elde ederiz, yani ∇_g nin ${}^{H}\nabla$ yatay lifti ${}^{S}g$ Sasaki metriğine göre metrik konneksiyondur.

${}^{H}R$, ${}^{H}\nabla$ ın eğrilik tensör alanı olsun. ${}^{H}R$ nin, $\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\}$ adapte çatıya göre bileşenleri

$${}^{H}R_{\delta\gamma\beta}{}^{\alpha}=2\left(\tilde{e}_{[\delta}\,{}^{H}\Gamma^{\alpha}_{\gamma]\beta}+{}^{H}\Gamma^{\alpha}_{[\delta|\varepsilon|}\,{}^{H}\Gamma^{\varepsilon}_{\gamma]\beta}\right)-\Omega_{\delta\gamma}{}^{\varepsilon}\,{}^{H}\Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\beta},$$

eşitliklerinden elde edilir.

(1.35), (1.36), (2.11), (2.19) u kullanarak, ${}^{H}R_{\gamma\beta}={}^{H}R_{\alpha\gamma\beta}{}^{\alpha}$ şeklindeki Ricci tensör alanının bileşenlerini hesaplarsak:

$$\begin{cases}{}^{H}R_{kj}={}^{H}R_{\alpha kj}{}^{\alpha}={}^{H}R_{ikj}{}^{i}+{}^{H}R_{\bar{i}kj}{}^{\bar{i}}=R_{ikj}{}^{i}=R_{kj}\ , \\ {}^{H}R_{\bar{k}\bar{j}}={}^{H}R_{\bar{k}j}={}^{H}R_{k\bar{j}}=0\ ,\end{cases} \tag{2.20}$$

elde ederiz, burada R_{kj}, M^{n} de ∇_g nin Ricci tensör alanıdır.

${}^{S}g$ Sasaki metriğine göre ${}^{H}\nabla$ skalar eğriliği için (2.20) ve ${}^{S}g^{\bar{k}j}={}^{S}g^{k\bar{j}}=0$ olduğu kullanılarak

$${}^{H}r={}^{S}g^{\gamma\beta}\,{}^{H}R_{\gamma\beta}=g^{kj}R_{kj}=r,$$

elde edilir.

Buradan şu teoremi yazarız.

Teorem 2.7: [28] $\left(M^{n},g\right)$ bir Rieman manifoldu olsun ve $T^{*}M^{n}$, ${}^{S}g$ Sasaki metriğiyle donatılmış kotanjant demet olsun. Bu takdirde, $T^{*}M^{n}$ kotanjant demetin ${}^{S}g$ Sasaki metriğine göre ${}^{H}\nabla$ metrik konneksiyonlu ${}^{H}r$ skalar eğriliğinin sıfırlanması için gerek ve yeter şart M^{n} de ∇_g nin r skalar eğriliğinin sıfır olmasıdır.

Buradan söyleyebiliriz ki, ${}^{H}\nabla = {}^{S}\nabla$ olması için gerek ve yeter şart $\left(M^n, g\right)$ nin flat olmasıdır. Böylece, Teorem 2.7 den Sonuç 2.2 nin (iii) ifadesi elde edilir.

2.2.4. $\left(T^{*}M^{n}, {}^{S}g\right)$ de Para-Norden Yapılar

Hemen hemen parakompleks manifold, $\left(M^n, \varphi\right)$, $\varphi^2 = \mathrm{I}$ hemen hemen çarpım manifoldudur, öyle ki, $T^{+}M^{n}$ ve $T^{-}M^{n}$ özdemetleri, sırasıyla φ nin +1 ve -1 özdeğerleriyle ilişkilidir ve aynı ranka sahiplerdir. Hemen hemen parakompleks manifoldun boyutu çifttir. φ parakompleks yapısını göz önüne alırsak, 2 mertebeli cebiri izomorfik temsil eden $\{I, \varphi\}$ kümesini elde ederiz. M^n de, $\{I, \varphi\}$ kümesi parakompleks (veya double) sayılar cebri olarak adlandırılır ve $R(j)$, $j^2 = 1$ ile temsil edilir.

Her $X_1, X_2, ..., X_q \in \Im_0^1\left(M^{2n}\right)$ için

$$\omega\left(\varphi X_1, X_2, ..., X_q\right) = \omega\left(X_1, \varphi X_2, ..., X_q\right) = ... = \omega\left(X_1, X_2, ..., \varphi X_q\right)$$

ise, $\omega \in \Im_q^0\left(M^{2n}\right)$ tensör alanına φ parakompleks yapısına göre pürdür denir ([26, 33, 40]).

ω pür tensör alanı ve φ parakompleks yapısı kullanılarak ϕ_φ operatörü

$$\begin{aligned}\left(\phi_\varphi \omega\right)\left(Y, X_1, ..., X_q\right) &= (\varphi Y)\left(\omega\left(X_1, ..., X_q\right)\right) - Y\left(\omega\left(\varphi X_1, X_2, ..., X_q\right)\right) \\ &+ \omega\left(\left(L_{X_1}\varphi\right)Y, X_2, ..., X_q\right) + ... + \omega\left(X_1, X_2, ..., \left(L_{X_q}\varphi\right)Y\right),\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada L_X, X e göre Lie türevini gösterir. Ayrıca $\phi_\varphi \omega \in \Im_{q+1}^0\left(M^{2n}\right)$ şeklindedir [46].

$\phi_\varphi \omega = 0$ ise, bu takdirde ω, $R(j)$ parakompleks cebrine göre hemen hemen para-holomorfiktir denir ([18, 33]).

Eğer g Riemannian metriği, φ hemen hemen parakompleks yapısına göre pür ise, φ parakompleks yapılı $\left(M^{2n}, g\right)$ Riemann manifolduna hemen hemen para-Norden denir. Bilinmektedir ki, hemen hemen para-Norden manifoldunun para-Kähler $\left(\nabla_g \varphi = 0\right)$ olması için gerek ve yeter şart g nin paraholomorfik $\left(\phi_\varphi g = 0\right)$ olmasıdır [33].

$\left(T^{*}M^{n},{}^{S}g\right)$, ${}^{S}g$ Sasaki metrikli kotanjant demet olsun. Her $X\in\Im_{0}^{1}\left(M^{n}\right)$ ve $\omega\in\Im_{1}^{0}\left(M^{n}\right)$ için, $T^{*}M^{n}$ de (1,1) tipli F tensör alanını,

$$\begin{cases} F\,{}^{H}X={}^{V}\tilde{X}, \\ F\,{}^{V}\omega={}^{H}\tilde{\omega} \end{cases} \tag{2.21}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\tilde{X}=g\circ X\in\Im_{1}^{0}\left(M^{n}\right)$, $\tilde{\omega}=g^{-1}\circ\omega\in\Im_{0}^{1}\left(M^{n}\right)$ dir. Böylece

$$F^{2}=\mathrm{I}.$$

elde ederiz. Gerçekten (2.21) i kullanarak, her $X\in\Im_{0}^{1}\left(M^{n}\right)$ ve $\omega\in\Im_{1}^{0}\left(M^{n}\right)$ için

$$F^{2}\left({}^{H}X\right)=F\left(F\,{}^{H}X\right)=F\left({}^{V}\tilde{X}\right)={}^{H}\tilde{\tilde{X}}={}^{H}X\,,$$

$$F^{2}\left({}^{V}\omega\right)=F\left(F\,{}^{V}\omega\right)=F\left({}^{H}\tilde{\omega}\right)={}^{V}\tilde{\tilde{\omega}}={}^{V}\omega$$

elde ederiz, yani $F^{2}=\mathrm{I}$ dır [27].

Teorem 2.8: [27]$\left(T^{*}M^{n},{}^{S}g,F\right)$ üçlüsü bir hemen hemen para-Norden manifolddur.

İspat: Her $\tilde{X},\tilde{Y}\in\Im_{0}^{1}\left(T^{*}M^{n}\right)$ için

$$A\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)={}^{S}g\left(F\tilde{X},\tilde{Y}\right)-{}^{S}g\left(\tilde{X},F\tilde{Y}\right)$$

yazalım. (2.3)-(2.5) ve (2.21) den

$$A\left({}^{H}X,{}^{H}Y\right)={}^{S}g\left(F\,{}^{H}X,{}^{H}Y\right)-{}^{S}g\left({}^{H}X,F\,{}^{H}Y\right)={}^{S}g\left({}^{V}\tilde{X},{}^{H}Y\right)-{}^{S}g\left({}^{H}X,{}^{V}\tilde{Y}\right)=0\,,$$

$$\begin{aligned} A\left({}^{H}X,{}^{V}\omega\right)&={}^{S}g\left(F\,{}^{H}X,{}^{V}\omega\right)-{}^{S}g\left({}^{H}X,F\,{}^{V}\omega\right)={}^{S}g\left({}^{V}\tilde{X},{}^{V}\omega\right)-{}^{S}g\left({}^{H}X,{}^{H}\tilde{\omega}\right)\\ &=g^{-1}\left(g\circ X,\omega\right)-g\left(X,g^{-1}\circ\omega\right)=0\,, \end{aligned}$$

$$A\left({}^{V}\omega,{}^{H}Y\right)=-A\left({}^{H}Y,{}^{V}\omega\right)=0$$

$$A\left({}^{V}\omega,{}^{V}\theta\right)={}^{S}g\left(F\,{}^{V}\omega,{}^{V}\theta\right)-{}^{S}g\left({}^{V}\omega,F\,{}^{V}\theta\right)=g^{-1}\left({}^{H}\tilde{\omega},{}^{V}\theta\right)-{}^{S}g\left({}^{V}\omega,{}^{H}\tilde{\theta}\right)=0\,,$$

elde ederiz. Yani ${}^{S}g$, F ye göre pürdür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

F nin kovaryant türevine bakalım. Teorem 2.2 ve (2.21) i dikkate alarak,

$$\begin{aligned} \left({}^{S}\nabla_{{}^{H}X}F\right)\left({}^{H}Y\right)&={}^{S}\nabla_{{}^{H}X}\left(F\,{}^{H}Y\right)-F\left({}^{S}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Y\right)\\ &={}^{S}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}\tilde{Y}-F\left({}^{S}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Y\right) \end{aligned}$$

$$= {}^{V}\left(\nabla_X \tilde{Y}\right) + \frac{1}{2}{}^{H}\left(p\left(g^{-1} \circ R(\ ,X)Y\right)\right) - F\left({}^{H}(\nabla_X Y) + \frac{1}{2}{}^{V}\left(pR(X,Y)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}{}^{H}\left(pg^{-1} \circ \left(R(\ ,X)Y - R(X,Y)\right)\right), \tag{2.22}$$

$$\left({}^{S}\nabla_{{}^{V}\omega} F\right)\left({}^{H}Y\right) = {}^{S}\nabla_{{}^{V}\omega}\left(F\,{}^{H}Y\right) - F\left({}^{S}\nabla_{{}^{V}\omega}{}^{H}Y\right)$$

$$= {}^{S}\nabla_{{}^{V}\omega}{}^{V}\tilde{Y} - \frac{1}{2}F\,{}^{H}\left(p\left(g^{-1} \circ R(\ ,Y)\tilde{\omega}\right)\right) = -\frac{1}{2}{}^{V}\left(pR(\ ,Y)\tilde{\omega}\right), \tag{2.23}$$

$$\left({}^{S}\nabla_{{}^{H}X} F\right)\left({}^{V}\theta\right) = {}^{S}\nabla_{{}^{H}X}\left(F\,{}^{V}\theta\right) - F\left({}^{S}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}\theta\right)$$

$$= {}^{S}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}\tilde{\theta} - F\left({}^{V}(\nabla_X \theta) + \frac{1}{2}{}^{H}\left(p\left(g^{-1} \circ R(\ ,X)\tilde{\theta}\right)\right)\right)$$

$$= {}^{H}\left(\nabla_X \tilde{\theta}\right) + \frac{1}{2}{}^{V}\left(pR\left(X,\tilde{\theta}\right)\right) - {}^{H}\left(g^{-1} \circ (\nabla_X \theta)\right) - \frac{1}{2}{}^{V}\left(pg \circ \left(g^{-1} \circ R(\ ,X)\tilde{\theta}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}{}^{V}\left(pR\left(X,\tilde{\theta}\right) - pR(\ ,X)\tilde{\theta}\right), \tag{2.24}$$

$$\left({}^{S}\nabla_{{}^{V}\omega} F\right)\left({}^{V}\theta\right) = {}^{S}\nabla_{{}^{V}\omega}\left(F\,{}^{V}\theta\right) - F\left({}^{S}\nabla_{{}^{V}\omega}{}^{V}\theta\right)$$

$$= {}^{S}\nabla_{{}^{V}\omega}{}^{H}\tilde{\theta} = \frac{1}{2}{}^{H}\left(p\left(g^{-1} \circ R\left(\ ,\tilde{\theta}\right)\tilde{\omega}\right)\right) \tag{2.25}$$

elde ederiz. (2.22)-(2.25) i kullanarak aşağıdaki teoremi yazarız.

