KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T-KISMEN SIRALAMA VE ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Emel AŞICI

KASIM 2013
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T-KISMEN SIRALAMA VE ÖZELLİKLERİ

Emel AŞICI

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 21.10.2013
Tezin Savunma Tarihi : 29.11.2013

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Funda KARAÇAL

Trabzon 2013

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Emel AŞICI Tarafından Hazırlanan

T-KISMEN SIRALAMA VE ÖZELLİKLERİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 22.10.2013 gün ve 1527 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

DOKTORA TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. Funda KARAÇAL**	**…………………………**
Üye	**: Prof. Dr. İhsan ÜNVER**	**…………………………**
Üye	**: Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ**	**…………………………**
Üye	**: Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV**	**…………………………**
Üye	**: Prof. Dr. Refik KESKİN**	**…………………………**

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma, bir L sınırlı kafesi üzerinde tanımlanan t-kısmen sıralamanın özelliklerini incelemek amacı ile Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora tez çalışması olarak yapılmıştır.

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanmasına kadar olan süreçte emeği, öneri ve yönlendirmeleriyle önemli katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Funda KARAÇAL' a en içten duygularımla teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Aynı zamanda tez aşamasında değerli görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan tez izleme jüri üyesi hocalarım, Sayın Prof. Dr. İhsan ÜNVER ve Sayın Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ' a teşekkürü bir borç bilirim. Yine öğrenim sürecinde katkı sağlayan matematik bölümündeki diğer tüm değerli hocalarıma teşekkür ederim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ve yaşamıma güç katan aileme ve sevgili eşim Mustafa AŞICI'ya teşekkür ederim.

Emel AŞICI
Trabzon 2013

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "T-Kısmen Sıralama ve Özellikleri" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Funda KARAÇAL' ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 21/10/2013

Emel AŞICI

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

T-KISMEN SIRALAMA VE ÖZELLİKLERİ

Emel AŞICI

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Funda KARAÇAL
2013, 90 Sayfa

Bu tezin amacı sınırlı bir L kafesi üzerinde tanımlanan $\preccurlyeq_T$ ile gösterilen t-kısmen sıralamanın özelliklerini araştırmak, $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir T t-normu için keyfi fakat sabit bir $c \in [0,1]$ elemanı ile $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanamayan elemanların kümesini tanımlamak, bu küme üzerinde incelemeler yapmak ve $([0,1], \preccurlyeq_T)$ kafes olacak şekilde T t-normu inşa edebilmektir.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1 de, çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Bölüm 2 ise dört kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda sınırlı bir L kafesi üzerindeki t-normlar için sıra-güçlülük ve sıra-zayıflık kavramları tanımlanmış ve sırası en zayıf ve en güçlü olan t-normlar belirlenmiştir. İkinci kısımda, (2.1) de $[0,1]$ üzerindeki t-normların ailesi üzerinde bir β denklik bağıntısı tanımlanmış ve bu bağıntının özellikleri incelenmiştir. Üçüncü kısımda, $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir T t-normu için keyfi fakat sabit bir $c \in [0,1]$ elemanı ile $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanamayan tüm elemanların kümesi olan $\mathcal{I}_T^{(c)}$ kümesi tanımlanmış ve bazı özel t-norm örnekleri için $\mathcal{I}_T^{(c)}$ kümesi belirlenmiştir. Son kısımda, $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir T t-normu yardımıyla t-normların bir $(T_\lambda)_{\lambda \in (0,1)}$ ailesi inşa edilmiş ve T bölünebilir bir t-norm ise $\left([0,1], \preccurlyeq_{T_\lambda}\right)$ nın tam kafes olduğu gösterilmiştir. Böylece $L = [0,1]$ için $\left(L, \preccurlyeq_{T_\lambda}\right)$ kafes olacak şekilde T_W dan farklı bir T_λ t-normunun mevcut olduğu gösterilerek [35] te bırakılan açık probleme cevap verilmiştir. Burada T t-normu bölünebilir değilse $\left(L, \preccurlyeq_{T_\lambda}\right)$ nin kafes olması gerekmediği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sınırlı kafes, T-Norm, T-Kısmen Sıralama

PhD. Thesis

SUMMARY

T-PARTIAL ORDER AND ITS PROPERTIES

Emel AŞICI

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Funda KARAÇAL
2013, 90 Pages

The main aim of this thesis is to investigate properties of t-partial order, denoted by $\preccurlyeq_T$, defined on a bounded lattice L, to define on the set of all incomparable elements with arbitrary but fixed $c \in [0,1]$ according to $\preccurlyeq_T$ for any t-norm T on $[0,1]$ to study on this set and to construct a t-norm T such that $([0,1], \preccurlyeq_T)$ is a lattice.

This study consists of two main chapters. In Chapter 1, some definitions and theorems which are crucial for our study are stated. Chapter 2 contains four parts. In the first part, it is defined that the notions order-strong and order-weak for t-norms on a bounded lattice L and it is determined the order-weakest and the order strongest t-norms. In the second part, it is defined that an equivalence relation β on the class of t-norms on $[0,1]$ and it is investigated properties of this relation. In the third part, it is defined the set of all incomparable elements with arbitrary but fixed $c \in [0,1]$ according to $\preccurlyeq_T$, denoted by $\mathcal{I}_T{}^{(c)}$, and this set is determined for some particular t-norms. In the last part, it is constructed a family $(T_\lambda)_{\lambda \in (0,1)}$ of t-norms on $[0,1]$ with the help of any t-norm T on $[0,1]$. Also, if T is a divisible t-norm, then it is shown that $\left([0,1], \preccurlyeq_{T_\lambda}\right)$ is a complete lattice. So, it is shown that there exists a t-norm T_λ which is different from T_W such that $\left(L, \preccurlyeq_{T_\lambda}\right)$ is a lattice for $L = [0,1]$ whence an answer is given to the open problem in [35]. Also, it is shown that if T is non-divisible t-norm, then $\left(L, \preccurlyeq_{T_\lambda}\right)$ need not to be a lattice.

Key Words: Bounded lattice, T-Norm, T-partial order

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$\cap$	: Arakesit işlemi
$\cup$	: Birleşim işlemi
$\subseteq$	: Kümeler arasında alt küme bağıntısı
$\preccurlyeq_T$	: T-kısmen sıralama
$A \cap B$	: Kümelerin arakesiti
$A \cup B$	: Kümelerin birleşimi
$A \setminus B$	: Kümelerin farkı
A'	: Kümenin tümleyeni
$A \times B$	: Kümelerin kartezyen çarpımı
$\emptyset$	: Boş küme
$\bar{X}$	: X' in üst sınırlarının kümesi
$\underline{X}$	: X' in alt sınırlarının kümesi
$\wp(X)$	: X' in güç kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$[a, b]$	: Kapalı aralık
(a, b)	: Açık aralık
$[a, b), (a, b]$	: Yarı-açık aralık
Y^X	: X' den Y' e tüm fonksiyonların kümesi
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad (\in X^{\mathbb{N}})$	: X' deki elemanların dizisi
$\bigwedge, \wedge$	: Kafeste infimum işlemi
$\bigvee, \vee$	: Kafeste supremum işlemi
t-norm	: Üçgensel norm
t-conorm	: Üçgensel konorm
$T_{i=1}^{n} x_i, T_{i=1}^{\infty} x_i, T_{i\in I} x_i$	: Bir t-norm T' nin genişlemeleri
$S_{i=1}^{n} x_i, S_{i=1}^{\infty} x_i, S_{i\in I} x_i$	: Bir t-konorm S' nin genişlemeleri
$Z(T)$	: T t-normunun sıfır bölenlerinin kümesi

H_T	: T t-normunun idempotent elemanlarının kümesi
$T \downarrow L$	: T t-normunun L kafesine kısıtlanışı
T_M	: Minimum t-norm
T_P	: Çarpım t-norm
T_L	: Lukasiewicz t-norm
T_D	: [0,1] üzerindeki drastik çarpım
T_W	: Sınırlı bir kafes üzerindeki en küçük t-norm
S_M	: Maksimum t-konorm
S_P	: İstatistiksel toplam
S_L	: Lukasiewicz t-konorm (sınırlı toplam)
S_D	: Drastik toplam
T^{nM}	: Nilpotent minimum
$T_\wedge$	: İnfimum t-norm
$\lim_{x \searrow x_0} T(x,x)$	: T t-normunun (x_0, x_0) noktasındaki sağ taraflı limiti
$\rightarrow_*$	: $*$ yarı-grup işlemine göre rezidü işlemi
$\rightarrow_T$	: Sol sürekli t-norm T' ye göre rezidü işlemi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Üçgensel normların tarihi Karl Menger' in 1942 yılında yaptığı 'Statistical Metrics' adlı çalışması ile başlar [46]. Menger' in amacı metrik uzayları inşa etmektir. Üçgensel normlar (kısaca t-normlar) klasik üçgen eşitsizliğinin genelleştirilmesi sırasında daha genel bir yapı olarak ortaya çıkmıştır.

Olasılıksal metrik uzaylar teorisi t-normların önemli rol oynadığı ilk alandır. Schweizer ve Sklar [51-55], günümüzde de kullanılan t-normların aksiyomlarını vererek, alanın hızlı bir şekilde gelişmesini sağlayan istatistiksel metrik uzaylarını tekrar tanımlamışlardır. Bu gelişme sayesinde t-normlara ilişkin pek çok sonuç elde edilmiştir.

Fonksiyonel eşitliklerle ilgili olan t-normlar birleşmelilik özelliğiyle yakından ilgilidir. Bu konudaki en eski kaynak Abel [1] olarak görülmektedir. Bu yöndeki diğer sonuçlar [3,7,8,23] te elde edilmiştir. Özellikle Aczel' in çalışması t-normların gelişimi üzerinde büyük bir etkiye sahiptir [2,4]. Önceki sonuçlara istinaden temel sonuç toplamsal üreteçler yardımıyla sürekli Arşimedyan t-normların tam sınıflandırılmasıdır [43].

Bazı doğal fonksiyonel eşitliklerin çözümü olarak t-normların birçok parametrelenmiş ailesinin belirlenmesi t-normlar üzerindeki araştırmanın diğer bir yönüdür. Bu bağlamdaki en ünlü sonuç [15] te ispatlanmıştır. Bu sonuç Frank t-normlar ve t-konormlar ailesi Frank fonksiyonel eşitliği olarak adlandırılan eşitlikler için tek çözüm olduğunu göstermektedir.

Ordinal toplamlar ve (izomorf) dönüşümler gibi yarı-gruplar teorisinden pek çok inşa etme yöntemi, verilen bir takım ön örnekler yardımıyla tüm t-normlar ailesini inşa etmek için başarılı bir şekilde uygulanmıştır [10,11,39,54]. Özetle, yalnızca üç t-norm yani minimum T_M, çarpım T_P ve Lukasiewicz t-norm T_L kullanılarak izomorf dönüşümler ve ordinal toplamlar vasıtasıyla tüm sürekli t-normları inşa etmek mümkündür [43].

Zadeh' in [60] daki çalışması fuzzy kümeleri üzerinedir. Fuzzy kümelerin kesişimini, birleşimini ve komplementini modellemek için sırasıyla minimum T_M, maksimum S_M ve standart negasyon N_S önerilmiştir. Bu çalışmada çarpım T_P, olasılıksal toplam S_P ve Lukasiewicz t-konorm S_L, fuzzy kümelerinin sırasıyla kesişimi ve birleşimi için uygun karşılıklar olarak ifade edilmişti.

[14] te kompakt, indirgenemez, bağlantılı, topolojik yarı-grupların bir sınıfı çalışılmıştır. Bu çalışma, sınır noktaları yalnızca idempotent elemanlar olan ve nilpotent elemanı olmayan yarı-grupların karakterizasyonunu içermektedir. Bu çalışma kesin t-normların tam gösteriminin elde edilmesini sağlamıştır. Sınır noktaları, birim eleman ve sınır şartı olarak rol alan tüm yarı-gruplar [49] da karakterize edilmiştir. Bu tüm sürekli t-normların bir gösteriminin elde edilmesini sağlamıştır [43].

De Baets ve Mesiar [12] deki çalışmalarında bir çarpım kafesi üzerinde tanımlanan ve t-normların direkt çarpımı olan t-normları karakterize etmişlerdir. Bir t-normun idempotent elemanlarının sıfır bölenlerinin ve nilpotent elemanlarının kümesini tanımlayarak birbirleri ile olan ilişkilerini araştırmışlar ve şu açık problemi ortaya koymuşlardır: ‘$([0,1],\leq)$ üzerindeki sürekli t-normların bir direkt çarpımı olmayan ve $([0,1]^2,\leq)$ üzerinde sürekli olan bir t-norm mevcut mudur?’

Jenei ve De Baets [25] teki çalışmalarında direkt çarpım olmayan çarpım kafesleri üzerindeki t-normları inşa etmek için bir metot geliştirmişler ve De Baets ve Mesiar’ in [12] deki çalışmalarında yer alan açık problemlerine cevap vermişlerdir. Jenei ve De Baets bu çalışmada 3 tane açık problem ifade etmişlerdir. Bu problemlerden biri şu şekildedir: T, L çarpım kafesi üzerinde bir t-norm olmak üzere $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$, $T(a,a) = a$, $T(b,b) = b$ olacak şekildeki $a, b \in L$ elemanlarının varlığı T nin direkt parçalanmasını gerektirir mi?

Karaçal ve Khadjiev [30] daki çalışmalarında tam kafesler üzerindeki t-normların iç direkt çarpım tanımını vermişler ve tam kafesler üzerindeki t-normların iç ve dış direkt çarpımları arasındaki bağıntıyı incelemişlerdir. Bu bağıntıyı kullanarak Jenei ve De Baets’ in [25] teki çalışmalarında yer alan açık problemlerine cevap vermişlerdir. Tam kafesler üzerindeki $\vee$-dağılmalı ve sonsuz $\vee$-dağılmalı t-normlar üzerine birçok çalışma vardır [6,26,27,57].

Fuzzy teori üzerine Şubat 2003’ te düzenlenen 24. Linz seminerinde üçgensel normlar ve bağlantılı operatörler üzerine pek çok açık problem tartışılmıştır [41]. Bu problemlerden bazıları şu şekildedir: ‘(1,1) noktasında sürekli olan sıfır bölenli şartlı kısaltma özelliğini sağlayan bir t-normun sürekli olması gerekir mi?’ ve ‘Sıfır bölenli şartlı kısaltma özelliğini sağlayan sol sürekli bir t-normun sürekli olması gerekir mi? Karaçal [29] daki çalışmasında ‘(1,1) noktasında sürekli olan sıfır bölenli şartlı kısaltma özelliğini sağlayan bir t-normun sürekli olması gerekir mi?’ problemini cevaplamıştır.

Ma ve Wu [44] de bir L tam kafesi üzerindeki t-norm kavramını tanımlayarak, L üzerindeki gerektirmeler ile t-normlar arasındaki bağıntıyı araştırmışlar ve tüm sol sürekli t-normların kümesi ile L üzerindeki tüm sağ sürekli gerektirmelerin kümesi arasında birebir bir eşlemenin mevcut olduğunu göstermişlerdir.

Wang ve Yu [57] deki çalışmalarında bir tam Brouwerian L kafesi üzerindeki pseudo t-norm kavramını ele almışlar ve tüm sonsuz $\vee$-dağılmalı pseudo t-normların kümesi ile L üzerindeki tüm sonsuz $\wedge$- dağılmalı gerektirmeler arasındaki bağıntıyı ayrıntılı bir şekilde incelemişlerdir.

Saminger, Klement ve Mesiar [50] deki çalışmalarında sınırlı kafesler üzerindeki üçgensel t-normların en büyük ve en küçük mümkün genişlemelerini araştırmışlardır.

Karaçal [32] deki çalışmasında güçlü negasyonların direkt çarpımları üzerinde çalışmış ve güçlü negasyonların direkt çarpımları olan, çarpım kafesleri üzerindeki güçlü negasyonları karakterize etmiştir.

Karaçal ve Sağıroğlu [33] teki çalışmalarında T-asal eleman, T-asal radikal eleman ve T-yarı-asal eleman kavramlarını ele almışlar ve bu kavramların özellikleri üzerinde çalışmışlardır. T-asal elemanlar ve pseudo-komplementler yardımıyla verilen sonsuz $\vee$-dağılmalı t-normlardan yeni sonsuz $\vee$-dağılmalı t-normlar üretme yöntemleri araştırmışlardır.

Khadjiev ve Karaçal [27] deki çalışmasında küçük uzunluklu tüm $\vee$- dağılmalı t-normları belirleme problemi üzerine çalışmışlardır. Ek olarak, bir L kafesi üzerindeki sonlu $\vee$- dağılmalı t-normların direkt parçalanışları ile L nin en büyük elemanının ve L deki comaximal ailelerin direkt parçalanışları arasındaki bağlantıyı araştırmışlardır.

Karaçal [28] deki çalışmasında çarpım kafesleri üzerindeki gerektirme operatörleri ve pseudo t-normların direkt parçalanışları için gerek ve yeter şartları belirlemiştir. Çarpım kafesleri üzerindeki gerektirme operatörlerinin, güçlü negasyonların ve t-konormların direkt çarpımı üzerinde çalışmış ve S-gerektirmelerin ve R-gerektirmelerin direkt parçalanabilirliğini araştırmıştır.

H. Mitsch [48] de bir $(S,.)$ yarı grubu üzerinde, S deki çarpım işlemi yardımıyla 'doğal kısmen sıralama' olarak adlandırılan bir sıralama tanımlamış ve bir X kümesi üzerindeki tüm dönüşümlerin $(T_X,\circ)$ düzgün yarı-grubu üzerindeki doğal kısmen sıralamadan üretilen benzer bağıntıları araştırmıştır.

Karaçal ve Kesicioğlu [35] teki çalışmalarında sınırlı bir L kafesi üzerindeki herhangi bir t-norm yardımıyla L üzerinde $\preccurlyeq_T$ ile gösterilen bir t-kısmen sıralama tanımlamışlar ve doğal sıralama ile $\preccurlyeq_T$ sıralama arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Ayrıca, L bir zincir (veya kafes) olsa bile L nin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bir zincir (veya kafes) olması gerekmediğini göstermişlerdir. Özel olarak $T = T_W$ olarak alındığında, L nin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bir kafes olduğunu ispatlamışlar buna karşın T_W nun L yi $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kafes yapan tek t-norm olmadığını örneklerle göstermişlerdir.

Yine aynı çalışmada T nin tüm idempotent elemanlarının oluşturduğu H_T kümesinin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bir tam kafes olması için t-norm üzerindeki bazı şartlar belirlenmiştir. Böylece bir integral, komütatif, rezidual ℓ- monoid $M = (L, \odot, \leq)$ bölünebilir ise $\odot$ ikili işlemine göre tüm idempotent elemanların H_T alt kümesinin bir Heyting cebiri olduğu ve H_T deki gerektirme ile $\odot$ ikili işlemine dayanan gerektirmenin aynı olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, atomların supremumu şeklinde yazılabilen L nin tüm elemanlarının $\boldsymbol{A}$ kümesini $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre tam kafes yapan bazı şartlar incelenmiştir.

Kesicioğlu, Karaçal ve Mesiar [38] deki çalışmalarında bir L sınırlı kafesi üzerindeki t-normların ailesi üzerinde t-kısmen sıralamaların eşitliğine dayanan bir denklik bağıntısı tanımlamışlar ve bu bağıntıya göre L üzerindeki $T_\wedge$ infumum t-normunun ve $[0,1]$ üzerindeki T_D t-normunun denklik sınıflarını belirlemişlerdir. Ayrıca $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir t-norm ve onun φ-transform t-normu olan T_φ nin aynı denklik sınıfında olması gerekmediğine dair bir örnek vermişler ve bu t-normların aynı denklik sınıfında olması için bir gerek ve yeter şart belirlemişlerdir. Ayrıca $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir T t-normu için $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bütün kıyaslanamayan elemanların kümesi olan K_T kümesini tanımlamışlar ve bu kümeyi incelemişlerdir. Son olarak ise [35] te bırakılan bir açık probleme cevap vermişlerdir.

Bu tezin amacı sınırlı bir L kafesi üzerinde tanımlanan $\preccurlyeq_T$ ile gösterilen t-kısmen sıralamasının özelliklerini araştırmak, $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir T t-normu için keyfi fakat sabit bir $c \in [0,1]$ elemanı ile $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanamayan elemanların kümesini tanımlamak, bu küme üzerinde incelemeler yapmak ve $([0,1], \preccurlyeq_T)$ kafes olacak şekilde T t-normu inşa edebilmektir.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1 de, çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Bölüm 2 dört kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda öncelikle (1.13) te sınırlı bir L kafesi üzerinde tanımlanan $\sim$ bağıntısı için $L = [0,1]$ alınırsa, ${}^{[0,1]}/_{\sim}$ nın sayılamaz sonsuz bir küme olduğu gösterilmiştir. Daha sonra sınırlı bir L kafesi üzerindeki t-normlar için sıra-güçlülük ve sıra-zayıflık kavramları tanımlanmış ve Önerme 2.2 ile sırası en zayıf ve en güçlü olan t-normlar belirlenmiştir. İkinci kısımda, Tanım 2.2 de $[0,1]$ üzerindeki t-normların ailesi üzerinde bir β denklik bağıntısı tanımlanmış ve bu bağıntıya göre T_D t-normunun denklik sınıfının T_D den farklı bir t-norm içerdiği Önerme 2.4 ile gösterilmiştir. Ayrıca $[0,1]$ üzerindeki iki sürekli t-normun bu bağıntıya göre denk olduğu Uyarı 2.2 ile söylenmiştir. Üçüncü kısımda, $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir T t-normu için keyfi fakat sabit bir $c \in [0,1]$ elemanı ile $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanamayan tüm elemanların kümesi olan $\mathcal{I}_T{}^{(c)}$ kümesi tanımlanmış, bu küme derinlemesine incelenmiş ve bazı özel t-norm örnekleri için $\mathcal{I}_T{}^{(c)}$ kümesi belirlenmiştir. Daha sonra $\mathcal{I}_T{}^{(c)}$ kümesinin yardımıyla Önerme 2.6 da $[0,1]$ üzerindeki herhangi iki t-normun (1.13) te verilen $\sim$ bağıntısına göre denk olabilmesi için bir gerek ve yeter şart belirlenmiştir. Ancak bu gerek ve yeter şartın (2.1) de verilen β bağıntısı için doğru olmadığı bir örnekle gösterilmiştir. Son kısımda, Teorem 2.6 ile $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir T t-normu yardımıyla t-normların bir $(T_\lambda)_{\lambda\in(0,1)}$ ailesi inşa edilmiş ve T bölünebilir bir t-norm ise $\left([0,1], \preccurlyeq_{T_\lambda}\right)$ nın tam kafes olduğu gösterilmiştir. Böylece $L = [0,1]$ için $\left(L, \preccurlyeq_{T_\lambda}\right)$ kafes olacak şekilde T_W dan farklı bir T_λ t-normunun mevcut olduğu gösterilerek [35] te bırakılan bir açık probleme cevap verilmiştir. Buradaki T t-normu bölünebilir değilse, $\left(L, \preccurlyeq_{T_\lambda}\right)$ nın kafes olması gerekmediği Örnek 2.7 de gösterilmiştir.

1.2. Kısmen Sıralı Kümeler ve Kafesler

1.2.1. Kısmen Sıralı Kümeler

Tanım 1.1. P bir küme ve $\leq$, P üzerinde bir bağıntı olsun. Her $x, y, z \in P$ için

P1. $x \leq x$ (Yansıma)

P2. $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ (Ters Simetri)

P3. $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (Geçişme)

şartları sağlanırsa, $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir sıralama (veya kısmen sıralama) denir. Üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı mevcut olan P kümesine sıralı küme (veya kısmen sıralı küme) denir ve $(P, \leq)$ ikilisi ile gösterilir.

Eğer $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise $x < y$ yazılır ve 'x, y de öz olarak içerilir' olarak ifade edilir. $x \leq y$ bağıntısı $y \geq x$ olarak da yazılır ve 'y, x de içerilir' olarak ifade edilir.

Benzer şekilde $x < y$, $y > x$ olarak da yazılır. Ayrıca '$x \leq y$ yanlış' ise $x \nleq y$ yazılır. $x \nleq y$ ve $y \nleq x$ ise 'x ve y elemanları kıyaslanamaz' denir ve $x \parallel y$ ile gösterilir.

Örnek 1.1. X bir küme olmak üzere, $(\wp(X), \subseteq)$ kısmen sıralı bir kümedir.

Lemma 1.1. Herhangi bir P kısmen sıralı kümesinde her $x \in P$ için $x < x$ doğru değildir ve her $x, y, z \in P$ için $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ dir. Tersine '$<$' ikili bağıntısı ön iki şartı sağlar ve '$x \leq y$' '$x < y$' veya '$x = y$' olarak tanımlanırsa '$x \leq y$' bağıntısı P1, P2, P3 şartlarını sağlar.

Lemma 1.2. Eğer $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_1$ ise $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ dir.

Tanım 1.2. $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in P$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise $(P, \leq)$ kısmen sıralı kümesine tam sıralı küme veya zincir denir.

Teorem 1.1. [6] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $S \subseteq P$ alt kümesi ise $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir kümedir. Özel olarak, P bir zincir ise S de zincirdir.

Örnek 1.2. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi bir zincir olduğundan $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi doğal sıralamaya göre bir zincirdir.

Örnek 1.3. $\{1,2, \cdots, n\}$ kümesi doğal sıralamaya göre bir zincirdir.

Tanım 1.3. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. $\theta: P \longrightarrow Q$ dönüşümüne sıra korur dönüşüm veya izoton denir:$\Leftrightarrow$ Her $x, y \in P$ için

$$x \leq_1 y \text{ ise } \theta(x) \leq_2 \theta(y)$$

dir.

$(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ kısmen sıralı kümelerine izomorftur denir:$\Leftrightarrow$ Her $x, y \in P$ için

$$\theta(x) \leq_2 \theta(y) \iff x \leq_1 y$$

sağlayacak şekilde birebir ve örten bir $\theta: P \longrightarrow Q$ dönüşümü mevcuttur. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ kısmen sıralı kümeleri izomorf ise bu durum $P \cong Q$ ile gösterilir.

$(P, \leq_1)$ kısmen sıralı kümesinden kendisine tanımlanan bir izomorfiye bir otomorfi denir.

Tanım 1.4. ρ, P üzerinde bir bağıntı olsun.

$$\rho^{-1} = \{(a, b) | (b, a) \in \rho\}$$

olarak tanımlanan ρ^{-1} bağıntısına ρ bağıntısının tersi denir.

Teorem 1.2. (Duallik Prensibi) [6] Bir kısmen sıralamanın tersi yine bir kısmen sıralamadır.

Tanım 1.5. Bir P kısmen sıralı kümenin duali aynı elemanlar üzerinde ters sıralama bağıntısı ile tanımlanan $\check{P}$ kümesidir.

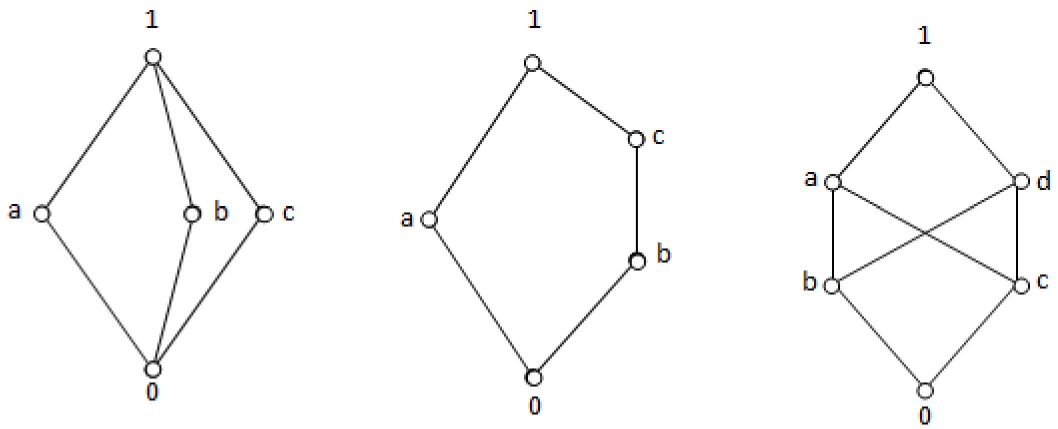
Tanım 1.6. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. Bir $\theta: P \longrightarrow Q$ fonksiyonuna ters sıra korur veya antiton denir:$\Leftrightarrow$ $x, y \in P$ için,

$[x \leq_1 y$ ise $\theta(y) \leq_2 \theta(x)]$ ve $[\theta(x) \leq_2 \theta(y)$ ise $y \leq_1 x]$

gerektirmeleri sağlanır. θ antiton, 1-1 ve örten bir dönüşüm ise θ dönüşümüne dual izomorfi denir.

Tanım 1.7. $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. $a, b \in P$ için 'a örter b' denir: $\Leftrightarrow$ $a > b$ olup $a > x > b$ olacak şekilde bir $x \in P$ elemanı mevcut değildir.

Bir P kısmen sıralı kümesinin $n(P)$ mertebesi ile P nin elemanlarının (kardinal) sayısı kastedilir. Bu sayı sonlu ise P ye sonlu kısmen sıralı bir küme denir. Kapsama bağıntısı kullanılarak herhangi bir sonlu kısmen sıralı kümenin aşağıdaki gibi bir grafiksel gösterimi elde edilir: P nin her bir elemanını göstermek için küçük bir daire çizilir ve $a > b$ olduğunda a, b den daha yukarı yazılır. a, b yi örttüğünde a dan b ye düz bir çizgi çizilir. Sonuçta elde edilen şekle P nin bir diyagramı denir. Aşağıda bazı kısmen sıralı kümelerin diyagram örnekleri verilmiştir.



M_5 N_5 P_6

Şekil 1.1. Diyagram örnekleri

Tanım 1.8. $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun.

(i) Bir $a \in P$ elemanı her $x \in P$ için $a \leq x$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa bu elemanın tek olduğu açıktır. Böyle bir eleman (eğer mevcutsa) 0 ile gösterilir ve P nin en küçük elemanı olarak adlandırılır.

Bir $b \in P$ elemanı her $x \in P$ için $x \leq b$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa

1 ile gösterilir ve P nin en büyük elemanı olarak adlandırılır. Böyle bir eleman mevcutsa tek olduğu açıktır.

Eğer 0 ve 1 elemanları mevcutsa, her $x \in P$ için $0 \leq x \leq 1$ olduğundan 0 ve 1 e evrensel sınırlar denir.

(ii) $a \in X$ olsun. Eğer $x < a$ olacak şekilde $x \in X$ mevcut değil ise a elemanına X kümesinin bir minimal elemanı denir.

X kümesinde maksimal eleman dual olarak tanımlanır.

En küçük eleman bir minimal eleman ve en büyük eleman da bir maksimal elemandır. Ancak tersinin doğru olması gerekmez.

