KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

SINIR DEĞERİNDE ÖZDEĞER PARAMETRESİ BULUNDURAN REGÜLER STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Elif BAŞKAYA

NİSAN 2013
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

SINIR DEĞERİNDE ÖZDEĞER PARAMETRESİ BULUNDURAN REGÜLER STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİ

Elif BAŞKAYA

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18.03.2013
Tezin Savunma Tarihi : 25.04.2013

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Haskız COŞKUN

Trabzon 2013

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Elif BAŞKAYA Tarafından Hazırlanan

SINIR DEĞERİNDE ÖZDEĞER PARAMETRESİ BULUNDURAN REGÜLER STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu 19/ 03 / 2013 gün ve 1498 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

DOKTORA TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**:Prof.Dr. İhsan ÜNVER**	**…………………………**
Üye	**:Prof. Dr. Haskız COŞKUN**	**…………………………**
Üye	**:Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV**	**…………………………**
Üye	**:Prof. Dr. Belgin KÜÇÜKÖMEROĞLU**	**…………………………**
Üye	**:Prof.Dr. Ömer AKIN**	**…………………………**

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Konumun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanıp bu hale getirilmesine kadar benden yardımını ve desteğini esirgemeyen hocam Prof. Dr. Haskız COŞKUN' a emeği için saygılarımı ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca başta tez jüri üyelerim olmak üzere, matematik bölüm başkanım ve hocalarıma, araştırma görevlisi arkadaşlarıma, aileme ve maddi desteğinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)' na teşekkür ederim.

Elif BAŞKAYA
Trabzon 2013

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “SINIR DEĞERİNDE ÖZDEĞER PARAMETRESİ BULUNDURAN REGÜLER STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİ” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Haskız COŞKUN’ un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 22/05/2013

Elif BAŞKAYA

İÇİNDEKİLER

Doktora Tezi

ÖZET

SINIR DEĞERİNDE ÖZDEĞER PARAMETRESİ BULUNDURAN REGÜLER STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİ

Elif BAŞKAYA

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Haskız COŞKUN
2013, 128 Sayfa

Bu çalışmada sınır değerinde özdeğer parametresi bulunduran regüler Sturm-Liouville problemlerinin potansiyel fonksiyonunun farklı durumları için özdeğerlerin asimptotik tahminleri elde edilmiştir.

Birinci bölümde, Sturm-Liouville problemi ve ilgili teorisine yer verilmiş, bu konuda literatürdeki bazı önemli teoremler ispatsız olarak sunulmuştur. Ayrıca bu çalışmanın önemini vurgulayan, ele alınan problemin kaynaklandığı fiziksel durumlardan örneklere yer verilmiştir.

İkinci bölümde ise yöntem gerekli teorilerle sunulup, potansiyel fonksiyonun integrallenebilir ve türevinin mevcut olması durumlarında ele alınan problemler için yaklaşık özdeğerler hesaplanmıştır. Son olarak ise spektral fonksiyonun türevi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Regüler Sturm-Liouville Problemleri, Özdeğer Parametresi, Asimptotik Tahminler, Spektral Fonksiyonunun Türevi

PhD. Thesis

SUMMARY

REGULAR STURM-LIOUVILLE PROBLEMS WITH EIGENVALUE PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITIONS

Elif BAŞKAYA

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences Biology Graduate Program
Supervisor: Prof. Haskız COŞKUN
2013, 128 Pages

In this thesis, some asymptotic estimates are obtained for the eigenvalues of regular Sturm-Liouville problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions with different choices of potential function.

In the first part, Sturm-Liouville problem and related theory are introduced, some important theorems are stated without proof. Also, some examples of the related problems arising from physical phenomena which emphasize the importance of this study are given.

In the second part, the method is presented and estimated eigenvalues are evaluated when potential function is integrable and differentiable. Finally, derivative of spectral function of the problem is investigated.

Key Words: Regular Sturm-Liouville Problems, Eigenvalue Parameter, Asymptotic Estimates, Derivative of Spectral Function

ŞEKİLLER DİZİNİ

SEMBOLLER DİZİNİ

e	: Euler sayısı, yaklaşık değeri 2,71828183
O	: Landau simgesi, büyük O
o	: Landau simgesi, küçük o
π	: Pi sayısı, yaklaşık değeri 3,14159265
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\exp(x)$	: e^x
$x \to \infty$	: x sayısı sonsuza yaklaşırken
$x \to x_1^+$	: x sayısı x_1 sayısına sağdan yaklaşırken
$x \to x_2^-$	: x sayısı x_2 sayısına soldan yaklaşırken
$\lvert x \rvert$	: x sayısının mutlak değeri
$\lVert \Phi_k(x) \rVert$	: $\Phi_k(x)$ fonksiyonunun normu
$u_x(x,t)$	: $u(x,t)$ fonksiyonunun x bağımsız değişkenine göre kısmi türevi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Diferensiyel denklemler ile ilgili çalışmalar, 1830' lu yılların başlarına kadar analitik olarak ifade edilebilen çözümlerin araştırılmasıyla sınırlandırılmıştır. Sturm ve Liouville bu sınırlılığın farkına vararak, 1836-1837 yılları arasında çözümlerin analitik olarak ifade edilemediği durumlarda da çözümlerin özelliklerinin bulunmasıyla ilgili bir dizi çalışma yayınlamışlardır. Önemli çalışmaların yer aldığı bu alan Sturm-Liouville teorisi olarak adlandırılır. Belirli sınır değer koşulları ile birlikte ele alınan ikinci mertebeden diferensiyel denklem ise Sturm-Liouville problemi olarak bilinmektedir.

