

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**SİLİNDİRİK HALKASAL BÖLGEDEKİ AKIŞKAN İÇERİSİNDE  
PARÇACIK TAŞINIM MODELİ VE ANALİZİ**

**DOKTORA TEZİ**

**İshak CUMHUR**

**ARALIK 2011  
TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**SİLİNDİRİK HALKASAL BÖLGEDEKİ AKIŞKAN İÇERİSİNDE  
PARÇACIK TAŞINIM MODELİ VE ANALİZİ**

**İshak CUMHUR**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde  
"DOKTOR (MATEMATİK)"  
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 01.11.2011**

**Tezin Savunma Tarihi : 15.12.2011**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erhan COŞKUN**

**Trabzon 2011**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Matematik Ana Bilim Dalında**

**İshak CUMHUR Tarafından Hazırlanan**

**SİLİNDİRİK HALKASAL BÖLGEDEKİ AKIŞKAN İÇERİSİNDE  
PARÇACIK TAŞINIM MODELİ VE ANALİZİ**

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 15.11.2011 gün ve 1429 sayılı kararıyla  
oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda**

**DOKTORA TEZİ**

**olarak kabul edilmiştir.**

**Jüri Üyeleri**

**Başkan : Prof. Dr. Erhan COŞKUN .....**

**Üye : Prof. Dr. İhsan ÜNVER .....**

**Üye : Prof. Dr. Orhan AYDIN .....**

**Üye : Prof. Dr. Mustafa TÜRKYILMAZOĞLU .....**

**Üye : Yrd. Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN .....**

**Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ**

**Enstitü Müdürü**

## ÖNSÖZ

Bu çalışma, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora tez çalışması olarak yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında, iki silindir arasında kalan halkasal bölgede Couette ve Poiseuille akışlarının süperpozisyonu ile oluşturulan akışkan içerisinde hareket eden ve sondaj işleminde oluşan parçacıklara ait taşınım modeli göz önüne alınmıştır. Parçacıkların askıda kalma süresini maksimize eden parametre kümeleri belirlenmiş ve parçacık hareket modelinin yaklaşık analitik çözümleri elde edilmiştir.

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanmasına kadar olan süreçte emeğiyle, öneri ve yönlendirmeleriyle yetişmeme katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erhan COŞKUN'a en içten dileklerle saygı ve şükranlarımı sunuyorum. Aynı zamanda bu tez aşamasında değerli görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan tez izleme jüri üyesi hocalarım, Prof. Dr. Orhan AYDIN, Prof. Dr. İhsan ÜNVER ve Prof. Dr. Mustafa TÜRKYILMAZOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim. Yine öğrenim sürecinde katkı sağlayan matematik bölümündeki tüm değerli hocalarıma ve KTÜ makine mühendisliği laboratuvarında Fluent yazılımının kullanımını sağlayan ve bununla ilgili yardımlarını esirgemeyen makine mühendisliği Arş. Gör. Sayın Cemalettin AYGÜN'e çok teşekkür ediyorum.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve manevi desteğini hep üzerimde hissettiğim can arkadaşşıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

İshak CUMHUR  
Trabzon 2011



## TEZ BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum “SİLİNDİRİK HALKASAL BÖLGEDEKİ AKIŞKAN İÇERİSİNDE PARÇACIK TAŞINIM MODELİ VE ANALİZİ” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Erhan COŞKUN’un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 15/12/2011

İshak CUMHUR

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET.....	IX
SUMMARY.....	X
ŞEKİLER DİZİNİ.....	XI
TABLolar DİZİNİ.....	XX
SEMBOLLER DİZİNİ VE BİRİMLERİ.....	XXIII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Terminoloji.....	3
1.3. Literatür Araştırması.....	5
1.4. Problem Tasviri.....	8
1.5. Model ve Parametreler.....	10
1.6. Parçacık Modeli(Kartezyen ve Silindirik Koordinatlarda).....	11
1.7. Navier-Stokes Denklemleri.....	14
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME.....	16
2.1. Akışkan Modeli.....	16
2.1.1. Süreklilik ve Couette-Poiseuille Akışları İçin Navier-Stokes Denklemleri.....	16
2.1.1.1. Dönme Yönünde Akış(Couette Akışı).....	16
2.1.1.2. Eksenel Yönde Akış(Poiseuille Akışı).....	18
2.1.2. Dönme ve Eksenel Akış Superpozisyonu(Helisel Akış Modeli).....	21
2.1.2.1. Akışkan Modelinin Analitik Çözümü.....	24
2.1.2.1.1. Analitik Çözüm.....	25
2.1.2.1.2. Üç Boyutlu Akışkan Hareketi.....	28
2.1.3. Tek Parametreye Göre Akışkan Modelinin Analizi.....	33
2.1.3.1. Hız Profilinin $\omega$ Hızına Göre Değişimi.....	34
2.1.3.2. Hız Profilinin $\mu_f$ Viskozitesine Göre Değişimi.....	38

2.1.3.3.	Hız Profiline $\partial P/\partial z$ Basınç Gradyenine Göre Değişimi .....	42
2.1.4.	İki-parametre Değişimine Göre Analiz .....	44
2.1.4.1.	Viskozite ve Basınç Değişimine Göre Analiz .....	45
2.1.4.2.	Hız ve Basınç Değişimine Göre Analiz.....	49
2.1.4.3.	Viskozite ve Hız Değişimine Göre Analiz .....	53
2.2.	Couette Akışı ile Parçacık Taşınım Modeli.....	58
2.2.1.	Model Tanıtımı .....	58
2.2.2.	Çözüm Yöntemi.....	59
2.2.2.1.	Diferensiyel Transform Metodu(DTM).....	60
2.2.2.2.	Padé Yaklaşımı .....	62
2.2.2.3.	Adomian Ayrışım Yöntemi .....	65
2.2.2.4.	Model Problemler Üzerinde Analitik Yaklaşık Yöntemler .....	68
2.2.2.5.	Parçacık Taşınım Modelinin Yaklaşık Analitik Çözümleri.....	76
2.2.2.6.	Navier-Stokes Hız Profilleri ve Parçacık Taşınımı .....	82
2.2.2.7.	Hız Profilleri İçin Yaklaşım ve Parçacık Yörüngeleri.....	86
2.2.3.	Parçacık Modelinin Tek Parametreye Göre Değişim Analizi .....	88
2.2.3.1.	Parçacık Yörüngesinin $\omega$ Hızına Göre Değişimi .....	88
2.2.3.2.	Parçacık Yörüngesinin $m$ Kütlesine Göre Değişimi .....	90
2.2.3.3.	Parçacık Yörüngesinin $\mu_f$ Viskozitesine Göre Değişimi .....	92
2.2.4.	Dönme Yönünde Akış İçin İki-parametre Değişimine Göre Analiz .....	94
2.2.4.1.	Viskozite ve Kütleye Göre Değişimin İncelenmesi.....	94
2.2.4.2.	Viskozite ve Hıza Göre Değişimin İncelenmesi.....	96
2.2.4.3.	Hız ve Kütleye Göre Değişimin İncelenmesi .....	98
2.3.	Couette ve Poiseuille Akışı ile Parçacık Taşınım Modeli .....	100
2.3.1.	Model Tanıtımı .....	100
2.3.2.	Tek parametreye Göre Kalitatif Analiz .....	103
2.3.2.1.	Parçacık Yörüngesinin $\omega$ Hızına Göre Değişimi .....	103
2.3.2.2.	Parçacık Yörüngesinin $\mu_f$ Viskozitesine Göre Değişimi .....	106
2.3.2.3.	Parçacık Yörüngesinin $\partial P/\partial z$ Basınç Gradyenine Göre Değişimi.....	109
2.3.2.4.	Parçacık Yörüngesinin $m$ Kütlesine Göre Değişimi .....	112
2.3.3.	İki-parametre Değişimine Göre Analiz .....	114
2.3.3.1.	Kütle ve Viskozite Değişimine Göre Yörünge Uzunlukları.....	114
2.3.3.2.	Hız ve Viskozite Değişimine Göre Yörünge Uzunlukları .....	119

2.3.3.3.	Hız ve Kütle Değişimine Göre Yörünge Uzunlukları .....	123
2.3.3.4.	Basınç Gradyeni ve Viskozite Değişimine Göre Yörünge Uzunlukları.....	126
2.3.3.5.	Kütle ve Basınç Gradyeni Değişimine Göre Yörünge Uzunlukları .....	131
2.3.3.6.	Hız ve Basınç Gradyeni Değişimine Göre Yörünge Uzunlukları .....	134
2.3.4.	Newtonyan Akışkan İçerisinde Farklı Parçacık Kütlelerinin Davranışı.....	137
2.4.	Newtonyan Olmayan Akışkanlar İçin Akı Modeli.....	139
2.4.1.	Newtonyan Olmayan Akışkanlarda Power-Law Modeli.....	139
2.4.2.	Newtonyan Olmayan Akışkan İçin Couette Akışı.....	143
2.4.3.	Newtonyan Olmayan Akışkan İçin Poiseuille Akışı .....	145
2.4.4.	Üç Boyutta Basitleştirilmiş Akışkan Modeli.....	149
2.4.5.	Tek Parametreye Göre Analiz .....	154
2.4.5.1.	Hız Profilinin $n$ İndisine Göre Değişimi .....	155
2.4.5.2.	Hız Profilinin Farklı $r^*$ Konumu İçin $n$ İndisine Göre Değişimi.....	157
2.4.5.3.	Hız Profilinin $\omega$ Hızına Göre Değişimi.....	160
2.4.5.4.	Hız Profilinin $\partial P/\partial z$ Basınç Gradyenine Göre Değişimi .....	163
2.5.	Newtonyan Olmayan Akışkanlar İçin Dönme Yönünde Couette Parçacık Taşınım Modeli.....	166
2.5.1.	Model Tanıtımı .....	166
2.5.2.	Dönme Yönünde Parçacık Yörünge Analizi .....	168
2.5.2.1.	Parçacık Yörüngesinin $n$ İndisine Göre Değişimi.....	168
2.5.2.2.	Parçacık Yörüngesinin $\omega$ Hızına Göre Değişimi .....	168
2.5.2.3.	Parçacık Yörüngesinin $m$ Kütlelerine Göre Değişimi .....	171
2.6.	Newtonyan Olmayan Akışkanlar Couette-Poiseuille Parçacık Taşınım Modeli.....	173
2.6.1.	Model Tanıtımı .....	173
2.6.2.	Parametre Değişim Analizi.....	176
2.6.2.1.	Parçacık Yörüngesinin $n$ İndisine Göre Değişimi.....	176
2.6.2.2.	Parçacık Yörüngesinin $\omega$ Hızına Göre Değişimi .....	176
2.6.2.3.	Parçacık Yörüngesinin $m$ Kütlelerine Göre Değişimi .....	178
2.6.2.4.	Parçacık Yörüngesinin $\partial P/\partial z$ Basınç Gradyenine Göre Değişimi.....	180
2.6.3.	Newtonyan Olmayan Akışkan İçerisinde Parçacık Kütlelerinin Davranışı ...	181
2.6.4.	Newtonyan ve Newtonyan Olmayan Akışkan İçin Karşılaştırma.....	182
2.7.	Eş Merkezli Olmayan Halkasal Bölgede Parçacık Taşınım Modeli .....	184

2.7.1.	Parametre Analizleri .....	185
2.7.2.	Eş Merkezli Olmayan Halkasal Bölgede Parçacık Hareketi .....	190
3.	SONUÇLAR.....	194
4.	ÖNERİLER.....	196
5.	KAYNAKLAR.....	197
6.	EKLER .....	202
ÖZGEÇMİŞ		

Doktora Tezi

ÖZET

SİLİNDİRİK HALKASAL BÖLGEDEKİ AKIŞKAN İÇERİSİNDE PARÇACIK  
TAŞINIM MODELİ VE ANALİZİ

İshak CUMHUR

Karadeniz Teknik Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
Danışman: Prof. Dr. Erhan COŞKUN  
2011, 201 Sayfa, 3 Ek Sayfalar

Parçacıkların etkin taşınımı iyi bir sondaj işleminde oldukça önemlidir. Özellikle, halkasal bölgedeki parçacık taşınımı bir çok parametrenin etkilediği kompleks bir problemdir. Etkili parçacık taşınımını önceden belirleyebilme, taşınımına etki eden parametrelerin hepsinin bir arada düşünülmesini gerektirir. Bu çalışmada, parçacık taşınımını etkileyen parametrelerin sondaj işlemine olan etkisini anlayabilmek için, sondaj borusunun yatay halkasal kesiti üzerinde çalışılmış ve halkasal bölgedeki parçacık hareketini gözlemlemek için mekanistik bir model kullanılmıştır.

Yatay konumdaki sondaj işleminde parçacık taşınımı için, akışkanın Newton tipli ve Newton tipli olmaması durumları, halkasal bölgenin eş merkezli ve eşmerkezli olmaması durumları, iç ve dış silindir arasındaki mesafe, iç silindir dönme hızı, eksenel yöndeki akışkan basınç gradyanı, viskozite ve parçacık kütlesi gibi faktörlerin parçacığın askıda kalarak hareket ettiği süreyi(residence time in suspension) nasıl etkilediği incelenmiştir. Ayrıca parçacık yörüngelerini belirleyen süperpozisyon modelinin yaklaşık analitik çözümleri bazı konfigürasyonlarda elde edilmiştir. Söz konusu yaklaşımlar iki farklı analitik yaklaşım yönteminin birlikte kullanılmasını zorunlu kılmıştır. Eş merkezli olmayan silindirik bölgede girdap oluşumuna neden olan parametreler belirlenmiş ve dolayısıyla laminer akışın geçerli olduğu parametre kümesi belirlenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Parçacık Taşınımı, Sondaj İşlemi, Laminer Akış, Couette Akışı, Poiseuille Akışı, Eşmerkezli Halkasal Bölge, Eşmerkezli Olmayan Halkasal Bölge, Newtonyan Akışkan, Newtonyan Olmayan Akışkan, Yatay Kuyu, Mekanistik Model, Diferansiyel Transform Yöntemi, Adomian Ayrışımı, Pade Yaklaşımı

PhD. Thesis

SUMMARY

CUTTINGS TRANSPORT MODEL AND ITS ANALYSIS IN ANNULAR REGION  
BETWEEN TWO CYLINDERS

İshak CUMHUR

Karadeniz Technical University  
The Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Mathematics Graduate Program  
Supervisor: Prof. Dr. Erhan COŞKUN  
2011, 201 Pages, 3 Pages Appendices

Efficient transportation of cuttings is very important for a good drilling process. Cuttings transport in an annular region is a complex problem as the transport is affected by many parameters. Predicting effective cuttings transport mechanism requires all of the parameters to be considered simultaneously. To better understand the cuttings transport mechanism, a mechanistic model is used for cuttings in Couette and Poiseuille flow, as well as the Helical flow being the superposition of Couette and Poiseuille flows (Papanastasiou, 2000).

Cuttings residence time in suspension is the main focus of the study. Therefore, we consider the parameters affecting the cuttings transport such as viscosity, inner cylinder rotation speed, axial pressure gradient, particle mass, concentricity of cylinders and spacing between the cylinders, and try to determine the optimum combinations that lead to longer residence time in suspension, which is crucial for cuttings transport. Furthermore, under some assumptions, we obtain approximate analytical expressions for particle trajectories using two different approximate analytical techniques together. In addition to these, we determine the set of parameters that lead to vortices especially in eccentric setting and propose a set of parameters that avoids this turbulence regime.

**Key Words:** Cuttings Transport, Drilling Process, Laminar Flow, Couette Flow, Poiseuille Flow, Concentric Annulus, Eccentric Annulus, Newtonian Fluid, Non-Newtonian Fluid, Horizontal Well, Mechanistic Model, Differential Transform Method, Adomian Decomposition, Pade Approximation

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa No

Şekil 1.	Parçacık taşınım düzeneği: (a) Düzeneğin dikey ve kesit görüntüsü; (b) Genel görüntü Kaynak: (Bedient ve diğerleri, 1994).....	1
Şekil 2.	Eş merkezli olmayan halkasal bölge geometrisi.....	5
Şekil 3.	Akış alanının Şematik gösterimi.....	9
Şekil 4.	İç silindirin durağan ve döndüğü durumlar için, asılı ve durağan parçacıklar ...	9
Şekil 5.	Kartezyen koordinatlar için silindirik halkasal bölge.....	12
Şekil 6.	Silindirik koordinatlar için yatay boru geometrisi.....	13
Şekil 7.	Dairesel Couette Akışının Geometrisi .....	16
Şekil 8.	Halkasal bölgedeki Poiseuille akışının geometrisi .....	18
Şekil 9.	Helisel akış geometrisi.....	21
Şekil 10.	Couette akışı hız profili ( $u_{\theta}(r)$ ) .....	23
Şekil 11.	Poiseuille akışı hız profili ( $u_z(r)$ ) .....	23
Şekil 12.	Helisel akışa karşılık gelen basınç dağılımı.....	24
Şekil 13.	$R$ 'nin konumu, $R \in (r_i/r_o, 1)$ .....	26
Şekil 14.	Farklı $R$ parametreleri için yörüngeler .....	27
Şekil 15.	$x - y$ faz düzleminde akışkan yön alanı .....	30
Şekil 16.	Farklı $R$ değerleri için halkasal bölge içerisinde hız alanları ve akım çizgileri	30
Şekil 17.	Sabit bir $r_i = 0.1 m$ ve farklı dış yarıçaplar için akışkan elemanın konumunun incelenmesi .....	31
Şekil 18.	$\omega = 5$ , $\mu_f = 0.02$ , $\partial P/\partial z = -1$ , $L = 20$ için iç ve dış silindir arasındaki halkasal bölgede akışkan hareketi .....	34
Şekil 19.	$\omega = 1$ , $\mu_f = 0.05$ , $\partial P/\partial z = -1$ , $L = 20$ için iç-dış silindir arasında akışkan yörüngeleri.....	34
Şekil 20.	Farklı $\omega$ hızları ve $\mu_f = 0.02$ , $\partial P/\partial z = -1$ , $L = 20$ değerleri için akışkan yörüngeleri.....	35
Şekil 21.	$\mu_f = 0.02$ , $\partial P/\partial z = -1$ parametreleri için düşük açısız hızlara göre helisel akış yörünge uzunluklarının değişimi.....	36
Şekil 22.	$\mu_f = 0.02$ , $\partial P/\partial z = -1$ parametreleri için yüksek açısız hızlara göre helisel akış yörünge uzunluklarının değişimi .....	36



Şekil 23.	$\mu_f = 0.2, \partial P/\partial z = -1, L = 10$ için $\omega$ parametresine göre yörüngeler arası mesafeler.....	37
Şekil 24.	$\mu_f = 0.2, \partial P/\partial z = -1, L = 10$ için yörüngeler arası mesafenin $\omega$ parametresine göre değişimi.....	37
Şekil 25.	Farklı $\mu_f$ viskoziteler ve $\omega = 1, \partial P/\partial z = -1$ ve $L = 20$ için akışkan yörüngeleri.....	38
Şekil 26.	$\omega = 10, \partial P/\partial z = -1, L = 20$ viskoziteye göre helisel akışta akışkan elemanın yörünge uzunluklarının değişimi.....	39
Şekil 27.	$\omega = 10, \partial P/\partial z = -1$ ve $L = 20$ değerleri için helisel akış yörünge $\mu_f - t$ grafiği.....	39
Şekil 28.	$\omega = 10, \partial P/\partial z = -1$ ve $L = 20$ parametreleri için yüksek viskozite değerlerine göre helisel akışta akışkan elemanın yörünge uzunluklarının değişimi.....	40
Şekil 29.	Farklı hızlarda düşük ve yüksek viskozite değerleri için akışkan elemanı yörüngesi.....	41
Şekil 30.	$\omega = 1, \partial P/\partial z = -1$ ve $L = 10$ ve farklı $\mu_f$ parametresine göre yörüngeler arası mesafeler.....	42
Şekil 31.	$\omega = 1, \partial P/\partial z = -1$ ve $L = 10$ parametreleri için yörüngeler arası mesafenin $\mu_f$ parametresine göre değişimi.....	42
Şekil 32.	Farklı $\partial P/\partial z$ basınç gradyeni ve $\omega = 1, \mu_f = 0.05$ ve $L = 20$ için akışkan yörüngeleri.....	43
Şekil 33.	$\omega = 1, \mu_f = 0.03$ ve $L = 20$ parametre değerleri için basınç değişimine göre helisel akış yörünge uzunluklarının değişimi.....	43
Şekil 34.	$\omega = 1, \mu_f = 0.03, L = 20$ parametreleri için $\partial P/\partial z$ parametresine göre yörüngeler arası mesafenin incelenmesi.....	44
Şekil 35.	$\omega = 1, \mu_f = 0.03, L = 20$ parametreleri için yörüngeler arası mesafenin $\partial P/\partial z$ parametresine göre değişimi.....	44
Şekil 36.	$\omega = 1$ için viskozite ve basınç gradyeni değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunluğu.....	46
Şekil 37.	$\omega = 1$ için viskozite ve basınç gradyenine göre akışkan elemanı yörünge uzunlukları.....	47
Şekil 38.	$\omega = 1$ için viskozite ve basınç gradyenine göre yörüngeler arası mesafeler... ..	47
Şekil 39.	$\omega=10$ için viskozite ve basınç gradyeni değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunluğu.....	48
Şekil 40.	$\omega = 10$ için viskozite ve basınç gradyenine göre yörünge akışkan elemanı uzunlukları.....	49

Şekil 41.	$\mu_f = 0.01$ için hız ve basınç gradyeni değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunluğu .....	50
Şekil 42.	$\mu_f = 0.01$ için açısal hız ve basınç gradyenine göre akışkan elemanı yörünge uzunlukları .....	51
Şekil 43.	$\mu_f = 0.09$ için hız ve basınç gradyeni değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunluğu .....	52
Şekil 44.	$\mu_f = 0.09$ için basınç gradyeni ve açısal hıza göre akışkan elemanı yörünge uzunlukları .....	52
Şekil 45.	$\mu_f = 0.09$ için basınç gradyeni ve açısal hıza göre yörüngeler arası mesafeler.....	53
Şekil 46.	$\partial P/\partial z = -1$ için hız ve viskozite değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunluğu .....	54
Şekil 47.	$\partial P/\partial z = -1$ için viskozite ve açısal hıza göre akışkan elemanı yörünge uzunlukları .....	55
Şekil 48.	$\partial P/\partial z = -1$ için viskozite ve açısal hıza göre yörüngeler arası mesafeler ....	55
Şekil 49.	$\partial P/\partial z = -5$ için hız ve viskozite değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunluğu .....	56
Şekil 50.	$\partial P/\partial z = -5$ için viskozite ve açısal hıza göre akışkan elemanı yörünge uzunlukları .....	57
Şekil 51.	Farklı zaman dilimlerinde sayısal çözüm ve DTM ile elde edilen çözümün karşılaştırılması, (a) $t = 1.5$ için $t - y$ grafiği, (b) $t = 2$ için $t - y$ grafiği....	64
Şekil 52.	Duffing denklemi için sayısal çözümle düzgünleştirilmiş DTM'un karşılaştırılması.....	65
Şekil 53.	Doğrusal olmayan sistemin sayısal ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması.....	73
Şekil 54.	Sistemin analitik ve yaklaşık çözümleri için $t - x$ grafiği.....	75
Şekil 55.	(a) $\omega = 10, \mu_f = 0.05$ ve $a_p = 0.003$ , (b) $\omega = 15, \mu_f = 0.05$ ve $a_p = 0.005$ parametre değerleri için modelin MDTM-Adomian yöntemiyle elde edilen çözüm.....	79
Şekil 56.	$\omega = 10, \mu_f = 0.05$ ve $a_p = 0.0035$ parametre değerleri için farklı $n$ değerlerine karşılık gelen parçacık yörüngeleri.....	79
Şekil 57.	$\omega = 20, \mu_f = 0.06$ ve $a_p = 0.004$ parametre değerleri için modelin MDTM-Adomian yöntemiyle elde edilen çözümü.....	80
Şekil 58.	$\omega = 10, \mu_f = 0.05$ ve $a_p = 0.003$ parametre değerleri için yeniden ölçeklenen modelin MDTM-Adomian yöntemiyle elde edilen çözüm .....	82
Şekil 59.	GAMBİT grafik kullanım arayüzü .....	83

Şekil 60.	$\omega = 10, \mu_f = 0.05$ ve $r_i/r_o = 0.5$ parametreleri için hız vektör alanları: (a) Fluent Hız alanı, (b) Couette Hız alanı.....	84
Şekil 61.	$\mu_f = 0.1$ , farklı $r_i/r_o$ oranları ve farklı hızlar için hız profilleri.....	84
Şekil 62.	$\omega = 20 s^{-1}$ , farklı $r_i/r_o$ oranları ve farklı viskoziteler için hız profilleri.....	85
Şekil 63.	Farklı iç yarıçaplar için halkasal kesitteki hız alanları .....	86
Şekil 64.	$\omega = 10, \mu_f = 0.05$ ve $a_p = 0.003$ parametre değerleri için çözümlerin karşılaştırılması(Couette ve Fluent hız profilleri ile parçacık taşınımı) .....	87
Şekil 65.	Farklı $\omega$ parametrelerine karşılık gelen Couette profilleri .....	88
Şekil 66.	Düşük $\omega$ parametresine göre yörünge uzunluklarının değişimi .....	89
Şekil 67.	Yüksek $\omega$ parametresine göre yörünge uzunluklarının değişimi .....	89
Şekil 68.	$\omega = 10, \mu_f = 0.03$ ve $a_p = 0.001$ parametreleri için dönme yönü parçacık profili.....	90
Şekil 69.	Farklı kütlelere karşılık gelen parçacık yörünge profilleri .....	91
Şekil 70.	$m$ kütle parametresine göre yörünge uzunluklarının değişimi .....	91
Şekil 71.	Düşük viskoziteler için dönme yönünde parçacık yörüngeleri.....	92
Şekil 72.	Düşük viskozite değerlerine göre parçacık yörünge uzunluklarının değişimi..	93
Şekil 73.	Yüksek viskoziteler için dönme yönünde parçacık yörüngeleri.....	93
Şekil 74.	Yüksek viskozite değerlerine göre yörünge uzunluklarının değişimi .....	94
Şekil 75.	$\omega = 10$ için viskozite ve kütle parametrelerine göre iki parametre değişimi ..	95
Şekil 76.	$\omega = 10$ için viskozite ve parçacık kütlelerine göre yörünge uzunlukları.....	96
Şekil 77.	$a_p = 0.003$ için viskozite ve hız parametrelerine göre iki parametre değişimi.....	97
Şekil 78.	$a_p = 0.003$ için viskozite ve hıza göre yörünge uzunlukları.....	97
Şekil 79.	$\mu_f = 0.02$ için kütle ve hız parametrelerine göre iki parametre değişimi.....	98
Şekil 80.	$\mu_f = 0.02$ için kütle ve hıza göre yörünge uzunlukları.....	99
Şekil 81.	$\omega = 10, a_p = 0.001, \mu_f = 0.05, \partial P/\partial z = -1$ parametreleri için parçacık yörüngesi.....	102
Şekil 82.	Farklı $\omega$ hız, $a_p = 0.002, \mu_f = 0.05, \partial P/\partial z = -1$ parametreleri için parçacık yörüngesi .....	103
Şekil 83.	$\mu_f = 0.05, \partial P/\partial z = -1$ ve $\omega = 10, 30$ parametre değerleri için yüksek ve düşük kütleli parçacıkların halkasal bölgedeki konumları .....	104
Şekil 84.	$\mu_f = 0.05, \partial P/\partial z = -1, a_p = 0.002$ ve farklı $\omega$ hız parametrelerine göre yörünge uzunluk değişimi .....	105

Şekil 85.	$\mu_f = 0.04, \partial P/\partial z = -1, a_p = 0.001$ ve $\omega$ hız parametrelerine göre yörüngeler arası mesafeler.....	105
Şekil 86.	$\mu_f = 0.04, \partial P/\partial z = -1, a_p = 0.001$ parametreleri için yörüngeler arası mesafenin $\omega$ hız parametresine göre değişimi.....	105
Şekil 87.	Farklı $\mu_f$ viskozite, $a_p = 0.002, \omega = 10, \partial P/\partial z = -1$ parametreleri için parçacık yörüngesi.....	106
Şekil 88.	$\omega = 10, \partial P/\partial z = -1$ ve $\mu_f = 0.02, 0.05$ parametre değerleri için yüksek ve düşük kütleli parçacıkların halkasal bölgedeki konumları.....	107
Şekil 89.	$\omega = 10, a_p = 0.002, \partial P/\partial z = -1$ ve farklı $\mu_f$ viskozite parametrelerine göre yörünge uzunluk değişimi.....	108
Şekil 90.	$\omega = 10, a_p = 0.0015, \partial P/\partial z = -1$ ve farklı $\mu_f$ parametrelerine göre yörüngeler arası mesafenin incelenmesi.....	108
Şekil 91.	$\omega = 10, a_p = 0.0015, \partial P/\partial z = -1$ ve farklı $\mu_f$ parametresine göre yörüngeler arası mesafenin değişimi.....	108
Şekil 92.	$\partial P/\partial z$ basınç gradyeni, $a_p = 0.002, \omega = 10, \mu_f = 0.05$ parametreleri için yörüngeler.....	109
Şekil 93.	$\omega = 10, \mu_f = 0.05$ ve $\partial P/\partial z = -1, -3$ parametre değerleri için yüksek ve düşük kütleli parçacıkların halkasal bölgedeki konumları.....	110
Şekil 94.	$a_p = 0.002, \mu_f = 0.05, \omega = 10$ parametreleri ve $\partial P/\partial z$ basınç gradyenine göre yörünge uzunluk değişimi.....	111
Şekil 95.	$a_p = 0.0015, \mu_f = 0.05, \omega = 10$ ve $\partial P/\partial z$ basınç gradyeni parametrelerine göre yörüngeler arası mesafenin incelenmesi.....	111
Şekil 96.	Yörüngeler arası mesafenin $a_p = 0.0015, \mu_f = 0.05, \omega = 10$ ve farklı $\partial P/\partial z$ parametrelerine göre değişimi.....	111
Şekil 97.	$a_p$ parçacık kütlesi, $\partial P/\partial z = -1, \omega = 10, \mu_f = 0.05$ parametreleri için yörüngeler.....	112
Şekil 98.	$\partial P/\partial z = -1, \mu_f = 0.05, \omega = 10$ parametreleri ve $m$ parçacık kütlesine göre yörünge uzunluk değişimi.....	113
Şekil 99.	$\partial P/\partial z = -1, \mu_f = 0.05, \omega = 10$ ve $a_p$ parametrelerine göre yörüngeler arası parametrelerin incelenmesi.....	113
Şekil 100.	$\partial P/\partial z = -1, \mu_f = 0.05, \omega = 10$ ve $a_p$ parametresine göre yörüngeler arası mesafenin değişimi.....	113
Şekil 101.	$\omega = 10, \partial P/\partial z = -1$ için viskozite ve kütleye göre iki-parametre değişimi.....	115
Şekil 102.	$\omega = 10, \partial P/\partial z = -1$ için kütle ve viskoziteye göre yörünge uzunlukları..	116

Şekil 103.	$\omega = 10, \partial P/\partial z = -1$ için viskozite ve kütleye göre yörüngeler arası mesafeler.....	116
Şekil 104.	$\omega = 30, \partial P/\partial z = -5$ için viskozite ve kütleye göre iki-parametre değişimi.....	117
Şekil 105.	$\omega = 30, \partial P/\partial z = -5$ için viskozite ve kütleye göre yörünge uzunlukları ..	118
Şekil 106.	$\omega = 30, \partial P/\partial z = -5$ için viskozite ve kütleye göre yörüngeler arası mesafeler.....	118
Şekil 107.	$a_p = 0.001, \partial P/\partial z = -1$ için viskozite ve hıza göre iki-parametre değişimi.....	120
Şekil 108.	$a_p = 0.001, \partial P/\partial z = -1$ için viskozite ve hıza göre yörünge uzunlukları .	120
Şekil 109.	$a_p = 0.001, \partial P/\partial z = -1$ için viskozite ve hıza göre yörüngeler arası mesafeler.....	121
Şekil 110.	$a_p = 0.005, \partial P/\partial z = -5$ için viskozite ve hıza göre iki-parametre değişimi.....	122
Şekil 111.	$a_p = 0.005, \partial P/\partial z = -5$ için viskozite ve hıza göre yörünge uzunlukları .	122
Şekil 112.	$a_p = 0.005, \partial P/\partial z = -5$ için viskozite ve hıza göre yörüngeler arası mesafeler.....	122
Şekil 113.	$\mu_f = 0.01, \partial P/\partial z = -5$ için hız ve kütleye göre iki-parametre değişimi ...	123
Şekil 114.	$\mu_f = 0.01, \partial P/\partial z = -5$ için hız ve kütleye göre yörünge uzunlukları .....	124
Şekil 115.	$\mu_f = 0.09, \partial P/\partial z = -1$ için hız ve kütleye göre iki-parametre değişimi ...	125
Şekil 116.	$\mu_f = 0.09, \partial P/\partial z = -1$ için hız ve kütleye göre yörünge uzunlukları .....	125
Şekil 117.	$\mu_f = 0.09, \partial P/\partial z = -1$ için hız ve kütleye göre yörüngeler arası mesafeler.....	126
Şekil 118.	$\omega = 10, a_p = 0.001$ için basınç ve viskoziteye göre iki-parametre değişimi.....	127
Şekil 119.	$\omega = 10, a_p = 0.001$ için basınç ve viskoziteye göre yörünge uzunlukları...	128
Şekil 120.	$\omega = 10, a_p = 0.001$ için basınç ve viskoziteye göre yörüngeler arası mesafeler.....	128
Şekil 121.	$\omega = 30, a_p = 0.005$ için basınç ve viskoziteye göre iki-parametre değişimi.....	129
Şekil 122.	$\omega = 30, a_p = 0.005$ için basınç ve viskoziteye göre yörünge uzunlukları...	130
Şekil 123.	$\omega = 30, a_p = 0.005$ için basınç ve viskoziteye göre yörüngeler arası mesafeler.....	130
Şekil 124.	$\omega = 10, \mu_f = 0.09$ için basınç gradyeni ve kütleye göre iki-parametre değişimi.....	131

Şekil 125.	$\omega = 10, \mu_f = 0.09$ için basınç ve kütleye göre yörünge uzunlukları.....	132
Şekil 126.	$\omega = 10, \mu_f = 0.09$ için basınç ve kütleye göre yörüngeler arası mesafeler..	132
Şekil 127.	$\omega = 30, \mu_f = 0.01$ için basınç gradyeni ve kütleye göre iki-parametre değişimi.....	133
Şekil 128.	$\omega = 30, \mu_f = 0.01$ için basınç ve kütleye göre yörünge uzunlukları.....	134
Şekil 129.	$\mu_f = 0.01, a_p = 0.005$ için basınç gradyeni ve hıza göre iki-parametre değişimi.....	135
Şekil 130.	$\mu_f = 0.01, a_p = 0.005$ için basınç gradyeni ve hıza göre yörünge uzunlukları .....	135
Şekil 131.	$\mu_f = 0.09, a_p = 0.001$ için basınç gradyeni ve hıza göre iki-parametre değişimi.....	136
Şekil 132.	$\mu_f = 0.09, a_p = 0.001$ için basınç gradyeni ve hıza göre yörünge uzunlukları .....	137
Şekil 133.	$\mu_f = 0.09, a_p = 0.001$ için basınç gradyeni ve hıza göre yörüngeler arası mesafeler.....	137
Şekil 134.	$\omega = 10, \partial P/\partial z = -1, L = 20$ ve $\mu_f = 0.07$ parametreleri için akışkan içerisinde farklı kütleli parçacıkların hareketleri.....	138
Şekil 135.	$\omega = 20, \partial P/\partial z = -1, L = 20$ ve $\mu_f = 0.07$ parametreleri için akışkan içerisinde farklı kütleli parçacıkların hareketleri.....	138
Şekil 136.	Düzlemsel Couette akışı için üst plakanın hareket ettiği paralel iki plaka .....	140
Şekil 137.	Tam gelişmiş Poiseuille akışı için yuvarlak boru geometrisi .....	141
Şekil 138.	İçice geçmiş silindirler için akış şeması .....	144
Şekil 139.	Farklı $n$ değerleri için dönme yönünde hız profilleri .....	145
Şekil 140.	Farklı $r_i$ değerleri için dönme yönünde hız profilleri .....	145
Şekil 141.	Farklı $n$ değerleri için eksenel yönde hız profilleri .....	147
Şekil 142.	Farklı $\mu_0$ değerleri için hız profilleri .....	148
Şekil 143.	Sabit bir $n$ indeksi için farklı $\mu_0$ değerleri için hız profilleri.....	149
Şekil 144.	Halkasal bölgede $r^*$ konumu .....	152
Şekil 145.	Halkasal bölgedeki hız profilinin $n$ indisine göre değişimi.....	154
Şekil 146.	Farklı $n$ indeks değerleri için akışkan yörüngeleri .....	156
Şekil 147.	Farklı indeks-tutarlılık indeksi ve farklı $\partial P/\partial z$ değerleri için hız profilleri..	156
Şekil 148.	Sabit bir $n$ indeksi için farklı akışkanlar için yörünge uzunlukları .....	157
Şekil 149.	Farklı $r^*$ konumları için akışkan elemanı yörüngeleri .....	158
Şekil 150.	Akışkan elemanı yörüngelerinin $r^* - n$ 'ye göre değişimi.....	158

Şekil 151. Newtonyan olmayan akışkan için helisel akış yörüngeleri, ( <a href="http://www.nacad.ufrj.br/~rnelias/gallery/anecc.html">http://www.nacad.ufrj.br/~rnelias/gallery/anecc.html</a> ) .....	159
Şekil 152. Helisel akışta akışkan elemanı yörünge uzunluğunun $r^* - n$ 'ye göre değişimi.....	160
Şekil 153. Farklı $\omega$ hızları için akışkan elemanı yörüngeleri .....	161
Şekil 154. Helisel akışta akışkan elemanı yörünge uzunluklarının farklı $r^*$ 'ler için $\omega - n$ 'ye göre değişimi .....	162
Şekil 155. Farklı $\partial P/\partial z$ basınç gradyenleri için akışkan elemanı yörüngeleri.....	164
Şekil 156. Helisel akışta akışkan elemanı yörünge uzunluklarının farklı $r^*$ 'ler için $-\partial P/\partial z - n$ 'ye göre değişimi .....	165
Şekil 157. Halkasal bölgedeki dönme yönündeki hız profilinin $n$ indisine göre değişimi.....	167
Şekil 158. Dönme yönünde parçacık hareketinin farklı $n$ indekslerine göre incelenmesi .....	168
Şekil 159. Farklı $\omega$ hızları ve $n$ indisine göre parçacık yörüngeleri.....	169
Şekil 160. Parçacık yörünge uzunluğunun $\omega$ hızı ve $n$ indisine göre değişimi.....	170
Şekil 161. Farklı $m$ kütleleri ve $n$ indisine göre parçacık yörüngeleri .....	171
Şekil 162. Parçacık yörünge uzunluğunun $m$ kütlesi ve $n$ indisine göre değişimi.....	172
Şekil 163. Halkasal bölgedeki parçacığın hız profilinin $n$ indisine göre değişimi .....	175
Şekil 164. Parçacık yörüngesinin farklı $n$ indekslerine göre incelenmesi.....	176
Şekil 165. Halkasal bölgede farklı $\omega$ hızları ve $n$ indisine göre parçacık yörüngeleri....	177
Şekil 166. Halkasal bölgede parçacık yörünge uzunluğunun $\omega$ hızı ve $n$ indisine göre değişimi.....	177
Şekil 167. Halkasal bölgede farklı $m$ kütleleri ve $n$ indisine göre parçacık yörüngeleri	179
Şekil 168. Halkasal bölgede parçacık yörünge uzunluğunun $m$ kütlesi ve $n$ indisine göre değişimi .....	179
Şekil 169. Halkasal bölgede farklı $\partial P/\partial z$ basınç gradyenleri ve $n$ indisine göre parçacık yörüngeleri .....	180
Şekil 170. Halkasal bölgede parçacık yörünge uzunluğunun $\partial P/\partial z$ basınç gradyeni ve $n$ indisine göre değişimi.....	181
Şekil 171. $n = 0.36$ , $\mu_0 = 1.49$ , $\omega = 10$ , $\partial P/\partial z = -1$ ve $L = 20$ parametreleri için akışkan içerisinde farklı kütleli parçacıkların hareketleri.....	182
Şekil 172. $n = 0.36$ , $\mu_0 = 1.49$ , $\omega = 20$ , $\partial P/\partial z = -1$ ve $L = 20$ parametreleri için akışkan içerisinde farklı kütleli parçacıkların hareketleri.....	182
Şekil 173. Petrol kuyusunda iç silindirin konumu (Hacıslamoğlu, 1989).....	184

Şekil 174. $e = 0.3$ ve $e = 0.5$ eşmerkezlik parametreleri için hız alanlarının $\omega = 20$ ve $\mu_f = 0.05$ parametreleri için gösterimi .....	185
Şekil 175. Farklı hız parametreleri ve $e = 0.3$ , $\mu_f = 0.1$ için hız alanları.....	186
Şekil 176. Farklı viskozite parametreleri ve $e = 0.3$ , $\omega = 20$ için hız alanları .....	186
Şekil 177. $e = 0.3$ dışmerkezlik değeri ve farklı $\omega$ açısal hızı $\mu_f$ viskozitesi için parçacık yörüngeleri .....	187
Şekil 178. $e = 0.3$ dışmerkezlik değeri için halkasal bölgedeki girdaplar.....	188
Şekil 179. $e = 0.5$ dışmerkezlik değeri ve farklı $\omega$ açısal hızı $\mu_f$ viskozitesi için parçacık yörüngeleri .....	188
Şekil 180. $e = 0.5$ dışmerkezlik değeri için halkasal bölgedeki girdaplar.....	189
Şekil 181. $e = 0.7$ dışmerkezlik değeri ve farklı $\omega$ açısal hızı $\mu_f$ viskozitesi için parçacık yörüngeleri .....	189
Şekil 182. $e = 0.9$ dışmerkezlik değeri ve farklı $\omega$ açısal hızı $\mu_f$ viskozitesi için parçacık yörüngeleri .....	190
Şekil 183. $e = 0.3$ , $\omega = 10$ ve $\mu_f = 0.05$ parametre değerleri için eş merkezli olmayan bölgede parçacık hareketi .....	191
Şekil 184. $e = 0.3$ , $\omega = 20$ ve $\mu_f = 0.15$ parametre değerleri için eş merkezli olmayan bölgede parçacık hareketi .....	191
Şekil 185. $e = 0.3$ , $\omega = 20$ ve $\mu_f = 0.15$ parametre değerleri için eş merkezli olmayan bölgede parçacık hareketinin kütleyle göre incelenmesi .....	192
Şekil 186. $e = 0.5$ , $\omega = 10$ ve $\mu_f = 0.05$ parametre değerleri için eş merkezli olmayan bölgede parçacık hareketi .....	193
Şekil 187. $e = 0.5$ , $\omega = 20$ ve $\mu_f = 0.15$ parametre değerleri için eş merkezli olmayan bölgede parçacık hareketi .....	193



## TABLolar DİZİNİ

### Sayfa No

Tablo 1.	Model parametreleri(boyut ve büyüklük mertebeleri).....	10
Tablo 2.	$\mu_f = 0.02, \partial P/\partial z = -1, L = 20$ parametre değerleri ve düşük $\omega$ hızlarına göre yörünge uzunlukları.....	35
Tablo 3.	$\mu_f = 0.02, \partial P/\partial z = -1, L = 20$ parametre değerleri ve yüksek $\omega$ hızlarına göre yörünge uzunlukları.....	36
Tablo 4.	$\omega = 1, \partial P/\partial z = -1, L = 20$ parametre değerleri ve farklı $\mu_f$ viskozitesine göre yörünge uzunlukları.....	39
Tablo 5.	$\partial P/\partial z = -1, L = 20$ parametreleri değerleri ve $\omega = 1, \omega = 10$ hızlarında düşük viskozite değerlerine göre yörünge uzunlukları.....	40
Tablo 6.	$\partial P/\partial z = -1, L = 20$ parametreleri değerleri ve $\omega = 1, \omega = 10$ hızlarında yüksek viskozite değerlerine göre yörünge uzunlukları.....	41
Tablo 7.	$\omega = 1, \mu_f = 0.05, L = 20$ değerleri ve farklı basınç gradyenlerine göre yörünge uzunlukları.....	43
Tablo 8.	$\omega = 1$ için $\mu_f - \partial P/\partial z$ değişimi.....	45
Tablo 9.	$\omega = 10$ için $\mu_f - \partial P/\partial z$ değişimi.....	48
Tablo 10.	$\mu_f = 0.01$ için $\omega - \partial P/\partial z$ değişimi.....	50
Tablo 11.	$\mu_f = 0.09$ için $\omega - \partial P/\partial z$ değişimi.....	51
Tablo 12.	$\partial P/\partial z = -1$ için $\mu_f - \omega$ değişimi.....	54
Tablo 13.	$\partial P/\partial z = -5$ için $\mu_f - \omega$ değişimi.....	56
Tablo 14.	Diferansiyel Dönüşüm Metodunun Temel Özellikleri.....	61
Tablo 15.	$u(r) = ae^{-r/b}$ için hesaplanan $a$ ve $b$ değerleri.....	87
Tablo 16.	$a_p = 0.003, \mu_f = 0.03$ parametre değerleri için düşük ve yüksek hızlarda yörünge uzunlukları.....	89
Tablo 17.	$\omega = 10, \mu_f = 0.03$ parametre değerleri ve farklı $a_p$ değerleri için yörünge uzunlukları.....	91
Tablo 18.	$a_p = 0.002, \omega = 10$ parametre değerleri ve düşük viskozite değerlerine göre yörünge uzunlukları.....	92
Tablo 19.	$a_p = 0.002, \omega = 10$ parametre değerleri ve yüksek viskozite değerlerine göre yörünge uzunlukları.....	94
Tablo 20.	Yatay borularda, $\omega = 10$ için kütle ve viskozite değişimi.....	95

Tablo 21.	Yatay borularda, $a_p = 0.003$ için hız ve viskozite değişimi .....	96
Tablo 22.	Yatay borularda, $\mu_f = 0.02$ için hız ve kütle değişimi .....	98
Tablo 23.	$\mu_f = 0.05, \partial P/\partial z = -1, a_p = 0.002$ parametre değerleri ve farklı hızlara göre yörünge uzunlukları .....	104
Tablo 24.	$\omega = 10, a_p = 0.002, \partial P/\partial z = -1$ parametre değerleri ve farklı viskoziteler için yörünge uzunlukları .....	107
Tablo 25.	$a_p = 0.002, \mu_f = 0.05, \omega = 10$ parametre değerleri ve farklı basınç gradyeni değerlerine göre yörünge uzunlukları .....	110
Tablo 26.	$\partial P/\partial z = -1, \mu_f = 0.05, \omega = 10$ parametre değerleri ve farklı kütle değerlerine göre yörünge uzunlukları .....	112
Tablo 27.	Yatay borularda ( $L = 20m$ ), $\omega = 10, \partial P/\partial z = -1$ için $m - \mu_f$ değişimi ..	115
Tablo 28.	Yatay borularda ( $L = 20m$ ), $\omega = 30, \partial P/\partial z = -5$ için $m - \mu_f$ değişimi ..	117
Tablo 29.	Yatay borularda ( $L = 20m$ ), $a_p = 0.001, \partial P/\partial z = -1$ için $\omega - \mu_f$ değişimi .....	119
Tablo 30.	Yatay borularda ( $L = 20m$ ), $a_p = 0.005, \partial P/\partial z = -5$ için $\omega - \mu_f$ değişimi .....	121
Tablo 31.	Yatay borularda ( $L = 20m$ ), $\mu_f = 0.01, \partial P/\partial z = -5$ için $m - \omega$ değişimi .....	123
Tablo 32.	Yatay borularda ( $L = 20m$ ), $\mu_f = 0.09, \partial P/\partial z = -1$ için $m - \omega$ değişimi	124
Tablo 33.	Yatay borularda ( $L = 20m$ ), $\omega = 10, a_p = 0.001$ için $\partial P/\partial z - \mu_f$ değişimi .....	127
Tablo 34.	Yatay borularda ( $L = 20m$ ), $\omega = 30, a_p = 0.005$ için $\partial P/\partial z - \mu_f$ değişimi .....	129
Tablo 35.	Yatay borularda ( $L = 20m$ ), $\omega = 10, \mu_f = 0.09$ için $m - \partial P/\partial z$ değişimi .....	131
Tablo 36.	Yatay borularda ( $L = 20m$ ), $\omega = 30, \mu_f = 0.01$ için $m - \partial P/\partial z$ değişimi .....	133
Tablo 37.	Yatay borularda ( $L = 20m$ ), $\mu_f = 0.01, a_p = 0.005$ için $\omega - \partial P/\partial z$ değişimi .....	135
Tablo 38.	Yatay borularda ( $L = 20m$ ), $\mu_f = 0.09, a_p = 0.001$ için $\omega - \partial P/\partial z$ değişimi .....	136
Tablo 39.	Akışkan tiplerine göre $n$ ve $\mu_0$ değerleri (Mojisola G. Enilari, 2005) .....	155
Tablo 40.	$r^* - n$ değişimine göre akışkan yörünge uzunlukları .....	159
Tablo 41.	$\partial P/\partial z$ basınç gradyeni ve farklı akışkan tipleri için akışkan elemanlarının ortalama yörünge uzunlukları .....	160

Tablo 42.	$r^* = 0.7$ için $\omega - n$ değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunlukları .	161
Tablo 43.	$r^*$ konumları ve $\omega$ 'ye göre farklı akışkan tipleri için akışkan elemanın ortalama yörünge uzunlukları .....	162
Tablo 44.	$r^* = 0.7$ için sabit bir hızda maksimum uzunlukları veren $n$ ve $\mu_0$ değerleri .....	163
Tablo 45.	$r^* = 0.6$ için $-\partial P/\partial z - n$ değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunlukları .....	164
Tablo 46.	$r^*$ konumları ve $\partial P/\partial z$ 'ye göre farklı akışkan tipleri için akışkan elemanı ortalama yörünge uzunlukları .....	165
Tablo 47.	$\omega - n$ değişimine göre parçacık yörünge uzunlukları.....	169
Tablo 48.	$m$ kütlesi ve $\omega$ 'ye göre farklı akışkan tipleri için ortalama yörünge uzunlukları .....	170
Tablo 49.	$a_p = 0.002$ için sabit bir hızda maksimum uzunlukları veren $n$ değerleri ....	171
Tablo 50.	$m - n$ değişimine göre parçacık yörünge uzunlukları .....	172
Tablo 51.	$\omega$ hızı ve $m$ 'ye göre farklı akışkan tipleri için ortalama yörünge uzunlukları .....	172
Tablo 52.	Halkasal bölgede $\omega - n$ değişimine göre parçacık yörünge uzunlukları .....	177
Tablo 53.	$a_p = 0.002$ için sabit bir hızda maksimum uzunlukları veren $n$ ve $\mu_0$ değerleri .....	178
Tablo 54.	Halkasal bölgede $m - n$ değişimine göre parçacık yörünge uzunlukları.....	179
Tablo 55.	Halkasal bölgede $-\partial P/\partial z - n$ değişimine göre parçacık yörünge uzunlukları .....	180

## SEMBOLLER DİZİNİ VE BİRİMLERİ(MKS)

$u$	: Hız [ $m/s$ ]
$u^*$	: Boyutsuz hız ( $= u/V$ )
$r$	: Radyal değişken [ $m$ ]
$r^*$	: Boyutsuz radyal değişken( $= r/r_o$ )
$r_i$	: İç silindir yarıçapı
$r_o$	: Dış silindir yarıçapı
$\theta$	: Dönme açısı
$y$	: Koordinat düşey eksenini [ $m$ ]
$z$	: Eksenel yön [ $m$ ]
$z^*$	: Boyutsuz eksenel koordinat ( $= z/L$ )
$\omega_i$	: İç silindir açısal hızı [ $1/s$ ]
$V$	: İç silindir dönme hızı ( $=\omega_i r_i$ ) [ $m/s$ ]
$e$	: Dış merkezlik ( $= r_2/(r_o - r_i)$ )
$\partial P/\partial z$	: Basınç gradyeni [ $kg/(m^2 \cdot s^2)$ ]
$L$	: Sistem için boru uzunluğu [ $m$ ]
$\mu$	: Dinamik viskozite [ $kg/(m \cdot s)$ ]
$\vartheta$	: Kinematik viskozite [ $m^2/s$ ]
$\rho$	: Yoğunluk [ $kg/m^3$ ]
$\omega$	: Açısal hız [ $s^{-1}$ ]

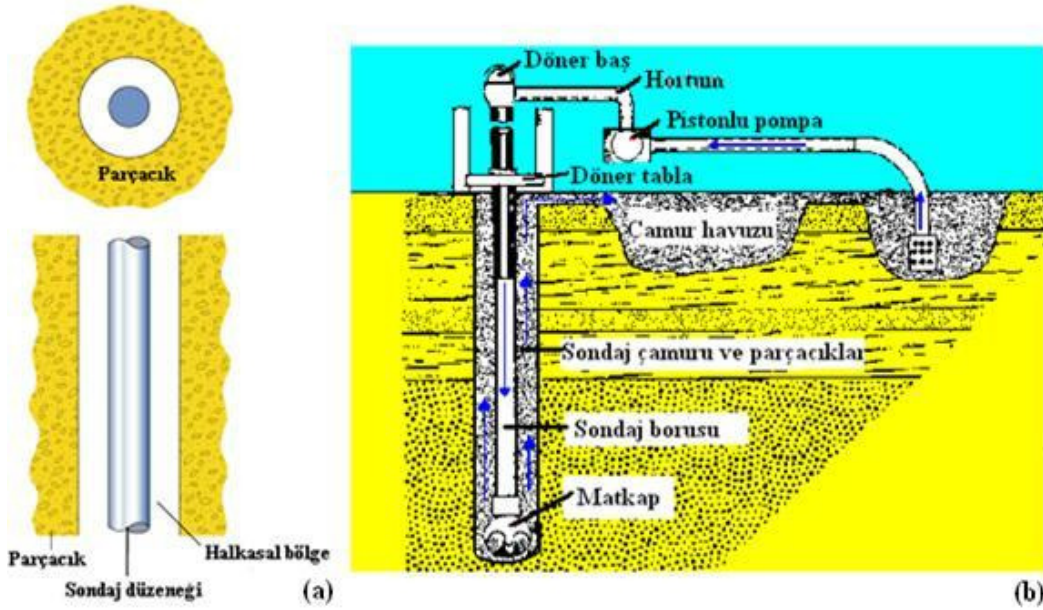
### Alt indisler:

$i$	: İç
$o$	: Dış
$p$	: Parçacık
$f$	: Akışkan
$max$	: Maksimum
$ort$	: Ortalama
$\vec{r}$	: Radyal yön
$\vec{\theta}$	: Dönme yönü
$\vec{z}$	: Eksenel yön

## 1. GENEL BİLGİLER

### 1.1. Giriş

Petrol boru hattı sondaj işleminde ortaya çıkan parçacık taşınımı güncelliğini koruyan önemli bir problemdir. Söz konusu problem (Bolchover, 2007), 26-30 Mart 2007 tarihlerinde Nottingham Üniversitesi'nde düzenlenen Endüstriyel Matematik Çalıştayında ele alınmıştır. Bir petrol kuyusunun sondajı esnasında oluşan parçacıkları yüzeye taşımak gereklidir. Bunun için sondaj borusunun merkezi boyunca borunun başlığından akışkan pompalanır. Bu durumda sondaj borusu ile açılan delik arasındaki halkasal bölgeden yüzeye parçacıklar geri taşınmalıdır. Sondaj borusu içerisinden pompalanan sıvı genelde viskoz, Newtonyan olmayan, jel ve hareketsiz halde iken katılaşma gibi reolojik özelliklere sahiptir. Halkasal bölgedeki yukarıya doğru olan akış genelde laminer olmakla beraber duruma bağlı olarak türbülanslı da olabilir. Modele ait parçacık taşınım düzeneği Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. Parçacık taşınım düzeneği: (a) Düzeneğin dikey ve kesit görüntüsü; (b) Genel görüntü Kaynak: (Bedient ve diğerleri, 1994)

Bu çalışmada Couette ve Poiseuille akışlarının uygun süperpozisyonu akışkan modeli olarak kabul edilmekte ve akışkan içerisinde Newton yasasını esas alan parçacık taşınım

modeli incelenmektedir. Amacımız parçacıkların askıda kalma zamanını maksimize edecek parametre kümesini belirlemektir.

- Sondaj işlemi, kayacın parçalanması için gerekli enerji, matkaba verilen ağırlık ve dönme hareketi ile sağlanır. Matkap bir boru dizisinin ucunda yeraltına indirilir ve döndürülür. Dönerken üzerine gelen ağırlık etkisiyle ve dişleri aracılığıyla ile kayacı parçalar.
- Kayaçtan kopan parçalar boru dizisinin içinden pompalan hava veya bir sıvı ile tabandan alınarak boru ile delik arasında kalan ve halkasal bölge denilen aralıktan yüzeye taşınır. Yüzeyde, taşınan malzeme, çamur havuzlarına kanalize edilir, çökmeye bırakılır. Temiz sondaj sıvısı, çamur havuzunun uzak köşesinden veya ikinci bir çamur havuzundan çekilerek kuyu deliğine çekilerek kuyu içerisinde tekrardan sirkülasyona katılması sağlanır.
- Bu sistemde süreklilik vardır yani kayacın parçalanması ve kesintilerin yukarıya taşınması sondaja ara verilmeden yapılmaktadır.

Parçacıkları yüzeye taşımak için enjekte edilen akışkanın yeterliliğini hesaplamak isteriz. Özellikle, verilen bir kuyu kesitinde parçacıkların yoğunluğu bilindiğinde, kuyu boyunca parçacıklarının akışını belirleyen mekanistik bir modele ihtiyaç vardır. Sondaj sıvısının görevlerini şu şekilde sıralayabiliriz:

- Tabanın temizlenmesi,
- Parçacıkların sıkışmadan ve birikmeden yüzeye taşınımı,
- Parçacıkların çökmesini önleme,
- Matkabin ve boruların soğutulması ve yağlanması,
- Göçmeye ve oluk oluşumuna engel olma,
- Gerekli akışkan yoğunluğu sayesinde sondaj hattına yönelik dış basınç karşısında dengeleyici unsur olmasıdır.

Sondaj kuyuları dikey olmayabilir. Modern petrol kuyuları kilometreler boyunca yatay olarak uzanabilmektedir. Dikey olmayan kısımda, parçacık yatağı halkasal bölgenin en alt sınırında oluşurken, parçacıkların bazıları akışkanda asılı kalır. Parçacık yatağı, durağan olabildiği gibi akışkan akışıyla yukarı sürüklenen veya yerçekimi etkisi ile aşağı doğru kaymalı da olabilir. Sondaj düzeneğinin dış merkezli olması ve düzeneğin dönmesi türbülanslı olmayan bir akış için parçacık taşınımında önemlidir.

Schlumberger adlı petrol şirketi sondaj düzeneğinin dönmediği durumlarda birçok mekanistik model vermektedir. (Bolchover, 2007)'de modelin dönme etkilerinin de göz

önüne alındığı bir durumda modelin nasıl değiştirilmesi gerektiği üzerine çalışmalar yapılmıştır. Yapılan bu çalışmada yatay borular için sadece dönme yönünde akışın olduğu durumda pertürbasyon yöntemi ve sayısal yöntemlerle parçacık hareketi analiz edilmeye başlanmıştır.

Bu çalışmada, eşmerkezli halkasal bölgede dönme yönünde Couette ve eksenel yönde Poiseuille akışlarının süperpozisyonu ile elde edilen helisel akış modeli ve akış karakteristikleri incelendikten sonra, söz konusu akış içerisinde parçacık taşınım modeli analiz edilmiştir. Akışkan viskozitesi, iç silindir ve dış silindir arasındaki mesafe, eksenel yöndeki basınç gradyeni ve parçacık kütlelerinin değişimine göre parçacık yörünge uzunlukları belirlenmiş ve en uzun yörüngeyi veren parametre aralıkları belirlenmiştir. Bu sonucun uygulamadaki karşılığı ise şudur: en uzun yörüngeye sahip parametre kümeleri içerisinde sondaj işleminin gerçekleştirilmesi, muhtemelen borular arasında daha az parçacık birikimine neden olacaktır. Ayrıca parçacık taşınım modeli ile hangi parametre değişiminin parçacık yörüngesi üzerindeki etkisinin daha fazla olduğu incelenebilmektedir.

Parçacık büyüklükleri iç silindirin dönme hızı ve sondaj mekanizmasının serbest bırakılan ağırlığı sayesinde kısmen kontrol edilebilmektedir.

Eş merkezli olmayan bölgede dönme yönünde belirli bir parametreler kümesi içerisinde girdap oluşumu söz konusudur. Söz konusu bölge için Navier-Stokes sistemi kullanan FLUENT yazılımı yardımıyla akışkan profilleri elde edilmiş ve girdapsız akış sağlayan parametreler kümesi belirlenmiştir. Girdapsız akışın geçerli olduğu bölgede akışkan parçacık taşınım modeli faydalı sonuçlar vermektedir. Girdaplı akış içerisinde parçacık taşınım incelenmiş ve mevcut girdapların parçacık yörünge uzunluklarında belirsizliklere neden olabileceği gözlemlenmiştir.

## 1.2. Terminoloji

Laminer ve türbülanslı akış: Laminer akış, çalkantısız akışkan tabakaları ile karakterize edilen çok düzenli akışkan hareketidir. Türbülanslı akış, yüksek hızlarda görülen ve hız çalkantıları ile nitelendirilen çok düzensiz akışkan hareketleri olarak bilinir. Laminer ve türbülanslı akış, Reynolds sayısı adı verilen boyutsuz bir parametre yardımıyla belirlenir.

Daimi akış: Daimi terimi, bir noktada zaman içerisinde hiçbir değişimin olmadığını ifade eder.  $\vec{U}$  hız alanı olmak üzere, daimi akışta herhangi bir sabit noktada  $\partial \vec{U} / \partial t = 0$ 'dır. Bu durum  $U$ 'nun sabit olduğu anlamını taşımaz.

Sıkıştırılabilir ve sıkıştırılmaz akış: Yoğunluk akış boyunca her yerde yaklaşık sabit kalıyorsa akışın sıkıştırılmaz olduğu söylenir. Yoğunlukta önemli değişiklikler içeren akışlar ise sıkıştırılabilir akışlardır. Ayrıca sıkıştırılmaz akışlar  $\nabla \cdot \vec{U} = 0$  ile karakterize edilir.

Viskozite: Sıvılarda moleküller arasındaki çekim kuvvetlerinden, gazlarda ise moleküllerin çarpışmalarından kaynaklanır. Yani akışkanın akmaya karşı gösterdiği dirençtir. Dinamik viskozite olarak da adlandırılır ve  $\mu$  ile gösterilir.

Kinematik viskozite: Dinamik viskozitenin yoğunluğa oranıdır ( $\nu = \mu / \rho$ ).

Newton tipli akışkan: Deformasyon oranının (şekil değiştirme hızı) kayma gerilmesi ile orantılı olduğu akışkanlara Newton tipi akışkanlar denir.  $\tau$  kayma gerilmesi olmak üzere sabit bir  $\mu$  için, tek boyutlu  $u = u(y)$  değişiminde  $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ 'dir. Hava ve diğer benzer gazlar, su, gazyağı, benzin ve bazı yağ-bazlı sıvılar gibi pek çok yaygın akışkan Newton tipi akışkandır. Öte yandan, kayma gerilmesi ile şekil değiştirme hızı arasındaki ilişki doğrusal değilse bu tip akışkanlara ise Newton tipli olmayan akışkanlar denir. İnce çamurumsu karışımlar ve peltensi süspansiyonlar, polimer çözeltileri, kan, macun, cıvık kek hamuru bazı Newton tipli olmayan akışkanlara örnektir.

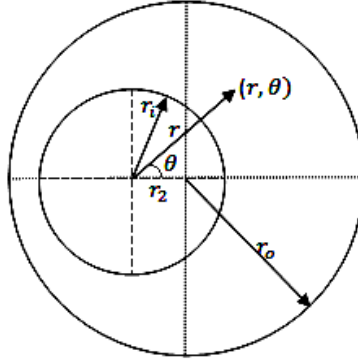
Reynolds sayısı: Atalet kuvvetlerin viskoz kuvvetlere oranıdır.  $U_{ort}$  ortalama akış hızı,  $D$  geometrinin karakteristik uzunluğu,  $\mu$  dinamik viskozite olmak üzere,  $Re = \frac{\rho U_{ort} D}{\mu}$  şeklindedir.

Poiseuille- Couette Akışları: Poiseuille-Couette akışları yarı parabolik hız profili sergiler. Akışkan tabakası, hareketli tabaka ve ek olarak basınç kuvveti ile hareket ettiği zaman yarı parabolik hız profili oluşur. Bu tip profillerin limit durumları, parabolik hız profili ve doğrusal hız profilidir. Parabolik hız profilleri Poiseuille akışını temsil eder ve bu tip akışlar basınç gradyeni ile oluşturulur. Plakaların bir tanesinin bağlı hareketinden dolayı oluşan akışa uyan hız profilleri Couette akışı olarak bilinir. Poiseuille-Couette akışı ise hem Poiseuille hem de Couette akışlarının süperpozisyonundan oluşan bir akıştır.

Eşmerkezlilik ve Dışmerkezlik: Farklı yarıçaplı ve aynı merkezli çemberler arasında kalan bölgeye eş merkezli (concentric) bölge adı verilir. Farklı yarıçaplı ve farklı merkezli çemberler arasında kalan bölgeye ise dışmerkezli (eccentric) bölge adı verilir. Akışkan



akımı, halkasal bölgenin dışmerkezliğine, iç silindir dönme hızına ve akışkan reolojisine bağlıdır. Şekil 2’de gösterilen bölgenin dışmerkezliği  $e = r_2/(r_o - r_i)$  ile tanımlanır. Burada  $r_2$  merkezler arasındaki uzaklık,  $r_o$ ,  $r_i$  ise sırasıyla büyük ve küçük çemberin yarıçaplarıdır. Bölge içerisindeki herhangi bir noktanın koordinatı  $(r, \theta)$  kutupsal gösterim yardımıyla belirlenebilir.  $e = 0$  ise eşmerkezli ve sondaj düzeneğinin çepere yaklaşması durumu ise  $e \rightarrow 1$ ’dir ve dışmerkezliği gösterir.



Şekil 2. Eş merkezli olmayan halkasal bölge geometrisi

### 1.3. Literatür Araştırması

Bu çalışmada Navier - Stokes denklemlerinin kartezyen ve silindirik koordinatlardaki ifadeleri ve analitik çözümün mümkün olduğu özel durumlar gözden geçirildikten sonra, aksenal ve dönme yönünde akışkan hız profilleri ve daha sonra ise halkasal bölgedeki akış için basitleştirilmiş bir model ile akışkan ve parçacık yörüngeleri elde edilecektir. Modelde akışkanın Newtonyan akışkan, sondaj düzeneğinin yatay konumda ve eş merkezli, yerçekimi etkilerinin ihmal edildiği, tabandan ise sabit bir basıncın uygulandığı durumlar göz önüne alınacaktır.

Halkasal bölgedeki Laminer akış için literatürdeki analitik çalışmalara (Synder ve Goldstein, 1965), (Redberger ve Charles, 1962), (Tosun, 1984) göre, aynı basınç gradyeni için, boru merkezlerinin eşmerkezden ayrı merkezlere doğru değişmesi, hacimsel debide %240’a kadar varan artışlar sağlamaktadır. Böylece aynı miktardaki sıvı, ayrı ve eş merkezli iki boru arasından geçirildiğinde, aynı merkezli boru sisteminde daha az pompa gücüne ihtiyaç vardır.

Petrol üretiminde, petrol toprağın derinliklerinden sondaj yöntemi ile toprak seviyesine çıkartılır. Bu işlemde, sondaj hattında sondaj borusu ve ucunda sondaj matkabı

kullanılır. Sondaj borusu ile toprak arasında ise halkasal bölge oluşur. Aynı merkezli boru sistemlerindeki basınç düşmesinin eşmerkezliye nazaran daha düşük olduğu göz önüne alınırsa, sondajda kullanılan boruların aynı merkezli olması sistemde enerji tasarrufuna neden olacaktır (Tosun, 1986).

Bir sondaj işleminin hem planlamasında hem de uygulanması sırasında en fazla dikkat edilmesi gereken konulardan birisi, kuyudan etkili bir şekilde kesintilerin(parçacık) atılmasıdır. Yetersiz kuyu temizliği kuyunun tıkanması, formasyonun çatlaması, yüksek dönme ve çekme kuvvetleri gibi ciddi sondaj problemlerine yol açmaktadır (Brown, 1989), (Özbayoğlu, 2005). Eğer bu durum uygun bir şekilde çözülmezse, bu problemler kuyunun kaybedilmesine dahi neden olabilir. Sadece borunun tıkanması bile bir milyon dolarlık bir masraf çıkartabilir (Bardley, 1991). Bu tür sorunlardan korunmak için sondaj kuyusunda üretilen kesintiler, sondaj sıvısı yardımıyla etkin bir biçimde kuyudan atılmalıdır. Sondaj sıvısının kesintileri kaldırma kabiliyeti genellikle sıvının taşıma kapasitesi olarak adlandırılır. Sıvının taşıma kapasitesini etkileyen en önemli faktörler şunlardır: 1) sondaj akışkanının hızı 2) kuyu eğimi 3) sondaj sıvısının özellikleri 4) borunun delme hızı 5) boru/ kuyu dışmerkezliği 6) kuyu geometrisi 7) kesintinin özellikleri ve 8) borunun dönme hızı (Tomren, 1986). Aslında sondaj sıvısının hızı, kesinti yatağının oluşumunu etkileyen kayma gerilimini (shear stress) doğrudan etkilediğinden dolayı kuyu temizliği için en önemli değişkendir (Kjosnes, 2003). Yatay ve yüksek eğimli kuyulardan kesintilerin atılması, kesinti yatağının oluşması için, kesinti yatağı yüzeyine yeterli bir kesme gerilimi uygulanmalıdır. Bu kaldırma işlemi, sadece sondaj sıvısının özelliklerine bağlı olmayıp, kesintinin özellikleriyle de doğrudan ilişkilidir. Ayrıca sondaj sıvısı ve kesintiler arasındaki etkileşimden dolayı meydana gelen jel oluşumu, kesinti yatağı oluşumunu engelleyen kesme gerilimini önemli derecede artırmakta ve kesintilerin kuyu dibinden yüzeye taşınmasına yardımcı olmaktadır (Saasen, 2002), (Becker, 1991).

Kesinti(parçacık) taşıma işlemi üzerine yapılan çalışmalar son 70 yıldır devam etmektedir. Bu çalışmalar iki kategoriye ayrılabilir: i) deneysel ii) teorik. (Wilson, 1974), çalışmada bir kesinti tabakası ve durağan parçacık yatağından oluşan iki-fazlı mekanistik bir model geliştirmiştir. Bu model sonuçlarının Newtonyan akışkanlarda deneysel sonuçlarla uyumlu olduğu görülmüştür. (Wilson, 1976-1984) ayrıca, durağan parçacık yataklarını önlemek için gerekli olan minimum akış oranını belirleyen hareketli parçacık yatağı modelini ortaya atmıştır. Model sonuçları deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır. (Tomren, Iyoho and Azar, 1986) akış rejiminin, dış merkezliğin, kuyu

eğiminin, taşıma kapasitesi performansı üzerine etkisini araştırmışlardır. Ayrıca (Iyoho ve Azar, 1981), eş merkezli olmayan halkasal bölgede Newtonyan olmayan akışkan akışı için yaklaşık bir halkasal akış modeli geliştirmişler ve hız profillerini belirlemişlerdir. (Tosun, 1987), dış merkezliğin ve yarıçapın bir fonksiyonu olarak eş merkezli olmayan halkasal bölgede hacimsel debiyi hesaplamak için (Iyoho ve Azar, 1981)'nin metodunu geliştirmiştir. (Becker, Azar ve Okrajni, 1991) akışkanın içsel özelliklerinin (akma noktası, plastik akmazlık, v.b.) kuyu temizliği üzerindeki etkilerini deneysel olarak incelemişlerdir. Yüksek eğimli kuyular için türbülanslı akışın, kesintilerin taşınmasını kolaylaştırdığını, düşük eğimli kuyularda ise akışkanın özelliklerinin belirleyici olduğunu göstermişlerdir. (Sifferman ve Becker, 1992) akışkanın akış hızının, yoğunluğunun, kuyu eğiminin ve borunun dönüş hızının kesinti yatağının kalınlığını etkileyen değişkenler olduklarını ifade etmişlerdir. (Sanchez, 1999), eğimli kuyularda sondaj işlemi sırasında, kuyu temizliği üzerinde borunun dönmesinin etkisini incelemiştir. (Yue ve arkadaşları, 2004) ise kimyasal katkı maddeleri kullanarak, kesintilerin yüzeyine gaz baloncukları ekleyerek, yatay ve eğimli kuyularda sondaj sıvısının taşıma kapasitesini artıracak yeni bir yaklaşım önermişlerdir. Ayrıca yatay ve eğimli kuyularda kesintilerin taşınması ve kesinti yatağının oluşma mekanizmasının tespit edilmesi için çok sayıda teorik ve mekanistik model ortaya konmuştur. İki ve üç tabakalı modeller mevcuttur (Özbayoğlu, 2005), (Gavignet, 1989), (Clark, 1994), (Nguyen, 1998), (Kamp, 1999). Bu modellerin performansı farklı sondaj simülasyonlarında test edilmiştir.

Ayrıca kesinti yatağının oluşmasını engellemek için kritik akışkan hızları, teorik ya da deneysel olarak bulunmuştur. (Larsen, Pilehvari ve Azar, 1997) yüksek eğimli ve yatay kuyularda, tüm kesintilerin taşınması için gerekli olan kritik hızı tahmin eden yeni bir kesinti taşıma modeli önermişlerdir. (Cho ve arkadaşları, 2000), (Nguyen ve Rahman, 1998)'in modeline benzer bir üç tabakalı model geliştirmişlerdir. Bir simülasyon geliştirmişler, var olan model sonuçlarıyla diğer araştırmacılar tarafından yapılan deney sonuçlarını karşılaştırmışlardır. Sondaj operasyonlarında mümkün olan en düşük basıncın bulunması için grafikler geliştirmişlerdir. Ayrıca simülasyon sonuçlarını kullanarak kesinti yatağının oluşmasını engellemek için minimum kritik hızı gözlemlemişlerdir. (Masuda ve arkadaşları, 2000) ise borunun içindeki kritik akışkan hızını belirlemek amacıyla farklı akış koşulları için deneysel ve nümerik araştırmalar yapmışlardır.

Schlumberger adlı petrol şirketi sondaj düzeneğinin dönmediği durumlarda birçok mekanistik model vermektedir. (Bolchover, 2007), dönme etkilerinin ve dış merkezliğin de

göz önüne alındığı bir durumda modelin nasıl değiştirilmesi gerektiği üzerine çalışmalar yapılmıştır. Yapılan bu çalışmada yatay borular için sadece dönme yönünde akışın olduğu durumda perturbasyon yöntemi ve sayısal yöntemlerle başlangıç analiz sonuçları verilmiştir.

(Belavadi and Chukwu, 1994), farklı parçacık boyutlarında deneysel olarak çalışmışlar ve küçük boyuttaki parçacıkların dışarıya atılmasının, yüksek yoğunluktaki akışkan için, iç silindirin hızıyla bağlantılı olduğunu göstermişlerdir. (Sifferman, 1973), parçacık boyutunun parçacık taşınımında orta derecede etkili olduğunu göstermiştir. (Walker ve Li, 2000), parçacık taşınımında önemli etkisi olan parçacık boyutundaki artışının taşınımında zorluk oluşturduğunu deneysel olarak göstermişlerdir.

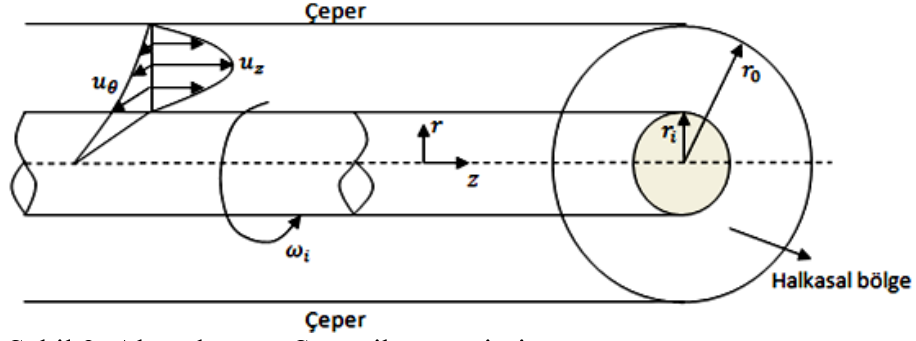
Biz ise bu çalışmada öncelikle eşmerkezli halkasal bölgede Bölüm (2.1)'de laminar rejim içerisinde akışkanın hareketini, dönme yönünde Couette ve eksenel yönde Poiseuille akışının bir süperpozisyonu olan helisel akışın (Papanastasiou, 2000) analizini gerçekleştiriyoruz. Akışkan modelinde analitik çözümü elde edip bu çözüme göre sistem üzerinde etkin olan viskozite, parçacık kütleleri ve basınç gradyeni değerlerine göre analizler yapıyoruz. Bölüm (2.2)'de sadece dönme yönünde olan parçacık taşınımı inceliyoruz. Bölüm (2.3)'de eksenel yönde Poiseuille akışının Couette akışı ile birlikte düşünüldüğü helisel akış içerisindeki parçacık taşınımı inceliyoruz. Bölüm (2.4)'de akışkan modelini bu sefer Newtonyan olmayan akışkanlar için veriyoruz. Bölüm (2.5) ve (2.6)'da ise, sırasıyla, sadece dönme yönünde Couette akışının ve Couette akışı ile birlikte eksenel yönde Poiseuille akışlarının olduğu parçacık taşınım modelleri Newtonyan olmayan modeller için veriyoruz. Bölüm (2.7)'de eş merkezli olmayan bölgede parçacık taşınımı ile ilgili bilgiler veriyoruz.

#### **1.4. Problem Tasviri**

Çalışmanın motivasyon kaynağı (Bolchover, 2007) çalıştay raporudur. Raporda parçacık taşınımı ile ilgili probleme yer verilmiş ve ele alınan model, yatay borularda ve sadece dönme yönünde olan bir akış için (Couette akışı) ele alınmıştır. Ayrıca modelde sondaj düzeneğinin eş merkezli olduğu kabul edilmiştir. Raporda, parçacık profillerini hesaplamak için sayısal çözüm yöntemleri kullanılmıştır.

