KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

CEBİRSEL YAPILARDA *(I,T)-L*-BULANIK KABA KÜMELER

DOKTORA TEZİ

Canan EKİZ

TEMMUZ 2013
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

CEBİRSEL YAPILARDA *(I,T)-L*-BULANIK KABA KÜMELER

Matematikçi Canan EKİZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 04.06.2013
Tezin Savunma Tarihi : 05.07.2013

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Sultan YAMAK

Trabzon 2013

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Canan EKİZ tarafından hazırlanan

CEBİRSEL YAPILARDA *(I,T)-L*-BULANIK KABA KÜMELER

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 11/06/2013 gün ve 1509 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. Ali PANCAR**	....
Üye	**: Prof. Dr. Ekrem YANMAZ**	....
Üye	**: Prof. Dr. İhsan ÜNVER**	....
Üye	**: Doç. Dr. Sultan YAMAK**	....
Üye	**: Doç. Dr. Osman KAZANCI**	....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Çalışmalarım süresince karşılaştığım her türlü sorunda yardımlarını esirgemeyen, bana her konuda sabırla yol gösteren ve bilimsel çalışma hayatımı emekleri üzerine kuracağım değerli hocam Doç. Dr. Sultan YAMAK'a ve tezin şekillenmesinde emeği geçen sayın hocalarım Doç. Dr. Osman KAZANCI ve Prof. Dr. Ekrem YANMAZ'a çok teşekkür ederim.

En başından beri başarıma inanan, beni daima yüreklendirip her konuda destekleyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. İmdat İŞCAN'a; her sorunumla içtenlikle ve nezaketle ilgilenmiş olan değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Kerim BEKARve Yrd. Doç. Dr. Selim NUMAN'a çok teşekkür ederim.

Ayrıca çalışanı olduğum Giresun Üniversitesi'nin tüm değerli üyelerine ve sevgiyle öğrettikleri, hep evimde hissettirdikleri için K.T.Ü Matematik bölümündeki tüm hocalarıma saygılar sunar, çok teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan canım aileme; yanlarındayken kendimi daima güvende hissettiğim ve beraber çalıştığım canım arkadaşlarım Dilek BAYRAK ve Şerife YILMAZ'a; sevgili arkadaşım Yıldıray ÇELİK'e; en zor dönemlerimde desteklerini esirgemeyen canım arkadaşlarım Rukiye MERT, Ayşe KABATAŞ ve Elif BAŞKAYA'ya; canım dostlarım Fatma ÇOBAN, Müge AKPINAR ve Öznur ÖLMEZ'e; canım ablam Demet ÇAKIR'a ve hayatım boyunca daima yanımda bulduğum canım kuzenim İnci KAYA'ya çok teşekkür ederim.

Canan EKİZ
Trabzon, 2013

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Cebirsel Yapılarda (I,T)-L-Bulanık Kaba Kümeler" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Sultan YAMAK'ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 05/07/2013

Canan EKİZ

İÇİNDEKİLER

Doktora Tezi

ÖZET

CEBİRSEL YAPILARDA (I,T)-L-BULANIK KABA KÜMELER

Canan EKİZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Sultan YAMAK
2013, 72 Sayfa

Bu tezde; bağıntısal homomorfiler, kongrüans bağıntılarının ve TL-bulanık bağıntısal homomorfiler de TL-kongrüans bağıntılarının genelleştirilmesi olarak ele alınmış ve grup, halka, modül cebirsel yapıları üzerinde (TL-bulanık) bağıntısal homomorfiler yardımıyla ((I,T)-L-bulanık) kaba kümeler inşa edilmiştir.

Birinci bölümde, tezin anlaşılabilmesi için gerekli ön bilgilerin yanı sıra genelleştirilmiş (I,T)-L-bulanık kaba kümeler üzerindeki özelliklere yer verilmiştir. Tezin ikinci bölümü ise dört kısımdan oluşmuştur. İlk kısımda bağıntısal homomorfiler ile küme değerli homomorfilerin ilişkisi incelenmiştir. Küme değerli homomorfiler, bağıntısal homomorfilerle karakterize edilmiştir. İkinci kısımda TL-bulanık bağıntısal grup, halka ve modül homomorfisi kavramlarının özellikleri tanıtılmıştır. Üçüncü kısımda; TL-bulanık bağıntısal homomorfilere göre T-üst ve I-alt L-bulanık kaba yaklaşımların özellikleri incelenmiştir. Son kısımda ise genelleştirilmiş kaba alt ve I-alt L-bulanık yaklaşımlarla oluşturulan kafeslerin özelliklerine değinilmiştir.

Anahtar Kelimeler: TL-Bulanık Alt Cebirsel Yapılar (Gruplar, Halkalar, Modüller), Bağıntısal Homomorfiler, TL-bulanık Bağıntısal Homomorfiler, Genelleştirilmiş (I,T)-L-Bulanık Kaba Kümeler.

PhD. Thesis

SUMMARY

(I, T)-L-FUZZY ROUGH SETS ON SOME ALGEBRAIC STRUCTURES

Canan EKİZ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sultan YAMAK
2013, 72 Pages

In this thesis, relational morphisms and TL-fuzzy relational morphisms are handled as a generalization of congruence and T-congruence L-fuzzy relations, respectively, and ((I, T)-L-fuzzy) rough sets are constructed by using them.

In the first section of the thesis is included some of the new properties of generalized (I, T)-L-fuzzy rough sets as well as some preliminary information. The second section of the thesis consists of four parts. In the first part of the second section, the relationship between the relational morphisms and set-valued homomorphisms is researched, and set-valued homomorphisms are characterized by the relational morphisms. In the second part, some characteristics of TL-fuzzy relational morphisms of groups, rings and modules are investigated. In the third part, some features of T-upper and I-lower L-fuzzy rough approximations are examined. In the last part, some properties of the lattices of lower and I-lower L-fuzzy rough approximations are mentioned.

Key Words: TL-Fuzzy Subgroup (Subring, Submodule), Relational Morphisms, TL-Fuzzy Relational Morphisms, Generalized (I, T)-L-Fuzzy Rough Sets.

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\wp(X)$	: X in güç kümesi
$(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$	: En büyük elemanı 1, en küçük elemanı 0 olan bir tam kafes
T	: L üzerinde tanımlı t-norm
S	: L üzerinde tanımlı t-conorm
I	: L üzerinde tanımlı gerektirme
$\mathcal{N}$	: L üzerinde tanımlı negatör
$F(X)$	: X in bulanık güç kümesi
$F(X, L)$	: X in L-bulanık güç kümesi
μ_α	: μ nün seviye alt kümesi
D_T	: T t-normuna göre L nin idempotent elemanlarının kümesi
(X, Y, φ)	: Genelleştirilmiş yaklaşım uzayı
$F_\varphi(x)$	: $x \in X$ in φ bağıntısına göre ardıl komşuluğu
$\overline{\varphi}(A)$	: A kümesinin üst kaba yaklaşımı
$\underline{\varphi}(A)$	: A kümesinin alt kaba yaklaşımı
(X, Y, θ)	: Genelleştirilmiş L-bulanık yaklaşım uzayı
$\overline{\theta}^T(\mu)$	: μ nün T-üst L-bulanık kaba yaklaşımı
$\underline{\theta}_I(\mu)$	: μ nün I-alt L-bulanık kaba yaklaşımı
$\mathrm{Hom}(X \times Y, T, L)$	: X ten Y ye tüm TL-bulanık bağıntısal homomorfilerin kümesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Klasik küme teorisinde kümeler, elemanlarıyla tek şekilde tanımlıdır. Diğer bir ifadeyle her eleman, kümeye ait olup olmama durumuna göre tek şekilde sınıflandırılır ve evrensel kümenin tüm elemanları, kümeye ait olanlar ve olmayanlar şeklinde ikiye ayrılırlar. Bu çeşit kavramlar çoğunlukla 'kesin' olarak adlandırılır. Hâlbuki yaşadığımız evrenin tüm elemanlarında, doğasında belirsizlik içeren unsurlara rastlamak mümkündür. Matematik, en güvenilir açıklama aracı olduğundan bulguların matematiksel olarak ispatlanması çok önemlidir. Bu nedenle belirsizlikleri içeren bilgilerin, matematiksel olarak işlenebilmesi için çeşitli teorik matematiksel yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bulanık ve kaba küme teorileri bu yaklaşımlara örneklerdir. Günümüzde bu teorilerin, birçok alanda uygulamaları mevcuttur.

Bulanık küme teorisi, Azeri matematikçi Lotfi Zadeh tarafından 1965 yılında ortaya atılmıştır [43]. Bu tarih, bazı belirsizliklerin modern anlamda matematiksel olarak modellenmesinde önemli bir dönüm noktası olmuştur. Klasik küme teorisine göre yaşadığımız dünyanın tüm nesnelerini, siyah-beyaz, iyi-kötü, soğuk-sıcak veya güzel-çirkin şeklinde sadece iki sınıfa bölmemiz gerekir. Gerçek dünyada ise bu zıtlıkların arasında kalan sonsuz çoklukta derecelendirmeler mevcuttur. Bulanık kümeler teorisi, bu türden belirsizlikleri, bulanık değişkenleri derecelendirme yoluyla modellemeye çalışır. Üyelik fonksiyonu denilen bir fonksiyon yardımıyla evrensel kümenin her elemanına, aynı özellik yönünden ve özelliği taşıma yoğunluğuna bağlı olarak [0,1] birim aralığından bir değer (üyelik derecesi) atanır. Böylece bir elemanın, bulanık bir önermeden doğan bulanık kümesi belirlenerek klasik anlamda küme oluşturmayan nesne toplulukları hakkında mantıksal yargılara ulaşmak mümkün olur. Bulanık küme teorisi, 1967 yılında Goguen [10] tarafından [0,1] birim aralığından kafeslere genişletilmiştir.

Kaba küme teorisi, 1982'de Polonyalı bilgisayar bilimci Zdzislaw Pawlak tarafından belirsizlik kavramına yeni bir matematiksel yaklaşım olarak ileri sürülmüştür [23]. Bilişim sistemlerinde eksik kalmış bilgilerin modellemesi ve işlenmesi için resmi bir araç niteliğindedir. Kaba küme teorisi, evrenin her nesnesi ile bazı bilgilerin ilişkilendirilebileceği varsayımına dayanır. Örneğin, eğer nesneler belli bir hastalıktan şikâyetçi olan hastalar ise hastalığın belirtileri, hastalar hakkındaki bilgileri oluşturur. Aynı belirtileri gösteren hastalar, ayırt edilemezdir (veya benzerdir). Belirsiz kavramlar, kesin kavramların aksine elemanlar hakkındaki bilgiler yardımıyla nitelendirilemezler. Kaba küme yaklaşımında belirsiz kavramlar, alt ve üst yaklaşımlar olarak adlandırılan kesin kavramlar çifti ile ifade edilir. Alt yaklaşım kesin olarak kavrama ait olan tüm nesnelerden oluşur. Üst yaklaşım ise kavrama ait olması muhtemel olan tüm nesneleri içerir. Alt ve üst yaklaşımlar arasındaki fark, belirsizlik kavramının sınır bölgesini oluşturur. Yaklaşımlar kaba küme teorisindeki iki temel işlemdir. Bu teori belirsizlikleri üyelik yoluyla değil, bir kümenin sınır bölgesini oluşturarak ifade eder. Kümenin sınır bölgesi boş küme ise bu, o kümenin klasik (kesin) bir küme olduğu anlamına gelir, diğer durumda ise küme kabadır. Sınır bölgesinin boş olmayan bir küme olması, elemanlar hakkındaki mevcut bilgilerin kümeyi tam ve kesin olarak tanımlamaya yetmediği anlamına gelir. Bu teori küme teorisine bir alternatif değildir, küme teorisinin içindedir.

Pawlak, kümeler üzerinde yaklaşıklık işlemlerini, kümelerin yaklaşık eşitliğini ve yaklaşık içerme durumlarını incelediği çalışmasının [23], bulanık kümeler ve tolerans teorilerine alternatif olabileceğini düşünmüş ve bu çalışmasıyla kaba küme teorisini dünyaya tanıtmıştır. 1985'te, Pawlak [24], bulanık kümeler ile kaba kümeleri karşılaştırarak farklı iki kavram oldukları sonucuna varmış ve takip eden yıllarda kaba küme teorisini ayrıntılı olarak incelediği bir kitap [25] yayımlamıştır.

Kaba küme teorisinde, yapısal ve cebirsel (aksiyomatik) metotlar olmak üzere en az iki yaklaşım vardır. Yao [39]'da kaba küme çalışmalarında yapısal ve cebirsel yaklaşımları incelemiştir. Yapısal yaklaşımda, alt ve üst yaklaşımlar primitif öğeler değildir. Bu yaklaşımlar; evrensel kümeler üzerinde tanımlı ikili işlemler, evrensel kümenin parçalanışları, komşuluk sistemleri, kısmi sıralı kümeler, kafesler ve Boolean cebirleri gibi diğer kavramlar yardımıyla oluşturulur. Yapısal yaklaşıma bağlı genelleştirilmiş çalışmalarla birlikte kaba küme teorisi, bulanık küme teorisi gibi diğer belirsizlik teorileri ile kıyaslanabilir. Alt ve üst yaklaşımların primitif öğeler olduğu cebirsel yaklaşımda ise, bir çift dual yaklaşım operatörü tanımlanır ve bu operatörlerin sağlaması gereken aksiyomlar belirlenir. Böylece yapısal yaklaşım, kaba kümelerin pratik uygulamaları için uygunken cebirsel yaklaşım daha çok kaba küme cebirlerinin çalışılması için uygundur.

Kaba küme teorisi, ortaya atıldığı yıllardan itibaren birçok konuda bulanık küme teorisi ile ilişkilendirilerek düşünülmeye başlanmıştır. 1990 yılında, Dubois ve Prade [6], bulanık ve kaba küme teorilerinin belirsizlikleri gidermede farklı amaçları olduğu fikrinden yola çıkarak onları, aynı problemler üzerinde kıyaslamaktansa birleştirmenin daha doğal olduğunu fark etmişlerdir. Bir benzerlik bağıntısı yardımıyla bulanık kaba yaklaşım operatörlerini tanımlayarak kaba küme ile bulanık küme kavramlarını birleştirmişlerdir. 1997'de Yao [38], denklik bağıntıları ve kümenin üyelik fonksiyonları yardımıyla bir evrensel küme üzerinde bulanık kaba küme modeli sunmuştur. Radzikowska ve Kerre [28], T t-normu için üst ve I gerektirmesi için alt yaklaşım operatörü tanımlamışlar ve (I,T)-bulanık kaba kümelerin daha geniş bir ailesini tanıtmışlardır. Wu, Mi ve Zhang [35], yapısal ve aksiyomatik yaklaşımları kullanarak bulanık kaba kümeler için yeni bir bakış açısı sunmuşlardır. Wu ve Zhang [33], [35] ve [38]'in bir genişlemesi olarak bulanık veya klasik bağıntılar ile genelleştirilmiş bulanık yaklaşım operatörleri arasındaki ilişkileri incelemişlerdir. Wu, Leung ve Mi [34], [28]'de verilen tanımı genelleştirmiş ve (I,T)-bulanık kaba yaklaşım operatörlerin özelliklerini iki farklı evrensel küme üzerinde araştırmışlardır.

Araştırmacılar, denklik bağıntısı yerine kongrüans bağıntılarını kullanarak evrensel kümeler yerine cebirsel yapılar üzerinde kaba kümeler inşa etmişlerdir. Biswas ve Nanda [3], üst yaklaşıma göre kaba alt gruplar kavramını tanıtmışlardır. Kuroki ve Wang [16], gruplar üzerinde alt ve üst kaba alt gruplar ve bulanık normal alt gruplar üzerinde alt ve üst yaklaşım kavramlarını ele almışlardır. 1997 yılında Kuroki [15], yarıgruplarda kaba sol, sağ, iki-yanlı ideal ve bi-ideal kavramlarını tanıtmış ve bu ideallerin, kongrüans ve bulanık kongrüans bağıntılarına göre alt ve üst yaklaşımlarının özelliklerini incelemiştir. T t-norm ve ν, T nin R-gerektirmesi olmak üzere Li, Yin ve Lu [18] halkalar ve Li ve Yin [17] yarıgruplar üzerinde TL-kongrüans bağıntılarını kullanarak tanımladıkları T-üst ve ν-alt yaklaşım operatörlerinin özelliklerini araştırmışlardır. Davvaz [4], grup homomorfilerinin genellemesi olarak küme değerli homomorfizm kavramını tanıtmıştır. Yamak, Kazancı ve Davvaz [37], küme değerli ve güçlü küme değerli dönüşümler yardımıyla halkalar üzerinde genelleştirilmiş alt ve üst yaklaşım kavramlarını tanıtmışlardır. Ayrıca [36] 'da benzer bir çalışmayı modül yapısı üzerine taşımışlardır.

Ignjatović, Ćirić ve Bogdanović [11], aynı türden cebirsel yapılar arasında "bağıntısal homomorfi" olarak isimlendirdikleri bir bağıntı ve tam rezidual kafes üzerinde "bulanık bağıntısal homomorfi" şeklinde isimlendirdikleri bir L-bulanık bağıntı tanımlamışlardır. Uygunluk bakımından, bu tezde, "bulanık bağıntısal homomorfi" yerine "TL-bulanık bağıntısal homomorfi" ifadesi kullanılacaktır. TL-bulanık bağıntısal homomorfiler, Wu, Leung ve Mi'nin [34] çalışmasında özel olarak $[0,1]$ kafesi alınarak özellikleri tanıtılmış olan genelleştirilmiş (I, T)-bulanık kaba kümelerin cebirsel yapılar üzerinde inşasına imkân sağlamaktadır. Kongrüans bağıntıları, özel birer bağıntısal homomorfi ve TL-kongrüans bağıntıları da özel birer TL-bulanık bağıntısal homomorfi olduğundan [7]'de yarıgruplar üzerinde çalışılarak Kuroki [15] ve Li ve Yin'in [17] çalışmaları genelleştirilmiştir. Bu tezde ise grup, halka ve modül cebirsel yapıları üzerinde çalışılmıştır. Bu tez, iki ana bölümden oluşturulmuştur. Tezin birinci bölümünde, önermelerde ve teoremlerde adı geçen kavramların anlaşılabilmesi için gerekli ön bilgilerin yanı sıra genelleştirilmiş (I, T)-L-bulanık kaba kümeler üzerindeki bazı yeni özeliklere yer verilmiştir. Tezin ikinci bölümü ise dört kısımdan oluşmuştur. İlk kısımda grup, halka ve modül yapıları üzerinde bağıntısal homomorfilerin küme değerli homomorfilerle olan ilişkisi incelenmiştir. İkinci kısımda TL-bulanık bağıntısal grup, halka ve modül homomorfisi kavramlarının çeşitli özellikleri tanıtılmıştır. Üçüncü kısımda T t-norm ve I, R- veya (S, N)-gerektirme olmak üzere TL-bulanık bağıntısal grup, halka ve modül homomorfilerine göre T-üst ve I-alt bulanık kaba yaklaşımların özellikleri incelenmiştir. Son kısımda ise genelleştirilmiş alt ve I-alt bulanık kaba yaklaşımlarla oluşturulan kafeslerin özelliklerine değinilmiştir. Sonuç olarak bu tezde, [7]'de yarıgruplar üzerinde yapılmış olan çalışmalar; grup, halka ve modül cebirsel yapıları üzerine daha kapsamlı olarak taşınmıştır. TL-kongrüans bağıntıları yerine TL-bulanık bağıntısal homomorfilerin kullanılmış ve böylece aynı türden iki farklı cebirsel yapı üzerinde çalışılmış olması bakımından yapılan çalışmalar, bu konuda literatürde mevcut olan çalışmaların genelleştirilmesi niteliğindedir. Ayrıca küme değerli homomorfilerin bağıntısal homomorfilerle karakterize edilmiş olması nedeniyle bu tezde verilen bilgiler; [4], [36] ve [37] çalışmalarının L-bulanık genişlemesi olarak düşünülebilir.

1.2. Kafesler

Bu bölümde kafes teorisindeki bazı kavramlara yer verilmiştir [2].

Tanım 1.2.1: $L \neq \emptyset$ olan bir küme ve " $\leq$ " bu küme üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. L kümesine sıralı küme denir: $\Leftrightarrow$

(i) Her $a \in L$ için $a \leq a$, (yansıma özelliği)

(ii) Her $a, b \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$, (ters-simetri özelliği)

(iii) Her $a, b, c \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$, (geçişme özelliği)

Bu durum $(L, \leq)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 1.2.2: $(L, \leq)$ sıralı küme, $B \subseteq L$ ve $b_0 \in B$ olsun.

(i) Her $b \in B$ için $x \leq b$ ise $x \in L$ elemanına B kümesinin bir alt sınırı,

(ii) Her $b \in B$ için $b \leq y$ ise $y \in L$ elemanına B kümesinin bir üst sınırı,

(iii) Her $b \in B$ için $b_0 \leq b$ ise b_0 elemanına B kümesinin en küçük elemanı,

(iv) Her $b \in B$ için $b \leq b_0$ ise b_0 elemanına B kümesinin en büyük elemanı denir.

B kümesinin üst ve alt sınırlarının kümesi, sırasıyla $B_{üst}$ ve B_{alt} ile gösterilsin. $B_{üst}$ kümesinin en küçük elemanına, B kümesinin supremumu denir ve sup$B$, $\vee B$, $\bigvee_{b \in B} b$ notasyonlarından biri ile gösterilir. B_{alt} kümesinin en büyük elemanına, B kümesinin infimumu denir ve inf$B$, $\wedge B$, $\bigwedge_{b \in B} b$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

Tanım 1.2.3: $(L, \leq)$ sıralı bir küme olsun.

(i) L kümesine kafes denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b \in L$ için $\sup\{a, b\}, \inf\{a, b\} \in L$ dir. Bu durum $(L, \wedge, \vee)$ şeklinde gösterilir. Bu tezde $\sup\{a, b\}$ yerine $a \vee b$ ve $\inf\{a, b\}$ yerine de $a \wedge b$ notasyonu kullanılacaktır.

(ii) L kümesine bir tam kafes denir $:\Leftrightarrow$ Her $K \subseteq L$ için $\inf K, \sup K \in L$ dir.

(iii) L kümesine bir zincir denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b \in L$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ dir.

(iv) $a, b \in L$ için $a < b$ ve a ile b arasında bir eleman yoksa b ye a nın örtüsü denir. Her elemanın bir örtüsünün mevcut olduğu sıralı kümeler için elemanların örtüsü bir doğru parçası ile birleştirilerek bir diyagram yardımıyla gösterilir. Bu diyagrama kafes diyagramı denir.

Bir kafeste en büyük ve en küçük elemanlar, sırasıyla, "1" ve "0" ile gösterilir.

Teorem 1.2.4: $(L, \leq)$ bir sıralı küme olsun. Bu takdirde;

$(L, \leq)$ tam kafestir $\Leftrightarrow$ $1 \in L$ ve her $\emptyset \neq T \subseteq L$ için $\inf T$ mevcuttur.

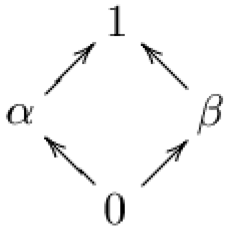
Tanım 1.2.5: L bir kafes olsun. Bu takdirde;

(i) L ye dağılımlı kafes denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b, c \in L$ için $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,

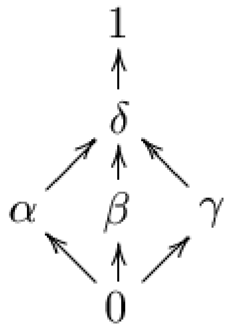
(ii) L ye modüler kafes denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b, c \in L$ için $a \leq b$ ise $a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$,

(iii) L ye sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b_i \in L$, $i \in J$ için $a \wedge \left(\bigvee_{i \in J} b_i\right) = \bigvee_{i \in J}(a \wedge b_i)$.

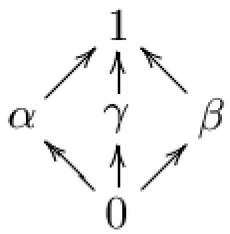
Örnek 1.2.6: $L = \{0, \alpha, \beta, 1\}$, $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, 1\}$ ve $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, 1\}$ kümeleri üzerinde kafes diyagramları aşağıdaki şekillerde verilmiştir.



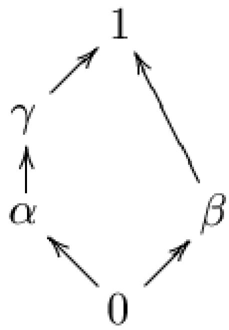
Şekil 1. $L = \{0, \alpha, \beta, 1\}$ kafes diyagramı



Şekil 2. $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, 1\}$ kafes diyagramı



Şekil 3. M_5 kafes diyagramı



Şekil 4. N_5 kafes diyagramı

Şekil 1'de verilen kafes dağılımlıdır. Şekil 2'de verilen kafes ve M_5 kafesi modülerdir ancak dağılımlı değildir. N_5 kafesi modüler değildir.