Sturm-Liouville kuramının gelişiminde d'Alembert, Fourier ve Poisson'un çalışmaları temel ve yönlendirici etken olmuştur. Fourier, ısı teorisiyle ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir. Bu sonuçlar Poisson tarafından devam ettirilmiş ve geliştirilmiştir. Homojen ve homojen olmayan bir teldeki titreşim problemini ilk kez d'Alembert ve aynı dönemde Euler incelemiştir. Daha sonra Lagrange ve d'Alembert dalga denklemini kurmuşlardır. Tüm bu çalışmalar Sturm ve Liouville' nin çalışmalarına öncülük etmiştir.

Sturm ve Liouville diklik, özdeğerlerin gerçelliği ve Fourier katsayılarının belirlenmesi gibi bazı teoremleri ortak kullanıyorlarsa da kurama yaklaşımlarında dikkate değer bir farklılık vardır. Sturm, özdeğerlerin özellikleri ve özfonksiyonların nicel davranışlarına yönelirken; Liouville, Fourier serilerinin açılımına ağırlık vermiştir.

Kuramın modern anlamdaki gelişimine 1900' lerin başından itibaren Kneser-Hartman, Hille, Leighton, Nehari, Wintner, Fite, Morse, Reid ve daha pek çok matematikçinin özgün katkıları olmuştur [23]. Günümüzde de Sturm-Liouville teorisi ve problemi önemini korumaktadır. Halen bu konularla ilgili çok sayıda çalışma yapılmaktadır. Tüm bu çalışmalara fiziksel problemlerin esin kaynağı olması, teori ve problemin önemini daha da arttırmaktadır.

Matematiksel fiziğin bazı problemlerinde sınır değer koşulları, koordinat değişkeni ile birlikte zamana göre kısmi türevi de içermektedir. Bu problemlerin çözümü Fourier yöntemi ile araştırıldığında elde edilen özdeğer probleminin, sadece diferensiyel denklem de değil sınır koşullarında da özdeğer parametresini bulundurduğu görülür. Bu nedenle sınır koşullarında özdeğer parametresi bulunduran sınır değer problemleri hem teorik hem de pratik açıdan büyük önem taşımaktadır.

Birçok bir boyutlu dalga ve ısı problemlerinin çözümünde, kuantum mekaniğinde, akustik dağılma ve örnekleme (sampling) teorisinde karşılaşılan, literatürde [2,4,14] çalışmalarında da geniş bir şekilde yer verilen aşağıdaki sınır değer problemi göz önüne alınsın:

$$\tau y(t) := \frac{1}{r(t)}\left\{-\left[p(t)y'(t)\right]' + q(t)y(t)\right\} = \lambda y(t), \quad t \in \left[a,b\right], \tag{1.1}$$

$$-\left[\beta_{11}y(a) - \beta_{12}y'(a)\right] = \lambda\left[\alpha_{11}y(a) - \alpha_{12}y'(a)\right], \tag{1.2}$$

$$-\left[\beta_{21}y(b) - \beta_{22}y'(b)\right] = \lambda\left[\alpha_{21}y(b) - \alpha_{22}y'(b)\right]. \tag{1.3}$$

Burada α_{ik}, β_{ik} $\left(i,k=1,2\right)$ reel sayılar öyle ki $\beta_{i1}^2 + \beta_{i2}^2 \neq 0$ ve $p(t)$, $p'(t)$, $q(t)$, $r(t)$ fonksiyonları $\left[a,b\right]$ üzerinde tanımlı, reel değerli, sürekli, ayrıca $p(t)$, $r(t)$ fonksiyonları aynı aralıkta pozitif olsun. Dikkat edilirse (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin regüler Sturm-Liouville probleminden farkı, sınır değer koşullarının özdeğer parametresi λ' ya bağlı olmasıdır. Bu problemin $\delta_i := (-1)^i(\alpha_{i1}\beta_{i2} - \alpha_{i2}\beta_{i1}) > 0,\ i=1,2$ sağlanması durumunda kendine eş, simetrik problem olduğu Walter [26] tarafından ispatlanmıştır.

Göz önüne alınan (1.1)-(1.3) probleminde $\beta \in \left[0,\pi\right)$ olmak üzere $\beta_{21} = -\cos\beta$, $\beta_{22} = \sin\beta$, $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$ iken, problemin özdeğerleri için yaklaşık çözümlere daha önce [7,14,15] çalışmalarında yer verilmiştir ve $q\left(t\right)$' nin farklı düzgünlük koşullarını sağlaması durumunda bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca literatürde standart regüler Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin asimptotik tahminleriyle ilgili birçok çalışma yer almaktadır [5,6,9,13,16,18,19,21,25].