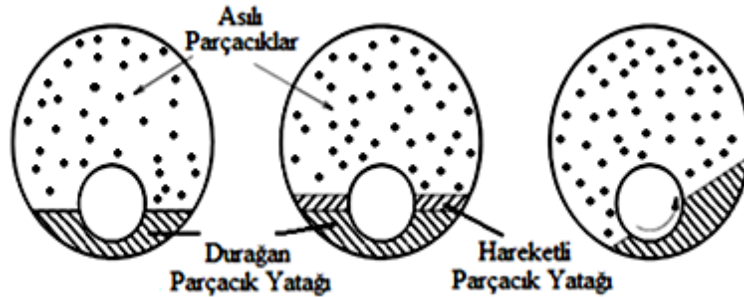
Bu çalışmada, sadece dönme yönünde akışın olduğu probleme ek olarak yatay borularda akışkan hareketi için, Couette ve Poiseuille akışının beraber düşünüldüğü helisel

akış (Papanastasiou, 2000) modeli oluşturulmuş ve analizleri yapılmıştır. Çalışmada elde edilen Couette ve Poiseuille akışı hız bileşenleri başlangıçta Newtonyan akışlar için elde edilmiştir. Halkasal bölgedeki akış için geometri Şekil 3’de verilmektedir.



Şekil 3. Akış alanının Şematik gösterimi

Halkasal bölgede akış laminar veya türbülanslı olabilir. Kuyu, parçacıkların halkanın dibinde oluşabileceği yatay uzun bir bölümden oluşabilir. Sondaj düzeneği, döner ve genelde ağırlığından dolayı halka bölgenin merkezinde yer almaz yani dış merkezlidir. Bu olay akışı önemli bir şekilde etkilemektedir. Sondaj düzeneğinin dönme hızı ve akışkanın aksenal hızı mukayese edilebilir. Genelde sondaj düzeneğinin dönme etkisi yokken parça taşınımı modeli için makul mekanik modeller vardır. Dönme etkisinin de olduğu değiştirilmiş bir modele ihtiyaç vardır. Modelde, boru kesiti için, bazı parçacıkların durağan yatakta bazılarının askıda hatta Şekil 4’de olduğu gibi hareketli bir parçacık yatağının olması da olasıdır. Bununla birlikte sondaj düzeneğinin dönmesiyle daha fazla parçacık yatağının kesitte oluşması beklenmektedir.



Şekil 4. İç silindirin durağan ve döndüğü durumlar için, asılı ve durağan parçacıklar

### 1.5. Model ve Parametreler

Bu çalışmada ilk olarak eş merkezli halkasal bölgedeki akışkan hareket modeli sunulacaktır. Akışkan modeli ilk etapta doğrusal olmayan bir sistem olarak sadece sayısal yöntemlerle çözülebilir gibi gözükse de daha sonra yapılan düzenlemelerle modelin analitik çözümleri elde edilebilecektir. Elde edilecek olan analitik çözümler değişik parametreler altında test edilecektir. Daha sonra ise elde edilen akışkan hızı profilini kullanmak suretiyle parçacık hareket modeli sunulacaktır. Modelde kullanılacak parametreler ise  $L$  =uzunluk;  $M$  =kütle ve  $T$  =zaman boyutu olmak üzere MKS sisteminde aşağıdaki Tablo 1’de verilmektedir:

Tablo 1. Model parametreleri(boyut ve büyüklük mertebeleri)

Parametre	Tanım	Boyutu	Tipik Değerler	Büyüklik Mertebesi
$r_o$	Dış yarıçap	$[r_o] = L$	0.2 (Bolchover, 2007)	$O(10^{-1})$
$r_i$	İç yarıçap	$[r_i] = L$	0.1 (Bolchover, 2007)	$O(10^{-1})$
$e = \frac{r_2}{(r_o - r_i)}$	Dış merkezlik	-	0-1	$O(1)$
$\omega_i$	Dönme hızı	$[\omega_i] = T^{-1}$	15 (Cho, 2001)	$O(10^1)$
$\rho_f$	Akışkan yoğunluğu	$[\rho_f] = ML^{-3}$	1200 (Cho, 2001)	$O(10^3)$
$\mu_f$	Akışkan viskozitesi	$[\mu_f] = ML^{-1}T^{-1}$	0.05 (Wellington, 1995)	$O(10^{-2})$
$a_p$	Parçacık yarıçapı	$[a_p] = L$	0.003 (Cho, 2001)	$O(10^{-3})$
$L$	Boru uzunluğu	$[L] = L$	20-30	$O(10^1)$
$\rho_p$	Parçacık yoğunluğu	$[\rho_p] = ML^{-3}$	2600 (Cho, 2001)	$O(10^3)$
$m \sim \rho_p a_p^3$	Parçacık kütlesi	$[m] = M$	2.57e-6	$O(10^{-6})$
$\partial P / \partial z$	Basınç gradyeni	$\left[ \frac{\partial P}{\partial z} \right] = ML^{-2}T^{-2}$	-1 (Wazed, 2002)	$O(10^0)$

Halkadaki parçacık taşınımını etkileyen parametreler, *akışkan parametreleri* olarak; akışkan yoğunluğu ( $\rho_f$ ), akışkan viskozitesi ( $\mu_f$ ), *parçacık parametreleri* olarak; parçacık yoğunluğu ( $\rho_p$ ), parçacık yarıçapı ( $a_p$ ), parçacık kütlesi ( $m \sim \rho_p a_p^3$ ); diğer parametreler, iç silindirin eş merkezliliği ( $e$ ), iç ve dış yarıçaplar  $r_i$  ve  $r_o$  alınabilir. Akışkan hareketini etkileyen parametreler olarak ise; akışkan viskozitesi ( $\mu_f$ ), iç silindir dönme hızı ( $\omega_i$ ) ve basınç gradyeni ( $\partial P / \partial z$ ) değişken parametrelerimiz olacaktır. Diğer parametreleri inceleyeceğimiz modele göre sabit kabul edeceğiz.

### 1.6. Parçacık Modeli(Kartezyen ve Silindirik Koordinatlarda)

Parçacıkların; dönme yönü, radyal ve eksenel yön boyunca olmak üzere üç boyutlu akışkan hareketi içerisinde olduğu kabul edilmektedir. Bu hareket sonucu akışkan içerisindeki her bir parçacığın geometrik olarak helis olarak adlandırılabilir yörüngeler oluşturduğu gözlemlenmektedir. Oluşan silindirik halka boyunca hareket eden akışkan akışının laminar veya türbülanslı olabileceği kabul edilmektedir.

Aynı merkezli ve farklı yarıçaplı silindirler arasında yer alan ve iç kısımda bulunan silindirin parçacık taşınımını kolaylaştırmak amacıyla döndürüldüğü halkasal bölgede eksen boyunca Poiseuille akış ve iç silindir hareket doğrultusunda Couette akış modelinin birlikte incelendiği başlangıç modeli oluşturacağız. Bunun için bir parçacığın hareket denklemini veren ifadeyi vererek başlayacağız.  $m$  kütleli bir parçacığın hareketi;  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t$  anındaki konum vektörü olmak üzere Newton yasası gereği,

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = (\text{Drag kuvveti}) + m \mathbf{g} \quad (1)$$

denklemini ile verilir. Burada  $\mathbf{g}$  yerçekimi ivmesidir. Drag kuvveti parçacığın Reynolds sayısı olan  $Re_p$ 'ye bağlıdır ve  $Re_p$  çok küçükse bu durumda Drag kuvveti sabit bir  $k > 0$  için;

$$(\text{Stokes' Drag}) = k(\mathbf{V}(\mathbf{x}) - \frac{d\mathbf{x}}{dt}) \quad (2)$$

şeklindedir. Burada  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}$  konumundaki akışkan hızı ve  $\mu_f$  dinamik viskoziteli Newtonian akışta  $a_p$  yarıçaplı küresel bir parçacık için  $k = 6\pi a_p \mu_f$ 'dir (Kurzweg, 1995). Alternatif olarak yüksek Reynolds sayılarında Drag kuvveti;

$$(Inertial Drag) = C_D \pi a_p^2 \rho_f \left| \mathbf{V}(\mathbf{x}) - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| \left( \mathbf{V}(\mathbf{x}) - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \quad (3)$$

şeklindedir. Burada  $C_D$  drag katsayısı ve  $\rho_f$  akışkan yoğunluğudur. Hesaplamalardaki basitlik açısından öncelikle Stokes' drag ifadesini kullanacağız. Stokes' drag ifadesi (1)'de yazılırsa,

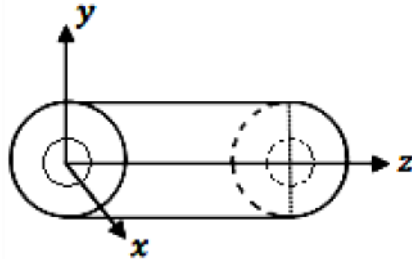
$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = k \left( \mathbf{V}(\mathbf{x}) - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) + m \mathbf{g} \text{ veya } m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + k \frac{d\mathbf{x}}{dt} = k \mathbf{V}(\mathbf{x}) + m \mathbf{g}$$

modeli elde edilir.

Boyutsuz parametreler,  $\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{r_0}$  ile  $t' = \frac{t}{1/\omega}$  olmak üzere bu durumda denklem  $\mathbf{j} = (0,1,0)$  yukarı yönde birim vektör ve  $\mathbf{g} = g_0 \mathbf{j}$  olmak üzere, ' işaretleri kaldırılarak,

$$\varepsilon \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{x}) - \varepsilon g_0 \mathbf{j} \quad (4)$$

boyutsuz biçimde yazılır. Burada boyutsuz parametreler  $\varepsilon = m\omega/k = O(10^{-1})$  ve  $g_0 = \mathbf{g}/\omega^2 r_0 = O(10^{-1})$ 'dir.  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  olmak üzere (4) ifadesinin Kartezyen koordinatlardaki ifadesini verelim. Yatay borular için silindirik halkasal bölge Şekil 5'de gösterilmiştir.



Şekil 5. Kartezyen koordinatlar için silindirik halkasal bölge

(4) ifadesinin Kartezyen koordinatlardaki karşılığı,



$$\begin{aligned}
\varepsilon \ddot{x} + \dot{x} &= \mathbf{V}_x \\
\varepsilon \ddot{y} + \dot{y} &= \mathbf{V}_y - \varepsilon g_0 \\
\varepsilon \ddot{z} + \dot{z} &= \mathbf{V}_z
\end{aligned} \tag{5}$$

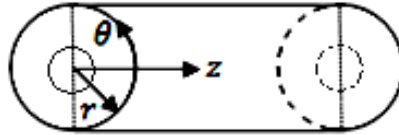
ile verilir. (5) sistemi  $x = u_1, \dot{x} = u_2, y = u_3, \dot{y} = u_4, z = u_5$  ve  $\dot{z} = u_6$  alınarak birinci mertebeden bir sisteme dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= u_2 \\
\dot{u}_2 &= \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{V}_x - u_2) \\
\dot{u}_3 &= u_4 \\
\dot{u}_4 &= \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{V}_y - u_4) - g_0 \\
\dot{u}_5 &= u_6 \\
\dot{u}_6 &= \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{V}_z - u_6).
\end{aligned} \tag{6}$$

(4)'ün kutupsal koordinatlardaki ifadesi,  $\mathbf{x} = (r, \theta, z)$  konum vektörü için, hız vektörü  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{r}, r\dot{\theta}, \dot{z})$ , ivme vektörü  $\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, \ddot{z})$  ve kartezyen birim vektörü  $\hat{\mathbf{j}} = \sin\theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta \hat{\mathbf{e}}_2$  (4) ifadesinde yazılırsa,

$$\varepsilon \left( \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2, r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}, \ddot{z} \right) + \left( \frac{dr}{dt}, r \frac{d\theta}{dt}, \dot{z} \right) = (\mathbf{V}_r, \mathbf{V}_\theta, \mathbf{V}_z) - \varepsilon g_0 (\sin\theta, \cos\theta, 0) \tag{7}$$

şeklinde elde edilir. Yatay borular için geometri Şekil 6'da gösterilmiştir.



Şekil 6. Silindirik koordinatlar için yatay boru geometrisi

(4) ifadesinin silindirik koordinatlardaki karşılığı,

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{d^2 r}{dt^2} - \varepsilon r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{dt} &= \mathbf{V}_r - \varepsilon g_0 \cdot \sin\theta \\
\varepsilon r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d\theta}{dt} &= \mathbf{V}_\theta - \varepsilon g_0 \cdot \cos\theta \\
\varepsilon \ddot{z} + \dot{z} &= \mathbf{V}_z
\end{aligned} \tag{8}$$

ile verilir. (8) denklemlerinde  $r = u_1$ ,  $\dot{r} = u_2$ ,  $\theta = u_3$ ,  $\dot{\theta} = u_4$ ,  $z = u_5$  ve  $\dot{z} = u_6$  alınarak,

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= u_2 \\
\frac{du_2}{dt} &= (\mathbf{V}_r + \varepsilon u_1 \cdot (u_4)^2 - u_2 - \varepsilon g_0 \cdot \sin(u_3)) / \varepsilon \\
\frac{du_3}{dt} &= u_4 \\
\frac{du_4}{dt} &= (\mathbf{V}_\theta - 2\varepsilon u_2 u_4 - u_1 u_4 - \varepsilon g_0 \cdot \cos(u_3)) / \varepsilon u_1 \\
\dot{u}_5 &= u_6 \\
\dot{u}_6 &= \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{V}_z - u_6)
\end{aligned} \tag{9}$$

birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

### 1.7. Navier-Stokes Denklemleri

Navier-Stokes denklemleri; daimi olmayan, doğrusal olmayan, ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem sistemidir ve çok basit akış alanları dışında sistemin analitik çözümleri elde edilemez. Sabit viskoziteli sıkıştırılmaz bir akış için Navier-Stokes Denklemi,

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{U}. \tag{10}$$

ile verilir.

(10) ifadesinde  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})$  'dir ve materyal türevi olarak adlandırılır. Navier-Stokes denklemi dört bilinmeyen ve üç denklemi temsil eder. Bu denklemi çözülebilir hale getirmek için bir denkleme daha ihtiyaç vardır ve o da süreklilik denklemidir. Bu diferansiyel denklem sistemini çözmeden önce, bir koordinat sistemi seçmek ve

denklemleri bu koordinat sistemine göre çözmek gereklidir. Hız vektörü  $\vec{U}$ ; kartezyen koordinatlarda  $\vec{U} = (u, v, w)$  ve silindirik koordinatlarda  $\vec{U} = (u_r, u_\theta, u_z)$  şeklindedir.  $u_r$ , radyal hız bileşeni;  $u_\theta$ , azimuthal hız bileşeni;  $u_z$ , eksenel hız bileşeni olarak adlandırılacaktır. Modelimiz, halkasal bir bölgede akış olup silindirik koordinatlarda Navier-Stokes denkleminin  $r$  bileşeni ve aşağıda verilmiştir:

Süreklilik denklemi:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0 \quad (11a)$$

Navier-Stokes denkleminin  $r$  bileşeni:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = \\ - \frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (11b)$$

Navier-Stokes denkleminin  $\theta$  bileşeni:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (11c)$$

Navier-Stokes denkleminin  $z$  bileşeni:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \\ - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (11d)$$

olarak ifade edilir (Papanastasiou, 2000).

## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

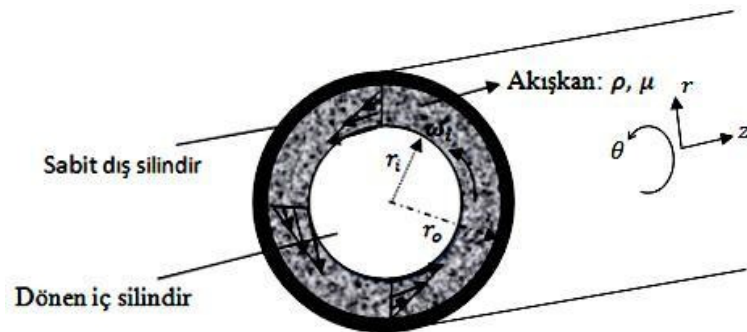
### 2.1. Akışkan Modeli

#### 2.1.1. Süreklilik ve Couette-Poiseuille Akışları İçin Navier-Stokes Denklemleri

Bu bölümde, (4) denklemini çözmek için yararlanılacak, dönme yönünde Couette Akışı ve aksenal yönde Poiseuille akışından bahsedilecektir. Couette ve Poiseuille akışından bahsettikten sonra oluşturulacak modelde, ilk olarak sadece dönme yönünde akışın olduğu düşünülecek ve parçacığın dönme yönünde Couette akışı dikkate alınacaktır. İkinci durumda, akışın hem dönme hem de aksenal yönde olduğu göz önüne alınıp parçacığın dönme yönünde Couette akışına ve aksenal yönde de Poiseuille akışına maruz kaldığı düşünülerek parçacığın hareketi gözlemlenecektir.

##### 2.1.1.1. Dönme Yönünde Akış(Couette Akışı)

Bu akışta, sıkıştırılamaz Newton tipi bir akışkan, sonsuz uzunlukta eş eksensli iki silindir;  $r_i$  yarıçaplı içi dolu bir silindir ile  $r_o$  yarıçapında içi boş sabit bir silindir arasında bulunmaktadır. İçteki silindir  $\omega_i$  açısal hızıyla dönmektedir. Akış daimi, laminar ve  $r\theta$  –düzleminde iki boyutludur. Ayrıca akışta hiçbir büyüklük  $\theta$ 'nın fonksiyonu değildir. Bunun yanında akış dairesel olup her yerde radyal hız bileşeni olan  $u_r = 0$ 'dır. Problemin geometrisi Şekil 7'de verilmiştir.



Şekil 7. Dairesel Couette Akışının Geometrisi

- Kabuller, 1) Silindir,  $z$  –yönünde sonsuzdur. Eksenel boyut radyal boyuta göre çok daha büyüktür. Hız alanı tamamen iki boyutlu olduğundan  $u_z = 0$  ve  $z$ 'ye göre herhangi bir hız bileşeninin türevi sıfırdır. (Akış tam gelişmiştir.)
- 2) Akış daimidir, yani herhangi bir büyüklüğün  $\partial/\partial t$  türevi sıfırdır.
- 3) Akış sadece daireseldir. Yani,  $u_r$  radyal hız bileşeni sıfırdır.
- 4) Akış dönele simetriktir. Yani hiçbir büyüklük  $\theta$ 'nın fonksiyonu değildir.
- 5) Akışkan sıkıştırılmaz ve Newtonyan, akış ise laminerdir.
- 6) Yerçekimi etkileri ihmal edilmektedir.

Sınır şartlar, 1) İç çeper  $r = r_i$ 'de kaymama koşulundan  $u_\theta = \omega_i r_i = V$ 'dir.

2) Dış çeper  $r = r_o$ 'da kaymama koşulundan  $u_\theta = 0$ 'dir.

3)  $u_\theta = u_\theta(r)$  olup diğer hız bileşenleri sıfırdır. ( $u_r = 0$  ve  $u_z = 0$ )

Analiz, Süreklilik denklemi:  $\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0$  veya  $0 = 0$  olup

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{kabul 3} \Rightarrow 0} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{kabul 4} \Rightarrow 0} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{kabul 1} \Rightarrow 0}$

kabuller altında süreklilik denklemi özdeş olarak sağlanır.

$$r \text{ –momentum: } \frac{dP}{dr} = \rho \frac{u_\theta^2}{r} \quad (12)$$

$$\theta \text{ –momentum: } \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u_\theta) \right) = 0 \quad (13)$$

Boyut analizi, aşağıda tanımlanan boyutsuz parametreler kullanılarak,

$$r^* = \frac{r}{r_o}, z^* = \frac{z}{L}, u_\theta^* = \frac{u_\theta}{V}, u_z^* = \frac{u_z}{V}, P^* = \frac{P}{\rho V^2}$$

Sınır şartlar,  $r^* = \frac{r_i}{r_o}$ 'de  $u_r^* = u_z^* = 0$ ,  $u_\theta^* = 1$ ;  $r^* = 1$ 'de  $u_r^* = u_\theta^* = u_z^* = 0$  ve

momentum denklemleri,

$$r^* \text{ –momentum: } \frac{dP^*}{dr^*} = \frac{(u_\theta^*)^2}{r^*}$$

$$\theta^* \text{ –momentum: } \frac{d}{dr^*} \left( \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} (r^* u_\theta^*) \right) = 0$$

Çözüm:  $r^* \rightarrow r$ ,  $z^* \rightarrow z$ ,  $u_\theta^* \rightarrow u_\theta$ ,  $P^* \rightarrow P$  alınarak,

$$u_\theta \left( r = \frac{r_i}{r_o} \right) = 1, u_\theta(r = 1) = 0 \text{ sınır koşullarına göre } \theta^* \text{ –momentum denkleminin}$$

çözümü,

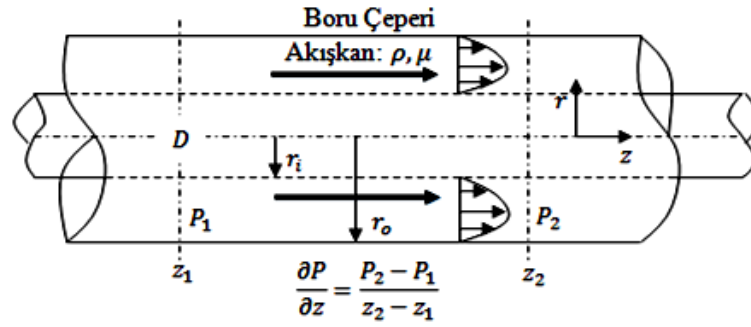
$$u_{\theta}(r) = \frac{r_0 r_i}{(r_0^2 - r_i^2)} \left( \frac{1}{r} - r \right), \quad r_i / r_0 \leq r \leq 1. \quad (14)$$

$r^*$  –momentum denkleminde,

$$P(r) = \left( \frac{r_0 r_i}{(r_0^2 - r_i^2)} \right)^2 \left( -\frac{1}{r^2} - 2 \ln r + \frac{r^2}{2} \right) + C. \quad (15)$$

### 2.1.1.2. Eksenel Yönde Akış(Poiseuille Akışı)

Bu akışta, sonsuz uzunlukta,  $r_i$  iç yarıçapı ve  $r_0$  dış yarıçapına sahip halkasal bölgede Newton tipi bir akışkanın daimi, sıkıştırılmaz, laminer akışı ele alınmaktadır. Ayrıca borunun yatay olduğu hal göz önüne alınmakta ve yerçekimi etkileri ihmal edilmektedir. Akışa  $z$  –ekseni doğrultusunda sabit bir  $\partial P / \partial z$  basınç gradyeni uygulanmaktadır. Halkasal bölgede hız alanı ve basınç alanı hesaplanacaktır. Problemin geometrisi Şekil 8’de verilmiştir.



Şekil 8. Halkasal bölgedeki Poiseuille akışının geometrisi

Şekilde görüldüğü gibi,  $z_1$  ve  $z_2$ ;  $z$  –ekseni boyunca iki keyfi konum,  $P_1$  ve  $P_2$  ise bu konumlardaki basınçlardır. Silindirik koordinat sisteminde, yani  $(r, \theta, z)$  ve  $(u_r, u_{\theta}, u_z)$ 'yi benimsedik. Boru içerisindeki basınç alanı ve akış için hız alanını hesaplayacağız.

- Kabuller,
- 1) Boru  $z$  –yönünde sonsuz uzunlukludur.
  - 2) Akış daimidir, yani herhangi bir büyüklüğün  $\partial / \partial t$  türevi sıfırdır.
  - 3) Bu bir paralel akıştır(hızın  $r$  bileşeni olan  $u_r$ 'yi sıfır kabul ediyoruz).

4) Akışkan sıkıştırılmaz, sabit özelliklere sahip Newton tipi bir akışkandır, akış ise laminerdir.

5)  $z$  – yönünde  $z$  ile doğrusal olarak değişen sabit bir  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_2 - P_1}{z_2 - z_1}$  basınç gradyeni uygulanmıştır.

6) Hız alanı dönümsüz ve eksenal simetriktir, yani  $u_\theta = 0$  ve  $\theta$ 'ya göre tüm kısmi türevler sıfırdır.

7) Yerçekimi etkileri göz ardı edilmektedir.

Sınır şartlar, 1)  $r = r_i$ 'de  $\vec{U} = 0$

2)  $r = r_o$ 'de  $\vec{U} = 0$ .

Analiz, Süreklilik denklemi:

$$\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r}}_{\text{kabul 3} \Rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta}}_{\text{kabul 6} \Rightarrow 0} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

Eşitlik (16),  $u_z$ 'nin  $z$ 'e bağlı bir fonksiyon olmadığını göstermektedir. Diğer bir deyişle orijini nereye yerleştireceğimizin bir önemi yoktur, yani akış  $z$ 'in her konumunda aynıdır. Bu ise akışın tam gelişmiş olduğunu gösterir. Ayrıca  $u_z$ , zamanın(kabul 2) veya  $\theta$ 'nın(kabul 6) bir fonksiyonu olmadığından sadece  $r$ 'nin fonksiyonudur. O halde süreklilik denkleminin sonucu,

$$u_z = u_z(r). \quad (17)$$

$$r \text{ –momentum: } \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (18)$$

Diğer bir ifadeyle  $P$ ,  $r$ 'nin bir fonksiyonu değildir.  $P$ , zamanın(kabul 2) veya  $\theta$ 'nın da(kabul 6) fonksiyonu olmadığından sadece  $z$ 'in fonksiyonudur.  $r$  –momentum sonucu:

$$P = P(z) \quad (19)$$

$\theta$  –momentum: Navier-Stokes denkleminin tüm terimleri sıfırdır.

$z$  – momentum:

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial u_z}{\partial t}}_{\text{kabul 2} \Rightarrow 0} + u_r \underbrace{\frac{\partial u_r}{\partial r}}_{\text{kabul 3} \Rightarrow 0} + \underbrace{\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}}_{\text{kabul 6} \Rightarrow 0} + u_z \underbrace{\frac{\partial u_z}{\partial z}}_{\text{süreklilik} \Rightarrow 0} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho \underbrace{g_z}_{\text{kabul 7} \Rightarrow 0} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta^2}}_{\text{kabul 6} \Rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}_{\text{süreklilik} \Rightarrow 0} \right)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (20)$$

$\frac{\partial P}{\partial z}$  sabit olduğundan bu denklemin çözümü;

$$u_z(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} + C_1 \ln r + C_2 \quad (21)$$

Boyutlu durumda hız profili,  $u_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \left( -r^2 + r_o^2 + \frac{r_o^2 - r_i^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_o}\right) \right)$

şeklindedir. Maksimum hız  $\tau_{rz} = \mu \frac{du_z}{dr} = 0$  olduğu noktada meydana gelir. O halde,

$$\tau_{rz} = \frac{1}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left[ 2r - \frac{r_o^2 - r_i^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \frac{1}{r} \right] = 0$$

olduğundan hızın maksimum olduğu nokta ve bu noktadaki

maksimum hızı,

$$r^* = \left[ \frac{r_o^2 - r_i^2}{2 \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \right]^{1/2} \quad (22)$$

$$u_{z,max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} r_o^2 \left\{ 1 - \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{2 \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \left[ 1 - \ln \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{2 \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \right] \right\} \quad (23)$$

şeklindedir.

Aşağıda tanımlanan boyutsuz parametreler kullanılarak çözüm boyutsuz olarak da ifade edilebilir:

$$r^* = \frac{r}{r_o}, \quad z^* = \frac{z}{L}, \quad u_\theta^* = \frac{u_\theta}{V}, \quad u_z^* = \frac{u_z}{V}, \quad P^* = \frac{P}{\rho V^2}, \quad \mu^* = \frac{\rho V r_o^2}{L \mu}.$$

Sınır şartlar,  $r^* = \frac{r_i}{r_o}$  de  $u_r^* = u_z^* = 0, u_\theta^* = 1$



$$r^* = 1 \text{ de } u_r^* = u_\theta^* = u_z^* = 0$$

ve momentum denklemleri,

$$z^* \text{ -momentum: } \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial u_z^*}{\partial r^*} \right) = \mu^* \frac{\partial P^*}{\partial z^*},$$

$$r^* \rightarrow r, z^* \rightarrow z, u_z^* \rightarrow u_z, P^* \rightarrow P \text{ alınarak,}$$

$u_z \left( r = \frac{r_i}{r_o} \right) = 0, u_z(r = 1) = 0$  sınır şartlarına göre  $z^*$  -momentum denkleminin çözümü,

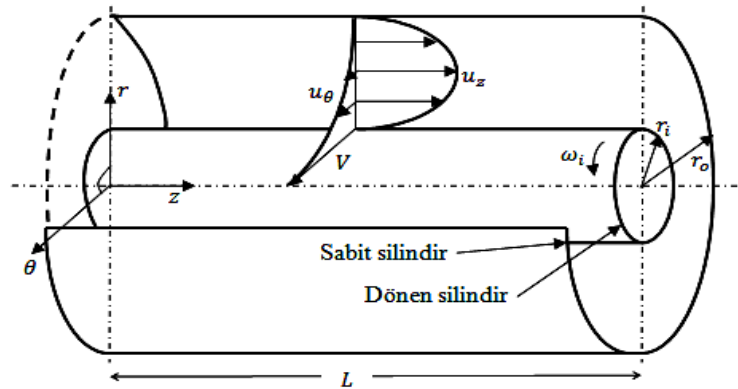
$u_z(r) = \mu^* \frac{r^2}{4} \frac{\partial P}{\partial z} + C_1 \ln r + C_2$  olduğundan sınır şartlarda yazıldığında boyutsuz hız profili,

$$u_z(r) = -\frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - r^2 + \frac{1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^2}{\ln \left( \frac{r_o}{r_i} \right)} \ln(r) \right). \quad (24)$$

Eşitlik (24), yatay halkasal boru için hız profilini veren denklemdir ve basınç  $z$  -yönünde  $z$  ile doğrusal değişmektedir.

### 2.1.2. Dönme ve Eksenel Akış Superpozisyonu (Helisel Akış Modeli)

Bu bölümde akışkan hareketi için model geliştirilecektir ve oluşturulacak bu model Couette ve Poiseuille akışlarının birleşimi şeklinde düşünülen ve helisel akış olarak adlandırılan bir modeldir (Papanastasiou, 2000). Şekil 9'da yatay boruda helisel akış için halkasal bölgedeki akış geometrisi verilmiştir. Bu akışta, akışkan akışının modeli irdelenmektedir.



Şekil 9. Helisel akış geometrisi

İç silindirin  $V = r_i \omega_i$  hızıyla döndüğü ve eksenel yönde sabit bir  $\partial P / \partial z$  basınç gradyeninin uygulandığı durumda, halkasal bölgede meydana gelen daimi akış;  $u_z$  eksenel hız ve  $u_\theta$  dönme yönü hız bileşenleri sıfırdan farklı olduğu için, iki yönlü bir akıştır. Bu akış, Couette ve Poiseuille akışlarının bir Superpozisyonu olarak düşünülebilir. Akışın eşmerkezli silindirlere arasında gerçekleştiği ve  $z$  –yönünde tam gelişmiş olduğu kabul edilmektedir. Bu varsayımlara göre,  $u_r = 0, u_\theta = u_\theta(r)$  ve  $u_z = u_z(r)$  'dir. Şayet silindirlere eşmerkezli değilse (dış merkezli) bu durumda  $u_\theta$  hız bileşeni aynı zamanda  $\theta$ 'nın da fonksiyonu olması gerekirdi. Öte yandan akışın,  $z$  –yönünde tam gelişmiş olduğunu kabul ettiğimiz için eksenel hız bileşenin  $z$ 'den bağımsız olduğunu kabul edebiliriz. Bu varsayımlar altında süreklilik denklemi özdeş olarak sağlanır.

Akışın laminar, daimi ve sıkıştırılmaz, akışkanın Newton tipi akışkan olduğu ve yerçekimi etkilerinin ihmal edildiği durumda boyutsuz parametreler ve momentum denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$r^* = \frac{r}{r_o}, z^* = \frac{z}{L}, u_\theta^* = \frac{u_\theta}{V}, u_z^* = \frac{u_z}{V}, P^* = \frac{P}{\rho V^2}, \mu^* = \frac{\rho V r_o^2}{L \mu}$$

$$r^* \text{ –momentum: } \frac{dP^*}{dr^*} = \frac{(u_\theta^*)^2}{r^*}$$

$$\theta^* \text{ –momentum: } \frac{d}{dr^*} \left( \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} (r^* u_\theta^*) \right) = 0$$

$$z^* \text{ –momentum: } \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left( r^* \frac{du_z^*}{dr^*} \right) = \mu^* \frac{\partial P^*}{\partial z^*}.$$

Sınır şartlar,

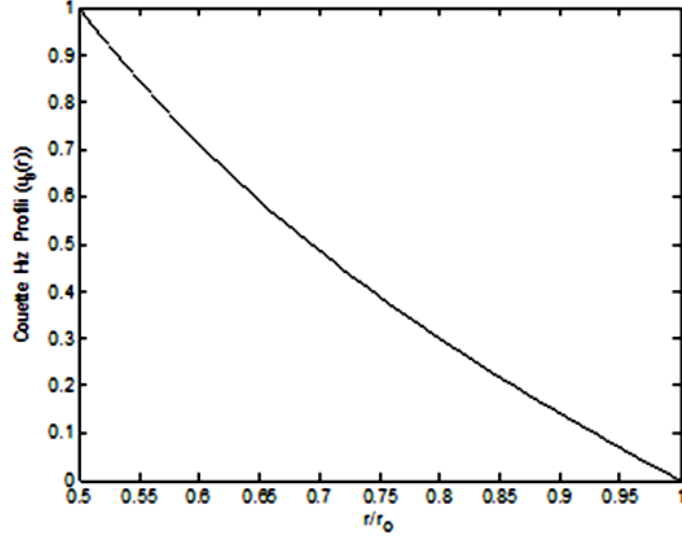
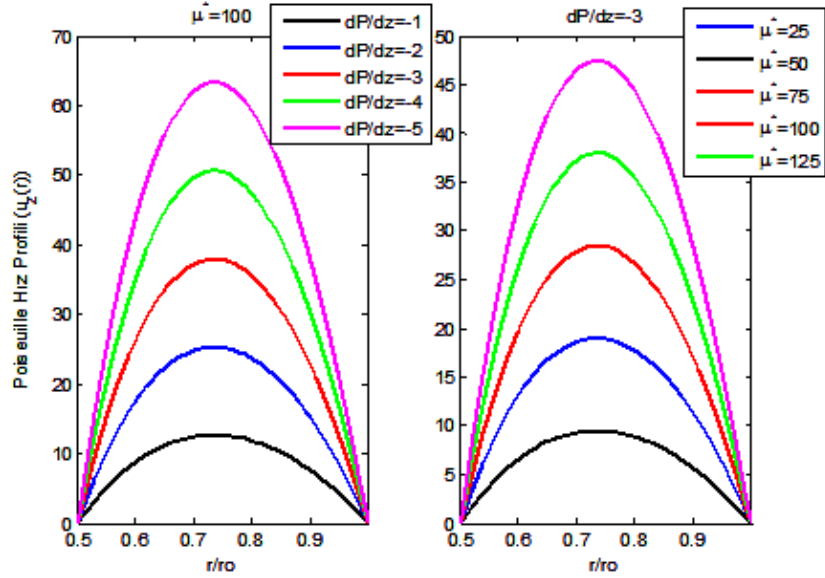
$$r^* = \frac{r_i}{r_o} \text{ de } u_r^* = u_z^* = 0, u_\theta^* = 1$$

$$r^* = 1 \text{ de } u_r^* = u_\theta^* = u_z^* = 0$$

şeklindedir. Buna göre  $r^* \rightarrow r, z^* \rightarrow z, u_\theta^* \rightarrow u_\theta, u_z^* \rightarrow u_z, P^* \rightarrow P$  alınarak, dönme yönü ve eksenel hız profilleri aşağıdaki gibidir ve bazı parametreler için Şekil 10 ve Şekil 11'de gösterilmiştir.

$$u_\theta(r) = \frac{r_o r_i}{(r_o^2 - r_i^2)} \left( \frac{1}{r} - r \right) \text{ (Dönme yönünde hız bileşeni)} \quad (25)$$

$$u_z(r) = -\frac{\mu^* \partial P}{4 \partial z} \left( 1 - r^2 + \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln(r) \right). \text{ (Eksenel hız bileşeni)} \quad (26)$$

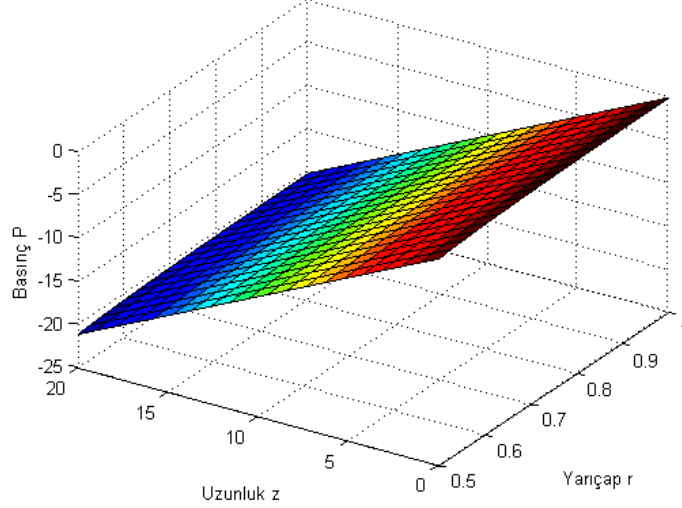
Şekil 10. Couette akışı hız profili ( $u_\theta(r)$ )Şekil 11. Poiseuille akışı hız profili ( $u_z(r)$ )

$\partial P/\partial z$  sabit olduğu göz önüne alınıp ve  $r$  –momentum denklemi olan  $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{u_\theta^2}{r}$  denklemini integre ederek helisel akıştaki basınç dağılımı,

$$P(r, z) = (\partial P/\partial z)z + \left(\frac{r_0 r_i}{(r_0^2 - r_i^2)}\right)^2 \left(-\frac{1}{r^2} - 2 \ln r + \frac{r^2}{2}\right) + C \quad (27)$$

şeklinde iki akışın basınç dağılımlarının toplamı şeklinde yazılabilir (Papanastasiou, 2000).  $\omega = 1, \mu_f = 0.05, \partial P/\partial z = -1, L = 20$  parametrelere karşılık gelen helisel akış basınç

dağılımı Şekil 12’de verilmiştir. Buna göre boru parçasının girişindeki basınç değeri çıkıştaki basınç değerinden büyüktür.



Şekil 12. Helisel akışa karşılık gelen basınç dağılımı

### 2.1.2.1. Akışkan Modelinin Analitik Çözümü

Helisel akışta süreklilik denklemi değiştirmedigi için süperpozisyon geçerlidir. Üstelik akışın momentum denklemleri olan  $\theta^*$  –momentum ve  $z^*$  –momentum eşitlikleri doğrusal ve ayrık(uncoupled)’dir. Böylece bu akış için hız bileşeni,

$$u = u_z \hat{e}_z + u_\theta \hat{e}_\theta = -\frac{\mu^* \partial P}{4 \partial z} \left( 1 - r^2 + \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln(r) \right) \hat{e}_z + \frac{r_o r_i}{(r_o^2 - r_i^2)} \left( \frac{1}{r} - r \right) \hat{e}_\theta + 0 \cdot \hat{e}_r \quad (28)$$

ile verilir ve bu helisel akış tanımlar.  $\mathbf{x} = (r, \theta, z)$  olmak üzere helisel akış profilini veren denklem sistemi silindirik koordinatlarda aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= 0 \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{r_o r_i}{(r_o^2 - r_i^2)} \left( \frac{1}{r} - r \right) \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{\mu^* \partial P}{4 \partial z} \left( 1 - r^2 + \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln(r) \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Helisel akışta akışkanın hareketi incelenmektedir. Sonraki çalışmalarda akışkan profili ile parçacık profilinin aynı anda verildiği sonuçlar test edilecektir. Kartezyen koordinatlarda ise,

$$u = \frac{r_0 r_i}{(r_o^2 - r_i^2)} \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \hat{i} + \frac{r_0 r_i}{(r_o^2 - r_i^2)} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - x \right) \hat{j} + \dots$$

$$\dots - \frac{\mu^* \partial P}{4 \partial z} \left( 1 - x^2 - y^2 + \frac{1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^2}{\ln \left( \frac{r_o}{r_i} \right)} \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \right) \hat{k}$$

şeklinindedir. O halde  $\mathbf{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  şeklindeki konum vektörü için  $u = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$  olduğundan,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{r_0 r_i}{(r_o^2 - r_i^2)} \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{r_0 r_i}{(r_o^2 - r_i^2)} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - x \right) \tag{30}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\mu^* \partial P}{4 \partial z} \left( 1 - x^2 - y^2 + \frac{1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^2}{\ln \left( \frac{r_o}{r_i} \right)} \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \right)$$

olacaktır. Bu denklem sistemi  $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$  başlangıç şartlarına göre çözülebilir.

### 2.1.2.1.1. Analitik Çözüm

(30) ile verilen diferensiyel denklem sisteminin şu haliyle analitik çözümü zor gözükmemektedir. Denklem sisteminde birinci denklem  $x$  ile ikinci denklem ise  $y$  ile çarpılıp denklemler taraf tarafa toplanırsa,

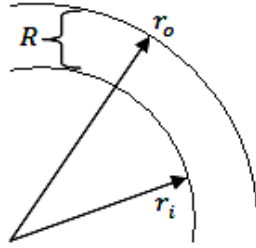
$$x \frac{dx}{dt} = \frac{r_0 r_i}{(r_o^2 - r_i^2)} \left( xy - \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)$$

$$y \frac{dy}{dt} = \frac{r_0 r_i}{(r_o^2 - r_i^2)} \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} - xy \right) \tag{31}$$

elde edilir. Buradan,  $x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{x^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{y^2}{2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = 0$  ve  $x^2 + y^2 = R^2 = x_0^2 + y_0^2$ 'dir. Buna göre (30) doğrusal olmayan sistemi, aşağıda verilen doğrusal sisteme indirgenir.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{r_0 r_i}{(r_0^2 - r_i^2)} \left( y - \frac{y}{R^2} \right) = \frac{r_0 r_i}{(r_0^2 - r_i^2)} \left( \frac{R^2 - 1}{R^2} \right) y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{r_0 r_i}{(r_0^2 - r_i^2)} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - x \right) = \frac{r_0 r_i}{(r_0^2 - r_i^2)} \left( \frac{1 - R^2}{R^2} \right) x \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - R^2 + \frac{1 - \left( \frac{r_i}{r_0} \right)^2}{\ln \left( \frac{r_0}{r_i} \right)} \ln(R) \right) \end{aligned} \quad (32)$$

Denklemden,  $\beta = \frac{r_0 r_i}{(r_0^2 - r_i^2)} \left( \frac{1 - R^2}{R^2} \right)$  olmak üzere doğrusal diferansiyel denklem sistemi, başlangıç şartları olarak  $x(0) = x_0, y(0) = \sqrt{R^2 - x_0^2}, z(0) = z_0$  alınarak çözülecektir.  $R$  ise genelde iç silindir ile dış silindir arasında bulunan bir nokta olup Şekil 13'de görüldüğü gibi  $R \in \left( \frac{r_i}{r_0}, 1 \right)$  şeklindedir.

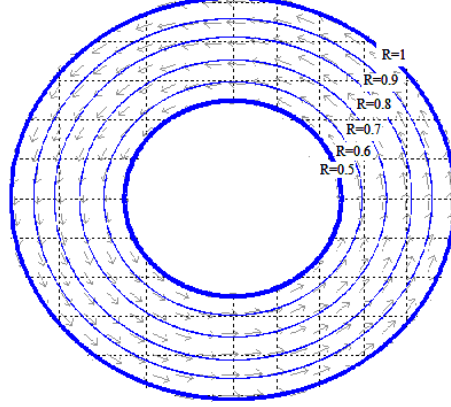


Şekil 13.  $R$ 'nin konumu,  $R \in \left( \frac{r_i}{r_0}, 1 \right)$

Yapılan sadeleştirmeler altında (32) sistemi (33) sistemine dönüşür:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\beta y \\ \frac{dy}{dt} &= \beta x \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - R^2 + \frac{1 - \left( \frac{r_i}{r_0} \right)^2}{\ln \left( \frac{r_0}{r_i} \right)} \ln(R) \right), x(0) = x_0, y(0) = \sqrt{R^2 - x_0^2}, z(0) = z_0 \end{aligned} \quad (33)$$

İlk iki denklemden oranlama yaparsak,  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  denkleminin çözümü  $x^2 + y^2 = R^2$  çözümü elde edilir. Farklı  $R$  değerleri için yörünge çizgileri Şekil 14'de verilmiştir.



Şekil 14. Farklı  $R$  parametreleri için yörüngeler

Denklem sisteminde ilk iki denklemden  $(x(t), y(t))$  ikilisi çözülebilir. İlk olarak denklem sistemi normal adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülebilir.

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\beta \frac{dy}{dt} = -\beta^2 x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \beta^2 x = 0$  olup bu diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü bulunur ve birinci denklemde bu çözüm yazılırsa,

$$x(t) = C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)$$

$$y(t) = C_1 \sin(\beta t) - C_2 \cos(\beta t) \quad (34)$$

şeklinde çözümler elde edilir.  $\sin(\beta t)$  ve  $\cos(\beta t)$  periyodik olduklarından  $x(t)$  ve  $y(t)$ 'ninde periyodik fonksiyon oldukları açıktır.  $z(t)$  çözümünü denklem sisteminden

elde etmek kolaydır.  $\frac{dz}{dt} = -\frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - R^2 + \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln(R) \right)$  ifadesinde sağ tarafta  $t$ 'ye

bağlı ifade olmadığından sabittir ve dolayısıyla çözüm  $z(0) = z_0$  başlangıcına göre kolay bir şekilde elde edilmektedir. O halde helisel akış problemi için denklem sisteminin analitik çözümünü veren ifadeleri elde ettik ve bu çözümleri daha sonra elde edeceğimiz sayısal çözümlerle karşılaştıracacağız.  $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$  başlangıç şartlarına göre sistemin çözümü,

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\beta t) - y_0 \sin(\beta t) \\ y(t) = x_0 \sin(\beta t) + y_0 \cos(\beta t) \\ z(t) = -\frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - R^2 + \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln(R) \right) t + z_0 \end{cases} \quad (35)$$

şeklinde helisel akış profillerini veren çözüm bileşenleri elde edilir. Çözümler  $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \left( \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cos(\beta t) - \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \sin(\beta t) \right) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cdot \cos(\beta t + \phi) \\ y(t) &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \left( \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \sin(\beta t) + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cos(\beta t) \right) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cdot \sin(\beta t + \phi) \\ z(t) &= -\frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - R^2 + \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln(R) \right) t + z_0 \end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu çözümleri daha sade durumda yazmak için problemde başlangıç şartları,  $x(0) = x_0, y_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2}, z_0 = 0$  olarak alınırsa  $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$  olmak üzere çözüm;

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\beta t + \phi) \\ y(t) = R \sin(\beta t + \phi) \\ z(t) = -\frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - R^2 + \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln(R) \right) t \end{cases} \quad (36)$$

olarak ifade edilebilir.

#### 2.1.2.1.2. Üç Boyutlu Akışkan Hareketi

Bu bölümde,  $\frac{dx}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{x})$  denkleminin çözüm davranışı ve daha sonra da akışla ilgili parçacığın kinematik özellikleri verilecektir. Burada  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ , dönme yönünde hız vektörü olup akışkanın hızını temsil etmektedir. O halde bu vektörü,



$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = (r_o r_i / (r_o^2 - r_i^2)) \left( \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \vec{\mathbf{i}} + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - x \right) \vec{\mathbf{j}} \right) - \dots - \frac{\mu^* \partial P}{4 \partial z} \left( 1 - R^2 + \frac{1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^2}{\ln \left( \frac{r_o}{r_i} \right)} \ln(R) \right) \vec{\mathbf{k}} \quad (37)$$

alabiliriz.  $\mathbf{x} = (x, y)$  olmak üzere,  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $A = (r_o r_i / (r_o^2 - r_i^2))$ ,  $\beta = A \cdot \left( \frac{1 - R^2}{R^2} \right)$  alınırsa,

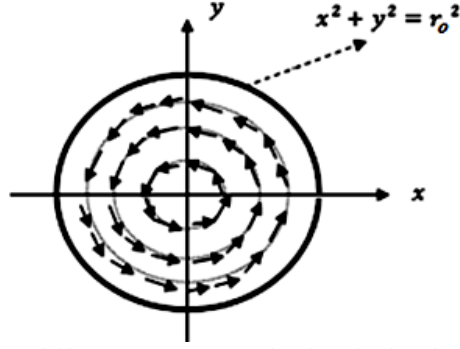
$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = A \left( y - \frac{y}{R^2} \right) = -\beta y \\ \dot{y} &= A \left( -y + \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = A \left( y - \frac{y}{R^2} \right) = \beta x \\ \dot{z} &= -\frac{\mu^* \partial P}{4 \partial z} \left( 1 - R^2 + \frac{1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^2}{\ln \left( \frac{r_o}{r_i} \right)} \ln(R) \right) = C \end{aligned} \quad (38)$$

elde edilir. Bu denklem sistemi,  $\varepsilon \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{x}) - \varepsilon g_0 \mathbf{j}$  modelinde,  $\varepsilon = 0$  alınmak şartıyla akışkan modeline uymaktadır. Periyodiklik şartından  $x^2 + y^2 = R^2$  olduğundan  $\beta = A \left( \frac{1 - R^2}{R^2} \right)$  olarak sistem,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\beta y \\ \dot{y} &= \beta x \\ \dot{z} &= C \end{aligned} \quad (39)$$

şekline dönüştürüldü.

(39) ifadesinde ilk iki denklemde taraf tarafa oranlama yaparsak,  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü  $x^2 + y^2 = c^2$  faz düzlemindeki yörüngeleri yani yörünge denklemlerini verir. Sistemin denge noktaları  $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$  eşitliğinden  $(x, y) = (0, 0)$  ve  $x^2 + y^2 = r_o^2$  çemberi üzerindeki noktalardır. Şekil 15'de halkasal bölge içerisindeki akışkanın yönü için faz düzlemi verilmiştir.

Şekil 15.  $x - y$  faz düzleminde akışkan yön alanı

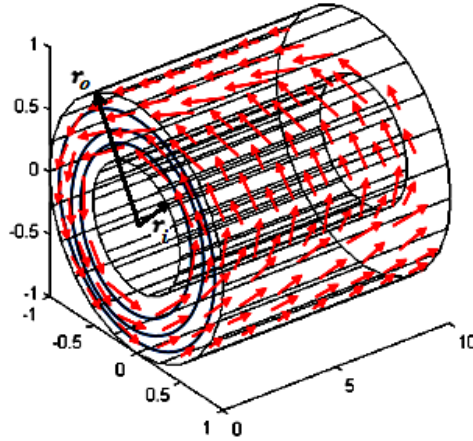
$\mathbf{V}(\mathbf{x})$ , dönme yönünde hız vektörü olup akışkanın hızını temsil ettiğinden dolayı aşağıda verilen sistem akışkan hareketini temsil etmektedir. Bu sistemin hız alanları ve akım çizgileri, Şekil 16'da farklı  $R$  değerleri için halkasal bölge içerisinde gösterilmiştir.

$$\beta = A \left( \frac{1-R^2}{R^2} \right), C = -\frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - R^2 + \frac{1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^2}{\ln \left( \frac{r_o}{r_i} \right)} \ln(R) \right) \text{ olmak üzere hız vektörleri,}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = -\beta y \\ v &= \frac{dy}{dt} = \beta x \\ w &= \frac{dz}{dt} = C \end{aligned}$$

(40)

şeklindedir.

Şekil 16. Farklı  $R$  değerleri için halkasal bölge içerisinde hız alanları ve akım çizgileri

Yukarıda örnekte olduğu gibi hız alanı olarak  $\vec{V} = (u, v, \omega) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  aldık. Bu kısımda hız alanı ile ilgili kinematik özellikler verilecektir. Analitik çözümler elde edildiğinden dolayı,  $\tan \phi = \frac{y_0}{x_0}$  olmak üzere,  $x(t) = R \cdot \cos(\beta t + \phi)$ ,  $y(t) = R \cdot \sin(\beta t +$

$$\phi), z(t) = -\frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - R^2 + \frac{1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^2}{\ln \left( \frac{r_o}{r_i} \right)} \ln(R) \right) t \text{ alınabilir.}$$

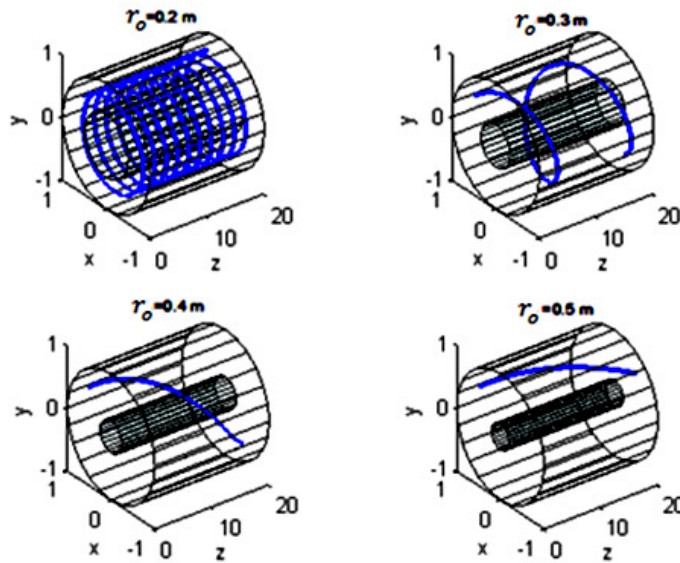
Akışkan elemanları sürekli hareket halinde olduklarından, akışkanlar dinamiğinde akışkan elemanlarının hareketlerinin veya deformasyonlarının birim zamana göre tarif edilmesi daha uygundur. Burada özellikle hızı(birim zamandaki ötelenmeyi), açısal hızı(birim zamandaki dönmeyi), doğrusal şekil değiştirme hızını(birim zamandaki doğrusal şekil değiştirmeyi) ve kayma şekil değiştirmesi hızını(birim zamandaki kayma şekil değiştirmesi) ele alınacaktır.

Akışkan elemanı hız: Birim zamandaki hız, sabitler  $\beta = A \left( \frac{1-R^2}{R^2} \right)$ ,  $C = -\frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - R^2 + \frac{1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^2}{\ln \left( \frac{r_o}{r_i} \right)} \ln(R) \right)$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} \vec{V} &= -\beta y \vec{i} + \beta x \vec{j} + C \vec{k} \\ \vec{V} &= -\beta \cdot R \cdot \sin(\beta t + \phi) \vec{i} + \beta \cdot R \cdot \cos(\beta t + \phi) \vec{j} + C \vec{k} \end{aligned} \quad (41)$$

şeklinde verilir

Öteleme vektörüne göre, iç yarıçap sabit tutulup dış yarıçap arttırılırsa akışkan hareketinin nasıl davranış sergileyeceğini gösterebiliriz. Bunun için,  $L = 20$ ,  $\omega = 1$ ,  $\mu_f = 0.05$ ,  $\partial P / \partial z = -1$  parametreleri ve sabit bir  $r_i = 0.1$  iç yarıçapı için dış yarıçap arttırıldığında Şekil 17'ye göre akışkan elemanının hareketinin hızlandığı ve dolayısıyla yörünge uzunluklarının azaldığı görülmektedir.



Şekil 17. Sabit bir  $r_i = 0.1$  m ve farklı dış yarıçaplar için akışkan elemanının konumunun incelenmesi

Birim zamandaki dönme(Rotation): Başlangıçta bu noktada kesişen iki dik çizginin birim zamandaki ortalama dönmesi olarak tanımlanır. Kartezyen koordinatlarda birim zamandaki dönme vektörü, açısal hız vektörüne eşittir:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (42)$$

şeklindedir. İki-boyutta  $w = 0$  olacağından dönme vektörü,  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = \frac{1}{2} (\beta - (-\beta)) \vec{k} = \beta \vec{k} \neq 0$ 'dir.

Çevrinti vektörü: Çevrinti vektörü, hız vektörü  $\vec{V}$ 'nin *curl*'ü şeklinde tanımlanır. Yani  $\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{curl}(\vec{V})$  ile verilir. Birim zamandaki dönme vektörü çevrinti vektörünün yarısına eşittir. Yani  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{2} \text{curl}(\vec{V}) = \frac{\vec{\zeta}}{2}$ 'dir. Buna göre çevrinti, bir akışkan parçacığının dönmesinin bir ölçüsüdür. Akış alanındaki bir noktada çevrinti sıfır değilse, akışkan parçacığı dönmektedir ve akış dönümlü olarak adlandırılır. Aynı şekilde çevrinti sıfır ise akışkan parçacıkları bu bölgede dönmez ve akış dönümsüz olarak bilinir.

$$\vec{\zeta} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = (\beta - (-\beta)) \vec{k} = 2\beta \vec{k} \neq 0 \quad (43)$$

olduğundan akış dönümlüdür.

Doğrusal şekil değiştirme hızı(Linear Strain Rate): Birim uzunluk başına birim zamanda meydana gelen uzunluk artışı olarak tanımlanır.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-\beta y)}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(\beta x)}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial(C)}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

olmaktadır. Buna göre doğrusal şekil değiştirme hızları sıfır olduğundan parçacık deforme olur fakat ne yatay nede düşey yönde uzar veya kısalır. Buradan hacimsel debinin sıfır olduğu görülebilir.  $V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  olduğundan akış sıkıştırılmazdır.

Kayma şekil değiştirmesi(Shear Strain Rate): Başlangıçta bir noktada kesişen iki dik çizgi arasındaki açıda birim zamanda meydana gelen azalmanın yarısı olarak tanımlanır.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(-\beta y)}{\partial y} + \frac{\partial(\beta x)}{\partial x} \right] = -\beta + \beta = 0 \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(C)}{\partial x} + \frac{\partial(-\beta y)}{\partial z} \right] = 0 \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\beta x)}{\partial z} + \frac{\partial(C)}{\partial y} \right] = 0\end{aligned}\tag{45}$$

olmaktadır. Akışkan kayma şekil değiştirmesine uğramaz. Yani başlangıçta belli bir noktada bir açıda bulunan akışkan, bu açı değerini koruyacaktır. Bu ise başlangıçta  $90^\circ$  olan köşe açıları hesaplamının yapıldığı zaman periyodu boyunca  $90^\circ$ 'de sabit kalmaktadır.

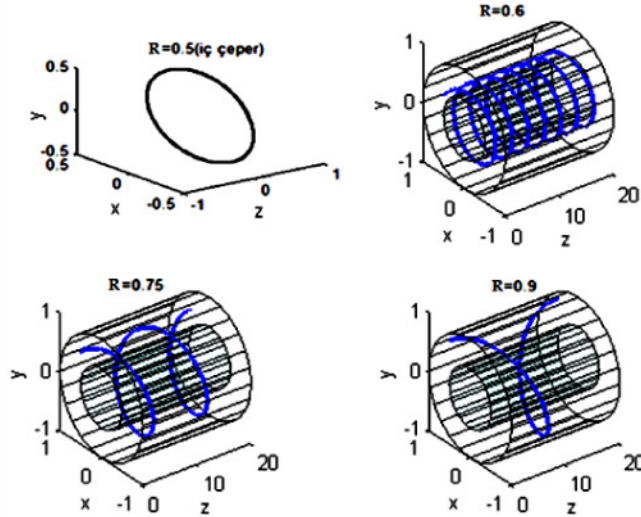
Hacimsel şekil değiştirme(Volumetric Strain Rate): Bir akışkan elemanın birim hacim başına, birim zamanda hacminde meydana gelen artış olarak tanımlanır. Sıkıştırılamaz bir akışta hacimsel şekil değiştirme hızı sıfırdır.  $\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0$  olduğundan, akışkan parçacıklarının hacmi sabit kalır. Bu durumda akışkan sıkıştırılamazdır.

### 2.1.3. Tek Parametreye Göre Akışkan Modelinin Analizi

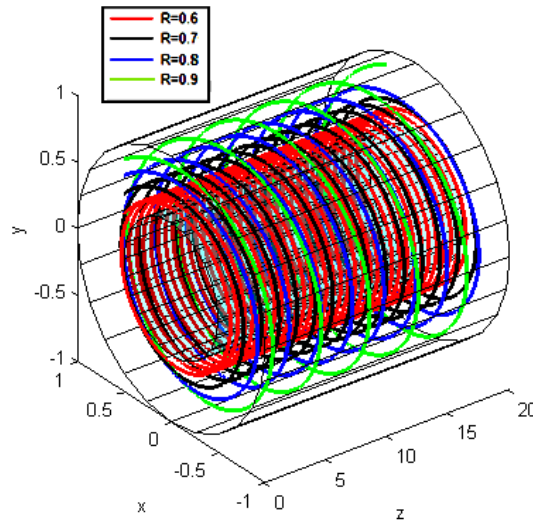
Bu kısımda ise analitik çözüme göre parametre analizleri yapılacaktır. Bu modele göre amaç, helisel akış ifadeleri sayesinde akışkanın hareketini incelemektir. Bunun için parametreler olarak, iç silindir hızı( $\omega$ ), basınç gradyeni( $\partial P/\partial z$ ) ve akışkan viskozitesi( $\mu_f$ )'a göre helisel akış profilleri çizilecektir. Ayrıca halkasal bölge içerisindeki farklı konumlar için akışkan elemanı hızları farklılık göstereceğinden bu noktaya göre de testler yapılacaktır.

İlk olarak, iç ve dış çeper arasındaki herhangi bir akışkan elemanı başlangıç konumuna göre analiz yapılmıştır. Bunun için  $r_o = 0.2$ ,  $r_i = 0.1$  olmak üzere, yarıçap olarak  $R = 0.5, R = 0.6, R = 0.75$  ve  $R = 0.9$  parametreleri alınmıştır. Akışkan parametreleri olarak,  $L = 20m$ 'lik boru kesiti için  $\omega = 5$ ,  $\mu_f = 0.02$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  alınmıştır. Bu parametreler altında Şekil 18'de bazı  $R$  değerleri için yörüngeler elde edilmiştir. Buna göre iç silindirde sadece dönme yönünde hareket vardır. İki silindirin orta

yerinde akışkan hareketi en hızlı olup dış silindire yakın yerlerde akışkan hızı azalır ve dış silindir üzerinde akışkan hareketi yoktur. Şekil 19’da ise  $\omega = 1$ ,  $\mu_f = 0.05$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  parametre değerleri için halkasal bölge içerisinde farklı konumlarda yörüngeler verilmiştir.



Şekil 18.  $\omega = 5$ ,  $\mu_f = 0.02$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $L = 20$  için iç ve dış silindir arasındaki halkasal bölgede akışkan hareketi

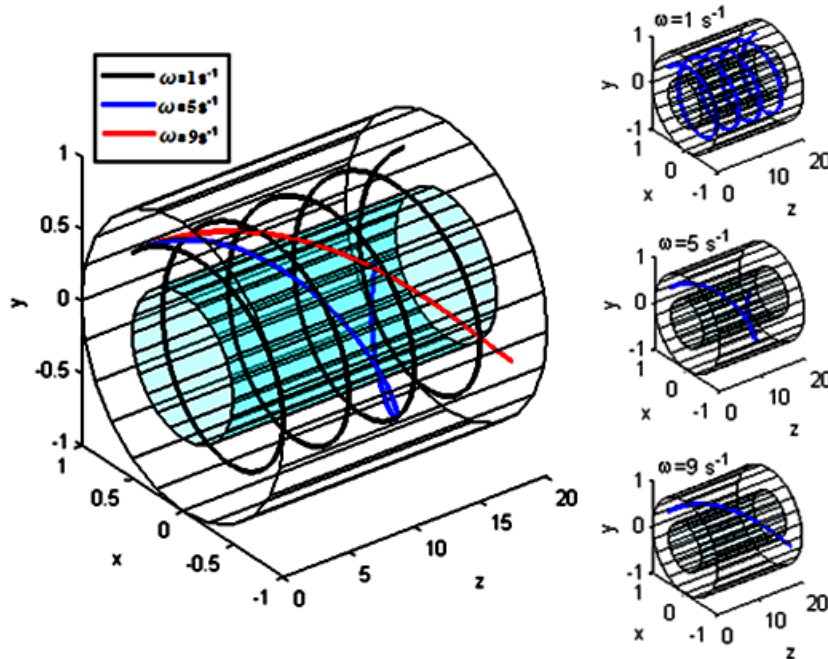


Şekil 19.  $\omega = 1$ ,  $\mu_f = 0.05$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $L = 20$  için iç-dış silindir arasında akışkan yörüngeleri

### 2.1.3.1. Hız Profiline $\omega$ Hızına Göre Değişimi

Bu bölümde  $R = 0.75$  konumunda, iç silindir hızına göre akışkan hareketinin değişimi incelenmiştir. Bunun için  $\omega = 1$ ,  $\omega = 5$  ve  $\omega = 9$  parametreleri ve akışkan

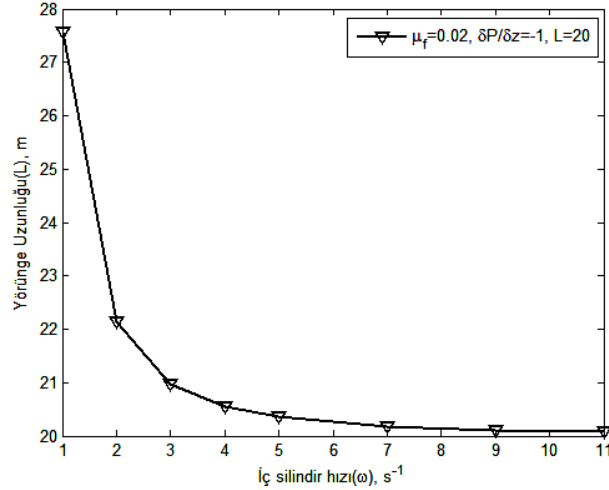
parametreleri olarak  $\mu_f = 0.02$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  alınmıştır. Bu parametreler altında Şekil 20’de bu  $\omega$  değerleri için yörüngeler elde edilmiştir. Buna göre silindir hızı arttıkça akışkan hızının da arttığı gözlemlenmiştir. Düşük hızlarda akışkan profil uzunlukları artmaktadır.  $L = 20m$  uzunluğundaki boru için iç silindir hızlarına göre akışkan yörüngeleri Şekil 20’de gösterilmiştir. Düşük hızlarda yörünge uzunlukları için hesaplamalar yapılmıştır ve bu değerler Tablo 2’de verilmiştir. Şekil 21’e göre yörünge uzunluğu olan  $L$ ,  $\omega$  açısal hızına bağımlılığı doğrusal değildir.



Şekil 20. Farklı  $\omega$  hızları ve  $\mu_f = 0.02$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $L = 20$  değerleri için akışkan yörüngeleri

Tablo 2.  $\mu_f = 0.02$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $L = 20$  parametre değerleri ve düşük  $\omega$  hızlarına göre yörünge uzunlukları

$\omega$	1	3	5	7	9	11
$L$	27.5580	20.9734	20.3550	20.1804	20.1068	20.0736

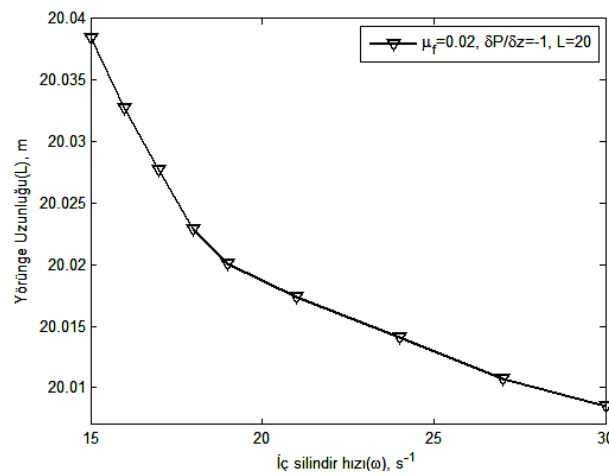


Şekil 21.  $\mu_f = 0.02$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  parametreleri için düşük açısallara göre helisel akış yörünge uzunluklarının değişimi

Daha yüksek hızlardaki  $\omega$  açısal hızına göre tek parametre değişimini incelemek için Tablo 3'de aynı parametreler ile uzunluk değerleri hesaplanmıştır ve Şekil 22'ye göre yüksek hızlardaki helisel akışlarda yörünge hızları, düşük hızdaki uzunluk artışına göre daha az değişim göstermektedir.

Tablo 3.  $\mu_f = 0.02$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $L = 20$  parametre değerleri ve yüksek  $\omega$  hızlarına göre yörünge uzunlukları

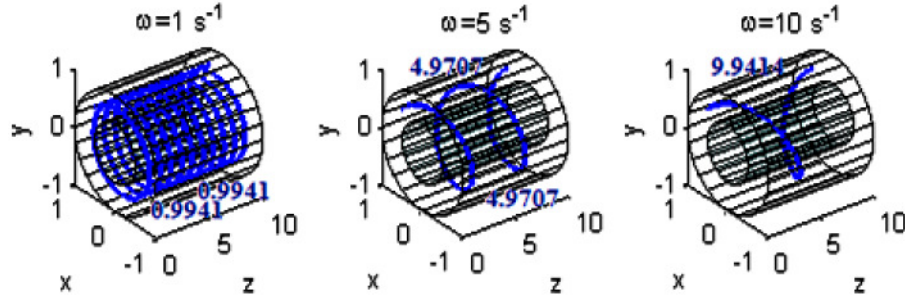
$\omega$	15	18	21	24	27	30
$L$	20.0384	20.0201	20.0174	20.0141	20.0107	20.0085



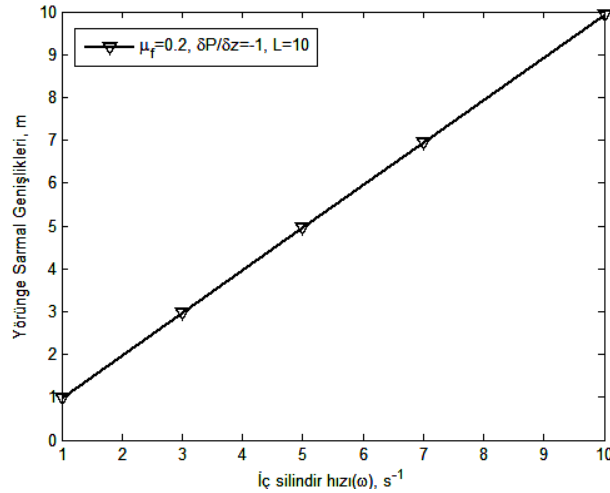
Şekil 22.  $\mu_f = 0.02$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  parametreleri için yüksek açısallara göre helisel akış yörünge uzunluklarının değişimi



Bu kısımda, değişik hız parametrelerinin helisel akış profilinde aksenal yönde yörüngeler arasındaki mesafeyi nasıl etkilediğini araştırılacaktır. Bunun için  $\mu_f = 0.2$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $L = 10$  parametreleri ve farklı  $\omega = 1, 3, 5, 7, 10$  hızları için yörüngeler arası uzaklık hesaplanmıştır ve helisel yörüngeler arasındaki mesafelerin doğrusal olacak şekilde arttığı gözlemlenmiştir.  $\omega = 1$  için yörüngeler arası mesafe 0.9941,  $\omega = 3$  için 2.9824,  $\omega = 5$  için 4.9707,  $\omega = 7$  için 6.9590 ve  $\omega = 10$  için ise bu değer 9.9414'dir. Sonuç olarak  $L = 10$  uzunluklu bir boruda Şekil 23'de gösterildiği gibi hızın artışı helisel akış yörüngeler arasındaki mesafeyi artırmaktadır. Ayrıca hızın yörüngeler arası mesafe üzerine olan etkisi incelenmiş ve Şekil 24'de görüldüğü gibi hız ile yörüngeler arası mesafe arasında doğrusal bir ilişki olduğu gözlemlenmiştir.



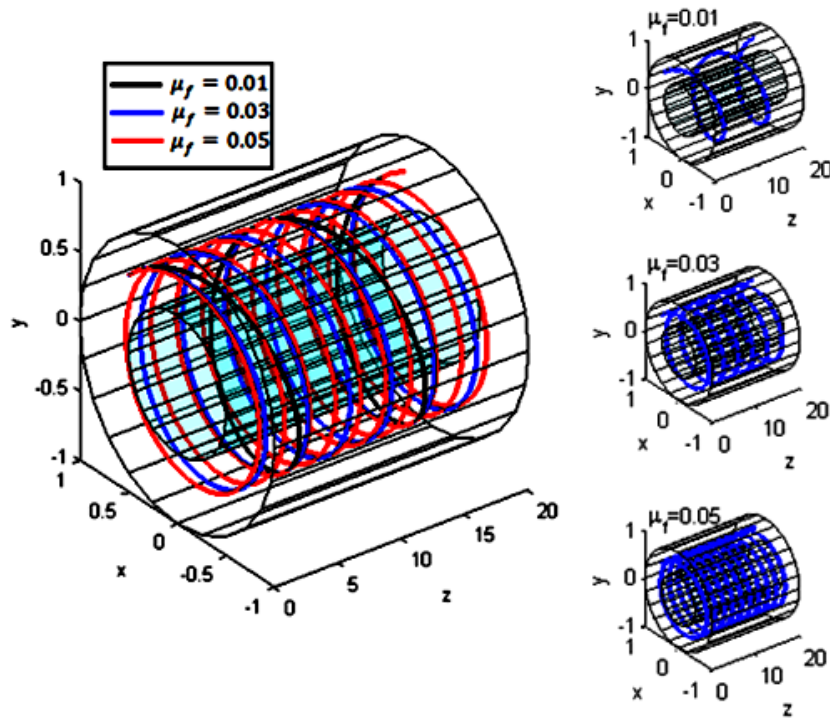
Şekil 23.  $\mu_f = 0.2$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $L = 10$  için  $\omega$  parametresine göre yörüngeler arası mesafeler



Şekil 24.  $\mu_f = 0.2$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $L = 10$  için yörüngeler arası mesafenin  $\omega$  parametresine göre değişimi

### 2.1.3.2. Hız Profiline $\mu_f$ Viskozitesine Göre Değişimi

Bu kısımda akışkan viskozitesine göre akışkan hareketinin değişimi incelenmiştir. Bunun için  $\mu_f = 0.01, \mu_f = 0.03$  ve  $\mu_f = 0.05$  parametreleri ve akışkan parametreleri olarak  $\omega = 1, \partial P/\partial z = -1$  alınmıştır. Bu parametreler altında Şekil 25’de bu  $\mu_f$  değerleri için yörüngeler elde edilmiştir. Buna göre akışkan viskozitesinin artışıyla birlikte akışkan yörünge uzunluğunun arttığı gözlemlenmiştir.



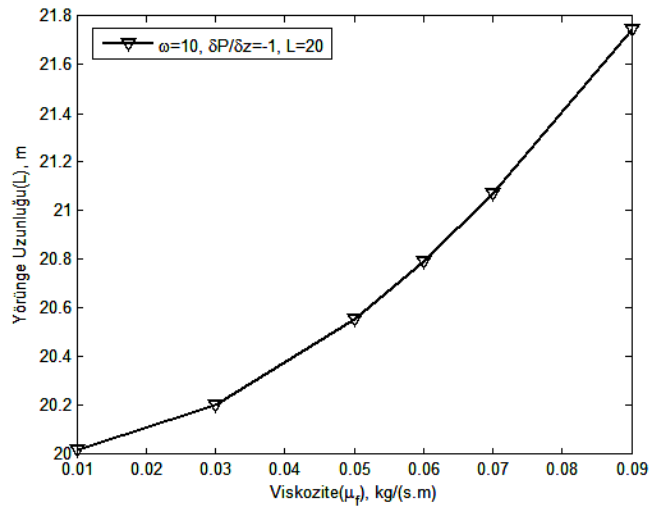
Şekil 25. Farklı  $\mu_f$  viskoziteler ve  $\omega = 1, \partial P/\partial z = -1$  ve  $L = 20$  için akışkan yörüngeleri

Viskozite etkisinin akışkan hızına etkisi için,  $\omega = 1, \partial P/\partial z = -1, L = 20$  parametreleri altında, düşük viskozitede yörünge uzunlukları daha kısa, yüksek viskozitelerde ise yörünge uzunluklarının viskozite artışıyla beraber arttığı görülmüştür. Tablo 4’de aynı parametreler cinsinden farklı viskozitelere karşı gelen yörünge uzunlukları verilmiştir ve Şekil 26’dan,  $\omega = 10, \partial P/\partial z = -1, L = 20$  parametreleri için akışkan viskozitesinin, yörünge uzunluklarına bağımlılığı doğrusal olmayacak şekilde değiştiği gözlemlenmektedir. Şekil 27’de viskozite değerine karşılık gelen  $\mu_f - t$  grafiği

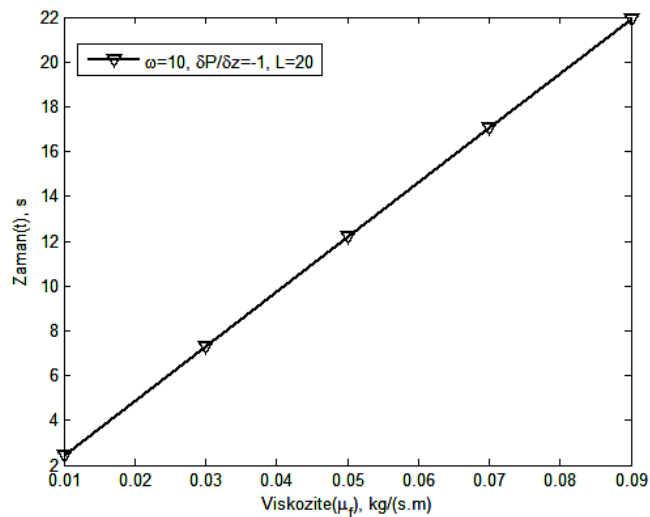
verilmektedir. Şekil 27'ye göre boru kesit uzunluğu olan  $L = 20m$  uzunluğuna ulaşmak için gerekli olan zaman viskozite arttıkça artmaktadır.