Teorem 1.3. [6] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $\emptyset \neq X \subseteq P$ sonlu alt küme olsun. Bu takdirde X kümesi minimal ve maksimal elemanlara sahiptir.

Teorem 1.4. [6] Zincirlerde minimal (maksimal) ve en küçük (en büyük) eleman kavramları denktir. Böylece keyfi sonlu bir zincir en küçük ve en büyük elemanlara sahiptir.

Teorem 1.5. [6] n elemanlı her sonlu zincir n ordinal sayısına $(1, \cdots, n$ tamsayılarının zincirine) izomorftur.

Tanım 1.9. Bir sonlu n elemanlı zincirin uzunluğu $n - 1$ olarak tanımlanır. Daha genel olarak, bir P kısmen sıralı kümesinin $\ell(P)$ uzunluğu P deki zincirlerin uzunluklarının en küçük üst sınırı olarak tanımlanır. Eğer $\ell(P)$ sonlu ise P kısmen sıralı kümesine sonlu uzunluklu kısmen sıralı küme denir.

Tanım 1.10. $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun.

(i) $a \in P$ ve her $x \in X$ için $x \leq a$ ise a elemanına X kümesinin bir üst sınırı denir ve X kümesinin üst sınırlarının kümesi $\overline{X}$ ile gösterilir. $\overline{X}$ kümesinin (eğer mevcutsa) en küçük elemanına X kümesinin supremumu denir ve $supX$ ile gösterilir.

(ii) $b \in P$ ve her $x \in X$ için $b \leq x$ ise b elemanına X kümesinin bir alt sınırı denir ve X kümesinin alt sınırlarının kümesi $\underline{X}$ ile gösterilir. $\underline{X}$ kümesinin (eğer mevcutsa) en büyük elemanına X kümesinin infimumu denir ve $infX$ ile gösterilir.

1.2.2. Kafesler

Tanım 1.11. $(P, \leq)$ bir kısmen sıralı küme olsun. Her $x, y \in P$ için $sup\{x, y\}$ ve $inf\{x, y\}$ mevcut ise P ye kafes denir.

P kafesinde $x, y \in P$ için $x \vee y := sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y := inf\{x, y\}$ ile gösterilir.

Eğer $(P, \leq)$ bir kafes ise $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri P üzerinde ikili işlemlerdir. Dolayısıyla $(P, \vee, \wedge)$ bir cebirsel yapıdır.

Örnek 1.4. Şekil 1.1 de verilen diyagram örneklerinde M_5 ve N_5 kafestir fakat P_6 kafes değildir.

Örnek 1.5. $(\wp(X), \subseteq)$ kısmen sıralı kümesi bir kafestir. Bu kafeste $\forall A, B \in \wp(X)$ için $A \vee B = A \cup B$ ve $A \wedge B = A \cap B$ dir.

Tanım 1.12. Bir P kafesine sınırlı kafes denir:$\Leftrightarrow$ P en küçük eleman 0 ve en büyük eleman 1 e sahiptir.

Tanım 1.13. Bir L kafesine tam kafes denir:$\Leftrightarrow$ L nin her X alt kümesi L de bir en küçük üst sınıra ve bir en büyük alt sınıra sahiptir, yani her $X \subseteq L$ alt kümesi için $supX$ ve $infX$, L de mevcuttur.

Özel olarak Tanım 1.13 te $X = L$ alındığında boştan farklı her tam kafesin en küçük elemanının ve en büyük elemanının mevcut olduğu görülür. Bu nedenle her tam kafes sınırlıdır. Her sonlu kafes tam kafestir. Keyfi bir zincir kafestir.

Örnek 1.5 te verilen bir X kümesinin tüm alt kümelerinin kafesi $(\wp(X), \subseteq)$ tam kafestir, burada en küçük eleman $0 = \emptyset$ ve en büyük eleman $1 = X$ dir. $S_\alpha \subseteq \wp(X)$ alt kümelerinden oluşan keyfi A ailesi için $infA = \bigcap_A S_\alpha$ ve $supA = \bigcup_A S_\alpha$ dır.

Tanım 1.14. L bir kafes ve $X \subseteq L$ olsun. X alt kümesine L kafesinin bir alt kafesidir denir:$\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$ için $a \wedge b \in X$ ve $a \vee b \in X$ dir.

Bir kafeste boş küme ve tek elemanlı alt kümeler alt kafestir. Daha genel olarak, $(L, \leq)$ bir kafes ve $a, b \in L$ için $a \leq b$ ise

$[a, b] := \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$

ile tanımlanan $[a, b]$ kapalı aralığı bir alt kafestir.

Tanım 1.15. P bir kısmen sıralı küme ve $X \subseteq P$ olsun. X e konveks alt küme denir:$\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$, $a \leq b$ için $[a, b] \subseteq X$ dir.

Tanım 1.16. Bir L kafesinin S alt kümesine konveks alt kafes denir:$\Leftrightarrow$ Her $a, b \in S$ için $[a \wedge b, a \vee b] \subseteq S$ dir.

Bir L kafesinin aynı sıralama altında kafes olan bir alt kümesinin alt kafes olması gerekmez. Aşağıdaki kafes bu duruma bir örnek olarak verilebilir.

Örnek 1.6. Σ bir G grubunun tüm alt gruplarının ailesi olsun. $H, K \in \Sigma$ için

$H \leq K \Leftrightarrow H \subseteq K$

olarak tanımlansın. Bu takdirde $(\Sigma, \leq)$ bir tam kafestir, burada $H \wedge K = H \cap K$ (küme kesişimi) dir. $H \vee K$ ise H ve K alt gruplarını içeren en küçük alt gruptur. Ancak $(\Sigma, \leq)$ kafesi $(\wp(G), \subseteq)$ kafesinin bir alt kafesi değildir.

Teorem 1.6. [6] L bir tam kafes ve $S \subseteq L$ olsun. Eğer

(i) $0 \in S$,

(ii) Her $T \subseteq S$ için $supT \in S$

ise S bir tam kafestir.

Tanım 1.17. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. P ve Q kısmen sıralı kümelerinin

$P \times Q = \{(x, y) \mid x \in P, y \in Q\}$

şeklinde tanımlanan $P \times Q$ kartezyen çarpım kümesi her $x_1, x_2 \in P$ ve $y_1, y_2 \in Q$ için

$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2$ ve $y_1 \leq_2 y_2$

bağıntısı altında kısmen sıralı bir kümedir. Bu $(P \times Q, \leq)$ kısmen sıralı kümesine P ve Q kısmen sıralı kümelerinin direkt çarpım kümesi denir.

Teorem 1.7. [6] L ve M iki kafes olsun. $L \times M$ direkt çarpımı da yine bir kafestir. Burada $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L \times M$ için

$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$

$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2)$

dır.

Bir kafeste $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri önemli cebirsel özelliklere sahiptir.

Lemma 1.3. [6] P kısmen sıralı bir küme olsun. İnfimum ve supremum işlemleri (eğer mevcutsa) her $x, y, z \in P$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir:

L1. $x \wedge x = x$, $\quad x \vee x = x$, (İdempotent)

L2. $x \wedge y = y \wedge x$, $\quad x \vee y = y \vee x$, (Komütatif)

L3. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$, $\quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$, (Birleşme)

L4. $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$. (Yok etme)

Üstelik $x \leq y$ ifadesi $x \wedge y = x$ ve $x \vee y = y$ şartlarının her birine denktir.

Lemma 1.4. [6] P, 0 en küçük elemanına sahip kısmen sıralı bir küme ise her $x \in P$ için

$0 \wedge x = 0$ ve $0 \vee x = x$

dir. Dual olarak P, 1 evrensel üst sınırına sahip ise her $x \in P$ için

$x \wedge 1 = x$ ve $x \vee 1 = 1$

dir.

Lemma 1.5. [6] Herhangi bir kafeste infimum ve supremum işlemleri sırayı korur, yani bir L kafesinde $x, y, z \in L$ için

$y \leq z$ ise $x \wedge y \leq x \wedge z$ ve $x \vee y \leq x \vee z$

sağlanır.

Lemma 1.6. [6] L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için

$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

eşitsizlikleri sağlanır.

Lemma 1.7. [6] L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için modüler eşitsizlik olarak bilinen

$x \leq z$ ise $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 1.18. İdempotent, komütatif ve birleşme özelliklerine sahip ikili işlemli bir sisteme yarı kafes denir.

Sonuç 1.1. [6] P kısmen sıralı bir küme ve P de alınan herhangi iki elemanın infimumu mevcut olsun. Bu takdirde P, $\wedge$ ikili işlemine göre bir yarı kafestir. Böyle yarı kafeslere infimum-yarı kafesler denir. Dual olarak P kısmen sıralı kümesinde alınan herhangi iki elemanın supremumu mevcut ise P, $\vee$ ikili işlemine göre bir yarı kafestir. Böyle yarı kafeslere supremum-yarı kafesler denir.

Lemma 1.8. [6] P bir küme, $\circ$ P üzerinde bir ikili işlem ve $(P, \circ)$ bir yarı kafes olsun. Bu takdirde $x \leq y \Leftrightarrow x \circ y = x$ olarak tanımlanan $\leq$ bağıntısı altında $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir kümedir, burada $x \circ y = inf\{x, y\}$ şeklinde tanımlıdır.

Teorem 1.8. [6] $(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir kafestir $\Leftrightarrow$ $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri L1-L4 özelliklerini sağlar.

Teorem 1.9. [6] Keyfi bir L kafesinde aşağıdaki ifadeler denktir:

L5′. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad \forall x, y, z \in L,$

L5″. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad \forall x, y, z \in L$

Tanım 1.19. Bir kafese dağılmalı kafes denir:⟺ L5′ özelliği (böylece L5″) sağlanır.

Şekil 1.1 deki M_5 ve N_5 kafesleri dağılmalı değildir.

Lemma 1.9. [6] L bir zincir ise L dağılmalı bir kafestir.

Keyfi dağılmalı kafesin duali de dağılmalı kafestir. Ayrıca herhangi bir dağılmalı kafesin alt kafesi ve dağılmalı kafeslerin direkt çarpımları da dağılmalı kafestir.

Teorem 1.10 [6]. Bir dağılmalı kafeste $c \wedge x = c \wedge y$ ve $c \vee x = c \vee y$ ise $x = y$ elde edilir.

Tanım 1.20. L bir kafes olsun. L kafesine modüler kafes denir: ⟺ Her $x, y, z \in L$ için

L6. $x \leq z$ ise $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

sağlanır.

Her dağılmalı kafes modülerdir. Fakat her modüler kafesin dağılmalı kafes olması gerekmez. Örnek olarak Şekil 1.1 deki M_5 kafesi modülerdir ancak dağılmalı değildir.

Teorem 1.11. [6] Herhangi bir G grubunun normal alt gruplarının kafesi bir modüler kafestir.

Bir modüler kafesin keyfi alt kafesleri modülerdir ve modüler kafeslerin direkt çarpımları da modülerdir.

Teorem 1.12. [6] Modüler olmayan herhangi bir L kafesi Şekil 1.1 deki N_5 kafesini bir alt kafes olarak içerir.

Tanım 1.21. L sınırlı bir kafes ve $x, y \in L$ olsun. y elemanına x elemanının komplementi denir:⟺ $x \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$ dir. Bu durumda x elemanının komplementi x' ile gösterilir.

Eğer bir kafesin her elemanının komplementi mevcut ise böyle kafeslere komplementli kafes denir.

Tanım 1.22. Bir kafese yerel komplementli kafes denir:⟺ Bu kafesin tüm kapalı aralıkları komplementlidir.

Bir X kümesinin tüm alt kümelerinin kafesi komplementlidir. Şekil 1.1 deki M_5 kafesi komplementli kafese bir örnektir.

Teorem 1.13. [6] Keyfi komplementli modüler kafes yerel komplementlidir.

5-elemanlı modüler olmayan Şekil 1.1 deki N_5 kafesi komplementlidir ancak yerel komplementli değildir.

Tanım 1.23. L bir kafes olsun. $x \in L$ elemanına atom denir $:\Leftrightarrow$ x, $L \setminus \{0\}$ ın minimal elemanıdır.

Teorem 1.14. [6] Sonlu uzunluklu yerel komplementli bir kafeste her eleman içerdiği atomların supremumu şeklinde yazılabilir.

Sonuç 1.2. [6] Sonlu uzunluklu komplementli modüler kafeste, her eleman içerdiği atomların supremumu şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.24. Her elemanı içerdiği atomların supremumu şeklinde olan kafese atomik kafes denir.

Tanım 1.25. L sınırlı bir kafes olsun. L kafesine Boole kafesi denir:$\Leftrightarrow$ L dağılmalı ve komplementli bir kafestir.

Örnek 1.7. Örnek 1.5 te verilen $(\wp(X), \subseteq, \vee, \wedge)$ kafesi bir Boole kafesidir, burada her $A \subseteq X$ alt kümesi için $A' = X \setminus A$ dır.

Teorem 1.10 ile herhangi bir dağılmalı kafeste komplementler tektir.

Teorem 1.15. [6] L bir Boole kafesi olsun. Her $x \in L$ elemanının bir tek x' komplementi mevcuttur. Üstelik her $x, y \in L$ için

L7. $x \wedge x' = 0$ ve $x \vee x' = 1$,

L8. $(x')' = x$,

L9. $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ ve $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

özellikleri sağlanır.

Tanım 1.26. L bir kafes olsun. L kafesine Boole cebiridir denir:$\Leftrightarrow$ L kafesi $\wedge, \vee, '$ işlemleri ile L1-L9 özelliklerini sağlar.

A bir Boole cebiri olsun. $\emptyset \neq B \subseteq A$ kümesine A Boole cebirinin alt cebiridir denir: $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in B$ için $a \wedge b$, $a \vee b$, $a' \in B$ dir.

Teorem 1.16. [6] Evrensel sınırlara sahip herhangi dağılmalı kafesin komplementli elemanların kümesi bir alt kafes oluşturur.

Tanım 1.27. L, 0 en küçük elemanına sahip bir kafes olsun. Bir a^* elemanına $a \in L$ elemanının pseudo-komplementi denir $:\Leftrightarrow$ $a \wedge a^* = 0$ ve $a \wedge x = 0$ olan her x için $x \leq a^*$ dır.

Her elemanı pseudo-komplemente sahip olan bir kafese pseudo-komplementli kafes denir.

Tanım 1.28. L bir infimum-yarı kafes ve $a, b \in L$ olsun. a elemanının b elemanına göre yerel pseudo-komplementi $a * b \in L$ elemanıdır ve $a \wedge x \leq b \Leftrightarrow x \leq a * b$ sağlanır.

Tanım 1.29. Bir L kafesine Brouwerian kafesi denir:⟺ $X = \{x \in L \mid a \wedge x \leq b\}$ kümesi $a * b$ ile gösterilen bir en büyük eleman içerir; burada $a * b$ elemanına, a elemanının b elemanına göre yerel pseudo-komplementi denir.

Teorem 1.17. [6] Bir kafes Brouwerian kafes ise dağılmalıdır.

Teorem 1.18. [6] Bir tam kafes Brouweriandır ⟺ Supremum infimum üzerine tam olarak dağılmalıdır, yani keyfi $\{x_\alpha | \alpha \in I\}$ kümesi için

$$a \wedge \bigvee_I x_\alpha = \bigvee_I (a \wedge x_\alpha)$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 1.30. [21] Yerel pseudo- komplementli dağılmalı kafese Heyting Cebiri denir.

1.3. $[0,1]$ Üzerinde Üçgensel Normlar ve Konormlar

1.3.1. $[0,1]$ Üzerinde Üçgensel Normlar

Aksi belirtilmedikçe $[0,1]$ üzerindeki doğal sıralama $\leq$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.31. Bir üçgensel norm (kısaca t-norm) T, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir ikili işlemdir, yani $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu her $x, y, z \in [0,1]$ için

T1. $T(x,y) = T(y,x)$ (Komütatiflik)

T2. $T\big(x, T(y,z)\big) = T(T(x,y), z)$ (Birleşme)

T3. $y \leq z$ ise $T(x,y) \leq T(x,z)$ (Monotonluk)

T4. $T(x,1) = x$ (Sınır şartı)

özelliklerini sağlar.

Örnek 1.8. T_M, T_P, T_L, T_D temel t-normları aşağıdaki gibi verilir:

$T_M(x,y) = min(x,y)$ (Minimum)

$T_P(x,y) = xy$ (Çarpım)

$T_L(x,y) = max(x + y - 1, 0)$ (Lukasiewicz t-norm)

$$T_D(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in [0,1)^2, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$ (Drastik çarpım)

Uyarı 1.1. T, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde bir t-norm ise aşağıdaki özellikler geçerlidir.

(i) Tanım 1.31 ile her T t-norm her $x \in [0,1]$ için

$$T(0,x) = T(x,0) = 0 \quad (1.1)$$

$$T(1,x) = x \quad (1.2)$$

dir.

(ii) Bir T t-normunun ikinci bileşene göre monotonluğu, (T1) komütatiflik ve (T3) monotonluk özellikleri ile tanımlanır. Bu monotonluk her iki bileşene göre monotonluğa denktir, yani

$$x_1 \leq x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2 \text{ ise } T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2) \quad (1.3)$$

dir.

Tanım 1.32.

(i) T_1 ve T_2 iki t-norm olsun. Eğer her $(x,y) \in [0,1]^2$ için $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ eşitsizliği sağlanıyor ise 'T_1 t-normu, T_2 t-normundan zayıftır' veya 'T_2 t-normu T_1 t-normundan güçlüdür' denir ve bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

(ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise yani $T_1 \leq T_2$ ve bir $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ için $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ ise bu durum $T_1 < T_2$ ile gösterilir.

Uyarı 1.2.

(i) T, [0,1] birim aralığı üzerinde bir t-norm olsun. (1.3) ün bir sonucu olarak her $x, y \in [0,1]$ için $T(x,y) \leq T(x,1) = x$ ve $T(x,y) \leq T(1,y) = y$ olup $T(x,y) \leq min(x,y) = T_M(x,y)$ dir. Böylece T_M minimum t-normu en güçlü t-normdur.

Her $(x,y) \in (0,1)^2$ için $T(x,y) \geq 0 = T_D(x,y)$ olduğundan T_D drastik çarpımı en zayıf t-normdur. Bu durumda keyfi T t-normu için

$$T_D \leq T \leq T_M \quad (1.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

(ii) Şimdi de $T_L < T_P$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $x, y \in [0,1]$ keyfi alınsın. $x + y \geq 1$ olsun. Buradan $x + y - 1, xy \in [0,1]$ olduğundan

$x + y - 1 \leq xy$ veya $x + y - 1 > xy$

olur. İlk olarak $x + y - 1 > xy$ alınsın. Buradan

$$x - 1 > xy - y$$

$$x - 1 > y(x - 1)$$

$$y > 1$$

çelişkisi elde edilir. O halde $x + y - 1 \leq xy$ dir.

Yani $x + y \geq 1$ ise $T_L(x, y) = x + y - 1 \leq xy = T_P(x, y)$ dir. $x + y < 1$ durumunda ise $T_L(x, y) = 0 \leq T_P(x, y)$ olur. Dolayısıyla $T_L \leq T_P$ olduğu elde edilir. Şimdi eşitliğin sağlanmadığı gösterilecektir.

$x = 1/2$ ve $y = 1/2$ alınsın.

$T_L(1/2, 1/2) = max(1/2 + 1/2 - 1, 0) = 0 < T_P(1/2, 1/2) = 1/2 \, 1/2 = 1/4$

olduğundan $T_L \neq T_P$ dir. Buradan $T_L < T_P$ olduğu elde edilir.

Bu nedenle dört temel t-norm arasında

$$T_D < T_L < T_P < T_M \tag{1.5}$$

ilişkisi mevcuttur.

Önerme 1.1. [40] $(0,1) \subseteq A \subseteq [0,1]$ bir küme ve $*: A^2 \longrightarrow A$, A üzerinde bir ikili işlem ve her $x, y, z \in A$ için (T1)-(T3) özellikleri ile birlikte

$$x * y \leq min(x, y) \tag{1.6}$$

özelliği sağlansın. O halde

$$T(x, y) = \begin{cases} x * y, & (x, y) \in (A \setminus \{1\})^2, \\ min(x, y), & \text{aksi halde} \end{cases} \tag{1.7}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur. Üstelik T, $(A \setminus \{1\})^2$ e kısıtlanışı, $*$ ikili işleminin $(A \setminus \{1\})^2$ ne kısıtlanışı ile aynı olan tek t-normdur.

Tanım 1.33. Her $x, y, z \in [0,1]$ için (T1)-(T3) ve (1.6) özelliklerini sağlayan bir $F: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonuna bir t-altnorm denir.

Açık olarak her t-norm bir t-altnormdur, fakat tersinin doğru olması gerekmez. Örneğin $F(x,y)=0$ ile verilen $F:[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-altnormdur fakat bir t-norm değildir. Çünkü F fonksiyonu sınır şartı özelliğini sağlamaz.

Sonuç 1.3. [40] F bir t-altnorm ise

$$T(x,y)=\begin{cases} F(x,y), & (x,y)\in[0,1)^2, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ile tanımlanan $T:[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur.

Önerme 1.2. [40]

(i) Her $x\in[0,1]$ için $T(x,x)=x$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_M minimum t-normdur.

(ii) Her $x\in[0,1)$ için $T(x,x)=0$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_D drastik çarpımdır.

Uyarı 1.3.

(i) (T2) birleşme kuralı ile, her t-norm T bir tek şekilde, indüksiyon kullanarak aşağıdaki gibi bir n-li işleme genişletilebilir, yani her $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in[0,1]^n$ n-sıralısı için

$$T_{i=1}^{n}x_i = T(T_{i=1}^{n-1}x_i, x_n)$$

dir. Eğer özel olarak $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$ ise kısaca

$$x_T^{(n)} = T(x,x,\dots,x)$$

yazılır. Bu durumda $x_T^{(0)}=1$ ve $x_T^{(1)}=x$ olarak tanımlanır.

(ii) [0,1] in elemanlarının her $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisi yani $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ için

$$T_{i=1}^{\infty}x_i = \lim_{n\to\infty} T_{i=1}^{n}x_i \qquad (1.8)$$

ile tanımlanır.

(iii) Keyfi bir I indis kümesi ve her $(x_i)_{i\in I}\in[0,1]^I$ için, yani [0,1] in elemanlarının her $(x_i)_{i\in I}$ ailesi için aşağıdaki ifade iyi tanımlıdır ve (1.8) in bir genellemesidir:

$$T_{i\in I}x_i = inf\left\{T_{j=1}^{k}x_{i_j} \,\middle|\, (x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_k}), (x_i)_{i\in I} \text{ nın bir sonlu alt ailesidir}\right\}.$$

Örnek 1.9. T_M minumum ve T_p çarpım t- normlarının n-li genişlemelerinin

$$T_M(x_1,x_2,\dots,x_n) = min(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$$T_P(x_1,x_2,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

olduğu açıktır. T_L Lukasiewicz t-normunun ve T_D drastik çarpımının n-li genişlemeleri

$$T_L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max(\sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1), 0),$$

$$T_D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} x_i, & \forall j \neq i \text{ } için \text{ } x_j = 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklindedir.

Uyarı 1.4. Tanım 1.31 de verilen (T1)-(T4) aksiyomları birbirinden bağımsızdır. Bu aşağıdaki örnekte görülebilir.

Örnek 1.10. $i = 1,2,3,4$ için $F_i: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonları aşağıdaki gibi sırasıyla tanımlansın.

$$F_1(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0,0.5] \times [0,1), \\ min(x, y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$F_2(x, y) = xymax(x, y)$$

$$F_3(x, y) = \begin{cases} 0.5, & (x, y) \in (0,1)^2, \\ min(x, y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$F_4(x, y) = 0$$

Bu fonksiyonlar t-norm değildirler. Çünkü F_1 fonksiyonu (T1)-komütatiflik özelliğini, F_2 fonksiyonu (T2)-birleşme özelliğini, F_3 fonksiyonu (T3)-monotonluk özelliğini ve F_4 fonksiyonu (T4)-sınır şartı özelliğini sağlamaz.

1.3.2. $[0, 1]$ Üzerinde Üçgensel Konormlar

Tanım 1.34. Bir üçgensel konorm (veya kısaca t-konorm) S, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde her $x, y, z \in [0,1]$ için (T1)-(T3) şartlarını ve her $x \in [0,1]$ için

(S4) $\quad S(x, 0) = x$ (Sınır şartı)

şartını sağlayan $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonudur.

Aksiyomatik olarak t-normlar ve t-konormlar sadece sınır şartlarında farklılık gösterirler. Aslında t-norm ve t-konorm kavramları bazı anlamlarda dualdirler.

Örnek 1.11. S_M, S_p, S_L ve S_D temel t-konormları sırası ile

$S_M(x, y) = max(x, y)$ (Maksimum)

$S_P(x, y) = x + y - xy$ (Probalistic toplam)

$S_L(x, y) = min(x + y, 1)$ (Lukasiewicz t-konorm)

$$S_D(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in (0,1)^2, \\ max(x, y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$ (Drastik toplam)

şeklinde tanımlanır.

Önerme 1.3. [40] $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-konormdur $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in [0,1]$ için

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y) \tag{1.9}$$

olacak şekilde bir T t-normu mevcuttur.

Uyarı 1.5.

(i) $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir t-konorm ise

$$T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y) \tag{1.10}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur. (1.9) da verilen t-konorma, t-norm T nin dual t-konormu denir. Benzer şekilde, (1.10) da verilen t-norma S t-konormunun dual t-normu denir.

(ii) (T_M, S_M), (T_P, S_P), (T_L, S_L) ve (T_D, S_D) ikişer tarzda birbirine dual t-norm ve t-konorm çiftleridir.

(iii) $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir t-konorm olsun. Her $x \in [0,1]$ için

$S(1,x) = S(x,1) = 1$

$S(0,x) = x$

ilave sınır şartları olarak adlandırılan eşitlikler sağlanır. Böylece tüm t-konormlar $[0,1]^2$ sınırı üzerinde çakışıktır, yani aynı değeri alırlar.

T-normlarda olduğu gibi bir S t-konormu elde etmek için gerek ve yeter koşul Önerme 1.1 in duali ile (S1)-(S3) şartlarının ve her (x,y) için $S(x,y) \geq max(x,y)$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

(iv) Duallik sıralamayı değiştirir, yani T_1 ve T_2 t-normları için $T_1 \leq T_2$ ve S_1, T_1 t-normuna ve S_2, T_2 t-normuna karşılık gelen dual t-konormlar ise $S_1 \geq S_2$ dir. Her S t-konormu için

$S_M \leq S \leq S_D$

dir. Yani S_M maksimum t-konormu en zayıf, S_D drastik toplam en güçlü t-konormdur. Örnek 1.11 deki t-konormlar için

$S_M < S_P < S_L < S_D$

sıralaması elde edilir.

(v) S bir t-konorm olsun. Uyarı 1.3 e benzer şekilde $(x_1, x_2, \dots x_n) \in [0,1]^n$ n-sıralılarına, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizilerine ve I keyfi küme olmak üzere $(x_i)_{i\in I} \in [0,1]^I$ ailelerine genişletme işlemi aşağıdaki gibidir:

$$S_{i=1}^{n} x_i = S(S_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = S(x_1, x_2, \dots x_n)$$

$$S_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} S_{i=1}^{n} x_i$$

$$S_{i\in I} x_i = sup\left\{S_{j=1}^{k} x_{i_j} \middle| \left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\right), (x_i)_{i\in I} \text{ nın sonlu alt ailesidir}\right\}.$$

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ olduğunda $S(x, x, \cdots, x)$ yerine kısaca $x_S^{(n)}$ yazılır ve her $x \in [0,1]$ için $x_S^{(0)} = 0$ ve $x_S^{(1)} = x$ olarak gösterilir.

Örnek 1.12. S_M maksimum t-konormunun n-li genişlemesinin

$S_M(x_1, x_2, \dots x_n) = max(x_1, x_2, \dots x_n)$

olduğu açıktır. S_P probalistik toplam, S_L Lukasiewicz t-konorm ve S_D drastik toplam için n-li genişlemeler

$S_P(x_1, x_2, \dots x_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$

$S_L(x_1, x_2, \dots x_n) = min(\sum_{i=1}^{n} x_i\,, 1)$

$$S_D(x_1, x_2, \dots x_n) = \begin{cases} x_i, & \forall i \neq j \; için \;\; x_j = 0 \text{ ise} \\ 1, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 1.6. (T, S) birbirlerine dual t-norm ve t-konorm çifti ise (1.9) ve (1.10) dual ifadeleri,

$$S_{k\in K} x_k = 1 - T_{k\in K}(1 - x_k)$$

$$T_{k\in K} x_k = 1 - S_{k\in K}(1 - x_k)$$

şeklinde genişletilebilir, burada K keyfi bir indis kümesidir.

1.4. Süreklilik

Tanım 1.35. Bir $F:[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonuna süreklidir denir:⟺ Her yakınsak $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizileri için

$$F(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n)$$

dir.

Açıkça, T_M, T_P ve T_L temel t-normları ve S_M, S_P ve S_L dual t-konormları süreklidir. T_D drastik çarpım ve S_D drastik toplam ise sürekli değildir.

Önerme 1.4. [40] Azalan olmayan $x_1 \le x_2,\ y_1 \le y_2$ olduğunda $F(x_1, y_1) \le F(x_2, y_2)$ eşitsizliğini sağlayan bir $F:[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu süreklidir⟺ F her bir bileşene göre süreklidir, yani her $x_0, y_0 \in [0,1]$ için $F(x_0, .):[0,1] \longrightarrow [0,1]$ düşey kesimi ve $F(., y_0):[0,1] \longrightarrow [0,1]$ yatay kesimi tek değişkenli sürekli fonksiyonlardır.

Tanım 1.36. Bir $F:[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonuna sırası ile alt (üst) yarı süreklidir denir :⟺ Her $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ öyleki sırası ile

$$F(x,y) > F(x_0,y_0) - \varepsilon, \qquad (x,y) \in (x_0 - \delta, x_0] \times (y_0 - \delta, y_0]$$

$$F(x,y) < F(x_0,y_0) + \varepsilon, \qquad (x,y) \in [x_0, x_0 + \delta) \times [y_0, y_0 + \delta)$$

sağlanır.

Uyarı 1.7.

(i) $T^{nM}(x,y) = \begin{cases} 0, & x + y \le 1, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$

ile tanımlanan $T^{nM}:[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur [40] ve bu t-norm nilpotent minimum t-norm olarak adlandırılır. T^{nM} nilpotent minimum t-norm alt yarı süreklidir fakat üst yarı sürekli değildir.

(ii) Bir t-norm T alt (üst) yarı süreklidir⟺ (1.9) da verilen onun dual t-konormu üst (alt) yarı süreklidir.

Önerme 1.5. [40] Bir $F:[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ azalmayan fonksiyonu alt yarı süreklidir⟺ F her bir bileşene göre sol süreklidir, yani her $x_0, y_0 \in [0,1]$ ve her $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ için

$$Sup\{F(x_n, y_0) | n \in \mathbb{N}\} = F(sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\}, y_0)$$

$$Sup\{F(x_0, y_n) | n \in \mathbb{N}\} = F(x_0, sup\{y_n | n \in \mathbb{N}\})$$

dir.