Aşağıdaki Sturm-Liouville problemi ele alınsın:

$$y''\left(t\right) + \left[\lambda - q\left(t\right)\right]y\left(t\right) = 0, \quad t \in \left[0,\infty\right),$$
$$y\left(0\right)\cos\alpha + y'\left(0\right)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Burada $q\left(t\right)$ fonksiyonu $\left[0,\infty\right)$ üzerinde tanımlı, reel değerli ve integrallenebilir fonksiyon, λ ise reel parametredir. Bu problemin fiziksel uygulamalarına [3,10,17,25] çalışmalarında yer verilmiştir. Ayrıca problemin spektral fonksiyonunun türevi [11,20] çalışmalarında incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında da (1.1)-(1.3) problemi göz önüne alınacak ve öncelikle $q(t)$ potansiyel fonksiyonunun integrallenebilir olma şartı altında, daha sonra $q'(t)$ fonksiyonunun mevcut olması durumunda λ özdeğerleri için, [6,7,18,20] çalışmalarında hesaplanan özdeğer açılımlarına benzer asimptotik tahminler elde edilecektir. Son olarak ise, $[a,\infty)$ aralığında integrallenebilir $q(t)$ fonksiyonu için

$$y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0, \quad t\in[a,\infty),$$
$$a_1y(a)+a_2y'(a)=\lambda[a_1'y(a)+a_2'y'(a)], \quad a_1,a_2,a_1',a_2'\in\mathbb{R}$$

problemi ele alınıp, problemin spektral fonksiyonunun türevi bulunacaktır.

1.2. Sturm-Liouville Teorisi

Bu bölümde Sturm-Liouville denklemleri için genel teorik sonuçlara yer verilecektir. Bu amaçla ilk olarak özdeğer problemi kavramı ele alınacaktır.

Tanım 1.1: Her $x\in[x_1,x_2]$ için, L ikinci mertebeden lineer operatörü

$$L:=a_0(x)\frac{d^2}{dx^2}+a_1(x)\frac{d}{dx}+a_2(x)$$

olarak tanımlansın. Burada $[x_1,x_2]$ aralığında $a_0(x)\neq 0$ ve $a_i(x),\ i=0,1,2$ sürekli fonksiyonlar olsun. λ reel bir parametre olmak üzere $[x_1,x_2]$ aralığında

$$L[y(x)]=\lambda y(x)$$

diferensiyel denklemini ve

$$B_1(y)=a_1y(x_1)+a_2y'(x_1)+b_1y(x_2)+b_2y'(x_2)=\xi,$$
$$B_2(y)=a_1'y(x_1)+a_2'y'(x_1)+b_1'y(x_2)+b_2'y'(x_2)=\eta$$

sınır koşullarını sağlayan $y(x)$ fonksiyonlarını belirleme problemine Özdeğer Problemi veya Sturm-Liouville Problemi adı verilir. Sınır koşullarında ξ,η,a_i,b_i,a_i' ve $b_i',\ i=1,2$ katsayıları sabitlerdir. Bu sınır koşullarına Ayrılmamış Sınır Koşulları da denir. Eğer $b_1=b_2=0$ ve $a_1'=a_2'=0$ ise sınır koşulları Ayrılmış Sınır Koşulları olarak adlandırılabilir. Ayrıca $\xi=\eta=0$ ise sınır koşullarına Homojen Sınır Koşulları, $\xi\neq 0$ veya $\eta\neq 0$ ise Homojen Olmayan Sınır Koşulları adı verilir. $\xi=\eta=0$ ise $y(x)=0$ fonksiyonu özdeş olarak $[x_1,x_2]$aralığında verilen diferensiyel denklemi ve sınır koşullarını sağlar. Bu çözüme özdeğer probleminin Sıfır (Aşikâr, Trivial) Çözümü adı verilir. Sıfırdan farklı çözümü veren λ değerlerine Sturm-Liouville probleminin Özdeğerleri ve bu değerlerin kullanılması ile bulunan çözümlere de Özfonksiyonlar denir.

Aşağıda kendine eş diferensiyel denklem kavramına yer verilmiştir:

Tanım 1.2: İkinci mertebeden lineer homojen bir diferensiyel denklem, aşağıdaki şekilde ifade edilebiliyorsa denkleme Kendine Eştir denir:

$$p(x)y''(x)+p'(x)y'(x)+\left[q(x)+\lambda r(x)\right]y(x)=0, \quad x_1<x<x_2$$

veya denk olarak

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)y'(x)\right]+\left[q(x)+\lambda r(x)\right]y(x)=0, \quad x_1<x<x_2.$$

Burada $x\in(x_1,x_2)$ için $p(x)>0,\ r(x)>0$ ve $x\in[x_1,x_2]$ için $p'(x),\ q(x),\ r(x)$ sürekli fonksiyonlardır.

Kendine eş olmayan ikinci mertebeden lineer diferensiyel denklem, aşağıdaki şekilde kendine eş şekle dönüştürülebilir:

$$A_2(x)y''(x)+A_1(x)y'(x)+\left[A_0(x)+\lambda\right]y(x)=0 \tag{1.4}$$

denklemi göz önüne alınsın. Eğer, (x_1,x_2) üzerinde $A_2>0$ ve $[x_1,x_2]$ aralığı üzerinde $A_0,\ A_1$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere $A_1(x)\neq A_2'(x)$ ise, denklem kendine eş değildir. Bu durumda verilen (1.4) denkleminin her iki tarafı $\mu(x)=\dfrac{p(x)}{A_2(x)}$ dönüşümü ile çarpılırsa

$$p(x)y''(x)+\mu(x)A_1(x)y'(x)+\mu(x)\left[A_0(x)+\lambda\right]y(x)=0 \tag{1.5}$$