Bu tezde aksi söylenmedikçe $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ tam kafes olarak alınacaktır.

1.3. t-normlar ve t-conormlar

Bu bölümde üçgensel norm (kısaca t-norm) ve t-conorm kavramları açıklanacaktır. Ayrıntılı bilgi için De Baets ve Mesiar [5] ve Klement, Mesiar ve Pap'ın [14] çalışmalarından yararlanılabilir.

Tanım 1.3.1: L tam kafesi üzerinde tanımlı $T: L^2 \to L$ ikili işlemine t-norm denir : $\Leftrightarrow$

T1) Her $x, y \in L$ için $T(x, y) = T(y, x)$, (Değişme Özelliği)

T2) Her $x, y, z \in L$ için $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$, (Birleşme Özelliği)

T3) Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise $T(x, z) \leq T(y, z)$, (Monotonluk Özelliği)

T4) Her $x \in L$ için $T(x,1) = x$. (Sınır Şartı)

$x, y \in L$ için $T(x,y)$ notasyonu yerine xTy notasyonu da kullanılabilir.

Örnekler 1.3.2: L tam kafesi üzerinde aşağıdaki t-norm örnekleri verilebilir:

(i) $\forall x, y \in L$ için $T_D(x,y) = \begin{cases} x, & y = 1 \\ y, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1 \; ve \; y \neq 1 \end{cases}$ olarak tanımlanan T_D ikili işlemi L üzerinde t-normdur.

(ii) $\forall x, y \in L$ için $T_M(x,y) = x \wedge y$ olarak tanımlanan T_M ikili işlemi L üzerinde t-normdur.

Teorem 1.3.3: T, L üzerinde t-norm olsun. Bu takdirde;

(1) $\forall x, y \in L$ için $T(x,y) \leq x \wedge y$,

(2) $\forall x \in L$ için $T(x,0) = T(0,x) = 0$,

(3) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in L$ için $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ ise $T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2)$.

Tanım 1.3.4: T, L üzerinde t-norm olsun. Bu takdirde;

T ye, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b_i \in L$, $i \in J$ için $T\left(a, \bigvee_{i \in J} b_i\right) = \bigvee_{i \in J} T(a, b_i)$ dir.

T_D, Şekil 2'de verilen kafes üzerinde sonsuz $\vee$-dağılımlı t-normdur.

Tanım 1.3.5: T_1 ve T_2, L üzerinde t-normlar olsun. T_1, T_2 den zayıftır (veya T_2, T_1 den güçlüdür) denir $:\Leftrightarrow$ Her $x, y \in L$ için $T_1(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leq T_2(\mathrm{x},\mathrm{y})$ dir. Bu durum $T_1 \leq T_2$ olarak ifade edilir.

Tanım 1.3.6: T, L üzerinde t-norm olsun. $a \in L$ ye, T t-normuna göre idempotent eleman denir $:\Leftrightarrow T(a,a) = a$ dır.

L nin tüm idempotent elemanlarının kümesi $D_T = \{a \in L | T(a,a) = a\}$ ile gösterilir. T t-normu, D_T kümesi üzerinde ikili işlemdir [29].

Teorem 1.3.7: T, L üzerinde t-norm olsun. I ve J indis kümeleri olmak üzere $\{a_i \in L | i \in I\}$ ve $\{b_j \in L \big| j \in J\}$ aileleri için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left(\bigwedge_{i\in I} a_i\right) T \left(\bigwedge_{j\in J} b_j\right) \leq \bigwedge_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (a_i T b_j).$$

Tanım 1.3.8: L tam kafesi üzerinde tanımlı $S: L^2 \rightarrow L$ ikili işlemine t-conorm denir : $\Leftrightarrow$

S1) Her $x, y \in L$ için $S(x,y) = S(y,x)$, (Değişme Özelliği)

S2) Her $x, y, z \in L$ için $S(S(x,y),z) = S\big(x, S(y,z)\big)$, (Birleşme Özelliği)

S3) Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise $S(x,z) \leq S(y,z)$, (Monotonluk Özelliği)

S4) Her $x \in L$ için $S(x,0) = x$. (Sınır Şartı)

Her $x, y \in L$ için $S_M(x,y) = x \vee y$ olarak tanımlanan S_M, L üzerinde t-conormdur.

1.4. Negatörler

Bu bölümde negatör (negation) tanımı verilmiştir. Ayrıntılı bilgi için Nguyen ve Walker'ın [22], Fodor ve Roubens'in [9] ve Baczyński ve Jarayam'ın [1] çalışmalarından yararlanılabilir.

Tanım 1.4.1: L tam kafes olsun. $\mathcal{N}: L \rightarrow L$ fonksiyonuna negatör denir: $\Leftrightarrow$

(i) $\mathcal{N}$ azalan,

(ii) $\mathcal{N}(0) = 1$ ve $\mathcal{N}(1) = 0$.

Örnek 1.4.2: T ve S, L tam kafesi üzerinde, sırasıyla, t-norm ve t-conorm olmak üzere her $\alpha \in L$ için

$$\mathcal{N}(\alpha) = \bigvee_{T(\alpha,t)=0} t \quad , \qquad\qquad \mathcal{N}(\alpha) = \bigwedge_{S(\alpha,t)=1} t$$

olarak tanımlanan $\mathcal{N}: L \rightarrow L$ fonksiyonları negatördür.

1.5. Gerektirmeler

Bu bölümde bir bulanık mantıksal işlem olan gerektirmeler (implications) hakkında bilgi verilecektir. Literatürde farklı bulanık gerektirme tanımlarına rastlamak mümkündür. Bu tezde Fodor ve Roubens'in [9] aşağıda verilen tanımı kullanılacaktır. Daha ayrıntılı bilgi için Baczynski ve Jarayam'ın [1] çalışmasından yararlanılabilir.

Tanım 1.5.1: L tam kafesi üzerinde tanımlı $I: L^2 \to L$ ikili işlemine gerektirme denir $:\Leftrightarrow$

I1) Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise $I(y, z) \leq I(x, y)$,

I2) Her $x, y, z \in L$ için $y \leq z$ ise $I(x, y) \leq I(x, z)$,

I3) Her $I(0,0) = I(1,1) = 1$ ve $I(1,0) = 0$.

Tanımdan kolayca görülür ki I gerektirmesi her $x \in L$ için $I(0, x) = 1$ ve $I(x, 1) = 1$ eşitliklerini sağlar.

Örnekler 1.5.2: L tam kafes olsun.

(1) T, L üzerinde t-norm olmak üzere,

$$I(x, y) = \bigvee_{xTk \leq y} k$$

ikili işlemi, L üzerinde gerektirmedir. Bu gerektirmeye R-gerektirme denir.

(2) S ve $\mathcal{N}$, sırasıyla, L üzerinde t-conorm ve negatör olmak üzere

$$I(x, y) = S(\mathcal{N}(x), y)$$

ikili işlemi, L üzerinde gerektirmedir. Bu gerektirmeye (S, N)-gerektirme denir.

Önerme 1.5.3: T, L üzerinde sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm ve I, T ile üretilmiş R-gerektirme olsun. Bu takdirde her $x, y, z, t, x_i \in L$ $(i \in J)$ için

(i) $(xTy) \leq z \Leftrightarrow x \leq (yIz)$,

(ii) $(1Ix) = x$,

(iii) $x \leq y$ ise $(xIy) = 1$,

(iv) $(xIy)T(zIt) \leq (xTz)I(yTt)$,

(v) $(xTy)Iz = xI(yIz)$,

(vi) $(xIy)Tz \leq xI(yTz)$,

(vii) $(xIy)Iz = yI(xIz)$,

(viii) $\left(\bigwedge_{i \in J} x_i\right)Iy \geq \bigvee_{i \in J}(x_iIy)$,

(ix) $\left(\bigvee_{i \in J} x_i\right)Iy = \bigwedge_{i \in J}(x_iIy)$,

(x) $yI\left(\bigwedge_{i \in J} x_i\right) = \bigwedge_{i \in J}(yIx_i)$,

(xi) $yI\left(\bigvee_{i \in J} x_i\right) \geq \bigvee_{i \in J}(yIx_i)$.

1.6. Bağıntılar

Tanım 1.6.1: $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$ olan kümeler olsun. $\varphi \in \wp(X \times Y)$ ye, X ten Y ye bir bağıntı denir. $X = Y$ ise φ ye, X üzerinde bağıntı denir.

Tanım 1.6.2: $\varphi \in \wp(X \times Y)$ olsun. Her $a \in X$ için $(a, b) \in \varphi$ olacak şekilde $b \in Y$ mevcut ise φ ye, ardışık (serial) bağıntı denir.

Tanım 1.6.3: $\varphi \in \wp(X \times X)$ olsun. Bu takdirde;

(i) φ ye, yansıyan bağıntı denir $:\Leftrightarrow$ Her $a \in X$ için $(a, a) \in \varphi$.

(ii) φ ye, simetrik bağıntı denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$ için $(a, b) \in \varphi$ ise $(b, a) \in \varphi$.

(iii) φ ye, geçişken bağıntı denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b, c \in X$ için $(a, b) \in \varphi$ ve $(b, c) \in \varphi$ ise $(a, c) \in \varphi$.

Yansıyan, simetrik ve geçişken bir φ bağıntısına, X üzerinde denklik bağıntısı denir.

Tanım 1.6.4: $\varphi \in \wp(X \times Y)$ ve $\psi \in \wp(Y \times Z)$ olsun.

(i) $\{(y, x) | (x, y) \in \varphi\}$ bağıntısına φ nin tersi denir ve φ^{-1} ile gösterilir.

(ii) $\{(x, z) | \exists y \in Y$ öyle ki $(x, y) \in \varphi$ ve$(y, z) \in \psi\}$ bağıntısına φ ile ψ nin bileşkesi denir ve $\varphi \circ \psi$ ile gösterilir.

1.7. *L*-Bulanık Kümeler ve Bağıntılar

L-bulanık (alt) kümeler, Zadeh'in [43]'te tanıttığı bulanık alt kümelerin genellemesi olarak Goguen [10] tarafından 1967 yılında tanıtılmıştır. Bulanık kümeler ile ilgili ayrıntılı bilgi için Mordeson ve Malik'in [21] ve Nguyen ve Walker'in [22] çalışmalarından yararlanılabilir.

Tanım 1.7.1 : L tam kafes ve $\emptyset \neq X$ olan bir küme olmak üzere $\mu: X \to L$ fonksiyonuna X in L-bulanık (alt) kümesi denir. X in bütün L-bulanık kümelerinin kümesine, X in L-güç kümesi denir ve $F(X, L)$ ile gösterilir. Özel olarak $L = [0,1]$ olarak seçilirse μ ye, X in bir bulanık alt kümesi denir ve X in tüm bulanık alt kümelerinin kümesi $F(X)$ ile gösterilir. $\mu \in F(X, L)$ ve $\alpha \in L$ olsun.

- $\{x \in X | \mu(x) \geq \alpha\}$ kümesine, μ nün α-kesim veya seviye alt kümesi denir ve μ_α ile gösterilir.
- T, L üzerinde t-norm olmak üzere $\{(x,y)|\ \mu(x)T\alpha \geq \alpha\}$ kümesine, μ nün (α,T)-seviye alt kümesi denir ve μ_α^T ile gösterilir.
- T, L üzerinde t-norm olmak üzere $\{x|\ \exists\lambda \in L$ öyle ki $\mu(x)T\lambda \geq \alpha\}$ kümesine, μ nün $[\alpha,T]$-seviye alt kümesi denir ve $[\mu_\alpha^T]$ ile gösterilir.

$\alpha \in D_T$ ise $\mu_\alpha \subseteq \mu_\alpha^T \subseteq [\mu_\alpha^T]$ dir. $\emptyset \neq B \subseteq X$ olmak üzere $\alpha,\beta \in L$ için $(\alpha,\beta)_B \in F(X,L)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(\alpha,\beta)_B = \begin{cases} \beta\,, & x \in B \\ \alpha\,, & x \notin B. \end{cases}$$

$\alpha = 0, \beta = 1$ için $(\alpha,\beta)_B$ L-bulanık alt kümesi 1_B ile gösterilir.

$\{\mu_i | i \in I\}$, X in L-bulanık alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere $\bigvee_{i\in I}\mu_i$ ve $\bigwedge_{i\in I}\mu_i$ L-bulanık alt kümeleri, sırasıyla $x \in X$ için

$$(\textstyle\bigvee_{i\in I}\mu_i)(x) = \bigvee_{i\in I}\mu_i(x) \text{ ve } (\bigwedge_{i\in I}\mu_i)(x) = \bigwedge_{i\in I}\mu_i(x)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.7.2 : $\mu,\nu \in F(X,L)$ olsun. Bu takdirde her $x \in X$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise μ, ν'de içerilir denir ve bu durum $\mu \leq \nu$ olarak gösterilir. Eğer $\mu \leq \nu$ ve $\mu \neq \nu$ ise μ'ye, ν'de kesin içerilir (veya ν, μ'yü kesin içerir) denir ve bu durum $\mu < \nu$ olarak gösterilir.

Tanım 1.7.3 [42]**:** X,Y kümeler $\mu \in F(X,L)$, $\nu \in F(Y,L)$ ve $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyon olsun. $f(\mu) \in F(Y,L)$ ve $f^{-1}(\nu) \in F(X,L)$, her $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$f(\mu)(y) = \bigvee_{f(x)=y} \mu(x),$$

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu\big(f(x)\big).$$

olarak tanımlanırsa $f(\mu)$ ye, μ nün f altındaki görüntüsü ve $f^{-1}(\nu)$ ye de ν nün f altındaki ters görüntüsü denir.

Tanım 1.7.4: "$*$", L üzerinde ikili işlem, X bir küme ve $\mu,\nu \in F(X,L)$ olsun. Bu durumda $F(X,L)$ kümesi üzerinde $\mu * \nu$ ikili işlemi, her $x \in X$ için

$$(\mu * \nu)(x) = \mu(x) * \nu(x)$$

olarak tanımlanır. T ve I, sırasıyla L tam kafesi üzerinde t-norm ve gerektirme olmak üzere, özellikle " $*$ " olarak; $\vee$, $\wedge$, T ve I ikili işlemleri seçilirse elde edilen X in $\mu \vee \nu$, $\mu \wedge \nu$, $\mu T \nu$, $\mu I \nu$ L-bulanık alt kümelerine, sırasıyla μ ve ν nün bileşimi, arakesiti, T-kesişimi ve I-gerektirmesi denir.

Tanım 1.7.5: X, Y kümeler, L kafes olmak üzere $\Theta \in F(X \times Y, L)$ ise Θ ya, X ten Y ye L-bulanık bağıntı denir. $\Theta \in F(X \times X, L)$ ise Θ ya, X üzerinde L-bulanık bağıntı denir. Özel olarak $L = [0,1]$ ise Θ ya, X ten Y ye bulanık bağıntı denir. $\Theta^{-1}(y, x) = \Theta(x, y)$ ile tanımlanan $\Theta^{-1} \in F(Y \times X, L)$ L-bulanık bağıntısına Θ nın tersi denir. Her $x \in X$ için $\Theta(x, y) = 1$ olacak şekilde $y \in Y$ mevcut ise Θ ya, ardışık (serial) L-bulanık bağıntı denir. Açık olarak Θ ardışık L-bulanık bağıntıdır ancak ve ancak her $\alpha \in L$ için Θ_α ardışık bağıntıdır.

Tanım 1.7.6: $f: X \longrightarrow X'$, $g: Y \longrightarrow Y'$, $\Theta \in F(X \times Y, L)$, $\phi \in F(X' \times Y', L)$, $\mu \in F(X, L)$ ve $F: X \longrightarrow F(Y, L)$ olsun. Bu takdirde;

(i) $(f, g)(\Theta) \in F(X' \times Y', L)$, $(x', y') \in X' \times Y'$ için

$$(f, g)(\Theta)(x', y') = \bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ g(y)=y'}} \Theta(x, y),$$

(ii) $(f, g)^{-1}(\phi) \in F(X \times Y, L)$, $(x, y) \in X \times Y$ için

$$(f, g)^{-1}(\phi)(x, y) = \phi\big(f(x), g(y)\big),$$

(iii) $\phi_f \in F(X \times Y', L)$, $(x, y') \in X \times Y'$ için

$$\phi_f(x, y') = \phi(f(x), y'),$$

(iv) $F_\Theta: X \longrightarrow F(Y, L)$, $x \in X$ ve $y \in Y$ için

$$F_\Theta(x)(y) = \Theta(x, y),$$

(v) $\Theta_F \in F(X \times Y, L)$, $(x, y) \in X \times Y$ için

$$\Theta_F(x, y) = F(x)(y)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.7.7 [32, 34]**:** T ve I, sırasıyla L üzerinde t-norm ve gerektirme olmak üzere, $\Theta \in F(X \times Y, L)$ ve $\phi \in F(Y \times Z, L)$ olsun. Bu takdirde her $x \in X$ ve $z \in Z$ için

$$\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta(x, z) = \bigvee_{u \in Y} \Theta(x, u) T \phi(u, z)$$

$$\phi \underline{\circ}_I \Theta(x,z) = \bigwedge_{u \in Y} \Theta(x,u) I \phi(u,z)$$

olarak tanımlanan L-bulanık alt kümelerine, sırasıyla, Θ ile ϕ nin T-üst ve I-alt bileşkeleri denir.

Tanım 1.7.8 [32]**:** $\Theta \in F(X \times Y, L)$, $a \in X$ ve $b \in Y$ olmak üzere $\Theta_{(X,b)} \in F(X,L)$ ve $\Theta_{(a,Y)} \in F(Y,L)$, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\Theta_{(X,b)}(x) = \Theta(x,b)$ ve $\Theta_{(a,Y)}(y) = \Theta(a,y)$.

Bu takdirde $\Theta_{(X,b)}$ ye, Θ nın (X,b)-kısıtlanışı ve $\Theta_{(a,Y)}$ ye, Θ nın (a,Y)-kısıtlanışı denir.

Tanım 1.7.9: T, L üzerinde t-norm olmak üzere $\Theta \in$ F$(X \times Y, L)$ olsun. $\alpha \in L$ için α-seviye kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\left({}_X\Theta\right)_\alpha = \{x \in X | \exists y \in Y : \Theta(x,y) T \alpha \geq \alpha\}$$

$$(\Theta_Y)_\alpha = \{y \in Y \,|\, \exists x \in X : \Theta(x,y) T \alpha \geq \alpha\}$$

Tanım 1.7.10 [13]**:** $\Theta \in F(X \times X, L)$ olsun. Bu takdirde;

(i) Θ ya, yansıyan L-bulanık bağıntı denir $:\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $\Theta(x,x) = 1$,

(ii) Θ ya, simetrik L-bulanık bağıntı denir $:\Leftrightarrow$ Her $x, y \in X$ için $\Theta(x,y) = \Theta(y,x)$,

(iii) Θ ya, T-geçişken L-bulanık bağıntı denir $:\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in X$ için $\bigvee_{y \in X} \Theta(x,y) T \Theta(y,z) \leq \Theta(x,z)$.

(iv) Θ ya, TL-denklik bağıntısı denir $:\Leftrightarrow$ Θ; yansıyan, simetrik ve T-geçişken L-bulanık bağıntıdır.

1.8. TL-Bulanık Alt Cebirsel Yapılar

Bu bölümde TL-bulanık alt cebirsel yapılar; grup, halka ve modüller üzerinde tanıtılacaktır. Ayrıntılı bilgi için Mordeson ve Malik'in [21], Li, Yu ve Wang'ın [19] ve Yu ve Wang'ın [42] çalışmalarından yararlanılabilir.

Tanım 1.8.1 [42]**:** T, L üzerinde t-norm, " $\cdot$ ", X kümesi üzerinde ikili işlem ve $\mu, \nu \in F(X,L)$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için

$$(\mu \cdot_T \nu)(x) = \bigvee_{x=a.b} \mu(a)T\nu(b)$$

olarak tanımlanan $\mu \cdot_T \nu \in F(X,L)$ ye, μ ve ν nün T-çarpımı denir. Özellikle $T = T_M$ olarak seçilirse $\mu \cdot_T \nu$ yerine $\mu \cdot \nu$ notasyonu kullanılacaktır.

Tanım 1.8.2 [30]**:** G grup ve $\mu \in F(G,L)$ olsun. μ ye, G nin TL-bulanık alt grubu denir $:\Leftrightarrow$ Her $x,y \in G$ için

(i) $\mu(x)T\mu(y) \leq \mu(xy)$,

(ii) $\mu(x) \leq \mu(x^{-1})$.

G nin μ TL-bulanık alt grubuna, G nin TL-bulanık normal alt grubu denir $:\Leftrightarrow$ Her $x,y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(yx)$.

Tanım 1.8.3 [42]**:** $(R,+,.)$ halka ve $\mu \in F(R,L)$ olsun. μ ye, R nin TL-bulanık alt halkası denir $:\Leftrightarrow$ Her $x,y \in R$ için

(i) $\mu(x)T\mu(y) \leq \mu(x+y)$,

(ii) $\mu(x) \leq \mu(-x)$,

(iii) $\mu(x)T\mu(y) \leq \mu(x.y)$.

R nin μ TL-bulanık alt halkasına, R nin TL-bulanık ideali denir $:\Leftrightarrow$ Her $x,y \in R$ için $\mu(x) \vee \mu(y) \leq \mu(x.y)$.

Örnek 1.8.4 : R halka ve L, Şekil 2'de verilen kafes yapısı olsun.

(i) Her $x \in R$ için $\mu(x) = \begin{cases} \alpha, & x = 0, \\ \beta, & x \neq 0, \end{cases}$ olarak tanımlanan $\mu \in F(R,L)$, R nin $T_D L$-bulanık alt halkasıdır. Fakat $R \neq \{0\}$ olması halinde μ, R nin $T_D L$-bulanık ideali değildir.

(ii) T, L üzerinde t-norm olmak üzere her $x \in R$ için $\mu(x) = \begin{cases} \delta, & x = 0, \\ \beta, & x \neq 0, \end{cases}$ olarak tanımlanan $\mu \in F(R,L)$, R nin TL-bulanık idealidir.

Tanım 1.8.5 [42]**:** R halka ve $\mu,\nu \in F(R,L)$ olmak üzere her $x \in R$ için $\mu \odot_T \nu \in F(R,L)$,

$$(\mu \odot_T \nu)(x) = \bigvee_{x=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i} T_{i=1}^{n}\big(\mu(a_i)T\nu(b_i)\big)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.8.6: M sol R-modül ve $\mu \in F(M, L)$ olsun. μ ye, M nin TL-bulanık alt modülü denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in M$ ve her $r \in R$ için

(i) $\mu(x)T\mu(y) \leq \mu(x + y)$,

(ii) $\mu(x) \leq \mu(-x)$,

(iii) $\mu(x) \leq \mu(rx)$.

Aksi söylenmediği takdirde bu tezde M sol R-modülü, M R-modül olarak anılacaktır.

Tanım 1.8.7 [31]**:** R halka, M R-modül, $\mu \in F(R, L)$ ve $\nu \in F(M, L)$ olmak üzere $\mu \cdot_T \nu,\ \mu \odot_T \nu \in F(M, L)$, her $x \in M$ için

$$(\mu \cdot_T \nu)(x) = \bigvee_{x=r.y} \mu(r)T\nu(y)$$

$$(\mu \odot_T \nu)(x) = \bigvee_{x=\sum_{i=1}^{n} r_i y_i} T_{i=1}^{n}\big(\mu(r_i)T\nu(y_i)\big)$$

olarak tanımlanır.

1.9. Genelleştirilmiş Kaba Kümeler

$X \neq \emptyset$ olan bir küme, $A \subseteq X$ ve φ , X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $[x]_\varphi$, x in denklik sınıfı olmak üzere

$$\underline{\varphi}(A) = \{x \in X \mid [x]_\varphi \subseteq A\} \text{ ve } \overline{\varphi}(A) = \{x \in X \mid [x]_\varphi \cap A \neq \emptyset\}$$

olarak tanımlanan kümelere, sırasıyla A nın alt ve üst yaklaşımları denir. Buradaki (X, φ) çiftine Pawlak yaklaşım uzayı denir. Pawlak yaklaşım uzayının özellikleri [25]'de incelenmiştir. Ayrıca X yarıgrup ve φ, X üzerinde kongrüans bağıntısı olmak üzere Kuroki [15], $\underline{\varphi}$ ve $\overline{\varphi}$ yaklaşım operatörlerinin özelliklerini incelemiştir.