Teorem 2.9. [27] Riemann manifoldunun kotanjant demeti, ${}^{S}g$ metriğine ve (2.21) ile tanımlanan F hemen hemen parakompleks yapısına göre para-Kähler (paraholomorfik Norden) olması için gerek ve yeter şart Riemann manifoldunun flat olmasıdır.

2.2.5. Vektör Alanlarının Tam Liftinin Paraholomorfik Olması

F, hemen hemen para-Nordenian yapısının Lie türevini sıfırlayan, $\left(L_{\tilde{X}}F = 0\right)$, $\tilde{X} \in \Im_0^1\left(T^*M^n\right)$ vektör alanına hemen hemen paraholomorfiktir denir [18].

$$\begin{cases} \left[{}^{C}X, {}^{H}Y\right] = {}^{H}\left[X,Y\right] + {}^{V}\left(p\left(L_X\nabla\right)Y\right), \\ \left[{}^{C}X, {}^{V}\omega\right] = {}^{V}\left(L_X\omega\right), \end{cases} \tag{2.26}$$

eşitlikleri bilinmektedir. Burada $\left(L_X\nabla\right)Y = \nabla_Y\nabla X + R\left(X,Y\right)$ ve $\left(L_X\nabla\right)\left(Y,Z\right) = L_X\left(\nabla_Y X\right) - \nabla_Y\left(L_X Z\right) - \nabla_{[X,Y]}Z$ şeklindedir [52].

$X \in \Im_0^1\left(M^n\right)$ vektör alanına, $L_X g = 0$ oluyorsa Killing vektör alanıdır (veya infinitesimal isometridir) denir ve $L_X\nabla_g = 0$ oluyorsa da infinitizmal afin dönüşümdür denir. Bir Killing vektör alanı infinitizmal afin dönüşümdür, yani $L_X g = 0$ ın sonucu olarak $L_X\nabla_g = 0$ elde edilir [52].

${}^{C}X$ tam liftine göre F nin Lie türevine bakalım. (2.21) ve (2.26) yı göz önüne alarak

$$\begin{aligned} \left(L_{{}^{C}X}F\right){}^{V}\theta &= L_{{}^{C}X}F\,{}^{V}\theta - F\left(L_{{}^{C}X}\,{}^{V}\theta\right) = L_{{}^{C}X}\,{}^{H}\tilde{\theta} - F\left({}^{V}\left(L_X\theta\right)\right) \\ &= L_{{}^{C}X}\,{}^{H}\tilde{\theta} - {}^{H}\left(g^{-1}\circ\left(L_X\theta\right)\right) \\ &= {}^{V}\left[X,\tilde{\theta}\right] + {}^{V}\left(p\left(L_X\nabla\right)\tilde{\theta}\right) - {}^{H}\left(g^{-1}\circ\left(L_X\theta\right)\right) \\ &= {}^{H}\left(L_X\left(g^{-1}\circ\theta\right) - g^{-1}\circ\left(L_X\theta\right)\right) + {}^{V}\left(p\left(L_X\nabla\right)\tilde{\theta}\right), \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} \left(L_{{}^{C}X}F\right){}^{H}Y &= L_{{}^{C}X}F\,{}^{H}Y - F\left(L_{{}^{C}X}\,{}^{H}Y\right) \\ &= L_{{}^{C}X}\,{}^{V}\tilde{Y} - F\left({}^{H}\left[X,Y\right] + {}^{V}\left(p\left(L_X\nabla\right)_Y\right)\right) \\ &= {}^{V}\left(L_X\left(g\circ Y\right) - g\circ L_X Y\right) - {}^{H}\left(g^{-1}\circ p\left(L_X\nabla\right)_Y\right) \end{aligned} \tag{2.28}$$

elde ederiz. X, Killing vektör alanı olsun ($L_X g = 0$). $L_X\nabla = 0$ olduğundan dolayı (2.27) ve (2.28) den $L_{{}^{C}X}F = 0$ elde ederiz, yani ${}^{C}X$, F ye göre paraholomorfiktir. $L_{{}^{C}X}F = 0$ olduğunu varsayarsak ve $\left(x^i, 0\right)$, $p_i = 0$ da (2.28) i hesaplarsak, $L_X\left(g\circ Y\right) = g\circ L_X Y$ elde ederiz. Buradan $L_X g = 0$ elde edilir. Böylece şu teoremi yazarız.

Teorem 2.10: [27] $\left(M^{n},g\right)$ Riemann manifoldunun X infinitizmal dönüşümünün bir Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart $T^{*}M^{n}$ kotanjant demetinde ${}^{C}X$ tam liftinin $\left(F,{}^{S}g\right)$ hemen hemen para-Norden yapısına göre hemen hemen paraholomorfik vektör alanı olmasıdır.

Uyarı 2.1. ${}^{R}\nabla\in\Im_{2}^{0}\left(T^{*}M^{n}\right)$,

$$ {}^{R}\nabla\left({}^{C}X,{}^{C}Y\right)=-p\left(\nabla_{X}Y+\nabla_{Y}X\right)\ ,\qquad X,Y\in\Im_{0}^{1}\left(\mathrm{M}_{n}\right)\ . $$

şeklinde tanımlanan ∇_{g} konneksiyonunun Riemann genişlemesi (extension) olsun [52]. $\left\{\partial_{i},\partial_{\bar{i}}\right\}$ doğal çatıya göre ${}^{R}\nabla$ metriğinin bileşenleri

$$ {}^{R}\nabla=\begin{pmatrix}-2p_{a}\Gamma_{ji}^{a} & \delta_{i}^{j}\\ \delta_{j}^{i} & 0\end{pmatrix} \tag{2.29} $$

şeklindedir. (1.25), (1.33) ve (2.29) dan kolayca görürüz ki

$$ {}^{R}\nabla\left({}^{H}X,{}^{H}Y\right)=0\ ,\ \ {}^{R}\nabla\left({}^{V}\omega,{}^{V}\theta\right)=0\ ,\ \ {}^{R}\nabla\left({}^{H}X,{}^{V}\theta\right)={}^{V}\left(\theta\left(X\right)\right), \tag{2.30} $$

şeklindedir. Yani , ${}^{R}\nabla$ metriği (2.30) şartıylada tanımlanır. (2.3)-(2.5), (2.21) ve (2.30) u kullanarak,

$$ \begin{aligned}
\left({}^{R}\nabla\circ F\right)\left({}^{H}X,{}^{H}Y\right)&={}^{R}\nabla\left(F\,{}^{H}X,{}^{H}Y\right)={}^{R}\nabla\left({}^{V}\tilde{X},{}^{H}Y\right)={}^{V}\left(\tilde{X}\left(Y\right)\right)\\
&={}^{V}\left(g\left(X,Y\right)\right)={}^{S}g\left({}^{H}X,{}^{H}Y\right)\ ,\\
\left({}^{R}\nabla\circ F\right)\left({}^{H}X,{}^{V}\theta\right)&={}^{R}\nabla\left(F\,{}^{H}X,{}^{V}\theta\right)={}^{R}\nabla\left({}^{V}\tilde{X},{}^{V}\theta\right)={}^{S}g\left({}^{H}X,{}^{V}\theta\right)=0\ ,\\
\left({}^{R}\nabla\circ F\right)\left({}^{V}\omega,{}^{H}Y\right)&={}^{R}\nabla\left(F\,{}^{V}\omega,{}^{H}Y\right)={}^{R}\nabla\left({}^{H}\tilde{\omega},{}^{H}Y\right)={}^{S}g\left({}^{V}\omega,{}^{H}Y\right)=0\ ,\\
\left({}^{R}\nabla\circ F\right)\left({}^{V}\omega,{}^{V}\theta\right)&={}^{R}\nabla\left(F\,{}^{V}\omega,{}^{V}\theta\right)={}^{R}\nabla\left({}^{H}\tilde{\omega},{}^{V}\theta\right)={}^{V}\left(\theta\left(\tilde{\omega}\right)\right)\\
&={}^{V}\left(g^{-1}\left(\omega,\theta\right)\right)={}^{S}g\left({}^{V}\omega,{}^{V}\theta\right),
\end{aligned} $$

elde ederiz, yani ${}^{R}\nabla\circ F={}^{S}g$ olur. Böylece (2.21) deki ifadeyle belirlenen F hemen hemen para-Norden yapısı, $F=\left({}^{R}\nabla\right)^{-1}\circ{}^{S}g$ formunda da bir ifadeye sahiptir [27].

2.3. T^*M^n de ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll Metriği

Bu kısımda $\left(M^n, g\right)$ Riemann manifoldunun T^*M^n kotanjant demetinde ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriğinin eğilik özelliği ve jeodezikleri araştırılmıştır.

Tanım 2.3: $\left(M^n, g\right)$ Riemann manifoldu olsun. T^*M^n de ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriği, her $X, Y \in \Im_0^1\left(M^n\right)$ ve $\omega, \theta \in \Im_1^0\left(M^n\right)$ için aşağıdaki üç eşitlikle tanımlanmaktadır:

$$ {}^{CG}g\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) = {}^{V}\left(g\left(X, Y\right)\right) = g\left(X, Y\right) \circ \pi , \tag{2.31} $$

$$ {}^{CG}g\left({}^{V}\omega, {}^{H}Y\right) = 0, \tag{2.32} $$

$$ {}^{CG}g\left({}^{V}\omega, {}^{V}\theta\right) = \frac{1}{1+r^2}\left(g^{-1}\left(\omega, \theta\right) + g^{-1}\left(\omega, p\right) g^{-1}\left(\theta, p\right)\right). \tag{2.33} $$

Burada $r^2 = g^{-1}\left(p, p\right) = g^{ij} p_i p_j$ şeklindedir.

${}^{CG}g \in \Im_2^0\left(\mathrm{T}^*M^n\right)$ tensör alanı ${}^{C}X$ ve ${}^{C}Y$ vektör alanlarıyla da tamamen tanımlanacağından, (2.6) kullanılarak,

$$ \begin{aligned} {}^{CG}g\left({}^{C}X, {}^{C}Y\right) = {}^{V}\left(g\left(X, Y\right)\right) + \frac{1}{1+r^2}\Big(& g^{-1}\left(p\left(\nabla X\right), p\left(\nabla Y\right)\right) \\ & + g^{-1}\left(p\left(\nabla X\right), p\right) g^{-1}\left(p\left(\nabla Y\right), p\right)\Big) \end{aligned} \tag{2.34} $$

elde ederiz. Burada $g^{-1}\left(p\left(\nabla X\right), p\left(\nabla Y\right)\right) = g^{ij}\left(p_l \nabla_i X^l\right)\left(p_k \nabla_j Y^k\right)$ ve $g^{-1}\left(p\left(\nabla X\right), p\right) = g^{ij} p_i \left(p\left(\nabla X\right)\right)_j$ şeklindedir. Böylece T^*M^n de ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriği için alternatif bir tanım elde edilmiş olur [3].

(1.35) ve (1.36) da verilmiş olan $\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\} = \left\{\tilde{e}_{(i)}, \tilde{e}_{(\bar{i})}\right\} = \left\{{}^{H}X_{(i)}, {}^{V}\theta^{(i)}\right\}$ adapte çatısı kullanılarak:

$$ {}^{CG}g_{ij} = {}^{CG}g\left(\tilde{e}_{(i)}, \tilde{e}_{(j)}\right) = {}^{V}\left(g\left(\partial_i, \partial_j\right)\right) = g_{ij} , $$

$$ {}^{CG}g_{\bar{i}\,j} = {}^{CG}g\left(\tilde{e}_{(\bar{i})}, \tilde{e}_{(j)}\right) = 0, $$

$$ \begin{aligned} {}^{CG}g_{\bar{i}\,\bar{j}} = {}^{CG}g\left(\tilde{e}_{(\bar{i})}, \tilde{e}_{(\bar{j})}\right) &= \frac{1}{1+r^2}\left(g^{-1}\left(dx^i, dx^j\right) + g^{-1}\left(dx^i, p_k\right) g^{-1}\left(dx^i, p_l\right)\right) \\ &= \frac{1}{1+r^2}\left(g^{ij} + g^{ik} g^{lj} p_k p_l\right), \end{aligned} $$

yazılır, yani $\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\}$ adapte çatıya göre ${}^{CG}g$ nin bileşenleri

$$ {}^{CG}g = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+r^2}\left(g^{ij} + g^{ik} g^{lj} p_k p_l\right) \end{pmatrix} \tag{2.35} $$

şeklindedir [3].