Benzer şekilde azalmayan bir fonksiyonun üst yarı sürekliliği her bir bileşene göre sağ sürekliliğine denktir.

Önerme 1.6. [20] $F: \mathrm{I}^n \to \mathbb{R}$ azalmayan fonksiyonu için aşağıdaki koşullar denktir:

(i) F süreklidir.

(ii) F her bir bileşene göre sürekli, yani herhangi bir $x \in \mathrm{I}^n$ ve $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ için, $u \to F(x_1,\cdots,x_{i-1},u,x_{i+1},\cdots,x_n)$ birli fonksiyonu süreklidir.

(iii) F ortalama değer özelliğine sahiptir: $x \le y$ olan herhangi $x,y \in \mathrm{I}^n$ ve $c \in [F(x),F(y)]$ için $x \le z \le y$ olan $z \in \mathrm{I}^n$ elemanı $F(z) = c$ olacak şekilde mevcuttur.

Tanım 1.37. Bir T t-normuna (t-konorm S) sınır süreklidir denir $\Leftrightarrow$ T t-normu (S t-konormu) $[0,1]^2$ nin sınırları üzerinde, yani $[0,1]^2 \setminus (0,1)^2$ üzerinde süreklidir.

Tanım 1.38. Bir $F: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonuna Lipschitz özelliğini sağlar denir:$\Leftrightarrow$ Her $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in [0,1]^2$ çiftleri için bir $c \in (0,\infty)$ sabiti

$$|F(x_1,y_1) - F(x_2,y_2)| \le c(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$$

olacak şekilde mevcuttur.

Genelde F fonksiyonu Lipschitz özelliğini sağlar ise F fonksiyonu düzgün süreklidir, yani süreklidir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Tanım 1.39. $A \subset \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. x, A kümesinin bir limit noktasıdır:$\Leftrightarrow$ x in her U komşuluğu için $U \setminus \{x\} \cap A \ne \emptyset$ dır.

1.5. Cebirsel Özellikler

Tanım 1.40. T bir t-norm olsun.

(i) Bir $a \in [0,1]$ elemanına T nin bir idempotent elemanıdır denir:$\Leftrightarrow$ $T(a,a) = a$ dır.

0 ve 1 her t-norm için idempotent elemanlar olup bu elemanlara trivial idempotent elemanlar denir. $(0,1)$ deki idempotent elemanlar ise trivialden farklı idempotent elemanlar olarak adlandırılır.

(ii) Bir $a \in (0,1)$ elemanına t-norm T nin nilpotent elemanı denir:$\Leftrightarrow$ Bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı $a_T^{(n)} = 0$ olacak şekilde mevcuttur.

(iii) Bir $a \in (0,1)$ elemanına T nin sıfır böleni denir :$\Leftrightarrow$ $T(a,b) = 0$ olacak şekilde bir $b \in (0,1)$ mevcuttur.

Örnek 1.13.

- Her $a \in [0,1]$ için $T_M(a,a) = min(a,a) = a$ olduğundan keyfi $a \in [0,1]$

elemanı T_M minimum t-normunun idempotent elemanıdır. Önerme 1.2 nin bir sonucu olarak T_M minimum t-normu idempotent elemanlarının kümesi $[0,1]$ e eşit olan tek t-normdur.

- Her $a \in (0,1)$ elemanı T_L Lukasiewicz t-normunun ve T_D drastik çarpımın hem sıfır böleni hem de nilpotent elemanıdır.
- T_M minimum t-normu nilpotent elemana ve sıfır bölene sahip değildir.
- T_D drastik çarpım ve T_L Lukasiewicz t-normu trivialden farklı idempotent elemanlara sahip değildirler.
- T_P çarpım t-normunun da trivialden farklı idempotent elemanı yoktur.
- T_P çarpım t-normu nilpotent elemana ve sıfır bölene sahip değildir.

İdempotent elemanlar aşağıdaki yolla karakterize edilebilirler.

Önerme 1.7. [40]

(i) Bir $a \in [0,1]$ elemanı bir t-norm T nin idempotent elemanıdır.$\Leftrightarrow$ Her $x \in [a,1]$ için $T(a,x) = min(a,x)$ dir.

(ii) Eğer T sürekli bir t-norm ise $a \in [0,1]$, T nin bir idempotent elemanıdır$\Leftrightarrow$ Her $x \in [0,1]$ için $T(a,x) = min(a,x)$ dir.

Uyarı 1.8.

(i) Eğer $a \in [0,1]$ bir t-norm T nin idempotent elemanı ise indüksiyon ile her $n \in \mathbb{N}$ için $a_T^{(n)} = a$ dır. Sonuç olarak, $(0,1)$ in hiçbir elemanı hem idempotent hem de nilpotent eleman olamaz.

(ii) Bir t-norm T nin her nilpotent elemanı aynı zamanda T nin bir sıfır bölenidir. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin; ${}^{2}/_{3} \in (0,1)$, T^{nM} nilpotent minimum t-normunun sıfır bölenidir ancak nilpotent elemanı değildir.

(iii) Eğer bir t-norm T bir a nilpotent elemana sahip ise o halde $b_T^{(2)} = 0$ olacak şekilde bir $b \in (0,1)$ elemanı daima mevcuttur.

(iv) Eğer bir $a \in (0,1)$ elemanı t-norm T nin bir nilpotent elemanı (sıfır böleni) ise her $b \in (0,a)$ sayısı aynı zamanda T nin bir nilpotent elemanıdır (sıfır bölenidir).

(v) Bir t-norm T nin nilpotent elemanlarının ve sıfır bölenlerinin kümesi ya boş kümedir ya da $(0,c)$ veya $(0,c]$ şeklinde bir aralıktır.

Önerme 1.8. [40] Her t-norm T için aşağıdakiler denktir.

(i) T sıfır bölenlidir.

(ii) T nilpotent elemana sahiptir.

Önerme 1.9. [40] T t-normu $[0,1]^2$ birim karesinin $\{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$ köşegeni üzerinde sağ sürekli ve $a \in [0,1]$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(i) a, T nin bir idempotent elemanıdır.

(ii) $a = \lim_{n\to\infty} x_T{}^{(n)}$ olacak şekilde bir $x \in [0,1]$ mevcuttur.

Tanım 1.41. T bir t-norm olsun.

(i) T t-normuna kesin monotondur denir $:\Leftrightarrow$ $x > 0$ ve $y < z$ ise $T(x,y) < T(x,z)$.

(ii) T t-normu kısaltma kuralını sağlar denir $:\Leftrightarrow$ $x > 0$ ve $T(x,y) = T(x,z)$ ise $y = z$.

(iii) T t-normu şartlı kısaltma özelliğini sağlar denir $:\Leftrightarrow$ $T(x,y) = T(x,z) > 0$ ise $y = z$.

(iv) T t-normu Arşimedyandır denir $:\Leftrightarrow$ Her $x, y \in (0,1)$ için bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı $x_T{}^{(n)} < y$ olacak şekilde mevcuttur.

(v) T t-normu limit özelliğini sağlar denir $:\Leftrightarrow$ Her $x \in (0,1)$ için $\lim_{n\to\infty} x_T{}^{(n)} = 0$.

Örnek 1.14.

- T_M minimum t-normu Tanım 1.41 de verilen özelliklerden hiçbirini sağlamaz.
- T_P çarpım t-normu Tanım 1.41 de verilen özelliklerin hepsini sağlar.
- T_L Lukasiewicz t-normu Arşimedyandır, şartlı kısaltma özelliğini ve limit özelliğini sağlar ancak Tanım 1.41 de verilen diğer özelliklerin hiçbirini sağlamaz.
- T_D drastik çarpımı Arşimedyandır, şartlı kısaltma özelliğini ve limit özelliğini sağlar ancak Tanım 1.41 de verilen diğer özelliklerin hiçbirini sağlamaz.

Önerme 1.10. [40] T bir t-norm olsun. Bu takdirde;

(i) T kesin monotondur $\Leftrightarrow$ T kısaltma özelliğini sağlar.

(ii) T kesin monoton ise T sadece trivial idempotent elemanlara sahiptir.

(iii) T kesin monoton ise T sıfır bölene sahip değildir.

Teorem 1.19. [40] Bir t-norm T için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) T Arşimedyandır.

(ii) T limit özelliğini sağlar.

(iii) T sadece trivial idempotent elemanlara sahiptir. Bir $x_0 \in (0,1)$ için

$\lim_{x\searrow x_0} T(x,x) = x_0$ ise $T(y_0,y_0) = x_0$ olacak şekilde bir $y_0 \in (x_0,1)$ elemanı mevcuttur, burada $\lim_{x\searrow x_0} T(x,x)$ notasyonu t-norm T nin (x_0,x_0) noktasındaki sağ taraflı limitini göstermektedir.

Tanım 1.42.

(i) Bir t-norm T ye kesin denir$\Leftrightarrow$ T süreklidir ve kesin monotondur.

(ii) Bir t-norm T ye nilpotent denir $\Leftrightarrow$ T süreklidir ve her $a \in (0,1)$ elemanı T nin bir nilpotent elemanıdır.

Örnek 1.15. T_P çarpım t-normunun ve T_L Lukasiewicz t-normunun sürekli olduğu açıktır. $x,y,z \in [0,1]$ için $x > 0$ ve $y < z$ olsun. $T_P(x,y) = xy < xz = T_P(x,z)$ olduğundan T_P çarpım t-normu kesin monotondur. Böylece T_P kesin t-normdur. Ayrıca, her $a \in (0,1)$ elemanı T_L Lukasiewicz t-normunun bir nilpotent elemanı olduğundan T_L bir nilpotent t-normdur.

Önerme 1.11. [40] T bir t-norm olsun. Bu takdirde

(i) Eğer T sağ sürekli ve trivial idempotent elemanlara sahip ise T Arşimedyandır.

(ii) Eğer T sağ sürekli ve şartlı kısaltma kuralını sağlıyor ise T Arşimedyandır.

(iii) Eğer her $x_0 \in (0,1)$ için $\lim_{x\searrow x_0} T(x,x) < x_0$ ise T Arşimedyandır.

(iv) T kesin ise Arşimedyandır.

(v) Keyfi $x \in (0,1)$ elemanı T nin bir nilpotent elemanı ise T Arşimedyandır.

Önerme 1.12. [40] Her Arşimedyan t-norm T için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) T sol süreklidir.

(ii) T süreklidir.

Teorem 1.20. [40] T sürekli Arşimedyan bir t-norm olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) T nilpotenttir.

(ii) T nin bir nilpotent elemanı mevcuttur.

(iii) T nin bir sıfır böleni mevcuttur.

(iv) T kesin değildir.

Tanım 1.43. T bir t-norm, S bir t-konorm olsun. T t-normu S üzerinde dağılmalıdır denir $:\Leftrightarrow$ Her $x,y,z \in [0,1]$ için

$$T(x,S(y,z)) = S(T(x,y),T(x,z))$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde S, T üzerinde dağılmalıdır denir $:\Leftrightarrow$ Her $x,y,z \in [0,1]$ için

$S(x, T(y,z)) = T(S(x,y), S(x,z))$

eşitliği sağlanır. Eğer S, T üzerinde ve T, S üzerinde dağılmalı ise (T,S) çiftine dağılmalı çift denir.

Önerme 1.13. [40] T bir t-norm ve S bir t-konorm olsun. Bu takdirde

(i) S, T üzerinde dağılmalıdır $\Leftrightarrow T = T_M$ dir.

(ii) T, S üzerinde dağılmalıdır $\Leftrightarrow S = S_M$ dir.

(iii) (T,S) bir dağılmalı çifttir $\Leftrightarrow T = T_M$ ve $S = S_M$ dir.

Uyarı 1.9. Eğer T bir t-norm, S dual t-konormu ve T, S üzerinde (veya S, T üzerinde) dağılmalı ise $T = T_M$ ve $S = S_M$ dir.

1.6. Yarı Gruplar ve t-normlar

Tanım 1.44.

(i) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $*$ X üzerinde bir ikili işlem, yani $*: X^2 \longrightarrow X$ bir fonksiyon olsun. $(X,*)$ çiftine bir yarı grup denir $:\Leftrightarrow$ Yani her $x, y, z \in X$ için

$x * (y * z) = (x * y) * z$

eşitliği sağlanır.

(ii) Bir $(X,*)$ yarı grubuna değişmeli denir $:\Leftrightarrow$ Yani her $x, y \in X$ için

$x * y = y * x$

dir.

(iii) Bir $e \in X$ elemanına $(X,*)$ yarı grubunun etkisiz veya birim elemanı denir $:\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $x * e = e * x = x$ eşitliği sağlanır.

Birim elemanlı bir yarı gruba monoid denir.

(iv) Bir $a \in X$ elemanına $(X,*)$ yarı grubunun sıfırlayanı denir $:\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $x * a = a * x = a$ eşitliği sağlanır.

(v) Bir $x \in X$ elemanına $(X,*)$ yarı grubunun idempotent elemanı denir $:\Leftrightarrow$ $x * x = x$ dir.

(vi) Eğer $(X,*)$ bir a sıfırlayanına sahip ise bir $x \in X \setminus \{a\}$ elemanına $(X,*)$ ın nilpotent elemanı denir $:\Leftrightarrow$ Bir $n \in \mathbb{N}$, $x^n = a$ olacak şekilde mevcuttur.

Bir $(X,*)$ yarı grubunda birim eleman ve sıfırlayan eleman mevcut ise tek oldukları kolayca görülür. Bir $(X,*)$ yarı grubunda birim elemanın ve sıfırlayan elemanın (mevcutsa) idempotent oldukları açıktır. Böyle idempotent elemanlara trivial idempotent elemanlar denir.

Tanım 1.45. $\preccurlyeq$, X üzerinde kısmen veya tam sıralama olsun. $(X,*,\preccurlyeq)$ üçlüsüne sırası ile kısmen sıralı yarı grup veya tam sıralı yarı grup denir $:\Leftrightarrow$ Her $x,y,z \in X$ için $y \preccurlyeq z$ ise $x*y \preccurlyeq x*z$ ve $y*x \preccurlyeq z*x$ dir.

Örnek 1.16. $*: [1/2, 1]^2 \to [1/2, 1]$ ikili işlemi

$x*y = max(xy, 1/2)$

ile tanımlansın. Bu takdirde $([1/2, 1],*,\leq)$ değişmeli, 1-birim elemanlı, $1/2$ sıfırlayanlı, tam sıralı bir yarı gruptur.

Tanım 1.46.

(i) $(X,*)$ ve $(Y,\diamond)$ yarı gruplarına izomorftur denir:$\Leftrightarrow$ Bir $\varphi: X \longrightarrow Y$, 1-1 ve örten fonksiyonu her $x, y \in X$ için

$$\varphi(x*y) = \varphi(x) \diamond \varphi(y), \tag{1.11}$$

eşitliğini sağlar.

(ii) İki kısmen veya tam sıralı $(X,*,\preccurlyeq)$ ve $(Y,\diamond,\sqsubseteq)$ yarı grupları izomorftur denir:$\Leftrightarrow$ (1.11) i sağlayan $\varphi: X \longrightarrow Y$ 1-1, örten fonksiyonu bir sıra korur dönüşümdür, yani her $x, y \in X$ için

$x \preccurlyeq y$ ise $\varphi(x) \sqsubseteq \varphi(y)$

dir.

Önerme 1.14. [40]

(i) $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur$\Leftrightarrow$ $([0,1], T, \leq)$ üçlüsü 1-birim elemanlı, 0- sıfırlayanlı, tam sıralı, değişmeli yarı gruptur.

(ii) $S: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu bir t-konormdur$\Leftrightarrow$ $([0,1], S, \leq)$ üçlüsü 0- birimli, 1-sıfırlayanlı, tam sıralı, değişmeli yarı gruptur.

(iii) Eğer $[a,b] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $([a,b],*,\leq)$, b birimli tam sıralı değişmeli yarı grup ve $\varphi: [0,1] \to [a,b]$ fonksiyonu 1-1, örten ve kesin artan ise

$T(x,y) = \varphi^{-1}\big(\varphi(x) * \varphi(y)\big)$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur. Açık olarak, iki tam sıralı $([a,b],*,\leq)$ ve $([0,1], T, \leq)$ yarı grupları izomorftur.

(iv) Özel olarak T bir t-norm, S bir t-konorm ve $\varphi: [0,1] \to [0,1]$ kesin artan

1-1 ve örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$T_\varphi(x,y) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x),\varphi(y)))$$

$$S_\varphi(x,y) = \varphi^{-1}(S(\varphi(x),\varphi(y)))$$

ile tanımlanan T_φ, $S_\varphi: [0,1]^2 \to [0,1]$ ikili işlemleri sırasıyla T ve S ye izomorf olan t-norm ve t-konormdur.

Örnek 1.17. $*: [1/2, 1]^2 \to [1/2, 1]$ ikili işlemi

$$x * y = max(xy, 1/2)$$

ile tanımlansın. Bu takdirde T_L Lukasiewicz t-normu ve $*$ işlemi izomorftur.

$f: [a,b] \to [c,d]$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x_1, x_2 \in [a,b]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna artmayan fonksiyon denir.

1.7. Kafes Sıralı Monoidler ve Sol Sürekli T-normlar

Tanım 1.47. [22] $(L,\leq)$ bir kafes ve $(L,*)$ bir monoid olsun.

(i) $(L,*,\leq)$ üçlüsüne bir kafes sıralı monoid (veya ℓ- monoid) denir:⟺ Her $x,y,z \in L$ için

(LM1) $\quad x * (y \vee z) = (x * y) \vee (x * z)$

(LM2) $\quad (x \vee y) * z = (x * z) \vee (y * z)$

eşitlikleri sağlanır.

(ii) Bir $(L,*,\leq)$ ℓ- monoidine komütatif denir:⟺ $(L\ *)$ yarı grubu komütatiftir.

(iii) Bir $(L,*,\leq)$ ℓ- monoidine rezidual ℓ- monoid denir:⟺

$\to_*: L^2 \longrightarrow L$ ($*$- rezidü) işlemi her $x,y,z \in L$ için

(R) $\quad x * y \leq z \Leftrightarrow x \leq y \to_* z$

olacak şekilde mevcuttur.

(iv) Bir $(L,*,\leq)$ ℓ- monoidine integral denir:⟺ $(L,\leq)$ kafesinde en büyük eleman mevcuttur ve bu en büyük eleman $(L,*)$ yarı grubunun birim elemanı ile çakışır.

Tanım 1.47 deki (iii) ve (iv) şartlarını sağlayan$(L,*,\leq)$ ℓ- monoidine bir integral, rezidual, ℓ- monoid denir. Bir integral, rezidual, ℓ- monoidde (R), $\to_*$ ikili işlemini tek türlü olarak belirler ve $\to_*$ ikili işlemine L üzerinde rezidü işlemi denir. Eğer $(L,*)$ komütatif ise $(L,*,\leq)$ integral, rezidual, ℓ- monoidine komütatif, integral, rezidual, ℓ-monoid (yani rezidual kafes) denir.

Tanım 1.48. [24] $M = (L,*,\leq)$ bir integral, komütatif, rezidual ℓ- monoid olsun. Eğer her $x, y \in M$ için

$$(x \rightarrow_* y) \vee (y \rightarrow_* x) = 1$$

ise M cebirsel güçlü De Morgan kuralını sağlar denir.

Örnek 1.18. $x * y = \begin{cases} min(x,y), & x + y \leq 1, \\ max(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$

ile tanımlanan $*: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ için $([0,1],*,\leq)$ bir komütatif, rezidual, ℓ- monoiddir ve $\rightarrow_*$, $*$- reziduali

$$x \rightarrow_* y = \begin{cases} max(1-x,y), & x \leq y, \\ min(1-x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklindedir.

Uyarı 1.10. $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-norm ise $([0,1], T, \leq)$ bir komütatif, integral, ℓ- monoiddir. Bu ifadenin tersi de doğrudur, yani $([0,1], T, \leq)$ bir komütatif, integral, ℓ-monoid ise T bir t-normdur. Böylece komütatif, integral, ℓ-monoidler üzerindeki özellikler t-normlar için de sağlanır.

Önerme 1.15. [40] Keyfi $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(i) $([0,1], T, \leq)$ bir komütatif, integral, rezidual, ℓ- monoiddir.

(ii) T sol sürekli t-normdur. Bu durumda $\rightarrow_T$ T- reziduali

$$x \rightarrow_T y = sup\{z \in [0,1] | T(x,z) \leq y\}$$

ile verilir.

Tanım 1.49. Bir komütatif, integral, ℓ- monoid $(L,*,\leq)$ bölünebilir denir:$\Leftrightarrow$ Her $x, y \in L$ için $x \leq y$ ise bir $z \in L$ elemanı $y * z = x$ olacak şekilde mevcuttur.

1.8. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar

Tanım 1.50. [30] L sınırlı bir kafes olsun. Bir üçgensel norm T (kısaca t-norm) L üzerinde komütatif, birleşme, monoton özelliklerini sağlayan 1- birim elemanlı bir ikili işlemdir.

Tanım 1.51. [30]

(i) T_1 ve T_2 sınırlı bir L kafesi üzerinde iki t-norm olsun. Eğer her $x, y \in L$ için $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ eşitsizliği sağlanıyor ise T_1, T_2 t-normundan zayıftır veya denk olarak T_2, T_1 t-normundan güçlüdür denir ve bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

(ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise yani $T_1 \leq T_2$ ve bir $x_0, y_0 \in L$ için

$T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ ise bu durum $T_1 < T_2$ ile gösterilir.

$$T_W(x,y) = \begin{cases} x, & y = 1, \\ y, & x = 1, \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olsun. O halde T_W, L üzerinde bir t-normdur ve özel olarak $L = [0,1]$ olduğunda T_W, T_D ile gösterilir. L üzerindeki keyfi t-norm T için $T_W \leq T$ olduğundan bu t-norm, L üzerindeki en küçük t-normdur.

$x, y \in L$ için $T(x,y) \leq x$ ve $T(x,y) \leq y$ olduğundan $T(x,y) \leq x \wedge y = T_\wedge(x,y)$ dir. Bu nedenle sınırlı bir L kafesi üzerindeki en büyük t-norm $T_\wedge(x,y) = x \wedge y$ dir ve özel olarak $L = [0,1]$ olduğunda $T_\wedge = T_M$ dir.

Tanım 1.52. [12] T, sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm olsun. Bir $x \in L$ elemanına T nin bir sıfır böleni denir $:\Leftrightarrow$ $x \wedge y \neq 0$ ve $T(x,y) = 0$ olacak şekilde bir $y \in L$ elemanı mevcuttur. T nin sıfır bölenlerinin kümesi $Z(T)$ ile gösterilecektir.

Eğer $Z(T) = \emptyset$ ise T ye sıfır bölensiz denir.

$L = [0,1]$ olarak alınırsa Tanım 1.52 ve Tanım 1.40 (iii) deki sıfır bölen tanımlarının denk olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tanım 1.53. [12] T, sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm olsun. Bir $x \in L$ elemanına T nin idempotent elemanıdır denir $:\Leftrightarrow$ $T(x,x) = x$ eşitliği sağlanır.

Açık olarak, 0 ve 1 elemanları herhangi bir t-normun idempotent elemanlarıdır. Bu elemanlara trivial idempotent elemanlar denir. Bunlardan farklı idempotent elemanlara da trivial olmayan idempotent elemanlar denir.

Tanım 1.54. [30]

(i) Sınırlı bir L kafesi üzerindeki bir t-norm T ye $\vee$- dağılmalıdır denir $:\Leftrightarrow$
Her $a, b_1, b_2 \in L$ için

$$T(a, b_1 \vee b_2) = T(a, b_1) \vee T(a, b_2)$$

eşitliği sağlanır.

(ii) Bir L tam kafesi üzerindeki bir t-norm T ye sonsuz $\vee$-dağılmalıdır denir $:\Leftrightarrow$ Her $\{a, b_\tau \in L;\ \tau \in I\} \subseteq L$ alt kümesi için $T(a, \bigvee_I b_\tau) = \bigvee_I T(a, b_\tau)$ eşitliği sağlanır.

Uyarı 1.11. Özel olarak $L = [0,1]$ ise bir t-norm T nin sonsuz $\vee$- dağılmalı olması sol sürekli olmasına denktir.

Tanım 1.55. [9] Sınırlı bir L kafesi üzerindeki bir t-norm T ye bölünebilirdir denir $:\Leftrightarrow$ $x \leq y$ olan her $x, y \in L$ için $x = T(y,z)$ olacak şekilde bir $z \in L$ mevcuttur.

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki T_W t-normu bölünebilir olmayan bir t-normdur. Diğer taraftan, $T_\wedge$ infimum t-normu bölünebilir bir t-normdur: $x \leq y$ olması $x \wedge y = x$ olmasına denktir.

Önerme 1.16. [13] T, $[0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun. T bölünebilirdir $\Leftrightarrow$ T süreklidir.

1.9. T-Normlardan Elde Edilen T-Kısmen Sıra

1.9.1. $\preccurlyeq_T$ -Üçgensel Sıralama

Tanım 1.56. [35] L sınırlı bir kafes ve T L üzerinde bir t-norm olsun. L üzerinde $\preccurlyeq_T$ bağıntısı

$$x \preccurlyeq_T y :\Leftrightarrow T(\ell, y) = x \text{ olacak şekilde bir } \ell \in L \text{ elemanı mevcuttur} \tag{1.12}$$

olarak verilir.

Önerme 1.17. [35] L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde $(L, \preccurlyeq_T)$ bir kısmen sıralı kümedir.

Tanım 1.57. [35] Önerme 1.17 ile verilen $\preccurlyeq_T$ sıralama bağıntısına, t-norm T den elde edilen T-sıralama (üçgensel sıralama) denir.

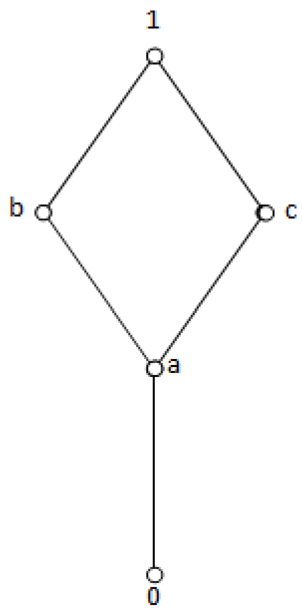
Lemma 1.10. [38] L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde her T t-normu ve her $x \in L$ için $0 \preccurlyeq_T x$, $x \preccurlyeq_T x$ ve $x \preccurlyeq_T 1$ dir.

Önerme 1.18. [35] L sınırlı bir kafes, T L üzerinde bir t-norm ve $\preccurlyeq_T$ t-norm T den elde edilen kısmen sıralama olsun. Eğer $x \preccurlyeq_T y$ ise $x \leq y$, yani $\preccurlyeq_T \subseteq \leq$ dir.

Uyarı 1.12. [35] Önerme 1.18 in tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek:

$L = \{0, a, b, c, 1\}$ ve L üzerinde $\leq$ sıralaması Şekil 1.2 deki gibi verilsin.



Şekil 1.2. L üzerindeki $\leq$ sıralaması

$T = T_W$ alındığında $a \leq b$ olduğu halde $a \not\preccurlyeq_{T_W} b$ olduğu gösterilecektir. Aksini varsayarak $a \preccurlyeq_{T_W} b$ alınsın. O halde bir $\ell \in L$ elemanı

$$T_W(\ell, b) = a$$

olacak şekilde mevcut olur. İlk olarak $\ell = 0$ olsun. Bu durumda

$$a = 0$$

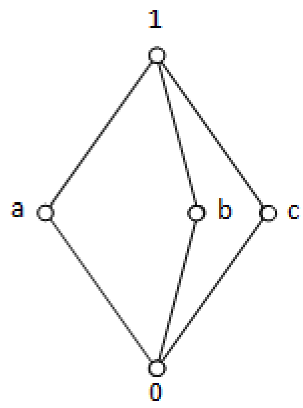
olur ki bu bir çelişkidir. $\ell = a, b$ veya c olduğunda

$$T_W(\ell, b) = 0 = a$$

olup yine bir çelişki elde edilir. Son olarak $\ell = 1$ olması durumunda ise

$$a = T_W(1, b) = b$$

olur ki bu ise yine bir çelişkidir. Böylece $T_W(\ell, b) = a$ olacak şekilde bir $\ell \in L$ elemanı mevcut değildir, yani $a \not\preccurlyeq_{T_W} b$ dir. L üzerindeki $\preccurlyeq_{T_W}$ aşağıdaki gibidir:



Şekil 1.3. L üzerindeki $\preccurlyeq_{T_W}$ sıralaması

Önerme 1.19. [35] L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. $\preccurlyeq_T$ ile $\leq$ sıralamalarının eşit olması için gerek ve yeter şart T t-normunun L üzerinde bölünebilir bir t-norm olmasıdır.

1.9.2. $(L, \preccurlyeq_T)$ Kısmen Sıralı Kümesinin Bazı Özellikleri

Uyarı 1.13. [35] $(L, \leq)$ nın bir zincir olması $(L, \preccurlyeq_T)$ nın bir zincir olmasını gerektirmez.

Örneğin;

$L = [0,1]$ kafesi ve

$$T^{nM}(x,y) = \begin{cases} 0, & x+y \leq 1, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ile tanımlanan nilpotent minimum t-normunu göz önüne alınsın [40].

$1/3 \leq 1/2$ olmasına rağmen $1/3$ ve $1/2$ $L = [0,1]$ üzerinde $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre kıyaslanamazdır. Gerçekten;

$1/2 \preccurlyeq_{T^{nM}} 1/3$ olsun. Önerme 1.18 ile $1/2 \leq 1/3$ olması gerekir ki bu ise bir çelişkidir. Böylece $1/2 \not\preccurlyeq_{T^{nM}} 1/3$ dür.

$1/3 \preccurlyeq_{T^{nM}} 1/2$ olsun. O halde bir $\ell \in [0,1]$ için

$T^{nM}(\ell, 1/2) = 1/3$

sağlanır. $T^{nM}(\ell, 1/2) = 1/3$ olduğundan T^{nM} t-normunun tanımı ile $\ell + 1/2 > 1$, yani

$\ell > 1/2$

olmalıdır. Buradan $1/3 = T^{nM}(\ell, 1/2) = min(\ell, 1/2) = 1/2$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Böylece $1/3 \not\preccurlyeq_{T^{nM}} 1/2$ dir. Sonuç olarak, $1/3$ ve $1/2$ $L = [0,1]$ üzerinde $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre kıyaslanamazdır. Dolayısıyla, $(L, \preccurlyeq_{T^{nM}})$ bir zincir değildir.

Önerme 1.20. [35] L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. $(L, \preccurlyeq_T)$ bir zincir ise T bölünebilir bir t-normdur, yani $\preccurlyeq_T = \leq$ dir.