Pawlak yaklaşım uzayı, daha sonraları birçok araştırmacı tarafından genelleştirilmiştir [20, 26, 27, 33, 34, 35, 40, 44]. $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ olan kümeler ve $\varphi \subseteq X \times Y$ olsun. $F_\varphi \colon X \to \wp(Y)$, her $x \in X$ için

$$F_\varphi(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in \varphi\}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda, x elemanının görüntüsü olan $F_\varphi(\mathrm{x})$ kümesine, x in φ ye göre ardıl komşuluğu denir. $A \subseteq Y$ için A nın alt ve üst yaklaşımları, sırasıyla;

$$\underline{\varphi}(A) = \{x \in X \mid F_\varphi(\mathrm{x}) \subseteq A\}, \qquad \overline{\varphi}(A) = \{x \in X \mid F_\varphi(\mathrm{x}) \cap A \neq \emptyset\}$$

olarak tanımlanır. φ yardımıyla oluşturulan (X, Y, φ) üçlüsüne bir genelleştirilmiş yaklaşım uzayı; $\underline{\varphi}$ ve $\overline{\varphi}$ fonksiyonlarına da sırasıyla alt ve üst genelleştirilmiş yaklaşım operatörleri denir. Buradaki $\left(\underline{\varphi}(A), \overline{\varphi}(A)\right)$ çiftine, A nın (X, Y, φ) genelleştirilmiş yaklaşım uzayı üzerindeki genelleştirilmiş kaba kümesi denir. Açık olarak bir $\varphi \subseteq X \times Y$ bağıntısı ile F_φ küme değerli fonksiyonu elde edilebildiği gibi tersine olarak, herhangi bir $F: X \to \wp(Y)$ küme değerli fonksiyonu ile X den Y ye

$$\varphi_F = \{(x, y) \in X \times Y |\, y \in F(x)\}$$

şeklinde bir bağıntı tanımlanabilir.

Teorem 1.9.1: $\varphi \subseteq X \times Y$ ve I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $A_i \in \wp(Y)$ olsun. Bu takdirde

(i) $\underline{\varphi}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} \underline{\varphi}(A_i)$,

(ii) $\bigcup_{i \in I} \underline{\varphi}(A_i) \subseteq \underline{\varphi}(\bigcup_{i \in I} A_i)$,

(iii) $\overline{\varphi}(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{\varphi}(A_i)$,

(iv) $\bigcup_{i \in I} \overline{\varphi}(A_i) = \overline{\varphi}(\bigcup_{i \in I} A_i)$.

Teorem 1.9.2 [7]**:** $\{\varphi_i | i \in I\}$, X'ten Y'ye bağıntılar ailesi ve $A \subseteq Y$ olsun. Bu takdirde

(i) $\overline{\bigcap_{i \in I} \varphi_i}\,(A) \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{\varphi_i}(A)$,

(ii) $\overline{\bigcup_{i \in I} \varphi_i}\,(A) = \bigcup_{i \in I} \overline{\varphi_i}(A)$,

(iii) $\bigcap_{i \in I} \underline{\varphi_i}(A) \subseteq \underline{\bigcap_{i \in I} \varphi_i}\,(A)$,

(iv) $\underline{\bigcup_{i \in I} \varphi_i}\,(A) = \bigcap_{i \in I} \underline{\varphi_i}(A)$,

(v) $\underline{\bigcup_{i \in I} \varphi_i}\,(A) \subseteq \bigcup_{i \in I} \underline{\varphi_i}(A)$,

(vi) $\underline{\bigcup_{i \in I} \varphi_i}\,(A) \subseteq \underline{\bigcap_{i \in I} \varphi_i}\,(A)$.

1.10. Genelleştirilmiş (I, T)-L-Bulanık Kaba Kümelerin Yapısı

$X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ olan kümeler ve $\Theta \in F(X \times Y, L)$ olmak üzere (X, Y, Θ) üçlüsüne L-bulanık yaklaşım uzayı denir. $X = Y$ ise (X, Y, Θ) yerine (X, Θ) yazılır. $L = [0,1]$ seçilerek bu yaklaşım uzayı üzerinde çeşitli şekillerde inşa edilmiş olan bulanık yaklaşım operatörleri üzerindeki bazı sonuçlar [6, 12, 15, 26, 41] çalışmalarında incelenmiştir.

(X, Y, Θ) L-bulanık yaklaşım uzayı olmak üzere T ve I, sırasıyla, L üzerinde t-norm ve gerektirme olsun. Bu takdirde $\overline{\Theta}^T$, $\underline{\Theta}_I : F(Y, L) \to F(X, L)$ operatörleri, her $\mu \in F(Y, L)$ ve her $x \in X$ için

$$\overline{\Theta}^T(\mu)(x) = \bigvee_{b\in Y} \Theta(x,b)T\mu(b)$$

$$\underline{\Theta}_I(\mu)(x) = \bigwedge_{b\in Y} \Theta(x,b)I\mu(b)$$

olarak tanımlanır. Burada $\overline{\Theta}^T$ ve $\underline{\Theta}_I$, sırasıyla, (X,Y,Θ) yaklaşım uzayının T-üst ve I-alt L-bulanık kaba yaklaşım operatörleri olarak adlandırılır. $\overline{\Theta}^T(\mu)$ ve $\underline{\Theta}_I(\mu)$, sırasıyla μ nün T-üst ve I-alt L-bulanık kaba yaklaşımlarıdır. Burada $\left(\underline{\Theta}_I(\mu), \overline{\Theta}^T(\mu)\right)$ ikilisine, μ nün (X,Y,Θ) yaklaşım uzayına göre genelleştirilmiş (I,T)-L-bulanık kaba kümesi denir.

$L = [0,1]$ tam kafesi seçilerek bu yaklaşım uzayının özellikleri [33, 34, 35]'de incelenmiştir.

Teorem 1.10.1 [34]**:** T ve I, L üzerinde, sırasıyla, t-norm ve gerektirme olmak üzere $\Theta \in F(X\times Y, L)$, $\mu,\nu,\mu_i \in F(Y,L)$ ve $B \subseteq Y$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\overline{\Theta}^T(\bigvee_{i\in I}\mu_i) = \bigvee_{i\in I}\overline{\Theta}^T(\mu_i)$,

(ii) $\mu \le \nu$ ise $\overline{\Theta}^T(\mu) \le \overline{\Theta}^T(\nu)$,

(iii) $\overline{\Theta}^T(\bigwedge_{i\in I}\mu_i) \le \bigwedge_{i\in I}\overline{\Theta}^T(\mu_i)$,

(iv) Her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $\overline{\Theta}^T(1_y)(x) = \Theta(x,y)$,

(v) Her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $\overline{\Theta}^T(1_B)(x) = \bigvee_{y\in B}\Theta(x,y)$,

(vi) $\underline{\Theta}_I(\bigwedge_{i\in I}\mu_i) = \bigwedge_{i\in I}\underline{\Theta}_I(\mu_i)$,

(vii) $\mu \le \nu$ ise $\underline{\Theta}_I(\mu) \le \underline{\Theta}_I(\nu)$,

(viii) $\bigvee_{i\in I}\underline{\Theta}_I(\mu_i) \le \underline{\Theta}_I(\bigvee_{i\in I}\mu_i)$,

(ix) Her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $\underline{\Theta}_I(1_{B\setminus\{y\}})(x) = I(\Theta(x,y),0)$,

(x) Her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $\underline{\Theta}_I(1_B)(x) = \bigwedge_{y\notin B} I(\Theta(x,y),0)$.

Teorem 1.10.2 [7]**:** (X,Y,Θ) L-bulanık yaklaşım uzayı ve $\mu \in F(Y,L)$ olsun. T_1 ve T_2, L üzerinde t-normlar ve I_1 ve I_2, L üzerinde gerektirmeler ise aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $T_1 \le T_2$ ise $\overline{\Theta}^{T_1}(\mu) \le \overline{\Theta}^{T_2}(\mu)$,

(ii) $I_1 \leq I_2$ ise $\underline{\Theta}_{I_1}(\mu) \leq \underline{\Theta}_{I_2}(\mu)$.

Teorem 1.10.3: $\Theta \in F(X \times Y, L)$, $\phi \in F(Y \times Z, L)$, $\mu \in F(Z, L)$ olmak üzere T, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm ve I, T ile üretilmiş R-gerektirme olsun. Bu durumda;

(i) $\overline{\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta}^T(\mu) = \overline{\Theta}^T\left(\overline{\phi}^T(\mu)\right)$,

(ii) $\underline{(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)}_I(\mu) = \underline{\Theta}_{\mathrm{I}}\left(\underline{\phi}_I(\mu)\right)$.

İspat:

(i) [7]'de Teorem 2.4.10'da ispat verilmiştir.

(ii) $x \in X$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\underline{(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)}_I(\mu)(x) &= \bigwedge_{y\in Y}\big((\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x,y) I \mu(y)\big) \\
&= \bigwedge_{y\in Y}\left(\left(\bigvee_{k\in Y}\big(\Theta(x,k) T \phi(k,y)\big)\right) I \mu(y)\right) \\
&= \bigwedge_{y\in Y}\bigwedge_{k\in Y}\Big(\big(\Theta(x,k) T \phi(k,y)\big) I \mu(y)\Big) \\
&= \bigwedge_{y\in Y}\bigwedge_{k\in Y}\Big(\Theta(x,k) I \big(\phi(k,y) I \mu(y)\big)\Big) \\
&= \bigwedge_{k\in Y}\left(\Theta(x,k) I \left(\bigwedge_{y\in Y}\phi(k,y) I \mu(y)\right)\right) \\
&= \bigwedge_{k\in Y}\Big(\Theta(x,k) I \underline{\phi}_I(\mu)(k)\Big) \\
&= \underline{\Theta}_{\mathrm{I}}\left(\underline{\phi}_I(\mu)\right)(x).
\end{aligned}$$

Böylece $\underline{(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)}_I(\mu) = \underline{\Theta}_{\mathrm{I}}\left(\underline{\phi}_I(\mu)\right)$ elde edilir.

Aşağıdaki örnek gösterir ki Teorem 1.10.3 (ii) (S, N)-gerektirmeler için doğru olmayabilir.

Örnek 1.10.4: $X = \{a,b,c\}, Y = \{k,l\}, Z = \{m,n\}$ kümeler ve L, Şekil 1'de verilen kafes olsun. $\Theta \in F(X \times Y, L)$, $\phi \in F(Y \times Z, L)$ ve $\mu \in F(Z, L)$,

$$\Theta(x,y) = \begin{cases} \alpha, & x = a \text{ ve } y = l, \\ \beta, & x \neq a \text{ veya } y \neq l, \end{cases} \qquad \phi(y,z) = \begin{cases} \beta, & y = l \text{ ve } z = n, \\ 0, & y \neq l \text{ veya } z \neq n, \end{cases}$$

$$\mu(x) = \begin{cases} \alpha, & x = n, \\ 1, & x \neq n, \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde her $x \in L$ için $\mathcal{N}(x) = \bigwedge_{S(x,\alpha)=1} \alpha$ ve $S = S_M$ olmak üzere I, (S,N)-gerektirmesi ve $T = T_D$ için $\underline{(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)_I}(\mu)(b) = 1 \neq \alpha = \underline{\Theta}_I\left(\underline{\phi}_I(\mu)\right)(b)$ elde edilir. Böylece $\underline{(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)_I}(\mu) \neq \underline{\Theta}_I\left(\underline{\phi}_I(\mu)\right)$ dir.

Teorem 1.10.5: $\Theta \in F(X \times Y, L)$, $\omega \in F(Y \times Y, L)$, $F: X \longrightarrow F(Y, L)$, $f: X \longrightarrow Y$ ve $\mu \in F(Y, L)$ olsun. Bu takdirde;

(i) $\overline{\Theta_F}^T(\mu)(x) = \bigvee_{y \in Y}(F(x)T\mu)(y)$ ve $\underline{\Theta_F}_I(\mu)(x) = \bigwedge_{y \in Y}(F(x)I\mu)(y)$,

(ii) Her $x, a \in X$ için $\overline{\Theta_F}^T\big(F_\Theta(x)\big)(a) = \overline{\Theta}^T\big(F(a)\big)(x)$,

(iii) $f\left(\overline{\omega_f}^T(\mu)\right) = \overline{\omega}^T(\mu)$.

İspat:

(i) Θ_F nin ve μ nün T-üst ve I-alt L-bulanık kaba yaklaşım tanımlarından açıktır.

(ii) $x, a \in X$ olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned}\overline{\Theta_F}^T\big(F_\Theta(x)\big)(a) &= \bigvee_{b \in Y} \Theta_F(a,b)\, T F_\Theta(x)(b) \\ &= \bigvee_{b \in Y} F(a)(b)\, T\Theta(x,b) \\ &= \overline{\Theta}^T\big(F(a)\big)(x).\end{aligned}$$

(iii) $y \in Y$ olsun. Bu takdirde;

$$f\left(\overline{\omega_f}^T(\mu)\right)(y) = \bigvee_{f(x)=y} \overline{\omega_f}^T(\mu)(x)$$

$$= \bigvee_{f(x)=y} \left(\bigvee_{t\in Y} \omega_f(x,t) T \mu(t) \right)$$
$$= \bigvee_{t\in Y} \bigvee_{f(x)=y} \omega(f(x),t) T \mu(t)$$
$$= \bigvee_{t\in Y} \omega(y,t) T \mu(t)$$
$$= \overline{\omega}^T(\mu)(y).$$

Teorem 1.10.6: X, X', Y, Y' kümeler olmak üzere $f: X \longrightarrow X'$ ve $g: Y \longrightarrow Y'$ fonksiyonlar, $\Theta \in F(X \times Y, L)$, $\phi \in F(X' \times Y', L)$, $\mu \in F(Y, L)$ ve $\nu \in F(Y', L)$ olsun. Bu takdirde;

(i) g birebir ve örten ise $\overline{(f,g)(\Theta)}^T \big(g(\mu)\big) = f\left(\overline{\Theta}^T(\mu)\right)$,

(ii) L sonsuz $\vee$-dağılımlı bir kafes ve g birebir ve örten ise $\underline{(f,g)(\Theta)}_I \big(g(\mu)\big) \leq f\left(\underline{\Theta}_I(\mu)\right)$,

(iii) $\overline{(f,g)^{-1}(\phi)}^T \big(g^{-1}(\nu)\big) \leq f^{-1}\left(\overline{\phi}^T(\nu)\right)$,

(iv) g örten ise $\overline{(f,g)^{-1}(\phi)}^T \big(g^{-1}(\nu)\big) = f^{-1}\left(\overline{\phi}^T(\nu)\right)$,

(v) $f^{-1}\left(\underline{\phi}_I(\nu)\right) \leq \underline{(f,g)^{-1}(\phi)}_I \big(g^{-1}(\nu)\big)$,

(vi) g örten ise $\underline{(f,g)^{-1}(\phi)}_I \big(g^{-1}(\nu)\big) = f^{-1}\left(\underline{\phi}_I(\nu)\right)$.

İspat:

(i) $x' \in X'$olsun. Bu takdirde;

$$\overline{(f,g)(\Theta)}^T \big(g(\mu)\big)(x') = \bigvee_{y'\in Y'} (f,g)(\Theta)(x',y') T g(\mu)(y')$$

$$= \bigvee_{y'\in Y'} \left(\bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ g(y)=y'}} \Theta(x,y) \right) T \left(\bigvee_{g(y)=y'} \mu(y) \right)$$

$$= \bigvee_{f(x)=x'} \left(\bigvee_{y \in Y} \Theta(x,y) T \mu(y) \right)$$

$$= \bigvee_{f(x)=x'} \overline{\Theta}^T(\mu)(x)$$

$$= f\left(\overline{\Theta}^T(\mu)\right)(x').$$

(ii) $x' \in X'$ olsun. Bu takdirde;

$$\underline{(f,g)(\Theta)_I}\big(g(\mu)\big)(x') = \bigwedge_{y' \in Y'} (f,g)(\Theta)(x',y') I g(\mu)(y')$$

$$= \bigwedge_{y' \in Y'} \left(\bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ g(y)=y'}} \Theta(x,y) \right) I \left(\bigvee_{g(y)=y'} \mu(y) \right)$$

$$= \bigwedge_{y \in Y} \left(\bigvee_{f(x)=x'} \Theta(x,y) \right) I \mu(y)$$

$$\leq \bigwedge_{y \in Y} \bigvee_{f(x)=x'} \Theta(x,y) I \mu(y)$$

$$= \bigvee_{f(x)=x'} \bigwedge_{y \in Y} \Theta(x,y) I \mu(y)$$

$$= \bigvee_{f(x)=x'} \underline{\Theta_I}(\mu)(x)$$

$$= f\left(\underline{\Theta_I}(\mu)\right)(x').$$

(iii) $x \in X$ olsun. Bu takdirde;

$$\overline{(f,g)^{-1}(\phi)}^T \big(g^{-1}(\nu)\big)(x) = \bigvee_{y \in Y} (f,g)^{-1}(\phi)(x,y) T g^{-1}(\nu)(y)$$

$$= \bigvee_{y \in Y} \phi\big(f(x), g(y)\big) T \nu\big(g(y)\big)$$

$$\leq \bigvee_{y' \in Y'} \phi(f(x), y') T \nu(y')$$

$$= \overline{\phi}^T(\nu)\big(f(x)\big)$$

$$= f^{-1}\left(\overline{\phi}^T(\nu)\right)(x).$$

Böylece $\overline{(f,g)^{-1}(\phi)}^{T}\left(g^{-1}(\nu)\right) \leq f^{-1}\left(\overline{\phi}^{T}(\nu)\right)$ elde edilir.

(iv) (iii)'nin ispatı ve g nin örtenliği dikkate alınarak $\overline{(f,g)^{-1}(\phi)}^{T}\left(g^{-1}(\nu)\right) = f^{-1}\left(\overline{\phi}^{T}(\nu)\right)$ elde edilir.

(v) $x \in X$ olsun. Bu takdirde;

$$
\begin{aligned}
f^{-1}\left(\underline{\phi}_I(\nu)\right)(x) &= \underline{\phi}_I(\nu)\left(f(x)\right) \\
&= \bigwedge_{y' \in Y'} \phi(f(x), y') I \nu(y') \\
&\leq \bigwedge_{g(y) \in Y'} \phi\left(f(x), g(y)\right) I \nu\left(g(y)\right) \\
&= \bigwedge_{y \in Y} (f,g)^{-1}(\phi)(x,y) I g^{-1}(\nu)(y) \\
&= \underline{(f,g)^{-1}(\phi)}_I\left(g^{-1}(\nu)\right)(x).
\end{aligned}
$$

Böylece $f^{-1}\left(\underline{\phi}_I(\nu)\right) \leq \underline{(f,g)^{-1}(\phi)}_I\left(g^{-1}(\nu)\right)$ elde edilir.

(vi) (v)'in ispatı ve g nin örtenliği dikkate alınarak $f^{-1}\left(\underline{\phi}_I(\nu)\right) = \underline{(f,g)^{-1}(\phi)}_I\left(g^{-1}(\nu)\right)$ elde edilir.

Teorem 1.10.7: X, Y, Z kümeler, $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ fonksiyonlar $\Theta \in F(Y \times Z, L)$ ve $\phi \in F(Z \times Z, L)$ olsun. Bu takdirde;

(i) $\phi_g \,\bar{\circ}_T\, (f,g)^{-1}(\Theta) \leq (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)_f$,

(ii) g örten ise $\phi_g \,\bar{\circ}_T\, (f,g)^{-1}(\Theta) = (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)_f$,

(iii) $\left(\phi \,\underline{\circ}_I\, \Theta\right)_f \leq \phi_g \,\underline{\circ}_I\, (f,g)^{-1}(\Theta)$,

(iv) g örten ise $\left(\phi \,\underline{\circ}_I\, \Theta\right)_f = \phi_g \,\underline{\circ}_I\, (f,g)^{-1}(\Theta)$.

İspat:

(i) $x \in X$ ve $z \in Z$ olsun.

$$\left(\phi_g \,\bar{\circ}_T\, (f,g)^{-1}(\Theta)\right)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} (f,g)^{-1}(\Theta)(x,y) T \phi_g(y,z)$$

$$= \bigvee_{y \in Y} \Theta\big(f(x), g(y)\big) T \phi(g(y), z)$$
$$\leq \bigvee_{t \in Z} \Theta(f(x), t) T \phi(t, z)$$
$$= (\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)(f(x), z)$$
$$= (\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)_f(x, z)$$

elde edilir. Böylece $\phi_g \mathbin{\bar{\circ}_T} (f, g)^{-1}(\Theta) \leq (\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)_f$'tir.

(ii) (i)'nin ispatı ve g nin örtenliği dikkate alınarak $\phi_g \mathbin{\bar{\circ}_T} (f, g)^{-1}(\Theta) = (\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)_f$ elde edilir.

(iii) $x \in X$ ve $z \in Z$ olsun.

$$\big(\phi \mathbin{\underline{\circ}_I} \Theta\big)_f(x, z) = \big(\phi \mathbin{\underline{\circ}_I} \Theta\big)(f(x), z)$$
$$= \bigwedge_{t \in Z} \Theta(f(x), t) I \phi(t, z)$$
$$\leq \bigwedge_{y \in Y} \Theta\big(f(x), g(y)\big) I \phi(g(y), z)$$
$$= \bigwedge_{y \in Y} (f, g)^{-1}(\Theta)(x, y) I \phi_g(y, z)$$
$$= \Big(\phi_g \mathbin{\underline{\circ}_I} (f, g)^{-1}(\Theta)\Big)(x, z)$$

elde edilir. Böylece$\big(\phi \mathbin{\underline{\circ}_I} \Theta\big)_f \leq \phi_g \mathbin{\underline{\circ}_I} (f, g)^{-1}(\Theta)$'dır.

(iv) (iii)'nin ispatı ve g nin örtenliği dikkate alınarak $\big(\phi \mathbin{\underline{\circ}_I} \Theta\big)_f = \phi_g \mathbin{\underline{\circ}_I} (f, g)^{-1}(\Theta)$ elde edilir.

Aşağıdaki örnek gösterir ki g örten değil ise Teorem 1.10.7'deki (ii) ve (iv) doğru olmayabilir.

Örnek 1.10.8: $f: 3\mathbb{Z} \longrightarrow 4\mathbb{Z}$ve $g: 4\mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}$ fonksiyonları, sırasıyla $f(x) = 4x$ ve $g(x) = 8x$ olarak; $\Theta, \psi \in F(4\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}, [0,1])$ ve $\phi \in F(2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}, [0,1])$ bulanık bağıntıları, sırasıyla $\Theta(x, y) = \begin{cases} 1, & y \mid x \\ \frac{1}{2}, & y \nmid x \end{cases}$, $\psi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & y \mid x \\ \frac{1}{5}, & y \nmid x \end{cases}$ ve $\phi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x = y \\ \frac{1}{4}, & x \neq y \end{cases}$ olarak tanımlanmış olsun. $T = T_M$ ve I, T nin R-gerektirmesi olmak üzere

(i) $\left(\phi_g \,\bar{\circ}_T\, (f,g)^{-1}(\Theta)\right)(3{,}2) = \frac{1}{4}$ ve $(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)_f(3{,}2) = \frac{1}{3}$ olduğundan $\left(\phi_g \,\bar{\circ}_T\, (f,g)^{-1}(\Theta)\right) \neq (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)_f$.

(ii) $\left(\phi_g \,\underline{\circ}_I\, (f,g)^{-1}(\psi)\right)(3{,}2) = 1$ ve $\left(\phi \,\underline{\circ}_I\, \psi\right)_f(3{,}2) = \frac{1}{4}$ olduğundan $\left(\phi \,\underline{\circ}_I\, \psi\right)_f \neq \phi_g \,\underline{\circ}_I\, (f,g)^{-1}(\psi)$.

Teorem 1.10.9: X, X', Y, Y', Z, Z' kümeler, $f: X \longrightarrow X'$, $g: Y \longrightarrow Y'$, $h: Z \longrightarrow Z'$ fonksiyonlar, $\Theta \in F(X \times Y, L)$ ve $\phi \in F(Y \times Z, L)$ olsun. T, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm olmak üzere;

(i) $\alpha \in D_T$ için $[(f,g)(\Theta)]_\alpha \circ [(g,h)(\phi)]_\alpha \subseteq [(f,h)(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)]_\alpha$,

(ii) g birebir ise $(g,h)(\phi) \,\bar{\circ}_T\, (f,g)(\Theta) \leq (f,h)(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)$,

(iii) g birebir ve örten ise $(g,h)(\phi) \,\bar{\circ}_T\, (f,g)(\Theta) = (f,h)(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)$.