2.3.1. ${}^{CG}g$ nin Levi-Civita Konneksiyonu

Kotanjant demette Cheeger-Gromoll metriğinin Levi-Civita konneksiyonu için aşağıdaki teoremi yazarız.

Teorem 2.11: [3] $\left(M^n, g\right)$ Riemann manifoldu olsun. ${}^{CG}\nabla$, ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış T^*M^n kotanjant demetinin Levi – Civita konneksiyonu olsun. Bu takdirde ${}^{CG}\nabla$, her $X, Y \in \Im_0^1\left(M^n\right)$, $\omega, \theta \in \Im_1^0\left(M^n\right)$ için aşağıdakileri sağlar:

$$ \begin{aligned} &\text{i)}\quad {}^{CG}\nabla_{{}^H X}{}^H Y = {}^H\left(\nabla_X Y\right) + \frac{1}{2}{}^V\left(pR\left(X, Y\right)\right), \\ &\text{ii)}\quad {}^{CG}\nabla_{{}^H X}{}^V \omega = {}^V\left(\nabla_X \omega\right) + \frac{1}{2\alpha}{}^H\left(p\left(g^{-1} \circ R\left(\ , X\right)\tilde{\omega}\right)\right), \\ &\text{iii)}\quad {}^{CG}\nabla_{{}^V \omega}{}^H Y = \frac{1}{2\alpha}{}^H\left(p\left(g^{-1} \circ R\left(\ , Y\right)\tilde{\omega}\right)\right), \\ &\text{iv)}\quad {}^{CG}\nabla_{{}^V \omega}{}^V \theta = -\frac{1}{\alpha}\left({}^{CG}g\left({}^V\omega, \gamma\delta\right){}^V\theta + {}^{CG}g\left({}^V\theta, \gamma\delta\right){}^V\omega\right) + \frac{\alpha+1}{\alpha}{}^{CG}g\left({}^V\omega, {}^V\theta\right)\gamma\delta \\ &\qquad\qquad -\frac{1}{\alpha}{}^{CG}g\left({}^V\omega, \gamma\delta\right){}^{CG}g\left({}^V\theta, \gamma\delta\right)\gamma\delta. \end{aligned} \tag{2.36} $$

Burada $\tilde{\omega} = g^{-1} \circ \omega \in \Im_0^1\left(M^n\right)$, $R(\ ,X)\tilde{\omega} \in \Im_1^1\left(M^n\right)$, $g^{-1} \circ R(\ ,X)\tilde{\omega} \in \Im_0^2\left(M^n\right)$,

$\alpha = 1 + r^2$ dir. R, ∇ nın eğrilik tensörünü ve $\gamma\delta$, T^*M^n de $\gamma\delta = p_i e_{(\bar{i})}$ ile belirli olan kanonik dikey vektör alanını gösterir.

İspat: i) Sonuç 2.1'in direkt sonucudur.

ii) Tanım 2.1 ve Teorem 2.1 den

$$
\begin{aligned}
2\,{}^{CG}g\left({}^{CG}\nabla_{{}^HX}{}^V\omega, {}^HY\right) &= {}^{CG}g\left({}^V\left(pR(Y,X)\right), {}^V\omega\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(g^{-1}\left(pR(Y,X),\omega\right) + g^{-1}\left(pR(Y,X),p\right)g^{-1}(\omega,p)\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\,{}^{CG}g\left({}^H\left(p\left(g^{-1} \circ R(\ ,X)\tilde{\omega}\right)\right), {}^HY\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
2\,{}^{CG}g\left({}^{CG}\nabla_{{}^HX}{}^V\omega, {}^V\theta\right) &= \left({}^HX\left({}^{CG}g\left({}^V\omega, {}^V\theta\right)\right) - {}^{CG}g\left({}^V\omega, {}^V(\nabla_X\theta)\right) + {}^{CG}g\left({}^V\theta, {}^V(\nabla_X\omega)\right)\right) \\
&= {}^{CG}g\left({}^V\omega, {}^V(\nabla_X\theta)\right) + {}^{CG}g\left({}^V\theta, {}^V(\nabla_X\omega)\right) - {}^{CG}g\left({}^V\omega, {}^V(\nabla_X\theta)\right) + {}^{CG}g\left({}^V\theta, {}^V(\nabla_X\omega)\right) \\
&= 2\,{}^{CG}g\left({}^V\theta, {}^V(\nabla_X\omega)\right) = 2\,{}^{CG}g\left({}^V(\nabla_X\omega), {}^V\theta\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada,

$$
\begin{aligned}
g^{-1}\left(pR(Y,X),\omega\right) &= (g^{kl}\left(pR(Y,X)\right)_k\,\omega_l) \\
&= (g^{kl}p_sR_{ijk}{}^sY^iX^j\omega_l) = (p_sR_{ijk}{}^sY^iX^jg^{kl}\omega_l) \\
&= (p_sR_{ijk}{}^sY^iX^j\tilde{\omega}^k) = (g_{ai}p_sR^a_{.\ jk}{}^sY^iX^j\tilde{\omega}^k) \\
&= g\left(p\left(g^{-1}oR(\ ,X)\tilde{\omega}\right), Y\right) \\
&= {}^{CG}g\left({}^H\left(p\left(g^{-1} \circ R(\ ,X)\tilde{\omega}\right)\right), {}^HY\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g^{-1}\left(pR(Y,X),p\right) &= (g^{ij}p_sR_{abi}{}^sY^aX^bp_j) \\
&= (p_sg^{ts}R_{abit}Y^aX^b\tilde{p}^i) = (R_{abit}Y^aX^b\tilde{p}^i\tilde{p}^t) \\
&= (R_{itab}Y^aX^b\tilde{p}^i\tilde{p}^t) = (g_{fb}R_{ita.}{}^fY^aX^b\tilde{p}^i\tilde{p}^t) \\
&= g\left(R(\tilde{p},\tilde{p})Y, X\right) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
{}^HX\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0
$$

ve

$$
{}^HX\left({}^{CG}g\left({}^V\omega, {}^V\theta\right)\right) = {}^{CG}g\left({}^V\omega, {}^V(\nabla_X\theta)\right) + {}^{CG}g\left({}^V\theta, {}^V(\nabla_X\omega)\right),
$$

şeklindedir. Böylece

$$ {}^{CG}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}\omega = {}^{V}(\nabla_X \omega) + \frac{1}{2\alpha}{}^{H}\left(p\left(g^{-1}\circ R(\ \ ,X)\tilde{\omega}\right)\right) $$

elde ederiz.

iii) (ii) ye benzer olarak,

$$ 2\,{}^{CG}g\left({}^{CG}\nabla_{{}^{V}\omega}{}^{H}Y, {}^{V}\theta\right) = \left({}^{H}Y\left({}^{CG}g\left({}^{V}\omega, {}^{V}\theta\right)\right) - {}^{CG}g\left({}^{V}\omega, {}^{V}(\nabla_Y\theta)\right) - {}^{CG}g\left({}^{V}\theta, {}^{V}(\nabla_Y\omega)\right)\right) $$

$$ = {}^{CG}g\left({}^{V}\omega, {}^{V}(\nabla_Y\theta)\right) + {}^{CG}g\left({}^{V}\theta, {}^{V}(\nabla_Y\omega)\right) - {}^{CG}g\left({}^{V}\omega, {}^{V}(\nabla_Y\theta)\right) - {}^{CG}g\left({}^{V}\theta, {}^{V}(\nabla_Y\omega)\right) $$

$$ = 0 $$

ve

$$ 2\,{}^{CG}g\left({}^{CG}\nabla_{{}^{V}\omega}{}^{H}Y, {}^{H}Z\right) = -{}^{CG}g\left({}^{V}\omega, {}^{V}\left(pR(Y,Z)\right)\right) $$

$$ = -\frac{1}{\alpha}\left(g^{-1}\left(\omega, pR(Y,Z)\right) + g^{-1}\left(pR(Y,Z), p\right)g^{-1}(\omega,p)\right) $$

$$ = \frac{1}{\alpha}\,{}^{CG}g\left({}^{H}\left(p\left(g^{-1}\circ R(\ \ ,Y)\tilde{\omega}\right)\right), {}^{H}Z\right). $$

Böylece,

$$ {}^{CG}\nabla_{{}^{V}\omega}{}^{H}Y = \frac{1}{2\alpha}{}^{H}\left(p\left(g^{-1}\circ R(\ \ ,Y)\tilde{\omega}\right)\right). $$

elde ederiz.

iv) Teorem 2.1 den

$$ {}^{CG}g\left({}^{CG}\nabla_{{}^{V}\omega}{}^{V}\theta, {}^{H}Z\right) = \frac{1}{2}\left(-{}^{H}Z\left({}^{CG}g\left({}^{V}\omega, {}^{V}\theta\right)\right) + {}^{CG}g\left({}^{V}\omega, {}^{V}(\nabla_Z\theta)\right) + {}^{CG}g\left({}^{V}\theta, {}^{V}(\nabla_Z\omega)\right)\right) $$

$$ = -{}^{CG}g\left({}^{V}\omega, {}^{V}(\nabla_Z\theta)\right) - {}^{CG}g\left({}^{V}\theta, {}^{V}(\nabla_Z\omega)\right) + {}^{CG}g\left({}^{V}\omega, {}^{V}(\nabla_Z\theta)\right) + {}^{CG}g\left({}^{V}\theta, {}^{V}(\nabla_Z\omega)\right) $$

$$ = 0 $$

yazarız. ${}^{V}\omega\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{2}{\alpha^2}g^{-1}(\omega,p)$ eşitliğini kullanarak

$$ {}^{V}\omega\left({}^{CG}g\left({}^{V}\theta, {}^{V}\xi\right)\right) = -\frac{2}{\alpha^2}g^{-1}(\omega,p)\left[g^{-1}(\theta,\xi) + g^{-1}(\theta,p)g^{-1}(\xi,p)\right] $$

$$ +\frac{1}{\alpha}\left(g^{-1}(\omega,\theta)g^{-1}(\xi,p) + g^{-1}(\theta,\omega)g^{-1}(\omega,\xi)\right) $$

ve

$$ {}^{CG}g\left({}^{V}\omega, \gamma\delta\right) = \frac{1}{\alpha}\left(g^{-1}(\omega,p) + g^{-1}(\omega,p)g^{-1}(p,p)\right) = \frac{1}{\alpha}g^{-1}(\omega,p)\left(1+g^{-1}(p,p)\right) $$

$$ = g^{-1}(\omega,p) $$

kullanılarak,

$$\alpha^2\,{}^{CG}g\left({}^{CG}\nabla_{{}^V\omega}{}^V\theta,{}^V\xi\right)=\frac{\alpha^2}{2}\left({}^V\omega\left({}^{CG}g\left({}^V\theta,{}^V\xi\right)\right)+{}^V\theta\left({}^{CG}g\left({}^V\xi,{}^V\omega\right)\right)-{}^V\xi\left({}^{CG}g\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)\right)\right)$$
$$\begin{aligned}
&=-g^{-1}(\omega,p)g^{-1}(\theta,\xi)-g^{-1}(\omega,p)g^{-1}(\theta,p)g^{-1}(\xi,p)\\
&\quad+\frac{\alpha}{2}g^{-1}(\omega,\theta)g^{-1}(\xi,p)+\frac{\alpha}{2}g^{-1}(\theta,p)g^{-1}(\omega,\xi)\\
&\quad-g^{-1}(\theta,p)g^{-1}(\xi,\omega)-g^{-1}(\theta,p)g^{-1}(\xi,p)g^{-1}(\omega,p)\\
&\quad+\frac{\alpha}{2}g^{-1}(\theta,\xi)g^{-1}(\omega,p)+\frac{\alpha}{2}g^{-1}(\xi,p)g^{-1}(\theta,\omega)\\
&\quad+g^{-1}(\xi,p)g^{-1}(\omega,\theta)+g^{-1}(\xi,p)g^{-1}(\omega,p)g^{-1}(\theta,p)\\
&\quad-\frac{\alpha}{2}g^{-1}(\xi,\omega)g^{-1}(\theta,p)-\frac{\alpha}{2}g^{-1}(\omega,p)g^{-1}(\xi,\theta)\\
&=-g^{-1}(\omega,p)g^{-1}(\theta,\xi)+\alpha g^{-1}(\omega,\theta)g^{-1}(\xi,p)\\
&\quad-g^{-1}(\theta,p)g^{-1}(\xi,\omega)-g^{-1}(\theta,p)g^{-1}(\xi,p)g^{-1}(\omega,p)\\
&\quad+g^{-1}(\xi,p)g^{-1}(\omega,\theta)\\
&=-\alpha g^{-1}(\omega,p)\,{}^{CG}g\left({}^V\theta,{}^V\xi\right)+\alpha g^{-1}(\xi,p)\,{}^{CG}g\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)\\
&\quad-\alpha g^{-1}(\theta,p)\,{}^{CG}g\left({}^V\xi,{}^V\omega\right)-\alpha g^{-1}(\theta,p)g^{-1}(\xi,p)g^{-1}(\omega,p)\\
&\quad+\alpha^2 g^{-1}(\xi,p)\,{}^{CG}g\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)\\
&={}^{CG}g\,(-\,{}^{CG}g\left({}^V\omega,\gamma\delta\right){}^V\theta-\alpha\,{}^{CG}g\left({}^V\theta,\gamma\delta\right){}^V\omega+\alpha\,{}^{CG}g\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)\gamma\delta\\
&\quad+\alpha^2\,{}^{CG}g\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)\gamma\delta-{}^{CG}g\left({}^V\theta,\gamma\delta\right)g\left({}^V\omega,\gamma\delta\right)\gamma\delta,{}^V\xi\right).
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned}
{}^{CG}\nabla_{{}^V\omega}{}^V\theta&=-\frac{1}{\alpha}\left({}^{CG}g\left({}^V\omega,\gamma\delta\right){}^V\theta+{}^{CG}g\left({}^V\theta,\gamma\delta\right){}^V\omega\right)+\frac{\alpha+1}{\alpha}\,{}^{CG}g\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)\gamma\delta\\
&\quad-\frac{1}{\alpha}\,{}^{CG}g\left({}^V\theta,\gamma\delta\right)g\left({}^V\omega,\gamma\delta\right)\gamma\delta
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

T^*M^n de $\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\}$ adapte çatısına göre ${}^{CG}\nabla_{e_\alpha}e_\beta={}^{CG}\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}e_\delta$ yazarız. Burada ${}^{CG}\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}$, ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriğine göre Christoffel sembolünü göstermektedir.