Uyarı 1.14. [35] L sınırlı bir kafes olsun. L üzerinde bir T t-normu alınsın. $X \subseteq L$ için L üzerinde $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre X kümesinin üst sınırlarının kümesini $\overline{X}_T$ ile ve $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre X kümesinin alt sınırlarının kümesi de $\underline{X}_T$ ile gösterilsin. $X = \{a, b\}$ olarak alınırsa, $T(a, b) \preccurlyeq_T a$ ve $T(a, b) \preccurlyeq_T b$ olduğundan $T(a, b) \in \underline{\{a, b\}}_T$ olup

$$\underline{\{a, b\}}_T \neq \emptyset$$

dır. $T(a, 1) = a$ ve $T(b, 1) = b$ olduğundan $a \preccurlyeq_T 1$ ve $b \preccurlyeq_T 1$ dir. Buradan $1 \in \overline{\{a, b\}}_T$ olup

$$\overline{\{a, b\}}_T \neq \emptyset$$

dır. Ayrıca $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre en küçük eleman 0, en büyük eleman ise 1 dir. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $S_\alpha \subseteq X$ ailelerinin keyfi B ailesinin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre üst sınırların en küçüğü ve alt sınırların en büyüğü mevcut ise bunlar sırasıyla $\vee_T S_\alpha$ ve $\wedge_T S_\alpha$ ile gösterilecektir.

L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. L nin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre her zaman kafes olamayabileceği aşağıdaki örnekle incelenecektir.

Örnek 1.19. $L = [0,1]$ ve L üzerinde $T^{nM}: [0,1]^2 \to [0,1]$

$$T^{nM}(x, y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 1, \\ min(x, y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlanan nilpotent minimum t-normları göz önüne alınsın. $(L, \preccurlyeq_{T^{nM}})$ infimum-yarı kafestir fakat supremum-yarı kafes değildir.

$x \preccurlyeq_{T^{nM}} y$ veya $y \preccurlyeq_{T^{nM}} x$ ise sırasıyla $x \wedge_{T^{nM}} y = x$ veya y dir. Aksini varsayarak $x \not\prec_{T^{nM}} y$ ve $y \not\prec_{T^{nM}} x$ olarak alalım. Bu durumda

$$x + y \leq 1$$

olmalıdır. Çünkü $x + y > 1$ olsa $T^{nM}(x, y) = min(x, y)$ dir. Dolayısıyla

$$T^{nM}(x, y) = x \text{ veya } y$$

olup $x \preccurlyeq_{T^{nM}} y$ veya $y \preccurlyeq_{T^{nM}} x$ dir. Bu ise kabul ile çelişir.

$x+y \leq 1$ olsun. $0 \in \underline{\{x,y\}}_{T^{nM}}$ olduğu açıktır. $x \wedge_{T^{nM}} y = 0$ olduğu gösterilecektir. $k \in \underline{\{x,y\}}_{T^{nM}} \setminus \{0\}$ olsun. Buradan

$$k \preccurlyeq_{T^{nM}} x \text{ ve } k \preccurlyeq_{T^{nM}} y$$

dir. O halde $\ell_1, \ell_2 \in [0,1]$ elemanları

$$0 \neq k = T^{nM}(x,\ell_1) = T^{nM}(y,\ell_2)$$

olacak şekilde mevcuttur. $T^{nM}(x,\ell_1) \neq 0$ olduğundan

$$x+\ell_1 > 1 \text{ ve } T^{nM}(x,\ell_1) = min(x,\ell_1)$$

dir. Eğer $T^{nM}(x,\ell_1) = min(x,\ell_1) = x$ ise

$$k = x \preccurlyeq_{T^{nM}} y$$

olduğu elde edilir ki bu ise x ve y nin $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz olması ile çelişir. Böylece

$$T^{nM}(x,\ell_1) = \ell_1 = k$$

dır. $x+\ell_1 > 1$ ve $x+y \leq 1$ olduğundan $k = \ell_1 > 1-x \geq y$ dir. $0 \neq k = T^{nM}(y,\ell_2)$ olduğundan

$$k = T^{nM}(y,\ell_2) = min(y,\ell_2)$$

dir. $k = T^{nM}(y,\ell_2) = min(y,\ell_2) = y$ olamaz. Aksi halde x ve y $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre kıyaslanabilir olur ki bu ise kabul ile çelişir. Böylece

$$k = T^{nM}(y,\ell_2) = \ell_2$$

olmalıdır. $k = \ell_1 = \ell_2 > 1-x \geq y$ olduğundan

$$k = T^{nM}(y,\ell_2) = T^{nM}(y,k) = min(y,k) = y$$

elde edilir ki bu ise x ve y nin $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz olması kabulü ile çelişir. Böylece $k=0$ olup $x \wedge_{T^{nM}} y$ mevcuttur.

Şimdi $(L, \preccurlyeq_{T^{nM}})$ nın supremum-yarı kafes olmadığını gösterilmelidir. Uyarı 1.13 ile $1/3$ ve $1/2$ nin $L=[0,1]$ üzerinde $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz olduğu biliniyor. $k \in \overline{\{1/2, 1/3\}}_{T^{nM}}$ olsun. O halde

$$1/2 \preccurlyeq_{T^{nM}} k \text{ ve } 1/3 \preccurlyeq_{T^{nM}} k$$

dır. Böylece $\ell_1, \ell_2 \in [0,1]$ elemanları

$$1/2 = T^{nM}(k,\ell_1) \text{ ve } 1/3 = T^{nM}(k,\ell_2)$$

olacak şekilde mevcuttur. $1/2 = min(k,\ell_1)$ ve $1/3 = min(k,\ell_2)$ olduğundan

$$k+\ell_1 > 1 \text{ ve } k+\ell_2 > 1$$

dir. Uyarı 1.13 de verilen örnek ile $1/2$ ve $1/3$ elemanları $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre kıyaslanamazdır. Buradan $\ell_1 = 1/2$ ve $\ell_2 = 1/3$ olduğu elde edilir. Böylece

$1/2 = T^{nM}(k, 1/2)$ ve $1/3 = T^{nM}(k, 1/3)$ olduğundan

$$k + 1/2 > 1 \text{ ve } k + 1/3 > 1$$

dir. Buradan

$$k > 2/3 > 1/2$$

olduğu görülür. Böylece $\overline{\{1/2, 1/3\}}_{T^{nM}} \subseteq (2/3, 1]$ elde edilir.

Şimdi $(2/3, 1] \subseteq \overline{\{1/2, 1/3\}}_{T^{nM}}$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $x \in (2/3, 1]$ olsun. O zaman $x > 2/3$ dür. Böylece

$$T^{nM}(x, 1/2) = min(x, 1/2) = 1/2$$

ve

$$T^{nM}(x, 1/3) = min(x, 1/3) = 1/3$$

olup $1/2 \preccurlyeq_{T^{nM}} x$ ve $1/3 \preccurlyeq_{T^{nM}} x$ bulunur. Dolayısıyla

$$x \in \overline{\{1/2, 1/3\}}_{T^{nM}}$$

dir. Böylece $(2/3, 1] = \overline{\{1/2, 1/3\}}_{T^{nM}}$ eşitliği elde edilir. Buradan $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre $(2/3, 1]$ kümesinin en küçük elemanı mevcut olmadığından $([0,1], \preccurlyeq_{T^{nM}})$ nın supremum- yarı kafes olmadığı elde edilir.

Uyarı 1.12 de verilen özel L kafesi ve bu kafes üzerinde tanımlı T_W t-normu için $(L, \preccurlyeq_{T_W})$ nın bir kafes olduğu kolaylıkla görülebilir. Aşağıda verilen Önerme 1.21 ile her sınırlı L kafesi ve L üzerinde verilen T_W t-normu için $(L, \preccurlyeq_{T_W})$ nun kafes olduğu gösterilmiştir.

Önerme 1.21. [35] L sınırlı bir kafes olsun. Eğer L üzerinde T_W t-normu alınırsa keyfi $a \in L \setminus \{0,1\}$ için $a \wedge_{T_W} b = 0$ ve $a \vee_{T_W} b = 1$, $\forall b \in L \setminus \{0,1,a\}$ dır. Böylece $(L, \preccurlyeq_{T_W})$ bir kafestir.

Önerme 1.21 in tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnek ile gösterilecektir.

Örnek 1.20. [0,1] üzerinde

$$T(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in (0, 1/2)^2, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

fonksiyonu alınsın. Bu fonksiyonun $[0,1]$ üzerinde bir t-norm olduğu [40] da verilmiştir. $([0,1], \preccurlyeq_T)$ sınırlı bir kafestir.

x ve y elemanlarının $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanması halinde $x \vee_T y$ ve $x \wedge_T y$ nin mevcut olduğu açıktır. $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanamayan x ve y elemanları alınsın. $x \vee_T y = 1/2$ olduğu gösterilecektir.

$x \notin (0, 1/2)$ veya $y \notin (0, 1/2)$ olsun. O halde

$T(x, y) = min(x, y)$

olup x ve y $\preccurlyeq_T$ ya göre kıyaslanamaz olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece $x, y \in (0, 1/2)$ dir.

Şimdi $1/2 \in \overline{\{x, y\}}_T$ olduğu gösterilmelidir. $T(x, 1/2) = min(x, 1/2) = x$ olduğundan

$x \preccurlyeq_T 1/2$

elde edilir. Benzer şekilde $y \preccurlyeq_T 1/2$ dir. Böylece

$1/2 \in \overline{\{x, y\}}_T$

dir. $k \in \overline{\{x, y\}}_T$ keyfi alınsın. Buradan $x \preccurlyeq_T k$ ve $y \preccurlyeq_T k$ dır. Böylece $\ell_1, \ell_2 \in [0,1]$ elemanları

$x = T(k, \ell_1)$ ve $y = T(k, \ell_2)$

olacak şekilde mevcut olur. Burada $x \neq 0$ olduğundan

$x = T(k, \ell_1) = min(k, \ell_1)$

dir. x ve y $\preccurlyeq_T$ ya göre kıyaslanamadığından $x = k$ olamaz. O halde

$\ell_1 = x \in (0, 1/2)$

olduğu elde edilir. Buradan $k \notin (0, 1/2)$ ve $k \neq 0$ dır, yani

$k \geq 1/2$

dir. $1/2 = T(k, 1/2) = min(k, 1/2)$ olduğundan

$k \succcurlyeq_T 1/2$

olmalıdır. Böylece $x \vee_T y = 1/2$ olduğu elde edilir.

$k \in \underline{\{x, y\}}_T$ keyfi olsun. $k \preccurlyeq_T x$ ve $k \preccurlyeq_T y$ olduğundan $x_1, y_1 \in [0,1]$ elemanları

$k = T(x, x_1)$ ve $k = T(y, y_1)$

olacak şekilde mevcuttur. x ve y $\preccurlyeq_T$ ya göre kıyaslanamadığından $k = x$ veya $k = y$ olamaz. Böylece

$$k = x_1 \text{ ve } k = y_1$$

dir. Ayrıca $k = T(x, k)$ olduğundan

$$k \leq x < 1/2$$

dır. $x, k \in \left(0, 1/2\right)$ olmasından $k = T(x, k) = 0$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla $x \wedge_T y = 0$ olup $([0,1], \preccurlyeq_T)$ bir kafestir. $([0,1], \preccurlyeq_T)$ kafesinin sınırlı olduğu açıktır.

Önerme 1.22. [35] L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Eğer $a, b \in L$ için $a \preccurlyeq_T b$ ise her $c \in L$ için

$$T(a, c) \preccurlyeq_T T(b, c)$$

dir.

Sonuç 1.4. [35] L sınırlı bir kafes ve T L üzerinde bir t-norm olsun. $(L, \preccurlyeq_T)$ bir kafes ise $T: (L, \preccurlyeq_T)^2 \longrightarrow (L, \preccurlyeq_T)$ bir t-normdur.

1.9.3. H_T ve A Kümeleri Üzerinde Bazı Belirlemeler

Tanım 1.58. [35] L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. T nin tüm idempotent elemanlarının kümesi,

$$\boldsymbol{H_T} = \{x \in L | T(x, x) = x\}$$

ve elemanları atomların bir ailesinin supremumu şeklinde olan L nin tüm elemanlarının kümesi,

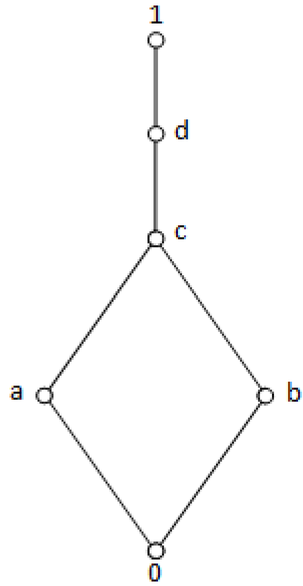
$$\boldsymbol{A} = \{a \in L | a \text{ atomların bir ailesinin supremumuna eşittir}\}$$

ile gösterilsin.

Önerme 1.23. [35] $L = [0,1]$ ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. O halde $(H_T, \preccurlyeq_T)$ bir zincirdir.

Uyarı 1.15. [35] Genel olarak L bir zincir ise Önerme 1.23 yine doğrudur. Şimdi zincir olmayan L için Önerme 1.23 ün sağlanmadığını gösteren aşağıdaki örnek incelenecektir.

Örnek 1.21. Kafes diyagramı aşağıdaki gibi verilen $L = (\{0, a, b, c, d, 1\}, \leq)$ kafesi göz önüne alınsın.



Şekil 1.4. $(L, \leq)$ kafesi

$T: L^2 \to L$ fonksiyonu her $x, y \in L$ için

$$T(x,y) = \begin{cases} c, & x = d \text{ ve } y = d, \\ x \wedge y, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde T, L üzerinde bir t-normdur.

Her $x \in L \setminus \{d\}$ için $T(x,x) = x$ olduğundan $H_T = L \setminus \{d\} = \{0, a, b, c, 1\}$ dir. a ve b, $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanamadığından $(H_T, \preccurlyeq_T)$ bir zincir değildir. Gerçekten;

Aksini varsayarak $a \preccurlyeq_T b$ olarak alalım. Dolayısıyla bir $k \in L$ elemanı

$$T(b,k) = a$$

olacak şekilde mevcuttur. T nin tanımı ile $b \wedge k = a$ olup eşitliğin her iki tarafının b elemanı ile supremumu alınırsa

$$b = (b \wedge k) \vee b = a \vee b = c$$

çelişkisi elde edilir. Böylece $a \not\preccurlyeq_T b$ dir. Benzer şekilde $b \not\preccurlyeq_T a$ olup $(H_T, \preccurlyeq_T)$ nın bir zincir olmadığı görülür.

Önerme 1.24. [35] $(L, \leq)$ sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde, her $a, b \in H_T$ için $T(a,b) \in H_T$ dir.

Teorem 1.21. [35] L bir tam kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Her $a, b \in H_T$ için $a \wedge_T b = T(a,b)$ dir. T sonsuz $\vee$-dağılmalı t-norm ise her $\{a_\tau | \tau \in Q\} \subseteq H_T$ için

$$\vee_T\{a_\tau | \tau \in Q\} = \vee\{a_\tau | \tau \in Q\}$$

olup, $(H_T, \preccurlyeq_T)$ bir tam kafestir.

Sonuç 1.5. [35] L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde $\vee$-dağılmalı bir t-norm olsun. O halde her $a, b \in H_T$ için

$a \wedge_T b = T(a, b)$ ve $a \vee_T b = a \vee b$

dir. Böylece $(H_T, \preccurlyeq_T)$ sınırlı bir kafestir.

Sonuç 1.6. [35] L bir tam kafes ve T, L üzerinde sonsuz $\vee$ -dağılmalı bir t-norm ise $(H_T, \preccurlyeq_T)$ bir Heyting cebiridir.

Sonuç 1.7. [35] L bir tam kafes, T sonsuz $\vee$- dağılmalı, bölünebilir t-norm olsun. O halde $(H_T, \leq)$ bir Heyting cebiridir.

Sonuç 1.8. [35] L sınırlı bir kafes ve T $\vee$- dağılmalı bölünebilir bir t-norm olsun. O halde $(H_T, \leq)$ dağılmalı kafestir.

Önerme 1.25. [35] $(L, \leq)$ sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde $\vee$- dağılmalı bir t-norm olsun. O halde $T \downarrow H_T$, $(H_T, \preccurlyeq_T)$ üzerinde bir t-normdur.

Önerme 1.26. [35] T sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm ve K, L nin bir alt kafesi olsun. Eğer her $x, y \in K$ için $x \wedge_T y = T(x, y)$ ise

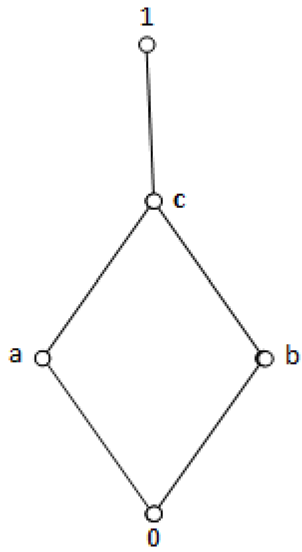
$T \downarrow K = \wedge$

dır. Özel olarak $K = L$ ise $T = \wedge$ dur.

Teorem 1.22. [35] $M = (L, \odot, \leq)$ bir integral, komütatif, rezidual ℓ- monoid olsun. Eğer M bölünebilir ve cebirsel güçlü De Morgan kuralını sağlıyor ise $\odot$ ikili işlemine göre tüm idempotent elemanların H_T alt kümesi bir Heyting cebiri oluşturur ve H_T deki gerektirme $\odot$ ikili işlemine dayanan gerektirme ile çakışır.

Uyarı 1.16. [35] Keyfi bir L kafesi için $M = (L, \odot, \leq)$ integral, komütatif, rezidual, ℓ- monoidin bölünebilir olması, cebirsel güçlü De Morgan kuralını sağlamasını gerektirmez. Bunu görebilmek için aşağıdaki örnek incelenebilir.

Örnek 1.22. $(\mathrm{L} = \{0, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, 1\}, \leq)$ kafesinin kafes diyagramı aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 1.5. $(L = \{0, a, b, c, 1\}, \leq)$ kafesi

$\odot = T_\wedge$ ve $\to_{T_\wedge}: L^2 \longrightarrow L$ ikili işlemi her $x, y \in L$ için

$$x \to_{T_\wedge} y = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ y, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\to_{T_\wedge}$ ikili işleminin L üzerinde bir rezidü işlemi olduğu açıktır. Böylece $M = (L, T_\wedge, \leq)$ bir integral, komütatif, rezidual, ℓ- monoiddir. $T_\wedge$ bölünebilir bir t-norm olduğundan M bölünebilirdir. Ancak $a, b \in L$ için

$$\left(a \to_{T_\wedge} b\right) \vee \left(b \to_{T_\wedge} a\right) = b \vee a = c \neq 1$$

olduğundan M cebirsel güçlü De Morgan kuralını sağlamaz.

Önerme 1.27. [35] $M = (L, \odot, \leq)$ bir integral, komütatif, rezidual ℓ- monoid olsun. Eğer M bölünebilir ise $\odot$ işlemine göre tüm idempotent elemanların H_T alt kümesi bir Heyting cebiri oluşturur ve H_T deki gerektirme ile $\odot$ ikili işlemine dayanan gerektirme aynı olur.

Önerme 1.28. [35] T, $[0,1]$ üzerinde sıfır bölensiz bir t-norm ve $(L, \preccurlyeq_T)$ bir kafes olsun. Bu takdirde her $a, b \in L \setminus \{0\}$ için

$$a \wedge_T b \neq 0$$

dır.

Teorem 1.23. [35] L bir tam kafes, T L üzerinde sıfır bölensiz sonsuz $\vee$- dağılmalı bir t-norm ve

$$\boldsymbol{A} = \{a \in L | a, \text{atomların bir ailesinin supremumuna eşittir}\}$$

olsun. Bu takdirde,

i. $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ bir tam kafestir. Üstelik, her $a, b \in \boldsymbol{A}$ için

$a \wedge_T b = T(a, b)$

dir, yani $T \downarrow \boldsymbol{A} = \wedge_T$ dir.

ii. $T \downarrow \boldsymbol{A}$, $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ üzerinde bir t-norm olup sonsuz $\vee_T$-dağılmalıdır.

Sonuç 1.9. [35] Eğer L deki atomlar sonlu sayıda ve T sıfır bölensiz, $\vee$- dağılmalı bir t-norm ise Teorem 1.23 yine doğrudur, yani $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ bir tam kafestir ve her $a, b \in \boldsymbol{A}$ için

$a \wedge_T b = T(a, b)$

dir.

Sonuç 1.10. [35] L bir tam kafes ve T, L üzerinde sonsuz $\vee$- dağılmalı sıfır bölensiz bir t-norm olsun. O halde $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ bir Boole cebiridir.

Sonuç 1.11. [35] Sonlu uzunluklu, yerel komplementli bir L kafesi üzerinde sıfır bölensiz $\vee$- dağılmalı bir t-norm mevcutsa $(L, \leq)$ bir Boole cebiridir.

Sonuç 1.12. [35] Eğer L bir atomik tam Brouwerian kafesi ise $(L, \leq)$ bir Boole cebiridir.

Önerme 1.29. [35] Eğer L bir tam Brouwerian kafesi ve T, L üzerinde sıfır bölensiz sonsuz $\vee$- dağılmalı bir t-norm ise

$T \downarrow (\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T) = \wedge \downarrow \boldsymbol{A}$

dır.

Önerme 1.30. [35] L bir tam kafes, T sıfır bölensiz sonsuz $\vee$- dağılmalı bir t-norm ve $A(L)$ atomların kümesi olsun. O halde bir $A \subseteq L$ alt kümesi mevcuttur öyleki $A \cong \wp(A(L))$ ve A bir Boole cebiridir.

Sonuç 1.13. [35] Eğer L sınırlı ve dağılmalı bir kafes ve $|A(L)| < \infty$ ise L nin bir A alt kafesi mevcuttur öyleki $A \cong \wp(A(L))$ olup A bir Boole cebiridir.

1.10. $\preccurlyeq_T$ Sıralamasından Elde Edilen Denklik Sınıfları

Tanım 1.59. [38] L sınırlı bir kafes olsun. L üzerindeki t-normların ailesi üzerindeki $\sim$ bağıntısı

$$T_1 \sim T_2 :\Leftrightarrow \preccurlyeq_{T_1}\text{- kısmen sıralama } \preccurlyeq_{T_2}\text{- kısmen sıralamaya eşittir} \qquad (1.13)$$

ile verilsin.

Lemma 1.11. [38] Tanım 1.59 da (1.13) ile verilen $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.60. [38] T, sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm ve $\sim$ (1.13) te verilen bir bağıntı olsun. T t-normunun denklik sınıfı

$$\overline{T} = \{T' \mid T' \sim T\}$$

dir.

Önerme 1.31. [38] $[0,1]$ üzerindeki T_D t-normunun denklik sınıfı sadece T_D t-normundan oluşur.

Önerme 1.32. [38] L sınırlı bir kafes olsun. L üzerindeki $T_\wedge$ t-normunun denklik sınıfı L üzerindeki bütün bölünebilir t-normların kümesidir. Özellikle $L = [0,1]$ olması durumunda T_M t-normunun denklik sınıfı $[0,1]$ üzerindeki bütün sürekli t-normların kümesi olur.

Önerme 1.33. [38] Eğer T bir t-norm ve $\varphi: [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu bir kesin artan bijeksiyon ise

$$T_\varphi(x, y) = \varphi^{-1}\Big(T\big(\varphi(x), \varphi(y)\big)\Big)$$

ile tanımlanan $T_\varphi: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu T ye izomorf olan bir t-normdur. T_φ ye T nin φ-transformu denir.

Önerme 1.34. [38] T, $[0,1]$ üzerinde bir t-norm ve $\varphi: [0,1] \to [0,1]$ bir otomorfi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

i) T ve T_φ t-normları aynı denklik sınıfına aittir.

ii) φ fonksiyonu $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre sıra korurdur, yani her $x, y \in [0,1]$ için $x \preccurlyeq_T y \Leftrightarrow \varphi(x) \preccurlyeq_T \varphi(y)$.

1.11. $\preccurlyeq_T$ Sıralamasına Göre Kıyaslanamayan Elemanların Kümesi

Tanım 1.61. [38] T, $[0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun. $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bütün kıyaslanamayan elemanların kümesi K_T aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$K_T = \{x \in (0,1) \mid \exists y \in (0,1),\ \ [x < y \text{ ise } x \not\preccurlyeq_T y] \text{ veya } [y < x \text{ ise } y \not\preccurlyeq_T x]\}$$

Lemma 1.12. [38] T, $[0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde $K_T = \emptyset \Leftrightarrow T$ süreklidir.

Önerme 1.35. [38] $[0,1)^2$ nin bir H alt kümesi herhangi bir $u \in [0,x]$, $v \in [0,y]$ için $(x,y) \in H$ ise $(y,x) \in H$ ve $(u,v) \in H$ olacak şekilde mevcut olsun.
$T_H: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu

$$T_H(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in H, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde T_H bir t-normdur [40]. Ek olarak $K_{T_H} = (0,1) \Leftrightarrow$ Her bir $x \in (0,1)$ için $(x,y) \in H$ olacak şekilde $y \in (0,1)$ elemanı mevcuttur.

Tanım 1.62. **[38]** $\big((a_i,b_i)\big)_{i\in I}$, $[0,1]$ in ayrık açık alt aralıklarının bir ailesi ve $(T_{i\in I})_{i\in I}$ t-normların bir ailesi olsun. Bu takdirde ordinal toplam
$T = (< a_i, b_i, T_i >)_{i\in I}: [0,1]^2 \to [0,1]$

$$T(x,y) = \begin{cases} a_i + (b_i - a_i)T_i\left(\dfrac{x-a_i}{b_i-a_i}, \dfrac{y-a_i}{b_i-a_i}\right), & (x,y) \in [a_i,b_i]^2, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 1.36. [38] $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ ordinal toplam t-norm,
$T = \big(< a_j, b_j, T_j >\big)_{j\in J}$ olsun. Bu takdirde

$$K_T = \cup_{j\in J}\Big(a_j + \big(b_j - a_j\big)K_{T_j}\Big)$$

dir. Burada a, b reel değerleri ve $\mathbb{R}$ nin bir K altkümesi için $a + bK = \{a + bk \mid k \in K\}$ notasyonu kullanılır.

Önerme 1.37. [38] T, $[0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun. Eğer $K_T \neq \emptyset$ ise herhangi bir $x \in K_T$ için K_T nin x elemanını içeren trivialden farklı bir alt aralığı mevcuttur ve bu nedenle K_T kümesi sonsuz kardinaliteye sahiptir.

Teorem 1.24. [38] T bir t-norm ve $K_T \neq \emptyset$ olsun. Bu takdirde her $x \in K_T$ için $x \in K_x$ ve $K_x \subseteq K_T$ olacak şekilde bir K_x maksimal aralığı (en büyük aralık) mevcuttur. Ek olarak

$$\sigma \coloneqq \{K_x \mid x \in K_T \text{ ve } K_x, K_T \text{ nin en büyük aralığı}\}$$

ailesi K_T nin bir parçalanmasıdır. Burada σ kümesinin kardinalitesi sonlu veya ($\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin kardinalitesi) $\aleph_0$ dır.

Lemma 1.13. [38] T, $[0,1]$ üzerinde bir t-norm ve $K_x \subseteq K_T$ x elemanını içeren K_T nin en büyük alt aralığı olsun. Bu takdirde $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre K_x in elemanları ile kıyaslanamayan herbir eleman K_x dedir. Ek olarak herhangi bir $y \in K_x$ için $K_x = K_y$ dir.

Önerme 1.38. [38] T, $[0,1]$ üzerinde sol sürekli bir t-norm ve $K_x \subseteq K_T$ $x \in K_T$ elemanını içeren en büyük aralık olsun. Bu takdirde K_x alt yarı açık aralıktır.

Önerme 1.39. [38] T, $[0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun. K_T nin her elemanı K_T nin bir limit noktasıdır.

Teorem 1.25. [38] $\{0,1\} \subseteq B \subseteq [0,1]$ keyfi bir küme olsun. Eğer T sol sürekli bir t-norm ve B kümesi $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanamayan elemanlarının kümesi ise bu takdirde

$$\bigcup_{i\in I}(u_i, v_i) \subseteq [0,1] \setminus B \subseteq \bigcup_{i\in I}(u_i, v_i]$$

olacak şekilde bir sonlu veya sayılabilir sonsuz I indis kümesi ve ayrık açık alt aralıklarının $\left((u_i, v_i)\right)_{i\in I}$ ailesi mevcuttur.

Teorem 1.26. [38] $\{0,1\} \subseteq B \subseteq [0,1]$ keyfi bir küme olsun. Eğer $[0,1]$ in ayrık açık alt aralıklarının $\left((u_i, v_i)\right)_{i\in I}$ ailesi

$$\bigcup_{i\in I}(u_i, v_i) \subseteq [0,1] \setminus B \subseteq \bigcup_{i\in I}(u_i, v_i]$$

olacak şekilde mevcutsa, bu takdirde $\preccurlyeq_T$ sıralamasına kıyaslanamayan elemanlarının kümesi B olan bir T t-normu vardır. Burada I sonlu veya sayılabilir sonsuz kardinaliteli indis kümesidir.

Önerme 1.40. [38] T $[0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun.

$$K_T^* = \{x \in K_T \mid y_x, y_x' \in (0,1),\ x < y_x \text{ fakat } x \not\preccurlyeq_T y_x \text{ ve } y_x' < x \text{ fakat } y_x' \not\preccurlyeq_T x\}$$

ile tanımlanan K_T^* kümesi bir açık kümedir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu çalışmada elde edilen bazı sonuçlar ‘Some notes on T-partial order’ isimli makalede yayınlanmıştır [36]. Ayrıca yine bu çalışmada elde edilen sonuçların bazıları ‘On the T-partial Order and Properties’ isimli çalışma ile Information Sciences dergisine gönderilmiştir.

2.1. $\preccurlyeq_T$ -Üçgensel Sıralamanın Bazı Özellikleri

Genel Bilgiler bölümünde herhangi bir L sınırlı kafesi üzerinde (1.13) te verilen

“ $T_1 \sim T_2 :\Leftrightarrow \preccurlyeq_{T_1}$- kısmen sıralama $\preccurlyeq_{T_2}$- kısmen sıralamaya eşittir ”

$\sim$ bağıntısının denklik sınıflarının kümesi $L/\sim$ ile gösterilsin. Burada eğer L sonlu bir küme ise $L/\sim$ nın da sonlu olduğu açıktır. $L = [0,1]$ olması durumunda ise $L/\sim$ nın sonsuz olup olmadığı sorusuna aşağıda verilen Önerme 2.1 ile cevap verilebilir.

Önerme 2.1. $[0,1]/\sim$ kümesi sayılamaz sonsuz bir kümedir.

İspat: $k_1, k_2 \in (0,1)$ keyfi fakat sabit elemanlar ve $k_1 \neq k_2$ olsun. Genellikten bir şey kaybetmeden $k_1 < k_2$ alınsın. [0,1] üzerinde,

$$T_{k_1}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in (0,k_1)^2, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ve

$$T_{k_2}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in (0,k_2)^2, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ile tanımlanan T_{k_1} ve T_{k_2} fonksiyonları [0,1] üzerinde birer t-normdur [40]. $k_1 < k_2$ olduğundan $k_1 < x < k_2$ olacak şekilde bir $x \in (0,1)$ elemanı mevcuttur.