Tablo 4.  $\omega = 1$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $L = 20$  parametre değerleri ve farklı  $\mu_f$  viskozitesine göre yörünge uzunlukları

$\mu_f$	0.01	0.03	0.05	0.06	0.07	0.09
$L$	20.0168	20.2010	20.5533	20.7929	21.0712	21.7437

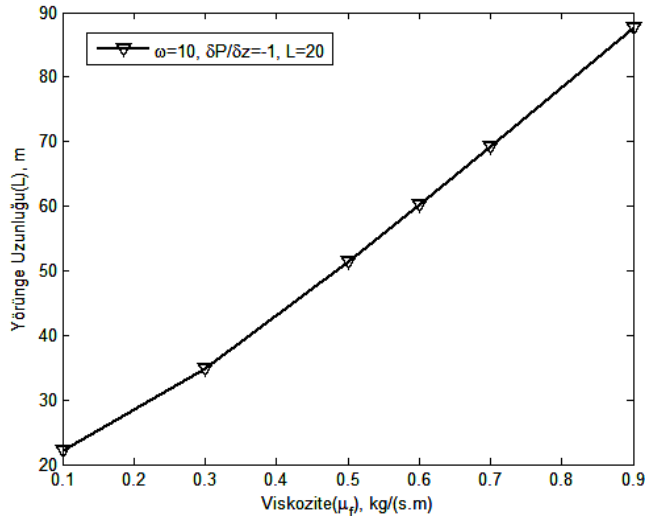


Şekil 26.  $\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $L = 20$  viskoziteye göre helisel akışta akışkan elemanının yörünge uzunluklarının değişimi



Şekil 27.  $\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $L = 20$  değerleri için helisel akış yörünge  $\mu_f - t$  grafiği

$\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $L = 20$  için yüksek viskozite değerleri için tek parametre değişimine göre yörünge uzunluklarının incelenmesi sonucunda Şekil 28'e göre yüksek viskozitelerde yörünge uzunluğu, düşük viskozitede hesaplanan yörünge uzunluğuna göre değişimi daha çoktur ve viskozite arttıkça doğrusal bir şekilde artar.



Şekil 28.  $\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $L = 20$  parametreleri için yüksek viskozite değerlerine göre helisel akışta akışkan elemanın yörünge uzunluklarının değişimi

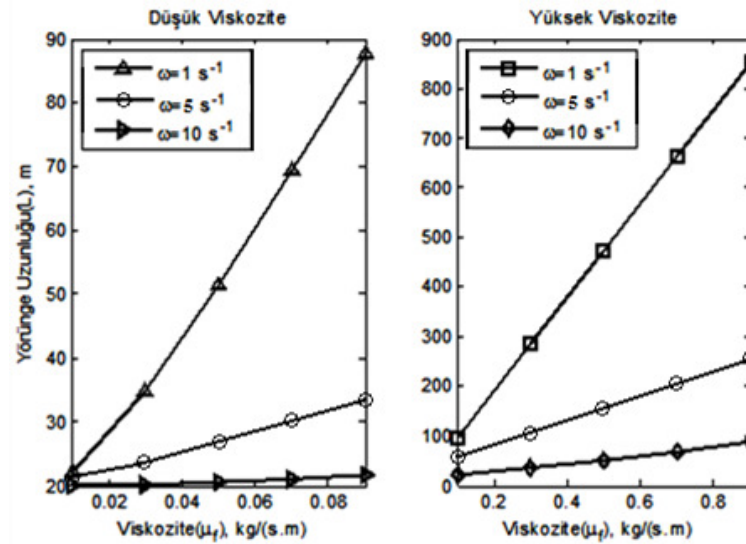
Genel olarak düşük ve yüksek viskozitede tek parametre değişimine göre yörünge uzunlukları karşılaştırılırsa  $\omega = 1$  ve  $\omega = 10$  hızları için hesaplanan değerler Tablo 5 ve Tablo 6'da gösterilmiştir. Buna göre yörünge uzunluğunun en büyük artış gösterdiği durum, en yüksek viskozite değeri ve düşük hız olduğu durumdur. Ayrıca Şekil 29'a göre yüksek hız ve düşük viskozitenin akışkan elemanı yörünge uzunluğuna etkisinin çok önemli derecede değiştirmedeği görülmektedir.

Tablo 5.  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $L = 20$  parametreleri değerleri ve  $\omega = 1$ ,  $\omega = 10$  hızlarında düşük viskozite değerlerine göre yörünge uzunlukları

Düşük Viskozite	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
$\omega = 1$	22.1325	34.7674	51.4453	69.3081	87.6308
$\omega = 10$	20.0142	20.1929	20.5512	21.0717	21.7415

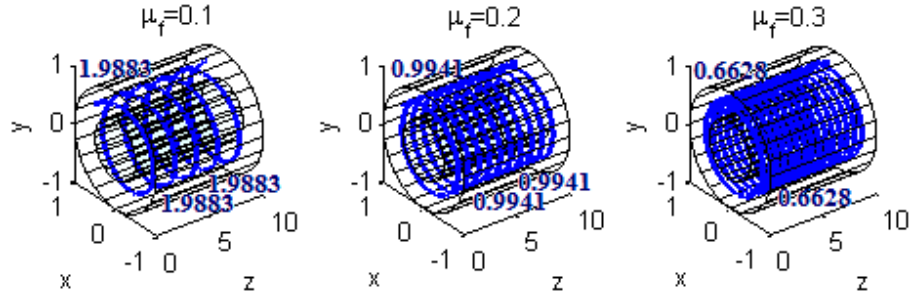
Tablo 6.  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $L = 20$  parametreleri değerleri ve  $\omega = 1$ ,  $\omega = 10$  hızlarında yüksek viskozite değerlerine göre yörünge uzunlukları

Yüksek Viskozite	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\omega = 1$	96.8864	285.0936	474.3942	663.8744	853.4080
$\omega = 10$	22.1282	34.7674	51.4413	69.3046	87.6304

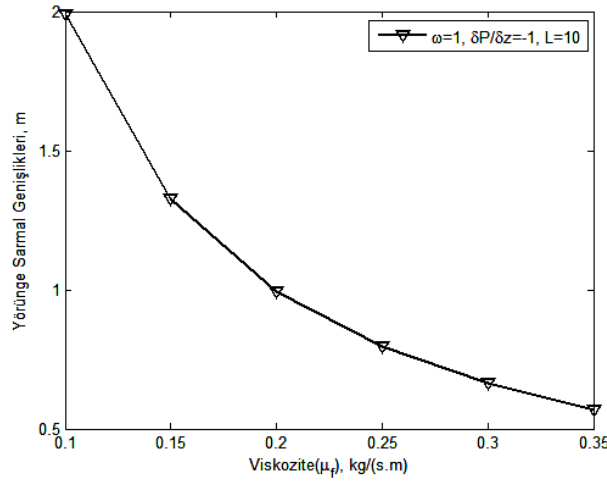


Şekil 29. Farklı hızlarda düşük ve yüksek viskozite değerleri için akışkan elemanı yörüngesi

Bu kısımda, viskozitenin yörüngeler arasındaki uzaklığı nasıl etkilediği araştırılacaktır. Bunun için farklı viskozite değerleri ve  $\omega = 1$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $L = 10$  olarak akışkan yörüngeler arası uzaklık değişimleri incelenecektir. Viskozite değerleri için  $\mu_f = 0.1, 0.2$  ve  $0.3$  değerleri alınmıştır. Helisel akış profilinde eksenel yönde her yörünge arası mesafe hesaplanmış ve eşit olduğu sonucu ortaya çıkmıştır.  $\mu_f = 0.1$  için yörüngeler arası mesafe 1.9883,  $\mu_f = 0.15$  için 1.3255,  $\mu_f = 0.2$  için mesafe 0.9941,  $\mu_f = 0.25$  için 0.7953,  $\mu_f = 0.3$  için 0.6628 ve  $\mu_f = 0.35$  için ise bu mesafe 0.5681 olarak hesaplanmıştır. Şekil 30'da gösterildiği gibi göre viskozite artışı yörüngeler arası mesafeyi azaltmaktadır. Ayrıca Şekil 31'de yörüngeler arası mesafenin viskoziteyle beraber doğrusal olmayacak şekilde azaldığı anlaşılmaktadır.



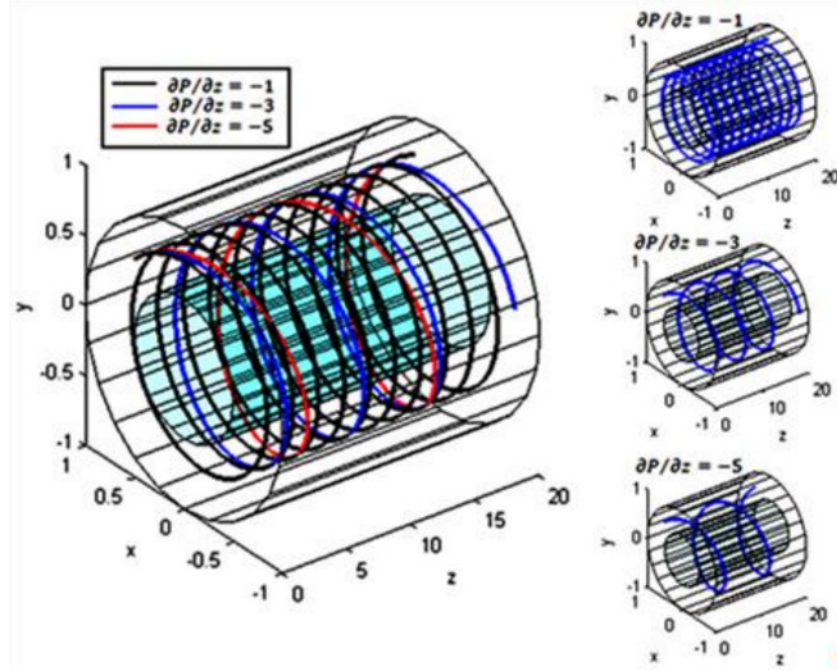
Şekil 30.  $\omega = 1$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $L = 10$  ve farklı  $\mu_f$  parametresine göre yörüngeler arası mesafeler



Şekil 31.  $\omega = 1$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $L = 10$  parametreleri için yörüngeler arası mesafenin  $\mu_f$  parametresine göre değişimi

### 2.1.3.3. Hız Profiline $\partial P/\partial z$ Basınç Gradyenine Göre Değişimi

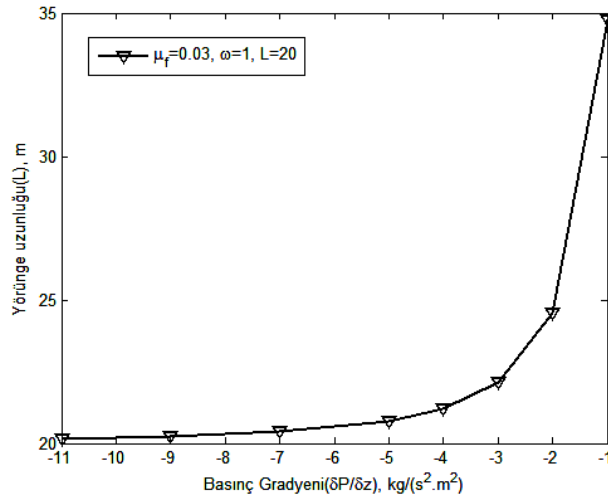
Bu kısımda basınç gradyanına göre akışkan hareketinin değişimi incelenmiştir. Bunun için  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $\partial P/\partial z = -3$  ve  $\partial P/\partial z = -5$  parametreleri ve akışkan parametreleri olarak  $\omega = 1$ ,  $\mu_f = 0.05$  alınmıştır. Bu parametreler altında Şekil 32’de bu  $\partial P/\partial z$  değerleri için yörüngeler elde edilmiştir. Buna göre akışkanın basınç gradyanından etkilendiği ve basınç gradyanı artışıyla beraber akışkanın aksel yönde hareket kazandığı gözlemlenmiştir. Buna göre düşük basınç gradyanında akışkan hızı düşük olduğundan, yörünge uzunlukları artmaktadır. Farklı basınç gradyanlarına göre hesaplanan değerler Tablo 7’de verilmiştir. Şekil 33’e göre helisel akış yörünge uzunlukları düşük basınç gradyanlarında en yüksek değerini aldığı gözlemlenmiştir. Ayrıca Şekil 33’e göre yörünge uzunluğunun basınç değişimine göre değişimi doğrusal değildir.



Şekil 32. Farklı  $\partial P/\partial z$  basınç gradyeni ve  $\omega = 1$ ,  $\mu_f = 0.05$  ve  $L = 20$  için akışkan yörüngeleri

Tablo 7.  $\omega = 1$ ,  $\mu_f = 0.05$ ,  $L = 20$  değerleri ve farklı basınç gradyenlerine göre yörünge uzunlukları

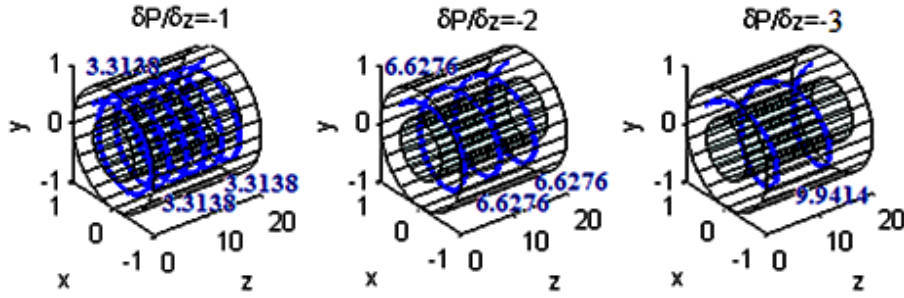
$\partial P/\partial z$	-11	-9	-7	-5	-3	-1
$L$	20.1502	20.2199	20.4001	20.7764	22.1282	34.7674



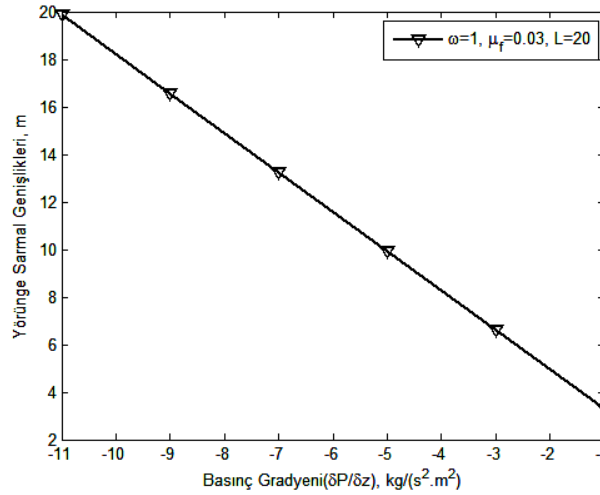
Şekil 33.  $\omega = 1$ ,  $\mu_f = 0.03$  ve  $L = 20$  parametre değerleri için basınç değişimine göre helisel akış yörünge uzunluklarının değişimi



$\omega = 1$ ,  $\mu_f = 0.03$ ,  $L = 20$  parametreleri ve farklı basınç gradyanları alınarak elde edilen yörüngeler arası mesafeler, Şekil 34'de görüldüğü gibi  $\partial P/\partial z = -1$  için 3.3138,  $\partial P/\partial z = -2$  için 6.6276 ve  $\partial P/\partial z = -3$  için ise 9.9414 olarak hesaplanmıştır. Şekil 35'e göre yörüngeler arası mesafe basınçla doğru orantılı olacak şekilde azaldığı görülmektedir.



Şekil 34.  $\omega = 1$ ,  $\mu_f = 0.03$ ,  $L = 20$  parametreleri için  $\partial P/\partial z$  parametresine göre yörüngeler arası mesafenin incelenmesi



Şekil 35.  $\omega = 1$ ,  $\mu_f = 0.03$ ,  $L = 20$  parametreleri için yörüngeler arası mesafenin  $\partial P/\partial z$  parametresine göre değişimi

#### 2.1.4. İki-parametre Değişimine Göre Analiz

Bu bölümde, helisel akış model denklemlerinden faydalanarak iki parametre değişimine göre analiz yapılacaktır. Diğer özellikler sabit kalmak şartıyla akışkanın viskozite, basınç gradyanı ve iç silindir hızına göre durum analizleri yapılacaktır. Amacımız seçilen iki parametrenin değişimine göre akışkan yörüngelerini nasıl değiştiğini ve hangi parametrenin akışkan yörüngesi üzerinde daha etkin olduğunu tespit etmektir. Ayrıca bu parametrelerin yörüngeler arasındaki uzaklığı nasıl değiştirdiği incelenecektir.



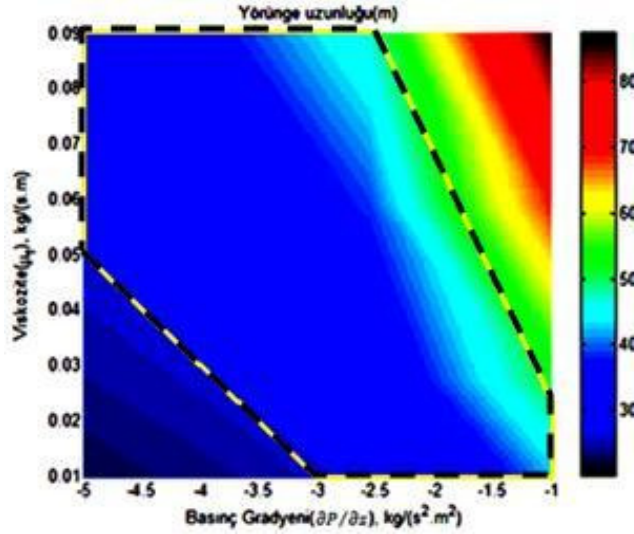
### 2.1.4.1. Viskozite ve Basınç Değişimine Göre Analiz

İlk olarak  $L = 20$  ve  $\omega = 1$  ve  $\omega = 10$  açısal hızlarında; viskozite ve basıncın değiştiği durumlarda yörüngeleri uzunlukları ve yörüngeler arasındaki mesafeler incelenecektir. Amacımız düşük ve yüksek hızlarda akışkan yörüngelerinin ve hızın bu değerlerdeki helisel akış yörüngeleri arası uzaklıkları nasıl etkilediğini görmektedir. Tablo 8 değerlerinde birinci satır yörünge uzunluğunu, ikinci satır ise yörüngeler arası mesafeyi vermektedir. Yapılan iki parametre değişimi analizine göre düşük ve yüksek hızlarda, viskozite ve basınç değişimine göre yörünge uzunlukları ve yörüngeler arası mesafeler incelenmiştir. Düşük hızdaki değişimler Tablo 8’de ve yüksek hızdaki değişimler ise Tablo 9’da verilmiştir. Buna göre, Şekil 36’ya göre akışkan elemanın yörünge uzunluğunun maksimum değeri, en yüksek viskozite değeri ile en düşük basınç gradyeni olduğu durumda meydana gelir. Düşük hızlarda akışkan yörünge uzunlukları, yüksek hızlardaki hıza göre daha büyüktür. Ayrıca düşük hızlarda akışkan profili, göze alınan boru uzunluğunda silindir üzerinde tam devir yapacağından yörüngeler arası mesafeler hesaplanmıştır. Fakat daha yüksek hızlarda verilen boru uzunluğunda akışkan yörüngesi tam devir yapamadığından yörüngeler arası mesafeler hesaplanamamıştır. Sonuç olarak laminar akışta parçacık taşınım için, akışkan elemanın makul bir uzunlukta olmasını isteriz ki, parçacıklar kısa sürede sistemi terk edebilsinler. Bunun için Şekil 36’da çizgili hatlarıyla verilen değerler kümesi akışkan elemanın taşınımı için uygundur.

Tablo 8.  $\omega = 1$  için  $\mu_f - \partial P / \partial z$  değişimi

$\frac{\partial P}{\partial z}$	$\mu_f$	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
		-1	YU	22.1325	34.7656	51.4427
	YAU	13.2557	4.4186	2.6511	1.8937	1.4729
-2	YU	20.5525	24.5381	31.0088	38.7387	47.1120
	YAU	-	8.8372	5.3023	3.7874	2.9457
-3	YU	20.2466	22.1314	25.4861	29.8188	34.7656
	YAU	-	13.2557	7.9534	5.6810	4.4186
-4	YU	20.1385	21.2174	23.2405	25.9794	29.2343
	YAU	-	17.6743	10.6046	7.5747	5.8914
-5	YU	20.0882	20.7916	22.1314	24.0012	26.2883
	YAU	-	-	13.2557	9.4684	7.3643

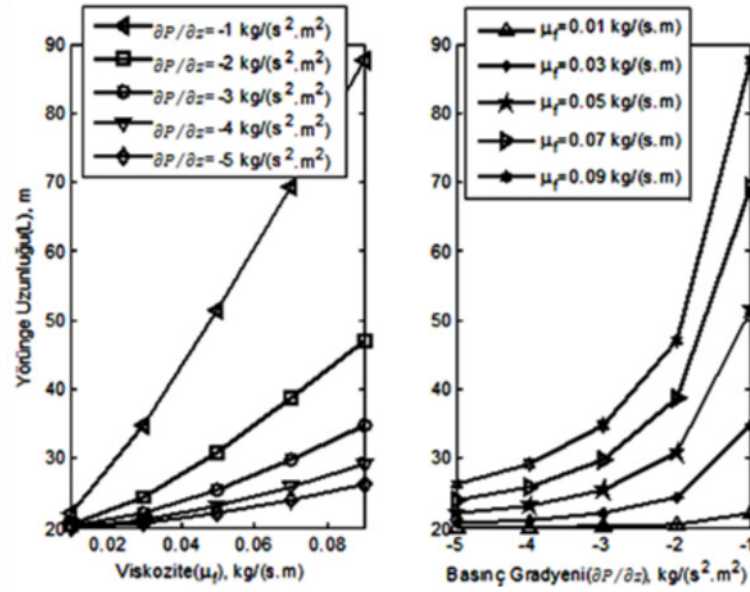
YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik



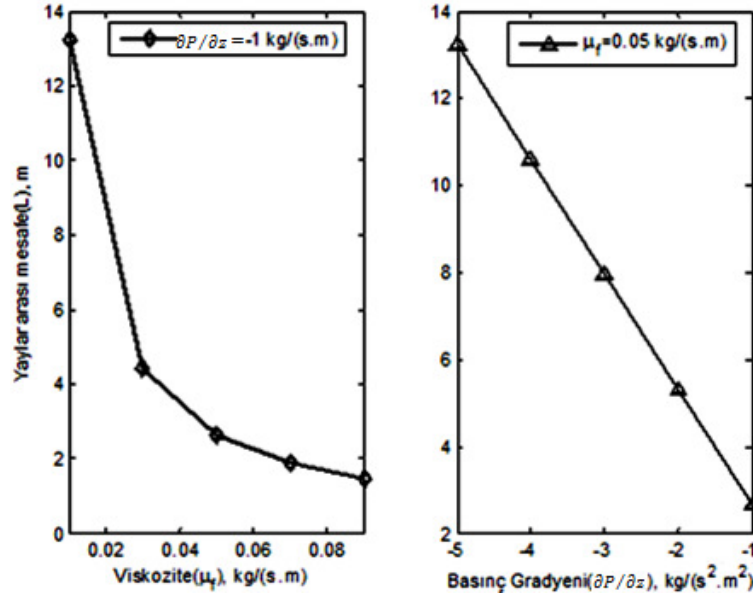
Şekil 36.  $\omega = 1$  için viskozite ve basınç gradyeni değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunluğu

Şekil 37’de akışkan elemanı yörünge uzunlukları viskozite ve basınç gradyeni parametrelerine göre daha açık biçimde gösterilmektedir. Buna göre yüksek viskozite artışlarında, yörünge uzunluğu doğrusal olarak artmaktadır. En uzun yörünge uzunluğu düşük basınç gradyeni ve yüksek viskozite değerinde elde edilmektedir. Aynı şekilde, yörünge uzunlukları ile basınç gradyeni arasında da doğrusal olmayan bir ilişki vardır ve basınç gradyenindeki azalma ile yörünge uzunlukları artmaktadır. Düşük viskozite değerlerinde basınç değişiminin fazla bir önemi yoktur.

Şekil 38’de parametrelerin yörüngeler arası mesafeyi nasıl etkilediği incelenmiştir. Sabit basınç gradyeninde yörüngeler arası mesafe viskozite artışıyla doğrusal olmayacak şekilde azalmaktadır ve sabit viskozitede ise yörüngeler arası mesafe basınç gradyeni ile doğrusal olarak azalmaktadır. Yüksek hızlarda ise yörüngeler arası mesafeler hesaplanamadığından buna bağlı analiz yapılmamıştır.



Şekil 37.  $\omega = 1$  için viskozite ve basınç gradyenine göre akışkan elemanı yörünge uzunlukları



Şekil 38.  $\omega = 1$  için viskozite ve basınç gradyenine göre yörüngeler arası mesafeler

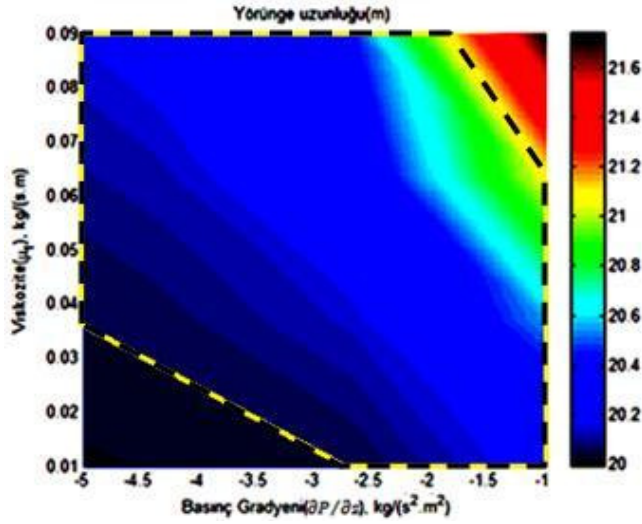
Şekil 39'da  $\omega = 10$  açılal hızında viskozite ve basınç gradyenine göre yörünge uzunlukları incelenmiştir. Buna göre yüksek iç silindir hızında yörünge uzunlukları daha azalmaktadır. Yüksek hız ve düşük viskozite değerinde ise yörünge uzunluklarında önemli bir artış olmamaktadır. Laminer akışta parçacık taşınım için, akışkan elemanının makul bir uzunluktaki değerleri için Şekil 39'da çizgili hatlarıyla verilen değerler kümesi akışkan

elemanının taşınımı için uygundur. Şekil 40'a göre düşük viskozite ve yüksek basınç gradyeni değerlerinde akışkan yörünge uzunluklarında önemli değişimler olmamaktadır.

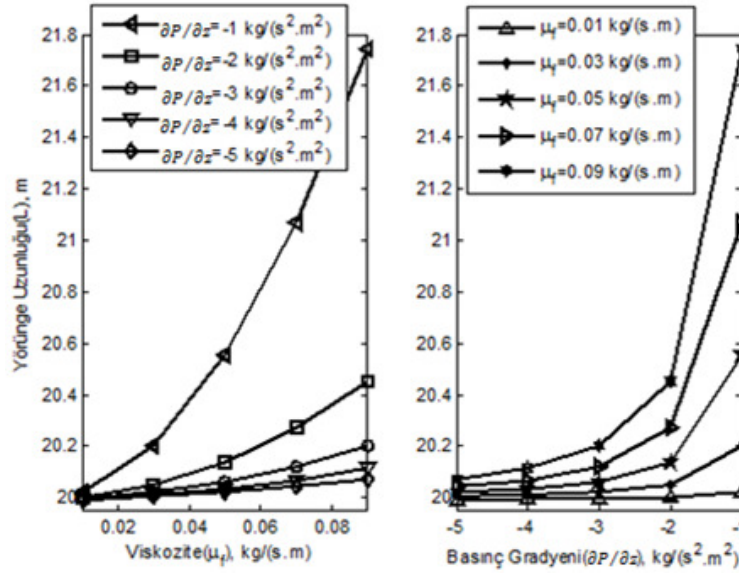
Tablo 9.  $\omega = 10$  için  $\mu_f - \partial P / \partial z$  değişimi

$\frac{\partial P}{\partial z}$ \ $\mu_f$		0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
		-1	YU	20.0223	20.2011	20.5539
	YAU	-	-	-	18.9368	14.7286
-2	YU	20.0027	20.0494	20.1392	20.2728	20.4495
	YAU	-	-	-	-	-
-3	YU	19.9969	20.0223	20.0616	20.1210	20.2011
	YAU	-	-	-	-	-
-4	YU	19.9985	20.0098	20.0344	20.0674	20.1130
	YAU	-	-	-	-	-
-5	YU	19.9926	20.0043	20.0223	20.0435	20.0719
	YAU	-	-	-	-	-

YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik



Şekil 39.  $\omega=10$  için viskozite ve basınç gradyeni değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunluğu



Şekil 40.  $\omega = 10$  için viskozite ve basınç gradyenine göre yörünge akışkan elemanı uzunlukları

#### 2.1.4.2. Hız ve Basınç Değişimine Göre Analiz

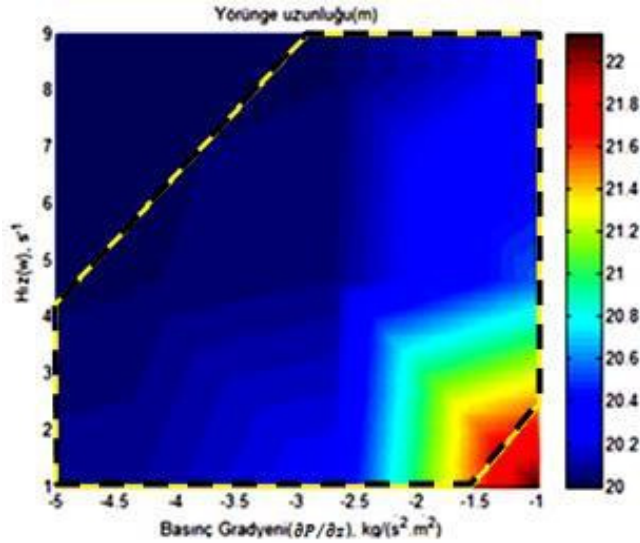
Bu kısımda  $L = 20$  ve  $\mu_f = 0.01$  ve  $\mu_f = 0.09$  viskozite değerli; hız ve basıncın değiştiği durumlarda yörüngeleri uzunlukları ve yörüngeler arasındaki mesafeler incelenecektir. Amacımız düşük ve yüksek viskozitelerde akışkan yörüngelerinin mesafesini ve hızın bu değerlerdeki helisel akış yörüngeleri arasındaki uzaklıkları nasıl etkilediğini görmektir. Tablo 10 değerlerinde birinci satır yörünge uzunluğunu, ikinci satır ise yörüngeler arasındaki mesafeyi vermektedir. Düşük ve yüksek viskozite değerlerinde, hız ve basınç gradyenine göre yörünge uzunlukları ve yörüngeler arasındaki mesafeler incelenmiştir ve Tablo 10 ve Tablo 11’de bu değerler verilmiştir. Şekil 41’e göre düşük viskozite ve yüksek hızlı parametre değerlerinde akışkan yörünge uzunluğunda önemli bir değişiklik yapmamaktadır. Laminer akışta parçacık taşınım için, akışkan elemanının makul uzunluktaki değerleri için Şekil 41’de çizgili hatlarıyla verilen değerler kümesi akışkan elemanının taşınımı için uygundur. Düşük viskozite değerlerinde akışkan yörüngesi belirtilen boru uzunluğu kısmında tam bir devir yapmadığından yörüngeler arasındaki mesafe analizi düşük viskozite değerlerinde yapılamamıştır.



Tablo 10.  $\mu_f = 0.01$  için  $\omega - \partial P / \partial z$  değişimi

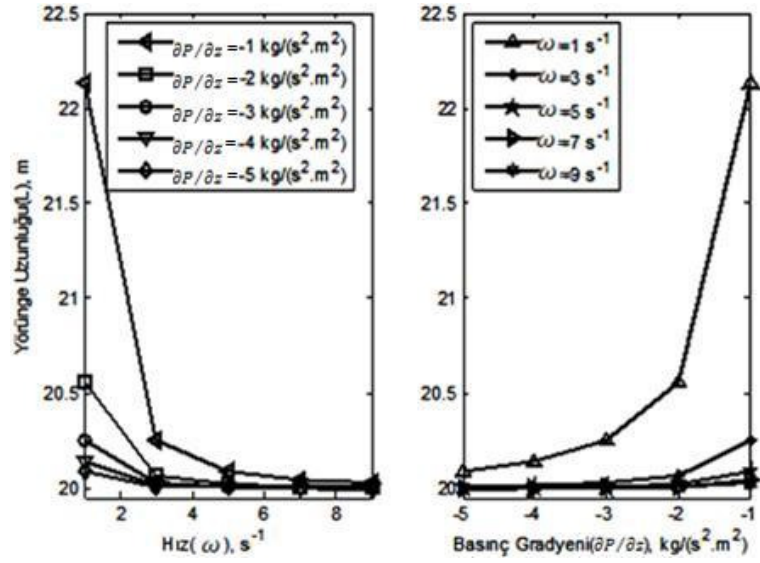
$\frac{\partial P}{\partial z}$ \ $\omega$		$\omega$				
		1	3	5	7	9
-1	YU	22.1329	20.2474	20.0895	20.0454	20.0262
	YAU	13.2557	-	-	-	-
-2	YU	20.5539	20.0616	20.0223	20.0091	20.0030
	YAU	-	-	-	-	-
-3	YU	20.2474	20.0262	20.0085	20.0028	19.9991
	YAU	-	-	-	-	-
-4	YU	20.1392	20.0149	20.0027	19.9967	19.9958
	YAU	-	-	-	-	-
-5	YU	20.0895	20.0085	20.0021	19.9958	19.9946
	YAU	-	-	-	-	-

YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik



Şekil 41.  $\mu_f = 0.01$  için hız ve basınç gradyeni değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunluğu

Şekil 42'de, düşük viskozitede akışkan yörünge uzunlukları içi silindir hızı ve basınç gradyenine göre test edilmiştir. Buna göre düşük hızlarda ve düşük basınç gradyeni değerlerinde akışkan daha uzun süreli mesafe kat etmektedir. Ayrıca düşük viskozite değerlerinde, yüksek iç silindir hızında yörünge uzunluklarında önemli bir değişim olmamaktadır. Yüksek hızlarda farklı basınç değerleriyle elde edilen yörünge uzunlukları da hemen hemen aynıdır.



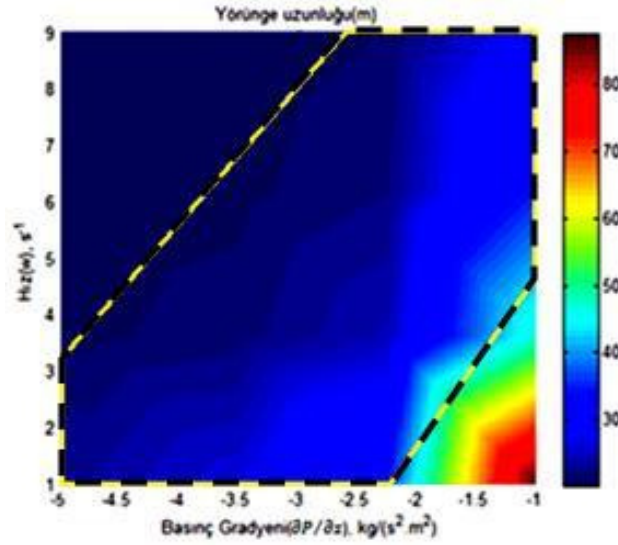
Şekil 42.  $\mu_f = 0.01$  için açısal hız ve basınç gradyanına göre akışkan elemanı yörünge uzunlukları

Şekil 43’de yüksek viskozitede, basınç gradyanı ve açısal hız parametrelerine göre akışkan profilindeki davranışlar incelenmiştir ve sonuçlar Tablo 5’de verilmiştir. Buna göre yörünge mesafeleri, düşük basınç gradyanı ve düşük hızda yüksek seviyededir. Laminer akışta parçacık taşınım için, akışkan elemanının makul bir uzunluktaki değerleri için Şekil 43’de çizgili hatlarıyla verilen değerler kümesi akışkan elemanının taşınımı için uygundur.

Tablo 11.  $\mu_f = 0.09$  için  $\omega - \partial P/\partial z$  değişimi

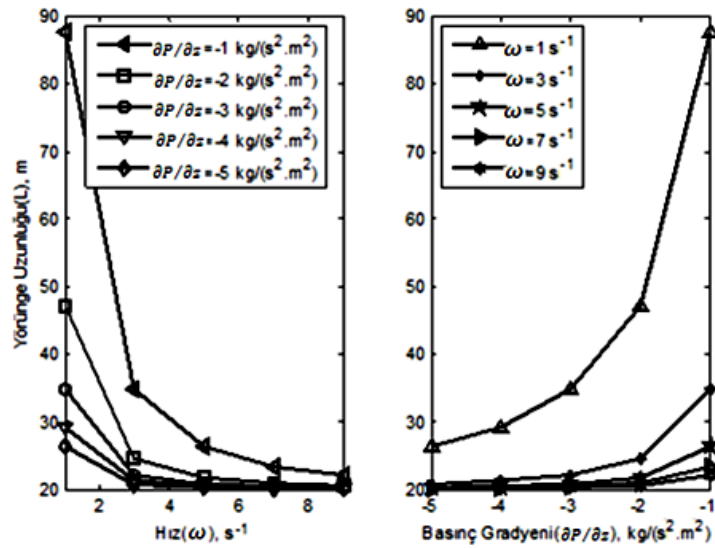
$\frac{\partial P}{\partial z}$	$\omega$	1	3	5	7	9
		-1	YU: 87.6320 YAU: 1.4729	YU: 34.7680 YAU: 4.4186	YU: 26.2893 YAU: 7.3643	YU: 23.4202 YAU: 10.3100
-2	YU: 47.1145 YAU: 2.9457	YU: 24.5386 YAU: 8.8372	YU: 21.7414 YAU: 14.7286	YU: 20.9068 YAU: -	YU: 20.5511 YAU: -	
-3	YU: 34.7680 YAU: 4.4186	YU: 22.1329 YAU: 13.2557	YU: 20.7892 YAU: -	YU: 20.4074 YAU: -	YU: 20.2424 YAU: -	
-4	YU: 29.2392 YAU: 5.8914	YU: 21.2232 YAU: 17.6743	YU: 20.4445 YAU: -	YU: 20.2254 YAU: -	YU: 20.1370 YAU: -	
-5	YU: 26.2893 YAU: 7.3643	YU: 20.7892 YAU: -	YU: 20.2837 YAU: -	YU: 20.1427 YAU: -	YU: 20.0813 YAU: -	

YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik



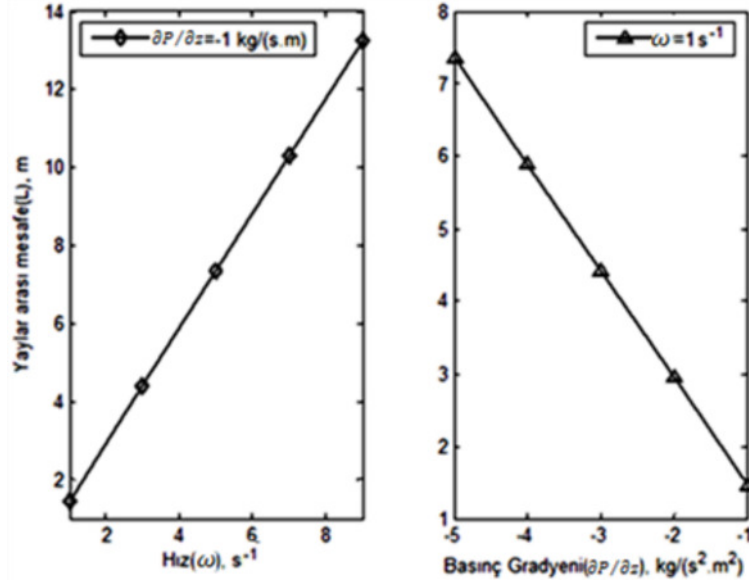
Şekil 43.  $\mu_f = 0.09$  için hız ve basınç gradyeni değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunluğu

Şekil 44'de ise açılmal hız ve basınç gradyeni parametrelerine bağlı olarak akışkan yörünge uzunluklarındaki değişim incelenmiştir. Düşük basınç gradyeni ve düşük iç silindir hızlarındaki yörüngelerin daha uzun olduğu görülmüştür. Basınç gradyenindeki ve hızdaki artış yörünge uzunluğunu azaltmaktadır. Sabit bir basınç gradyeni değerinde hız arttıkça ve sabit bir hız değerinde basınç gradyeni arttıkça yörünge uzunlukları doğrusal olmayacak şekilde azalmaktadır. Yüksek basınç gradyeni ve yüksek hızlarda ise yörünge uzunluklarında önemli bir değişiklik olmamaktadır. Şekil 45'den hız ve basınç gradyenindeki artışların yörüngeler arası mesafeleri doğrusal bir şekilde arttırdığı görülmektedir.



Şekil 44.  $\mu_f = 0.09$  için basınç gradyeni ve açılmal hıza göre akışkan elemanı yörünge uzunlukları





Şekil 45.  $\mu_f = 0.09$  için basınç gradyeni ve açısal hıza göre yörüngeler arası mesafeler

### 2.1.4.3. Viskozite ve Hız Değişimine Göre Analiz

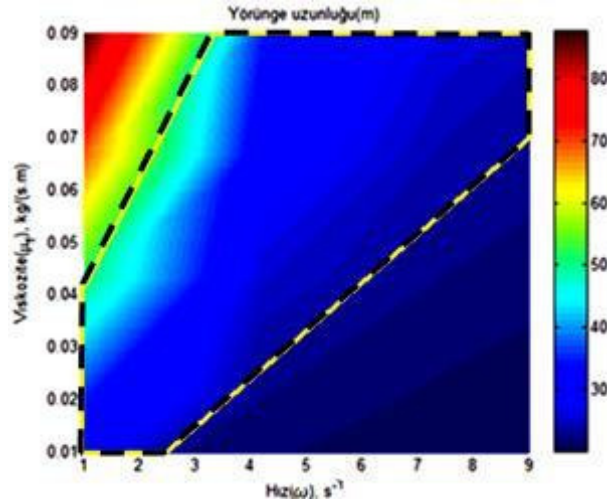
$L = 20$  ve  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $-5$  basınç gradyeni; hız ve viskozitenin değiştiği durumlarda yörüngeleri uzunlukları ve yörüngeler arasındaki mesafeler incelenecektir. Amacımız düşük ve yüksek basınç gradyeni altında, akışkan yörüngelerinin ve hızın bu değerlerdeki helisel akış yörüngeler arası uzaklıkları nasıl etkilediğini görmektedir. İncelenen bu değerler Tablo 12 ve Tablo 13’de verilmiştir. Tablo 12 değerlerinde birinci satır yörünge uzunluğunu, ikinci satır ise yörüngeler arası mesafeyi vermektedir.

Düşük basınç gradyeninde, Şekil 46’ya göre düşük hız ve yüksek viskozite değerlerinde maksimum akışkan uzunluğu yörüngesi elde edilmektedir. Yüksek hızlarda ve düşük viskozitede yörünge uzunluk değişimi hemen hemen önemsizdir. Laminer akışta parçacık taşınım için, akışkan elemanının makul bir uzunluktaki değerleri için Şekil 46’da çizgili hatlarıyla verilen değerler kümesi akışkan elemanının taşınımı için uygundur. Çünkü yörünge uzunluğunun büyük olduğu parametre kümesi çok fazla enerji harcandığını gösterir. Etkin parçacık taşınımı için eksenel yönde de belirli hızda hareket söz konusu olmalı. Asıntı yatağı oluşumuna karşı yörünge uzunluklarının küçük olduğu parametre kümeleri de tercih edilmez. Bundan dolayı belirtilen kümeden parametreler seçilmelidir.

Tablo 12.  $\partial P/\partial z = -1$  için  $\mu_f - \omega$  değişimi

$\omega$	$\mu_f$	$\mu_f - \omega$				
		0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	YU	22.1329	34.7680	51.4462	69.3078	87.6320
	YAU	13.2557	4.4186	2.6511	1.8937	1.4729
3	YU	20.2424	22.1329	25.4872	29.8196	34.7680
	YAU	-	13.2557	7.9534	5.6810	4.4186
5	YU	20.0813	20.7892	22.1329	24.0024	26.2893
	YAU	-	-	13.2557	9.4684	7.3643
7	YU	20.0320	20.4074	21.1128	22.1329	23.4202
	YAU	-	-	18.5580	13.2557	10.3100
9	YU	20.0139	20.2424	20.6777	21.3124	22.1329
	YAU	-	-	-	17.0431	13.2557

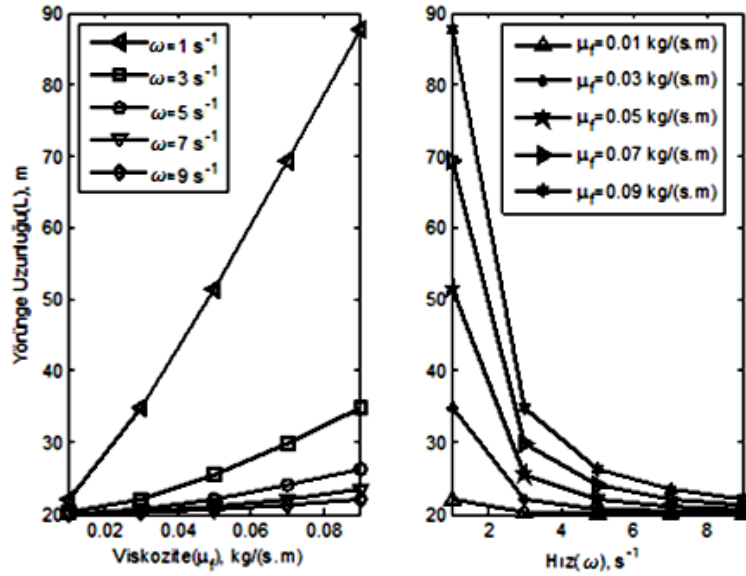
YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik



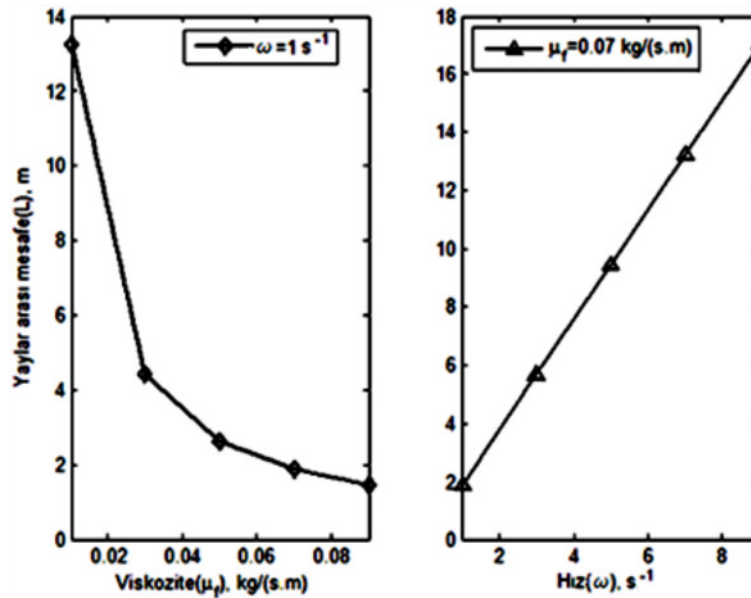
Şekil 46.  $\partial P/\partial z = -1$  için hız ve viskozite değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunluğu

Şekil 47'ye göre, düşük viskozite değerlerinde hıza bağımlılığın az olduğu görülmektedir. Bu durumdaki yörünge uzunlukları hemen hemen aynıdır. Düşük hızlarda ve yüksek viskozite değerlerinde de akışkan yörünge uzunluğu maksimuma ulaşır. Ayrıca yüksek açısal hız ve düşük viskozite değerlerinde de ele alınan boru kısmında, yörünge uzunlukları aynıdır. Sonuç olarak sabit basınç gradyeni altında akışkan elemanın taşınımı için düşük hızlarda ve viskozitenin de iç silindir hızının durumuna göre, hız arttıkça yüksek viskoziteli akışkan tercih edilmelidir.

Şekil 48'e göre, düşük basınç değerlerinde, viskozite artışıyla yörüngeler arasındaki mesafe doğrusal olmayacak şekilde azalmaktadır. Açıl hız arttığında ise yörüngeler arası mesafede bu artışa bağlı olarak doğrusal olarak artmaktadır.



Şekil 47.  $\partial P/\partial z = -1$  için viskozite ve açısal hıza göre akışkan elemanı yörünge uzunlukları



Şekil 48.  $\partial P/\partial z = -1$  için viskozite ve açısal hıza göre yörüngeler arası mesafeler

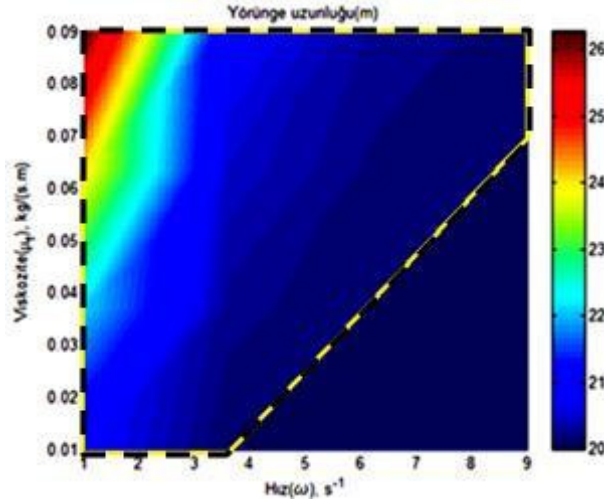
Yüksek basınç parametresi altında akışkan yörünge uzunlukları, Şekil 49'a göre düşük hızlarda ve yüksek viskozite değerlerinde maksimum uzunluk elde edilir. Laminer

akışta parçacık taşınım için, akışkan elemanın makul bir uzunluktaki değerleri için Şekil 49'da çizgili hatlarıyla verilen değerler kümesi akışkan elemanın taşınımı için uygundur.

Tablo 13.  $\partial P/\partial z = -5$  için  $\mu_f - \omega$  değişimi

$\omega$		$\mu_f$				
		0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	YU	20.0882	20.7930	22.1329	24.0024	26.2900
	YAU	-	-	13.2557	9.4684	7.3643
3	YU	20.0085	20.0895	20.2474	20.4829	20.7923
	YAU	-	-	-	-	-
5	YU	20.0021	20.0308	20.0895	20.1722	20.2889
	YAU	-	-	-	-	-
7	YU	20.0003	20.0155	20.0454	20.0859	20.1462
	YAU	-	-	-	-	-
9	YU	19.9996	20.0085	20.0262	20.0499	20.0859
	YAU	-	-	-	-	-

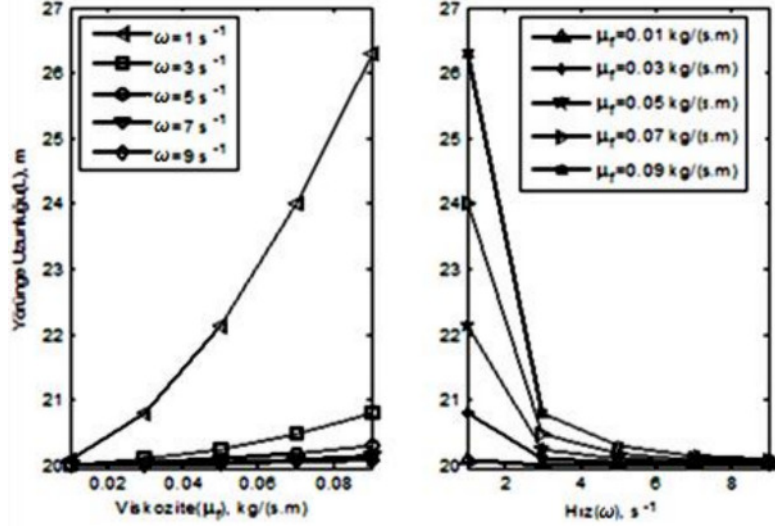
YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik



Şekil 49.  $\partial P/\partial z = -5$  için hız ve viskozite değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunluğu

Şekil 50'den, yüksek basınç değerlerindeki yörünge uzunlarının düşük olana göre daha kısa, yörüngeler arası uzunluk ise borunun belirtilen kısmında akışkan tam devir yapmadığından, yüksek basınç parametresine göre değişim incelenmemiştir. Fakat buna rağmen düşük hız ve yüksek viskozite değerlerinde yörüngeler arası parametrelere göre

değişim incelenebilir. Sonuç olarak, yüksek basınç gradyeni olan sistemde iç silindir hızı düşük ve viskozitenin bu hıza bağlı olarak seçilmesi önerilmektedir.



Şekil 50.  $\partial P/\partial z = -5$  için viskozite ve açısal hıza göre akışkan elemanı yörünge uzunlukları

## 2.2. Couette Akışı ile Parçacık Taşınım Modeli

### 2.2.1. Model Tanıtımı

Bu bölümde, Şekil 9 geometrisine göre  $\varepsilon \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{x}) - \varepsilon g_0 \mathbf{j}$  modeli, ilk olarak sadece dönme yönünde Couette akışını düşünerek irdelenecektir. Bu modelde amacımız dönme yönünde akışın olduğu durumda akışkan parçacığının hareketini modellemek ve parçacığın yörüngelerini parametrelere bağlı olarak irdelemektir. Bunun için parametreler olarak, parçacık yoğunluğu  $\rho_p$ , parçacık yarıçapı  $a_p$ , parçacık kütlesi  $m$ , akışkan viskozitesi  $\mu_f$ , iç silindir hızı  $\omega$ , basınç gradyeni  $\partial P / \partial z$  ve akışkan yoğunluğu  $\rho_f$  gibi parametreler alınmıştır. Bu modelde diğer tüm parametreler sabit kalmak koşuluyla kütle( $m$ ), viskozite( $\mu_f$ ), iç silindir hızı( $\omega$ ) ve basınç gradyenine( $\partial P / \partial z$ ) göre akışkan profillerinin değişimi incelenecektir. Ön bilgi olarak silindirik koordinatlarda  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  ve  $z = z$ ,  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  ile verilir. Bu modelde de borunun yatay olduğu dikkate alınmaktadır. Ayrıca silindirik koordinatlardaki birim vektörler kartezyen koordinatlardaki birim vektörler cinsinden;

$$\begin{aligned} e_r &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ e_\theta &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \end{aligned} \quad (46)$$

şeklinde verilir.

Akış dönme yönünde olduğundan  $u_r = 0, u_z = 0$ 'dır. O halde  $V = u_r e_r + u_\theta e_\theta + u_z e_z = u_\theta e_\theta$ 'dir. Dönme yönünde akış Couette tipi akış olduğundan dönme yönünde hız bileşeni  $u_\theta = (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) (\frac{1}{r} - r)$  şeklindedir. Modelde boru yatay olarak düşünülmektedir. O halde;

$$\begin{aligned} V &= u_\theta e_\theta + u_z e_z = u_\theta (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \\ &= (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) (\frac{1}{r} - r) \left( -\frac{y}{r} \mathbf{i} + \frac{x}{r} \mathbf{j} \right) \\ &= (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) \left( -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} \right) - \dots \\ &= (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) \left( \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - x \right) \mathbf{j} \right) = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} \end{aligned} \quad (47)$$

Hız bileşenini kartezyen koordinatlarda ifade ettik. Bu durumda (4) denklemindeki  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  ifadesi yerine bu modelde dönme yönünde hız profilinden oluşan ifadeyi alabiliriz.  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  olması durumunda denklem;

$$\begin{aligned}\varepsilon(\ddot{x}, \ddot{y}) + (\dot{x}, \dot{y}) &= \mathbf{V}(\mathbf{x}) - \varepsilon g_0 \mathbf{j} \\ \varepsilon(\ddot{x}, \ddot{y}) + (\dot{x}, \dot{y}) &= (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) \left( \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - x \right) \mathbf{j} \right) - \varepsilon g_0 \mathbf{j}\end{aligned}\quad (48)$$

ve buradan,

$$\begin{aligned}\varepsilon \ddot{x} + \dot{x} &= (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\ \varepsilon \ddot{y} + \dot{y} &= (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - x \right) - \varepsilon g_0\end{aligned}\quad (49)$$

olmak üzere denklem sistemi karşımıza çıkar. Bu denklemleri diferansiyel denklem sistemlerine dönüştürebiliriz.  $x = u_1, \dot{x} = u_2, y = u_3, \dot{y} = u_4$  alırsak denklem sistemimiz  $u_1(0) = x(0), u_2(0) = \dot{x}(0), u_3(0) = y(0), u_4(0) = \dot{y}(0)$  başlangıç şartlarına göre,

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) \left( u_3 - \frac{u_3}{u_1^2 + u_3^2} \right) - u_2 \right] \\ \dot{u}_3 &= u_4 \\ \dot{u}_4 &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) \left( \frac{u_1}{u_1^2 + u_3^2} - u_1 \right) - u_4 \right] - g_0\end{aligned}\quad (50)$$

şeklinde olacaktır. Bu sistem parçacığın iç silindirin üzerinden başlayarak dış silindire ulaşıncaya kadar sadece dönme yönünde izlediği yörüngeyi verir.

### 2.2.2. Çözüm Yöntemi

Bu kısımda (49) ile verilen doğrusal olmayan denklem sisteminin MDTM-Adomian tekniğiyle (Venkatarangan ve Rajalakshmi, 1994) yaklaşık çözümü yapılacak ve daha sonra elde edilen çözümlerin diğer yöntemlerle karşılaştırması yapılacaktır.

### 2.2.2.1. Diferansiyel Transform Metodu(DTM)

Bu metot Taylor serisinden farklı şekilde formülize edilmiş yarı nümerik analitik bir tekniktir. Bu teknikle sınır şartlarıyla verilen diferansiyel denklem tekrarlı denklemlere dönüştürülür. Sonuç olarak cebirsel denklem sisteminin çözümü kuvvet serisi çözümü olarak karşımıza çıkar. Bu metot doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin tam ve yaklaşık çözümlerini elde etmede kullanışlıdır (Zhou, 1986). Doğrusallaştırma, perturbasyon ve büyük çapta hesaplamalara gerek yoktur. Ayrıca Diferansiyel Transform Metodunda yapılan bir değişiklikte, Laplace transformu ve Padé yaklaşımı yardımıyla doğrusal ve doğrusal olmayan problemleri çözmek için bu model geliştirilebilir. Değiştirilmiş Diferansiyel Transform Metodu olarak adlandırılan bu yöntemde, çok geniş bir aralıkta gerçek çözüme iyi bir yaklaşım olarak verilen çözümün, periyodik davranışını belirleyerek gerçek çözüme yakın çözümler elde etmek mümkündür. Doğrusal ve doğrusal olmayan problemlerinin büyük bir kısmı bu yöntemle etkili, kolay ve doğru bir şekilde çözülebilir (Venkatarangan ve Rajalakshmi, 1995).

#### Tanım 3.1.

Eğer  $T$  bölgesinde  $y(t)$  fonksiyonu analitik ise  $t$ 'ye göre sürekli türevlenebilir olacaktır:

$$\varphi(t, k) = \frac{d^k y(t)}{dt^k}, \forall t \in T \quad (51)$$

olarak tanımlayalım. Burada  $k \geq 0$  tamsayıdır. Her  $t = t_i$ ,  $\varphi(t, k) = \varphi(t_i, k)$  için,

$$Y(k) = \varphi(t_i, k) = \left[ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right]_{t=t_i}, \forall k \geq 0 \quad (52)$$

dizisini tanımlayalım. Burada  $Y(k)$ ,  $t = t_i$ 'de  $y(t)$ 'nin spektrumu olarak adlandırılır.

Eğer  $y(t)$  analitik ise;

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y(k)}{k!} (t - t_i)^k \quad (53)$$



şeklinde tanımlanır. (53) ifadesi  $y(t)$  fonksiyonunun  $t = t_i$  noktasındaki Taylor seri açılımından başka bir şey değildir. Burada (53)'ün bu gösterimine  $Y(k)$ 'nın ters dönüşümü adı verilir. Diferensiyel dönüşüm işlemi  $D$  sembolü ile gösterilir ve (52) ile (53) birleştirilirse,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y(k)}{k!} (t - t_i)^k \equiv D^{-1}Y(k) \quad (54)$$

elde edilir.

Diferensiyel dönüşüm metodu kullanılarak,  $K$  bölgesinde bir diferensiyel denklem cebirsel denklemlere dönüştürülebilir.  $y(t)$  sonlu sayıda Taylor seri açılımı ve kalan terim vasıtasıyla elde edilebilir.

$$y(t) = \sum_{k=0}^N \frac{(t-t_i)^k}{k!} Y(k) + R_{N+1}(t) \quad (55)$$

Tablo 14'de Diferensiyel Dönüşüm Metodunun bazı temel özellikleri verilmiştir:

Orijinal Fonksiyon	Diferensiyel Dönüşümü
$w(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$	$W(k) = \alpha Y_1(k) + \beta Y_2(k), (\alpha, \beta \text{ sabit})$
$w(t) = y'(t)$	$W(k) = (k + 1)Y(k + 1)$
$w(t) = y^{(m)}(t)$	$W(k) = \frac{(k+m)!}{k!} Y(k + m)$
$w(t) = y_1(t)y_2(t)$	$W(k) = \sum_{l=0}^k Y_1(l)Y_2(k - l)$
$w(t) = t^m$	$W(k) = \delta(k - m) = \begin{cases} 1, k = m \\ 0, k \neq m \end{cases}$
$w(t) = e^t$	$W(k) = \frac{1}{k!}$
$w(t) = \sin(\omega t + \alpha)$	$W(k) = \frac{\omega^k}{k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$
$w(t) = \cos(\omega t + \alpha)$	$W(k) = \frac{\omega^k}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$

### 2.2.2.2. Padé Yaklaşımı

Padé yaklaşımı bir  $y(x)$  fonksiyonun Taylor seri açılımının katsayılarından oluşan iki polinomun oranıdır. (Baker, 1975) referansıya verilen,  $y(x)$  fonksiyonunun  $[L/M]$  Padé yaklaşımları,  $P_L(x)$  en fazla  $L$  dereceli polinom ve  $Q_M(x)$  en fazla  $M$  dereceli polinom olmak üzere,

$$[L/M] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} \quad (56)$$

şeklindedir. Formal kuvvet serileri (57)-(58) denklemleriyle  $P_L(x)$  ve  $Q_M(x)$  'in katsayılarını belirler.

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad (57)$$

$$y(x) - \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = O(x^{L+M+1}) \quad (58)$$

'dir (Baker, 1975). (58) denkleminde  $x$ 'in eşit kuvvetlerinin katsayıları eşitliğinde,  $Q_M(0) = q_0 = 1$ ,  $q_{M+1} = q_{M+2} = \dots = q_N = 0$ ;  $p_{L+1} = p_{L+2} = \dots = p_N = 0$  olmak şartı ile,  $P_L(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_Lx^L$  ve  $Q_M(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_Mx^M$  olmak üzere (58) denklemini daha açık bir şekilde yazmak mümkündür:

$$\left. \begin{aligned} a_{L+1} + a_L q_1 + \dots + a_{L-M+1} q_M &= 0, \\ a_{L+2} + a_{L+1} q_1 + \dots + a_{L-M+2} q_M &= 0, \\ &\vdots \\ a_{L+M} + a_{L+M-1} q_1 + \dots + a_L q_M &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= p_0, \\ a_1 + a_0 q_1 &= p_1, \\ a_2 + a_1 q_1 + a_0 q_2 &= p_2, \\ &\vdots \\ a_L + a_{L-1} q_1 + \dots + a_0 q_L &= p_L, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Bu denklemleri çözmek için, (59) ifadesinden  $q_i, i = 1, 2, \dots, M$  bilinmeyenleri bulunur. Bulunan bu değerler (60)'da yerine yazılarak  $p_j, j = 0, 1, \dots, L$  bilinmeyenleri

bulunur. (59) ve (60) tekil olmayan(non singular) iseler (61) eşitliğinden çözümü elde edebiliriz:

$$\left[ \frac{L}{M} \right] = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \dots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \dots & a_{L+M} \\ \sum_{j=M}^L a_{j-M} x^j & \sum_{j=M-1}^L a_{j-M+1} x^j & \dots & \sum_{j=0}^L a_j x^j \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \dots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \dots & a_{L+M} \\ x^M & x^{M-1} & \dots & 1 \end{bmatrix}}. \quad (61)$$

[2/2], [4/4] veya [6/6] gibi farklı mertebeden Padé yaklaşımları elde etmek için Mathematica'nın sembolik hesaplama yazılımından faydalanılabilir. Doğrusal olmayan başlangıç model dinamik modellerinden ortaya çıkan problemlerin çözümünde Değiştirilmiş Diferensiyel Transform metodunun bir uygulaması aşağıda verilecektir.

$$\text{Örnek: } y''(t) + y(t) + \varepsilon y^3(t) = 0 \quad (62)$$

Duffing denklemi  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  başlangıç şartlarına göre verilsin. Denklem (62)'de her iki tarafının diferensiyel transformu alınırsa aşağıdaki tekrarlama bağıntıları elde edilir:

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \left( \varepsilon \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} Y(k_1)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2) - Y(k) \right) \quad (63)$$

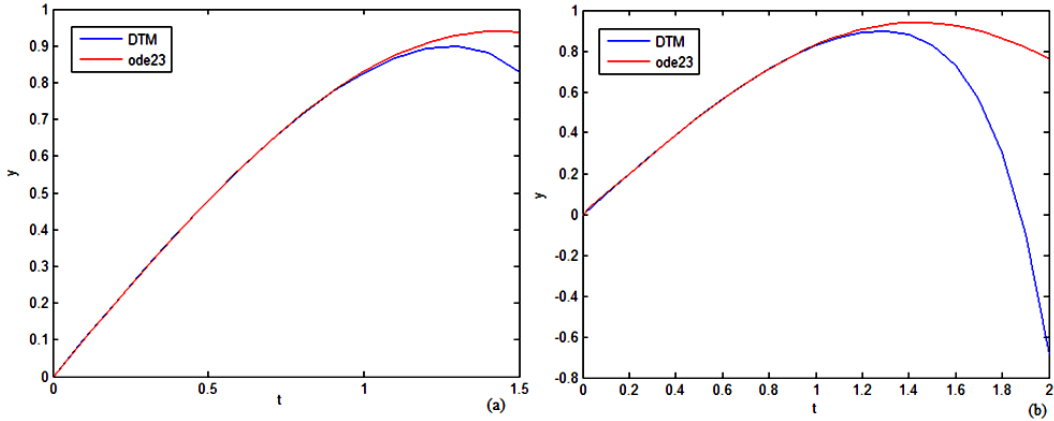
Başlangıç şartları  $t_0 = 0$ 'da,  $Y(0) = 0, Y(1) = 1$  olarak transform edilebilir. Başlangıç şartları, (53) ve (63) denklemleri kullanılarak, aşağıdaki seri çözümleri elde edilir:

$$y(t) = t - \frac{t^3}{6} - \left( \varepsilon - \frac{1}{6} \right) \frac{t^5}{20} - \left( \frac{-11\varepsilon}{20} + \frac{1}{120} \right) \frac{t^7}{42} - \left( \frac{633\varepsilon}{10000} + \frac{11\varepsilon}{840} - \frac{1}{5040} \right) \frac{t^9}{72} + O(t^{11}). \quad (64)$$

$\varepsilon = 0.3$  için çözüm,

$$y(t) = t - 0.1667t^3 - 0.00667t^5 + 0.00373t^7 - 0.00316t^9$$

çözümü elde edilir. Şekil 51'den çözüm kısa zaman diliminde sayısal çözümle uyuşmaktadır. Fakat uzun zaman diliminde sayısal çözümle uyuşmamaktadır. Bunun için daha geniş zaman diliminde çözümü temsil edecek periyodik çözümlere ihtiyaç vardır ve bu durumda değiştirilmiş diferansiyel transform metodu kullanılmalıdır.



Şekil 51. Farklı zaman dilimlerinde sayısal çözüm ve DTM ile elde edilen çözümün karşılaştırılması, (a)  $t = 1.5$  için  $t - y$  grafiği, (b)  $t = 2$  için  $t - y$  grafiği

Değiştirilmiş diferansiyel transform metodu için (64) eşitliğinde Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$L[y(t)] = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^4} - \left(\varepsilon - \frac{1}{6}\right) \frac{6}{s^6} - \left(\frac{-11\varepsilon}{20} + \frac{1}{120}\right) \frac{120}{s^8} - \left(\frac{633\varepsilon}{10000} + \frac{11\varepsilon}{840} - \frac{1}{5040}\right) \frac{5040}{s^{10}}. \quad (65)$$

Sadeleştirmek için  $s = 1/t$  alınır,

$$L[y(t)] = t^2 - t^4 - \left(\varepsilon - \frac{1}{6}\right) 6t^6 - \left(\frac{-11\varepsilon}{20} + \frac{1}{120}\right) 120t^8 - \left(\frac{633\varepsilon}{10000} + \frac{11\varepsilon}{840} - \frac{1}{5040}\right) 5040t^{10}. \quad (66)$$

Bu durumda  $\varepsilon = 0.3$  değeri için  $[4/4]$  Padé yaklaşımı,

$$\left[\frac{4}{4}\right] = \frac{9t^4 + t^2}{10.8t^4 + 10t^2 + 1} \quad (67)$$

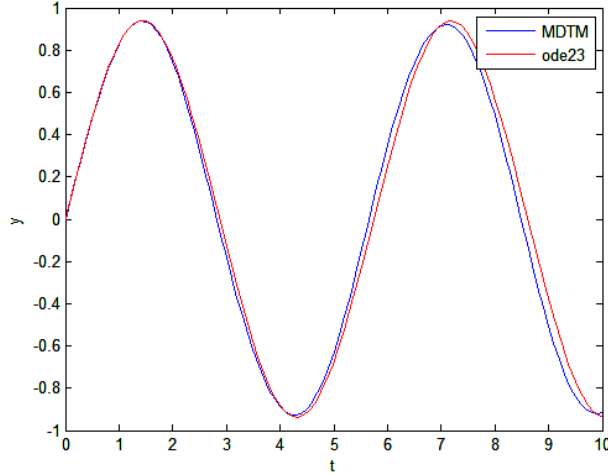
şeklindedir.  $t = 1/s$  olarak  $s$ 'ye göre  $[4/4]$  Padé yaklaşımı,

$$\left[\frac{4}{4}\right] = \frac{9 + s^2}{10.8 + 10s^2 + s^4}. \quad (68)$$

halini alır.  $[4/4]$  Padé yaklaşımının bu haline ters Laplace dönüşümü uygulayarak düzgünleştirilmiş yaklaşık çözüm elde edilmektedir. Bu ise problemde elde edilmeye çalışılan düzgünleştirilmiş periyodik çözümdür.

$$y(t) = 0.928746 \sin(1.10982t) - 0.0103828 \sin(2.96113t).$$

Şekil 52'ye göre düzgünleştirme işlemi uzun zaman diliminde sayısal çözüme yakın periyodik çözümlerin elde edilebildiği görülmektedir.



Şekil 52. Duffing denkleminin sayısal çözümü ile düzgünleştirilmiş DTM'nin karşılaştırılması

O halde değiştirilmiş Diferensiyel Transform Metodu(MDTM), DTM ile elde edilen yaklaşık bir çözümünün çok geniş bir zaman diliminde düzgünleştirilerek gerçek çözüme daha yakın bir yaklaşık çözüm elde edilmektedir. Bunun için çözümün düzgünleştirme algoritması şu şekilde verilir (Venkatarangan ve Rajalakshmi, 1995).

Adım 1: DTM ile yaklaşık çözüm elde edilir.

Adım 2: Hesaplanan bu çözüme Laplace dönüşümü uygulanır.

Adım 3:  $s = 1/t$  alınır.

Adım 4: Hesaplanan ifadenin  $[m/n]$  Padé yaklaşımı bulunur.

Adım 5:  $[m/n]$  Padé yaklaşımında  $t = 1/s$  alınır.

Adım 6: Hesaplanan ifadenin ters Laplace dönüşümü alınır.

Adım 7: Çok geniş bir aralıkta çözümü temsil eden periyodik bir düzgünleştirilmiş çözüm elde edilir.

### 2.2.2.3. Adomian Ayrışım Yöntemi

Adomian ayrışım yöntemiyle ilgili olarak aşağıda verilen bilgiler Applied Mathematics and Computation adlı dergide yayınlanan "A New Algorithm for calculating Adomian Polynomials" adlı makaleden alınmıştır (Zhu vd., 2005).

Adomian yöntemi fiziksel, kimyasal, biyolojik ve matematiksel birçok doğrusal ve doğrusal olmayan problemlerin geniş bir sınıfına uygulanmaktadır. Çoğu problemler için Adomian yöntemi problemin analitik çözümüne hızlı bir şekilde yakınsayan güvenilir sonuçlar verir. Adomian ayrıştırma yöntemi,  $u(x, t)$  fonksiyonun terimlerini  $u_n(x, t)$  bileşenlerinin sonsuz toplamına ayrıştırır. Yani,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (69)$$

olarak çözüm araştırılır. Ayrıca ayrıştırma metodu doğrusal olmayan terim olan  $F(u(x, t))$ 'i  $A_0(u_0) + A_1(u_0, u_1) + A_2(u_0, u_1, u_2) + \dots$  olacak şekilde ayrıştırır. Yani,

$$F(u(x, t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad (70)$$

olarak ayrışım mevcuttur. Buradaki,  $A_n$  terimleri Adomian polinomları olarak adlandırılır. Bu polinomların bulunması için birçok çalışma yapılmıştır ve algoritmalar geliştirilmiştir. Bu çalışmada doğrusal olmayan sistemler için Adomian polinomlarının bulunması için kolay bir yol verilerek algoritma oluşturulmaktadır. Bu algoritma tez çalışmasındaki doğrusal olmayan problemin içerisinde kullanılmaktadır. Adomian yaklaşımlarının bulunması için algoritma için ilk olarak aşağıdaki teorem verilmektedir.

**Teorem 3.1.**  $Nu = F(u)$  şeklinde doğrusal olmayan fonksiyon ve  $u$ 'nun parametrize edilmiş gösterimi,  $\lambda$  bir parametre olmak üzere,  $u(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k$  polinomu olsun. Bu takdirde,

$$\frac{\partial^n F(u(\lambda))}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k)}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^n \lambda^k u_k)}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} \quad (71)$$

'dır.

**İspat:** (Zhu vd., 2005).

(71) denkleminde,  $n = 0$  alınırsa  $A_0$ ;  $n = 1$  alınırsa  $A_1$ ;  $n = 2$  alınırsa  $A_2$  ve bu şekilde devam edilirse  $A_3, A_4, \dots, A_n$  polinomları hesaplanır. Adomian polinomlarının nasıl elde edildiği gösterildikten sonra uygulanması gereken adımlar için bir algoritma şu şekilde verilmektedir:

Adım 1:  $Nu = F(u)$  denklemi için  $u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots + \lambda^n u_n = \sum_{k=0}^n \lambda^k u_k$  olarak alınır.

Adım 2:  $\sum_{k=0}^n \lambda^k A_k = F(u) = F(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots + \lambda^n u_n)$  olarak Adomian polinom yaklaşımı uygulanır.

Adım 3: Bu Adomian polinomlarını bulmak için  $i = 0, 1, \dots, n$  kadar Adım 2'deki denklemlerin her iki tarafının  $\lambda$ 'ya göre türevi alınır. Yani,

$$\frac{\partial^i (\sum_{k=0}^n \lambda^k A_k)}{\partial \lambda^i} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^i F(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots + \lambda^n u_n)}{\partial \lambda^i} \Big|_{\lambda=0} \quad (72)$$

yazılır.

Adım 5: Bu alınan  $i = 0, 1, \dots, n$  kadar ki türevler için  $\lambda$  yerine 0 ( $\lambda = 0$ ) yazılarak  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  polinomları hesaplanır.

**Örnek:** Modelimizde kullanıldığı için doğrusal olmayan  $F(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$  fonksiyonu için Adomian polinomlarını hesaplayalım.

Bu durumda  $F$  fonksiyonu  $u$  ve  $v$  olmak üzere iki bileşene sahiptir. Bu durumda da ilk durumda da yapıldığı gibi,  $u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots$  ve  $v = v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \dots$  şeklinde araştırılır ve  $F$  fonksiyonu için,  $F(u, v) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots = \sum_{k=0}^n \lambda^k A_k$  şeklinde bir Adomian polinomları ile ayrışımı Adım 4 ve 5'de verildiği gibi hesaplanır. Verilen kurala göre,

$$\frac{\partial^n \sqrt{(\sum_{k=0}^n \lambda^k u_k)^2 + (\sum_{k=0}^n \lambda^k v_k)^2}}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^n (\sum_{k=0}^n \lambda^k A_k)}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0}$$

şeklinde yazılır. Adım 4 ve 5'e göre,  $n = 0, 1, 2, \dots$  her iki tarafın türevleri alınarak  $\lambda$  yerine sıfır yazılır.

$n = 0$  için,

$$A_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$$

olarak bulunur.  $n = 1$  için,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{(\sum_{k=0}^n \lambda^k u_k)^2 + (\sum_{k=0}^n \lambda^k v_k)^2}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} &= \frac{\partial (\sum_{k=0}^n \lambda^k A_k)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \\ \Rightarrow \frac{\partial \sqrt{(u_0 + \lambda u_1)^2 + (v_0 + \lambda v_1)^2}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} &= \frac{\partial (A_0 + \lambda A_1)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \\ \Rightarrow A_1 &= \frac{2(u_0 + \lambda u_1)u_1 + 2(v_0 + \lambda v_1)v_1}{2\sqrt{(u_0 + \lambda u_1)^2 + (v_0 + \lambda v_1)^2}} \Big|_{\lambda=0} = \frac{u_0 u_1 + v_0 v_1}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}} \end{aligned}$$

dir.  $n = 2$  alınır,

$$\frac{\partial^2 \sqrt{(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)^2 + (v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2)^2}}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^2 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)(u_1 + 2\lambda u_2) + (v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2)(v_1 + 2\lambda v_2)}{\sqrt{(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)^2 + (v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2)^2}} \right) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial (A_1 + 2\lambda A_2)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}$$

türev alınır ve  $\lambda$  yerine sıfır yazılırsa,

$$A_2 = \frac{(u_1^2 + 2u_0 u_2 + 2v_0 v_2 + v_1^2)(u_0^2 + v_0^2) - (u_0 u_1 + v_0 v_1)^2}{2(u_0^2 + v_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek diğer terimler bulunabilir.

Bu çalışmada akışkan içerisinde parçacığın hareketini belirleyen doğrusal olmayan problemin çözümü Diferensiyel Transform yöntemi ve Adomian polinomlarının bir arada kullanıldığı bir çözüm yöntemi geliştirilmeye çalışılacaktır. Çözüm periyodik davranış sergilediğinden bu yöntemle elde edilen çözüme sonsuz aralıkta periyodik bir çözüm araştırılacaktır. Bunun için ilk olarak Diferensiyel Transform yöntemi ve Adomian polinomlarının kullanıldığı çözüm yönteminden bahsedilecektir. Başlangıç olarak aşağıdaki örnek verilsin:

#### 2.2.2.4. Model Problem Üzerinde Analitik Yaklaşık Yöntemler

Bu kısımda parçacık taşınımı ifade eden modelin çözüm yöntemine doğru götürecek örneklere yer verilecektir.