elde edilir. Buradaki $p(x)$ belirlenmesi gereken bir fonksiyondur. (1.5) ile verilen denklemin kendine eş olması için

$$p'(x)=\mu(x)A_1(x)=\frac{p(x)A_1(x)}{A_2(x)} \tag{1.6}$$

olmalıdır. (1.6) denklemi ise $p(x)$ için birinci mertebeden lineer diferensiyel denklemdir. (1.6) denkleminden, $\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{A_1(x)}{A_2(x)}$ olduğundan

$$p(x) = \exp\left[\int \frac{A_1(x)}{A_2(x)}\, dx\right]$$

olarak bulunur. Ayrıca, (1.5) denklemi ve Tanım 1.2 ile verilen kendine eş şekil göz önünde bulundurulursa:

$$q(x) = \mu(x) A_0(x) = \frac{p(x) A_0(x)}{A_2(x)}$$

ve

$$r(x) = \mu(x) = \frac{p(x)}{A_2(x)}$$

olarak belirlenir.

Genel olarak, ikinci mertebeden lineer homojen kendine eş diferensiyel denklem operatör gösterimleri kullanılarak aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$D := \frac{d}{dx},\ L := D\left[p(x)D\right] + q(x)$$

olarak tanımlanırsa L' ye Kendine Eş Operatör adı verilir. Böylece bir kendine eş diferensiyel denklem, kapalı formda

$$L\left[y(x)\right] + \lambda r(x) y(x) = 0$$

şeklinde yazılır.

Kendine eş operatörler için önemli bir kavram olan simetriklik ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 1.3: L kendine eş operatör olmak üzere, $\left[x_1, x_2\right]$ aralığında tanımlı, ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip, sınır koşullarını sağlayan u ve v fonksiyonları için

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(u(x) L\left[v(x)\right] - v(x) L\left[u(x)\right]\right) dx = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, L' ye $\left[x_1, x_2\right]$ aralığında Simetrik Operatör adı verilir.

Aşağıda simetrik operatörlerle ilgili literatürde yer alan bazı önemli lemma ve teoremlere yer verilecektir:

Lemma 1.1: [1]: Lagrange Eşitliği: L kendine eş operatör olmak üzere, $[x_1, x_2]$ aralığında tanımlı, ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip, sınır koşullarını sağlayan u ve v fonksiyonları için

$$u(x)L[v(x)]-v(x)L[u(x)]=\frac{d}{dx}[p(x)W(u,v)(x)]$$

eşitliği sağlanır. Burada $W(u,v)(x):=u(x)v'(x)-u'(x)v(x)$ olarak tanımlanır ve Wronskian Fonksiyonu olarak adlandırılır.

Ayrıca Lagrange eşitliğinden:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(u(x)L[v(x)]-v(x)L[u(x)]\right)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}[p(x)W(u,v)(x)]\,dx$$

gereğince

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(u(x)L[v(x)]-v(x)L[u(x)]\right)\,dx=p(x)W(u,v)(x)\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{1.7}$$

eşitliği elde edilir. (1.7) eşitliği Green Formülü olarak adlandırılır.

Lemma 1.2: [1]: $L=D[p(x)D]+q(x)$ kendine eş operatörünün $[x_1, x_2]$ aralığı üzerinde simetrik olması için gerek ve yeter koşul

$$p(x)W(u,v)(x)\Big|_{x_1}^{x_2}=0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada u, v sınır koşullarını sağlayan ve $[x_1, x_2]$ aralığı üzerinde ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip olan fonksiyonlardır.

Teorem 1.1: [1]: L operatörü, $[x_1, x_2]$ üzerinde tanımlı

$$L[y(x)]+\lambda r(x)y(x)=0, \quad x_1<x<x_2$$

özdeğer probleminin simetrik bir operatörü ve λ_n, λ_k ise L operatörünün farklı iki özdeğeri olsun. Ayrıca bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar sırasıyla $\Phi_n(x)$ ve $\Phi_k(x)$ ile gösterilsin. Bu durumda $\Phi_n(x)$ ve $\Phi_k(x)$ bir $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre diktir (ortogonaldir), yani

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x)\Phi_n(x)\Phi_k(x)\,dx=0, \quad n\neq k.$$

Teorem 1.2: [1]: Simetrik bir operatörün bütün özdeğerleri reeldir.

Teorem 1.3: [3]: Simetrik bir operatörün özdeğerleri

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

şeklinde sonsuz bir dizi oluştururlar ve $n \to \infty$ iken $\lambda_n \to \infty$. Ayrıca λ_n özdeğerine karşılık gelen n. özfonksiyonun, (x_1, x_2) aralığı üzerinde $n-1$ tane sıfır yeri mevcuttur.

1.2.1. Regüler Sturm-Liouville Problemleri

Özdeğer problemlerinin çoğu ayrılmış, homojen sınır koşullarına sahiptir. Bu tür problemler, $L = D\left[p(x)D\right] + q(x)$ olmak üzere,

$$L\left[y(x)\right] + \lambda r(x) y(x) = 0, \; x_1 < x < x_2, \tag{1.8}$$

$$B_1[y] = a_{11} y(x_1) + a_{12} y'(x_1) = 0, \tag{1.9}$$

$$B_2[y] = a_{21} y(x_2) + a_{22} y'(x_2) = 0 \tag{1.10}$$

şeklinde karakterize edilir. Burada $a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0, \; a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ ’ dır. Bu sınıfa ait olan bir özdeğer problemi Regüler Sturm-Liouville Problemi olarak adlandırılır.