İspat:

(i) $x' \in X'$ ve $z' \in Z'$ olmak üzere $(x', z') \in [(f,g)(\Theta)]_\alpha \circ [(g,h)(\phi)]_\alpha$ olsun. $(x', y') \in [(f,g)(\Theta)]_\alpha$ ve $(y', z') \in [(g,h)(\phi)]_\alpha$ olacak şekilde $y' \in Y'$ mevcuttur. Bu durumda $(f,g)(\Theta)(x', y') \geq \alpha$ ve $(g,h)(\phi)(y', z') \geq \alpha$ dır. Buradan $\bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ g(y)=y'}} \Theta(x,y) \geq \alpha$ ve $\bigvee_{\substack{g(y)=y' \\ h(z)=z'}} \phi(y,z) \geq \alpha$ olup $\bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ y\in Y}} \Theta(x,y) \geq \alpha$ ve $\bigvee_{\substack{y\in Y \\ h(z)=z'}} \phi(y,z) \geq \alpha$ dır. $\alpha \in D_T$ ve T, sonsuz $\vee$-dağılımlı olduğundan $\bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ h(z)=z'}} \left(\bigvee_{y\in Y} \Theta(x,y) T \phi(y,z)\right) \geq \alpha$ dir. Böylece $\bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ h(z)=z'}} (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x,z) \geq \alpha$ dır. Buradan $(f,h)(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x', z') \geq \alpha$ elde edilir. Sonuç olarak $(x', z') \in [(f,h)(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)]_\alpha$ olduğundan $[(f,g)(\Theta)]_\alpha \circ [(g,h)(\phi)]_\alpha \subseteq [(f,h)(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)]_\alpha$ dır.

(ii) $x' \in X'$ ve $z' \in Z'$ olmak üzere;

$$\left((g,h)(\phi) \,\bar{\circ}_T\, (f,g)(\Theta)\right)(x', z') = \bigvee_{y'\in Y'} (f,g)(\Theta)(x', y') T (g,h)(\phi)(y', z')$$

$$= \bigvee_{y'\in Y'} \left(\bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ g(y)=y'}} \Theta(x,y) \right) T \left(\bigvee_{\substack{g(t)=y' \\ h(z)=z'}} \phi(t,z) \right)$$

$$= \bigvee_{y' \in Y'} \left(\bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ g(y)=y'=g(t) \\ h(z)=z'}} \Theta(x,y) T \phi(t,z) \right)$$

$$= \bigvee_{y' \in Y'} \left(\bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ g(y)=y' \\ h(z)=z'}} \Theta(x,y) T \phi(y,z) \right)$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} \left(\bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ h(z)=z'}} \Theta(x,y) T \phi(y,z) \right)$$

$$= \bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ h(z)=z'}} \left(\bigvee_{y \in Y} \Theta(x,y) T \phi(y,z) \right)$$

$$= \bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ h(z)=z'}} (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x,z)$$

$$= (f,h)(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x',z').$$

Sonuç olarak $(g,h)(\phi) \,\bar{\circ}_T\, (f,g)(\Theta) \leq (f,h)(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)$ elde edilir.

(iii) (ii)'nin ispatı ve g nin örtenliği dikkate alınarak $(g,h)(\phi) \,\bar{\circ}_T\, (f,g)(\Theta) = (f,h)(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)$ elde edilir.

Aşağıdaki örnek gösterir ki Teorem 1.10.9 (i) ve (ii)'de " = ", genel olarak doğru olmayabilir.

Örnek 1.10.10: $L = M_5$ ve $T = T_M$ olmak üzere $\Theta \in F(2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}, L)$ ve $\phi \in F(4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, L)$

$$\Theta(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ \gamma, & x \neq y \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad \phi(x,y) = \begin{cases} \beta, & y \mid x \\ 1, & y \nmid x \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $f: 2\mathbb{Z} \longrightarrow 3\mathbb{Z}$, $g: 4\mathbb{Z} \longrightarrow 5\mathbb{Z}$ ve $h: \mathbb{Z} \longrightarrow 7\mathbb{Z}$ fonksiyonları; $f(x) = 3x$, $g(x) = 5x$ ve $h(x) = 7x$ olarak alınsın. Bu takdirde

(i) $(12,14) \in [(f,h)(\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)]_\alpha$ ve $(12,14) \notin [(f,g)(\Theta)]_\alpha \circ [(g,h)(\phi)]_\alpha$ olduğundan $[(f,g)(\Theta)]_\alpha \circ [(g,h)(\phi)]_\alpha \neq [(f,h)(\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)]_\alpha$,

(ii) $\big((g,h)(\phi) \mathbin{\bar{\circ}_T} (f,g)(\Theta)\big)(18,7) = \beta$ ve $(f,h)(\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)(18,7) = 0$ olduğundan $(g,h)(\phi) \mathbin{\bar{\circ}_T} (f,g)(\Theta) \neq (f,h)(\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)$.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

2.1. Cebirsel Yapılarda Bağıntısal Homomorfiler

Ignjatović, Ciric ve Bogdanovic [11], çalışmalarında aynı türden cebirsel yapılar arasında "bağıntısal homomorfi" olarak isimlendirdikleri bir bağıntı tanımlamışlardır. [7]'de, X, Y yarıgruplar ve $\varphi \in \wp(X \times Y)$ bağıntısal homomorfi olarak alınmış ve (X, Y, φ) genelleştirilmiş yaklaşım uzayının özellikleri araştırılmıştır. [4]'te Davvaz küme değerli homomorfileri tanıtmış ve bunları kullanarak gruplar üzerinde oluşturulan yaklaşım uzayını incelemiştir. [36] ve [37]'de benzer çalışmalar halka ve modül cebirsel yapıları için verilmiştir. Bu bölümde bağıntısal grup, halka ve modül homomorfileri tanıtılarak küme değerli homomorfiler ile bağıntısal homomorfilerin ilişkileri incelenmiştir.

Tanım 2.1.1 [15]**:** G grup ve φ, G üzerinde denklik bağıntısı olsun. Bu takdirde φ ye, G üzerinde kongrüans bağıntısı denir: $\Leftrightarrow$ Her $(a, b) \in \varphi$ ve $x \in G$ için $(ax, bx) \in \varphi$, ve $(xa, xb) \in \varphi$.

Tanım 2.1.2: G, H gruplar, $\varphi \in \wp(G \times H)$ ve $F: G \longrightarrow \wp(H)$ olsun.

(i) φ ye, G den H ye bağıntısal homomorfi denir $:\Leftrightarrow$ Her $(x, y), (a, b) \in \varphi$ için $(xa, yb), (x^{-1}, y^{-1}) \in \varphi$.

(ii) φ bağıntısal homomorfisine tam bağıntısal homomorfi denir $:\Leftrightarrow$ Her $(ab, y) \in \varphi$ için $(a, c), (b, d) \in \varphi$ ve $y = c.d$ olacak şekilde $c, d \in H$ elemanları mevcuttur.

(iii) F ye küme değerli homomorfi denir $:\Leftrightarrow F(a)F(b) \subseteq F(ab)$ ve $\big(F(a)\big)^{-1} \subseteq F(a^{-1})$.

(iv) F ye güçlü küme değerli homomorfi denir $:\Leftrightarrow F(a)F(b) = F(ab)$ ve $\big(F(a)\big)^{-1} = F(a^{-1})$.

Örnek 2.1.3: G, H gruplar olsun.

(1) φ, G üzerinde kongrüans bağıntısı ise φ, G den G ye bağıntısal homomorfidir,

(2) $f: G \to H$ grup homomorfisi ise f tam bağıntısal homomorfidir,

(3) $G \times H$ tam bağıntısal homomorfidir.

Önerme 2.1.4: G, H gruplar ve φ, G den H ye bağıntısal homomorfi olsun. Bu takdirde

(i) Her $a, b \in G$ için $F_\varphi(a)F_\varphi(b) \subseteq F_\varphi(ab)$,

(ii) φ tam bağıntısal homomorfi ise her $a, b \in G$ için $F_\varphi(a)F_\varphi(b) = F_\varphi(ab)$.

İspat:

(i) $y \in F_\varphi(a)F_\varphi(b)$ olsun. Bu durumda $y = cd$ olacak şekilde $c \in F_\varphi(a)$ ve $d \in F_\varphi(b)$ mevcuttur. Böylece $(a,c),(b,d) \in \varphi$'dir. φ bağıntısal homomorfi olduğundan $(ab, cd) \in \varphi$ olup $y \in F_\varphi(ab)$ dir. Sonuç olarak $F_\varphi(a)F_\varphi(b) \subseteq F_\varphi(ab)$ elde edilir.

(ii) $y \in F_\varphi(ab)$ olsun. Bu durumda $(ab, y) \in \varphi$ dir. φ tam bağıntısal homomorfi olduğundan $y = cd$ ve $(a,c),(b,d) \in \varphi$ olacak şekilde $c, d \in H$ mevcuttur. Böylece $c \in F_\varphi(a)$ ve $d \in F_\varphi(b)$ olup $y = cd \in F_\varphi(a)F_\varphi(b)$ dir. Sonuç olarak $F_\varphi(ab) \subseteq F_\varphi(a)F_\varphi(b)$ olduğundan (i) ile $F_\varphi(a)F_\varphi(b) = F_\varphi(ab)$ elde edilir.

Önerme 2.1.5: G, H gruplar, $\varphi \in \wp(G \times H)$ ve $F: G \longrightarrow \wp(H)$ olsun. Bu takdirde;

(i) φ, G den H ye (tam) bağıntısal homomorfidir $\Leftrightarrow F_\varphi: G \longrightarrow \wp(H)$ (güçlü) küme değerli homomorfidir.

(ii) $F: G \longrightarrow \wp(H)$ (güçlü) küme değerli homomorfidir $\Leftrightarrow \varphi_F$, G den H ye (tam) bağıntısal homomorfidir.

İspat:

(i) φ, G den H ye bağıntısal homomorfi olsun. Önerme 2.1.4 (i) ile her $a, b \in G$ için $F_\varphi(a)F_\varphi(b) \subseteq F_\varphi(ab)$ dir. Şimdi $b \in \left(F_\varphi(a)\right)^{-1}$ olsun. Böylece $b^{-1} \in F_\varphi(a)$ olup $(a, b^{-1}) \in \varphi$ elde edilir. $(a^{-1}, b) \in \varphi$ olduğundan $b \in F_\varphi(a^{-1})$ dir. Sonuç olarak $\left(F_\varphi(a)\right)^{-1} \subseteq F_\varphi(a^{-1})$ elde edilir. Böylece F_φ küme değerli homomorfidir. φ tam bağıntısal homomorfi olsun. Önerme 2.1.4 (ii) ile her $a, b \in G$ için $F_\varphi(a)F_\varphi(a) = F_\varphi(ab)$ olduğundan F_φ güçlüdür. Tersine F_φ küme değerli homomorfi ve $(x,y),(a,b) \in \varphi$ olsun. Böylece $y \in F_\varphi(x)$ ve $b \in F_\varphi(a)$ olup $yb \in F_\varphi(x)F_\varphi(a)$ ve $y^{-1} \in \left(F_\varphi(x)\right)^{-1}$ dir. Bu durumda $yb \in F_\varphi(xa)$ ve $y^{-1} \in F_\varphi(x^{-1})$ olduğundan

$(xa, yb), (x^{-1}, y^{-1}) \in \varphi$ dir. Sonuç olarak φ bağıntısal homomorfidir. Şimdi $(ab, y) \in \varphi$ olsun. Buradan $y \in F_\varphi(ab) = F_\varphi(a)F_\varphi(b)$ dir. Böylece $y = cd$ olacak şekilde $c \in F_\varphi(a)$ ve $d \in F_\varphi(b)$ elemanları mevcut olup $(a, c), (b, d) \in \varphi$ dir. Sonuç olarak φ tamdır.

(ii) (i)'de F_φ yerine F ve φ yerine de φ_F alınarak istenen elde edilir.

Tanım 2.1.6: R, S halkalar, $\varphi \in \wp(R \times S)$ ve $F: R \longrightarrow \wp(S)$ olsun. Bu takdirde;

(i) φ ye, R den S ye bağıntısal homomorfi denir $:\Leftrightarrow$ Her $(x, y), (a, b) \in \varphi$ için $(x + a, y + b), (-a, -b), (xa, yb) \in \varphi$ dir.

(ii) φ bağıntısal homomorfisine tam bağıntısal homomorfi denir $:\Leftrightarrow$ Her $(a + b, x), (ab, y) \in \varphi$ için $(a, c), (b, d) \in \varphi$, $x = c + d$ ve $y = c.d$ olacak şekilde $c, d \in S$ mevcuttur.

(iii) F ye küme değerli homomorfi denir $:\Leftrightarrow F(a) + F(b) \subseteq F(a + b)$, $-F(a) \subseteq F(-a)$ ve $F(a)F(b) \subseteq F(ab)$ dir.

(iv) F ye bir güçlü küme değerli homomorfi denir $:\Leftrightarrow F(a) + F(b) = F(a + b)$, $-F(a) = F(-a)$ ve $F(a)F(b) = F(ab)$ dir.

Tanım 2.1.7: R halka olmak üzere M, N R-modüller, $\varphi \in \wp(M \times N)$ ve $F: M \longrightarrow \wp(N)$ olsun.

(i) φ ye, M den N ye bağıntısal homomorfi denir $:\Leftrightarrow$ Her $(x, y), (a, b) \in \varphi$ ve her $r \in R$ için $(x + a, y + b), (-a, -b), (ra, rb) \in \varphi$ dir.

(ii) φ bağıntısal homomorfisine tam bağıntısal homomorfi denir $:\Leftrightarrow$ Her $(a + b, x), (ra, y) \in \varphi$ için $(a, c), (b, d) \in \varphi$, $x = c + d$ ve $y = rc$ olacak şekilde $c, d \in N$ mevcuttur.

(iii) F ye küme değerli homomorfi denir $:\Leftrightarrow F(a) + F(b) \subseteq F(a + b)$, $-F(a) \subseteq F(-a)$ ve $rF(a) \subseteq F(ra)$ dır.

(iv) F ye güçlü küme değerli homomorfi denir $:\Leftrightarrow F(a) + F(b) = F(a + b)$, $-F(a) = F(-a)$ ve $rF(a) = F(ra)$ dır.

Açık olarak, Önerme 2.1.4 ve Önerme 2.1.5 halka ve modül cebirsel yapıları için de doğrudur. Önerme 2.1.5 gösterir ki her (güçlü) küme değerli homomorfiye karşılık bir bağıntısal homomorfi ve her bağıntısal homomorfiye karşılık da bir küme değerli homomorfi mevcuttur. [7]'de bağıntısal homomorfilerle yarıgruplar üzerinde yapılmış olan çalışmalara benzer çalışmalar; [4], [36] ve [37]'de, küme değerli homomorfilere bağlı olarak grup, halka ve modül cebirsel yapıları üzerinde incelenmiştir. Bu bakımdan bu tezde yapılan çalışmalar, [7]'nin bir devamı ve [4], [36], [37] çalışmalarının L-bulanık genelleştirilmesi niteliğindedir.

2.2. Cebirsel Yapılarda TL-Bulanık Bağıntısal Homomorfiler

TL-bulanık bağıntısal homomorfi, Ignjatovic, Ciric ve Bogdanovic'in [11]'de tanımladığı bir L-bulanık bağıntıdır. [7]'de yarıgruplar üzerinde tanımlı TL-bulanık bağıntısal homomorfilerin çeşitli özelliklerine yer verilmiştir. Bu bölümde ise grup, halka ve modül cebirsel yapıları üzerinde TL-bulanık bağıntısal homomorfiler tanımlanacak ve onların çeşitli özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.2.1 [17,19]**:** G grup ve Θ, G üzerinde TL-denklik bağıntısı olsun. Bu takdirde Θ ya, TL-kongrüans bağıntısı denir :⟺ Her $x, y, a, b \in G$ için $\Theta(x, y)T\Theta(a, b) \leq \Theta(xa, yb)$ dir.

Tanım 2.2.2: G, H gruplar ve $\Theta \in F(G \times H, L)$ olsun. Bu takdirde Θ ya, G den H ye TL-bulanık bağıntısal grup homomorfisi denir :⟺ Her $x, a \in G$ ve $y, b \in H$ için

(i) $\Theta(x, y)T\Theta(a, b) \leq \Theta(xa, yb)$,

(ii) $\Theta(x, y) \leq \Theta(x^{-1}, y^{-1})$ dir.

G den H ye tüm TL-bulanık bağıntısal grup homomorfilerinin kümesi Hom$(G \times H, T, L)$ ile gösterilecektir. Özel olarak $T = T_M$ ise Θ ya L-bulanık bağıntısal grup homomorfisi denir ve bu durumda, G'den H'ye tüm L-bulanık bağıntısal grup homomorfilerinin kümesi Hom$(G \times H, L)$ ile gösterilecektir.

Örnek 2.2.3: L, Şekil 1'de verilen kafes yapısı olsun. Bu takdirde $\mathbb{Z}_2$ den $\mathbb{Z}_3$ e tüm L-bulanık bağıntısal grup homomorfileri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 1. Örnek 2.2.3'teki L-bulanık bağıntısal grup homomorfileri

$(\bar{x},\bar{y})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$
Θ_1	1	1	1	1	1	1
Θ_2	1	1	1	α	α	α
Θ_3	1	1	1	β	β	β
Θ_4	1	1	1	0	0	0
Θ_5	1	α	α	1	α	α
Θ_6	1	α	α	α	α	α
Θ_7	1	α	α	β	0	0
Θ_8	1	α	α	0	0	0
Θ_9	1	β	β	1	β	β
Θ_{10}	1	β	β	α	0	0
Θ_{11}	1	β	β	β	β	β
Θ_{12}	1	β	β	0	0	0
Θ_{13}	1	0	0	1	0	0
Θ_{14}	1	0	0	α	0	0
Θ_{15}	1	0	0	β	0	0
Θ_{16}	1	0	0	0	0	0
Θ_{17}	α	α	α	α	α	α
Θ_{18}	α	α	α	0	0	0
Θ_{19}	α	0	0	α	0	0
Θ_{20}	α	0	0	0	0	0
Θ_{21}	β	β	β	β	β	β
Θ_{22}	β	β	β	0	0	0
Θ_{23}	β	0	0	β	0	0
Θ_{24}	β	0	0	0	0	0
Θ_{25}	0	0	0	0	0	0

$\mathbb{Z}_2$ den $\mathbb{Z}_3$ e tüm bağıntısal grup homomorfileri; $\varphi_1 = \{(\bar{0},\bar{0})\}$, $\varphi_2 = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0})\}$, $\varphi_3 = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2})\}$ ve $\varphi_4 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ dir.

Önerme 2.2.4: Θ, G den G ye TL-kongrüans bağıntısı ise $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times G, T, L)$'dir.

İspat: $x, y \in G$ olsun. Bu takdirde $\Theta(x,y) = \Theta(x,y)T\Theta(y^{-1},y^{-1}) \leq \Theta(xy^{-1},e) = \Theta(x^{-1},x^{-1})T\Theta(xy^{-1},e) \leq \Theta(y^{-1},x^{-1}) = \Theta(x^{-1},y^{-1})$ olup $\Theta(x,y) \leq \Theta(x^{-1},y^{-1})$ elde edilir. Böylece Tanım 2.2.2 ile $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times G, T, L)$'dir.

Örnekler 2.2.5: G ve H gruplar olsun.

(1) $\varphi \in \wp(G \times H)$ bağıntısal homomorfi, $\alpha, \beta \in L$ ve $\alpha \leq \beta$ ise $(\alpha, \beta)_\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$ dir.

(2) $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$, $\alpha \in L$ ve $\beta \in D_T$ ise Θ_β, (Θ_α) ve $[\Theta_\beta]$ bağıntısal homomorfilerdir.

(3) $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$ ve μ, H nin TL-bulanık alt grubu olmak üzere $\Theta \in F(G \times H, L)$, $\Theta(x, y) = \mu(f(x))T\mu(y)$ olarak tanımlanırsa $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$ dir.

(4) $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$ ve μ, H nin TL-bulanık normal alt grubu olmak üzere $\Theta \in F(G \times H, L)$, $\Theta(x, y) = \mu(f(x)y)$ olarak tanımlanırsa $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$ dir.

(5) μ ve ν, sırasıyla G ve H nin TL-bulanık alt grupları olmak üzere $\Theta \in F(G \times H, L)$, $\Theta(x, y) = \mu(x)T\nu(y^{-1})$ olarak tanımlanırsa $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$ dir.

(6) $L = N_5$ ve T, L üzerinde t-norm olmak üzere $\Theta \in F(\mathbb{R}/\{0\} \times \mathbb{R}/\{0\}, L)$,

$$\Theta(x, y) = \begin{cases} 1, & x.y = 1 \\ \gamma, & x.y > 0 \text{ ve } x.y \neq 1 \\ \alpha, & x.y < 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\Theta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}/\{0\} \times \mathbb{R}/\{0\}, T, L)$ dir.

Teorem 2.2.6: G, H gruplar ve $\Theta, \phi \in F(G \times H, L)$ olsun. Bu takdirde

(i) $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$ ise her $x, a \in G$ ve $y, b \in H$ için $\Theta(x, y)T\Theta(a, b) \leq \Theta(xa^{-1}, yb^{-1})$,

(ii) $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T_1, L)$ ve $T_2 \leq T_1$ ise $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T_2, L)$,

(iii) $\Theta(e, e) = 1$ ve her $x, a \in G$ ve $y, b \in H$ için $\Theta(x, y)T\Theta(a, b) \leq \Theta(xa^{-1}, yb^{-1})$ ise $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$,

(iv) $\Theta, \phi \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$ ise $\Theta T \phi \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$.

İspat:

(i) Açıktır.

(ii) Her $x, a \in G$ ve $y, b \in H$ için $\Theta(x, y)T_2\Theta(a, b) \leq \Theta(x, y)T_1\Theta(a, b) \leq \Theta(xa, yb)$ olduğundan $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T_2, L)$ dir.

(iii) $x, a \in G$ ve $y, b \in H$ olsun. $\Theta(e, e) = 1$ olduğundan $\Theta(a, b) = \Theta(e, e)T\Theta(a, b) \leq \Theta(ea^{-1}, eb^{-1}) = \Theta(a^{-1}, b^{-1})$ dir. Buradan hipotez ile $\Theta(x, y)T\Theta(a, b) \leq \Theta(x, y)T\Theta(a^{-1}, b^{-1}) \leq \Theta(xa, yb)$ elde edilir. Böylece $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$ dir.

(iv) T nin değişme özelliğinden açıktır.

Teorem 2.2.7: G, H gruplar olsun. $\Theta \in$ Hom$(G \times H, T, L)$ ise $\Theta^{-1} \in$ Hom$(H \times G, T, L)$ dir.

İspat: Her $x, a \in G$ ve $y, b \in H$ için

$$\Theta^{-1}(y,x)T\Theta^{-1}(b,a) = \Theta(x,y)T\Theta(a,b) \leq \Theta(xa,yb) = \Theta^{-1}(yb,xa)$$

ve

$$\Theta^{-1}(y,x) = \Theta(x,y) \leq \Theta(x^{-1},y^{-1}) = \Theta^{-1}(y^{-1},x^{-1})$$

elde edilir. Böylece $\Theta^{-1} \in$ Hom$(H \times G, T, L)$ dir.

Teorem 2.2.8: G, H, K gruplar ve T, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm olsun. Bu takdirde $\Theta \in$ Hom$(G \times H, T, L)$ ve $\phi \in$ Hom$(H \times K, T, L)$ ise $\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta \in$ Hom$(G \times K, T, L)$ dir.

İspat: Her $x, a \in G$ ve $z, c \in K$ için

$$\begin{aligned}(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x,z)T(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(a,c) &= \bigvee_{y\in H} \Theta(x,y)T\phi(y,z)\, T \bigvee_{b\in H} \Theta(a,b)T\phi(b,c) \\ &= \bigvee_{y,b\in H} \Theta(x,y)T\Theta(a,b)T\phi(y,z)T\phi(b,c) \\ &\leq \bigvee_{y,b\in H} \Theta(xa,yb)T\phi(yb,zc) \\ &= \bigvee_{h\in H} \Theta(xa,h)T\phi(h,zc) \\ &= (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(xa,zc),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x,z) &= \bigvee_{h\in H} \Theta(x,h)T\phi(h,z) \\ &\leq \bigvee_{h\in H} \Theta(x^{-1},h^{-1})T\phi(h^{-1},z^{-1}) \\ &= (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x^{-1},z^{-1})\end{aligned}$$

olduğundan $\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta \in$ Hom$(G \times K, T, L)$ dir.

Aşağıdaki örnek gösterir ki Teorem 2.2.8 genel olarak I-alt birleşimler için doğru olmayabilir.

Örnek 2.2.9: $T = T_M$ ve Θ, Örnek 2.2.3'teki $\Theta_{14} \in \text{Hom}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, L)$ olsun ve $\phi: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow L$,

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \alpha, & y = \overline{0}, \\ 0, & y = \overline{1}, \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde ϕ, L-bulanık bağıntısal homomorfidir. I, R-gerektirme olmak üzere $(\phi \circ_I \Theta)(\overline{1},\overline{0})T(\phi \circ_I \Theta)(\overline{1},\overline{0}) = 1 \nleq \alpha = (\phi \circ_I \Theta)(\overline{0},\overline{0})$ olduğundan $\phi \circ_I \Theta$, TL-bulanık bağıntısal homomorfi değildir.