İlk olarak $(k_1, x) \in \preccurlyeq_{T_{k_1}}$ yani $k_1 \preccurlyeq_{T_{k_1}} x$ olduğu gösterilecektir. $k_1 < x$ olduğundan $k_1 = min(k_1, x)$ olur. $k_1 \neq 0$ ve $(k_1, x) \notin (0, k_1)^2$ olduğundan T_{k_1} t-normunun tanımı kullanılarak

$$k_1 = min(k_1, x) = T_{k_1}(k_1, x)$$

elde edilir. Buradan

$$k_1 \preccurlyeq_{T_{k_1}} x \text{ olup } (k_1, x) \in \preccurlyeq_{T_{k_1}}$$

olduğu görülür.

Şimdi de $(k_1, x) \notin \preccurlyeq_{T_{k_2}}$ olduğu gösterilmelidir. Aksini varsayarak $(k_1, x) \in \preccurlyeq_{T_{k_2}}$ olduğu kabul edilirse, bir $\ell \in [0,1]$ elemanı

$$k_1 = T_{k_2}(x, \ell)$$

olacak şekilde mevcut olur. Burada $k_1 \neq 0$ olduğundan $T_{k_2}(x, \ell) \neq 0$ dır. Dolayısıyla $(x, \ell) \notin (0, k_2)^2$ dir. Bu durumda T_{k_2} t-normunun tanımı kullanılarak

$$T_{k_2}(x, \ell) = min(x, \ell) = k_1$$

olduğu elde edilir. Burada $k_1 = x$ veya $k_1 = \ell$ olması söz konusudur. $k_1 = x$ durumu $k_1 < x$ kabulü ile çelişeceği için $k_1 = \ell$ olmak zorundadır. Buradan

$$T_{k_2}(x, k_1) = min(x, k_1) = k_1$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $k_1 < x < k_2$ olduğundan her $(x, k_1) \in (0, k_2)^2$ için $T_{k_2}(x, k_1) = 0$ dır. Buradan $k_1 = 0$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla

$$(k_1, x) \notin \preccurlyeq_{T_{k_2}}$$

olur. Bu ise $\preccurlyeq_{T_{k_1}} \neq \preccurlyeq_{T_{k_2}}$ olduğu anlamına gelir. Bu nedenle T_{k_1} ve T_{k_2} t-normları (1.13) te tanımlanan $\sim$ bağıntısına göre denk değildirler. Dolayısıyla

$$\overline{T}_{k_1} \neq \overline{T}_{k_2}$$

dır. Böylece $\alpha(k) = \overline{T}_k$ ile tanımlanan $\alpha: (0,1) \to {}^{[0,1]}/_{\sim}$ fonksiyonu birebirdir ve α birebir bir fonksiyon olduğu için $|(0,1)| \leq \left| {}^{[0,1]}/_{\sim} \right|$ dır. Dolayısıyla ${}^{[0,1]}/_{\sim}$ sayılamaz sonsuz bir kümedir.

Tanım 2.1. T_1 ve T_2, bir L sınırlı kafesi üzerinde iki t-norm olsun.$\preccurlyeq_{T_1} \subseteq \preccurlyeq_{T_2}$ ise "T_2, T_1 den sıra-güçlüdür" veya "T_1, T_2 den sıra-zayıftır" denir.

Önerme 2.2. L sınırlı bir kafes, T L üzerinde herhangi bir t-norm olsun. L kafesi üzerindeki T_W ve $T_\wedge$ t-normları göz önüne alınırsa, bu takdirde T_W sırası en zayıf olan t-norm ve $T_\wedge$ sırası en güçlü olan t-normdur, yani

$$\preccurlyeq_{T_W} \subseteq \preccurlyeq_T \subseteq \preccurlyeq_{T_\wedge}$$

dur.

İspat. İlk olarak $\preccurlyeq_T \subseteq \preccurlyeq_{T_\wedge}$ olduğu gösterilecektir. $(x,y) \in \preccurlyeq_T$, yani $x \preccurlyeq_T y$ olacak şekilde $x,y \in L$ keyfi alınsın. Önerme 1.18 e göre $\preccurlyeq_T \subseteq \leq$ olduğundan $x \leq y$ dir. Dolayısıyla

$$x = x \wedge y = T_\wedge(x,y)$$

olur. Bu eşitlik

$x \preccurlyeq_{T_\wedge} y$ olduğunu, yani $(x,y) \in \preccurlyeq_{T_\wedge}$

ifadesini verir. Böylece $\preccurlyeq_T \subseteq \preccurlyeq_{T_\wedge}$ ifadesi elde edilir. Şimdi de $\preccurlyeq_{T_W} \subseteq \preccurlyeq_T$ olduğu gösterilmelidir. Bu amaçla $x,y \in L$ için $(x,y) \in \preccurlyeq_{T_W}$, yani $x \preccurlyeq_{T_W} y$ alınsın. $x = y = 0$, $x = y = 1$ veya $x = 0$ ve $y = 1$ olması durumunda Lemma 1.10 dan L üzerindeki herhangi bir T t-normu için $x \preccurlyeq_T y$ olduğu açıktır. $x,y \in L \setminus \{0,1\}$ olması durumunda ise $\preccurlyeq_{T_W}$-kısmen sıralamasının tanımıyla bir $\ell \in L \setminus \{0\}$ elemanı

$$T_W(y,\ell) = x$$

olacak şekilde mevcut olur. Eğer $\ell = 1$ ise $x = y$ dir. Bu durumda Lemma 1.10 dan $x \preccurlyeq_T x$ olduğu açıktır. Eğer $\ell \neq 1$ ise T_W t-normunun tanımına göre $x = 0$ olur. Yine Lemma 1.10 dan $0 \preccurlyeq_T y$ olduğu açıktır. Buradan her iki durumda da

$x \preccurlyeq_T y$ olduğu, yani $(x,y) \in \preccurlyeq_T$

ifadesi elde edilir. Böylece $\preccurlyeq_{T_W} \subseteq \preccurlyeq_T$ dir. Buradan T_W nun sırası en zayıf olan t-norm ve $T_\wedge$ un sırası en güçlü olan t-norm, yani

$$\preccurlyeq_{T_W} \subseteq \preccurlyeq_T \subseteq \preccurlyeq_{T_\wedge}$$

olduğu elde edilir.

Önerme 2.3. T_1 ve T_2, $[0,1]$ üzerinde iki t-norm olsun. Bu takdirde $\preccurlyeq_{T_1} \subseteq \preccurlyeq_{T_2}$ ise $K_{T_2} \subseteq K_{T_1}$ dir.

İspat: T_1 ve T_2, $[0,1]$ üzerinde birer t-norm ve $\preccurlyeq_{T_1} \subseteq \preccurlyeq_{T_2}$ olsun. Bu durumda $K_{T_2} \subseteq K_{T_1}$ olduğu gösterilmelidir. Aksini varsayarak, $K_{T_2} \nsubseteq K_{T_1}$ olduğu kabul edilsin. O halde bir $x \in K_{T_2}$ elemanı $x \notin K_{T_1}$ olacak şekilde mevcuttur. Diğer taraftan $x \in K_{T_2}$ olduğu için K_{T_2} nin tanımına göre bir $y_x \in (0,1)$ elemanı

$[x < y_x$ ise $x \not\preccurlyeq_{T_2} y_x]$ veya $[y_x < x$ ise $y_x \not\preccurlyeq_{T_2} x]$

olacak şekilde mevcuttur. Genellikten bir şey kaybetmeden $x < y_x$ fakat $x \not\preccurlyeq_{T_2} y_x$ olduğu kabul edilsin. $x \notin K_{T_1}$ve $x < y_x$ olduğundan

$x \preccurlyeq_{T_1} y_x$, yani $(x, y_x) \in \preccurlyeq_{T_1}$

olur. Bu durumda $\preccurlyeq_{T_1} \subseteq \preccurlyeq_{T_2}$ olduğundan $(x, y_x) \in \preccurlyeq_{T_2}$, yani $x \preccurlyeq_{T_2} y_x$ elde edilir. Bu ise x ve y_x in $\preccurlyeq_{T_2}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz olması ile çelişir. Bu nedenle $K_{T_2} \subseteq K_{T_1}$ dir.

Uyarı 2.1. Önerme 2.3 ün tersi doğru değildir. Yani $[0,1]$ üzerindeki T_1 ve T_2 t-normları için $K_{T_2} \subseteq K_{T_1}$ ise $\preccurlyeq_{T_1} \subseteq \preccurlyeq_{T_2}$ nin olması gerekmez. Önerme 2.3 ün tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnek ile gösterilecektir.

Örnek 2.1. $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ ve $T^{nM}: [0,1]^2 \to [0,1]$

$$T(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2}, & (x,y) \in [0,1)^2, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ve

$$T^{nM}(x,y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 1, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ile tanımlanan t-normlar göz önüne alınsın [40]. Bu takdirde $K_T = K_{T^{nM}} = (0,1)$ olmasına rağmen $\preccurlyeq_T \nsubseteq \preccurlyeq_{T^{nM}}$ ve $\preccurlyeq_{T^{nM}} \nsubseteq \preccurlyeq_T$ dir.

$K_T = (0,1)$ olduğu [38] deki çalışmada (Örnek 5) gösterildi.

Bu nedenle $K_{T^{nM}} = (0,1)$ olduğu gösterilmelidir. $x \in (0,1)$ keyfi alınsın. Bu durumda $x \in K_{T^{nM}}$ olduğu gösterilecektir. Bunu gösterebilmek için x elemanı için mümkün olan 3 farklı durum incelenecektir:

1. Durum : $x < {}^1\!/_2$ olsun. Bu durumda $y := 1 - x \in (0,1)$ elemanı göz önüne alınırsa, ${}^1\!/_2 < y$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla $x < y$ fakat $x \not\preccurlyeq_{T^{nM}} y$ dir. Aksini varsayarak $x \preccurlyeq_{T^{nM}} y$ olduğu kabul edilirse, bir $\ell \in [0,1]$ elemanı

$$T^{nM}(y,\ell) = x$$

olacak şekilde mevcut olur. Burada $x \neq 0$ olduğundan

$$T^{nM}(y,\ell) \neq 0$$

dır. Bu durumda T^{nM} t-normunun tanımı kullanılarak $1 - x + \ell > 1$ den $\ell > x$ olduğu elde edilir. Yine T^{nM} t-normunun tanımına göre

$$x = T^{nM}(y,\ell) = T^{nM}(1-x,\ell) = min(1-x,\ell)$$

bulunur. Burada $x = 1 - x$ veya $x = \ell$ olabilir. $x \neq y = 1 - x$ olduğundan $x = \ell$ olmak zorundadır. Bu ise $\ell > x$ olması ile çelişir. Dolayısıyla herhangi bir $x \in (0,1)$ için $x < y$ fakat $x \not\preccurlyeq_{T^{nM}} y$ olacak şekilde bir $y = 1 - x \in (0,1)$ elemanı mevcut olur. Bu ise $x \in K_{T^{nM}}$ olduğu anlamına gelir.

2. Durum : $x > {}^{1}\!/_{2}$ olsun. Bu durumda $y := 1 - x \in (0,1)$ elemanı göz önüne alınırsa, $y < {}^{1}\!/_{2}$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla $y < x$ fakat $y \not\preccurlyeq_{T^{nM}} x$ dir. Aksini varsayarak $y \preccurlyeq_{T^{nM}} x$ olduğu kabul edilirse, bir $k \in [0,1]$ elemanı

$$T^{nM}(x,k) = y$$

olacak şekilde mevcut olur. Burada $x \neq 1$ olduğu için $y \neq 0$, yani

$$T^{nM}(x,k) \neq 0$$

dır. Bu durumda T^{nM} t-normunun tanımını kullanılarak $x + k > 1$ den $k > 1 - x$ olduğu bulunur. Yine T^{nM} t-normunun tanımına göre

$$y = 1 - x = T^{nM}(x,k) = min(x,k)$$

bulunur. Burada $1 - x = x$ veya $1 - x = k$ olabilir. $y = 1 - x \neq x$ olduğundan $1 - x = k$ olmak zorundadır. Bu ise $k > 1 - x$ olması ile çelişir. Dolayısıyla herhangi bir $x \in (0,1)$ için $y < x$ fakat $y \not\preccurlyeq_{T^{nM}} x$ olacak şekilde $y = 1 - x \in (0,1)$ elemanı mevcut olur. Bu ise $x \in K_{T^{nM}}$ olduğu anlamına gelir.

3. Durum: $x = {}^{1}\!/_{2}$ olsun. $0 < y < {}^{1}\!/_{2}$ olacak şekilde bir y elemanı seçilsin. Bu durumda $y \not\preccurlyeq_{T^{nM}} {}^{1}\!/_{2}$ olur. Aksini varsayarak $y \preccurlyeq_{T^{nM}} {}^{1}\!/_{2}$ olduğu kabul edilirse, bir $m \in [0,1]$ elemanı

$$T^{nM}\left({}^{1}\!/_{2}, m\right) = y$$

olacak şekilde mevcut olur. Burada $y \neq 0$ olduğundan

$$T^{nM}\left({}^{1}\!/_{2}, m\right) \neq 0$$

dır. Bu durumda T^{nM} t-normunun tanımı kullanılarak $m + {}^{1}\!/_{2} > 1$ den $m > {}^{1}\!/_{2}$ olduğu elde edilir. Diğer taraftan yine T^{nM} t-normunun tanımına göre

$$y = T^{nM}\left({}^{1}\!/_{2}, m\right) = min\left({}^{1}\!/_{2}, m\right)$$

dir. Buradan $y = {}^{1}\!/_{2}$ veya $y = m$ olur. $y \neq {}^{1}\!/_{2}$ olduğu için $y = m$ olmak zorundadır. Buradan $y = m > {}^{1}\!/_{2}$ olduğu elde edilir. Bu ise y elemanının kabulü ile çelişir. Dolayısıyla $x = {}^{1}\!/_{2}$ için $y < {}^{1}\!/_{2}$ fakat $y \not\preccurlyeq_{T^{nM}} {}^{1}\!/_{2}$ olacak şekilde y elemanları mevcut olur. Bu ise $x \in K_{T^{nM}}$ olduğu anlamına gelir.

Bu üç durum incelemesinden de $(0,1) \subseteq K_{T^{nM}}$ olduğu elde edilir.

Tersine herhangi bir T t-normu için $K_T \subseteq (0,1)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla her iki kapsamadan $K_{T^{nM}} = (0,1)$ olduğu elde edilir.

Şimdi de $K_T = K_{T^{nM}}$ olmasına rağmen $\preccurlyeq_T \subseteq \preccurlyeq_{T^{nM}}$ veya $\preccurlyeq_{T^{nM}} \subseteq \preccurlyeq_T$ olması gerekmediği gösterilmelidir. İlk olarak $\preccurlyeq_T \nsubseteq \preccurlyeq_{T^{nM}}$ olduğu gösterilecektir. $3/5 \in [0,1]$ elemanı için

$$T\left(2/3, 3/5\right) = 1/5$$

eşitliği sağlandığından $\preccurlyeq_T$ sıralamasının tanımına göre $1/5 \preccurlyeq_T 2/3$ olur. Böylece

$$\left(1/5, 2/3\right) \in \preccurlyeq_T$$

olduğu elde edilir. Fakat $\left(1/5, 2/3\right) \notin \preccurlyeq_{T^{nM}}$ dir. Aksini varsayarak, $\left(1/5, 2/3\right) \in \preccurlyeq_{T^{nM}}$, yani $1/5 \preccurlyeq_{T^{nM}} 2/3$ olduğu kabul edilirse, bir $\ell \in [0,1]$ elemanı

$$T^{nM}(2/3, \ell) = 1/5$$

olacak şekilde mevcut olur. T^{nM} t-normunun tanımına göre

$$1/5 = min(2/3, \ell) \text{ ve } 2/3 + \ell > 1$$

dir. Buradan $1/5 = \ell > 1/3$ çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $1/5 \npreccurlyeq_{T^{nM}} 2/3$ yani $\left(1/5, 2/3\right) \notin \preccurlyeq_{T^{nM}}$ dir. Buradan

$$\preccurlyeq_T \nsubseteq \preccurlyeq_{T^{nM}}$$

elde edilir.

İkinci olarak $\preccurlyeq_{T^{nM}} \nsubseteq \preccurlyeq_T$ olduğu gösterilecektir. $1/2 \in [0,1]$ elemanı için

$$T^{nM}(3/4, 1/2) = 1/2$$

eşitliği sağlandığından $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre $1/2 \preccurlyeq_{T^{nM}} 3/4$ olur. Böylece

$$(1/2, 3/4) \in \preccurlyeq_{T^{nM}}$$

olduğu elde edilir. Fakat $(1/2, 3/4) \notin \preccurlyeq_T$ dir. Aksini varsayarak $(1/2, 3/4) \in \preccurlyeq_T$ yani $1/2 \preccurlyeq_T 3/4$ olduğu kabul edilirse, bu durumda bir $\ell^* \in [0,1]$ elemanı

$$T(3/4, \ell^*) = 1/2$$

olacak şekilde mevcut olur. Burada $1/2 \neq 3/4$ olduğundan $\ell^* = 1$ olamaz. T t-normunun tanımına göre

$$1/2 = T(3/4, \ell^*) = 3/4 \cdot \ell^* \cdot 1/2$$

olur. Eşitlikten $\ell^* = 4/3 \notin [0,1]$ çelişkisi elde edildiğinden $(1/2, 3/4) \notin \preccurlyeq_T$ dir. Bu ise

$$\preccurlyeq_{T^{nM}} \nsubseteq \preccurlyeq_T$$

olması anlamına gelir.

2.2. $[0,1]$ Üzerindeki T-Normların Denkliği

Tanım 2.2. [0,1] üzerindeki t-normların ailesi üzerinde β bağıntısı

$$T_1 \, \beta \, T_2 \,:\Leftrightarrow K_{T_1} = K_{T_2} \tag{2.1}$$

verilir.

Lemma 2.1. Tanım 2.2 de (2.1) ile verilen β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Lemma 2.1 in ispatı açıktır.

Tanım 2.3. β bağıntısı $[0,1]$ üzerindeki t-normların ailesi üzerinde (2.1) de tanımlanan bir denklik bağıntısı olsun. Bu takdirde T t-normunun denklik sınıfı

$\overline{T} = \{T' \mid T'$, $[0,1]$ üzerinde bir t-norm ve $T \, \beta \, T'\}$

dır.

Kesicioğlu, Karaçal ve Mesiar [38] deki çalışmalarındaki Önerme 2 ile, (1.13) te tanımlanan $\sim$ bağıntısına göre T_D t-normunun denklik sınıfının sadece T_D t-normundan oluştuğunu göstermişlerdir. Aşağıda verilen Önerme 2.4 ise (2.1) de tanımlanan β bağıntısına göre T_D t-normunun denklik sınıfının T_D den farklı bir t-norm içerdiğini göstermektedir.

Önerme 2.4. [0,1] üzerindeki T_D t-normu için $\overline{T_D} \neq \{T_D\}$ dir.

Önerme 2.4 ün ispatı aşağıdaki aksi örnek ile verilebilir.

[0,1] üzerinde,

$$T(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2}, & (x,y) \in [0,1)^2, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ile tanımlanan t-norm ve [38] de verilen Örnek 5 kullanılarak $K_T = K_{T_D}$ olduğu görülür. Bu durumda β bağıntısının tanımına göre $T \, \beta \, T_D$ dir. Yani T ve T_D t-normları (2.1) de tanımlanan β bağıntısına göre denktirler. Buradan T_D t-normunun denklik sınıfının T_D den farklı bir T t-normu içerdiği görülür.

Önerme 2.5. (2.1) de tanımlanan β bağıntısına göre $[0,1]$ üzerindeki T_M minumum t-normunun denklik sınıfı, $[0,1]$ üzerindeki bütün sürekli t-normların kümesidir.

İspat: β bağıntısı [0,1] üzerindeki t-normların ailesi üzerinde (2.1) deki gibi tanımlansın ve T', $[0,1]$ üzerinde herhangi bir t-norm olsun. $T' \in \overline{T_M}$ keyfi olmak üzere T' t-normunun sürekli olduğu elde edilmelidir. $T' \in \overline{T_M}$ olduğundan $T'\ \beta\ T_M$ dir. Buradan β bağıntısının tanımına göre

$$K_{T'} = K_{T_M}$$

olur. T_M t-normu sürekli olduğu için Lemma 1.12 den $K_{T_M} = \emptyset$ dir. Buradan $K_{T'} = \emptyset$ olduğu elde edilir. Bu nedenle T' t-normu süreklidir.

Tersine T', $[0,1]$ üzerinde sürekli bir t-norm olsun. Bu takdirde yine Lemma 1.12 den $K_{T'} = \emptyset$ olur. Diğer taraftan T_M t-normuda sürekli bir t-norm olduğundan $K_{T_M} = \emptyset$ dir. Buradan

$$K_{T'} = \emptyset = K_{T_M}$$

olduğu bulunur. β bağıntısının tanımına göre $T'\ \beta\ T_M$ dur. Dolayısıyla $T' \in \overline{T_M}$ elde edilir.

Uyarı 2.2. Önerme 2.5 de $[0,1]$ üzerindeki herhangi iki sürekli t-normun (2.1) deki tanımlanan β bağıntısına göre denk olduğu gösterilmiştir. Fakat iki sol sürekli t-normun bu bağıntıya göre denk olması gerekmediği aşağıdaki örnekle incelenebilir.

Örnek 2.2. [0,1] üzerindeki

$$T^{nM}(x,y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 1, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ve

$$T_4(x,y) = \begin{cases} min(x,y), & max(x,y) \in \left(3/4, 1\right], \\ 1/4, & x,y \in \left(1/4, 3/4\right], \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

t-normları göz önüne alınırsa, T^{nM} ve T_4 t-normları sol sürekli t-normlardır [40,45]. $K_{T^{nM}} = (0,1)$ ve $K_{T_4} = \left(0, 3/4\right]$ olduğundan T^{nM} ve T_4 t-normları (2.1) deki β bağıntısına göre denk değildirler.

Örnek 2.1 de $K_{T^{nM}} = (0,1)$ olduğu gösterildi. Bu nedenle $K_{T_4} = \left(0, 3/4\right]$ olduğu gösterilmelidir.

Bunun için $x \in \left(0, 3/4\right]$ keyfi alınsın. x elemanı için mümkün olan iki farklı durum irdelenecektir:

1. Durum : $x \in (0, {}^3/_4)$ olsun. $y := {}^x/_3 \in (0,1)$ elemanı göz önüne alınırsa, buradan $y < x$ fakat $y \not\preccurlyeq_{T_4} x$ olduğu elde edilir. Aksini varsayarak $y \preccurlyeq_{T_4} x$ olduğu kabul edilirse, bu durumda bir $k \in [0,1]$ elemanı

$$T_4(x,k) = y = {}^x/_3$$

olacak şekilde mevcut olur. Burada $x \neq {}^3/_4$ olduğundan $y \neq {}^1/_4$ dür. $y \neq 0$ ve $y \neq {}^1/_4$ olduğundan

$$T_4(x,k) \neq 0 \text{ ve } T_4(x,k) \neq {}^1/_4$$

olur. Bu durumda T_4 t-normunun tanımına göre $max(x,k) \in ({}^3/_4, 1]$ olduğu elde edilir. Yine T_4 t-normunun tanımını kullanarak

$$T_4(x,k) = min(x,k) = {}^x/_3$$

bulunur. Buradan ${}^x/_3 = x$ veya ${}^x/_3 = k$ olabilir. ${}^x/_3 \neq x$ olduğundan ${}^x/_3 = k$ olmak zorundadır. Buradan $max(x, {}^x/_3) \in ({}^3/_4, 1]$ elde edilir ki $x \in (0, {}^3/_4)$ olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla herhangi bir $x \in (0, {}^3/_4)$ için ${}^x/_3 < x$ fakat ${}^x/_3 \not\preccurlyeq_{T_4} x$ olacak şekilde bir $y = {}^x/_3 \in (0,1)$ elemanı mevcut olur. Bu ise $x \in K_{T_4}$ olduğu anlamına gelir.

2. Durum : $x = {}^3/_4$ olsun. ${}^1/_4 < y < {}^3/_4$ olacak şekilde bir y elemanı seçilsin. Bu durumda $y < x$ fakat $y \not\preccurlyeq_{T_4} x$ dir. Aksini varsayarak $y \preccurlyeq_{T_4} x$ olduğu kabul edilirse, bir $t \in [0,1]$ elemanı

$$T_4(x,t) = y$$

olacak şekilde mevcut olur. Burada ${}^1/_4 < y < {}^3/_4$ olduğu için T_4 t-normunun tanımı kullanılarak $max(x,t) \in ({}^3/_4, 1]$ olduğu elde edilir. Yine T_4 t-normunun tanımına göre

$$T_4(x,t) = min(x,t) = y$$

dir. Buradan $y = x$ veya $y = t$ olabilir. $x \neq y$ olduğundan $y = t$ olmak zorundadır. Buradan $max(x,y) \in ({}^3/_4, 1]$ elde edilir ki $x = {}^3/_4$ ve ${}^1/_4 < y < {}^3/_4$ olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $x = {}^3/_4$ için ${}^1/_4 < y < {}^3/_4$ fakat $y \not\preccurlyeq_{T_4} {}^3/_4$ olacak şekilde y elemanları mevcut olur. Bu ise $x \in K_{T_4}$ olduğu anlamına gelir.

Her iki durumda da $(0, {}^3/_4] \subseteq K_{T_4}$ olduğu elde edilir.

Tersine $x \in K_{T_4}$ keyfi alınsın. Farzedelimki $x \notin (0, {}^3/_4]$ dir. $x \in K_{T_4}$ olduğundan K_{T_4} kümesinin tanımına göre bir $y \in (0,1)$ elemanı

i) $[x < y \text{ ise } x \not\preccurlyeq_{T_4} y]$

veya

ii) $[y < x$ ise $y \not\preccurlyeq_{T_4} x]$

olacak şekilde mevcut olur.

i) $x < y$ fakat $x \not\preccurlyeq_{T_4} y$ kabul edilsin.

Bu durumda $x < y$ olduğundan $min(x, y) = x$ dir. $3/4 < x < y$ olduğundan $max(x, y) \in (3/4, 1]$ olur. Buradan T_4 t-normunun tanımı kullanılarak

$x = min(x, y) = T_4(x, y)$

eşitliğinde $x \preccurlyeq_{T_4} y$ çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $x \in (0, 3/4]$ dır.

ii) $y < x$ fakat $y \not\preccurlyeq_{T_4} x$ kabul edilsin.

Bu durumda $y < x$ olduğundan $min(y, x) = y$ dir. $3/4 < x$ olduğundan $max(y, x) \in (3/4, 1]$ olur. Buradan T_4 t-normunun tanımına göre

$y = min(x, y) = T_4(x, y)$

eşitliğinde $y \preccurlyeq_{T_4} x$ çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $x \in (0, 3/4]$ dır. Böylece $K_{T_4} \subseteq (0, 3/4]$ olduğu elde edilmiş olur. Dolayısıyla

$K_{T_4} = (0, 3/4]$

dır. Sonuç olarak $K_{T^{nM}} \neq K_{T_4}$ olduğundan T^{nM} ve T_4 t-normları β bağıntısına göre denk değildirler.

2.3. $\mathcal{I}_T^{(c)}$ Kümesi ve Bazı Özellikleri

Bu bölümde [0,1] üzerindeki herhangi bir T t-normu için keyfi fakat sabit bir $c \in [0,1]$ elemanı ile $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanamayan tüm elemanların kümesi üzerinde incelemeler yapılacaktır.

Tanım 2.4. T, $[0,1]$ üzerinde herhangi bir t-norm olsun. Keyfi fakat sabit bir $c \in [0,1]$ elemanı ile $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanamayan tüm elemanların kümesi $\mathcal{I}_T^{(c)}$ ile gösterilsin, yani

$$\mathcal{I}_T^{(c)} = \{x \in (0,1) \mid x, \preccurlyeq_T \text{ sıralamasına göre } c \text{ ile kıyaslanamazdır}\}$$

olsun.

Herhangi bir T t-normu için eğer $c = 0$ veya $c = 1$ alınırsa, Lemma 1.10 dan $\mathcal{I}_T^{(0)} = \emptyset = \mathcal{I}_T^{(1)}$ olduğu elde edilir. Eğer T bölünebilir bir t-norm ise her $c \in [0,1]$ için $\mathcal{I}_T^{(c)} = \emptyset$ eşitliği açıktır.

Uyarı 2.3. Keyfi bir sınırlı kafes üzerinde de $\mathcal{I}_T^{(c)}$ kümesi benzer olarak tanımlanabilir.

Lemma 2.2. T, $[0,1]$ üzerinde herhangi bir t-norm olsun. Bu takdirde $K_T = \bigcup_{x\in[0,1]} \mathcal{I}_T^{(x)}$ dir.

İspat: T, $[0,1]$ üzerinde herhangi bir t-norm olsun. Her $x \in [0,1]$ için $\mathcal{I}_T^{(x)} \subseteq K_T$ olduğundan $\bigcup_{x\in[0,1]} \mathcal{I}_T^{(x)} \subseteq K_T$ olduğu elde edilir. Tersine $y \in K_T$ keyfi alınsın. K_T nin tanımına göre bir $x^* \in (0,1)$ elemanı

$[y < x^*$ ise $y \nleq_T x^*]$ veya $[x^* < y$ ise $x^* \nleq_T y]$

olacak şekilde mevcut olur. Buradan her iki durumda da $y \in \mathcal{I}_T^{(x^*)}$ olduğu elde edilir. Diğer taraftan $\mathcal{I}_T^{(x^*)} \subseteq \bigcup_{x\in[0,1]} \mathcal{I}_T^{(x)}$ olduğundan $y \in \bigcup_{x\in[0,1]} \mathcal{I}_T^{(x)}$ olduğu açıkça görülür. Buradan

$$K_T = \bigcup_{x\in[0,1]} \mathcal{I}_T^{(x)}$$

olur.

Örnek 2.3. $[0,1]$ üzerindeki

$$T^{nM}(x,y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 1, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

t-normu alınsın. Bu takdirde,

Her $x \in (0,1)$ için $\mathcal{I}_{T^{nM}}^{(x)} = \{y \in (0, 1 - x] \mid x \neq y\}$

dir.

Her $x \in (0,1)$ için $y \in \mathcal{I}_{T^{nM}}^{(x)}$ keyfi alınsın. Bu takdirde $x \neq y$ olduğu açıktır. Bu durumda $y \in (0, 1 - x]$ olduğu gösterilecektir. Aksini varsayarak $y \notin (0, 1 - x]$ olduğu kabul edilsin, yani $y > 1 - x$ olsun.

