KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

NORMAL MÜDAHALELİ YARI- MARKOV SÜREÇLERİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Zulfiyya MAMMADOVA

MART 2011
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

NORMAL MÜDAHALELİ YARI- MARKOV SÜREÇLERİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Zulfiyya MAMMADOVA

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Doktor (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 28.03.2011
Tezin Savunma Tarihi : 22.04.2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. İhsan ÜNVER
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Erhan COŞKUN
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Hülya BAYRAK
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Trabzon 2011

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, Normal müdahaleli yarı-Markov süreçlerinin iki önemli sınıfı olan “Normal Müdahaleli Rastgele Yürüyüş Süreçleri” ve “Normal Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreçleri” ele alınmış ve asimptotik yöntemlerle incelenmiştir.

Tez konusunu belirleyen ve tezde ele alınan problemin çözümünde yardımlarını esirgemeyen danışman hocam, Sayın Prof. Dr. İhsan ÜNVER’ e teşekkür eder ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmam süresince, değerli öneri ve yardımlarından dolayı K.T.Ü. Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Erhan COŞKUN’ a; İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü öğretim üyeleri Doç. Dr. Rovshan ALİYEV ile Yrd. Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK’ e teşekkür ederim.

Çalışmam süresince desteklerinden dolayı K.T.Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü ile İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü mensuplarına, özellikle manevi desteklerinden dolayı Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN ve Yrd. Doç. Dr. Orhan KESEMEN’ e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, tez çalışmam süresince desteklerini esirgemeyen eşim Prof. Dr. Tahir KHANİYEV ve çocuklarım Şahin, Tagi ve Ayten KHANİYEV’ e teşekkür ederim.

Zulfiyya MAMMADOVA

Trabzon 2011

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bu çalışmada, “Normal Müdahaleli Yarı - Markov Süreçlerinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi” konusu ele alınmıştır. Çalışmanın birinci bölümünde Normal Müdahaleli Rasgele Yürüyüş Süreci’ ne genel bir giriş yapıldıktan sonra ele alınan süreç matematiksel olarak inşa edilmiş ve bazı genel koşullar altında bu sürecin ergodik olduğu gösterilmiştir. Bunun yanı sıra, sürecin ergodik dağılım fonksiyonu, ergodik karakteristik fonksiyonu ve ergodik momentleri $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin karakteristikleri yardımı ile ifade edilmiştir. Daha sonra bu sonuçlardan yararlanarak, Normal Müdahaleli Yarı - Markov Rastgele Yürüyüş Süreci’ nin ergodik dağılımının ilk dört momenti için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Ayrıca, sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde ise Normal Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci ele alınmış ve sürecin ergodik dağılım fonksiyonu bir yenileme fonksiyonu aracılığı ile ifade edilmiştir. Bu gösterimden yola çıkarak, ergodik dağılımın tüm momentleri için kesin ifadeler elde edilmiştir. Özel bir durum (üstel dağılım durumu) için ergodik momentlerin aşikar şekli ortaya konulmuştur. Daha sonra yenileme fonksiyonunun çeşitli integralleri icin asimptotik açılımlar yardımcı teoremler şeklinde önerilmiş ve ispatlanmıştır. Elde edilen sonuçlardan yararlanarak, genel durumda sürecin tüm momentleri için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Elde edilen asimptotik açılımın yardımı ile hesaplanan moment değerlerinin kesin değerlere ne kadar yakın olduğunu göstermek için özel bir durum ele alınmış ve bu durum için Monte Carlo simulasyon yöntemi uygulanarak, ergodik momentler için değerler elde edilmiş ve asimptotik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda, elde edilen asimptotik açılımların simulasyon sonuçlarına yeterince yakın oldukları tespit edilmiştir.

Daha sonra, sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiş ve limit dağılımının aşikar şekli bulunmuştur. Ayrıca, sürecin sınır fonksiyonellerinin momentleri için kesin ve asimptotik sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarı-Markov Süreci, Yarı-Markovian Rastgele Yürüyüş, Yenileme Süreci, Ödüllü Yenileme Süreci, Ergodic Dağılım, Momentler, Sınır Fonksiyoneli, Yenileme Fonksiyonu, Wald Özdeşliği, Basamak Yüksekliği, Basamak Anı, Asimptotik Açılım, Zayıf Yakınsama.

SUMMARY

Investigation of the Semi - Markov Processes with Normal Interference of Chance by Asymptotic Methods

In this study, two important classes of the semi - Markov processes are considered. The first class, "The Semi-Markovian Random Walk with a Normal Interference of Chance", is constructed mathematically and the ergodicity of the process is proved under some weak conditions. Furthermore, exact expressions for the ergodic distribution function and the characteristic function are determined. Using these expressions the first four moments of the ergodic distribution are expressed by the first five moments of a certain boundary functional. Later, asymptotic expansions with three terms are found for the moments of the boundary functional. By using these results, the asymptotic expansions are proposed for various integrals related to moments of the boundary functional. Furthermore, asymptotic expansions with three terms for the first four moments of ergodic distribution of the process are found and the weak convergence theorem for the ergodic distribution of the process is proved.

The second class, "The Renewal - Reward Process with a Normal Interference of Chance", is considered and the ergodicity of the process is proved in the second part of the study. Later, the ergodic distribution function of the process is expressed by means of a renewal function. Unlike the first class, the asymptotic expansions with three terms are determined for all moments of the ergodic distribution of the process. Moreover, weak convergence theorem for ergodic distribution of the process is proved and explicit form of the limit distribution is determined. Finally, the exact and asymptotic expressions are obtained for the moments of the boundary functionals of the process.

Key Words: Semi-Markov Process, Semi-Markovian Random Walk, Renewal Process, Renewal - Reward Process, Ergodic Distribution, Moments, Boundary Functional, Renewal Function, Wald Identity, Ladder Height, Ladder Epoch, Asymptotic Expansion, Weak Convergence.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

SEMBOLLER DİZİNİ

$\varphi_1 * \varphi_2$	φ_1 ve φ_2 fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı
φ^{*n}	φ fonksiyonunun kendisiyle n kat konvolüsyon çarpımı
$P\{A\}$	A olayının olasılığı
$P_z\{A\}$	A olayının koşullu olasılığı
$E(\xi)$	ξ rasgele değişkeninin beklenen değeri
$E_z(\xi)$	ξ rasgele değişkeninin koşullu beklenen değeri
$E(\xi^n)$	ξ rasgele değişkeninin n. başlangıç momenti
$E\lvert\xi\rvert$	ξ rasgele değişkeninin mutlak momenti
$Var(\xi)$	ξ rasgele değişkenin varyansı
$Var_z(\xi)$	ξ rasgele değişkeninin koşullu varyansı
$f(x)\big\rvert_{x=0}$	$f(x)$ fonksiyonunun x = 0 noktasındaki değeri
$d_z F$	F fonksiyonunun z değişkenine göre diferensiyeli
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	x, sonsuza giderken $f(x)$ fonksiyonunun limiti
$a(x) \sim b(x)$	$a(x)$ ’in $b(x)$ ’ e asimptotik denkliği
$Y \in N(a,\sigma^2)$	Y değişkeninin (a,σ^2) parametreli Normal dağılıma sahip olması
$\varepsilon(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$	Heaviside Birim fonksiyonu
$I_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}$	A kümesinin indikatör fonksiyonu
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$	Standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu
$\Phi(u) \equiv \int_{-\infty}^{u} \varphi(x)dx$	Standart normal dağılım fonksiyonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Fiziğin, kimyanın, biyolojinin, iktisadın ve mühendislik dallarının birçok problemini incelemek için yenileme, ödüllü yenileme, rasgele yürüyüş süreçleri ve onların çeşitli modifikasyonları geniş bir şekilde kullanılmaktadır.

Bu çalışmada, A.N. Kolmogorov tarafından 1960-1970'lı yıllarda tanımlanmış ve literatürde "Kesikli müdahaleli yarı – Markov süreçler" olarak bilinen geniş bir stokastik süreçler ailesinin iki önemli alt sınıfı ele alınmış ve asimptotik yöntemlerle incelenmiştir. Literatürde bu konuda önemli teorik sonuçlar mevcut olsa da (bak, örneğin, Aliyev vd. [5]; Alsmeyer [6]; Anisimov [7-9]; Aras ve Woodroofe [10]; Borovkov [12-15]; Brown ve Solomon [17]; Feller [29]; Gihman ve Skorohod [30]; Jewell [38]; Khaniyev vd. [47-57]; Lotov [64-65], Nasirova [67-68]; Ross vd. [73-74]), elde edilen sonuçlar genellikle uygulanabilir matematiksel yapıda değillerdir. 1973 yılında A.V. Skorohod tarafından bu sınıf için genel ergodik teorem ispat olunsa da, halen genel durumda ergodik dağılım ve onun karakteristikleri için pratik öneme sahip açık ifadeler elde edilmemiştir. Genel durumda sade formüllerin alınamayacağı anlaşıldığı için 1980' li yıllardan sonra daha dar, fakat önemli sınıflar ele alınmaya başlanmıştır. (Örneğin, çeşitli bariyerli yenileme süreçleri, ödüllü yenileme süreçleri, rasgele yürüyüş süreçleri vs. bu sınıfa ait olan bazı özel alt sınıflardır). Fakat bu güne kadar bu süreçler her yönüyle araştırılamamıştır. Bunun temel nedeni, bu süreçlerin olasılık ve sayısal karakteristiklerinin çok karmaşık bir matematiksel yapıya sahip olmasıdır. Özellikle müdahaleyi ifade eden rasgele değişkenler yeterince geniş bir sınıfa ait olduklarında sürecin temel karakteristikleri için kullanılabilir formüllerin elde edilmesi imkânsız denilebilecek kadar zordur. Bu zorluğu ortadan kaldırmak için 1990' lı yıllardan sonra iki yönde araştırmalar yoğunlaştırılmıştır. Bir taraftan benzetim yöntemleri kullanılarak bilgisayar yardımı ile sayısal sonuçlar alınmakta; diğer taraftan ise integraller için asimptotik yöntemlere başvurarak yaklaşık, fakat yeterince sade ifadeler elde edilmektedir. Bu nedenle, literatürde, son yıllarda asimptotik yöntemlerin uygulanmasına ait birçok değerli çalışmalar ortaya konulmuştur (örneğin, Alsmeyer [6]; Aras ve Woodroofe [10]; Lotov vd. [64]). Bu çalışmalardan özellikle, G. Alsmeyer [6] ve V.I. Lotov [64] çalışmaları büyük ilgi görmektedirler. G. Alsmeyer' in [6] çalışmasında rasgele yürüyüş süreçleri kuramında önemli bir rolü olan harmonik yenileme fonksiyonu için iki terimli asimptotik açılım elde edilmiştir. V.I. Lotov' un [64] çalışmasında ise Gauss rasgele yürüyüş sürecinin sınır fonksiyonelleri için üç terimli asimptotik acılımlar elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar ne kadar önemli olsalar da, onlar sadece sınır fonksiyonellerinin karakteristikleri için bazı önemli sonuçları ortaya koymaktadırlar. Ancak birçok pratik problemin çözümü için sınır fonksiyonellerinin yanı sıra, sürecin kendi olasılık ve sayısal karakteristiklerinin de bilinmesi büyük önem taşımaktadır. Bu nedenle, bu çalışmada, ele alınan süreçlerin ergodik dağılımı ve ergodik momentleri için asimptotik sonuçların elde edilmesi amaçlanmıştır. Benzer problem T. Kesemen' in [46] doktora tez çalışmasında, Gamma dağılımlı müdahale varsayımı altında ele alınmış ve incelemiştir. Fakat rasgele faktörlerin etkisi altında değişen birçok dinamik sisteme, gerektiğinde "dışarıdan müdahale edilmesi" aslında birçok faktörün toplam etkisi altında oluşmaktadır. Dolayısıyla, böyle kararlar verilirken birçok faktörün toplam etkisi göz önünde bulundurularak, "müdahale" kararları verilmektedir. Merkezi Limit Teoremine göre, etki gösteren faktörlerin sayısı arttıkça "müdahale"yi ifade eden rasgele değişkenin dağılımı, birçok durumda, yaklaşık da olsa, normal dağılıma yakınsayacaktır. Bu nedenle, çok sayıda rasgele faktörlerin etkisi altında faaliyet gösteren sistemler için "müdahale"nin Normal dağılıma sahip olduğunu kabul etmek, daha mantıklı ve pratik açıdan amaca uygundur. Fakat Normal müdahaleli süreçlerin incelenmesi, Gamma müdahaleli süreçlere göre çok daha karmaşıktır. Gamma müdahaleli süreçleri incelerken ortaya çıkan integraller genellikle bir yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü yardımı ile ifade edilebilirler. Fakat Normal dağılımlı müdahalelerde bu elverişli matematiksel yöntem kullanılmamaktadır. Bu nedenle, Normal müdahaleli süreçlerin incelenmesi hem bilimsel hem de pratik öneme sahiptir.

Bu çalışmanın temel amacı, asimptotik yöntemleri kullanarak, normal müdahaleli rasgele yürüyüş sürecinin ve normal müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin olasılık ve sayısal karakteristikleri için pratik öneme sahip olan yaklaşık ifadeler elde etmektir. Bu maksatla, bu çalışmada Tauber- Abel teoremleri; E.V. Dynkin prensibi ve yenileme teorisinin temel sonuçları kullanılarak, ele alınan süreçlerin ergodik momentleri için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Ayrıca, ödüllü yenileme süreci için elde edilen asimptotik değerlerin simülasyon değerlerine ne kadar yakın olduğunu teyit etmek için bir örnek uygulama yapılmıştır.

1.2. Literatür Araştırması

Bu çalışmada, stokastik süreçlerin önemli bir sınıfını oluşturan "Normal müdahaleli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci ve Normal müdahaleli ödüllü yenileme süreci" ele alınmıştır. Bilindiği gibi yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri yarı-Markov süreçlerinin özel halidir. Yarı-Markov süreç kavramı ilk kez, birbirinden bağımsız olarak ve hemen hemen aynı zamanlarda, Levy [62], Smith [82] ve Takacs [85] gibi olasılıkçılar tarafından ortaya atılmıştır. Ancak yarı-Markov süreçlerinin tümünde durum uzayı sonlu olduğundan ve sıçrama anları fiziksel olarak belirlendiğinden bu kavramın genelleştirilmesi zorunlu olmaktaydı. Bu nedenle, Çınlar [20-22], Gihman ve Skorohod [30], Serfoza [76], Ezhov ve Korolyuk [25], çalışmalarında genel durum uzayına sahip yarı-Markov süreci tanımlarını vermişlerdir. Yarı-Markov süreçleri ile ilgili birçok önemli problem Borovkov [12-15], Korolyuk ve Borovskikh [58], Çınlar [20-22], Takacs [85], Kemperman [44], Kovalenko vd. [59], Shurenkov vd. [77-78] çalışmalarında ayrıntılı bir biçimde incelemişlerdir.

Stokastik süreçlerin temel sınır fonksiyonellerinin incelenmesi de oldukça önemlidir. Bu konuda ilk çalışmayı Spitzer [83,84] yapmıştır. Spitzer' in çalışmalarını Rogozin [71] ve Gusak ve Korolyuk [34, 36] genelleştirmişlerdir. Daha sonra Rogozin [71] aynı çalışmaları artışları bağımsız olan süreçler için de yapmış ve genel sonuçlar elde etmiştir. Ayrıca, Gusak ve Korolyuk [34, 36] sürecin değerinin ve supremumunun ortak dağılımını vermişlerdir. Borovkov [12] çalışmasında sıçramalarının işareti aynı ve artışları bağımsız olan süreçlerin, belirli bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımı ile sürecin değerinin dağılımı arasındaki ilişkileri vermiştir. Levy ve Taqqu [62,63] ise böyle bir sürecin değerinin infimumu ile supremumunun ortak dağılımını vermiştir.

Hem pratik hem de teorik bakımdan yarı-Markov süreçleri için ergodik teoremler ve bu süreçlerin ergodik dağılımları da oldukça önemlidir. Yarı-Markov sınıfına ait olan yenileme süreçleri için esas ergodik teorem 1975 yılında Smith [81,82] tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca, Ezhov ve Shurenkov [26] tarafından da yarı-Markov süreçleri için ergodik teoremler ispatlanmıştır. Shurenkov [78] yarı-Markov süreçlerin ergodik dağılımlarının varlığı için gerek ve yeter şartları elde etmiştir. Yarı-Markov süreçleri için en genel durumda limit teoremleri Anisimov [7-8], Dzhafarov vd. [23], Korolyuk ve Svishchuk [62] tarafından verilmiştir. Rasgele yürüyüş süreçleri için limit teoremleri ise Skorohod ve Slobodenyuk [79], Nasirova [67,68], Harlamov [75] tarafından verilmiştir.

Sınır-değer problemlerinin incelenmesi önemli olmasına karşın ele alınan süreçlerin kendi karakteristiklerinin incelenmesi de oldukça önemlidir. Ayrıca, özel bir bariyere sahip yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri hakkında çalışmalar da literatürde mevcuttur. Örneğin, Khaniyev [53], Khaniyev ve Kucuk [54], Khaniyev vd. [55], Unver [86], Khaniyev vd. [56-57], Kesemen [45] gibi çalışmalarda özel bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreciyle ilgili çeşitli problemler ele alınmış ve çözülmüştür. T. Kesemen' in ([46]) doktora tezinde, borç alma stratejisi olarak yorumlanan ζ_1 rasgele değişkeninin, $\lambda > 0$ parametreli Üstel, ikinci ve üçüncü mertebeden Erlang ve (α, λ) parametreli Gamma dağılımlarına sahip olması durumunda sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin formüller ve asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Ayrıca, ζ_1 rasgele değişkeninin $\lambda > 0$ parametreli Üstel dağılıma sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsaklık teoremi ispat edilmiştir.

Ele alınan bu çalışmada ise, Normal müdahaleli rasgele yürüyüş süreci (Bölüm 2.1) ve Normal müdahaleli ödüllü yenileme süreci (Bölüm 2.2) matematiksel olarak tanımlanmış ve Normal müdahaleli rasgele yürüyüş sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin ifadeler ve üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Normal müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin ise ergodik dağılımının tüm momentleri için kesin ifade ve tüm momentleri için üç terimli asimptotik sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, süreçlerin ergodik dağılımları için zayıf yakınsama teoremleri ispat edilmiştir. Çalışmada ele alınan süreçlerin limit dağılımlarının açık şekilleri de bulunmuştur.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Normal Müdahaleli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Sürecinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi

2.1.1. Fiziksel Model

Varsayalım ki, bir sigorta şirketinin başlangıç anındaki kapitali $z > 0$ 'dır. $T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $n \geq 1$, rasgele anlarında bu şirketin kapitali gelen primlere göre artmakta veya ortaya çıkan kazalardan dolayı azalmaktadır. Bu artma veya azalma miktarları $\{\eta_n\}, n \geq 1$ ile gösterilsin. Tanım gereği, $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenleri hem pozitif ve hem de negatif değerler alabileceklerdir. Şirketin elindeki kapitalin miktarı sıfırdan büyük olduğu sürece, sistem kendi değişimini bu şekilde sürdürsün. Fakat kapital miktarı eksiye indiği anda şirket borç veya kredi alma kararı versin. Alınan borç miktarının birçok faktöre bağlı olarak değiştiğini ve Normal dağılıma sahip bir rasgele değişken ile ifade edildiğini kabul edelim. Bu işlemden sonra şirket yeni başlangıç kapitali ile çalışmaya başlasın ve faaliyetini, kapital miktarı ikinci kez eksiye düşene kadar devam ettirsin. Kapital miktarı eksiye düştüğünde şirket, bazı önlemler alarak yeni kapital miktarını belirlesin ve sistem benzer şekilde faaliyetine devam etsin. Bu şekilde çalışan bir sistemdeki kapital miktarının değişimi, bir "Normal Müdahaleli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreci" yardımıyla ifade edilebilir. Amacımız, uzun süre bu şekilde çalışan bir şirketin kapitalinin değişmesini ifade eden süreci matematiksel olarak tanımlamak ve bu sürecin ergodik dağılımı ve momentleri için asimptotik sonuçlar elde etmektir.

2.1.2. X(t) Sürecinin Matematiksel Kuruluşu

$\{\xi_n\}, \{\eta_n\}, \{\zeta_n\}, n = 1, 2, 3...,$ dizileri aynı bir $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız rasgele değişkenler dizisi olsunlar. Ayrıca her bir dizinin elemanları kendi aralarında da bağımsız ve aynı dağılıma sahip olsunlar. ξ_n 'ler sadece pozitif değerler alabilen; η_n 'ler ise hem pozitif, hem de negatif değerler alabilen rasgele değişkenler olsunlar. ζ_n rasgele değişkenleri ise negatif olmayan değerler alabilen ve aşağıdaki gibi tanımlanan rasgele değişkenler olsunlar:

$$\zeta_n \equiv \max\{0; Y_n\}, n = 1, 2...$$

Burada Y_n rasgele değişkenleri $(a;\sigma^2)$ parametreli normal dağılıma sahip rasgele değişkenlerdir, yani, Y_n rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), x \in R; a > 0; \sigma > 0.$$

ξ_n, η_n ve ζ_n' lerin dağılım fonksiyonları sırasıyla, $F_\xi(t)$; $F_\eta(x)$ ve $\pi(z)$ ile gösterilsin.

$\{\xi_n\}, n = 1, 2, ...$ dizisinden yararlanarak aşağıdaki yenileme dizisi inşa edilsin:

$$T_0 = 0; T_1 = \xi_1; T_2 = \xi_1 + \xi_2; ...; T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i ...; n = 1, 2, ...$$

$\{\eta_n\}, n = 1, 2, ...$ dizisinin yardımı ile aşağıdaki rasgele yürüyüş süreci kurulsun:

$$S_0 = 0; S_1 = \eta_1; S_2 = \eta_1 + \eta_2; ...; S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i; ..., n = 1, 2, ...$$

Şimdi de aşağıdaki tam değerli rasgele değişkenler dizisi tanımlansın:

$$N_1 = N_1(z) \equiv \min\{n \geq 1: z - S_k > 0, k = \overline{1, n-1}; z - S_n \leq 0\}; \left(S_{N(z)} \equiv \sum_{i=1}^{N(z)} \eta_i\right);$$

$$N_2 \equiv N_2(\zeta_1) \equiv \min\{n \geq 1: \zeta_1 - (S_{N_1+k} - S_{N_1}) > 0, k = \overline{1, n-1}; \zeta_1 - (S_{N_1+n} - S_{N_1}) \leq 0\};$$

$$N_{m+1} \equiv N_{m+1}(\zeta_m) \equiv \min\{n \geq 1: \zeta_m - (S_{L_m+k} - S_{L_m}) > 0,\ k = \overline{1, n-1};$$

$$\zeta_m - (S_{L_m+n} - S_{L_m}) \leq 0\},$$

burada $L_m = N_1 + N_2 + ... + N_m$; $m = 1, 2, ...$; $z \geq 0$' dır ve $\{N_m\}, m = 1, 2, ...$ rasgele değişkenlerden yararlanarak, aşağıdaki pozitif değerli rasgele değişkenleri inşa edilsin:

$$\tau_0 \equiv 0; \quad \tau_1(z) = \sum_{i=1}^{N_1(z)} \xi_i; \tau_m = \sum_{i=1}^{L_m} \xi_i; \ m = 1, 2, ...$$

Ayrıca, $\nu(t) \equiv \max\{n \geq 0: T_n \leq t\}$ olsun. Burada $\nu(t)$'ye $\{\xi_n\}$ rasgele değişkenler dizisinin ürettiği yenileme süreci denir.

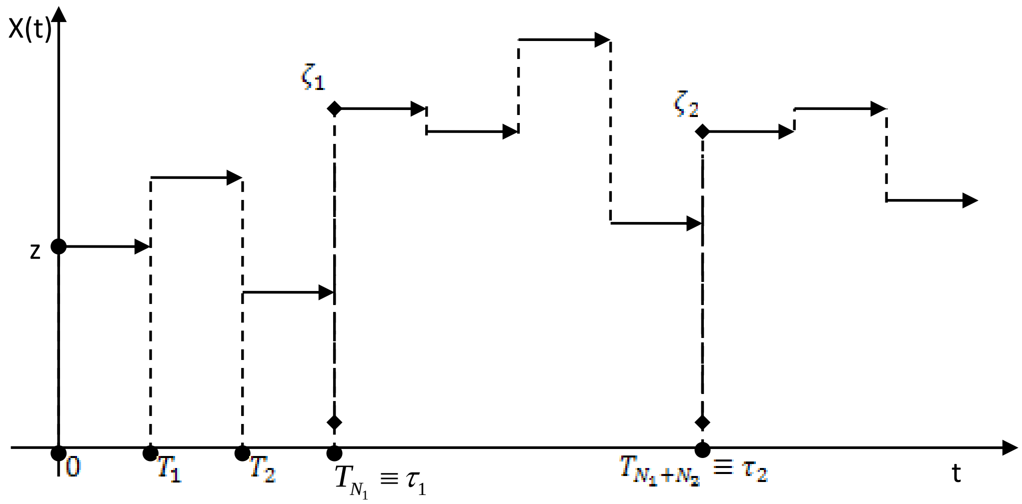
Şimdi de bu çalışmanın temel amacı olan $X(t)$ süreci, her $\tau_{m-1} \le t < \tau_m, m = 1, 2, ...$ için $X(t) = \zeta_{m-1} - (S_{\nu(t)} - S_{L_{m-1}})$ olarak tanımlansın. Burada $\zeta_0 \equiv z \ge 0$' dır.

$X(t)$ sürecinin yukarıdaki gösterimi aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$X(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\zeta_{m-1} - \left(S_{\nu(t)} - S_{L_{m-1}} \right) \right] I_{[\tau_{m-1},\, \tau_m)}(t), \tag{1}$$

burada, $I_A(t)$ ile A kümesinin indikatör fonksiyonu gösterilmiştir.

(1) eşitliği ile tanımlanan $X(t)$ sürecine "Normal müdahaleli yarı–Markov rasgele yürüyüş süreci" denir. Bu sürecin grafiklerinden biri aşağıdaki gibidir:



Şekil 1. Normal müdahaleli rasgele yürüyüş sürecinin bir gösterimi.

2.1.3. X(t) Sürecinin Ergodikliği ve Ergodik Dağılım Fonksiyonu ile Karakteristik Fonksiyonu İçin Kesin İfadeler

Bu bölümün temel amacı, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının momentlerini asimptotik yöntemlerle incelemektir. Bu maksatla, öncelikle ele alınan $X(t)$ sürecinin hangi koşullar altında ergodik olduğu incelenecektir.

Teorem 2.1.3.1. $\{\xi_n\}; \{\eta_n\}; \{\zeta_n\}; n = 1, 2, ..$ rasgele değişkenler dizileri aşağıdaki ek koşulları sağlasın:

1) $E(\xi_1) < +\infty$; 2) $E(\eta_1) > 0$; 3) $E(\eta_1^2) < +\infty$;

4) η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan bir rasgele değişken;

5) $\zeta_1 = \max\{0; Y_1\}, Y_1 \in N(a;\sigma^2)$.

Bu takdirde, $X(t)$ süreci ergodiktir.

İspat: Yukarıda inşa edilen $X(t)$ süreci literatürde "Kesikli şans karışımlı yarı-Markov süreçleri "adı ile bilinen geniş bir stokastik süreçler ailesine aittir. Bu sınıf için genel ergodik teorem A.N. Skorohod tarafından ispatlanmıştır (bkz., Gihman ve Skorohod [30], s.243). Bu teoreme göre, $X(t)$ sürecinin ergodik olabilmesi için aşağıdaki iki varsayımın sağlanması gerekmektedir.

1.Varsayım: $X(t)$ sürecinin içinde gömülü ergodik bir Markov zinciri mevcut olmalıdır. Teorem 2.13.1' nin koşulları altında 1.varsayımın sağlandığını gösterelim.

Böyle bir Markov zincirini belirlemek için öncelikle, monoton artan bir rasgele değişkenler dizisi tanımlamak gerekmektedir. Bu amaçla, yukarıda tanımlanan $\{\tau_n\}$, $n = 1, 2, 3, ...$ rasgele değişkenleri kullanılabilir. Çünkü tanımı gereği, 1 olasılığı ile, $0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n < \tau_{n+1} < ... < \infty$'dır. Hatırlanacak olursa, τ_n ' ler, $X(t)$ sürecinin ardışık olarak sıfıra düşme anlarıdır ve tanımları gereği Markov momentleridir. $X(t)$ sürecinin bu anlardaki değerleri $\aleph_n$ ile gösterilsin, yani $\aleph_n \equiv X(\tau_n + 0)$ olsun ($n = 1, 2, ...$). $X(t)$ sürecinin matematiksel kuruluşuna göre, 1 olasılığı ile, $\aleph_n \equiv \zeta_n$'dir. $\{\zeta_n\}, n = 1, 2, ...,$ bağımsız rasgele değişkenler dizisi olduğu için $\{\aleph_n\}$ dizisi bir Markov zinciri oluşturmuş olur. Ayrıca, $\zeta_n = \max\{0; Y_n\}, Y_n \in N(a, \sigma^2)$, rasgele değişkenleri aynı dağılıma sahip olduklarına göre, $\{\aleph_n\}$ zinciri $\pi(z) \equiv P\{\zeta_1 \le z\}$ durağan dağılıma sahip bir ergodik zincirdir ve bu zincirin durağan dağılımı

$$\pi(z) = P\left\{\max\{0; Y_n\} \le z\right\} = \Phi\left(\frac{z-a}{\sigma}\right)\varepsilon(z)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $\varepsilon(z)$ ile Heaviside birim fonksiyonu gösterilmiştir. Ayrıca $\Phi(u)$ ile standart normal dağılım fonksiyonu $\varphi(x)$ ile ise standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu gösterilmiştir. Dolayısıyla, Teorem 2.1.3.1' in koşulları altında $X(t)$ süreci, genel ergodik teoremin 1. varsayımını sağlar.

2.Varsayım: $\{\tau_n\}, n=1,2,3,...$ Markov momentleri arasında geçen sürenin beklenen değeri sonlu, yani her $n=1,2,3,...$ için

$$E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty \tag{2}$$

olmalıdır.

$X(t)$ süreci için bu varsayımın sağlandığı gösterilsin.

$\tau_n - \tau_{n-1}$, $n = 2,3,...$ rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduklarından, (2) koşulunun sağlanması için

$$E(\tau_1(z)) < \infty \text{ ve } E(\tau_n - \tau_{n-1}) \equiv \int_0^\infty E(\tau_1(z))d\pi(z) < \infty, \quad n=2,3,... \tag{3}$$

integrallerinin sonlu olduğunu göstermek yeterlidir. Hatırlatalım ki, Wald özdeşliğine göre,

$$E(\tau_1(z)) = E(\sum_{i=1}^{N_1(z)} \xi_i) = E(\xi_1)E(N_1(z)) \tag{4}$$

olur. Dolayısıyla,

$$E(\tau_n - \tau_{n-1}) = E(\xi_1)\int_0^\infty E(N_1(z))d\pi(z) \tag{5}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 2.1.3.1' in şartlarına göre $0 < E(\xi_1) < \infty$ 'dur. Bu durumda (2) koşulunun sağlanması için

$$E(N_1(z)) < \infty \text{ ve } \int_0^\infty E(N_1(z))d\pi(z) < \infty \tag{6}$$

olmalıdır. Bu problemi çözmek için $\{S_n\}$, $n \geq 0$, rasgele yürüyüş sürecinin basamak anları (ν_i^+) ve basamak yükseklikleri de (χ_i^+) tanımlansın:

$$\nu_1^+ = \min\{n \geq 1:\ S_n > 0\};\ \chi_1^+ = S_{\nu_1^+} = \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i;$$

$$\nu_{m+1}^+ = \min\left\{n \geq 1:\ S_{\nu_m^+ + n} > \chi_m^+\right\};\ \chi_{m+1}^+ = S_{\nu_{m+1}^+} = \sum_{i=1}^{\nu_{m+1}^+} \eta_i;\ m=1,2,...$$

olsun. ν_n^+ rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız ve ν_1^+ ile aynı dağılıma sahip, χ_n^+ rasgele değişkenleri de bağımsız ve χ_1^+ ile aynı dağılıma sahip oldukları bilinmektedir (bkz., Feller [29]). Bu durumda, E. Dynkin prensibine göre,

$$N_1(z) \equiv \sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+ \text{ ve } S_{N(z)} = \sum_{i=1}^{H(z)} \chi_i^+ \tag{7}$$

şeklinde gösterilebilirler. Burada $H(z) \equiv \min\left\{ n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} \chi_i^{+} > z \right\}$'dir.

Wald özdeşliğine göre,

$$E(N_1(z)) = E(H(z))E(\nu_1^{+}) \tag{8}$$

olur. $E(H(z))$ fonksiyonu, $\left\{\chi_n^{+}\right\}$, $n \geq 1$ basamak yüksekliklerinin ürettiği bir yenileme fonksiyonudur. $E(\eta_1) > 0$ olduğu için $E(\nu_1^{+}) < +\infty$ olur. Dolayısıyla, $E(N_1(z))$'in sonlu olması için $E(H(z)) \equiv U_{+}(z)$ yenileme fonksiyonu sonlu olmalıdır. Bu ise her sonlu z için zaten doğrudur, yani, her $0 < z < +\infty$ için $U_{+}(z) < +\infty$'dır (bkz., Feller [29]). Amaç $\int_0^{\infty} U_{+}(z)d\pi(z) < +\infty$ olduğunu göstermektir. Fakat her z için $U_{+}(z)$'in sonlu olması burada yeterli değildir. $\pi(z) = \Phi(\frac{z-a}{\sigma})\varepsilon(z)$ olduğuna göre,

$$\int_0^{\infty} U_{+}(z)d\pi(z) = \int_0^{\infty} U_{+}(z)\frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{z\text{-}a}{\sigma})\varepsilon(z)\,dz + \int_0^{\infty} U_{+}(z)\Phi(\frac{z\text{-}a}{\sigma})\,d\varepsilon(z)$$

$$= \int_0^{\infty} U_{+}(z)\varphi_{\sigma}(z\text{-}a)\,dz + \Phi(-\frac{a}{\sigma}) \tag{9}$$

olur. Burada $\varphi_{\sigma}(z) \equiv \frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{z}{\sigma})$'dir. Ayrıca, burada $\int_0^{\infty} G(z)\,d\varepsilon(z) = \int_0^{\infty} G(z)\,\delta(z)dz = G(0)$ özelliği kullanılmıştır.

$0 < \Phi(-\frac{a}{\sigma}) < 1$ olduğu için sadece $\int_0^{\infty} U_{+}(z)\varphi_{\sigma}(z\text{-}a)\,dz < +\infty$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. $\delta(z)$ Dirac fonksiyonudur.

$E(\eta_1^2) < +\infty$ iken, $\mu_2 \equiv E(\chi_1^{+2}) < +\infty$ olduğundan, kesinleştirilmiş yenileme teoremine göre (bkz., Feller[29]), $z \to \infty$ iken,

$$U_{+}(z) = \frac{z}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1) \tag{10}$$

olur. Notasyonu kısaltmak için, $g(z) \equiv U_{+}(z) - \frac{z}{\mu_1} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}$ olsun. Kesinleştirilmiş yenileme teoremine göre, $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$' dır (bkz., Feller [29]). Dolayısıyla, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir

$b \equiv b(\varepsilon)$ sayısı bulmak mümkündür ki , $0 < b(\varepsilon) < +\infty$ olmak üzere her $z \geq b(\varepsilon)$ için $0 \leq g(z) < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. (9) eşitliğinin sağ tarafındaki integral iki kısma ayrılırsa:

$$\int_0^{\infty} U_+(z)\varphi_\sigma(z\text{-}a)\,dz = \int_0^{b(\varepsilon)} U_+(z)\varphi_\sigma(z\text{-}a)\,dz + \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} U_+(z)\varphi_\sigma(z\text{-}a)\,dz \tag{11}$$

yazılır. $U_+(z)$ fonksiyonu monoton azalmayan fonksiyon olduğundan dolayı her $z \leq b(\varepsilon)$ için $U_+(z) \leq U_+(b(\varepsilon)) < +\infty$ olur. Dolayısıyla,

$$\int_0^{b(\varepsilon)} U_+(z)\varphi_\sigma(z\text{-}a)\,dz \leq U_+(b(\varepsilon)) \int_0^{b(\varepsilon)} \varphi_\sigma(z\text{-}a)\,dz \leq U_+(b(\varepsilon))$$

olur. Burada $\varphi_\sigma(z-a)$ fonksiyonunun bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olması bilgisi kullanılmıştır. $b(\varepsilon)$ sayısının tanımı gereği,

$$U_+(b(\varepsilon)) \leq \frac{b(\varepsilon)}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{12}$$

'dir. Şimdi de (11) eşitliğinin sağ tarafındaki integral aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\int_{b(\varepsilon)}^{\infty} U_+(z)\varphi_\sigma(z\text{-}a)\,dz &= \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} \left[\frac{z}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + g(z)\right]\varphi_\sigma(z\text{-}a)\,dz \\
&= \frac{1}{\mu_1}\int_{b(\varepsilon)}^{\infty} z\varphi_\sigma(z\text{-}a)\,dz + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\int_{b(\varepsilon)}^{\infty} \varphi_\sigma(z\text{-}a)\,dz + \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} g(z)\varphi_\sigma(z\text{-}a)\,dz \\
&\leq \frac{1}{\mu_1}\left[a + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right] + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{a}{\mu_1} + \frac{\sigma}{\mu_1\sqrt{2\pi}} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned} \tag{13}$$

(13) ve (11) birlikte düşünülürse,

$$\int_0^{\infty} U_+(z)\varphi_\sigma(z\text{-}a)\,dz \leq \frac{b(\varepsilon)}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_1} + \frac{\sigma}{\mu_1\sqrt{2\pi}} + \frac{\mu_2}{\mu_1^2} + \varepsilon \tag{14}$$

eşitsizliği elde edilir. Her $\varepsilon > 0$ için $b(\varepsilon) < \infty$ olduğuna göre (14)' ten

$$\int_0^{\infty} U_+(z)\varphi_\sigma(z\text{-}a)\,dz < \infty \tag{15}$$

olduğu görülür. (15) eşitsizliği (9) eşitliğinde dikkate alınırsa,

$$\int_0^{\infty} U_+(z)d\pi(z) < \infty \tag{16}$$

eşitsizliği elde edilir. (16) eşitsizliği de (8) eşitliğinde göz önüne alınırsa, (6) eşitsizliğinin sağlandığı görülür, yani, $E(N_1(z)) < \infty$ ve $\int_0^\infty E(N_1(z))d\pi(z) < \infty$'dur.