Teorem 2.11 den aşağıdaki sonucu yazarız.

Sonuç 2.4: $\left(M^n,g\right)$ Riemann manifoldu olsun. ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış T^*M^n kotanjant demetinin ${}^{CG}\nabla$, Levi – Civita konneksiyonu verilsin. (2.36) yı kullanarak, $\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\}$ adapte çatısına göre ${}^{CG}\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}$ nin farklı indisler için değerlerini

$$
\begin{aligned}
&{}^{CG}\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}, && {}^{CG}\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{k} = {}^{CG}\Gamma_{\bar{i}j}^{\bar{k}} = 0,\\
&{}^{CG}\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = -\Gamma_{ik}^{j}, && {}^{CG}\Gamma_{ij}^{\bar{k}} = \frac{1}{2}p_a R_{ijk}{}^{a},\\
&{}^{CG}\Gamma_{\bar{i}j}^{k} = \frac{1}{2\alpha}p_a R_{.\ j.}^{k\ ia}, && {}^{CG}\Gamma_{i\bar{j}}^{k} = \frac{1}{2\alpha}p_a R_{.\ i.}^{k\ ja}\ ,\\
&{}^{CG}\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} = -\frac{1}{\alpha}\left(p^i\delta_k^j + p^j\delta_k^i\right) + \frac{\alpha+1}{\alpha^2}g^{ij}p_k + \frac{1}{\alpha^2}p^i p^j p_k
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

şeklinde buluruz. Burada $p^i = g^{it}p_t$, $R_{.\ j.}^{k\ ia} = g^{kt}g^{is}R_{tjs}{}^{a}$ dir [3].

2.3.2. ${}^{CG}\nabla$ nin Eğrilik Tensörü

${}^{CG}R$, ${}^{CG}\nabla$ nin eğrilik tensörü olsun. Bu takdirde ${}^{CG}R$,

$$
{}^{CG}R\left(\tilde{e}_{(\alpha)},\tilde{e}_{(\beta)}\right)\tilde{e}_{(\gamma)} = {}^{CG}\nabla_{\alpha}\,{}^{CG}\nabla_{\beta}\tilde{e}_{(\gamma)} - {}^{CG}\nabla_{\beta}\,{}^{CG}\nabla_{\alpha}\tilde{e}_{(\gamma)} - \Omega_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon}\,{}^{CG}\nabla_{\varepsilon}\tilde{e}_{(\gamma)},
$$

biçimindedir. Burada ${}^{CG}\nabla_{\alpha} = {}^{CG}\nabla_{\tilde{e}_{(\alpha)}}$ dir. $\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\}$ adapte çatısına göre ${}^{CG}R$ eğrilik tensörünün bileşenleri

$$
{}^{CG}R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma} = \tilde{e}_{\alpha}\,{}^{CG}\Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma} - \tilde{e}_{\beta}\,{}^{CG}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} + {}^{CG}\Gamma_{\alpha\varepsilon}^{\sigma}\,{}^{CG}\Gamma_{\beta\gamma}^{\varepsilon} - {}^{CG}\Gamma_{\beta\varepsilon}^{\sigma}\,{}^{CG}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\varepsilon} - \Omega_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon}\,{}^{CG}\Gamma_{\varepsilon\gamma}^{\sigma}
$$

şeklindedir.

Buradan (2.11) ve (2.37) yi kullanarak ${}^{CG}R$ eğrilik tensörünün bileşenlerini

$$
\begin{aligned}
&{}^{CG}R_{kij}{}^{l} = R_{kij}{}^{l} - \frac{1}{2\alpha}p_m p_a R_{kit}{}^{a}R_{.\ j.}^{l\ tm} + \frac{1}{4\alpha}p_m p_a\left(R_{.\ k.}^{l\ tm}R_{ijt}{}^{a} - R_{.\ i.}^{l\ tm}R_{kjt}{}^{a}\right),\\
&{}^{CG}R_{k\bar{i}j}{}^{l} = \frac{1}{2\alpha}p_m \nabla_k R_{.\ j.}^{l\ im},\\
&{}^{CG}R_{ki\bar{j}}{}^{l} = \frac{1}{2\alpha}p_m\left(\nabla_k R_{.\ i.}^{l\ jm} - \nabla_i R_{.\ k.}^{l\ jm}\right),\\
&{}^{CG}R_{kij}{}^{\bar{l}} = \frac{1}{2}p_m\left(\nabla_k R_{ijl}{}^{m} - \nabla_i R_{kjl}{}^{m}\right),\\
&{}^{CG}R_{ki\bar{j}}{}^{\bar{l}} = R_{ikl}{}^{j} + \frac{1}{4\alpha}p_m p_a\left(R_{ktl}{}^{m}R_{.\ i.}^{t\ ja} - R_{itl}{}^{m}R_{.\ k.}^{t\ ja}\right) + \frac{1}{\alpha}p_a p^j R_{kil}{}^{a}\\
&\qquad - \frac{\alpha+1}{\alpha^2}p_l p_a R_{ki.}{}^{ja},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{CG}R_{\bar{k}\,i\,j}{}^{\bar{l}} &= \frac{1}{2}R_{ijl}{}^{k} - \frac{1}{4\alpha}p_m p_a R_{itl}{}^{m} R^{t}_{.\,j.}{}^{ka} - \frac{1}{2\alpha}p_a p^k R_{ijl}{}^{a} \\
&\quad + \frac{\alpha+1}{2\alpha^2}p_a p_l R_{ij.}{}^{ka},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{CG}R_{\bar{k}\,\bar{i}\,j}{}^{l} &= \frac{1}{\alpha^2}p_a\left(p^i R^{l}_{.\,j.}{}^{ka} - p^k R^{l}_{.\,j.}{}^{ia}\right) + \frac{1}{2\alpha}\left(R^{l}_{.\,j.}{}^{ik} - R^{l}_{.\,j.}{}^{ki}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4\alpha^2}p_m p_a\left(R^{l}_{.\,t.}{}^{km} R^{t}_{.\,j.}{}^{ia} - R^{l}_{.\,t.}{}^{im} R^{t}_{.\,j.}{}^{ka}\right),
\end{aligned}
$$

$$
{}^{CG}R_{\bar{k}\,i\,\bar{j}}{}^{l} = \frac{1}{2\alpha}R^{l}_{.\,i.}{}^{jk} + \frac{1}{2\alpha^2}p_a\left(p^j R^{l}_{.\,i.}{}^{ka} - p^k R^{l}_{.\,i.}{}^{ja}\right) + \frac{1}{4\alpha^2}p_m p_a R^{l}_{.\,t.}{}^{km} R^{t}_{.\,i.}{}^{ja},
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{CG}R_{\bar{k}\,\bar{i}\,\bar{j}}{}^{\bar{l}} &= \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^3}\left(g^{ij}\delta^k_l - g^{jk}\delta^i_l\right) + \frac{\alpha+2}{\alpha^3}\left(g^{kj}p^i p_l - g^{ij}p^k p_l\right) \\
&\quad + \frac{\alpha-1}{\alpha^3}\left(\delta^i_l p^k p^j - \delta^k_l p^i p^j\right),
\end{aligned}
$$

$$
{}^{CG}R_{k\,\bar{i}\,\bar{j}}{}^{\bar{l}} = {}^{CG}R_{\bar{k}\,\bar{i}\,j}{}^{\bar{l}} = {}^{CG}R_{\bar{k}\,\bar{i}\,\bar{j}}{}^{l} = {}^{CG}R_{\bar{k}\,i\,\bar{j}}{}^{\bar{l}} = 0 \tag{2.38}
$$

elde ederiz [3].

Teorem 2.12: [3] (M^n, g) Riemann manifoldu olsun ve T^*M^n de M^n nin, ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış kotanjant demeti olsun. Bu takdirde $(T^*M^n, {}^{CG}g)$ in ${}^{CG}K$ kesit eğriliği aşağıdakileri sağlar:

i) ${}^{CG}K\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) = K(X,Y) - \dfrac{3}{4\alpha}\left|pR(X,Y)\right|^2,$

ii) ${}^{CG}K\left({}^{H}X, {}^{V}\omega\right) = \dfrac{1}{4\alpha}\dfrac{\left|\left(pR(\ ,X)\tilde{\omega}\right)\right|^2}{\left(1+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^2\right)},$

iii) ${}^{CG}K\left({}^{V}\omega, {}^{V}\theta\right) = \dfrac{1-\alpha}{\alpha^2} + \dfrac{\alpha+2}{\alpha}\dfrac{1}{\left(1+\left(g^{-1}(\theta,p)\right)^2 + \left(g^{-1}(\omega,p)\right)^2\right)}.$

Burada K, (M^n, g) nin kesit eğriliğini göstermektedir ve $\tilde{\omega} = g^{-1}\circ\omega = (g^{ij}\omega_j) \in \Im^1_0(M^n)$, $R(\ ,X)\tilde{\omega} \in \Im^1_1(M^n)$ şeklindedir.

İspat: $(T^*M^n, {}^{CG}g)$ de kesit eğriliği

$$
{}^{CG}K(P) = -\frac{{}^{CG}R_{kmij}U^k V^m U^i V^j}{({}^{CG}g_{ki}\,{}^{CG}g_{mj} - {}^{CG}g_{kj}\,{}^{CG}g_{mi})U^k V^m U^i V^j} \quad ,
$$