Regüler Sturm-Liouville probleminin L operatörünün simetrik olduğunu göstermek için, (1.8)-(1.10) probleminde verilen ayrılmış sınır koşullarını sağlayan, ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip u ve v fonksiyonları göz önüne alınsın. Bu durumda, $x = x_1$ noktasında:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} u(x_1) + a_{12} u'(x_1) = 0, \\ a_{11} v(x_1) + a_{12} v'(x_1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

Fakat tanım gereği a_{11} ve a_{12} aynı anda sıfır olamayacağı için (1.11) sisteminin katsayılar determinantı sıfır olmalıdır. Yani,

$$\begin{vmatrix} u(x_1) & u'(x_1) \\ v(x_1) & v'(x_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u(x_1) & v(x_1) \\ u'(x_1) & v'(x_1) \end{vmatrix} = W(u,v)(x_1) = 0.$$

Benzer şekilde, $x = x_2$ noktasında da $W(u,v)(x_2) = 0$ olduğu gösterilebilir. Böylece,

$$p(x_2) W(u,v)(x_2) - p(x_1) W(u,v)(x_1) = 0 - 0 = 0.$$

Buradan da,

$$p(x)W(u,v)(x)\Big|_{x_1}^{x_2}=0.$$

Bu ise Lemma 1.2' e göre L operatörünün simetrik olduğunu gösterir.

Bir regüler Sturm-Liouville problemi simetrik bir operatöre sahip olduğu için, daha önce verildiği üzere,

i) Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar diktir,

ii) Operatörün bütün özdeğerleri reeldir,

iii) $n\to\infty$ iken $\lambda_n\to\infty$ ve özdeğerler $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots<\lambda_n<\cdots$ şeklinde bir dizi oluşturur.

Bunlara ilaveten diğer bir özellik de aşağıdaki teoremle ifade edilir:

Teorem 1.4: [1]: Bir regüler Sturm-Liouville sisteminin özdeğerleri basittir, yani bir özdeğer için birden fazla lineer bağımsız özfonksiyon mevcut değildir.

1.2.2. Periyodik Sturm-Liouville Problemleri

Özdeğer problemlerinin önemli bir sınıfı da aşağıdaki şekildedir:

$$L\left[y(x)\right]+\lambda r(x)y(x)=0,\ x_1<x<x_2,$$
$$y(x_1)=y(x_2),\quad y'(x_1)=y'(x_2).$$

Burada $L=D\left[p(x)D\right]+q(x)$ ve $p(x_1)=p(x_2)$' dir. Bu tür problemlere Periyodik Sturm-Liouville Problemi denir. Dikkat edilirse sınır koşulları ayrılmamış formdadır. Kolayca gösterilebilir ki bu sınıfa ait problemlerde L operatörü simetriktir.

Aşağıdaki örnekten de görüleceği üzere, periyodik Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerleri basit olmayabilir. Yani bir özdeğer için iki lineer bağımsız özfonksiyon mevcut olabilir.

Örnek 1.1: Aşağıdaki problemin özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları bulunuz.

$$y''+\lambda y=0,\ y=y(\theta),\quad -\pi<\theta<\pi,$$
$$y(-\pi)=y(\pi),\quad y'(-\pi)=y'(\pi).$$

Çözüm: Problemde $p(\theta)=1$, bu yüzden $p(-\pi)=p(\pi)$' dir.

- $\lambda=0$ için, diferensiyel denklemin genel çözümü $y(\theta)=c_1+c_2\theta$' dır.

Periyodik sınır değerleri genel çözüme uygulanırsa:

$$y(-\pi)-y(\pi)=-2c_2\pi=0,$$

ve

$$y'(-\pi)-y'(\pi)=c_2-c_2=0.$$

Böylece $c_2=0$, c_1 ise keyfi olarak elde edilir. O halde özdeğer-özfonksiyon çifti aşağıdaki gibidir:

$$\lambda_0=0,\quad \Phi_0(\theta)=1.$$

- $\lambda=k^2>0$ için, denklemin genel çözümü $y(\theta)=c_1\cos k\theta+c_2\sin k\theta$ ' dır.

Periyodik sınır koşulları genel çözüme uygulanırsa:

$$y(-\pi)-y(\pi)=c_1\cos k\pi-c_2\sin k\pi-c_1\cos k\pi+c_2\sin k\pi=0$$

ve

$$y'(-\pi)-y'(\pi)=kc_1\sin k\pi+kc_2\cos k\pi+kc_1\sin k\pi-kc_2\cos k\pi=0.$$

Böylece $c_2\sin k\pi=0$ ve $c_1\sin k\pi=0$ bulunur. Buradan da $k=n,\quad n=1,2,3,...$ için c_1 ve c_2 keyfi olarak elde edilir. Bu ise her bir $\lambda_n=n^2,\quad n=1,2,3,...$ özdeğerine karşılık iki lineer bağımsız özfonksiyonun mevcut olduğunu gösterir:

$$\Phi_n(\theta)=c_1\cos n\theta+c_2\sin n\theta,\quad n=1,2,3,...$$

ve

$$\Psi_n(\theta)=c_3\cos n\theta+c_4\sin n\theta,\quad n=1,2,3,...$$

Burada c_1, c_2, c_3, c_4 katsayıları $\Phi_n(\theta)$ ve $\Psi_n(\theta)$' yı lineer bağımsız yapan sabitlerdir.