Dolayısıyla, $E(\tau_1(z)) < \infty$ ve $E(\tau_n - \tau_{n-1}) \equiv \int_0^\infty E(\tau_1(z))d\pi(z) < \infty,$ n=2,3,... olduğu ispatlanmış olur. Bu da 2. Varsayımın sağlandığını gösterir. Bu durumda, genel ergodik teoreme göre ele alınan $X(t)$ süreci, Teorem 2.1.3.1'in koşulları altında ergodiktir. Bu da Teorem 2.1.3.1'in ispatını tamamlar. ■

Şimdi, Teorem 2.1.3.1'in koşulları altında $X(t)$ sürecinin zaman ortalamalarının durum ortalamasına yakınsadığı gösterilebilir. Bu özellik aşağıdaki teorem şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.1.3.2. Teorem 2.1.3.1'in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, her bir sınırlı ölçülebilir $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik, 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(X(u))du = \frac{1}{E(N_1(\zeta_1))}\int_0^\infty f(x)d_x(E(A(x,\zeta_1))),$$

burada

$$E(N_1(\zeta_1)) = \int_0^\infty E(N_1(z))d\pi(z);\ E(A(x,\zeta_1)) = \int_0^\infty A(x,z)d\pi(z);$$

$$A(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,z);\ a_n(x,z) = P\left\{z - S_i > 0, i = \overline{1,n}; z - S_n \le x\right\}$$

'dir.

İspat: Genel ergodik teoremin (bak, Gihman ve Skorohod, [30]) şartları sağlandığında, her bir sınırlı ölçülebilir $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik, 1 olasılığı ile, sağlanır:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(X(u))du = S_f \equiv \frac{1}{E(\tau_1(\zeta_1))}\int_{z=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} f(x)P_z\left\{\tau_1 > t;\ X(t)\in dx\right\}dtd\pi(z) \qquad (17)$$

dir. Burada

$$E(\tau_1(\zeta_1)) = E\left(\sum_{i=1}^{N_1(\zeta_1)} \xi_i\right) = E(\xi_1)EN_1(\zeta_1); \qquad E(N_1(\zeta_1)) \equiv \int_0^\infty E(N_1(z))d\pi(z)$$

'dir. Şimdi de $P_z\left\{\tau_1 > t;\ X(t) \le x\right\} \equiv G(t,x,z)$ olasılığı aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$P_z\left\{\tau_1 > t;\ X(t)\le x\right\} \equiv G(t,x,z) = P\left\{\sum_{i=1}^{N_1(\zeta_1)} \xi_i > t;\ X(t)\le x/\zeta_1 = z\right\}$$

$$= P\left\{\sum_{i=1}^{N_1(z)} \xi_i > t;\ X(t)\le x\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{\nu(t)=n;\ T_{N_1(z)} > t;\ X(t)\le x\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{T_n \le t < T_{n+1};\ T_{N_1(z)} > t;\ X(t)\le x\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{T_n \le t < T_{n+1};\ N_1(z) > n; T_{N_1(z)} > t;\ X(t)\le x\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{T_n \le t < T_{n+1}; z - S_i > 0,\ i=\overline{1,n-1};\ z\text{-}S_n \le x\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{T_n \le t < T_{n+1}\right\} P\left\{z - S_i > 0,\ i=\overline{1,n-1};\ z\text{-}S_n \le x\right\}. \quad (18)$$

Notasyon kısalığı için,

$$a_n(x;z) \equiv P\left\{z - S_i > 0,\ i=\overline{1,n-1};\ z\text{-}S_n \le x\right\}$$

olsun. Bu takdirde,

$$G(t,x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{T_n \le t < T_{n+1}\right\} a_n(x,z) \quad (19)$$

olur. (19) eşitliğinin her iki tarafında t parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa:

$$\tilde{G}(\lambda,x,z) = \frac{1-\psi(\lambda)}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (\psi(\lambda))^n a_n(x,z) \quad (20)$$

olur. Burada $\tilde{G}(\lambda,x,z)$ ile $G(t,x,z)$ fonksiyonunun t parametresine göre Laplace dönüşümü gösterilmiştir, yani,

$$\tilde{G}(\lambda,x,z) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} G(t,x,z)dt;\quad \psi(\lambda) \equiv E(e^{-\lambda\xi_1}) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dF_{\xi}(t),\quad (\lambda > 0)$$

’dir. (20) eşitliğinin her iki tarafında $\lambda \to 0$ iken limite geçilirse,

$$\tilde{G}(0,x,z) = \int_0^{\infty} G(t,x,z)dt = E(\xi_1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,z)$$

olur. Notasyon kısalığı için, $A(x,z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,z)$ olsun. Bu takdirde,

$$\tilde{G}(0,x,z) = \int_0^{\infty} G(t,x,z)dt = E(\xi_1)A(x,z) \quad (21)$$

eşitliği elde edilir. (21) eşitliğinin her iki tarafı $\pi(z)$ dağılımına göre ortalanırsa,

$$\int_0^\infty \tilde{G}(0,x,z)d\pi(z) = E(\xi_1)\int_0^\infty A(x,z)d\pi(z)$$

olur. Burada $\int_0^\infty A(x,z)d\pi(z) = E(A(x,\zeta_1))$ olduğunu dikkate alınırsa,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty G(t,x,z)dtd\pi(z) = E(\xi_1)E(A(x,\zeta_1)) \tag{22}$$

elde edilir. (22) eşitliğini (17)'da yerine yazılarak,

$$S_f \equiv \frac{1}{E(\xi_1)EN_1(\zeta_1)}\int_0^\infty f(x)E(\xi_1)d_x E(A(x,\zeta_1)) = \frac{1}{EN_1(\zeta_1)}\int_0^\infty f(x)d_x E(A(x,\zeta_1))$$

ifadesi elde edilir. Bu da Teorem 2.1.3.2'nin ispatını tamamlar. ■

Teorem 2.1.3.2' den birçok değerli sonuçlar elde etmek mümkündür. Bunlardan ikisi aşağıdaki gibi verilebilir.

Sonuç 2.1.3.1. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $(Q_X(x))$ aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$Q_X(x) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \le x\} = \frac{E(A(x,\zeta_1))}{E(N_1(\zeta_1))} \tag{23}$$

İspat: Teorem 2.1.3.2'de $f(x)$ fonksiyonunun yerine gösterge (indikatör) fonksiyonunu yazarak (23) eşitliği elde edilir. ■

Sonuç 2.1.3.2. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $(\varphi_X(\theta))$ aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\varphi_X(\theta) \equiv \lim_{t\to\infty} E(\exp(i\theta X(t)) = \frac{1}{E(N_1(\zeta_1))}\int_0^\infty e^{i\theta x} d_x E(A(x,\zeta_1)) \tag{24}$$

İspat: Teorem 2.1.3.2'de $f(x)$ fonksiyonunun yerine, sırasıyla $\cos(\theta x)$ ve $\sin(\theta x)$ fonksiyonlarını yazarak ve $\cos(\theta x) + i\sin(\theta x) = \exp(i\theta x)$ Euler eşitliğini göz önünde bulundurarak (24) eşitliği elde edilir. ■

Not: Sonuç 2.1.3.1 ve Sonuç 2.1.3.2'den de görüldüğü üzere, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x)$'i ve karakteristik fonksiyonunu $\varphi_X(\theta)$ hesaplamak için $A(x,z)$ fonksiyonunun bilinmesi gerekiyor. Fakat $A(x,z)$ fonksiyonu en basit durumlarda bile çok zor hesaplanabilen bir fonksiyondur. Bu nedenle $Q(x)$ ve $\varphi_X(\theta)$ için alternatif gösterimlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu zorluğu aradan kaldırmak için rasgele yürüyüş sürecinin temel özdeşliğinden (bkz., Feller [29]) ve Sonuç 1.3.2'den yararlanarak, $\varphi_X(\theta)$ için aşağıdaki alternatif gösterimi ortaya koymak mümkündür.

Sonuç 2.1.3.3. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının $\varphi_X(\theta)$ karakteristik fonksiyonu, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ve η_1 rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonları yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\varphi_X(\theta) \equiv \lim_{t\to\infty} E(\exp(i\theta X(t)) = \frac{1}{E(N_1(\zeta_1))}\int_0^\infty e^{i\theta z}\frac{\varphi_{S_{N(z)}}(-\theta)-1}{\varphi_\eta(-\theta)-1}d\pi(z), \qquad (25)$$

burada $\varphi_\eta(-\theta) = E(\exp(-i\theta\eta_1))$; $\varphi_{S_{N(z)}}(-\theta) = E(\exp(-i\theta S_{N(z)}))$; $\theta \in R/\{0\}$'dır.

İspat: Rasgele yürüyüş süreci için temel özdeşliği (bkz., Feller [29]), Sonuç 2.1.3.2 'de yerine yazıp, gerekli hesaplamaları yaparak, (25) eşitliği elde edilir. ■

Not: Sonuç 2.1.3.3' de $\varphi_X(\theta)$ karakteristik fonksiyonunun, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin uygun karakteristiği ile ifade edilmesinin temel nedeni, literatürde sınır fonksiyoneli ile ilgili birçok değerli sonuçların mevcut olmasıdır (bkz., Borovkov [14], Feller[29] , Rogozin vd. [71]). (25) eşitliğinden yola çıkarak, $X(t)$ sürecinin momentlerinin asimptotik davranışları incelenecektir. Bu amaç için önce $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının momentleri için kesin ifadeler elde edilir.

2.1.4. X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momenti İçin Kesin İfadeler

2.1.3. alt bölümünde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının $\varphi_X(\theta)$ karakteristik fonksiyonu, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin karakteristik fonksiyonu ile (25) formülündeki gibi ifade edilmiştir. Bu formülden yararlanarak, bu bölümde $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentini $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti ile ifade edilecektir. Bu amaçla aşağıdaki notasyonları tanımlansın:

$$m_k = E(\eta_1^k),\ M_k(z) = E(S_{N(z)}^k), \quad \tilde{m}_{k1} = \frac{m_k}{km_1}; M_{k1}(z) = \frac{M_k(z)}{M_1(z)};$$

$$E(X^k) = \lim_{t\to\infty} E((X(t))^k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Bu notasyonları göz önünde bulundurarak, sırasıyla aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.1.4.1. Teorem 2.1.3.1'in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının birinci momenti $(E(X))$ sonludur ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk iki momenti yardımı ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E(X)=\frac{1}{E\left(M_1(\zeta_1)\right)}\left\{E\left(\zeta_1 M_1(\zeta_1)\right)-\frac{1}{2}E\left(M_2(\zeta_1)\right)\right\}+A_1, \tag{26}$$

burada $A_1=\tilde{m}_{21}$ ' dir.

Teorem 2.1.4.2. Teorem 2.1.3.1'in koşullarına ilaveten $E\left(\left|\eta_1\right|^3\right)<\infty$ olsun. Bu takdirde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ikinci momenti $(E(X^2))$ sonludur ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momenti ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}E(X^2)=\frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}&\left\{\left[E(\zeta_1^2 M_1(\zeta_1))-E(\zeta_1 M_2(\zeta_1))+\frac{1}{3}E(M_3(\zeta_1))\right]+\right.\\&\left.+A_1\left[2E(\zeta_1 M_1(\zeta_1))-E(M_2(\zeta_1))\right]\right\}+A_2,\end{aligned} \tag{27}$$

burada $A_2=2\tilde{m}_{21}^2-\tilde{m}_{31};\ \tilde{m}_{k1}=\dfrac{m_k}{km_1},\ k=2,3,...$'dir.

Teorem 2.1.4.3. Teorem 2.1.3.1'in koşullarına ilaveten $E(\eta_1^4)<\infty$ olsun. Bu takdirde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının üçüncü momenti $(E(X^3))$ sonludur ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}E(X^3)=\frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}&\left\{\left[\{E(\zeta_1^3 M_1(\zeta_1))-\frac{3}{2}E(\zeta_1^2 M_2(\zeta_1))+E(\zeta_1 M_3(\zeta_1))-\frac{1}{4}E(M_4(\zeta_1))\right]\right.\\&+A_1\left[3E(\zeta_1^2 M_1(\zeta_1)-3E(\zeta_1 M_2(\zeta_1))+E(M_3(\zeta_1))\right]\\&\left.+3A_2\left[E(\zeta_1 M_1(\zeta_1))-\frac{1}{2}E(M_2(\zeta_1))\right]\right\}+3A_3\end{aligned} \tag{28}$$

burada $A_3=\dfrac{1}{3}\tilde{m}_{41}-2\tilde{m}_{31}\tilde{m}_{21}+2\tilde{m}_{21}^3$'dir.

Teorem 2.1.4.4. Teorem 2.1.3.1' in koşullarına ilaveten $E\left(\left|\eta_1\right|^5\right)<\infty$ olsun. Bu takdirde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının dördüncü momenti $(E(X^4))$ sonludur ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E(X^4)=\frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}\Big\{\Big[E(\zeta_1^4 M_1(\zeta_1))-2E(\zeta_1^3 M_2(\zeta_1))+2E(\zeta_1^2 M_3(\zeta_1))$$

$$-E(\zeta_1 M_4(\zeta_1))+\frac{1}{5}E(M_5(\zeta_1))\Big]$$

$$+2A_1\left[2E(\zeta_1^3 M_1(\zeta_1)-3E(\zeta_1^2 M_2(\zeta_1))+2E(\zeta_1 M_3(\zeta_1))-\frac{1}{2}E(M_4(\zeta_1))\right]$$

$$+6A_2\left[E(\zeta_1^2 M_1(\zeta_1))-E(\zeta_1 M_2(\zeta_1))+\frac{1}{3}E(M_3(\zeta_1))\right]$$

$$+6A_3\left[2E(\zeta_1 M_1(\zeta_1)-E(M_2(\zeta_1))\right]\Big\}+3A_4, \tag{29}$$

burada $A_4=4\tilde{m}_{21}^4-6\tilde{m}_{31}\tilde{m}_{21}^2+\tilde{m}_{31}^2+\frac{4}{3}\tilde{m}_{41}\tilde{m}_{21}-\frac{1}{6}\tilde{m}_{51}$ ’dir.

İspat (Teorem 2.1.4.1 – Teorem 2.1.4.4): Bu teoremlerin ispatları benzer oldukları için örnek olarak sadece Teorem 1.4.1’in ispatı verilecektir. (25) eşitliği ile verilen $\varphi_X(\theta)$ karakteristik fonksiyonunun $\theta\to 0$, iken Taylor açılımı yazılsın. Hatırlatalım ki, $E(\eta_1^2)<\infty$ olduğu için $M_2(z)=E(S_{N(z)}^2)<\infty$ olur (bkz., Feller [29]). Bu durumda,

$$\varphi_\eta(-\theta)\equiv E(\exp(-i\theta\eta_1))=1-i\theta m_1+\frac{(i\theta)^2}{2}m_2+o(\theta^2); \tag{30}$$

$$\varphi_{S_{N(z)}}(-\theta)\equiv E(\exp(-i\theta S_{N(z)}))=1-i\theta M_1(z)+\frac{(i\theta)^2}{2}M_2(z)+o(\theta^2) \tag{31}$$

açılımları yazılabilir (bkz., Feller [29]).

Buradan, $\theta\to 0$ iken,

$$\frac{\varphi_{S_{N(z)}}(-\theta)-1}{\varphi_\eta(-\theta)-1}=\frac{M_1(z)}{m_1}\left\{1+\frac{i\theta}{2}\left[2\tilde{m}_{21}-M_{21}(z)\right]+o(\theta)\right\} \tag{32}$$

açılımı elde edilir. Burada $\tilde{m}_{21}=\dfrac{m_2}{2m_1}$; $M_{21}(z)=\dfrac{M_2(z)}{M_1(z)}$ ’ dir.

$\theta\to 0$ iken, $e^{i\theta z}=1+i\theta z+o(\theta)$ olduğuna göre,

$$e^{i\theta z}\frac{\varphi_{S_{N(z)}}(-\theta)-1}{\varphi_\eta(-\theta)-1}=\frac{M_1(z)}{m_1}\left\{1+\frac{i\theta}{2}\left[2z+2\tilde{m}_{21}-M_{21}(z)\right]+o(\theta)\right\} \tag{33}$$

yazılabilir. (33)’den aşağıdaki açılımı elde edilir:

$$\int_0^\infty e^{i\theta z}\frac{\varphi_{S_{N(z)}}(-\theta)-1}{\varphi_\eta(-\theta)-1}d\pi(z)=\frac{E(M_1(\zeta_1))}{m_1}$$

$$+\frac{i\theta}{2m_1}\left\{2E(\zeta_1 M_1(\zeta_1)) - E(M_2(\zeta_1)) + 2\tilde{m}_{21}E(M_1(\zeta_1))\right\} + o(\theta). \qquad (34)$$

(34) açılımının her tarafı $E(N_1(\zeta_1))$'e bölünür, $m_1E(N_1(\zeta_1)) = E(M_1(\zeta_1))$ olduğu da dikkate alınırsa,

$$\varphi_X(\theta) = 1 + \frac{i\theta}{2E(M_1(\zeta_1))}\left\{2E(\zeta_1 M_1(\zeta_1)) - E(M_2(\zeta_1)) + 2\tilde{m}_{21}E(M_1(\zeta_1))\right\} + o(\theta) \qquad (35)$$

açılımı elde edilir. Diğer taraftan, $\theta \to 0$ iken,

$$\varphi_X(\theta) \equiv E(\exp(i\theta X)) = 1 + i\theta E(X) + o(\theta) \qquad (36)$$

açılımı yazılabilir. (35) ve (36) açılımları karşılaştırılarak, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının birinci momenti $(E(X))$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilir:

$$E(X) = \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}\left\{E(\zeta_1 M_1(\zeta_1)) - \frac{1}{2}E(M_2(\zeta_1)) + \tilde{m}_{21}E(M_1(\zeta_1))\right\}$$

$$= \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}\left\{E(\zeta_1 M_1(\zeta_1)) - \frac{1}{2}E(M_2(\zeta_1))\right\} + \tilde{m}_{21}. \qquad (37)$$

Bu da Teorem 2.1.4.1'in ispatını tamamlar. ■

Teorem 2.1.4.2, 2.1.4.3 ve 2.1.4.4'ün ispatları da benzer şekilde verilir. Böylece, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti $(E(X^k),\ k = 1,2,3,4)$ için yukarıdaki kesin ifadeler elde edilmiş olur. ■

2.1.5. $S_{N(z)}$ Sınır Fonksiyonelinin Momentleri İçin Üç Terimli Asimptotik Açılımlar

2.1.4. alt bölümde $X(t)$ sürecinin ilk dört momenti $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti ile ifade edildi. Fakat bu kesin ifadeleri hesaplamak oldukça zordur. Bu nedenle bu çalışmada çeşitli asimptotik yöntemleri kullanarak $X(t)$ sürecinin momentleri için üç terimli açılımlar elde edilmesi amaçlanır. Bu maksatla, önce $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri için $z \to \infty$ iken asimptotik açılımlar elde edilmeye ve bazı önemli matematiksel önermeler ispatlanmaya çalışılacaktır. Bunun için $\{S_n\},\ n \ge 0$ rasgele yürüyüş sürecinin üçüncü bölümde tanımlanmış basamak anlarını ve basamak yükseklikleri ele alınır. Birinci basamak anının (ν_1^+) ve birinci basamak yüksekliğinin (χ_1^+) tanımını tekrar yazılsın:

$$\nu_1^+ = \min\{n \geq 1 : S_n > 0\}, \quad \chi_1^+ = S_{\nu_1^+} \equiv \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i \quad .$$

ν_1^+ ve χ_1^+ rasgele değişkenlerine literatürde, sırasıyla, $\{S_n\}, n \geq 0$, rasgele yürüyüş sürecinin birinci basamak anı ve birinci basamak yüksekliği denir. Bu özel rasgele değişkenler rasgele yürüyüş süreçlerinin incelenmesinde önemli bir rol oynamaktadırlar (bkz., Feller [29], s.391). $\{\nu_n^+\}$ ve $\{\chi_n^+\}$, $n \geq 1$, dizileri bağımsız ve sırasıyla ν_1^+ ve χ_1^+ ile aynı dağılıma sahip pozitif değerli rasgele değişkenler dizileri olsunlar.

$H(x)$ ile χ_n^+, $n \geq 1$, rasgele değişkenlerinin ürettiği yenileme süreci gösterilsin, yani,

$$H(x) = \min\left\{ n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ \geq x \right\}, \quad x \geq 0,$$

olsun. E. Dynkin prensibine göre $N_1(z)$ ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelleri $\{\nu_n^+\}$ ve $\{\chi_n^+\}$, $n \geq 1$, değişkenleri yardımı ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilirler:

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{H(x)} \nu_i^+ \quad ; \quad S_{N(x)} = \sum_{i=1}^{H(x)} \chi_i^+ \, .$$

$U_+(x)$ ile χ_n^+, $n \geq 1$, basamak yüksekliklerinin ürettiği yenileme fonksiyonu gösterilsin, yani,

$$U_+(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_+^{*n}(x), \quad x \geq 0$$

olsun. Burada $F_+^{*n}(x)$ ile $F_+(x) \equiv P\{\chi_1^+ \leq x\}$ dağılım fonksiyonunun n kat konvolüsyon çarpımı gösterilmiştir.

Amaç;

$$E(\zeta_1^n M_k(\zeta_1)) \equiv \int_{z=0}^{\infty} z^n M_k(z) d\pi(z); \text{ n=1,2,3,...; k=0,1,2,...} \tag{38}$$

tipli integraller için asimptotik sonuçlar elde etmektir. Burada $\pi(z)$, kesikli şans karışımlı müdahaleyi ifade eden ζ_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonudur. Varsayıma göre, $\zeta_1 = \max(0; Y_1)$; $Y_1 \in N(a, \sigma^2)$ ’ dır. Bu durumda, $\pi(z)$ dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\pi(z) = \Phi(\frac{z-a}{\sigma})\varepsilon(z),\ z \in R\,. \tag{39}$$

Burada $\varepsilon(z)$ fonksiyonu Heaviside birim fonksiyonu olup, $z \geq 0$ olduğunda $\varepsilon(z) = 1$; $z < 0$ olduğunda ise $\varepsilon(z) = 0$ 'dir. $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(x)dx$ fonksiyonu standart Normal dağılım fonksiyonu; $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}),\quad x \in R$ ise standart Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

(38) integrallerini incelemeden önce standart Normal dağılım ile ilgili bazı önemli özellikler aşağıda önermeler şeklinde verilsin.

Önerme 2.1.5.1. Her $a > 0$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

1) $\int_a^{\infty} \varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{1}{2}$; 2) $\int_a^{\infty} z\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a}{2} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$;

3) $\int_a^{\infty} z^2\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a^2}{2} + \frac{2\sigma a}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sigma^2}{2}$.

Burada $\varphi_\sigma(z) \equiv \frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{z}{\sigma})$; $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}), x \in R$ 'dir.

İspat: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}), x \in R$ olduğu için,

$$\int_0^{\infty} \varphi(z)dz = \frac{1}{2};\quad \int_0^{\infty} z\varphi(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}};\quad \int_0^{\infty} z^2\varphi(z)dz = \frac{1}{2} \tag{40}$$

olduğu bilinmektedir. Bu durumda, yukarıdaki integrallerde $z = a + \sigma x$ dönüşümü yapılarak ve (40) eşitlikleri dikkate alınarak, Önerme 2.1.5.1' in ispatı tamamlanır. ■

Önerme 2.1.5.2. Her $n = 3, 4, \ldots$ için $a \to \infty$ iken aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar doğrudur:

$$\int_a^{\infty} z^n \varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{1}{2}a^n + \frac{n\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^{n-1} + \frac{n(n-1)\sigma^2}{4}a^{n-2} + o(a^{n-2})\,.$$

İspat: $z = a + \sigma x$ değişken dönüşümünü yaparak, her $n = 3, 4, \ldots$ için

$$\int_a^{\infty} z^n \varphi_\sigma(z-a)dz = \int_0^{\infty}(a+\sigma x)^n \varphi(x)dx$$

$$= \int_0^{\infty}\left\{a^n + na^{n-1}\sigma x + \frac{n(n-1)a^{n-2}\sigma^2 x^2}{2}\right\}\varphi(x)dx + o(a^{n-2})$$

$$= a^n \int_0^{\infty}\varphi(x)dx + n\sigma a^{n-1}\int_0^{\infty} x\varphi(x)dx + \frac{n(n-1)\sigma^2}{2} a^{n-2}\int_0^{\infty} x^2\varphi(x)dx + o(a^{n-2})$$

$$= \frac{1}{2}a^n + \frac{n\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^{n-1} + \frac{n(n-1)\sigma^2}{4}a^{n-2} + o(a^{n-2})$$

açılımı elde edilir. Böylece, Önerme 2.1.5.2 ‘nin ispatı tamamlanır. ■

Önerme 2.1.5.3. $g(z)$ $(g: R^+ \to R)$ fonksiyonu $z \to \infty$ iken sıfıra yakınsayan bir fonksiyon, yani $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ olsun. Bu takdirde, $a \to \infty$ iken

$$\int_a^{\infty}\frac{1}{z}g(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = o(\frac{1}{a})$$

olur.

İspat: $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ olduğuna göre, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir sonlu $b = b(\varepsilon)$ sayısı seçmek mümkündür ki, her $z \ge b(\varepsilon)$ için $|g(z)| \le \varepsilon$ olsun. Ayrıca $a \to \infty$ olduğuna göre her $\varepsilon > 0$ için a parametresi, $a \ge b(\varepsilon)$ olmak üzere yeterince büyük bir sayı olarak seçilebilir. Dolayısıyla, $a \ge b(\varepsilon)$ ve $a \to \infty$ iken

$$\left|\int_a^{\infty}\frac{1}{z}g(z)\varphi_\sigma(z-a)dz\right| \le \int_a^{\infty}\frac{1}{z}|g(z)|\varphi_\sigma(z-a)dz$$

$$\le \varepsilon\int_a^{\infty}\frac{1}{z}\varphi_\sigma(z-a)dz \le \frac{\varepsilon}{a}\int_a^{\infty}\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{\varepsilon}{2a}$$

olur. Buradan $a \to \infty$ iken

$$\left|a\int_a^{\infty}\frac{1}{z}g(z)\varphi_\sigma(z-a)dz\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitliği elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olarak seçildiğine göre, $a \to \infty$ iken

$$a\int_a^\infty \frac{1}{z} g(z)\varphi_\sigma(z-a)dz \to 0$$

olur. Buradan $a \to \infty$ iken,

$$\int_a^\infty \frac{1}{z} g(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = o(\frac{1}{a})$$

’dır. Böylece Önerme 2.1.5.3 ispatlanmış olur. ■

Önerme 2.1.5.4. $g(z)$ $(g : R^+ \to R)$ fonksiyonu $z \to \infty$ iken sıfıra yakınsayan bir fonksiyon olsun, yani $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 0$ olsun. Bu takdirde her $n = 0,1,2,....$ için $a \to \infty$ iken

$$\int_a^\infty z^n g(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = o(a^n)$$

olur.

İspat: $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 0$ olduğuna göre, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $b \equiv b(\varepsilon) < \infty$ sayısı seçmek mümkündür ki, her $z \ge b(\varepsilon)$ için $|g(z)| < \varepsilon$ olsun. Bu durumda, a parametresi $a \ge b(\varepsilon)$ olmak üzere,

$$\left|\int_a^\infty z^n g(z)\varphi_\sigma(z-a)dz\right| \le \int_a^\infty z^n |g(z)| \varphi_\sigma(z-a)dz$$

$$\le \varepsilon\int_a^\infty z^n \varphi_\sigma(z-a)dz$$

olur. Önerme 2.1.5.1’e ve Önerme 2.1.5.2’e göre, $a \to \infty$ iken

$$\int_a^\infty z^n \varphi_\sigma(z-a)dz \le C\frac{a^n}{2}, \quad n = 0,1,2,...$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada C belirli bir pozitif ve sonlu sabittir. Bu durumda,

$$\left|\int_a^\infty z^n g(z)\varphi_\sigma(z-a)dz\right| \le C\frac{a^n}{2}\varepsilon$$

olur. $\varepsilon > 0$ sabitinin keyfi seçilmesi ve C sabitinin sonlu olması nedeni ile, $a \to \infty$ iken,

$$\frac{1}{a^n}\int_a^{\infty} z^n g(z)\varphi_\sigma(z-a)dz \to 0$$

olur. Buradan, $a \to \infty$ iken

$$\int_a^{\infty} z^n g(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = o(a^n)$$

elde edilir. Böylece, Önerme 2.1.5.4 ispatlanmış olur. ■

Önerme 2.1.5.5. $\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda)$ fonksiyonu $\varphi_\sigma(z)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü olsun. Bu takdirde, $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki üç terimli asimptotik açılım doğrudur:

$$\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^2}{4}\lambda^2 + o(\lambda^2).$$

İspat: Her $\lambda > 0$ için

$$\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) \equiv \int_0^{\infty} e^{-\lambda z}\varphi_\sigma(z)dz$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda z}\frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{z}{\sigma})dz = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\sigma x}\varphi(x)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\lambda\sigma x}e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x^2 + 2\lambda\sigma x\right]\right\}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(x+\lambda\sigma)^2 - (\lambda\sigma)^2\right]\right\}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{(\lambda\sigma)^2}{2})\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{(x+\lambda\sigma)^2}{2}\right\}dx$$

$$= \exp(\frac{(\lambda\sigma)^2}{2})\int_{\lambda\sigma}^{\infty}\varphi(u)du = \exp(\frac{(\lambda\sigma)^2}{2})\left[1-\Phi(\lambda\sigma)\right]$$

’dır. Burada $\Phi(x)$ ile standart normal dağılım fonksiyonu gösterilmiştir. $\Phi(x)$ fonksiyonunun, $x \to 0$ iken, Taylor açılımını yazılırsa:

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \frac{\Phi'(0)}{1!}x + \frac{\Phi''(0)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

olur. Burada $\Phi(0)=\frac{1}{2}$; $\Phi'(0)=\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; $\Phi''(0)=0$ ’dır. Dolayısıyla, $x\to 0$ iken

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x+o(x^2)$$

açılımı yazılabilir. $\sigma<\infty$ olduğuna göre $\lambda\to 0$ iken $\lambda\sigma\to 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda\to 0$ iken

$$\Phi(\lambda\sigma)=\frac{1}{2}+\frac{\lambda\sigma}{\sqrt{2\pi}}+o(\lambda^2)$$

olur. Buradan,

$$1-\Phi(\lambda\sigma)=\frac{1}{2}-\frac{\lambda\sigma}{\sqrt{2\pi}}+o(\lambda^2)$$

açılımı elde edilir. Diğer taraftan, $\lambda\to 0$ iken

$$\exp((\lambda\sigma)^2/2)=1+\frac{(\lambda\sigma)^2}{2}+o(\lambda^2)$$

’dir. Dolayısıyla, $\lambda\to 0$ iken

$$\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda)=(1+\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}+o(\lambda^2))(\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\lambda+o(\lambda^2))$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\lambda+\frac{\sigma^2}{4}\lambda^2+o(\lambda^2)$$

açılımı elde edilir. Bu da Önerme 2.1.5.5’in ispatını tamamlar. ■

Şimdi $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri için aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımları bir önerme şeklinde verilebilir. Bu önerme, [56] çalışmasında yayınlanmış bir teoremin sonucudur ve bu nedenle ispatsız verilecektir.

Önerme 2.1.5.6. (Khaniyev ve Mammadova [56]) χ_1^+ birinci basamak yüksekliğinin ilk üç momenti sonlu, yani $\mu_3\equiv E(\chi_1^{+3})<+\infty$ olsun. Bu takdirde $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti için $z\to\infty$ iken aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$M_1(z)\equiv E(S_{N(z)})=z+\tilde{\mu}_{21}+o\left(\frac{1}{z}\right); \quad (41)$$

$$M_2(z)\equiv E(S_{N(z)}^2)=z^2+2\tilde{\mu}_{21}z+\tilde{\mu}_{31}+o(1); \quad (42)$$

$$M_3(z)\equiv E(S_{N(z)}^3)=z^3+3\tilde{\mu}_{21}z^2+3\tilde{\mu}_{31}z+o(z); \quad (43)$$

$$M_4(z)\equiv E(S_{N(z)}^4)=z^4+4\tilde{\mu}_{21}z^3+6\tilde{\mu}_{31}z^2+o(z^2); \quad (44)$$

$$M_5(z) \equiv E(S^5_{N(z)}) = z^5 + 5\tilde{\mu}_{21} z^4 + 10\tilde{\mu}_{31} z^3 + o(z^3); \qquad (45)$$

burada $M_k(z) \equiv E(S^k_{N(z)})$; $k = \overline{1,5}$; $\mu_k = E\left(\chi_1^{+k}\right)$, $\tilde{\mu}_{k1} = \dfrac{\mu_k}{k\mu_1}$, $k = 1,2,3$'tür. ■

$E(\zeta_1^n M_k(\zeta_1)) \equiv \int\limits_{z=0}^{\infty} z^n M_k(z) d\pi(z)$ integralleri için asimptotik sonuçları aşağıdaki yardımcı teoremlerle verilir.

Yardımcı Teorem 2.1.5.1. $\mu_3 = E(\chi_1^{+3}) < \infty$ olsun. Bu takdirde, her $n = 0,1,2,...$ için, $a \to \infty$ iken aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$E\left(\zeta_1^n M_1\left(\zeta_1\right)\right) = a^{n+1} + \tilde{\mu}_{21} a^n + \frac{1}{2} n(n+1)\sigma^2 a^{n-1} + o(a^{n-1}).$$

İspat: $\pi(z) = \Phi(\dfrac{z-a}{\sigma})\varepsilon(z)$ olduğuna göre her $n = 0,1,2,...$ için $E\left(\zeta_1^n M_1\left(\zeta_1\right)\right)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$E\left(\zeta_1^n M_1\left(\zeta_1\right)\right) = \int\limits_0^{\infty} z^n M_1(z) d\pi(z)$$

$$= \int\limits_0^{\infty} z^n M_1(z) \frac{1}{\sigma}\varphi_\sigma(\frac{z-a}{\sigma})\varepsilon(z)dz + \int\limits_0^{\infty} z^n M_1(z)\Phi(\frac{z-a}{\sigma})d\varepsilon(z)$$

$$= \int\limits_0^{\infty} z^n M_1(z)\varphi_\sigma(z-a)dz + \mu_1\Phi(-a/\sigma)\delta_{n0}, \qquad (46)$$

burada $\delta_{n0} = 1$ eğer n=0 ise; $\delta_{n0} = 0$ eğer $n \neq 0$ ise' dir.

(46) eşitliğindeki integral aşağıdaki şekilde yazılsın:

$$\int\limits_0^{\infty} z^n M_1(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = \int\limits_0^{a} z^n M_1(z)\varphi_\sigma(z-a)dz + \int\limits_a^{\infty} z^n M_1(z)\varphi_\sigma(z-a)dz \qquad (47)$$

(47) eşitliğinin sağ tarafındaki integraller sırasıyla $I_{1n}(a)$ ve $J_{1n}(a)$ ile gösterilsin, yani

$$I_{1n}(a) \equiv \int\limits_0^{a} z^n M_1(z)\varphi_\sigma(z-a)dz; \; J_{2n}(a) \equiv \int\limits_a^{\infty} z^n M_1(z)\varphi_\sigma(z-a)dz$$

olsun. Kısalık için $M_{1n}(z) \equiv z^n M_1(z)$ yazılırsa, o zaman,

$$I_{1n}(a) \equiv \int_0^a M_{1n}(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = \int_0^a M_{1n}(z)\varphi_\sigma(a-z)dz = M_{1n}(a) * \varphi_\sigma(a)$$

olur. Bu takdirde,

$$\tilde{I}_{1n}(\lambda) = \tilde{M}_{1n}(\lambda)\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) \tag{48}$$

olur. Burada $\tilde{G}(\lambda)$ ile $G(a)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü gösterilmiştir.

$I_{1n}(a)$ integralinin $a \to \infty$ iken asimptotik davranışını incelemek için $\tilde{I}_{1n}(\lambda)$'nın $\lambda \to 0$ iken davranışını incelensin. Önerme 2.1.5.5'ten $\lambda \to 0$ iken

$$\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\} \tag{49}$$

olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan $\mu_3 < +\infty$ olduğu için Önerme 2.1.5.6' ya göre, $z \to \infty$ iken,

$$M_1(z) = z + \tilde{\mu}_{21} + o(\frac{1}{z}) \tag{50}$$

'dir. O zaman, $n = 0,1,2,...$ olmak üzere

$$M_{1n}(z) \equiv z^n M_1(z) = z^{n+1} + \tilde{\mu}_{21}z^n + o(z^{n-1}) \tag{51}$$

olur. (51) açılımından $\lambda \to 0$ iken

$$\tilde{M}_{1n}(\lambda) = \frac{\Gamma(n+2)}{\lambda^{n+2}} + \tilde{\mu}_{21}\frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^{n+1}} + o(\frac{1}{\lambda^n})$$

$$= \frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}} + \tilde{\mu}_{21}\frac{n!}{\lambda^{n+1}} + o(\frac{1}{\lambda^n}) = \frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}}\left\{1 + \frac{\tilde{\mu}_{21}}{n+1}\lambda + o(\lambda^2)\right\} \tag{52}$$

açılımı elde edilir. (49) ve (52) açılımları (48) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$\tilde{I}_{1n}(\lambda) = \tilde{M}_{1n}(\lambda)\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) = \frac{(n+1)!}{2\lambda^{n+2}}\left\{1 + \frac{\tilde{\mu}_{21}}{n+1}\lambda + o(\lambda^2)\right\}\left\{1 - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\}$$

$$= \frac{(n+1)!}{2\lambda^{n+2}}\left\{1 - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 + \frac{\tilde{\mu}_{21}}{n+1}\lambda - \frac{2\sigma\tilde{\mu}_{21}\lambda^2}{(n+1)\sqrt{2\pi}} + o(\lambda^2)\right\}$$

$$=\frac{(n+1)!}{2\lambda^{n+2}}\left\{1+\lambda\left[\frac{\tilde{\mu}_{21}}{n+1}-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right]+\lambda^2\left[\frac{\sigma^2}{2}-\frac{2\sigma\tilde{\mu}_{21}}{(n+1)\sqrt{2\pi}}\right]+o(\lambda^2)\right\}$$

$$=\frac{(n+1)!}{2\lambda^{n+2}}+\left[\frac{\tilde{\mu}_{21}}{n+1}-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right]\frac{(n+1)!}{2\lambda^{n+1}}+\left[\frac{\sigma^2}{2}-\frac{2\sigma\tilde{\mu}_{21}}{(n+1)\sqrt{2\pi}}\right]\frac{(n+1)!}{2\lambda^{n}}+o(\frac{1}{\lambda^n}) \quad (53)$$

olur. (53) açılımına Tauber – Abel teoremini uygulayarak, $I_{1n}(a)$ integrali için, $a\to\infty$ iken, aşağıdaki açılım elde edilir:

$$I_{1n}(a)=\frac{(n+1)!}{2}\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}+\left[\frac{\tilde{\mu}_{21}}{n+1}-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right]\frac{(n+1)!}{2}\frac{a^n}{n!}$$

$$+\left[\frac{\sigma^2}{2}-\frac{2\sigma\tilde{\mu}_{21}}{(n+1)\sqrt{2\pi}}\right]\frac{(n+1)!}{2}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}+o(a^{n-1})$$

$$=\frac{a^{n+1}}{2}+\frac{(n+1)}{2}\left[\frac{\tilde{\mu}_{21}}{n+1}-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right]a^n$$

$$+\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{\sigma^2}{2}-\frac{2\sigma\tilde{\mu}_{21}}{(n+1)\sqrt{2\pi}}\right]a^{n-1}+o(a^{n-1})$$

$$=\frac{a^{n+1}}{2}+\frac{a^n}{2}\left[\tilde{\mu}_{21}-\frac{2\sigma(n+1)}{\sqrt{2\pi}}\right]+\frac{n}{2}\left[\frac{(n+1)\sigma^2}{2}-\frac{2\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}}\right]a^{n-1}+o(a^{n-1})$$

$$=\frac{a^{n+1}}{2}+\frac{a^n}{2}\left[\tilde{\mu}_{21}-\frac{2\sigma(n+1)}{\sqrt{2\pi}}\right]+\frac{n}{4}\left[(n+1)\sigma^2-\frac{4\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}}\right]a^{n-1}+o(a^{n-1}). \quad (54)$$

$J_{1n}(a)$ integralinin asimptotik davranışı $a\to\infty$ iken ele alınsın:

$$J_{1n}(a)\equiv\int_a^\infty z^n M_1(z)\varphi_\sigma(z-a)dz=\int_a^\infty M_{1n}(z)\varphi_\sigma(z-a)dz. \quad (55)$$

$\mu_3<\infty$ olduğu için Önerme 2.1.5.6' ya göre, $z\to\infty$ iken, $M_{1n}(z)$ için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$M_{1n}(z)=z^{n+1}+\tilde{\mu}_{21}z^n+z^{n-1}g_1(z). \quad (56)$$

Burada $g_1(z)\equiv z\left[M_1(z)-z-\tilde{\mu}_{21}\right]$ fonksiyonu $z\to\infty$ iken sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur, yani, $\lim_{z\to\infty}g_1(z)=0$ 'dır.