şeklindedir. Burada $P=(U,V)$, (U,V) ile gerilen düzlemi göstermektedir [16]. $\{X_i\}$ ve $\{\omega^i\}$, $i=1,...,n$, M^n de lokal ortonormal çatı ve eş çatı olsun. Bu takdirde (2.31)-(2.33) den $\{{}^HX_1,...,{}^HX_n,{}^V\omega^1,...,{}^V\omega^n\}$, T^*M^n de bir lokal ortonormal çatıdır. ${}^{CG}K({}^HX,{}^HY)$, ${}^{CG}K({}^HX,{}^V\theta)$ ve ${}^{CG}K({}^V\omega,{}^V\theta)$, $(T^*M^n,{}^{CG}g)$ de sırasıyla $({}^HX,{}^HY)$, $({}^HX,{}^V\theta)$ ve $({}^V\omega,{}^V\theta)$ ile gerilen düzlemin kesit eğriliği olsun. (1.37), (1.38), (2.35) ve (2.38)'i kullanarak gerekli hesaplamaları yaparsak,

i) $${}^SK({}^HX,{}^HY)=-\frac{{}^{CG}R_{kijs}\,{}^H\tilde{X}^k\,{}^H\tilde{Y}^i\,{}^H\tilde{X}^j\,{}^H\tilde{Y}^s}{({}^{CG}g_{kj}\,{}^{CG}g_{is}-{}^{CG}g_{ks}\,{}^{CG}g_{ij})\,{}^H\tilde{X}^k\,{}^H\tilde{Y}^i\,{}^H\tilde{X}^j\,{}^H\tilde{Y}^s}$$

$$=-\frac{{}^{CG}R_{kij}{}^{l}\,{}^{CG}g_{sl}\,{}^H\tilde{X}^k\,{}^H\tilde{Y}^i\,{}^H\tilde{X}^j\,{}^H\tilde{Y}^s+{}^SR_{kij}{}^{\bar{l}}\,{}^{CG}g_{s\bar{l}}\,{}^H\tilde{X}^k\,{}^H\tilde{Y}^i\,{}^H\tilde{X}^j\,{}^H\tilde{Y}^s}{({}^{CG}g_{kj}\,{}^{CG}g_{is}-{}^{CG}g_{ks}\,{}^{CG}g_{ij})\,{}^H\tilde{X}^k\,{}^H\tilde{Y}^i\,{}^H\tilde{X}^j\,{}^H\tilde{Y}^s}$$

$$=\frac{\left(-R_{kij}{}^{l}+\frac{1}{2\alpha}p_mp_aR_{kit}{}^{a}R^{l}{}_{.\,j.}{}^{tm}-\frac{1}{4\alpha}p_mp_a\left(R^{l}{}_{.\,k.}{}^{tm}R_{ijt}{}^{a}-R^{l}{}_{.\,i.}{}^{tm}R_{kjt}{}^{a}\right)\right)g_{sl}X^kY^iX^jY^s}{({}^{CG}g_{kj}\,{}^{CG}g_{is}-{}^{CG}g_{ks}\,{}^{CG}g_{ij})X^kY^iX^jY^s}$$

$$=-\frac{R_{kij}{}^{l}g_{sl}X^kY^iX^jY^s}{(g_{kj}g_{is}-g_{ks}g_{ij})X^kY^iX^jY^s}+\frac{\frac{1}{2\alpha}p_mp_aR_{kit}{}^{a}R_{sjf}{}^{m}g^{tf}X^kY^iX^jY^s}{(g_{kj}g_{is}-g_{ks}g_{ij})X^kY^iX^jY^s}$$
$$-\frac{\frac{1}{4\alpha}p_mp_aR_{skf}{}^{m}R_{ijt}{}^{a}g^{tf}X^kY^iX^jY^s}{(g_{kj}g_{is}-g_{ks}g_{ij})X^kY^iX^jY^s}+\frac{\frac{1}{4\alpha}p_mp_aR_{sif}{}^{m}R_{kjt}{}^{a}g^{tf}X^kY^iX^jY^s}{(g_{kj}g_{is}-g_{ks}g_{ij})X^kY^iX^jY^s}$$

$$=K(X,Y)-\frac{\frac{1}{2\alpha}g^{tf}\left(pR(X,Y)\right)_t\left(pR(X,Y)\right)_f}{\left(g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)g(X,Y)\right)}$$
$$-\frac{\frac{1}{4\alpha}g^{tf}\left(pR(Y,X)\right)_t\left(pR(Y,X)\right)_f}{\left(g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)g(X,Y)\right)}+\frac{\frac{1}{4\alpha}g^{tf}\left(pR(Y,Y)\right)_t\left(pR(X,X)\right)_f}{\left(g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)g(X,Y)\right)}$$

$$=K(X,Y)-\frac{3}{4\alpha}\left|pR(X,Y)\right|^2\ .$$

ii) $$ {}^{CG}K\left({}^{H}X,{}^{V}\theta\right)=-\frac{{}^{CG}R_{k\bar{l}\,j\bar{s}}\;{}^{H}\tilde{X}^{k}\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\bar{l}}\;{}^{H}\tilde{X}^{j}\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\bar{s}}}{({}^{CG}g_{k\,j}\;{}^{CG}g_{\bar{l}\,\bar{s}}-{}^{CG}g_{k\,\bar{s}}\;{}^{CG}g_{\bar{l}\,j})\,{}^{H}\tilde{X}^{k}\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\bar{l}}\;{}^{H}\tilde{X}^{j}\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\bar{s}}} $$

$$ =-\frac{{}^{CG}R_{k\bar{l}\,j}{}^{l}\;{}^{CG}g_{\bar{s}\,l}X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}-{}^{CG}R_{k\bar{l}\,j}{}^{\bar{l}}\;{}^{CG}g_{\bar{s}\,\bar{l}}X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}}{\left(g_{kj}\left(\frac{1}{\alpha}\left(g^{is}+g^{ia}g^{sb}p_{a}p_{b}\right)\right)\right)X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}} $$

$$ =\left(\frac{\frac{1}{2}R_{kjl}{}^{i}-\frac{1}{4\alpha}p_{m}p_{a}R_{ktl}{}^{m}R^{t}{}_{.\,j.}{}^{ia}-\frac{1}{2\alpha}p_{a}p^{i}R_{kjl}{}^{a}}{\left(\frac{1}{\alpha}\left(g^{is}g_{kj}+g^{ia}g^{sb}g_{kj}p_{a}p_{b}\right)\right)X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}}\right. $$

$$ \left.+\frac{\frac{\alpha+1}{2\alpha^{2}}p_{a}p_{l}R_{kj.}{}^{ia}}{\left(\frac{1}{\alpha}\left(g^{is}g_{kj}+g^{ia}g^{sb}g_{kj}p_{a}p_{b}\right)\right)X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}}\right)\left(\frac{1}{\alpha}\left(g^{sl}+g^{su}g^{lv}p_{u}p_{v}\right)\right)X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s} $$

$$ =\frac{\frac{1}{2\alpha}R_{kjl}{}^{i}g^{su}g^{lv}p_{u}p_{v}X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}-\frac{1}{4\alpha^{2}}p_{m}p_{a}R_{ktl}{}^{m}R^{t}{}_{.\,j.}{}^{ia}g^{sl}X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega}{\left(\frac{1}{\alpha}\left(g^{is}g_{kj}+g^{ia}g^{sb}g_{kj}p_{a}p_{b}\right)\right)X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}} $$

$$ +\frac{\frac{1}{2\alpha}R_{kjl}{}^{i}g^{sl}X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}-\frac{1}{4\alpha^{2}}p_{m}p_{a}R_{ktl}{}^{m}R^{t}{}_{.\,j.}{}^{ia}g^{su}g^{lv}p_{u}p_{v}X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}}{\left(\frac{1}{\alpha}\left(g^{is}g_{kj}+g^{ia}g^{sb}g_{kj}p_{a}p_{b}\right)\right)X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}} $$

$$ -\frac{\frac{1}{2\alpha^{2}}p_{a}R_{kjl}{}^{a}p^{i}g^{sl}X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}-\frac{1}{2\alpha^{2}}p_{a}R_{kjl}{}^{a}p^{i}g^{su}g^{lv}p_{u}p_{v}X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}}{\left(\frac{1}{\alpha}\left(g^{is}g_{kj}+g^{ia}g^{sb}g_{kj}p_{a}p_{b}\right)\right)X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}} $$

$$ +\frac{\frac{\alpha+1}{2\alpha^{3}}p_{a}p_{l}R_{kj.}{}^{ia}g^{sl}X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}+\frac{\alpha+1}{2\alpha^{3}}p_{a}p_{l}R_{kj.}{}^{ia}g^{su}g^{lv}p_{u}p_{v}X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}}{\left(\frac{1}{\alpha}\left(g^{is}g_{kj}+g^{ia}g^{sb}g_{kj}p_{a}p_{b}\right)\right)X^{k}\omega_{i}X^{j}\omega_{s}} $$

$$ =\frac{\frac{1}{4\alpha^{2}}g^{tf}\left(pR(\;,X)\tilde{\omega}\right)_{t}\left(pR(\;,X)\tilde{\omega}\right)_{f}}{\frac{1}{\alpha}\left(g(X,X)g^{-1}(\omega,\omega)+g(X,X)\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^{2}\right)} $$

$$ =\frac{1}{4\alpha}\frac{\left|\left(pR(\;,X)\tilde{\omega}\right)\right|^{2}}{\left(1+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^{2}\right)}\;, $$

iii) $$ {}^{CG}K\left({}^{V}\omega,{}^{V}\theta\right)=-\frac{{}^{CG}R_{\varepsilon\gamma\alpha\beta}\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\varepsilon}\,{}^{V}\tilde{\theta}^{\gamma}\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\alpha}\,{}^{V}\tilde{\theta}^{\beta}}{({}^{CG}g_{\varepsilon\alpha}\,{}^{CG}g_{\gamma\beta}-{}^{CG}g_{\varepsilon\beta}\,{}^{CG}g_{\gamma\alpha})\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\varepsilon}\,{}^{V}\tilde{\theta}^{\gamma}\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\alpha}\,{}^{V}\tilde{\theta}^{\beta}} $$

$$ =-\frac{{}^{CG}R_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}\bar{s}}\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\bar{k}}\,{}^{V}\tilde{\theta}^{\bar{i}}\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\bar{j}}\,{}^{V}\tilde{\theta}^{\bar{s}}}{({}^{CG}g_{\bar{k}\bar{j}}\,{}^{CG}g_{\bar{i}\bar{s}}-{}^{CG}g_{\bar{k}\bar{s}}\,{}^{CG}g_{\bar{i}\bar{j}})\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\bar{k}}\,{}^{V}\tilde{\theta}^{\bar{i}}\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\bar{j}}\,{}^{V}\tilde{\theta}^{\bar{s}}} $$

$$ =-\frac{{}^{CG}R_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}}{}^{L}\,{}^{CG}g_{\bar{s}L}\,\omega_k\theta_i\omega_j\theta_s}{({}^{CG}g_{\bar{k}\bar{j}}\,{}^{CG}g_{\bar{i}\bar{s}}-{}^{CG}g_{\bar{k}\bar{s}}\,{}^{CG}g_{\bar{i}\bar{j}})\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\bar{k}}\,{}^{V}\tilde{\theta}^{\bar{i}}\,{}^{V}\tilde{\omega}^{\bar{j}}\,{}^{V}\tilde{\theta}^{\bar{s}}} $$

$$ =-\frac{{}^{CG}R_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}}{}^{l}\,{}^{CG}g_{\bar{s}l}\,\omega_k\theta_i\omega_j\theta_s-{}^{CG}R_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}}{}^{\bar{l}}\,{}^{CG}g_{\bar{s}\bar{l}}\,\omega_k\theta_i\omega_j\theta_s}{({}^{CG}g_{\bar{k}\bar{j}}\,{}^{CG}g_{\bar{i}\bar{s}}-{}^{CG}g_{\bar{k}\bar{s}}\,{}^{CG}g_{\bar{i}\bar{j}})\,\omega_k\theta_i\omega_j\theta_s} $$

$$ =\left[\frac{\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^3}\left(g^{jk}\delta_l^i-g^{ij}\delta_l^k\right)-\frac{\alpha+2}{\alpha^3}\left(g^{kj}p^ip_l-g^{ij}p^kp_l\right)}{P}\right. $$

$$ \left.-\frac{\frac{\alpha-1}{\alpha^3}\left(\delta_l^ip^kp^j-\delta_l^kp^ip^j\right)}{P}\right]\left(\frac{1}{\alpha}\left(g^{sl}+g^{sa}g^{lb}p_ap_b\right)\right)\omega_k\theta_i\omega_j\theta_s $$

$$ =\frac{\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^4}+\frac{1-\alpha}{\alpha^4}\left(g^{-1}(\theta,p)\right)^2+\frac{1-\alpha}{\alpha^4}\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^2}{\frac{1}{\alpha^2}\left(1+\left(g^{-1}(\theta,p)\right)^2+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^2\right)} $$

$$ =\frac{1-\alpha}{\alpha^2}+\frac{\alpha+2}{\alpha}\frac{1}{\left(1+\left(g^{-1}(\theta,p)\right)^2+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^2\right)}, $$

elde ederiz. Burada

$$ P=({}^{CG}g_{\bar{k}\bar{j}}\,{}^{CG}g_{\bar{i}\bar{s}}-{}^{CG}g_{\bar{k}\bar{s}}\,{}^{CG}g_{\bar{i}\bar{j}})\,\omega_k\theta_i\omega_j\theta_s $$

$$ =\left(\frac{1}{\alpha}\left(g^{kj}+g^{ka}g^{jb}p_ap_b\right)\frac{1}{\alpha}\left(g^{is}+g^{it}g^{sf}p_tp_f\right)-\frac{1}{\alpha}\left(g^{ks}+g^{kc}g^{sd}p_cp_d\right)\frac{1}{\alpha}\left(g^{ij}+g^{iu}g^{jv}p_up_v\right)\right) $$

$$ \omega_k\theta_i\omega_j\theta_s=\frac{1}{\alpha^2}\left(g^{kj}g^{is}+g^{kj}g^{it}g^{sf}p_tp_f+g^{ka}g^{jb}p_ap_bg^{is}+g^{ka}g^{jb}p_ap_bg^{it}g^{sf}p_tp_f\right)\omega_k\theta_i\omega_j\theta_s $$

$$ -\frac{1}{\alpha^2}\left(g^{ks}g^{ij}+g^{ks}g^{iu}g^{jv}p_up_v+g^{kc}g^{sd}p_cp_dg^{ij}+g^{kc}g^{sd}p_cp_dg^{iu}g^{jv}p_up_v\right)\omega_k\theta_i\omega_j\theta_s $$

$$ =\frac{1}{\alpha^2}\left(g^{-1}(\omega,\omega)g^{-1}(\theta,\theta)+g^{-1}(\omega,\omega)\left(g^{-1}(\theta,p)\right)^2+g^{-1}(\theta,\theta)\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^2\right. $$

$$ +\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^2\left(g^{-1}(\theta,p)\right)^2-\left(g^{-1}(\omega,\theta)\right)^2-g^{-1}(\omega,\theta)g^{-1}(\omega,p)g^{-1}(\theta,p) $$

$$ \left.-g^{-1}(\omega,\theta)g^{-1}(\omega,p)g^{-1}(\theta,p)-\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^2\left(g^{-1}(\theta,p)\right)^2\right) $$

$$ =\frac{1}{\alpha^2}\left(1+\left(g^{-1}(\theta,p)\right)^2+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^2\right) $$

şeklindedir.