$y \in \mathcal{I}_{T^{nM}}^{(x)}$ olduğundan y elemanı $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre x ile kıyaslanamazdır, yani

$[y < x$ ise $y \npreccurlyeq_{T^{nM}} x]$ veya $[x < y$ ise $x \npreccurlyeq_{T^{nM}} y]$

dir. Genellikten bir şey kaybetmeden $y < x$ fakat $y \npreccurlyeq_{T^{nM}} x$ olduğu kabul edilirse, Lemma 1.10 dan $y \neq 0$ olduğu açıktır. $y < x$ olduğundan $min(x,y) = y$ dir. Diğer taraftan

$y > 1 - x$ kabülünden $x + y > 1$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla T^{nM} t-normunun tanımına göre

$$y = min(x, y) = T^{nM}(x, y)$$

dir. Buradan $y \preccurlyeq_{T^{nM}} x$ çelişkisi elde edileceğinden $y \in (0, 1 - x]$ olmalıdır.

Tersine herhangi bir $x \in (0,1)$ ve $x \neq y$ için $y \in (0, 1 - x]$ keyfi alınsın. Bu durumda $y \in \mathcal{I}_{T^{nM}}{}^{(x)}$ olduğu gösterilmelidir. Aksini varsayarak $y \notin \mathcal{I}_{T^{nM}}{}^{(x)}$ kabul edilsin, yani $y \preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre x ile kıyaslanabilir olsun. Bu takdirde

i) $[y < x$ ise $y \preccurlyeq_{T^{nM}} x]$

veya

ii) $[x < y$ ise $x \preccurlyeq_{T^{nM}} y]$

dir.

i) $y < x$ ve $y \preccurlyeq_{T^{nM}} x$ kabul edilsin. O halde bir $m \in [0,1]$ elemanı

$$T^{nM}(x, m) = y$$

olacak şekilde mevcut olur. $y \neq 0$ olduğundan

$$T^{nM}(x, m) \neq 0$$

dır. Bu nedenle T^{nM} t-normunun tanımı kullanılarak $x + m > 1$ olduğundan $m > 1 - x$ elde edilir. Yine T^{nM} t-normunun tanımına göre

$$T^{nM}(x, m) = min(x, m) = y$$

dir. Buradan $y = m$ veya $y = x$ olabilir. $x \neq y$ kabulünden dolayı $y = m$ olmak zorundadır. Bu durumda $m > 1 - x$ olduğundan $y > 1 - x$ elde edilir. Bu ise $y \in (0, 1 - x]$ kabulü ile çelişir. Bu nedenle $y < x$ fakat $y \not\preccurlyeq_{T^{nM}} x$ dir. Dolayısıyla $y \in \mathcal{I}_{T^{nM}}{}^{(x)}$ olur.

ii) Benzer şekilde $x < y$ ve $x \preccurlyeq_{T^{nM}} y$ alınsın. O halde bir $n \in [0,1]$ elemanı

$$T^{nM}(y, n) = x$$

olacak şekilde mevcut olur. $x \neq 0$ olduğundan

$$T^{nM}(y, n) \neq 0$$

dır. Bu nedenle T^{nM} t-normunun tanımı kullanılarak $y + n > 1$ olduğundan $n > 1 - y$ elde edilir. Yine T^{nM} t-normunun tanımına göre

$$T^{nM}(y, n) = min(y, n) = x$$

dir. Buradan $x = y$ veya $x = n$ olabilir. $x \neq y$ kabulünden dolayı $x = n$ olmak zorundadır. Bu durumda $n > 1 - y$ olduğundan $x > 1 - y$ elde edilir ki bu ise $y \in (0, 1 - x]$ kabulü ile çelişir. Bu nedenle $x < y$ fakat $x \not\preccurlyeq_{T^{nM}} y$ dir. Dolayısıyla $y \in \mathcal{I}_{T^{nM}}{}^{(x)}$ olur. Sonuç olarak

$$\mathcal{I}_{T^{nM}}{}^{(x)} = \{y \in (0, 1 - x] \mid x \neq y\}$$

dır.

Uyarı 2.4. Aşağıda verilen Önerme 2.6 ile, $[0,1]$ üzerindeki herhangi iki t-normun (1.13) te verilen $\sim$ bağıntısına göre denk olabilmesi için bir gerek ve yeter şart verilmektedir.

Önerme 2.6. T_1 ve T_2, $[0,1]$ üzerinde iki t-norm olsun. Bu takdirde her $x \in [0,1]$ için $\mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)} = \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart T_1 ve T_2 t-normlarının (1.13) te verilen $\sim$ bağıntısına göre denk olmalarıdır.

İspat. $\Rightarrow$ T_1 ve T_2, $[0,1]$ üzerinde birer t-norm ve her $x \in [0,1]$ için $\mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)} = \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}$ olsun. $(x, y) \in \preccurlyeq_{T_1}$ keyfi alınsın. Bu durumda $x \preccurlyeq_{T_1} y$ dir. Yani y elemanı $\preccurlyeq_{T_1}$ sıralamasına göre x ile kıyaslanabilirdir. Böylece $y \notin \mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)}$ olur. $\mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)} = \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}$ olduğundan $y \notin \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}$ elde edilir. Buradan

$$x \preccurlyeq_{T_2} y \text{ yani } (x, y) \in \preccurlyeq_{T_2}$$

olduğu bulunur. Böylece $\preccurlyeq_{T_1} \subseteq \preccurlyeq_{T_2}$ olduğu elde edilmiş olur. Benzer şekilde $\preccurlyeq_{T_2} \subseteq \preccurlyeq_{T_1}$ olduğu açıkça görülebilir. Bu nedenle

$$\preccurlyeq_{T_1} = \preccurlyeq_{T_2}$$

dir. Böylece T_1 ve T_2 t-normları (1.13) te verilen $\sim$ bağıntısına göre denktirler.

$\Leftarrow$ T_1 ve T_2, $[0,1]$ üzerinde iki t-norm ve (1.13) te verilen $\sim$ bağıntısına göre denk olsunlar. Bu durumda her $x \in [0,1]$ için $\mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)} = \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}$ olduğu gösterilecektir. Aksini varsayarak, $x \in (0,1)$ için $\mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)} \neq \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}$ olduğu kabul edilirse, $y_1, y_2 \in (0,1)$ elemanları

$$\left[y_1 \in \mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)} \text{ ve } y_1 \notin \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}\right] \text{ veya } \left[y_2 \in \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)} \text{ ve } y_2 \notin \mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)}\right]$$

olacak şekilde mevcut olur. $y_1 \in \mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)}$ ve $y_1 \notin \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}$ olarak alınsın. $y_1 \in \mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)}$ olduğundan $\mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)}$ kümesinin tanımına göre

i) $[y_1 < x \text{ ise } y_1 \not\preccurlyeq_{T_1} x]$

veya

ii) $[x < y_1 \text{ ise } x \not\preccurlyeq_{T_1} y_1]$

dir.

i) İlk olarak $y_1 < x$ fakat $y_1 \not\preccurlyeq_{T_1} x$ olduğu kabul edilsin.

$y_1 \notin \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}$ ve $y_1 < x$ olduğundan $y_1 \preccurlyeq_{T_2} x$ dir. T_1 ve T_2 t-normları (1.13) te verilen $\sim$ bağıntısına göre denk olduklarından $\preccurlyeq_{T_1} = \preccurlyeq_{T_2}$ dir ve bu eşitlikten $y_1 \preccurlyeq_{T_1} x$ olduğu elde edilir. Bu ise x ve y_1 in $\preccurlyeq_{T_1}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz olması, yani $y_1 \in \mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)}$ olması ile çelişir.

ii) İkinci olarak $x < y_1$ fakat $x \not\preccurlyeq_{T_1} y_1$ olduğu kabul edilsin.

$y_1 \notin \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}$ ve $x < y_1$ olduğundan $x \preccurlyeq_{T_2} y_1$ dir. T_1 ve T_2 t-normları (1,13) de verilen $\sim$ bağıntısına göre denk olduklarından $\preccurlyeq_{T_1} = \preccurlyeq_{T_2}$ dir ve bu eşitlikten $x \preccurlyeq_{T_1} y_1$ olduğu elde edilir. Bu ise x ve y_1 in $\preccurlyeq_{T_1}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz olması, yani $y_1 \in \mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)}$ olması ile çelişir.

Bu nedenle her $x \in [0,1]$ için $\mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)} = \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}$ dir.

Önerme 2.6, $[0,1]$ üzerindeki herhangi iki t-normun (1.13) te verilen $\sim$ bağıntısına göre denk olabilmesi için bir gerek ve yeter şart vermektedir. Aşağıda verilen Önerme 2.7 ve Uyarı 2.5 ise bu gerek ve yeter şartın (2.1) de verilen β bağıntısı için doğru olması gerekmediğini göstermektedir.

Önerme 2.7. T_1 ve T_2, $[0,1]$ üzerinde iki t-norm olsun. Bu takdirde her $x \in [0,1]$ için $\mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)} = \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}$ ise T_1 ve T_2 t-normları (2.1) de verilen β bağıntısına göre denktirler.

İspat: T_1 ve T_2, $[0,1]$ üzerinde iki t-norm ve her $x \in [0,1]$ için $\mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)} = \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}$ olsun. Lemma 2.2 den

$$K_{T_1} = \bigcup_{x\in[0,1]} \mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)} \text{ ve } K_{T_2} = \bigcup_{x\in[0,1]} \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}$$

dir. Her $x \in [0,1]$ için $\mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)} = \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}$ olduğundan

$$K_{T_1} = \bigcup_{x\in[0,1]} \mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)} = \bigcup_{x\in[0,1]} \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)} = K_{T_2}$$

eşitliğinden $K_{T_1} = K_{T_2}$ elde edilir. Buradan β bağıntısının tanımına göre $T_1 \,\beta\, T_2$ olur. Bu ise T_1 ve T_2 t-normlarının (2.1) de verilen β bağıntısına göre denk olduklarını gösterir.

Uyarı 2.5. Önerme 2.7 nin tersinin doğru olması gerekmez. Yani T_1 ve T_2 t-normları (2.1) de verilen β bağıntısına göre denk ise her $x \in (0,1)$ için $\mathcal{I}_{T_1}{}^{(x)} = \mathcal{I}_{T_2}{}^{(x)}$ olması gerekmediği aşağıdaki örnek ile görülebilir.

Örnek 2.4. $[0,1]$ üzerinde

$$T(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2}, & (x,y) \in [0,1)^2, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ve T_D t-normları göz önüne alınsın. [38] de verilen Örnek 5 den $K_T = K_{T_D}$ olduğu görülür. Bu nedenle T ve T_D t-normları (2.1) de verilen β bağıntısına göre denktirler.

Her $x \in (0,1)$ için $\mathcal{I}_T{}^{(x)} \neq \mathcal{I}_{T_D}{}^{(x)}$ olduğunu iddia ediyoruz. Bu amaçla

a) $a_1)$ $0 < x < {}^1\!/_2$ için $\mathcal{I}_T{}^{(x)} = \{y \in (0,1) \mid y \in [{}^x\!/_2, 2x]\ ve\ x \neq y\}$

ve

$a_2)$ ${}^1\!/_2 \leq x < 1$ için $\mathcal{I}_T{}^{(x)} = \{y \in (0,1) \mid y \in [{}^x\!/_2, 1)\ ve\ x \neq y\ \}$

b) Her $x \in (0,1)$ için $\mathcal{I}_{T_D}{}^{(x)} = \{y \in (0,1) \mid x \neq y\}$ eşitlikleri gösterilecektir.

Şimdi bunların gerçeklendiğini sırasıyla gösterelim:

a) $a_1)$ İlk olarak $0 < x < {}^1\!/_2$ için, $\mathcal{I}_T{}^{(x)} = \{y \in (0,1) \mid y \in [{}^x\!/_2, 2x]\ ve\ x \neq y\}$ elde edilecektir.

$0 < x < {}^1\!/_2$ için $y \in \mathcal{I}_T{}^{(x)}$ keyfi alınsın. Lemma 1.10 dan $x \neq y$ olduğu açıktır. $y \in (0,1)$ olduğundan $y \in [{}^x\!/_2, 2x]$ olduğu gösterilmelidir. Aksini varsayarak $y \notin [{}^x\!/_2, 2x]$ olduğu kabul edilirse, $y < {}^x\!/_2$ veya $2x < y$ olur.

$a_{11})$ İlk olarak $y < {}^x\!/_2$ olsun. Bu durumda $y < {}^x\!/_2 < x$ olur.

$y = x \cdot \frac{2y}{x} \cdot \frac{1}{2}$ ve $x \neq 1$, ${}^{2y}\!/_x \neq 1$ olduğundan T t-normunun tanımına göre

$$y = x \cdot \frac{2y}{x} \cdot \frac{1}{2} = T\left(x, \frac{2y}{x}\right)$$

eşitliğinden $y \preccurlyeq_T x$ olduğu elde edilir. Bu ise $y \in \mathcal{I}_T{}^{(x)}$ olması ile çelişir. Bu nedenle $y \geq {}^x\!/_2$ dir.

$a_{12})$ İkinci olarak $2x < y$ olsun. Bu durumda $x < {}^y\!/_2 < y$ olur.

$x = y \cdot \frac{2x}{y} \cdot \frac{1}{2}$ ve $y \neq 1$, ${}^{2x}\!/_y \neq 1$ olduğundan T t-normunun tanımına göre

$$x = y \cdot \frac{2x}{y} \cdot \frac{1}{2} = T\left(y, \frac{2x}{y}\right)$$

eşitliğinden $x \preccurlyeq_T y$ olduğu elde edilir. Bu ise $y \in \mathcal{I}_T{}^{(x)}$ olması ile çelişir. Bu nedenle $y \leq 2x$ olur. Dolayısıyla

$0 < x < {}^1\!/_2$ için $\mathcal{I}_T{}^{(x)} \subseteq \{y \in (0,1) \mid y \in [{}^x\!/_2, 2x]\ ve\ x \neq y\}$

dir.

Tersine $0 < x < 1/2$ için $x \neq y$ ve $y \in [x/2, 2x]$ olacak şekildeki $y \in (0,1)$ keyfi alınsın. Bu durumda $y \in \mathcal{I}_T^{(x)}$ olduğu gösterilmelidir. Aksini varsayarak $y \notin \mathcal{I}_T^{(x)}$ alalım, yani $y \preccurlyeq_T$ sıralamasına göre x ile kıyaslanabilir olsun. Bu takdirde

i) $[y < x$ ise $y \preccurlyeq_T x]$

veya

ii) $[x < y$ ise $x \preccurlyeq_T y]$

dir.

i) İlk olarak $y < x$ ve $y \preccurlyeq_T x$ alınsın. O halde bir $\ell \in [0,1]$ elemanı

$T(x, \ell) = y$

olacak şekilde mevcut olur. Burada $x \neq y$ olduğundan $\ell \neq 1$ olmak zorundadır. Buradan $x \neq 1$ ve $\ell \neq 1$ olduğu için T t-normunun tanımına göre

$T(x, \ell) = y = \frac{x\ell}{2}$

olduğu elde edilir. $x/2 \leq y$ kabulünden dolayı eşitlikten $\ell = \frac{2y}{x} \geq 1$ çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $y < x$ fakat $y \not\preccurlyeq_T x$ yani $y \in \mathcal{I}_T^{(x)}$ olur.

ii) Şimdi de $x < y$ ve $x \preccurlyeq_T y$ olsun. O halde bir $\ell^* \in [0,1]$ elemanı

$T(y, \ell^*) = x$

olacak şekilde mevcuttur. Burada $x \neq y$ olduğundan $\ell^* \neq 1$ olmak zorundadır. $y \neq 1$ ve $\ell^* \neq 1$ olduğundan T t-normunun tanımına göre

$$T(y, \ell^*) = x = \frac{y\ell^*}{2}$$

olduğu elde edilir. $y \leq 2x$ kabulünden dolayı eşitlikten $\ell^* = \frac{2x}{y} \geq 1$ çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $x < y$ fakat $x \not\preccurlyeq_T y$ yani $y \in \mathcal{I}_T^{(x)}$ dir. Dolayısıyla

$0 < x < 1/2$ için $\{y \in (0,1) \mid y \in [x/2, 2x]\ ve\ x \neq y\} \subseteq \mathcal{I}_T^{(x)}$

dir. Böylece her iki kapsamadan

$0 < x < 1/2$ için $\mathcal{I}_T^{(x)} = \{y \in (0,1) \mid y \in [x/2, 2x]\ ve\ x \neq y\}$

elde edilir.

a_2) Benzer şekilde $1/2 \leq x < 1$ için, $\mathcal{I}_T^{(x)} = \{y \in (0,1) \mid y \in [x/2, 1)\ ve\ x \neq y\ \}$ olduğu elde edilecektir.

${}^{1}/_{2} \leq x < 1$ için $y \in \mathcal{I}_T{}^{(x)}$ keyfi alınsın. Lemma 1.10 dan $x \neq y$ olduğu açıktır. $y \in (0,1)$ olduğundan $y \in [{}^{x}/_{2}, 1)$ olduğu gösterilmelidir. Aksini varsayarak $y \notin [{}^{x}/_{2}, 1)$ olduğu kabul edilirse, $y < {}^{x}/_{2}$ veya $y = 1$ olur.

a_{21}) İlk olarak $y < {}^{x}/_{2}$ olsun. Bu durumda $y < {}^{x}/_{2} < x$ olur.

$y = x \cdot \frac{2y}{x} \cdot \frac{1}{2}$ ve $x \neq 1$ ve ${}^{2y}/_{x} \neq 1$ olduğundan T t-normunun tanımına göre

$$y = x \cdot \frac{2y}{x} \cdot \frac{1}{2} = T\left(x, \frac{2y}{x}\right)$$

eşitliğinden $y \preccurlyeq_T x$ olduğu elde edilir. Bu ise $y \notin \mathcal{I}_T{}^{(x)}$ olması ile çelişir. Bu nedenle $y \geq {}^{x}/_{2}$ dir.

a_{22}) $y = 1$ olması durumunda ise her $x \in [0,1]$ için $1 \notin \mathcal{I}_T{}^{(x)}$ elde edilir. Bu ise kabul ile çelişeceği için $y \neq 1$ dir. Dolayısıyla

$${}^{1}/_{2} \leq x < 1 \text{ için } \mathcal{I}_T{}^{(x)} \subseteq \left\{y \in (0,1) \,\middle|\, y \in [{}^{x}/_{2}, 1) \; ve \; x \neq y \right\}$$

dir.

Tersine ${}^{1}/_{2} \leq x < 1$ için $x \neq y$ ve $y \in [{}^{x}/_{2}, 1)$ olacak şekilde $y \in (0,1)$ keyfi alınsın. Bu durumda $y \in \mathcal{I}_T{}^{(x)}$ olduğu gösterilmelidir. Aksini varsayarak $y \notin \mathcal{I}_T{}^{(x)}$ alalım. Yani y, $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre x ile kıyaslanabilir olsun. Bu takdirde

$$[y < x \text{ ise } y \preccurlyeq_T x]$$

veya

$$[x < y \text{ ise } x \preccurlyeq_T y]$$

dir.

İlk olarak $y < x$ ve $y \preccurlyeq_T x$ alınsın. O halde bir $t \in [0,1]$ elemanı

$$T(x,t) = y$$

olacak şekilde mevcuttur. $x \neq y$ olduğundan $t \neq 1$ olmak zorundadır. $x \neq 1$ ve $t \neq 1$ olduğundan T t-normunun tanımına göre

$$T(x,t) = y = \frac{xt}{2}$$

olduğu elde edilir. ${}^{x}/_{2} \leq y$ kabulünden dolayı eşitlikten $t = \frac{2y}{x} \geq 1$ çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $y < x$ fakat $y \not\preccurlyeq_T x$ yani $y \in \mathcal{I}_T{}^{(x)}$ olur.

Şimdi de $x < y$ ve $x \preccurlyeq_T y$ olsun. O halde bir $z \in [0,1]$ elemanı

$$T(y,z) = x$$

olacak şekilde mevcuttur. $x \neq y$ olduğu için $z \neq 1$ olmak zorundadır. $y \neq 1$ ve $z \neq 1$ olduğundan T t-normunun tanımına göre

$$T(y,z) = x = \frac{yz}{2}$$

olduğu elde edilir. ${}^1\!/_2 \leq x$ ve ${}^x\!/_2 \leq y$ kabulünden dolayı eşitlikten $z = \frac{2x}{y} \geq 1$ çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $x < y$ fakat $x \not\preccurlyeq_T y$ yani $y \in \mathcal{I}_T{}^{(x)}$ olur. Dolayısıyla

$${}^1\!/_2 \leq x < 1 \text{ için } \{y \in (0,1) \mid y \in [{}^x\!/_2, 1) \; ve \; x \neq y \} \subseteq \mathcal{I}_T{}^{(x)}$$

dir. Böylece her iki kapsamadan

$${}^1\!/_2 \leq x < 1 \text{ için } \mathcal{I}_T{}^{(x)} = \{y \in (0,1) \mid y \in [{}^x\!/_2, 1) \; ve \; x \neq y \}$$

elde edilir.

b) Şimdi de her $x \in (0,1)$ için $\mathcal{I}_{T_D}{}^{(x)} = \{y \in (0,1) \mid x \neq y\}$ olduğu gösterilecektir.

Her $x \in (0,1)$ için $x \neq y$ olacak şekilde $y \in (0,1)$ keyfi alınsın. Bu durumda $y \in \mathcal{I}_{T_D}{}^{(x)}$ olduğu gösterilmelidir. Aksini varsayarak $y \notin \mathcal{I}_{T_D}{}^{(x)}$ alınsın. Yani y, $\preccurlyeq_{T_D}$ sıralamasına göre x ile kıyaslanabilir olsun. Bu takdirde

b_1) $[y < x$ ise $y \preccurlyeq_{T_D} x]$

veya

b_2) $[x < y$ ise $x \preccurlyeq_{T_D} y]$

dir.

b_1) İlk olarak $y < x$ ve $y \preccurlyeq_{T_D} x$ alınsın. O halde bir $\ell \in [0,1]$ elemanı

$$T_D(x, \ell) = y$$

olacak şekilde mevcuttur. $x \neq y$ olduğundan $\ell = 1$ olamaz. Bu durumda $x, \ell \neq 1$ olduğundan T_D t-normunun tanımından $y = 0$ elde edilir. Bu ise kabul ile çelişir. Bu nedenle $y < x$ fakat $y \not\preccurlyeq_{T_D} x$ yani $y \in \mathcal{I}_{T_D}{}^{(x)}$ olur.

b_2) Benzer şekilde $x < y$ ve $x \preccurlyeq_{T_D} y$ olsun. O halde bir $\ell^* \in [0,1]$ elemanı

$$T_D(y, \ell^*) = x$$

olacak şekilde mevcuttur. Yine $x \neq y$ olduğundan $\ell^* = 1$ olamaz. Bu durumda $y, \ell^* \neq 1$ olduğundan T_D t-normunun tanımından $x = 0$ çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $x < y$ fakat $x \not\preccurlyeq_{T_D} y$ yani $y \in \mathcal{I}_{T_D}{}^{(x)}$ dir. Buradan

$$\{y \in (0,1) \mid x \neq y\} \subseteq \mathcal{I}_{T_D}{}^{(x)}$$

olduğu bulunur.

Tersine herhangi bir T t-normu ve her $x \in [0,1]$ için $\mathcal{I}_T^{(x)} \subseteq (0,1)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\mathcal{I}_{T_D}^{(x)} = \{y \in (0,1) \mid x \neq y\}$ olduğu elde edilir.

Böylece $K_T = K_{T_D}$ olmasına rağmen her $x \in (0,1)$ için $\mathcal{I}_T^{(x)} \neq \mathcal{I}_{T_D}^{(x)}$ olduğu gösterilmiş olur.

Önerme 2.8. T, $[0,1]$ üzerinde bir t-norm ve $x \to T(x_0, x)$ ile tanımlanan $T(x_0, .): [0,1] \to [0, x_0]$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu takdirde $y \leq x_0$ olan her $y \in [0,1]$ için $y \preccurlyeq_T x_0$ dır.

İspat: T, $[0,1]$ üzerinde herhangi bir t-norm ve $x \to T(x_0, x)$ ile tanımlanan $T(x_0, .): [0,1] \to [0, x_0]$ fonksiyonu sürekli olsun. Aksini varsayarak $y_0 \in [0,1]$ elemanını

$y_0 < x_0$ fakat $y_0 \not\preccurlyeq_T x_0$

olacak şekilde alalım. $x \to T(x_0, x)$ ile tanımlanan $T(x_0, .): [0,1] \to [0, x_0]$ fonksiyonu sürekli olduğu için Önerme 1.6 dan $y_0 \in [0, x_0]$ için bir $t \in [0,1]$ elemanı

$T(x_0, t) = y_0$

olacak şekilde mevcut olur. Buradan $y_0 \preccurlyeq_T x_0$ çelişkisi elde edilir. O halde varsayımın yanlış $y \leq x_0$ olan her $y \in [0,1]$ için $y \preccurlyeq_T x_0$ olduğu elde edilir.

Teorem 2.1. T, $[0,1]$ üzerinde bir t-norm ve $K_T \neq \emptyset$ olsun. Bu takdirde keyfi bir $m \in K_T$ için $y_m \in \mathcal{I}_T^{(m)}$ elemanı aşağıdaki özelliği sağlayacak şekilde mevcuttur:

$x \to T(m, x)$ ile tanımlanan $T(m, .): [0,1] \to [0, m]$ veya $y \to T(y_m, y)$ ile tanımlanan $T(y_m, .): [0,1] \to [0, y_m]$ fonksiyonu sürekli değildir.

İspat. T, $[0,1]$ üzerinde herhangi bir t-norm ve $K_T \neq \emptyset$ olsun. $m \in K_T$ keyfi alınırsa, $\mathcal{I}_T^{(m)} \neq \emptyset$ olur. O halde $y_m \in \mathcal{I}_T^{(m)}$ elemanı

i) $[m < y_m$ ise $m \not\preccurlyeq_T y_m]$

veya

ii) $[y_m < m$ ise $y_m \not\preccurlyeq_T m]$

olacak şekilde mevcuttur. İddianın aksini varsayarak $m \in K_T$ ve $y_m \in \mathcal{I}_T^{(m)}$ elemanı için $x \to T(m, x)$ ile tanımlanan $T(m, .): [0,1] \to [0, m]$ ve $y \to T(y_m, y)$ ile tanımlanan $T(y_m, .): [0,1] \to [0, y_m]$ fonksiyonu sürekli olsun.

i) İlk olarak $m < y_m$ fakat $m \not\preccurlyeq_T y_m$ alınsın. $T(y_m, .): [0,1] \to [0, y_m]$ fonksiyonu sürekli olduğu için Önerme 2.8 den

$m \preccurlyeq_T y_m$

çelişkisi elde edilir.

ii) Benzer şekilde $y_m < m$ fakat $y_m \not\preccurlyeq_T m$ alınsın. $T(m,.) : [0,1] \to [0,m]$ fonksiyonu sürekli olduğu için yine Önerme 2.8 den

$$y_m \preccurlyeq_T m$$

çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $m \in K_T$ için $y_m \in \mathcal{I}_T{}^{(m)}$ elemanı $x \to T(m,x)$ ile tanımlanan $T(m,.) : [0,1] \to [0,m]$ veya $y \to T(y_m, y)$ ile tanımlanan $T(y_m,.) : [0,1] \to [0, y_m]$ fonksiyonu sürekli olmayacak şekilde mevcuttur.

Teorem 2.2. T, $[0,1]$ üzerinde sağ sürekli bir t-norm olsun. Bu takdirde $c \in [0,1]$ için $sup\big(\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}\big) \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$ dir.

İspat: T, $[0,1]$ üzerinde sağ sürekli bir t-norm ve $c \in [0,1]$ keyfi olsun. Eğer

$$\big(\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}\big) = \emptyset$$

ise $sup\emptyset = 0$ olduğundan $0 \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$ olur. Bu nedenle

$$0 \neq k = sup\big(\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}\big)$$

kabul edebiliriz. Eğer $k = c$ ise $k = c \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$ elde edilir. Bu durumda $c \in (0,1)$ için

$$k = c = sup\big(\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}\big) \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$$

olur. Eğer $k \neq c$, yani $k < c$ ise $n \in \mathbb{N}$ için $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \searrow k$ ve $k < y_n$ olacak şekilde bir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizisi inşa edilebilir. $k = sup\big(\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}\big)$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n \preccurlyeq_T c$$

olduğu elde edilir. Bu takdirde bir $n \in \mathbb{N}$ için $\ell_n \in [0,1]$ elemanı

$$y_n = T(c, \ell_n)$$

olacak şekilde mevcuttur. T sağ sürekli bir t-norm ve $(y_n) \searrow k$ olduğundan

$$k = \wedge_{n\in\mathbb{N}} y_n = \wedge_{n\in\mathbb{N}} T(c, \ell_n) = T(c, \wedge_{n\in\mathbb{N}} \ell_n)$$

dır. Böylece

$$k = T(c, \wedge_{n\in\mathbb{N}} \ell_n)$$

ve buradan $k \preccurlyeq_T c$ olduğu elde edilir. Yani k ve c, $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanabilirdir. Buradan $k \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$ elde edilir. Dolayısıyla $c \in [0,1]$ için $sup\big(\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}\big) \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$ dir.

Sonuç 2.1. T, $[0,1]$ üzerinde sağ sürekli bir t-norm olsun. Bu takdirde $c \in [0,1]$ için $\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}$ kümesinin en büyük elemanı mevcut değildir.

Sonuç 2.2. T, $[0,1]$ üzerinde sağ sürekli bir t-norm olsun. Bu takdirde $c \in [0,1]$ için $\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}$ kümesi ya boştur ya da sonsuzdur.

Teorem 2.3. T, [0,1] üzerinde sol sürekli bir t-norm olsun. Bu takdirde $c \in [0,1]$ için $inf\left(\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}\right) \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$ dir.

İspat: T, [0,1] üzerinde sol sürekli bir t-norm ve $c \in [0,1]$ olsun. Eğer

$$\left(\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}\right) = \emptyset$$

ise $inf\emptyset = 1$ olduğundan $1 \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$ bulunur. Bu nedenle

$$\ell = inf\left(\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}\right)$$

alalım. Eğer $\ell = c$ ise $\ell = c \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$ olduğu elde edilir. Bu durumda $c \in (0,1)$ için

$$\ell = c = inf\left(\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}\right) \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$$

olur. Eğer $\ell \neq c$ yani $\ell < c$ ise $n \in \mathbb{N}$ için $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow \ell$ ve $y_n < \ell$ olacak şekilde bir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizisi inşaa edilebilir. $\ell = inf\left(\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}\right)$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n \preccurlyeq_T c$$

olduğu elde edilir. Bu takdirde bir $n \in \mathbb{N}$ için $m_n \in [0,1]$ elemanı

$$y_n = T(c, m_n)$$

olacak şekilde mevcuttur. T sol sürekli bir t-norm ve $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow \ell$ olduğundan

$$\ell = \vee_{n\in\mathbb{N}}\, y_n = \vee_{n\in\mathbb{N}}\, T(c, m_n) = T(c, \vee_{n\in\mathbb{N}}\, m_n)$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$\ell = T(c, \vee_{n\in\mathbb{N}}\, m_n)$$

ve buradan $\ell \preccurlyeq_T c$ olduğu elde edilir. ℓ ve c, $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanabilirdir. Böylece $\ell \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$ sonucuna varılır. Dolayısıyla $c \in [0,1]$ için $inf\left(\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}\right) \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$ dir.