(56) gösterimi $J_{1n}(a)$ integralinde yerine yazılırsa,

$$J_{1n}(a) \equiv \int_a^\infty z^{n+1}\varphi_\sigma(z-a)dz + \tilde{\mu}_{21}\int_a^\infty z^n\varphi_\sigma(z-a)dz + \int_a^\infty z^{n-1}g_1(z)\varphi_\sigma(z-a)dz \qquad (57)$$

elde edilir. Önerme 2.1.5.1 ve Önerme 2.1.5.2'ye göre, her $n \geq 0$ için, $a \to \infty$ iken,

$$\int_a^\infty z^{n+1}\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a^{n+1}}{2} + \frac{(n+1)\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^n + \frac{n(n+1)\sigma^2}{4}a^{n-1} + o(a^{n-1})\,;$$

$$\int_a^\infty z^n\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a^n}{2} + \frac{n\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^{n-1} + o(a^{n-1})$$

açılımları doğrudurlar. Diğer taraftan, Önerme 2.1.5.3 ve Önerme 2.1.5.4'e göre, $\mu_3 < \infty$ olduğunda her $n = 0,1,2,...$ için , $a \to \infty$ iken,

$$\int_a^\infty z^{n-1}g_1(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = o(a^{n-1})$$

'dir. Bu açılımlar $J_{1n}(a)$ 'nın (57) ifadesinde yerine yazılırsa $a \to \infty$ iken,

$$J_{1n}(a) = \frac{a^{n+1}}{2} + \frac{(n+1)\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^n + \frac{n(n+1)\sigma^2}{4}a^{n-1} + \frac{1}{2}\tilde{\mu}_{21}a^n + \frac{n\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}}a^{n-1} + o(a^{n-1})$$

$$= \frac{a^{n+1}}{2} + \frac{a^n}{2}\left[\tilde{\mu}_{21} + \frac{2(n+1)\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right] + \frac{n(n+1)}{4}\left[\sigma^2 + \frac{4\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}(n+1)}\right]a^{n-1} + o(a^{n-1}) \quad (58)$$

açılımı elde edilir. (47) eşitliğine geri dönüp, $I_{1n}(a)$ ve $J_{1n}(a)$ integralleri için elde edilmiş (54) ve (58) açılımları yerine yazılırsa, her $n = 0,1,2,...$ için , $a \to \infty$ iken

$$\int_0^\infty M_{1n}(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = I_{1n}(a) + J_{1n}(a)$$

$$= \frac{a^{n+1}}{2} + \frac{a^n}{2}\left[\tilde{\mu}_{21} - \frac{2\sigma(n+1)}{\sqrt{2\pi}}\right] + \frac{n(n+1)}{4}\left[\sigma^2 - \frac{4\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}(n+1)}\right]a^{n-1} + o(a^{n-1})$$

$$+ \frac{a^{n+1}}{2} + \frac{a^n}{2}\left[\tilde{\mu}_{21} + \frac{2(n+1)\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right] + \frac{n(n+1)}{4}\left[\sigma^2 + \frac{4\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}(n+1)}\right]a^{n-1} + o(a^{n-1})$$

$$= a^{n+1} + a^n\tilde{\mu}_{21} + \frac{n(n+1)}{2}\sigma^2 a^{n-1} + o(a^{n-1}) \qquad (59)$$

açılımını elde edilir. Ayrıca, $a \to \infty$ iken, $T \equiv a/\sigma \to \infty$ olduğuna göre, Mill teoreminin sonucu olarak (bkz., Abramowitch and Stegun, [1]),

$$\Phi(-T) = \frac{\varphi(T)}{T}(1 + o(1)) = o(\exp(-a^2/2\sigma^2)) = o(1)$$

olur. Dolayısıyla, $\mu_1 < \infty$ olduğunu da göz önünde bulundurarak, $a \to \infty$ iken,

$$\mu_1 \Phi(-T)\delta_{n0} = o(1) \tag{60}$$

elde edilir. Şimdi de (59) ve (60) açılımları (46) eşitliğinde yerine yazılarak, her n=0,1,2,… için, $a \to \infty$ iken,

$$E(\zeta_1^n M_1(\zeta_1)) = a^{n+1} + \tilde{\mu}_{21} a^n + \frac{n(n+1)}{2}\sigma^2 a^{n-1} + o(a^{n-1}) \tag{61}$$

açılımı elde edilir. Bu da Yardımcı Teorem 2.1.5.1' in ispatını tamamlar. ■

Yardımcı Teorem 2.1.5.2. $\mu_3 < \infty$ olduğunda her $n = 0,1,2,...$ için, $a \to \infty$ iken, aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$E\left(\zeta_1^n M_2\left(\zeta_1\right)\right) = a^{n+2} + 2\tilde{\mu}_{21} a^{n+1} + \left[\tilde{\mu}_{31} + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\sigma^2\right] a^n + o(a^n).$$

İspat: Her $n = 0,1,2,...$ için

$$E\left(\zeta_1^n M_2\left(\zeta_1\right)\right) = \int_0^\infty z^n M_2(z) d\pi(z) = \int_0^\infty z^n M_2(z)\varphi_\sigma(z-a)\varepsilon(z)dz$$

$$+\int_0^\infty z^n M_2(z)\Phi(\frac{z-a}{\sigma})d\varepsilon(z) = \int_0^\infty M_{2n}(z)\varphi_\sigma(z-a)dz + \mu_2\Phi(-T)\delta_{n0} \tag{62}$$

'dir. Burada $M_{2n}(z) \equiv z^n M_2(z)$; $\varphi_\sigma(z-a) \equiv \frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{z-a}{\sigma})$; $\mu_2 \equiv E(\chi_1^{+2})$;

$T = a/\sigma$; $\delta_{n0} = 1$ eğer $n = 0$ ise; $\delta_{n0} = 0$ eğer $n \neq 0$ ise.

Önce (62) eşitliğindeki integral ele alınırsa bu integral aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\int_0^\infty M_{2n}(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = \int_0^a M_{2n}(z)\varphi_\sigma(z-a)dz + \int_a^\infty M_{2n}(z)\varphi_\sigma(z-a)dz. \tag{63}$$

(63) eşitliğinin sağ tarafındaki integraller, sırasıyla, $I_{2n}(a)$ ve $J_{2n}(a)$ ile gösterilsin, yani,

$$I_{2n}(a) \equiv \int_0^a M_{2n}(z)\varphi_\sigma(z-a)dz \; ; \; J_{2n}(a) \equiv \int_a^\infty M_{2n}(z)\varphi_\sigma(z-a)dz$$

olsun. Önce $I_{2n}(a)$ integralini ele alalım.

$$I_{2n}(a) \equiv \int_0^a M_{2n}(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = M_{2n}(a) * \varphi(a) \text{ 'dır}$$

O zaman,

$$\tilde{I}_{2n}(\lambda) = \tilde{M}_{2n}(\lambda)\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) \tag{64}$$

olur. Burada $\tilde{G}(\lambda)$ ile $G(a)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü gösterilmiştir.

$I_{2n}(a)$ integralinin, $a \to \infty$ iken, asimptotik davranışını incelemek için $\tilde{I}_{2n}(\lambda)$ 'nın, $\lambda \to 0$ iken davranışı incelensin. Önerme 2.1 5.5'e göre, $\lambda \to 0$ iken,

$$\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\} \tag{65}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan, $\mu_3 < +\infty$ olduğunda, Önerme 2.1.5.6'ya göre, $z \to \infty$ iken,

$$M_2(z) = z^2 + 2\tilde{\mu}_{21}z + \tilde{\mu}_{31} + o(1) \tag{66}$$

'dir. Bu takdirde,

$$M_{2n}(z) \equiv z^n M_2(z) = z^{n+2} + 2\tilde{\mu}_{21}z^{n+1} + \tilde{\mu}_{31}z^n + o(z^n) \tag{67}$$

olur. (67) açılımından, $\lambda \to 0$ iken,

$$\tilde{M}_{2n}(\lambda) = \frac{(n+2)!}{\lambda^{n+3}} + 2\tilde{\mu}_{21}\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}} + \tilde{\mu}_{31}\frac{n!}{\lambda^{n+1}} + o(\frac{1}{\lambda^{n+1}}) \tag{68}$$

açılımı elde edilir. (65) ve (67) açılımları (64) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{2n}(\lambda) &= \tilde{M}_{2n}(\lambda)\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) \\ &= \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\} \\ &\quad \left\{\frac{(n+2)!}{\lambda^{n+3}} + 2\tilde{\mu}_{21}\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}} + \tilde{\mu}_{31}\frac{n!}{\lambda^{n+1}} + o(\frac{1}{\lambda^{n+1}})\right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{(n+2)!}{\lambda^{n+3}} + 2\tilde{\mu}_{21}\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}} + \tilde{\mu}_{31}\frac{n!}{\lambda^{n+1}} - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\frac{(n+2)!}{\lambda^{n+2}} \right.$$

$$\left. - \frac{4\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}}\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+1}} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{(n+2)!}{\lambda^{n+1}} + o(\frac{1}{\lambda^{n+1}}) \right\}$$

$$= \frac{(n+2)!}{2\lambda^{n+3}} + \left[\tilde{\mu}_{21} - \frac{\sigma)}{\sqrt{2\pi}}(n+2) \right]\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}}$$

$$+ \left[\frac{1}{2}\tilde{\mu}_{31} - \frac{2\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}}(n+1) + \frac{\sigma^2}{4}(n+1)(n+2) \right]\frac{n!}{\lambda^{n+1}}$$

$$= \frac{(n+2)!}{2\lambda^{n+3}} + (\tilde{\mu}_{21} - \frac{\sigma(n+2)}{\sqrt{2\pi}})\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\tilde{\mu}_{31} - \frac{4\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}}(n+1) + \frac{\sigma^2(n+1)(n+2)}{2} \right]\frac{n!}{\lambda^{n+1}} + o(\frac{1}{\lambda^{n+1}}) \tag{69}$$

olur. (69) açılımına Tauber-Abel teoremini uygulayarak, $I_{2n}(a)$ integrali için, $a \to \infty$ iken, aşağıdaki açılım elde edilir:

$$I_{2n}(a) = \frac{a^{n+2}}{2} + (\tilde{\mu}_{21} - \frac{\sigma(n+2)}{\sqrt{2\pi}})a^{n+1}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\tilde{\mu}_{31} - \frac{4\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}}(n+1) + \frac{\sigma^2(n+1)(n+2)}{2} \right]a^n + o(a^n) \tag{70}$$

$J_{2n}(a)$ integralinin asimptotik davranışı $a \to \infty$ iken ele alınsın:

$$J_{2n}(a) \equiv \int_a^\infty M_{2n}(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = \int_a^\infty z^n M_2(z)\varphi_\sigma(z-a)dz\,. \tag{71}$$

Önerme 2.1.5.6'dan $\mu_3 < \infty$ olduğunda, $z \to \infty$ iken, $M_2(z)$ için aşağıdaki asimptotik açılım bilinmektedir:

$$M_2(z) = z^2 + 2\tilde{\mu}_{21}z + \tilde{\mu}_{31} + g_2(z)\,.$$

Burada $g_2(z) \equiv M_2(z) - z^2 - 2\tilde{\mu}_{21} z - \tilde{\mu}_{31}$ fonksiyonu $z \to \infty$ iken sıfıra yakınsayan bir fonksiyon, yani $\lim_{z\to\infty} g_2(z) = 0$ 'dır. Bu açılımı göz önünde bulundurarak her $n = 0,1,2,...$ için $M_{2n}(z)$, $z \to \infty$ iken aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_{2n}(z) \equiv z^n M_2(z) = z^{n+2} + 2\tilde{\mu}_{21} z^{n+1} + \tilde{\mu}_{31} z^n + z^n g_2(z), \tag{72}$$

(72) eşitliği $J_{2n}(a)$ integralinin tanımında yerine yazılırsa,

$$J_{2n}(a) = \int_a^\infty z^{n+2} \varphi_\sigma(z-a)dz + 2\tilde{\mu}_{21} \int_a^\infty z^{n+1} \varphi_\sigma(z-a)dz$$

$$+\tilde{\mu}_{31} \int_a^\infty z^n \varphi_\sigma(z-a)dz + \int_a^\infty z^n g_2(z) \varphi_\sigma(z-a)dz \tag{73}$$

elde edilir. Önerme 2.1.5.1 ve Önerme 2.1.5.2'ye göre, her $n \geq 0$ için, $a \to \infty$ iken,

$$\int_a^\infty z^{n+2} \varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a^{n+2}}{2} + \frac{(n+2)\sigma}{\sqrt{2\pi}} a^{n+1} + \frac{(n+1)(n+2)\sigma^2}{4} a^n + o(a^n);$$

$$\int_a^\infty z^{n+1} \varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a^{n+1}}{2} + \frac{(n+1)\sigma}{\sqrt{2\pi}} a^n + o(a^n);$$

$$\int_a^\infty z^n \varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a^n}{2} + o(a^n)$$

olur. Diğer taraftan, Önerme2.1.5.4'e göre, her $n \geq 0$ için, $a \to \infty$ iken,

$$\int_a^\infty z^n g_2(z) \varphi_\sigma(z-a)dz = o(a^n)$$

'dir. Dolayısıyla, bütün bunlar $J_{2n}(a)$ 'nin (73) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$J_{2n}(a) \equiv \frac{a^{n+2}}{2} + \frac{(n+2)\sigma}{\sqrt{2\pi}} a^{n+1} + \frac{(n+1)(n+2)\sigma^2}{4} a^n$$

$$+2\tilde{\mu}_{21} \left[\frac{a^{n+1}}{2} + \frac{(n+1)\sigma}{\sqrt{2\pi}} a^n \right] + \tilde{\mu}_{31} \frac{a^n}{2} + o(a^n)$$

$$= \frac{a^{n+2}}{2} + \left[\tilde{\mu}_{21} + \frac{(n+2)\sigma}{\sqrt{2\pi}} \right] a^{n+1}$$

$$+\left[\frac{(n+1)(n+2)\sigma^2}{4}+\frac{2(n+1)\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}}+\frac{\tilde{\mu}_{31}}{2}\right]a^n+o(a^n)$$

$$=\frac{a^{n+2}}{2}+\left[\tilde{\mu}_{21}+\frac{(n+2)\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right]a^{n+1}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\tilde{\mu}_{31}+\frac{4(n+1)\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}}+\frac{(n+1)(n+2)\sigma^2}{2}\right]a^n+o(a^n) \qquad (74)$$

açılımı elde edilir. (63) eşitliğinde $I_{2n}(a)$ ve $J_{2n}(a)$ integralleri için elde edilmiş (70) ve (74) açılımlarını yerine yazılırsa

$$\int_0^{\infty} M_{2n}(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = I_{2n}(a)+J_{2n}(a)$$

$$=\frac{a^{n+2}}{2}+\left[\tilde{\mu}_{21}-\frac{(n+2)\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right]a^{n+1}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\tilde{\mu}_{31}-\frac{4(n+1)\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}}+\frac{(n+1)(n+2)\sigma^2}{2}\right]a^n+o(a^n)$$

$$=\frac{a^{n+2}}{2}+\left[\tilde{\mu}_{21}+\frac{(n+2)\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right]a^{n+1}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\tilde{\mu}_{31}+\frac{4(n+1)\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}}+\frac{(n+1)(n+2)\sigma^2}{2}\right]a^n+o(a^n)$$

$$=a^{n+2}+2\tilde{\mu}_{21}a^{n+1}+\left[\tilde{\mu}_{31}+\frac{(n+1)(n+2)\sigma^2}{2}\right]a^n+o(a^n) \qquad (75)$$

açılımı elde edilir. Ayrıca, $a\to\infty$ iken, $T\equiv a/\sigma\to\infty$ olduğu için, Mill teoremine göre (bkz., Abramowitch and Stegun, [1]),

$$\Phi(-T)=\frac{\varphi(T)}{T}(1+o(1))=o(\exp(-a^2/2\sigma^2))=o(1)$$

olur. Diğer taraftan, $\mu_3<\infty$ olduğuna göre , $a\to\infty$ iken,

$$\mu_2\Phi(-T)\delta_{n0}=o(1) \qquad (76)$$

olur. Dolayısıyla, (75) ve (76) açılımlarını (62) eşitliğinde göz önünde bulundurarak, her $n \geq 0$ için, $a \to \infty$ iken,

$$E(\zeta_1^n M_2(\zeta_1)) = a^{n+2} + 2\tilde{\mu}_{21} a^{n+1} + \left[\tilde{\mu}_{31} + \frac{(n+1)(n+2)\sigma^2}{2}\right] a^n + o(a^n)$$

açılımı elde edilir. Bu da Yardımcı Teorem 2.1.5.2'nin ispatını tamamlar. ■

Yardımcı Teorem 2.1.5.3. $\mu_3 < \infty$ her $n = 0,1,2,...$ için, $a \to \infty$ iken, aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$E\left(\zeta_1^n M_3\left(\zeta_1\right)\right) = a^{n+3} + 3\tilde{\mu}_{21} a^{n+2} + \left[3\tilde{\mu}_{31} + \frac{1}{2}(n+2)(n+3)\sigma^2\right] a^{n+1} + o(a^{n+1}).$$

İspat: Her $n = 0,1,2,...$ için,

$$E\left(\zeta_1^n M_3\left(\zeta_1\right)\right) = \int_0^\infty z^n M_3(z) d\pi(z) = \int_0^\infty z^n M_3(z) \varphi_\sigma(z-a) dz + \mu_3 \Phi(-T) \delta_{n0} \tag{77}$$

'dır. Bu takdirde, (77) eşitliğindeki integral aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\int_0^\infty z^n M_3(z) \varphi_\sigma(z-a) dz = \int_0^a M_{3n}(z) \varphi_\sigma(z-a) dz + \int_a^\infty M_{3n}(z) \varphi_\sigma(z-a) dz, \tag{78}$$

burada $M_{3n}(z) \equiv z^n M_3(z)$; $\varphi_\sigma(z-a) \equiv \frac{1}{\sigma} \varphi(\frac{z-a}{\sigma})$ 'dır.

(78) eşitliğinin sağ tarafındaki integraller, sırasıyla $I_{3n}(a)$ ve $J_{3n}(a)$ ile gösterilsin, yani,

$$I_{3n}(a) \equiv \int_0^a M_{3n}(z) \varphi_\sigma(z-a) dz; \quad J_{3n}(a) \equiv \int_a^\infty M_{3n}(z) \varphi_\sigma(z-a) dz$$

olsun. Bu durumda, $I_{3n}(a) \equiv M_{3n}(a) * \varphi_\sigma(a)$ olduğu için

$$\tilde{I}_{3n}(\lambda) = \tilde{M}_{3n}(\lambda) \tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) \tag{79}$$

olur. Burada $\tilde{I}_{3n}(\lambda)$ ve $\tilde{M}_{3n}(\lambda)$ ile, sırasıyla, $I_{3n}(a)$ ve $M_{3n}(a)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümü gösterilmiştir. $I_{3n}(a)$ integralinin, $a \to \infty$ iken, asimptotik davranışını incelemek için $\tilde{I}_{3n}(\lambda)$'nın, $\lambda \to 0$ iken, davranışı incelenmelidir. Önerme 2.1.5.5'e göre, $\lambda \to 0$ iken,

$$\tilde{\varphi}_{\sigma}(\lambda)=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\lambda+\frac{\sigma^{2}}{2}\lambda^{2}+o(\lambda^{2})\right\} \tag{80}$$

şekilde yazılabilir. Diğer taraftan, Önerme 2.1.5.6'ya göre, $\mu_3<+\infty$ olduğunda, $z\to\infty$ iken,

$$M_3(z)=z^3+3\tilde{\mu}_{21}z^2+3\tilde{\mu}_{31}z+o(z) \tag{81}$$

'dir. O zaman,

$$M_{3n}(z)\equiv z^n M_3(z)=z^{n+3}+3\tilde{\mu}_{21}z^{n+2}+3\tilde{\mu}_{31}z^{n+1}+o(z^{n+1}) \tag{82}$$

olur. (82) açılımından, $\lambda\to 0$ iken,

$$\tilde{M}_{3n}(\lambda)=\frac{(n+3)!}{\lambda^{n+4}}+3\tilde{\mu}_{21}\frac{(n+2)!}{\lambda^{n+3}}+3\tilde{\mu}_{31}\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{n+2}}\right) \tag{83}$$

açılımı elde edilir. (80) ve (83) açılımlarını (79) eşitliğinde yerine yazılarak:

$$\tilde{I}_{3n}(\lambda)=\tilde{M}_{3n}(\lambda)\tilde{\varphi}_{\sigma}(\lambda)=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\lambda+\frac{\sigma^{2}}{2}\lambda^{2}+o(\lambda^{2})\right\}$$

$$\left\{\frac{(n+3)!}{\lambda^{n+4}}+3\tilde{\mu}_{21}\frac{(n+2)!}{\lambda^{n+3}}+3\tilde{\mu}_{31}\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{n+2}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{(n+3)!}{\lambda^{n+4}}+3\tilde{\mu}_{21}\frac{(n+2)!}{\lambda^{n+3}}+3\tilde{\mu}_{31}\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}}\right.$$

$$\left.-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\frac{(n+3)!}{\lambda^{n+3}}-\frac{6\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}}\frac{(n+2)!}{\lambda^{n+2}}+\frac{\sigma^{2}}{2}\frac{(n+3)!}{\lambda^{n+2}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{n+2}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(n+3)!}{\lambda^{n+4}}+\frac{3\tilde{\mu}_{21}}{2}\frac{(n+2)!}{\lambda^{n+3}}-\frac{\sigma(n+3)}{\sqrt{2\pi}}\frac{(n+2)!}{\lambda^{n+3}}$$

$$+\frac{3\tilde{\mu}_{31}}{2}\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}}-\frac{3\sigma\tilde{\mu}_{21}(n+2)}{\sqrt{2\pi}}\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}}$$

$$+\frac{\sigma^{2}(n+3)(n+2)}{4}\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{n+2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(n+3)!}{\lambda^{n+4}}+\left[\frac{3\tilde{\mu}_{21}}{2}-\frac{\sigma(n+3)}{\sqrt{2\pi}}\right]\frac{(n+2)!}{\lambda^{n+3}}$$

$$+\left[\frac{3\tilde{\mu}_{21}}{2}-\frac{3\sigma\tilde{\mu}_{21}(n+2)}{\sqrt{2\pi}}+\frac{\sigma^2(n+3)(n+2)}{4}\right]\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}}+o(\frac{1}{\lambda^{n+2}}) \qquad (84)$$

elde edilir. (84) açılımına Tauber-Abel teoremini uygulayarak, $I_{3n}(a)$ integrali için, $a\to\infty$ iken, aşağıdaki açılım elde edilebilir:

$$I_{3n}(a)=\frac{1}{2}a^{n+3}+\left[\frac{3\tilde{\mu}_{21}}{2}-\frac{(n+3)\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right]a^{n+2}$$

$$+\left[\frac{3\tilde{\mu}_{31}}{2}-\frac{3\sigma\tilde{\mu}_{21}(n+2)}{\sqrt{2\pi}}+\frac{\sigma^2(n+2)(n+3)}{4}\right]a^{n+1}+o(a^{n+1}). \qquad (85)$$

$J_{3n}(a)$ integralinin asimptotik davranışı; $a\to\infty$ iken, ele alınsın:

$$J_{3n}(a)\equiv\int_a^\infty M_{3n}(z)\varphi_\sigma(z-a)dz \qquad (86)$$

Önerme 5.6' ya göre, $\mu_3<\infty$ olduğunda, $z\to\infty$ iken, $M_3(z)$ için aşağıdaki asimptotik açılım bilinmektedir:

$$M_3(z)=z^3+3\tilde{\mu}_{21}z^2+3\tilde{\mu}_{31}z+o(z).$$

Bu açılımı göz önünde bulundurarak, $M_{3n}(z)$, $z\to\infty$ iken, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_{3n}(z)\equiv z^n M_3(z)=z^{n+3}+3\tilde{\mu}_{21}z^{n+2}+3\tilde{\mu}_{31}z^{n+1}+z^{n+1}g_3(z). \qquad (87)$$

Burada $g_3(z)\equiv(M_3(z)-z^3-3\tilde{\mu}_{21}z^2-3\tilde{\mu}_{31}z)/z$ fonksiyonu, $z\to\infty$ iken, sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur, yani, $\lim_{z\to\infty}g_3(z)=0$'dır. (87) gösterimi, $J_{3n}(a)$ integralinin tanımında yerine yazılırsa,

$$J_{3n}(a)\equiv\int_a^\infty z^{n+3}\varphi_\sigma(z-a)dz+3\tilde{\mu}_{21}\int_a^\infty z^{n+2}\varphi_\sigma(z-a)dz$$

$$+3\tilde{\mu}_{31}\int_a^\infty z^{n+1}\varphi_\sigma(z-a)dz+\int_a^\infty z^{n+1}g_3(z)\varphi_\sigma(z-a)dz \qquad (88)$$

elde edilir. Önerme 2.1.5.1 ve Önerme 2.2.5.2'ye göre, her $n\geq 0$ için, $a\to\infty$ iken,

$$\int_a^\infty z^{n+3}\varphi_\sigma(z-a)dz=\frac{a^{n+3}}{2}+\frac{(n+3)\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^{n+2}+\frac{(n+2)(n+3)\sigma^2}{4}a^{n+1}+o(a^{n+1});$$

$$\int_a^\infty z^{n+2}\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a^{n+2}}{2} + \frac{(n+2)\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^{n+1} + o(a^{n+1});$$

$$\int_a^\infty z^{n+1}\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a^{n+1}}{2} + o(a^{n+1})$$

olur. Diğer taraftan, Önerme 2.1.5.4'e göre, $\mu_3 < \infty$ olduğunda ve $a \to \infty$ iken,

$$\int_a^\infty z^{n+1}g_3(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = o(a^{n+1})$$

'dir. Dolayısıyla, bütün bunları $J_{3n}(a)$'nın (88) eşitliğinde yerine yazarak,

$$J_{3n}(a) = \frac{a^{n+3}}{2} + \frac{(n+3)\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^{n+2} + \frac{(n+2)(n+3)\sigma^2}{4}a^{n+1}$$

$$+3\tilde{\mu}_{21}\left[\frac{a^{n+2}}{2} + \frac{(n+2)\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^{n+1}\right] + 3\tilde{\mu}_{31}\left[\frac{a^{n+1}}{2}\right] + o(a^{n+1})$$

$$= \frac{a^{n+3}}{2} + \left[\frac{3}{2}\tilde{\mu}_{21} + \frac{(n+3)\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right]a^{n+2}$$

$$+\left[\frac{3}{2}\tilde{\mu}_{31} + \frac{3(n+2)\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{(n+2)(n+3)\sigma^2}{4}\right]a^{n+1} + o(a^{n+1}) \qquad (89)$$

açılımı elde edilir. (78) eşitliğinde $I_{3n}(a)$ ve $J_{3n}(a)$ integralleri için elde edilmiş (85) ve (89) açılımları yerine yazılırsa

$$\int_0^\infty z^n M_3(z)\varphi_\sigma(z-a)dz \equiv I_{3n}(a) + J_{3n}(a)$$

$$= a^{n+3} + 3\tilde{\mu}_{21}a^{n+2} + \left[3\tilde{\mu}_{31} + \frac{(n+2)(n+3)\sigma^2}{2}\right]a^{n+1} + o(a^{n+1}) \qquad (90)$$

açılımı elde edilir. Ayrıca, $a \to \infty$ iken, $T \equiv a/\sigma \to 0$ olduğu için, Mill teoremine göre (bkz., Abramowitch and Stegun, [1]),

$$\Phi(-T) = \frac{\varphi(T)}{T}(1+o(1)) = o(\exp(-a^2/2\sigma^2)) = o(1)$$

olur. Diğer taraftan, $\mu_3 < \infty$ olduğuna göre , $a \to \infty$ iken,

$$\mu_3\Phi(-T)\delta_{n0}=o(1) \tag{91}$$

olur. Dolayısıyla, (90) ve (91) açılımlarını (77) eşitliğinde göz önünde bulundurarak, her n=0,1,2,…için, $a\to\infty$ iken,

$$E(\zeta_1^n M_3(\zeta_1))=a^{n+3}+3\tilde{\mu}_{21}a^{n+2}+\left[3\tilde{\mu}_{31}+\frac{(n+2)(n+3)\sigma^2}{2}\right]a^{n+1}+o(a^{n+1}) \tag{92}$$

açılımı elde edilir. Bu da Yardımcı Teorem 2.1.5.3' ün ispatını tamamlar. ■

Yardımcı Teorem 2.1.5.4. $\mu_4<\infty$ her $n=0,1,2,...$ için, $a\to\infty$ iken, aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$E\left(\zeta_1^n M_4\left(\zeta_1\right)\right)=a^{n+4}+4\tilde{\mu}_{21}a^{n+3}+\left[6\tilde{\mu}_{31}+\frac{1}{2}(n+3)(n+4)\sigma^2\right]a^{n+2}+o(a^{n+2}).$$

İspat: Her $n=0,1,2,...$ için,

$$E\left(\zeta_1^n M_4\left(\zeta_1\right)\right)=\int_0^\infty z^n M_4(z)d\pi(z)=\int_0^\infty z^n M_4(z)\varphi_\sigma(z-a)dz+\mu_4\Phi(-T)\delta_{n0},\quad n=0,1 \tag{93}$$

'dir. (93) eşitliğindeki integral aşağıdaki şekilde yazılsın:

$$\int_0^\infty z^n M_4(z)\varphi_\sigma(z-a)dz=\int_0^a z^n M_4(z)\varphi_\sigma(z-a)dz+\int_a^\infty z^n M_4(z)\varphi_\sigma(z-a)dz \tag{94}$$

(94) eşitliğinin sağ tarafındaki integralları, sırasıyla $I_{4n}(a)$ ve $J_{4n}(a)$ ile gösterilsin, yani

$$I_{4n}(a)\equiv\int_0^a z^n M_4(z)\varphi_\sigma(z-a)dz\,;\quad J_{4n}(a)\equiv\int_a^\infty z^n M_4(z)\varphi_\sigma(z-a)dz$$

olsun. Kısalık için $M_{4n}(z)\equiv z^n M_4(z)$ yazılsın. Bu durumda,

$$I_{4n}(a)\equiv\int_0^a M_{4n}(z)\varphi_\sigma(z-a)dz=\int_0^a M_{4n}(z)\varphi_\sigma(a-z)dz=M_{4n}(a)*\varphi_\sigma(a)$$

olur. O zaman,

$$\tilde{I}_{4n}(\lambda)=\tilde{M}_{4n}(\lambda)\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) \tag{95}$$

olur. Burada $\tilde{G}(\lambda)$ ile $G(a)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü gösterilmiştir.

$I_{4n}(a)$ integralinin, $a \to \infty$ iken, asimptotik davranışını incelemek için $\tilde{I}_{4n}(\lambda)$ 'nın, $\lambda \to 0$ iken, davranışı ele alınsın. Önerme 2.1.5.5'e göre, $\lambda \to 0$ iken,

$$\tilde{\varphi}_{\sigma}(\lambda) = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\} \tag{96}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan, Önerme 2.1.5.6'ya göre, $\mu_3 \leq +\infty$ olduğunda, $z \to \infty$ iken,

$$M_4(z) = z^4 + 2\mu_{21}z^3 + 2\mu_{31}z^2 + o(z^2) = z^4 + 4\tilde{\mu}_{21}z^3 + 6\tilde{\mu}_{31}z^2 + o(z^2). \tag{97}$$

Buradan,

$$M_{4n}(z) \equiv z^n M_4(z) = z^{n+4} + 4\tilde{\mu}_{21}z^{n+3} + 6\tilde{\mu}_{31}z^{n+2} + o(z^{n+2}) \tag{98}$$

olur. (98) açılımından, $\lambda \to 0$ iken,

$$\tilde{M}_{4n}(\lambda) = \frac{(n+4)!}{\lambda^{n+5}} + 4\tilde{\mu}_{21}\frac{(n+3)!}{\lambda^{n+4}} + 6\tilde{\mu}_{31}\frac{(n+2)!}{\lambda^{n+3}} + o(\frac{1}{\lambda^{n+3}}) \tag{99}$$

açılımı elde edilir. (96) ve (99) açılımları (95) eşitliğinde yerine yazılarak:

$$\tilde{I}_{4n}(\lambda) = \tilde{M}_{4n}(\lambda)\tilde{\varphi}_{\sigma}(\lambda) = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\}$$

$$\left\{\frac{(n+4)!}{\lambda^{n+5}} + 4\tilde{\mu}_{21}\frac{(n+3)!}{\lambda^{n+4}} + 6\tilde{\mu}_{31}\frac{(n+2)!}{\lambda^{n+3}} + o(\frac{1}{\lambda^{n+3}})\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(n+4)!}{\lambda^{n+5}} + 4\tilde{\mu}_{21}\frac{(n+3)!}{\lambda^{n+4}} - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\frac{(n+4)!}{\lambda^{n+4}}\right.$$

$$\left. + 6\tilde{\mu}_{31}\frac{(n+2)!}{\lambda^{n+3}} - \frac{8\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}}\frac{(n+3)!}{\lambda^{n+3}} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{(n+4)!}{\lambda^{n+3}} + o(\frac{1}{\lambda^{n+3}})\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(n+4)!}{\lambda^{n+5}} + \frac{(n+3)!}{\lambda^{n+4}}\left[4\tilde{\mu}_{21} - \frac{2\sigma(n+4)}{\sqrt{2\pi}}\right]\right.$$

$$\left. + \frac{(n+2)!}{\lambda^{n+3}}\left[6\tilde{\mu}_{31} - \frac{8\sigma\tilde{\mu}_{21}(n+3)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sigma^2(n+4)(n+3)}{2}\right] + o(\frac{1}{\lambda^{n+3}})\right\} \tag{100}$$

elde edilir. (100) açılımına Tauber-Abel teoremini uygulayarak, $I_{4n}(a)$ integrali için, $a \to \infty$ iken, aşağıdaki açılım elde edilebilir:

$$I_{4n}(a) = \frac{1}{2}\left\{a^{n+4} + a^{n+3}\left[4\tilde{\mu}_{21} - \frac{2\sigma(n+4)}{\sqrt{2\pi}}\right]\right.$$

$$\left. + a^{n+2}\left[6\tilde{\mu}_{31} - \frac{8\sigma\tilde{\mu}_{21}(n+3)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sigma^2(n+4)(n+3)}{2}\right] + o(a^{n+2})\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{2}a^{n+4} + \left[2\tilde{\mu}_{21} - \frac{\sigma(n+4)}{\sqrt{2\pi}}\right]a^{n+3}\right.$$

$$\left. + \left[3\tilde{\mu}_{31} - \frac{4\sigma\tilde{\mu}_{21}(n+3)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sigma^2(n+4)(n+3)}{4}\right]a^{n+2} + o(a^{n+2})\right\} \qquad (101)$$

$J_{4n}(a)$ integralinin asimptotik davranışı $a \to \infty$ iken ele alınsın:

$$J_{4n}(a) \equiv \int_a^\infty z^n M_4(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = \int_a^\infty M_{4n}(z)\varphi_\sigma(z-a)dz \qquad (102)$$

Önerme 2.1.5.6'ya göre, $\mu_3 < \infty$ olduğunda, $z \to \infty$ iken, $M_4(z)$ için aşağıdaki asimptotik açılım bilinmektedir:

$$M_4(z) = z^4 + 4\tilde{\mu}_{21}z^3 + 6\tilde{\mu}_{31}z^2 + o(z^2).$$

Bu açılımı göz önünde bulundurarak, $M_{4n}(z)$, $z \to \infty$ iken, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_{4n}(z) \equiv z^n M_4(z) = z^{n+4} + 4\tilde{\mu}_{21}z^{n+3} + 6\tilde{\mu}_{31}z^{n+2} + z^{n+2}g_4(z). \qquad (103)$$

Burada $g_4(z) \equiv (M_4(z) - z^4 - 4\tilde{\mu}_{21}z^3 - 6\tilde{\mu}_{31}z^2)/z^2$ fonksiyonu, $z \to \infty$ iken, sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur, yani, $\lim_{z\to\infty} g_4(z) = 0$ 'dır. (103) gösterimini $J_{4n}(a)$ integralinin tanımında yerine yazılırsa,

$$J_{4n}(a) = \int_a^\infty z^{n+4}\varphi_\sigma(z-a)dz + 4\tilde{\mu}_{21}\int_a^\infty z^{n+3}\varphi_\sigma(z-a)dz$$

$$+6\tilde{\mu}_{31}\int_a^\infty z^{n+2}\varphi_\sigma(z-a)dz + \int_a^\infty z^{n+2}g_4(z)\varphi_\sigma(z-a)dz \qquad (104)$$

elde edilir. Önerme 2.1.5.2' ye göre, her $n \geq 0$ için, $a \to \infty$ iken,

$$\int_a^\infty z^{n+4}\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a^{n+4}}{2} + \frac{(n+4)\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^{n+3} + \frac{(n+4)(n+3)\sigma^2}{4}a^{n+2} + o(a^{n+2});$$

$$\int_a^\infty z^{n+3}\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a^{n+3}}{2} + \frac{(n+3)\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^{n+2} + o(a^{n+2});$$

$$\int_a^\infty z^{n+2}\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a^{n+2}}{2} + o(a^{n+2})$$

'dir. Diğer taraftan, Önerme 2.1.5.4' e göre, $\mu_3 < \infty$ olduğunda ve $a \to \infty$ iken,

$$\int_a^\infty z^{n+2}g_4(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = o(a^{n+2})$$

' dır. Dolayısıyla, bütün bunları $J_{4n}(a)$ 'nin (104) eşitliğinde yerine yazarak,

$$\begin{aligned} J_{4n}(a) &\equiv \frac{a^{n+4}}{2} + \frac{(n+4)\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^{n+3} + \frac{(n+4)(n+3)\sigma^2}{4}a^{n+2} \\ &+4\tilde{\mu}_{21}\left[\frac{a^{n+3}}{2} + \frac{(n+3)\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^{n+2}\right] + 6\tilde{\mu}_{31}\left[\frac{a^{n+2}}{2}\right] + o(a^{n+2}) \\ &= \frac{a^{n+4}}{2} + \left[2\tilde{\mu}_{21} + \frac{(n+4)\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right]a^{n+3} \\ &+\left[3\tilde{\mu}_{31} + \frac{4(n+3)\sigma\tilde{\mu}_{31}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{(n+4)(n+3)\sigma^2}{4}\right]a^{n+2} + o(a^{n+2}) \end{aligned} \tag{105}$$

açılımı elde edilir. (94) eşitliğinde $I_{4n}(a)$ ve $J_{4n}(a)$ integralları için elde edilmiş (101) ve (105) açılımları yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z^n M_4(z)\varphi_\sigma(z-a)dz &= I_{4n}(a) + J_{4n}(a) \\ &= a^{n+4} + 4\tilde{\mu}_{21}a^{n+3} + \left[6\tilde{\mu}_{31} + \frac{(n+3)(n+4)\sigma^2}{2}\right]a^{n+2} + o(a^{n+2}) \end{aligned} \tag{106}$$

açılımı elde edilir. Ayrıca, $a \to \infty$ iken $T \equiv a/\sigma \to \infty$ olduğu için, Mill teoremine göre (bkz., Abramowitch and Stegun, [1]),

$$\Phi(-T)=\frac{\varphi(T)}{T}(1+o(1))=o(\exp(-a^2/2\sigma^2))=o(1)$$

olur. Diğer taraftan, $\mu_4<\infty$ olduğuna göre , $a\to\infty$ iken,

$$\mu_4\Phi(-T)\delta_{n0}=o(1) \tag{107}$$

olur. Dolayısıyla, (106) ve (107) açılımlarını (93) eşitliğinde göz önünde bulundurarak, her n=0,1,2,… için, $a\to\infty$ iken,

$$E(\zeta_1^n M_4(\zeta_1))=a^{n+4}+4\tilde{\mu}_{21}a^{n+3}+\left[6\tilde{\mu}_{31}+\frac{(n+3)(n+4)\sigma^2}{2}\right]a^{n+2}+o(a^{n+2})$$

açılımı elde edilir. Bu da Yardımcı Teorem 2.1.5.4' ün ispatını tamamlar. ■

Yardımcı Teorem 2.1.5.5. $\mu_5<\infty$ olsun. Bu takdirde, $a\to\infty$ iken, aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$E(M_5(\zeta_1))=a^5+5\tilde{\mu}_{21}a^4+10(\tilde{\mu}_{31}+\sigma^2)a^3+o(a^3)\,.$$

İspat: Tanıma göre,

$$.\qquad E\left(M_5\left(\zeta_1\right)\right)=\int_0^\infty M_5(z)d\pi(z)=\int_0^\infty M_5(z)\varphi_\sigma(z-a)dz+\mu_5\Phi(-T) \tag{108}$$

'dir. (108) eşitliğindeki integrali aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\int_0^\infty M_5(z)\varphi_\sigma(z-a)dz=\int_0^a M_5(z)\varphi_\sigma(z-a)dz+\int_a^\infty M_5(z)\varphi_\sigma(z-a)dz\,. \tag{109}$$

(109) eşitliğinin sağ tarafındaki integralleri, sırasıyla $I_{50}(a)$ ve $J_{50}(a)$ ile gösterilsin, yani

$$I_{50}(a)\equiv\int_0^a M_5(z)\varphi_\sigma(z-a)dz\,;\; J_{50}(a)\equiv\int_a^\infty M_5(z)\varphi_\sigma(z-a)dz$$

olsun. Bu durumda,

$$I_{50}(a)\equiv\int_0^a M_5(z)\varphi_\sigma(z-a)dz=\int_0^a M_5(z)\varphi_\sigma(a-z)dz=M_5(a)*\varphi_\sigma(a)$$

olur. Bu takdirde,

$$\tilde{I}_{50}(\lambda)=\tilde{M}_{50}(\lambda)\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) \tag{110}$$

olur. Burada $\tilde{I}_{50}(\lambda)$ ile $I_{50}(a)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü gösterilmiştir.