- $\lambda=-k^2<0$ için denklemin genel çözümü $y(\theta)=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}$ ' dir.

Periyodik sınır koşulları bu genel çözüme uygulanırsa:

$$y(-\pi)-y(\pi)=c_1e^{-k\pi}+c_2e^{k\pi}-c_1e^{k\pi}-c_2e^{-k\pi}=0$$

ve

$$y'(-\pi)-y'(\pi)=kc_1e^{-k\pi}-kc_2e^{k\pi}-kc_1e^{k\pi}+kc_2e^{-k\pi}=0.$$

Böylece $(c_2-c_1)(e^{k\pi}-e^{-k\pi})=0$ ve $(c_1-c_2)(e^{-k\pi}-e^{k\pi})=0$ bulunur. Buradan da $c_1=c_2=0$ olarak elde edilir. Yani $y\equiv 0$' dır. O halde, $\lambda=-k^2<0$ özdeğer değildir.

$\lambda=k^2>0$ için $c_1=c_4=1,\ c_2=c_3=0$ seçimi ile elde edilen özfonksiyonların aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$\Phi_n(\theta) = \cos n\theta, \quad (n = 1,2,3,...)$$

ve

$$\Psi_n(\theta) = \sin n\theta, \quad (n = 1,2,3,...).$$

Bu durumda $\Phi_n(\theta)$ ve $\Psi_n(\theta)$ sadece lineer bağımsız değil, aynı zamanda $[-\pi, \pi]$ aralığı üzerinde diktir, çünkü

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta \sin n\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2n\theta \, d\theta = -\frac{1}{4}\cos 2n\theta\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Bu örnekte olduğu gibi, birden fazla lineer bağımsız özfonksiyonun mevcut olduğu durumlarda sabitlerin uygun seçimi ile lineer bağımsız özfonksiyonların en basit bileşimi elde edilebilir.

Genel olarak, tek bir λ_n özdeğerine karşılık iki lineer bağımsız özfonksiyon $\Phi_n(\theta)$ ve $\Psi_n(\theta)$ bulunmuş ise, daima $\Phi_n(\theta)$ ve $\Psi_n(\theta)$' in öyle bir lineer bileşimi bulunabilir ki belirli aralıkta bu özfonksiyonlar dik olur. Son olarak, ikinci mertebeden diferensiyel denklemin tek bir özdeğerine ikiden daha fazla lineer bağımsız özfonksiyon karşılık gelemez.

1.2.3. Singüler Sturm- Liouville Problemleri

Uygulamalarda rastlanan en ilginç Sturm-Liouville problemleri aşağıda tanımlandığı gibi singüler olarak sınıflandırılır. Bu singülerlikler sistemin genel yapısını, özellikle de L operatörünün simetrikliği için gerekli olan sınır koşullarının şeklini değiştirir.

Tanım 1.6: Bir Sturm-Liouville probleminde, $[x_1, x_2]$ aralığı üzerinde aşağıdaki durumların biri veya daha fazlası varsa, probleme singülerdir denir:

i) $p(x_1) = 0$ ve (veya) $p(x_2) = 0$' dır.

ii) $p(x), q(x)$ veya $r(x)$, $x = x_1$ ve (veya) $x = x_2$ noktalarında sonsuzdur.

iii) x_1 ve (veya) x_2 sonsuzdur.

Bu sınıfa ait önemli diferensiyel denklemlerin bazıları aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'\right] + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1 \quad \text{(Legendre Denklemi)},$$

$$\frac{d}{dx}\left(xy'\right)-\frac{v^2}{x}y+\lambda xy=0,\ 0<x<b \quad \text{(Bessel Denklemi)},$$

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}y'\right)+\lambda e^{-x}y=0,\ 0<x<\infty \quad \text{(Laguerre Denklemi)},$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}y'\right)+\lambda e^{-x^2}y=0,\ -\infty<x<\infty \quad \text{(Hermite Denklemi)}.$$

Bir singüler Sturm-Liouville probleminin simetrik bir operatöre sahip olması için Lemma 1.2' e göre aşağıdaki eşitliğin sağlanması gerekir:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(uL[v]-vL[u]\right)\,dx=p\left(x\right)W\left(u,v\right)\left(x\right)\Big|_{x_1}^{x_2}=0.$$

Burada u ve v, Sturm-Liouville probleminin sınır koşullarını sağlayan, ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlardır. Örneğin, singülerlik $x=x_1$ noktasında ise, sınır koşulları aşağıdaki gibi alınabilir:

$$\lim_{x\to x_1^+}p\left(x\right)W\left(u,v\right)\left(x\right)=0 \tag{1.12}$$

ve

$$p\left(x_2\right)W\left(u,v\right)\left(x_2\right)=0. \tag{1.13}$$

İkinci olarak, eğer singülerlik $p\left(x_1\right)=0$ olmasına dayanıyorsa, sınır koşullarının

$$y\left(x\right)\text{ ve }y'\left(x\right)\text{ sonlu }\quad\left(x\to x_1^+\right) \tag{1.14}$$