Teorem 2.2.10: $f: G \longrightarrow G'$ ve $g: H \longrightarrow H'$ grup homomorfileri olmak üzere

(i) T, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm ve $\Theta \in$ Hom $(G \times H, T, L)$ ise $(f,g)(\Theta) \in \text{Hom}(G' \times H', T, L)$,

(ii) $\phi \in$ Hom $(G' \times H', T, L)$ ise $(f,g)^{-1}(\phi) \in \text{Hom}(G \times H, T, L)$,

(iii) $\omega \in$Hom $(G' \times H, T, L)$ ise $\omega_f \in \text{Hom}(G \times H, T, L)$.

İspat:

(i) $x', a' \in G'$ ve $y', b' \in H'$ olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned}
(f,g)(\Theta)(x',y')T(f,g)(\Theta)(a',b') &= \left(\bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ g(y)=y'}} \Theta(x,y) \right) T \left(\bigvee_{\substack{f(a)=a' \\ g(b)=b'}} \Theta(a,b) \right) \\
&= \bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ g(y)=y' \\ f(a)=a' \\ g(b)=b'}} \Theta(x,y)T\Theta(a,b) \\
&\leq \bigvee_{\substack{f(xa)=x'a' \\ g(yb)=y'b'}} \Theta(x,y)T\Theta(a,b) \\
&\leq \bigvee_{\substack{f(xa)=x'a' \\ g(yb)=y'b'}} \Theta(xa,yb) \\
&\leq \bigvee_{\substack{f(g)=x'a' \\ g(h)=y'b'}} \Theta(g,h) \\
&= (f,g)(\Theta)(x'a',y'b').
\end{aligned}$$

$$(f,g)(\Theta)(x',y') = \bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ g(y)=y'}} \Theta(x,y)$$
$$\leq \bigvee_{\substack{f(x^{-1})=(x')^{-1} \\ g(y^{-1})=(y')^{-1}}} \Theta(x^{-1},y^{-1})$$
$$= (f,g)(\Theta)((x')^{-1},(y')^{-1}).$$

(ii) $x,a \in G$ ve $y,b \in H$ keyfi olsun. Bu takdirde

$$(f,g)^{-1}(\phi)(x,y)T(f,g)^{-1}(\phi)(a,b) = \phi\big(f(x),g(y)\big)T\phi\big(f(a),g(b)\big)$$
$$\leq \phi\big(f(x)f(a),g(y)g(b)\big)$$
$$= \phi\big(f(xa),g(yb)\big)$$
$$= (f,g)^{-1}(\phi)(xa,yb).$$

$$(f,g)^{-1}(\phi)(x,y) = \phi\big(f(x),g(y)\big) \leq \phi\big(f(x^{-1}),g(y^{-1})\big) = (f,g)^{-1}(\phi)(x^{-1},y^{-1}).$$

(iii) $x,a \in G$ ve $y,b \in H$ olsun. Bu takdirde

$$\omega_f(x,y)T\omega_f(a,b) = \omega(f(x),y)T\omega(f(a),b)$$
$$\leq \omega(f(x)f(a),yb)$$
$$= \omega(f(xa),yb)$$
$$= \omega_f(xa,yb),$$

$$\omega_f(x,y) = \omega(f(x),y) \leq \omega(f(x)^{-1},y^{-1}) = \omega(f(x^{-1}),y^{-1}) = \omega_f(x^{-1},y^{-1}).$$

Tanım 2.2.11: G,H gruplar ve $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H,T,L)$ olsun. Bu takdirde

(i) Her $x \in G$ için $Çek\Theta(x) = \Theta(x,\mathrm{e})$ olarak tanımlanan G nin L-bulanık alt kümesine Θ nın çekirdeği denir,

(ii) Her $y \in H$ için $Res\Theta(y) = \bigvee_{x\in G}\Theta(x,y)$ olarak tanımlanan H nin L-bulanık alt kümesine Θ nın resmi denir.

Önerme 2.2.12: G, H gruplar, $F: G \longrightarrow F(H,L)$ ve $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H,T,L)$ olsun. Bu takdirde;

(i) $\Theta_{(G,e)} = \text{Çek}\Theta$,

(ii) Her $x \in G$ için $F_\Theta(x)(e) = Çek\Theta(x)$,

(iii) $f \in \mathrm{Hom}(G,H)$ ise $1_f \in \mathrm{Hom}(G \times H,T,L)$ olup $\text{Çek}1_f = 1_{\text{Çek}\,f}$ ve $\text{Res}1_f = 1_{\text{Res}\,f}$.

İspat:

(i) Her $x \in G$ için $\Theta_{(G,e)}(x) = \Theta(x,e) = \text{Çek}\Theta(x)$ olup $\Theta_{(G,e)} = \text{Çek}\Theta$ elde edilir.

(ii) Her $x \in G$ için $F_{\Theta}(x)(e) = \Theta(x,e) = \text{Çek}\Theta(x)$ elde edilir.

(iii) Her $x \in G$ için $\text{Çek}1_f(x) = 1_f(x,e) = 1_{\text{Çek} f}(x)$ ve her $y \in H$ için $\text{Res}1_f(y) = \bigvee_{x \in G} 1_f(x,y) = 1_{\text{Res} f}(y)$ olduğundan $\text{Çek}1_f = 1_{\text{Çek} f}$ ve $\text{Res}1_f = 1_{\text{Res} f}$ elde edilir.

Önerme 2.2.13: G, G', H, H' gruplar olmak üzere $f: G \longrightarrow G'$, $g: H \longrightarrow H'$ grup homomorfileri, $\Theta \in \text{Hom}(G \times H, T, L)$ ve $\phi \in \text{Hom}(G' \times H', T, L)$ olsun. Bu takdirde

(i) $\text{Çek}\Theta$, G nin TL-bulanık alt grubudur,

(ii) Θ ardışık ise $\text{Çek}\Theta$, G nin TL-bulanık normal alt grubudur,

(iii) T sonsuz $\vee$- dağılımlı ise $\text{Res}\Theta$, H nin TL-bulanık alt grubudur,

(iv) $\Theta_{(e,H)}$, H nin TL-bulanık alt grubudur,

(v) Her $x, a \in G$ için $\Theta_{(x,H)} \cdot_T \Theta_{(a,H)} \leq \Theta_{(xa,H)}$,

(vi) $f(\text{Çek}\Theta) \leq \text{Çek}(f,g)(\theta)$,

(vii) g birebir ise $f(\text{Çek}\Theta) = \text{Çek}(f,g)(\theta)$,

(viii) $\text{Çek}(f,g)^{-1}(\phi) = \text{Çek}\phi_f$,

(ix) $\text{Res}(f,g)(\theta) \leq g(\text{Res}\theta)$,

(x) f örten ise $\text{Res}(f,g)(\theta) = g(\text{Res}\theta)$,

(xi) $\text{Res}(f,g)^{-1}(\phi) = \text{Res}\left(\left(\phi_f\right)^{-1}\right)_g$.

İspat:

(i) Her $x, a \in G$ için $\text{Çek}\Theta(x) T\, \text{Çek}\Theta(a) = \Theta(x,e)\, T\, \Theta(a,e) \leq \Theta(xa,e) = \text{Çek}\Theta(xa)$ ve $\text{Çek}\Theta(x) = \Theta(x,e) \leq \Theta(x^{-1},e) = \text{Çek}\Theta(x^{-1})$ olduğundan $\text{Çek}\Theta$, G nin TL-bulanık alt grubudur.

(ii) Θ ardışık olduğundan her $g \in G$ için $\Theta(g,h) = 1$ olacak şekilde bir $h \in H$ mevcuttur. Böylece her $x, a \in G$ için

$$
\begin{aligned}
\text{Çek}\Theta(xa) &= 1 T \Theta(xa,e) T 1 \\
&= \Theta(x,y) T \Theta(xa,e) T \Theta(x,y) \\
&\leq \Theta(x^{-1},y^{-1}) T \Theta(xa,e) T \Theta(x,y) \\
&\leq \Theta(x^{-1}xax, yy^{-1})
\end{aligned}
$$

$$= \Theta(ax, e)$$
$$= \text{Çek}\Theta(ax)$$

elde edilir. Sonuç olarak Θ ardışık ise ÇekΘ, G nin TL-bulanık normal alt grubudur.

(iii) Her $y, b \in H$ için

$$\begin{aligned}
\text{Res}\Theta(y)\, T\text{Res}\Theta(b) &= \left(\bigvee_{x\in G} \Theta(x,y)\right) T \left(\bigvee_{a\in G} \Theta(a,b)\right) \\
&= \bigvee_{x\in G}\bigvee_{a\in G} (\Theta(x,y) T \Theta(a,b)) \\
&\leq \bigvee_{x\in G}\bigvee_{a\in G} \Theta(xa, yb) \\
&= \bigvee_{g\in G} \Theta(g, yb) \\
&= \text{Res}\Theta(yb),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Res}\Theta(y) &= \bigvee_{x\in G} \Theta(x,y) \\
&\leq \bigvee_{x\in G} \Theta(x^{-1}, y^{-1}) \\
&= \bigvee_{x^{-1}\in G} \Theta(x^{-1}, y^{-1}) \\
&= \bigvee_{x\in G} \Theta(x, y^{-1}) \\
&= \text{Res}\Theta(y^{-1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ResΘ, H nin TL-bulanık alt grubudur.

(iv) Teorem 2.2.7 ile $\Theta^{-1} \in \text{Hom}(H \times G, T, L)$ ve $\Theta_{(e,H)} = \text{Çek}\Theta^{-1}$ olduğundan (i) ile $\Theta_{(e,H)}$, H nin TL-bulanık alt grubudur.

(v) Her $h \in H$ için

$$\begin{aligned}
\left(\Theta_{(x,H)} \cdot_T \Theta_{(a,H)}\right)(h) &= \bigvee_{h=yb} \Theta_{(x,H)}(y) T \Theta_{(a,H)}(b) \\
&= \bigvee_{h=yb} \Theta(x,y) T \Theta(a,b) \\
&\leq \bigvee_{h=yb} \Theta(xa, yb) \\
&= \Theta(xa, h)
\end{aligned}$$

$$= \Theta_{(xa,H)}(h).$$

Böylece $\Theta_{(x,H)} \cdot_T \Theta_{(a,H)} \leq \Theta_{(xa,H)}$ elde edilir.

(vi) Her $x' \in G'$ için

$$f(\text{Çek}\Theta)(x') = \bigvee_{f(x)=x'} \text{Çek}\Theta(x)$$

$$= \bigvee_{f(x)=x'} \Theta(x,e)$$

$$= \bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ g(e)=e}} \Theta(x,e)$$

$$\leq \bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ g(y)=e}} \Theta(x,e)$$

$$= (f,g)(\theta)(x',e)$$

$$= \text{Çek}(f,g)(\theta)(x').$$

Böylece $f(\text{Çek}\Theta) \leq \text{Çek}(f,g)(\theta)$ elde edilir.

(vii) (vi)'nin ispatı ve g nin birebirliği dikkate alınarak $f(\text{Çek}\Theta) = \text{Çek}(f,g)(\Theta)$ elde edilir.

(viii) Her $x \in G$ için

$$\text{Çek}(f,g)^{-1}(\phi)(x) = (f,g)^{-1}(\phi)(x,e)$$

$$= \phi\big(f(x), g(e)\big)$$

$$= \phi(f(x), e)$$

$$= \text{Çek}\phi_f(x).$$

Böylece $\text{Çek}(f,g)^{-1}(\phi) = \text{Çek}\phi_f$ elde edilir.

(ix) Her $y' \in H'$ için

$$\text{Res}(f,g)(\Theta)(y') = \bigvee_{x' \in X'} (f,g)(\Theta)(x',y')$$

$$= \bigvee_{x' \in X'} \left(\bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ g(y)=y'}} \Theta(x,y) \right)$$

$$\leq \bigvee_{x \in X} \left(\bigvee_{g(y)=y'} \Theta(x,y) \right)$$

$$= \bigvee_{g(y)=y'} \left(\bigvee_{x \in X} \Theta(x, y) \right)$$

$$= \bigvee_{g(y)=y'} \mathrm{Res}\Theta(y) = g(\mathrm{Res}\Theta)(y).$$

Böylece $\mathrm{Res}(f, g)(\Theta) \leq g(\mathrm{Res}\Theta)$ elde edilir.

(x) (ix)'nin ispatı ve f nin örtenliği dikkate alınarak $\mathrm{Res}(f, g)(\Theta) = g(\mathrm{Res}\,\Theta)$ elde edilir.

(xi) Her $y \in H$ için

$$\mathrm{Res}(f, g)^{-1}(\phi)(y) = \bigvee_{x \in G} (f, g)^{-1}(\phi)(x, y)$$

$$= \bigvee_{x \in G} \phi\big(f(x), g(y)\big)$$

$$= \bigvee_{x \in G} \phi_f\big(x, g(y)\big)$$

$$= \bigvee_{x \in G} \left((\phi_f)^{-1} \right)_g (x, y)$$

$$= \mathrm{Res}\left((\phi_f)^{-1} \right)_g (y).$$

Teorem 2.2.14: $\alpha \in L$ ve $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$ olsun. Bu takdirde,

(i) $\left({}_G\theta\right)_\alpha \neq \emptyset$ ise $\left({}_G\Theta\right)_\alpha$, G nin alt grubudur,

(ii) $(\Theta_H)_\alpha \neq \emptyset$ ise $(\Theta_H)_\alpha$, H nin alt grubudur,

(iii) $(\text{Çek}\Theta)_\alpha \neq \emptyset$ ise $(\text{Çek}\Theta)_\alpha$, $\left({}_G\Theta\right)_\alpha$ nın alt grubudur,

(iv) $(\text{Çek}\Theta^{-1})_\alpha \neq \emptyset$ ise $(\text{Çek}\Theta^{-1})_\alpha$, $(\Theta_H)_\alpha$ nın alt grubudur.

İspat: $x, a \in \left({}_G\Theta\right)_\alpha$ olsun. Bu takdirde $\Theta(x, y)T\alpha \geq \alpha$ ve $\Theta(a, b)T\alpha \geq \alpha$ olacak şekilde $y, b \in H$ mevcuttur. Böylece $\Theta(x, y)T\Theta(a, b)T\alpha \geq \alpha$ dır. $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$ olduğundan Teorem 2.2.6 (i) ile $\Theta(xa^{-1}, yb^{-1})T\alpha \geq \alpha$ dır. Buradan $xa^{-1} \in \left({}_G\Theta\right)_\alpha$ elde edilir. Böylece $\left({}_G\Theta\right)_\alpha$, G nin alt grubudur. (ii)'nin ispatı benzer şekildedir. (iii) ve (iv), sırasıyla $(\text{Çek}\Theta)_\alpha \subseteq \left({}_G\Theta\right)_\alpha$ ve $(\text{Çek}\Theta^{-1})_\alpha \subseteq (\Theta_H)_\alpha$ olduğu dikkate alınarak (i) ile benzer şekilde ispatlanır.

Önerme 2.2.15: $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$ olsun. Bu takdirde her $x, a \in G$ ve $y, b \in H$ için $\Theta(x,y)T\Theta(a,b) = \Theta(xa, yb)$ ise Θ sabittir.

İspat: $x, a \in G$ ve $y, b \in H$ olsun. Θ fonksiyon olduğundan $\Theta(x,y) = \alpha$ ve $\Theta(a,b) = \beta$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in L$ mevcuttur. $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$ olduğundan $\Theta(e,e) = \Theta(x,y)T\Theta(x^{-1}, y^{-1}) \leq \alpha T \alpha \leq \alpha$'dır. Benzer şekilde $\Theta(e,e) \leq \beta$ elde edilir. Böylece $\alpha = \Theta(x,y) = \Theta(x,y)T\Theta(e,e) = \alpha T \Theta(e,e) \leq \alpha T \beta \leq \beta$ dır. Benzer şekilde $\beta \leq \alpha$ dır. Böylece $\alpha = \beta$ olduğundan Θ sabittir.

Teorem 2.2.16: $\Theta \in F(G \times H, L)$ ve $F: G \longrightarrow F(H, L)$ olsun. Bu takdirde

(i) $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$ ise her $x, a \in G$ için $F_\Theta(x) \cdot_T F_\Theta(a) \leq F_\Theta(xa)$,

(ii) Her $x, a \in G$ ve $y, b \in H$ için $F(x) \cdot_T F(a) \leq F(xa)$ ise $\Theta_F(x,y)T\Theta_F(a,b) \leq \Theta_F(xa, yb)$.

İspat:

(i) $h \in H$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\big(F_\Theta(x) \cdot_T F_\Theta(a)\big)(h) &= \bigvee_{h=yb} F_\Theta(x)(y)TF_\Theta(a)(b) \\
&= \bigvee_{h=yb} \Theta(x,y)T\Theta(a,b) \\
&\leq \bigvee_{h=yb} \Theta(xa, yb) \\
&= \Theta(xa, h) \\
&= F_\Theta(xa)(h)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $F_\Theta(x) \cdot_T F_\Theta(a) \leq F_\Theta(xa)$ dır.

(ii) Her $x, a \in G$ ve $y, b \in H$ için

$$\begin{aligned}
\Theta_F(x,y)T\Theta_F(a,b) &= F(x)(y)TF(a)(b) \\
&\leq \bigvee_{yb=kt} F(x)(k)TF(a)(t) \\
&= \big(F(x) \cdot_T F(a)\big)(yb) \\
&\leq F(xa)(yb) \\
&= \Theta_F(xa, yb).
\end{aligned}$$

Böylece $\Theta_F(x,y)T\Theta_F(a,b) \leq \Theta_F(xa, yb)$ dir.

Aşağıdaki örnek gösterir ki her $x, a \in G$ için $F(x) \cdot_T F(a) \leq F(xa)$ ise $\Theta_F \in$ $\mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$ genel olarak doğru olmayabilir.

Örnek 2.2.17: $L = N_5$ ve $T = T_D$ olsun. $\mu, \nu, \eta \in F(\mathbb{Z}_2, L)$, sırasıyla $\mu(x) = 1, \nu(x) = \alpha$ ve $\eta(x) = 0$ olmak üzere $F: \mathbb{Z}_3 \longrightarrow F(\mathbb{Z}_2, L)$ fonksiyonu, her $a \in \mathbb{Z}_3$ için

$$F(a) = \begin{cases} \mu, & a = \overline{0} \\ \nu, & a = \overline{1} \\ \eta, & a = \overline{2} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde her $a, b \in \mathbb{Z}_3$ için $F(a) +_T F(b) \leq F(a+b)$ dir. Ancak $\Theta_F(\overline{1}, \overline{1}) = \alpha \nleq 0 = \Theta_F(\overline{2}, \overline{1})$ olduğundan $\Theta_F \notin \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2, T_D, L)$ dir.

Tanım 2.2.18: R, S halkalar ve $\Theta \in F(R \times S, L)$ olsun. Bu takdirde Θ ya, R den S ye bir TL-bulanık bağıntısal halka homomorfisi denir :⟺ Her $x, a \in R$ ve $y, b \in S$ için

(i) $\Theta(x, y) T \Theta(a, b) \leq \Theta(x + y, a + b)$,

(ii) $\Theta(x, y) T \Theta(a, b) \leq \Theta(xa, yb)$,

(iii) $\Theta(x, y) \leq \Theta(-x, -y)$.

Bir Θ TL-bulanık bağıntısal halka homomorfisine geniştir denir :⟺ Her $x, a \in R$ ve $y, b \in S$ için $\Theta(x, y) \vee \Theta(a, b) \leq \Theta(xa, yb)$ dir. R den S ye tüm TL-bulanık bağıntısal geniş halka homomorfilerinin kümesi $\mathrm{Hom}[R \times S, T, L]$ ile gösterilecektir. Θ, R den S ye TL-bulanık bağıntısal halka homomorfisi ise Θ, R den S ye TL-bulanık bağıntısal grup homomorfisidir.

Örnekler 2.2.19: R, S halkalar olsun.

(1) $\varphi \in \wp(R \times S)$ bağıntısal homomorfi, $\alpha, \beta \in L$ ve $\alpha \leq \beta$ ise $(\alpha, \beta)_\varphi \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ dir.

(2) $\Theta \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$, $\alpha \in L$ ve $\beta \in D_T$ ise Θ_β, (Θ_α) ve $[\Theta_\beta]$ bağıntısal homomorfilerdir.

(3) μ ve ν, sırasıyla R ve S nin TL-bulanık alt halkaları olsun. $\Theta \in F(R \times S, L)$, $\Theta(x, y) = \mu(x) T \nu(-y)$ olarak tanımlanırsa $\Theta \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ dir. Her $s \in S$ için $\nu(s) = 1$ olarak tanımlanan ν ve Örnek 1.8.4 (i)'deki μ alınırsa $0 \neq a \in R$ ve

$x, y \in S$ için $\Theta(0, x) \vee \Theta(a, y) = \delta \nleq \alpha = \Theta(0, xy)$ elde edildiğinden Θ genel olarak geniş olmayabilir. T, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm olmak üzere μ ve ν, sırasıyla R ve S nin birer TL-bulanık ideali ise Θ geniştir.

(4) $f \in \mathrm{Hom}(R, S)$ ve μ, S nin TL-bulanık alt halkası olmak üzere $\Theta \in F(R \times S, L)$, $\Theta(x, y) = \mu(f(x))T\mu(y)$ olarak tanımlanırsa $\Theta \in \mathrm{Hom}\ (R \times S, T, L)$ dir.

(5) $\Theta \in F(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, L)$,

$$\Theta(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\Theta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, T, L)$'dir. Fakat $\Theta(3,3) \vee \Theta(1,2) = 1 \vee 0 \nleq \Theta(3,6)$ olduğundan Θ geniş değildir.

(6) $\Theta \in F(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, L)$,

$$\Theta(x, y) = \begin{cases} 0, & x \text{ tek} \\ \alpha, & x \text{ çift } ve\ x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\Theta \in \mathrm{Hom}[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, T, L]$ dir.

Teorem 2.2.20: R, S halkalar ve $\Theta, \phi \in F(R \times S, L)$ olsun. Bu takdirde

(i) $\Theta \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ ise her $x, a \in R$ ve $y, b \in S$ için $\Theta(x, y)T\Theta(a, b) \leq \Theta(x - a, y - b)$,

(ii) $\Theta \in \mathrm{Hom}(R \times S, T_1, L)$ ve $T_2 \leq T_1$ ise $\Theta \in \mathrm{Hom}(R \times S, T_2, L)$,

(iii) $\Theta, \phi \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ ise $\Theta T \phi \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$.

İspat: Teorem 2.2.6'ya benzer şekilde ispatlanır.

Önerme 2.2.21: R, S halkalar olsun. Bu takdirde

(i) $\Theta \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ ise $\Theta^{-1} \in \mathrm{Hom}(S \times R, T, L)$,

(ii) $\Theta \in \mathrm{Hom}[R \times S, T, L]$ ise $\Theta^{-1} \in \mathrm{Hom}[S \times R, T, L]$.

İspat:

(i) Teorem 2.2.7 ile her $y, b \in S$ ve $x, a \in R$ için $\Theta^{-1}(y, x)T\Theta^{-1}(b, a) \leq \Theta^{-1}(y + b, x + a)$ ve $\Theta^{-1}(y, x) \leq \Theta^{-1}(-y, -x)$ tir. Her $y, b \in S$ ve $x, a \in R$ için

$$\begin{aligned} \Theta^{-1}(y, x)T\Theta^{-1}(b, a) &= \Theta(x, y)T\Theta(a, b) \\ &\leq \Theta(xa, yb) \end{aligned}$$

$$= \Theta^{-1}(yb, xa)$$

olduğundan $\Theta^{-1} \in \mathrm{Hom}(S \times R, T, L)$ dir.

(ii) $\Theta \in \mathrm{Hom}[R \times S, T, L]$ olsun. Bu durumda her $y, b \in S$ ve $x, a \in R$ için

$$\begin{aligned}\Theta^{-1}(y, x) \vee \Theta^{-1}(b, a) &= \Theta(x, y) \vee \Theta(a, b) \\ &\leq \Theta(xa, yb) \\ &= \Theta^{-1}(yb, xa)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 2.2.7 ile $\Theta^{-1} \in \mathrm{Hom}[S \times R, T, L]$ dir.

Teorem 2.2.22: R, S, K halkalar ve T, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm olsun. Bu takdirde

(i) $\Theta \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ ve $\phi \in \mathrm{Hom}(S \times K, T, L)$ ise $\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta \in \mathrm{Hom}(R \times K, T, L)$,

(ii) $\Theta \in \mathrm{Hom}[R \times S, T, L]$ ve $\phi \in \mathrm{Hom}[S \times K, T, L]$ ise $\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta \in \mathrm{Hom}[R \times K, T, L]$.