$I_{50}(a)$ integralinin, $a \to \infty$ iken, asimptotik davranışını incelemek için $\tilde{I}_{50}(\lambda)$ 'nın $\lambda \to 0$ iken davranışı ele alınsın. Önerme 2.1.5.5'e göre, $\lambda \to 0$ iken,

$$\tilde{\varphi}_{\sigma}(\lambda) = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\} \tag{111}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan, Önerme 2.1.5.6'ya göre, $\mu_3 < +\infty$ olduğunda, $z \to \infty$ iken,

$$M_5(z) = z^5 + 5\tilde{\mu}_{21} z^4 + 10\tilde{\mu}_{31} z^3 + o(z^3) \tag{112}$$

olur. O zaman, Tauber –Abel teoremine göre, (112) açılımından, $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\tilde{M}_{50}(\lambda) = \frac{5!}{\lambda^6} + 5\tilde{\mu}_{21}\frac{4!}{\lambda^5} + 10\tilde{\mu}_{31}\frac{3!}{\lambda^4} + o\left(\frac{1}{\lambda^4}\right). \tag{113}$$

(111) ve (113) açılımları (110) eşitliğinde yerine yazılarak:

$$\tilde{I}_{50}(\lambda) = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\}\left\{\frac{5!}{\lambda^6} + 5\tilde{\mu}_{21}\frac{4!}{\lambda^5} + 10\tilde{\mu}_{31}\frac{3!}{\lambda^4} + o\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{5!}{\lambda^6} + 5\tilde{\mu}_{21}\frac{4!}{\lambda^5} + 10\tilde{\mu}_{31}\frac{3!}{\lambda^4} - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\frac{5!}{\lambda^5} - \frac{10\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}}\frac{4!}{\lambda^4} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{5!}{\lambda^4} + o\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{5!}{\lambda^6} + \frac{4!}{\lambda^5}\left[5\tilde{\mu}_{21} - \frac{10\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right] + \frac{3!}{\lambda^4}\left[10\tilde{\mu}_{31} - \frac{40\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{20\sigma^2}{2}\right] + o\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)\right\} \tag{114}$$

elde edilir.(114) açılımına Tauber-Abel teoremini uygulayarak, $I_{50}(a)$ integrali için, $a \to \infty$ iken, aşağıdaki açılımı elde edilir:

$$I_{50}(a) = \frac{1}{2}\left\{a^5 + a^4\left[5\tilde{\mu}_{21} - \frac{10\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right] + a^3\left[10\tilde{\mu}_{31} - \frac{40\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}} + 10\sigma^2\right] + o(a^3)\right\}$$

$$= \frac{a^5}{2} + a^4\left[\frac{5}{2}\tilde{\mu}_{21} - \frac{5\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right] + a^3\left[5\tilde{\mu}_{31} - \frac{20\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}} + 5\sigma^2\right] + o(a^3) \tag{115}$$

$J_{50}(a)$ integralinin asimptotik davranışını, $a \to \infty$ iken, ele alınsın:

$$J_{50}(a) \equiv \int_a^\infty M_5(z)\varphi_\sigma(z-a)dz. \tag{116}$$

(112) açılımını göz önünde bulundurarak, $M_5(z)$, $z \to \infty$ iken, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_5(z) = z^5 + 5\tilde{\mu}_{21}z^4 + 10\tilde{\mu}_{31}z^3 + z^3 g_5(z). \tag{117}$$

Burada $g_5(z) \equiv (M_5(z) - z^5 - 5\tilde{\mu}_{21}z^4 - 10\tilde{\mu}_{31}z^3)/z^3$ fonksiyonu, $z \to \infty$ iken, sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur, yani $\lim_{z\to\infty} g_5(z) = 0$ 'dır. (117) gösterimini $J_{50}(a)$ integralinde yerine yazarak,

$$J_{50}(a) = \int_a^\infty z^5\varphi_\sigma(z-a)dz + 5\tilde{\mu}_{21}\int_a^\infty z^4\varphi_\sigma(z-a)dz$$

$$+10\tilde{\mu}_{31}\int_a^\infty z^3\varphi_\sigma(z-a)dz + \int_a^\infty z^3 g_5(z)\varphi_\sigma(z-a)dz \tag{118}$$

elde edilir. Önerme 2.1.5.2' ye göre $a \to \infty$ iken,

$$\int_a^\infty z^5\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a^5}{2} + \frac{5\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^4 + 5\sigma^2 a^3 + o(a^3);$$

$$\int_a^\infty z^4\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a^4}{2} + \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^3 + o(a^3);$$

$$\int_a^\infty z^3\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a^3}{2} + o(a^3)$$

olur. Diğer taraftan, Önerme 2.1.5.4'e göre, $\mu_3 < \infty$ olduğunda ve $a \to \infty$ iken,

$$\int_a^\infty z^3 g_5(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = o(a^3)$$

olur. Dolayısıyla, bütün bunları $J_{50}(a)$ 'nın (118) ifadesinde yerine yazılarak,

$$J_{50}(a) = \frac{a^5}{2} + \frac{5\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^4 + 5\sigma^2 a^3 + 5\tilde{\mu}_{21}\left[\frac{a^4}{2} + \frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^3\right] + 10\tilde{\mu}_{31}\left[\frac{a^3}{2}\right] + o(a^3)$$

$$= \frac{a^5}{2} + a^4\left[\frac{5\tilde{\mu}_{21}}{2} + \frac{5\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right] + \left[5\tilde{\mu}_{31} + \frac{20\sigma\tilde{\mu}_{21}}{\sqrt{2\pi}} + 5\sigma^2\right]a^3 + o(a^3) \tag{119}$$

açılımı elde edilir. (109) eşitliğine geri dönüp, $I_{50}(a)$ ve $J_{50}(a)$ integralleri için elde edilmiş (115) ve (119) açılımları yerine yazılırsa,

$$\int_0^\infty M_5(z)\varphi_\sigma(z-a)dz = I_{50}(a) + J_{50}(a)$$

$$= a^5 + a^4\left[5\tilde{\mu}_{21}\right] + a^3\left[10\tilde{\mu}_{31} + 10\sigma^2\right] + o(a^3)$$

$$= a^5 + 5\tilde{\mu}_{21}a^4 + 10(\tilde{\mu}_{31} + \sigma^2)a^3 + o(a^3) \qquad (120)$$

açılımını elde edilir. Ayrıca, $a \to \infty$ iken, $T \equiv a/\sigma \to \infty$ olduğu için, Mill teoremine göre (bkz., Abramowitz and Stegun, [1]),

$$\Phi(-T) = \frac{\varphi(T)}{T}(1 + o(1)) = o(\exp(-a^2/2\sigma^2)) = o(1)$$

olur. Diğer taraftan, $\mu_5 < \infty$ olduğuna göre, $a \to \infty$ iken,

$$\mu_5\Phi(-T) = \mu_5\frac{\varphi(T)}{T}(1 + o(1)) = o(\exp(-a^2/2\sigma^2) = o(1) \qquad (121)$$

olur. Dolayısıyla, (120) ve (121) açılımlarını (108) eşitliğinde göz önünde bulundurarak, $a \to \infty$ iken,

$$E(M_5(\zeta_1)) = a^5 + 5\tilde{\mu}_{21}a^4 + 10(\tilde{\mu}_{31} + \sigma^2)a^3 + o(a^3)$$

açılımı elde edilir. Bu da Yardımcı teorem 2.1.5.5'in ispatını tamamlar. ■

Böylece, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentinin kesin ifadesinde bulunan $E(\zeta_1^n M_k(\zeta_1))$ biçimli tüm integrallerin asimptotik davranışları incelenmiş oldu.

2.1.6. X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momenti İçin Asimptotik Açılımlar

Bu kısmın amacı, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti $(E(X^k), k = 1,2,3,4)$ için üç terimli asimptotik açılımlar elde etmektir. Bunun için aşağıdaki teoremler verilsin.

Teorem 2.1.6.1. Teorem 2.1.3.1'in koşullarına ilaveten $E\left(\left|\eta_1\right|^3\right) < \infty$ olsun. Bu takdirde, $a \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının beklenen değeri $(E(X))$ için aşağıdaki üç terimli asimptotik açılım yazılabilir:

$$E\left(X\right) = \frac{a}{2} + c_{11} + \frac{c_{12}}{a} + o(\frac{1}{a}),$$

burada $c_{11} = \tilde{m}_{21} - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_{21}$; $c_{12} = \frac{1}{2}\left[\sigma^2 + \tilde{\mu}_{21}^2 - \tilde{\mu}_{31}\right]$;

$$\tilde{m}_{k1} = \frac{m_k}{km_1};\quad \tilde{\mu}_{k1} = \frac{\mu_k}{k\mu_1};\quad m_k = E(\eta_1^k);\quad \mu_k = E(\chi_1^{+k});\quad k = 1,2,3$$

'dir.

İspat: Teorem 2.1.4.1'de $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının beklenen değeri $(E(X))$ için aşağıdaki kesin ifade bulunmuştur:

$$E(X) = R_1(a)G_1(a) + A_1$$

burada $A_1 = \tilde{m}_{21}$; $R_1(a) = \dfrac{1}{E(M_1(\zeta_1))}$;

$$G_1(a) = E(\zeta_1 M_1(\zeta_1)) - \frac{1}{2}E(M_2(\zeta_1))$$

'dir. Yardımcı Teorem 2.1.5.1'e göre, $a \to \infty$ iken,

$$R_1(a) \equiv \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))} = \frac{1}{a}\left\{1 - \frac{\tilde{\mu}_{21}}{a} + \frac{\tilde{\mu}_{21}^2}{a^2} + o(\frac{1}{a^2})\right\}$$

olur. Yardımcı Teorem 2.1.5.1 ve Yardımcı Teorem 2.1.5.2' ye göre ise, $a \to \infty$ iken,

$$G_1(a) = \left[a^2 + a\tilde{\mu}_{21} + \sigma^2 + o(1)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[a^2 + 2\tilde{\mu}_{21}a + \tilde{\mu}_{31} + \sigma^2 + o(1)\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}\left\{1 + \frac{\sigma^2 - \tilde{\mu}_{31}}{a^2} + o(\frac{1}{a^2})\right\}$$

açılımları doğrudur. Bu takdirde,

$$E(X)=\frac{1}{a}\left\{1-\frac{\tilde{\mu}_{21}}{a}+\frac{\tilde{\mu}_{21}^2}{a^2}+o(\frac{1}{a^2})\right\}\frac{a^2}{2}\left\{1+\frac{\sigma^2-\tilde{\mu}_{31}}{a^2}+o(\frac{1}{a^2})\right\}+A_1$$

$$=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_{21}+\tilde{m}_{21}+\frac{1}{2a}\left[\sigma^2+\tilde{\mu}_{21}^2-\tilde{\mu}_{31}\right]+o(\frac{1}{a})$$

$$=\frac{a}{2}+c_{11}+\frac{1}{a}c_{12}+o(\frac{1}{a})$$

olur. Burada,

$$c_{11}=\tilde{m}_{21}-\frac{1}{2}\tilde{\mu}_{21};\quad c_{12}=\frac{1}{2}\left[\sigma^2+\tilde{\mu}_{21}^2-\tilde{\mu}_{31}\right]$$

’dir. Bu da Teorem 2.1.6.1’i ispatlar. ■

Teorem 2.1.6.2. Teorem 2.1.3.1’in koşullarına ilaveten $E\left(\left|\eta_1\right|^3\right)<\infty$ olsun. Bu takdirde, $a\to\infty$ iken, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ikinci momenti $(E(X^2))$ için aşağıdaki üç terimli asimptotik açılım yazılabilir:

$$E\left(X^2\right)=\frac{a^2}{3}+c_{21}a+c_{22}+o(1).$$

Burada,

$$c_{21}=\tilde{m}_{21}-\frac{1}{3}\tilde{\mu}_{21};\quad c_{22}=2\tilde{m}_{21}^2-\tilde{m}_{31}+\sigma^2-\tilde{m}_{21}\tilde{\mu}_{21}+\frac{1}{3}\tilde{\mu}_{21}^2;$$

$$\tilde{m}_{k1}=\frac{m_k}{km_1};\tilde{\mu}_{k1}=\frac{\mu_k}{k\mu_1};m_k=E(\eta_1^k);\mu_k=E(\chi_1^{+k});k=1,2,3$$

’tür.

İspat: Teorem 2.1.4.2’de $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ikinci momenti $(E(X^2))$ için aşağıdaki kesin ifade bulunmuştur:

$$E(X^2)=R_1(a)G_2(a)+A_2,$$

burada,

$$R_1(a)=\frac{1}{E(M_1(\zeta_1))};\ G_2(a)\equiv B_{21}(a)+2\tilde{m}_{21}B_{22}(a);\ \ A_2=2\tilde{m}_{21}^2-\tilde{m}_{31};$$

$$B_{21}(a)=E(\zeta_1^2M_1(\zeta_1))-E(\zeta_1M_2(\zeta_1))+\frac{1}{3}E(M_3(\zeta_1));$$

$$B_{22}(a)=E(\zeta_1 M_1(\zeta_1))-\frac{1}{2}E(M_2(\zeta_1))$$

’dir. Yardımcı Teorem 2.1.5.1, Yardımcı Teorem 2.1.5.2 ve Yardımcı teorem 2.1.5.3’e göre, $a\to\infty$ iken,

$$B_{21}(a)=\left[a^3+\tilde{\mu}_{21}a^2+3\sigma^2 a+o(a)\right]-\left[a^3+2\tilde{\mu}_{21}a^2+3\sigma^2 a+\tilde{\mu}_{31}a+o(a)\right]$$

$$+\frac{1}{3}\left[a^3+3\tilde{\mu}_{21}a^2+3\tilde{\mu}_{31}a+3\sigma^2 a+o(a)\right]=\frac{a^3}{3}+\sigma^2 a+o(a)$$

‘dir. Yardımcı Teorem 2.1.5.1 ve Yardımcı Teorem 2.1.5.2’ e göre, $a\to\infty$ iken,

$$B_{22}(a)=\left[a^2+\tilde{\mu}_{21}a+o(a)\right]-\frac{1}{2}\left[a^2+2\tilde{\mu}_{21}a+o(a)\right]=\frac{1}{2}a^2+o(a)$$

açılımları yazılabilir. Bunlar $G_2(a)$’ da yerine yazılırsa,

$$G_2(a)=\left[\frac{a^3}{3}+\sigma^2 a+o(a)\right]+2\tilde{m}_{21}\left[\frac{1}{2}a^2+o(a)\right]$$

$$=\frac{a^3}{3}+\tilde{m}_{21}a^2+a\sigma^2+o(a)=\frac{a^3}{3}\left\{1+\frac{3\tilde{m}_{21}}{a}+\frac{3\sigma^2}{a^2}+o(\frac{1}{a^2})\right\}$$

açılımı elde edilir. Diğer taraftan, $a\to\infty$ iken,

$$R_1(a)\equiv\frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}=\frac{1}{a}\left\{1-\frac{\tilde{\mu}_{21}}{a}+\frac{\tilde{\mu}_{21}^2}{a^2}+o(\frac{1}{a})\right\}$$

’dır. Dolayısıyla, $a\to\infty$ iken,

$$R_1(a)G_2(a)=\frac{1}{a}\left\{1-\frac{\tilde{\mu}_{21}}{a}+\frac{\tilde{\mu}_{21}^2}{a^2}+o(\frac{1}{a^2})\right\}\frac{a^3}{3}\left\{1+\frac{3\tilde{m}_{21}}{a}+\frac{3\sigma^2}{a^2}+o(\frac{1}{a^2})\right\}$$

$$=\frac{a^2}{3}\left\{1+\frac{3\tilde{m}_{21}}{a}-\frac{\tilde{\mu}_{21}}{a}+\frac{3\sigma^2}{a^2}-\frac{3\tilde{m}_{21}\tilde{\mu}_{21}}{a^2}+\frac{\tilde{\mu}_{21}^2}{a^2}+o(\frac{1}{a^2})\right\}$$

$$=\frac{a^2}{3}+a\left[\tilde{m}_{21}-\frac{1}{3}\tilde{\mu}_{21}\right]+\left[\sigma^2-\tilde{m}_{21}\tilde{\mu}_{21}+\frac{1}{3}\tilde{\mu}_{21}^2\right]+o(1)$$

olur. Özetle, $a\to\infty$ iken,

$$E(X^2) = R_1(a)G_2(a) + A_2 = \frac{a^2}{3} + c_{21}a + c_{22} + o(1)$$

açılımı elde edilir. Burada,

$$c_{21} = \tilde{m}_{21} - \frac{1}{3}\tilde{\mu}_{21};$$

$$c_{22} = \sigma^2 - \tilde{m}_{21}\tilde{\mu}_{21} + \frac{1}{3}\tilde{\mu}_{21}^2 + 2\tilde{m}_{21}^2 - \tilde{m}_{31}$$

’dir. Bu da Teorem 2.1.6.2.’nin ispatını tamamlar. ■

Teorem 2.1.6.3. Teorem 2.1.3.1’in koşullarına ilaveten $E(\eta_1^4) < \infty$ olsun. Bu takdirde, $a \to \infty$ iken, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının üçüncü momenti $(E(X^3))$ için aşağıdaki üç terimli asimptotik açılım yazılabilir:

$$E\left(X^3\right) = \frac{a^3}{4} + a^2c_{31} + ac_{32} + o(a),$$

burada $c_{31} = \tilde{m}_{21} - \frac{1}{4}\tilde{\mu}_{21};\ c_{32} = 3\tilde{m}_{21}^2 - \frac{3}{2}\tilde{m}_{31} + \frac{3}{2}\sigma^2 + \frac{1}{4}\tilde{\mu}_{21}^2 - \tilde{m}_{21}\tilde{\mu}_{21};$

$$\tilde{m}_{k1} = \frac{m_k}{km_1};\ \tilde{\mu}_{k1} = \frac{\mu_k}{k\mu_1};\ m_k = E(\eta_1^k);\ \mu_k = E(\chi_1^{+k});\ k = 1,2,3$$

’tür.

İspat: Teorem 2.1.4.3’de $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının üçüncü momenti $(E(X^3))$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilmiştir:

$$E\left(X^3\right) = R_1(a)G_3(a) + 3A_3,$$

burada,

$$R_1(a) \equiv \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))};\ G_3(a) = B_{31}(a) + A_1B_{32}(a) + 3A_2B_{33}(a)$$

$$A_1 = \tilde{m}_{21}\ ;\quad A_2 = 2\tilde{m}_{21}^2 - \tilde{m}_{31};\ A_3 = \frac{1}{3}\tilde{m}_{41} - 2\tilde{m}_{21}\tilde{m}_{31} + 2\tilde{m}_{21}^3;$$

$$B_{31}(a) = E\left(\zeta_1^3M_1(\zeta_1)\right) - \frac{3}{2}E\left(\zeta_1^2M_2(\zeta_1)\right) + E\left(\zeta_1M_3(\zeta_1)\right) - \frac{1}{4}E\left(M_4(\zeta_1)\right)$$

$$B_{32}(a) = 3\left[(E\left(\zeta_1^2M_1(\zeta_1)\right) - E\left(\zeta_1M_2(\zeta_1)\right)\right] + E\left(M_3(\zeta_1)\right);$$

$$B_{33}(a) = E\left(\zeta_1 M_1(\zeta_1)\right) - \frac{1}{2} E\left(M_2(\zeta_1)\right)$$

'dir. Şimdi $B_{3i}(a), i = 1,2,3$ için asimptotik açılımlar aşağıdaki şekilde elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.1.5.1, Yardımcı Teorem 2.1.5.2, Yardımcı Teorem 2.1.5.3 ve Yardımcı Teorem 2.1.5.4' ün asimptotik sonuçları göz önünde bulundurularak $a \to \infty$ iken, $B_{31}(a)$ için aşağıdaki açılım elde edilir:

$$B_{31}(a) = a^4 + \tilde{\mu}_{21} a^3 + 6\sigma^2 a^2 - \frac{3}{2} a^4 - 3\tilde{\mu}_{21} a^3 - \frac{3}{2} \tilde{\mu}_{31} a^2 - 9\sigma^2 a^2$$

$$+ a^4 + 3\tilde{\mu}_{21} a^3 + 3\tilde{\mu}_{31} a^2 + 6\sigma^2 a^2$$

$$- \frac{1}{4} a^4 - \tilde{\mu}_{21} a^3 - \frac{3}{2} \tilde{\mu}_{31} a^2 - \frac{3}{2} \sigma^2 a^2 + o(a^2)$$

$$= \frac{1}{4} a^4 + \frac{3}{2} \sigma^2 a^2 + o(a^2).$$

Yardımcı Teorem 2.1.5.1, Yardımcı Teorem 2.1.5.2 ve Yardımcı Teorem 2.1.5.3' ün asimptotik sonuçlarını göz önünde bulundurularak $a \to \infty$ iken, $B_{32}(a)$ için aşağıdaki açılımı elde edilir:

$$B_{32}(a) = 3\left[(E\left(\zeta_1^2 M_1(\zeta_1)\right) - E\left(\zeta_1 M_2(\zeta_1)\right) \right] + E\left(M_3(\zeta_1)\right)$$

$$= 3\left[a^3 + \tilde{\mu}_{21} a^2 + 3\sigma^2 a - a^3 - 2\tilde{\mu}_{21} a^2 - (\tilde{\mu}_{31} + 3\sigma^2) a \right]$$

$$+ a^3 + 3\tilde{\mu}_{21} a^2 + (3\tilde{\mu}_{31} + 3\sigma^2) a + o(a) = a^3 + 3\sigma^2 a + o(a).$$

Yardımcı Teorem 2.1.5.1 ve Yardımcı Teorem 2.1.5.2'nin asimptotik sonuçları göz önünde bulundurularak , $a \to \infty$ iken, $B_{33}(a)$ için aşağıdaki açılımı elde edilir:

$$B_{33}(a) = a^2 + \tilde{\mu}_{21} a + \sigma^2 + o(1) - \frac{1}{2}\left[a^2 + 2\tilde{\mu}_{21} a + \tilde{\mu}_{21} + \sigma^2 + o(1) \right]$$

$$= \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}\left[\sigma^2 - \tilde{\mu}_{21} \right] + o(1).$$

$B_{3i}(a),\ i = 1,2,3$ için elde edilen bu açılımlar ve $R_1(a)$ için Teorem 2.1.6.1'de elde edilen asimptotik açılım $E(X^3)$ 'ün yukarıdaki kesin ifadesinde yerine yazılarak, $a \to \infty$ iken,

$$E(X^3)=\frac{a^3}{4}+\frac{1}{4}\left[4\tilde{m}_{21}-\tilde{\mu}_{21}\right]a^2$$

$$+\frac{1}{4}\left[12\tilde{m}_{21}^2-6\tilde{m}_{31}+6\sigma^2+\tilde{\mu}_{21}^2-4\tilde{m}_{21}\tilde{\mu}_{21}\right]a+o(a)$$

açılımı bulunur. Özetle, $a\to\infty$ iken,

$$E(X^3)=\frac{a^3}{4}+c_{31}a^2+c_{32}a+o(a)$$

olur. Burada $c_{31}=\tilde{m}_{21}-\frac{\tilde{\mu}_{21}}{4}$; $\quad c_{32}=3\tilde{m}_{21}^2-\frac{3\tilde{m}_{31}}{2}+\frac{3}{2}\sigma^2+\frac{1}{4}\tilde{\mu}_{21}^2-\tilde{m}_{21}\tilde{\mu}_{21}$;

$$\tilde{m}_{k1}=\frac{m_k}{km_1};\ \tilde{\mu}_{k1}=\frac{\mu_k}{k\mu_1};\ m_k=E(\chi_1^k);\quad \mu_k=E(\chi_1^{+k}),\ k=1,2,3$$

’tür. Bu da Teorem 2.1.6.3’ün ispatını tamamlar. ■

Teorem 2.1.6.4. Teorem 2.1.3.1’in koşullarına ilaveten $E(|\eta|^5)<+\infty$ olsun. Bu takdirde, $a\to\infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının dördüncü momenti $(E(X^4))$ için aşağıdaki üç terimli asimptotik açılım yazılabilir:

$$E\left(X^4\right)=\frac{a^4}{4}+c_{41}a^3+c_{42}a^2+o(a^2),$$

Burada $c_{41}=\tilde{m}_{21}-\frac{1}{5}\tilde{\mu}_{21}$; $c_{42}=4\tilde{m}_{21}^2-2\tilde{m}_{31}+2\sigma^2-\tilde{m}_{21}\tilde{\mu}_{21}+\frac{\tilde{m}_{21}^2}{5}$;

$$\tilde{m}_{k1}=\frac{m_{k1}}{km_1};\ \tilde{\mu}_{k1}=\frac{\mu_{k1}}{k\mu_1};\ m_k=E(\eta_1^k);\ \mu_k=E(\chi_1^{+k});\ k=1,2,3$$

’tür.

İspat: Teorem 2.1.4.4’de $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının dördüncü momenti $(E(X^4))$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilmiştir:

$$E(X^4)=R_1(a)G_4(a)+3A_4,$$

burada $R_1(a)=\frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}$; $G_4(a)=B_{41}(a)+2A_1B_{42}(a)+6A_2B_{43}(a)+6A_3B_{44}(a)$;

$$B_{41}(a)=E(\zeta_1^4(M_1(\zeta_1)))-2E(\zeta_1^3(M_2(\zeta_1)))+2E(\zeta_1^2M_3(\zeta_1))-E(\zeta_1M_4(\zeta_1))+\frac{1}{5}E(M_5(\zeta_1));$$

$$B_{42}(a) = 2E(\zeta_1^3(M_1(\zeta_1))) - 3E(\zeta_1^2(M_2(\zeta_1))) + 2E(\zeta_1(M_3(\zeta_1))) - \frac{1}{2}E((M_4(\zeta_1));$$

$$B_{43}(a) = E(\zeta_1^2(M_1(\zeta_1))) - E(\zeta_1(M_2(\zeta_1))) + \frac{1}{3}E((M_3(\zeta_1)));$$

$$B_{44}(a) = 2E(\zeta_1(M_1(\zeta_1))) - E((M_2(\zeta_1)))$$

’dir. Şimdi de $B_{4i}(a), i = 1,2,3,4$ için asimptotik açılımlar aşağıdaki şekilde elde edilir.

Yardımcı teorem 1.5.1-1.5.5’in asimptotik sonuçlarını göz önünde bulundurarak , $a \to \infty$ iken, $B_{41}(a)$ için aşağıdaki açılımı elde edilir:

$$B_{41}(a) = \left[a^5 + \tilde{\mu}_{21}a^4 + 10\sigma^2 a^3\right] - 2\left[a^5 + 2\tilde{\mu}_{21}a^4 + \tilde{\mu}_{31}a^3 + 10\sigma^2 a^3\right]$$

$$+2\left[a^5 + 3\tilde{\mu}_{21}a^4 + 3\tilde{\mu}_{31}a^3 + 10\sigma^2 a^3\right] - \left[a^5 + 4\tilde{\mu}_{21}a^4 + 6\tilde{\mu}_{31}a^3 + 10\sigma^2 a^3\right]$$

$$+\frac{1}{5}\left[a^5 + 5\tilde{\mu}_{21}a^4 + 10\tilde{\mu}_{31}a^3 + 10\sigma^2 a^3\right] + o(a^3) = \frac{1}{5}a^5 + 2\sigma^2 a^3 + o(a^3).$$

Yardımcı Teorem 2.1.5.1, Yardımcı Teorem 2.1.5.2, Yardımcı Teorem 2.1.5.3 ve Yardımcı teorem 2.1.5.4 ’ün asimptotik sonuçlarını göz önünde bulundurarak $a \to \infty$ iken $B_{42}(a)$ için aşağıdaki açılımı elde edilir:

$$B_{42}(a) = 2\left[a^4 + \tilde{\mu}_{21}a^3\right] - 3\left[a^4 + 2\tilde{\mu}_{21}a^3\right] + 2\left[a^4 + 3\tilde{\mu}_{21}a^3\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[a^4 + 4\tilde{\mu}_{21}a^3\right] + o(a^3) = \frac{a^4}{2} + o(a^3).$$

Yardımcı teorem 2.1.5.1, Yardımcı teorem 2.1.5.2 ve Yardımcı teorem 2.1.5.3 ’ün asimptotik sonuçlarını göz önünde bulundurarak $a \to \infty$ iken, $B_{43}(a)$ için aşağıdaki açılımı elde edilir:

$$B_{43}(a) = a^3 - a^3 + \frac{1}{3}a^3 + o(a^3) = \frac{a^3}{3} + o(a^3).$$

Yardımcı teorem 2.1.5.1 ve Yardımcı teorem 2.1.5.2’nin asimptotik sonuçlarını göz önünde bulundurarak , $a \to \infty$ iken, $B_{44}(a)$ için aşağıdaki açılımı elde edilir:

$$B_{44}(a) = 2(a^2 + o(a^2)) - (a^2 + o(a^2)) = a^2 + o(a^2) = o(a^3).$$

$B_{4i}(a), i=1,2,3,4$ için elde edilen bu açılımları ve $R_1(a)$ için Teorem 2.1.6.1 'de elde edilen asimptotik açılımı $G_4(a)$'nın yukarıdaki kesin ifadesinde yerine yazarak, $a \to \infty$ iken,

$$G_4(a) \equiv B_{41}(a) + 2\tilde{m}_{21} B_{42}(a) + 6A_2 B_{43}(a) + 6A_3 B_{44}(a)$$

$$= \left[\frac{1}{5}a^5 + 2\sigma^2 a^3\right] + 2\tilde{m}_{21}\left[\frac{a^4}{2}\right] + 6A_2\left[\frac{a^3}{3}\right] + o(a^3)$$

$$= \frac{1}{5}a^5 + 2\tilde{m}_{21}a^4 + 2(\sigma^2 + A_2)a^3 + o(a^3)$$

$$= \frac{a^5}{5}\left\{1 + \frac{5\tilde{m}_{21}}{a} + \frac{10}{a^2}\left[A_2 + \sigma^2\right] + o\left(\frac{1}{a^2}\right)\right\}$$

olduğu görülür. Şimdi, $G_4(a)$ için elde edilen bu açılım ve $R_1(a)$ için Teorem 2.1.6.1'de bulunan asimptotik açılımı $E(X^4)$'ün kesin ifadesinde yerine yazılarak, $a \to \infty$ iken,

$$E(X^4) \equiv R_1(a) G_4(a) + 3A_4 = \frac{1}{5}a^4 + a^3\left[\tilde{m}_{21} - \frac{\tilde{\mu}_{21}}{5}\right]$$

$$+ a^2\left\{2A_2 + 2\sigma^2 - \tilde{m}_{21}\tilde{\mu}_{21} + \frac{\tilde{\mu}_{21}^2}{5}\right\} + o(a^2) + 3A_4$$

$$= \frac{1}{5}a^4 + c_{41}a^3 + c_{42}a^2 + o(a^2)$$

açılımı elde edilir. Burada

$$c_{41} = \tilde{m}_{21} - \frac{\tilde{\mu}_{21}}{5};$$

$$c_{42} = 4\tilde{m}_{21}^2 - 2\tilde{m}_{31} + 2\sigma^2 - \tilde{m}_{21}\tilde{\mu}_{21} + \frac{\tilde{\mu}_{21}}{5}$$

'dir. Bu da Teorem 2.1.6.4'ün ispatını tamamlar. ■

Böylece, bu çalışmanın temel amacını oluşturan problem, yani, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti $(E(X^k),\ k=1,2,3,4)$ için üç terimli asimptotik açılımların elde edilmesi problemi çözülmüş olur.

2.1.7. Normal Müdahaleli Rasgele Yürüyüş Sürecinin Ergodik Dağılımı İçin Zayıf Yakınsama Teoremi

$W(t)=\dfrac{X(t)}{a}$ olsun. Bu durumda, Sonuç 1.3.3'den yararlanarak, $W(t)$ süreci için aşağıdaki teoremi ifade edilebilir.

Teorem 2.1.7.1. $E(\eta_1^2)<+\infty$ ve $a\to\infty$ iken $\dfrac{\sigma}{a}\to\infty$ şartları sağlandığında, $W(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $(\varphi_w(\theta))$, $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip bir rasgele değişkenin karakteristik fonksiyonuna $(\varphi_0(\theta))$ düzgün yakınsar, yani $a\to\infty$ iken,

$$\varphi_W(\theta)\to\varphi_0(\theta)\equiv\frac{e^{i\theta}-1}{i\theta}$$

olur.