Sonuç 2.3. T, [0,1] üzerinde sol sürekli bir t-norm olsun. Bu takdirde $c \in [0,1]$ için $\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}$ kümesinin en küçük elemanı mevcut değildir.

Sonuç 2.4. T, [0,1] üzerinde sol sürekli bir t-norm olsun. Bu takdirde $c \in [0,1]$ için $\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}$ kümesi ya boştur ya da sonsuzdur.

Teorem 2.4. T, [0,1] üzerinde bir t-norm, $([0,1], \preccurlyeq_T)$ bir kafes ve $c \in (0,1)$ olmak üzere $\mathcal{I}_T{}^{(c)} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ olsun. Bu takdirde her $k \in \{1,2,\cdots,n\}$ için x_k, $\mathcal{I}_T{}^{(x_k)}$ kümesinin bir limit noktasıdır.

İspat: $k \in \{1,2,\cdots,n\}$ keyfi alınsın.

i) $x_k < c$ olsun.

$m := x_k \wedge_T c$ olarak alalım. Eğer $m = x_k$ olsa, $x_k \preccurlyeq_T c$ olduğu elde edilir. Buradan $x_k \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$ çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $m \neq x_k$ dır.

$$\varepsilon \coloneqq min(|x_k - x_1|, |x_k - x_2|, \cdots, |x_k - x_{k-1}|, |x_k - x_{k+1}|, \cdots, |x_k - x_n|, |x_k - m|, |x_k - x_c|)$$

olarak tanımlansın.

$\left(x_k - {}^{\varepsilon}/_{2}, x_k\right) \subseteq \mathcal{I}_T{}^{(x_k)}$ olduğunu göstermek amacıyla $\ell \in \left(x_k - {}^{\varepsilon}/_{2}, x_k\right)$ keyfi alınsın. Bu durumda $\ell \in \mathcal{I}_T{}^{(x_k)}$ olduğu gösterilecektir. Aksini varsayarak $\ell \notin \mathcal{I}_T{}^{(x_k)}$ alalım, yani $\ell \preccurlyeq_T$ sıralamasına göre x_k ile kıyaslanabilir olsun. Buradan

$$\ell \preccurlyeq_T x_k$$

olduğu elde edilir. Diğer taraftan ε un tanımından $\ell \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$ olduğu açıktır. Buradan $\ell \preccurlyeq_T c$ olmak zorundadır. $\ell \preccurlyeq_T x_k$ ve $\ell \preccurlyeq_T c$ olduğundan

$$\ell \preccurlyeq_T x_k \wedge_T c = m$$

dir. Bu durumda $\ell \preccurlyeq_T m$ den $\ell < m$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\left(x_k - {}^{\varepsilon}/_{2}, x_k\right) \subseteq \mathcal{I}_T{}^{(x_k)}$ dir.

Şimdi de $\left(x_k,\ x_k + {}^{\varepsilon}/_{2}\right) \subseteq \mathcal{I}_T{}^{(x_k)}$ olduğu gösterilmelidir. Bunu gösterebilmek için $s \in \left(x_k,\ x_k + {}^{\varepsilon}/_{2}\right)$ keyfi alınsın. $s \in \mathcal{I}_T{}^{(x_k)}$ olduğu gösterilecektir. Aksini varsayarak $s \notin \mathcal{I}_T{}^{(x_k)}$ alınsın, yani $s \preccurlyeq_T$ sıralamasına göre x_k ile kıyaslanabilir olsun. Buradan

$$x_k \preccurlyeq_T s$$

olduğu elde edilir. Diğer taraftan ε un tanımından $s \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$ olduğu açıktır. Buradan $s \preccurlyeq_T c$ dir. $x_k \preccurlyeq_T s$ ve $s \preccurlyeq_T c$ olduğundan $\preccurlyeq_T$ bağıntısının geçişme özelliği kullanılarak $x_k \preccurlyeq_T c$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\left(x_k,\ x_k + {}^{\varepsilon}/_{2}\right) \subseteq \mathcal{I}_T{}^{(x_k)}$ dır.

ii) $c < x_k$ olsun.

$t := x_k \vee_T c$ olarak alalım. Eğer $t = x_k$ ise $c \preccurlyeq_T x_k$ olur. Buradan $x_k \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$ çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $t \neq x_k$ dır.

$$\varepsilon^* \coloneqq min(|x_k - x_1|, |x_k - x_2|, \cdots, |x_k - x_{k-1}|, |x_k - x_{k+1}|, \cdots, |x_k - x_n|, |x_k - t|, |x_k - x_c|)$$

olarak tanımlansın.

$\left(x_k - {}^{\varepsilon^*}/_{2}, x_k\right) \subseteq \mathcal{I}_T{}^{(x_k)}$ olduğunu göstermek amacıyla $\ell^* \in \left(x_k - {}^{\varepsilon^*}/_{2}, x_k\right)$ keyfi alınsın. Bu durumda $\ell^* \in \mathcal{I}_T{}^{(x_k)}$ olduğu gösterilecektir. Aksini varsayarak $\ell^* \notin \mathcal{I}_T{}^{(x_k)}$ alınsın. Yani ℓ^*, $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre x_k ile kıyaslanabilir olsun. Buradan

$\ell^* \preccurlyeq_T x_k$

olduğu elde edilir. Diğer taraftan ε^* ın tanımından $\ell^* \notin \mathcal{I}_T^{(c)}$ olduğu açıktır. Buradan $c \preccurlyeq_T \ell^*$ dir. $\preccurlyeq_T$ bağıntısının geçişme özelliği kullanılarak $c \preccurlyeq_T x_k$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\left(x_k - \varepsilon^*/2, x_k\right) \subseteq \mathcal{I}_T^{(x_k)}$ dır.

Şimdi de $\left(x_k,\ x_k + \varepsilon^*/2\right) \subseteq \mathcal{I}_T^{(x_k)}$olduğu gösterilmelidir Bunu gösterebilmek için $s^* \in \left(x_k, x_k + \varepsilon^*/2\right)$ keyfi alınsın. Bu durumda $s^* \in \mathcal{I}_T^{(x_k)}$ olduğu gösterilecektir. Aksini varsayarak $s^* \notin \mathcal{I}_T^{(x_k)}$ alalım. Yani s^*, $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre x_k ile kıyaslanabilir olsun. Buradan

$x_k \preccurlyeq_T s^*$

olduğu elde edilir. Yine ε^* ın tanımından $s^* \notin \mathcal{I}_T^{(c)}$ olur. Bu ise $c \preccurlyeq_T s^*$ olduğu anlamına gelir. $x_k \preccurlyeq_T s^*$ ve $c \preccurlyeq_T s^*$ olduğundan

$t := x_k \vee_T c \preccurlyeq_T s^*$

dir. Bu durumda $t \preccurlyeq_T s^*$ den $t < s^*$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\left(x_k,\ x_k + \varepsilon^*/2\right) \subseteq \mathcal{I}_T^{(x_k)}$ dır.

Böylece her $k \in \{1,2,\cdots,n\}$ için x_k nın, $\mathcal{I}_T^{(x_k)}$ kümesinin bir limit noktası olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 2.5. A, $(0,1)^2$ nin bir alt kümesi olsun ve aşağıdaki özellikleri sağlasın.

(i) A simetriktir yani $(x,y) \in A$ ise $(y,x) \in A$ dır.

(ii) Her $(x,y) \in A$ için $(0,x] \times (0,y] \subseteq A$ dır.

Bu takdirde $[0,1]$ üzerindeki

$$T_A(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in A, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

fonksiyonu bir t-normdur [40].

$x \in (0,1)$ keyfi alınsın.

Eğer $y \in (0,1)$ elemanı $(x,y) \in A$ olacak şekilde mevcut ise bu takdirde $\mathcal{I}_{T_A}^{(x)} = \{y \in (0,1) \mid (x,y) \in A \ ve\ x \neq y\}$ dır.

Eğer her $y \in (0,1)$ için $(x,y) \notin A$ ise bu takdirde $\mathcal{I}_{T_A}^{(x)} = \emptyset$ dir.

İspat: $x \in (0,1)$ keyfi alınsın ve bir $y \in (0,1)$ elemanı $(x,y) \in A$ olacak şekilde mevcut olsun. B_x kümesi

$B_x = \{y \in (0,1) \mid (x,y) \in A \ ve\ x \neq y\}$

ile tanımlansın. Bu durumda $B_x = \mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)}$ olduğu gösterilecektir.

$s \in \mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)}$ keyfi alınsın. $s \in B_x$ olduğu elde edilecektir. Aksini varsayarak $s \notin B_x$ olsun. $s \in \mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)}$ olduğundan $\mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)}$ kümesinin tanımına göre s ve x, $\preccurlyeq_{T_A}$ sıralamasına göre kıyaslanamazdır. Yani,

i) $[s < x$ fakat $s \not\preccurlyeq_{T_A} x]$

veya

ii) $[x < s$ fakat $x \not\preccurlyeq_{T_A} s]$

dır.

Şimdi bu durumlar sırasıyla incelensin:

i) $s < x$ fakat $s \not\preccurlyeq_{T_A} x$ olsun.

$s \notin B_x$ olduğundan $(x, s) \notin A$ veya $x = s$ dir. $x = s$ olması durumunda $s \not\preccurlyeq_{T_A} s$ çelişkisi elde edileceğinden $(x, s) \notin A$ olmak zorundadır. Diğer taraftan $s < x$ olduğundan $min(x, s) = s$ dir. Lemma 1.10 dan $s \neq 0$ olduğu için T_A t-normunun tanımı kullanılarak

$$s = min(x, s) = T_A(x, s)$$

eşitliğinde $s \preccurlyeq_{T_A} x$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $s \in B_x$ dir.

ii) Benzer şekilde $x < s$ ve $x \not\preccurlyeq_{T_A} s$ alınsın.

$s \notin B_x$ olduğundan $(x, s) \notin A$ veya $x = s$ dir. $x = s$ olması durumunda $s \not\preccurlyeq_{T_A} s$ çelişkisi elde edileceğinden $(x, s) \notin A$ olmak zorundadır. Diğer taraftan $x < s$ olduğundan $min(x, s) = x$ dir. Lemma 1.10 dan $x \neq 0$ olduğu için T_A t-normunun tanımı kullanılarak

$$x = min(x, s) = T_A(x, s)$$

eşitliğinde $x \preccurlyeq_{T_A} s$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $s \in B_x$ dir. Buradan $\mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)} \subseteq B_x$ olduğu elde edilmiş olur.

Tersine $y \in B_x$ keyfi alınsın. B_x kümesinin tanımına göre $y \in (0,1)$ elemanı $(x, y) \in A$ ve $x \neq y$ olacak şekilde mevcuttur. Bu durumda $y \in \mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)}$ olduğu gösterilecektir. Aksini varsayarak $y \notin \mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)}$ alınsın. O halde $y, \preccurlyeq_{T_A}$ sıralamasına göre x ile kıyaslanabilirdir. Böylece

i) $[y < x$ ise $y \preccurlyeq_{T_A} x]$

veya

ii) $[x < y$ ise $x \preccurlyeq_{T_A} y]$

olduğu elde edilir.

i) $y < x$ ve $y \preccurlyeq_{T_A} x$ olduğu kabul edilsin. O halde bir $\ell \in [0,1]$ elemanı

$T_A(x, \ell) = y$

olacak şekilde mevcut olur. Burada $y \neq 0$ olduğundan

$T_A(x, \ell) \neq 0$

dır. Bu durumda T_A t-normunun tanımı kullanılarak $(x, \ell) \notin A$ olduğu elde edilir. Yine T_A t-normunun tanımına göre

$T_A(x, \ell) = min(x, \ell) = y$

elde edilir. Buradan $y = x$ veya $y = \ell$ olabileceği görülür. $x \neq y$ kabulünden dolayı $y = \ell$ olmak zorundadır. Bu durumda $(x, \ell) \notin A$ olduğundan $(x, y) \notin A$ elde edilir. Bu ise kabul ile çelişir. Bu nedenle $y < x$ fakat $y \not\preccurlyeq_{T_A} x$ yani $y \in \mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)}$ dir.

ii) Benzer şekilde $x < y$ ve $x \preccurlyeq_{T_A} y$ alınsın. O halde bir $\ell^* \in [0,1]$ elemanı

$T_A(y, \ell^*) = x$

olacak şekilde mevcut olur. Burada $x \neq 0$ olduğundan

$T_A(y, \ell^*) \neq 0$

dır. T_A t-normunun tanımı kullanılarak $(y, \ell^*) \notin A$ olduğu elde edilir. Yine T_A t-normunun tanımına göre

$T_A(y, \ell^*) = min(y, \ell^*) = x$

elde edilir. Buradan $x = y$ veya $x = \ell^*$ olabileceği görülür. $x \neq y$ kabulünden dolayı $x = \ell^*$ olmak zorundadır. Bu durumda $(y, \ell^*) \notin A$ olduğundan $(y, x) \notin A$ elde edilir. Bu ise kabul ile çelişir. Bu nedenle $x < y$ fakat $x \not\preccurlyeq_{T_A} y$ yani $y \in \mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)}$ olduğu bulunur. O halde $B_x \subseteq \mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)}$ dir.

Sonuç olarak $\mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)} = \{y \in (0,1) \mid (x, y) \in A \; ve \; x \neq y\}$ elde edilmiş olur.

Şimdi de her $y \in (0,1)$ için $(x, y) \notin A$ olsun. Bu durumda $\mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)} = \emptyset$ olduğu gösterilecektir. Aksini varsayarak $\mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)} \neq \emptyset$ kabul edilsin. Bu nedenle $t \in \mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)}$ keyfi alınırsa, $\mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)}$ kümesinin tanımından dolayı t, $\preccurlyeq_{T_A}$ sıralamasına göre x ile kıyaslanamazdır. Yani,

i) $[t < x$ fakat $t \not\preccurlyeq_{T_A} x]$

veya

ii) $[x < t$ fakat $x \not\preccurlyeq_{T_A} t]$

dir. İlk olarak

i) $t < x$ fakat $t \not\preccurlyeq_{T_A} x$ alınsın.

$t < x$ olduğundan $min(t,x) = t$ dir. $t = 0$ olması durumunda $0 \not\preccurlyeq_{T_A} x$ çelişkisi elde edileceğinden $t \neq 0$ dır. $(x,t) \notin A$ olduğundan T_A t-normunun tanımına göre

$$t = min(x,t) = T_A(x,t)$$

eşitliğinde $t \preccurlyeq_{T_A} x$ çelişkisi elde edilir. Benzer şekilde

ii) $x < t$ fakat $x \not\preccurlyeq_{T_A} t$ alınsın.

$x < t$ olduğundan $min(x,t) = x$ dir. $x = 0$ olması durumunda $0 \not\preccurlyeq_{T_A} t$ çelişkisi elde edileceğinden $x \neq 0$ dır. $(x,t) \notin A$ olduğundan T_A t-normunun tanımına göre

$$x = min(x,t) = T_A(x,t)$$

eşitliğinde $x \preccurlyeq_{T_A} t$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)} = \emptyset$ dir.

Uyarı 2.6. $A \subseteq (0,1)^2$ kümesi Teorem 2.5 de verilen şartları sağlasın ve T_A t-normu Teorem 2.5 deki gibi alınsın. Eğer $\mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)} \neq \emptyset$ ise $\mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)}$ kümesi sonsuzdur. Buna bir örnek olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.5. $A = \left(0, {}^{1}\!/_{3}\right] \times \left(0, {}^{1}\!/_{3}\right]$ kümesi, Teorem 2.5 de verilen şartları sağlar. T_A t-normu da yine Teorem 2.5 deki gibi alınsın, yani

$$T_A(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in A, \\ min(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olsun. Bu takdirde $\preccurlyeq_{T_A}$ sıralamasına göre x ile kıyaslanamayan elemanlarının kümesi,

$$\mathcal{I}_{T_A}{}^{(x)} = \left\{y \in \left(0, {}^{1}\!/_{3}\right] \middle| \, (x,y) \in A \;\; ve \;\; x \neq y \right\}$$

dir.

2.4. $\boldsymbol{T}$-Normların bir $(\boldsymbol{T_\lambda})_{\boldsymbol{\lambda \in (0,1)}}$ Ailesi

Karaçal ve Kesicioğlu [35] teki çalışmalarında L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde herhangi bir t-norm olmak üzere, L nin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre genelde kafes olması gerekmediğini, fakat L kafesi üzerinde tanımlı T_W t-normu için $\left(L, \preccurlyeq_{T_W}\right)$ nın her zaman kafes olduğunu göstermişler ve yine aynı çalışma da şu açık problemi ifade etmişlerdir: “L sınırlı bir kafes olmak üzere $(L, \preccurlyeq_T)$ kafes olacak şekilde farklı t-norm örnekleri var mıdır?” Bu bölümde $L = [0,1]$ için $([0,1], \preccurlyeq_T)$ kafes olacak şekilde T_W dan farklı bir t-norm inşa edilebilir mi sorusu üzerine düşünülmüş ve $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir T t-normu yardımıyla t-normların bir $(T_\lambda)_{\lambda \in (0,1)}$ ailesi inşa edilmiş ve T bölünebilir bir t-norm ise $([0,1], \preccurlyeq_{T_\lambda})$ nın tam kafes olduğu gösterilmiştir. Böylece [35] te bırakılan bir açık probleme cevap verilmiştir.

Teorem 2.6. T, $[0,1]$ üzerinde herhangi bir t-norm olsun ve $(T_\lambda)_{\lambda \in (0,1)}$ fonksiyonu

$$T_\lambda(x,y) = \begin{cases} 0, & T(x,y) \leq \lambda \text{ ve } x, y \neq 1, \\ T(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ile tanımlansın.

(i) T_λ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde bir t-normdur.

(ii) T bölünebilir bir t-norm ise $([0,1], \preccurlyeq_{T_\lambda})$ bir tam kafestir.

İspat: (i) Öncelikle T_λ nın bir t-norm olduğu gösterilecektir. Bunun için ilk olarak, değişme özelliğini sağladığı gösterilmelidir.

(a_1) $T(x,y) \leq \lambda$ olsun. Bu durumda $T_\lambda(x,y) = T_\lambda(y,x)$ eşitliğinin sağlandığı açıktır. Bu nedenle T_λ değişme özelliğini sağlar.

(a_2) $T(x,y) > \lambda$ olsun. T nin t-norm olduğu kullanılarak,

$$T_\lambda(x,y) = T(x,y) = T(y,x) = T_\lambda(y,x)$$

eşitliği elde edilir. Böylece T_λ değişme özelliğini sağlar.

Şimdi de T_λ nın birleşme özelliğini sağladığı gösterilecektir.

x, y, z den herhangi birinin 1 olması durumunda $T_\lambda(T_\lambda(x,y),z) = T_\lambda(x, T_\lambda(y,z))$ eşitliğinin sağlandığı açıktır. Bu nedenle $x, y, z \in [0,1)$ keyfi alınsın. Burada λ için mümkün olan (b_1) ve (b_2) durumları aşağıda incelenecektir:

(b_1) $T(x,y) \leq \lambda$ alınsın. Bu durumda

$$T_\lambda(T_\lambda(x,y),z) = T_\lambda(0,z) = 0$$

olur.

(b_{11}) Eğer $T(y,z) \leq \lambda$ ise $T_\lambda(x, T_\lambda(y,z)) = T_\lambda(x,0) = 0$ olup eşitlik gösterilmiş olur.

(b_{12}) Eğer $T(y,z) > \lambda$ ise $T_\lambda(x, T_\lambda(y,z)) = T_\lambda(x, T(y,z))$ dir.

$T(x,y) \leq \lambda$ kabulü ve T t-normunun monotonluk ve birleşme özelliği kullanılarak,

$$T(x, T(y,z)) = T(T(x,y),z) \leq T(\lambda, z) \leq \lambda$$

olduğu elde edilir ve bu nedenle

$$T_\lambda(x, T_\lambda(y,z)) = T_\lambda(x, T(y,z)) = 0$$

olup eşitlik sağlanır.

(b_2) $T(x,y) > \lambda$ alınsın. Bu durumda

$$T_\lambda(T_\lambda(x,y),z) = T_\lambda(T(x,y),z)$$

eşitliği elde edilir.

(b_{21}) $T(T(x,y),z) \leq \lambda$ olsun. Bu durumda $T_\lambda(T_\lambda(x,y),z) = T_\lambda(T(x,y),z) = 0$ dır.

Eğer $T(y,z) \leq \lambda$ ise $T_\lambda\big(x, T_\lambda(y,z)\big) = T_\lambda(x,0) = 0$ olup eşitlik sağlanır.

Eğer $T(y,z) > \lambda$ ise $T_\lambda\big(x, T_\lambda(y,z)\big) = T_\lambda\big(x, T(y,z)\big)$ dır. T t-normunun birleşme özelliği kullanılarak,

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(T(x,y),z) \leq \lambda$$

olduğu elde edilir ve böylece

$$T_\lambda\big(x, T_\lambda(y,z)\big) = T_\lambda\big(x, T(y,z)\big) = 0$$

olup eşitlik sağlanır.

(b_{22}) $T(T(x,y),z) > \lambda$ olsun. Bu durumda $T(x,y) > \lambda$ olduğu da kullanılarak

$$T_\lambda(T_\lambda(x,y),z) = T_\lambda(T(x,y),z) = T(T(x,y),z)$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan $\lambda < T\big(x, T(y,z)\big) < T(y,z)$ olduğundan $T_\lambda(y,z) = T(y,z)$ dir. Buradan

$$T_\lambda\big(x, T_\lambda(y,z)\big) = T_\lambda\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T(y,z)\big)$$

olup eşitlik sağlanır. Böylece T_λ birleşme özelliğini sağlar.

Şimdi ise T_λ nın monoton olduğu gösterilmelidir. Bunun için $y \leq z$ alınsın.

İlk olarak $x \neq 1$ ve $y \neq 1$ olsun.

Eğer $T(x,y) \leq \lambda$ ise $T_\lambda(x,y) = 0 \leq T_\lambda(x,z)$ olduğundan T_λ monotonluk özelliğini sağlar.

$T(x,y) > \lambda$ olması durumunda ise T t-normunun monoton olduğu kullanılarak $\lambda < T(x,y) \leq T(x,z)$ olduğu elde edilir. Buradan

$$T_\lambda(x,y) = T(x,y) \leq T(x,z) = T_\lambda(x,z)$$

olup T_λ monotondur.

İkinci olarak $x = 1$ olsun. Bu durumda T nin t-norm olduğu kullanılarak,

$$T_\lambda(1,y) = T(1,y) = y \leq z = T(1,z) = T_\lambda(1,z)$$

elde edilir. Böylece T_λ yine monotondur.

Benzer şekilde $y = 1$ durumunda da T_λ nın monoton olduğu gösterilebilir. Bu nedenle T_λ monotonluk özelliğini sağlar.

Son olarak T_λ nın sınır şartı

$$T_\lambda(x,1) = T(x,1) = x$$

eşitliğinden elde edilir. Böylece T_λ bir t-normdur.

(ii) Şimdi T bölünebilir bir t-norm ise $\left([0,1], \preccurlyeq_{T_\lambda}\right)$ nın tam kafes olduğu gösterilecektir. T, $[0,1]$ üzerinde bölünebilir bir t-norm ve $\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\} \subseteq [0,1]$ keyfi alınsın.

$$\vee_{T_\lambda}\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\} = \vee_{T_\lambda}\{y_\tau \mid \tau \in \varphi,\ y_\tau \neq 0\}$$

$$\wedge_{T_\lambda}\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\} = \wedge_{T_\lambda}\{y_\tau \mid \tau \in \varphi,\ y_\tau \neq 1\}$$

eşitlikleri elde edileceğinden $\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\} \subseteq (0,1)$ alınabilir. Burada λ nın durumları incelenecektir.

(A) İlk olarak $\vee_{T_\lambda}\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}$ nın varlığı incelensin. Mümkün olan durumlar aşağıdaki gibidir:

1. Durum: En az bir $\tau_0 \in \varphi$ için $y_{\tau_0} \leq \lambda$ olsun. Bu durumda $\vee_{T_\lambda}\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\} = 1$ olduğu gösterilecektir. Lemma 1.10 dan $1 \in \overline{\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}}_{T_\lambda}$ açık olduğundan $1 \neq k \in \overline{\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}}_{T_\lambda}$ keyfi alınsın. Böylece

$$y_{\tau_0} \preccurlyeq_{T_\lambda} k$$

olduğu elde edilir. O halde $\{n_\tau | \tau \in Q\} \subseteq [0,1]$ altkümesi her $\tau \in \varphi$ için

$$y_{\tau_0} = T_\lambda(k, n_\tau)$$

olacak şekilde mevcuttur. Burada $y_{\tau_0} \neq 0$ olduğundan

$$T_\lambda(k, n_\tau) \neq 0$$

dır. T_λ t-normunun tanımına göre

$$y_{\tau_0} = T_\lambda(k, n_\tau) = T(k, n_\tau)$$

eşitliği elde edilir. Eşit elemanların infimum ve supremum işlemlerine katkısı olmadığından $\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}$ kümesindeki bütün elemanlar birbirinden farklı alınmıştır. Bu nedenle her $\tau \in \varphi$ için $n_\tau = 1$ olamaz. $k \neq 1$ ve $n_\tau \neq 1$ olduğundan yine T_λ t-normunun tanımı kullanılarak

$$\lambda < y_{\tau_0} = T_\lambda(k, n_\tau) = T(k, n_\tau) \leq \lambda$$

çelişkisi elde edilir. Bu nedenle

$$\vee_{T_\lambda} y_\tau = 1$$

dir.

2. Durum: Her $\tau \in \varphi$ için $y_\tau > \lambda$ olsun. Bu durumda $\vee_{T_\lambda}\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\} = \vee\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $c = \vee\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}$ olsun. O halde

$$y_\tau \preccurlyeq_{T_\lambda} c$$

olduğu gösterilmelidir. $c = \vee\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}$ olduğundan $y_\tau \leq c$ olur. Buradan T bölünebilir bir t-norm olduğu için $\{\ell_\tau \mid \tau \in Q\} \subseteq [0,1]$ altkümesi her $\tau \in \varphi$ için

$$y_\tau = T(c, \ell_\tau)$$

olacak şekilde mevcuttur. Burada $y_\tau \neq 0$ ve $y_\tau > \lambda$ olduğundan T_λ t-normunun tanımına göre her $\tau \in \varphi$ için

$$\lambda < y_\tau = T(c, \ell_\tau) = T_\lambda(c, \ell_\tau)$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla $y_\tau \preccurlyeq_{T_\lambda} c$ dir. Böylece,

$$c \in \overline{\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}}_{T_\lambda}$$

olduğu gösterilmiş olur. Şimdi ise $s \in \overline{\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}}_{T_\lambda}$ keyfi alınsın. Bu durumda

$$c \preccurlyeq_{T_\lambda} s$$

olduğu gösterilmelidir. $s \in \overline{\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}}_{T_\lambda}$ olduğundan, $y_\tau \preccurlyeq_{T_\lambda} s$ dir. O halde $\{m_\tau \mid \tau \in Q\} \subseteq [0,1]$ altkümesi her $\tau \in \varphi$ için

$$y_\tau = T_\lambda(s, m_\tau)$$

olacak şekilde mevcuttur. Her $\tau \in \varphi$ için $y_\tau \neq 0$ olduğundan

$$T_\lambda(s, m_\tau) \neq 0$$

dır. Buradan T_λ t-normunun tanımına göre

$$y_\tau = T(s, m_\tau) = T_\lambda(s, m_\tau)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafından $\vee$ alınırsa,

$$\vee\, y_\tau = \vee\, T(s, m_\tau) = \vee\, T_\lambda(s, m_\tau)$$

olduğu elde edilir. T nin bölünebilir bir t-norm olduğu kullanılarak,

$$c = \vee\, y_\tau = T(s, \vee\, m_\tau) = \vee\, T_\lambda(s, m_\tau)$$

eşitliği elde edilir.

$$0 \neq \vee\, T_\lambda(s, m_\tau) \leq T_\lambda(s, \vee\, m_\tau) = T(s, \vee\, m_\tau)$$

olduğundan

$$c = \vee\, y_\tau = T(s, \vee\, m_\tau) = T_\lambda(s, \vee\, m_\tau)$$

eşitliğinden $c = \vee\, y_\tau \preccurlyeq_{T_\lambda} s$ olduğu elde edilir.

Sonuç olarak $\vee_{T_\lambda}\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\} = \vee\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}$ dir.

(B) Şimdi de $\wedge_{T_\lambda}\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}$ nin varlığı incelensin. Mümkün olan durumlar aşağıdaki gibidir:

1. Durum: En az bir $\tau_0 \in \varphi$ için $y_{\tau_0} \leq \lambda$ olsun. Bu durumda $\wedge_{T_\lambda}\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\} = 0$ olduğu gösterilecektir. Lemma 1.10 dan $0 \in \underline{\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}}_{T_\lambda}$ olduğundan

$0 \neq k \in \underline{\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}}_{T_\lambda}$ keyfi alınsın. Böylece

$$k \preccurlyeq_{T_\lambda} y_{\tau_0}$$

olduğu elde edilir. O halde $\{\ell_\tau \mid \tau \in Q\} \subseteq [0,1]$ altkümesi her $\tau \in \varphi$ için

$$k = T_\lambda(y_{\tau_0}, \ell_\tau)$$

olacak şekilde mevcut olur. Burada $k \neq 0$ olduğundan

$$T_\lambda(y_{\tau_0}, \ell_\tau) \neq 0$$

dır. T_λ t-normunun tanımına göre

$$k = T_\lambda(y_{\tau_0}, \ell_\tau) = T(y_{\tau_0}, \ell_\tau)$$

olduğu elde edilir. $\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}$ kümesindeki bütün elemanlar birbirinden farklı alındığı için her $\tau \in \varphi$ için $\ell_\tau = 1$ olamaz. $y_{\tau_0} \neq 1$ ve $\ell_\tau \neq 1$ olduğundan yine T_λ t-normunun tanımı kullanılarak,

$$\lambda < k = T_\lambda(y_{\tau_0}, \ell_\tau) = T(y_{\tau_0}, \ell_\tau) \leq y_{\tau_0} \leq \lambda$$

çelişkisi elde edilir. Böylece

$$\wedge_{T_\lambda}\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\} = 0$$

dır

2. Durum: Her $\tau \in \varphi$ için $\lambda < y_\tau$ olsun ve $k = \wedge\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}$ olarak alınsın. $\lambda < y_\tau$ olduğundan $\lambda \leq \wedge\, y_\tau = k$ dır. Bu durumda λ için mümkün olan durumlar aşağıdaki gibidir:

2.1. Durum: $\lambda < k$ olsun. Bu durumda $\wedge_{T_\lambda}\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\} = \wedge\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}$ olduğu gösterilecektir. Bunun için öncelikle

$$k \preccurlyeq_{T_\lambda} y_\tau$$

olduğu gösterilmelidir. $k = \wedge\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}$ olduğundan $k \leq y_\tau$ olur. T bölünebilir bir t-norm olduğundan $\{t_\tau \mid \tau \in Q\} \subseteq [0,1]$ altkümesi her $\tau \in \varphi$ için

$$k = T(y_\tau, t_\tau)$$

olacak şekilde mevcuttur. Burada $k = 0$ olması durumunda $\lambda < 0$ çelişkisi elde edileceğinden $k \neq 0$ dır. $k \neq 0$ ve $\lambda < k$ olduğundan T_λ t-normunun tanımına göre her $\tau \in \varphi$ için

$$\lambda < k = T(y_\tau, t_\tau) = T_\lambda(y_\tau, t_\tau)$$

olduğu elde edilir. Buradan

$$k \preccurlyeq_{T_\lambda} y_\tau$$

dır. Böylece $k \in \underline{\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}}_{T_\lambda}$ olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi ise $\ell \in \underline{\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}}_{T_\lambda}$ keyfi alınsın. Bu takdirde $\ell \preccurlyeq_{T_\lambda} k$ olduğu gösterilmelidir. Lemma 1.10 dan $\ell = 0 \preccurlyeq_{T_\lambda} k$ olduğundan $\ell \neq 0$ alınmalıdır.