İspat:

(i) Teorem 2.2.8 ile her $x, a \in R$ ve $z, c \in K$ için $(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x, z) T (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(a, c) \leq (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x + a, z + c)$ ve $(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x, z) \leq (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x, z)$ dir. Her $x, a \in R$ ve $z, c \in K$ için

$$\begin{aligned}(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x, z) T (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(a, c) &= \bigvee_{y \in S} \Theta(x, y) T \phi(y, z) \; T \bigvee_{b \in S} \Theta(a, b) T \phi(b, c) \\ &= \bigvee_{y, b \in S} \Theta(x, y) T \Theta(a, b) T \phi(y, z) T \phi(b, c) \\ &\leq \bigvee_{y, b \in S} \Theta(xa, yb) T \phi(yb, zc) \\ &\leq \bigvee_{s \in S} \Theta(xa, s) T \phi(s, zc) \\ &= (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(xa, zc)\end{aligned}$$

olduğundan $\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta \in \mathrm{Hom}(R \times K, T, L)$ dir.

(ii) Θ ve ϕ, geniş olsun. Her $x, a \in R$ ve $z, c \in K$ için

$$\begin{aligned}(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x, z) \vee (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(a, c) &= \left(\bigvee_{y \in S} \Theta(x, y) T \phi(y, z)\right) \vee \left(\bigvee_{b \in S} \Theta(a, b) T \phi(b, c)\right) \\ &= \bigvee_{y, b \in S} \big(\Theta(x, y) T \phi(y, z)\big) \vee \big(\Theta(a, b) T \phi(b, c)\big) \\ &\leq \bigvee_{y, b \in S} \big(\Theta(x, y) \vee \Theta(a, b)\big) T \big(\phi(y, z) \vee \phi(b, c)\big)\end{aligned}$$

$$\leq \bigvee_{y,b\in S} \Theta(xa,yb)T\phi(yb,zc)$$
$$\leq \bigvee_{s\in S} \Theta(xa,s)T\phi(s,zc)$$
$$= (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(xa,zc).$$

elde edilir. Böylece Teorem 2.2.8 ile $\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta \in \mathrm{Hom}[R \times K, T, L]$ dir.

Teorem 2.2.23: $f: R \longrightarrow R'$ ve $g: S \longrightarrow S'$ halka homomorfileri olmak üzere

(i) T, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm ve $\Theta \in \mathrm{Hom}\ (R \times S, T, L)$ ise $(f,g)(\Theta) \in \mathrm{Hom}(R' \times S', T, L)$,

(ii) $\phi \in \mathrm{Hom}\ (R' \times S', T, L)$ ise $(f,g)^{-1}(\phi) \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$,

(iii) $\omega \in \mathrm{Hom}\ (R' \times S, T, L)$ ise $\omega_f \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$.

İspat:

(i) $x', a' \in R'$ ve $y', b' \in S'$ olsun. Teorem 2.2.10 (i) ile $(f,g)(\Theta)(x',y')T(f,g)(\Theta)(a',b') \leq (f,g)(\Theta)(x'+a', y'+b')$ ve $(f,g)(\Theta)(-x',-y')$ dir. Her $x', a' \in R'$ ve $y', b' \in S'$ için

$$(f,g)(\Theta)(x',y')T(f,g)(\Theta)(a',b') = \left(\bigvee_{\substack{f(x)=x'\\ g(y)=y'}} \Theta(x,y)\right) T \left(\bigvee_{\substack{f(a)=a'\\ g(b)=b'}} \Theta(a,b)\right)$$
$$= \bigvee_{\substack{f(x)=x'\\ g(y)=y'\\ f(a)=a'\\ g(b)=b'}} \Theta(x,y)T\Theta(a,b)$$
$$\leq \bigvee_{\substack{f(xa)=x'a'\\ g(yb)=y'b'}} \Theta(x,y)T\Theta(a,b)$$
$$\leq \bigvee_{\substack{f(xa)=x'a'\\ g(yb)=y'b'}} \Theta(xa,yb)$$
$$\leq \bigvee_{\substack{f(g)=x'a'\\ g(h)=y'b'}} \Theta(g,h)$$
$$= (f,g)(\Theta)(x'a',y'b')$$

elde edilir. Böylece $(f,g)(\Theta) \in \mathrm{Hom}(R' \times S', T, L)$ dir.

(ii) $x, a \in R$ ve $y, b \in S$ olsun. Teorem 2.2.10 (ii) ile $(f,g)^{-1}(\phi)(x,y)T(f,g)^{-1}(\phi)(a,b) \leq (f,g)^{-1}(\phi)(x+a, y+b)$ ve $(f,g)^{-1}(\phi)(x,y) \leq (f,g)^{-1}(\phi)(-x,-y)$ dir. Her $x, a \in R$ ve $y, b \in S$ için

$$\begin{aligned}(f,g)^{-1}(\phi)(x,y)T(f,g)^{-1}(\phi)(a,b) &= \phi\big(f(x), g(y)\big)T\phi\big(f(a), g(b)\big)\\ &\leq \phi\big(f(x)f(a), g(y)g(b)\big)\\ &= \phi\big(f(xa), g(yb)\big)\\ &= (f,g)^{-1}(\phi)(xa, yb)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(f,g)^{-1}(\phi) \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ dir.

(iii) $x, a \in R$ ve $y, b \in S$ olsun. Teorem 2.2.10 (iii) ile $\omega_f(x,y)T\omega_f(a,b) \leq \omega_f(x+a, y+b)$ ve $\omega_f(x,y) \leq \omega_f(-x,-y)$ dir. Her $x, a \in R$ ve $y, b \in S$ için

$$\begin{aligned}\omega_f(x,y)T\omega_f(a,b) &= \omega(f(x), y)T\omega(f(a), b)\\ &\leq \omega(f(x)f(a), yb)\\ &= \omega(f(xa), yb)\\ &= \omega_f(xa, yb)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\omega_f \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ dir.

Önerme 2.2.24: R, S halkalar olmak üzere $F: R \longrightarrow F(S, L)$ ve $\Theta \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ olsun.

(i) $\Theta_{(R,0)} = \text{Çek}\,\Theta$,

(ii) Her $r \in R$ için $F_\Theta(r)(0) = Çek\Theta(r)$,

(iii) $f \in \mathrm{Hom}(R, S)$ ise $1_f \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ olup $\text{Çek}1_f = 1_{\text{Çek}\, f}$ ve $\mathrm{Res}1_f = 1_{\mathrm{Res}\, f}$.

İspat: Önerme 2.2.12'ye benzer şekilde ispatlanır.

Önerme 2.2.25: $\Theta \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ olsun. Bu takdirde;

(i) ÇekΘ, R nin TL-bulanık alt halkasıdır,

(ii) $\Theta \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ geniş ise ÇekΘ, R nin TL-bulanık idealidir,

(iii) T, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm ise ResΘ, S nin TL-bulanık alt halkasıdır.

(iv) (Θ geniş ise) $\Theta_{(0,S)}$, R nin TL-bulanık alt halkasıdır (idealidir).

(v) Her $x, a \in R$ için $\Theta_{(x,S)} +_T \Theta_{(a,S)} \leq \Theta_{(x+a,S)}$ ve $\Theta_{(x,S)} \cdot_T \Theta_{(a,S)} \leq \Theta_{(xa,S)}$ dir.

İspat:

(i) Önerme 2.2.13 (i) ile her $x, a \in R$ için $\text{Çek}\Theta(x) T \text{Çek}\Theta(a) \leq \text{Çek}\Theta(x+a)$ ve $\text{Çek}\Theta(x) \leq \Theta(-x, 0)$ dir.

$$\text{Çek}\Theta(x) T \text{Çek}\Theta(a) = \Theta(x,0) T \Theta(a,0) \leq \Theta(xa, 0) = \text{Çek}\Theta(xa)$$

elde edildiğinden $\text{Çek}\Theta$, R nin TL-bulanık alt halkasıdır.

(ii) $\Theta \in \text{Hom}(R \times S, T, L)$ geniş ise her $x, a \in R$ için $\text{Çek}\Theta(x) \vee \text{Çek}\Theta(a) = \Theta(x,0) \vee \Theta(a,0) \leq \Theta(xa,0) = \text{Çek}\Theta(xa)$ elde edilir. Böylece (i) ile Çek Θ, R nin TL-bulanık idealidir.

(iii) $y, b \in S$ olsun. Önerme 2.2.13 (iii) ile $\text{Res}\Theta(y) T \text{Res}\,\Theta(b) \leq \text{Res}\Theta(y+b)$ ve $\text{Res}\Theta(y) \leq \text{Res}\Theta(-y)$ dir.

$$\begin{aligned}
\text{Res}\Theta(y) T \text{Res}\,\Theta(b) &= \left(\bigvee_{x \in R} \Theta(x,y)\right) T \left(\bigvee_{a \in R} \Theta(a,b)\right) \\
&= \bigvee_{x \in R} \bigvee_{a \in R} (\Theta(x,y) T \Theta(a,b)) \\
&\leq \bigvee_{x \in R} \bigvee_{a \in R} \Theta(xa, yb) \\
&\leq \bigvee_{xa \in R} \Theta(xa, yb) \\
&\leq \bigvee_{r \in R} \Theta(r, yb) \\
&= \text{Res}\Theta(yb).
\end{aligned}$$

Böylece $\text{Res}\Theta$, S nin TL-bulanık alt halkasıdır.

(iv) $\Theta_{(0,S)} = \text{Çek}\,\Theta^{-1}$ ve Önerme 2.2.21 ile $\Theta^{-1} \in \text{Hom}(S \times R, T, L)$ olduğundan (i) ile $\Theta_{(0,S)}$, S nin TL-bulanık alt halkasıdır. Θ geniş olsun. Bu durumda Önerme 2.2.21 ile Θ^{-1} geniş olup (ii) ile $\Theta_{(0,S)}$, S nin TL-bulanık idealidir.

(v) $t \in S$ olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned}
\left(\Theta_{(x,S)} \cdot_T \Theta_{(a,S)}\right)(t) &= \bigvee_{t=yb} \Theta_{(x,S)}(y) T \Theta_{(a,S)}(b) \\
&= \bigvee_{t=yb} \Theta(x,y) T \Theta(a,b) \\
&\leq \bigvee_{t=yb} \Theta(xa, yb) \\
&= \Theta(xa, t)
\end{aligned}$$

$$= \Theta_{(xa,S)}(t).$$

Böylece $\Theta_{(x,S)} \cdot_T \Theta_{(a,S)} \leq \Theta_{(xa,S)}$ elde edilir. Her $x, y \in R$ için $\Theta_{(x,S)} +_T \Theta_{(a,S)} \leq \Theta_{(x+a,S)}$ olduğu Önerme 2.2.13 (v)'te ispatlanmıştır.

Teorem 2.2.26: $\alpha \in L$ ve $\Theta \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ olsun. Bu takdirde,

(i) $\left({}_R\Theta\right)_\alpha \neq \emptyset$ ise $\left({}_R\Theta\right)_\alpha$, R nin alt halkasıdır,

(ii) $(\Theta_S)_\alpha \neq \emptyset$ ise $(\Theta_S)_\alpha$, S nin alt halkasıdır,

(iii) $(\text{Çek}\Theta)_\alpha \neq \emptyset$ ise $(\text{Çek}\Theta)_\alpha$, $\left({}_R\Theta\right)_\alpha$nın alt halkasıdır,

(iv) $(\text{Çek}\Theta^{-1})_\alpha \neq \emptyset$ ise $(\text{Çek}\Theta^{-1})_\alpha$, $(\Theta_S)_\alpha$ nın alt halkasıdır.

İspat: $x, a \in \left({}_R\Theta\right)_\alpha$ olsun. Teorem 2.2.14 ile $x - a \in \left({}_R\Theta\right)_\alpha$ dır. Ayrıca $\Theta(x, y)T\alpha \geq \alpha$ ve $\Theta(a, b)T\alpha \geq \alpha$ olacak şekilde $y, b \in S$ mevcuttur. Buradan $\Theta(x, y)T\Theta(a, b)T\alpha \geq \alpha$ elde edilir. $\Theta \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ olduğundan $\Theta(xa, yb)T\alpha \geq \alpha$ dır. Böylece $xa \in \left({}_R\Theta\right)_\alpha$ olup ve $\left({}_R\Theta\right)_\alpha$, R nin alt halkasıdır. (ii) için ispat, (i)'ye benzer şekildedir. (iii) ve (iv), sırasıyla $(\text{Çek}\Theta)_\alpha \subseteq (\Theta_R)_\alpha$ ve $(\text{Çek}\Theta^{-1})_\alpha \subseteq (\Theta_S)_\alpha$ olduğu dikkate alınarak (i) ile benzer şekilde ispatlanır.

Önerme 2.2.27: $\Theta \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ olsun. Bu takdirde, her $x, a \in R$ ve $y, b \in S$ için $\Theta(x, y)T\Theta(a, b) = \Theta(x + a, y + b)$ ise Θ sabittir.

İspat: Önerme 2.2.15'ten açıktır.

Tanım 2.2.28: M, N R-modüller ve $\Theta \in F(M \times N, L)$ olsun. Θ ya, M den N ye TL-bulanık bağıntısal modül homomorfisi denir :⟺ Her $x, a \in M, y, b \in N$ ve $r \in R$ için

i. $\Theta(x, y)T\Theta(a, b) \leq \Theta(x + a, y + b)$,

ii. $\Theta(x, y) \leq \Theta(rx, ry)$,

iii. $\Theta(x, y) \leq \Theta(-x, -y)$.

M den N ye tüm TL-bulanık bağıntısal R-modül homomorfilerinin kümesi $\mathrm{Hom}_R(M \times N, T, L)$ ile gösterilecektir. Θ, M den N ye TL-bulanık bağıntısal R-modül homomorfisi ise Θ, M den N ye TL-bulanık bağıntısal grup homomorfisidir.

Örnekler 2.2.29: M ve N R-modüller olsun.

(1) $\varphi \in \wp(M \times N)$ bağıntısal homomorfi, $\alpha, \beta \in L$ ve $\alpha \leq \beta$ ise $(\alpha, \beta)_\varphi \in$ Hom $_R(M \times N, T, L)$ dir.

(2) $\Theta \in$ Hom $_R(M \times N, T, L)$, $\alpha \in L$ ve $\beta \in D_T$ ise Θ_β, (Θ_α) ve $[\Theta_\beta]$ bağıntısal homomorfilerdir.

(3) $f \in$ Hom(M, N) ve μ, N nin TL-bulanık alt modülü olmak üzere $\Theta \in F(M \times N, L)$, $\Theta(x, y) = \mu(f(x))T\mu(y)$ olarak tanımlanırsa $\Theta \in$Hom $_R(M \times N, T, L)$'dir.

(4) $f \in$ Hom(M, N) ve μ, N nin TL-bulanık alt modülü olmak üzere $\Theta \in F(M \times N, L)$, $\Theta(x, y) = \mu(f(x) + y)$ olarak tanımlanırsa $\Theta \in$ Hom $_R(M \times N, T, L)$ dir.

(5) μ ve ν sırasıyla M ve N nin TL-bulanık alt modülleri olmak üzere $\Theta \in F(M \times N, L)$, $\Theta(x, y) = \mu(x)T\nu(-y)$ olarak tanımlanırsa $\Theta \in$ Hom $_R(M \times N, T, L)$ dir.

(6) $L = \{0, \alpha, \beta, 1\}$, Şekil 1'de verilen kafes ve $T = T_M$ olmak üzere $(G, +)$ bir değişmeli grup olsun. Bu takdirde $\Theta \in F(G \times \mathbb{Z}, L)$,

$$\Theta(g, z) = \begin{cases} 1, & g = 0 \text{ ve } z = 0 \text{ ise} \\ \beta, & g = 0 \text{ ve } z \neq 0 \text{ ise} \\ \alpha, & g \neq 0 \text{ ve } z = 0 \text{ ise} \\ 0, & g \neq 0 \text{ ve } z \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\Theta \in$ Hom $_R(G \times \mathbb{Z}, T, L)$ dir.

Teorem 2.2.30: M, N R-modüller ve $\Theta, \phi \in F(G \times H, L)$ olsun. Bu takdirde

(i) $\Theta \in$ Hom $_R(M \times N, T, L)$ ise her $x, a \in M$ ve $y, b \in N$ için $\Theta(x, y)T\Theta(a, b) \leq \Theta(x - a, y - b)$,

(ii) $\Theta \in$ Hom $_R(M \times N, T_1, L)$ ve $T_2 \leq T_1$ ise $\Theta \in$Hom $_R(M \times N, T_2, L)$,

(iii) $\Theta, \phi \in$ Hom $_R(M \times N, T, L)$ ise $\Theta T \phi \in$Hom $_R(M \times N, T, L)$.

İspat: Teorem 2.2.6 ile benzer şekilde ispatlanır.

Önerme 2.2.31: M, N R-modüller ve $\Theta \in$ Hom $_R(M \times N, T, L)$ ise $\Theta^{-1} \in$Hom $_R(N \times M, T, L)$ dir.

İspat: Teorem 2.2.7 ile $x, a \in M$ ve $y, b \in N$ için $\Theta^{-1}(y, x)T\Theta^{-1}(b, a) \leq \Theta^{-1}(y + b, x + a)$ ve $\Theta^{-1}(y, x) \leq \Theta^{-1}(-y, -x)$ dir. $x \in M$, $y \in N$ ve $r \in R$ olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned}\Theta^{-1}(y,x) &= \Theta(x,y)\\ &\leq \Theta(rx,ry)\\ &= \Theta^{-1}(ry,rx)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\Theta^{-1} \in \mathrm{Hom}_R(N \times M, T, L)$ dir.

Teorem 2.2.32: M, N, K R-modüller ve T, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm olsun. Bu takdirde

$\Theta \in \mathrm{Hom}_R(M \times N, T, L)$ ve $\phi \in \mathrm{Hom}_R(N \times K, T, L)$ ise

$\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta \in \mathrm{Hom}_R(M \times K, T, L)$ dir.

İspat: Teorem 2.2.8 ile her $x, a \in G$ ve $z, c \in K$ için $(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x,z)T(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(a,c) \leq (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x+a, z+c)$ ve $(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x,z) \leq (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(-x,-z)$ dir. $x \in M$, $z \in K$ ve $r \in R$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x,z) &= \bigvee_{y \in N} \Theta(x,y)T\phi(y,z)\\ &= \bigvee_{y \in N}\big(\Theta(x,y)T\phi(y,z)\big)\\ &\leq \bigvee_{y \in N}\big(\phi(rx,ry)T\Theta(ry,rz)\big)\\ &\leq \bigvee_{n \in N} \phi(rx,n)T\Theta(n,rz)\\ &= (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(rx,rz)\end{aligned}$$

olduğundan $\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta \in \mathrm{Hom}_R(M \times K, T, L)$ dir.

Teorem 2.2.33: $f: M \longrightarrow M'$ ve $g: N \longrightarrow N'$ modül homomorfileri olmak üzere

(i) T, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm ve $\Theta \in \mathrm{Hom}_R(M \times N, T, L)$ ise $(f,g)(\Theta) \in \mathrm{Hom}_R(M' \times N', T, L)$,

(ii) $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M' \times N', T, L)$ ise $(f,g)^{-1}(\phi) \in \mathrm{Hom}_R(M \times N, T, L)$,

(iii) $\omega \in \mathrm{Hom}_R(M' \times N, T, L)$ ise $\omega_f \in \mathrm{Hom}_R(M \times N, T, L)$.

İspat:

(i) Teorem 2.2.10 (i) ile $x', a' \in M'$ ve $y', b' \in N'$ için $(f,g)(\Theta)(x',y')T(f,g)(\Theta)(a',b') \leq (f,g)(\Theta)(x'+a',y'+b')$ ve $(f,g)(\Theta)(x',y') \leq (f,g)(\Theta)(-x',-y')$ dir. $x' \in M', y' \in N'$ ve $r \in R$ olsun. Bu takdirde,

$$
\begin{aligned}
(f,g)(\Theta)(x',y') &= \bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ g(y)=y'}} \Theta(x,y) \\
&\leq \bigvee_{\substack{f(x)=x' \\ g(y)=y'}} \Theta(rx,ry) \\
&\leq \bigvee_{\substack{f(rx)=rx' \\ g(ry)=ry'}} \Theta(rx,ry) \\
&= (f,g)(\Theta)(rx',ry')
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $(f,g)(\Theta) \in \text{Hom}_R(M' \times N', T, L)$ dir.

(ii) Teorem 2.2.10 (ii) ile her $x, a \in M$ ve $y, b \in N$ için $(f,g)^{-1}(\phi)(x,y)T(f,g)^{-1}(\phi)(a,b) \leq (f,g)^{-1}(\phi)(x+a,y+b)$ ve $(f,g)^{-1}(\phi)(x,y) \leq (f,g)^{-1}(\phi)(-x,-y)$ dir. $x \in M, y \in N$ ve $r \in R$ olsun. Bu takdirde,

$$
\begin{aligned}
(f,g)^{-1}(\phi)(x,y) &= \phi\big(f(x),g(y)\big) \\
&\leq \phi\big(rf(x),rg(y)\big) \\
&= \phi\big(f(rx),g(ry)\big) \\
&= (f,g)^{-1}(\phi)(rx,ry)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $(f,g)^{-1}(\phi) \in \text{Hom}_R(M \times N, T, L)$ dir.

(iii) Teorem 2.2.10 (iii) ile her $x, a \in M$ ve $y, b \in N$ için $\omega_f(x,y)T\omega_f(a,b) \leq \omega_f(x+a,y+b)$ ve $\omega_f(x,y) \leq \omega_f(-x,-y)$ dir. $x \in M, y \in N$ ve $r \in R$ olsun. Bu takdirde,

$$
\begin{aligned}
\omega_f(x,y) &= \omega(f(x),y) \\
&\leq \omega(rf(x),ry) \\
&= \omega(f(rx),ry) \\
&= \omega_f(rx,ry)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $\omega_f \in \text{Hom}_R(M \times N, T, L)$ dir.

Önerme 2.2.34: M,N R-modüller, $F: M \longrightarrow F(N,L)$ ve $\Theta \in \text{Hom}_R(M \times N, T, L)$ olsun.

(i) $\Theta_{(M,0)} = \text{Çek}\,\Theta$,

(ii) Her $x \in M$ için $F_\Theta(x)(0) = Çek\Theta(x)$,

(iii) $f \in \text{Hom}(M,N)$ ise $1_f \in \text{Hom}_R(M \times N, T, L)$ olup $\text{Çek}1_f = 1_{\text{Çek}\,f}$ ve $\text{Res}1_f = 1_{\text{Res}\,f}$.

İspat: İspat, Önerme 2.2.12 ile açıktır.

Önerme 2.2.35: $\Theta \in \text{Hom}_R(M \times N, T, L)$olsun. Bu takdirde;

(i) Çek Θ, M nin TL-bulanık alt modülüdür,

(ii) T, sonsuz $\vee$-dağılımlı ise Res Θ, N nin TL-bulanık alt modülüdür,

(iii) $\Theta_{(0,N)}$, M nin TL-bulanık alt modülüdür,

(iv) Her $x, a \in M$ için $\Theta_{(x,N)} +_T \Theta_{(a,N)} \leq \Theta_{(x+a,N)}$ dir.

İspat:

(i) Önerme 2.2.13 (i) ile $x, a \in M$ için $\text{Çek}\Theta(x) T\, \text{Çek}\Theta(a) \leq \text{Çek}\Theta(x+a)$ ve $\text{Çek}\Theta(x) \leq \text{Çek}\Theta(-x)$ dir. $x \in M$ ve $r \in R$ olsun. Bu takdirde,

$$\text{Çek}\Theta(x) = \Theta(x,0) \leq \Theta(rx,0) = \text{Çek}\Theta(rx)$$

elde edildiğinden Çek Θ, M nin TL-bulanık alt modülüdür.

(ii) Önerme 2.2.13 (iii) ile her $y, b \in H$ için $Res\Theta(y)\, TRes\Theta(b) \leq Res\Theta(y+b)$ ve $Res\Theta(y) \leq Res\Theta(-y)$ dir. $y \in N$ ve $r \in R$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}\text{Res}\Theta(y) &= \bigvee_{x \in M} \Theta(x,y) \\ &\leq \bigvee_{m \in M} \Theta(rx, ry) \\ &\leq \bigvee_{m \in M} \Theta(m, ry) \\ &= \text{Res}\Theta(ry)\end{aligned}$$

Böylece $\text{Res}\Theta$, N nin TL-bulanık alt modülüdür.

(iii) Önerme 2.2.31 ile $\Theta^{-1} \in \text{Hom}_R(N \times M, T, L)$ dir ve $\Theta_{(0,S)} = \text{Çek}\Theta^{-1}$olduğundan (i) ile $\Theta_{(0,S)}$, N nin bir TL-bulanık alt modülüdür.

(iv) Önerme 2.2.13 (v) ile açıktır.