İspat: Sonuç 1.3.3'e göre,

$$\varphi_X(\theta)=\frac{1}{EN_1(\zeta_1)}\int_0^\infty \exp(i\theta z)\frac{\varphi_{S_{N(z)}}(-\theta)-1}{\varphi_\eta(-\theta)-1}d\pi(z) \tag{122}$$

dir. Diğer taraftan, $W(t)=\dfrac{X(t)}{a}$ 'dir. Bu durumda, $W(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $(\varphi_W(\theta))$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\varphi_W(\theta)\equiv\varphi_X\left(\frac{\theta}{a}\right)=\frac{1}{EN_1(\zeta_1)}\int_0^\infty \exp\left(\frac{i\theta}{a}z\right)\frac{\varphi_{S_{N(z)}}\left(-\frac{\theta}{a}\right)-1}{\varphi_\eta\left(-\frac{\theta}{a}\right)-1}d\pi(z) \tag{123}$$

Ayrıca, Wald özdeşliğine göre,

$$E(S_{N(z)})=m_1E(N(z)) \text{ ve } E(S_{N_1(\zeta_1)})=\int_0^\infty E(S_{N(z)})d\pi(z)=m_1EN(\zeta_1)$$

'dır. Burada $m_1=E(\eta_1)$; $E(N_1(\zeta_1))=\int_0^\infty E(N_1(z))d\pi(z)$ dır. Yapılan varsayıma göre,

$$\zeta_1=\max\{0;Y_1\};\quad Y_1\in N(a;\sigma^2);\quad a\to\infty,\quad \frac{\sigma}{a}\to 0$$

dır. Kısalık için,

$$E(S_{N(\zeta_1)})=E(a+\bar{S}_{N(\zeta_1)})=a+E(\bar{S}_{N(\zeta_1)})$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $\bar{S}_{N(\zeta_1)} = S_{N(\zeta_1)} - a$ 'dır. $\frac{\sigma}{a} \to 0$ olduğuna göre, $\bar{S}_{N(\zeta_1)}$ 'nin beklenen değeri $E(\bar{S}_{N(\zeta_1)}) = o(a)$ 'dır (bkz., örneğin, Rogozin [71]). Dolayısıyla,

$$E(N_1(\zeta_1)) = \frac{1}{m_1} E(S_{N(\zeta_1)}) = \frac{1}{m_1} E(a + \bar{S}_{N(\zeta_1)}) = \frac{a}{m_1}(1 + o(1))$$

olur. Ayrıca, η_1 rasgele değişkeninin ilk iki momenti sonlu olduğundan,

$$\begin{aligned}
\varphi_\eta(-\frac{\theta}{a}) - 1 &= E(\exp(-\frac{i\theta}{a}\eta_1)) - 1 \\
&= 1 - \frac{i\theta}{a} m_1 + o(\frac{1}{a}) - 1 \\
&= -\frac{i\theta m_1}{a} + o(\frac{1}{a}) = -\frac{i\theta m_1}{a}(1 + o(1))
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, $a \to \infty$ iken (123) eşitliğinin payı $(I_2(a))$ ve paydası $(I_1(a))$ aşağıdaki gibi yazılıp değerlendirilebilir:

$$\begin{aligned}
I_1(a) &= EN_1(\zeta_1)\left[\varphi_\eta(-\theta) - 1\right] \\
&= \frac{a}{m_1}(1 + o(1))\ (-\frac{i\theta m_1}{a})(1 + o(1)) = (-i\theta)(1 + o(1)); \qquad (124)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2(a) &= \exp(\frac{i\theta z}{a})\left[\varphi_{S_{N(z)}}(-\frac{\theta}{a}) - 1\right] \\
&= \exp(\frac{i\theta z}{a})\left[E\left\{\exp(-\frac{i\theta S_{N(z)}}{a})\right\} - 1\right] \\
&= E\left\{\exp\left[-\frac{i\theta}{a}(\bar{S}_{N(z)})\right]\right\} - e^{\frac{i\theta z}{a}}.
\end{aligned}$$

O zaman,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \exp(\frac{i\theta z}{a})\left[\varphi_{S_{N(z)}}(-\frac{\theta}{a}) - 1\right] d\pi(z) \\
&= \int_0^\infty \left\{E\left\{\exp\left[-\frac{i\theta}{a}\bar{S}_{N(z)}\right]\right\} - e^{\frac{i\theta z}{a}}\right\} d\pi(z) \\
&= E\left\{\exp\left[-\frac{i\theta}{a}(\bar{S}_{N(\zeta_1)})\right]\right\} - E(\exp(\frac{i\theta\zeta_1}{a}))
\end{aligned}$$

$$=1-\frac{i\theta}{a}E(\bar{S}_{N(\zeta_1)})+o(\frac{1}{a})-E(\exp(\frac{i\theta}{a}(a+\bar{\zeta}_1)))$$

olur, burada $\bar{\zeta}_1=\zeta_1-a$ 'dır.

$$I_2(a)=1-\frac{i\theta}{a}E(\bar{S}_{N(\zeta_1)})+o(\frac{1}{a})-e^{i\theta}E((\exp(\frac{i\theta\bar{\zeta}_1}{a}))$$

$$=1-\frac{i\theta}{a}E(\bar{S}_{N(\zeta_1)})+o(\frac{1}{a})-e^{i\theta}\left[1+\frac{i\theta}{a}E(\bar{\zeta}_1)+o(\frac{1}{a})\right]$$

ve $a\to\infty$ iken, $\frac{\sigma}{a}\to 0$ olduğuna göre,

$$\frac{E(\bar{S}_{N(\zeta_1)})}{a}=o(1)\quad\text{ve}\quad\frac{E(\bar{\zeta}_1)}{a}=o(1)$$

olur. Bu takdirde,

$$I_2(a)=1-e^{i\theta}+o(1) \tag{125}$$

şeklinde gösterilebilir.

$I_1(a)$ ve $I_2(a)$ 'nın (124) ve (125) ifadeleri (123)' de yerine yazılırsa, $a\to\infty$ iken $\frac{\sigma}{a}\to 0$ şartı altında,

$$\varphi_W(\theta)=\frac{I_2(a)}{I_1(a)}\to\frac{1-e^{i\theta}}{-i\theta}=\frac{e^{i\theta}-1}{i\theta} \tag{126}$$

olur. Burada, $\varphi_W(\theta)=\lim_{t\to\infty}\varphi_{W(t)}(\theta)$ 'dır.

Böylece, Teorem 2.1.7.1 ispatı tamamlanır. ■

Not: $\frac{e^{i\theta}-1}{i\theta}\equiv\varphi_0(\theta)$ ifadesi [0,1] aralığında Düzgün dağılıma sahip bir rasgele değişkenin karakteristik fonksiyonu olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, süreklilik teoremine göre, aşağıdaki sonuca varılabilir.

Teorem 2.1.7.2. $a\to\infty$ ve $\frac{\sigma}{a}\to 0$ olduğunda, $W(t)$ sürecinin ergodik dağılımı $[0,1]$ aralığında Düzgün dağılıma zayıf yakınsar, yani her $v\in[0,1]$ için $a\to\infty$ iken,

$$\lim_{t\to\infty}P\{W(t)\le v\}\to v$$

olur. ■

2.2. Normal Müdahaleli Ödüllü Yenileme Sürecinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi

Bu bölümde tez konusunun bir alt başlığı olan "Normal müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin ergodik karakteristikleri için asimptotik sonuçlar" konusu ele alınmıştır. Konuya genel bir giriş yapıldıktan sonra ele alınan süreç matematiksel olarak inşa edilmiş ve bazı genel koşullar altında bu sürecin ergodik olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, ergodik dağılım fonksiyonu bir yenileme süreci aracılığı ile ifade edilmiş ve bu gösterimden yola çıkarak, ergodik dağılımın n. mertebeden (n=1,2,3,...) momentleri için kesin ifadeler elde edilmiştir. Özel bir durum (Üstel dağılım durumu) için ergodik momentlerin aşikar şekli ortaya konulmuştur. Daha sonra yenileme fonksiyonunun çeşitli integralleri için asimptotik açılımlar yardımcı teoremler şeklinde önerilmiş ve ispatlanmıştır. Bu sonuçlardan yararlanılarak, Normal müdahaleli sürecin ergodik dağılımının n. momentleri için genel durumda üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Elde edilen asimptotik açılımın yardımı ile hesaplanan moment değerlerinin kesin değerlere ne kadar yakın olduğunu görmek için özel bir durum ele alınmış ve bu durum için Monte Carlo simülasyon yöntemi uygulanarak, ergodik momentler için simülasyon değerleri elde edilmiş ve bu değerler asimptotik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonuçunda elde edilen asimptotik açılımların simülasyon sonuçlarına yeterince yakın oldukları tespit edilmiştir. Özellikle, a>7 olduğunda uyum yüzdesinin %99'un üzerinde olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca, sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsaklık teoremi ispatlanmış ve sınır fonksiyonelleri için asimptotik sonuçlar elde edilmiştir.

2.2.1. X(t) Ödüllü Yenileme Sürecinin Matematiksel Kuruluşu

$\left\{\xi_n, \eta_n, \zeta_n, \theta_n\right\}, n \geq 1,$ dizisi $\left(\Omega, \Im, P\right)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele vektörler dizisi olsun. Ayrıca, $\xi_n, \eta_n, \zeta_n, \theta_n$ rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız ve pozitif değerli değişkenler olsun. Bu rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonları bilinsin ve sırasıyla, $\Phi(t),\ F(x),\ \pi(z),\ H(t)$ ile gösterilsin, yani

$$\Phi(t) = P\left\{\xi_1 \leq t\right\};\ F(x) = P\left\{\eta_1 \leq x\right\};\ \pi(z) = P\left\{\zeta_1 \leq t\right\};\ H(t) = P\left\{\theta_1 \leq t\right\}$$

olsun. $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ başlangıç rasgele değişkenler dizisinden yararlanarak $\{T_n\}$ ve $\{S_n\}$ yenileme dizilerini aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$T_0 = S_0 = 0; \; T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i; \; S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i; \; n \geq 1.$$

Ayrıca tam değerler alan $\{N_n\}$, $n \geq 0$, rasgele değişkenler dizisi aşağıdaki gibi verilsin:

$$N_0 = 0; \; N_1 = N_1(z) = \inf\{k \geq 1 : z - S_k < 0\} = \inf\{k \geq 1 : S_k > z\}; \; z \geq 0;$$

$$N_{n+1} = N_{n+1}(\zeta_n) = \inf\left\{k \geq N_n + 1 : \zeta_n - S_k + S_{N_n} < 0\right\}, \; n \geq 1.$$

Burada $\inf(\varnothing) = +\infty$ olarak kabul edilmiştir.

$$\text{Ayrıca, } \tau_0 = 0; \; \tau_1 = \tau_1(z) = T_{N_1(z)} = \sum_{i=1}^{N_1(z)} \xi_i; \; \tau_n = \tau_n(\zeta_{n-1}) = T_{N_n} = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i;$$

$\gamma_n = \tau_n + \theta_n; n \geq 1$, olsun ve $\nu(t)$ yenileme süreci aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\nu(t) = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}, t > 0.$$

Şimdi ele alınacak $X(t)$ stokastik süreci verilebilir:

Her $\gamma_n \leq t < \gamma_{n+1}$; $n \geq 0$ için $X(t) = \max\left\{0, \zeta_n - S_{\nu(t)} + S_{N_n}\right\}$ olsun. Burada $\zeta_0 = z \geq 0$; $S_{\nu(\tau_n + 0)} = S_{N_n}$ ’ dır.

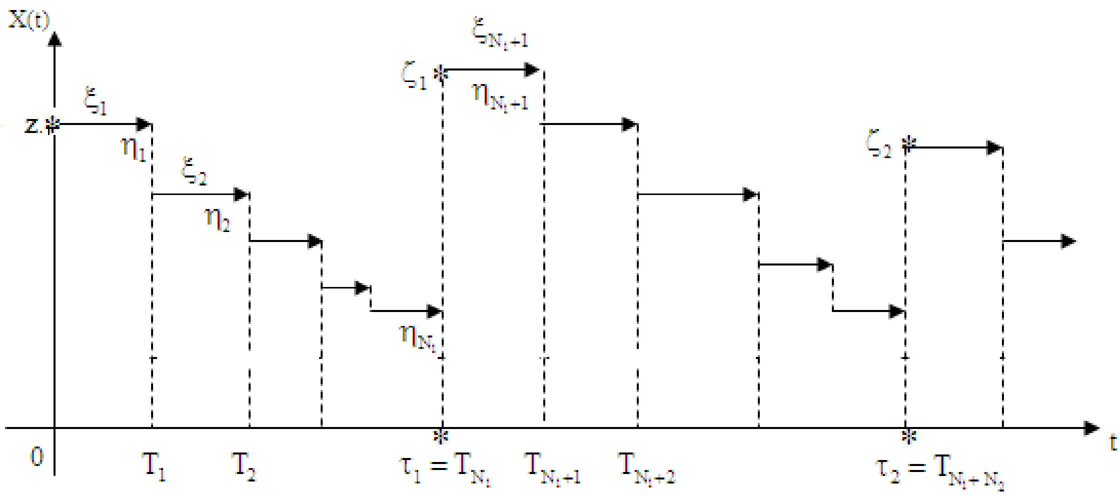
$X(t)$ sürecinin yukarıdaki tanımı aşağıdaki şekilde de verilebilir:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \max\left\{0, \zeta_n - S_{\nu(t)} + S_{N_n}\right\} I_{[\gamma_n; \gamma_{n+1})}(t).$$

Burada $I_A(t)$ ile A kümesinin indikatör fonksiyonu gösterilmiştir, yani,

$I_A(t) = 1, t \in A$; $I_A(t) = 0, t \notin A$ ’dır.

Yukarıdaki gibi tanımlanan $X(t)$ sürecine, literatürde, kesikli şans karışımlı ödüllü yenileme süreci denir. Bu çalışmada, kesikli şans karışımını ifade eden ζ_1 rasgele değişkeninin $[0,\infty)$ aralığında (a,σ^2) parametreli Normal dağılıma sahip olduğu varsayılır. Bu nedenle, ele alınan $X(t)$ sürecine "Normal dağılıma sahip kesikli şans karışımlı ödüllü yenileme süreci" veya kısaca "Normal müdahaleli ödüllü yenileme süreci" denir. $X(t)$ sürecinin bir realizasyonu Şekil 2'de gösterilmiştir:



Şekil 2. Normal Müdahaleli Ödüllü Yenileme Sürecinin bir gösterimi

2.2.2. X(t) Sürecinin Ergodikliği ve Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Kesin İfadeler

Ele alınan stokastik sürecin durağan karakteristiklerini incelemek için öncelikle $X(t)$ sürecinin ergodik olduğunun ispatlanması gerekir. Bu nedenle, aşağıdaki önermeyi ele alınsın.

Önerme 2.2.2.1. Başlangıç rasgele vektörler dizisi $\{(\xi_n,\eta_n,\zeta_n,\theta_n)\}$, $n\geq 1$, aşağıdaki ek koşulları sağlasın:

i) $0<E(\xi_1)<+\infty$, ii) $0<E(\theta_1)<+\infty$, iii) $E(\eta_1)>0$,

iv) η_1 aritmetik olmayan rasgele değişkendir,

v) ζ_1 rasgele değişkeni $[0,\infty)$ aralığında normal dağılıma sahiptir.

Bu takdirde, $X(t)$ süreci ergodiktir ve her ölçülebilir sınırlı $f(x)$ $\left(f:[0,+\infty)\to R\right)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(X(u))du = \frac{1}{E(\gamma_1)}\int_{z=s}^{\infty}\int_{v=s}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} f(v)P_z\{\gamma_1 > t; X(t)\in dv\}dtd\pi(z) \tag{127}$$

İspat: Ele alınan $X(t)$ süreci literatürde "Kesikli şans karışımlı yarı-Markov süreçler" adı ile bilinen geniş bir sınıfa aittir ve bu sınıf için literatürde Smith'in "anahtar yenileme teoremi" tipli genel ergodik teorem ispat edilmiştir (bkz., Gihman ve Skorohod [30], s.243). Dolayısıyla yukarıdaki koşullar altında ele alınan $X(t)$ süreci ergodiktir. Ayrıca, bu koşullar altında $t\to\infty$ iken $X(t)$ sürecinin zaman ortalaması durum ortalamasına 1 olasılığı ile yakınsar. Dolayısıyla, (127) eşitligi doğrudur (bkz., Gihman ve Skorohod [30], s.243). ■

Şimdi (127) eşitliğinden yararlanarak, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x)$ için kesin formül elde edilebilir. Bu amaç için Önerme 2.2.2.1 'de $f(x)$ fonksiyonu yerine indikatör fonksiyonunu ele almak yeterli olur.

Önerme 2.2.2.2. Her $x>0$ için $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_X(x) = 1-\frac{E\left(U_\eta(\zeta_1 - x)\right)}{K+E\left(U_\eta(\zeta_1)\right)} \tag{128}$$

Burada,

$$E\left(U_\eta(\zeta_1)\right)\equiv\int_0^\infty U_\eta(z)d\pi(z)=\int_0^\infty U_\eta(z)f_{\zeta_1}(z)dz \tag{129}$$

' dır.

İspat: $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunu

$$Q(x)=\lim_{t\to\infty}P_z\{X(t)\le x\}, x\ge 0 \tag{130}$$

ile gösterilsin ve indikatör fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$I_{(0,\,x]}(v)=1,\ \text{eğer } v \le x \text{ ise;}\quad I_{(0,\,x]}(v)=0,\quad \text{eğer}\quad v > x \quad \text{ise}. \tag{131}$$

Bu takdirde, f(v) fonksiyonun yerine bu indikatör fonksiyonunu yazarak, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$S_f \equiv \frac{1}{E(\gamma_1)} \int_{z=0}^{\infty} \int_{v=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} f(v) P_z \{\gamma_1 > t; X(t) \in dv\} dt d\pi(z)$$

$$= \frac{1}{E(\gamma_1)} \int_{t=0}^{\infty} \int_{z=0}^{\infty} P_z \{\gamma_1 > t; X(t) \le x\} dt d\pi(z) \tag{132}$$

Dolayısıyla, her $x \ge 0$ için

$$Q_X(x) = \frac{1}{E(\gamma_1)} \int_{t=0}^{\infty} \int_{z=0}^{\infty} P_z \{\gamma_1 > t; X(t) \le x\} dt d\pi(z) \tag{133}$$

olduğu görülür.

Notasyon kısalığı için $G(t,x,z) = P_z \{\gamma_1 > t; X(t) \le x\}$ kabul edilse o zaman,

$$G(t,x,z) = P_z \{\gamma_1 > t; X(t) \le x\}$$

$$= P_z \{t < \tau_1; X(t) \le x\} + P_z \{\tau_1 \le t < \gamma_1; X(t) \le x\} \tag{134}$$

olur. Burada

$$G_1(t,x,z) = P_z \{t < \tau_1; X(t) \le x\};$$

$$G_2(t,x,z) = P_z \{\tau_1 \le t < \gamma_1; X(t) \le x\} \tag{135}$$

denirse,

$$G(t,x,z) = G_1(t,x,z) + G_2(t,x,z) \tag{136}$$

yazılır. Şimdi $G_1(t,x,z)$ fonksiyonunu hesaplansın:

$$G_1(t,x,z) = P_z\{\tau_1 < t; X(t) \le x\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_z(\nu(t) = n; \tau_1 > t; X(t) \le x) \tag{137}$$

Burada $\nu(t) = \max\{n \ge 0; T_n \le t\}$'dır. Ayrıca,

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i;\ S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i,\ n \ge 1;\ T_0 = S_0 = 0 \tag{138}$$

olduğu göz önünde bulundurularak,

$$G_1(t,x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{T_n \le t < T_{n+1}; \tau_1 > t; X(t) \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{T_n \le t < T_{n+1}; z - S_1 > 0; z - S_2 > 0; \ldots; z - S_n > 0; z - S_n \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \le t < T_{n+1}\} P\{z - S_n > 0; z - S_n \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t))(F_n(z) - F_n(z-x)) \tag{139}$$

elde edilir. Burada $\Phi_n(t) = P\{T_n \le t\}$ ve $F_n(z) = P\{S_n \le v\}$'dır.

Şimdi de $G_2(t;x;z)$ fonksiyonu hesaplansın:

$$G_2(t,x,z) = P_z\{\tau_1 \le t < \gamma_1; X(t) \le x\} = \int_0^t P_z\{\tau_1 \in du; u \le t \le \gamma_1; 0 \le x\}$$

$$= \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} P_z\{T_n \in du; \nu_1 = n; t < u + \theta_1; 0 \le x\}$$

$$= \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} P\{z - S_{n-1} \ge 0; z - S_n < 0; T_n \in du; \theta_1 > t - u; 0 \le x\}$$

$$=\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} P\{z-S_{n-1}\geq 0; z-S_n<0\} P\{T_n\in du\} P\{\theta_1>t-u\}\varepsilon(x) \qquad (140)$$

Burada,

$$\varepsilon(a)=1,\ \ a\geq 0 \text{ ise; } \varepsilon(a)=0,\ \ a<0 \text{ ise; } H(t)=P\{\theta_1\leq t\} \qquad (141)$$

’dır. Dolayısıyla,

$$G_2(t,x,z)=\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} P\{z-S_{n-1}\geq 0; z-S_n<0\} \overline{H}(t-u)\varepsilon(x)d\Phi_n(u) \qquad (142)$$

elde edilir. Burada $\overline{H}(t)=1-H(t)$'dır. (142) formülünde aşağıdaki sadeleştirmeni yapalım:

$$P\{z-S_{n-1}\geq 0; z-S_n<0\}=P\{S_{n-1}\leq z<S_n\}$$

$$=\int_0^z P\{S_{n-1}\in dy; y\leq z<y+\eta_n\}=\int_0^z \left[1-F(z-y)\right]dF_{n-1}(y)$$

$$=F_{n-1}(z)-F_n(z) \qquad (143)$$

Bu durumda, $G_2(t;x;z)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$G_2(t,x,z)=\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty}\left[F_{n-1}(z)-F_n(z)\right]\overline{H}(t-u)\varepsilon(x)d\Phi_n(u)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[F_{n-1}(z)-F_n(z)\right]\left[\Phi_n(t)-H(t)*\Phi_n(t)\right]\varepsilon(x) \qquad (144)$$

Burada $H(t)*\Phi_n(t)\equiv\int_0^t H(t-u)d\Phi_n(u)$'dır. (139) eşitliğinin her iki tarafına t parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\tilde{G}_1(\lambda,x,z)\equiv\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}G_1(t,x,z)dt \quad =\sum_{n=0}^{\infty}\left[F_n(z)-F_n(z-x)\right]\frac{\varphi^n(\lambda)\left(1-\varphi(\lambda)\right)}{\lambda} \qquad (145)$$

elde edilir. Burada $\varphi(\lambda) \equiv E\left(e^{-\lambda\xi_1}\right) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\Phi(t)$'dır.

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda} = E(\xi_1) \tag{146}$$

olduğu için,

$$\tilde{G}_1(0,x,z) \equiv \lim_{\lambda\to 0} \tilde{G}_1(\lambda,x,z) = \int_0^\infty \tilde{G}_1(t,x,z)dt$$

$$= E(\xi_1)\sum_{n=0}^{\infty}\left[F_n(z) - F_n(z-x)\right] = E(\xi_1)\left[U_\eta(z) - U_\eta(z-x)\right] \tag{147}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (144) eşitliğinin her iki tarafına t parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\tilde{G}_2(\lambda,x,z) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda t} G_2(t,x,z)dt$$

$$= \varepsilon(x)\sum_{n=1}^{\infty}\left[F_{n-1}(z) - F_n(z)\right]\frac{\left(1-H^*(\lambda)\right)\varphi^n(\lambda)}{\lambda} \tag{148}$$

elde edilir. Burada $H^*(\lambda) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda t} dH(t) \equiv E\left(e^{-\lambda\theta_1}\right)$'dır.

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1-H^*(\lambda)}{\lambda} = E(\theta_1) \quad \text{ve} \quad \lim_{\lambda\to 0} \varphi^n(\lambda) = 1 \tag{149}$$

olduğuna göre,

$$\tilde{G}_2(0,x,z) \equiv \lim_{\lambda\to 0} \tilde{G}_2(\lambda,x,z)$$

$$= \varepsilon(x)E(\theta_1)\left[U_\eta(z) - U_\eta(z) + \varepsilon(z)\right] = \varepsilon(x)\varepsilon(z)E(\theta_1) \tag{150}$$

‘dır. Dolayısıyla, her $z \geq 0$ için

$$\tilde{G}_2(0,x,z) \equiv \int_0^\infty G_2(t,x,z)dt = E(\theta_1)\varepsilon(x) \tag{151}$$

olur. Böylece, her $x > 0$ için

$$\tilde{G}_2(0,x,z) \equiv \int_0^\infty G_2(t,x,z)dt = E(\theta_1)\varepsilon(x) = E(\theta_1) \tag{152}$$

elde edilir. $\tilde{G}(0,x,z) \equiv \int_{t=0}^\infty P\{\gamma_1 \geq t; X(t) \leq x\}dt$ olduğuna göre,

$$\tilde{G}(0,x,z) = \tilde{G}_1(0,x,z) + \tilde{G}_2(0,x,z) \tag{153}$$

olur. Dolayısıyla,

$$Q_X(x) = \frac{1}{E(\gamma_1)} \int_{z=0}^\infty \int_{t=0}^\infty P\{\gamma_1 \geq t; X(t) \leq x\} d\pi(z)$$

$$= \frac{1}{E(\gamma_1)} \int_{z=0}^\infty \tilde{G}(0,x,z)d\pi(z) = \frac{1}{E(\gamma_1)} \int_{z=0}^\infty \left\{\tilde{G}_1(0,x,z) + \tilde{G}_2(0,x,z)\right\} d\pi(z)$$

$$= \frac{1}{E(\gamma_1)} \left\{ \int_{z=0}^\infty \left[E(\xi_1)(U_\eta(z) - U_\eta(z-x))\right] d\pi(z) + \int_0^\infty [E(\theta_1)\varepsilon(x)] d\pi(z) \right\}$$

$$= \frac{1}{E(\gamma_1)} \left\{ E(\xi_1) \int_{z=0}^\infty \left[(U_\eta(z) - U_\eta(z-x))\right] d\pi(z) + E(\theta_1)\varepsilon(x) \right\} \tag{154}$$

olur. Ayrıca,

$$E(\gamma_1) = E(\tau_1 + \theta_1) = E(\tau_1) + E(\theta_1) \tag{155}$$

‘dır. Wald özdeşliğine göre,

$$E(\tau_1) = E\left(\sum_{i=1}^{N_1} \xi_1\right) = E(\xi_1)E(N_1) \tag{156}$$

elde edilir. Burada,

$$E\left(N_1(\zeta_1)\right)=\int_0^{\infty}E\left(N_1(z)\right)d\pi\left(z\right)=\int_0^{\infty}U_{\eta}\left(z\right)d\pi\left(z\right)=E(U_{\eta}(\zeta_1)) \tag{157}$$

'dır. Sonuç olarak,

$$Q\left(x\right)=\frac{E\left(\xi_1\right)\left[E\left(U_{\eta}\left(\zeta_1\right)\right)-E\left(U_{\eta}\left(\zeta_1-x\right)\right)\right]+E\left(\theta_1\right)}{E\left(\xi_1\right)E\left(U_{\eta}\left(\zeta_1\right)\right)+E\left(\theta_1\right)}$$

$$=\frac{E\left(U_{\eta}\left(\zeta_1\right)\right)-E\left(U_{\eta}\left(\zeta_1-x\right)\right)+K}{E\left(U_{\eta}\left(\zeta_1\right)\right)+K}=1-\frac{E\left(U_{\eta}\left(\zeta_1-x\right)\right)}{K+E\left(U_{\eta}\left(\zeta_1\right)\right)} \tag{158}$$

olur. Burada $K=E(\theta_1)/E(\xi_1)$'dır ve bu literatürde gecikme katsayısı olarak bilinmektedir. Böylece, Önerme 2.2.2.2.'nin ispatı tamamlanmış olur. ■

2.2.3. X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımının n. Mertebeden Momentleri İçin Kesin İfadeler

Önerme 2.2.2.2'de $X(t)$ sürecinin ergodik dagılım fonksiyonunun kesin şekli $x>0$ olduğunda aşağıdaki gibi bulunmuştu:

$$Q_X\left(x\right)=1-\frac{E\left(U_{\eta}\left(\zeta_1-x\right)\right)}{E\left(U_{\eta}\left(\zeta_1\right)\right)+K} \tag{159}$$

Burada $Q_X\left(x\right)=\lim_{t\to\infty}P\left\{X\left(t\right)\le x\right\}$ fonksiyonu $X(t)$ sürecinin ergodik dagılım fonksiyonu; $U_{\eta}\left(z\right)$ ise $\left\{\eta_n, n=1,2,...\right\}$ rasgele değişkenler dizisinin ürettiği yenileme fonksiyonudur. Ayrıca, $K=E\left(\theta_1\right)/E(\xi_1)$ gecikme katsayısıdır.

Amaç (159) eşitliğinden yola çıkarak, $X(t)$ sürecinin ergodik momentleri icin $\zeta_1=\max\left(0;Y_1\right)$ olduğunda üç terimli asimptotik açılımların elde edilmeleridir. Burada Y_1 değişkeni $(a;\sigma^2)$ parametreli Normal dağılıma sahip bir rasgele değişkendir. Bunun için öncelikle (159) eşitliğinden yararlanarak $X(t)$ sürecinin ergodik momentleri için kesin ifade yazılabilir. Bu özellik de aşağıdaki önerme ile verilir.

Önerme 2.2.2.3. Önerme 2.2.2.1'in koşulları altında $X(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momentinin kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$E\left(X^n\right)=\int_0^\infty x^n dQ_X\left(x\right)=n\int_0^\infty x^{n-1}\left(1-Q_X(x)\right)dx$$

$$=\frac{n}{K+E\left(U_\eta\left(\zeta_1\right)\right)}\int_0^\infty x^{n-1}E\left(U_\eta\left(\zeta_1-x\right)\right)dx,\ \ n=1,2,3... \qquad (160)■$$

Not: Görüldüğü üzere, (160) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade $U_\eta\left(x\right)$ yenileme fonksiyonuna bağlıdır. Literatürden de bilindiği gibi $U_\eta\left(x\right)$ yenileme fonksiyonunun açık şeklini bulmak bazı özel durumlar hariç çok zordur. Fakat bu özel durumlar için $U_\eta\left(x\right)$ fonksiyonunun açık şekli bilinse bile, yukarıdaki integrali hesaplamak kolay olmayabilir. Bunu gözlemlemek için en basit durumlardan biri ele alınır ve örnek olarak verilebilir.

Örnek 1. $\eta_{i,}$ i=1,2,3,... rasgele değişkenleri $\alpha>0$ parametreli Üstel dağılıma sahip olsun. Bu durumda $X\left(t\right)$ sürecinin n. ergodik momentleri aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$E\left(X^n\right)=\frac{\alpha\mu_{n+1}}{(n+1)\left[K+1+\alpha\mu_1\right]}+\frac{\mu_n}{K+1+\alpha\mu_1},\ \ n=1,2,...$$

Burada $\mu_n\equiv E\left(\zeta_1^n\right);\ \zeta_1=\max\left(0,Y_1\right);\ Y_1\in N\left(a;\sigma^2\right)$ dır.

İspat: $\eta_{i,}$ i=1,2,3,... rasgele değişkenleri $\alpha>0$ parametreli Üstel dağılıma sahip olduklarında, onların ürettiği yenileme fonksiyonunun aşikar şeklini kolayca bulmak mümkündür ve her $x\geq 0$ için yenileme fonksiyonunun aşikar şekli aşağıdaki gibidir:

$$U_\eta\left(x\right)=\alpha x+1 \qquad (161)$$

(161) eşitliği (160)' de dikkate alınırsa,

$$E\left(X^n\right)=\frac{n}{K+1+\alpha E(\zeta_1)}\int_0^\infty x^{n-1}E\left(U_\eta\left(\zeta_1-x\right)\right)dx \qquad (162)$$

olduğu görülür. İntegral içindeki ifadeyi sadeleştirmek için ζ_1 rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\rho_\zeta(z)$ ile gösterilsin. Bu durumda (162) eşitliğindeki integral aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_0^\infty x^{n-1} E\left(U_\eta\left(\zeta_1 - x\right)\right)dx = \int_0^\infty x^{n-1}\left(\int_0^\infty U_\eta\left(z-x\right)\rho_\zeta(z)dz\right)dx$$

$$= \int_0^\infty x^{n-1}\left(\int_x^\infty U_\eta\left(z-x\right)\rho_\zeta(z)dz\right)dx = \int_0^\infty \rho_\zeta(z)dz\left(\int_0^z x^{n-1}U_\eta\left(z-x\right)\right)dx$$

$$= \int_0^\infty \rho_\zeta(z)\left\{\int_0^z x^{n-1}\left[\alpha(z-x)+1\right]dx\right\}dz$$

$$= \int_0^\infty \left\{\frac{\alpha z^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{z^n}{n}\right\}\rho_\zeta(z)dz = \frac{\alpha}{n(n+1)}E(\zeta_1^{n+1}) + \frac{1}{n}E(\zeta_1^n)$$

$$= \frac{\alpha}{n(n+1)}\mu_{n+1} + \frac{1}{n}\mu_n \tag{163}$$

Burada $\mu_n = E(\zeta_1^n)$ ’dır.

Sonuç olarak sürecin n. ergodik momenti için üstel dağılım durumunda aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$E\left(X^n\right) = \frac{n}{K+1+\alpha\mu_1}\left[\frac{\alpha\mu_{n+1}}{n(n+1)} + \frac{\mu_n}{n}\right] \tag{164}$$

Şimdi $\mu_n = E(\zeta_1^n)$ momentleri ele alınsın.

Bu çalışmadaki varsayımlara göre, $Y_1 \in N\left(a;\sigma^2\right)$ olduğundan, Y_1 rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in R, \tag{165}$$

ve tanımdan göre, ζ_1 rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f_{\zeta_1}(x) \equiv \rho_\zeta(x) = \frac{1}{C(a;\sigma^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}), x \geq 0 \qquad (166)$$

‘dir. Burada,

$$C(a;\sigma^2) = \int_0^\infty f_Y(x)dx = \frac{1}{2} + \Phi_0(T);\ \Phi_0(T) = \int_0^T \varphi(u)du;\ \ \varphi(u)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2}); T = \frac{a}{\sigma}$$

’dır. Başka bir ifadeyle, $C(a;\sigma^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \int_T^\infty \varphi(u)du = 1 - \int_T^\infty \varphi(u)du$ olur. Mill teoremine göre (bkz., Abramowitch and Stegun, [1]), $T \to \infty$ iken integral $\int_T^\infty \varphi(u)du \sim \frac{\varphi(T)}{T}$ ' dır. Burada $a(x) \sim b(x)$ sembolü ile asimptotik denklik gösterilmiştir. Başka bir deyişle, eğer $\lim_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$ ise, o zaman, $a(x) \sim b(x)$'tir.

Böylece, $C(a;\sigma^2) \sim 1 - \frac{\varphi(T)}{T}$ ve $\rho_\zeta(x) = \frac{1}{\sigma C(a;\sigma^2)} \varphi(\frac{x-a}{\sigma})$'dır. Burada $T = a/\sigma$’ dır.

Şimdi de $a \to \infty$ iken, $\mu_n = E(\zeta_1^n)$' nın asimptotik davranışı ele alınsın.

$$\mu_n = E(\zeta_1^n) = \int_0^\infty x^n \rho_\zeta(x)dx = \int_0^\infty x^n \frac{1}{\sigma C(a;\sigma^2)} \varphi(\frac{x-a}{\sigma})dx$$

$$= \frac{1}{C(a;\sigma^2)} \int_{-T}^\infty (a+\sigma z)^n \varphi(z)dz = a^n + \frac{n(n+1)}{2} a^{n-2}\sigma^2 + o(a^{n-2});\ n=1,2,3,... \qquad (167)$$

‘dir. Böylece, $\lim_{a\to\infty} \frac{\sigma}{a} = 0$ olduğunda $\mu_n \sim a^n$ olur. Dolayısıyla, $a \to \infty$ iken Üstel dağılım durumunda sürecin n. ergodik momenti için aşağıdaki asimptotik denklik elde edilir:

$$E(X^n) \sim \frac{\alpha a^{n+1}}{(n+1)[K+1+\alpha a]} + \frac{a^n}{[K+1+\alpha a]} \sim \frac{a^n}{n+1} \qquad (168)\blacksquare$$

Not: Bu çalışmanın temel amacı, (168) formülünde Üstel dağılım için ortaya konmuş asimptotik özelliğin genel durumlarda da sağlanıp sağlanmayacağını tespit etmektir. Genel durumda momentlerin asimptotik davranışını incelemek için öncelikle n. ergodik momentin yeni bir gösterimi aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Önerme 2.2.2.4. Önerme 2.2.2.1 'in koşulları altında, $X(t)$ sürecinin n. ergodik momentinin kesin ifadesi aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$E(X^n) = \frac{nE(U_n(\zeta_1))}{K + E(U_\eta(\zeta_1))},\ n=1,2,... \tag{169}$$

Burada $U_n(z) \equiv z^{n-1} * U_\eta(z) \equiv \int_0^z x^{n-1} U_\eta(z-x)dx$ 'dır.

İspat: Notasyon kısalığı için (160) eşitliğindeki integral $I_n(a)$ ile gösterilsin, yani

$$I_n(a) = \int_0^\infty x^{n-1} E\left(U_\eta\left(\zeta_1 - x\right)\right)dx \tag{170}$$

olsun. $I_n(a)$ integrali aşağıdaki gibi dönüştürülürse:

$$I_n(a) = \int_0^\infty x^{n-1} (\int_0^\infty U_\eta\left(z-x\right)\rho_\zeta(z)dz)dx$$

$$= \int_0^\infty x^{n-1} (\int_x^\infty U_\eta\left(z-x\right)\rho_\zeta(z)dz)dx$$

$$= \int_0^\infty \rho_\zeta(z) (\int_0^z x^{n-1} U_\eta\left(z-x\right)dx)dz$$

$$= \int_0^\infty \rho_\zeta(z) U_n(z)dz = E(U_n(\zeta_1)) \tag{171}$$

olur. (171) eşitliği (160)' de yerine yazılırsa,

$$E(X^n) = \frac{nE(U_\eta(\zeta_1))}{K + E(U_\eta(\zeta_1))}, \text{ n=1,2,...} \tag{172}$$

olduğu görülür. ■

2.2.4. X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımının n. Mertebeden Momentleri İçin Üç Terimli Asimptotik Açılımlar

n. mertebeden ergodik momentler ($E(X^n)$) için asimptotik ifadeler elde etmek amacıyla (172) eşitliğinin sağ tarafındaki kesrin pay ve paydası için ayrı ayrı asimptotik açılımlar elde edilebilir.

Yardımcı Teorem 2.2.4.1: Önerme 2.2.2.1'in koşullarına ilaveten $E(\eta_1^3) < +\infty$ olsun. Bu durumda, $a \to \infty$ iken $E(U_\eta(\zeta_1))$ için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$E(U_\eta(\zeta_1)) = \frac{a}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(\frac{1}{a})$$

İspat: ζ_1 rasgele değişkenin tanımına göre,

$$E(U_\eta(\zeta_1)) = \int_0^\infty U_\eta(z)\rho_\zeta(z)dz = \frac{1}{\sigma C(a,\sigma^2)}\int_0^\infty U_\eta(z)\varphi(\frac{z-a}{\sigma})dz$$

$$= \frac{1}{\sigma C(a,\sigma^2)}\left[\int_0^a U_\eta(z)\varphi(\frac{z-a}{\sigma})dz + \int_a^\infty U_\eta(z)\varphi(\frac{z-a}{\sigma})dz\right] \tag{173}$$

'dır. Burada $\varphi(x)$ standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

Yenileme fonksiyonu $U_\eta(z)$ için aşağıdaki asimptotik açılım bilinmektedir (bkz., Feller, [29]):

$$U_\eta(z) = \frac{z}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + \frac{1}{z}g(z), \; z \to \infty \; .$$

Burada $m_k \equiv E(\eta_1^k)$, k=1,2,...'dır. Ayrıca, $g(z)$ sınırlı bir fonksiyon olup, $z \to \infty$ iken sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur (bkz., Feller, [29]). Dolayısıyla, $a \to \infty$ iken :

$$\int_a^\infty U_\eta(z)\varphi(\frac{z-a}{\sigma})dz = \frac{1}{m_1}\int_a^\infty z\varphi(\frac{z-a}{\sigma})dz + \frac{m^2}{2m_1^2}\int_a^\infty \varphi(\frac{z-a}{\sigma})dz + \int_a^\infty \frac{1}{z}g(z)\varphi(\frac{z-a}{\sigma})dz$$

$$= \frac{1}{m_1}\left[\frac{a\sigma}{2} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\right] + \frac{m_2}{2m_1^2}\frac{\sigma}{2} + o(1/a)$$

$$= \frac{\sigma}{2m_1}a + (\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}m_1} + \frac{m_2\sigma}{4m_1^2}) + o(1/a) \tag{174}$$

asimptotik ifadesi yazılabilir.