**Örnek 1.**  $\left\{ \dot{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \dot{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, x(0) = 1, y(0) = 1 \right\}$  doğrusal olmayan denklem sisteminin çözümünü DTM(Diferensiyel Transform Metodu)-Adomian yöntemleriyle çözmeden önce bu sisteminin analitik çözümü araştırılacaktır. İlk denklemi  $x$  ile ikinci denklemi de  $y$  ile çarpıp taraf tarafa toparlasak,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2t + c$$

çözümünde  $x(0) = 1, y(0) = 1$  başlangıç şartları kullanılırsa  $x^2 + y^2 = 2t + 2$  elde edilir. Sistemde  $x^2 + y^2 = 2t + 2$  yazılırsa,

$$\left\{ \dot{x} = \frac{x}{2t+2}, \dot{y} = \frac{y}{2t+2}, x(0) = 1, y(0) = 1 \right\} \text{ elde edilir ve buradan analitik}$$

çözümler  $x(t) = \sqrt{t+1}, y(t) = \sqrt{t+1}$  şeklinde hesaplanır.

Analitik çözümü elde ettikten sonra doğrusal olmayan sistemin çözümünü DTM ile elde etmeye çalışacağız. Sistemi  $\{ \dot{x}x^2 + \dot{x}y^2 = x, \dot{y}x^2 + \dot{y}y^2 = y, x(0) = 1, y(0) = 1 \}$  şeklinde yazıp DTM ile tekrarlama denklemlerini elde etmeye çalışalım. DTM yöntemi



ile  $x(t) = \sum_{k=0}^n X(k)t^k$  ve  $y(t) = \sum_{k=0}^n Y(k)t^k$  şeklinde çözümler elde edileceğinden dolayı  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 1$  başlangıç koşulları  $t_0 = 0$  noktasında ilk katsayılar  $X(0) = 1$  ve  $Y(0) = 1$  olarak elde edilir. Sisteme DTM uygularsak tabloya göre,

$$\begin{aligned} & \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} (k - k_2 + 1)X(k_1)X(k_2 - k_1)X(k - k_2 + 1) \\ & \quad + \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} (k - k_2 + 1)Y(k_1)Y(k_2 - k_1)X(k - k_2 + 1) = X(k) \\ & \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} (k - k_2 + 1)X(k_1)X(k_2 - k_1)Y(k - k_2 + 1) \\ & \quad + \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} (k - k_2 + 1)Y(k_1)Y(k_2 - k_1)Y(k - k_2 + 1) = Y(k) \end{aligned}$$

$k = 0$  ise;

$$\begin{aligned} X(0)^2X(1) + Y(0)^2X(1) &= X(0) \Rightarrow X(1) = \frac{X(0)}{X(0)^2 + Y(0)^2} \\ X(0)^2Y(1) + Y(0)^2Y(1) &= Y(0) \Rightarrow Y(1) = \frac{Y(0)}{X(0)^2 + Y(0)^2} \end{aligned}$$

Buradan  $x(t) = X(0) + X(1)t + X(2)t^2 + \dots$  ve  $y(t) = Y(0) + Y(1)t + Y(2)t^2 + \dots$  şeklindeki çözümleri kullanarak denklemin ikinci tarafının 0. terim Adomian katsayıları olduğu görülmektedir. Bu durumda  $k = 0$  için,

$$\begin{aligned} (k + 1)X(k + 1) &= 1 \cdot X(1) = \frac{X(0)}{X(0)^2 + Y(0)^2} \\ (k + 1)Y(k + 1) &= 1 \cdot Y(1) = \frac{Y(0)}{X(0)^2 + Y(0)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Denklemin birinci tarafına DTM'nu uygulamış olduk.  $k$ 'nın değerine göre denklemin ikinci tarafında ise  $k$ . terim Adomian katsayılarının geldiği görülmektedir. En etkin çözüm yöntemine doğru gitmek için  $k = 1$  alalım;

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=0}^0 (k + 1)X(k_1)X(-k_1)X(k + 1) + \sum_{k_1=0}^1 k \cdot X(k_1)X(1 - k_1)X(k) \\ & \quad + \sum_{k_1=0}^0 (k + 1)Y(k_1)Y(-k_1)X(k + 1) + \sum_{k_1=0}^1 k \cdot Y(k_1)Y(1 - k_1)X(k) = X(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=0}^0 (k + 1)X(k_1)X(-k_1)Y(k + 1) + \sum_{k_1=0}^1 k \cdot X(k_1)X(1 - k_1)Y(k) \\ & \quad + \sum_{k_1=0}^0 (k + 1)Y(k_1)Y(-k_1)Y(k + 1) + \sum_{k_1=0}^1 k \cdot Y(k_1)Y(1 - k_1)Y(k) = Y(1) \end{aligned}$$

$$2X(0)^2X(2) + 2X(0)X(1)^2 + 2Y(0)^2X(2) + 2Y(0)Y(1)X(1) = X(1)$$

$$\Rightarrow 2(X(0)^2 + Y(0)^2)X(2) = X(1) - 2X(0)X(1)^2 - 2Y(0)Y(1)X(1)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot X(2) = \frac{X(1)}{X(0)^2 + Y(0)^2} - \frac{X(1)(2X(0)X(1) + 2Y(0)Y(1))}{X(0)^2 + Y(0)^2}$$

$$\begin{aligned}
& 2X(0)^2Y(2) + 2X(0)X(0)Y(1) + 2Y(0)^2Y(2) + 2Y(0)Y(1)^2 = Y(1) \\
& \Rightarrow 2(X(0)^2 + Y(0)^2)Y(2) = Y(1) - 2Y(0)Y(1)^2 - 2X(0)X(1)Y(1) \\
& \Rightarrow 2.Y(2) = \frac{Y(1)}{X(0)^2+Y(0)^2} - \frac{Y(1)(2X(0)X(1)+2Y(0)Y(1))}{X(0)^2+Y(0)^2}
\end{aligned}$$

O halde  $k = 1$  için,

$$\begin{aligned}
(k+1)X(k+1) &= 2.X(2) = \frac{X(1)}{X(0)^2+Y(0)^2} - \frac{X(1)(2X(0)X(1)+2Y(0)Y(1))}{X(0)^2+Y(0)^2} \\
(k+1)Y(k+1) &= 2.Y(2) = \frac{Y(1)}{X(0)^2+Y(0)^2} - \frac{Y(1)(2X(0)X(1)+2Y(0)Y(1))}{X(0)^2+Y(0)^2}
\end{aligned}$$

Bu durumda denklemin birinci tarafına DTM uygulandığında  $k = 1$  değeri için denklemin ikinci tarafında 1.terim Adomian katsayıları karşımıza çıkmaktadır. Sonuç olarak doğrusal veya doğrusal olmayan problemler için denklemlerin sol tarafına DTM uygulanır ve denklemin ikinci tarafına  $k$ 'nın değerlerine göre  $k$ . Adomian terimleri yazılarak doğrusal ve doğrusal olmayan problemler için yaklaşık çözümler elde edebiliriz. Şayet çözümün periyodik olduğu biliniyorsa, bu sefer değiştirilmiş DTM'de olduğu gibi çözümü sonsuz aralıkta temsil edecek periyodik çözüm araştırabiliriz.

Yukarıda yapılan işlemlere göre yaklaşık çözüm hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
X(0) = 1 &\Rightarrow X(1) = \frac{X(0)}{X(0)^2+Y(0)^2} = \frac{1}{2} \\
2.X(2) &= \frac{X(1)}{X(0)^2+Y(0)^2} - \frac{X(1)(2X(0)X(1)+2Y(0)Y(1))}{X(0)^2+Y(0)^2} \Rightarrow X(2) = -\frac{1}{8} \\
Y(0) = 1 &\Rightarrow Y(1) = \frac{X(0)}{X(0)^2+Y(0)^2} = \frac{1}{2} \\
2.Y(2) &= \frac{Y(1)}{X(0)^2+Y(0)^2} - \frac{Y(1)(2X(0)X(1)+2Y(0)Y(1))}{X(0)^2+Y(0)^2} \Rightarrow Y(2) = -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Buna göre  $(x+y)^\alpha = x^\alpha + \alpha y x^{\alpha-1} + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)y^2 x^{\alpha-2} + \frac{1}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)y^3 x^{\alpha-3} + \dots$  şeklindeki Binom açılımı da kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
x(t) &= 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \dots = \sqrt{1+t} \\
y(t) &= 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \dots = \sqrt{1+t}
\end{aligned}$$

çözümleri elde edilir. Görüldüğü gibi bu çözüm sistemin analitik çözümüyle aynıdır. Bundan sonraki örnekte değiştirilmiş DTM'nun kullanıldığı problem üzerinde durulacaktır. Çözümün periyodik olduğu doğrusal olmayan bir problem verilecektir.

**Örnek 2.**  $\left\{ \dot{x} = y - \frac{y}{x^2+y^2}, \dot{y} = \frac{x}{x^2+y^2} - x, x(0) = 1, y(0) = 1 \right\}$  doğrusal olmayan denklem sisteminin çözümünü DTM(Diferensiyel Transform Metodu)-Adomian yöntemleriyle çözmeden önce bu sistemin analitik çözümü araştırılacaktır. Sistemden  $x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = c$  ve  $x(0) = 1, y(0) = 1$  başlangıç şartlarıyla beraber  $x^2 + y^2 = 2$ 'dir. Bunu sistemde kullanırsak  $\left\{ \dot{x} = y - \frac{y}{2} = \frac{y}{2}, \dot{y} = \frac{x}{2} - x = -\frac{x}{2}, x(0) = 1, y(0) = 1 \right\}$  elde edilir ve bu sistemin çözümü ise  $\left\{ x(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right), y(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right\}$  şeklindedir. Buradan görüldüğü gibi doğrusal olmayan problemin çözümü periyodiktir. O halde DTM-Adomian yöntemiyle elde edilecek yaklaşık çözüme değiştirilmiş DTM uygulanabilir. Bu durumda elde edilen düzgünleştirilmiş bir çözümle gerçek çözüme yakın analitik sayısal yaklaşım elde etmek mümkündür.  $x(t) = \sum_{k=0}^n X(k)t^k$  ve  $y(t) = \sum_{k=0}^n Y(k)t^k$  şeklinde çözümler elde edileceğinden,  $x(0) = 1, y(0) = 1$  başlangıç şartlarından  $X(0) = 1, Y(0) = 1$  elde edilir. Doğrusal olmayan sistemin birinci tarafına DTM uygulanıp  $k$ 'nın değerlerine göre denklemin ikinci tarafında ise  $k$ . Adomian terimleri kullanılacaktır.

$$(k+1)X(k+1) = k. \text{ Adomian Polinomları}$$

$$(k+1)Y(k+1) = k. \text{ Adomian Polinomları}$$

$k = 0$  ise;

Denklemin ikinci tarafında 0.terim Adomian terimi gelecektir:

$$(k+1)X(k+1) = 1. X(1) = Y(0) - \frac{Y(0)}{X(0)^2+Y(0)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow X(1) = \frac{1}{2}$$

$$(k+1)Y(k+1) = 1. Y(1) = \frac{X(0)}{X(0)^2+Y(0)^2} - X(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow Y(1) = -\frac{1}{2}$$

$k = 1$  ise;

Denklemin ikinci tarafında 1.terim Adomian terimi gelecektir:

$$(k+1)X(k+1) = 2. X(2) = Y(1) - \frac{Y(1)}{X(0)^2+Y(0)^2} + \frac{Y(0)(2X(0)X(1)+2Y(0)Y(1))}{(X(0)^2+Y(0)^2)^2}$$

$$(k+1)Y(k+1) = 2. Y(2) = -X(1) + \frac{X(1)}{X(0)^2+Y(0)^2} - \frac{X(0)(2X(0)X(1)+2Y(0)Y(1))}{(X(0)^2+Y(0)^2)^2}$$

$$2. X(2) = -\frac{1}{4} \Rightarrow X(2) = -\frac{1}{8}$$

$$2. Y(2) = -\frac{1}{4} \Rightarrow Y(2) = -\frac{1}{8}$$

Benzer şekilde 2.terim ve 3.terim Adomian terimleri hesaplandığında,

$k = 2$  ise;

$$3. X(3) = -\frac{1}{16} \Rightarrow X(3) = -\frac{1}{48}$$

$$3. Y(3) = \frac{1}{16} \Rightarrow Y(3) = \frac{1}{48}$$

$k = 3$  ise;

$$4. X(4) = \frac{13}{1250} \Rightarrow X(4) = \frac{13}{5000}$$

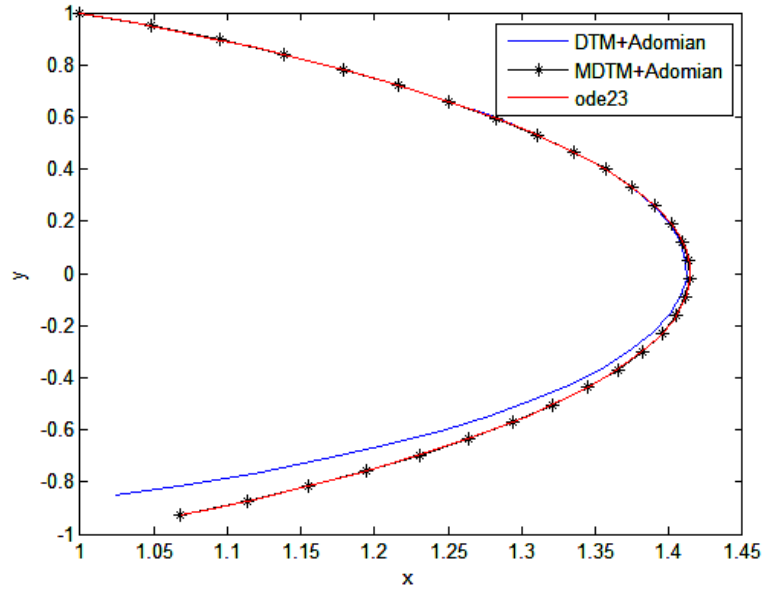
$$4. Y(4) = \frac{13}{1250} \Rightarrow Y(4) = \frac{13}{5000}$$

O halde DTM-Adomian katsayıları ile sistemin yaklaşık çözümü,

$$x(t) = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} - \frac{t^3}{48} + \frac{13t^4}{5000}$$

$$y(t) = 1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{48} + \frac{13t^4}{5000}$$

olarak elde edilmektedir. Doğrusal olmayan sistemin çözümü periyodik olduğundan sonsuz aralıkta çözümü temsil edecek periyodik bir çözüme ihtiyaç vardır. O halde bulunan yaklaşık çözüme değiştirilmiş DTM uygulayarak düzgünleştirme algoritması ile periyodik çözümler elde edilebilir. Bunun için (Venkatarangan ve Rajalakshmi, 1995)'de incelenen yöntemle göre,  $x(t)$  ve  $y(t)$  yaklaşık çözümlerinin Laplace Transformu alınır ve  $s = 1/t$  için  $[2; 2]$  Padé yaklaşımı uygulanır ve daha sonrada  $t = 1/s$  için ters Laplace dönüşümü hesaplandığında,  $\left\{x(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right), y(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right\}$  çözümü elde edilir. Şekil 53'den DTM-Adomian katsayıları kullanılarak ve daha sonra düzgünleştirerek elde edilen çözümün doğrusal olmayan sistemin sayısal çözümüyle aynı olduğu görülmektedir. Burada çözüm periyodik olduğundan düzgünleştirme algoritmasının iyi sonuç verdiği görülmektedir.



Şekil 53. Doğrusal olmayan sistemin sayısal ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

**Örnek 3.**  $\{\varepsilon\ddot{x} + \dot{x} = 0, \varepsilon\ddot{y} + \dot{y} = 0, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1\}$  denklem sisteminin çözümünü DTM(Diferensiyel Transform Metodu) ile çözmeden önce bu sisteminin analitik çözümü  $\{x(t) = \varepsilon + 1 - \varepsilon e^{(-\frac{t}{\varepsilon})}, y(t) = \varepsilon + 1 - \varepsilon e^{(-\frac{t}{\varepsilon})}\}$  şeklindedir. DTM yöntemiyle elde edilecek yaklaşık çözümde  $x(t) = \sum_{k=0}^n X(k)t^k$  ve  $y(t) = \sum_{k=0}^n Y(k)t^k$  şeklinde çözümler elde edileceğinden,  $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1$  başlangıç şartlarından  $X(0) = 1, X(1) = 1, Y(0) = 1, Y(1) = 1$  elde edilir. Sisteme DTM uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \varepsilon(k+2)(k+1)X(k+2) + (k+1)X(k+1) &= 0 \\ \varepsilon(k+2)(k+1)Y(k+2) + (k+1)Y(k+1) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.  $k$ 'nın farklı değerleri için DTM katsayıları hesaplanırsa,

$k = 0$  ise;

$$\varepsilon \cdot 2 \cdot X(2) + X(1) = 0 \Rightarrow X(2) = -\frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\varepsilon \cdot 2 \cdot Y(2) + Y(1) = 0 \Rightarrow Y(2) = -\frac{1}{2\varepsilon}$$

$k = 1$  ise;

$$\varepsilon \cdot 6 \cdot X(3) + 2 \cdot X(2) = 0 \Rightarrow X(3) = \frac{1}{6\varepsilon^2}$$

$$\varepsilon \cdot 6 \cdot Y(3) + 2 \cdot Y(2) = 0 \Rightarrow Y(3) = \frac{1}{6\varepsilon^2}$$

$k = 2$  ise;

$$\varepsilon. 12. X(4) + 3. X(3) = 0 \Rightarrow X(4) = -\frac{1}{24\varepsilon^3}$$

$$\varepsilon. 12. Y(4) + 3. Y(3) = 0 \Rightarrow Y(4) = -\frac{1}{24\varepsilon^3}$$

Bu durumda sistemin çözümü,

$$x(t) = 1 + t - \frac{t^2}{2\varepsilon} + \frac{t^3}{6\varepsilon^2} - \frac{t^4}{24\varepsilon^3} + \dots$$

$$= \varepsilon + 1 - \varepsilon \left( 1 - \frac{t}{\varepsilon} + \frac{t^2}{2\varepsilon^2} - \frac{t^3}{6\varepsilon^3} + \frac{t^4}{24\varepsilon^4} - \dots \right) = \varepsilon + 1 - \varepsilon e^{\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)}.$$

Benzer şekilde  $y(t) = \varepsilon + 1 - \varepsilon e^{\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)}$  elde edilir ve buradan analitik çözümlerle aynı sonuçların elde edildiği görülmektedir.

**Örnek 4.**  $\{\ddot{x} + \dot{x} = y, \ddot{y} + \dot{y} = x, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1\}$  denklem sisteminin çözümü DTM-Adomian yöntemleriyle araştırılacaktır. Sistemin  $\{x(t) = 1.1708e^{0.6180t} - 0.17083e^{-1.618t}, y(t) = 1.1708e^{0.6180t} - 0.17083e^{-1.618t}\}$  şeklinde analitik çözümü vardır.  $x(t) = \sum_{k=0}^n X(k)t^k$  ve  $y(t) = \sum_{k=0}^n Y(k)t^k$  şeklinde çözümler elde edileceğinden,  $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1$  başlangıç şartlarından  $X(0) = 1, X(1) = 1, Y(0) = 1, Y(1) = 1$  elde edilir. Denklem sisteminin birinci tarafına DTM uygulanıp  $k$ 'nın değerlerine göre denklemin ikinci tarafında ise  $k$ . Adomian terimleri kullanılacaktır.

$$(k+2)(k+1)X(k+2) + (k+1)X(k+1) = k. \text{ Adomian Polinomları}$$

$$(k+2)(k+1)X(k+2) + (k+1)Y(k+1) = k. \text{ Adomian Polinomları}$$

$k = 0$  ise,

$$2. X(2) + X(1) = Y(0) \Rightarrow X(2) = 0$$

$$2. Y(2) + Y(1) = X(0) \Rightarrow Y(2) = 0$$

$k = 1$  ise,

$$3.2. X(3) + 2. X(2) = Y(1) \Rightarrow X(3) = 0.1667$$

$$3.2. Y(3) + 2. Y(2) = X(1) \Rightarrow Y(3) = 0.1667$$

Benzer hesaplamalarla  $X(4) = -0.0417, Y(4) = -0.0417$  ve  $X(5) = 0.0167, Y(5) = 0.0167$  katsayıları hesaplanabilir. Bu durumda doğrusal olmayan sistemin yaklaşık çözümü,

$$x(t) = 1 + t + 0.1667t^3 - 0.0417t^4 + 0.0167t^5 - 0.0042t^6$$

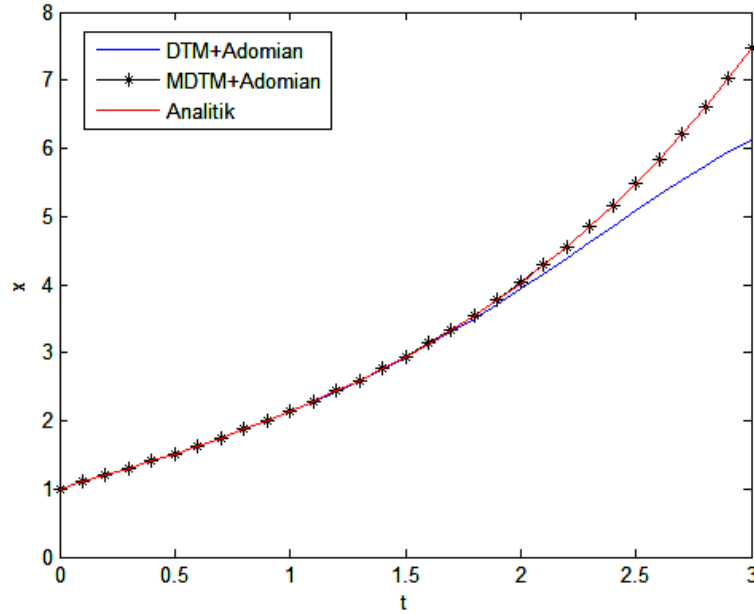
$$y(t) = 1 + t + 0.1667t^3 - 0.0417t^4 + 0.0167t^5 - 0.0042t^6.$$

$x(t)$  'nin Laplace dönüşümü alınır,  $L(x(t)) = -\frac{3.024}{s^7} + \frac{2.004}{s^6} - \frac{1.0008}{s^5} + \frac{1.0002}{s^4} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$  ve  $s = 1/t$  için [2; 2] Padé yaklaşımı  $\frac{t+2t^2}{1+t-t^2}$  olup  $t = 1/s$  için ters Laplace dönüşümü ile çözümler,

$$x(t) = e^{-1.61827t}(-0.17078 + 1.1708e^{2.23634t})$$

$$y(t) = e^{-1.61827t}(-0.17078 + 1.1708e^{2.23634t})$$

şeklinde elde edilmektedir.  $x(t)$  ile  $y(t)$  çözümleri aynıdır. O halde düzgünleştirilmiş çözümler sistemin analitik çözümleriyle uyushmaktadır. Diğer taraftan Şekil 54'den normal yaklaşımın uzun zaman diliminde çözümden uzaklaştığı görülmektedir.



Şekil 54. Sistemin analitik ve yaklaşık çözümleri için  $t - x$  grafiği

**Örnek 5.**  $\{\ddot{x} + \dot{x} = y - \frac{y}{x^2+y^2}, \ddot{y} + \dot{y} = \frac{x}{x^2+y^2} - x, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1\}$  doğrusal olmayan denklem sisteminin çözümü bilgisayar algoritmasıyla elde edilemediğinden DTM(Diferensiyel Transform Metodu)-Adomian yöntemleriyle bu sistemin çözümü araştırılacaktır.  $x(t) = \sum_{k=0}^n X(k)t^k$  ve  $y(t) = \sum_{k=0}^n Y(k)t^k$  şeklinde çözümler elde edileceğinden,  $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1$  başlangıç

şartlarından  $X(0) = 1, X(1) = 1, Y(0) = 1, Y(1) = 1$  elde edilir. Doğrusal olmayan sistemin birinci tarafına DTM uygulanıp  $k$ 'nın değerlerine göre denklemin ikinci tarafında ise  $k$ . Adomian terimleri kullanılacaktır.

$$(k+2)(k+1)X(k+2) + (k+1)X(k+1) = k. \text{ Adomian Polinomları}$$

$$(k+2)(k+1)X(k+2) + (k+1)Y(k+1) = k. \text{ Adomian Polinomları}$$

$k = 0$  ise,

$$2.X(2) + X(1) = Y(0) - \frac{Y(0)}{X(0)^2+Y(0)^2} \Rightarrow X(2) = -\frac{1}{4}$$

$$2.Y(2) + Y(1) = \frac{X(0)}{X(0)^2+Y(0)^2} - X(0) \Rightarrow Y(2) = -\frac{3}{4}$$

$k = 1$  ise,

$$3.2.X(3) + 2.X(2) = Y(1) - \frac{Y(1)}{X(0)^2+Y(0)^2} + \frac{Y(0)(2X(0)X(1)+2Y(0)Y(1))}{(X(0)^2+Y(0)^2)^2} \Rightarrow X(3) = 0.3333$$

$$3.2.Y(3) + 2.Y(2) = -X(1) + \frac{X(1)}{X(0)^2+Y(0)^2} - \frac{X(0)(2X(0)X(1)+2Y(0)Y(1))}{(X(0)^2+Y(0)^2)^2} \Rightarrow Y(3) = 0$$

Benzer hesaplamalarla  $X(4) = -0.1979, X(5) = 0.0854, X(6) = -0.0536$  ve  $Y(4) = 0.0938, Y(5) = -0.0979, Y(6) = 0.0828$  katsayıları hesaplanabilir. Bu durumda doğrusal olmayan sistemin yaklaşık çözümü,

$$x(t) = 1 + t - 0.25t^2 + 0.3333t^3 - 0.1979t^4 + 0.0854t^5 - 0.0536t^6$$

$$y(t) = 1 + t - 0.75t^2 + 0.0938t^4 - 0.0979t^5 + 0.0828t^6.$$

DTM için düzgünleştirme algoritması ile birlikte çözümler,

$$x(t) = e^{-2.1974t}(-0.171952 + 1.17195e^{2.72827t})$$

$$y(t) = e^{-0.3t}(\cos(0.9t) + 0.7222\sin(0.9t))$$

şeklinde elde edilmektedir.

### 2.2.2.5. Parçacık Taşınım Modelinin Yaklaşık Analitik Çözümleri

Bu kısımda, önceki başlık altında çözüm yöntemine yardımcı olacak problemleri ele aldıktan sonra parçacık taşınım modeli için geliştirilen sistemin çözüm yöntemi verilecektir.



Parçacık Taşınım Modeli:  $\{\varepsilon\ddot{x} + \dot{x} = \frac{r_i r_o}{r_o^2 - r_i^2} \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right), \varepsilon\ddot{y} + \dot{y} = \frac{r_i r_o}{r_o^2 - r_i^2} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - x \right) - \varepsilon g_0, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = V_{x_0}, y(0) = y_0, \dot{y}(0) = V_{y_0}\}$  doğrusal olmayan denklem sisteminin çözümü DTM(Diferensiyel Transform Metodu)-Adomian yöntemi ile yapılacaktır. Bilgisayar algoritması ile sistemin analitik çözümünü elde etmek kolay değildir. DTM yöntemiyle elde edilecek yaklaşık çözümde  $x(t) = \sum_{k=0}^n X(k)t^k$  ve  $y(t) = \sum_{k=0}^n Y(k)t^k$  şeklinde çözümler elde edileceğinden,  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = V_{x_0}, y(0) = y_0, \dot{y}(0) = V_{y_0}$  başlangıç şartlarından  $X(0) = x_0, X(1) = V_{x_0}, Y(0) = y_0, Y(1) = V_{y_0}$  elde edilir. Doğrusal olmayan sistemin birinci tarafına DTM uygulanıp  $k$ 'nın değerlerine göre denklemin ikinci tarafında ise  $k$ . Adomian terimleri kullanılacaktır. Sistemin birinci tarafına DTM uygulanırsa,

$$\varepsilon(k+2)(k+1)X(k+2) + (k+1)X(k+1) = k. \text{ Adomian Polinomları}$$

$$\varepsilon(k+2)(k+1)Y(k+2) + (k+1)Y(k+1) = k. \text{ Adomian Polinomları}$$

elde edilir.  $x_0 = 0.5, y_0 = 0, V_{x_0} = 0, V_{y_0} = 1, \omega = 10, \mu_f = 0.05$  ve  $a_p = 0.0035$  parametre değerlerine karşılık hesaplamalar yapılacaktır.  $X(0) = 0.5, X(1) = 0, Y(0) = 0, Y(1) = 1$  başlangıç değerleri ile birlikte  $k$ 'nın farklı değerleri için DTM katsayıları hesaplanırsa,

$k = 0$  ise;

$$\varepsilon. 2. X(2) + X(1) = \frac{r_i r_o}{r_o^2 - r_i^2} \left( Y(0) - \frac{Y(0)}{X(0)^2 + Y(0)^2} \right) \Rightarrow X(2) = 0$$

$$\varepsilon. 2. Y(2) + Y(1) = \frac{r_i r_o}{r_o^2 - r_i^2} \left( \frac{X(0)}{X(0)^2 + Y(0)^2} - X(0) - \varepsilon g_0 \right) \Rightarrow Y(2) = -0.2453$$

$k = 1$  ise;

$$\varepsilon. 6. X(3) + 2. X(2) = \frac{r_i r_o}{r_o^2 - r_i^2} \left( Y(1) - \frac{Y(1)}{X(0)^2 + Y(0)^2} + \frac{Y(0)(2X(0)X(1) + 2Y(0)Y(1))}{(X(0)^2 + Y(0)^2)^2} \right)$$

$$\Rightarrow X(3) = -0.9979$$

$$\varepsilon. 6. Y(3) + 2. Y(2) = \frac{r_i r_o}{r_o^2 - r_i^2} \left( -X(1) + \frac{X(1)}{X(0)^2 + Y(0)^2} - \frac{X(0)(2X(0)X(1) + 2Y(0)Y(1))}{(X(0)^2 + Y(0)^2)^2} \right)$$

$$\Rightarrow Y(3) = 0.2447$$

Benzer şekilde diğer Adomian katsayıları da kullanıldığında  $X(4) = 0.8692$ ,  $X(5) = 1.0029$ ,  $X(6) = -2.0436$ ,  $Y(4) = -1.5137$ ,  $Y(5) = 1.7957$ ,  $Y(6) = 0.6512$  elde edilir.

$$x(t) = 0.5 - 0.9979t^3 + 0.8692t^4 + 1.0029t^5 - 2.0436t^6$$

$$y(t) = t - 0.2453t^2 + 0.2447t^3 - 1.5137t^4 + 1.7957t^5 + 0.6512t^6$$

şeklinde yaklaşık çözüm elde edilir. Çözümün periyodik olduğu bilindiğinden sonsuz aralıkta çözümü temsil eden periyodik çözümler bulunmalıdır. Bunun için değiştirilmiş DTM kullanılmalıdır.  $x(t)$  ve  $y(t)$ 'nin Laplace dönüşümü alınır ve  $s = 1/t$  için [3; 3] Padé yaklaşımları sırasıyla,  $\frac{0.5t+1.74206t^2+16.1196t^3}{1+3.48412t+32.2393t^2+11.9748t^3}$  ve  $\frac{t^2+5.10436t^3}{1+5.59496t+1.27669t^2+28.7406t^3}$  olup  $t = 1/s$  için ters Laplace dönüşümü ile reel çözümler,

$$x(t) = (-0.01744\cos(5.35202t) + 0.03225\sin(5.35202t))e^{-1.54919t} + 0.51744e^{-0.385735t}$$

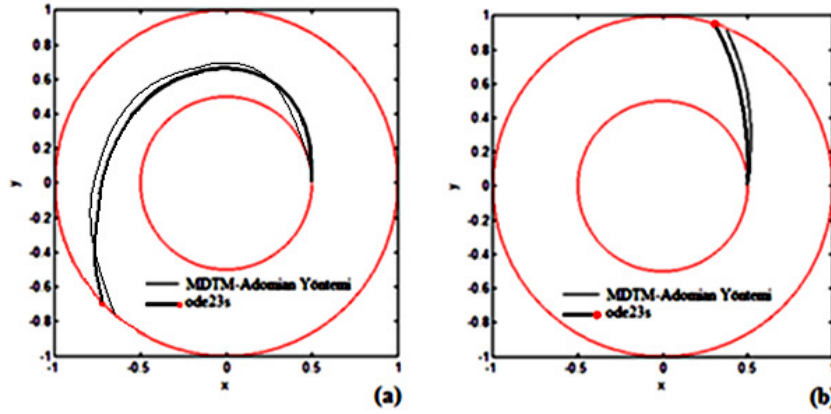
$$y(t) = (0.02274\cos(2.14444t) + 0.39817\sin(2.14444t))e^{0.276387t} - 0.022747e^{-6.14774t}$$

olarak elde edilmektedir ve  $(x(t), y(t))$  çözümü Şekil 55 (a)'da verilmektedir. Ayrıca parçacık kütlesini arttırdığımızda,  $\omega = 15$ ,  $\mu_f = 0.05$  ve  $a_p = 0.005$  parametre değerleri için elde edilen çözüm;

$$x(t) = (-0.00183\cos(5.62449t) + 0.01075\sin(5.62449t))e^{-0.53709t} + 0.50183e^{-0.122506t}$$

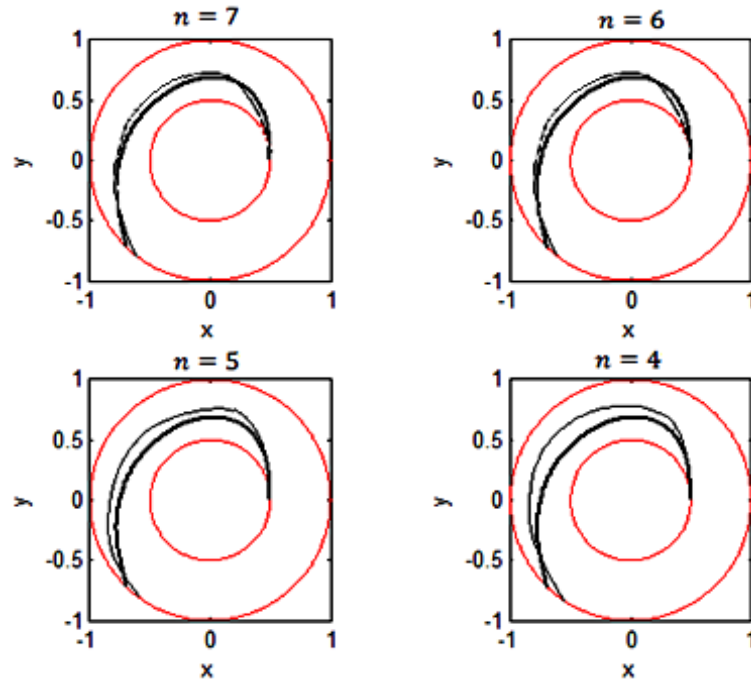
$$y(t) = (0.07392\cos(1.76148t) + 0.40758\sin(1.76148t))e^{0.51613t} - 0.0792032e^{-3.04515t}$$

şeklinde olacaktır ve  $(x(t), y(t))$  çözümü Şekil 55, (b)'de verilmektedir. Şekil 55'de MDTM-Adomian yöntemiyle elde edilen her iki yaklaşık çözümün Matlab'da ode çözücüyle elde edilen çözümle beraber karşılaştırılması verilmektedir. Buna göre parçacık kütlesindeki artış ile çözüme daha yakın bir sonuca yaklaşmak mümkündür.



Şekil 55. (a)  $\omega = 10, \mu_f = 0.05$  ve  $a_p = 0.0035$ , (b)  $\omega = 15, \mu_f = 0.05$  ve  $a_p = 0.005$  parametre değerleri için modelin MDTM-Adomian yöntemiyle elde edilen çözümü

Ayrıca farklı  $n$  değerleri için MDTM-Adomian yöntemiyle elde edilen çözümler karşılaştırılmıştır. Buna göre  $n = 6$  terim ve sonrası terimler için çözümlerin yakın olduğu görülmektedir. Şekil 56'ya göre  $n = 6$  terimden daha düşük sayıda alınan terimlerle elde edilen çözümün gerçek çözümden uzaklaştığı görülmektedir.



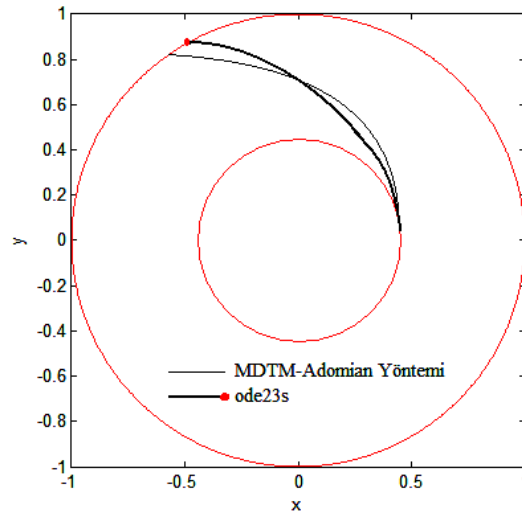
Şekil 56.  $\omega = 10, \mu_f = 0.05$  ve  $a_p = 0.0035$  parametre değerleri için farklı  $n$  değerlerine karşılık gelen parçacık yörüngeleri

Bunlara ek olarak parçacık kütlelerinin farklı bir değeri için,  $\omega = 20, \mu_f = 0.06$  ve  $a_p = 0.004$  parametre değerlerine karşılık gelen  $(x(t), y(t))$  çözümleri ve bu çözümlerin Matlabda hesaplanan çözümlerle karşılaştırması Şekil 57'de verilmiştir. Sonuç olarak

model için hesaplanan yaklaşık çözümün, diğer çözüme yakın sonuçlar verdiği test edilmiştir.

$$x(t) = (-0.00315\cos(5.59906t) + 0.01558\sin(5.59906t))e^{-0.662606t} + 0.50316e^{-0.173043t}$$

$$y(t) = (0.0591\cos(1.93945t) + 0.39013\sin(1.93945t))e^{0.51613t} - 0.0590911e^{-3.56754t}$$



Şekil 57.  $\omega = 20, \mu_f = 0.06$  ve  $a_p = 0.004$  parametre değerleri için modelin MDTM-Adomian yöntemiyle elde edilen çözümü

Parçacık Taşınım Modeli (Yeniden Ölçekleme):  $\{\varepsilon\ddot{x} + \dot{x} = \frac{r_i r_o}{r_o^2 - r_i^2} \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$   
 $\varepsilon\ddot{y} + \dot{y} = \frac{r_i r_o}{r_o^2 - r_i^2} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - x \right) - \varepsilon g_0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = V_{x_0}, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = V_{y_0}\}$   
doğrusal olmayan denklem sisteminin çözümü,  $t = \varepsilon\tau$  zaman ölçeklemesi yapıldıktan sonra DTM(Diferensiyel Transform Metodu)-Adomian yöntemi ile yapılacaktır.  $t = \varepsilon\tau$  zaman ölçeklemesi yapıldıktan sonra sistem,  $\left\{ \ddot{x} + \dot{x} = \frac{r_i r_o}{r_o^2 - r_i^2} \varepsilon \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right), \quad \ddot{y} + \dot{y} = \frac{r_i r_o}{r_o^2 - r_i^2} \varepsilon \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - x \right) - \varepsilon^2 g_0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \varepsilon V_{x_0}, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \varepsilon V_{y_0} \right\}$  haline dönüşmektedir. DTM yöntemiyle elde edilecek yaklaşık çözümde  $x(t) = \sum_{k=0}^n X(k)t^k$  ve  $y(t) = \sum_{k=0}^n Y(k)t^k$  şeklinde çözümler elde edileceğinden,  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \varepsilon V_{x_0}, y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \varepsilon V_{y_0}$  başlangıç şartlarından  $X(0) = x_0, X(1) = \varepsilon V_{x_0}, Y(0) = y_0, Y(1) = \varepsilon V_{y_0}$  elde edilir. Doğrusal olmayan sistemin birinci tarafına DTM uygulanıp  $k$ 'nın değerlerine göre denklemin ikinci tarafında ise  $k$ . Adomian terimleri kullanılacaktır. Sistemin birinci tarafına DTM uygulanırsa,

$$(k+2)(k+1)X(k+2) + (k+1)X(k+1) = k. \text{ Adomian Polinomları}$$

$$(k+2)(k+1)Y(k+2) + (k+1)Y(k+1) = k. \text{ Adomian Polinomları}$$

elde edilir.  $x_0 = 0.5, y_0 = 0, V_{x_0} = 0, V_{y_0} = \varepsilon, \omega = 10, \mu_f = 0.05$  ve  $a_p = 0.003$  parametre değerlerine karşılık hesaplamalar yapılacaktır.  $X(0) = 0.5, X(1) = 0, Y(0) = 0, Y(1) = \varepsilon$  başlangıç değerleri ile birlikte  $k$ 'nın farklı değerleri için DTM katsayıları hesaplanırsa,  $k = 0$  ise;

$$2.X(2) + X(1) = \frac{r_i r_o}{r_o^2 - r_i^2} \varepsilon \left( Y(0) - \frac{Y(0)}{X(0)^2 + Y(0)^2} \right) \Rightarrow X(2) = 0$$

$$2.Y(2) + Y(1) = \frac{r_i r_o}{r_o^2 - r_i^2} \varepsilon \left( \frac{X(0)}{X(0)^2 + Y(0)^2} - X(0) - \varepsilon g_0 \right) \Rightarrow Y(2) = -0.0148$$

$k = 1$  ise;

$$6.X(3) + 2.X(2) = \frac{r_i r_o}{r_o^2 - r_i^2} \varepsilon \left( Y(1) - \frac{Y(1)}{X(0)^2 + Y(0)^2} + \frac{Y(0)(2X(0)X(1) + 2Y(0)Y(1))}{(X(0)^2 + Y(0)^2)^2} \right)$$

$$\Rightarrow X(3) = -0.0201$$

$$6.Y(3) + 2.Y(2) = \frac{r_i r_o}{r_o^2 - r_i^2} \varepsilon \left( -X(1) + \frac{X(1)}{X(0)^2 + Y(0)^2} - \frac{X(0)(2X(0)X(1) + 2Y(0)Y(1))}{(X(0)^2 + Y(0)^2)^2} \right)$$

$$\Rightarrow Y(3) = 0.0049$$

Benzer şekilde diğer Adomian katsayıları da kullanıldığında  $X(4) = 0.0056, X(5) = 0.0007, X(6) = -0.0007, Y(4) = -0.0078, Y(5) = 0.0029, Y(6) = -0.0001$  elde edilir.

$$x(t) = 0.5 - 0.0201\tau^3 + 0.0056\tau^4 + 0.0007\tau^5 - 0.0007\tau^5$$

$$y(t) = 0.2454\tau - 0.0148\tau^2 + 0.0049\tau^3 - 0.0078\tau^4 + 0.0029\tau^5 - 0.0001\tau^6$$

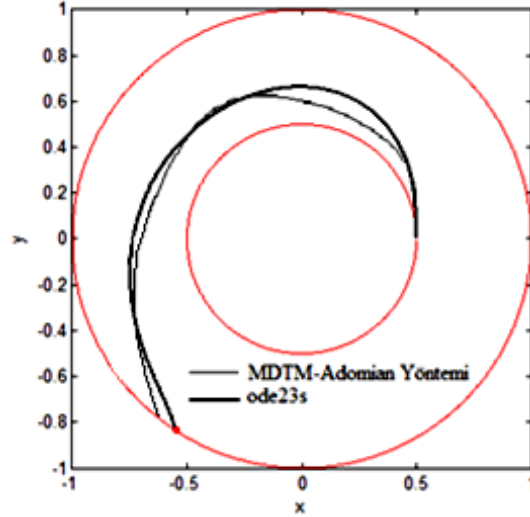
şeklinde yaklaşık çözüm elde edilir. Çözümün periyodik olduğu bilindiğinden sonsuz aralıkta çözümü temsil eden periyodik çözümler bulunmalıdır. Bunun için değiştirilmiş DTM kullanılmalıdır.  $x(\tau)$  ve  $y(\tau)$ 'nin Laplace dönüşümü alınır ve  $s = 1/\tau$  için [3; 3] Padé yaklaşımları sırasıyla,  $\frac{0.5\tau + 0.5572\tau^2 + 0.9692\tau^3}{1 + 1.1144\tau + 1.9385\tau^2 + 0.2412\tau^3}$  ve  $\frac{0.2454\tau^2 + 0.4085\tau^3}{1 + 1.7854\tau + 0.0955\tau^2 + 0.5605\tau^3}$  olup  $\tau = 1/s$  için ters Laplace dönüşümü ile  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$  yazıldığında reel çözümler,

$$x(t) = \left( -0.03362 \cos\left(\frac{1.25183}{\varepsilon}t\right) + 0.04364 \sin\left(\frac{1.25183}{\varepsilon}t\right) \right) e^{-\frac{0.49051}{\varepsilon}t} + 0.53354 e^{-\frac{0.13341}{\varepsilon}t}$$

$$y(t) = \left( 0.01368 \cos\left(\frac{0.54184}{\varepsilon}t\right) + 0.40426 \sin\left(\frac{0.54184}{\varepsilon}t\right) \right) e^{\frac{0.05317}{\varepsilon}t} - 0.01366 e^{-\frac{1.89151}{\varepsilon}t}$$

şeklinde elde edilir. Şekil 58'de yaklaşık MDTM-Adomian yöntemiyle çözülen doğrusal olmayan sistemin çoklu ölçeklemeyle elde edilen yaklaşık çözümüyle Matlab'de Ode

çözücüyle elde edilen çözümün karşılaştırılması verilmektedir. Buna göre önceki modelin çözümüne benzer sonuçlar elde edilmiştir.

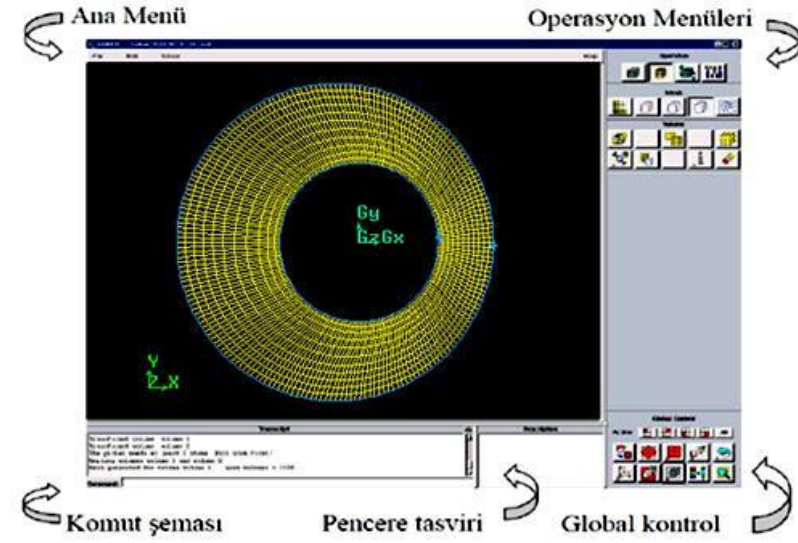


Şekil 58.  $\omega = 10$ ,  $\mu_f = 0.05$  ve  $a_p = 0.003$  parametre değerleri için yeniden ölçeklenen modelin MDTM-Adomian yöntemiyle elde edilen çözüm

#### 2.2.2.6. Navier-Stokes Hız Profilleri ile Parçacık Taşınımı

Bu kısımda, daha önce Matlab ve MDTM ile elde edilen yaklaşık çözümlerle FLUENT'le elde edilen hız profilleri kullanılarak elde edilen çözümlerin karşılaştırması yapılmıştır. Tüm analizler için öncelikle GAMBİT programında çizimler, meshlemeler yapılmış sınır koşulları tanımlanmış olup ardından FLUENT(www.ansys.com) adlı, hesaplamalı akışkanlar dinamiği programı kullanılmıştır. Çalışmada ayrıca GAMBİT ve FLUENT programlarıyla ilgili bilgilendirmeler mevcuttur.

GAMBİT; tasarım ve analiz yapanların mesh model oluşturup hesaplamalı akışkanlar dinamiğinde ve diğer bilimsel uygulamalarda kullanmaları için geliştirilen bir yazılımdır. GAMBİT 'e grafik arayüzü sayesinde kullanıcı girdileri girer. GAMBİT grafik arayüzünde temel olarak öncelikle geometri oluşturulur ardından meshleme ve sınır şartları tanımlanıp uygun çözücüde analiz için model kullanılabilir. Şekil 59'da GAMBİT grafik kullanım arayüzü verilmiştir.

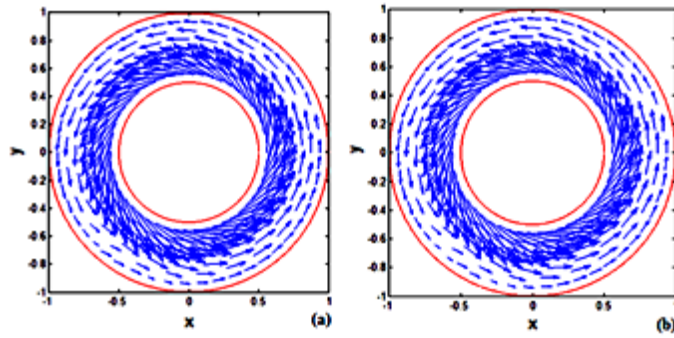


Şekil 59. GAMBIT grafik kullanım arayüzü

FLUENT, oluşturulan geometrilere akışkan akışlarını görselleştirebilen bir hesaplamalı akışkanlar dinamiği programıdır. FLUENT, akışkan akışlarını modellemek ve karmaşık geometrilere ısı transferlerini görmek için oldukça önemli bir programdır. FLUENT çözüm için sonlu hacimler metodunu kullanır. Farklı fiziksel modeller için, örneğin; sıkıştırılabilir veya sıkıştırılmaz, viskoz veya viskoz olmayan, laminar veya türbülanslı vb. gibi özellikler programa çözüm yeteneği kazandırır. Fiziksel problemin geometrisi, mesh ve gerekli sınır koşulları GAMBIT programında tanımlanır. Kısaca, çözüme yedi adımda ulaşılabilir:

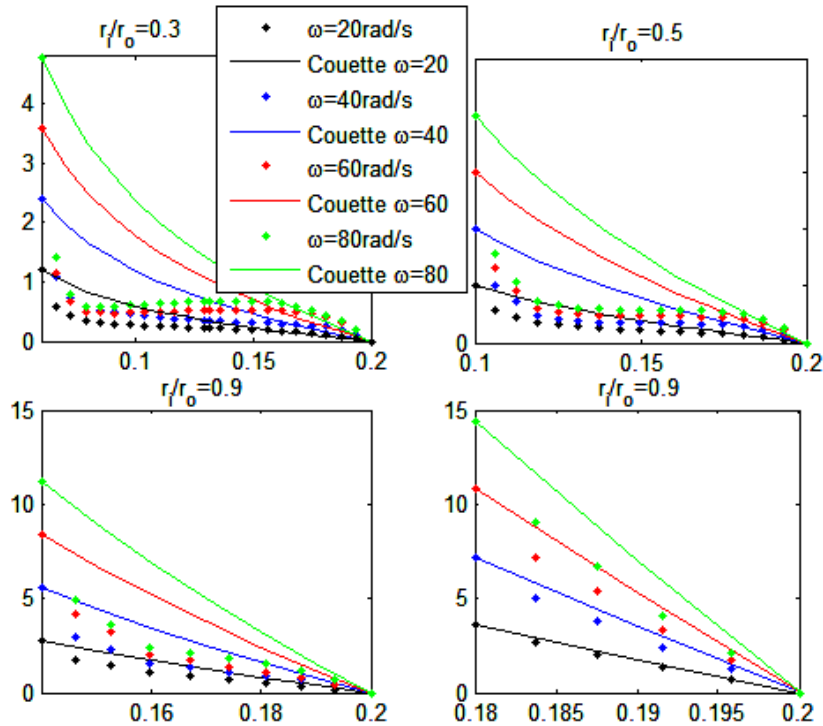
- GAMBIT'te geometrinin oluşturulması
- GAMBIT'te meshlemelerin yapılması
- GAMBIT'te sınır şartlarının tanımlanması
- FLUENT'te problemin tanımlanması
- Çözüm
- Sonuçların analizi
- Gerekliyse meshlemelerin iyileştirilmesi

Sabit  $\omega$  ve  $\mu_f$  değerleri verildiğinde, Fluent'te bu parametre değerleri için hız değerleri hesaplanıp, bunlar için Couette profiline yakın en uygun eğriler belirlenebilir. Bundan sonrada bu hız profilleri,  $\varepsilon \ddot{x} + x = V(x) - \varepsilon g_{0j}$  model denkleminde kullanılarak, bu profiller yardımıyla akışkan parçacığının silindir içerisindeki konumu tahmin edilecektir.  $\omega = 10$ ,  $\mu_f = 0.05$  ve  $r_i/r_o = 0.5$  oranı için halkasal kesitteki hız alanları hem Fluent için hem de Couette için Şekil 60'da verilmiştir.



Şekil 60.  $\omega = 10$ ,  $\mu_f = 0.05$  ve  $r_i/r_o = 0.5$  parametreleri için hız vektör alanları: (a) Fluent Hız alanı, (b) Couette Hız alanı

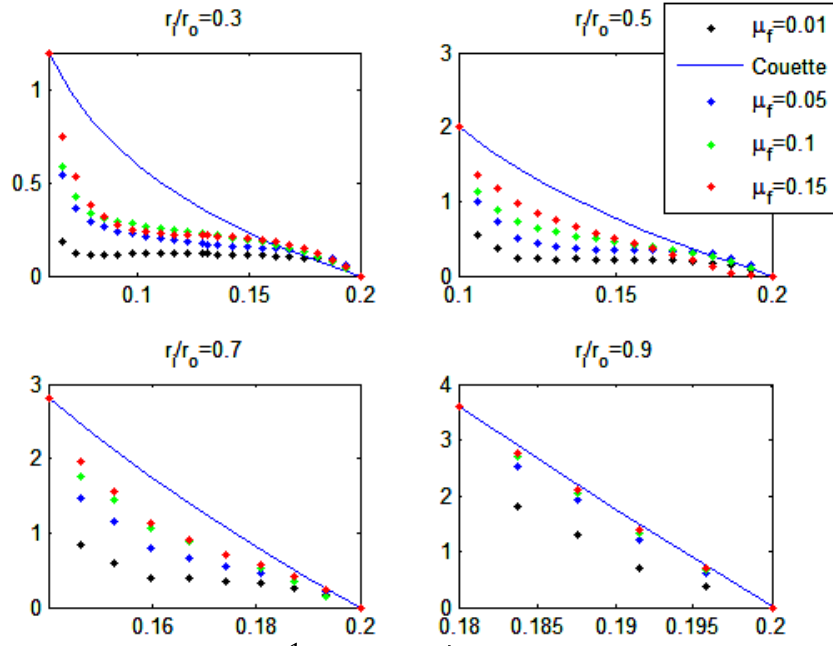
Couette hız profilleri ile Fluent hız profillerinin benzer olduğu parametre değerleri vardır. Farklı iç silindir değerleri için hesaplanan farklı  $r_i/r_o$  oranlarında akışkan viskozitesinin sabit  $\mu = 0.1$  değerine karşılık hız değişimleri hesaplandığında Şekil 61'den, iç silindir dış silindire yaklaştığı ve iç silindir hızının küçük olduğu durumlarda Fluent hız profilleri Couette hız profilleriyle uyuşmaktadır. Uyguladığımız modelde  $r_i/r_o = 0.5$  oranı için düşük hız değerleri için Fluent ile Couette hız profillerinin uyduğu görülmektedir. O halde bu seçim için Fluent'ten alınan hız profilleri ile çalışılabilir ve elde edilen bu profillerle parçacık yörüngeleri hesaplanabilir.



Şekil 61.  $\mu_f = 0.1$ , farklı  $r_i/r_o$  oranları ve farklı hızlar için hız profilleri

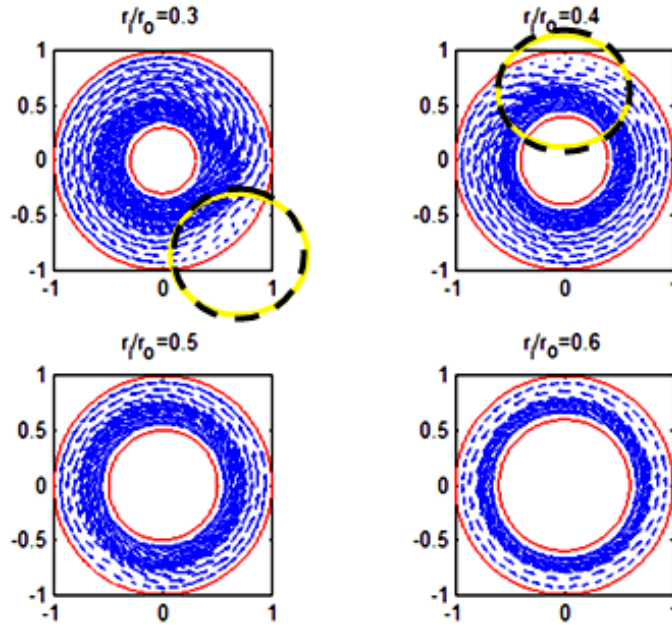


Farklı iç silindir değerleri için hesaplanan farklı  $r_i/r_o$  oranlarında iç hızının sabit  $\omega = 20s^{-1}$  değerine karşılık viskozite değişimleri hesaplandığında Şekil 62'den iç silindir dış silindire yaklaştığı ve viskozitenin arttığı durumlarda Fluent hız profilleri ile Couette hız profilleriyle uyuşmaktadır. Bu durumda Fluent hız profilleri ile Couette hız profillerini kullanarak parçacık yörüngelerini karşılaştırmak istersek viskozite olarak çok küçük değerler alınmamalıdır. Sonuç olarak Fluent ile parçacık taşınım hesaplamalarında iç silindir hızının düşük olduğu ve viskozitenin yeterince büyük olduğu değerler seçilmelidir.



Şekil 62.  $\omega = 20 s^{-1}$ , farklı  $r_i/r_o$  oranları ve farklı viskoziteler için hız profilleri

Şekil 63'de farklı iç yarıçap değerlerine göre halkasal bölgedeki hız alanları verilmektedir. Buna göre iç silindirin küçük değerlerinde dış silindire yakın yerlerde girdaplar oluşabilmektedir. Bu girdapları ancak Fluent yardımı ile görebiliriz. Normal Couette profilini kullanarak girdapları görmek mümkün değildir. Bu durumda Fluent yazılımının bir avantajı ortaya çıkmaktadır. İç silindirin dış silindire yakın olduğu durumlarda halkasal bölgede asıntı(suspended) yatağı söz konusu olabileceği için en uygun seçim olarak  $r_i/r_o = 0.5$  alınmıştır. Girdap oluşumu şüphesiz Couette hız alanında mevcut değildir ve bu durum sondaj sistemi için tercih edilmez.



Şekil 63. Farklı iç yarıçaplar için halkasal kesitteki hız alanları

### 2.2.2.7. Hız Profilleri İçin Yaklaşım ve Parçacık Yörüngeleri

Modelde sabit hız değerleri  $\omega = 5, 10, 15, 20, 25, 30$  ve sabit viskozite değerleri ise  $\mu_f = 0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.09$  olarak alınacaktır. Fluentte elde edilen hız profiline en iyi yaklaşım olarak  $u(r) = ae^{(-r/b)}$  ve  $u(r) = ar^{-n}e^{(-r/b)}$  yaklaşımları alınabilir. Bu eğrilerin kartezyen koordinatlardaki karşılıkları,  $u_\theta(r) = ae^{\frac{r}{b}}$  hız profili için, kartezyen

$$\text{koordinatlarda, } u = \left( -\frac{aye^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \hat{i} + \left( \frac{axe^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \hat{j};$$

$u_\theta(r) = ar^{-n}e^{-\frac{r}{b}}$  hız profili için, kartezyen koordinatlarda,

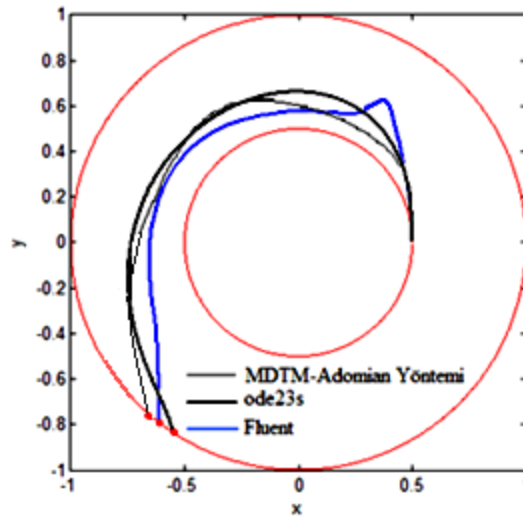
$$u = \left( -\frac{ay(\sqrt{x^2+y^2})^{-n}e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \hat{i} + \left( \frac{ax(\sqrt{x^2+y^2})^{-n}e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \hat{j} \text{ şeklinde verilmektedir.}$$

$u(r) = ae^{(-r/b)}$  eğrisi için, sabit  $\omega$  ve sabit  $\mu_f$  değerlerinden elde edilen  $a, b$  değerleri Tablo 15'de verilmiştir. Hesaplanan bu değerler için hata yaklaşık olarak %2'dir.

Tablo 15.  $u(r) = ae^{(-r/b)}$  için hesaplanan  $a$  ve  $b$  değerleri

$\omega - \mu_f$	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
5	a = 2.6557e+006 b = 0.035916	a = 8.4364e+005 b = 0.039134	a = 5.3905e+005 b = 0.040642	a = 2.283e+005 b = 0.043683	a = 3.62e+005 b = 0.042
10	a = 3.4329e+006 b = 0.037064	a = 6.4218e+005 b = 0.042307	a = 2.8976e+005 b = 0.045465	a = 6.7323e+005 b = 0.042217	a = 3.6793e+005 b = 0.044422
15	a = 3.2357e+006 b = 0.038435	a = 2.2796e+006 b = 0.039454	a = 3.0776e+006 b = 0.038599	a = 1.1576e+006 b = 0.041692	a = 1.5374e+006 b = 0.040783
20	a = 3.0077e+006 b = 0.039534	a = 2.3904e+006 b = 0.040203	a = 1.6844e+006 b = 0.041416	a = 9.473e+005 b = 0.043463	a = 7.374e+005 b = 0.044368
25	a = 5.7093e+006 b = 0.038186	a = 3.5487e+006 b = 0.039616	a = 3.5132e+006 b = 0.039711	a = 1.4136e+006 b = 0.042698	a = 9.5551e+005 b = 0.044211
30	a = 9.0827e+006 b = 0.037404	a = 4.0652e+006 b = 0.039824	a = 1.0302e+006 b = 0.044591	a = 6.1205e+006 b = 0.038557	a = 4.029e+006 b = 0.039818

Buna göre  $\omega = 10$ ,  $\mu_f = 0.05$  ve  $a_p = 0.003$  parametre değerleri için, Fluent'te elde edilen hız profillerine göre parçacığın hareketi ile daha önce MDTM-Adomian ve Matlab Ode'lerle elde edilen çözümlerin karşılaştırılması Şekil 64'de gösterilmiştir.



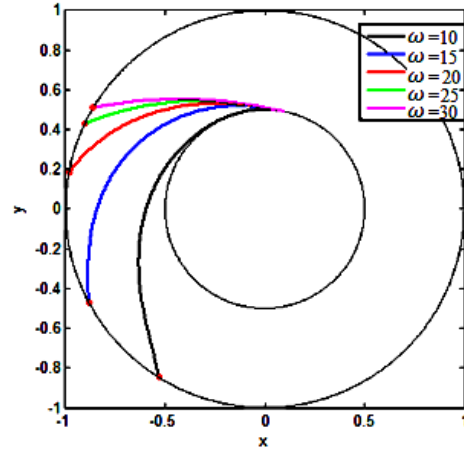
Şekil 64.  $\omega = 10$ ,  $\mu_f = 0.05$  ve  $a_p = 0.003$  parametre değerleri için çözümlerin karşılaştırılması(Couette ve Fluent hız profilleri ile parçacık taşınımı)

### 2.2.3. Parçacık Modelinin Tek Parametreye Göre Değişim Analizi

Bu bölümde sadece dönme yönünde olan Couette akışı ile verilen parçacık taşınımı,  $\omega$ ,  $m$  ve  $\mu_f$  parametrelerine göre etkin taşınım için incelemeler yapılmaktadır.

#### 2.2.3.1. Parçacık Yörüngesinin $\omega$ Hızına Göre Değişimi

Bu kısımda, (49) modeli ele alınmakta ve farklı  $\omega$  açısal hızlarına göre parçacık hareketinin yörüngeleri elde edilmektedir. Dış silindir yarıçapı  $r_0 = 0.2$  ve iç silindir yarıçapı ise  $r_i = 0.1$  alınarak, modelde boyutsuz Couette profili kullanılarak farklı  $\omega$  açısal hızlarına göre Şekil 65'deki farklı yörüngeler elde edilmiştir. Buna göre, düşük açısal hızlarda parçacık iç silindirle beraber harekete başlayarak belli zamanda silindirin hızına göre halkasal bölgede hareketine devam edecek ve parçacık dış silindire ulaşmaya kadar bu devam edecektir. Açısal hız arttırıldığında silindir üzerinde bulunan parçacık silindir üzerinden ayrılarak daha hızlı bir şekilde dış silindire ulaşma çalışacaktır. Düşük hızlarda da parçacık dış silindire ulaşana kadar halkasal bölgedeki hareketi daha uzundur.  $a_p = 0.003$ ,  $\mu_f = 0.03$  sabit viskozite,  $\rho_p = 2570$  sabit yoğunluk ve sabit kütleli bir parçacık hareketi için iç silindirin değişimi ile oluşacak parçacık yörüngeleri şekildedir.



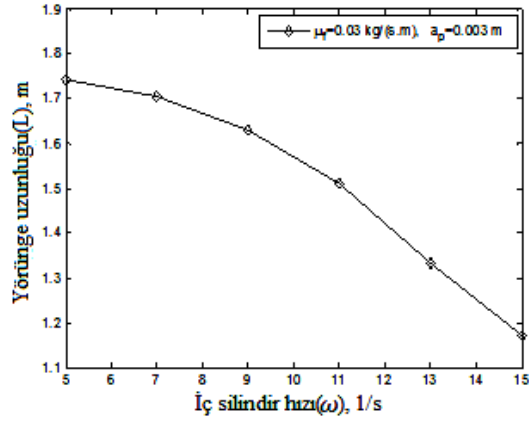
Şekil 65. Farklı  $\omega$  parametrelerine karşılık gelen Couette profilleri

Modelde  $\omega$  parametresine göre yörünge uzunluklarının değişimi düşük hızlar ve yüksek hızlarda hesaplanmış ve Tablo 16'da bu değerler verilmiştir. Bu değerlere karşılık

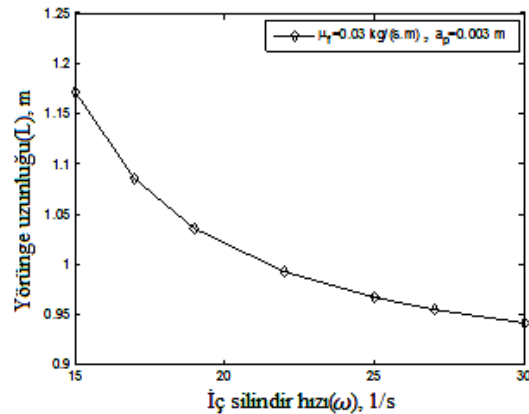
gelen grafikler Şekil 66 ve Şekil 67'de verilmiştir. Sonuç olarak hız arttıkça yörünge uzunluklarının doğrusal olmayacak şekilde azaldığı gözlemlenmiştir. Ayrıca düşük hızlarda uzunluk değişimi daha fazlayken, yüksek hızlardaki yörünge uzunluklarının değişimi daha azdır.

Tablo 16.  $a_p = 0.003, \mu_f = 0.03$  parametre değerleri için düşük ve yüksek hızlarda yörünge uzunlukları

Düşük $\omega$	5	7	9	11	13	15	
<b>L</b>	<b>1.7423</b>	<b>1.7054</b>	<b>1.6299</b>	<b>1.5097</b>	<b>1.3316</b>	<b>1.1719</b>	
Yüksek $\omega$	15	17	19	22	25	27	30
<b>L</b>	<b>1.1719</b>	<b>1.0855</b>	<b>1.0361</b>	<b>0.9931</b>	<b>0.9671</b>	<b>0.9547</b>	<b>0.9413</b>



Şekil 66. Düşük  $\omega$  parametresine göre yörünge uzunluklarının değişimi

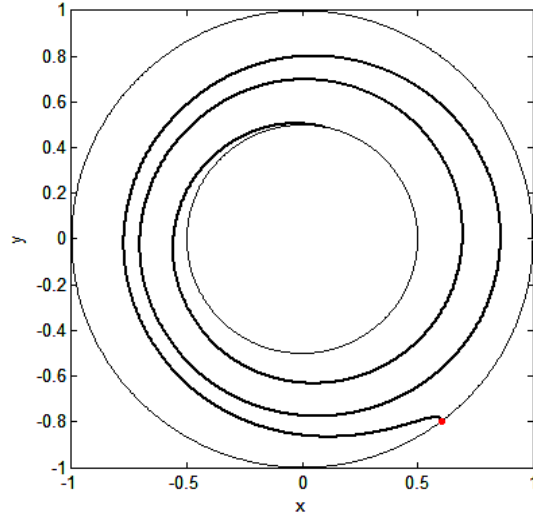


Şekil 67. Yüksek  $\omega$  parametresine göre yörünge uzunluklarının değişimi

### 2.2.3.2. Parçacık Yörüngesinin $m$ Kütlesine Göre Değişimi

Bu kısımda, açısal hız değeri  $\omega = 10$  ve akışkan viskozitesi  $\mu_f = 0.03$  olduğu durumda, kütle değişimine göre parçacık yörüngeleri incelenecektir. Akışkan kütlesi  $m = \rho_p \cdot a_p^3$  olduğundan, akışkan kütlesi ile yarıçapı arasında bir ilişki vardır.  $\rho_p$  sabit kabulü altında parçacık yarıçapını değiştirerek kütleyle değiştirebiliriz. Parçacık yarıçapı olan  $a_p$ 'yi değiştirerek parçacık yörüngesine etkisini için farklı  $a_p$  değerleri alındığında, sürtünme katsayısı  $k = 6\pi a_p \mu_f$  olduğundan, akışkan parçacığının kütlesindeki artış Stokes sürtünme kuvvetinin artmasına neden olur. Bu da viskoz bir sıvı içerisinde bulunan parçacığın kütlesinin artışı ile beraber parçacığa etki eden sürtünme kuvvetinin arttığı şeklinde ifade edilebilir. Daha yüksek kütleli parçacık viskoz sıvı içerisinde daha yüksek dirençle karşılaşacağından, bu parçacık uzun süreli hareket edemeden dış silindire ulaşacaktır.

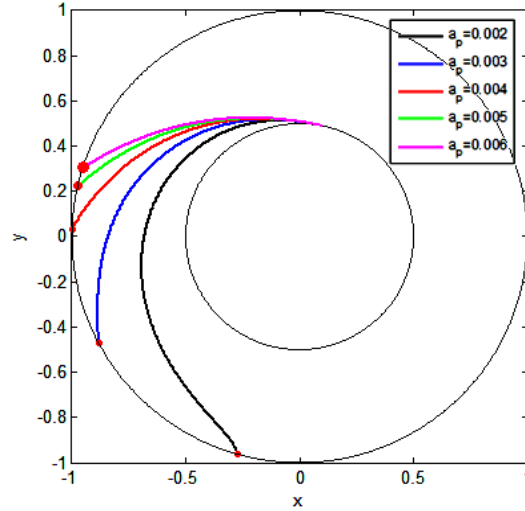
Sabit bir  $a_p = 0.001$  yarıçapına karşılık gelen parçacık kütlesi için yörünge Şekil 68'de gösterildiği gibidir:



Şekil 68.  $\omega = 10$ ,  $\mu_f = 0.03$  ve  $a_p = 0.001$  parametreleri için dönme yönü parçacık profili

$\omega = 10$ ,  $\mu_f = 0.03$  ve farklı  $a_p$  değerleri için yörüngelerin hesaplanması için farklı parçacık yarıçaplarına karşılık gelen kütle değerleri için yörüngeler Şekil 69'da gösterilmiştir. Buna göre büyük kütleli akışkan parçacığının yörünge uzunluğu, düşük kütleli parçacığın uzunluğundan daha azdır. Düşük kütleli akışkan parçacığı halkasal

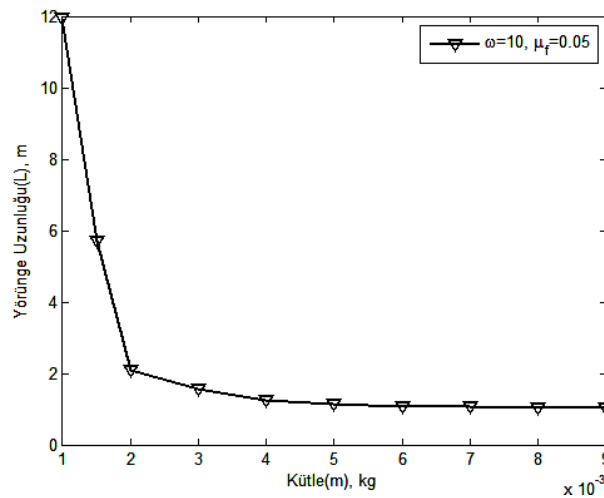
bölgede daha çok mesafe almaktadır. Bu parametreler için hesaplanan değerler Tablo 17’de verilmiştir ve Şekil 70’e göre parçacık yörünge uzunluğu, parçacığın kütlesi arttığında doğrusal olmayacak şekilde azalmaktadır.



Şekil 69. Farklı kütlelere karşılık gelen parçacık yörünge profilleri

Tablo 17.  $\omega = 10, \mu_f = 0.03$  parametre değerleri ve farklı  $a_p$  değerleri için yörünge uzunlukları

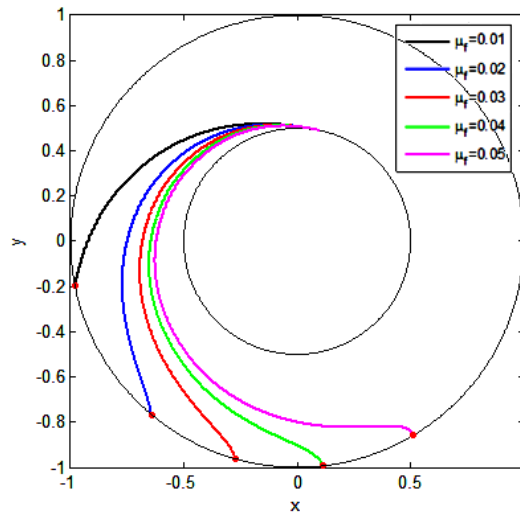
$a_p$	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
<b>L</b>	11.9367	2.0723	1.5765	1.2391	1.1281	1.0824	1.0585	1.0444	1.0353



Şekil 70.  $m$  kütle parametresine göre yörünge uzunluklarının değişimi

### 2.2.3.3. Parçacık Yörüngesinin $\mu_f$ Viskozitesine Göre Değişimi

Akışkanın viskozitesinin değişmesi halinde ise, viskozite akışkanın akışa karşı gösterdiği direnç olduğundan, viskozite arttıkça parçacığın akışkan içerisindeki hareketi yavaşlayacaktır. Viskozite ne kadar yüksek olursa akışkanın dönen iç silindirin akışkana verdiği hareketle beraber olan hareketi daha uzun sürelidir. Tersine akışkanın düşük viskozitede olduğu durumlarda parçacık daha az bir dirençle karşılaşacağından halkasal bölgede, iç silindirden dış silindire geçişi hızlı olur. Sabit  $a_p = 0.002$ ,  $\omega = 10$  iç silindir hızında,  $\mu_f$  akışkan viskozitesinin farklı değerlerine karşılık gelen yörünge uzunlukları Şekil 71’de gösterilmiştir. Sonuç olarak viskozitenin artması yörünge uzunluğunun artmasına neden olduğu gözlemlenmiştir. Farklı viskoziteler için yörünge uzunlukları Tablo 18’de verilmiştir. Şekil 72’ye göre yörünge uzunluğu viskozite artışıyla beraber doğrusal olmayacak şekilde artmaktadır.

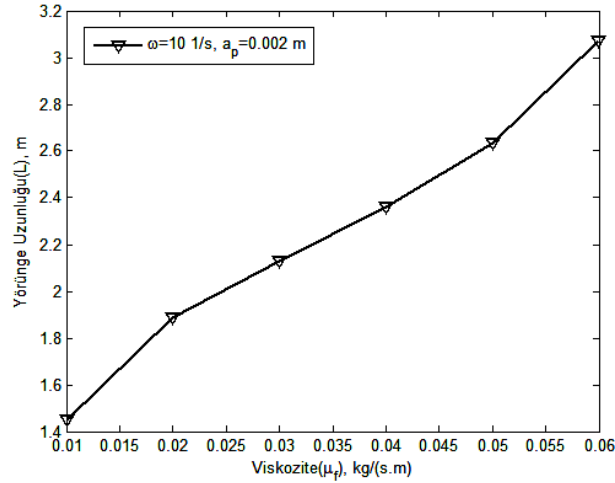


Şekil 71. Düşük viskoziteler için dönme yönünde parçacık yörüngeleri

Tablo 18.  $a_p = 0.002$ ,  $\omega = 10$  parametre değerleri ve düşük viskozite değerlerine göre yörünge uzunlukları

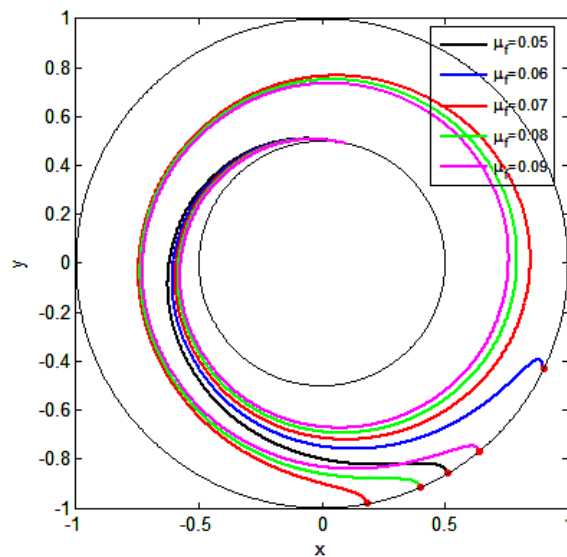
$\mu_f$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
$L$	1.4488	1.8864	2.1291	2.3626	2.6331	3.0727





Şekil 72. Düşük viskozite değerlerine göre parçacık yörünge uzunluklarının değişimi

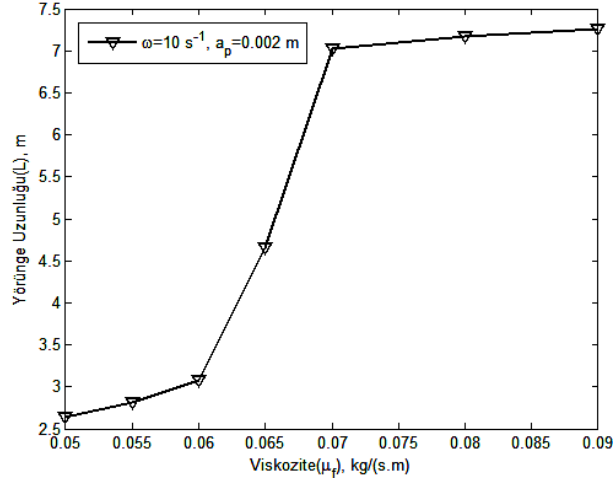
Düşük viskozite değerlerinin yanı sıra, yüksek viskozite değerlerine karşılık gelen yörüngeler de hesaplanacaktır. Bunun için viskozite değerleri olarak,  $\mu_f = 0.05, 0.06, 0.07, 0.08$  ve  $0.09$  alınmaktadır. Bu durumdaki yörüngeler Şekil 73'de verilmiştir.  $a_p = 0.002, \omega = 10$  parametre değerleri ve bu viskozite değerleri için hesaplanan değerler Tablo 19'da verilmiştir. Şekil 74'de bu viskozite değerlerine karşılık gelen yörünge uzunluklarının değişimi incelenmiştir ve buna göre akışkan viskozitesinin belli bir değerden sonra akışkan yörünge uzunluğunda önemli derecede bir artış meydana getirdiği görülmektedir.