Teorem 2.2.36: $\alpha \in L$ ve $\Theta \in \mathrm{Hom}_R(M \times N, T, L)$ olsun. Bu takdirde,

(i) $(\Theta_M)_\alpha \neq \emptyset$ ise $\left({}_M\Theta\right)_\alpha$, M nin alt modülüdür,

(ii) $(\Theta_N)_\alpha \neq \emptyset$ ise $(\Theta_N)_\alpha$, N nin alt modülüdür,

(iii) $(\text{Çek}\Theta)_\alpha \neq \emptyset$ ise $(\text{Çek}\Theta)_\alpha$, $\left({}_M\Theta\right)_\alpha$ nın alt modülüdür,

(iv) $(\text{Çek}\Theta^{-1})_\alpha \neq \emptyset$ ise $(\text{Çek}\Theta^{-1})_\alpha$, $(\Theta_N)_\alpha$ nın alt modülüdür.

İspat: Teorem 2.2.14 ile her $x, a \in \left({}_M\Theta\right)_\alpha$ için $x - a \in \left({}_M\Theta\right)_\alpha$dır. $x \in \left({}_M\Theta\right)_\alpha$ ve $r \in R$ olsun. Bu takdirde $\Theta(x, y)T\alpha \geq \alpha$ olacak şekilde $y \in N$ mevcuttur. $\Theta \in \mathrm{Hom}_R(M \times N, T, L)$ olduğundan $\Theta(rx, ry)T\alpha \geq \Theta(x, y)T\alpha \geq \alpha$ dır. Buradan $rx \in \left({}_M\Theta\right)_\alpha$ elde edilir. Böylece $\left({}_M\Theta\right)_\alpha$, M nin alt modülüdür. (ii) için ispat, (i)'ye benzer şekildedir. (iii) ve (iv), sırasıyla, $(\text{Çek}\Theta)_\alpha \subseteq (\Theta_M)_\alpha$ ve $(\text{Çek}\Theta^{-1})_\alpha \subseteq (\Theta_N)_\alpha$ olduğu dikkate alınarak (i) ile benzer şekilde ispatlanır.

2.3. Cebirsel Yapılarda TL-Bulanık Bağıntısal Homomorfilere Göre I-Alt ve T-Üst L-Bulanık Kaba Yaklaşımlar

Teorem 2.3.1: G, H gruplar, T sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm ve $\mu, \nu \in F(H, L)$ olsun. Bu takdirde $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$ ise $\overline{\Theta}^T(\mu) \cdot_T \overline{\Theta}^T(\nu) \leq \overline{\Theta}^T(\mu \cdot_T \nu)$ dir.

İspat: $g \in G$ olsun.

$$\left(\overline{\Theta}^T(\mu) \cdot_T \overline{\Theta}^T(\nu)\right)(g) = \bigvee_{g=ab} \overline{\Theta}^T(\mu)(a)T\overline{\Theta}^T(\nu)(b)$$

$$= \bigvee_{g=ab} \left(\bigvee_{k \in H} \Theta(a, k)T\mu(k)\right) T \left(\bigvee_{t \in H} \Theta(b, t)T\nu(t)\right)$$

$$= \bigvee_{g=ab} \left(\bigvee_{k,t \in H} \Theta(a, k)T\mu(k)T\Theta(b, t)T\nu(t)\right)$$

$$\leq \bigvee_{g=ab} \left(\bigvee_{k,t \in H} \Theta(ab, kt)T\mu(k)T\nu(t)\right)$$

$$= \bigvee_{g=ab}\left(\bigvee_{p=kt}\Theta(ab,kt)T\bigvee_{p=kt}\mu(k)T\nu(t)\right)$$

$$= \bigvee_{g=ab}\left(\bigvee_{p\in H}\Theta(ab,p)T(\mu\cdot_T\nu)(p)\right)$$

$$= \bigvee_{p\in H}\Theta(g,p)T(\mu\cdot_T\nu)(p)$$

$$= \overline{\Theta}^T(\mu\cdot_T\nu)(\mathrm{g}).$$

Böylece $\overline{\Theta}^T(\mu)\cdot_T\overline{\Theta}^T(\nu)\le\overline{\Theta}^T(\mu\cdot_T\nu)$ elde edilir.

Aşağıdaki örnek gösterir ki $\overline{\Theta}^T(\mu)\cdot_T\overline{\Theta}^T(\nu)=\overline{\Theta}^T(\mu\cdot_T\nu)$ genel olarak doğru değildir. Ayrıca I, (S,N)- veya R-gerektirme olmak üzere $\Theta\in\mathrm{Hom}(G\times H,T,L)$ olsa bile $\underline{\Theta_I}(\mu)\cdot_T\underline{\Theta_I}(\nu)\le\underline{\Theta_I}(\mu\cdot_T\nu)$ veya $\underline{\Theta_I}(\mu\cdot_T\nu)\le\underline{\Theta_I}(\mu)\cdot_T\underline{\Theta_I}(\nu)$ ifadeleri doğru olmayabilir.

Örnek 2.3.2: L, Şekil 1'de verilen kafes yapısı olmak üzere $T=T_M$ olsun.

(i) $\omega\in F(\mathbb{Z},L)$ ve $\phi\in\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},T,L)$,

$$\omega(x)=\begin{cases}\alpha, & x=0,\\ 1, & x\neq 0,\end{cases}\qquad \phi(x,y)=\begin{cases}1, & x=y=0,\\ \alpha, & x=0,y\neq 0,\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde $\left(\overline{\phi}^T(\omega)+_T\overline{\phi}^T(\omega)\right)(0)\le\alpha$ ve $\overline{\phi}^T(\omega+_T\omega)(0)=1$ olduğundan $\overline{\phi}^T(\omega)+_T\overline{\phi}^T(\omega)\neq\overline{\phi}^T(\omega+_T\omega)$ dır.

(ii) $\mu,\nu\in F(\mathbb{Z}_3,L)$ aşağıdaki tabloda verilmiş olup $\mu+\nu\in F(\mathbb{Z}_3,L)$ hesaplanmıştır:

Tablo 2. Örnek 2.3.2 (ii)'deki L-bulanık alt kümeler

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\mu(x)$	1	α	α
$\nu(x)$	β	0	0
$(\mu+\nu)(x)$	β	0	0

$\Theta \in F(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3, L)$,

$$\Theta(x,y) = \begin{cases} 1, & x = \bar{0} \\ 0, & x = \bar{1}, \\ \beta, & x = \bar{2}, \\ 0, & x = \bar{3}, \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\Theta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3, L$ dir. I, T_M ile üretilmiş R-gerektirme olmak üzere $\underline{\Theta}_J(\mu), \underline{\Theta}_J(\nu), \left(\underline{\Theta}_J(\mu) + \underline{\Theta}_J(\nu)\right)$ ve $\underline{\Theta}_J(\mu+\nu)$ aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 3. Örnek 2.3.2 (ii)'deki I-alt L-bulanık kaba yaklaşımlar

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\underline{\Theta}_J(\mu)(x)$	α	1	α	1
$\underline{\Theta}_J(\nu)(x)$	0	1	α	1
$\left(\underline{\Theta}_J(\mu) + \underline{\Theta}_J(\nu)\right)(x)$	1	α	1	α
$\underline{\Theta}_J(\mu+\nu)(x)$	0	1	α	1

Buradan $\underline{\Theta}_J(\mu) + \underline{\Theta}_J(\nu) \nleq \underline{\Theta}_J(\mu+\nu)$ ve $\underline{\Theta}_J(\mu+\nu) \nleq \underline{\Theta}_J(\mu) + \underline{\Theta}_J(\nu)$ olduğu görülür. Şimdi $S = S_M$ ve her $\alpha \in L$ için $\mathcal{N}(\alpha) = \bigvee_{\alpha T t = 0} t$ olsun. I, (S,N)-gerektirme olmak üzere $\underline{\Theta}_J(\mu), \underline{\Theta}_J(\nu), \left(\underline{\Theta}_J(\mu) + \underline{\Theta}_J(\nu)\right)$ ve $\underline{\Theta}_J(\mu+\nu)$ aşağıdaki tabloda hesaplanmıştır:

Tablo 4. Örnek 2.3.2 (ii)'deki I-alt L-bulanık kaba yaklaşımlar

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\underline{\Theta}_J(\mu)(x)$	α	1	α	1
$\underline{\Theta}_J(\nu)(x)$	0	1	α	1
$\left(\underline{\Theta}_J(\mu) + \underline{\Theta}_J(\nu)\right)(x)$	1	α	1	α
$\underline{\Theta}_J(\mu+\nu)(x)$	0	1	α	1

Böylece $\underline{\Theta}_J(\mu) + \underline{\Theta}_J(\nu) \nleq \underline{\Theta}_J(\mu+\nu)$ ve $\underline{\Theta}_J(\mu+\nu) \nleq \underline{\Theta}_J(\mu) + \underline{\Theta}_J(\nu)$ olduğu görülür.

Önerme 2.3.3: $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times H, T, L)$ ve $\phi \in \mathrm{Hom}(H \times K, T, L)$ olsun. Bu takdirde;

(i) Her $x, a \in G$ için $\overline{\Theta}^T\left(F_\Theta(x)\right)(a) \leq \text{Çek}\,\Theta(ax^{-1})$,

(ii) $\overline{\Theta}^T(\text{Çek}\,\phi) = \text{Çek}(\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)$,

(iii) $\underline{\Theta}_I(\text{Çek}\,\phi) = \text{Çek}\left(\phi \mathbin{\underline{\circ}_I} \Theta\right)$,

(iv) T, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm olmak üzere $\overline{\Theta}^{T}(\mathrm{Res}\phi^{-1}) = \mathrm{Res}(\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)^{-1}$,

(v) $\underline{\Theta}_I(\mathrm{Res}\phi^{-1}) \geq \mathrm{Res}\big(\phi \mathbin{\underline{\circ}_I} \Theta\big)^{-1}$,

(vi) $\overline{\phi^{-1}}^{T}(\text{Çek}\phi^{-1}) = \text{Çek}(\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)^{-1}$,

(vii) $\underline{\phi^{-1}}_I(\text{Çek}\Theta^{-1}) = \text{Çek}\big(\Theta^{-1} \mathbin{\underline{\circ}_I} \phi^{-1}\big)$,

(viii) T, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm olmak üzere $\overline{\phi^{-1}}^{T}(\mathrm{Res}\,\Theta) = \mathrm{Res}(\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)$,

(ix) $\underline{\phi^{-1}}_I(\mathrm{Res}\,\Theta) \geq \mathrm{Res}\big(\Theta^{-1} \mathbin{\underline{\circ}_I} \phi^{-1}\big)^{-1}$.

İspat:

(i) $x, a \in G$ olsun.

$$\begin{aligned}
\overline{\Theta}^{T}\big(F_{\Theta}(x)\big)(a) &= \bigvee_{h\in H} \Theta(a,h) T F_{\Theta}(x)(h) \\
&= \bigvee_{h\in H} \Theta(a,h) T \Theta(x,h) \\
&\leq \bigvee_{h\in H} \Theta(a,h) T \Theta(x^{-1},h^{-1}) \\
&\leq \bigvee_{h\in H} \Theta(ax^{-1},e) \\
&= \Theta(ax^{-1},e) \\
&= \text{Çek}\Theta(ax^{-1}).
\end{aligned}$$

Böylece her $x, a \in G$ için $\overline{\Theta}^{T}\big(F_{\Theta}(x)\big)(a) \leq \text{Çek}\,\Theta(ax^{-1})$ elde edilir.

(ii) $x \in G$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\overline{\Theta}^{T}(\text{Çek}\,\phi\,)(x) &= \bigvee_{y\in H} \Theta(x,y) T \text{Çek}\,\phi(y) \\
&= \bigvee_{y\in H} \Theta(x,y) T \phi(y,e) \\
&= (\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)(x,e) \\
&= \text{Çek}(\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)(x).
\end{aligned}$$

Böylece $\overline{\Theta}^{T}(\text{Çek}\,\phi\,) = \text{Çek}(\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)$ elde edilir.

(iii) $x \in G$ olsun. Bu takdirde

$$\underline{\Theta}_I(\text{Çek}\,\phi\,)(x) = \bigwedge_{y\in H} \Theta(x,y) I \text{Çek}\,\phi(y)$$

$$= \bigwedge_{y\in H} \Theta(x,y) I \phi(y,e)$$
$$= (\phi \,\underline{\circ}_I\, \Theta)(x,e)$$
$$= \text{Çek}(\phi \,\underline{\circ}_I\, \Theta)(x).$$

Böylece $\underline{\Theta}_I(\text{Çek}\,\phi\,) = \text{Çek}(\phi \,\underline{\circ}_I\, \Theta)$ elde edilir.

(iv) $x \in G$ olsun. Bu takdirde

$$\overline{\Theta}^T(\text{Res}\phi^{-1})(x) = \bigvee_{y\in H} \Theta(x,y) T \text{Res}\phi^{-1}(y)$$
$$= \bigvee_{y\in H} \Theta(x,y) T \left(\bigvee_{z\in K} \phi^{-1}(z,y) \right)$$
$$= \bigvee_{y\in H} \bigvee_{z\in K} \Theta(x,y) T \phi^{-1}(z,y)$$
$$= \bigvee_{z\in K} \bigvee_{y\in H} \Theta(x,y) T \phi(y,z)$$
$$= \bigvee_{z\in K} (\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)(x,z)$$
$$= \text{Res}(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)^{-1}(x).$$

Böylece $\overline{\Theta}^T(\text{Res}\phi^{-1}) = \text{Res}(\phi \,\bar{\circ}_T\, \Theta)^{-1}$ dir.

(v) $x \in G$ olsun. Bu takdirde

$$\underline{\Theta}_I(\text{Res}\phi^{-1})(x) = \bigwedge_{y\in H} \Theta(x,y) I \text{Res}\phi^{-1}(y)$$
$$= \bigwedge_{y\in H} \Theta(x,y) I \left(\bigvee_{z\in K} \phi(y,z) \right)$$
$$\geq \bigwedge_{y\in H} \left(\bigvee_{z\in K} \Theta(x,y) I \phi(y,z) \right)$$
$$\geq \bigvee_{z\in K} \left(\bigwedge_{y\in H} \Theta(x,y) I \phi(y,z) \right)$$
$$= \bigvee_{z\in K} (\phi \,\underline{\circ}_I\, \Theta)(x,z)$$
$$= \text{Res}(\phi \,\underline{\circ}_I\, \Theta)^{-1}(x).$$

Böylece $\underline{\Theta}_I(\text{Res}\phi^{-1}) \geq \text{Res}(\phi \,\underline{\circ}_I\, \Theta)^{-1}$ dir.

(vi) $z \in K$ olsun. Bu takdirde

$$\overline{\phi^{-1}}^{T}(\text{Çek}\Theta^{-1})(z) = \bigvee_{y \in H} \phi^{-1}(z,y) T \text{Çek}\Theta^{-1}(y)$$
$$= \bigvee_{y \in H} \Theta(e,y) T \phi(y,z)$$
$$= (\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)(e,z)$$
$$= \text{Çek}(\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)^{-1}(z).$$

Böylece $\overline{\phi^{-1}}^{T}(\text{Çek}\Theta^{-1}) = \text{Çek}(\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)^{-1}$ elde edilir.

(vii) $z \in K$ olsun. Bu takdirde

$$\underline{\phi^{-1}}_{I}(\text{Çek}\Theta^{-1})(z) = \bigwedge_{y \in H} \phi^{-1}(z,y) I \text{Çek}\Theta^{-1}(y)$$
$$= \bigwedge_{y \in H} \phi^{-1}(z,y) I \Theta^{-1}(y,e)$$
$$= \text{Çek}\left(\Theta^{-1} \mathbin{\underline{\circ}_I} \phi^{-1}\right)(z).$$

Böylece $\underline{\phi^{-1}}_{I}(\text{Çek}\Theta^{-1}) = \text{Çek}\left(\Theta^{-1} \mathbin{\underline{\circ}_I} \phi^{-1}\right)$ dir.

(viii) $z \in K$ olsun. Bu takdirde

$$\overline{\phi^{-1}}^{T}(\text{Res}\ \theta)(z) = \bigvee_{y \in H} \phi^{-1}(z,y) T \text{Res}\ \theta(y)$$
$$= \bigvee_{y \in H} \phi(y,z) T \left(\bigvee_{x \in G} \theta(x,y)\right)$$
$$= \bigvee_{x \in G} \left(\bigvee_{y \in H} \theta(x,y) T \phi(y,z)\right)$$
$$= \bigvee_{x \in G} (\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)(x,z)$$
$$= \text{Res}(\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)(z).$$

Böylece $\overline{\phi^{-1}}(\text{Res}\ \theta) = \text{Res}(\phi \mathbin{\bar{\circ}_T} \Theta)$ elde edilir.

(ix) $z \in K$ olsun. Bu takdirde

$$\underline{\phi^{-1}}_{I}(\text{Res}\ \theta)(z) = \bigwedge_{y \in H} \phi^{-1}(z,y) I \text{Res}\ \theta(y)$$
$$= \bigwedge_{y \in H} \phi^{-1}(z,y) I \left(\bigvee_{x \in G} \theta(x,y)\right)$$

$$\geq \bigwedge_{y\in H}\bigvee_{x\in G}\phi^{-1}(z,y)I\theta(x,y)$$

$$\geq \bigvee_{x\in G}\bigwedge_{y\in H}\phi^{-1}(z,y)I\Theta^{-1}(y,x)$$

$$=\bigvee_{x\in G}\left(\Theta^{-1}\,\underline{\circ}_I\,\phi^{-1}\right)(z,x)$$

$$=\mathrm{Res}\left(\Theta^{-1}\,\underline{\circ}_I\,\phi^{-1}\right)^{-1}(z).$$

Böylece $\underline{\phi^{-1}}_I(\mathrm{Res}\ \Theta)\geq \mathrm{Res}\left(\Theta^{-1}\,\underline{\circ}_I\,\phi^{-1}\right)^{-1}$ elde edilir.

Teorem 2.3.4: G,Hgruplar, T sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm ve μ, H nin TL-bulanık alt grubu olsun. Bu takdirde Θ ∈Hom$(G\times H,T,L)$ ise $\overline{\Theta}^T(\mu)$, G nin TL-bulanık alt grubudur.

İspat: $x,a\in G$ olsun. Bu takdirde

$$\overline{\Theta}^T(\mu)(x)T\overline{\Theta}^T(\mu)(a)=\bigvee_{y\in H}\Theta(x,y)T\mu(y)\;T\bigvee_{b\in H}\Theta(a,b)T\mu(b)$$

$$=\bigvee_{y\in H}\bigvee_{b\in H}\Theta(x,y)T\mu(y)T\Theta(a,b)T\mu(b)$$

$$=\bigvee_{y,b\in H}\Theta(x,y)T\Theta(a,b)T\mu(y)T\mu(b)$$

$$\leq\bigvee_{yb\in H}\Theta(xa,yb)T\mu(yb)$$

$$=\bigvee_{h\in H}\Theta(xa,h)T\mu(h)$$

$$=\overline{\Theta}^T(\mu)(xa),$$

$$\overline{\Theta}^T(\mu)(x)=\bigvee_{h\in H}\Theta(x,h)T\mu(h)$$

$$\leq\bigvee_{h^{-1}\in H}\Theta(x^{-1},h^{-1})T\mu(h^{-1})$$

$$=\overline{\Theta}^T(\mu)(x^{-1}).$$

Böylece $\overline{\Theta}^T(\mu)$, G nin TL-bulanık alt grubudur.

Aşağıdaki örnek gösterir ki Teorem 2.3.4'teki koşullar altında μ, H nin TL-bulanık normal alt grubu olsa bile $\overline{\Theta}^{T}(\mu)$, G nin TL-bulanık normal alt grubu olmayabilir.

Örnek 2.3.5: $H = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0\right\}$ ve $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, 1\}$ Şekil 2'de verilen kafes olsun ve $\Theta: H \times \mathbb{Z} \longrightarrow L$,

$$\Theta\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, z\right) = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ \delta, & y \neq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde $\Theta \in \mathrm{Hom}(H \times \mathbb{Z}, T_D, L)$ dir. Her $z \in \mathbb{Z}$ için

$$\mu(z) = \begin{cases} \delta, & z \text{ çift} \\ \beta, & z \text{ tek} \end{cases}$$

olarak tanımlanan μ, $\mathbb{Z}$ nin $T_D L$-bulanık alt grubudur. Böylece μ nün T_D-bulanık üst kaba yaklaşımı, her $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ için,

$$\overline{\Theta}^{T_D}(\mu)\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \delta, & y = 0 \\ 0, & y \neq 0 \end{cases}$$

olarak elde edilir. $\mathbb{Z}$ nin her TL-bulanık alt grubu normal olduğundan μ normaldir. Ancak buna rağmen,

$$\overline{\Theta}^{T_D}(\mu)\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \overline{\Theta}^{T_D}(\mu)\left(\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \delta$$

ve

$$\overline{\Theta}^{T_D}(\mu)\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \overline{\Theta}^{T_D}(\mu)\left(\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

olduğundan $\overline{\Theta}^{T_D}(\mu)$, H nin $T_D L$-bulanık normal alt grubu değildir.

Aşağıdaki örnek gösterir ki Teorem 2.3.4, μ nün I-alt L-bulanık kaba yaklaşımları için doğru olmayabilir.

Örnek 2.3.6: $T = T_M$ olmak üzere $\mu \in F(\mathbb{Z}, [0,1])$ ve $\Theta \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, [0,1])$,

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \text{ çift} \\ \frac{1}{5}, & x \text{ tek} \end{cases}, \quad \Theta(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \text{ çift} \\ \frac{1}{7}, & x \text{ tek} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

$$\underline{\Theta}_I(\mu)(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & x \text{ çift} \\ 1, & x \text{ tek} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece $\underline{\Theta}_J(\mu)(1)T\underline{\Theta}_J(\mu)(1) = 1T1 = 1 \nleq \frac{1}{5} = \underline{\Theta}_J(\mu)(2)$ olduğundan $\underline{\Theta}_J(\mu)$, $\mathbb{Z}$ nin bulanık alt grubu değildir.

Teorem 2.3.7: $\mu, \nu \in F(S,L)$, $\Theta \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ ve T, L üzerinde sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm olsun. Bu takdirde;

(i) $\bar{\Theta}^T(\mu) +_T \bar{\Theta}^T(\nu) \leq \bar{\Theta}^T(\mu +_T \nu)$,

(ii) $\bar{\Theta}^T(\mu) \cdot_T \bar{\Theta}^T(\nu) \leq \bar{\Theta}^T(\mu \cdot_T \nu)$,

(iii) $\bar{\Theta}^T(\mu) \odot_T \bar{\Theta}^T(\nu) \leq \bar{\Theta}^T(\mu \odot_T \nu)$.

İspat:

(i) Teorem 2.3.1 ile açıktır.

(ii) Teorem 2.3.1'e benzer şekilde ispatlanır.

(iii) $r \in R$ olsun. Bu takdirde

$$\left(\bar{\Theta}^T(\mu) \odot_T \bar{\Theta}^T(\nu)\right)(r) = \bigvee_{r=\sum_{i=1}^n x_i y_i} T_{i=1}^n\left(\bar{\Theta}^T(\mu)(x_i) T \bar{\Theta}^T(\nu)(y_i)\right)$$

$$= \bigvee_{r=\sum_{i=1}^n x_i y_i} T_{i=1}^n \left(\bigvee_{a_i \in S} \Theta(x_i, a_i) T \mu(a_i)\, T \bigvee_{b_i \in S} \Theta(y_i, b_i) T \nu(b_i) \right)$$

$$= \bigvee_{r=\sum_{i=1}^n x_i y_i} T_{i=1}^n \left(\bigvee_{a_i, b_i \in S} \Theta(x_i, a_i) T \mu(a_i)\, T \Theta(y_i, b_i) T \nu(b_i) \right)$$

$$\leq \bigvee_{r=\sum_{i=1}^n x_i y_i} T_{i=1}^n \left(\bigvee_{a_i, b_i \in S} \Theta(x_i y_i, a_i b_i) T \mu(a_i) T \nu(b_i) \right)$$

$$= \bigvee_{r=\sum_{i=1}^n x_i y_i} \left(T_{i=1}^n \bigvee_{a_i, b_i \in S} \Theta(x_i y_i, a_i b_i) \right) T \left(T_{i=1}^n \bigvee_{a_i, b_i \in S} \mu(a_i) T \nu(b_i) \right)$$

$$\leq \bigvee_{r=\sum_{i=1}^n x_i y_i} \left(\bigvee_{a_i, b_i \in S} \Theta\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i, \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \right) T \left(T_{i=1}^n \bigvee_{a_i, b_i \in S} \mu(a_i) T \nu(b_i) \right)$$

$$= \bigvee_{s_i = a_i b_i} \Theta\left(r, \sum_{i=1}^n s_i \right) T \left(\bigvee_{s_i = a_i b_i} T_{i=1}^n \left(\mu(a_i) T \nu(b_i)\right) \right)$$

$$\leq \bigvee_{s_i \in S} \Theta\left(r, \sum_{i=1}^{n} s_i\right) T(\mu \odot_T \nu)\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)$$
$$\leq \bigvee_{s \in S} \Theta(r, s)\, T(\mu \odot_T \nu)(s)$$
$$= \bar{\Theta}^T(\mu \odot_T \nu)(r).$$

Teorem 2.3.8: $\Theta \in \mathrm{Hom}(R \times S, T, L)$ olmak üzere μ, S nin TL-bulanık alt halkası ve T, L üzerinde sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm olsun. Bu takdirde

(i) $\overline{\Theta}^T(\mu)$, R nin TL-bulanık alt halkasıdır,

(ii) Θ geniş ve μ, S nin TL-bulanık ideali ise $\overline{\Theta}^T(\mu)$, R nin TL-bulanık idealidir.