$M_1(a) = \int_0^a U_\eta(z)\varphi(\frac{z-a}{\sigma})dz$ olsun. Bu integralin asimptotik davranışı Laplace dönüşümü uygulanarak incelenebilir. $M_1(a)$ Fonksiyonunun Laplace dönüşümünü aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$\tilde{M}_1(\lambda) = \int_0^\infty M_1(a)e^{-\lambda a})da$$

Bu durumda,

$$\tilde{M}_1(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda a}(\int_0^a U_\eta(z)\varphi(\frac{a-z}{\sigma})dz)da$$

$$= \int_{z=0}^\infty U_\eta(z)(\int_0^a e^{-\lambda a}\varphi(\frac{a-z}{\sigma})da)dz$$

$$= \int_{z=0}^\infty U_\eta(z)(\int_{v=0}^\infty e^{-\lambda(z+v)}\varphi(\frac{v}{\sigma})dv)dz$$

$$= \int_{z=0}^\infty e^{-\lambda z}U_\eta(z)dz\int_0^\infty e^{-\lambda v}\varphi(\frac{v}{\sigma})dv = \tilde{U}_\eta(\lambda)\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) \tag{175}$$

olur. Burada $\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda v}\varphi(\frac{v}{\sigma})dv$'dır. $U_\eta(z)$ fonksiyonunun tanımına göre, $U_\eta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(z)$ dır. Sonuncu eşitliğin her iki tarafına z parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\tilde{U}_\eta(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(F^*(\lambda))^n = \frac{1}{\lambda(1-F^*(\lambda))} \tag{176}$$

Burada $F^*(\lambda) = E(e^{-\lambda\eta_1}) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}dF(x)$'dır. $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki Mac Lauren açılımı yazılabilir (bkz., Feller, [29]):

$$F^*(\lambda) = 1 - \lambda m_1 + \frac{\lambda^2}{2}m_2 - \frac{\lambda^3}{6}m_3 + o(\lambda^3) \tag{177}$$

Burada $m_k \equiv E(\eta_1^k)$, k=1,2,...'dır. (177) eşitliği (176) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki açılımı elde edilir:

$$\tilde{U}_\eta(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda m_1 - \frac{\lambda^2}{2}m_2 + \frac{\lambda^3}{6}m_3 + o(\lambda^3))}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 m_1}\left\{1 - \frac{\lambda}{2}m_{21} + \frac{\lambda^2}{6}m_{31} + o(\lambda^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 m_1}\left\{1 + \frac{m_{21}}{2}\lambda + A_1\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\} \tag{178}$$

Burada m_{k1}=m_k/m_1, k=2,3; $A_1 = \frac{m_{21}^2}{4} - \frac{m_{31}}{6}$, dır. Benzer şekilde, $\lambda \to 0$ iken $\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda)$ dönüşümü için aşağıdaki açılımı yazılabilir:

$$\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda v}\varphi(\frac{v}{\sigma})dv$$

$$= \int_0^\infty \varphi(\frac{v}{\sigma})dv - \lambda \int_0^\infty v\varphi(\frac{v}{\sigma})dv + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^\infty v^2\varphi(\frac{v}{\sigma})dv + o(\lambda^2) \tag{179}$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun özelliklerinden aşağıdaki eşitlikler kolayca elde edilirler:

$$\int_0^\infty \varphi(\frac{v}{\sigma})dv = \frac{\sigma}{2}; \quad \int_0^\infty v\varphi(\frac{v}{\sigma})dv = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}; \quad \int_0^\infty v^2\varphi(\frac{v}{\sigma})dv = \frac{\sigma^3}{2} \tag{180}$$

Böylece,

$$\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^3}{4}\lambda^2 + o(\lambda^2) \tag{181}$$

açılımı elde edilir. Bu durumda,

$$\tilde{M}_1(\lambda) \equiv \tilde{U}_\eta(\lambda)\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 m_1}\left\{1 + \frac{m_{21}}{2}\lambda + A_1\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\}\left\{\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^3}{4}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 m_1}\left\{\frac{\sigma}{2} + \lambda\left[\frac{m_2\sigma}{4m_1} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\right] + \lambda^2\left[\frac{\sigma A_1}{2} - \frac{\sigma^2 m_{21}}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{\sigma^3}{4}\right] + o(\lambda^2)\right\}$$

$$= \frac{\sigma}{2m_1}\frac{1}{\lambda^2} + \left[\frac{m_2\sigma}{4m_1^2} - \frac{\sigma^2}{m_1\sqrt{2\pi}}\right]\frac{1}{\lambda} + \left[\frac{\sigma A_1}{2m_1} - \frac{\sigma^2 m_2}{2\sqrt{2\pi}m_1^2} + \frac{\sigma^3}{4m_1}\right] + o(1) \tag{182}$$

olur. (182) açılımına Tauber-Abel teoremini uygulayarak, $a \to \infty$ iken aşağıdaki açılım elde edilir:

$$M_1(a) = \frac{\sigma}{2m_1}a + \frac{m_2\sigma}{4m_1^2} - \frac{\sigma^2}{m_1\sqrt{2\pi}} + o(1/a) \tag{183}$$

(175) ve (183) açılımları (174) eşitliğinde göz önüne alınırsa, $a \to \infty$ iken

$$E(U_\eta(\zeta_1)) = \frac{1}{\sigma C(a,\sigma^2)}\left\{\frac{\sigma}{2m_1}a + \sigma A_2 + \frac{\sigma}{2m_1}a + \sigma B_2 + o(1/a)\right\}$$

$$=\frac{1}{C(a,\sigma^2)}\left\{\frac{a}{2m_1}+\frac{a}{2m_1}+A_2+B_2+o(1/a)\right\}$$

$$=\left[1+\frac{\sigma\varphi(a/\sigma)}{a}+o(\frac{\varphi(a/\sigma)}{a})\right]^{-1}\left\{\frac{a}{m_1}+A_2+B_2+o(1/a)\right\}$$

$$=(1-\frac{\sigma}{a}\varphi(\frac{a}{\sigma}))\left\{\frac{a}{m_1}+A_2+B_2+o(1/a)\right\}$$

$$=\frac{a}{m_1}+A_2+B_2+o(1/a)\,. \tag{184}$$

açılımı elde edilir. Burada $A_2=\frac{m_2}{4m_1^2}-\frac{\sigma}{m_1\sqrt{2\pi}}$ ve $B_2=\frac{m_2}{4m_1^2}+\frac{\sigma}{m_1\sqrt{2\pi}}$'dır. Dolayısıyla, $A_2+B_2=\frac{m_2}{2m_1^2}$ olduğu görülür. Böylece, sonuç olarak, $a\to\infty$ iken

$$E(U_\eta(\zeta_1))=\frac{a}{m_1}+\frac{m_2}{2m_1^2}+o(1/a) \tag{185}$$

açılımı elde edilir ki, bu da Yardımcı Teorem 2.2.4.1'in ispatını tamamlar. ■

Şimdi $E(U_n(\zeta_1))$' nin $a\to\infty$ iken asimptotik davranışı ele alınsın.

Yardımcı Teorem 2.2.4.2. Önerme 2.2.2.1'in koşullarına ilaveten $E(\eta_1^3)<+\infty$ olsun. Bu takdirde, $a\to\infty$ iken $E(U_n(\zeta_1))$ için aşağıdaki üç terimli asimptotik açılım yazılabilir:

$$E(U_n(\zeta_1))=\frac{a^{n+1}}{n(n+1)m_1}+\frac{m_2}{2nm_1^2}a^n+\left[A_1+\frac{\sigma^2}{2}\right]\frac{a^{n-1}}{m_1}+o(a^{n-1})\,.$$

Burada $m_{k1}=\frac{m_k}{m_1}$, k=2,3; $A_1=\frac{m_{21}^2}{4}-\frac{m_{31}}{6}$'dır.

İspat: Tanıma göre,

$$E(U_n(\zeta_1)) = \int_0^\infty U_n(z)\rho_\zeta(z)dz = \frac{1}{\sigma C(a,\sigma^2)}\int_0^\infty U_n(z)\varphi(\frac{z-a}{\sigma})dz$$

$$= \frac{1}{\sigma C(a,\sigma^2)}\left[\int_0^a U_n(z)\varphi(\frac{z-a}{\sigma})dz + \int_a^\infty U_n(z)\varphi(\frac{z-a}{\sigma})dz\right] \tag{186}$$

şekilde gösterilebilr. Kısalık için aşağıdaki notasyonları tanımlasın:

$$I_{n1}(a) = \int_0^a U_n(z)\varphi(\frac{z-a}{\sigma})dz\,;\, I_{n2}(a) = \int_a^\infty U_n(z)\varphi(\frac{z-a}{\sigma})dz \tag{187}$$

Önce $I_{n1}(a)$ fonksiyonunu $a \to \infty$ iken incelenir. Bu amaç için Laplace dönüşümü kullanılır:

$$\tilde{I}_{n1}(\lambda) = \tilde{U}_n(\lambda)\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) \tag{188}$$

Burada “dalga” sembolü ile uygun fonksiyonun Laplace dönüşümü gösterilmiştir. Ayrıca, $\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda z}\varphi(\frac{z}{\sigma})dz$ 'dır. Hatırlanırsa, Yardımcı Teorem 2.2.4.1'in ispat sürecinde $\lambda \to 0$ iken $\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda)$ için (181) açılımı elde edilmişti:

$$\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^3}{4}\lambda^2 + o(\lambda^2) \tag{189}$$

Dolayısıyla, $\tilde{I}_{n1}(\lambda)$'nın asimptotik davranışını incelemek aslında $\tilde{U}_n(\lambda)$ 'nın davranışını incelemeğe denktir. Tanımına göre,

$$U_n(z) = z^{n-1} * U_\eta(z) \equiv \int_0^z x^{n-1}U_\eta(z-x)dx$$

'dır. Dolayısıyla, Laplace dönüşümünün özelliğine göre,

$$\tilde{U}_n(\lambda) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\tilde{U}_\eta(\lambda) \tag{190}$$

yazılabilir.

(178) formülüne göre $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki açılım yazılabilir:

$$\tilde{U}_\eta(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 m_1}\left\{1 + \frac{m_{21}}{2}\lambda + A_1\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\}, \tag{191}$$

Burada $m_{k1} = \dfrac{m_k}{m_1}$, k=2,3; $A_1 = \dfrac{m_{21}^2}{4} - \dfrac{m_{31}}{6}$'dır.

Böylece, sonuç olarak, $\tilde{U}_n(\lambda)$ için aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\tilde{U}_n(\lambda) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\frac{1}{\lambda^2 m_1}\left\{1 + \frac{m_{21}}{2}\lambda + A_1\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\}$$

$$= \frac{(n-1)!}{m_1\lambda^{n+2}} + \frac{m_2(n-1)!}{2m_1^2\lambda^{n+1}} + \frac{A_1(n-1)!}{m_1\lambda^n} + o(\frac{1}{\lambda^n}) \tag{192}$$

Şimdi de (189) ve (192) açılımları (188) eşitliğinde yerine yazılarak, $\tilde{I}_{n1}(\lambda)$ için aşağıdaki açılımı elde edilir:

$$\tilde{I}_{n1}(\lambda) = \left[\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^3}{4}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right]\left[\frac{(n-1)!}{m_1\lambda^{n+2}} + \frac{m_2(n-1)!}{2m_1^2\lambda^{n+1}} + \frac{A_1(n-1)!}{m_1\lambda^n} + o(\frac{1}{\lambda^n})\right]$$

$$= \frac{\sigma(n-1)!}{2m_1\lambda^{n+2}} + \frac{\sigma m_2(n-1)!}{4m_1^2\lambda^{n+1}} + \frac{\sigma A_1(n-1)!}{2m_1\lambda^n}$$

$$- \frac{\sigma^2(n-1)!}{\sqrt{2\pi}m_1\lambda^{n+1}} - \frac{\sigma^2 m_2(n-1)!}{2\sqrt{2\pi}m_1^2\lambda^n} + \frac{\sigma^3(n-1)!}{4m_1\lambda^n} + o(\frac{1}{\lambda^n})$$

$$= \frac{\sigma(n-1)!}{2m_1\lambda^{n+2}} + \left[\frac{\sigma m_2}{4m_1^2} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}m_1}\right]\frac{(n-1)!}{\lambda^{n+1}}$$

$$+ \left[\frac{A_1}{m_1} - \frac{\sigma m_2}{\sqrt{2\pi}m_1^2} + \frac{\sigma^2}{2m_1}\right]\frac{\sigma}{2}\frac{(n-1)!}{\lambda^n} + o(\frac{1}{\lambda^n}) \tag{193}$$

(193) açılımına Tauber-Abel teoremini uygulayarak, $a \to \infty$ iken $I_{n1}(a)$ için aşağıdaki açılım bulunur:

$$I_{n1}(a) = \frac{\sigma}{2n(n+1)m_1} a^{n+1} + \left[\frac{m_2}{4m_1^2} - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi} m_1} \right] \frac{\sigma}{n} a^n$$

$$+ \left[\frac{A_1}{m_1} - \frac{\sigma m_2}{\sqrt{2\pi} m_1^2} + \frac{\sigma^2}{2m_1} \right] \frac{\sigma}{2} a^{n-1} + o(a^{n-1}) \qquad (194)$$

(192) ‘de verilen

$$\tilde{U}_n(\lambda) = \frac{(n-1)!}{m_1} \frac{1}{\lambda^{n+2}} + \frac{m_2 (n-1)!}{2m_1^2} \frac{1}{\lambda^{n+1}} + \frac{A_1 (n-1)!}{m_1} \frac{1}{\lambda^n} + o(\frac{1}{\lambda^n}) \qquad (195)$$

açılıma Tauber- Abel teoremi uygulabırsa, $z \to \infty$ iken,

$$U_n(z) = \frac{1}{n(n+1)m_1} z^{n+1} + \frac{m_2}{2nm_1^2} z^n + \frac{A_1}{m_1} z^{n-1} + o(z^{n-1}) \qquad (196)$$

açılımı elde edilir. Bu açılımı ve $I_{n2}(a)$ 'nın (187) de verilen ifadesi göz önünde bulundurulursa, $a \to \infty$ iken, $I_{n2}(a)$ için aşağıdaki açılımı elde edilmiş olur:

$$I_{n2}(a) \equiv \int_a^\infty U_n(z) \varphi(\frac{z-a}{\sigma}) dz$$

$$= \frac{1}{n(n+1)m_1} \int_a^\infty z^{n+1} \varphi(\frac{z-a}{\sigma}) dz + \frac{m_2}{2nm_1^2} \int_a^\infty z^n \varphi(\frac{z-a}{\sigma}) dz$$

$$+ \frac{A_1}{m_1} \int_a^\infty z^{n-1} \varphi(\frac{z-a}{\sigma}) dz + o(a^{n-1}) \,. \qquad (197)$$

Şimdi de, $a \to \infty$ olduğunda $\int_a^\infty z^r \varphi(\frac{z-a}{\sigma}) dz$, $r \geq 1$, integralleri için uygun açılımlar ele alınsın:

$$\int_a^{\infty} z^r \varphi(\frac{z-a}{\sigma})dz = \int_0^{\infty} (v+a)^r \varphi(\frac{v}{\sigma})dv$$

$$= a^r \int_0^{\infty} \varphi(\frac{v}{\sigma})dv + ra^{r-1}\int_0^{\infty} v\varphi(\frac{v}{\sigma})dv$$

$$+\frac{r(r-1)}{2}a^{r-2}\int_0^{\infty} v^2\varphi(\frac{v}{\sigma})dv + o(a^{r-2})$$

$$= \frac{\sigma}{2}a^r + \frac{r\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}a^{r-1} + \frac{r(r-1)\sigma^3}{4}a^{r-2} + o(a^{r-2}) \tag{198}$$

Bu açılımlar $r = n-1;\ n\,;+1$ değerleri için hesaplanır ve (197) formülünde yerine yazılırsa, $a \to \infty$ iken, $I_{n2}(a)$ için aşağıdaki açılım elde edilir:

$$I_{n2}(a) = \frac{\sigma}{2n(n+1)m_1}a^{n+1} + \left[\frac{m_2}{4m_1^2} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}m_1}\right]\frac{\sigma}{n}a^n$$

$$+\left[\frac{A_1}{m_1} + \frac{\sigma m_2}{\sqrt{2\pi}m_1^2} + \frac{\sigma^2}{2m_1}\right]\frac{\sigma}{2}a^{n-1} + o(a^{n-1}) \tag{199}$$

(194) ve (199) açılımlarını toplayarak,

$$I_{n1}(a) + I_{n2}(a) = \frac{\sigma}{n(n+1)m_1}a^{n+1} + \frac{\sigma m_2}{2nm_1^2}a^n + \left[A_1 + \frac{\sigma^2}{2}\right]\frac{\sigma}{m_1}a^{n-1} + o(a^{n-1}) \tag{200}$$

açılımı bulunur. (186) formülüne göre,

$$E(U_n(\zeta_1)) = \frac{1}{\sigma C(a,\sigma)}\left[I_{n1}(a) + I_{n2}(a)\right] \tag{201}$$

'dır. Buna göre, (200) açılımı (201) eşitliğinde göz önünde bulundurulursa,

$$E(U_n(\zeta_1)) = \frac{1}{C(a;\sigma)}\left\{\frac{1}{n(n+1)m_1}a^{n+1} + \frac{m_2}{2nm_1^2}a^n + \left[A_1 + \frac{\sigma^2}{2}\right]\frac{a^{n-1}}{m_1} + o(a^{n-1})\right\} \tag{202}$$

olduğu görülür. Diger taraftan, tanımına göre,

$$C(a,\sigma)=1-\int_{a/\sigma}^{\infty}\varphi(u)du\text{ 'dır.}$$

Bu durumda, Mill Teoremine göre (bkz., Abramovich and Stegun, [1]), $a\to\infty$ iken,

$$C(a,\sigma)\sim 1-\frac{\varphi(a/\sigma)}{a/\sigma}=1-\frac{\sigma}{a}\varphi(\frac{a}{\sigma}) \qquad (203)$$

elde edilir. Başka bir değişle, $a\to\infty$ iken,

$$\frac{1}{C(a;\sigma)}\sim 1+\frac{\sigma}{a}\varphi(\frac{a}{\sigma})=1+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}a}\exp(-\frac{a^2}{2\sigma^2}) \qquad (204)$$

yazılabilir. Bu açılım (202) formülünde yerine yazılırsa,

$$E(U_n(\zeta_1))=\frac{a^{n+1}}{n(n+1)m_1}+\frac{m_2}{2nm_1^2}a^n+\left[A_1+\frac{\sigma^2}{2}\right]\frac{a^{n-1}}{m_1}+o(a^{n-1}) \qquad (205)$$

açılımı elde edilir.

Burada $m_k=E(\eta_1^k),\ k=1,2,3;\ m_{k1}=\frac{m_k}{m_1}$, k=2,3; $A_1=\frac{m_{21}^2}{4}-\frac{m_{31}}{6}$ ' dır.

Böylece, Yardımcı teorem: 2.2.4.2'nin ispatı tamamlanmış oldu. ■

Bu çalışmanın temel amacı olan teorem aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 2.2.4.1. Önerme 2.2.2.1 'in koşullarına ek olarak $E(\eta_1^3)<+\infty$ olsun. Bu durumda, $X(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momentleri için, $a\to\infty$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$E(X^n)=\frac{a^n}{(n+1)}+A_{3n}a^{n-1}+B_{3n}a^{n-2}+o(a^{n-2}) \qquad (206)$$

Burada $A_{3n} = \dfrac{nm_2 - 2Km_1^2}{2(n+1)m_1}$;

$$B_{3n} = \frac{m_1^2}{n+1}(K + \frac{m_2}{2m_1^2})^2 + \frac{(n-1)m_2^2}{4m_1^2} + \frac{n\sigma^2}{2} - \frac{Km_2}{2} - \frac{nm_2}{6m_1},\ (n=1,2,...)\text{'dır.}$$

İspat: (172) eşitliğine göre,

$$E(X^n) = \frac{nE(U_n(\zeta_1))}{K + E(U_\eta(\zeta_1))},\quad n=1,2,... \tag{207}$$

'dır.

Yardımcı teorem 2.2.4.2'de, $E(U_n(\zeta_1))$ için üç terimli asimptotik açılımı elde edilmişti. Bu açılıma göre, $a \to \infty$ iken,

$$nE(U_n(\zeta_1)) = \frac{a^{n+1}}{(n+1)m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2}a^n + \left[A_1 + \frac{\sigma^2}{2}\right]\frac{n}{m_1}a^{n-1} + o(a^{n-1}) \tag{208}$$

'dır. Yardımcı teorem 2.2.4.1'e göre ise, $a \to \infty$ iken,

$$E(U_\eta(\zeta_1)) = \frac{a}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(\frac{1}{a}) \tag{209}$$

'dır. $K = E(\theta_1)/E(\xi_1)$ sonlu olduğu için

$$K + E(U_\eta(\zeta_1)) = \frac{a}{m_1} + \left[K + \frac{m_2}{2m_1^2}\right] + o(\frac{1}{a}) \tag{210}$$

açılımı yazılabilir. Buradan,

$$\left[K + E(U_\eta(\zeta_1))\right]^{-1} = \left\{\frac{a}{m_1} + \left[K + \frac{m_2}{2m_1^2}\right] + o(\frac{1}{a})\right\}^{-1}$$

$$= \frac{m_1}{a}\left\{1 - \frac{m_1}{a}(K + \frac{m_2}{2m_1^2}) + \frac{m_1^2}{a^2}(K + \frac{m_2}{2m_1^2})^2 + o(\frac{1}{a^2})\right\} \tag{211}$$

elde edilir. Son olarak, (208) ve (211) açılımları (207) ifadesinde yerine yazılırsa, $a \to \infty$ iken, aşağıdaki asimptotik açılım elde edilmiş olur:

$$E(X^n) = nE(U_n(\zeta_1)) \left[K + E(U_\eta(\zeta_1))\right]^{-1}$$

$$= \left\{\frac{a^{n+1}}{(n+1)m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2}a^n + \left[A_1 + \frac{\sigma^2}{2}\right]\frac{n}{m_1}a^{n-1} + o(a^{n-1})\right\}$$

$$\frac{m_1}{a}\left\{1 - \frac{m_1}{a}(K + \frac{m_2}{2m_1^2}) + \frac{m_1^2}{a^2}(K + \frac{m_2}{2m_1^2})^2 + o(\frac{1}{a^2})\right\}$$

$$= \frac{a^n}{n+1} + A_{3n}a^{n-1} + B_{3n}a^{n-2} + o(a^{n-2}), \qquad (212)$$

burada $A_{3n} = \dfrac{nm_2 - 2km_1^2}{2(n+1)m_1}$;

$$B_{3n} = \frac{m_1^2}{n+1}(K + \frac{m_2}{2m_1^2})^2 + \frac{(n-1)m_2^2}{4m_1^2} + \frac{n\sigma^2}{2} - \frac{Km_2}{2} - \frac{nm_2}{6m_1},\ (n=1,2,...)$$

'dır. Böylece çalışmanın temel amacı olan Teorem 2.2.4.1 ispat edilmiş olur. ■

Bu teoremin bir uygulaması olarak aşağıdaki örnek ele alınsın.

Örnek 2: η_i rasgele değişkenleri $[0,2]$ aralığında düzgün dağılıma sahip olsunlar. Ayrıca gecikme katsayısı $K=1$ ve $\sigma=1$ olsun. Bu durumda,

$$m_n \equiv E(\eta_1^n) = \frac{2^n}{n+1},\quad n=1,2,3$$

olur. Dolayısıyla,

$$A_{3n} = \frac{2n-3}{3(n+1)};\qquad B_{3n} = \frac{11n^2 - 9n + 30}{18(n+1)},\quad n=1,2,...$$

olur. Bu ifadeler Teorem 2.2.4.1 'de göz önünde bulundurulursa, ele alınan özel durumda sürecin n. ergodik momentleri için aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımı elde edilir:

$$E(X^n) = \frac{a^n}{n+1} + \frac{(2n-3)}{3(n+1)}a^{n-1} + \frac{(11n^2-9n+30)}{18(n+1)}a^{n-2} + o(a^{n-2}). \qquad (213)$$

Burada önemli bir soru, (213) açılımından elde edilen yaklaşık değerlerin ergodik momentlerin gerçek değerlerine ne kadar yakın olacağı sorusudur. Fakat genel durumda ergodik momentlerin kesin değerlerini bulma şansı olmadığı için, bu soruya benzetim yöntemini kullanarak cevap vermeye çalışılacaktır. Bu amaçla, 2.2.5. bölümde Monte Carlo simulasyon yöntemini kullanarak, ergodik momentlerin asimptotik değerlerinin simulasyon değerlere ne derecede uyum sağladığı araştırılacaktır.

2.2.5. Simulasyon Sonuçları

Bu bölümde, (213) açılımındaki ilk üç terimi (kalan terimsiz) kullanarak, sürecin n. ergodik momenti için yaklaşık ifadeler oluşturulacaktır. Oluşturulan bu ifadelere ergodik momentler için asimptotik değerler denilecektir. Bu değerler sembolik olarak $\tilde{E}(X^n)$ ile gösterilecektir. Benzer şekilde, $\hat{E}(X^n)$ ile n. ergodik moment için Monte Carlo benzetim yöntemini kullanarak elde edilecek simulasyon değerleri gösterilecektir. Dikkat edilirse, her bir simulasyon değeri bilgisayarda MATLAB programı kullanılarak ve sürecin $n = 10^9$ realizasyonu (izi) üretilerek elde edilmiştir. Bu değerlerden aşağıdaki tablolar ilk dört ergodik moment için oluşturulmuştur. Ayrıca, Δ_n, δ_n, AP_n notasyonları ile, sırasıyla, mutlak hatalar, nispi hatalar ve uyum yüzdeleri gösterilmişler. Başka bir değişle;

$$\Delta_n = \left|\tilde{E}(X^n) - \hat{E}(X^n)\right|; \quad \delta_n = \frac{\Delta_n}{\hat{E}(X^n)}100\%; \quad AP_n = (100 - \delta_n)\% \qquad (214)$$

’dir. a parametresinin çeşitli değerleri için düzenlenmiş tablolar aşağıda verilmiştir.

Tablo 1. $E(X)$ için asimptotik ve simulasyon değerlerin karşılaştırılması

a	$\hat{E}(X)$	$\tilde{E}(X)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
50	24,8506	24,8511	0,0005	0,0021	99,9979
40	19,8547	19,8556	0,0009	0,0043	99,9957
30	14,8613	14,8630	0,0017	0,0112	99,9888
25	12,3667	12,3689	0,0022	0,0177	99,9823
20	9,8745	9,8778	0,0033	0,0332	99,9668
15	7,3866	7,3926	0,0060	0,0811	99,9189
10	4,9096	4,9222	0,0126	0,2571	99,7429
9	4,4167	4,4321	0,0154	0,3486	99,6514
8	3,9253	3,9444	0,0191	0,4877	99,5123
7	3,436	3,4603	0,0243	0,7077	99,2923
6	2,9492	2,9815	0,0323	1,0946	98,9054
5	2,4667	2,5111	0,0444	1,8004	98,1996

Tablo 2. $E(X^2)$ için asimptotik ve simulasyon değerlerin karşılaştırılması

a	$\hat{E}(X^2)$	$\tilde{E}(X^2)$	Δ_2	$\delta_2(\%)$	$AP_2(\%)$
50	839,9102	839,9259	0,0157	0,0019	99,9981
40	538,7935	538,8148	0,0213	0,0040	99,9960
30	304,3308	304,3704	0,0396	0,0130	99,9870
25	212,1085	212,1481	0,0396	0,0187	99,9813
20	136,5461	136,5926	0,0465	0,0340	99,9660
15	77,6375	77,7037	0,0662	0,0853	99,9147
10	35,3891	35,4815	0,0924	0,2610	99,7390

Tablo 2'nin devamı

9	28,9346	29,0370	0,1024	0,3540	99,6460
8	23,1462	23,2593	0,1131	0,4885	99,5115
7	18,0227	18,1481	0,1254	0,6961	99,3039
6	13,5611	13,7037	0,1426	1,0516	98,9484
5	9,7623	9,9259	0,1636	1,6761	98,3239

Tablo 3. $E(X^3)$ için asimptotik ve simulasyon değerlerin karşılaştırılması

a	$\hat{E}(X^3)$	$\tilde{E}(X^3)$	Δ_3	$\delta_3(\%)$	$AP_3(\%)$
50	31945,7488	31945,8333	0,0845	0,0003	99,9997
40	16456,4635	16456,6667	0,2032	0,0012	99,9988
30	7016,9227	7017,5000	0,5773	0,0082	99,9918
25	4097,5679	4097,9167	0,3488	0,0085	99,9915
20	2128,0542	2128,3333	0,2791	0,0131	99,9869
15	920,9007	921,2500	0,3493	0,0379	99,9621
10	288,8905	289,1667	0,2762	0,0956	99,9044
9	214,9656	215,2500	0,2844	0,1323	99,8677
8	155,0685	155,3333	0,2648	0,1708	99,8292
7	107,6806	107,9167	0,2361	0,2192	99,7808
6	71,2859	71,5000	0,2141	0,3003	99,6997
5	44,4067	44,5833	0,1766	0,3978	99,6022

Tablo 4. $E(X^4)$ için asimptotik ve simulasyon değerlerin karşılaştırılması

a	$\hat{E}(X^4)$	$\tilde{E}(X^4)$	Δ_4	$\delta_4(\%)$	$AP_4(\%)$
50	1296443,51	296388,8889	54,6213	0,0042	99,9958
40	36392,7607	536355,5556	37,2051	0,0069	99,9931
30	72717,3743	172700,0000	17,3743	0,0101	99,9899
25	84534,5617	84513,8889	20,6728	0,0245	99,9755
20	35440,5825	35422,2222	18,3603	0,0518	99,9482
15	11687,9638	11675,0000	12,9638	0,1109	99,8891
10	2532,0615	2522,2222	9,8393	0,3886	99,6114
9	1717,021	1708,2000	8,8210	0,5137	99,4863
8	1118,9103	1110,7556	8,1547	0,7288	99,2712
7	694,5987	687,0889	7,5098	1,0812	98,9188
6	405,9462	399,2000	6,7462	1,6618	98,3382
5	219,9069	213,8889	6,0180	2,7366	97,2634

Not: Tablo 1, 2, 3 ve 4'den göründüğü gibi a parametresinin 7'den büyük tüm değerleri için asimptotik değerler ile simulasyon değerler arasındaki uyum yüzdeleri %99'un üzerindedir. Dolayısıyla, Teorem 2.2.4.1'de ortaya konulan asimptotik açılımlardan elde edilen yaklaşık değerler simulasyon değerlere çok büyük uyum sağlamaktadır. Bu ise şu anlama gelir, Teorem 2.2.4.1 'de ergodik momentler için elde edilen açılımlar a parametresinin çok da büyük olmayan değerlerinde bile ergodik momentlerin kesin ifadelerinin yerine güvenli bir şekilde kullanılabilir olacağını gösterir.

2.2.6. X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımı İçin Zayıf Yakınsama Teoremi

Bu kısımda, Normal Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreçi için zayıf yakınsaklık teoremi ifade edilecek ve ispatı verilecektir. 2.2.4. bölümde, Normal Müdahaleli Ödüllü

Yenileme sürecinin $(X(t))$ ergodik dağılımının n. momentleri için üç terimli genel asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Bu açılımın baş teriminin

$$E(X^n) \sim \frac{a^n}{n+1}, \text{ n=1,2,3,...}$$

şeklinde olduğu ve $\frac{a^n}{n+1}$ ifadesinin de $[0,a]$ aralığında Düzgün dağılıma sahip bir rasgele değişkenin n. momenti ile aynı olduğu gözlemlenmektedir. Bu bilgi bize $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının Düzgün dağılıma yakın olabileceğine işaret etmektedir. Bu nedenle, bu çalışmada $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının Düzgün dağılıma yakınsadığı gösterilecektir.

Bunun için, önce $Y_a(t) \equiv \frac{X(t)}{a}$ süreci tanımlansın ve $Y_a(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunu $Q_Y(y)$ ile gösterilsin, yani

$$Q_Y(y) = \lim_{t\to\infty} P\{Y_a(t) \le y\}$$

olsun. $X(t)$ sürecinin her bir periyottaki grafiği monoton artmayan olduğuna göre, n. devredeki değerleri 1 olasılığı ile ζ_{n-1}' den büyük değildir. Diğer taraftan, ζ_n rasgele değişkenleri $[0,\infty)$ aralığında (a,σ^2) parametreli Normal dağılıma sahip oldukları için her $\varepsilon \ge 0$ için öyle bir $0 < K_\varepsilon < \infty$ sabiti bulmak mümkündür ki,

$$P\{0 \le \zeta_n \le a + K_\varepsilon \sigma\} \ge 1-\varepsilon$$

olsun. Bu nedenle, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir sonlu K_ε sabiti vardır ki,

$$P\left\{0 \le X(t) \le a + K_\varepsilon \sigma\right\} \ge 1-\varepsilon$$

dır. Bu takdirde,

$$P\left\{0 \le \frac{X(t)}{a} \le 1 + \frac{K_\varepsilon \sigma}{a}\right\} \ge 1-\varepsilon;$$

$$P\left\{0 \le Y_a(t) \le 1 + \frac{K_\varepsilon \sigma}{a}\right\} \ge 1-\varepsilon$$

Dolayısıyla, $a \to \infty$ iken, $P\{Y_a(t) \ge 1\} \to 0$'dır. Özetle, $a \to \infty$ iken, 1 olasılığı ile $Y_a(t) \in [0,1]$ olur. Bu nedenle, Zayıf Yakınsama Teoremini ispatlamak için $Q_Y(y)$ dağılım fonksiyonunun $y \in (0, 1)$ aralığında yakınsadığı limiti bulmak yeterli olacaktır.

Teorem 2.2.6.1 (Zayıf Yakınsama Teoremi). $a \to \infty$ iken, $\frac{\sigma}{a} \to 0$ koşulu altında $Y_a(t)$ sürecinin dağılım fonksiyonu ($Q_Y(y)$), $[0,1]$ aralığında Düzgün dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsar, yani her $y \in (0, 1)$ için $a \to \infty$ iken, $Q_Y(y) \to y$ olur.