alınması durumunda (1.12) doğrudan sağlanır. İkinci uçtaki yani x_2 noktasındaki sınır koşullarının aşağıdaki şekilde alınmasıyla da (1.13) sağlanır:

$$a_{21}y\left(x_2\right)+a_{22}y'\left(x_2\right)=0.$$

Çünkü, bu durumda $a_{21}u\left(x_2\right)+a_{22}u'\left(x_2\right)=0$ ve $a_{21}v\left(x_2\right)+a_{22}v'\left(x_2\right)=0$ olacağından

$$\begin{aligned}p\left(x_2\right)W\left(u,v\right)\left(x_2\right)&=p\left(x_2\right)\left[u\left(x_2\right)v'\left(x_2\right)-u'\left(x_2\right)v\left(x_2\right)\right]\\&=p\left(x_2\right)\left[\left(-\frac{a_{22}}{a_{21}}\right)u'\left(x_2\right)v'\left(x_2\right)-u'\left(x_2\right)\left(-\frac{a_{22}}{a_{21}}\right)v'\left(x_2\right)\right]=0.\end{aligned}$$

(1.12)’ nin sağlanması için (1.14)’ ten farklı sınır koşulları da verilebilir, fakat bu durumda problemin sıfırdan farklı çözümünün olmaması ile karşılaşılır. Bu nedenle, birçok örnekte bu tür sınır koşulları kullanılır. Benzer analiz $x = x_2$ noktasına dayanan singülerlikler için de mevcuttur.

Belirtilsin ki, singüler özdeğer problemleri her zaman simetrik operatör içermeyebilir. Bu gibi problemlerde, özdeğer ve özfonksiyonların Teorem 1.1-1.3’ teki özellikleri sağlaması beklenemez.

1.3. Sturm-Liouville Problemlerinin Elde Edildiği Fiziksel Durumlar

Bu bölümde, tez çalışmasında incelenen (1.1)-(1.3) probleminin elde edildiği fizik problemlerinden örneklere yer verilecektir ([4], [14]).

1.3.1. Isı İletimi-1

$t = 0$ anında bir ucu sıvıyla temas eden ince bir demir çubuğun soğuması göz önüne alınsın. Demir çubuktan ısı akışının sadece sıvıya doğru olduğu ve sıvıdan da ısının çevreye yayıldığı kabul edilsin. Bu durumda 1 birim uzunluğunda alınan demir çubuk için başlangıç-sınır değer problemi aşağıdaki şekilde modellenmektedir:

$$\begin{aligned}
&u_t = \alpha^2 u_{xx}, \\
&u_x(0,t) = 0, \ t \in \mathbb{R}, \\
&-kAu_x(1^-,t) = qM(dv/dt) + k_1Bv(t), \\
&u(x,0) = u_0(x), \ x \in [0,1], \\
&v(0) = v_0.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Newton’ un soğuma kanunu ve $x = 1$ noktasında Fourier’ in ısı iletimi kanunundan faydalanılarak $v(t)$ aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$v(t) = u(1,t) + kc^{-1}u_x(1^-,t), \ t > 0.$$

Burada $c > 0$ sıvının ısı iletim katsayısıdır. Bu değer (1.15) eşitliğinde kullanılır ve probleme $u(x,t) = X(x)T(t)$ değişkenlerine ayırma metodu uygulanırsa, $X(x)$ için aşağıdaki problem elde edilir:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.16}$$

$$X'(0) = 0, \tag{1.17}$$

$$\left(k_1 B / \alpha^2 qM\right) X(1) + \left[\left(1 + k_1 B / cA\right) / \sigma\right] X'(1^-) = \lambda\left[X(1) + (k/c)X'(1)\right]. \tag{1.18}$$

Burada $\sigma := \alpha^2 qM / kA$ olarak tanımlanmıştır. (1.16)-(1.18) problemi ise (1.1)-(1.3) probleminin

$$q(x) = \alpha_{11} = \alpha_{12} = \beta_{11} = 0,\ p(x) = r(x) = \beta_{12} = 1;$$
$$\alpha_{21} = 1,\ \alpha_{22} = -\frac{k}{c},\ \beta_{21} = -\frac{k_1 B}{\alpha^2 qM},\ \beta_{22} = \left(1 + \frac{k_1 B}{cA}\right) / \sigma$$

değerlerine karşılık gelen şeklidir. Yani (1.16)-(1.18) problemi sınır değerinde özdeğer parametresi içeren bir Sturm-Liouville problemidir.

1.3.2. Isı İletimi-2

Bir çubuktaki ısı iletimi, fizikte sınır değer problemlerinin ilk uygulamalarından biri olarak, sık sık ele alınmaktadır. Genellikle birçok çalışmada yoğunluk ve diğer sıcaklık özellikleri sabit olarak alınır. Aşağıdaki örnekte ise çubuğun özellikleri, çubuk uzunluğunun fonksiyonu olarak değişmektedir.

1.3.2.1. Fiziksel Prensipler

Bir maddeyi oluşturan taneciklerin sahip oldukları hareket (kinetik) enerjilerinin toplamına Isı denir. Sıcaklık ise, bir maddeyi oluşturan taneciklerin sahip oldukları kinetik enerjisinin ortalamasıdır. Isı bir enerji çeşidi, sıcaklık ise bir ölçümdür.