Teorem 2.13: [3] $\left(M^n, g\right)$, K sabit kesit eğrilikli Rieman manifoldu olsun. T^*M^n, M^n in ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış kotanjant demeti olsun. Bu takdirde $\left(T^*M^n, {}^{CG}g\right)$nin ${}^{CG}K$, kesit eğriliği aşağıdakileri sağlar:

i) $${}^{CG}K\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) = K - \frac{3}{4\alpha}K^2\left(\left(g^{-1}\left(p,\tilde{X}\right)\right)^2 + \left(g^{-1}\left(p,\tilde{Y}\right)\right)^2\right),$$

ii) $${}^{CG}K\left({}^{H}X, {}^{V}\omega\right) = \begin{cases} \dfrac{K^2\left(r^2 - 2g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)g^{-1}(\omega,p) + \left(g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)\right)^2\right)}{4\alpha\left(1+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^2\right)}, & g(X,\tilde{\omega}) = 1, \\ \dfrac{K^2\left(\left(g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)\right)^2\right)}{4\alpha\left(1+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^2\right)}, & g(X,\tilde{\omega}) = 0, \end{cases}$$

iii) $${}^{CG}K\left({}^{V}\omega, {}^{V}\theta\right) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha+2}{\alpha}\frac{1}{\left(1+\left(g^{-1}(\theta,p)\right)^2 + \left(g^{-1}(\omega,p)\right)^2\right)}.$$

Burada $\tilde{\omega} = g^{-1}\circ\omega = (g^{ij}\omega_j) \in \Im^1_0\left(M^n\right)$ ve $X^i = g^{ij}X_j = g^{-1}\circ\tilde{X} \in \Im^1_0\left(M^n\right)$ şeklindedir.

İspat : $R_{kmj}{}^{s} = K\left(\delta^s_k g_{mj} - \delta^s_m g_{kj}\right)$ eşitliğini kullanalım. Teorem 2.12 den,

i) $$\begin{aligned} {}^{CG}K\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) &= K(X,Y) - \frac{3}{4\alpha}\left|pR(X,Y)\right|^2 \\ &= K - \frac{3}{4\alpha}g^{ij}\left(pR(X,Y)\right)_i\left(pR(X,Y)\right)_j \\ &= K - \frac{3}{4\alpha}g^{ij}p_aK\left(\delta^a_k g_{li} - \delta^a_l g_{ki}\right)p_bK\left(\delta^b_f g_{mj} - \delta^b_m g_{fj}\right)X^kY^lX^fY^m \\ &= K - \frac{3}{4\alpha}K^2\Big[g^{-1}\left(\tilde{Y},\tilde{Y}\right)g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)g^{-1}\left(\tilde{X},p\right) \\ &\quad - g^{-1}(X,Y)g^{-1}(X,p)g^{-1}(Y,p) - g^{-1}(X,Y)g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)g^{-1}\left(\tilde{Y},p\right) \\ &\quad + g^{-1}(X,X)g^{-1}\left(\tilde{Y},p\right)g^{-1}\left(\tilde{Y},p\right)\Big] \\ &= K - \frac{3}{4\alpha}K^2\left(\left(g^{-1}\left(p,\tilde{X}\right)\right)^2 + \left(g^{-1}\left(p,\tilde{Y}\right)\right)^2\right). \end{aligned}$$

ii) $$ {}^{CG}K\left({}^{H}X,{}^{V}\omega\right)=\frac{\left|pR(\ ,X)\tilde{\omega}\right|^{2}}{4\alpha\left(1+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^{2}\right)}=\frac{g^{tf}\left(pR(\ ,X)\tilde{\omega}\right)_{t}\left(pR(\ ,X)\tilde{\omega}\right)_{f}}{4\alpha\left(1+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^{2}\right)} $$

$$ =\frac{g^{tf}p_{a}R_{tij}{}^{a}X^{i}\tilde{\omega}^{j}p_{b}R_{fkm}{}^{b}X^{k}\tilde{\omega}^{m}}{4\alpha\left(1+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^{2}\right)} $$

$$ =\frac{g^{tf}p_{a}\left(K\left(\delta_{t}^{a}g_{ij}-\delta_{i}^{a}g_{tj}\right)\right)X^{i}\tilde{\omega}^{j}p_{b}\left(K\left(\delta_{f}^{b}g_{km}-\delta_{k}^{b}g_{fm}\right)\right)X^{k}\tilde{\omega}^{m}}{4\alpha\left(1+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^{2}\right)} $$

$$ =\frac{g^{tf}\left(K\left(p_{t}g_{ij}-p_{i}g_{tj}\right)\right)X^{i}\tilde{\omega}^{j}\left(K\left(p_{f}g_{km}-p_{k}g_{fm}\right)\right)X^{k}\tilde{\omega}^{m}}{4\alpha\left(1+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^{2}\right)} $$

$$ =\frac{g^{tf}K^{2}\left(p_{t}g_{ij}p_{f}g_{km}-p_{t}g_{ij}p_{k}g_{fm}-p_{i}g_{tj}p_{f}g_{km}+p_{i}g_{tj}p_{k}g_{fm}\right)X^{i}\tilde{\omega}^{j}X^{k}\tilde{\omega}^{m}}{4\alpha\left(1+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^{2}\right)} $$

$$ =\frac{K^{2}\left(g^{tf}p_{t}g_{ij}p_{f}g_{km}-g^{tf}p_{t}g_{ij}p_{k}g_{fm}-g^{tf}p_{i}g_{tj}p_{f}g_{km}+g^{tf}p_{i}g_{tj}p_{k}g_{fm}\right)X^{i}\tilde{\omega}^{j}X^{k}\tilde{\omega}^{m}}{4\alpha\left(1+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^{2}\right)} $$

$$ =\frac{K^{2}\left(r^{2}\left(g\left(X,\tilde{\omega}\right)\right)^{2}-2g\left(X,\tilde{\omega}\right)g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)g^{-1}(\omega,p)+g\left(\tilde{\omega},\tilde{\omega}\right)\left(g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)\right)^{2}\right)}{4\alpha\left(1+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^{2}\right)} $$

$$ =\begin{cases}\dfrac{K^{2}\left(r^{2}-2g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)g^{-1}(\omega,p)+\left(g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)\right)^{2}\right)}{4\alpha\left(1+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^{2}\right)}, & g(X,\tilde{\omega})=1\\[2ex] \dfrac{K^{2}\left(\left(g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)\right)^{2}\right)}{4\alpha\left(1+\left(g^{-1}(\omega,p)\right)^{2}\right)}, & g(X,\tilde{\omega})=0,\end{cases} $$

elde ederiz. Burada

$$K^2\left(r^2 g_{ij}g_{km}X^i\tilde{\omega}^j X^k\tilde{\omega}^m - p_t g_{ij}p_k\delta_m^t X^i\tilde{\omega}^j X^k\tilde{\omega}^m - p_i\delta_j^f p_f g_{km}X^i\tilde{\omega}^j X^k\tilde{\omega}^m\right.$$
$$\left.+ p_i\delta_j^f p_k g_{fm}X^i\tilde{\omega}^j X^k\tilde{\omega}^m\right)$$
$$= K^2\left(r^2\left(g\left(X,\tilde{\omega}\right)\right)^2 - p_m g\left(X,\tilde{\omega}\right)p_k X^k\tilde{\omega}^m - p_i g\left(X,\tilde{\omega}\right)p_j X^i\tilde{\omega}^j\right.$$
$$\left.+ p_i g\left(\tilde{\omega},\tilde{\omega}\right)p_k X^k X^i\right)$$
$$= K^2\left(r^2\left(g\left(X,\tilde{\omega}\right)\right)^2 - g\left(X,\tilde{\omega}\right)g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)g^{-1}\left(\omega,p\right) - g\left(X,\tilde{\omega}\right)g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)g^{-1}\left(\omega,p\right)\right.$$
$$\left.+ g\left(\tilde{\omega},\tilde{\omega}\right)g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)\right)$$
$$= K^2\left(r^2\left(g\left(X,\tilde{\omega}\right)\right)^2 - 2g\left(X,\tilde{\omega}\right)g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)g^{-1}\left(\omega,p\right) + g\left(\tilde{\omega},\tilde{\omega}\right)\left(g^{-1}\left(\tilde{X},p\right)\right)^2\right),$$

$$g(X_a,\tilde{\omega}^b) = g_{ij}X_a{}^i(\tilde{\omega}^b)^j = g_{ij}X_a{}^i g^{jk}\omega_k{}^b = \delta_i^k X_a{}^i\omega_k{}^b = X_a{}^k\omega_k{}^b = \omega^b(X_a) = \delta_a^b = \begin{cases}1, a=b,\\ 0, a\neq b,\end{cases}$$

$$g\left(\tilde{\omega},\tilde{\omega}\right) = g_{ij}\tilde{\omega}^i\tilde{\omega}^j = g_{ij}g^{is}\omega_s g^{jk}\omega_k = \delta_j^s\omega_s g^{jk}\omega_k = g^{sk}\omega_s\omega_k = g^{-1}(\omega,\omega) = 1$$

şeklindedir.

iii) Teorem 2.12 (iii) den açıktır.

Böylelikle teorem ispatlanmış olur.

$\left(M^n,g\right)$ Riemann manifoldu flat manifold olsun. Bu durumda, Teorem 2.13 den aşağıdaki teoremi ifade ederiz.

Teorem 2.14: [3]$\left(M^n,g\right)$ Riemannian manifoldu flat ise, bu takdirde T^*M^n, ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriğine göre hiçbir yerde sabit ve negatif olmayan kesit eğriliğine sahiptir.