$\ell \in \underline{\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}}_{T_\lambda}$ olduğundan, her $\tau \in \varphi$ için

$$\ell \preccurlyeq_{T_\lambda} y_\tau$$

dur. O halde $\{m_\tau \mid \tau \in Q\} \subseteq [0,1]$ altkümesi her $\tau \in \varphi$ için

$$\ell = T_\lambda(y_\tau, m_\tau)$$

olacak şekilde mevcuttur. $\ell \neq 0$ olduğundan T_λ t-normunun tanımına göre

$$\ell = T_\lambda(y_\tau, m_\tau) = T(y_\tau, m_\tau)$$

olur. Bu durumda T_λ t-normunun tanımından ya $\ell > \lambda$ ya da her $\tau \in \varphi$ için y_τ, m_τ elemanlarından biri 1 e eşittir. Varsayalım ki $\ell > \lambda$ olmasın. O halde $y_\tau = 1$ veya $m_\tau = 1$ olmak zorundadır. $y_\tau \neq 1$ alındığından $m_\tau = 1$ olur. $m_\tau = 1$ olması durumunda ise $\ell = y_\tau$ olduğu elde edilir. Buradan ise $\ell = y_\tau > \lambda$ çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $\ell > \lambda$ dır.

Diğer taraftan $\ell \preccurlyeq_{T_\lambda} y_\tau$ olduğundan $\ell \leq y_\tau$ ve dolayısıyla $\ell \leq \wedge y_\tau$ olduğu elde edilir. T bölünebilir bir t-norm olduğundan $\{k_\tau \mid \tau \in Q\} \subseteq [0,1]$ altkümesi her $\tau \in \varphi$ için

$$\ell = T(\wedge y_\tau, k_\tau)$$

olacak şekilde mevcuttur. $\ell \neq 0$ ve $\ell > \lambda$ olduğundan T_λ t-normunun tanımına göre

$$\ell = T(\wedge y_\tau, k_\tau) = T_\lambda(\wedge y_\tau, k_\tau)$$

eşitliğinden $\ell \preccurlyeq_{T_\lambda} \wedge y_\tau = k$ elde edilir. Sonuç olarak

$$\wedge_{T_\lambda}\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\} = \wedge\{y_\tau \mid \tau \in \varphi\}$$

dır.

2.2. Durum: $\lambda = k$ olsun. Bu durumda her $\{x_\tau \mid \tau \in \varphi\}$ ailesi için ispattaki (A) dan $\vee_{T_\lambda}\{x_\tau \mid \tau \in \varphi\}$ mevcut olduğundan ve 0, $\preccurlyeq_{T_\lambda}$-kısmen sıralamasının en küçük elemanı olduğundan Teorem 1.6 ile $([0,1], \preccurlyeq_{T_\lambda})$ tam kafestir.

Böylece T bölünebilir bir t-norm ise $([0,1], \preccurlyeq_{T_\lambda})$ nın tam kafes olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç 2.5. T, $[0,1]$ üzerinde bölünebilir bir t-norm olsun ve t-normların $(T_\lambda)_{\lambda \in (0,1)}$ ailesi

$$T_\lambda(x,y) = \begin{cases} 0, & T(x,y) \leq \lambda \text{ ve } x,y \neq 1, \\ T(x,y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak alınsın. Bu takdirde $([0,1], \preccurlyeq_{T_\lambda})$ bir kafestir ve

$$x \wedge_{T_\lambda} y = \begin{cases} 0, & (x \leq \lambda \text{ veya } y \leq \lambda)\ ve\ (x \neq y,\ x,y \neq 0,1), \\ x \wedge y, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ve

$$x \vee_{T_\lambda} y = \begin{cases} 1, & (x \leq \lambda \text{ veya } y \leq \lambda)\ ve\ (x \neq y,\ x, y \neq 0{,}1), \\ x \vee y, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olur.

Sonuç 2.6. T, $[0{,}1]$ üzerinde herhangi bir t-norm olsun ve t-normların $(T_\lambda)_{\lambda \in (0,1)}$ ailesi

$$T_\lambda(x, y) = \begin{cases} 0, & T(x, y) \leq \lambda \text{ ve } x, y \neq 1, \\ T(x, y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak alınsın. Bu takdirde her $\lambda_0 \in (0{,}1)$ için $(T_\lambda)_{\lambda \in (0,1)}$ ailesinin limit durumları aşağıdaki gibidir:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} T_\lambda = T_{\lambda_0}$$

$$\lim_{\lambda \searrow 0} T_\lambda = T$$

$$\lim_{\lambda \nearrow 1} T_\lambda = T_D$$

Örnek 2.6. $T: [0{,}1]^2 \to [0{,}1]$

$$T(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \leq 1/2 \text{ ve } x, y \neq 1, \\ xy, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. Teorem 2.6 (i) den T fonksiyonu $[0{,}1]$ üzerinde bir t-normdur. $T_P(x, y) = xy$ t-normu bölünebilir olduğu için Teorem 2.6 (ii) kullanılarak, $([0{,}1], \preccurlyeq_T)$ nin tam kafes olduğu elde edilir.

Önerme 2.9. T, $[0{,}1]$ üzerinde bir t-norm olsun ve t-normların $(T_\lambda)_{\lambda \in (0,1)}$ ailesi Teorem 2.6 daki gibi alınsın. Yani,

$$T_\lambda(x, y) = \begin{cases} 0, & T(x, y) \leq \lambda \text{ ve } x, y \neq 1, \\ T(x, y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olsun. Bu takdirde $\preccurlyeq_{T_\lambda} \subsetneq \preccurlyeq_T$ dir.

İspat : $(c, d) \in \preccurlyeq_{T_\lambda}$ keyfi olsun. Buradan $c \preccurlyeq_{T_\lambda} d$ olduğu elde edilir. Bu durumda $\preccurlyeq_{T_\lambda}$-kısmen sıralamasının tanımına göre bir $z \in [0{,}1]$ elemanı

$$c = T_\lambda(d, z)$$

olacak şekilde mevcut olur. Burada $c = 0$ olması durumunda Lemma 1.10 dan $(0, d) \in \preccurlyeq_T$ açık olduğundan $c \neq 0$ dır. T_λ t-normunun tanımına göre

$$c = T_\lambda(d, z) = T(d, z)$$

eşitliğinden $c \preccurlyeq_T d$ olduğu elde edilir. Yani,

$$(c, d) \in \preccurlyeq_T$$

dir. Dolayısıyla $\preccurlyeq_{T_\lambda} \subseteq \preccurlyeq_T$ olduğu gösterilmiş olur. Şimdi ise $\preccurlyeq_{T_\lambda} \subsetneq \preccurlyeq_T$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için

$x, y \neq 0,1$ olmak üzere $x < y$ ve $x \leq \lambda$ olacak şekilde $(x, y) \in \preccurlyeq_T$ alınsın. Bu durumda $(x, y) \notin \preccurlyeq_{T_\lambda}$ olduğu gösterilecektir. Aksini varsayarak $(x, y) \in \preccurlyeq_{T_\lambda}$ olduğu kabul edilirse, bir $\ell \in [0,1]$ elemanı

$$x = T_\lambda(y, \ell)$$

olacak şekilde mevcut olur. $x \neq 0$ olduğundan T_λ t-normunun tanımına göre

$$x = T_\lambda(y, \ell) = T(y, \ell)$$

olduğu elde edilir. Burada eğer $\ell = 1$ alınırsa $x = y$ çelişkisi elde edileceğinden $\ell \neq 1$ dir. $y \neq 1$ ve $\ell \neq 1$ olduğundan T_λ t-normunun tanımına göre

$$\lambda < x = T_\lambda(y, \ell) = T(y, \ell) \leq \lambda$$

çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $(x, y) \notin \preccurlyeq_{T_\lambda}$ dır. Böylece $\preccurlyeq_{T_\lambda} \subsetneq \preccurlyeq_T$ olduğu gösterilmiş olur.

Uyarı 2.7.

(i) Önerme 2.9 ile $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir t-norm yardımıyla, sırası daha zayıf olan T_λ t-normu inşa edildi.

(ii) Teorem 2.6 (i) den T t-normu bölünebilir olmasa bile, T_λ nın her zaman bir t-norm olduğu açıktır. Fakat T t-normu bölünebilir değilse $\left([0,1], \preccurlyeq_{T_\lambda}\right)$ nin kafes olması gerekmediği aşağıdaki örnek ile gösterilecektir.

Örnek 2.7. $T^{nM}: [0,1]^2 \to [0,1]$ t-normu ve $T: [0,1]^2 \to [0,1]$

$$T(x, y) = \begin{cases} 0, & T^{nM}(x, y) \leq 1/5 \text{ ve } x, y \neq 1, \\ T^{nM}(x, y), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu durumda Teorem 2.6 (i) den T bir t-normdur. T^{nM} t-normu bölünebilir olmadığından $([0,1], \preccurlyeq_T)$ kafes değildir.

Şimdi $([0,1], \preccurlyeq_T)$ nin kafes olmadığı gösterilecektir.

$k \in \overline{\{1/4, 1/3\}}_T$ keyfi alınsın. O halde

$$1/4 \preccurlyeq_T k \text{ ve } 1/3 \preccurlyeq_T k$$

dır. Böylece $\ell_1, \ell_2 \in [0,1]$ elemanları

$$1/4 = T(k, \ell_1) \text{ ve } 1/3 = T(k, \ell_2)$$

olacak şekilde mevcuttur. T t-normunun tanımına göre

$$1/4 = T^{nM}(k, \ell_1) \text{ ve } 1/3 = T^{nM}(k, \ell_2)$$

olduğu elde edilir. T^{nM} t-normunun tanımı kullanılarak

$$1/4 = min(k, \ell_1) \text{ ve } 1/3 = min(k, \ell_2)\ ,\ k + \ell_1 > 1 \text{ ve } k + \ell_2 > 1$$

olduğu elde edilir. Buradan $k = 1/4$ veya $\ell_1 = 1/4$ olabilir. $k = 1/4$ olması durumunda $1/3 \leq 1/4$ çelişkisi elde edileceğinden $k \neq 1/4$ dür. Bu nedenle $\ell_1 = 1/4$ olmak zorundadır. Bu durumda $k + \ell_1 = k + 1/4 > 1$ den

$$k > 3/4$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla $k \in (3/4, 1]$ dir.

Böylece $\overline{\{1/4, 1/3\}}_T \subseteq (3/4, 1]$ olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi ise $(3/4, 1] \subseteq \overline{\{1/4, 1/3\}}_T$ olduğu gösterilecektir.

$x \in (3/4, 1]$ olsun. Bu durumda T t-normunun tanımı kullanılarak

$$1/4 = min(x, 1/4) = T^{nM}(x, 1/4) = T(x, 1/4)$$

ve

$$1/3 = min(x, 1/3) = T^{nM}(x, 1/3) = T(x, 1/3)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $1/4 \preccurlyeq_T x$ ve $1/3 \preccurlyeq_T x$ dir. Dolayısıyla

$$x \in \overline{\{1/4, 1/3\}}_T$$

dir. Böylece $(3/4, 1] \subseteq \overline{\{1/4, 1/3\}}_T$ olduğu gösterilmiş olur. Her iki kapsamadan $\overline{\{1/4, 1/3\}}_T = (3/4, 1]$ eşitliği elde edilir. Buradan $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre $(3/4, 1]$ kümesinin en küçük elemanı mevcut olmadığından $([0,1], \preccurlyeq_T)$ kafes değildir.

3. İRDELEME

Bu tezin amacı sınırlı bir L kafesi üzerinde tanımlanan $\preccurlyeq_T$ ile gösterilen t-kısmen sıralamanın özelliklerini araştırmak, $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir T t-normu için keyfi fakat sabit bir $c \in [0,1]$ elemanı ile $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanamayan elemanların kümesini tanımlamak, bu küme üzerinde incelemeler yapmak ve $([0,1], \preccurlyeq_T)$ kafes olacak şekilde T t-normu inşa edebilmektir.

Bu amaçla öncelikle, (1.13) te sınırlı bir L kafesi üzerinde tanımlanan $\sim$ bağıntısı için $L = [0,1]$ alınırsa, ${}^{[0,1]}/_{\sim}$ kümesinin sayılamaz sonsuz kardinaliteye sahip olduğu gösterilmiştir. Daha sonra t-kısmen sıralamanın yardımıyla sınırlı bir L kafesi için sıra-güçlülük ve sıra-zayıflık kavramları tanımlanmıştır. Kesicioğlu, Karaçal ve Mesiar [38] deki çalışmalarında (1.13) te verilen $\sim$ bağıntısına göre $[0,1]$ üzerindeki en zayıf t-norm olan T_D t-normunun denklik sınıfının sadece T_D t-normundan oluştuğunu göstermişlerdir. Bu tezde $[0,1]$ üzerindeki t-normların ailesi üzerinde bir β bağıntısı tanımlanmış ve bu bağıntıya göre T_D t-normunun denklik sınıfının T_D den farklı bir t-norm içerdiği gösterilmiştir. Ayrıca $[0,1]$ üzerindeki sürekli iki t-normun bu bağıntıya göre denk olduğu da elde edilmiştir. Daha sonra $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir T t-normu için keyfi fakat sabit bir $c \in [0,1]$ elemanı ile t-sıralamaya göre kıyaslanamayan elemanların kümesi tanımlanmış ve bu küme yardımıyla $[0,1]$ üzerindeki herhangi iki t-normun (1.13) te verilen $\sim$ bağıntısına göre denk olabilmesi için bir gerek ve yeter şart verilmiş ancak bu gerek ve yeter şartın (2.1) de verilen β bağıntısı için doğru olmadığı bir örnekle gösterilmiştir. Karaçal ve Kesicioğlu [35] teki çalışmalarında bir sınırlı L kafesi üzerindeki T_W t-normu için $(L, \preccurlyeq_{T_W})$ nın kafes olduğunu göstermişlerdir. Buradan yola çıkarak tezde $L = [0,1]$ için $([0,1], \preccurlyeq_T)$ kafes olacak şekilde T_W dan farklı bir t-norm inşa edilebilir mi sorusu üzerine düşünülmüş ve $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir T t-norm yardımıyla bir $(T_\lambda)_{\lambda \in (0,1)}$ ailesi inşa edilmiş ve T bölünebilir bir t-norm ise $([0,1], \preccurlyeq_{T_\lambda})$ nın tam kafes olduğu gösterilmiştir.

4. SONUÇLAR

Yaptığımız çalışmada elde edilen bazı temel sonuçlar şunlardır:

1. (1.13) te sınırlı bir L kafesi üzerinde tanımlanan $\sim$ bağıntısı için $L = [0,1]$ alınırsa $[0,1]/_{\sim}$ nın sayılamaz sonsuz bir küme olduğu gösterilmiştir.

2. Sınırlı bir L kafesi üzerindeki t-normlar için sıra-güçlülük ve sıra-zayıflık kavramları tanımlanmış ve T_W t-normunun sırası en zayıf olan bir t-norm, $T_\wedge$ t-normunun ise sırası en güçlü olan bir t-norm olduğu gösterilmiştir.

3. (2.1) de $[0,1]$ üzerinde bir β bağıntısı tanımlanmış ve bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğu gösterilmiştir. Bu bağıntıya göre T_D t-normunun denklik sınıfının T_D den farklı bir t-norm içerdiği ve T_M t-normunun denklik sınıfının $[0,1]$ üzerindeki sürekli t-normların kümesi olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $[0,1]$ üzerindeki iki sol sürekli t-normun (2.1) de verilen β bağıntısına göre denk olması gerekmediği bir örnekle gösterilmiştir.

4. $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir T t-norm için keyfi fakat sabit bir $c \in [0,1]$ ile $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanamayan tüm elemanların kümesi tanımlanmış ve bazı özel t-norm örnekleri için bu küme belirlenmiştir.

5. $[0,1]$ üzerindeki herhangi iki t-normun (1.13) te verilen $\sim$ bağıntısına göre denk olabilmesi için bir gerek ve yeter şart verilmiştir. Bu gerek ve yeter şartın (2.1) de verilen β bağıntısı için doğru olması gerekmediği bir örnekle gösterilmiştir.

6. T, $[0,1]$ üzerinde sağ sürekli bir t-norm olmak üzere $c \in [0,1]$ için $sup\left(\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}\right) \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$ olduğu gösterilmiştir. Bunun sonuçları olarak $\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}$ kümesinin en büyük elemanının mevcut olmadığı ve bu kümenin boş ya da sonsuz bir küme olduğu elde edilmiştir.

7. T, $[0,1]$ üzerinde sol sürekli bir t-norm olmak üzere $c \in [0,1]$ için $inf\left(\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}\right) \notin \mathcal{I}_T{}^{(c)}$olduğu gösterilmiştir. Bunun sonuçları olarak $\mathcal{I}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}$ kümesinin en küçük elemanının mevcut olmadığı ve bu kümenin boş ya da sonsuz bir küme olduğu elde edilmiştir.

8. Karaçal ve Kesicioğlu' nun [35] teki çalışmasında ifade ettikleri bir açık probleme cevap verebilmek için $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir T t-norm yardımıyla t-normların bir $(T_\lambda)_{\lambda\in(0,1)}$ ailesi inşa edilmiş ve T bölünebilir bir t-norm ise $\left([0,1],\preccurlyeq_{T_\lambda}\right)$ nın tam kafes olduğu ispatlanmıştır.

5. ÖNERİLER

1. Tanım 2.2 de $[0,1]$ üzerindeki t-normların ailesi üzerinde bir β bağıntısı tanımlanmış ve bu bağıntının özellikleri incelenmiştir. Benzer şekilde β bağıntısı bir L sınırlı kafesi üzerinde de tanımlanarak özellikleri araştırılabilir.

2. Önerme 2.6 da $[0,1]$ üzerindeki herhangi iki t-normun (1.13) te verilen $\sim$ bağıntısına göre denk olabilmesi için bir gerek ve yeter şart verilmiştir. Bu iki t-normun $\sim$ bağıntısına göre denk olabilmesi için başka gerek ve yeter şartlar araştırılabilir.

3. Sonuç 2.1 ve Sonuç 2.2 ile T, $[0,1]$ üzerinde sağ sürekli bir t-norm ise $c \in [0,1]$ için $\mathcal{J}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}$ kümesinin en büyük elemanının mevcut olmadığı ve bu kümenin boş ya da sonsuz bir küme olduğu elde edilmiştir. Yine T, $[0,1]$ üzerinde sağ sürekli bir t-norm iken $c \in [0,1]$ için $\mathcal{J}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid c < x\}$ kümesi üzerinde araştırmalar yapılabilir. Örneğin; bu küme boştan farklı ise sonsuz bir küme midir? Bu kümenin boştan farklı olması durumunda bu kümeyi sonlu yapan $c \in (0,1)$ elemanı mevcut mudur?

4. Sonuç 2.3 ve Sonuç 2.4 ile T, $[0,1]$ üzerinde sol sürekli bir t-norm ise $c \in [0,1]$ için $\mathcal{J}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}$ kümesinin en küçük elemanının mevcut olmadığı ve bu kümenin boş ya da sonsuz bir küme olduğu elde edilmiştir. Yine T, $[0,1]$ üzerinde sol sürekli bir t-norm iken $c \in [0,1]$ için $\mathcal{J}_T{}^{(c)} \cap \{x \in (0,1) \mid x < c\}$ kümesi üzerinde araştırmalar yapılabilir. Örneğin; bu küme boştan farklı ise sonsuz bir küme midir? Bu kümenin boştan farklı olması durumunda bu kümeyi sonlu yapan $c \in (0,1)$ elemanı mevcut mudur?

5. Teorem 2.6 da $[0,1]$ üzerindeki herhangi bir T t-norm yardımıyla t-normların bir $(T_\lambda)_{\lambda \in (0,1)}$ ailesi inşa edilmiş ve T bölünebilir bir t-norm ise $\left([0,1], \preccurlyeq_{T_\lambda}\right)$ nın tam kafes olduğu gösterilmiştir. $(L, \preccurlyeq_T)$ nı kafes yapacak şekilde farklı t-normlar inşa edilip edilemeyeceği araştırılabilir.

6. Önerme 2.5 te $[0,1]$ üzerindeki herhangi iki sürekli t-normun (2.1) de verilen β bağıntısına göre denk olduğu gösterilmiş fakat iki sol sürekli t-normun bu bağıntıya göre denk olması gerekmediğine dair örnek verilmiştir. Aynı şekilde iki sağ sürekli t-normun da β bağıntısına göre denk olması gerekmediğine dair örnekler verilebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Abel N., Untersuchungen der Funktionen Zweier Unabhängigen Veränderlichen Größen x und y Wie $f(x, y)$, Welche die Eigenschaft Haben, daß $f(z, f(x, y))$ Eine Symmetrische Funktion Von x, y und z ist, J. Reine Angew. Math., 1 (1826) 11 – 15.

2. Aczél J., Lectures on Functional Equations and Their Applications, Academic Press, New York, 1966.

3. Aczél J., Sur Les Opérations Definies Pour Des Nombres Réels, Bull. Soc. Math. France, 76 (1949) 59 – 64.

4. Aczél J., Vorlesungen Über Funktionalgleichhungen und Ihre Anwendungen, Birkhäuser, Basel, 1961.

5. Alsina C., Trillas E. and Valverde L., On non-distibutive logical connectives for fuzzy sets theory, BUSEFAL 3 (1980) 18-29.

6. Birkhoff G., Lattice Theory, 3 rd edition, Providence, Rhode Island, 1967.

7. Brouwer L. E. J., Die Theorie der Endlichen Kontinuierlichen Gruppen Unabhängig Von Den Axiomen Von Lie, Mah. Ann., 67 (1909) 246 – 267.

8. Cartan E., La theorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs, Mem. Sci. Math., 42 (1930) 1165-1226.

9. Casasnovas J. ve Mayor G., Discrete t-norms and operations on extended multisets, Fuzzy Sets and Systems, 159 (2008) 1165-1177.

10. Clifford A. H., Naturally totally ordered commutative semigroups, Amer. J. Math., 76 (1954) 631-646.

11. Climescu A.C., Sur l'equation fonctionelle de l'associativite, Bull. Ecole Polytechn. Iassy, 1 (1946) 1-16.

12. De Baets B. ve Mesiar R., Triangular norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 61-75.

13. De Baets B. ve Mesiar R., Triangular norms on the real unit square, Proceedings of the 1999 EUSFLAT-EST YLF Joint Conference, 1999, Palma de Mallorca, Spain, 351-354.

14. Faucett W. M., Compact Semigroups Irreducibly Connected Between Two Idempotents, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955) 741 – 747.

15. Frank M. J., On the Simultaneous Associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$, Aequations Math., 19 (1979) 194 – 226.

16. Gottwald S., Untersuchungen zur mehrwertigen Mengenlehre.I, Math. Nachr., 72 (1976) 297-303.

17. Gottwald S., Untersuchungen zur mehrwertigen Mengenlehre.II, Math. Nachr., 74 (1976) 329-336.

18. Gottwald S., Untersuchungen zur mehrwertigen Mengenlehre.III, Math. Nachr., 79 (1977) 207-217.

19. Gottwald S., A Treatise on Many-valued Logic, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

20. Grabish M., Marichal J., Mesiar R. ve Pap E., Aggregation Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

21. Gratzer G., General Lattice Theory, Academic Press, New York, San Francisco, 1978.

22. Hájek P., Metamathematics of Fuzzy Logic, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

23. Hosszù M., Some functional equations related with the associativity law, Publ. Math. Debrecen, 3 (1954) 205 – 214.

24. Höhle U., Commutative, residuated ℓ-monoids, in: U. Höhle, E.P. Klement (Eds.), Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets: A Handbook on the Math. Foundations of Fuzzy Set Theory, Kluwer, Dordrecht, 1995.

25. Jenei S. ve De Baets B., On the direct decomposability of t-norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 139 (2003) 699-707.

26. Jenei S. ve Montagna F., A general method for constructing left continuous t-norms, Fuzzy Sets and Systems, 136 (2003) 263-282.

27. Khadjiev D. ve Karaçal F., The Description of all $\vee$- distributive triangular norms of lenghts 2 and 3, Fuzzy Days, 2001, Dortmund, Germany, 829-833.

28. Karaçal F., On the direct decomposability of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms on product lattices, Advances in Soft Computing 2, 2005, Dortmund, Germany, 357-367.

29. Karaçal F., An answer to an open problem on triangular norms, Fuzzy Sets and Systems, 155 (2005) 459-463.

30. Karaçal F. ve Khadjiev Dj., ⋁-Distributive and infinitely ⋁-distributive t-norms on complete lattice, Fuzzy Sets and Systems, 151 (2005) 341-352.

31. Karaçal F., A note on pseudo Archimedean and non-cancellative t-norm, EUSFLAT Conf., 2005, Barcelona, Spain, 856-859.

32. Karaçal F., On the direct decomposability of strong negations and S-implication operators on product lattices, Information Sciences, 176 (2006) 3011-3025.

33. Karaçal F. ve Sağıroğlu Y., Infinitely ⋁-distributive t-norms on complete lattices and pseudo-complements, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 32-43.

34. Karaçal F. ve Kesicioğlu M. N.,T-Actions on Bounded Lattices, Lattice-Valued Logic and its Applications, 31 st Linz Seminar on Fuzzy Set Theory, 2010, Linz, Austria, 102-104.

35. Karaçal F. ve Kesicioğlu M. N., A T- partial order obtained from t-norms, Kybernetika, 47 (2011) 300-314.

36. Karaçal F. ve Aşıcı E., Some notes on T- partial order, Journal of Inequalities and Applications, 2013:219.

37. Kesicioğlu M. N., T-Normlardan Elde Edilen T-Kısmen Sıra, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2012.

38. Kesicioğlu M. N., Karaçal F. ve Mesiar R., T- partial order and the equivalence classes of triangular norms, Fuzzy Sets and Systems, Submitted.

39. Klein-Barmen F., Über gewisse Halbverbande und kommutative Semigruppen II, Math. Z, 48 (1942-1943) 715-734.

40. Klement E.P., Mesiar R. ve Pap E., Triangular norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

41. Klement E.P., Mesiar R. ve Pap E., Problems on triangular norms and related operators, Fuzzy Sets and Systems, 145 (2004) 471-479.

42. Liang X. ve Pedrycz W., Logic-based fuzzy networks: A study in system modeling with triangular norms and uninorms, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 3475-3502.

43. Ling C., Representation of associative functions, Publ. Math. Debrecen, 12 (1965) 189-212.

44. Ma Z. ve Wu W.-M., Logical operators on complete lattices, Inform. Sci., 55 (1991) 77-97.

45. Maes K.C. ve Mesiarova-Zemankova A., Cancellativity properties for t-norms and t-subnorms, Information Sciences, 179 (2009) 1221-1233.

46. Menger K., Statistical metrics, Proc. Nat. Acad. Sci., 8 (1942) 535-537.

47. Mesiarova A., H-transformation of t-norms, Information Sciences, 176 (2006) 1531-1545.

48. Mitsch H., A natural partial order for semigroups, Proceedings of the American Mathematical Society, 97 (1986) 384-388.

49. Paalman-de Miranda A. B., Topological Semigroups, Matematisch Centrum, Amsterdam, 1964.

50. Saminger-Platz S., Klement E.P. ve Mesiar R., On extensions of triangular norms on bounded lattices, Indagations Mathematicae, 19 (2009) 135-150.

51. Schweizer B. ve Sklar A., Espaces Metriques Aleatories, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 247 (1958) 2092 – 2094.

52. Schweizer B. ve Sklar A., Statistical Metric Spaces, Pasific J. Math., 10 (1960) 313 – 334.

53. Schweizer B. ve Sklar A., Associative fuctions and statistical triangle inequalities, Publ. Math. Debrecen, 8 (1961) 169 – 186.

54. Schweizer B. ve Sklar A., Associative fuctions and abstract semigroups, Publ. Math. Debrecen, 10 (1963) 69-81.

55. Schweizer B. ve Sklar A., Probabilistic Metric Spaces, North-Holland, New York, 1983.

56. Serstnev A. N., Random normed spaces: problems of completeness, Kazan. Gos. Univ. Ucen. Zap., 122 (1962) 3-20.

57. Wang Z. ve Yu Y., Pseudo t-norms and implication operators on a complete Brouwerian lattice, Fuzzy Sets and Systems, 132 (2002) 113-124.

58. Wang Z., T-filters of integral residuated ℓ- monoids, Information Sciences, 177 (2007) 887-896.

59. Yıldız C., Genel Topoloji, Kalkan Matbaacılık, Ankara, 2002.

60. Zadeh L. A., Fuzzy sets, Inform. Control, 8 (1965) 338-353.

61. Zhang D., Triangular norms on partially ordered sets, Fuzzy Sets and Systems, 153 (2005) 195-209.

ÖZGEÇMİŞ

Emel AŞICI 1983 tarihinde Ankara' da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara' da tamamladı. 2001 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2005 yılında Matematik Bölümünden üçüncülükle mezun oldu. Yine aynı yıl Gazi Üniversitesi Orta Öğretim Alan Öğretmenliği-Tezsiz Yüksek Lisans Matematik Öğretmenliği (pedagojik formasyon) programına kaydoldu. 2007 yılında bu programdan mezun oldu. 2009 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden Yüksek Lisans derecesini aldı ve aynı enstitüde Doktora eğitimine başladı.

2006 yılının Aralık ayında Gümrük ve Ticaret Bakanlığı' nda Gümrük Muhafaza Memuru olarak göreve başladı. Halen aynı kurumda görevine devam etmektedir. İyi derecede İngilizce bilmektedir.

Başlıca Eserler

1. Karaçal F., Aşıcı E., Some notes on T- partial order, Journal of Inequalities and Applications, 2013:219.
2. Aşıcı E., Karaçal F., On the T-partial Order and Properties, Information Sciences, 2013 (Submitted).