İspat: Normal müdahaleli Ödüllü Yenileme sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu ($Q_X(x)$) için aşağıdaki kesin ifade, Önerme 2.2.3.2'de aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$Q_X(x) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \le x\} = 1 - \frac{E(U_\eta(\zeta_1 - x))}{K + E(U_\eta(\zeta_1))} \tag{215}$$

Burada $K = E(\theta_1)/E(\xi_1)$ gecikme katsayısı; $U_\eta(z)$ ise η_1 rasgele değişkenin dağılımının ürettiği yenileme fonksiyonudur. Ayrıca, ζ_1 rasgele değişkeni kesikli müdahaleyi ifade etmekte olup, $[0,\infty)$ aralığında normal dağılıma sahiptir, yani $\forall x \in (0, \infty)$ için ζ_1 rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{\zeta_1}(x) = \frac{1}{\sigma C(a,\sigma)} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

dır. Burada $C(a,\sigma) = 1 - \int_{a/\sigma}^{\infty} \varphi(u)du \sim 1 - \frac{\varphi(a/\sigma)}{a/\sigma}$ dır. $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u^2/2)$, $u \in R$, ise standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

$$P\{Y_a(t) \le y\} = P\left\{\frac{X(t)}{a} \le y\right\} = P\{X(t) \le ay\}$$

olduğuna göre,

$$Q_Y(y) = \lim_{t\to\infty} P\left\{Y_a(t) \le y\right\} = Q_X(ay)$$

olur. Bu takdirde,

$$Q_Y(y) = 1 - \frac{E(U_\eta(\zeta_1 - ay))}{K + E(U_\eta(\zeta_1))} \tag{216}$$

kesin ifadesi elde edilir.Yardımcı teorem 2.2.4.1'de , $a \to \infty$ iken,

$$E(U_\eta(\zeta_1)) = \frac{a}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(1) \tag{217}$$

olduğun gösterilmişti. Şimdi de, $a \to \infty$ iken $E(U_\eta(\zeta_1 - ay))$ ifadesinin asimptotik davranışı ele alınsın. $Y_a(t)$ süreci $a \to \infty$ iken 1 olasılığı ile [0,1] aralığından değerler aldığı için, $y \in (0, 1)$ kabul edilir. Bu durumda, her $y \in (0, 1)$ için

$$E(U_\eta(\zeta_1 - ay)) = \int_0^\infty U_\eta(z - ay)\frac{1}{\sigma C(a,\sigma)}\varphi\left(\frac{z-a}{\sigma}\right)dz \tag{218}$$

olur. Yenileme fonksiyonu $U_\eta(v)$ negatif değerlerde sıfır olduğuna göre (218) eşitliğini aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E(U_\eta(\zeta_1 - ay)) = \int_{ay}^\infty U_\eta(z - ay)\frac{1}{\sigma C(a,\sigma)}\varphi\left(\frac{z-a}{\sigma}\right)dz \tag{219}$$

$z - ay = x$ değişken dönüşümünü yapılırsa,

$$E(U_\eta(\zeta_1 - ay)) = \int_0^\infty U_\eta(x)\frac{1}{\sigma C(a,\sigma)}\varphi\left(\frac{x - a(1-y)}{\sigma}\right)dx \tag{220}$$

olur. (220) ifadesi iki toplanan şeklinde yazılırsa:

$$E(U_\eta(\zeta_1 - ay)) = \int_0^{(1-y)a} U_\eta(x)\frac{1}{\sigma C(a,\sigma)}\varphi_\sigma((x-(1-y)a))dx$$

$$+ \int_{(1-y)a}^\infty U_\eta(x)\frac{1}{\sigma C(a,\sigma)}\varphi_\sigma((x-(1-y)a))dx \tag{221}$$

olur. Burada $\varphi_\sigma(z) = \varphi(\frac{z}{\sigma})'$ dır. (221) eşitliğindeki birinci toplananı kısalık için $J_1(a)$ ile, ikinci toplanan ise $J_2(a)$ ile gösterilsin ve bu integrallerin asimptotik davranışları ayrı ayrı incelensin.

$$J_1(a) = \int_0^{(1-y)a} U_\eta(x)\frac{1}{\sigma C(a)}\varphi_\sigma((x-(1-y)a))dx$$

$$= \frac{1}{\sigma C(a)} U_\eta\left((1-y)a\right) * \varphi_\sigma((1-y)a)$$

‘dir. $J_1(a)$ integralinin asimptotik davranışını incelemek için

$$M(x) \equiv \int_0^x U_\eta(z)\varphi_\sigma(x-z)dz \equiv U_\eta(x) * \varphi_\sigma(z)$$

fonksiyonunun, $x \to \infty$ iken, davranışını incelemek yeterli olacaktır. Laplace dönüşümünü uygulayarak, $M(x)$ integrali ile ilgili aşağıdaki önerme ispatlanmıştır. ■

Önerme 2.2.6.1. $x \to \infty$ iken, $M(x)$ integrali için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$M(x) = \frac{\sigma}{2m_1}x + \frac{m_2\sigma}{4m_1^2} - \frac{\sigma^2}{m_1\sqrt{2\sigma}} + o(1) \quad ■$$

Bu önermeden yola çıkarak ve $C(a,\sigma) = 1 - \int_{a/\sigma}^{\infty} \varphi(u)du \sim 1 - \frac{\varphi(a/\sigma)}{a/\sigma} \sim 1$ asimptotik denkliğini göz önünde bulundurarak, $a \to \infty$ iken $\frac{\sigma}{a} \to 0$ koşulu altında, her $y \in (0, 1)$ için

$$J_1(a) \equiv \frac{1}{\sigma C(a,\sigma)} M((1-y)a)$$

$$= \frac{1}{\sigma C(a,\sigma)}[\frac{\sigma(1-y)a}{2m_1} + O(1)] = \frac{(1-y)a}{2m_1 C(a,\sigma)} + O(1) = \frac{(1-y)a}{2m_1} + O(1) \tag{222}$$

olduğu görülür. $J_2(a)$ integralinin asimptotik davranışı incelenirse,

$$J_2(a) \equiv \int_{(1-y)a}^{\infty} U_\eta(x) \frac{1}{\sigma C(a,\sigma)} \varphi_\sigma(x-(1-y)a)dx$$

$y \in (0,1)$ ve $a \to \infty$ olduğu için $x \geq (1-y)a$ değerinde, yenileme teoremine göre,

$$U_\eta(x) \sim \frac{x}{m_1}$$

'dir. Dolayısıyla, her $y \in (0,1)$ ve $a \to \infty$ olduğunda

$$J_2(a) \sim \frac{1}{m_1} \int_{(1-y)a}^{\infty} x \frac{1}{\sigma C(a,\sigma)} \varphi_\sigma(x-(1-y)a)dx$$

'dir. Burada $u = x - (1-y)a$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$J_2(a) \sim \frac{1}{m_1} \int_0^{\infty} [u+(1-y)a] \frac{1}{\sigma C(a,\sigma)} \varphi_\sigma(u)du$$

$$= \frac{1}{m_1} \int_0^{\infty} [\sigma v+(1-y)a] \frac{1}{C(a,\sigma)} \varphi(v)dv$$

$$= \frac{1}{m_1} \left\{ \frac{(1-y)a}{C(a,\sigma)} \int_0^{\infty} \varphi(x)dx + \frac{\sigma}{C(a,\sigma)} \int_0^{\infty} x\varphi(x)dx \right\} \tag{223}$$

olur.

$$\int_0^{\infty} \varphi(x)dx = \frac{1}{2}; \int_0^{\infty} x\varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

olduğu bilinmektedir. Bu nedenle, (223) ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$J_2(a) \sim \frac{1}{m_1} \left\{ \frac{(1-y)a}{2C(a,\sigma)} + \frac{\sigma}{C(a,\sigma)\sqrt{2\pi}} \right\} \tag{224}$$

$a \to \infty$ ve $\frac{\sigma}{a} \to 0$ koşulu altında

$C(a,\sigma^2) = 1 - \int_{a/\sigma}^{\infty} \varphi(u)du \sim 1 - \frac{\sigma}{a}\varphi(\frac{a}{\sigma}) \sim 1$ olduğuna göre, (224) ifadesini aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$J_2(a) = \frac{(1-y)a}{2m_1} + O(1). \tag{225}$$

$J_1(a)$ ve $J_2(a)$ integralleri için (222) ve (225) açılımları (221) eşitliğinde yerine yazılırsa, her $y \in (0,1)$ için $a \to \infty$ iken

$$E(U_\eta(\zeta_1 - ay)) = \frac{(1-y)a}{2m_1} + O(1) + \frac{(1-y)a}{2m_1} + O(1) = \frac{(1-y)a}{m_1} + O(1) \tag{226}$$

açılımı elde edilir. (217) ve (226) açılımlarından yararlanarak aşağıdaki açılımı bulunur:

$$\frac{E(U_\eta(\zeta_1 - ay))}{K + E(U_\eta(\zeta_1))} = \frac{\frac{(1-y)a}{m_1}}{\frac{a}{m_1} + K + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(1)} = 1 - y + O(\frac{1}{a}) \tag{227}$$

(227) açılımını (216) kesin ifadesinde göz önüne alınırsa,

$$Q_Y(y) = 1 - \left[1 - y + O(\tfrac{1}{a})\right] = y + O(\tfrac{1}{a})$$

olduğu görülür. Buradan,

$$\lim_{a\to\infty} Q_Y(y) = y$$

olduğu elde edilir. Bu da $Y_a(t)$ sürecinin ergodik dağılımının $[0,1]$ aralığında Düzgün dağılıma yakınsadığını ispatlar. Böylece Zayıf Yakınsama Teoremi ispatlanmış olur. ■

Not: $a \to \infty$ iken $\frac{\sigma}{a} \to 0$ sağlandığında, $Q_Y(y) \to y$ olduğuna göre, $Q_X(x) \sim \frac{x}{a}$ olduğu ortaya çıkar. Buradan aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Teorem 2.2.6.2. Teorem 2.2.6.1'in koşulları altında, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı, $a \to \infty$ iken, $[0,a]$ aralığında Düzgün dağılıma denktir, yani $Q_X(x) \sim \frac{x}{a}$'dır. ■

Böylece bu bölümün temel amacına ulaşılır.

2.2.7. Normal Müdahaleli Ödüllü Yenileme Sürecinin Sınır Fonksiyonellerinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi

Bu kısımda, Normal müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin iki sınır fonksiyonelini ele alınır ve onların sınır fonksiyonelleri matematiksel olarak inşa edilir.

$\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$, $n = 1,2,3,...$ dizileri $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış iki bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Ayrıca, $\{Y_n\}$, $n = 0,1,2,...$ dizisi de bu olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız ve aynı (a,σ^2) parametreli Normal dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. ξ_n ve η_n rasgele değişkenleri pozitif değerli olsun. $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenler dizilerinden yararlanılarak, $\{T_n\}$ ve $\{S_n\}$ yenileme dizileri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, , \; S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \, , \; n \geq 1, \; T_0 = S_0 = 0 .$$

Şimdi de aşağıdaki tam değerli rasgele değişkenleri tanımlansın:

$$N_0 \equiv 0 \; ; \; N_1(z) = \inf \{ \, k \geq 1; \; z - S_k < 0 \, \} \; ;$$

$$N_1 \equiv N_1(\zeta_1) = \inf \{ \, k \geq 1; \; \zeta_1 - S_k < 0 \, \} \; ;$$

$$N_n = \inf \left\{ k \geq N_{n-1} + 1 : \zeta_n - S_k + S_{N_{n-1}} < 0 \right\}, \; n = 2,3,...,$$

burada $\zeta_n = \max\{0, Y_n\}, n = 1,2,3,...$ ve $\inf\{\varnothing\} = +\infty$ 'dur.

Bundan başka, $\nu(t) = \max\{ n \geq 0 : \; T_n \leq t \}, \; t > 0 \, ; \tau_0 \equiv 0;$

$$\tau_1(z) = T_{N_1(z)} = \sum_{i=1}^{N_1(z)} \xi_i \;\; ; \;\; \tau_1 \equiv \tau_1(\zeta_1) = T_{N_1(\zeta_1)} = \sum_{i=1}^{N_1(\zeta_1)} \xi_i \;\; ;$$

$$\tau_n = T_{N_n} = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i \; ; \; n \geq 2$$

olsun. Bu çalışmanın temel amacı, $X(t)$ sürecinin iki önemli sınır fonksiyoneli olan $N_1(\zeta_1)$ ve $\tau_1(\zeta_1)$ rasgele değişkenlerinin momentlerinin asimptotik davranışını $a \to \infty$ iken incelemektir.

Çalışmanın temel sonuçlarını vermek için öncelikle [5] çalışmasında bulunan aşağıdaki önermeden yararlanılır.

Yardımcı Teorem 2.2.7.1 ([5]). $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenler dizisi $E(\eta_1^3)<\infty$ ek koşulunu sağlamış olsun. Bu takdirde, $N_1(z)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için $z \to \infty$ iken aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

1) $E(N_1(z)) = \dfrac{z}{m_1} + A_1 + o(\dfrac{1}{z})$;

burada $A_1 = \dfrac{m_2}{2m_1^2}$; $m_k = E(\eta_1^k)$, k=1,2,3 ‘ tür.

2) $E(N_1^2(z)) = \dfrac{z^2}{m_1^2} + A_2 z + B_2 + o(1)$,

burada $A_2 = \dfrac{2m_2 - m_1^2}{m_1^3}$; $B_2 = \dfrac{3m_2^2 - 4m_1 m_3 - m_1^2 m_2}{2m_1^4}$ ‘dır.

3) $E(N_1^3(z)) = \dfrac{z^3}{m_1^3} + A_3 z^2 + B_3 z + o(z)$,

burada , $A_3 = \dfrac{9m_2 - 6m_1^2}{2m_1^4}$; $B_3 = \dfrac{9m_2^2 - 3m_1 m_3 - 6m_1^2 m_2 + m_1^4}{2m_1^5}$ ‘dır.

4) $E(N_1^4(z)) = \dfrac{z^4}{m_1^4} + A_4 z^3 + B_4 z^2 + o(z^2)$,

burada , $A_4 = \dfrac{8m_2 - 6m_1^2}{m_1^5}$; $B_4 = \dfrac{30m_2^2 - 8m_1 m_3 - 27m_1^2 m_2 + 7m_1^4}{m_1^6}$ ‘dır. ■

$N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için elde edilen sonuçlar aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 2.2.7.1. $E(\eta_1^3)<\infty$, $a \to \infty$ iken $\sigma/a \to 0$ şartları altında, $N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$E(N_1(\zeta_1)) = \frac{a}{m_1} + A_1 + o(\frac{1}{a});$$

$$E(N_1^2(\zeta_1)) = \frac{a^2}{m_1^2} + A_2 a + \left[B_2 + \frac{\sigma^2}{m_1^2}\right] + o(1),$$

$$E(N_1^3(\zeta_1)) = \frac{a^3}{m_1^3} + A_3 a^2 + \left[B_3 + \frac{3\sigma^2}{m_1^3}\right] a + o(a),$$

$$E(N_1^4(\zeta_1)) = \frac{a^4}{m_1^4} + A_4 a^3 + \left[B_4 + \frac{6\sigma^2}{m_1^4}\right] a^2 + o(a^2),$$

Burada $a = E(Y_1)$; $\sigma^2 = Var(Y_1)$ ‘dır. A_1, A_2, A_3, A_4 ve B_2, B_3, B_4 katsayılarının aşikar şekilleri ise yukarıdaki Yardımcı Teorem 2.2.7.1’ de verilmiştir.

İspat: Tanımı gereği, $EN_1(\zeta_1) = \int_0^\infty E(N(z) d\pi(z)$ ’dır. Burada $\pi(z)$ fonksiyonu, $\zeta_1 = \max(0, Y_1)$, $(Y_1 \in N(a, \sigma^2))$, rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonudur ve aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$z \geq 0$ iken $\pi(z) = \Phi\left(\frac{z-a}{\sigma}\right)$;

$z < 0$ iken ise $\pi(z) = 0$

‘dır. Burada $\Phi(u)$ fonksiyonu ile standart normal dağılım fonksiyonu gösterilmiştir. $\pi(z)$ fonksiyonu z=0 noktasında $\Phi(-a/\sigma)$ kadar sıçrama yapan bir dağılım fonksiyonudur.

$$E(N_1(\zeta_1)) = \int_0^\infty E(N_1(z)) d\pi(z) = E(N_1(0))\ \Phi(-a/\sigma) +$$

$$\int_{+0}^\infty E(N_1(z)) \frac{1}{\sigma}\ \varphi\left(\frac{z-a}{\sigma}\right) dz = \Phi(-a/\sigma) + \int_0^\infty E(N_1(z))\ \varphi_\sigma(z-a) dz \qquad (228)$$

Burada, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$ fonksiyonu standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $\varphi_\sigma(u) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$ dır.

Teorem 2.2.7.1’in şartına göre, $a \to \infty$ iken $T \equiv \frac{a}{\sigma} \to \infty$ olur. Dolayısıyla, Mill teoremine göre (bkz., Abramovich and Stegun, [1]),

$$\Phi(-T) = 1 - \Phi(T) = \int_T^\infty \varphi(u) du \sim \frac{\varphi(T)}{T} = \frac{\sigma}{a}\varphi(\frac{a}{\sigma}) = o(1)$$

asimptotik ifadesi yazılabilir.

Kısalık için $M_1(z) \equiv E(N_1(z))$ olsun. Bu notasyonu göz önünde bulundurarak (228)' in sağ tarafındaki ikinci terimi aşağıdaki gibi iki kısma ayrılabilir:

$$\int_0^\infty E\left(N_1(z)\right)\,\varphi_\sigma(z-a)dz = \int_0^a E\left(N_1(z)\right)\,\varphi_\sigma(z-a)dz + \int_a^\infty E\left(N_1(z)\right)\,\varphi_\sigma(z-a)dz =$$

$$\int_0^a M_1(z)\,\varphi_\sigma(a-z)dz + \int_a^\infty M_1(z)\,\varphi_\sigma(z-a)dz = I_{11}(a) + I_{12}(a) \qquad (229)$$

Burada, $I_{11}(a) = M_1(a) * \varphi_\sigma(a); I_{12}(a) = \int_a^\infty E\left(N_1(z)\right)\,\varphi_\sigma(z-a)dz$ 'dir.

(229) eşitliğinin birinci toplananı ele alınsın.

$$I_{11}(a) = M_1(a) * \varphi_\sigma(a) \qquad (230)$$

(230) eşitliğinin iki tarafına a parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\tilde{I}_{11}(\lambda) = \tilde{M}_1(\lambda)\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) \qquad (231)$$

olur. Burada $\tilde{G}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda a}G(a)da$ ile $G(a)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü gösterilmiştir. $\lambda \to 0$ iken $\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\lambda + \frac{\sigma^3}{4}\lambda^2 + o(\lambda^2) \qquad (232)$$

burada σ^2=Var(Y_1) ' dir. Diğer taraftan, Yardımcı Teorem 2.2.7.1'den aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

$$\tilde{M}_1(\lambda) = \frac{1}{m_1\lambda^2} + \frac{A_1}{\lambda} + C_1 + o(1) \qquad (233)$$

Burada, $A_1 = \frac{m_2}{2m_1}$; $C_1 = \frac{m_2^2}{4m_1^2} - \frac{m_3}{6m_1}$ 'dır.

(232) ve (233) açılımlarını (231)' de göz önünde bulundurup gereken hesaplamaları yaparak aşağıdaki açılımının elde edilmesi mümkündür:

$$\tilde{I}_{11}(\lambda) = \tilde{M}_1(\lambda)\tilde{\varphi}_\sigma(\lambda) = \frac{1}{2m_1}\frac{1}{\lambda^2} + \left[\frac{m_2}{4m_1^2} - \frac{\sigma}{m_1\sqrt{2\pi}}\right]\frac{1}{\lambda}$$

$$+\left[\frac{A_1}{2m_1} - \frac{\sigma m_2}{m_1^2\sqrt{2\pi}} + \frac{\sigma^2}{4m_1}\right] + o(1) \qquad (234)$$

(234) açılımına Tauber-Abel teoremini uygulayarak $a \to \infty$ iken aşağıdaki açılım elde edilir:

$$I_{11}(a) = \frac{1}{2m_1}a + \left[\frac{m_2}{4m_1^2} - \frac{\sigma}{m_1\sqrt{2\pi}}\right] + o(1) \tag{235}$$

Şimdi de (229) eşitliğinin ikinci toplananı ele alınsın:

$$I_{12}(a) \equiv \int_a^\infty E(N_1(z))\varphi_\sigma(z-a)dz\,. \tag{236}$$

$$z \to \infty \quad \text{iken} \quad E(N_1(z)) = \frac{z}{m_1} + \frac{m_2}{m_1^2} + o(\frac{1}{z}) \tag{237}$$

olduğu biliniyor. (236) açılımı (237) ‘da göz önüne alınırsa aşağıdaki açılım elde edilir:

$$I_{12}(a) = \frac{1}{2m_1}a + \left[\frac{m_2}{4m_1^2} + \frac{\sigma}{m_1\sqrt{2\pi}}\right] + o(\frac{1}{a})\,. \tag{238}$$

(235) ve (238) açılımları (229) eşitliğinde yerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\int_0^\infty E(N_1(z))\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a}{m_1} + \frac{m_2}{m_1^2} + o(\frac{1}{a})\,. \tag{239}$$

(239) açılımı (228) eşitliğinde dikkate alınırsa;

$$E(N_1(\zeta_1)) = \frac{a}{m_1} + \frac{m_2}{m_1^2} + o(\frac{1}{a}) \quad \text{olur.}$$

Şimdi de ikinci momentin asimptotik davranışı verilebilir. Yardımcı Teorem 2.2.7.1 ’de aşağıdaki asimptotik sonuç elde edilmiştir:

$$E(N_1^2(z)) = \frac{z^2}{m_1^2} + A_2 z + B_2 + o(1)\,. \tag{240}$$

Bu takdirde,

$$E(N_1^2(\zeta_1)) = \int_0^\infty E(N_1^2(z))\varphi_\sigma(z-a)dz + \Phi(-\frac{a}{\sigma}) \tag{241}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\int_0^\infty E(N_1^2(z))\varphi_\sigma(z-a)dz = \int_0^a E(N_1^2(z))\varphi_\sigma(z-a)dz + \int_a^\infty E(N_1^2(z))\varphi_\sigma(z-a)dz$$

$$= \int_0^a M_2(z)\varphi_\sigma(a-z)dz + \int_a^\infty E(N_1^2(z))\varphi_\sigma(z-a)$$

$$= M_2(a) * \varphi_\sigma(a) + \int_a^\infty E(N_1^2(z))\varphi_\sigma(z-a)dz = I_{21}(a) + I_{22}(a) \qquad (242)$$

'dir. Burada, $I_{21}(a) = M_2(a) * \varphi_\sigma(a)$; $I_{22}(a) = \int_a^\infty E(N_1^2(z))\varphi_\sigma(z-a)dz$ 'dır.

Önce $I_{21}(a)$ ele alınsın. Bunun için Yardımcı Teorem 2.2.7.1'de elde edilmiş aşağıdaki asimptotik sonuç kullanılır:

$$M_2(z) \equiv E(N_1^2(z)) = \frac{z^2}{m_1^2} + A_2 z + B_2 + o(1)$$

. $\lambda \to 0$ iken, $M_2(z)$'in Laplace dönüşümü için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$\tilde{M}_2(\lambda) = \frac{2}{m_1^2\lambda^3}(1 + \frac{A_2 m_1^2}{2}\lambda + \frac{B_2 m_1^2}{2}\lambda^2 + o(\lambda^2) \qquad (243)$$

(232) ve (243) açılımlarını $I_{21}(a)$'nın Laplace dönüşümünde göz önünde bulundurarak ve gereken hesaplamaları yaparak aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\tilde{I}_{21}(\lambda) = \frac{1}{m_1^2}\frac{1}{\lambda^3} + (\frac{A_2}{2} - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}m_1^2})\frac{1}{\lambda^2} + (\frac{B_2}{2} - \frac{A_2\sigma}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sigma^2}{2m_1^2})\frac{1}{\lambda} + o(\frac{1}{\lambda}). \qquad (244)$$

(244) açılımına Tauber -Abel teoremi uygulanırsa $a \to \infty$ iken aşağıdaki açılımı elde etmek mümkündür:

$$I_{21}(a) = \frac{a^2}{2m_1^2} + \left(\frac{A_2}{2} - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}m_1^2}\right)a + \left(\frac{B_2}{2} - \frac{A_2\sigma}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sigma^2}{2m_1^2}\right) + o(1). \qquad (245)$$

Şimdi de $I_{22}(a)$ ele alınsın. Bu amaçla aşağıdaki açılımlar kullanılır:

$$\int_a^\infty z^n\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{1}{2}a^n + \frac{n\sigma}{\sqrt{2\pi}}a^{n-1} + \frac{n(n-1)\sigma^2}{4}a^{n-2} + o(a^{n-2}), n = 0,1,2,... \qquad (246)$$

(240) ve (246) açılımları $I_{22}(a)$'nın ifadesinde dikkate alınırsa aşağıdaki açılım yazılabilir:

$$I_{22}(a) = \frac{a^2}{2m_1^2} + \left(\frac{A_2}{2} + \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}m_1^2}\right)a + \left(\frac{B_2}{2} + \frac{A_2\sigma}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sigma^2}{2m_1^2}\right) + o(1). \qquad (247)$$

(245) ve (247) açılımları (242) eşitliğinde yerine yazılarsa aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\int_0^\infty E(N_1^2(z))\varphi_\sigma(z-a)dz = \frac{a^2}{m_1^2} + A_2 a + \left(B_2 + \frac{\sigma^2}{m_1^2}\right) + o(1)$$

ve buradan ikinci moment için üç terimli asimptotik açılıma ulaşılır:

$$E(N_1^2(\zeta_1)) = \frac{a^2}{m_1^2} + A_2 a + \left(B_2 + \frac{\sigma^2}{m_1^2}\right) + o(1).$$

Benzer şekilde, $N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin üçüncü ve dördüncü momentleri için de $a \to \infty$ iken üç terimli asimptotik açılımlar elde edilebilir. Bu da Teorem 2.2.7.1' in ispatını tamamlar. ■

Çalışmanın ikinci kısmında $\tau_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için üç terimli asimptotik açılımların elde edilmesi amaçlanmaktadır. Bunun için [5] çalışmasındaki bir sonuçtan yararlanılır. [5] çalışmasında $\tau_1(z)$ ile $N_1(z)$ sınır fonksiyonellerinin momentleri arasında kesin ilişkiler kurulmuştur. Bu sonuç Yardımcı Teorem şeklinde verilsin:

Yardımcı Teorem 2.2.7.2 ([5]). $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenler dizileri aşağıdaki ek koşulları sağlamış olsun:

$$\text{i)}\, \alpha_4 = E(\xi_1^4) < \infty \;\; ; \text{ii)}\; m_3 = E\left(\eta_1^3\right) < \infty .$$

Bu durumda, $\tau_1(z)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti, $N_1(z)$ sınır fonksiyonelinin aynı momentleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

1) $E(\tau_1(z)) = \alpha_1 E(N_1(z))$,

2) $E(\tau_1^2(z)) = \alpha_1^2 E(N_1^2(z)) + \left(\alpha_2 - \alpha_1^2\right) E(N_1(z))$,

3) $E(\tau_1^3(z)) = \alpha_1^3 E(N_1^3(z)) + 3\alpha_1\left(\alpha_2 - \alpha_1^2\right) E(N_1^2(z)) + \left(2\alpha_1^3 - 3\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_3\right) E(N_1(z))$,

4) $E(\tau_1^4(z)) = \alpha_1^4 E(N_1^4(z)) + 6\alpha_1^2\left(\alpha_2 - \alpha_1^2\right) E(N_1^3(z)) +$

$\left(11\alpha_1^4 - 18\alpha_1^2\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2\right) E(N_1^2(z)) + \left(\alpha_4 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_2^2 - 6\alpha_1^4\right) E(N_1(z))$.

Burada $\alpha_k = E\left(\xi_1^k\right)$ k=1,2,3,4 'tür. ■

Nihayet, Teorem 2.2.7.1 ve Yardımcı Teorem 2.2.7.2' den yararlanarak $\tau_1 \equiv \tau_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin asimptotik davranışı hakkında aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.2.7.2. Aşağıdaki ek koşullar sağlanmış olsunlar:

i) $E(\xi_1^4) < \infty$; ii) $E(\eta_1^3) < \infty$; iii) $a \to \infty$ iken $\sigma/a \to 0$ olsun.

Bu takdirde, $a \to \infty$ iken, $\tau_1 \equiv \tau_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımları yazmak mümkündür:

1) $E(\tau_1(\zeta_1)) = \frac{\alpha_1}{m_1} a + \frac{m_2}{2m_1^2}\alpha_1 + o(\frac{1}{a})$,

2) $E(\tau_1^2(\zeta_1)) = \frac{\alpha_1^2}{m_1^2} a^2 + \left[\left(A_2 - \frac{1}{m_1}\right)\alpha_1^2 + \frac{\alpha_2}{m_1}\right]a + \left[\left(B_2 - A_1 + \frac{\sigma^2}{m_1^2}\right)\alpha_1^2 + A_1\alpha_2\right] + o(1)$,

3) $E(\tau_1^3(\zeta_1)) = \frac{\alpha_1^3}{m_1^3} a^3 + \left[\frac{\left(A_3 m_1^2 - 3\right)\alpha_1^3 + 3\alpha_1\alpha_2}{m_1^2}\right]a^2 +$

$$\left\{\left[B_3 + \frac{3\sigma^2}{m_1^3} - 3A_2 + \frac{2}{m_1}\right]\alpha_1^3 + \frac{3A_2 m_1\alpha_1\alpha_2 - 3\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_3}{m_1}\right\}a + o(a),$$

4) $E(\tau_1^4(\zeta_1)) = \frac{\alpha_1^4}{m_1^4} a^4 + \left(A_4\alpha_1^4 + \frac{6\alpha_1^2\left(\alpha_2 - \alpha_1^2\right)}{m_1^3}\right)a^3 +$

$$\left[\left(B_4 + \frac{6\sigma^2}{m_1^4}\right)\alpha_1^4 + 6\alpha_1^2\left(\alpha_2 - \alpha_1^2\right)A_3 + \frac{11\alpha_1^4 - 18\alpha_1^2\alpha_2 + 3\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_3}{m_1^2}\right]a^2 + o(a^2),$$

burada $\alpha_n = E(\xi_1^n)$, $m_n = E(\eta_1^n)$, $n = 1, 2, 3$ 'tür.

A_n ve B_n katsayılarının aşikar şekilleri de Yardımcı Teorem 2.2.7.1' in ifadesinde verilmiştir.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 2.2.7.1 ile Yardımcı Teorem 2.2.7.2 ([5]) 'in birlikte uygulaması sonucunda, uygun hesaplamalar yapılarak elde edilir. ■

3. BULGULAR

Bu çalışmada Yarı-Markov süreçlerinin önemli iki sınıfı olan ”Normal Müdahaleli Yarı – Markov Rasgele Yürüyüş Süreci” ve “Normal Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci” ele alınmıştır. Bu süreçlerin matematiksel tanımı verilmiş ve süreçler için ergodik teoremler ispat edilmiştir. Ayrıca, süreçlerin ergodik dağılım fonksiyonlarının kesin ifadeleri bulunmuştur. Normal Müdahaleli Yarı – Markov Rasgele Yürüyüş Süreci’ nin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyoneli yardımıyla ifade edilmiştir. Buna ek olarak ele alınan süreçlerin sınır fonksiyonellerinin momentleri için üç terimli asimptotik açılımlar ortaya konulmuştur. Daha sonra Normal Müdahaleli Yarı – Markov Rasgele Yürüyüş Süreci’ nin ergodik dağılımının ilk dört momenti, Normal Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci’ nin ise ergodik dağılımının tüm momentleri için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Her iki sürecin ergodik dağılımları için zayıf yakınsama teoremleri ispatlanmıştır. Ayrıca, Normal Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci için Monte Carlo simülasyon yöntemi uygulanarak, ergodik momentlerin değerleri elde edilmiş ve asimptotik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda elde edilen asimptotik açılımların simülasyon sonuçlarına yeterince yakın oldukları tespit edilmiştir. Özellikle $a > 7$ olduğunda uyum yüzdesinin %99’ un üzerinde olduğu gözlemlenmiştir.

4. İRDELEME

Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreçleri ile ilgili literatürde birçok önemli çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmaların birçoğundaki sonuçlar teorik bakımdan önemli olsalar da uygulamanın ihtiyacını karşılayabilecek nitelikte değillerdir. Buna karşın kesin ifadeleri içeren ve uygulama için yararlı olabilecek çalışmalar da vardır. Fakat bu güne kadar bu süreçler her yönüyle araştırılmış değillerdir. Bunun temel nedeni, bu süreçlerin olasılık ve sayısal karakteristiklerinin çok karmaşık bir matematiksel yapıya sahip olmasıdır. Özellikle, müdahaleyi ifade eden rasgele değişkenler yeterince geniş bir sınıfa ait olduklarında sürecin temel karakteristikleri için kullanılabilir formüllerin elde edilmesi çok zordur. Literatürde, son yıllarda asimptotik yöntemler uygulanarak yaklaşık, fakat pratik öneme sahip olan asimptotik sonuçlar elde etmeğe yönelik birçok değerli çalışmalar ortaya konulmuştur. Bu sonuçlar genellikle rasgele yürüyüş sürecinin sınır fonksiyonelleri ile ilgilidirler. Fakat birçok pratik problemin çözümünde sınır fonksiyonellerinin yanı sıra sürecin ergodik dağılımının bilinmesi de büyük önem taşımaktadır. Bu konuda son yıllarda bazı önemli çalışmalar yapılmıştır. Örneğin, T. Kesemen' in doktora tezinde Üstel, Erlang ve Gamma müdahaleli rasgele yürüyüş süreçlerinin ergodik dağılımlarının ilk dört momenti için asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Bu açılımların elde edilmesinde Laplace dönüşümü geniş bir biçimde kullanılmıştır. Fakat "müdahale" Gamma sınıfından farklı bir sınıfa ait oluğunda sadece Laplace dönüşümü yöntemi yeterli olmamaktadır. Bu durumda, farklı integral dönüşümleri kullanarak asimptotik sonuçlara ulaşmak mümkündür. Bu nedenle, bu tezde Normal müdahaleye sahip yarı-Markov süreçlerinin iki önemli alt sınıfı (Normal Müdahaleli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreci ve Normal Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci) ele alınmış ve çeşitli integral dönüşümleri yardımıyla incelenmiştir.

Rasgele faktörlerin etkisi altında değişen ve değişimi stokastik süreçlerle ifade edilebilen birçok dinamik sisteme, gerektiğinde "dışarıdan müdahale edilmesi" eylemi, çoğu zaman, birçok faktörün toplam etkisi altında oluşmaktadır. Dolayısıyla, "müdahale" kararları verilirken birçok faktörün toplam etkisi göz önünde bulundurularak verilmektedir. Diğer taraftan, Merkezi Limit Teoremi' ne göre, etki gösteren faktörlerin sayısı arttıkça "müdahale" yi ifade eden rasgele değişkenin dağılımı, yaklaşık da olsa, normal dağılıma yakınsayacaktır. Bu nedenle, çok sayıda rasgele faktörlerin etkisi altında faaliyet gösteren sistemler için "müdahale" nin Normal dağılıma sahip olduğunu varsaymak, bilimsel açıdan mantıklı ve pratik açıdan maksada uygundur. Fakat Normal müdahaleli süreçlerin incelenmesi, matematiksel olarak, diğer müdahaleli süreçlere göre çok daha zordur. Bunun da nedeni süreçlerin olasılık karakteristiklerini incelerken karşıya çıkan asimptotik davranışlarının incelenmesinin matematiksel zorluklarıdır. Bu nedenle, Normal müdahaleli süreçlerin incelenmesi hem bilimsel, hem de pratik öneme sahiptir. Bu çalışmada asimptotik yöntemler kullanarak, Normal Müdahaleli Rasgele Yürüyüş Süreci' nin ve Normal Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci' nin olasılık ve sayısal karakteristikleri için pratik öneme sahip asimptotik ifadeler elde edilmiştir.

Bu çalışma kapsamında incelenen modelde bazı değişikliklerin yapılabilmesi mümkündür. Örneğin, bu çalışmada kullanılan analitik ve asimptotik yöntemler iki bariyerli yarı - Markov süreçlerine de uygulanarak önemli asimptotik sonuçlar elde edilebilir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, “Normal Müdahaleli Yarı – Markov Rasgele Yürüyüş Süreci” ve “Normal Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci” ele alınmış ve bu süreçler için aşağıdaki teorik sonuçlar elde edilmiştir.

1) Normal Müdahaleli Rasgele Yürüyüş Süreci’ nin ergodik dağılımı ve karakteristik fonksiyonu için kesin ifadeler bulunmuştur.
2) Ergodik dağılımın karakteristik fonksiyonu, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyoneli yardımıyla ifade edilmiştir.
3) $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir.
4) Sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin ifadeler bulunmuştur.
5) Normal Müdahaleli Yarı – Markov Rasgele Yürüyüş Süreci’ nin ergodik dağılımının ilk dört momenti için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir.
6) Normal Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci’ nin ergodik dağılımının tüm momentlerinin kesin ifadeleri bulunmuştur.
7) Sürecin ergodik dağılımının tüm momentleri için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir.
8) Her iki sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremleri ispat edilmiş ve limit dağılımın aşikar şekli bulunmuştur.

6. ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmanın, Yarı - Markov Süreçleri teorisindeki bir eksikliği giderebileceği umulmaktadır. Bununla beraber bu çalışmanın aşağıdaki yönlerde de geliştirilebilmesi mümkündür:

1. Kesikli müdahaleyi ifade eden rasgele değişkenin dağılımını, Normal dağılım sınıfından daha geniş bir sınıftan seçerek benzer süreçlerin analitik ve asimptotik özelliklerinin incelenmesi.
2. Sıçrama miktarlarını ifade eden (η_i) rasgele değişkenlerin, sıçramalar arasında geçen sürelere (ξ_i) bağımlı olduğu durumda benzer problemin martingaller yöntemi ile incelenmesi.
3. Yakınsama teoremlerinde yakınsama hızının bulunması üzerine çalışmaların yapılması.
4. Ele alınan süreçler için toplamsal fonksiyonellerin olasılık karakteristiklerinin bulunması.
5. Sonsuz varyanslı rasgele değişkenler için benzer problemlerin incelenmesi.
6. Bu çalışmadaki analitik ve asimptotik yöntemleri kullanarak benzer problemlerin iki bariyerli yarı-Markov süreçleri için çözülmesi.
7. Elde edilen sonuçların stok kontrol, güvenirlik, kuyruk teorisi, sigorta, finans gibi diğer pratik alanlara uygulanması.

7. KAYNAKLAR

1. Abramowitz, M. and Stegun, I.A., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Wiley, New York, 1964.

2. Afanasyeva, L .G. and Bulinskaya, E. V., Stochastic Processes in the Theory of Queues and Inventory Control, Moscow, 1980.

3. Afanasyeva, L.G. and Bulinskaya, E.V., Storage capacity optimization, Engineering Cybernetics, 19, 5 (1981) 49-57.

4. Afanasyeva, L.G. and Bulinskaya, E. V., Some asymptotic results for random walks in a strip, Theory of Probability and Its Applications, 29, 4 (1984) 654-668.

5. Aliyev, R., Okur Bekar, N., Khaniyev, T. and Unver, I., Asymptotic expansions for the moments of the boundary functionals of the renewal reward process with a discrete interference of chance, Mathematical and Computational Applications, 15**,** (2010) 117-126.

6. Alsmeyer, G., Some relations between harmonic renewal measure and certain first passage times, Statistics and Probability Letters, 12, 1 (1991) 19-27.

7. Anisimov, V.V., Diffusion approximation in switching stochastic models and its applications, In: Exploring Stochastic Laws, eds., A.V.Skorohod and Yu.V. Borovskikh, VSP, Zeist, The Netherlands, (1995) 13-40.

8. Anisimov, V.V., Averaging methods for transient regimes in overloading retrial queuing systems, Mathematical and Computational Modelling, 30, 3-4 (1999) 65-78.

9. Anisimov, V.V. and Artalejo, J.R., Analysis of Markov multi-server retrial queues with negative arrivals, Queuing Systems: Theory and Applications, 39, 2-3 (2001) 157-182.

10. Aras, G. and Woodroofe, M., Asymptotic expansions for the moments of a randomly stopped average, Annals of Statistics, 21 (1993) 503-519.

11. Asmussen, S., Applied Probability and Queues, Wiley, New York, 1987.

12. Borovkov, A.A., On the first passage time for one class of processes with independent increments, Theory of Probability and its Appl., 10 (1965) 331-334.

13. Borovkov, A.A., Theory of Probability, Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).

14. Borovkov, A.A., Stochastic Processes in Queuing Theory, Springer, New York, 1976.

15. Borovkov, A.A., Asymptotic Methods in Queuing Theory, Wiley, New York, 1984.

16. Brown, M. and Ross, S.M., Asymptotic properties of cumulative processes, SIAM Journal of Applied Mathematics, 22, 1 (1972) 93-105.

17. Brown, M. and Solomon, H., A second-order approximation for the variance of a renewal-reward process, Stochastic Processes and Applications, 3 (1975) 301- 314.

18. Chang, J.T., On moments of the first ladder height of random walks with small drift, Annals of Applied Probability, 2 (1992) 714-738.

19. Chang, J.T. and Peres, Y., Ladder heights, Gaussian random walks and the Riemann zeta function, Annals of Probability, 25 (1997) 787-802.

20. Çınlar, E., Some joint distributions for Markov renewal processes, Australian Journal of Statistics, 10, 1 (1986).

21. Çınlar, E., Markov renewal theory, Adv.Appl.Probab.,1 (1975) 123-187.

22. Çınlar, E., Introduction to Stochastic Processes, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

23. Denuit, M., Lefevre, Cl. and Picard, Ph., Polynomial structures in order statistics distributions, Journal of Statistical Planning and Inference, 113(2003) 151-178.

24. El-Shehawey, M. A., Limit distribution of first hitting time of delayed random walk, J. Ind. Soc. Oper.Res., 13, 1-4 (1992) 63-72.

25. Ezhov, I. I. and Korolyuk, V.S., Semi-Markovian processes and their applications, Cybernetica, 5 (1967) 58-65.

26. Ezhov, I.I. and Shurenkov, V.S., Ergodic theorems connected with the Markov property of random processes, Theory of Probability and Its Applications, 21 (1977) 620-624.

27. Federyuk, M. V., Asymptotics for integrals and Series, Nauka, Moscow, 1984.

28. Feller, W., On semi-Markov Process, Proceedings of National Academy of Sciences, USA, 51, 4 (1964) 130-145.

29. Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications II, J. Wiley, New York, 1971.

30. Gihman, I. I. and Skorohod, A.V., Theory of Stochastic Processes II, Springer-Verlag, New York, 1975.

31. Gnedenko, I. I. and Kovalenko, I. N., Introduction to Queuing Theory, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1968.

32. Goovaerts M., Dhaene J. and De Schepper A., Stochastic upper bounds for present value functions, Journal of Risk and Insurance , 67, 1 (2000) 1-14.

33. Grubel, R., On harmonic renewal measures, Probability Theory and Related Fields, 71 (1986) 393-403.

34. Gusak, D.V. and Korolyuk, V. S., On the first passage time across a given level for processes with independent increments, Theory of Probability and Its Applications, 13 (1968) 448-456.

35. Gusak, D. V., On the joint distribution of the first exit time and exit value for homogeneous process with independent increments, Theory of Probability and Its Applications, 14 (1969) 14-23.

36. Gusak, D.V. and Korolyuk, V. S., On the joint distribution of the Process with stationary movements and its maximum, Theory Probability and Its Applications, 14 (1969) 400-469.

37. Harlamov, B. P., On convergence of semi-Markov walks to a continuous semi-Markov process, Theory of Probability and Its Applications, 21 (1977) 482-498.