Şekil 73. Yüksek viskoziteler için dönme yönünde parçacık yörüngeleri

Tablo 19.  $a_p = 0.002$ ,  $\omega = 10$  parametre değerleri ve yüksek viskozite değerlerine göre yörünge uzunlukları

$\mu_f$	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
$L$	2.6331	3.0727	7.1690	7.1709	7.2632



Şekil 74. Yüksek viskozite değerlerine göre yörünge uzunluklarının değişimi

#### 2.2.4. Dönme Yönünde Akış İçin İki-parametre Değişimine Göre Analiz

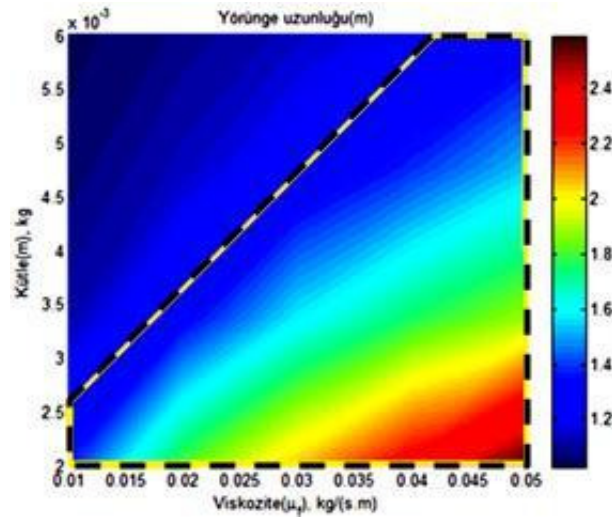
Bu kısımda, iki-parametre değişimine göre viskozite-kütle, viskozite-iç silindir hızı ve kütle-iç silindir hızına göre parçacığın yörünge uzunluklarının değişimi incelenecektir:

##### 2.2.4.1. Viskozite ve Kütleye Göre Değişimin İncelenmesi

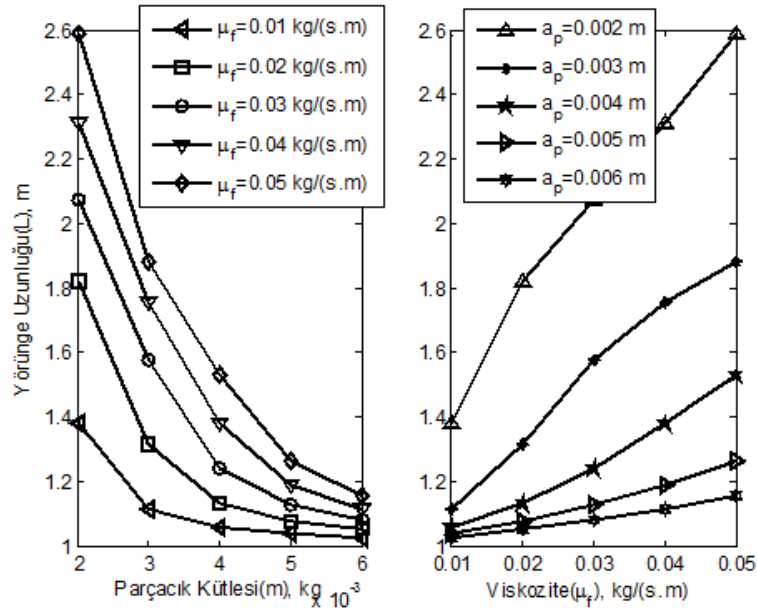
Sabit bir  $\omega = 10$  açısal hızda Viskozite-Kütle değişimine göre elde edilen yörünge uzunlukları ( $L$ ) Tablo 20'de verilmiştir. Şekil 75'e göre viskozite artışı parçacık yörünge uzunluklarını artırmakta, parçacığın kütlede meydana gelen artış ise yörünge uzunluğunu azaltmaktadır. Ayrıca parçacığın kütlesi küçükse, viskozite değişiminin yörünge uzunluğu üzerinde etkisi daha çöktür. Sonuç olarak sadece dönme yönünde etkin parçacık taşınımı için çizgili çerçeve içerisinde bulunan parametreler kümesi seçilebilir.

Tablo 20. Yatay borularda,  $\omega = 10$  için kütle ve viskozite değişimi

<b>Kütle</b> <b>Viskozite</b>	<b>0.002</b>	<b>0.003</b>	<b>0.004</b>	<b>0.005</b>	<b>0.006</b>
<b>0.01</b>	1.3810	1.1165	1.0599	1.0381	1.0269
<b>0.02</b>	1.8216	1.3138	1.1349	1.0782	1.0524
<b>0.03</b>	2.0723	1.5765	1.2391	1.1281	1.0824
<b>0.04</b>	2.3101	1.7540	1.3810	1.1892	1.1165
<b>0.05</b>	2.5878	1.8823	1.5324	1.2643	1.1548

Şekil 75.  $\omega = 10$  için viskozite ve kütle parametrelerine göre iki parametre değişimi

Şekil 76'da  $\omega = 10$  açısal hızında parçacık kütlesi ve viskozite parametrelerine göre yörünge uzunlukları incelenmiştir. Buna göre düşük kütle ve yüksek viskozite değerinde akışkan parçacığı en uzun mesafe değerini almaktadır. Halkasal bölge içerisindeki yüksek kütleli parçacıkların uzunluk değerlerinde önemli derecede değişim olmamaktadır. Düşük viskozite ve yüksek kütle değerlerinde parçacık yörünge uzunlukları hemen hemen aynıdır. Yüksek viskozite değerlerinde akışkan parçacığının kütlelerinde azalmanın, akışkan parçacığının yörünge uzunluğunu arttırdığı gözlemlenmiştir. Her iki durum için de parçacık yörünge uzunluğunun, parçacık kütlesi ve viskoziteye bağımlılığı doğrusal değildir. Fakat büyük kütleli parçacık hareketinde viskoziteye göre yörünge uzunlukları doğrusal bir şekilde değişmektedir.



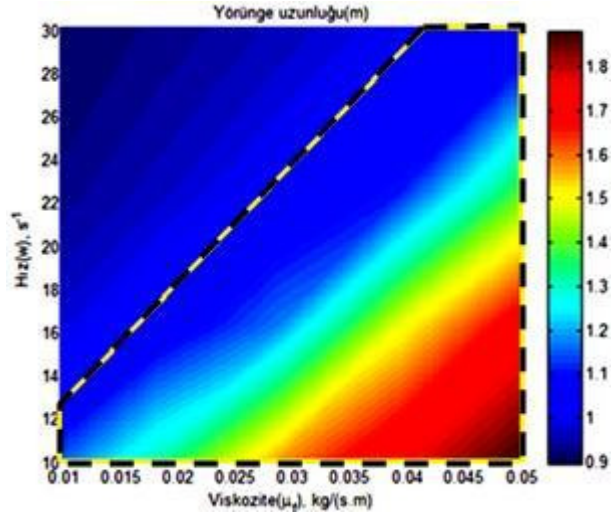
Şekil 76.  $\omega = 10$  için viskozite ve parçacık kütlesine göre yörünge uzunlukları

#### 2.2.4.2. Viskozite ve Hıza Göre Değişimin İncelenmesi

Sabit bir  $a_p = 0.003$  kütleli akışkan parçacığı için Viskozite-Hız değişimine göre elde edilen yörünge uzunlukları(L) Tablo 21’de verilmiştir. Şekil 77’ye göre viskozite artışı parçacık yörünge uzunluklarını artırmakta, parçacığın iç silindir hızındaki artış ise yörünge uzunluğunu azaltmaktadır. Yani iç silindir hızı ne kadar yüksek olursa parçacığın dış silindire ulaşma süresi o kadar erken olur. O halde sadece dönme yönünde etkin parçacık taşınımı için çizgili çerçeve içerisinde bulunan parametreler kümesi seçilebilir.

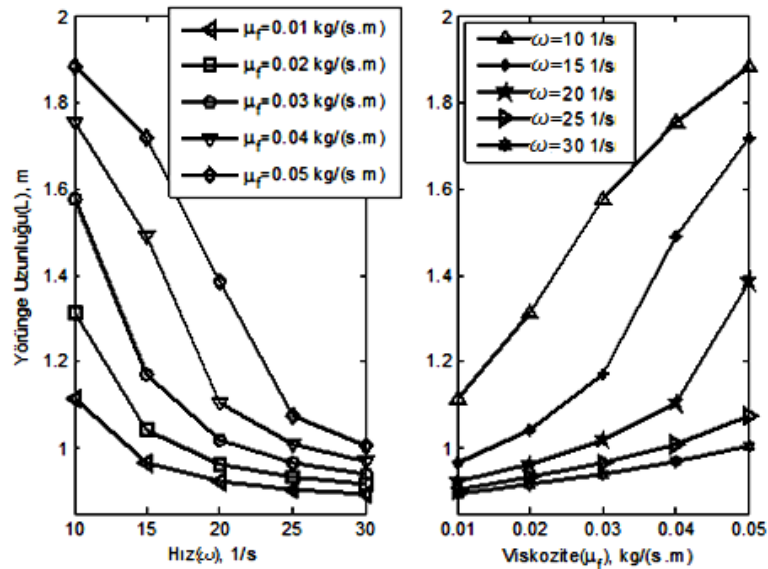
Tablo 21. Yatay borularda,  $a_p = 0.003$  için hız ve viskozite değişimi

Hız \ Viskozite	10	15	20	25	30
0.01	1.1165	0.9683	0.9248	0.9060	0.8956
0.02	1.3138	1.0412	0.9648	0.9337	0.9162
0.03	1.5765	1.1719	1.0190	0.9671	0.9413
0.04	1.7540	1.4917	1.1053	1.0108	0.9708
0.05	1.8823	1.7178	1.3839	1.0752	1.0081



Şekil 77.  $a_p = 0.003$  için viskozite ve hız parametrelerine göre iki parametre değişimi

Şekil 78’de ise sabit parçacık kütlelerinde yörünge uzunluğunun viskozite ve hız’a göre nasıl değiştiği irdelenmektedir. Buna göre, düşük hızlarda ve viskozitenin yüksek olduğu değerlerde akışkan parçacığının daha uzun süreli hareket ettiği gözlemlenmiştir. Yüksek hızlarda ise yörünge uzunluğunun viskoziteye bağımlılığı daha azdır. Ayrıca düşük viskozite ve yüksek hızlarda parçacığın yörünge uzunluk değişimi önemsizdir. Şekil 78’e göre açısal hıza göre yörünge uzunluğu zamanla azalma ve artış şekilden de görüleceği üzere doğrusal değildir.



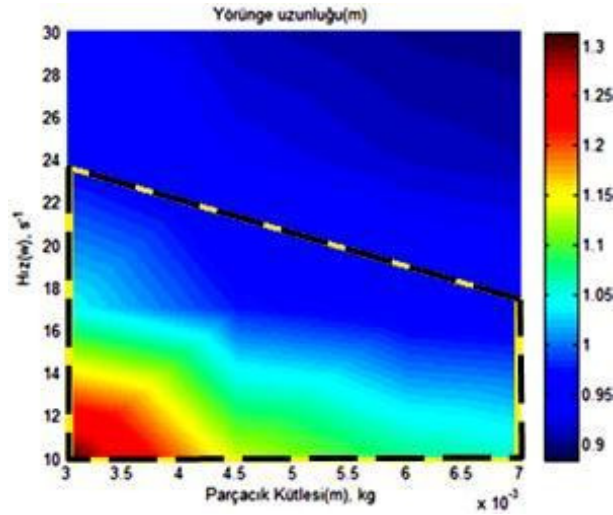
Şekil 78.  $a_p = 0.003$  için viskozite ve hıza göre yörünge uzunlukları

### 2.2.4.3. Hız ve Kütleye Göre Değişimin İncelenmesi

Sabit bir  $\mu_f = 0.02$  viskoziteli akışkan parçacığı için Kütle-Hız değişimine göre elde edilen yörünge uzunlukları( $L$ ) Tablo 22'de verilmiştir. Şekil 79'a göre parçacığın kütle artışının ve iç silindir hızının artışının yörünge uzunluğunu azalttığı gözlemlenmiştir. Bu durumda sadece dönme yönünde olan etkin parçacık taşınımı için çizgili çerçeve içerisinde bulunan parametreler kümesi seçilebilir.

Tablo 22. Yatay borularda,  $\mu_f = 0.02$  için hız ve kütle değişimi

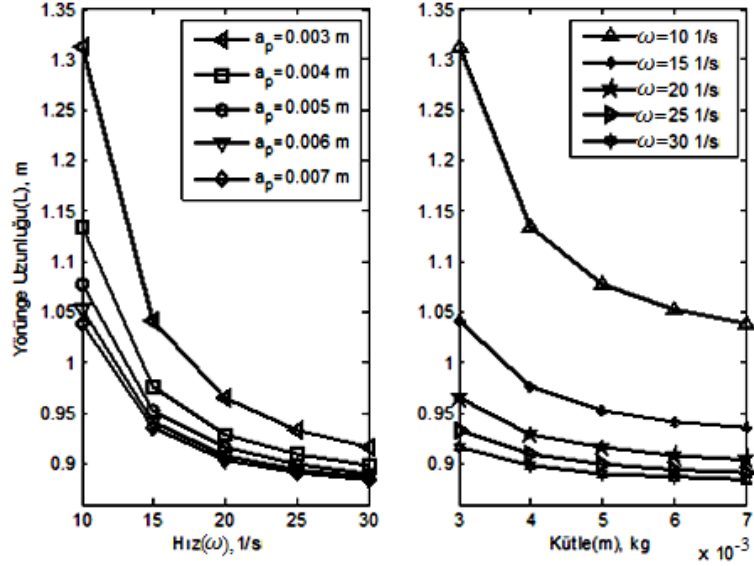
Hız \ Kütle	10	15	20	25	30
0.003	1.3138	1.0412	0.9648	0.9337	0.9162
0.004	1.1349	0.9760	0.9294	0.9092	0.8982
0.005	1.0782	0.9531	0.9158	0.8994	0.8901
0.006	1.0524	0.9419	0.9082	0.8941	0.8867
0.007	1.0382	0.9353	0.9041	0.8913	0.8838



Şekil 79.  $\mu_f = 0.02$  için kütle ve hız parametrelerine göre iki parametre değişimi

Şekil 80'e göre düşük kütle ve düşük hız parametre değerlerinde yörünge uzunluğu artmaktadır. Yüksek hız ve yüksek kütleli parçacık hareketinde yörünge uzunluk değişimi önemli oranda değişmektedir. Her iki durumda da yörünge uzunluğunun hız ve kütleye göre değişimi doğrusal olmayacak şekilde azaldığını göstermektedir. Ayrıca yüksek

hızlarda akışkan parçacığının kütesindeki bu değerlerdeki değişimi, yörünge uzunluğunun değişimini önemli derecede etkilememektedir.



Şekil 80.  $\mu_f = 0.02$  için kütle ve hıza göre yörünge uzunlukları

### 2.3. Couette ve Poiseuille Akışı Süperpozisyonu ile Parçacık Taşınım Modeli

#### 2.3.1. Model Tanıtımı

Bu bölümde, Şekil 9 geometrisine göre  $\varepsilon \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{x}) - \varepsilon g_0 \mathbf{j}$  modeli, dönme yönünde Couette ve eksenel yönde Poiseuille akışını düşünerek irdelenecektir. Bu modelde amacımız dönme yönünde ve eksenel yönde akışın olduğu durumda akışkan parçacığının hareketini modellemek ve parçacığın yörüngelerini parametrelere bağlı olarak irdelemektir. Bunun için parametreler olarak, parçacık yoğunluğu  $\rho_p$ , parçacık yarıçapı  $a_p$ , parçacık kütlesi  $m$ , akışkan viskozitesi  $\mu_f$ , iç silindir hızı  $\omega$ , basınç gradyeni  $\partial P/\partial z$  ve akışkan yoğunluğu  $\rho_f$  gibi parametreler alınmıştır. Bu modelde diğer tüm parametreler sabit kalmak koşuluyla kütle( $m$ ), viskozite( $\mu_f$ ), iç silindir hızı( $\omega$ ) ve basınç gradyenine( $\partial P/\partial z$ ) göre akışkan profillerinin değişimi incelenecektir. Ön bilgi olarak silindirik koordinatlarda  $x = r \cos\theta$ ,  $y = r \sin\theta$  ve  $z = z$ ,  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $\tan\theta = \frac{y}{x}$  ile verilir. Bu modelde de borunun yatay olduğu dikkate alınıyor. Ayrıca silindirik koordinatlardaki birim vektörler kartezyen koordinatlardaki birim vektörler cinsinden;

$$\begin{aligned} e_r &= \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j} \\ e_\theta &= -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j} \\ e_z &= \mathbf{k} \end{aligned} \tag{73}$$

şeklinde verilir.

Akış hem dönme hem de eksenel yönde olduğundan  $u_r = 0$ 'dır. O halde  $V = u_r e_r + u_\theta e_\theta + u_z e_z = u_\theta e_\theta + u_z e_z$ 'dir. Dönme yönünde akış Couette tipi akış olduğundan dönme yönünde hız bileşeni  $u_\theta = (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) (\frac{1}{r} - r)$  şeklindedir. Aynı zamanda eksenel yönde basınç gradyenli akış, Poiseuille akışı olduğundan eksenel yöndeki hız bileşeni  $u_z(r) = -\frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - r^2 + \frac{1 - (\frac{r_i}{r_o})^2}{\ln(\frac{r_o}{r_i})} \ln(r) \right)$  şeklinde verilir. Bu hız profili, basınç gradyenin olduğu, dış ve iç çeperde parçacık hızlarının kaymama koşulundan dolayı sıfır olduğu model için alınan hız profilidir. Modelde boru yatay olarak düşünülmektedir. O halde;



$$\begin{aligned}
V &= u_\theta e_\theta + u_z e_z = u_\theta (-\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}) + u_z \mathbf{k} \\
&= (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) \left( \frac{1}{r} - r \right) \left( -\frac{y}{r} \mathbf{i} + \frac{x}{r} \mathbf{j} \right) - \dots \\
&\quad \dots - \frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - r^2 + \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln(r) \right) \mathbf{k} \\
&= (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) \left( -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} \right) - \dots \\
&\quad \dots - \frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - x^2 - y^2 + \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \right) \mathbf{k} \\
&= (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) \left( \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - x \right) \mathbf{j} \right) - \dots \tag{74} \\
&\quad \dots - \frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - x^2 - y^2 + \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \right) \mathbf{k} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}
\end{aligned}$$

Hız bileşenini kartezyen koordinatlarda ifade ettik. Bu durumda (4) denklemindeki  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  ifadesi yerine bu modelde eksenal hız profili ve dönme yönünde hız profilinden oluşan ifadeyi alabiliriz.  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  olması durumunda denklem;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) + (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) &= \mathbf{V}(\mathbf{x}) - \varepsilon g_0 \mathbf{j} \\
\varepsilon(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) + (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) &= (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) \left( \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - x \right) \mathbf{j} \right) - \dots \\
&\quad \dots - \frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - x^2 - y^2 + \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln(x^2 + y^2) \right) \mathbf{k} - \varepsilon g_0 \tag{75}
\end{aligned}$$

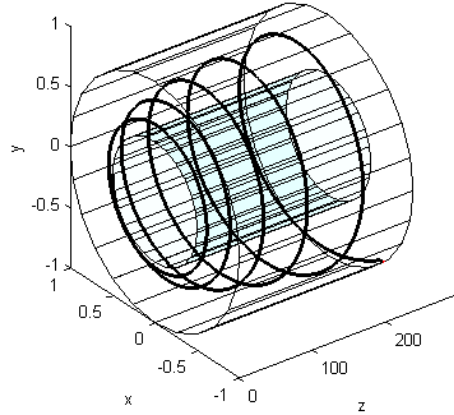
ve buradan,

$$\begin{aligned}
\varepsilon \ddot{x} + \dot{x} &= (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\
\varepsilon \ddot{y} + \dot{y} &= (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - x \right) - \varepsilon g_0 \tag{76} \\
\varepsilon \ddot{z} + \dot{z} &= -\frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - x^2 - y^2 + \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \right)
\end{aligned}$$

olmak üzere üç denklem karşımıza çıkar. Bu denklemleri diferansiyel denklem sistemlerine dönüştürebiliriz.  $x = u_1, \dot{x} = u_2, y = u_3, \dot{y} = u_4, z = u_5, \dot{z} = u_6$  alırsak denklem sistemimiz  $u_1(0) = x(0), u_2(0) = \dot{x}(0), u_3(0) = y(0), u_4(0) = \dot{y}(0), u_5(0) = z(0), u_6(0) = \dot{z}(0)$  başlangıç şartlarına göre,

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_1 &= u_2 \\
 \dot{u}_2 &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) \left( u_3 - \frac{u_3}{u_1^2 + u_3^2} \right) - u_2 \right] \\
 \dot{u}_3 &= u_4 \\
 \dot{u}_4 &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ (r_i r_o / (r_o^2 - r_i^2)) \left( \frac{u_1}{u_1^2 + u_3^2} - u_1 \right) - u_4 \right] - g_0 \\
 \dot{u}_5 &= u_6 \\
 \dot{u}_6 &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ -\frac{\mu^*}{4} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - u_1^2 - u_3^2 + \frac{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln(u_1^2 + u_3^2) \right) - u_6 \right]
 \end{aligned} \tag{77}$$

şeklinde olacaktır. Bu sistem parçacığın iç silindirin üzerinden başlayarak dış silindire ulaşınca kadar dönme yönü ve aksenal yönde izlediği yörüngeyi verir. Bazı parametreler altında yörünge grafiği Şekil 81'de verilmektedir.  $\omega, a_p$  ve  $\mu_f$  parametrelerine göre modelimizi oluşturalım.



Şekil 81.  $\omega = 10, a_p = 0.001, \mu_f = 0.05, \partial P / \partial z = -1$  parametreleri için parçacık yörüngesi

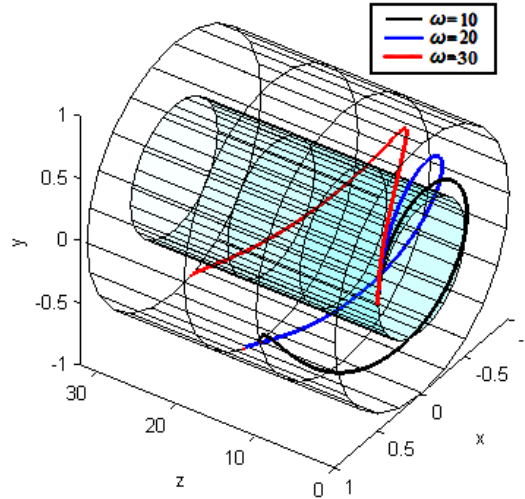
Matlab'de, plot3 komutu ile parçacığın iç silindirden dış silindire ulaşınca kadar izlemiş olduğu parçacık yörüngesini grafik ortamına aktarıyoruz. Bu modele göre farklı parametreler için parçacık yörüngelerini bulmaya çalışalım:

### 2.3.2. Tek Parametreye Göre Kalitatif Analiz

Bu kısımda  $\omega, \mu_f, \partial P/\partial z$  ve  $m$  parçacık kütle parametre değerlerine göre parametre analizleri yapılacaktır.

#### 2.3.2.1. Parçacık Yörüngesinin $\omega$ Hızına Göre Değişimi

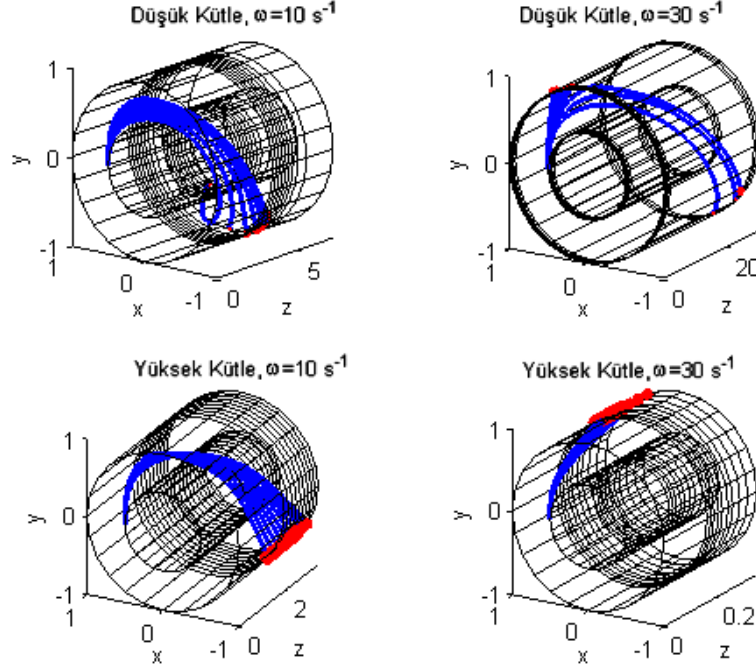
Bu bölümde amacımız farklı hız parametreleri için parçacıkların yörüngelerini incelemektir.  $L = 30m$  uzunluğundaki bir boru için  $\omega = 10, 15, 20, 25$  ve  $30$  açısal hız değerleri için modeli test edelim. Akışkan viskozitesi  $\mu_f = 0.05$ , basınç gradyeni  $\partial P/\partial z = -1$  ve parçacık yarıçapı  $a_p = 0.002$  parametreleri ve diğer tüm değerler sabit olduğu durumda değişik açısal hızlarda parçacığın iç silindirden dış silindire ulaşmaya kadar izleyeceği yörüngeler hesaplanmıştır. Bu durumda açısal hız arttıkça parçacığın halkasal bölgede, silindir etrafındaki hareketinin arttığı gözlemlenmiştir. O halde silindir hızının artışı ile parçacığın dış silindire ulaştığı andaki mesafe artmaktadır. Şekil 82’de  $\omega = 10, \omega = 20$  ve  $\omega = 30$  hız parametrelerine göre yörüngeler gösterilmiştir.



Şekil 82. Farklı  $\omega$  hız,  $a_p = 0.002, \mu_f = 0.05, \partial P/\partial z = -1$  parametreleri için parçacık yörüngesi

Düşük kütle ve yüksek kütleli parçacıklarının silindir içerisindeki konumları için  $\mu_f = 0.05, \partial P/\partial z = -1$  ve  $\omega = 10, 30$  parametre değerleri için incelemeler yapılmıştır. Şekil 83’e göre düşük kütleli ve yüksek hızlı durumlarda halkasal bölgenin giriş kısmında

parçacıklar tarafından asıntı(suspended) olmaktadır. Buradan görüldüğü gibi yüksek kütleli parçacık kütlelerin halkasal bölgedeki hareketleri daha kısa sürelidir.

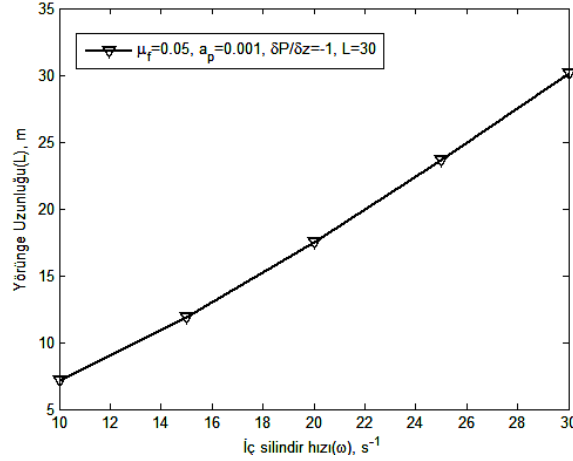


Şekil 83.  $\mu_f = 0.05$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $\omega = 10,30$  parametre değerleri için yüksek ve düşük kütleli parçacıkların halkasal bölgedeki konumları

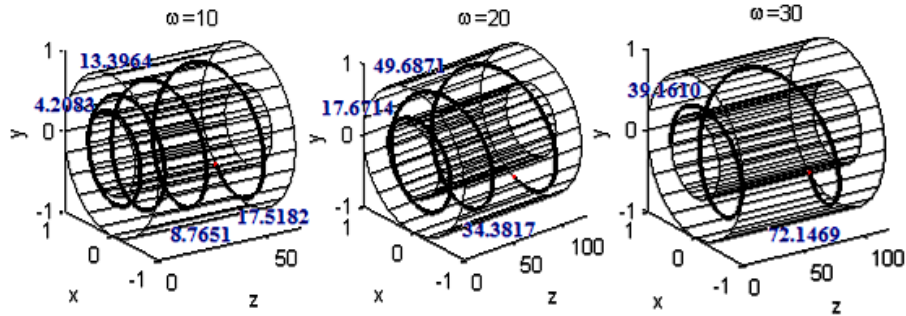
$\mu_f = 0.05$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $a_p = 0.002$  parametreleri verildiğinde farklı hızlar için hesaplanan değerler Tablo 23’de verilmiştir. Şekil 84’de ise parçacık yörünge uzunluğunun hız ile değişimi incelenmiştir ve yörünge uzunluğunun,  $\omega$  parametresi arttıkça doğrusal bir şekilde arttığı görülmüştür. Şekil 85’de  $\mu_f = 0.04$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $a_p = 0.001$  ve farklı hız parametrelerinde yörüngeler arası mesafeler ölçülmüş ve Şekil 86’da ise hız parametresinin artışıyla yörüngeler arası mesafenin de arttığı görülmüştür.

Tablo 23.  $\mu_f = 0.05$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $a_p = 0.002$  parametre değerleri ve farklı hızlara göre yörünge uzunlukları

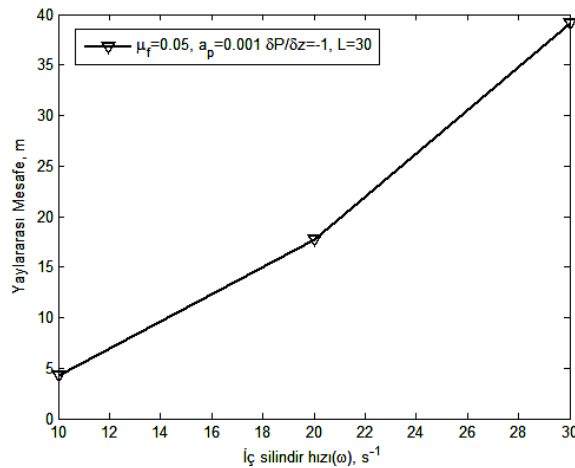
$\omega$	10	15	20	25	30
$L$	7.1632	11.9097	17.5246	23.6286	30.1085



Şekil 84.  $\mu_f = 0.05$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $a_p = 0.002$  ve farklı  $\omega$  hız parametrelerine göre yörünge uzunluk değişimi



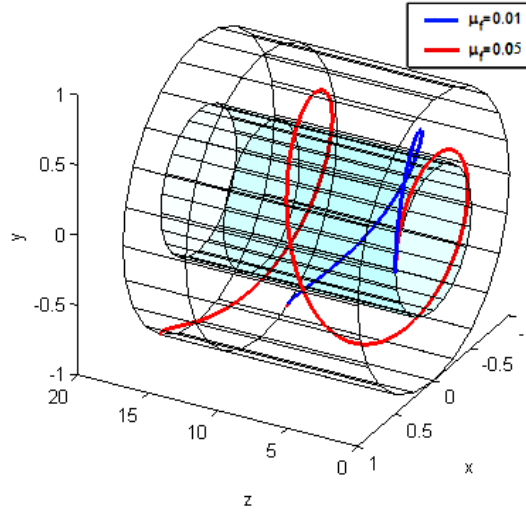
Şekil 85.  $\mu_f = 0.04$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $a_p = 0.001$  ve  $\omega$  hız parametrelerine göre yörüngeler arası mesafeler



Şekil 86.  $\mu_f = 0.04$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $a_p = 0.001$  parametreleri için yörüngeler arası mesafenin  $\omega$  hız parametresine göre değişimi

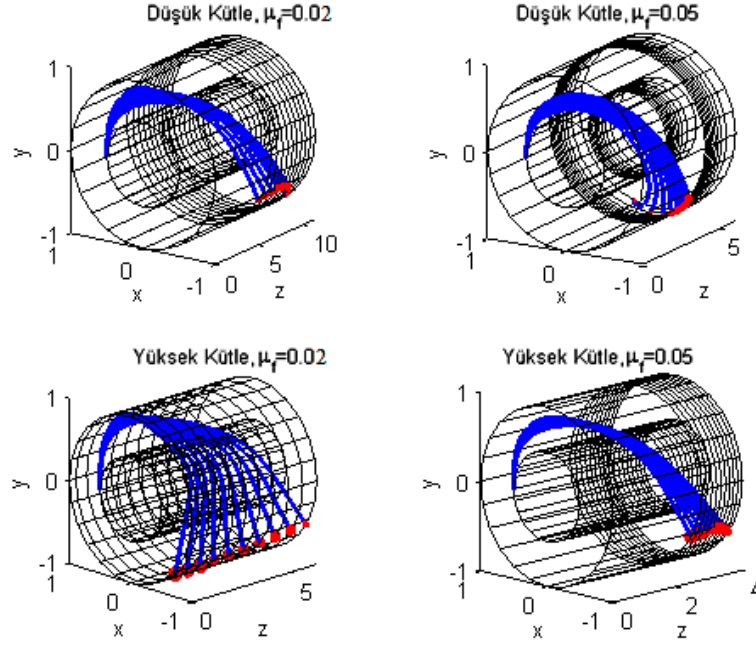
### 2.3.2.2. Parçacık Yörüngesinin $\mu_f$ Viskozitesine Göre Değişimi

Bu bölümde amacımız farklı viskozite değerleri için halkasal bölgede parçacığın yörüngesinin belirlemektir. İç silindir açısai hızı  $\omega = 10$ ,  $a_p = 0.002$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  ve boru uzunluğu  $L = 30m$  olmakla beraber diğer tüm değişkenler sabit olsun.  $\mu_f = 0.01, 0.03, 0.05, 0.07$  ve  $0.09$  viskozite değerlerine karşılık yörünge uzunlukları hesaplandığında, viskozite artışının yörünge boylarının artmasına neden olduğu görülmektedir. Akışkanın viskozitesi arttırıldığında ise viskozite arttıkça parçacığın akışa karşı gösterdiği direnç de artacaktır ve halkasal bölgede akışkan parçacığı daha yavaş hareket edecektir ve akışkanın silindirle olan hareketi daha uzun süreli olacaktır.  $\mu_f = 0.01$  ve  $\mu_f = 0.05$  viskozite değerlerine karşılık gelen yörüngeler Şekil 87'de gösterilmiştir.



Şekil 87. Farklı  $\mu_f$  viskozite,  $a_p = 0.002$ ,  $\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  parametreleri için parçacık yörüngesi

Düşük kütle ve yüksek kütleli parçacıklarının silindir içerisindeki konumları için  $\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $\mu_f = 0.02, 0.05$  parametre değerleri için incelemeler yapılmıştır. Şekil 88'e göre büyük kütleli ve yüksek viskoziteli durumlarda halkasal bölgede parçacıklar tarafından asıntı yatağı oluşabilmektedir. Yüksek kütleli parçacıklar, düşük viskozitede halkasal bölgede farklı konumlara düşmektedirler.

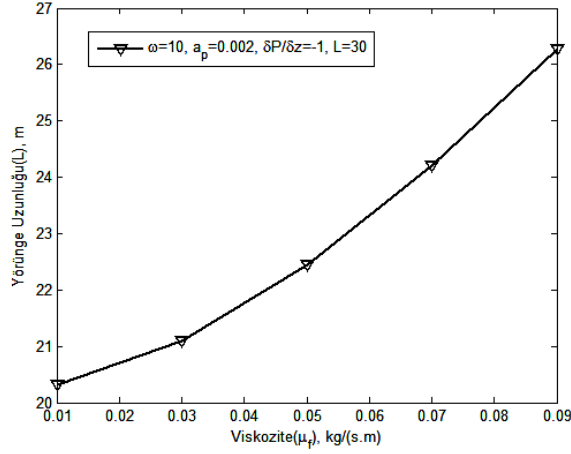


Şekil 88.  $\omega = 10, \partial P/\partial z = -1$  ve  $\mu_f = 0.02, 0.05$  parametre değerleri için yüksek ve düşük kütleli parçacıkların halkasal bölgedeki konumları

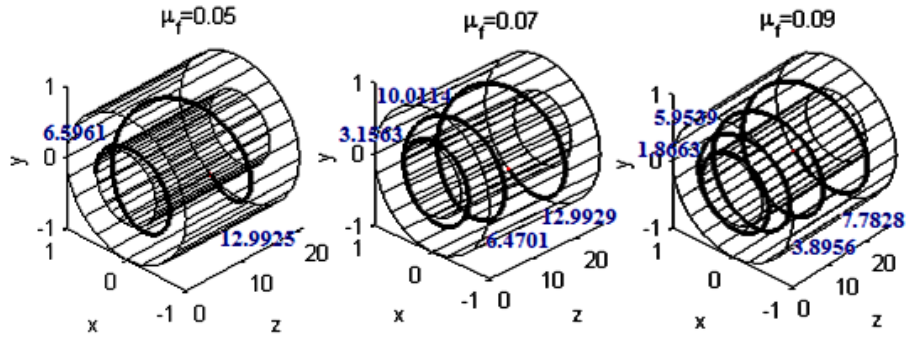
$\omega = 10, a_p = 0.002, \partial P/\partial z = -1$  parametre değerlerine karşılık hesaplanan değerler Tablo 24’de verilmiştir. Şekil 89’da ise yörünge uzunluğunun viskozite ile değişimi verilmektedir ve yörünge uzunluğu viskozite artarken arttığı görülmüştür. Şekil 90 ve Şekil 91’da  $\omega = 10, a_p = 0.0015, \partial P/\partial z = -1$  parametreleri için yörüngeler arası mesafenin viskoziteye göre değişimi incelenmiştir ve viskozite artışıyla beraber yörüngeler arası mesafenin doğrusal olmayacak şekilde azaldığı görülmektedir.

Tablo 24.  $\omega = 10, a_p = 0.002, \partial P/\partial z = -1$  parametre değerleri ve farklı viskoziteler için yörünge uzunlukları

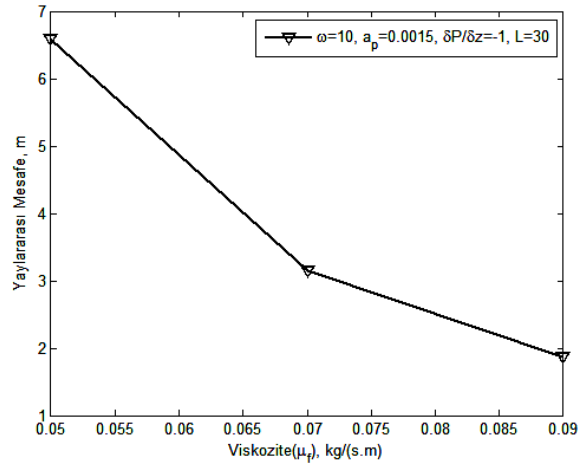
$\mu_f$	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
<b>L</b>	20.3172	21.0899	22.4504	24.2101	26.2812



Şekil 89.  $\omega = 10, a_p = 0.002, \partial P/\partial z = -1$  ve farklı  $\mu_f$  viskozite parametrelerine göre yörünge uzunluk değişimi



Şekil 90.  $\omega = 10, a_p = 0.0015, \partial P/\partial z = -1$  ve farklı  $\mu_f$  parametrelerine göre yörüngeler arası mesafenin incelenmesi

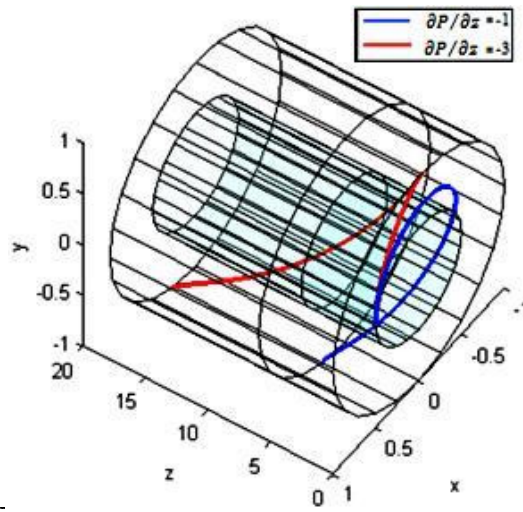


Şekil 91.  $\omega = 10, a_p = 0.0015, \partial P/\partial z = -1$  ve farklı  $\mu_f$  parametresine göre yörüngeler arası mesafenin değişimi



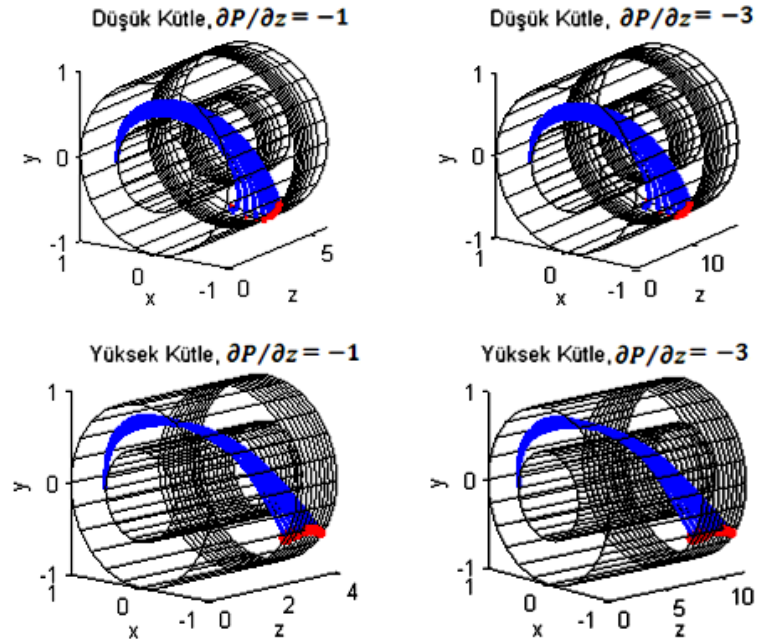
### 2.3.2.3. Parçacık Yörüngesinin $\partial P/\partial z$ Basınç Gradyenine Göre Değişimi

Bu bölümde farklı basınç gradyeni değerleri için halkasal bölgedeki parçacık yörüngeleri belirlenecektir. Basınç gradyenin yörüngelere üzerindeki etkisi için,  $\partial P/\partial z = -1, -2, -3, -4, -5$  değerlerine karşılık gelen yörünge uzunlukları  $a_p = 0.002, \mu_f = 0.05, L = 30, \omega = 10$  parametrelerine göre hesaplanmış ve tabloda bu değerler verilmiştir. Şekil 92’de  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $\partial P/\partial z = -3$  basınç gradyenindeki artış parçacık yörünge uzunluklarını arttırmaktadır.



Şekil 92.  $\partial P/\partial z$  basınç gradyeni,  $a_p = 0.002, \omega = 10, \mu_f = 0.05$  parametreleri için yörüngeler

Düşük kütle ve yüksek kütleli parçacıklarının silindir içerisindeki konumları için  $\omega = 10, \mu_f = 0.05$  ve  $\partial P/\partial z = -1, -3$  parametre değerleri için incelemeler yapılmıştır. Şekil 93’e göre düşük kütleli parçacıklar bu parametre değerlerinde halkasal bölgede asıntı yatağı oluşturabilmektedir. Yüksek kütleli parçacıklar ise dış silindirin farklı konumlarına hareket etmektedir. Buradan görüldüğü gibi parçacığın hareketi basınç gradyeni ile doğrusal bir şekilde değişmektedir.

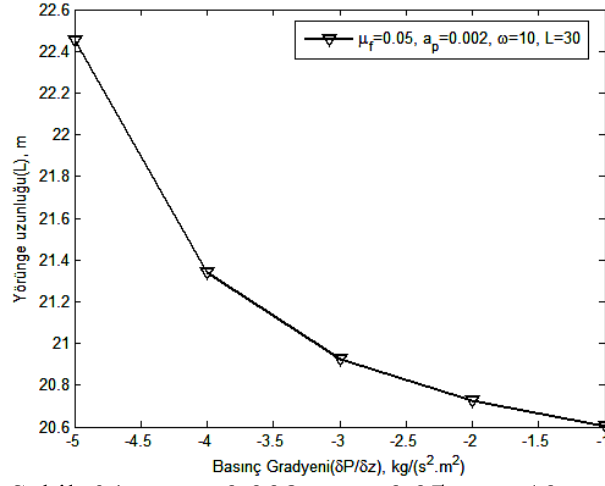


Şekil 93.  $\omega = 10, \mu_f = 0.05$  ve  $\partial P/\partial z = -1, -3$  parametre değerleri için yüksek ve düşük kütleli parçacıkların halkasal bölgedeki konumları

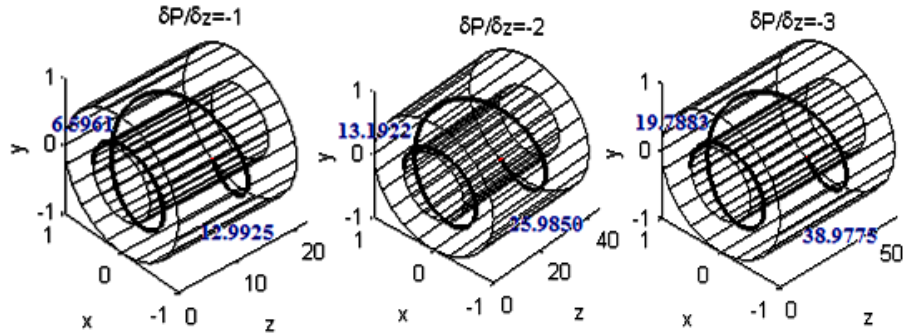
$a_p = 0.002, \mu_f = 0.05, \omega = 10$  parametreleri için farklı basınç gradyenlerinde hesaplanan değerler Tablo 25’de verilmiştir. Şekil 94’e göre yörünge uzunluğu basınçla beraber artmaktadır. Şekil 95’de  $a_p = 0.0015, \mu_f = 0.05, \omega = 10$  parametre değerleri için basınç gradyenin yörüngeler arası mesafe olan etkisi incelenmiştir ve Şekil 96’ya göre yörüngeler arası mesafenin basınçla doğru orantılı olarak arttığı görülmüştür.

Tablo 25.  $a_p = 0.002, \mu_f = 0.05, \omega = 10$  parametre değerleri ve farklı basınç gradyeni değerlerine göre yörünge uzunlukları

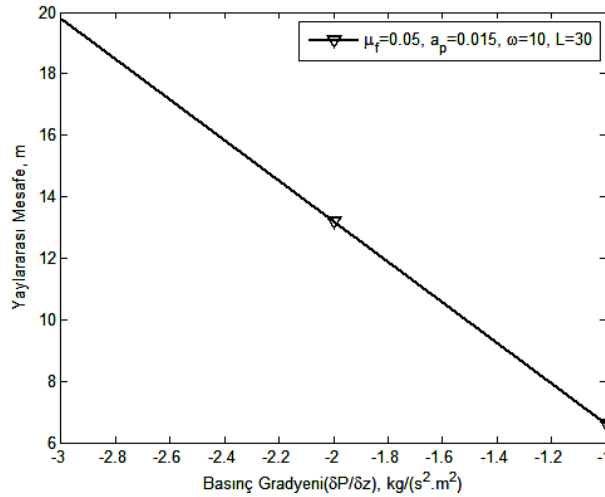
$\partial P/\partial z$	-1	-2	-3	-4	-5
<b>L</b>	<b>20.6048</b>	<b>20.7263</b>	<b>20.9273</b>	<b>21.3423</b>	<b>22.4504</b>



Şekil 94.  $a_p = 0.002, \mu_f = 0.05, \omega = 10$  parametreleri ve  $\partial P/\partial z$  basınç gradyeniye göre yörünge uzunluk değişimi



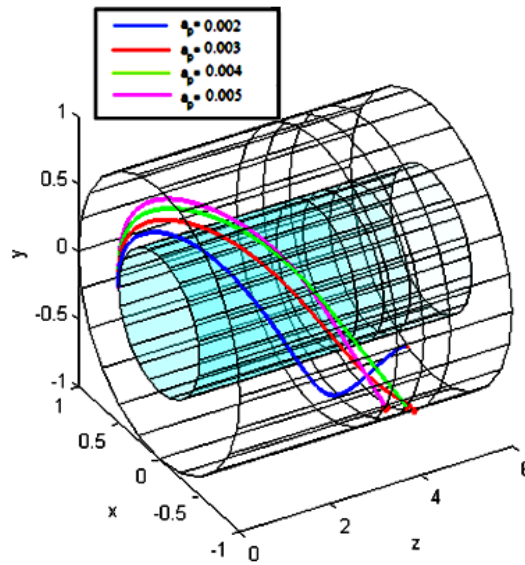
Şekil 95.  $a_p = 0.0015, \mu_f = 0.05, \omega = 10$  ve  $\partial P/\partial z$  basınç gradyeni parametrelerine göre yörüngeler arası mesafenin incelenmesi



Şekil 96. Yörüngeler arası mesafenin  $a_p = 0.0015, \mu_f = 0.05, \omega = 10$  ve farklı  $\partial P/\partial z$  parametrelerine göre değişimi

### 2.3.2.4. Parçacık Yörüngesinin $m$ Kütlesine Göre Değişimi

Bu kısımda amacımız farklı kütle değerleri için halkasal bölgedeki parçacık hareketini belirlemektir. Parçacık kütesinin yörüngelere üzerindeki etkisi için,  $a_p = 0.001, 0.002, 0.003, 0.004$  ve  $0.005$  değerlerine karşılık gelen yörünge uzunlukları  $\partial P/\partial z = -1, \mu_f = 0.05, \omega = 10, L = 20$  parametrelerine göre hesaplanmış ve tabloda verilmiştir. Şekil 97'ye göre parçacık kütesindeki artış, yörünge uzunluklarını azaltmaktadır.

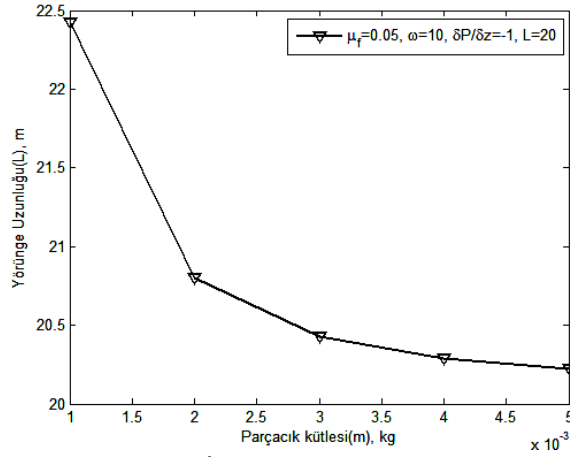


Şekil 97.  $a_p$  parçacık kütlesi,  $\partial P/\partial z = -1, \omega = 10, \mu_f = 0.05$  parametreleri için yörüngeler

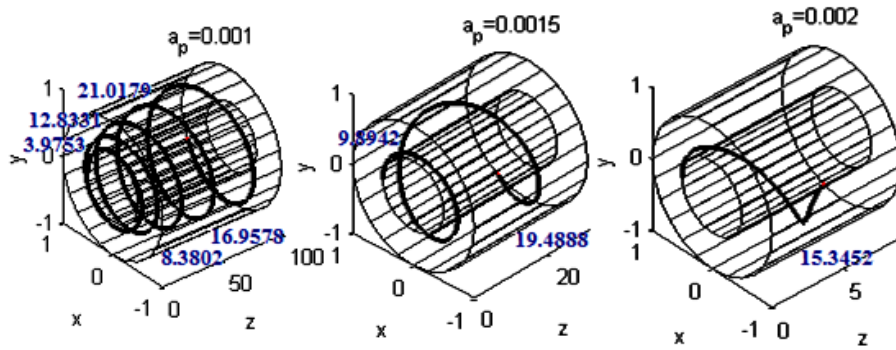
$\partial P/\partial z = -1, \mu_f = 0.05, \omega = 10$  parametreleri için hesaplanan değerler Tablo 26'da verilmiştir. Şekil 98'e göre yörünge uzunluğu parçacık kütlesi arttıkça azalmaktadır. Şekil 99'da  $\partial P/\partial z = -1, \mu_f = 0.04, \omega = 10$  parametreleri için yörüngeler arası uzaklıklar  $a_p$  parametresine göre incelenmiş ve Şekil 100'de görüldüğü gibi parçacığın yarıçapındaki artış kütledeki artışa ve bununla beraber yörüngeler arası mesafede de artışa neden olmaktadır.

Tablo 26.  $\partial P/\partial z = -1, \mu_f = 0.05, \omega = 10$  parametre değerleri ve farklı kütle değerlerine göre yörünge uzunlukları

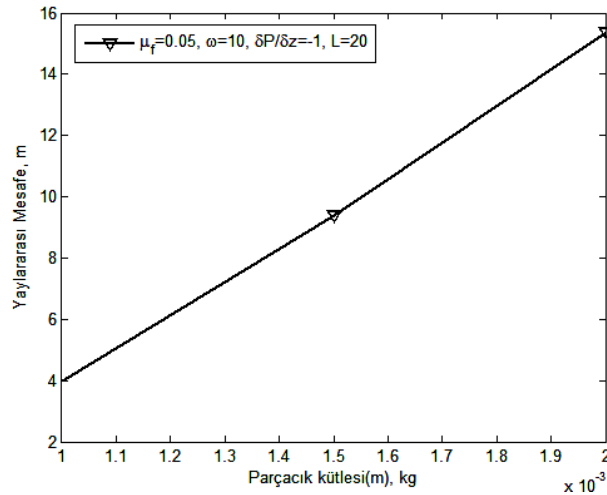
$a_p$	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005
<b>L</b>	22.4236	20.8013	20.4262	20.2884	20.2254



Şekil 98.  $\partial P/\partial z = -1, \mu_f = 0.05, \omega = 10$  parametreleri ve  $m$  parçacık kütlesine göre yörünge uzunluk değişimi



Şekil 99.  $\partial P/\partial z = -1, \mu_f = 0.05, \omega = 10$  ve  $a_p$  parametrelerine göre yörüngeler arası parametrelerin incelenmesi



Şekil 100.  $\partial P/\partial z = -1, \mu_f = 0.05, \omega = 10$  ve  $a_p$  parametresine göre yörüngeler arası mesafenin değişimi

### 2.3.3. İki-parametre Değişimine Göre Analiz

Bu modelde boru kesitinde, dönme yönünde Couette akışının ve eksenel yönde Poiseuille akışının ikisinin süperpozisyonundan oluşan bir akış ele alınmıştır. Yukarıdaki analizlere benzer iki-parametre değişimine göre incelemeler yapılabilir. Burada sistem yatay konum olarak düşünülmektedir.

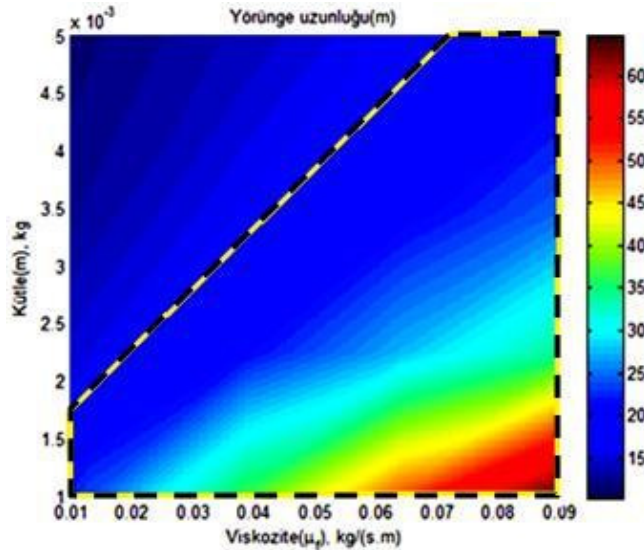
#### 2.3.3.1. Kütle ve Viskozite Değişimine Göre Yörünge Uzunlukları

Bu kısımda, viskozite ve kütle değişimine göre sabit  $\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  parametreleri ve akışkanla ilgili diğer özellikler sabit tutularak yörünge uzunlukları ve parametrelerin yörüngeler arası mesafeleri nasıl etkilediği araştırılmıştır. Yapılan testlerde akışkan parçacığın iç silindirden dış silindire kadar olan hareketinde yörüngeler arası mesafelerin devamlı arttığı gözlemlenmiştir. Bunun için iki parametre değişim analizine göre yörüngeler arası mesafelerin değişimini incelerken, parçacık yörüngesi için ilk yay arası mesafe düşünülecektir. Buna göre Şekil 101'den düşük kütle ve yüksek viskozite değerlerinde parçacık yörünge uzunluğu en büyük değerini almaktadır. Etkin parçacık taşınımı için sarı hat içerisinde verilen parametre kümesi seçilebilir. Sabit  $\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $\omega = 30$ ,  $\partial P/\partial z = -5$  parametreleri için viskozite-kütle değişimine göre elde edilen yörünge uzunlukları ve yörüngeler arası mesafeler Tablo 27 ve Tablo 28'de verilmiştir.

Tablo 27. Yatay borularda ( $L = 20m$ ),  $\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  için  $m - \mu_f$  değişimi

$\mu_f \backslash m$		$m$				
		0.001	0.002	0.003	0.004	0.005
0.01	YU	12.9078	11.0110	10.5501	10.3681	10.2823
	YAU	1.8840	7.6092	-	-	-
0.03	YU	24.0920	15.4057	13.0005	11.9788	11.4160
	YAU	0.2088	0.8383	1.8964	3.3957	5.3514
0.05	YU	37.1788	21.1809	16.4111	14.2707	13.0917
	YAU	0.0752	0.3012	0.6801	1.2145	1.9081
0.07	YU	50.7946	27.5489	20.3215	16.9857	15.1164
	YAU	0.0383	0.1536	0.3464	0.6178	0.9693
0.09	YU	64.6163	34.2014	24.5384	19.9692	17.3822
	YAU	0.0232	0.0929	0.2093	0.3731	0.5849

YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik

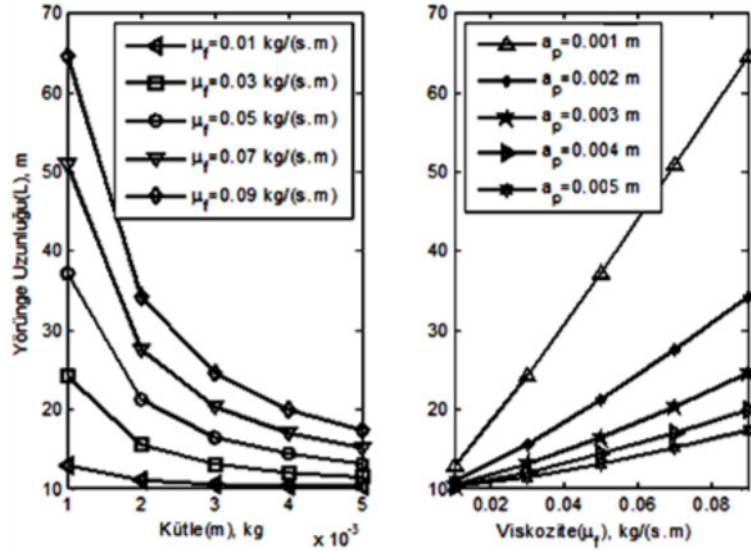


Şekil 101.  $\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  için viskozite ve kütleyle göre iki-parametre değişimi

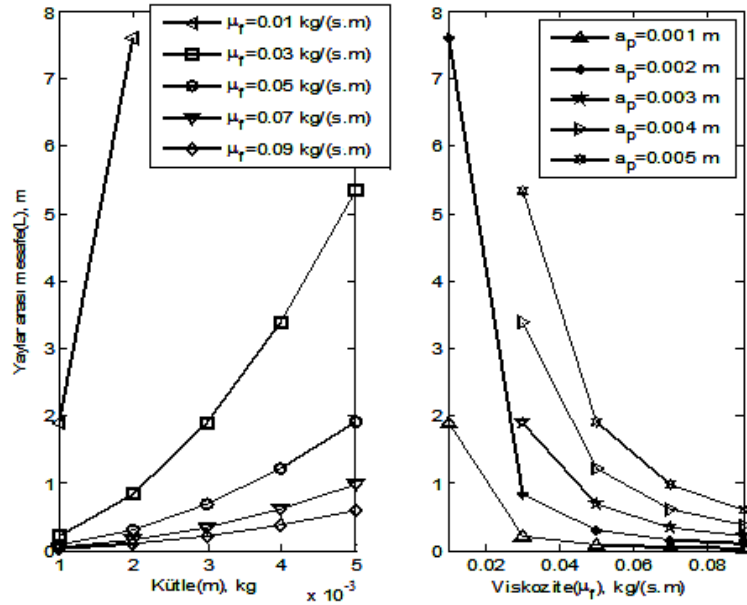
Şekil 102'ye göre  $\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  parametreleri için viskozite ve kütlelenin yörünge uzunluğuna etkisi incelenmiş ve herhangi bir kütledeki parçacık uzunluğu viskozite parametresiyle doğrusal olarak artar. Yüksek kütlelerde ise yörünge uzunluk artışı daha azdır. Tüm incelemelerde parçacık yörüngesi yörüngeler arası mesafenin arttığı gözlemlenmiştir. Parametrelere göre bunu incelerken ilk yay mesafe uzunluğu alınarak irdeleme yapılmıştır. Şekil 103'e göre yörüngeler arası mesafe farklı kütleler için viskoziteyle azalmaktadır ve farklı viskoziteler için kütle arttıkça yörüngeler arası mesafe artmaktadır. Düşük kütle ve düşük viskozitede bu artış en üst seviyede olduğu



görülmektedir. Düşük viskozite değerlerinde farklı kütlelerin parçacık yörüngesi üzerinde herhangi bir etkisi yoktur. Farklı kütlelerin yörüngeler arası mesafesi yüksek viskozitede hemen hemen aynıdır.



Şekil 102.  $\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  için kütle ve viskoziteye göre yörünge uzunlukları



Şekil 103.  $\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  için viskozite ve kütleye göre yörüngeler arası mesafeler

Yüksek hız ve yüksek basınç parametresi olarak,  $\omega = 30$ ,  $\partial P/\partial z = -5$  parametrelerine göre inceleme yapılmıştır ve sonuç olarak önceki analizden farklı olarak

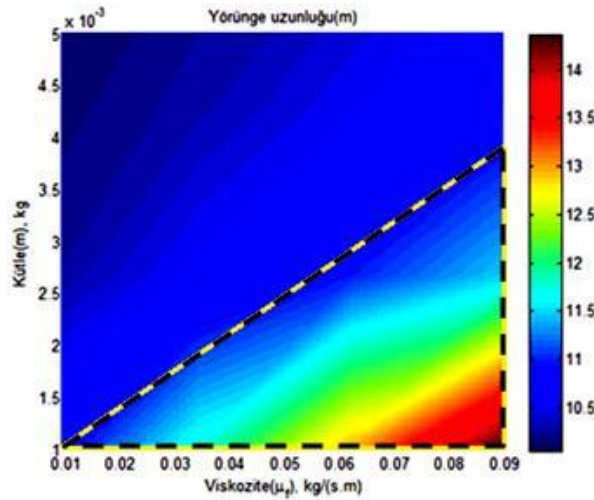


yörünge uzunlukları en düşük seviyede değerler almaktadır. Yani, yüksek hız ve yüksek basınçta akışkan yörünge uzunlukları önemli derecede azalmaktadır. Şekil 104'den yüksek kütleli parçacık hareketinde viskoziteye göre parçacık yörünge uzunluğunda önemli bir değişiklik yoktur. En uzun yörünge uzunlukları yüksek viskozitede meydana gelmektedir. Sonuç olarak bu parametre değerleri için etkin parçacık taşınımı için sarı çerçeve içerisinde belirtilen parametreler kümesi tercih edilmelidir.

Tablo 28. Yatay borularda ( $L = 20m$ ),  $\omega = 30$ ,  $\partial P/\partial z = -5$  için  $m - \mu_f$  değişimi

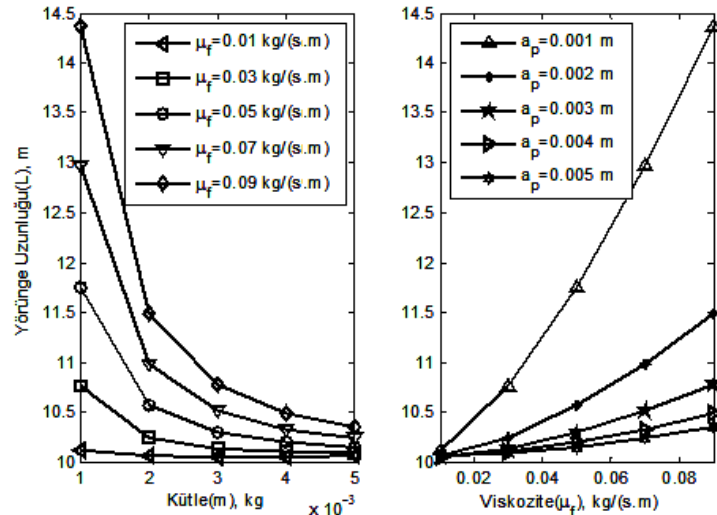
$\mu_f$ \ m		0.001	0.002	0.003	0.004	0.005
0.01	YU	10.1209	10.0552	10.0520	10.0514	10.0607
	YAU	-	-	-	-	-
0.03	YU	10.7554	10.2415	10.1363	10.1017	10.0912
	YAU	10.1294	-	-	-	-
0.05	YU	11.7425	10.5642	10.2944	10.1941	10.1493
	YAU	3.6415	-	-	-	-
0.07	YU	12.9668	10.9832	10.5090	10.3246	10.2358
	YAU	1.8568	7.4598	-	-	-
0.09	YU	14.3660	11.4819	10.7704	10.4856	10.3448
	YAU	1.1229	4.5071	10.1947	-	-

YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik

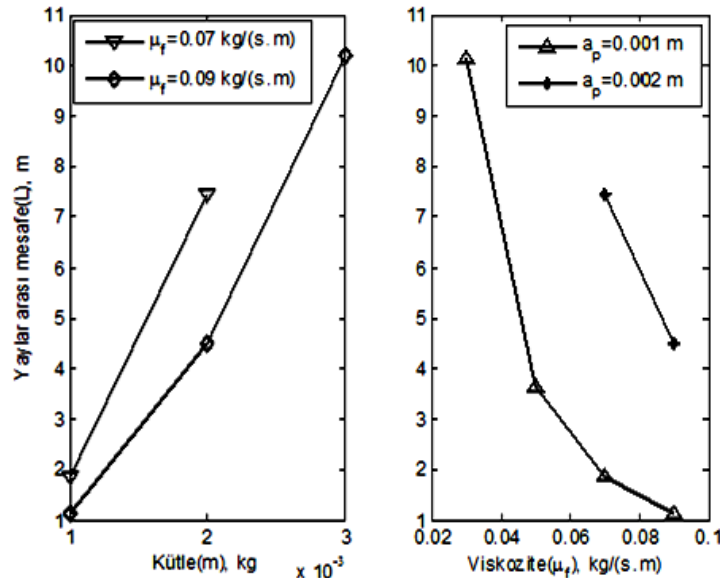


Şekil 104.  $\omega = 30$ ,  $\partial P/\partial z = -5$  için viskozite ve kütleye göre iki-parametre değişimi

Şekil 105'den düşük viskozite değerinde kütlelerin varlığı yörünge uzunluğuna önemli bir etki yapmaz. Şekil 105'den görüldüğü gibi düşük parçacık kütleleri yüksek viskozitede daha uzun mesafeli yörüngeyi izlerler. Tablo değerlerinden ve Şekil 106'den anlaşıldığı gibi borunun  $L = 20m$ 'lik kısmında bu parametrelere göre yörüngeler arası mesafeler sadece düşük kütleli parçacık hareketinde hesaplanabilmektedir.



Şekil 105.  $\omega = 30$ ,  $\partial P/\partial z = -5$  için viskozite ve kütleye göre yörünge uzunlukları



Şekil 106.  $\omega = 30$ ,  $\partial P/\partial z = -5$  için viskozite ve kütleye göre yörüngeler arası mesafeler

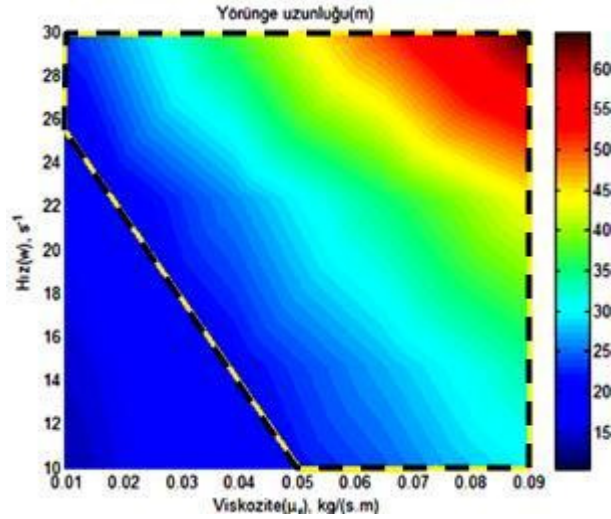
### 2.3.3.2. Hız ve Viskozite Değişimine Göre Yörünge Uzunlukları

Bu kısımda, düşük kütle ve basınç parametreleri altında yörünge uzunlukları ve yörünge hareketinde yörüngeler arası mesafeler irdelenmiştir. Şekil 107'den yüksek hızlarda yörünge uzunlukları maksimum seviyedir ve viskozite artışıyla beraber yörünge uzunlukları da artar. Sonuç olarak sabit bir hız değeri verildiğinde seçilecek viskozite değerleri veya sabit viskozitede iç silindirin dönme hızını belirleyecek parametreler kümesi sarı çerçeve içerisinde verilmiştir. Sabit viskozitede iç silindir hızındaki artış yörünge uzunluğunu arttırmaktadır. Sabit  $a_p = 0.001, \partial P/\partial z = -1$  ve  $a_p = 0.005, \partial P/\partial z = -5$  parametreleri için viskozite-hız değişimine göre elde edilen yörünge uzunlukları ve yörüngeler arası mesafeler Tablo 29 ve Tablo 30'da verilmiştir.

Tablo 29. Yatay borularda ( $L = 20m$ ),  $a_p = 0.001, \partial P/\partial z = -1$  için  $\omega - \mu_f$  değişimi

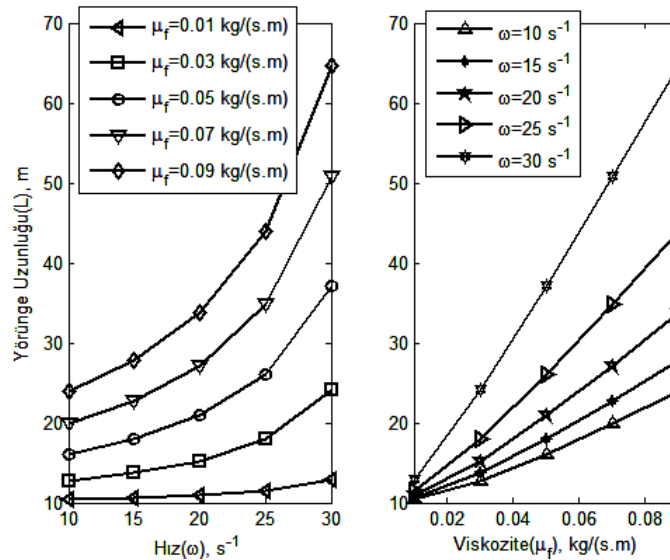
$\omega$		$\mu_f$		10	15	20	25	30
		YU	YAU					
0.01	YU	10.4698	10.6388	10.9292	11.5038	12.9078		
	YAU	1.8840	4.4457	8.0412	-	-		
0.03	YU	12.8021	13.7237	15.2287	17.9881	24.0920		
	YAU	0.2088	0.4923	0.8895	1.4006	2.0259		
0.05	YU	16.0953	17.9534	20.9106	26.1347	37.1788		
	YAU	0.0752	0.1771	0.3199	0.5036	0.7283		
0.07	YU	19.8927	22.7374	27.1828	34.8770	50.7946		
	YAU	0.0383	0.0903	0.1632	0.2568	0.3714		
0.09	YU	23.9805	27.8173	33.7432	43.8811	64.6163		
	YAU	0.0232	0.0546	0.0987	0.1553	0.2246		

YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik

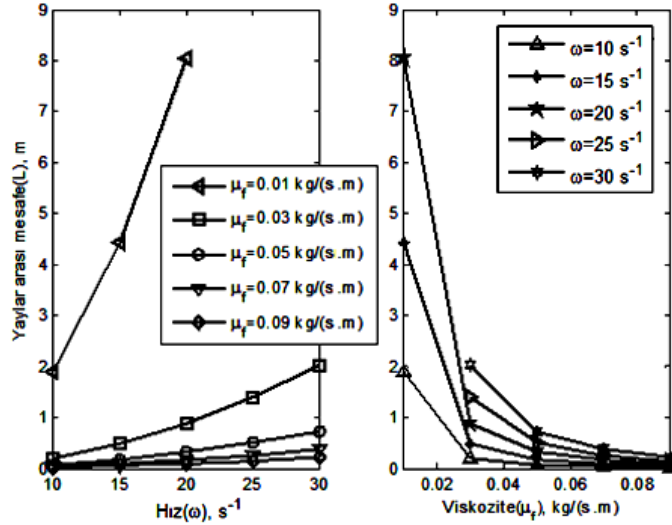


Şekil 107.  $a_p = 0.001$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  için viskozite ve hıza göre iki-parametre değişimi

Şekil 108'den farklı viskoziteler altında hızın artışı ile yörünge uzunlukları doğrusal olmayacak şekilde artmaktadır. Farklı hız değerleri için ise viskozite artışı ile yörünge uzunlukları doğrusal bir şekilde artmaktadır. Şekil 109'dan farklı hız değerleri için viskozite artışıyla yörüngeler arası mesafeler azalmaktadır. Düşük viskozitede hızın artışıyla yörüngeler arası mesafeler önemli derecede değişir. Yüksek viskozitede, yörüngeler arası mesafenin hız ile olan değişimi önemli derecede değildir.



Şekil 108.  $a_p = 0.001$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  için viskozite ve hıza göre yörünge uzunlukları



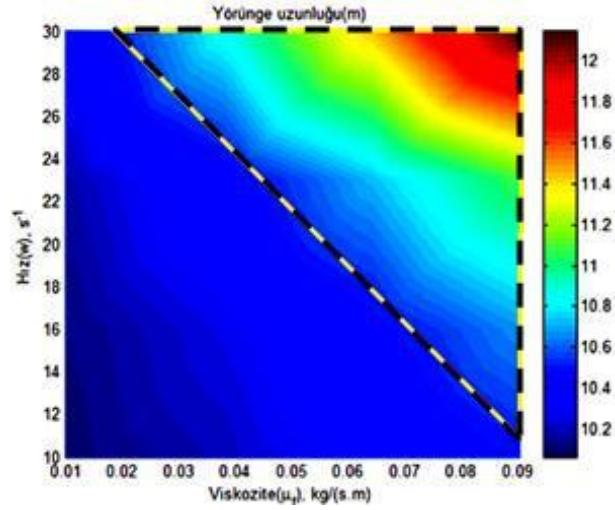
Şekil 109.  $a_p = 0.001, \partial P/\partial z = -1$  için viskozite ve hıza göre yörüngeler arası mesafeler

Yüksek kütle ve yüksek basınç gradyeninde yörünge uzunlukları minimum değerlerini alırlar. Şekil 110'a göre düşük hız ve düşük viskozitede yörünge uzunlukları en düşük seviyededir ve uzunluk değişimleri önemli değildir. Sonuç olarak verilen iç silindir hızında viskozite belirlenebilir. Aynı şekilde akışkanın viskozitesi biliniyorsa iç silindirin dönme hızını belirleyen parametreler kümesi de sarı hat içerisinde verilmektedir. Yüksek basınç ve yüksek kütleli parçacık hareketinde, Şekil 111'den düşük hız ve düşük viskozite değerlerinde yörünge uzunluk değişiminde önemli derecede değişiklik olmamaktadır. Şekil 112'den yüksek basınç ve yüksek kütleli parçacık durumdaki yörüngeler arası mesafeler ancak düşük hız ve yüksek viskozite değerlerinde hesaplanabilmektedir.