$\left(x,p\right)$ $p\neq 0$, T^*M^n de bir nokta olsun ve $\left\{e_1,...,e_n\right\}$, x noktasında M^n in T_xM^n tanjant uzayında ortonormal baz olsun. Ayrıca $\left\{\omega^1,...,\omega^n\right\}$, x noktasında M^n in $T_x^*M^n$ kotanjant uzayında dual ortonormal baz olsun. $\left|p\right|$, M^n de g metriğine göre p nin normu olmak üzere $\omega^1 = p/\left|p\right|$ şeklindedir. Öyleyse $i\in\left\{1,...,n\right\}$ ve $k\in\left\{2,...,n\right\}$ için yatay ve dikey liftler: $f_i = {}^He_i$, $f_{n+1} = {}^V\omega^1$ ve $f_{n+k} = \sqrt{\alpha}({}^V\omega^k), \alpha = 1+r^2$, $r^2 = g^{-1}(p,p)$ şeklindedir. Bu takdirde $\left\{f_1,...,f_{2n}\right\}$, ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriğine göre $T^*_{(x,p)}M^n$ kotanjant uzayının ortonormal bazıdır. Teorem 2.12 kullanılarak:

i) ${}^{CG}K\left(f_i,f_j\right) = {}^{CG}K\left({}^He_i,{}^He_j\right) = K\left(e_i,e_j\right) - \dfrac{3}{4\alpha}\left|pR\left(e_i,e_j\right)\right|^2,$

ii) $^{CG}K(f_i, f_{n+1}) = {}^{CG}K\left({}^H e_i, {}^V\omega^1\right) = \dfrac{1}{4\alpha}\dfrac{\left|\left(pR(\ ,e_i)\tilde{\omega}^1\right)\right|^2}{\left(1+\left(g^{-1}\left(\omega^1, p\right)\right)^2\right)} = 0$,

burada

$$pR(\ ,e_i)\tilde{\omega}^1 = (p_m R_{\ ,ks}{}^m e_i^k (p/\left|p\right|)^s) = (R_{\ ,ksl} e_i^k (p/\left|p\right|)^s p^l) = 1/\left|p\right|(R_{\ ,ksl} e_i^k p^s p^l) = 0$$

şeklindedir.

iii) $^{CG}K(f_i, f_{n+k}) = {}^{CG}K\left({}^H e_i, \sqrt{\alpha}\,{}^V\omega^k\right) = \dfrac{1}{4\alpha}\dfrac{\left|\left(pR(\ ,e_i)\sqrt{\alpha}\tilde{\omega}^k\right)\right|^2}{\left(1+\left(g^{-1}\left(\sqrt{\alpha}\omega^k, p\right)\right)^2\right)}$

$$= \frac{1}{4}\left|\left(pR(\ ,e_i)\tilde{\omega}^k\right)\right|^2,$$

iv) $^{CG}K(f_{n+1}, f_{n+k}) = {}^{CG}K\left({}^V\omega^1, \sqrt{\alpha}\,{}^V\omega^k\right)$

$$= \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha+2}{\alpha}\frac{1}{\left(1+\left(g^{-1}\left(\omega^1, p\right)\right)^2 + \left(g^{-1}\left(\sqrt{\alpha}\omega^k, p\right)\right)^2\right)}$$

$$= \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha+2}{\alpha}\frac{1}{\left(1+r^2\right)} = \frac{3}{\alpha^2},$$

v) $^{CG}K(f_{n+k}, f_{n+l}) = {}^{CG}K\left(\sqrt{\alpha}\,{}^V\omega^k, \sqrt{\alpha}\,{}^V\omega^l\right)$

$$= \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha+2}{\alpha}\frac{1}{\left(1+\left(g^{-1}\left(\sqrt{\alpha}\omega^k, p\right)\right)^2 + \left(g^{-1}\left(\sqrt{\alpha}\omega^l, p\right)\right)^2\right)}$$

$$= \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha+2}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^2}$$

elde ederiz.

Teorem 2.15: [3] (x, p), T^*M^n de bir nokta ve $\{f_1, ..., f_{2n}\}$, $T_x^*M^n$ kotanjant uzayında bir ortonormal baz olsun. Bu takdirde $i \in \{1, ..., n\}$ ve $k, l \in \{2, ..., n\}$ için, ^{CG}K kesit eğriliği aşağıdaki denklemleri sağlar:

i) $^{CG}K(f_i, f_j) = K(e_i, e_j) - \dfrac{3}{4\alpha}\left|pR(e_i, e_j)\right|^2$,

ii) $^{CG}K(f_i, f_{n+1}) = 0$,

iii) $^{CG}K(f_i, f_{n+k}) = \dfrac{1}{4}\left|\left(pR(\ ,e_i)\tilde{\omega}^k\right)\right|^2$,

iv) $^{CG}K\left(f_{n+1}, f_{n+k}\right)=\dfrac{3}{\alpha^2}$,

v) $^{CG}K\left(f_{n+k}, f_{n+l}\right)=\dfrac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^2}$.

Burada K, $\left(M^n, g\right)$ de kesit eğriliğidir ve $\tilde{\omega}^k = g^{-1}\circ\omega^k$ şeklindedir.

$\left\{f_1,..., f_{2n}\right\}$, $T_x^*M^n$ kotanjant uzayında ortonormal baz olsun, bu takdirde $^{CG}r=\sum\limits_{i\neq j}{}^{CG}K\left(f_i, f_j\right)$ skalar eğriliği aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
^{CG}r &= \sum_{i\neq j}{}^{CG}K\left(f_i, f_j\right) \\
&= 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}{}^{CG}K\left(f_i, f_j\right)+2\sum_{i,j=1}^{n}{}^{CG}K\left(f_i, f_{n+j}\right)+2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}{}^{CG}K\left(f_{n+i}, f_{n+j}\right) \\
&= \sum_{i\neq j}^{n}K\left(e_i,e_j\right)-\frac{3}{4\alpha}\sum_{i,j=1}^{n}\left|pR\left(e_i,e_j\right)\right|^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left|\left(pR(\ ,e_i)\tilde{\omega}^j\right)\right|^2 \\
&\quad +2\sum_{i=2}^{n}\frac{3}{\alpha^2}+\sum_{\substack{i,j=2\\ i\neq j}}^{n}\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^2} \\
&= r-\frac{3}{4\alpha}\sum_{i,j=1}^{n}\left|pR\left(e_i,e_j\right)\right|^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left|\left(pR(\ ,e_i)\tilde{\omega}^j\right)\right|^2 \\
&\quad +2(n-1)\frac{3}{\alpha^2}+(n-1)(n-2)\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^2} \\
&= r-\frac{3}{4\alpha}\sum_{i,j=1}^{n}\left|pR\left(e_i,e_j\right)\right|^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left|\left(pR(\ ,e_i)\tilde{\omega}^j\right)\right|^2 \\
&\quad +\frac{(n-1)}{\alpha^2}\left(6+(n-2)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)\right).
\end{aligned}
$$

Buradan da aşağıdaki teoremi ifade ederiz.

Teorem 2.16: [3] (M^n, g) Riemann manifoldu flat ise, bu takdirde $(T^*M^n, {}^{CG}g)$ de skalar eğrilik

$$^{CG}r=\frac{(n-1)}{\alpha^2}\left(6+(n-2)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)\right)$$

şeklindedir.

2.3.3. ${}^{CG}g$ nin Jeodezikleri

C, M^n de $x^h = x^h(t)$ ile lokal olarak ifade edilen bir eğri olsun ve $\omega_h(t)$, C boyunca bir kovektör alanı olsun. Bu takdirde , T^*M^n kotanjant demette, $\tilde{C}$ eğrisi

$$x^h = x^h(t), \quad x^{\bar{h}} \overset{def}{=} p_h = \omega_h(t) \tag{2.39}$$

şeklinde tanımlanır.

$\tilde{C}$ eğrisi

$$\frac{\delta\omega_h}{dt} = \frac{d\omega_h}{dt} - \Gamma^i_{jh}\frac{dx^j}{dt}\omega_i = 0$$

şartını sağlıyorsa, M^n de C eğrisinin yatay liftidir denir. Eğer başlangıç koşulu $t = t_0$ için $\omega_h = \omega_h^0$ olarak verilirse, (2.39) ile belirtilen tek yatay lift vardır.

Şimdi de ${}^{CG}g$ metrikli T^*M^n kotanjant demette jeodeziklerin diferensiyel denklemine bakalım. Eğer t, T^*M^n de $A = (i, \bar{i})$ olmak üzere $x^A = x^A(t)$ eğrisinin yay uzunluğu ise, bu takdirde T^*M^n de $\left(x^i, x^{\bar{i}}\right) = \left(x^i, p_i\right)$ indirgenmiş (induced) koordinatlara göre jeodeziğin denklemi aşağıdaki formdadır:

$$\frac{\delta^2 x^A}{dt^2} = \frac{d^2 x^A}{dt^2} + {}^{CG}\Gamma^A_{CB}\frac{dx^C}{dt}\frac{dx^B}{dt} = 0 . \tag{2.40}$$

Burada ${}^{CG}\Gamma^A_{CB}$, ${}^{CG}\nabla$ nin bileşenleridir ve (2.37) de tanımlanmıştır.

$\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\}$ adapte çatısı için (2.40) numaralı denklemi kullanalım. (1.35) ve (1.36) dan $e_\beta = A_\beta{}^H \partial_H$ şeklindeki çatı dönüşümünü sağlayan $A_\beta{}^H$ matrisinin bileşenleri (2.10) da verilmiştir. (2.9) kullanılarak,

$$\theta^\alpha = \tilde{A}^\alpha{}_A dx^A,$$

yazarız, yani, $\alpha = h$ için

$$\theta^h = \tilde{A}^h{}_A dx^A = \delta^h_i dx^i = dx^h$$

ve $\alpha = \bar{h}$ için

$$\theta^{\bar{h}} = \tilde{A}^{\bar{h}}{}_{A} dx^{A} = -p_{a}\Gamma^{a}_{hj}dx^{j} + \delta^{h}_{j}dx^{j} = \delta p_{h}$$

elde ederiz. Ayrıca $T^{*}M^{n}$ de $x^{A} = x^{A}(t)$ eğrisi boyunca

$$\frac{\theta^{h}}{dt} = \tilde{A}^{h}{}_{A}\frac{dx^{A}}{dt} = \frac{dx^{h}}{dt},$$

$$\frac{\theta^{\bar{h}}}{dt} = \tilde{A}^{\bar{h}}{}_{A}\frac{dx^{A}}{dt} = \frac{\delta p_{h}}{dt}$$

şeklindedir [52].

(2.40) denklemini, (2.37) ifadesini göz önüne alarak adapte çatıya göre

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta^{\alpha}}{dt}\right) + {}^{CG}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}\frac{\theta^{\gamma}}{dt}\frac{\theta^{\beta}}{dt} = 0$$

yazarız, bu takdirde

$$\begin{cases} (a) \quad \dfrac{\delta^{2}x^{h}}{dt^{2}} + \dfrac{1}{\alpha}p_{a}R^{k}{}_{.\,i.}{}^{ja}\dfrac{dx^{i}}{dt}\dfrac{\delta p_{j}}{dt} = 0, \\ (b) \quad \dfrac{\delta^{2}p_{h}}{dt^{2}} + \left[-\dfrac{1}{\alpha}\left(p^{i}\delta^{j}_{h} + p^{j}\delta^{i}_{h}\right) + \dfrac{\alpha+1}{\alpha^{2}}g^{ij}p_{h} + \dfrac{1}{\alpha^{2}}p^{i}p^{j}p_{h}\right]\dfrac{\delta p_{i}}{dt}\dfrac{\delta p_{j}}{dt} = 0. \end{cases} \tag{2.41}$$

elde ederiz. Böylece (2.41) numaralı denklem ${}^{CG}g$ metrikli $T^{*}M^{n}$ de jeodeziklerin denklemleridir. $\tilde{C} : x^{h} = x^{h}(t),\ x^{\bar{h}} = p_{h}(t) = \omega_{h}(t)$, ∇_{g} nin M^{n} de $C : x^{h} = x^{h}(t)$ ($\dfrac{\delta^{2}x^{h}}{dt^{2}} = 0$) jeodeziğinin ($\dfrac{\delta p_{h}}{dt} = \dfrac{\delta\omega_{h}}{dt} = 0$) yatay lifti olsun. (2.41) ifadesini kullanarak aşağıdaki teoremi yazarız.

Teorem 2.16: [3] (M^{n}, g) de jeodeziklerin yatay lifti, $T^{*}M^{n}$ de ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriğine göre her zaman jeodeziktir.

3. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasından elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. Kotanjant demette Sasaki ve Cheeger-Gromoll metriklerine göre Levi-Civita konneksiyonu, eğrilik tensörü, skalar eğrilik ve kesit eğrilik hesaplanmıştır.
2. $\left(T^*M^n, {}^S g\right)$ nin flat olması için $\left(M^n, g\right)$ nin flat olması gerektiği elde edilmiştir.
3. ${}^S r = 0$ ve ${}^S K = 0$ olması için gerek ve yeter şartın M^n in flat olması gerektiği sonucuna varılmıştır.
4. ∇_g nin ${}^H\nabla$ yatay liftinin ${}^S g$ Sasaki metriğine göre metrik konneksiyon olduğu bulunmuştur ve $\left(T^*M^n, {}^S g\right)$de, ${}^H r$, skalar eğriliğinin sıfır olması için $\left(M^n, g\right)$de r skalar eğriliğinin sıfır olması gerektiği bulunmuştur.
5. $\left(T^*M^n, {}^S g\right)$ de para-Norden yapılar incelenmiştir. $\left(T^*M^n, {}^S g, F\right)$ in hemen hemen para-Norden manifold olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, para-Kählerlik şartı da araştırılmıştır.
6. $\left(T^*M^n, {}^S g\right)$ de (2.21) ile tanımlanan F hemen hemen para-Norden yapısı için $F = \left({}^R\nabla\right)^{-1} \circ {}^S g$ eşitliği elde edilmiştir.
7. $\left(M^n, g\right)$ Riemann manifoldunun flat olması durumunda $\left(T^*M^n, {}^{CG} g\right)$ de skalar eğrilik, ${}^{CG}r = \frac{(n-1)}{\alpha^2}\left(6 + (n-2)\left(\alpha^2 + \alpha + 1\right)\right)$ olarak bulunmuştur.
8. Son olarak, T^*M^n de ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriğine göre jeodezikler araştırılmıştır ve $\left(M^n, g\right)$ de jeodeziklerin yatay liftinin, $\left(T^*M^n, {}^{CG} g\right)$ de her zaman jeodezik olduğu bulunmuştur.