38. Jewell, W. S., Fluctuation of a Renewal-Reward Process, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 19 (1967) 309-329.

39. Janssen, A.J.E.M. and van Leeuwarden, J.S.H., Cumulants of the maximum of the Gaussian random walk, Stochastic Processes and Their Applications, 117 (2007) 1928–1959.

40. Janssen, A.J.E.M. and van Leeuwarden, J.S.H., 2007, On Lerch's transcendent and the Gaussian random walk, Annals of Applied Probability, 17 (2007) 421-439.

41. Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. and Denuit, M., Modern Actuarial Risk Theory, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.

42. Kaas, R., Dhaene, J. and Goovaerts, M., Upper and lower bounds for sums of variable, Insurance: Mathematics and Economics, 27, 2 (2000) 151-168.

43. Kastenbaum, M. A., A dialysis system with one absorbing and one semi-reflecting state, Journal of Applied Probability, 3 (1966) 363-371.

44. Kemperman, J.H. B., A Wiener-Horf type method for a general random walk with a two-sided boundary, Ann. Math.Statistics, 34 (1963) 1168-1193.

45. Kesemen, T., Genişletilmiş (s,S) Tipli Modellerin Analitik ve Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2001.

46. Kesemen, T., Rasgele hacimli genişletilmiş (s,S) tipli modellerin analitik ve asimptotik yöntemlerle incelenmesi, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2006.

47. Khaniev, T. A. and Özdemir, H., On the Laplace transform of finite dimensional distribution functions of semi- continuous random process with reflecting and delaying screens, In: Exploring Stochastic Laws, eds., A. V. Skorohod and Yu. V.Borovskikh, VSP, Zeist, The Netherlands, (1995) 167-17.

48. Khaniev, T. A., On the probability characteristics of a semi-Markovian random walks with two barriers, Bulletin of International Statistical Institute, 57, 2 (1997) 569-570.

49. Khaniev, T. A., Some results on a stochastic Process with a discrete chance interference, Mathematical and Computational Applications, 4, 2 (1999) 145-152.

50. Khaniev, T. A., and Unver, İ., The study of the level zero crossing time of a semi-Markovian random walk with delaying screen, Turkish Journal of Mathematics, 21, 3 (1997) 257-268.

51. Khaniev, T. A. and Özdemir, H. and Maden, S., Calculating the probability characteristics of a boundary functional of a semi- continuous random process with reflecting and delaying screens, Applied Stochastic Models and Data Analysis, 14 (1998) 117-123.

52. Khaniev, T. A., Unver, İ. and Maden, S., On the semi-Markovian random walk with two reflecting barriers, Stochastic Analysis and Applications, 19, 5 (2001) 799-819.

53. Khaniev, T. A., Some asymptotic results for the semi-Markov random walk with a special barrier, Turkish Journal of Mathematics, 27, 2 (2003) 251-272.

54. Khaniev, T. A. and Kucuk Z., Asymptotic expansions for the moments of the Gaussian random walk with two barriers, Statistics and Probability Letters, 69, 1 (2004) 91-103.

55. Khaniyev, T. A., Kesemen T., Kesemen O. and Aliyev R., Some asymptotic results for the stationary characteristics of the semi-Markov random walk with a barrier, Automatic Control and Computer Sciences, 1 (2006) 31-43.

56. Khaniyev, T.A. and Mammadova Z.I., On the stationary characteristics of the extended model of type (s, S) with Gaussian distribution of summands, Journal of Statistical Computation and Simulation,76, 10 (2006) 861-874.

57. Khaniyev, T.A., Aliyev, R.T., Kucuk, Z. and Okur Bekar, N., On the distributions of a renewal reward process and it's additive functional, Mathematical and Computational Applications, 13, 1 (2008) 41–50.

58. Korolyuk, V. S. and Borovskikh, Y. V., Analytical Problems for Asymptotics of Probability Distributions, Naukova Dumka, Kiev,1981.

59. Kovalenko, I. N., Kuznetchov, N. and Shurenkov, V. M., Stochastic Processes, Naukova Dumka, Kiev, 1983.

60. Kucuk, Z., İki Bariyerli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreçlerinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi Üzerine, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2003.

61. Lai, T.L., Asymptotic moments of random walks with applications to ladder variables and renewal theory, Annals of Probability, 4, 1 (1976) 51-66.

62. Levy, J.B. and Taqqu, M.S., On renewal processes having stable inter-renewal intervals and stable rewards, Ann. Sci. Math. Queues, 11,1 (1987) 95–110.

63. Levy, J.B. and Taqqu, M.S., Renewal reward processes with heavy-tailed inter-renewal times and heavy-tailed rewards, Bernoulli, 6, 1 (2000) 23–44.

64. Lotov, V. I., On random walks within a stripe, Theory Probability and Its Applications, 36, 1 (1991) 160-165.

65. Lotov, V. I., On some boundary crossing problems for Gaussian random walks, The Annals of Probability, 24, 4(1996) 2154-2171.

66. Lukac, E., Characteristics Function, Griffin, London, 1970.

67. Nasirova, T. I., Processes of Semi- Markovian Random Walk, Elm, Baku, 1984.

68. Nasirova, T. I., Yapar C. and Khaniev, T. A., On the probability characteristics of the stock level in the model of type (s, S), Cybernetics and Systems Analysis, 5 (1998) 69-76.

69. Prabhu, N.U., Stochastic Storage Processes: Queues, Insurance Risk, and Dams, Springer, New York, 1980.

70. Resnick, S. I., Adventures in Stochastic Processes, Birkhaüser Boston, Cambridge, 1992.

71. Rogozin, B. A., On the distribution of the first jump, Theory of Probability and Its Applications, 9 (1964) 450-464.

72. Ross, S. M., Introduction to Probability Models, Academic Pres, New York, 1993.

73. Ross, S.M., Stochastic Processes, John Wiley and Sons, New York, 1996.

74. Saaty, T.L., Elements of Queuing Theory with Applications, Dover, New York, 1983.

75. Senturia, L. and Puri Prem, S.A., A semi-Markov storage model, Adv. Appl.Probab., 1, 2 (1973) 362-378.

76. Serfoza, R. F., Functions of semi-Markov processes, SIAM J. Appl. Math., 20(1971).

77. Shurenkov, V. M., On the Markov renewal theory, Theory of Probability and Its Applications, 29, 2 (1984) 248-263.

78. Shurenkov, V. M., The Ergodic Markov Processes, Nauka, Moscow, 1989.

79. Skorohod, A. V. and Slobodenyuk, N. P, Limit Theorems for Random Walks, Naukova Dumka, Kiev, 1970.

80. Smith, W. L., Renewal theory and its ramifications, Journal of Roy. Statist. Soc., 2 (1958) 243-302.

81. Smith, W. L., On the cumulants of renewal processes, Biometrika, 46, 1 (1959) 1-29.

82. Smith, W. L., Some peculiar semi-Markov processes, Proc.5-Th Berkeley Symp. Math. Statist. And Probab., 2, 2 (1965-1966) 255-263.

83. Spitzer, F., A combinatorial Lemma and its applications to probability theory, Trans. Amer. Math. Soc., 82, (1956)323-339.

84. Spitzer, F., Principles of Random Walk, Princeton, N. J., D. Van Nostrand, 1964.

85. Takacs, L., Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes, second edition, Robert E. Krieger Publishing, New York, 1997.

86. Unver, I., On distributions of the semi-Markovian random walk with reflecting and delaying barriers, Bulletin of Calcutta Mathematical Society, 89 (1997) 231-242.

87. Weesakul, B., The random walk between a reflecting and an absorbing barrier, Ann. Math. Statist., 23 (1961) 765-774.

88. Woodroofe, M., Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis, SIAM, Philadelphia, 1982.

89. Zhang, Y. L., Some problems on a one dimensional correlated random walk with various type of barrier, Journal of Applied Probability, 29 (1992) 196-201.

8. EKLER

Ek 1. Wald Özdeşliği

ν tam değerli rasgele değişkeni ve $\{\xi_n\}$ dizisi $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış olsunlar. Ayrıca $\nu \geq 0$ ve ξ_n rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız olsunlar. $\Im_{k,n}$ ile $\xi_k,..,\xi_n$ rasgele değişkenlerinin ürettiği sigma cebir, yani $\Im_{k,n} = \sigma(\xi_k,...,\xi_n)$ gösterilsin.

Tanım 1: Her $n = 1, 2,...$ için $\{\nu \leq n\}$ olayı, $\Im_{n+1,\infty}$, sigma cebrinden bağımsız olduğunda ν rasgele değişkenine "gelecekten bağımsız" rasgele değişken denir.

Tanım 2: Her $n = 1, 2,...$ için $\{\nu \leq n\} \in \Im_{1,n}$ olduğunda ν rasgele değişkenine Markov rasgele değişkeni veya durdurma anı denir.

Başka bir deyişle, bu durumda $\xi_1,...,\xi_n$ rasgele değişkenlerinin değerleri bilindiğinde $\{\nu \leq n\}$ olayının gerçekleşip gerçekleşmediğini kesin olarak söylemek mümkündür. Markov rasgele değişkeni ν, ξ_k rasgele değişkenler dizisi için "gelecekten bağımsız" rasgele değişkendir (Borovkov [13], s. 86).

$S_\nu = \xi_1 + ... + \xi_\nu$ olsun. S_ν rasgele sayıda rasgele değişkenin toplamıdır.

Teorem 1 (Kolmogorov – Prokhorov Teoremi) (Borovkov [13], s. 88): Negatif olmayan tam değerli rasgele değişkeni ν, "gelecekten bağımsız " bir rasgele değişken olsun. Eğer

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\nu \geq k) E(|\xi_k|) < \infty \tag{E.1}$$

koşulu sağlanıyorsa, bu takdirde

$$E(S_\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu \geq k) E(\xi_k) \tag{E.2}$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca $\xi_k \geq 0$ olduğunda (E.1) koşuluna gerek kalmıyor.

Bu teoremin önemli bir sonucu olan aşağıdaki teorem, literatürde Wald Özdeşliği olarak bilinmektedir.

Teorem 2 (Wald Özdeşliği) (Borovkov [13], s. 88): $\xi_1, \xi_2, \ldots$ rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız ve aynı dağılıma sahip, ν rasgele değişkeni ise "gelecekten bağımsız" bir rasgele değişken olsun. Ayrıca $E(\xi_k) < \infty$ ve $E(\nu) < \infty$ olsun. Bu takdirde,

$$E(S_\nu) = E(\sum_{k=1}^{\nu} \xi_k) = E(\xi_1)E(\nu) \tag{E.3}$$

olur. (E.3) eşitliğine Wald Özdeşliği denir.

Ek 2. Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi

$\{\eta_n\}$, n=1,2,...‘ ler bir $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız, aynı dağılıma sahip ve pozitif değerli rasgele değişkenler dizisi olsun. Bu dizinin yardımı ile aşağıdaki stokastik süreç inşa edilsin:

$$N(t) \equiv \min\{n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} \eta_i > t\}, \quad t>0. \tag{E.4}$$

$N(t)$ sürecine literatürde “Yenileme Süreci” denir. $N(t)$ yenileme sürecinin beklenen değerine “Yenileme Fonksiyonu” denir ve genellikle $U(t)$ sembolü ile, yani

$$U(t) \equiv E(N(t)) \tag{E.5}$$

şeklinde gösterilir. η_n, n=1,2,... rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu $F(t)$, yani $F(t) \equiv P\{\eta_1 \leq t\}$ şeklinde olsun. Bu takdirde, $U(t)$ yenileme fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t), \tag{E.6}$$

burada $F^{*n}(t)$ ile F(t) dağılım fonksiyonunun n. konvolüsyon çarpımı gösterilmiş olup aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$F^{*0}(t) = \varepsilon(t) \equiv \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}; \quad F^{*1}(t) \equiv F(t);$$

$$F^{*n}(t) = F^{*(n-1)}(t) * F(t) = \int_0^t F^{*(n-1)}(t-s)dF(s), \ n=2,3,....$$

$U(t)$ fonksiyonu, monoton azalmayan, pozitif değerli bir fonksiyondur ve $U(0)=1$’ dir. Ayrıca, her sonlu t için $U(t)<\infty$’ dur (Feller [29], s.185). $U(t)$ fonksiyonu aşağıdaki integral denklemini sağlanmaktadır (Feller [29], s.186):

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t-s)dF(s), \ t \geq 0. \tag{E.7}$$

$U(t)$ fonksiyonunun asimptotik davranışını incelemek, olasılık teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu nedenle, $U(t)$’ nin $t \to \infty$ iken asimptotik davranışı ile ilgili literatürde birçok önemli sonuçlar mevcuttur. Bu sonuçların en önemlilerinden birisi “Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi” adı ile bilinmekte olup, Feller W. tarafından ispatlanmıştır. Burada bu teorem ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 1 (Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi): F(.) dağılımı aritmetik olmayan bir dağılım olsun. Ayrıca, bu dağılımın beklenen değeri (μ) ve varyansı (σ^2) sonlu olsun. Bu takdirde, $t \to \infty$ iken

$$0 \le U(t) - (t/\mu) \to (\mu^2 + \sigma^2)/2\mu^2 \qquad \text{(E.8)}$$

olur (Feller [29], s.366).

Not: "Birinci Yenileme Teoremi" olarak bilinen, aşağıdaki Teorem 2' den sadece $U(t) \sim t/\mu$ sonucuna ulaşılır. (E.8) sonucu bu sonuçtan çok daha güçlü bir sonuçtur. Tezin daha rahat anlaşılabilmesi için birinci yenileme teoremi aşağıdaki Teorem 2 şeklinde verilebilir (Feller [29], s.360).

Teorem 2 (Birinci Yenileme Teoremi): F(.) dağılımı aritmetik olmayan bir dağılım olsun. Ayrıca, F(.) dağılımının beklenen değeri (μ) sonlu olsun. Bu takdirde, her $h > 0$ sabiti için, $t \to \infty$ iken,

$$U(t) - U(t-h) \to h/\mu \qquad \text{(E.9)}$$

olur (Feller [29], s. 360).

Ek 3. Basamak Değişkenleri

$\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ dizisi $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış, bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Ayrıca η_n, n=1,2,... rasgele değişkenleri hem pozitif, hem de negatif değerler alabilsin. Bu rasgele değişkenlerin yardımı ile aşağıdaki rasgele yürüyüş süreci tanımlansın:

$$S_0 = 0; \; S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i, \; n \geq 1. \tag{E.10}$$

Şimdi de, 1. basamak anı ve 1. basamak yüksekliği aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\nu_1^+ = \min\{n \geq 1 : S_n > 0\}; \; \chi_1^+ = S_{\nu_1^+} \equiv \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i \; . \tag{E.11}$$

ν_1^+ rasgele değişkenine 1. basamak anı, χ_1^+ rasgele değişkenine ise 1. basamak yüksekliği denir (Feller [29], s.191-193).

$0 < E(\eta_n) < \infty$ koşulu sağlandığında, $E(\nu_1^+) < \infty$; $E(\chi_1^+) < \infty$ olur (Feller [29], s.396-397).

Ek 4. Dynkin Prensibi

$\{S_n\}$ rasgele yürüyüş süreci EK – 3' deki gibi tanımlanmış olsun. Bu takdirde, $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin sınır fonksiyonelleri olarak bilinen $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ rasgele değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N(z) = \min\{n \geq 1 : S_n > z\}, \; z > 0 \text{ ve } S_{N(z)} = \sum_{i=1}^{N(z)} \eta_i \, . \tag{E.12}$$

$N(z)$ sınır fonksiyoneli, $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş süreçlerinin $z > 0$ seviyesini ilk kez aşma anı olarak yorumlanır. $S_{N(z)} - z$ ise, $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin $z > 0$ seviyesini ilk kez aştığında z seviyesinin üzerinde kalan "artık" kısım olarak yorumlanır. Ayrıca, $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ rasgele değişkenlerine, $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin belli bir sınırı aşması ile ilgili oldukları için, sınır fonksiyonelleri denir.

$\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin incelenmesinde $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonellerinin çok büyük önemi vardır. Fakat η_1 hem negatif hem de pozitif değerler alabildiğine göre $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonellerini sadece yukarıdaki tanımlarından yararlanılarak incelemek oldukça zordur. Bu nedenle, bu fonksiyonellerin incelenmesi için literatürde "Dynkin prensibi" olarak bilinen bir matematiksel düşünceden yararlanılmaktadır. Bu düşünceyi ortaya koymak için $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin 1. basamak anı (ν_1^+) ve 1. basamak yüksekliği (χ_1^+) EK – 3' te olduğu gibi tanımlansın:

$$\nu_1^+ = \min\{n \geq 1 : S_n > 0\}; \qquad \chi_1^+ = \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i = S_{\nu_1^+} \, . \tag{E.13}$$

Ayrıca $(\nu_n^+; \chi_n^+)$, n=1,2,3,... rasgele değişken ikilileri $(\nu_1^+; \chi_1^+)$ ile aynı dağılıma sahip bağımsız rasgele çiftler dizisi olsun. Bu rasgele değişkenler yardımı ile aşağıdaki yenileme süreci inşa edilsin:

$$H(z) = \min\{n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ > z\}. \tag{E.14}$$

Bu takdirde, Dynkin prensibi matematiksel olarak, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$N(z) = \sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+; \quad S_{N(z)} = \sum_{i=1}^{H(z)} \chi_i^+ \tag{E.15}$$

Dolayısıyla, Dynkin prensibine göre, rasgele yürüyüş sürecinin içinde öyle iki ödüllü yenileme süreci inşa etmek mümkündür ki, $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelleri bu ödüllü yenileme süreçleri yardımı ile ifade edilebilsin (Rogozin [29], s.453). Hatırlatalım ki, yenileme ve ödüllü yenileme süreçleri hakkında literatürde oldukça zengin bilgiler vardır ve bu bilgiler kolaylıkla $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin incelenmesi için kullanılabilir.

Ek 5. E(N(z)) ve E(N(ζ_1))' in Sonlu Olması Üzerine

$N(z)$ sınır fonksiyoneli EK – 4' te olduğu şekilde tanımlanmış olsun. Bu durumda, Dynkin prensibine göre, $N(z)=\sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+$ şekilde gösterilebilir. Burada $H(z)$ ile $\{\chi_n^+, n=1,2,...\}$ basamak yüksekliklerinin oluşturduğu yenileme süreci gösterilmiştir. EK – 1' deki Wald Özdeşliğine göre,

$$E(N(z))=E(\sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+)=E(\nu_1^+)E(H(z)) \tag{E.16}$$

olur.

$H(z)$ bir yenileme süreci olduğundan her $z<\infty$ için $E(H(z))<\infty$' dır (Feller [29], s.185). Diğer taraftan $0<E(\eta_1)<\infty$ olduğu takdirde, $E(\nu_1^+)<\infty$' dur (Feller [29], s.396-397). Özetle, her $0<z<\infty$ için $0<E(\eta_1)<\infty$ olduğunda, hem $E(\nu_1^+)$ hem de $E(H(z))$ sonlu olur. Bunlar (E.16) eşitliğinde göz önüne alınırsa $E(N(z))$' de sonlu olduğu sonucu elde edilir. Yani, $E(N(z))<\infty$ olur.

Şimdi de $E(N(\zeta_1))$ ‘ in sonlu olduğunu gösterelim.

Wald özdeşliği (EK – 2) ve $E(N(\zeta_1))$ ‘ in tanımı gereği,

$$E(N(\zeta_1))=E(\sum_{i=1}^{H(\zeta_1)} \nu_i^+)=E(\nu_1^+)E(H(\zeta_1)) \tag{E.17}$$

olur. Burada

$$E(H(\zeta_1))=\int_0^\infty E(H(z))d\pi(z) \tag{E.18}$$

‘dır. $0<E(\eta_1)<\infty$ olduğu için $E(\nu_1^+)<+\infty$‘ dır (Feller [29], s.396-397). Dolayısıyla, $E(N(\zeta_1))$' in sonlu olması için $E(H(\zeta_1))$'in sonlu olmasını göstermek yeterlidir.

Kesinleştirilmiş yenileme teoremine göre (EK – 2), $z\to\infty$ iken

$$E(H(z))\equiv U_+(z)=\frac{z}{\mu_1}+\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}+g(z) \tag{E.19}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\mu_k=E(\chi_1^{+k})$'dır. $g(z)$ ise sınırlı bir fonksiyon olup, $z\to\infty$ iken sıfıra yakınsamaktadır. Bu takdirde, öyle bir $b>0$ sayısı bulmak mümkündür ki, her

$\varepsilon > 0$ için $z \geq b$ olduğunda $|g(z)| < \varepsilon / 2$ olsun. Bunu göz önünde bulundurarak, $\int_0^\infty E(H(z))d\pi(z)$ integrali aşağıdaki şekilde değerlendirilebilir:

$$\int_0^\infty E(H(z))d\pi(z) = \int_0^b E(H(z))d\pi(z) + \int_b^\infty E(H(z))d\pi(z)$$

$$\leq U_+(b)\int_0^b d\pi(z) + \int_b^\infty U_+(z)d\pi(z)$$

$$\leq U_+(b) + \int_b^\infty \{\frac{z}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}\}d\pi(z) = U_+(b) + \frac{1}{\mu_1}\int_b^\infty z d\pi(z) + (\frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2})\int_b^\infty d\pi(z)$$

$$\leq U_+(b) + \frac{E(\zeta_1)}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{E.20}$$

Burada

$$\int_0^b d\pi(z) \leq \int_0^\infty d\pi(z) \equiv 1, \quad \int_b^\infty d\pi(z) \leq \int_0^\infty d\pi(z) \equiv 1, \quad \int_b^\infty z d\pi(z) \leq \int_0^\infty z d\pi(z) \equiv E(\zeta_1)$$

eşitsizlikleri kullanılmıştır. Böylece $0 < E(\eta_1) < \infty$ ve $E(\eta_1^2) < \infty$ koşulları sağlandığında $E(N(z))$ ve $E(N(\zeta_1))$ ‘ in sonlu oldukları ispatlanmış olur.

Ek 6. A(x,z) Serisinin Sonlu Olması Üzerine

Teorem 2.1.3.2' nin ifadesinde aşağıdaki seri kullanılmıştır:

$$A(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x,z)\,;\ a_n(x,z)=P\{z-S_k>0,\ k=1,2,...,n;\ z-S_n\le x\},\quad x,z>0. \quad (E.21)$$

Burada $S_n=\sum_{i=1}^{n}\eta_i,\ n\ge 1;\ S_0=0$ ile $\{\eta_n\}$ dizisinin oluşturduğu rasgele yürüyüş süreci gösterilmiştir. Hatırlanacak olursa, $\{\eta_n\},\ n\ge 1$ dizisi $(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayında tanımlanmış, bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisidir. $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenler dizisi hem pozitif hem de negatif değerler alabilen rasgele değişkenlerdir. Ayrıca, $0<E(\eta_n)<\infty$ koşulu sağlanmaktadır. Bu durumda, $A(x,z)$ serisinin sonlu olup olmadığı araştırılmalıdır.

$$\{\omega: z-S_k>0\}\equiv C_k,\ \ k=0,1,...,n \text{ ve } \{\omega: z-S_n\le x\}\equiv D_n(x),\ \ n\ge 0 \qquad (E.22)$$

olsun. O zaman,

$$a_n(x,z)=P\{C_1\cap C_2\cap...\cap C_n\cap D_n(x)\},\ n=0,1,...$$

olur. Kısaca $C_1\cap C_2\cap...\cap C_n=B_n$ olsun.

$$D_n(x)=\{\omega: z-S_n\le x\}\subseteq\Omega$$

olduğuna göre $a_n(x,z)\le P(B_n\cap\Omega)=P(B_n)$ olur.

$$A(x,z)\le\sum_{n=0}^{\infty}P(B_n)=\sum_{n=0}^{\infty}P\{z-S_k>0;k=0,1,...,n\}$$

olur. Diğer taraftan, $N(z)\equiv\min\{n\ge 1: z-S_n\le 0\}$ sınır fonksiyonelinin tanımından

$$\{N(z)>n\}=\{z-S_k>0,\ k=0,1,...,n\}$$

olduğu görülmektedir. Dolayısıyla,

$$A(x,z)\le\sum_{n=0}^{\infty}P\{N(z)>n\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{N(z)\ge n+1\}=\sum_{m=1}^{\infty}P\{N(z)\ge m\}=E(N(z))$$

olur. EK – 5' te, $E(N(z))$' in sonlu olduğu gösterilmiştir. Böylece, her $x>0$, $z>0$ için $E(\eta_1)>0$ olduğunda $A(x,z)$ sonludur, yani $A(x,z)<\infty$' dur.

Böylece $A(x,z)$ serisinin sonlu olduğu gösterilmiş olur.

Ek 7. Üç katlı İntegrallerin Sonlu Olması Üzerine

Tezdeki, Teorem 2.1.3.2' de zaman ortalamalarının durum ortalamasına yakınsadığı ifade edilmiş ve aşağıdaki eşitlik verilmiştir (1 olasılığı ile):

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(X(u))du = S_f = \frac{1}{E(\tau_1(\zeta_1))}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(x)P_Z\{\tau_1 > t; X(t)\in dx\}dtd\pi(z) \qquad (E.23)$$

Burada $f(x)$ fonksiyonu sınırlı ölçülebilen bir fonksiyondur.

$$\sup_{x\in R^+}|f(x)| = M < \infty$$

olsun. Bu takdirde,

$$\left|\int_{z=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} f(x)P_Z\{\tau_1 > t; X(t)\in dx\}dtd\pi(z)\right| \le M\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty P_Z\{\tau_1 > t; X(t)\in dx\}dtd\pi(z)$$

$$= M\int_0^\infty\int_0^\infty P_Z\{\tau_1 > t\}dtd\pi(z) = M\int_0^\infty E(\tau_1(z))d\pi(z) \qquad (E.24)$$

olur. EK – 1' deki Wald özdeşliğine göre

$$E(\tau_1(z)) = E(\sum_{i=1}^{N_1(z)}\xi_i) = E(\xi_1)E(N_1(z)) \qquad (E.25)$$

olur. Teorem 2.1.3.1' in koşullarına göre $0 < E(\xi_1) < \infty$' dur. Dolayısıyla, $E(\tau_1(z))$' in sonlu olabilmesi için $E(N_1(z))$ ' in sonlu olması yeterlidir. EK – 4' teki Dynkin Prensibine göre

$$N(z) = \sum_{i=0}^{H(z)}\nu_i^+$$

şeklinde yazılabilir. Burada ν_1^+, 1. basamak anı; ν_n^+' lar ise ν_1^+ ile aynı dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenlerdir. H(z) süreci, $\{\chi_n^+\}$, n=1,2,...basamak yüksekliklerinin oluşturduğu yenileme sürecidir. EK – 1' deki Wald Özdeşliğine göre,

$$E(N_1(z)) = E(\sum_{i=1}^{H(z)}\nu_i^+) = E(\nu_1^+)E(H(z))$$

olur. $E(H(z)) \equiv U_+(z)$ bir yenileme fonksiyonudur. Dolayısıyla her sonlu z için $U_+(z) = E(H(z))$' in sonlu olduğu bilinmektedir (Feller [29], s.185). $0 < E(\eta_1) < \infty$ olduğunda $E(\nu_1^+) < +\infty$' dır (Feller [29], s.396-397). Dolayısıyla $E(N_1(z))$ sonludur. Ayrıca EK – 5' te $\int_0^\infty E(H(z))d\pi(z)$ integralinin sonlu olduğu $E(\eta_1) > 0$ ve $E(\eta_1^2) < \infty$ koşulları altında gösterilmiştir. Bu takdirde,

$$\int_0^\infty E(\tau_1(z))d\pi(z) = E(\xi_1)\int_0^\infty E(N_1(z))d\pi(z) = E(\xi_1)E(\nu_1^+)\int_0^\infty E(H(z))d\pi(z) < \infty \qquad (E.26)$$

olur. $M \equiv \sup_{x \in R} |f(x)| < \infty$ sonlu olduğu da göz önünde bulundurulursa, yukarıdaki üç katlı integrallerin sonlu oldukları ispat edilmiş olur.

Ek 8. Tauber – Abel Teoremi:

$\mathrm{F(t)}$ ve $\mathrm{G(t)}$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $\tilde{\mathrm{F}}(\lambda)$ ve $\tilde{\mathrm{G}}(\lambda)$ mevcut olsun (en azından öyle bir $(-\alpha,\beta)$ aralığı mevcut olsun ki, her $\lambda\in(-\alpha,\beta)$; $\alpha,\beta>0$ için $\tilde{\mathrm{F}}(\lambda)$ ve $\tilde{\mathrm{G}}(\lambda)$ mevcut ve sonlu olsun).

Ayrıca $\mathrm{t}\to\infty$ iken $\mathrm{F(t)}\sim\mathrm{G(t)}$ olsun. Bu taktirde, $\lambda\to 0$ iken $\tilde{\mathrm{F}}(\lambda)\sim\tilde{\mathrm{G}}(\lambda)$ olur. Bu önermenin tersi de doğrudur, yani eğer $\lambda\to 0$ iken $\tilde{\mathrm{F}}(\lambda)\sim\tilde{\mathrm{G}}(\lambda)$ ise $\mathrm{t}\to\infty$ iken $\mathrm{F(t)}\sim\mathrm{G(t)}$ olur.

Burada "~" simgesi ile iki fonksiyonun asimptotik denkliği gösterilmiştir, yani "$\mathrm{F(t)}\sim\mathrm{G(t)}$" yazılabilmesi için $\lim\limits_{\mathrm{t}\to\infty}\frac{\mathrm{F(t)}}{\mathrm{G(t)}}=1$ ve "$\tilde{\mathrm{F}}(\lambda)\sim\tilde{\mathrm{G}}(\lambda)$" yazılabilmesi için $\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{\tilde{\mathrm{F}}(\lambda)}{\tilde{\mathrm{G}}(\lambda)}=1$ olmalıdır.

Bu önerme literatürde Tauber – Abel teoremi olarak bilinmektedir (Feller [29], s. 498).

Ek 9. Mill Teoremi

X rasgele değişkeni Standart Normal Dağılıma sahip olsun. Bu takdirde, X' in olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları sırasıyla $\varphi(t)$ ve $\Phi(t)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\varphi(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2},\ t \in R\ ;\ \Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(u)du\,.$$

Ayrıca $\overline{\Phi}(t) \equiv 1 - \Phi(t)$ olsun. Her $t > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik bilinmektedir:

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} < \frac{\overline{\Phi}(t)}{\varphi(t)} < \frac{1}{t} \tag{E.27}$$

$\dfrac{\overline{\Phi}(t)}{\varphi(t)}$ oranına Mill Oranı denir ve bu oran için $t \to \infty$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilmiştir (Abramowitz and Stegun [1], s.298).

Teorem (Mill Teoremi): $t \to \infty$ iken $\dfrac{\overline{\Phi}(t)}{\varphi(t)}$ oranı için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$\frac{\overline{\Phi}(t)}{\varphi(t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} + \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{t^{2m+1}} \tag{E.28}$$

(Abramowitz and Stegun [1], s.298).

Bu teoremden aşağıdaki önemli sonuç elde edilir.

Sonuç 1: $t \to \infty$ iken $\dfrac{\overline{\Phi}(t)}{\varphi(t)/t} \to 1$ olur veya $\overline{\Phi}(t) \sim \dfrac{\varphi(t)}{t}$ ' dır.

Ek 10. Kesikli Müdahaleli Yarı – Markov Süreçleri için Genel Ergodik Teoremi

Teorem 1 (Genel Ergodik Teorem) (Gihman and Skorohod [30], s. 243)**:**

$X(t)$ süreci kesikli müdahaleli bir yarı – Markov süreci olsun. Ayrıca aşağıdaki iki varsayım sağlansın:

1. Varsayım: Öyle bir $\tau_0 \equiv 0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n < ... < \infty$ artan zaman anları bulunsun ki, $X(t)$ sürecinin bu anlardaki değerleri ($X(\tau_n)$, n=1,2,...) ergodik bir Markov zinciri oluşturmuş olsun.
2. Varsayım: $\tau_0, \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n, ...$ anları arasında geçen sürelerin beklenen değeri sonlu olmuş olsun, yani her n=1,2,... için $E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty$ olsun.

Bu takdirde $X(t)$ süreci ergodiktir.

Teorem 2 (Gihman and Skorohod [30], s. 243)**:** Teorem 1' in varsayımları sağlanmış olsun. Bu takdirde, her sınırlı ölçülebilir $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X(s))ds = S_f \equiv \frac{1}{E(\tau_1)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} f(x)P_z\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\}dt d\pi(z) \qquad \text{(E.29)}$$

Burada, $\pi(z)$ dağılımı $\{X(\tau_n)\}$ Markov zincirinin ergodik dağılımıdır.

Not: Bu teorem, zaman ortalamalarının durum ortalamalarına 1 olasılığı ile yakınsadığını ifade eden bir önermedir ve ergodik süreçler için en temel bağıntıyı ortaya koyar.

Ek 11. Rasgele Yürüyüş Süreçleri için Temel Özdeşlik

$\{\eta_n\}$, n=1,2,...dizisi $\{\Omega,\Im,P\}$ olasılık uzayında tanımlı bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. η_n rasgele değişkenleri hem pozitif hem de negatif değerler alabilsin. η_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(x)$ ile, karakteristik fonksiyonu ise $\varphi(\theta)$ ile gösterilsin, yani $F(x)=P\{\eta_1 \le x\}$; $\varphi(\theta)$=E(exp{i$\theta\eta_1$}) olsun. $\{\eta_n\}$, n=1,2,... dizisinin yardımı ile aşağıdaki rasgele yürüyüş süreci tanımlansın:

$$S_0=0;\ S_n=\sum_{i=1}^{n}\eta_i;\ n=1,2,...$$

$A \subseteq R$ reel sayılar kümesinin keyfi bir alt kümesi olsun. A' ile A' nın tümleyicisi gösterilsin, yani $A' = R \setminus A$ olsun. (Genellikle A'sonlu veya sonsuz aralık şeklinde ortaya çıkar.) $I \subseteq A'$ olsun. Eğer $S_1 \in A;\ S_2 \in A;\ ...;\ S_{n-1} \in A;\ S_n \in A\ \ (I \subseteq A')$ ise, bu takdirde, “Rasgele Yürüyüş Süreci ilk kez A'kümesine n. adımda ulaşmış ve bu andaki değeri I kümesindedir” denir. A' kümesine ilk kez ulaşma anını N ile sürecin bu andaki değerini ise S_N ile gösterelim. Dolayısıyla,

$$N=\min\{n \ge 1:\ S_1 \in A;\ S_2 \in A;...;\ S_{n-1} \in A;\ S_n \in A'\};\quad S_N=\sum_{i=1}^{N}\eta_i \tag{E.30}$$

olsun. $(N;S_N)$ ikilisinin ortak dağılımı için aşağıdaki notasyon tanımlansın:

$$P\{N=n;\ S_n \in I\} \equiv H_n\{I\},\ I \subseteq A',\ n=1,2,...$$

Tanımı gereği $H_n\{I\}$ aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$H_n\{I\}=P\{S_1 \in A;\ S_2 \in A;\ ...;\ S_{n-1} \in A;\ S_n \in I\}$$

Ayrıca, $I \subseteq A$ için $H_n\{I\}=0$ olarak kabul edelim. Bu durumda, her $I \subseteq R$ için $H_n\{I\}=P\{S_1 \in A;\ S_2 \in A;\ ...;\ S_{n-1} \in A;\ S_n \in A';S_n \in I\}$ şeklinde gösterilebilir. $H_n\{I\}$ olasılıklarına “ilk kez ulaşma” olasılıkları denir. $H_n\{I\}$ olasılıklarının incelenmesi, rasgele yürüyüş süreçlerinin A' kümesine ilk kez ulaşmasına kadar olan davranışı ile bağlantılıdır.

Ayrıca, her $I \subseteq A$ ve $n=1,2,...$ için $G_n\{I\}=P\{S_1 \in A;\ S_2 \in A;\ ...;\ S_{n-1} \in A;\ S_n \in I\}$ olsun. $G_n\{I\}$, ilk n adımda sürecin A' kümesine ulaşmaması ve n. adımda I kümesinde olması olasılığıdır. $I \subseteq A'$ olduğunda $G_n\{I\}=0$ olsun. Bu takdirde, $G_n\{I\}$ olasılıkları tüm $I \subseteq R$ ’ ler için tanımlanmış olur ve aşağıdaki şekilde göstermek daha uygundur:

$$G_n\{I\}=P\{S_1 \in A;\ S_2 \in A;\ ...;\ S_n \in A;\ S_n \in I\}$$

Tanıma göre, $G_n\{A\}=P\{S_1 \in A;\ S_2 \in A;\ ...;\ S_n \in A\} = P\{N > n\} = 1 - P\{N \le n\}$ olur.

Amaç, $(N; S_N)$ ikilisinin dağılımını incelemektir (Feller [29], s. 598-600). Bu amaca ulaşmak için Fourier analizi yöntemini kullanılır. N tam değerli rasgele değişken olduğu için N' nin moment çıkaran fonksiyonu, S_N' nin ise karakteristik fonksiyonu kullanılsın. Bunun için aşağıdaki notasyonlar tanımlansın:

$$\chi(s,\theta) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{A'} e^{i\theta x} H_n\{dx\}\ ;\ \gamma(s,\theta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_{A} e^{i\theta x} G_n\{dx\} \qquad \text{(E.31)}$$

($n = 0$. terim 2. seride 1' dir.)

$|s| < 1$ olduğunda her iki seri de yakınsak olur. Rasgele yürüyüş süreçleri için temel özdeşlik $\chi(s,\theta)$ ve $\gamma(s,\theta)$ arasında kurulan bir ilişkiyi ifade eder (Feller [29], s. 598-600).

Temel Özdeşlik (Feller [29], s. 600)**:** Her $\theta \in R$ ve $|s| < 1$ için

$$1 - \chi(s,\theta) = \gamma(s,\theta)[1 - s\varphi(\theta)] \qquad \text{(E.32)}$$

' dır. (E.32) özdeşliğinden birçok önemli sonuçlar elde edilebilmektedir.

ÖZGEÇMİŞ

Zulfiyya MAMMADOVA, 01.08.1957 tarihinde Gürcistan'ın Bolnisi ili, Koşakilise köyünde doğdu. İlköğrenimini Koşakilise İlköğretim Okulunda, lise öğrenimini ise Bakü 1 Nolu Fen Lisesi'nde tamamladı. 1976 yılında Bakü Devlet Üniversitesi Mekanik-Matematik Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı. 1980 yılında lisans, 1981 yılında ise yüksek lisans programını tamamlayarak bu bölümden mezun oldu. 1981 - 1984 yılları arasında Azerbaycan'da lise öğretmeni olarak görev yaptı. 1985 - 1989 yılları arasında Bakü'de Sosyal Hizmet Bakanlığı'na bağlı Bilişim Merkezi'nde uzman olarak çalıştı. 1990 - 1996 yılları arasında Bakü'de lise öğretmenliğine devam etti. 1996 yılında eşinin görevi nedeniyle Türkiye'ye geldi. 2005 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora programına kayıt oldu.

Evli olup, üç çocuk annesidir. İyi düzeyde Türkçe, Rusça ve orta düzeyde İngilizce bilmektedir.