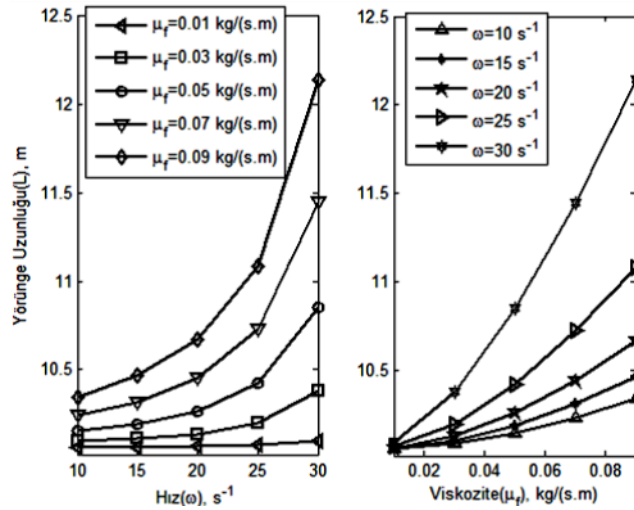
Tablo 30. Yatay borularda ( $L = 20m$ ),  $a_p = 0.005, \partial P/\partial z = -5$  için  $\omega - \mu_f$  değişimi

$\mu_f \backslash \omega$		10	15	20	25	30
0.01	YU	10.0577	10.0596	10.0627	10.072	10.0935
	YAU	-	-	-	-	-
0.03	YU	10.0912	10.1059	10.1326	10.1947	10.3812
	YAU	-	-	-	-	-
0.05	YU	10.1493	10.1905	10.2639	10.4223	10.8528
	YAU	9.5404	-	-	-	-
0.07	YU	10.2358	10.3110	10.4470	10.7241	11.4477
	YAU	4.8465	11.4718	-	-	-
0.09	YU	10.3448	10.4630	10.6704	11.0843	12.1411
	YAU	2.9244	6.9168	12.5373	-	-

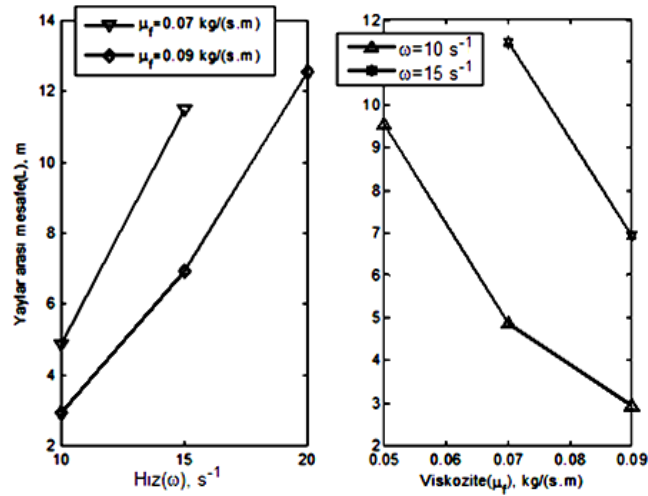
YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik



Şekil 110.  $a_p = 0.005, \partial P/\partial z = -5$  için viskozite ve hıza göre iki-parametre değişimi



Şekil 111.  $a_p = 0.005, \partial P/\partial z = -5$  için viskozite ve hıza göre yörünge uzunlukları



Şekil 112.  $a_p = 0.005, \partial P/\partial z = -5$  için viskozite ve hıza göre yörüngeler arası mesafeler



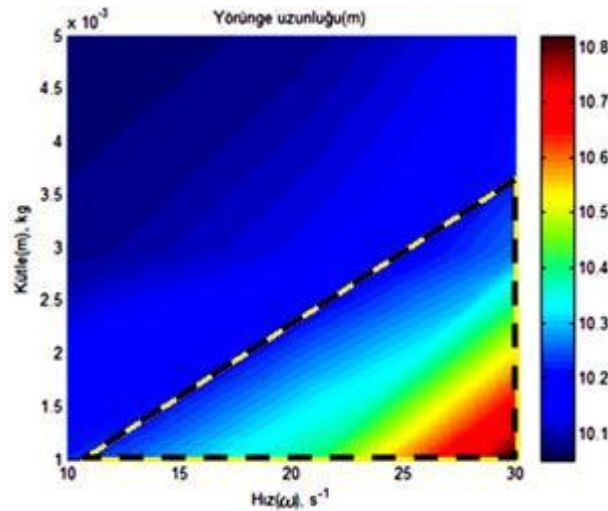
### 2.3.3.3. Hız ve Kütle Değişimine Göre Yörünge Uzunlukları

Düşük viskozite ve yüksek basınç parametreleri altında akışkan yörünge uzunlukları incelendiğinde Şekil 113'den düşük kütle ve yüksek hızda yörünge uzunlukları en büyük değerde olup, düşük hız ve yüksek kütleli parametre değerlerinde uzunluk değişimleri önemli derecede değildir. Sonuç olarak herhangi bir parçacık kütesinin etkin taşınımı için gerekli hızların kümesi sarı çerçeve ile belirtilmiştir. Sabit  $\mu_f = 0.01, \partial P/\partial z = -5$  ve  $\mu_f = 0.09, \partial P/\partial z = -1$  parametrelerine için hız-kütle değişimine göre elde edilen yörünge uzunlukları ve yörüngeler arası mesafeler Tablo 31 ve Tablo 32'de verilmiştir.

Tablo 31. Yatay borularda ( $L = 20m$ ),  $\mu_f = 0.01, \partial P/\partial z = -5$  için  $m - \omega$  değişimi

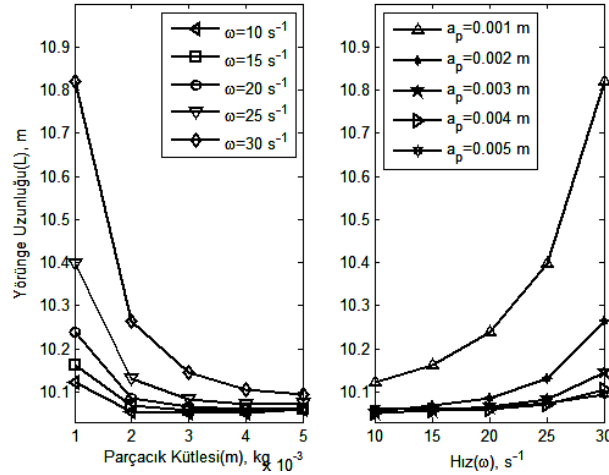
$\omega$	$m$	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005
		10	YU	10.1209	10.0552	10.0523
	YAU	9.4198	-	-	-	-
15	YU	10.1626	10.0669	10.0560	10.0557	10.0596
	YAU	-	-	-	-	-
20	YU	10.2380	10.0865	10.0654	10.0610	10.0627
	YAU	-	-	-	-	-
25	YU	10.3962	10.1310	10.0835	10.0721	10.0727
	YAU	-	-	-	-	-
30	YU	10.8202	10.2652	10.1447	10.1062	10.0935
	YAU	-	-	-	-	-

YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik



Şekil 113.  $\mu_f = 0.01, \partial P/\partial z = -5$  için hız ve kütleye göre iki-parametre değişimi

Şekil 114'den  $\mu_f = 0.01$ ,  $\partial P/\partial z = -5$  sabit değerleri altında sabit bir hız parametresine karşılık, kütlede artış ile yörünge uzunluğu doğrusal olmayacak şekilde azalmaktadır. Aynı şekilde sabit bir kütle değerinde de yörünge uzunluğu hız ile orantılı olarak doğrusal olmayacak şekilde artmaktadır. Bu parametreler altında borunun  $L = 20m$ 'lik bölümünde yörüngeler arası mesafeler arasında önemli bir hesaplama yapılamamıştır.



Şekil 114.  $\mu_f = 0.01$ ,  $\partial P/\partial z = -5$  için hız ve kütleye göre yörünge uzunlukları

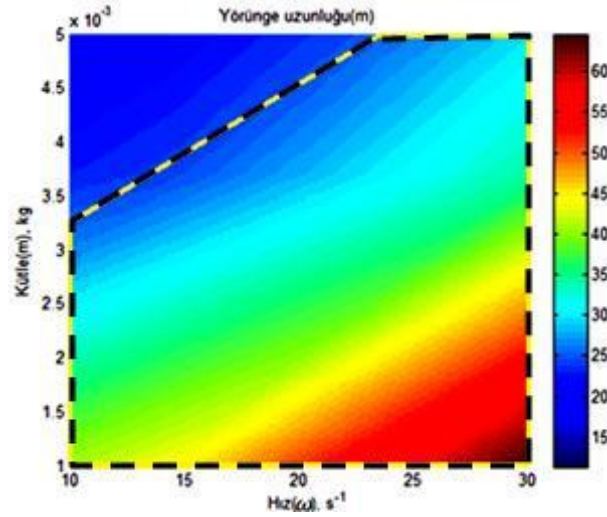
Yüksek viskozite ve düşük basınç değerinde parçacık yörünge uzunlukları hesaplandığında Şekil 115'e göre yüksek hız ve düşük kütle değerlerinde parçacık yörünge uzunluğunda önemli bir derecede artış vardır. Yüksek viskozite ve düşük basınç değerlerine göre etkin parçacık taşınım için kütle ve hızların seçimi sarı hat içerisinde belirtilmiştir.

Tablo 32. Yatay borularda ( $L = 20m$ ),  $\mu_f = 0.09$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  için  $m - \omega$  değişimi

$\omega$	$m$	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005
		YU	23.9805	15.2985	12.8956	11.8687
10	YAU	0.0232	0.0929	0.2093	0.3731	0.5849
	YU	27.8173	16.9424	13.8473	12.5004	11.7845
15	YAU	0.0546	0.2189	0.4940	0.8814	1.3834
	YU	33.7432	19.5708	15.4009	13.5497	12.5507
20	YAU	0.0987	0.3956	0.8935	1.5959	2.5075
	YU	43.8811	24.2466	18.2483	15.5090	14.0067
25	YAU	0.1553	0.6231	1.4083	2.5180	3.9596
	YU	64.6163	34.2014	24.5384	19.9692	17.3822
30	YAU	0.2246	0.9014	2.0389	3.6486	5.7417

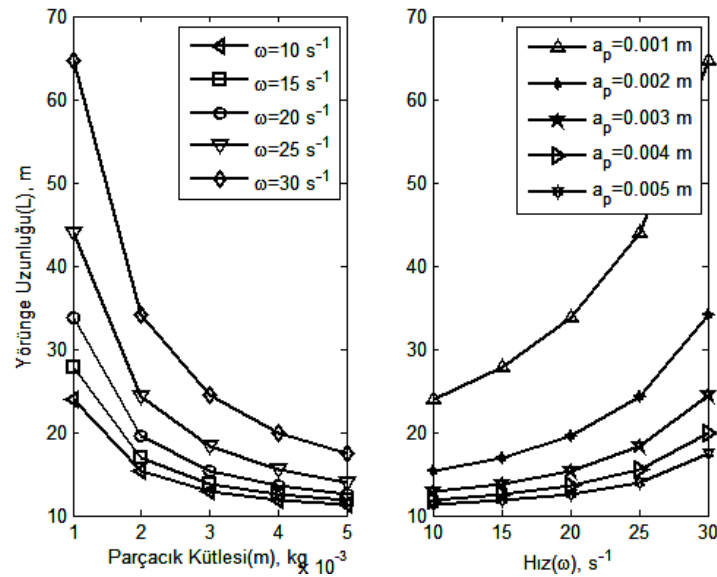
YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik



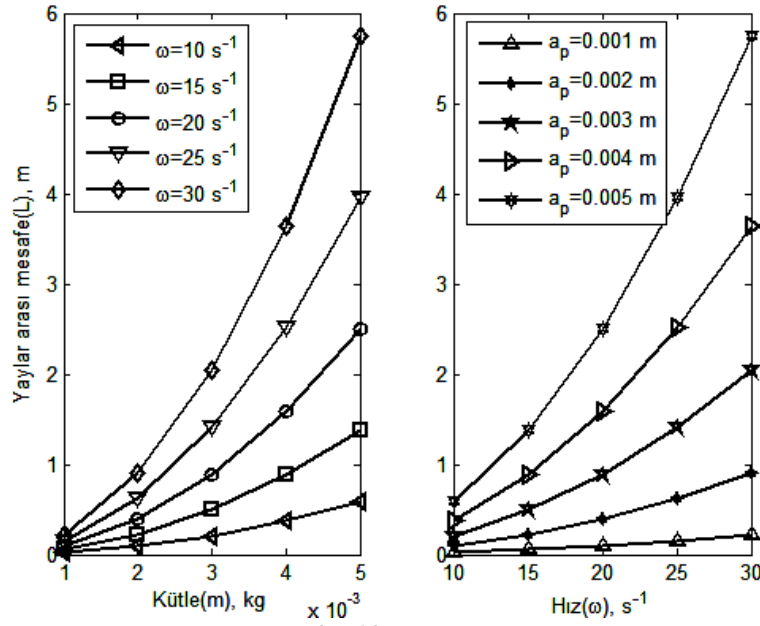


Şekil 115.  $\mu_f = 0.09$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  için hız ve kütleye göre iki-parametre değişimi

Şekil 116'dan sabit bir hız için yörünge uzunluğu kütle artışıyla beraber azalmaktadır. Parçacığın büyük değerli kütle değerlerinde yörünge uzunluk değişiklikleri önemli değildir. Sabit bir kütle parametresi altında parçacık yörünge uzunluğu hız artışıyla beraber doğrusal olmayacak şekilde artmaktadır. Şekil 117'den yörüngeler arası mesafe kütle artışıyla beraber artar. Düşük kütle değerlerinde farklı açısal hızlar için yörüngeler arası mesafeler hemen hemen aynıdır. Sabit kütle altında yörüngeler arası mesafeler hızın artışı ile beraber arttığı görülmektedir. Düşük hızlarda ise yörüngeler arası mesafeler en küçük değerlerini almaktadır.



Şekil 116.  $\mu_f = 0.09$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  için hız ve kütleye göre yörünge uzunlukları



Şekil 117.  $\mu_f = 0.09$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  için hız ve kütleye göre yörüngeler arası mesafeler

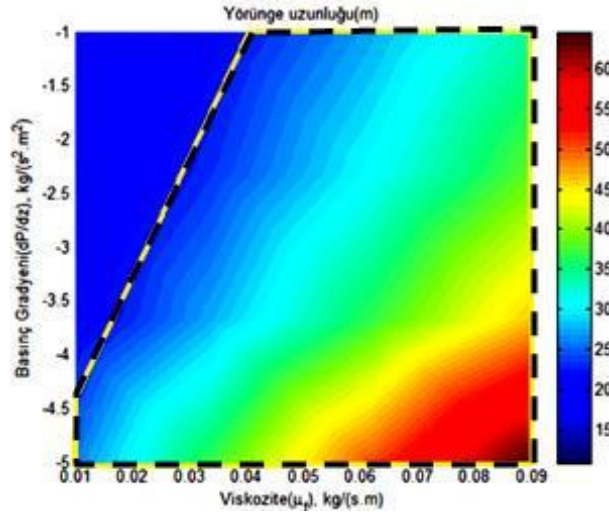
#### 2.3.3.4. Basınç Gradyeni ve Viskozite Değişimine Göre Yörünge Uzunlukları

Bu kısımda sabit düşük hız ve düşük kütle parametresine göre parçacık için testler yapılmıştır. Buna göre Şekil 118'den yörünge uzunluğu, viskozite artışıyla ve basınç gradyenindeki artışla orantılı olarak artmaktadır. Düşük viskozitede ve düşük basınç gradyeninde parçacığın halkasal bölgede izleyeceği yörünge mesafesi daha azdır. Parçacıkların etkin taşınımı için sarı çerçeve içerisindeki parametreler kümesi dikkate alınmalıdır. Sabit  $\omega = 10$ ,  $a_p = 0.001$  ve  $\omega = 30$ ,  $a_p = 0.005$  parametreleri için viskozite-basınç değişimine göre elde edilen yörünge uzunlukları ve yörüngeler arası mesafeler Tablo 33 ve Tablo 34'de verilmiştir.

Tablo 33. Yatay borularda ( $L = 20m$ ),  $\omega = 10$ ,  $a_p = 0.001$  için  $\partial P/\partial z - \mu_f$  değişimi

$\mu_f$		$\frac{\partial P}{\partial z}$		-1	-2	-3	-4	-5
		YU	YAU					
0.01	YU			10.8202	10.9810	11.2360	11.7080	12.9078
	YAU			1.8840	3.7679	5.6519	7.5358	9.4198
0.03	YU			14.4761	15.2766	16.5168	18.7172	24.0920
	YAU			0.2088	0.4177	0.6265	0.8354	1.0442
0.05	YU			19.3423	20.9148	23.2885	27.4246	37.1788
	YAU			0.0752	0.1503	0.2255	0.3006	0.3758
0.07	YU			24.7815	27.1398	30.6646	36.7222	50.7946
	YAU			0.0383	0.0767	0.1150	0.1533	0.1917
0.09	YU			30.5147	33.6511	38.3168	46.2750	64.6163
	YAU			0.0232	0.0464	0.0696	0.0927	0.1159

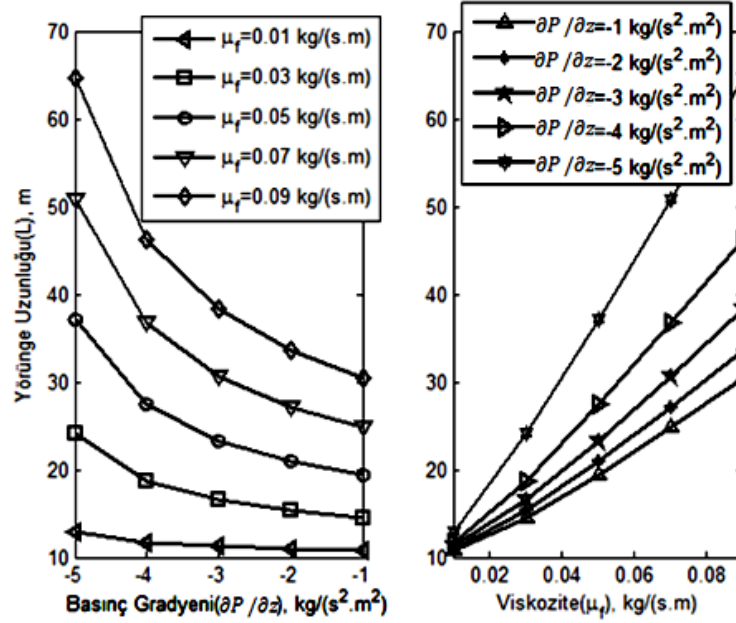
YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik



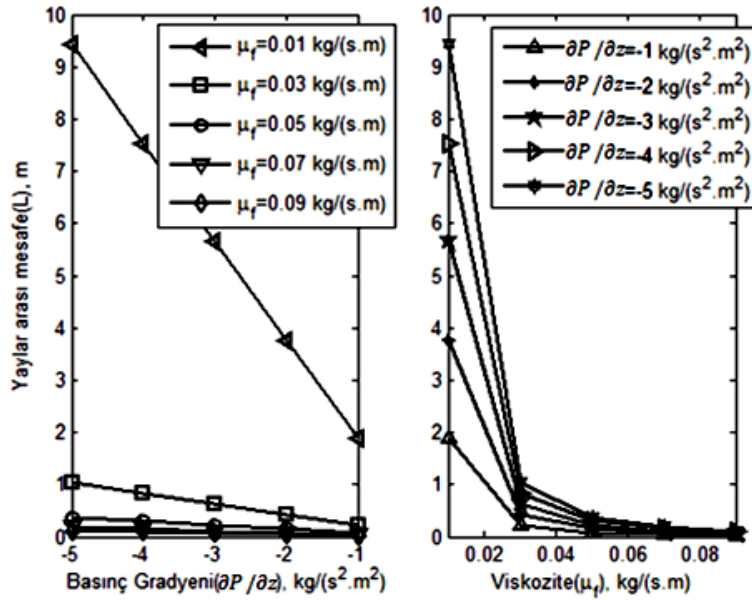
Şekil 118.  $\omega = 10$ ,  $a_p = 0.001$  için basınç ve viskoziteye göre iki-parametre değişimi

Şekil 119'dan yüksek viskoziteli akışkan için basınçtaki artış ile beraber yörünge uzunluğu doğrusal olmayacak şekilde artmaktadır. Düşük viskozitede ise basınç değişimin parçacık hareketine önemli bir katkısı yoktur. Sabit basınçta yörünge uzunluğu viskozite ile birlikte doğrusal olarak artmaktadır. Şekil 120'den yörüngeler arası mesafe en düşük viskozite de en büyük değerlidir. Sabit viskozitede yörüngeler arası mesafe basıncın artışıyla beraber doğrusal olarak artmaktadır. Sabit basınçta, viskozite değeri azatlıkça yörüngeler arası mesafe de artmaktadır. Yüksek viskozitede yörüngeler arası mesafe en

küçük değerini almaktadır ve sabit basınç gradyanında viskozitenin artışı ile beraber yörüngeler arası mesafeler doğrusal olmayacak şekilde azalmaktadır.



Şekil 119.  $\omega = 10$ ,  $a_p = 0.001$  için basınç ve viskoziteye göre yörünge uzunlukları



Şekil 120.  $\omega = 10$ ,  $a_p = 0.001$  için basınç ve viskoziteye göre yörüngeler arası mesafeler

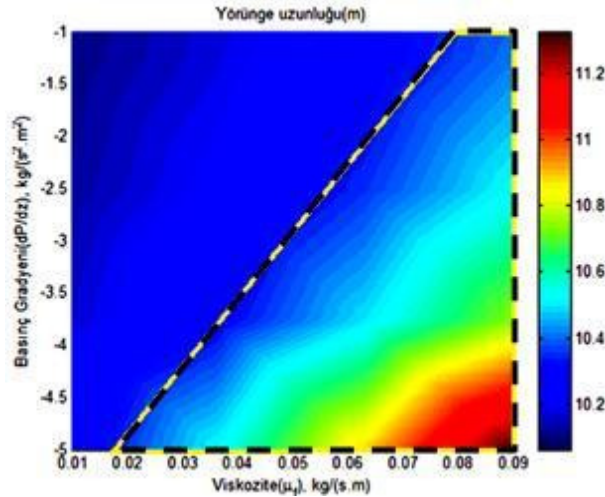
Yüksek hız ve yüksek parçacık kütle değerlerinde yörünge uzunlukları önemli derecede azalmaktadır. Şekil 121'den halkasal bölgedeki en büyük yörünge uzunluğu, en

yüksek viskozite ve en yüksek basınç gradyeni parametresi altında elde edilir. Sabit viskozitede uygulanacak basınç gradyeni için, sarı hat içerisindeki parametreler kümesinden değerler seçilmelidir.

Tablo 34. Yatay borularda ( $L = 20m$ ),  $\omega = 30$ ,  $a_p = 0.005$  için  $\frac{\partial P}{\partial z} - \mu_f$  değişimi

$\frac{\partial P}{\partial z}$		$\mu_f$				
		-1	-2	-3	-4	-5
0.01	YU	10.0607	10.0644	10.0723	10.0853	10.1144
	YAU	-	-	-	-	-
0.03	YU	10.0912	10.1027	10.1235	10.1591	10.2569
	YAU	-	-	-	-	-
0.05	YU	10.1493	10.1754	10.2182	10.2991	10.5244
	YAU	-	-	-	-	-
0.07	YU	10.2358	10.2812	10.3555	10.4972	10.8872
	YAU	9.5367	-	-	-	-
0.09	YU	10.3448	10.4147	10.5273	10.7407	11.3274
	YAU	5.7417	11.4835	-	-	-

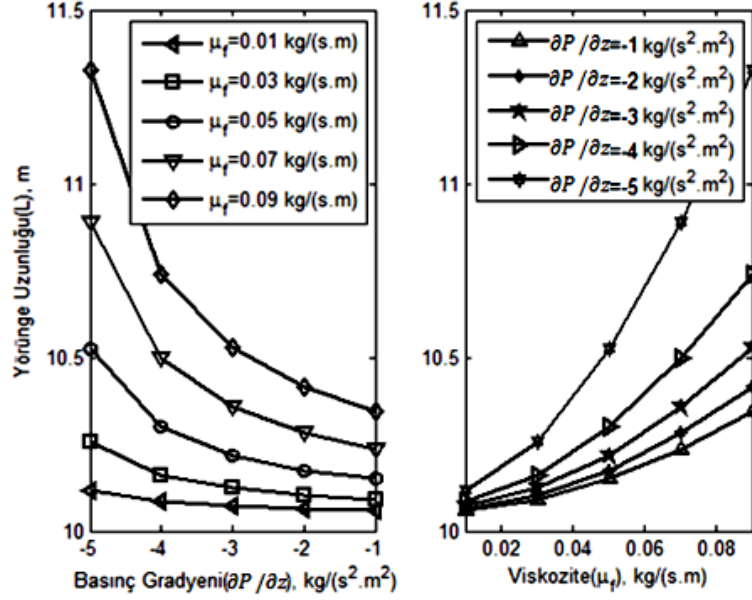
YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik



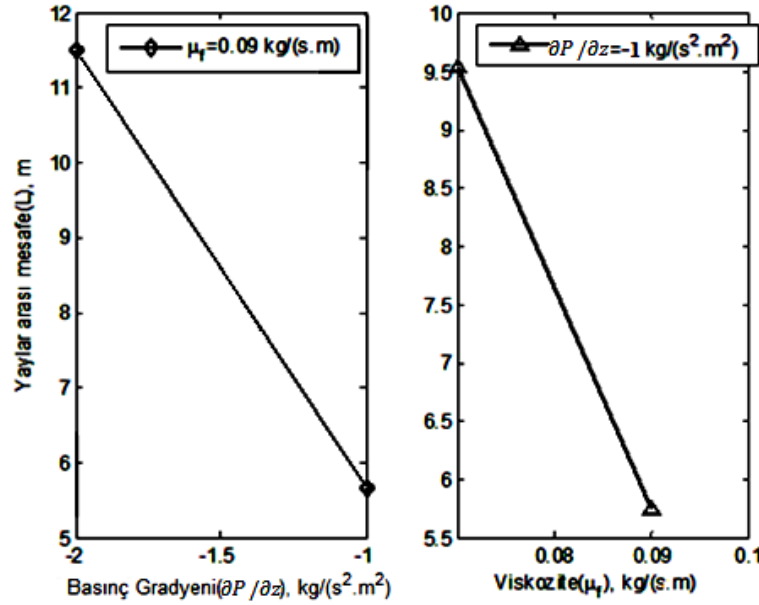
Şekil 121.  $\omega = 30$ ,  $a_p = 0.005$  için basınç ve viskoziteye göre iki-parametre değişimi

Şekil 122'den yörünge uzunluğu basınç gradyanı ve viskozitesindeki artışla doğrusal olmayacak şekilde artmaktadır. Düşük viskozite değerinde yörünge uzunluk değişimi önemli derecede etkili değildir. Bu kısımda incelenen parametreler altında yörüngeler arası mesafeler, yatay borunun  $L = 20m$ 'lik kısmı için önemli derecede bir değişiklik

göstermemektedir. Ancak yüksek viskozite ve yüksek basınç gradyeni parametrelerine göre bu değer hesaplanabilmektedir.



Şekil 122.  $\omega = 30$ ,  $a_p = 0.005$  için basınç ve viskoziteye göre yörünge uzunlukları



Şekil 123.  $\omega = 30$ ,  $a_p = 0.005$  için basınç ve viskoziteye göre yörüngeler arası mesafeler



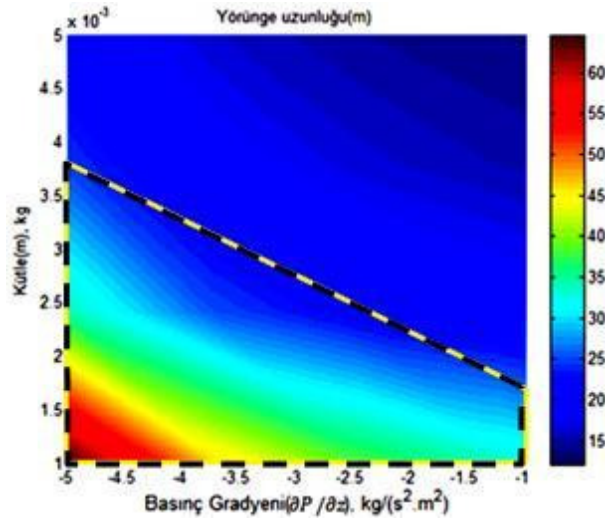
### 2.3.3.5. Kütle ve Basınç Gradyeni Değişimine Göre Yörünge Uzunlukları

Bu kısımda, düşük kütle ve yüksek viskozite değerleri altında parçacık yörüngeleri hesaplanmaktadır. Buna göre Şekil 124'den düşük kütle ve yüksek basınç gradyeni altında yörünge uzunluğu en büyük değerini almaktadır. Sarı hat içerisindeki parametre değerlerinden uygulanan basınç gradyeninin hangi parçacıklar için geçerli olduğu belirlenebilir. Sabit  $\omega = 10$ ,  $\mu_f = 0.09$  ve  $\omega = 30$ ,  $\mu_f = 0.01$  parametreleri için basınç-kütle değişimine göre elde edilen yörünge uzunlukları ve yörüngeler arası mesafeler Tablo 35 ve Tablo 36'da verilmiştir.

Tablo 35. Yatay borularda ( $L = 20m$ ),  $\omega = 10$ ,  $\mu_f = 0.09$  için  $m - \partial P / \partial z$  değişimi

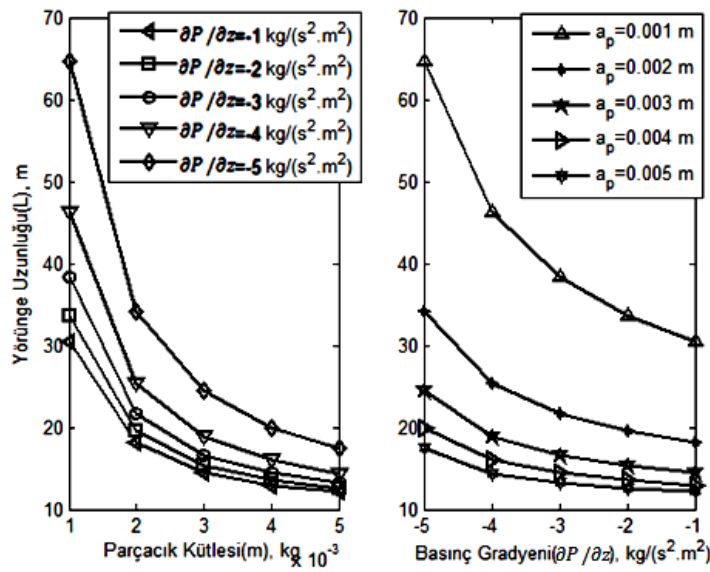
$\frac{\partial P}{\partial z}$	$m$	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005
		-1	YU	30.5147	18.1143	14.5425
	YAU	0.0232	0.0929	0.2093	0.3731	0.5849
-2	YU	33.6511	19.5091	15.3628	13.5322	12.5428
	YAU	0.0464	0.1857	0.4187	0.7462	1.1698
-3	YU	38.3168	21.6310	16.6414	14.4010	13.1748
	YAU	0.0696	0.2786	0.6280	1.1194	1.7546
-4	YU	46.2750	25.3390	18.9191	15.9732	14.3545
	YAU	0.0927	0.3714	0.8373	1.4925	2.3395
-5	YU	64.6163	34.2014	24.5384	19.9692	17.3822
	YAU	0.1159	0.4643	1.0466	1.8656	2.9244

YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik

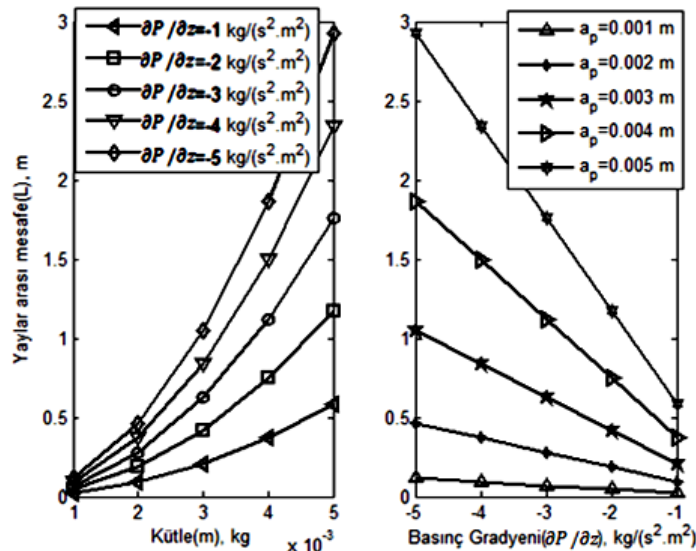


Şekil 124.  $\omega = 10$ ,  $\mu_f = 0.09$  için basınç gradyeni ve kütleye göre iki-parametre değişimi

Şekil 125'den parçacık yörünge uzunluğu sabit basınç gradyeni altında parçacığın kütle değeri arttıkça doğrusal olmayacak şekilde azalmakta ve sabit kütlede basınç gradyeni ile birlikte doğrusal olmayacak şekilde artmaktadır. Yüksek kütleli parçacıklarda yörünge uzunluk değişimi az olduğu görülmektedir. Şekil 126'dan yörüngeler arası mesafenin kütle artarken arttığı görülmektedir. Sabit basınçta kütle artışı ile birlikte yörüngeler arası mesafe artış gösterir. Sabit kütle değerinde ise yörüngeler arası mesafe basınç gradyeni arttıkça doğrusal olarak artmaktadır. Düşük kütleli parçacıklarda yörüngeler arası mesafe değişimi daha azdır.



Şekil 125.  $\omega = 10$ ,  $\mu_f = 0.09$  için basınç ve kütle göre yörünge uzunlukları



Şekil 126.  $\omega = 10$ ,  $\mu_f = 0.09$  için basınç ve kütle göre yörüngeler arası mesafeler

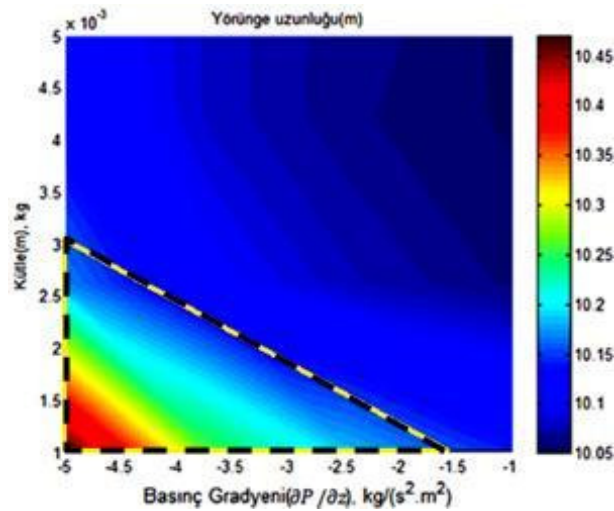


Yüksek hız ve düşük viskozite değerleri altında yörünge uzunlukları minimum değerdedir. Şekil 127'den yüksek basınç gradyeni ve düşük kütlede yörünge uzunluğu en büyük değerini almaktadır. Sarı hat içerisinde kütle ve basınç gradyeni için etkin parçacık taşınım parametreleri belirlenebilir. Şekil 128'den ise yörünge uzunluğu kütleyle beraber doğrusal olmayacak şekilde azalmakta, basınç gradyeni arttıkça doğrusal olmayacak şekilde artmaktadır. Bu parametreler altında yörüngeler arası mesafe incelemesi için yeterli veri bulunamadığında analiz yapılmamıştır.

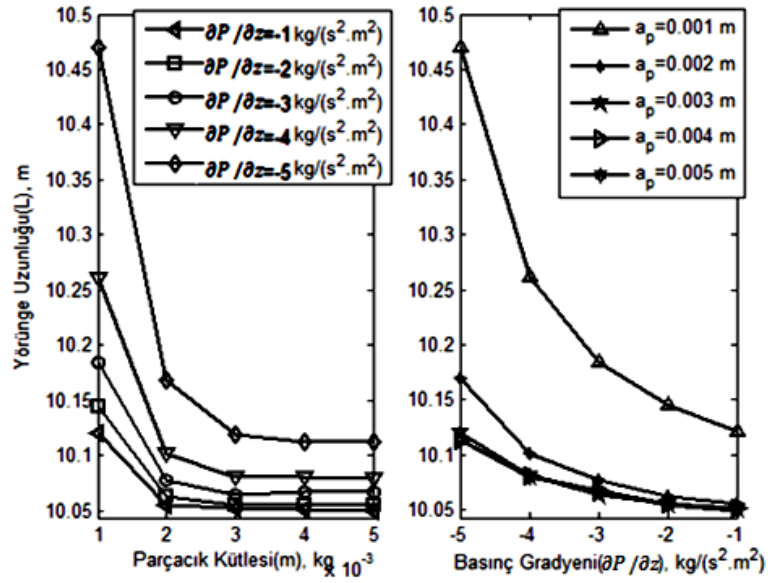
Tablo 36. Yatay borularda ( $L = 20m$ ),  $\omega = 30$ ,  $\mu_f = 0.01$  için  $m - \partial P / \partial z$  değişimi

$\frac{\partial P}{\partial z}$ \ $m$		$m$				
		0.001	0.002	0.003	0.004	0.005
-1	YU	10.1209	10.0552	10.0523	10.0514	10.0496
	YAU	-	-	-	-	-
-2	YU	10.1450	10.0630	10.0560	10.0556	10.0550
	YAU	-	-	-	-	-
-3	YU	10.1846	10.0776	10.0642	10.0678	10.0667
	YAU	-	-	-	-	-
-4	YU	10.2610	10.1017	10.0810	10.0805	10.0795
	YAU	-	-	-	-	-
-5	YU	10.4698	10.1692	10.1195	10.1132	10.1125
	YAU	-	-	-	-	-

YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik



Şekil 127.  $\omega = 30$ ,  $\mu_f = 0.01$  için basınç gradyeni ve kütleyle göre iki-parametre değişimi



Şekil 128.  $\omega = 30$ ,  $\mu_f = 0.01$  için basınç ve kütleye göre yörünge uzunlukları

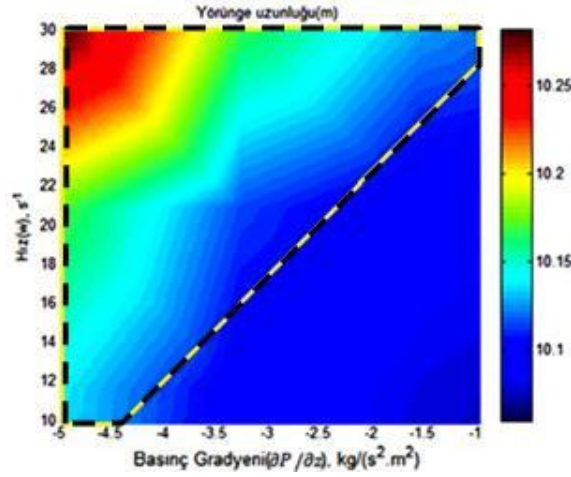
### 2.3.3.6. Hız ve Basınç Gradyeni Değişimine Göre Yörünge Uzunlukları

Düşük viskozite ve yüksek kütleli parçacık analizinde yörünge uzunlukları arasında önemli derecede bir değişim yoktur.  $L = 20m$  uzunluğundaki boru kısmı için bu parametreler altında yörüngeler arası mesafe ölçümleri incelenememiştir. Şekil 129'dan yörünge uzunluğu yüksek hız ve basınç gradyeninde yüksek olduğu görülmüştür. Verilen bir hızda etkin parçacık taşınımı için hangi basınç gradyeninin kullanılması gerektiği sarı hat içerisinde verilen parametre kümesi içerisinde belirtilmiştir. Şekil 130'dan halkasal bölgedeki yörünge mesafesinin hız ve basınç artışıyla doğrusal olmayacak şekilde arttığı görülmektedir. Sabit  $\mu_f = 0.01$ ,  $a_p = 0.005$  ve  $\mu_f = 0.09$ ,  $a_p = 0.001$  parametreleri için Hız-Basınç değişimine göre elde edilen yörünge uzunlukları ve yörüngeler arası mesafeler Tablo 37 ve Tablo 38'de verilmiştir.

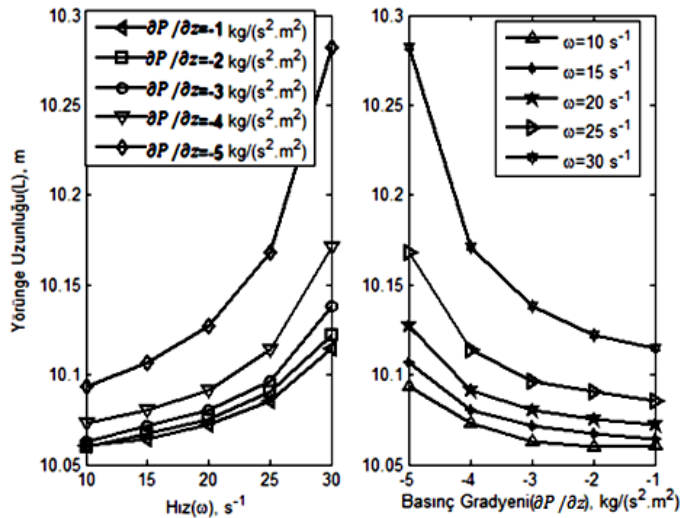
Tablo 37. Yatay borularda ( $L = 20m$ ),  $\mu_f = 0.01$ ,  $a_p = 0.005$  için  $\omega - \partial P / \partial z$  değişimi

$\frac{\partial P}{\partial z}$	$\omega$	10	15	20	25	30
		-1	YU	10.0607	10.0596	10.0627
	YAU	-	-	-	-	-
-2	YU	10.0644	10.0670	10.0713	10.0802	10.1070
	YAU	-	-	-	-	-
-3	YU	10.0723	10.0749	10.0800	10.0914	10.1274
	YAU	-	-	-	-	-
-4	YU	10.0853	10.0906	10.0963	10.1141	10.1680
	YAU	-	-	-	-	-
-5	YU	10.1144	10.1223	10.1382	10.1708	10.2823
	YAU	-	-	-	-	-

YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik



Şekil 129.  $\mu_f = 0.01$ ,  $a_p = 0.005$  için basınç gradyanı ve hıza göre iki-parametre değişimi



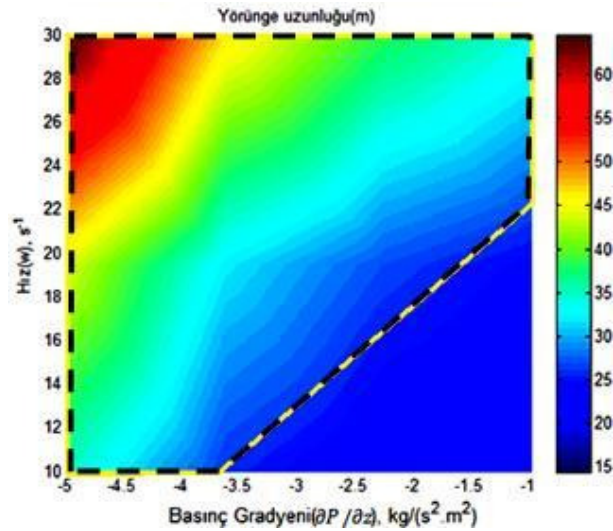
Şekil 130.  $\mu_f = 0.01$ ,  $a_p = 0.005$  için basınç gradyanı ve hıza göre yörünge uzunlukları

Yüksek viskozite ve düşük kütleli akışkan hareketi incelendiğinde Şekil 131'e göre yüksek basınç gradyeni ve yüksek hızda parçacık yörünge uzunluğu en yüksek seviyededir. Verilen bir hızda etkin parçacık taşınımı için hangi basınç gradyeninin kullanılması gerektiği sarı hat içerisinde verilen parametre kümesi içerisinde belirtilmiştir. Şekil 132'den sabit basınç gradyeninde yörünge uzunluğu hızla beraber doğrusal olmayacak şekilde artmakta, sabit hızda yörünge uzunluğu basınç gradyeniyle doğrusal olmayacak şekilde artmaktadır. Şekil 133'den yörüngeler arası mesafe, sabit basınç gradyeninde hız ile doğrusal bir şekilde artmakta, sabit hızda ise basınç gradyeni artışı ile doğrusal olarak artmaktadır.

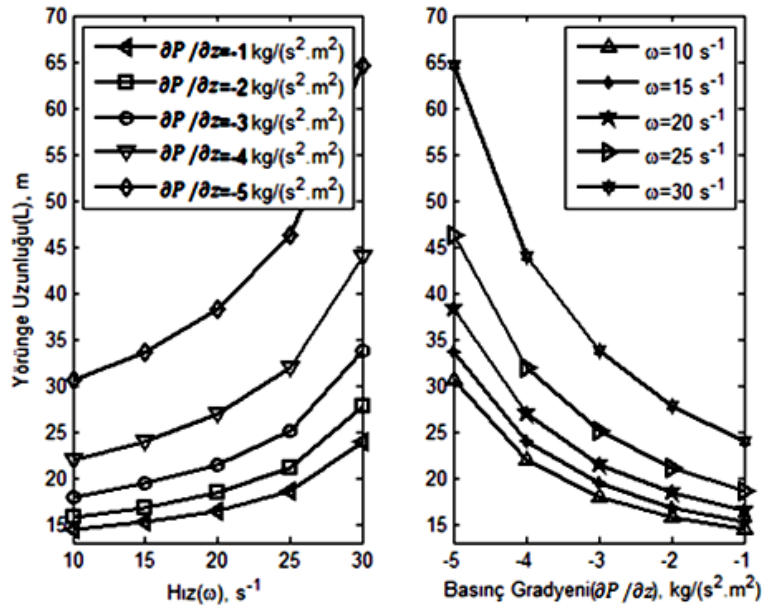
Tablo 38. Yatay borularda ( $L = 20m$ ),  $\mu_f = 0.09$ ,  $a_p = 0.001$  için  $\omega - \partial P / \partial z$  değişimi

$\frac{\partial P}{\partial z}$	$\omega$	$\omega$				
		10	15	20	25	30
-1	YU	14.3660	15.7438	17.9622	21.9441	30.5147
	YAU	0.0232	0.0546	0.0987	0.1553	0.2246
-2	YU	15.1685	16.7725	19.3389	23.9089	33.6511
	YAU	0.0464	0.1093	0.1974	0.3106	0.4491
-3	YU	16.4047	18.3456	21.4276	26.8615	38.3168
	YAU	0.0696	0.1639	0.2960	0.4659	0.6737
-4	YU	18.6048	21.1224	25.0756	31.9583	46.2750
	YAU	0.0927	0.2185	0.3947	0.6213	0.8983
-5	YU	23.9805	27.8173	33.7432	43.8811	64.6163
	YAU	0.1159	0.2732	0.4934	0.7766	1.1229

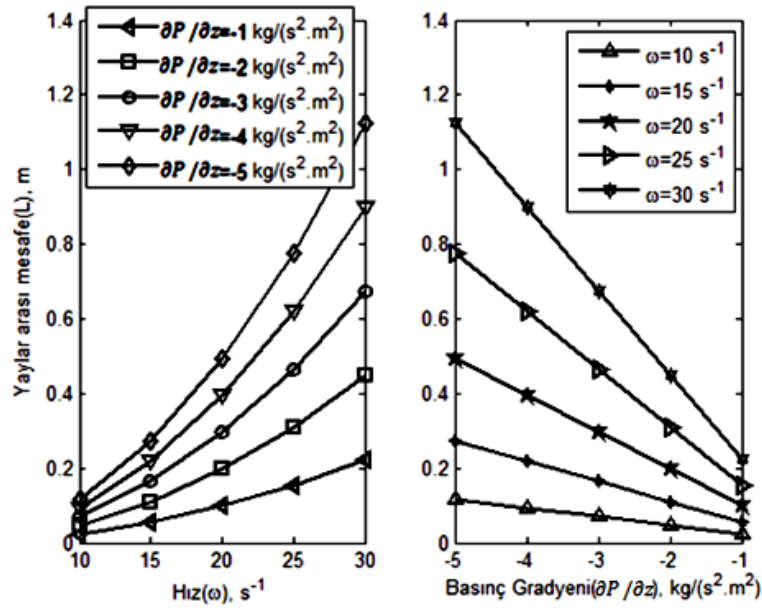
YU: Yörünge Uzunluk; YAU: Yörüngelerarası Sarmal Genişlik



Şekil 131.  $\mu_f = 0.09$ ,  $a_p = 0.001$  için basınç gradyeni ve hızla göre iki-parametre değişimi



Şekil 132.  $\mu_f = 0.09, a_p = 0.001$  için basınç gradyeni ve hıza göre yörünge uzunlukları



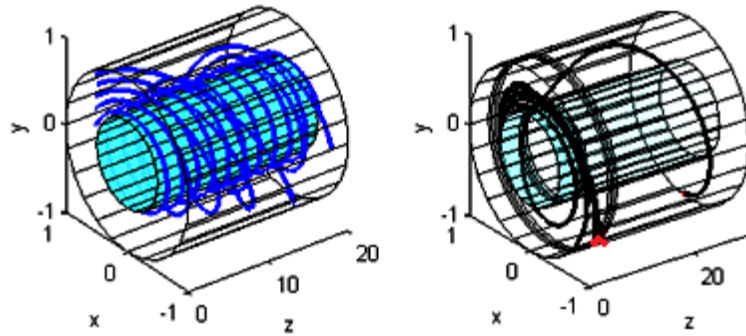
Şekil 133.  $\mu_f = 0.09, a_p = 0.001$  için basınç gradyeni ve hıza göre yörüngeler arası mesafeler

### 2.3.4. Newtonyan Akışkan İçerisinde Farklı Parçacık Kütlelerinin Davranışı

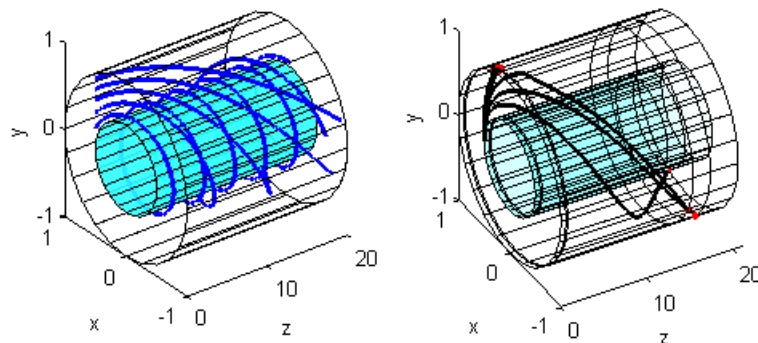
Bu kesimde daha önce belirlenen akışkan parametreleri ile akışkan elamanı ile Newtonyan akışkan içerisinde bulunan parçacığın hareketini farklı kütleler için kıyaslamaktır. Bunun için akışkan parametreleri olarak  $\omega = 10, \partial P / \partial z = -1, L = 20$  ve



$\mu_f = 0.07$  alınacaktır. Bu parametreler ile belirlenen akışkan hareketine göre farklı kütlelerin davranışı incelenmiştir ve Şekil 134'e göre büyük kütleli parçacıkların dış silindire hemen ulaştıkları görülmektedir. Sonuç olarak sondaj işleminde matkap mekanizmasının parçacıkların küçük olmasını sağlaması sondaj işleminin etkin olmasını sağlayacaktır. Fakat iç silindir hızının düşük olmasından dolayı dış silindire yakın yerlerde büyük parçacıklar tarafından asıntı(suspended)lar oluşabilmektedir. Bunun için iç silindir hızının biraz daha yüksek olduğu seçenek üzerinde durulmalıdır.  $\omega = 20$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $L = 20$  ve  $\mu_f = 0.07$  parametreleri için akışkan hareketi ve bu harekete bağlı olarak farklı kütlelerdeki parçacıkların davranışı incelenmiştir. Buna göre Şekil 135'den, aynı türden parçacıkların bu parametrelere göre taşınımının daha kolay olduğu görülmektedir. Sistemde aşırı büyük derecede parçacıkların olmadığı göz önüne alındığında bu seçenek daha uygun gözükmektedir.



Şekil 134.  $\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $L = 20$  ve  $\mu_f = 0.07$  parametreleri için akışkan içerisinde farklı kütleli parçacıkların hareketleri



Şekil 135.  $\omega = 20$ ,  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $L = 20$  ve  $\mu_f = 0.07$  parametreleri için akışkan içerisinde farklı kütleli parçacıkların hareketleri

## 2.4. Newtonyan Olmayan Akışkanlar İçin Akı Modeli

Bölüm 2.3.'de Newtonyan akışkan içerisinde parçacık hareketi analiz edilmiştir. Ancak, parçacık taşınımında kullanılan akışkan genelde Newtonyan olmayan akışkandır. İlk olarak bu kısımda akı modeli üzerinde durulacaktır. Daha sonra bu akış içerisinde parçacık taşınımı modellemek için Newtonyan olmayan akışkanlar için dönme yönünde Couette akışı ve eksenel yönde Poiseuille akışları için hız profilleri verilecektir. Newtonyan olmayan akışkanlar için power-law modeli üzerinde durulup bu modele göre hız profilleri oluşturulacaktır.

### 2.4.1. Newtonyan Olmayan Akışkanlarda Power-Law Modeli

Kartezyen koordinatlarda momentum denklemlerinin bileşenleri,

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz}\end{aligned}\quad (78)$$

şekindedir.

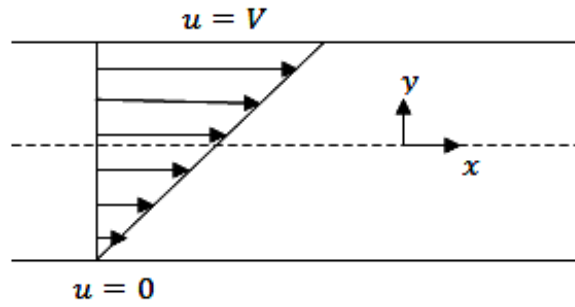
Newtonyan akışkanlarda  $\tau = \mu \varepsilon$  şeklindedir. Yani kayma gerilmesi ile şekil değiştirme hızı tensörü arasında doğrusal bir bağıntı vardır. Fakat Newtonyan olmayan akışkanlar için bu doğru değildir. Bu tip akışkanlar için viskozite şekil değiştirme hızının bir fonksiyonudur ( $\mu = \mu(\varepsilon)$ ). Newtonyan olmayan akışkanların davranışı  $\tau = \mu(\varepsilon) \cdot \varepsilon$  şeklindedir.

Çoğu Newtonyan olmayan akışkanların davranışı “power-law” modeli ile tanımlanabilir (Alexandrou, 2001). Bir boyutlu bir problem için bu ilişki,  $\tau = \mu_0 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$  şeklinde olup  $\mu_0 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1}$  etkin viskozite olarak tanımlanır.

$\mu_0$  sabiti birimlerdeki tutarlılık için ilave edilen bir sabittir. Etkin viskozite yerel akış şartlarına göre değişir. Power-law adlandırılması etkin viskozitedeki  $(n - 1)$  üssüne dayanır.  $n$ 'in büyüklüğüne bağlı olarak,  $n < 1$  için incelen akışkan,  $n > 1$  için kalınlaşan akışkan olarak tanımlanabilir.  $n = 1$  için Newtonyan davranışın kendisidir. Çok boyutlu

problemler için Power-law modeli,  $\varepsilon_{II} = \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{xz}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2$  ile tanımlanır (Alexandrou, 2001). Böyle bir durumda  $\tau_{xy} = \mu_0 |\varepsilon|^{n-1} \cdot \varepsilon$ ,  $|\varepsilon| = \sqrt{0.5\varepsilon_{II}}$  şeklindedir. Power-law modeli kullanarak hız profili elde etmeyle alakalı olarak aşağıdaki örneklere yer verilmiştir:

**Örnek** (Düzlemsel Couette Akışı): 2 –buyutlu, sıkıştırılamaz, daimi Couette akışı ele alalım. Akışkan Newtonyan olmayan akışkan olsun. Problemin geometrisi Şekil 136’da verilmiştir (White, 1992).



Şekil 136. Düzlemsel Couette akışı için üst plakanın hareket ettiği paralel iki plaka

Viskoz gerilmeler,  $\tau_{xx} = a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n$ ,  $\tau_{yy} = a \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^n$ ,  $\tau_{zz} = a \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^n$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{1}{2} a \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^n$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{1}{2} a \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^n$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{1}{2} a \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^n$  şeklinde veriliyor.  $a$  ve  $n$  akışkan sabitleridir. Bu durumda Newtonyan olmayan akışkan için  $u(y)$  hız profilini elde edip Newtonyan akışkan için bu iki hız profilini karşılaştıracacağız. Yerçekimi etkileri ve basınç gradyeni ihmal ediliyor. Tam gelişmişlik şartından,  $u$  ve  $v$  bileşenleri sadece  $y$ 'nin fonksiyonudur.  $u = u(y)$  ve  $v = v(y)$ 'dir.  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  olduğu için süreklilik denklemi;  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  ve  $v = v(y)$  olduğu için  $v = \text{sabit}$ 'tir. Çeperde hız sıfır olduğundan süreklilik denkleminin sağlanması için  $v = 0$  olmalıdır.  $x$  –momentum denkleminde;

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} \quad (79)$$



olup kabullerimizde  $v = 0$  ve tam gelişmişlikten dolayı  $x$ 'e bağımlılık olmadığından,  $\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} = 0$ 'dır. Bu durumda momentum denklemi,

$$\frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{a}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \right] = 0 \text{ veya } \frac{du}{dy} = \text{sabit} \text{ ve } u = C_1 y + C_2$$

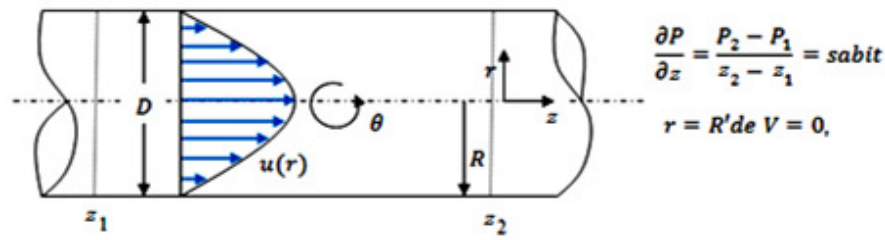
şeklinde hız profili elde ederiz. Her iki çeperde de kaymama koşulundan ötürü;

$$u(y = -h) = 0 = C_1(-h) + C_2 \text{ ve } u(y = +h) = V = C_1(+h) + C_2$$

sisteminden  $C_1 = \frac{V}{2h}$  ve  $C_2 = \frac{V}{2}$ 'dir. Bu durumdaki hız profili,  $u(y) = \frac{V}{2h}y + \frac{V}{2}$  şeklindedir.

Bu ise Newtonyan akışlarda olduğu gibi aynı hız profilini vermektedir. Newtonyan olmayan akışkanlar için Couette akışı hız profilini elde ettik.

**Örnek** (Yuvarlak Bir Borudaki Tam Gelişmiş Poiseuille Akışı): Yuvarlak bir boru için akış geometrisi Şekil 137'de verilmiştir (White, 1992).



Şekil 137. Tam gelişmiş Poiseuille akışı için yuvarlak boru geometrisi

Süreklilik denkleminde,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow u = u(r).$$

$r$  -,  $\theta$  - ve  $z$  -momentum denklemleri sırasıyla,

$$\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right]$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right]$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right]$$

ve kayma gerilme tensörü ise;

$$\begin{aligned}
\tau_{ij} &= \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} & \mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) & \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) & 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) & \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \mu \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (80) \\
\tau_{ij} &= \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olacaktır. Momentum denklemlerini tekrar yazacak olursak,  $0 = -\frac{\partial P}{\partial r} + 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} = 0$ 'dır. Bunun anlamı basınç  $r$ 'den bağımsızdır. O halde  $\theta$ 'ya da bağımlılık olmadığından basınç sadece  $z$ 'in bir fonksiyonudur. Yani  $P = P(z)$ 'dir.  $\theta$  –momentum denkleminde sağlanır. Bu durumda  $z$  –momentum denkleminde;  $0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz})$  olacaktır.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{II} &= \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\theta\theta}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2\varepsilon_{r\theta}^2 + 2\varepsilon_{rz}^2 + 2\varepsilon_{\theta z}^2 = 2\varepsilon_{rz}^2 = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \\
\varepsilon_{II} &= 2 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2. \quad (81)
\end{aligned}$$

Kayma gerilmesi,

$$\begin{aligned}
\tau &= \mu_0 |\varepsilon|^{(n-1)}. \varepsilon = \mu_0 (0.5\varepsilon_{II})^{\frac{(n-1)}{2}}. \varepsilon, |\varepsilon| = \sqrt{0.5\varepsilon_{II}} \\
\Rightarrow \tau &= \mu_0 (0.5\varepsilon_{II})^{\frac{(n-1)}{2}}. \varepsilon = \mu_0 \left( (0.5) \cdot 2 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right)^{\frac{(n-1)}{2}}. \varepsilon = \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^{(n-1)}. \varepsilon \\
\tau_{rz} &= \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^{(n-1)}. \varepsilon_{rz} = \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^{(n-1)}. \frac{\partial u}{\partial r} = \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^n \Rightarrow \tau_{rz} = \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Momentum denklemleriyle bunları birleştirirsek;

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^n \right)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^n \right) \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^n \right)}_{r' \text{nin fonksiyonu}} = \underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}}_{z' \text{nin fonksiyonu}}$$

$$\Rightarrow r \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^n = \frac{\partial P}{\partial z} \frac{r^2}{2} + C_1.$$

Tam gelişmiş akışta simetriden dolayı eksen boyunca ( $r = 0$ ),  $\tau_{rz} = 0$  olacağından  $C_1 = 0$ 'dır. O halde,

$$r \mu_0 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^n = \frac{\partial P}{\partial z} \frac{r^2}{2} \Rightarrow \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^n = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial P}{\partial z} r \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \left( \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial P}{\partial z} r \right)^{1/n} = \left( \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial P}{\partial z} \right)^{1/n} r^{1/n}.$$

Tekrar integral alarak,

$$u = - \left( \frac{1}{2\mu_0} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left( \frac{n}{n+1} \right) r^{(n+1)/n} + C_2.$$

Kaymama koşulundan  $r = R$ 'de  $u = 0$  sınır şartından,

$$C_2 = \left( \frac{1}{2\mu_0} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left( \frac{n}{n+1} \right) R^{(n+1)/n} \text{ olur ve buradan hız profili;}$$

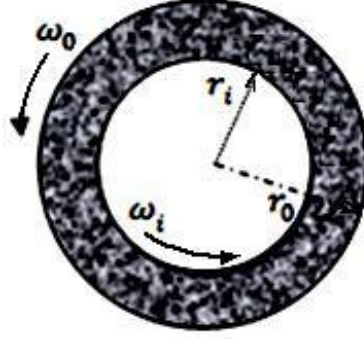
$$u = - \left( \frac{1}{2\mu_0} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left( \frac{n}{n+1} \right) \left[ r^{(n+1)/n} - R^{(n+1)/n} \right]$$

$$u = - \left( \frac{1}{2\mu_0} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \cdot R \right)^{1/n} \left( \frac{n}{n+1} \right) \cdot R \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right] \quad (82)$$

olacaktır. Newtonyan olmayan akışkan için verilen (82) ifadesindeki hız profilinde  $n = 1$  alındığında önceki Newtonyan akışkan için verilen hız profili elde edilmektedir.

#### 2.4.2. Newtonyan Olmayan Akışkan İçin Couette Akışı

Yarıçapları  $r_i$  ve  $r_o$ , açısal hızları sırasıyla  $w_i$  ve  $w_o$  olan içice geçmiş iki dairesel kesitli silindir arasındaki Couette akış profili, Newtonyan olmayan akışkanlar için yazılacaktır. Akımın daimi ve sadece teğetsel yönde olduğunu varsayalım. Bu durumda silindirik koordinatlarda hız vektörün  $u_r$  ve  $u_z$  bileşenleri sıfır değerini alırlar. Akışkan ise sıkıştırılmaz ve sabit viskoziteli kabul edilir. Bu tip akışlar için geometri Şekil 138'de verilmiştir.



Şekil 138. İçice geçmiş silindirler için akış şeması

Şayet dış silindir sabit ve iç silindir  $\omega_i$  açısal hızıyla dönüyorsa Newtonyan olmayan Couette hız profilleri boyutlu ve  $r^* = \frac{r}{r_o}$ ,  $u_\theta^* = \frac{u_\theta}{r_i \omega_i}$  boyutsuz parametreler olmak üzere boyutsuz olarak aşağıdaki gibi verilmiştir (Zeidler, 1974):

$$u_\theta = \frac{r_i^{2/n} \omega_i}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} r \left( \left( \frac{r_o}{r} \right)^{2/n} - 1 \right) \text{ (Boyutlu)} \quad (83)$$

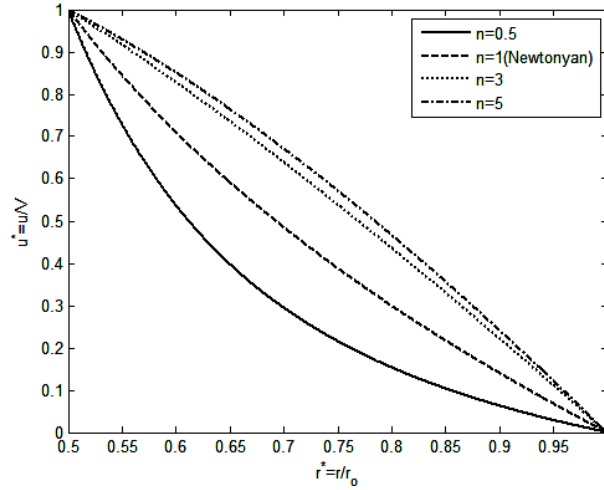
$$u_\theta = \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{1}{r^{(2-n)/n}} - r \right) \text{ (Boyutsuz)} \quad (84)$$

İç yarıçap=  $r_i = \kappa R$  ve dış yarıçap=  $r_o = R$  ise,

$$u_\theta = \frac{(\kappa R)^{2/n} \omega_i}{R^{2/n} - (\kappa R)^{2/n}} r \left( \left( \frac{R}{r} \right)^{2/n} - 1 \right) \quad (85)$$

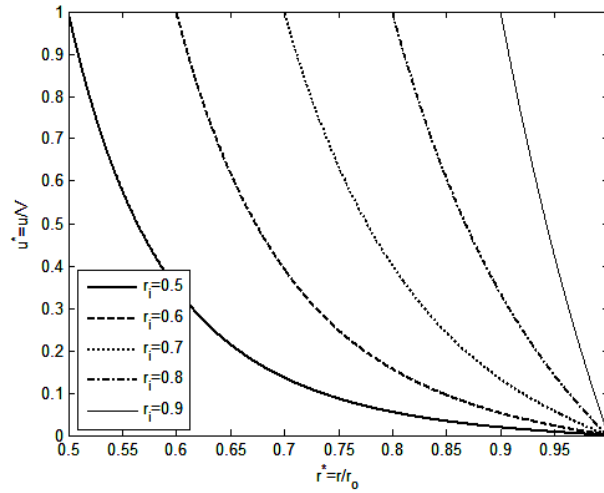
$$u_\theta = \frac{(\kappa R)^{(2-n)/n} R}{R^{2/n} - (\kappa R)^{2/n}} \left( \frac{1}{r^{(2-n)/n}} - r \right) \quad (86)$$

İç silindir hızı  $\omega = 10$ ,  $\kappa = 0.5$  ve  $R = 1$  olmak üzere farklı  $n$  değerleri için hız profilleri aşağıdaki gibidir. Buna göre Şekil 139'dan sabit bir  $r$  konumunda  $n$  indisinin artması hız profilinde artışa neden olmaktadır.



Şekil 139. Farklı  $n$  değerleri için dönme yönünde hız profilleri

$n = 0.3$  ve  $R = 1$  olmak üzere farklı  $r_i$  içyarıçap değerleri için hız profilleri aşağıdaki gibidir: Buna Şekil 140'dan iç yarıçap dış yarıçapa yaklaştığında bu tıpkı paralel iki levhanın akışı için verilen Düzlemsel Couette akış hız profiline benzediği görülmektedir.



Şekil 140. Farklı  $r_i$  değerleri için dönme yönünde hız profilleri

### 2.4.3. Newtonyan Olmayan Akışkan İçin Poiseuille Akışı

Yatay borular için fakat eş merkezli bir dairesel halkadaki laminar akış için hız bileşenleri ise şu şekildedir. İç ve dış boru arasındaki mesafe  $R(1 - \kappa)$  olmak üzere,  $\kappa$  iç-silindir oranı olarak alınsın. Bu durumda dış çap  $R$  ve iç çap ise  $R\kappa$  olmak üzere Newtonyan akışkanlar için hız profili daha önce elde edilmişti.

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \left( r^2 - R^2 - \frac{R^2 - (\kappa R)^2}{\ln\left(\frac{R}{\kappa R}\right)} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \right) \quad (87)$$

Newtonyan olmayan akışkanlar için dairesel halkadaki hız profilini elde etmek biraz daha zordur.  $\lambda$ , maksimum akışkan hızının meydana geldiği akış bölgesindeki konum olmak üzere,  $\lambda R = R(1 + \kappa)/2$  şeklinde düşünülürse, bu durumdaki hız profilleri bu noktanın altında ve üstünde şu şekilde oluşacaktır (Becker, 1987).

$$r \leq R(1 + \kappa)/2 \text{ için, } u_z = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{R(1-\kappa)}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \frac{R(1+\kappa)}{2} - r \right)^{(n+1)/n} \right]$$

$$r \geq R(1 + \kappa)/2 \text{ için, } u_z = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{R(1-\kappa)}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( r - \frac{R(1+\kappa)}{2} \right)^{(n+1)/n} \right]$$

şeklindedir.  $r_i, r_o$  parametreleri cinsinden,

$$r \leq (r_i + r_o)/2 \text{ için,}$$

$$u_z = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{(r_o - r_i)}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \frac{(r_o + r_i)}{2} - r \right)^{(n+1)/n} \right] \quad (88)$$

$$r \geq (r_i + r_o)/2 \text{ için,}$$

$$u_z = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{(r_o - r_i)}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( r - \frac{(r_o + r_i)}{2} \right)^{(n+1)/n} \right] \quad (89)$$

$r^* = \frac{r}{r_o}, z^* = \frac{z}{L}, u_\theta^* = \frac{u_\theta}{V}, u_z^* = \frac{u_z}{V}, P^* = \frac{P}{\rho V^2}, \mu_0^* = \frac{\mu_0 L}{\rho V^{2-n}}$  boyutsuz parametreleri kullanılarak boyutsuz hız profili  $r_i/r_o \leq r^* \leq 1$  için,

$$u_z^* = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{(r_o - r_i)}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{(r_o + r_i)}{2} - r_o r^* \right| \right)^{(n+1)/n} \right] \quad (90)$$

Ortalama hızı elde etmek için,  $u_{ort} = \frac{1}{\pi R^2 (1 - \kappa^2)} \int_{\kappa R}^R u_z 2\pi r dr$  bağıntısından,  $u_{ort} = \frac{n}{2n+1} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial P}{\partial z} \right)^{1/n} \left( \frac{R(1-\kappa)}{2} \right)^{(n+1)/n}$  olmak üzere hız profilleri;

$$r \leq R(1 + \kappa)/2 \text{ için, } \frac{u_z}{u_{ort}} = \left( \frac{2n+1}{n+1} \right) \left[ 1 - \frac{\left( \frac{R(1+\kappa)}{2} - r_o r \right)^{(n+1)/n}}{\left( \frac{R(1-\kappa)}{2} \right)^{(n+1)/n}} \right] \quad (91)$$

$$r \geq R(1 + \kappa)/2 \text{ için, } \frac{u_z}{u_{ort}} = \left( \frac{2n+1}{n+1} \right) \left[ 1 - \frac{\left( r_o r - \frac{R(1+\kappa)}{2} \right)^{(n+1)/n}}{\left( \frac{R(1-\kappa)}{2} \right)^{(n+1)/n}} \right] \quad (92)$$

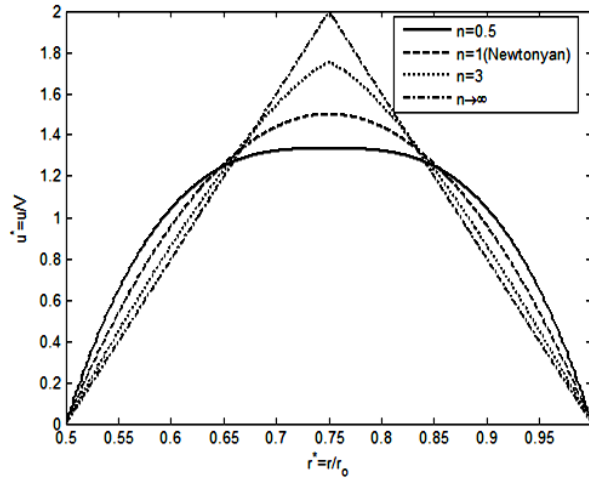
şeklindedir. Bu iki denklemi birleştirirsek,  $\kappa R \leq r \leq R$  için,

$$u_z = \left( \frac{2n+1}{n+1} \right) \left[ 1 - \frac{\left( \left| \frac{R(1+\kappa)}{2} - r_o r \right| \right)^{(n+1)/n}}{\left( \frac{R(1-\kappa)}{2} \right)^{(n+1)/n}} \right] \quad (93)$$

elde edilir.  $r_i/r_o \leq r \leq 1$  için boyutsuz hız profili,

$$u_z = \left( \frac{2n+1}{n+1} \right) \left[ 1 - \frac{\left( \left| \frac{(r_o+r_i)}{2} - r_o r \right| \right)^{(n+1)/n}}{\left( \frac{r_o-r_i}{2} \right)^{(n+1)/n}} \right] \quad (94)$$

olacaktır.  $\kappa = 0.5$ ,  $R = 1$  olmak üzere farklı  $n$  değerleri için hız profilleri Şekil 141'de verilmiştir:



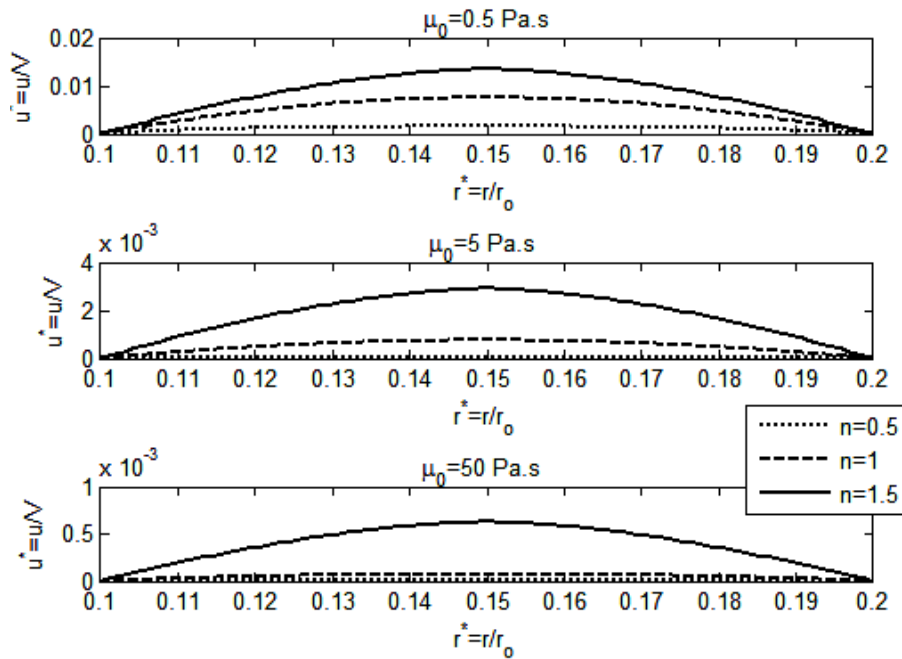
Şekil 141. Farklı  $n$  değerleri için eksenel yönde hız profilleri

$n \rightarrow 1$  için üstel kurala uyan akışkanların davranışı Newton akışkanlarınkine yaklaşıyor. Bu durumda hız dağılımı, ortalama hız ve debiyi veren denklemler Newton akışkanları için verilen denklemlere indirgenir. Dairesel halkadaki hız profili hakkında şu yorumlar yapılabilir. Hızın maksimum olduğu yer iç ve dış silindirin orta noktası olan

$\frac{R(1+\kappa)}{2}$  noktasıdır ve bu konumdaki hızı ise  $u_{ort} = -\frac{n}{2n+1} \left( \frac{1}{\mu_0} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left( \frac{R(1-\kappa)}{2} \right)^{(n+1)/n}$ , dir.

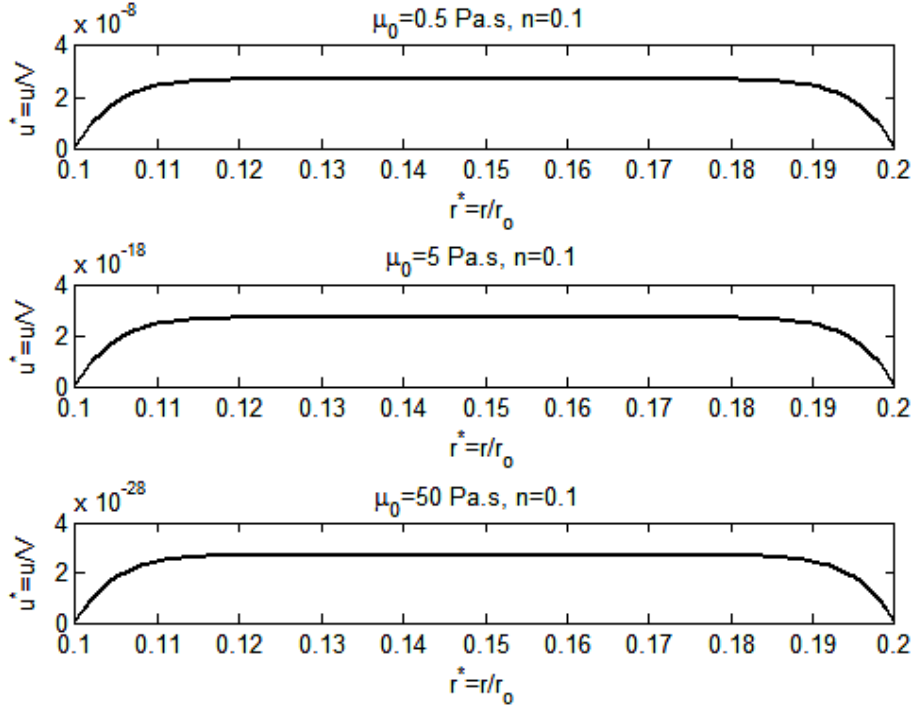
O halde  $u_{zmax} = \left( \frac{2n+1}{n+1} \right) u_{ort}$  olup  $n = 1$  için,  $u_{zmax} = 1.5u_{ort}$  ve  $n = 2$  için  $u_{zmax} = 1.66u_{ort}$  olur ve buradan index artışıyla eksen hızının artacağı anlaşılır. Hacimsel debi,  $V = u_{ort}\pi R^2 = -\pi \left( \frac{n}{2n+1} \right) \left( \frac{1}{\mu_0} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} . R^{(3n+1)/n}$  formülü ile verilir ve buradan  $V^n \propto -\frac{\partial P}{\partial z}$  olduğu sonucu çıkar. O halde küçük  $n$ 'ler için akış hızını değiştirmek için gerekli basınç gradyeni Newtonyan akışkanda olduğundan daha az etkilidir (Peker ve Helvacı, 2007).