Alınan bu sonuçlar VII, VIII, IX ve XI. Geometri Sempozyumlarında sözlü olarak sunulmuştur. Ayrıca dört adet makale de basılmıştır [2], [3], [27], [28] ve bir makale de kabul edilmiştir [36].

4. ÖNERİLER

1. Diferensiyellenebilir manifoldların tanjant demet geometrisi, matematikte ve fizikte birçok alanda yoğun olarak çalışılmaktadır. Kotanjant demet, tanjant demetin duali olması sebebiyle bazı sonuçlarda benzerlik elde edilmektedir. Fakat lift yapısının kuruluş şekli bakımından bu iki demet farklılık göstermektedir. Böylece tezde alınan sonuçlar kotanjant demet geometrisinin gelişimine katkı sağlayacaktır.

2. Kotanjant demette Cheeger-Gromoll metriği için para-Nordenlik özelliği incelenebilir. Ayrıca Sasaki ve Cheeger-Gromoll metrikleri için daha farklı hemen hemen kompleks, hemen hemen product, hemen hemen Kähler yapılar incelenebilir ve geliştirilebilir.

3. Jeodezik eğriler konusu bu metrikler için geliştirilebilir.

5. KAYNAKLAR

1. Abbasi, M., T., K. ve Sarih, M., Killing Vector Fields on Tangent Bundles with Cheeger-Gromoll Metric, Tsukuba J. Math., 27 (2003) 295-306.

.

2. Agca, F., g-natural Metrics on the Cotangent Bundle, Intern. Elect. J. Geo., 6, 1 (2013) 129-146

3. Ağca, F. ve Salimov, A., A., Some Notes Concerning Cheeger-Gromoll Metrics, Hacet. J. Math. Stat., 42, 5 (2013) 533-549.

4. Akbulut, S., Özdemir, M. ve Salimov, A., A., Diagonal Lift in the Cotangent Bundle and Its Application, Turk. J. Math., 25 (2001) 491-502.

5. Anastasiei, M., Locally Conformal Kaehler Structures on Tangent Manifold of a Space Form, Libertas Math., 19 (1999) 71-76.

6. Andrews, B. ve Hopper, C., The Ricci Flow in Riemannian Geometry, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.

7. Aso, K., Notes on Some Properties of the Sectional Curvature of the Tangent Bundle, Yokohama Math. J., 29 (1981) 1-5.

8. Bishop, R., L. ve Goldberg, S., I., Tesor Analysis on Manifolds, The Mcmillan Company, New York, 1968.

9. Boothby, W., An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Pres, New York- San Francisco-London, 1975.

10. Cengiz N. ve Salimov A., A., Geodesics in the Tensor Bundle of Diagonal Lifts. Hacet. J. Math. Stat., 31 (2002) 1-11.

11. Cheeger, J. ve Gromoll, D., On the Structure of Complete Manifolds of Nonnegative Curvature, Ann. of Math., 96 (1972) 413-443.

12. Davies, E., T., On the Curvature of the Tangent Bundle, Annali di Mat., (IV) 81 (1969) 193-204.

13. Dombrowski, P., On the Geometry of the Tangent Bundle, J. Reine. Angew. Math., 210 (1962) 73-88.

14. Gudmunson, S. ve Kappos, E., On the Geometry of Tangent Bundle with the Cheeger-Gromoll Metric, Tokyo J. Math., 25 (2002) 75-83.

15. Gudmunson, S. ve Kappos, E., On the Geometry of Tangent Bundle, Expo. Math., 20 (2002) 1-41.

16. Kobayashi, S. ve Nomizu, K., Foundations of Differential Geometry, Vol. I, Interscience Publishers, New York-London-Sydney, 1969.

17. Kowalski, O., Curvature of the Induced Riemannian Metric on the Tangent Bundle of Riemannian Manifold, J. Reine Angew. Math., 250 (1971) 124-129.

18. Kruchkovich, G., I., Hypercomplex Structure on Manifold, I, Tr. Sem. Vect. Tens. Anal., Moscow Univ., 16 (1972) 174-201.

19. Ledger, A., J. ve Yano, K., The Tangent Bundle of a Locally Symmetric Space, Jour. London Math. Soc., 40 (1965) 487-492.

20. Ledger, A., J. ve Yano, K., Almost Complex Structures on Tensor Bundles, Jour. Diff. Geom., 1 (1967) 355-368.

21. Mok, K., P., On Differantial Geometry of Frame Bundles of Riemannian Manifolds, J. Reine Angew. Math., 302 (1976) 16–31.

22. Morimoto, A., Lifting of Some Types of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundle p^r-velocities, Nagoya Math. J., 40 (1970) 13-31.

23. Munteanu, M., I., Cheeger Gromoll Type Metrics on the Tangent Bundle. Sci. Ann. Univ. Agric. Sci. Vet. Med., 49, 2 (2006) 257-268.

24. Munteanu, M., I., Some Aspects on the Geometry of the Tangent Bundle and Tangent Sphere Bundles of a Riemannian Manifold, Mediterr. J. Math., 5 (2008) 43-59.

25. Musso, E. ve Triccerri, F., Riemannian Metrics on Tangent Bundle, Ann. Mat. Pura. Appl., 150, 4 (1988) 1-19.

26. Salimov A., Tensor Operators and Their Applications, Mathematics Research Developments Series, Nova Science Publishers, New York, 2013.

27. Salimov, A., A. ve Agca, F., On Para-Nordenian Structures., Ann. Polon. Math., 99, 2 (2010) 193-200.

28. Salimov, A., A. ve Agca, F., Some Properties of Sasakian Metrics in Cotangent Bundles, Mediterr. J. Math., 8 (2011) 243-255.

29. Salimov, A., A. ve Akbulut, K., A Note on a Paraholomorphic Cheeger-Gromoll Metric, Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Sci.), 119, 2 (2009) 187-195.

30. Salimov, A., A. ve Cengiz, N., Lifting of Riemannian Metrics to Tensor Bundles, Russian Math. (IZ. VUZ.),47, 11 (2003) 47-55.

31. Salimov, A., A., Gezer, A. ve Akbulut, K., Geodesics of Sasakian Metrics on Tensor Bundles, Mediterr. J. Math., 6, 2 (2009) 137-149.

32. Salimov, A., A., Gezer, A. ve Aslancı, S., On Almost Complex Structures in the Cotangent Bundle, Turk. J. Math., 35 (2011) 487-492.

33. Salimov, A., A., Iscan, M. ve Etayo, F., Paraholomorphic B-manifold and Its Properties, Topology and its Applications, 154 (2007) 925-933.

34. Salimov, A., A. ve Kazimova, S., Geodesics of the Cheeger-Gromoll Metric, Turk. J. Math., 32 (2008) 1-8.

35. Salimov, A., A. ve Mağden, A., Diferensiyel Geometri, Erzurum, 2008.

36. Salimov, A., A. ve Ocak, F., On the Geometry of the Cotangent Bundle with Sasakian Metric and Its Applications, Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Sci.), to appear.

37. Sasaki S., On the Differantial Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifols, Tohoku Math. J., 10 (1958) 338-358.

38. Sekizawa, M., Curvatures of Tangent Bundles with Cheeger-Gromoll Metric, Tokyo J. Math., 14 (1991) 407-417.

39. Tachibana, S. ve Okumura, M., On the Almost Complex Structure of Tangent Bundles of Riemannian Spaces, Tohoku Math. Jour., 14 (1962) 156-161.

40. Tahara, M., Vanhecke, L. ve Watanabe, Y., New Structures on Tangent Bundles, Note di Matematica, 18, 1 (1998) 131-141.

41. Talantova, N., V. ve Shirokov, A., P., A Note on a Metric in the Tangent Bundle, Izv.Vyssh. Uchebu. Zaved. Math., 6 (1975) 143-146.

42. Tamm I., E., Collection of Scientific Works (Sobranie nauchnyh trudov (Russian)), II, Nauka, Moskow, 1975.

43. Yano, K., Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces. Pergamon Pres, New York, 1965.

44. Yano, K., Tensor Field and Connections on Cross-Sections in the Cotangent Bundle, Tohoku Math. Journ., 19 (1967) 32-48.

45. Yano, K., Tensor Field and Connections on Cross-Sections in the Tangent Bundle of a Differentiable Manifold, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A LXVII (1967) 277-288.

46. Yano, K. ve Ako, M., On Certain Operators Associated with Tensor Field, Kodai Math. Sem. Rep., 20 (1968) 414-436.

47. Yano, K. ve Davies, E., T., On the Tangent Bundles of Finsler and Riemannian Manifolds, Rend. Circ. Mat. Palermo, 12 (1963) 211-228.

48. Yano, K. ve Davies, E., T., Metrics and Connections in the Tangent Bundle, Kodai. Math. Sem. Rep., 23 (1971) 493-504.

49. Yano, K. ve Ishihara, S., Differential Geometry in Tangent Bundles, Kodai. Math. Sem. Rep., 18 (1966) 271-292.

50. Yano, K. ve Ishihara, S., Horizontal Lifts of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles, Jour. Math. And Mech., 16 (1967) 1015-1030.

51. Yano K. ve Ishihara S., Almost Complex Structures Induced in Tangent Bundles, Kodai. Math. Sem. Rep., 19 (1967) 1-27.

52. Yano, K. ve Isıhara S., Tangent and Cotangent Bundles, Marcel Dekker, INC, New York, 1973.

53. Yano, K. ve Kobayashi, S., Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles, I, General Theory, Jour. Math. Soc. Japan, 18 (1966) 194-210.

54. Yano, K. ve Kobayashi, S., Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles, II, Affine Automorphisms, Jour. Math. Soc. Japan, 18 (1966) 236-246.

55. Yano, K. ve Kobayashi, S., Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles, III, Holonomy Groups, Jour. Math. Soc. Japan, 19 (1967) 486-488.

56. Yano, K. ve Kon, M., Structure on Manifolds, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984.

57. Yano, K. ve Patterson, E., M., Vertical and Complete Lifts From a Manifold to Its Cotangent Bundle, Jour. Math. Soc. Japan., 19 (1967) 91-113.

58. Yano, K. ve Patterson, E., M., Horizontal Lift From a Manifold to Its Cotangent Bundle, Jour. Math. Soc. Japan., 19 (1967) 185-198.

ÖZGEÇMİŞ

Filiz OCAK, 16.11.1984 tarihinde Giresun'un Espiye ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Giresun'da tamamladı. 2002 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandı ve 2007 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı. Bir yıllık hazırlık eğitiminin ardından 2008 güz döneminde ders aşamasına başladı. 2009 yılında araştırma görevlisi olarak kadro aldığı Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne yatay geçiş yaptı. Doktora öğretimi süresince TÜBİTAK'tan burs almıştır. Yabancı dili İngilizcedir. Kasım 2012 de evlenmiş ve Ağca olan soyadı Ocak olarak değişmiştir.

Makaleler:

1. Salimov, A.A. ve Agca, F., On Para-Nordenian Structures, Ann. Polon. Math., 99, 2 (2010) 193-200.
2. Salimov, A.A. ve Agca, F., Some Properties of Sasakian Metrics in Cotangent Bundles, Mediterr. J. Math., 8 (2011) 243-255.
3. Agca, F., g-natural metrics on the cotangent bundle, Intern. Elect. J. Geo., v.6, n.1 (2013), 129-146
4. Ağca F. ve Salimov A.A., Some Notes Concerning Gheeger-Gromoll Metrics, Hacet. J.Math. Stat., 42, 5 (2013) 533-549.
5. Salimov A. ve Ocak F., On the Geometry of the Cotangent Bundle with Sasakian Metrics and Its Applications, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci), to appear.

Bildiriler:

1. Ağca F. ve Salimov A.A., 2009, Kotanjant Demetlerinde Sasaki Tipinden Metrikler, VII. Geometri Sempozyumu, Ahi Evran Üni., Kırşehir.
2. Ağca F. ve Salimov A.A., 2010, Kotanjant Demette Para-Norden Yapılar, VIII. Geometri Sempozyumu, Akdeniz Üni., Antalya.
3. Ağca F. ve Salimov A.A., 2011, Cheeger-Gromoll Metriği Üzerine Bazı Notlar, IX. Geometri Sempozyumu, Ondokuz Mayıs Üni., Samsun.
4. Ocak F. ve Salimov A.A, 2013, Geodesics of the Cheeger-Gromoll metrics on Cotangent bundle, XI. Geometri sempozyumu, Ordu Üniversitesi, Ordu.

Bu tez TÜBİTAK'ın TBAG'a bağlı 112T111 numaralı projesi tarafından desteklenmiştir.