İspat:

(i) $x, a \in R$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\bar{\Theta}^T(\mu)(x) T \bar{\Theta}^T(\mu)(a) &= \bigvee_{y \in S} \Theta(x, y) T\mu(y)\, T \bigvee_{b \in S} \Theta(a, b) T\mu(b) \\
&= \bigvee_{y \in S} \bigvee_{b \in S} \Theta(x, y) T\mu(y) T\Theta(a, b) T\mu(b) \\
&\leq \bigvee_{y \in S} \bigvee_{b \in S} \Theta(xa, yb) T\mu(yb) \\
&\leq \bigvee_{s \in S} \Theta(xa, s) T\mu(s) \\
&= \bar{\Theta}^T(\mu)(xa)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 2.3.4 ile $\overline{\Theta}^T(\mu)$, R nin TL-bulanık alt halkasıdır.

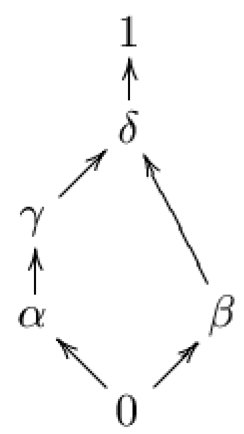
(ii) $x, a \in R$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\bar{\Theta}^T(\mu)(x) \vee \bar{\Theta}^T(\mu)(a) &= \bigvee_{y \in S} \Theta(x, y) T\mu(y) \vee \bigvee_{b \in S} \Theta(a, b) T\mu(b) \\
&= \bigvee_{y \in S} \bigvee_{b \in S} \Theta(x, y) T\mu(y) T\Theta(a, b) T\mu(b) \\
&= \bigvee_{y, b \in S} \Big(\big(\Theta(x, y) T\mu(y)\big) \vee \Theta(a, b)\Big) T \Big(\big(\Theta(a, b) T\mu(b)\big) \vee \mu(y)\Big) \\
&\leq \bigvee_{y, b \in S} \big(\Theta(x, y) \vee \Theta(a, b)\big) T\big(\mu(y) \vee \mu(b)\big)
\end{aligned}$$

$$\leq \bigvee_{y,b\in S} \Theta(xa,yb)T\mu(yb)$$
$$\leq \bigvee_{s\in S} \Theta(xa,s)T\mu(s)$$
$$= \overline{\Theta}^T(\mu)(xa)$$

elde edildiğinden (i) ile $\overline{\Theta}^T(\mu)$, R nin TL-bulanık idealidir.

Örnek 2.3.9: $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, 1\}$ kafes diyagramı aşağıdaki şekilde olsun.



Şekil 5. L kafes diyagramı

T_D, L üzerinde sonsuz $\vee$-dağılımlı t-normdur. $\mu \in F(\mathbb{Z}_3, L)$ ve $\Theta \in$ Hom$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3, T, L)$,

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x = \overline{0} \\ \gamma, & x = \overline{1} \\ \gamma, & x = \overline{2} \end{cases} \qquad \Theta(x,y) = \begin{cases} \alpha, & x = \overline{0} \\ \beta, & x \neq \overline{0} \end{cases}$$

olarak tanımlansınırsa her $x \in \mathbb{Z}_4$ için $\underline{\Theta_I}(\mu)(x) = \begin{cases} 1, & x = \overline{0} \\ \delta, & x \neq \overline{0} \end{cases}$ ve $\overline{\Theta}^T(\mu)(x) = \begin{cases} \alpha, & x = \overline{0} \\ \beta, & x \neq \overline{0} \end{cases}$ elde edilir. $\underline{\Theta_I}(\mu)$ ve $\overline{\Theta}^T(\mu)$, $\mathbb{Z}_4$ ün TL-bulanık alt halkalarıdır.

Aşağıdaki örnek gösterir ki Teorem 2.3.8, μ nün I-alt L-bulanık kaba yaklaşımları için genel olarak doğru değildir. Θ geniş ve μ, S nin TL-bulanık ideali olsa bile $\underline{\Theta_I}(\mu)$, R nin TL-bulanık alt halkası olmayabilir.

Örnek 2.3.10: $T = T_M$ ve Örnekler 2.2.19 (6)'daki L ve Θ alınmış olsun. $\mu \in F(\mathbb{Z}_2, L)$,

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x = \bar{0} \\ \alpha, & x = \bar{1} \end{cases}$$

Bu takdirde μ, $\mathbb{Z}_2$ nin L-bulanık idealidir ve her $x \in \mathbb{Z}$ için,

$$\underline{\Theta}_I(\mu)(x) = \begin{cases} \alpha, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

elde edilir. Ancak $\underline{\Theta}_I(\mu)(2)T\underline{\Theta}_I(\mu)(-2) = 1 \nleq \alpha = \underline{\Theta}_I(\mu)(0) = \underline{\Theta}_I(\mu)\big(2 + (-2)\big)$ olduğundan $\underline{\Theta}_I(\mu)$, $\mathbb{Z}$ nin L-bulanık alt halkası değildir.

Teorem 2.3.11: M R-modül ve N S-modül, T sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm olmak üzere $\nu \in F(S, L)$, $\mu \in F(N, L)$, $\Theta \in F(M \times N, L)$ ve $\phi \in F(R \times S, L)$ olsun. Bu takdirde $\overline{\phi}^T(\nu) \cdot_T \overline{\Theta}^T(\mu) \leq \overline{\phi \cdot_T \Theta}^T(\nu \cdot_T \mu)$ dir.

İspat: Her $x \in M$ için

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\phi}^T(\nu) \cdot_T \overline{\Theta}^T(\mu)\right)(x) &= \bigvee_{x=rm} \overline{\phi}^T(\nu)(r) T \overline{\Theta}^T(\mu)(m) \\
&= \bigvee_{x=rm} \left(\bigvee_{s\in S} \phi(r,s)T\nu(s)\right) T \left(\bigvee_{n\in N} \Theta(m,n)T\mu(n)\right) \\
&= \bigvee_{x=rm} \bigvee_{s\in S, n\in N} \phi(r,s)T\Theta(m,n)T\nu(s)T\mu(n) \\
&\leq \bigvee_{x=rm} \bigvee_{y=sn} \phi(r,s)T\Theta(m,n)T\nu(s)T\mu(n) \\
&\leq \left(\bigvee_{\substack{x=rm \\ y=sn}} \phi(r,s)T\Theta(m,n)\right) T \left(\bigvee_{y=sn} \nu(s)T\mu(n)\right) \\
&= \bigvee_{y\in N} (\phi \cdot_T \Theta)(x,y) T (\nu \cdot_T \mu)(y) \\
&= \overline{\phi \cdot_T \Theta}^T(\nu \cdot_T \mu)(x).
\end{aligned}$$

Böylece $\overline{\phi}^T(\nu) \cdot_T \overline{\Theta}^T(\mu) \leq \overline{\phi \cdot_T \Theta}^T(\nu \cdot_T \mu)$ elde edilir.

Teorem 2.3.12: μ, N nin TL-bulanık alt modülü ve T sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm olsun. Bu takdirde $\Theta \in \mathrm{Hom}_R(M \times N, T, L)$ ise $\overline{\Theta}^T(\mu)$, M nin TL-bulanık alt modülüdür.

İspat: Her $m \in M$ ve her $r \in R$ için

$$\begin{aligned}
\overline{\Theta}^T(\mu)(m) &= \bigvee_{n \in N} \Theta(m,n)T\mu(n) \\
&\leq \bigvee_{n \in N} \Theta(rm,rn)T\mu(rn) \\
&\leq \bigvee_{rn \in N} \Theta(rm,rn)T\mu(rn) \\
&\leq \bigvee_{n \in N} \Theta(rm,n)T\mu(n) \\
&= \overline{\Theta}^T(\mu)(rm).
\end{aligned}$$

Böylece Teorem 2.3.4 ile $\overline{\Theta}^T(\mu)$, M nin TL-bulanık alt modülüdür.

Aşağıdaki örnek gösterir ki Teorem 2.3.12**,** μ nün I-alt L-bulanık kaba yaklaşımları için doğru olmayabilir.

Örnek 2.3.13: $G \neq \{0\}, T = T_M$ ve Örnekler 2.2.29 (6)'daki Θ alınmış olsun.
$\mu \in F(\mathbb{Z}, L)$,

$$\mu(z) = \begin{cases} 1, & z = 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa μ, $\mathbb{Z}$ nin L-bulanık alt modülüdür. Böylece her $g \in G$ için

$$\underline{\Theta_I}(\mu)(g) = \begin{cases} \alpha, & g = 0 \\ 1, & g \neq 0 \end{cases}$$

olarak elde edilir. $G \neq \{0\}$ olduğundan $g \neq 0$ olan $g \in G$ mevcuttur. Buradan

$\underline{\Theta_I}(\mu)(g)T\underline{\Theta_I}(\mu)(-g) = 1 \nleq \alpha = \underline{\Theta_I}(\mu)(0)$ olduğu görülür. Böylece $\Theta \in \mathrm{Hom}(G \times \mathbb{Z}, T_M, L)$ olmasına rağmen $\underline{\Theta_I}(\mu)$, G nin L-bulanık alt modülü değildir.

2.4. Genelleştirilmiş Kaba Alt ve *I*-Alt *L*-Bulanık Kaba Yaklaşımların Kafesleri

Teorem 2.4.1: $\varphi \subseteq G \times H$ ve $L = \left\{\underline{\varphi}(A) \middle| A \leq H\right\}$ olsun. Bu takdirde $(L, \subseteq)$ tam kafestir.

İspat: Teorem 1.9.1 (i) ile $\underline{\varphi}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} \underline{\varphi}(A_i)$ dir. Diğer yandan L nin en büyük elemanı $G \in L$ olduğundan Teorem 1.2.4 ile $(L, \subseteq)$ tam kafestir.

Sonuç 2.4.2: Özellikle,

(i) $\varphi = I_G$ ise $L = \{A | A \leq G\}$ kafesi elde edilir.

(ii) φ fonksiyon ise $L = \{\varphi^{-1}(A) | A \leq G\}$ kafesi elde edilir.

Teorem 2.4.3: $A \subseteq H$ ve $L = \left\{\underline{\varphi}(A) \middle| \varphi \subseteq G \times H\right\}$ olsun. Bu takdirde $(L, \subseteq)$ tam kafestir.

İspat: Teorem 1.9.2 (iv) ile $\bigcap_{i\in I} \underline{\varphi_i}(A) = \underline{\bigcup_{i\in I} \varphi_i}(A)$ dir. Diğer yandan L nin en büyük elemanı $\emptyset \subseteq G \times H$ için $\underline{\emptyset}(A) = G \in L$ olduğundan Teorem 1.2.4 ile $(L, \subseteq)$ tam kafestir.

Teorem 2.4.4: T, L üzerinde t-norm ve (G, H, Θ) L-bulanık yaklaşım uzayı olsun. Bu takdirde

$\mathcal{L} = \{\underline{\Theta_J}(\mu) \mid \mu, H$ nin TL-bulanık alt grubu$\}$,

en büyük elemanı 1_G olan tam kafestir.

İspat: [17]'deki Teorem 4.8'e benzer şekilde ispatlanır.

Aşağıdaki örnek gösterir ki L dağılımlı kafes olmasına rağmen $\mathcal{L}$ modüler kafes olmayabilir. Sonuç olarak $\mathcal{L}$ dağılımlı kafes değildir.

Örnek 2.4.5: $L = \{0, \alpha, \beta, 1\}$, Şekil 1'de verilen kafes ve $T = T_M$ olsun. Bu takdirde, $\mathbb{Z}_3$ ün tüm L-bulanık alt grupları şunlardır:

Tablo 5. $\mathbb{Z}_3$ ün Örnek 2.4.5'teki bulanık alt gruplar

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\mu_1(x)$	0	0	0
$\mu_2(x)$	α	α	α
$\mu_3(x)$	β	β	β
$\mu_4(x)$	1	1	1
$\mu_5(x)$	1	α	α
$\mu_6(x)$	1	β	β
$\mu_7(x)$	1	0	0
$\mu_8(x)$	α	0	0
$\mu_9(x)$	β	0	0

$\Theta \in (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3, T, L)$ aşağıdaki tablo yardımıyla tanımlansın:

Tablo 6. Örnek 2.4.5'teki Θ L-bulanık bağıntısı

(x, y)	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{2},\bar{0})$	$(\bar{2},\bar{1})$	$(\bar{2},\bar{2})$	$(\bar{3},\bar{0})$	$(\bar{3},\bar{1})$	$(\bar{3},\bar{2})$
$\Theta(x, y)$	1	α	β	α	β	1	α	β	0	1	0	1

I, T ile üretilmiş R-gerektirme olmak üzere $\mathbb{Z}_3$ ün tüm L-bulanık alt grupların I-alt yaklaşımları aşağıdaki tabloda hesaplanmıştır.

Tablo 7. $\mathbb{Z}_3$ ün Örnek 2.4.5'teki tüm TL-bulanık alt gruplarının I-alt yaklaşımları

$\bar{x}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\underline{\Theta_I}(\mu_1)(\bar{x})$	0	0	0	0
$\underline{\Theta_I}(\mu_2)(\bar{x})$	α	α	α	α
$\underline{\Theta_I}(\mu_3)(\bar{x})$	β	β	β	β
$\underline{\Theta_I}(\mu_4)(\bar{x})$	1	1	1	1
$\underline{\Theta_I}(\mu_5)(\bar{x})$	α	α	α	α
$\underline{\Theta_I}(\mu_6)(\bar{x})$	β	β	1	β
$\underline{\Theta_I}(\mu_7)(\bar{x})$	0	0	α	0
$\underline{\Theta_I}(\mu_8)(\bar{x})$	0	0	α	0
$\underline{\Theta_I}(\mu_9)(\bar{x})$	0	0	0	0

Böylece $\underline{\Theta_I}(\mu_1) = \underline{\Theta_I}(\mu_9)$, $\underline{\Theta_I}(\mu_2) = \underline{\Theta_I}(\mu_5)$ ve $\underline{\Theta_I}(\mu_7) = \underline{\Theta_I}(\mu_8)$ olmak üzere $\mathcal{L}$ aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\Theta}_{\mathcal{I}}(\mu_4) & \\
\underline{\Theta}_{\mathcal{I}}(\mu_2) \arrow[ur] & & \underline{\Theta}_{\mathcal{I}}(\mu_6) \arrow[ul] \\
\underline{\Theta}_{\mathcal{I}}(\mu_7) \arrow[u] & & \underline{\Theta}_{\mathcal{I}}(\mu_3) \arrow[u] \\
 & \underline{\Theta}_{\mathcal{I}}(\mu_1) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Şekil 6. $\mathcal{L}$ kafes yapısı

3. SONUÇLAR

1. Literatürde kaba küme teorisiyle ilgili yapılan çalışmalarda bir kümenin alt ve üst yaklaşımları ve bu yaklaşımların cebirsel yapıları, denklik bağıntıları veya kongrüans bağıntılarına göre incelenmiştir. Bu çalışmada ise bir bağıntısal homomorfiye göre, bir kümenin alt ve üst yaklaşımlarının cebirsel özellikleri incelenmiştir. Küme değerli homomorfiler, bağıntısal homomorfilerle karakterize edilmiştir. Kongrüans bağıntıları ve fonksiyonlar bağıntısal homomorfilerden daha özel yapılar olduğundan bu tezde, literatürde kaba küme teorisi ile ilgili yapılan çalışmalar genelleştirilmiştir.
2. Literatürde genelleştirilmiş (I,T)-L-bulanık kaba kümeler ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Özellikle $L=[0,1]$ olması durumunda bir bulanık kümenin alt ve üst yaklaşımlarının özellikleri incelenmiştir. Genelde, mevcut çalışmalarda (I,T)-L-bulanık kaba kümeler, TL-kongrüans bağıntıları yardımıyla cebirsel yapılar üzerinde inşa edilmiştir. TL-kongrüans bağıntıları, TL-bulanık bağıntısal homomorfilerden daha özel yapılardır. Bu çalışmada TL-bulanık bağıntısal homomorfilerin genelleştirilmiş (I,T)-L-bulanık kaba kümelerin grup, halka ve modül cebirsel yapılar üzerinde inşasına imkân sağladığına vurgu yapılmış ve TL-bulanık bağıntısal homomorfilere göre T-üst ve I-alt bulanık kaba yaklaşımların özellikleri incelenmiştir. Çalışma; herhangi bir L tam kafesi için genelleştirilmiş (I,T)-L-bulanık kaba kümelerin cebirsel yapılar üzerinde inşa edilmesi bakımından bu şekilde yapılmış olan mevcut çalışmalardan daha geneldir.

4. ÖNERİLER

1. Genelleştirilmiş kaba kümeler teorisi ile ilgili R-gerektirmeler için elde edilen bulgular, diğer gerektirmeler için de araştırılabilir.
2. Genelleştirilmiş kaba kümeler teorisi ile ilgili bulgular, bu tezde mevcut olmayan diğer cebirsel yapılara uygulanabilir.
3. Bu çalışmada sunulan teoriler (α, β)-bulanık alt cebirsel yapılara uygulanabilir.

5. KAYNAKLAR

1. Baczynski, M. ve Jayaram, B., (S, N) -and R-implications: A State-of-the-Art Survey, Fuzzy Sets and Systems, 159 (2008) 1836-1859.

2. Birkhoff, G., Lattice Theory, 3rd Edition, Providence, RI, 1967.

3. Biswas R. ve Nanda S., Rough Groups and Rough Subgroups, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 42 (1994) 251-254.

4. Davvaz, B., A Short Note on Algebraic T-Rough Sets , Information Sciences, 178 (2008) 3247-3252.

5. De Baets, B. ve Mesiar, R., Triangular Norms on Product Lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 61–75.

6. Dubois, H. ve Prade, H., Rough Fuzzy Sets and Fuzzy Rough Sets, International Journal of General Systems, 17 (1990) 191-208.

7. Ekiz, C., Yarıgruplarda (I, T)-L-Fuzzy Kaba Kümeler, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, 2009.

8. Ekiz, C., Çelik, Y. ve Yamak S., Generalized TL-Fuzzy Rough Rings Via TL-Fuzzy Relational Morphisms, Journal of Inequalities and Applications, DOI: 10.1186/1029-242X-2013-279.

9. Fodor, J. ve Roubens, M., Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support, Kluwer Academic Publishers, 1994.

10. Goguen J.A., L-Fuzzy Sets, J. Math. Anal. Appl., 18 (1967) 145-174.

11. Ignjatovic, J.,Ciric, M. ve Bogdanovic, S., Fuzzy Homomorphism of Algebras, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 2345-2365 .

12. Kazancı, O. ve Davvaz, B., On the Structure of Rough Prime (primary) Ideals and Rough Fuzzy Prime (Primary) Ideals in Commutative Rings, Information Science 178 (2008) 1343-1354.

13. Kim J.P. ve Bae D.R., Fuzzy Congruences in Groups, Fuzzy Sets and Systems, 85 (1997) 115-120.

14. Klement, E.P., Mesiar, R. ve Pap, E., Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, London, 2000.

15. Kuroki, N., Rough Ideals in Semigroups, Information Sciences, 100 (1997) 139-163.

16. Kuroki, N. ve Wang, P.P., The Lower and Upper Approximations in a Fuzzy Group, Information Sciences, 90 (1996) 203-220.

17. Li, F.,Yin, Y., The ν-Lower and T-Upper Fuzzy Rough Approximation opErators on a Semigroup, Information Sciences, 195 (2012) 241–255.

18. Li, F.,Yin, Y. ve Lu, L., (ν,T)-Fuzzy Rough Approximation Operators and The TL-Fuzzy Rough Ideals On A Ring, Informatin Sciences, 177 (2007) 4711-4726.

19. Li, S., Yu, Y. ve Wang, Z., T-Congruence L-Relations on Groups and Rings, Fuzzy Sets and Systems, 92 (1997) 365-381.

20. Mi, J.-S., Leung, Y., Zhao, H.-Y. ve Feng T., Generalized Fuzzy Rough Sets Determined by a Triangular Norm, Information Science, 178 (2008) 3203-3213.

21. Mordeson, J.N. ve Malik, D.S., Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Publishing, 1998.

22. Nguyen, H.T. ve Walker E.A., A First Course in Fuzzy Logic, second ed., CRC Press, Boca Raton, 2000.

23. Pawlak, Z., Rough Sets, International Journal of Computerand Information Sciences, 11 (1982) 341-356.

24. Pawlak, Z., Rough Sets and Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 17 (1985) 99-102.

25. Pawlak, Z., Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning About Data, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.

26. Pei, D., A Generalized Model of Fuzzy Rough Sets, International Journal of General Systems, (2005) 603-613.

27. Pei, D. ve Xu Z.-B., Rough Set Models on two Universes, International Journal of General Systems, 33 (2004) 569-581.

28. Radzikowska A. M. ve Kerre E. E., A Comparativestudy of Fuzzy Rough Sets, Fuzzy Sets and Systems, 126 (2002) 137-155.

29. Ray, S., Modified TL-subgroups, Fuzzy Sets and Systems, 91 (1997) 375-387.

30. Rosenfeld, A., Fuzzy Groups, J. Math. Anal. Appl., 35 (1971) 512-517.

31. Wang, Z., TL-Submodules and TL-Linear Subspaces, Fuzzy Sets and Systems, 68 (1994) 211-225.

32. Wang, Z., Yu, Y. ve Dai, F., On T-Congruence L-Relations on Groups and Rings, Fuzzy Sets and Systems, 119 (2001) 393-407.

33. Wu W.-Z. ve Zhang W.-X., Constructive and Axiomatic Approaches of Fuzzy Approximation Operators, Information Sciences, 159 (2004) 233-254.

34. Wu, W.-Z., Leung, Y. ve Mi, J.-S., On Characterizations of (φ, τ)-Fuzzy Rough Approximation Operators, Fuzzy Sets and Systems, 154 (2005) 76-102.

35. Wu, W.-Z., Mi, J.-S. ve Zhang, W.-X., Generalized Fuzzy Rough Sets, Information Sciences, 151 (2003) 263- 282.

36. Yamak S., Kazancı O. ve Davvaz B., Approximations in a Module by Using Set-Valued Homomorphisms, International Journal of Computer Mathematics, 88 (2011) 2901-2914.

37. Yamak S., Kazancı O. ve Davvaz B., Generalized Lower and Upper Approximations in a Ring, Information Sciences, 180 (2010) 1759–1768.

38. Yao Y.Y., Combination of Rough and Fuzzy Sets Based on α-Level Sets: In: T.Y. Lin, N. Cercone, eds. Rough Sets and Data Mining: Analysis for Imprecise Data. Boston: Kluwer, 301-321, 1997.

39. Yao Y. Y., Constructive and Algebraic Methods of The Theory of Rough Sets, Journal of Information Sciences 109 (1998) 21-47.

40. Yeung, D. S., Chen, D., Tsang, E., Lee, J. W.T. ve Wang, X., On The Generalization of Fuzzy Rough Sets, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 13, 3 (2005) 343-361.

41. Yu, Y. ve Wang Z., TL-Subring and TL-Ideals. Part 1. Basic concepts, Fuzzy Sets and Systems, 68 (1994) 93-103.

42. Zadeh, L.A., Fuzzy Sets, Inform. And Control, 8 (1965) 338-353.

43. Zhu,W., Generalized Rough Sets Bazed on Relations, Information Science, 177 (2007) 4997-5011.

ÖZGEÇMİŞ

Canan EKİZ, 1982 yılında Giresun'da doğmuştur. İlköğrenimini Yazlık Köyü İlkokulunda, orta öğrenimini Zehra Kitapçıoğlu Ortaokulu'nda ve lise öğrenimini ise Beşikdüzü Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamlamıştır.

2000-2001 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Öğretmenliği programında öğrenimine başlamış ve 2005 yılında lisans eğitimini tamamlamıştır.

2007-2008 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında başladığı yüksek lisans öğrenimini, 2009 yılında tamamlayarak aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında doktora öğrenimine başlamıştır. Yabancı dili İngilizcedir. 2007 yılında Giresun Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atanan Ekiz, halen bu görevine devam etmektedir.