Akış oranının yarıçapa bağımlılığı oldukça büyüktür.  $V \propto R^{(3n+1)/n}$  olup  $n = 1$  ise  $V \propto R^4$  ve  $n = 0.5$  ise,  $V \propto R^5$ 'dir. Aynı basınç farkı ve boru boyutlarında,  $\mu_0$  artışı ortalama hızda azalmaya neden olmaktadır.  $n$  azaldıkça hız dağılımı daha yassı hale dönüşür.  $n$  değerinin alt limitine yakın olarak seçilen 0.1 değerinde, ortalama hızın  $\mu_0$  değişimine karşı çok fazla duyarlı olduğunu görebiliriz. Hız profili, hızın her noktada aynı olduğu bir hız profiline yaklaşır. O halde power law modele uyan akışkanların hız dağılımlarının parametrik olarak değişimi Şekil 142 ve Şekil 143'de verilmiştir.



Şekil 142. Farklı  $\mu_0$  değerleri için hız profilleri





Şekil 143. Sabit bir  $n$  indisi için farklı  $\mu_0$  değerleri için hız profilleri

#### 2.4.4. Üç Boyutta Basitleştirilmiş Akışkan Modeli

Bu bölümde (4) denklemindeki  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  akışkan hız profilini veren model incelenecektir. Bunun için, Navier-Stokes denkleminin özel halleri olarak, dönme yönünde Couette Akışı ve aksel yönde Poiseuille akışı göz önüne alınacaktır. Her iki hız profili için boyutsuz profiller kullanılacaktır. Akışkanın Newton tipli olmayan, sıkıştırılmaz ve akışın daimi olduğu kabul edilecektir.

Newtonyan olmayan akışkanlar göz önüne alındığında  $r \in (0.5, 1)$  için, dönme yönünde Couette hız profili Denklem (95) ve aksel yöndeki Poiseuille boyutsuz hız profilleri Denklem (96); boyutsuz parametreler  $r^* = \frac{r}{r_0}$ ,  $z^* = \frac{z}{L}$ ,  $u_\theta^* = \frac{u_\theta}{V}$ ,  $u_z^* = \frac{u_z}{V}$ ,  $P^* = \frac{P}{\rho V^2}$ ,  $\mu_0^*(n) = \frac{\mu_0 L}{\rho V^{2-n}}$  olmak üzere eski parametrelere tekrar geçilirse hız profilleri aşağıdaki gibidir:

$$u_\theta = \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{1}{r^{(2-n)/n}} - r \right) \quad (95)$$

$$u_z = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o r \right| \right)^{(n+1)/n} \right] \quad (96)$$

Daha önceki çalışmada Newtonyan akışkanlar için akışkan hareketi modeli geliştirilmiş ve bu modelde de Newtonyan olmayan akışkan için elde edilen Couette ve Poiseuille akışlarının birleşimi şeklinde düşünülen ve helisel akış olarak adlandırılan bir model oluşturulacaktır. Bu akışta, akışkan akışının modeli irdelenmektedir. Akışın laminar, daimi ve sıkıştırılmaz, akışkanın Newtonyan olmayan akışkan olduğu düşünülmektedir. Böylece bu akış için hız bileşeni,

$$\begin{aligned}
u &= 0 \cdot \hat{e}_r + u_\theta \cdot \hat{e}_\theta + u_z \cdot \hat{e}_z \\
&= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{1}{r^{(2-n)/n}} - r \right) \cdot \hat{e}_\theta + \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \times \dots \\
&\quad \dots \times \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o r \right| \right)^{(n+1)/n} \right] \cdot \hat{e}_z
\end{aligned} \tag{97}$$

ile verilir ve bu helisel akış tanımlar.  $\mathbf{x} = (r, \theta, z)$  olmak üzere helisel akış profilini veren denklem sistemi silindirik koordinatlarda aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= 0 \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{1}{r^{(2-n)/n}} - r \right) \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o r \right| \right)^{(n+1)/n} \right].
\end{aligned} \tag{98}$$

Kartezyen koordinatlarda ise,

$$\begin{aligned}
u &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( y - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{n}}} \right) \hat{i} + \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{n}}} - x \right) \hat{j} + \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \dots \\
&\quad \dots \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o \sqrt{x^2 + y^2} \right| \right)^{(n+1)/n} \right] \hat{k}
\end{aligned} \tag{99}$$

şeklinde. O halde  $\mathbf{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  şeklindeki konum vektörü için  $u = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$  olduğundan,

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( y - \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/n}} \right) \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/n}} - x \right) \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o \sqrt{x^2 + y^2} \right| \right)^{(n+1)/n} \right]
\end{aligned} \tag{100}$$

olacaktır. Bu denklem sistemi  $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$  başlangıç şartlarına göre çözülebilir. Diferensiyel denklem sistemi doğrusal olmadığından şu haliyle analitik çözümü gözükmemektedir. Ancak sayısal yöntemlerle çözülebilir. Fakat, daha öncede olduğu gibi, helisel akışta  $x(t)$  ve  $y(t)$ 'nin periyodik olduğunu gösterebilirsek,  $x^2 + y^2 = (r^*)^2 = x_0^2 + y_0^2$  olacağından bu durumda nondoğrusal olan sistem doğrusal diferensiyel sistemine dönüşecektir. Polar koordinatlarda helisel akış denklemlerinde  $\frac{dr}{dt} = 0$  olduğundan  $r = \text{sabit}$  olduğu sezgisel olarak görülmektedir. Kutupsal koordinatlarda bunu göstermek mümkündür. Yukarıdaki denklemlerde birinci denklem  $x$  ile ikinci denklem ise  $y$  ile çarpılıp denklemler taraf tarafa toplanırsa,

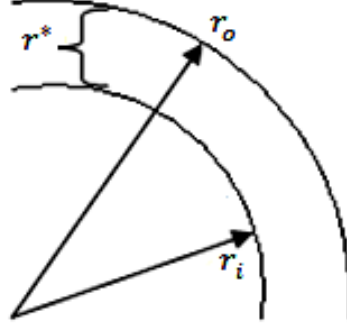
$$\begin{aligned}
x \frac{dx}{dt} &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( xy - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{1/n}} \right) \\
y \frac{dy}{dt} &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{xy}{(x^2+y^2)^{1/n}} - xy \right) \\
\Rightarrow x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{x^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{y^2}{2} \right) = 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) &= 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = (r^*)^2 = x_0^2 + y_0^2
\end{aligned} \tag{101}$$

olup bu ise  $x(t)$  ve  $y(t)$ 'nin periyodik olduğunu göstermektedir. Buna göre doğrusal diferansiyel sistemi aşağıdaki gibi olup analitik çözümü de bununla beraber verilebilir.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( y - \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/n}} \right) = \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{(r^*)^{\frac{2}{n}-1}}{(r^* R)^{\frac{2}{n}}} \right) y \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/n}} - x \right) = \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{1 - (r^*)^{\frac{2}{n}}}{(r^*)^{\frac{2}{n}}} \right) x \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o r^* \right| \right)^{(n+1)/n} \right]
\end{aligned} \tag{102}$$

$$\beta_n = \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{1 - (r^*)^{2/n}}{(r^*)^{2/n}} \right) = A_n \left( \frac{1 - (r^*)^{2/n}}{(r^*)^{2/n}} \right) \text{ olmak üzere doğrusal diferansiyel denklem}$$

sistemi, başlangıç şartları  $x(0) = x_0, y(0) = \sqrt{(r^*)^2 - x_0^2}, z(0) = z_0$  alınarak çözülecektir.  $r^*$  ise genelde iç silindir ile dış silindir arasında bir konum olup Şekil 144'de görüldüğü gibi  $r^* \in (r_i, r_o)$  şeklindedir.



Şekil 144. Halkasal bölgede  $r^*$  konumu

$$\frac{dx}{dt} = -\beta_n y$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta_n x$$

(103)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^{(n)}} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o r^* \right| \right)^{(n+1)/n} \right]$$

$$x(0) = x_0, y(0) = \sqrt{(r^*)^2 - x_0^2}, z(0) = z_0.$$

İlk iki denklemden oranlama yaparsak,  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  denkleminin çözümü  $x^2 + y^2 = (r^*)^2$  çözümü elde edilir. Farklı  $r^*$  değerleri için farklı çemberler elde edilir ve üçüncü denklemi de düşünürsek farklı akışkan profilleri ortaya çıkar. Denklem sisteminde ilk iki denklemden  $(x(t), y(t))$  ikilisi çözülebilir. İlk olarak denklem sistemi normal adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülebilir.  $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\beta_n \frac{dy}{dt} = -\beta_n^2 x \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta_n^2 x = 0$  olup bu diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü bulunur ve birinci denklemde de bu çözüm yazılırsa,

$$x_a(t) = C_1 \cos(\beta_n t) + C_2 \sin(\beta_n t)$$

(104)

$$y_a(t) = C_1 \sin(\beta_n t) - C_2 \cos(\beta_n t)$$

şeklinde çözümler elde edilir.  $\sin(\beta_n t)$  ve  $\cos(\beta_n t)$  periyodik olduklarından  $x_a(t)$  ve  $y_a(t)$ 'ninde periyodik fonksiyon oldukları açıktır.  $z(t)$  çözümünü  $z(0) = z_0$  başlangıç şartına göre elde etmek kolaydır. O halde helisel akış problemi için denklem sisteminin analitik çözümünü veren denklemler;  $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$  başlangıç şartlarına göre,

$$\begin{cases} x_a(t) = x_0 \cos(\beta_n t) - y_0 \sin(\beta_n t) \\ y_a(t) = x_0 \sin(\beta_n t) + y_0 \cos(\beta_n t) \\ z_a(t) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o r^* \right| \right)^{(n+1)/n} \right] t + z_0 \end{cases} \quad (105)$$

şeklinde helisel akış profil denklemleri elde edilmiştir. Denklemler,  $\tan \phi = \frac{y_0}{x_0}$  ve  $z(0) = 0$  olmak üzere,

$$\begin{cases} x_a(t) = r^* \cos(\beta_n t + \phi) \\ y_a(t) = r^* \sin(\beta_n t + \phi) \\ z_a(t) = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o r^* \right| \right)^{(n+1)/n} \right] t \end{cases} \quad (106)$$

şeklinde de yazılabilir. Parametrik şekliyle verilen bu denklemler, helis olarak adlandırılan özel bir eğriyi temsil ederler.  $t$  parametresine bağlı olarak bu eğri, hareket eden akışkanın yörüngelerini oluşturur.  $n = 1$  için Newtonyan akışkan için elde edilen akı modeline indirgenir. Parametrik gösterim olarak denklemler ( $t \geq 0$ ) olmak üzere,

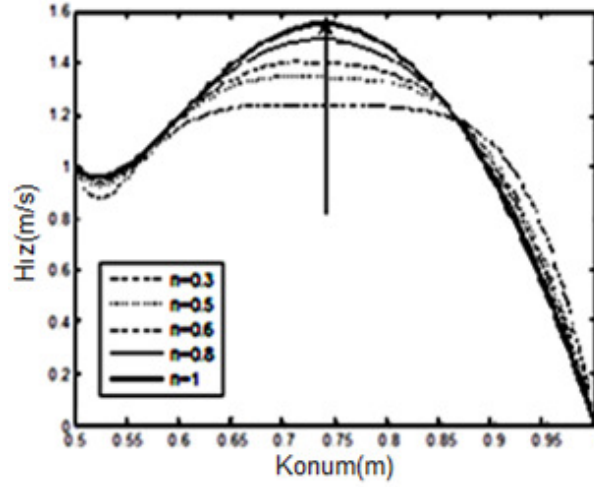
$$\begin{aligned} r(t) = & \left( r^* \cos(\beta_n t + \phi), r^* \sin(\beta_n t + \phi), \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o r^* \right| \right)^{(n+1)/n} \right] t \right) \end{aligned} \quad (107)$$

şeklinde parametrik eğri olarak yazılabilir. Akışkanın herhangi bir  $r^*$  konumundaki sürati,

$$V_f = \sqrt{(r^*)^2 \beta_n^2 + \left( \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o r^* \right| \right)^{(n+1)/n} \right] \right)^2}$$

olmaktadır.

Halkasal bölgedeki herhangi bir konumda hızın değişimi boyutsuz hız profilleri yardımıyla farklı  $n$  değerleri içinde şekilde gösterilmiştir. Burada alınan hız profilleri dönme yönünde boyutsuz hız profili  $u_\theta = \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{1}{r^{(2-n)/n}} - r \right)$  ve aksenal yönde boyutsuz hız profili  $u_z = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o r \right| \right)^{(n+1)/n} \right]$  şeklindedir. Bu durumda akışkan sürati  $V_f = \sqrt{u_\theta^2 + u_z^2}$ 'dir. Şekil 145'den, indisin artması ile halkasal bölgenin ortasında akışkan hızının arttığı görülmektedir.



Şekil 145. Halkasal bölgedeki hız profillerinin  $n$  indisine göre değişimi

#### 2.4.5. Tek Parametreye Göre Analiz

Bu kısımda akışkan parametreleri için analizler yapılacaktır. Bunun için kullanılacak parametreler basınç gradyeni  $\partial P/\partial z$ , içi silindir hızı  $\omega$ , halkasal bölgedeki konum  $r^*$ , Power law indisi  $n$  ve tutarlılık indisi olan  $\mu_0$  parametreleri için analizler yapılacaktır. Değişik akışkan tipleri için  $n$  ve  $\mu_0$  değerleri Tablo 39'da verilmiştir.

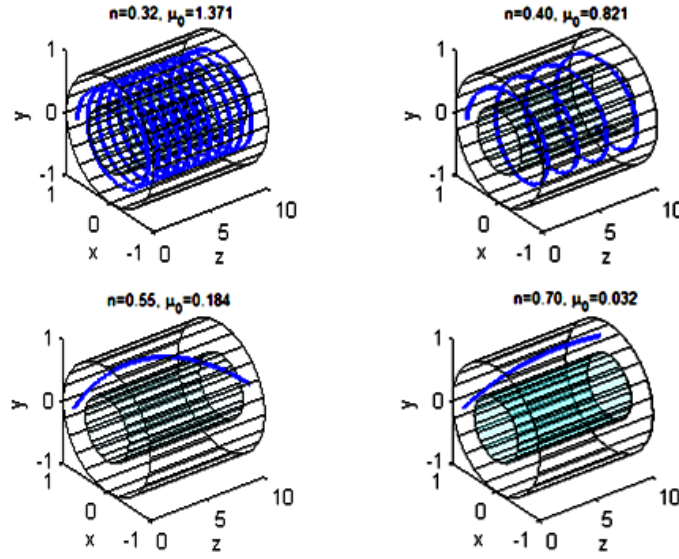
Tablo 39. Akışkan tiplerine göre  $n$  ve  $\mu_0$  değerleri (Mojisola G. Enilari, 2005)

1.Tip akışkan		2.Tip akışkan		3.Tip akışkan		4.Tip akışkan		5.Tip akışkan	
$n$	$\mu_0$	$n$	$\mu_0$	$n$	$\mu_0$	$n$	$\mu_0$	$n$	$\mu_0$
0,18	6,037	0,16	7,791	0,28	6,756	0,29	3,392	0,35	3,478
0,32	1,371	0,23	3,538	0,30	4,693	0,30	3,369	0,38	2,453
0,40	0,821	0,30	1,297	0,32	3,127	0,31	3,330	0,40	1,920
0,45	0,567	0,32	1,223	0,33	2,436	0,32	2,469	0,42	1,446
0,50	0,267	0,34	1,141	0,35	1,766	0,33	2,236	0,45	0,458
0,55	0,184	0,36	1,118	0,39	0,708	0,36	1,490	0,47	0,379
0,60	0,124	0,37	0,783	0,42	0,615	0,37	1,280	0,50	0,340
0,64	0,086	0,38	0,647	0,44	0,572	0,39	1,014	0,52	0,312
0,67	0,054	0,39	0,594	0,60	0,348	0,41	0,787	0,60	0,287
0,70	0,032	0,40	0,434	0,65	0,307	0,43	0,687	0,66	0,258

(Mojisola G. Enilari, 2005) referansından alınan bu değerler için kimyasal isimler 1.Tip akışkan için Base Fluid(Baz tabanlı sıvı)+KCl(Potassium chloride), 2.Tip akışkan için Base Fluid(Baz tabanlı sıvı)+KF(Potassium formate), 3.Tip akışkan için KCl(Potassium chloride)+Xanthan(Polisakkarit), 4.Tip akışkan için KF(Potassium formate)+PHPA(Partially hydrolyzed polyacrylamide) ve 5.Tip akışkan için KF(Potassium formate)+Xanthan(Polisakkarit) şeklindedir.

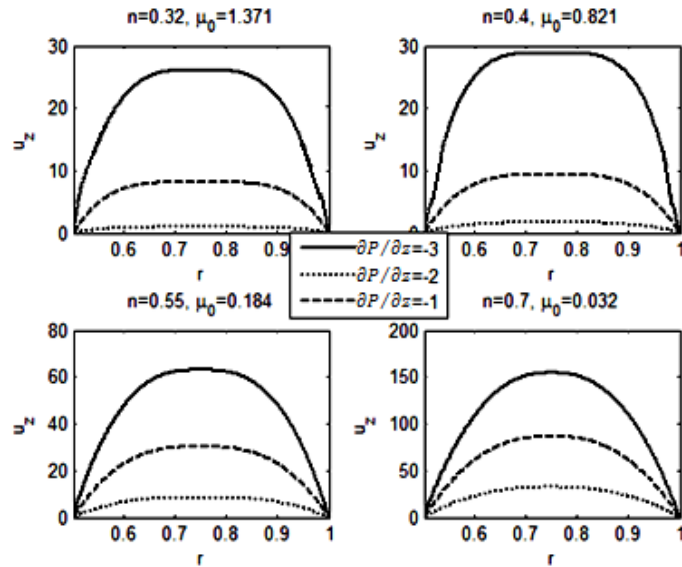
#### 2.4.5.1. Hız Profiline $n$ İndisine Göre Değişimi

Bu kısımda halkasal bölgedeki akışın davranışı  $n$  indis değerine göre incelenecektir. Bunun için  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $\omega = 5$  ve halkasal bölgenin orta konumunda  $r^* = 0.75$  sabit parametre değerleri için  $L = 10m$  uzunluğundaki halkasal bölge arasındaki akış, herhangi bir konumda 1. Tip akışkandan alacağımız farklı  $n, \mu_0$  değerleri için yörünge uzunlukları incelenmektedir. Buna göre Şekil 146'dan bu tip akışkan için  $n$  indis değerindeki artışın halkasal bölgenin orta konumunda akışkan yörünge uzunluklarını azalttığı görülmüştür.



Şekil 146. Farklı  $n$  indis değerleri için akışkan yörüngeleri

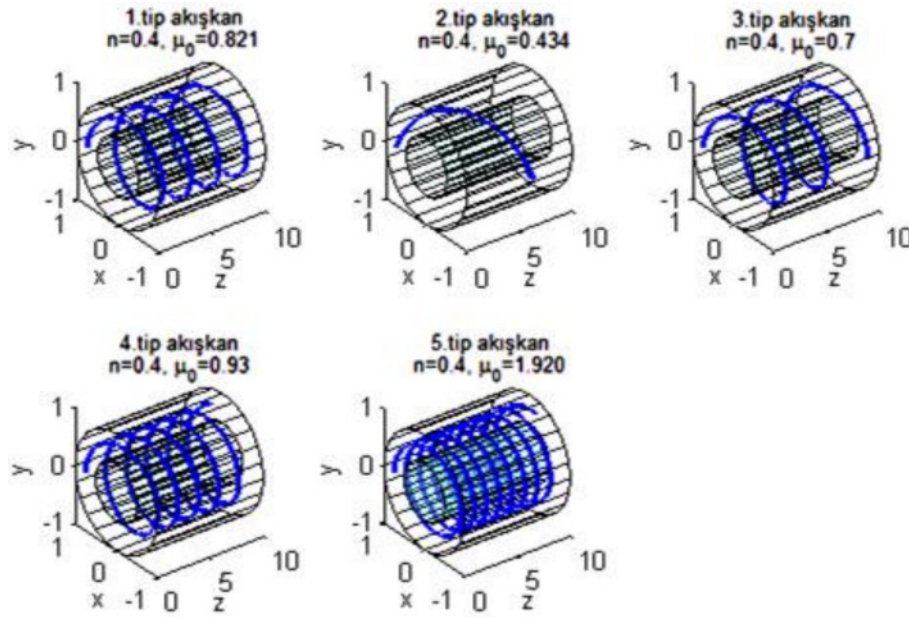
Ayrıca 1. Tip akışkan içerisinde alınan farklı  $n - \mu_0$  değerleri için farklı basınç gradyenlerine göre aksenal hız profilleri elde edilmiştir. Buna göre Şekil 147'den sabit bir konumdaki basınç gradyenindeki artışın aksenal hızı arttırdığı görülmektedir. Aksenal hızın en düşük olduğu durum,  $n = 0.32$ ,  $\mu_0 = 1.371$  değeri için basınç gradyen değeri  $\partial P/\partial z = -1$ 'dir.  $n = 0.7$ ,  $\mu_0 = 0.032$  değeri için  $\partial P/\partial z = -3$  iken aksenal hız en yüksek değerini almaktadır.



Şekil 147. Farklı  $n$  indis-tutarlılık indisi ve farklı  $\partial P/\partial z$  değerleri için hız profilleri



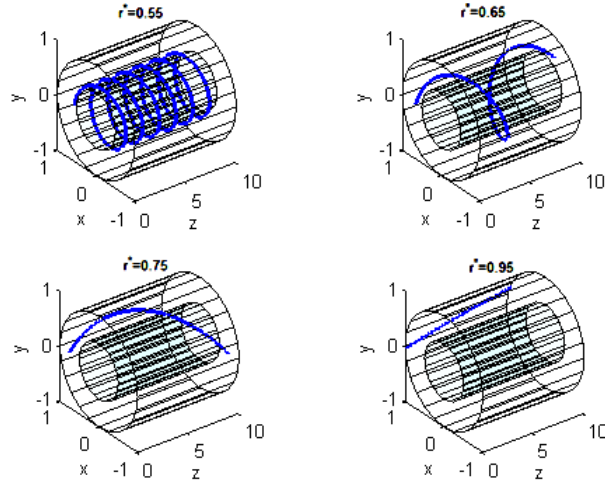
Bu kısımda farklı 5 tip akışkan için sabit bir  $n$  indis değeri için yörünge uzunlukları karşılaştırılmaktadır. Bu durumda  $n = 0.4$  indis değerine karşılık gelen  $\mu_0$  değeri akışkanın tipine göre değişmektedir. Parametreler olarak  $\partial P/\partial z = -1$ ,  $r^* = 0.75$ ,  $\omega = 5$ ,  $L = 10$  alınmaktadır. Sonuç olarak sabit bir  $n$  değeri için Şekil 148'den 2. Tip akışkan için halkasal bölgedeki akışkan yörünge uzunluğu minimum, 5. Tip akışkan için akışkan yörünge uzunluğu maksimum değer almaktadır.



Şekil 148. Sabit bir  $n$  indisi için farklı akışkanlar için yörünge uzunlukları

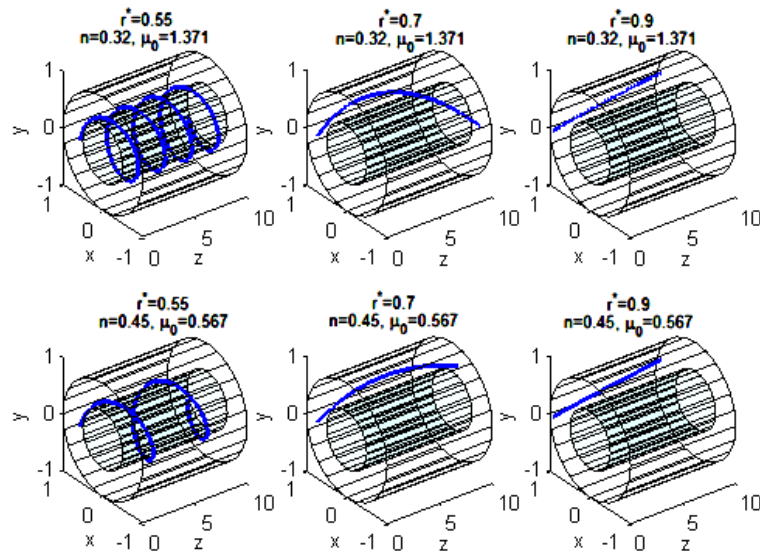
#### 2.4.5.2. Hız Profiline Farklı $r^*$ Konumu İçin $n$ İndisine Göre Değişimi

Bu kısımda ilk olarak halkasal bölge arasındaki herhangi bir konumda farklı  $r^*$  değerleri için helisel akış davranışı incelenecektir. Amacımız farklı  $r^*$  parametreleri için helisel akış davranışını incelemektir. Bunun için 4. tip akışkandan alınan  $n = 0.36$ ,  $\mu_0 = 1.490$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $\omega = 10$  sabit parametre değerleri için  $L = 10m$  uzunluğundaki halkasal bölge arasındaki herhangi bir konum olan farklı  $r^* \in (0.5, 1)$  değerleri için yörünge uzunlukları incelenmektedir. Buna göre Şekil 149'dan, akışkan iç silindirde silindirle beraber hareket etmekte, akışkan dış silindire yaklaştığında ise hızı sıfır olmaktadır. İç silindire yakın yerlerde yörünge uzunlukları en büyük değerini almaktadır. Dış silindire yakın yerlerde akışkan aksel yönde hareket sergilemektedir.

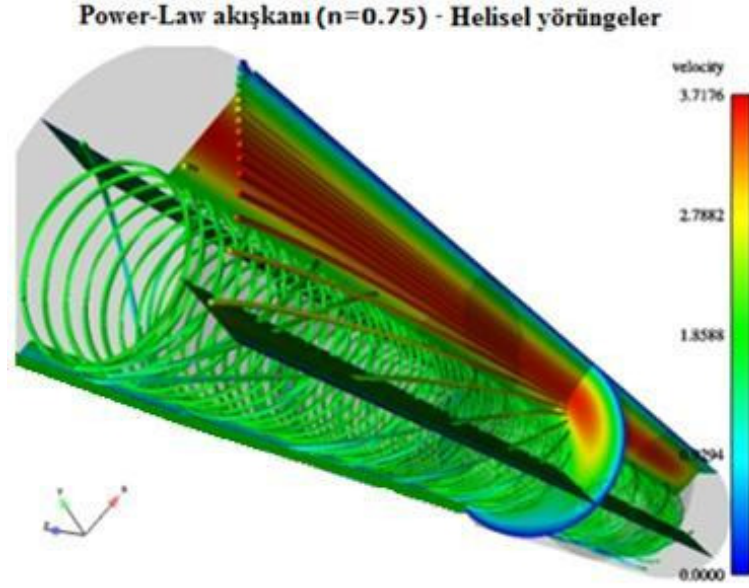


Şekil 149. Farklı  $r^*$  konumları için akışkan elemanı yörüngeleri

Akışkan elemanın farklı konumlardaki hızlarını inceledikten sonra halkasal bölge arasındaki herhangi bir konumda farklı  $r^*$  konumlarında farklı  $n$  değerleri alarak helisel akış davranışı incelenecektir. Bunun için 1.Tip akışkandan alınan ( $n = 0.32, \mu_0 = 1.371$ ), ( $n = 0.45, \mu_0 = 0.565$ ),  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $\omega = 10$  sabit parametre değerleri için  $L = 10m$  uzunluğundaki halkasal bölge arasındaki herhangi bir konum olan farklı  $r^* \in (0.5,1)$  değerleri için farklı  $n$  değerlerine karşı gelen yörünge uzunlukları incelenmektedir. Buna göre 1.Tip akışkan parametrelerinden aldığımız  $n, \mu_0$  değerleri için Şekil 150'den yüksek indis değerlerinde yörünge uzunluklarının azaldığı görülmüştür. Ayrıca tutarlılık indisi,  $n$  indisiyle ters orantılı olduğundan  $\mu_0$ 'ın yüksek değerleri ve  $n$ 'in düşük değerlerinde halkasal bölgedeki akışkan hareketi giderek artmaktadır. Ayrıca referans gösterilen Şekil 151'de helisel akış davranışı görsel olarak sunulmaktadır.



Şekil 150. Akışkan elemanı yörüngelerinin  $r^* - n$ 'ye göre değişimi

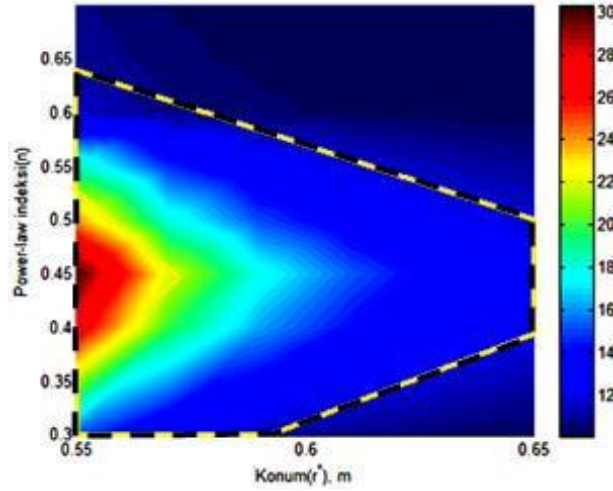


Şekil 151. Newtonyan olmayan akışkan için helisel akış yörüngeleri, (<http://www.nacad.ufrj.br/~rnelias/gallery/anecc.html>)

Ayrıca  $r^* - n$  değişimine göre iki parametre değişim analizi yapılabilir. Bunun için 1. Tip akışkan parametreleri kullanılacaktır.  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $\omega = 10$  sabit parametre değerleri için  $L = 10m$  uzunluğundaki halkasal bölge arasındaki akışkan hareketi için  $r^* - n$  parametre değerlerine göre elde edilen değerler Tablo 40'da verilmiştir. Buna göre Şekil 152'den görüldüğü gibi  $n \in (0.3, 0.55)$  olduğu değerlerde ve  $r^*$ 'ün ise iç silindire yakın olduğu yerlerde yörünge uzunluğu en fazladır. Dış silindire yakın yerlerde farklı indis değerleri için akışkan yörünge uzunluğu daha kısa olmaktadır.

Tablo 40.  $r^* - n$  değişimine göre akışkan yörünge uzunlukları

$n, \mu_0$		$r^*$				
		0,55	0,57	0,61	0,63	0,65
0,3	1,37	15,1488	11,3947	10,6585	10,4242	10,3445
0,4	0,82	27,0762	16,1935	13,4409	12,4395	12,0757
0,5	0,27	24,0690	15,1198	12,8885	12,0799	11,7864
0,6	0,12	11,6068	10,4600	10,2389	10,1661	10,1406
0,7	0,03	10,7484	10,2081	10,1054	10,0722	10,0609



Şekil 152. Helisel akışta akışkan elemanı yörünge uzunluğunun  $r^* - n$ 'ye göre değişimi

Bu kısımda ise farklı akışkan tipleri için  $r^* - n$  değişimine göre akışkan ortalama yörünge uzunlukları, farklı  $\partial P/\partial z$  basınç gradyanları için karakterize edilecektir.  $\partial P/\partial z = -1, -2, -3$  değerleri,  $r^* \in (0.55, 0.65)$  olan konumları,  $\omega = 10$  ve  $L = 10$  parametre değerleri için farklı akışkanlara karşılık gelen ortalama yörünge uzunlukları Tablo 41'de verilmiştir. Buna göre halkasal bölgenin  $r^* \in (0.55, 0.65)$  konumunda, 3. Tip akışkanlar ortalama yörünge uzunlukları en büyük değeri almaktadır. 2. Tip akışkan için ise ortalama yörünge uzunlukları en küçük değerini almaktadır.

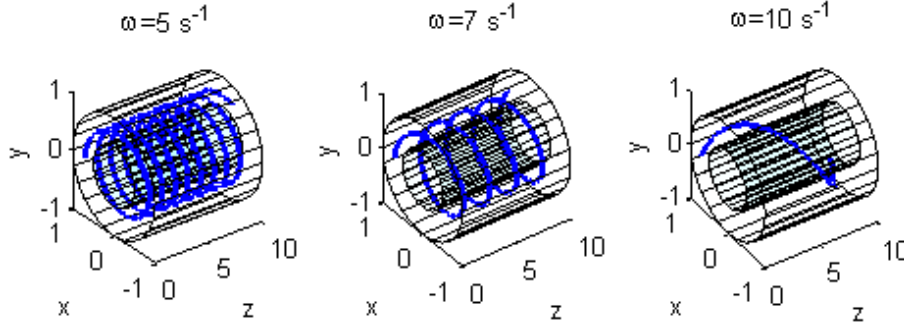
Tablo 41.  $\partial P/\partial z$  basınç gradyanı ve farklı akışkan tipleri için akışkan elemanlarının ortalama yörünge uzunlukları

$\partial P/\partial z$	1.Tip akışkan	2.Tip akışkan	3.Tip akışkan	4.Tip akışkan	5.Tip akışkan
-1	0.3071	0.1074	0.4772	0.2787	0.3391
-2	0.2994	0.1001	0.3371	0.1265	0.2659
-3	0.2977	0.0997	0.3308	0.1205	0.2609

#### 2.4.5.3. Hız Profiline $\omega$ Hızına Göre Değişimi

Bu kısımda  $\omega$  hız parametresine göre yörünge uzunluk değişimi irdelenmektedir. 4.tip akışkandan alınan  $n = 0.36$ ,  $\mu_0 = 1.490$  değeri için, farklı  $\omega$  açısal hızlarına göre akışkan hareketinin yörüngeleri elde edilmiştir. Bunun için farklı parametre değerleri olarak  $\omega = 5, 7, 10$  hız değerleri ve akışkan parametreleri olarak  $\partial P/\partial z = -1$  alınmıştır.

Buna göre  $L = 10m$  uzunluğundaki halkasal bölgenin  $r^* = 0.7$  konumu için, Şekil 153'den  $\omega$ 'nın artan değerleri için halkasal bölgedeki akışkan hareket yörünge uzunluğunun azaldığı görülmüştür.



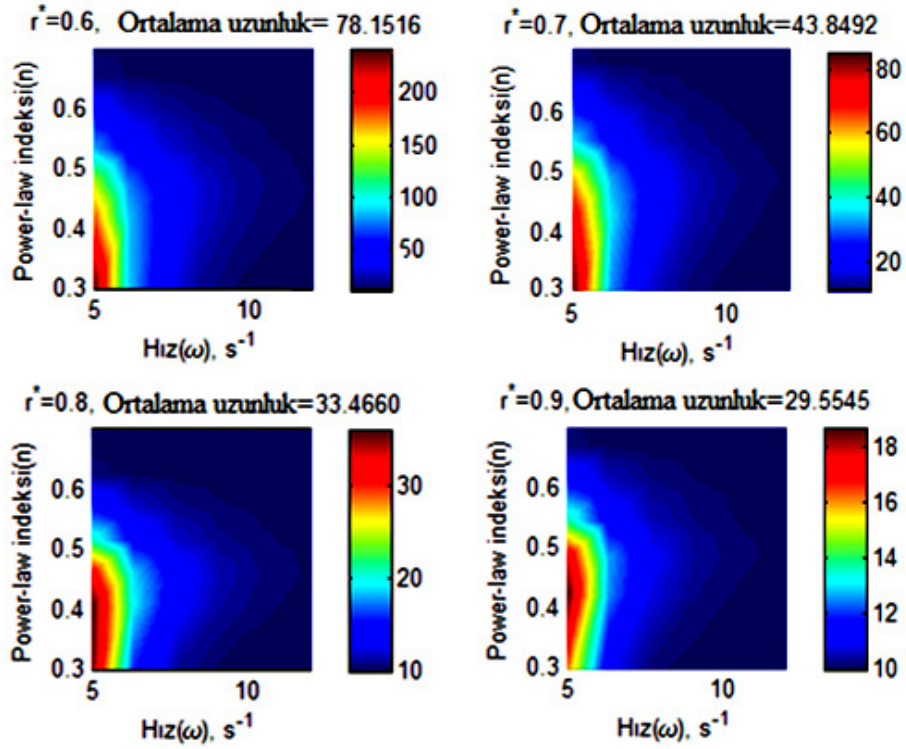
Şekil 153. Farklı  $\omega$  hızları için akışkan elemanı yörüngeleri

Ayrıca  $\omega - n$  değişimine göre iki parametre değişim analizi yapılabilir. Bunun için 1. Tip akışkan parametreleri kullanılacaktır. Buna göre  $r^* = 0.7$  konumu ve  $n$  indis değerleri için hesaplanan değerler Tablo 42'de verilmiş ve indis değeri  $n$ 'in ve hızın küçük olduğu durumlarda yörünge uzunlukları maksimum değerini almaktadır. Hız arttığında akışkan yörünge uzunluğu azalmaktadır. Ayrıca Şekil 154'de farklı  $r^*$  değerleri için iki parametre değişimine göre analiz yapılmıştır ve buradan da  $r^*$ 'ün artan değerleri için halkasal bölge içerisinde akışkan ortalama yörünge uzunluklarının azaldığı görülmektedir.

Tablo 42.  $r^* = 0.7$  için  $\omega - n$  değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunlukları

$n, \mu_0$		$\omega$				
		5	6	8	10	12
0,3	1,37	85,1706	16,0538	10,4380	10,0374	10,0076
0,4	0,82	73,8098	21,4986	12,1791	10,4667	10,2305
0,5	0,27	36,3633	16,1914	11,6511	10,5162	10,3055
0,6	0,12	11,7630	10,3842	10,1137	10,0394	10,0226
0,7	0,03	10,4478	10,1244	10,0427	10,0153	10,0105





Şekil 154. Helisel akışta akışkan elemanı yörünge uzunluklarının farklı  $r^*$ 'ler için  $\omega - n$ 'ye göre değişimi

Bu bölümde ise farklı akışkan tipleri için ortalama yörünge uzunlukları farklı  $r^*$  konumları için karakterize edilecektir.  $r^* = 0.6, 0.7$  ve  $0.8$  değerleri,  $\omega \in (5, 12)$  olan hızları,  $\partial P / \partial z = -1$  ve  $L = 10$  parametre değerleri için farklı akışkanlara karşılık gelen ortalama yörünge uzunlukları Tablo 43'de verilmiştir. Buna göre iç silindire yakın yerlerde ortalama yörünge uzunlukları yüksek olup 3. ve 4. Tip akışkanlar için ortalama yörünge uzunlukları maksimumdur. 1. Tip akışkan için ortalama yörünge uzunluğu farklı  $r^*$  konumları için minimum seviyededir. Ayrıca 4. Tip akışkan için dış silindire ulaşıncaya kadar olan değişim en yüksek seviyededir. Burada verilen değerlerde akışkan elemanın taşınımı için en uygun seçim olarak 1. Tip veya 5. Tip akışkanlar tercih edilebilir.

Tablo 43.  $r^*$  konumları ve  $\omega$ 'ye göre farklı akışkan tipleri için akışkan elemanın ortalama yörünge uzunlukları

$r^*$	1.Tip akışkan	2.Tip akışkan	3.Tip akışkan	4.Tip akışkan	5.Tip akışkan
0,6	24.5773	15.4815	87.2919	85.3698	39.1953
0,7	21.9105	9.3318	44.8357	34.6667	25.3890
0,8	21.2507	7.6497	31.3169	18.2806	21.0027

Tablo 44'de ise  $r^* = 0.7$  konumu için  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $L = 10$  parametre değerlerine göre sabit bir  $\omega$  hızı verildiğinde farklı akışkanlar için akışkanın halkasal bölgede maksimum yol alabileceği  $n$  ve  $\mu_0$  değerleri verilmiştir. Buna göre her akışkan türü için düşük hızlarda yüksek yörünge uzunlukları elde edilmiştir. 4. Tip akışkan için ideal  $(n, \mu_0) = (0.31, 3.33)$  olup bu değerde yüksek yörünge uzunlukları elde edilmiştir. Sonuç olarak etkin taşınım için daha önce söylenen 1. Tip veya 5. Tip akışkanların seçimine ek olarak Tablo 44'den iç silindir hızının düşük seviyede olduğu durumlara karşılık gelen  $n$  ve  $\mu_0$  değerleri seçilebilir.

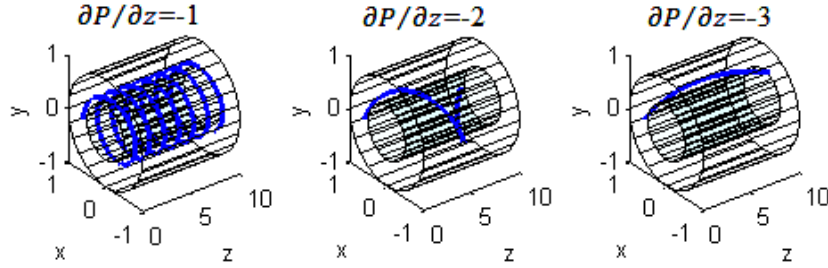
Tablo 44.  $r^* = 0.7$  için sabit bir hızda maksimum uzunlukları veren  $n$  ve  $\mu_0$  değerleri

$\omega$		5	6	7	8	9	10	11	12
1.Tip	$L$	85.1706	36.6552	21.4986	15.5057	12.7387	11.4034	10.7464	10.4123
	$n$	0.30	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45
	$\mu_0$	1.37	0.82	0.82	0.57	0.57	0.57	0.57	0.57
2.Tip	$L$	55.4961	22.7186	14.2131	11.4054	10.4957	10.1866	10.0730	10.0279
	$n$	0.30	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36
	$\mu_0$	1.30	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
3.Tip	$L$	1072.17	411.787	183.535	91.4584	49.9939	29.8923	19.7884	14.7258
	$n$	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32
	$\mu_0$	3.13	3.13	3.13	3.13	3.13	3.13	3.13	3.13
4.Tip	$L$	1359.72	503.335	217.401	105.346	56.0784	32.6368	21.0071	15.2329
	$n$	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31
	$\mu_0$	3.33	3.33	3.33	3.33	3.33	3.33	3.33	3.33
5.Tip	$L$	218.517	105.743	57.6942	34.7745	23.0699	16.9101	13.6614	11.9621
	$n$	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40
	$\mu_0$	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92

#### 2.4.5.4. Hız Profiline $\partial P/\partial z$ Basınç Gradyenine Göre Değişimi

Bu kısımda  $\partial P/\partial z$  basınç gradyeni parametresine göre yörünge uzunluk değişimi irdelenmektedir. 4.tip akışkandan alınan  $n = 0.36$ ,  $\mu_0 = 1.490$  değeri için, farklı  $\partial P/\partial z$  basınç gradyenine göre parçacık hareketinin yörüngeleri elde edilmiştir. Bunun için  $\partial P/\partial z = -1, -2, -3$  basınç gradyeni değerleri ve akışkan parametreleri olarak  $\omega = 10$

alınmıştır. Buna göre  $L = 10m$  uzunluğundaki halkasal bölgenin  $r^* = 0.6$  konumu için, Şekil 155'den  $\partial P/\partial z$ 'nin artan değerleri için yörünge uzunluğu azalmaktadır.



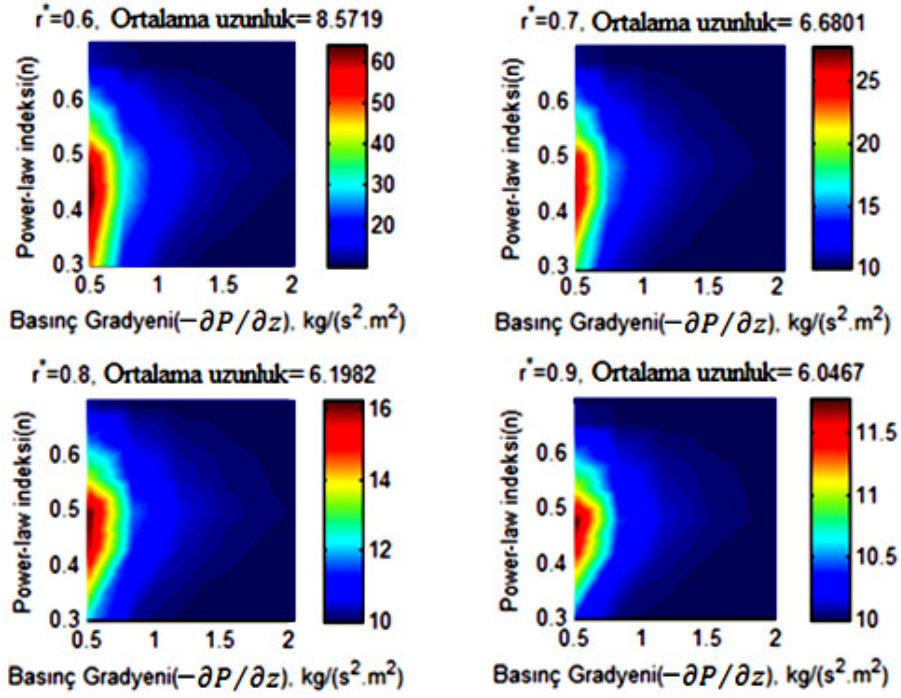
Şekil 155. Farklı  $\partial P/\partial z$  basınç gradyanları için akışkan elemanı yörüngeleri

Ayrıca  $-\partial P/\partial z - n$  değişimine göre iki parametre değişim analizi yapılabilir. Bunun için 1. Tip akışkan parametreleri kullanılacaktır. Buna göre  $r^* = 0.6$  için Tablo 31 değerleri ve buna bağlı olarak Şekil 156 verilmiştir. Tablo 45'den basınç gradyanının düşük ve  $n$  indisinin 0.3-0.5 arasındaki değerleri için yörünge uzunlukları en büyük değerlerini almaktadır. Yüksek basınç gradyanı değerlerinde yörünge uzunlukları azalır. Bundan sonraki kısımda farklı  $r^*$  konumlarında  $\partial P/\partial z - n$  iki parametre değişim analizi yapılmıştır. Şekil 156'dan düşük basınç gradyanı ve iç silindire yakın yerlerde ortalama yörünge uzunlukları artmaktadır.

Tablo 45.  $r^* = 0.6$  için  $-\partial P/\partial z - n$  değişimine göre akışkan elemanı yörünge uzunlukları

$-\partial P/\partial z$		$n, \mu_0$				
		0,5	0,7	1,1	1,5	2
0,3	1,37	49,0809	12,0700	10,1862	10,0238	10,0036
0,4	0,82	64,3225	17,7054	11,5669	10,4259	10,1862
0,5	0,27	41,4557	15,9377	11,6286	10,5792	10,3022
0,6	0,12	13,2740	10,5157	10,1470	10,0562	10,0310
0,7	0,03	11,1758	10,2221	10,0728	10,0302	10,0177





Şekil 156. Helisel akışta akışkan elemanı yörünge uzunluklarının farklı  $r^*$ 'ler için  $-\partial P/\partial z - n$ 'ye göre değişimi

Bu kısımda ise farklı akışkan tipleri için ortalama yörünge uzunlukları farklı  $r^*$  konumları için karakterize edilecektir.  $r^* = 0.6, 0.7$  ve  $0.8$  değerleri,  $\partial P/\partial z \in (-2, -0.5)$  olan basınç gradyenleri,  $\omega = 10$  ve  $L = 10$  parametre değerleri için farklı akışkanlara karşılık gelen ortalama yörünge uzunlukları Tablo 46'da verilmiştir. Buna göre 3. Tip akışkan için ortalama yörünge uzunluğu en büyük değer almaktadır. 2. Tip akışkan için ise ortalama yörünge uzunluğu en küçük değerini almaktadır. 1. Tip akışkan için basınç gradyenin akışkan elemanının ağırlıklı uzunluk ortalamasına fazla etkisi olmadığı görülmüştür. Sonuç olarak verilen bu değerlerde etkin taşınım için 4. Veya 5. Tip akışkan tercih edilebilir.

Tablo 46.  $r^*$  konumları ve  $\partial P/\partial z$ 'ye göre farklı akışkan tipleri için akışkan elemanı ortalama yörünge uzunlukları

$r^*$	1.Tip akışkan	2.Tip akışkan	3.Tip akışkan	4.Tip akışkan	5.Tip akışkan
0,6	4.6563	1.7506	7.7709	4.9846	5.1626
0,7	4.5299	1.5498	5.7932	2.7614	4.2781
0,8	4.5048	1.5095	5.2231	2.1092	4.0266

## 2.5. Newtonyan Olmayan Akışkanlar İçin Dönme Yönünde Couette Parçacık Taşınım Modeli

### 2.5.1. Model Tanıtımı

Bu bölümde, parçacık modeli (4) denkleminde  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  akışkan hızını yazmak suretiyle parçacık yörüngeleri elde edilecektir. İlk olarak akışın sadece dönme yönünde ve borunun yatay olduğu durum, akışkanın ise Newtonyan olmayan akışkan olduğu göz önüne alınmaktadır. Akış dönme yönünde olduğundan  $u_r = 0$ 'dır. O halde  $V = u_r e_r + u_\theta e_\theta = u_\theta e_\theta$ 'dır. Akış Couette tipi akış olduğundan dönme yönünde hız bileşeni  $u_\theta = \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{1}{r^{(2-n)/n}} - r \right)$  şeklindedir. O halde;

$$\begin{aligned}
 V &= u_\theta e_\theta = u_\theta (-\sin\theta i + \cos\theta j) \\
 &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{1}{r^{(2-n)/n}} - r \right) \left( -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} i + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} j \right) \\
 &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{1}{(x^2+y^2)^{(2-n)/2n}} - \sqrt{x^2+y^2} \right) \left( -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} i + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} j \right) \\
 &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \left( y - \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{n}}} \right) i + \left( \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{n}}} - x \right) j \right) = V_x i + V_y j
 \end{aligned} \tag{108}$$

Hız bileşeni kartezyen koordinatlarda yazılmıştır. Modeldeki  $V(x)$  terimi yerine, dönme yönünde hız olan ifadeyi ve  $\mathbf{x} = x i + y j$  konum vektörü olarak alırsak bu durumda denklem;

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\ddot{x}, \dot{y}) + (\dot{x}, \dot{y}) &= V(\mathbf{x}) - \varepsilon g_0 j \\
 \varepsilon(\ddot{x}, \dot{y}) + (\dot{x}, \dot{y}) &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \left( y - \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{n}}} \right) i + \left( \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{n}}} - x \right) j \right) - \varepsilon g_0 j
 \end{aligned} \tag{109}$$

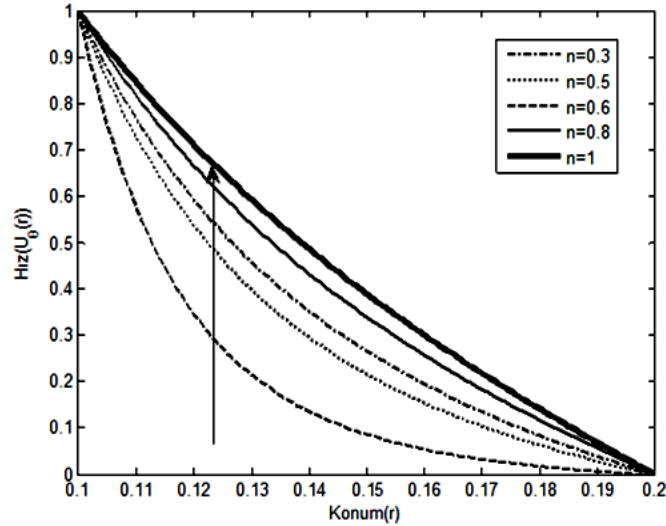
Bu denklemlerde  $x$  ve  $y$  bileşenleri eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \ddot{x} + \dot{x} &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( y - \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{n}}} \right) \\
 \varepsilon \ddot{y} + \dot{y} &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{n}}} - x \right) - \varepsilon g_0
 \end{aligned} \tag{110}$$

olmak üzere iki denklem elde edilir. Elde edilen eşitlik denklem sistemine dönüştürülecek ve ilk olarak yatay borularda Couette akışı için parçacık taşınımı ele alınacaktır.  $x = u_1$ ,  $\dot{x} = u_2$ ,  $y = u_3$  ve  $\dot{y} = u_4$  alırsak eşitliğin dönüştüğü denklem sistemimiz;  $u_1(0) = x(0)$ ,  $u_2(0) = \dot{x}(0)$ ,  $u_3(0) = y(0)$  ve  $u_4(0) = \dot{y}(0)$  başlangıç şartlarına göre,

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( u_3 - \frac{u_3}{(u_1^2 + u_3^2)^{1/n}} \right) - u_2 \right) \\ \dot{u}_3 &= u_4 \\ \dot{u}_4 &= \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{u_1}{(u_1^2 + u_3^2)^{1/n}} - u_1 \right) - u_4 \right) - g_0 \end{aligned} \quad (111)$$

şeklinde olacaktır. Bu denklem sistemi verilen başlangıç şartlarına göre Newtonyan olmayan akışkanlar için parçacığın iç silindirin üzerinden başlayarak dış silindire ulaşmaya kadar dönme yönünde izlediği yörüngeyi verir. Dönme yönünde konum hız değişimi  $V_p = u_\theta(r) = \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{1}{r^{(2-n)/n}} - r \right)$  olup konum-hız profilleri ve farklı  $n$  değerleri için Şekil 157'de gösterilmiştir. Buna göre sabit bir konumda  $n$  indisinin artması hız profilini arttırmaktadır.

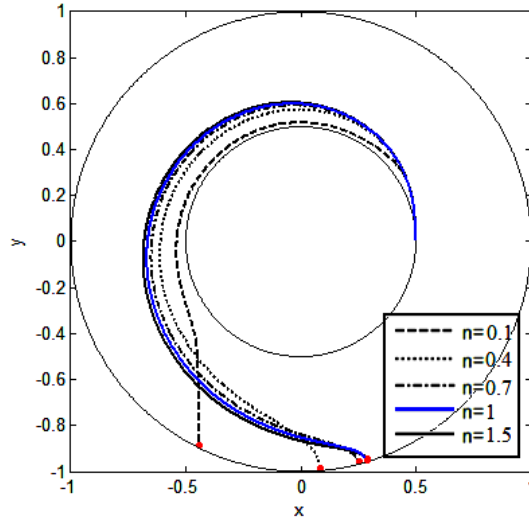


Şekil 157. Halkasal bölgedeki dönme yönündeki hız profilinin  $n$  indisine göre değişimi

## 2.5.2. Dönme Yönünde Parçacık Yörünge Analizi

### 2.5.2.1. Parçacık Yörüngesinin $n$ İndisine Göre Değişimi

Bu modelde amacımız Newtonyan olmayan akışkanlar için sadece dönme yönünde akışın olduğu durumda akışkan parçacığının hareketini modelledikten sonra parçacığın yörüngelerini parametrelere bağlı olarak irdelemektir. İlk olarak model  $n$  indisine göre irdelenecek ve parçacık davranışı gözlemlenecektir. Mevcut parametreler parçacık yoğunluğu  $\rho_p$ , parçacık yarıçapı  $a_p$ , parçacık kütlesi  $m$ , tutarlılık indisi  $\mu_0$ , iç silindir hızı  $\omega$  ve akışkan yoğunluğu  $\rho_f$  alınmıştır. Bu modelde diğer tüm parametreler sabit kalmak koşuluyla kütle ( $a_p = 0.002$ ) ve iç silindir hızı ( $\omega = 10$ )'na göre akışkan profillerinin değişimi  $n = 0.1, 0.4, 0.7, 1.5$  indis değerleri ve  $n = 1$  Newtonyan akışkan parametresine göre incelenecektir. Şekil 158'e göre diğer parametreler sabit tutulduğunda  $n$  indisinin artışı parçacık yörünge uzunluğunu arttırmaktadır.  $n$  indisinin büyük değerleri için akışkan parçacık yörüngesi Newtonyan profile yakın bir hareket sergilemektedir ve parçacıklar iç silindirde aynı yere ulaşmaktadır.

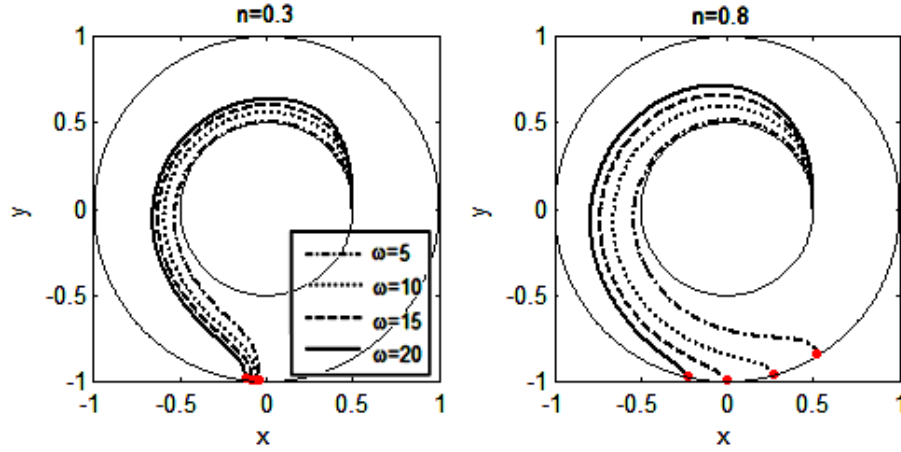


Şekil 158. Dönme yönünde parçacık hareketinin farklı  $n$  indislerine göre incelenmesi

### 2.5.2.2. Parçacık Yörüngesinin $\omega$ Hızına Göre Değişimi

Bu bölümde  $\omega$  hız parametresine göre farklı  $n = 0.3$  ve  $n = 0.8$  değerleri için parçacık hareketinin yörüngeleri elde edilmiştir. Bunun için  $\omega = 10, 15, 20$  hız değerleri ve

akışkan parametresi olarak  $a_p = 0.002$  alınmıştır. Buna göre Şekil 159'dan  $n$  indisinin küçük ve büyük değerlerinde, hız artarken yörünge uzunluğu artmaktadır. Büyük indis değerlerinde hızın artışı ile yörünge uzunlukları daha çok artmaktadır. Küçük indis değerlerinde parçacıklar aynı yerde birikmesine rağmen yüksek indis değerlerinde parçacığın hızına göre farklı konumlarda bulunurlar.

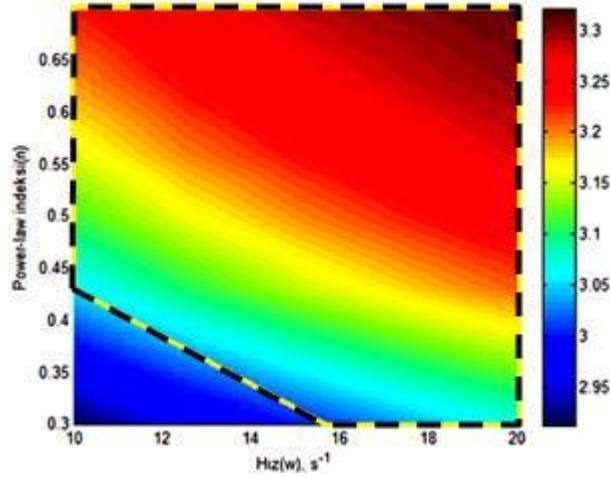


Şekil 159. Farklı  $\omega$  hızları ve  $n$  indisine göre parçacık yörüngeleri

Ayrıca  $\omega - n$  değişimine göre iki parametre değişim analizi yapılabilir. Buna göre Tablo 47 değerlerine göre  $a_p = 0.002$  için büyük indis değerlerinde ve hızın yüksek olduğu yerlerde yörünge uzunluğu artmaktadır. Şekil 160'dan düşük hızlarda ve  $n \in (0.3, 0.5)$  için yörünge uzunluğu en küçük değerini almaktadır.

Tablo 47.  $\omega - n$  değişimine göre parçacık yörünge uzunlukları

$n \backslash \omega$	10	12	15	17	20
0,3	2,9126	3,0005	3,0377	3,0717	3,1033
0,4	3,0575	3,1469	3,1814	3,2112	3,2376
0,5	3,1579	3,2343	3,2602	3,2810	3,2979
0,6	3,2262	3,2840	3,3001	3,3112	3,3188
0,7	3,2731	3,3119	3,3191	3,3216	3,3212



Şekil 160. Parçacık yörünge uzunluğunun  $\omega$  hızı ve  $n$  indisine göre değişimi

Bu bölümde ise farklı akışkan tipleri için parçacığın ortalama yörünge uzunlukları farklı  $m$  kütleleri için karakterize edilecektir.  $a_p = 0.001, 0.002$  ve  $0.003$  değerleri,  $\omega \in (10, 20)$  olan hız parametre değerleri için farklı akışkanlara karşılık gelen ortalama yörünge uzunlukları Tablo 48’de verilmiştir. Buna göre 3. Tip akışkan için ortalama parçacık yörünge uzunluğu en büyük, 2. tip akışkan için ise ortalama parçacık yörünge uzunluğu en küçük değerini almaktadır. Tablodan akışkan tipi ne olursa olsun küçük kütleli parçacığın yörünge uzunluğunu yüksek olduğunu söyleyebiliriz.

Tablo 48.  $m$  kütlesi ve  $\omega$ 'ye göre farklı akışkan tipleri için ortalama yörünge uzunlukları

<b>m</b>	<b>1.Tip akışkan</b>	<b>2.Tip akışkan</b>	<b>3.Tip akışkan</b>	<b>4.Tip akışkan</b>	<b>5.Tip akışkan</b>
<b>0.001</b>	49.5468	15.0507	67.7799	22.3037	49.6377
<b>0.002</b>	8.0161	2.4382	10.1501	3.4147	7.6342
<b>0.003</b>	7.3017	2.2644	9.2460	3.1481	6.9397

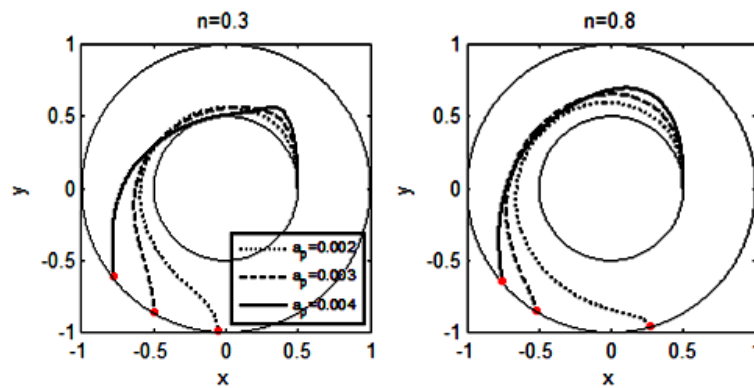
Tablo 49’da ise  $a_p = 0.002$  konumu için sabit bir  $w$  hızı verildiğinde farklı akışkanlar için akışkanın içerisindeki parçacığın maksimum yol alabileceği  $n$  değerleri verilmiştir. Buradan yüksek hızlarda daha uzun parçacık yörünge uzunlarının elde edildiği görülmektedir. 5. Tip akışkan için alınan  $n$  indis değeri için daha yüksek uzunluklar elde edilmektedir.

Tablo 49.  $a_p = 0.002$  için sabit bir hızda maksimum uzunlukları veren  $n$  değerleri

$\epsilon$		10	12	14	15	16	17	18	20
1.Tip	$L$	3.2731	3.2982	3.3120	3.3163	3.3193	3.3207	3.3216	3.3216
	$n$	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70
2.Tip	$L$	3.0576	3.1066	3.1468	3.1649	3.1816	3.1969	3.2113	3.23779
	$n$	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40
3.Tip	$L$	3.2517	3.2815	3.3001	3.3064	3.3114	3.3155	3.3183	3.3216
	$n$	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65
4.Tip	$L$	3.0920	3.1395	3.1785	3.1953	3.2106	3.2248	3.2380	3.2617
	$n$	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43
5.Tip	$L$	3.2566	3.2851	3.3028	3.3089	3.3132	3.3168	3.3193	3.3218
	$n$	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66

### 2.5.2.3. Parçacık Yörüngesinin $m$ Kütlesine Göre Değişimi

Bu bölümde farklı  $n = 0.3$  ve  $n = 0.8$  değerleri için, farklı  $a_p$  yarıçaplarına karşılık gelen kütlelere göre parçacık hareketinin yörüngeleri elde edilmiştir. Bunun için  $a_p = 0.002, 0.003, 0.004$  ve  $0.005$  yarıçap değerleri ve akışkan parametreleri olarak  $\omega = 10, \mu_f = 0.05$  alınmıştır. Buna göre Şekil 161'den  $n$  indisinin artması yörünge uzunluğunu arttırmaktadır. Kütlede meydana gelen artış ise parçacığın yörünge uzunluğunu azaltmaktadır.

Şekil 161. Farklı  $m$  kütleleri ve  $n$  indisine göre parçacık yörüngeleri

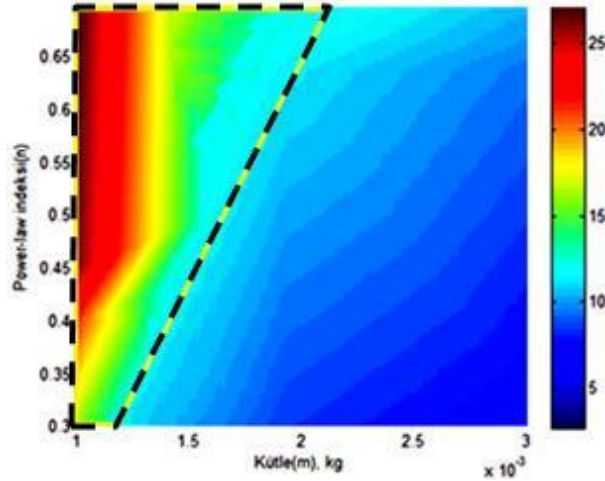
Ayrıca  $a_p - n$  değişimine göre iki parametre değişim analizi yapılabilir. Buna göre Tablo 50 değerlerine göre ve Şekil 162'den düşük kütle değerlerinde yörünge uzunlukları



artmaktadır.  $n$  indisinin artışı yörünge uzunluklarını önemli derecede değiştirmemektedir. Parçacık yörünge uzunluğunun en kısa olduğu durum yüksek kütle değeridir.

Tablo 50.  $m - n$  değişimine göre parçacık yörünge uzunlukları

$n \backslash m$	0,001	0,0013	0,0019	0,0025	0,003
0,3	16,0046	3,1919	2,8389	2,7213	2,6704
0,4	21,1958	3,4963	2,9594	2,8115	2,7505
0,5	26,4852	3,8353	3,0392	2,8695	2,8041
0,6	26,9330	7,9956	3,0911	2,9041	2,8348
0,7	27,2638	8,0384	3,1254	2,9243	2,8535



Şekil 162. Parçacık yörünge uzunluğunun  $m$  kütlesi ve  $n$  indisine göre değişimi

Bu bölümde ise farklı akışkan tipleri için parçacığın ortalama yörünge uzunlukları farklı  $\omega$  hızı için karakterize edilecektir.  $\omega = 10, 15$  ve  $20$  değerleri,  $m \in (0.001, 0.003)$  değeri için farklı akışkanlara karşılık gelen ortalama yörünge uzunlukları Tablo 51'de verilmiştir. Buna göre 3. Tip akışkan için ortalama parçacık yörünge uzunluğu en büyük, 2. Tip akışkan için ise ortalama parçacık yörünge uzunluğu en küçük değeri alır.

Tablo 51.  $\omega$  hızı ve  $m$ 'ye göre farklı akışkan tipleri için ortalama yörünge uzunlukları

$\omega$	1.Tip akışkan	2.Tip akışkan	3.Tip akışkan	4.Tip akışkan	5.Tip akışkan
10	0.0033	0.0008	0.0038	0.0011	0.0030
15	0.0031	0.0009	0.0035	0.0012	0.0027
20	0.0035	0.0011	0.0035	0.0013	0.0029



## 2.6. Newtonyan Olmayan Akışkanlar Couette-Poiseuille Parçacık Taşınım Modeli

### 2.6.1. Model Tanıtımı

Bu bölümde, halkasal bölge geometrisine göre  $\varepsilon \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{x}) - \varepsilon g_0 \mathbf{j}$  modeli, dönme yönünde Couette ve eksenel yönde Poiseuille akışını düşünerek irdelenecektir. Bu modelde amacımız dönme yönünde ve eksenel yönde akışın olduğu durumda Newtonyan olmayan akışkanlar için akışkan parçacığının hareketini modellemek ve parçacığın yörüngelerini parametrelere bağlı olarak irdelemektir. Bunun için parametreler olarak, parçacık yoğunluğu  $\rho_p$ , parçacık yarıçapı  $a_p$ , parçacık kütlesi  $m$ , akışkan viskozitesi  $\mu_f$ , iç silindir hızı  $\omega$ , basınç gradyeni  $\partial P / \partial z$  ve akışkan yoğunluğu  $\rho_f$  gibi parametreler alınmıştır. Ön bilgi olarak silindirik koordinatlarda  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  ve  $z = z$ ,  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  ile verilir. Bu modelde de borunun yatay olduğu dikkate alınıyor. Ayrıca silindirik koordinatlardaki birim vektörler kartezyen koordinatlardaki birim vektörler cinsinden;

$$\begin{aligned} e_r &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ e_\theta &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \\ e_z &= \mathbf{k} \end{aligned} \quad (112)$$

şeklinde verilir.

Akış hem dönme hem de eksenel yönde olduğundan  $u_r = 0$ 'dır. O halde  $V = u_r e_r + u_\theta e_\theta + u_z e_z = u_\theta e_\theta + u_z e_z$ 'dir. Dönme yönünde akış Couette tipi akış olduğundan dönme yönünde hız bileşeni  $u_\theta(r) = \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{1}{r^{(2-n)/n}} - r \right)$  şeklindedir. Aynı zamanda Newtonyan olmayan akışkanlar için eksenel yönde Poiseuille akışı olduğundan eksenel yöndeki hız bileşeni,

$$u_z = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \cdot \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o r \right| \right)^{(n+1)/n} \right]$$

şeklinde verilir. Bu hız profili, akışkanın Newtonyan olmadığı, dış ve iç çeperde parçacık hızlarının kaymama koşulundan dolayı sıfır olduğu model için alınan hız profilidir ve  $\mu_0^* = \frac{\mu_0 L}{\rho V^{2-n}}$ 'dir. Modelde boru yatay olarak düşünülmektedir. O halde;

$$\begin{aligned}
\vec{V} &= u_\theta e_\theta + u_z e_z = u_\theta (-\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}) + u_z \mathbf{k} \\
&= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{1}{r^{(2-n)/n}} - r \right) \left( -\frac{y}{r} \mathbf{i} + \frac{x}{r} \mathbf{j} \right) + \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \dots \\
&\quad \dots \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o r \right| \right)^{(n+1)/n} \right] \mathbf{k} \\
&= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{1}{(x^2 + y^2)^{(2-n)/2n}} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) \left( -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} \right) + \dots \\
&\quad \dots + \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o \sqrt{x^2 + y^2} \right| \right)^{(n+1)/n} \right] \mathbf{k} \\
&= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \left( y - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{n}}} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{n}}} - x \right) \mathbf{j} \right) + \dots \\
&\quad \dots + \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o \sqrt{x^2 + y^2} \right| \right)^{(n+1)/n} \right] \mathbf{k} \\
&= V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k} \tag{113}
\end{aligned}$$

Hız bileşenleri kartezyen koordinatlarda ifade edilmiştir. Bu durumda model denklemindeki  $\vec{V}(\mathbf{x})$  ifadesi yerine bu modelde eksenel hız profili ve dönme yönünde hız profilinden oluşan ifadeyi alabiliriz.  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  olması durumunda denklem;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) + (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) &= \vec{V}(\mathbf{x}) - \varepsilon g_0 \mathbf{j} \\
\varepsilon(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) + (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \left( y - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{n}}} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{n}}} - x \right) \mathbf{j} \right) + \dots \\
&\quad \dots + \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o \sqrt{x^2 + y^2} \right| \right)^{(n+1)/n} \right] \mathbf{k} - \varepsilon g_0 \mathbf{j}
\end{aligned}$$

ve buradan,

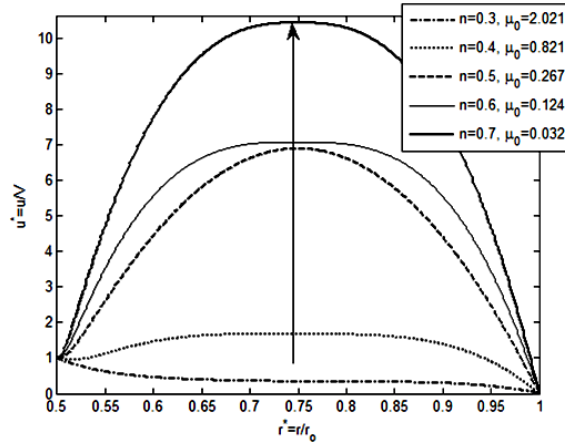
$$\begin{aligned}
\varepsilon \ddot{x} + \dot{x} &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( y - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{n}}} \right) \\
\varepsilon \ddot{y} + \dot{y} &= \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{n}}} - x \right) - \varepsilon g_0 \\
\varepsilon \ddot{z} + \dot{z} &= \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o \sqrt{x^2 + y^2} \right| \right)^{(n+1)/n} \right]
\end{aligned} \tag{114}$$

olmak üzere üç denklem elde edilmektedir. Bu denklemleri diferansiyel denklem sistemlerine dönüştürebiliriz.  $x = u_1, \dot{x} = u_2, y = u_3, \dot{y} = u_4, z = u_5, \dot{z} = u_6$  alırsak

denklemlerimiz  $u_1(0) = x(0)$ ,  $u_2(0) = \dot{x}(0)$ ,  $u_3(0) = y(0)$ ,  $u_4(0) = \dot{y}(0)$ ,  $u_5(0) = z(0)$ ,  $u_6(0) = \dot{z}(0)$  başlangıç şartlarına göre,

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_1 &= u_2 \\
 \dot{u}_2 &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( u_3 - \frac{u_3}{(u_1^2 + u_3^2)^{1/n}} \right) - u_2 \right] \\
 \dot{u}_3 &= u_4 \\
 \dot{u}_4 &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{r_i^{(2-n)/n} r_o}{r_o^{2/n} - r_i^{2/n}} \left( \frac{u_1}{(u_1^2 + u_3^2)^{1/n}} - u_1 \right) - u_4 \right] - g_0 \\
 \dot{u}_5 &= u_6 \\
 \dot{u}_6 &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu_0^*(n)} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \right)^{1/n} \left[ \left( \frac{r_o - r_i}{2} \right)^{(n+1)/n} - \left( \left| \frac{r_o + r_i}{2} - r_o \sqrt{u_1^2 + u_3^2} \right| \right)^{(n+1)/n} \right] - u_6 \right]
 \end{aligned} \tag{115}$$

şeklinde olacaktır. Bu sistem parçacığın iç silindirin üzerinden başlayarak dış silindire ulaşmaya kadar dönme yönü ve eksenel yönde izlediği yörüngeyi verir. Parçacığın sürati ise dönme ve eksenel yönde boyutsuz hız profillerine göre  $V_p = \|\vec{V}_p\|_2$ 'dir.  $L = 10$ ,  $\omega = 10$ ,  $\partial P / \partial z = -1$  değerleri için farklı  $n, \mu_0$  indislerinin artışına göre inceleme yapıldığında Şekil 163'e göre sabit bir konumunda indisin artmasıyla beraber parçacık hızının da arttığı görülmektedir.

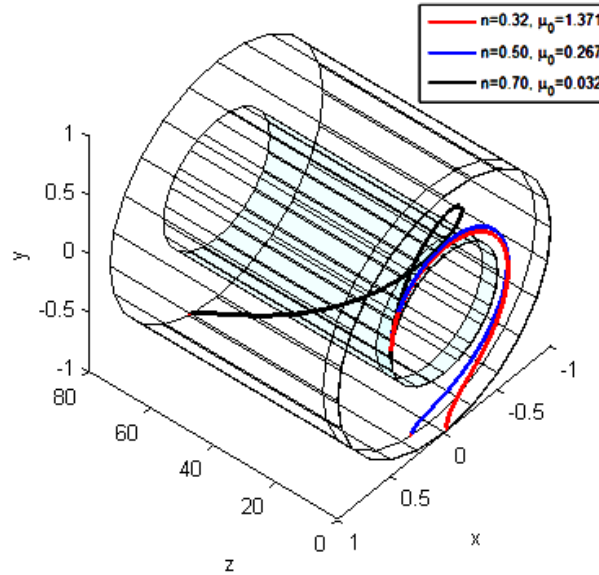


Şekil 163. Halkasal bölgedeki parçacığın hız profiline  $n$  indisine göre değişimi

## 2.6.2. Parametre Değişim Analizi

### 2.6.2.1. Parçacık Yörüngesinin $n$ İndisine Göre Değişimi

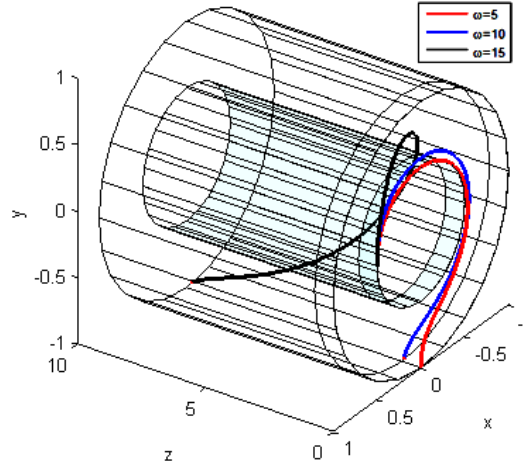
Bu modelde  $n$  indisine göre parçacık yörünge değişimi incelenecektir. Diğer tüm parametreler sabit kalmak koşuluyla kütle ( $a_p = 0.002$ ), iç silindir hızı ( $\omega = 10$ ) ve basınç gradyeni ( $\partial P / \partial z = -1$ )'ne göre akışkan profillerinin halkasal bölgedeki parçacık için, 1. Tip akışkan içerisinde alınan  $n = 0.32, \mu_0 = 1.371$ ,  $n = 0.50, \mu_0 = 0.267$  ve  $n = 0.70, \mu_0 = 0.032$  değerlerine göre yörünge uzunlukları incelenecektir. Buna göre Şekil 164'den  $n$  indis değerinin artışı yörünge uzunluğunu arttırmaktadır. Düşük  $n$  değerlerinde parçacıklar dış silindirde yakın yerlerde toplanırlar.



Şekil 164. Parçacık yörüngesinin farklı  $n$  indislerine göre incelenmesi

### 2.6.2.2. Parçacık Yörüngesinin $\omega$ Hızına Göre Değişimi

Bu bölümde farklı  $\omega$  hız parametrelerine göre parçacık profili incelenecektir. 1. Tip akışkan içerisinde alınan  $n = 0.32, \mu_0 = 1.371$  değeri için, farklı  $\omega$  açısal hızlarına göre parçacık hareketinin yörüngeleri elde edilmiştir. Bunun için  $\omega = 5, 10, 15$  hız değerleri ve akışkan parametreleri olarak  $a_p = 0.002, \partial P / \partial z = -1$  alınmıştır. Buna göre Şekil 165'den  $\omega$  hızındaki artışın yörünge uzunluğunu arttırdığı görülmüştür.

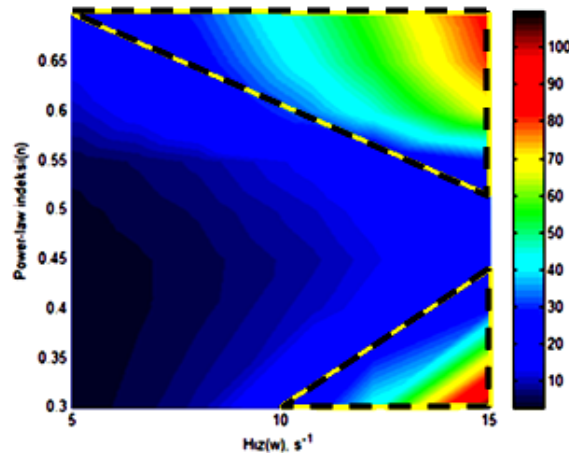


Şekil 165. Halkasal bölgede farklı  $\omega$  hızları ve  $n$  indisine göre parçacık yörüngeleri

Ayrıca  $\omega - n$  değişimine göre iki parametre değişim analizi yapılmıştır ve değerler Tablo 52’de verilmiştir. Buna göre Şekil 166’dan yüksek hız ve  $n \in (0.3, 0.4)$  ve  $n \in (0.55, 0.7)$  değerlerinde yörünge uzunluğu en yüksek değerini almaktadır. Düşük hızlarda ve  $n \in (0.4, 0.55)$  indis değerleri için yörünge uzunluğu en düşük değerini almaktadır.

Tablo 52. Halkasal bölgede  $\omega - n$  değişimine göre parçacık yörünge uzunlukları

$n, \mu_0$	$\omega$	5	7	9	12	15
0,3	1,37	2,7605	3,6222	8,4224	42,7638	109,5864
0,4	0,82	2,8825	3,4910	5,4279	14,9896	29,1048
0,5	0,27	3,0191	4,0662	6,3244	14,2958	23,8008
0,6	0,12	4,1482	10,6208	20,1403	44,2385	68,0309
0,7	0,03	6,2817	17,4988	30,6829	59,3579	84,7838



Şekil 166. Halkasal bölgede parçacık yörünge uzunluğunun  $\omega$  hızı ve  $n$  indisine göre değişimi

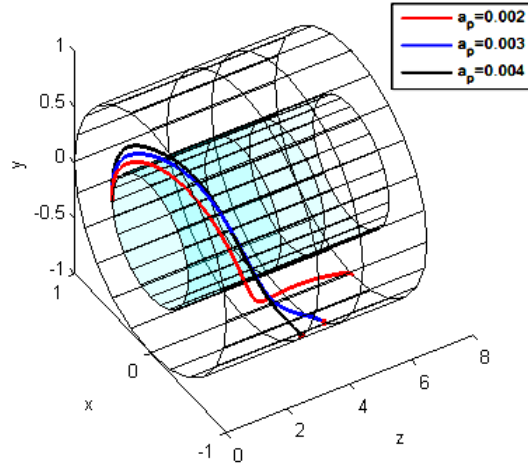
Tablo 53’de ise  $a_p = 0.002$  değeri için  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $L = 10$  parametre değerlerine göre sabit bir  $\omega$  hızı verildiğinde farklı akışkanlar için akışkanın içerisindeki parçacığın maksimum yol alabileceği  $n$  ve  $\mu_0$  değerleri verilmiştir. Buradan yüksek hızlarda daha uzun parçacık yörünge uzunlukları elde edilmektedir. Sonuç olarak Tablo 53 değerlerinden verilen  $\omega$  hız ve  $n$  indis değeri için etkin taşınım 2. veya 5. Tip akışkanla sağlanabilir.

Tablo 53.  $a_p = 0.002$  için sabit bir hızda maksimum uzunlukları veren  $n$  ve  $\mu_0$  değerleri

$\omega$		5	6	8	9	10	12	13	15
1.Tip	$L$	6.2817	8.9048	17.4988	23.5143	30.6829	48.5709	59.3579	109.586
	$n$	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.70	0.30
	$\mu_0$	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	1.371
2.Tip	$L$	3.8793	6.1847	20.7646	36.7183	61.4794	149.885	221.321	443.153
	$n$	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40
	$\mu_0$	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43
3.Tip	$L$	3.8888	4.9441	9.0950	13.0250	21.4743	52.8145	78.671	160.392
	$n$	0.60	0.60	0.60	0.39	0.39	0.39	0.39	0.39
	$\mu_0$	0.35	0.35	0.35	0.71	0.71	0.71	0.71	0.71
4.Tip	$L$	3.02292	3.4816	6.6644	10.4222	16.4514	38.1212	55.4808	108.682
	$n$	0.43	0.41	0.41	0.41	0.41	0.41	0.41	0.41
	$\mu_0$	0.69	0.79	0.79	0.79	0.79	0.79	0.79	0.79
5.Tip	$L$	4.6410	7.1323	18.7762	29.2319	43.6199	87.1493	117.927	202.038
	$n$	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	$\mu_0$	0.34	0.34	0.34	0.34	0.34	0.34	0.34	0.34

### 2.6.2.3. Parçacık Yörüngesinin $m$ Kütlesine Göre Değişimi

Bu bölümde amacımız farklı  $a_p$  yarıçaplarına karşılık gelen kütlelere göre parçacık hareketinin yörüngeleri elde edilmiştir. Bunun için  $a_p = 0.002, 0.003$  ve  $0.004$  yarıçap değerleri ve akışkan parametreleri olarak  $\omega = 10, \partial P/\partial z = -1$  ve 1. Tip akışkan içerisinde  $n = 0.32, \mu_0 = 1.371$  alınmıştır. Buna göre Şekil 167’den bu parametreler ile parçacık kütlesinin artışı yörünge uzunluğunu azaltmaktadır.

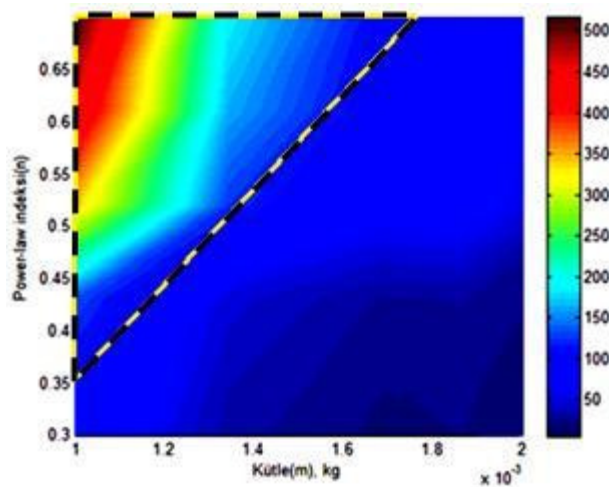


Şekil 167. Halkasal bölgede farklı  $m$  kütleleri ve  $n$  indisine göre parçacık yörüngeleri

Ayrıca  $a_p - n$  değişimine göre iki parametre değişim analizi yapılmıştır ve sonuçlar Tablo 54’de verilmiştir. Şekil 168’den düşük kütle ve yüksek  $n$  indis değerlerinde yörünge uzunluğu en büyük değerini almaktadır. Kütle değeri arttığında yörünge uzunluğu da buna bağlı olarak azalmaktadır.

Tablo 54. Halkasal bölgede  $m - n$  değişimine göre parçacık yörünge uzunlukları

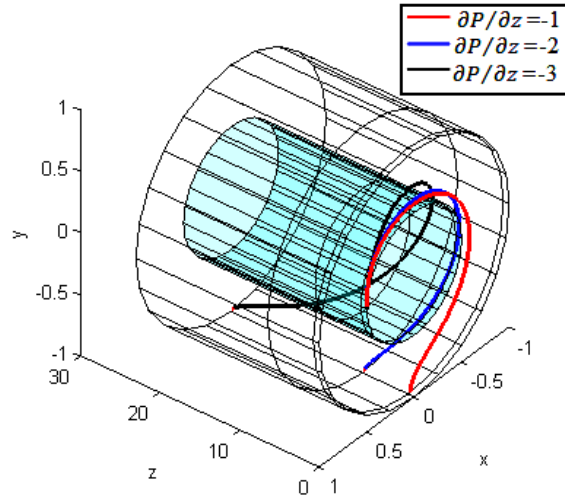
$m$		$n, \mu_0$				
		0,001	0,0012	0,0015	0,0018	0,002
0,3	1,37	91,5085	19,3764	10,3309	8,9068	8,4229
0,4	0,82	62,1643	18,8856	6,7486	5,7295	5,4283
0,5	0,27	98,2054	20,8820	8,2856	6,7206	6,3244
0,6	0,12	340,4171	70,4207	28,5763	21,6155	20,1403
0,7	0,03	516,2240	105,90516	45,5583	32,9978	30,6844



Şekil 168. Halkasal bölgede parçacık yörünge uzunluğunun  $m$  kütlesi ve  $n$  indisine göre değişimi

#### 2.6.2.4. Parçacık Yörüngesinin $\partial P/\partial z$ Basınç Gradyenine Göre Değişimi

Bu bölümde amacımız farklı  $\partial P/\partial z$  basınç gradyeni karşılık parçacık hareketinin yörüngeleri elde edilmiştir. Bunun için  $\partial P/\partial z = -1, -3$  ve  $-5$  basınç gradyeni değerleri ve akışkan parametreleri olarak  $\omega = 10$ ,  $\alpha_p = 0.002$  ve  $1$ . Tip akışkan içerisinde alınan  $n = 0.32$ ,  $\mu_0 = 1.371$  alınmıştır. Buna göre Şekil 169'dan bu parametreler altında basınç gradyenindeki artış yörünge uzunluğunu arttırmaktadır.



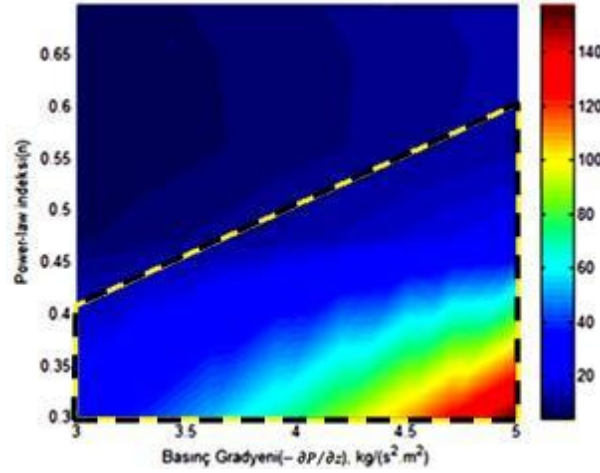
Şekil 169. Halkasal bölgede farklı  $\partial P/\partial z$  basınç gradyenleri ve  $n$  indisine göre parçacık yörüngeleri

Ayrıca  $-\partial P/\partial z - n$  değişimine göre iki parametre değişim analizi yapılmıştır ve elde edilen değerler Tablo 55'de verilmiştir. Buna göre Şekil 170'den düşük indis ve yüksek basınç gradyeni değerleri için yörünge uzunluğu en büyüktür. Yüksek indis ve düşük basınç gradyeni değerlerinde ise yörünge uzunluğu azalmaktadır.

Tablo 55. Halkasal bölgede  $-\partial P/\partial z - n$  değişimine göre parçacık yörünge uzunlukları

$-\partial P/\partial z$		3	3.3	3.9	4,5	5,0
$n, \mu_0$						
0,3	1,37	28,5614	52,7452	88,4893	128,2406	158,3083
0,4	0,82	6,9452	9,4871	14,1779	18,5869	22,2660
0,5	0,27	4,2270	6,9056	8,1963	11,3576	12,8541
0,6	0,12	12,1886	16,4747	21,8766	25,9298	28,9269
0,7	0,03	14,4045	18,5869	23,9866	27,9107	30,3913

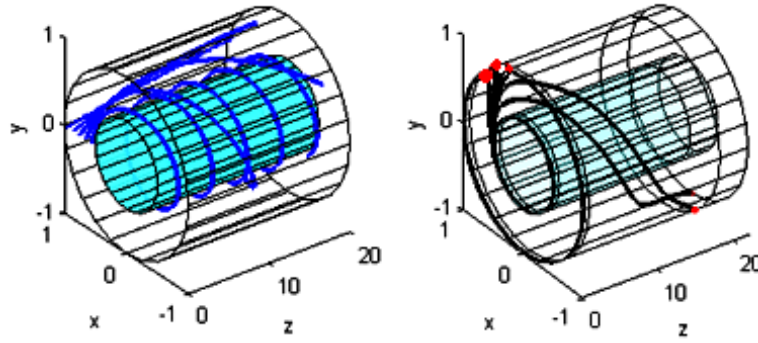




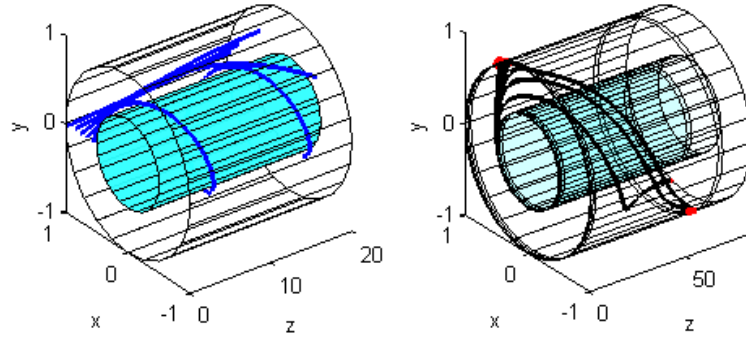
Şekil 170. Halkasal bölgede parçacık yörünge uzunluğunun  $\partial P/\partial z$  basınç gradyeni ve  $n$  indisine göre değişimi

### 2.6.3. Newtonyan Olmayan Akışkan İçerisinde Parçacık Kütlelerinin Davranışı

Bu kesimde daha önce belirlenen akışkan parametreleri ile akışkan elamanı ile Newtonyan olmayan akışkan içerisinde bulunan parçacığın hareketini farklı kütleler için kıyaslamaktır. Bunun için akışkan parametreleri olarak  $\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $L = 20$  alınacaktır. Ayrıca power-law parametreleri olarak  $n = 0.36$  ve  $\mu_0 = 1.49$  alınacaktır. Bu parametreler ile belirlenen akışkan hareketine göre farklı kütlelerin davranışı incelenmiştir ve Şekil 171'e göre bu akışkan içerisinde büyük kütleli parçacıkların dış silindire hemen ulaştıkları görülmektedir. Sonuç olarak sondaj işleminde matkap mekanizmasının parçacıkların küçük olmasını sağlaması sondaj işleminin etkin olmasını sağlayacaktır. Fakat iç silindir hızının düşük olmasından dolayı dış silindire yakın yerlerde büyük parçacıklar tarafından asıntılar oluşabilmektedir. Bunun için iç silindir hızının biraz daha yüksek olduğu seçenek üzerinde durulmalıdır.  $\omega = 20$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $L = 20$  parametreleri için akışkan hareketi ve bu harekete bağlı olarak farklı kütlelerdeki parçacıkların davranışı incelenmiştir. Buna göre Şekil 172'den, aynı türden parçacıkların bu parametrelere göre taşınımının daha kolay olduğu görülmektedir. Sistemde aşırı büyük derecede parçacıkların olmadığı göz önüne alındığında bu seçenek daha uygun gözükmektedir.



Şekil 171.  $n = 0.36$ ,  $\mu_0 = 1.49$ ,  $\omega = 10$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $L = 20$  parametreleri için akışkan içerisinde farklı kütleli parçacıkların hareketleri



Şekil 172.  $n = 0.36$ ,  $\mu_0 = 1.49$ ,  $\omega = 20$ ,  $\partial P/\partial z = -1$  ve  $L = 20$  parametreleri için akışkan içerisinde farklı kütleli parçacıkların hareketleri

#### 2.6.4. Newtonyan ve Newtonyan Olmayan Akışkan İçin Karşılaştırma

Sonuç olarak, Newtonyan ve Newtonyan olmayan akışkanlar için halkasal bölgedeki parçacık taşınımı için şunlar söylenebilir:

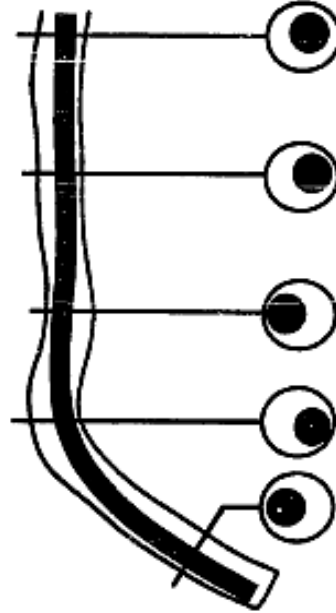
Şayet akışkan Newtonyan ise iç silindir hızı çok düşük hızlarda çalışmamak gereklidir. Aksi takdirde çok düşük hızlarda sistemde oluşacak asıntılar hesaba katıldığında parçacık taşınım için uygun olmayan sonuçlar ortaya çıkabilir. Sistemdeki parçacıkların uygun bir şekilde dışarı atılması gerekir ve iç silindir hızının çok düşük olduğu seçenek üzerinde durulmamalıdır. Ekonomik sondaj için sistemin makul bir sürede çalışması gerekir. İç silindir hızının düşük olduğu durumlarda sondaj işlem süresi de artar. İncelediğimiz modele göre Newtonyan olmayan akışkanlar için iç silindir hızı için çok yüksek hız olmaması koşuluyla, daha yüksek hızlarda tercih edilebilir ve bu durum parçacık taşınımı için bir sorun oluşturmaz. Şekil 135'e göre akışkanın Newtonyan olduğu durumda iç silindir hızı düşük olduğunda parçacıkların asıntı oluşturduğu görülmektedir.

Fakat Şekil 172’de ise akışkanın Newtonyan olmadığı durumda parçacıkların Newtonyan olan akışkan içerisinde olan taşınımından daha farklı davranış sergilediği görülmektedir. Aynı şekilde iç silindir hızı biraz daha arttığında daha düzgün bir taşınım sağlandığı görülmektedir. O halde sistemde Newtonyan olmayan akışkan kullanılmalıdır.

Yüksek basınç gradyaninde Newtonyan olmayan akışkanlarla, düşük basınç gradyaninde ise Newtonyan akışkanlarla çalışmak daha avantaj sağlar. Amacımız daha yüksek basınç gradyaninde parçacıkların daha kısa zamanda sistemden atmak olduğundan Newtonyan olmayan akışkanlarla çalışılmalıdır. Ayrıca sondaj sisteminde genelde Newtonyan olmayan akışkan kullanıldığı için düşük basınç gradyaninde çalışmak avantaj sağlamaz. Newtonyan olmayan akışkan için  $n$  indisi arttıkça sabit bir kütle değeri için yörünge uzunluğu artar. Sabit basınç gradyaninde  $n$  indisi arttıkça yörünge uzunluğu azalır.

## 2.7. Eş Merkezli Olmayan Halkasal Bölgede Parçacık Taşınım Modeli

Petrol kuyularında halkasal bölgedeki akışkan akışı karmaşık bir problemdir. Şu ana kadar halkasal bölgenin geometrisi eş merkezli sistemlere indirgenerek basit modeller üzerinde durulmuştur. Bu çalışmada içi silindirin halkasal bölgede herhangi bir yerde konumlandığı eş merkezli olmayan akışkan akışı modeli üzerinde durulacaktır. Eş merkezli olmayan modelin çözümünü 3-boyutta yapmak zordur. Ayrıca böyle bir geometride akı modelini tanımlayan denklemler oldukça karmaşıktır ve sonuç olarak çözümler oldukça uzundur. Bundan dolayı çözümler sabit bir kesitte 2-boyutta yapılacaktır. Şekil 173’de iç silindirin farklı konumları için farklı eş merkezli olmayan durumlar görülmektedir.



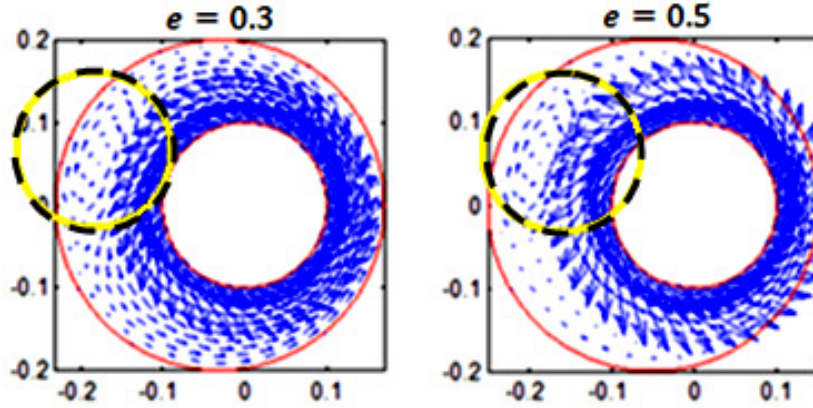
Şekil 173. Petrol kuyusunda iç silindirin konumu (Hacıslamoğlu, 1989)

Bu çalışmada eş merkezli halkasal bölgede bazı parametreler cinsinden ilk önce girdap durumu incelenecek daha sonra ise girdaplı durumlara göre parçacığın hareketi incelenecektir. Eş merkezli olmayan bölgedeki hız profilleri Fluent yazılımı ile elde edilmiştir. Bu bölgedeki parçacık hareketi bu hız profillerine göre belirlenmektedir. İç silindir üzerinde belirli bir hızla harekete başlayan parçacığın  $\vec{x}(t_{i+1})$  konumundaki pozisyonunu belirlemek için  $\vec{x}(t_i)$  konumunda  $\vec{V}(\vec{x}(t_{i+1}))$  hız vektörü Fluent yardımıyla elde edilmektedir. Daha sonra bu hızla belli bir mesafe almakta ve bu mesafenin sonunda

tekrar Fluent'ten alınan hız hesaplanmakta ve bu hızla tekrar belirli bir mesafe gitmektedir. Böylece parçacığın dış silindire ulaşıncaya kadarki yörüngesi bu şekilde belirlenmektedir. Burada amacımız belirtilen parametre kümeleri içerisinde eş merkezli olmayan sistemde daha az parçacık asıntıları oluşturacak parametreleri belirlemektir. Bunun için girdapların az olduğu durumlar üzerinde durulmalıdır.

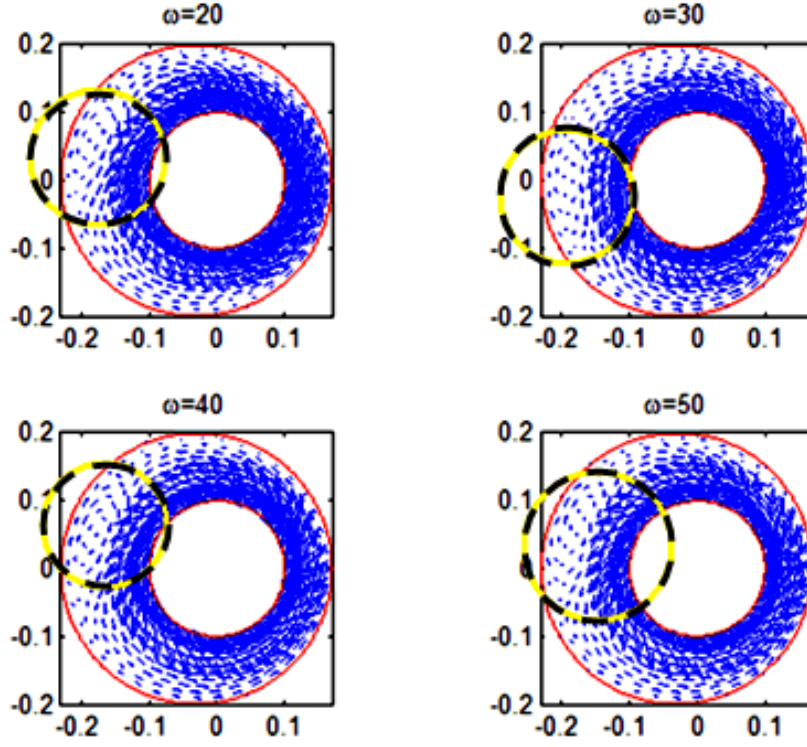
### 2.7.1. Parametre Analizleri

Bu kısımda, eş merkezli olmayan model için uygulamalara yer verilecektir. Çözümler Fluent'ten alınan hız bileşenleri ile eş merkezli olmayan bölgeye aktarılmaktadır. Amacımız eş merkezli olmayan bölgede yörüngeleri ve bu bölgedeki girdap oluşumlarını anlamaktır. Bunun için  $r_i = 0.1$  ve  $r_o = 0.2$  olarak alınmıştır. Buradan  $r_i/r_o = 0.5$  olup bu orana göre irdelemeler yapılacaktır.  $\omega = 20$  ve  $\mu_f = 0.05$  parametre değerleri için  $e = 0.3$  ve  $e = 0.5$  eşmerkezlik parametreleri için hız alanları Şekil 174'de verilmiştir. Buna göre eş merkezli olmayan halkasal bölgede girdaplar oluşmaktadır.



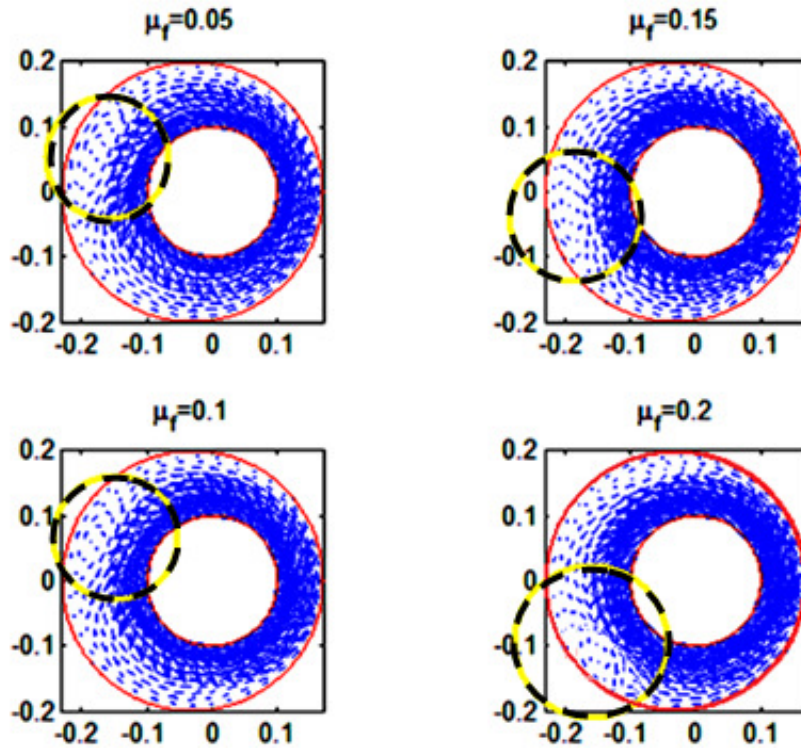
Şekil 174.  $e = 0.3$  ve  $e = 0.5$  eşmerkezlik parametreleri için hız alanlarının  $\omega = 20$  ve  $\mu_f = 0.05$  parametreleri için gösterimi

$e = 0.3$ ,  $\mu_f = 0.1$  olmak üzere farklı hız parametre değerleri için hız alanları Şekil 175'de gösterilmiştir. Buna göre  $\omega = 20,30,40,50$  hız parametreleri için girdaplar oluşmaktadır.



Şekil 175. Farklı hız parametreleri ve  $e = 0.3$ ,  $\mu_f = 0.1$  için hız alanları

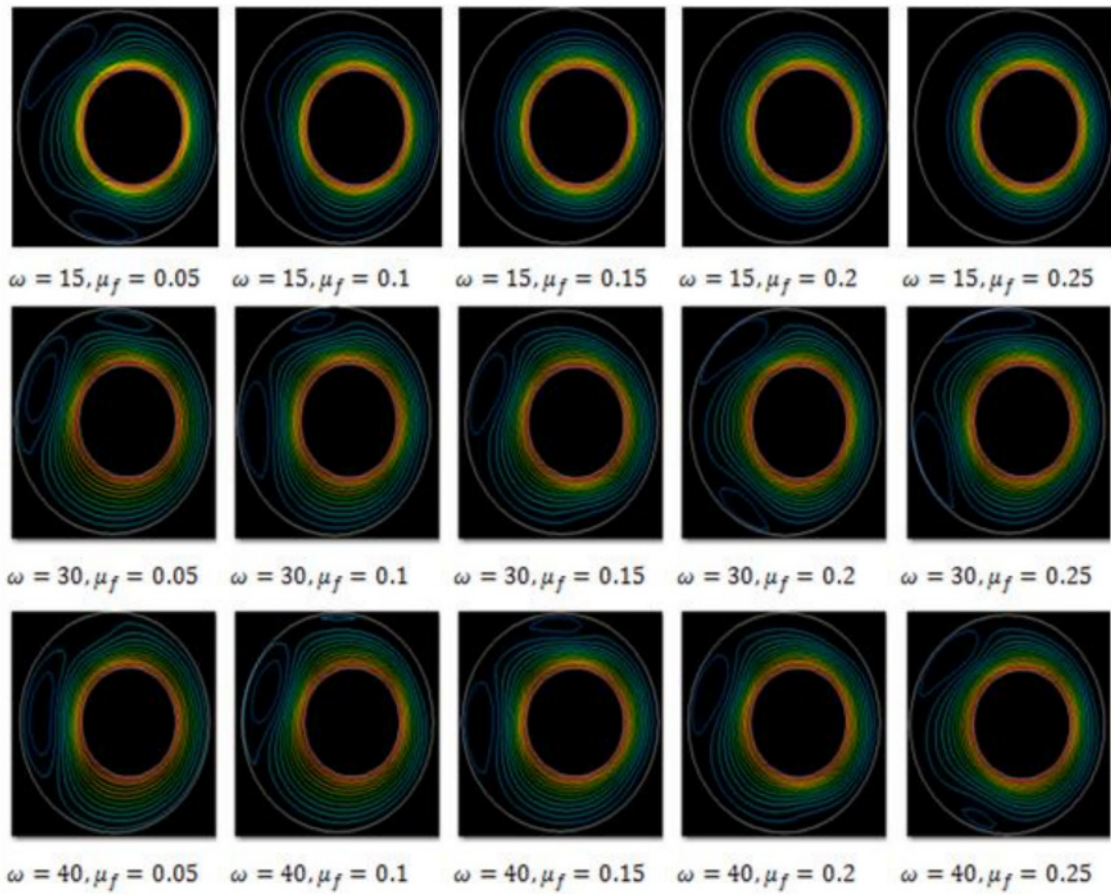
$e = 0.3$ ,  $\omega = 20$  olmak üzere farklı hız parametre değerleri için hız alanları Şekil 176'da gösterilmiştir. Buna göre  $\mu_f = 0.05, 0.15, 0.1, 0.2$  viskozite değerleri için girdaplar oluşmaktadır.



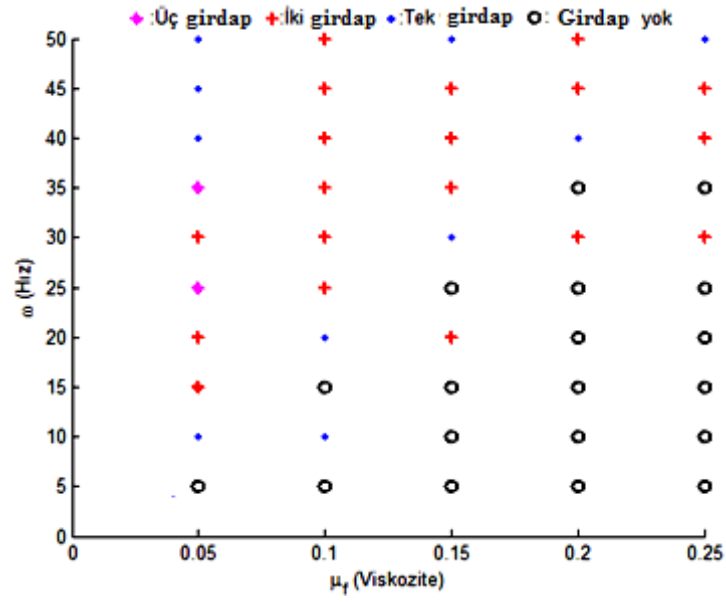
Şekil 176. Farklı viskozite parametreleri ve  $e = 0.3$ ,  $\omega = 20$  için hız alanları



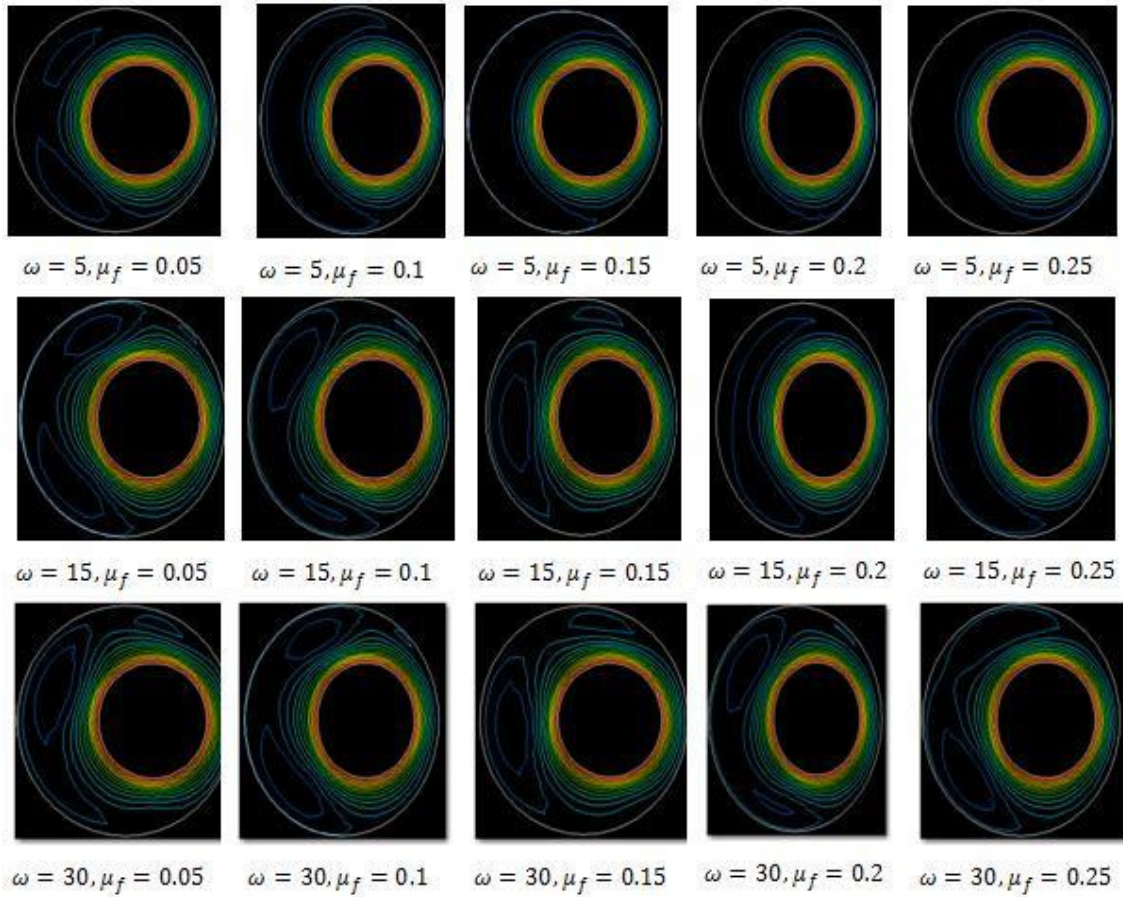
Bu şekilde girdap oluşumlarını gördükten sonra en genel anlamda farklı eş merkezlik oranları, viskoziteler ve hızlar için girdap incelemeleri yapılmıştır. Şekil 177 ve Şekil 179'dan görüldüğü gibi farklı dış merkezlilik durumları için düşük hızlarda ve yüksek viskoz değerlerde halkasal bölgedeki girdap sayıları azalmaktadır. Ortalama açısal hızlarda ve düşük viskozitede girdap sayıları artmaktadır. Şekil 181 ve Şekil 182'den ise  $e = 0.7$  ve  $e = 0.9$  dışmerkezlik değerleri için hesaplanan akışkan yörüngeleri için hepsinde tek girdap oluşmaktadır.



Şekil 177.  $e = 0.3$  dışmerkezlik değeri ve farklı  $\omega$  açısal hızı  $\mu_f$  viskozitesi için parçacık yörüngeleri

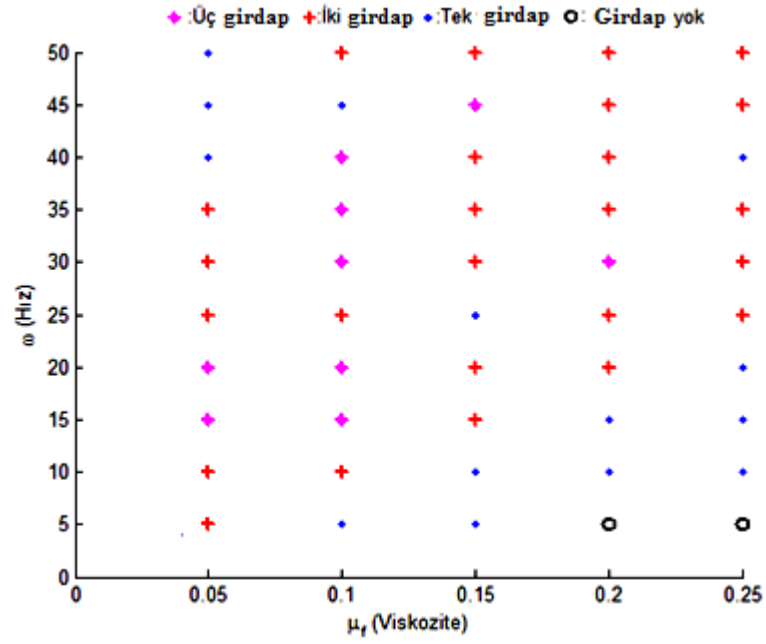


Şekil 178.  $e = 0.3$  dışmerkezlik değeri için halkasal bölgedeki girdaplar

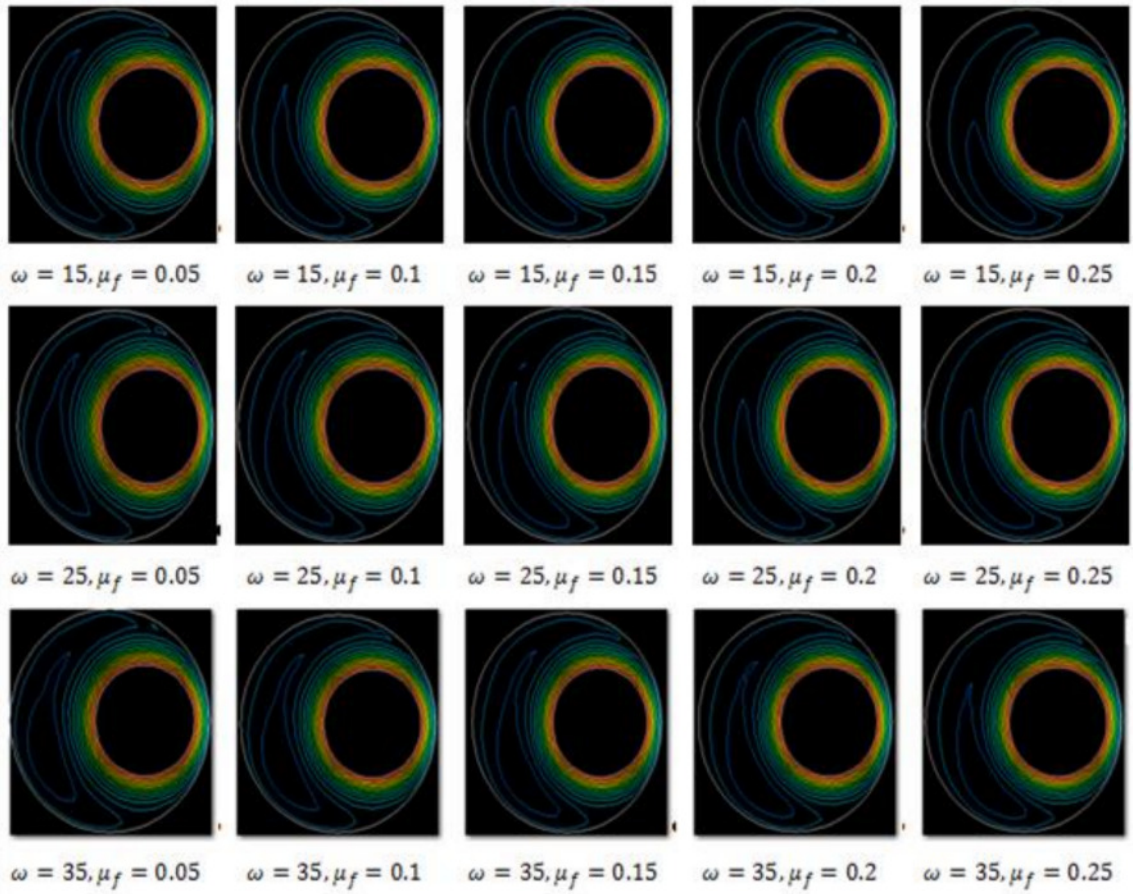


Şekil 179.  $e = 0.5$  dışmerkezlik değeri ve farklı  $\omega$  açısal hızı  $\mu_f$  viskozitesi için parçacık yörüngeleri

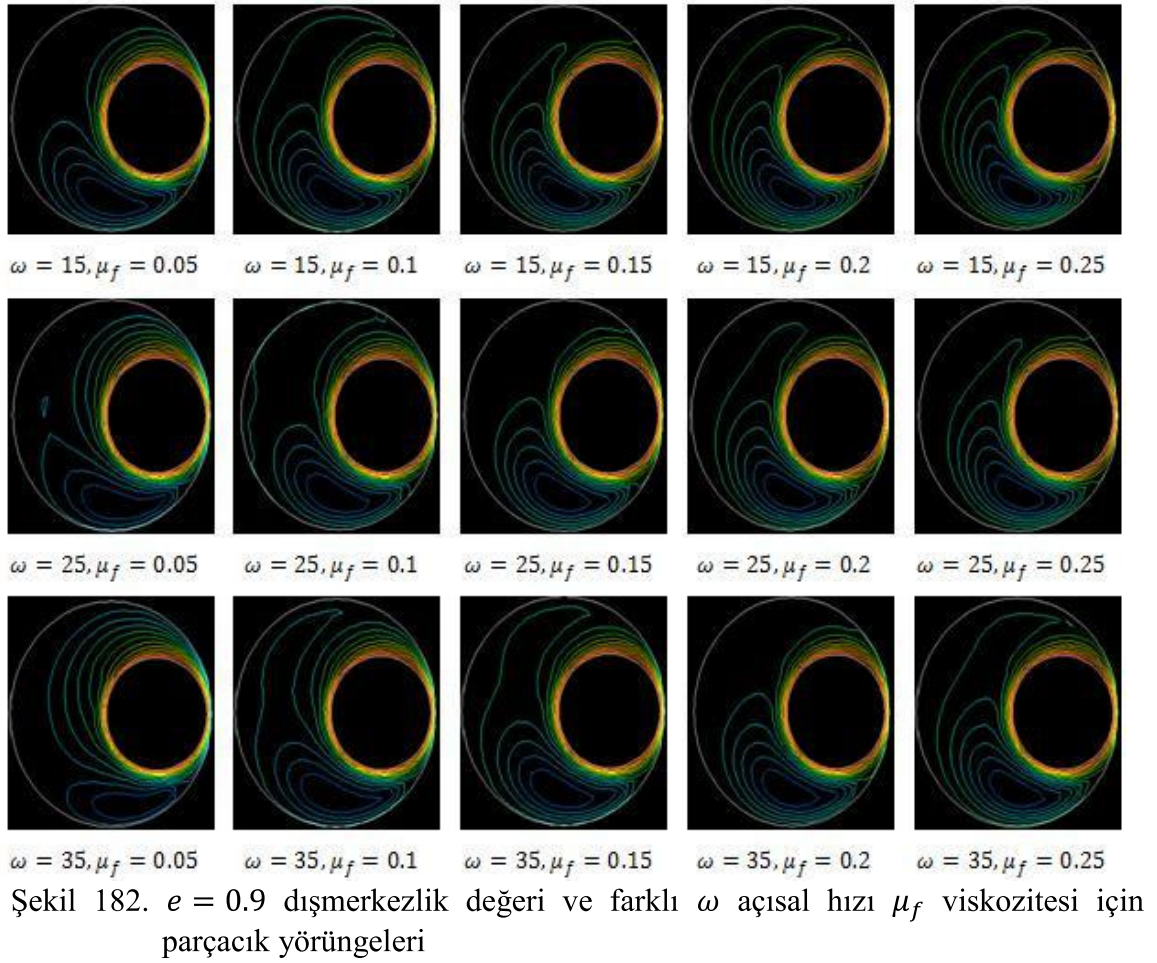




Şekil 180.  $e = 0.5$  dışmerkezlik değeri için halkasal bölgedeki vorteksler

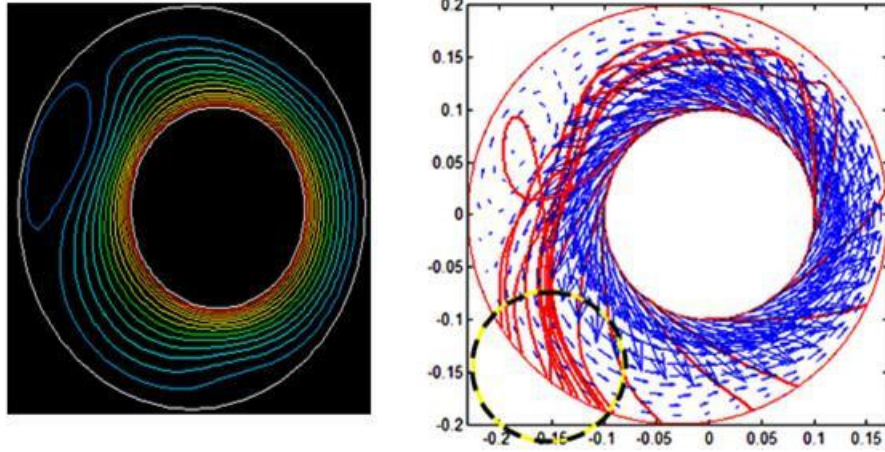


Şekil 181.  $e = 0.7$  dışmerkezlik değeri ve farklı  $\omega$  açısal hızı  $\mu_f$  viskozitesi için parçacık yörüngeleri



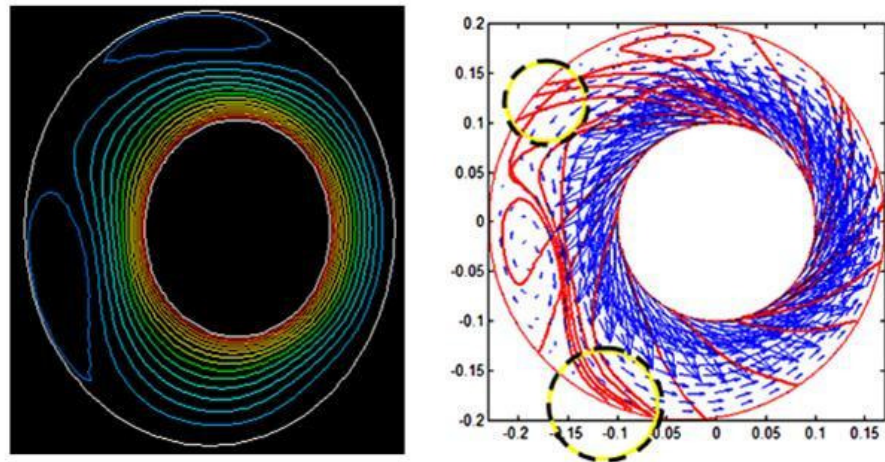
### 2.7.2. Eş Merkezli Olmayan Halkasal Bölgede Parçacık Hareketi

Bu bölümde Fluent yardımıyla elde edilen alınan hız profilleri yardımıyla parçacığın iç silindirden başlayarak sergileyeceği davranış incelenmektedir.  $e = 0.3$ ,  $\omega = 10$  ve  $\mu_f = 0.05$  parametre değerleri ve  $a_p = 0.002$  yarıçaplı parçacık kütlesi için Fluent'ten alınan hız profili içerisinde parçacık hareketi için halkasal bölge içerisinde tek girdabın oluştuğu durum göz önüne alınmaktadır. Şekil 183'den girdap olmayan bölgelerde parçacık dış silindire kadar düzgün bir şekilde hareket etmektedir. Fakat girdap olan yerlerde parçacığın hareketi düzgün olmayıp, girdabın oluştuğu yerin hemen bitişiğinde, sarı daire içerisinde parçacık asıntıları oluşabilmektedir. Bu ise sisteme zarar verebilmektedir. Sonuç olarak sistemin en az hasara maruz kaldığı duruma göre parametre seçimleri yapılmalıdır.

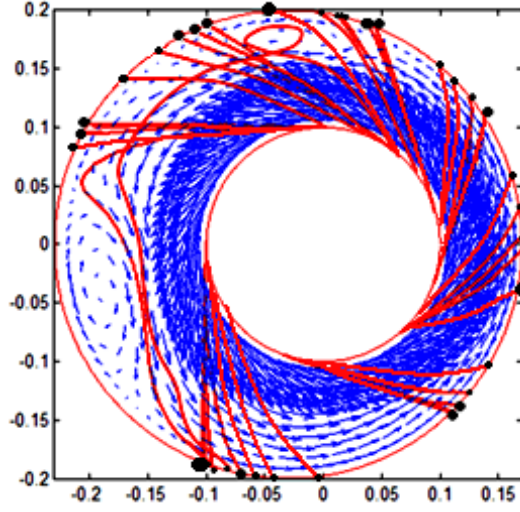


Şekil 183.  $e = 0.3$ ,  $\omega = 10$  ve  $\mu_f = 0.05$  parametre değerleri için eş merkezli olmayan bölgede parçacık hareketi

$e = 0.3$ ,  $\omega = 20$  ve  $\mu_f = 0.15$  parametre değerleri ve  $a_p = 0.002$  yarıçaplı parçacık kütlesi için hız profili içerisinde halkasal bölgedeki iki girdaplı durum oluşmaktadır. Buna göre parçacık hareketi için Şekil 184'den girdap olmayan bölgelerde parçacık dış silindire düzgün bir şekilde hareket etmektedir. Fakat girdap oluşan bölgelerin hemen alt kısımlarında asıntılar oluşmaktadır. Bu ise sisteme zarar verebildiğinden tercih edilen bir durum değildir. Ayrıca Şekil 185'den küçük kütle değerlerinin girdap içerisine düştüğü, yüksek kütle değerlerin ise girdaba yakalanmadan dış silindire ulaştığı gözlemlenmiştir. Buradan çıkan sonuç ise parçacık taşınımında oluşan parçacıklar çok küçük boyutta olmamalıdır. Aksi takdirde bu durum parçacık asıntılarına neden olmaktadır.



Şekil 184.  $e = 0.3$ ,  $\omega = 20$  ve  $\mu_f = 0.15$  parametre değerleri için eş merkezli olmayan bölgede parçacık hareketi

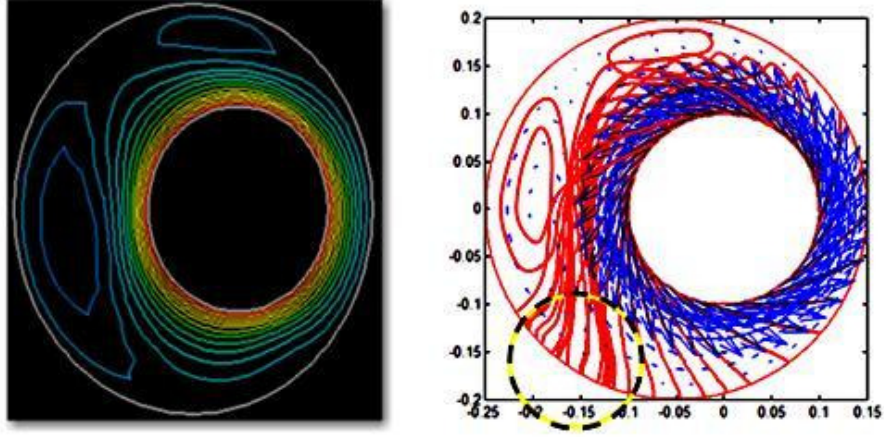


Şekil 185.  $e = 0.3$ ,  $\omega = 20$  ve  $\mu_f = 0.15$  parametre değerleri için eş merkezli olmayan bölgede parçacık hareketin kütleyle göre incelenmesi

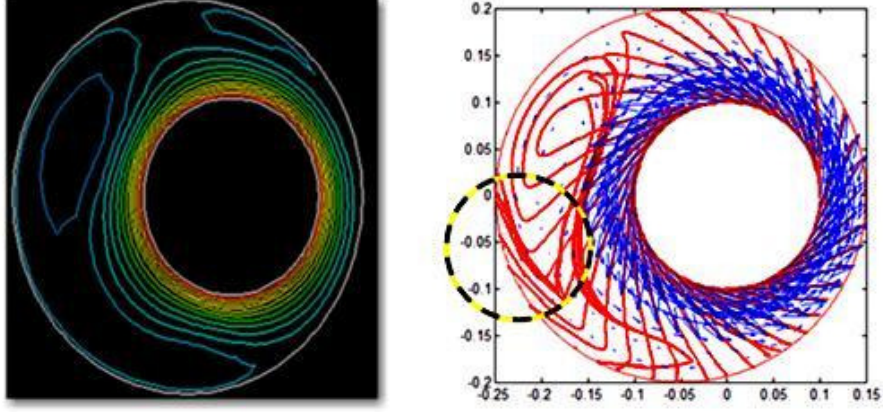
Şimdiye kadar eşmerkezlik oranı  $e = 0.3$  alınmıştır. Eş merkezlik oranının  $e = 0.5$  olduğu durum incelendiğinde aynı parametre değerleri  $\omega = 10$  ve  $\mu_f = 0.05$  için eş merkezli olmayan bölgede parçacık hareketine bakılacaktır. Parçacık kütlesi olarak  $a_p = 0.002$  alındığında, Şekil 186'ya göre, daha önce söylediğimiz şeyler burada da geçerlidir. Girdabı takip eden konumda parçacık asıntıları oluşmaktadır. Buradan çıkan başka bir sonuç eş merkezlilik dış silindire doğru kaydıkaç girdap içerisine takılan parçacık sayıları artmaktadır ve bunun sonucunda asıntı yatakları oluşumu daha güçlü olmaktadır.

Benzer şekilde  $\omega = 20$  ve  $\mu_f = 0.15$  parametre değerleri ve  $a_p = 0.002$  parçacık kütlesi için Şekil 187'de daha çok parçacığın girdap içine yakalandığı görülmektedir. Fakat parçacık asıntıları girdabın hemen aşağısında veya yakın komşuluğunda girdabın hareketiyle beraber biraz daha yukarı taşınmaktadır. Her iki durum için girdap olmayan bölgelerde parçacıkların hareketi düzgün olmaktadır.





Şekil 186.  $e = 0.5$ ,  $\omega = 10$  ve  $\mu_f = 0.05$  parametre değerleri için eş merkezli olmayan bölgede parçacık hareketi



Şekil 187.  $e = 0.5$ ,  $\omega = 20$  ve  $\mu_f = 0.15$  parametre değerleri için eş merkezli olmayan bölgede parçacık hareketi

### 3. SONUÇLAR

Bu kesimde, tez içerisinde ayrıntılarıyla ifade ettiğimiz sonuçları özet olarak sunuyoruz.

Bölüm 2.1'de parçacık taşınım modeli ifade edildikten sonra, parçacığın içerisinde hareket ettiği akışkan için model oluşturulmuştur. Bu model, dönme yönünde Couette akışı ve eksenel yönde Poiseuille akışlarının birleşimi olan helisel akış olarak düşünülmüştür. Bu durumdaki akış için, akışkan elemanı yörüngeleri için analitik çözümler elde edilmiştir. Daha sonra bu akış için geometrik irdelemeler ve kinematik özellikler üzerinde durulmuştur. Son olarak akışı etkileyen parametrelerimiz olan viskozite, kütle ve iç silindir hızlarına göre tek ve iki parametre değişim analizleri yapılmıştır ve parametrelerin akışkan elemanı yörüngeleri üzerinde etkileri olduğu görülmüştür.

Bölüm 2.2'de yatay sondaj işlemi için halkasal kesit alınarak, 2-boyutta sadece dönme yönünde olan parçacık taşınım için Couette akış modeli üzerinde durulmuştur. Oluşturulan lineer olmayan modelin yaklaşık çözümü için MDTM-Adomian yöntemleri birlikte kullanılmıştır. Bu modelle elde edilen yaklaşık analitik çözüm ile matlab çözümleri elde edilen sayısal çözümler karşılaştırılmış ve çözümlerin birbirleriyle tutarlı olduğu görülmüştür. Bu yöntemlere ek olarak FLUENT yardımıyla elde edilen hız profilleri ile parçacık taşınımını incelenmiş ve Couette akışı profiline yakın profillerle çalışıldığında elde edilen sonuçlara yakın çözümler elde edildiği görülmüştür. Bu incelemelerden sonra sadece dönme yönünde olan akış için parametre analizleri yapılmıştır ve parçacık yörüngelerinin bu parametreler etkisi altında hareketleri gözlemlenmiştir.

Bölüm 2.3'de yatay sondaj işleminde, parçacık modelinde hız profili dönme yönünde Couette ve eksenel yönde Poiseuille akışlarının süperpozisyonu olarak düşünülmüş ve buna bağlı parçacık yörünge hareketleri gözlemlenmiştir. Bu 3-boyutlu hareket için tek parametreye bağlı kalitatif analizler ve iki parametreye bağlı iki parametreye bağlı değişimler incelenmiştir. Parçacık hareketinin, viskozite, basınç gradyeni ve iç silindir hızına göre yörünge değişimleri incelenmiş ve bu parametrelerin parçacık hareketine olan etkileri gözlemlenmiştir. Son olarak Newtonyan akışkan içerisinde bulunan parçacık için akış elemanı ile parçacık elemanın hareketleri kıyaslanmaya çalışılmıştır.

Bölüm 2.4'de daha önce Newtonyan akışkanlar için elde edilen akışkan modeli daha genel halde Newtonyan olmayan akışkanlar için ele alınmıştır. İlk olarak Newtonyan

olmayan akışkanlar için Couette ve Poiseuille hız profilleri belirlenmiş ve bu profillerin modelde kullanılmasıyla akışkan modeli oluşturulmuştur. Daha sonra akışı belirleyen parametreler kullanılarak model test edilmiştir. Bölüm 2.5’de Newtonyan olmayan akışkanlar için sadece dönme yönünde Bölüm 2.6’da dönme yönünde Couette ve eksenel yönde Poiseuille akış profillerini kullanarak parçacığın hareketi akışı etkileyen parametreler cinsinden irdelenmiştir. Bu kısımda daha sonra Newtonyan olmayan akışkan içerisinde bulunan parçacık için akış elemanı ile parçacık elemanın hareketleri kıyaslanmaya çalışılmıştır.

Bölüm 2.7’de eşmerkezli olmayan halkasal bölgede parçacık yörüngeleri hakkında araştırmalar yapılmıştır. FLUENT’den alınan eş merkezli olmayan halkasal bölgedeki hız profilleri ile girdap oluşumlarının incelenmesi yapılmış ve buna bağlı hız profil grafikleri verilmiştir. Girdap oluşumuna neden olmayan parametre kümeleri belirlenmiştir. Böylece çalışmada kullanılan ve Couette ve Poiseuille akışının süperpozisyonu ile edilen akış modelinin geçerli olduğu parametre kümeleri belirlenmeye çalışılmıştır. Son olarak yine bu hız profilleri kullanılarak parçacığın 2-boyutta eş merkezli olmayan bölgede hareketi gözlemlenmiştir.

#### 4. ÖNERİLER

- Modelde akışkan akışının Laminar olduğu düşünülerek Stoke's drag seçeneği üzerinde durulmuştur. Akışın Türbülanslı olduğu model üzerinde de çalışmalar yapılabilir. Bu durumda modelde Stoke's drag yerine Inertial Drag ifadesi kullanılmalıdır ve işlemler buna göre yapılmalıdır.
- Modelde ele alınan sistem yatay sondaj borusu için olup sistem dik sondaj hattı veya en genel halde  $x$  –ekseniyle  $\alpha$  açısı yapacak şekilde kurulan eğik sondaj hattı için geliştirilebilir.
- Matkap mekanizmasından kaynaklanan ısı etkisinde göz önüne alınarak Navier-Stokes denklemleriyle beraber enerji denklemleri de modele ilave edilebilir.
- Modelde ortaya çıkan denklem için daha kapsamlı bir perturbasyon yöntemi üzerinde çalışılabilir.
- Eş merkezli olmayan bölge üzerinde hız profillerini elde etmek için bölge üzerinde Biharmonik denklemin çözümü üzerinde çalışılabilir. Bu hız profilleri ile parçacık hareketi incelenebilir.
- 2-boyutta incelenen eş-merkezli olmayan model için FLUENT, COMSOL, CFD, vs. gibi yazılımlarla 3-boyutta parçacık hareketi için daha görsel grafikler oluşturulabilir.



## 5. KAYNAKLAR

1. Alexandrou, A., Principles of Fluid Mechanics, Prentice Hall, New Jersey, 2001.
2. Ann, C., C., A Theoretical Study of the Flow of Slightly Compressible Non-Newtonian Fluids in Eccentric Annuli with Entrance Effects, Doktora Tezi, The University of Oklahoma, Norman, Oklahoma, 1993.
3. Arifoğlu, U., Matlab 7.04 Simulink ve Mühendislik Uygulamaları, Alfa Yayınları, İstanbul, 2005.
4. Ballal, B., Y. ve Rivlin, R. S., Flow of a Newtonian Fluid Between Eccentric Rotating Cylinders: Inertial Effects, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 3, 62 (1976) 237-294.
5. Baker, G., A., Essentials of Padé Approximants, Academic Press, London, 1975.
6. Baker, G., A. ve Graves-Morris, P., Padé Approximants, Part I: Basic Theory, Addison-Wesley, Boston, 1981.
7. Becker, T., E., Correlations for Drilled-Cuttings Transport in Directional-Well Drilling, Doktora Tezi, The University of Tulsa, Tulsa, 1987.
8. Becker, T., E., Azar, J., J. ve Okrajni, S., S., Correlations of Mud Rheology Properties with Cuttings Transport Performance in Directional Drilling, SPE Drilling Engineering, 6, 1 (1991) 16-24.
9. Bedient, P., B., Rifai, H., S. ve Newell, C., J., Ground Water Contamination. Transport and Remediation, Prentice Hall, Engelwood Cliffs, New Jersey, 1994.
10. Bolchover, P., Allwright, D., Coşkun, E., Jones, G. ve Ockendon, J., Cuttings Transport with Drillstring rotation. <http://www.maths-in-industry.org/miis/135/1/cuttings.pdf> 12 Mayıs 2008
11. Boyce, W., E. ve Diprima, R., C., Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley&Sons, Canada, 1992.
12. Brown, N., P., Bern, P., A. ve Weaver, A., Cleaning Deviated Holes: New Experimental and Theoretical Studies, SPE/IADC Drilling Conference, (1989) 181.
13. Cai, J., CFD Development for Rotordynamic Force Coefficients of Plain and Labyrinth Seals, Doktora Tezi, Texas A&M University, Texas, 1997.
14. Carrier, G., F. ve Pearson, C., E., Partial Differential Equation-Theory and Technique Academic Press, New York, 1976.
15. Chien, S., F., Settling Velocity of Irregularly Shaped Particles, SPE Drilling and Completion, 9, 4 (1994) 281-289.

16. Cho, H., Development of a Three-Segment Hydraulic Model for Cuttings Transport in Horizontal and Deviated Well, Doktora Tezi, University of Oklahoma, Oklahoma, 2001.
17. Cho, H., Subhash, N., Shah, ve Osisanya, S., O., A Three-Segment Hydraulic Model for Cuttings Transport in Horizontal and Deviated Wells. <http://www.onepetro.org/mslib/servlet/onepetropreview?id=00065488&soc=SPE&speAppNameCookie=ONPETRO> 8 Şubat 2009
18. Clark, R., K. ve Bickham, K., L., A Mechanistic Model for Cuttings Transport. <http://www.onepetro.org/mslib/servlet/onepetropreview?id=00028306&soc=SPE> 20 Mart 2010
19. Çengel, Y., A. ve Cimbala, J., M., Akışanlar Mekaniği Temellleri ve Uygulamaları, Güven Bilimsel, İzmir, 2007.
20. Duan, Mingqin, Study of Cuttings Transport Using Foam with Drill Pipe Rotation under Simulated Downhole Conditions, Doktora Tezi, The University of Tulsa, Tulsa, 2007.
21. Edwards, C., H. ve Penney, D., E., (Akın., Ö., Editör), Diferensiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri, Palme Yayıncılık, Ankara, 2006.
22. Enilari, M., G., Development and Evaluation of Varius Drilling Fluids for Slim-Hole Wells, Yüksek Lisans Tezi, University of Oklahoma, Norman, Oklahoma, 2005.
23. Escudier, M., P., Oliveira, P., J. ve Pinho, F., T., Fully Developed Laminar Flow of Purely Viscous Non-Newtonian Liquids Through Annuli Including The Effects of Eccentricity and Inner-Cylinder Rotation, International Journal of Heat and Fluid Flow, 23, 1 (2002) 52-73.
24. Fausett, L., V., Applied Numerical Analysis Using Matlab, Prentice Hall, New Jersey, 1999.
25. Gavignet, A., A. ve Sobey, I., J., Model Aids Cuttings Transport Predictions, Journal of Petroleum. Tech., 41, 9 (1989) 916-921.
26. Garcia, M., H. ve Parker, G., Entrainment of Bed Sediment into Suspension, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, 117 (1991) 414-435.
27. Hacısılamoğlu, M., Non-Newtonian Fluid Flow in Eccentric Annuli and its Application to Petroleum Engineering Problems, Doktora Tezi, The Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College, Louisiana, 1989.
28. Hibbeler, R., C., Mühendislik Mekaniği, Literatür Yayınları, İstanbul, 2006.
29. Iyoho, A., W., Drilled-Cuttings Transport by Non-Newtonian Drilling Fluids Through Inclined Eccentric Annuli, Doktora Tezi, The University of Tulsa, Tulsa, 1980.
30. Kamp, A., M. ve Rivero M., Layer Modeling for Cuttings Transport in Highly Inclined Wellbores. <http://www.onepetro.org/mslib/servlet/onepetropreview?id=00053942&soc=SPE> 20 Ekim 2009

31. Kaya, S., Tuğlalı Pasta Fırını Isıl Analizi. <http://web.deu.edu.tr/ansys/tezler/donem/pastafirini-isilanaliz.pdf> 14 Ağustos 2011
32. Kelessidis, V., C. ve Mpandelis G., E., Flow Patterns and Minimum Suspension Velocity for Efficient Cuttings Transport in Horizontal and Deviated Wells in Coiled-Tubing Drilling, The Society of Petroleum Engineers, 19, 4 (2003) 213-223.
33. Kjosnes, I., Loklingholm, G., Saasen, A., Syrstad, S., O., Agle, A. ve Solvang, K., A., Successful Water Based Drilling Fluid Design for Optimizing Hole Cleaning and Hole Stability. <http://www.onepetro.org/mslib/servlet/onepetropreview?id=00085330&soc=SPE> 10 Haziran 2011
34. Kurzweg, U., H, Stokes' Drag. <http://www.mae.ufl.edu/~uhk/HOMEPAGE.html> 29 Haziran 2009
35. Larsen, T., I., Pilehvari, A., A. ve Azar, J., J., Development of a New Cuttings Transport Model for High-Angle Wellbores Including Horizontal Wells, SPE Drilling&Completion, 12, 2 (1997) 129-136.
36. Lee, C., W., The Application of Eccentric Rotating Cylinder Apparatus for the Improved Study of Particle Coagulation, Yüksel Lisans Tezi, Texas A&M University, Texas, 2003.
37. Ling, C., B., Torsion of an Eccentric Circular Tube, Technical Report, No.1, Chinese Bureau of Aeronautical Research, 1940.
38. Marsden, J., E. ve Hoffman M. J., Basic Complex Analysis, W. H. Freeman, New York, 1999.
39. Martins, A., L, Silva, R., A. ve Costa, F., G., Effect of Non-Newtonian Behavior of Fluids in the Re-suspension of a Drilled Cuttings Bed, Annual Transactions of the Nordic Rheological Society, 11 (2003) 49-56.
40. Masuda, Y., Doan, Q., Oguztoreli, M., Naganawa, S., Yonezawa, T., Kobayashi, A., Kamp, A., Critical Cuttings Transport Velocity in Inclined Annulus: Experimental Studies and Numerical Simulation. <http://www.onepetro.org/mslib/servlet/onepetropreview?id=00065502&soc=SPE> 16 Eylül 2010
41. Momani, S. ve Ertürk, V., S., Solutions of non-linear Oscillators by the Modified Differential Transform Method, An International Jour. of Comp.&Math. with App., 55 (2008) 833-842.
42. Nezir, S., Fizikte Matematik Yöntemler I, Palme Yayıncılık, Ankara, 2007.
43. Nguyen, D. ve Rahman, S., S., A Three-Layer Hydraulic Program for Effective Cuttings Transport and Hole Cleaning in Highly Deviated and Horizontal Wells, SPE Drilling & Completion, 13, 3 (1998) 182-189.
44. Nouri, J., M. ve Whitelaw, J., H., Flow of Newtonian and Non-Newtonian Fluids in an Eccentric Annulus with Rotation of The Inner Cylinder, Int. J. Heat and Fluid Flow, 18, 2 (1997) 236-246.

45. Onyekpe, B., Investigation of the Effects of Carbonate Contaminants on the Rheological Properties of Drilling Mud, Industrial Lubrication and Tribology, 53, 3 (2001) 108-111.
46. Örs, H., Akışkanlar Mekaniği, Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, İstanbul, 1999.
47. Özbayoglu, M., E., Miska, Z., S., Reed, T. ve Takach, N., Using Foam in Horizontal Well Drilling: A Cuttings Transport Approach, Journal of Petroleum Science and Engineering, 46, 4 (2005) 267-282.
48. Pala, Y., Mühendislik Mekaniği Matlab Destekli Dinamik, Nobel Yayın Dağıtım, Umut Kitabevi, Ankara, 2007.
49. Pala, Y., Modern Uygulamalı Diferensiyel Denklemler, Nobel Yayın Dağıtım, Paradigma Akademi, Ankara, 2006.
50. Papanastasiou, T., C., Georgiou, G. ve Alexandrou, A., N., Viscous Fluid Flow, CRC Press, Florida, 2000.
51. Peker, S. ve Helvacı Ş., Ş., Akışkanlar Mekaniği: Kavramlar, Problemler, Uygulamalar, Literatür Yayınları, İstanbul, 2007.
52. Pilehvari, A., A., Azar, J., J. ve Siamack A., S., State-of-The-Art Cuttings Transport in Horizontal Wellbores, SPE 37079, 14, 3 (1999) 196-200.
53. Redberger, P., J. ve Charles, M., E., Axial Laminar Flow in a Circular Pipe Containing a Fixed Eccentric Core, The Canadian Journal of Chemical Engineering, 40, 4 (1962) 148-151.
54. Redberger, P., J. ve Charles, M., E., Axial Laminar Flow Correction, The Canadian Journal of Chemical Engineering, 41, 2 (1963) 86.
55. Renato, N., E., Non-Newtonian Eccentric Annulus Flow. <http://www.nacad.ufrj.br/~rnelias/gallery/anecc.html> 24 Mayıs 2010
56. Saasen, A. ve Loklingholm, G., The Effect of Drilling Fluid Rheological Properties on Hole Cleaning. <http://www.onepetro.org/mslib/servlet/onepetropreview?id=00074558&soc=SPE> 15 Şubat 2010
57. Saasen, A., Eriksen, N., H., Han, Liqun, Labes, P. ve Marken, D., Is Annular Friction Loss the Key Parameter?, Oil Gas European Magazine, 1 (1998) 22-24.
58. Sanchez, R., A., Azar, J., J., Bassal, A., A. ve Martins, A., L., Effect of Drillpipe Rotation on Hole Cleaning During Directional-Well Drilling, SPE Journal, 4, 2 (1999) 101-108.
59. Sifferman, Thomas, R., Myers, George, M., Haden, Elard, L. ve Wahl, Harry, A., Drill Cutting Transport in Full Scale Vertical Annuli, Journal of Petroleum Technology, 26, 11 (1973) 1295-1302.
60. Sifferman, T., R. ve Becker, T., E., Hole Cleaning in Full-Scale Inclined Wellbores, SPE Drilling Engineering, 7, 2 (1992) 115-120.

61. Snyder, W., T. ve Goldstein, G., A., An Analysis of Fully Developed Laminar Flow in an Eccentric Annulus, AICHE Journal, 11, 3 (1965) 462-467.
62. Tomren, P., H., Iyoho, A., W. ve Azar, J., J., An Experimental Study of Cuttings Transport in Directional Wells, SPE Drilling Engineering, 1, 1 (1986) 43-56.
63. Tosun, İ., Axial Laminar Flow in an Eccentric Annulus: An Approximate Solution, AICHE Journal, 30, 5 (1984) 877-878.
64. Tosun, İ., Ayrı Merkezli Borularda Hidrodinamik ve Isı Transferi Çalışmaları, Tubitak Desteği ile ODTÜ Kimya Mühendisliği, Ankara, 1986.
65. Venkatarangan, S., N. ve Rajalakshmi, K., A Modification of Adomian's Solution for Nonlinear Oscillatory Systems, Computers Math. Applic., 6, 29 (1995) 67-73.
66. Walker, S. ve Li, J., The Effects of Particle Size, Fluid Rheology, and Pipe Eccentricity on Cuttings Transport. <http://www.onepetro.org/mslib/app/Preview.do?paperNumber=00060755&societyCode=SPE> 12 Kasım 2011
67. Wazed, M., A., A Parametric Study of Cutting Transport in Vertical and Horizontal Well Using Computational Fluid Dynamics(CFD), Yüksek Lisans Tezi, West Virginia University, Morgantown, 2002.
68. Wellington, C., Mechanistic Modeling of Cuttings Transport in Directional Wells, Doktora Tezi, The University of Tulsa, Tulsa, 1995.
69. White, F., M., Fluids Mechanics, McGraw-Hill Press, Boston, 1992.
70. Zeidler, H., U., Fluid and Drilled Particle Dynamics related to Drilling Mud Carrying Capacity, Doktora Tezi, The University of Tulsa, Tulsa, 1974.
71. Zhou, J., K., Differential Transformation and Its Application for Electrical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan, China, 1986.
72. Zhu, Y., Chang, Q. ve Wu, S., A New Algorithm for calculating Adomian Polynomials, Applied Mathematics and Computation, 169 (2005) 402-416.

## 6. EKLER

### Ek-1. Vektör Analizi

#### Vektörler:

Üç boyutta bir vektörün tanımı,

$$\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$$

şeklindedir.  $\vec{U}$  ve  $\vec{V}$  vektörlerinin skaler çarpımı,

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z$$

Vektör operatörü olan  $\nabla(\text{del})$ ,  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  ve  $\hat{k}$ ,  $x$ ,  $y$  ve  $z$  yönlerinde birim vektörler olmak üzere,

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

ile verilir.

#### Gradyan:

$\varphi(x, y, z)$  şeklindeki bir skaler alanın gradyeni  $\nabla\varphi$  ve  $\text{grad}\varphi$  şeklinde yazılan bir vektördür.

$$\nabla\varphi = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \hat{k}$$

#### Diverjans:

Bir  $\vec{U}$  vektör alanının diverjansı  $\nabla \cdot \vec{U}$  ve  $\text{div}\vec{U}$  şeklinde yazılan bir skalerdir.

$$\nabla \cdot \vec{U} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (U_x, U_y, U_z) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (U_x \hat{i} + U_y \hat{j} + U_z \hat{k})$$

böylece,

$$\nabla \cdot \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

**Laplacian operatörü:**

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Böyle bir operatörün sonucu skaler bir niceliktir.

**Rotasyonel:**

Bir  $\vec{U}$  vektörünün rotasyoneli  $\nabla \times \vec{U}$  veya *curl*  $\vec{U}$  şeklinde yazılan bir vektördür.

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{U} &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (U_x, U_y, U_z) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \left( \frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

**Kartezyen Koordinatlar:**

$u = u(x, y, z)$  skaler alan,  $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z) = U_x \hat{i} + U_y \hat{j} + U_z \hat{k}$  vektör alanı,  $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$  konum vektörü ve  $d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$  olmak üzere,

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\nabla \cdot \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{U} = \left( \frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix}$$

**Silindirik Koordinatlar:**

$u = u(r, \theta, z)$  skaler alan,  $\vec{U} = (U_r, U_\theta, U_z) = U_r \hat{e}_r + U_\theta \hat{e}_\theta + U_z \hat{e}_z$  vektör alanı,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = z$ ,  $\vec{r} = r \hat{e}_r + z \hat{e}_z$  konum vektörü ve  $d\vec{r} = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + dz \hat{e}_z$  olmak üzere,

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial u}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{e}_z$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\nabla \cdot \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r U_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{U} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \hat{e}_r + \left( \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r U_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \hat{e}_z$$

$$\hat{i} = \cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta, \quad \hat{e}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$$

$$\hat{j} = \sin \theta \hat{e}_r + \cos \theta \hat{e}_\theta, \quad \hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

$$\hat{k} = \hat{k}, \quad \hat{k} = \hat{k}$$

$$V_r = \dot{r}, V_\theta = r \dot{\theta}, V_z = \dot{z} \text{ (Hız bileşenleri)}$$

$$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2, a_\theta = r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, a_z = \ddot{z} \text{ (İvme bileşenleri)}$$



## ÖZGEÇMİŞ

İshak CUMHUR, 08.06.1980 tarihinde Samsun'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Samsun'da tamamladı. 1997 yılında Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı lisans eğitimini 2001 yılında başarı ile tamamladı. 2004 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik A.B.D. Yüksek Lisans eğitimini tamamladı ve aynı Enstitüde Doktora eğitimine başladı. Ekim 2001 tarihinde Milli Eğitim Bakanlığı tarafından Trabzon ili Köprübaşı ilçesine matematik öğretmeni olarak atandı. Aralık 2001 tarihinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Rize Fen-Edebiyat Fakültesi'ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 17 Mart 2006 tarihi itibariyle Rize Üniversitesi'nde Araştırma Görevlisi olarak görevine devam etmektedir. İyi derecede İngilizce bilmektedir.