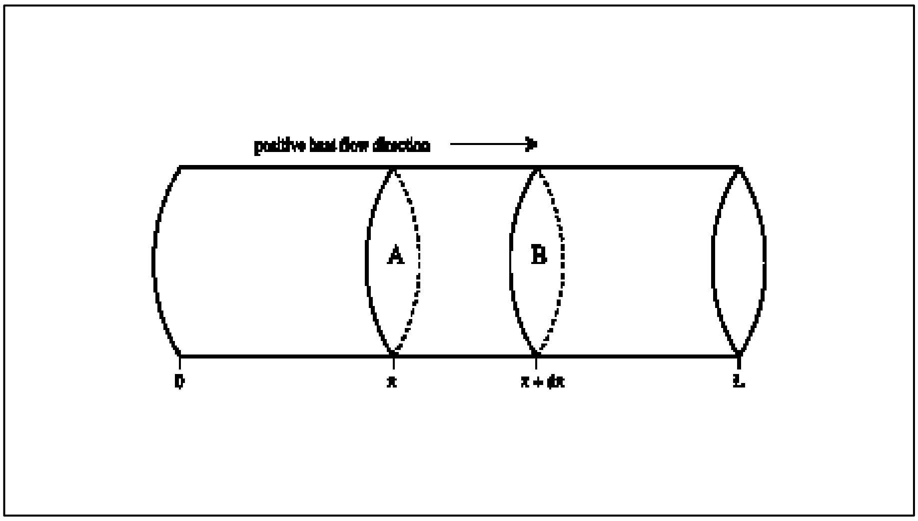
Birbiriyle temas halinde bulunan sıcaklıkları farklı iki veya daha fazla madde arasında ısı alış-verişi olur. Sıcak madde ısı vererek soğurken, soğuk madde de bu ısıyı alarak sıcaklığı artar. Bu durum, Termodinamiğin 2. Kanunu olarak bilinir. Sıcaklıkları farklı iki veya daha fazla madde arasında gerçekleşen bu enerji aktarımına ise Isı Geçişi (Transferi) adı verilir.

Isının transferi ortam sıcaklıklarındaki farka bağlı olduğu kadar, ortamın ve yüzeylerin özelliklerine de bağlıdır. Aşağıda, ısının iletimle transferi, metal bir çubuk göz önüne alınarak analiz edilecektir. Isı akışı, sıcaklıktaki değişikliklerin ölçülmesiyle belirlenir.

Örnekte ince bir tel veya çubuk içerisindeki ısı akışını belirlemek için, sıcaklık zamanın ve konumun bir fonksiyonu olarak araştırılacaktır. İlk olarak, çubuk için aşağıdaki fiziksel varsayımlar kabul edilsin:

1) Sıcaklık, uzaklığın ve zamanın sürekli fonksiyonudur. Sıcaklık $u = u(x,t)$ ile gösterilsin.

2) Fourier Kanunu: Çubuk içerisindeki bir x_0 noktasındaki ısı akısının miktarı, o noktanın çevresindeki sıcaklık gradyanına orantılıdır. x_0 noktasında birim zamanda geçen ısı akışının miktarı $u_x(x_0,t)$ ile verilir. Orantı sabiti ise materyalin ısı iletim katsayısı olarak adlandırılır. Bu katsayı, çubuk içerisinde her noktada aynı olabileceği gibi, çubuk içerisindeki farklı noktalar için farklı da olabilir. Isı iletim katsayısı $k = k(x)$ ile gösterilsin. Pozitif ısı akışı, sıcaklık gradyanı negatif iken oluşur, yani "$-$" işareti ısının sıcaklığı yüksek olan yerden düşük olan yere doğru aktığını ifade etmektedir.



Şekil 1. Çubuk içerisindeki ısı akışı

3) Her maddenin, sıcaklığını $1^{\circ}C$ değiştirmek için gerekli olan ısı miktarı olarak tanımlanan bir ısı kapasitesi (sığası) vardır. Çubuğun ısı kapasitesi $c = c(x)$ ile gösterilsin.

4) Isı iletimi çubuğun iç tarafında gerçekleşirken, çubuğun yan yüzeyleri ve uç noktaları dış dünyayla temas halinde olduğundan, ısı dağılacaktır. Bu nedenle kaybolan ısı olmaması için, çubuğun dış dünyadan yalıtıldığı varsayılacaktır.

5) Çubuk L uzunluğunda olsun. Böylece çubuğun bir ucu $x = 0$ noktasında iken, diğer ucu $x = L$ noktasındadır.
6) Çubuğun yoğunluğu, yani birim hacimdeki kütle miktarı, $\rho = \rho(x)$ ile gösterilsin.

1.3.2.2. Model

Çubuğun x ve $x + dx$ noktaları arasındaki ısı akışı ele alınsın (Şekil 1). x noktasındaki kesit A ile, $x + dx$ noktasındaki kesit B ile gösterilsin. A ve B kesit alanlarının eşit olduğu farz edilsin ve bu alan $"a"$ olsun. Isı akışı, birim zamanda birim alandan geçen enerji akısı olarak ölçülür. Böylece ısı akış miktarı H olmak üzere, küçük bir zaman aralığı dt üzerinde, ortalama akı $\dfrac{H}{adt}$ ’ dir ve bu değer Fourier Kanunu gereği $-k(x)u_x(x,t)$ değerine eşit olacaktır (işaret eksidir, çünkü verilen bir sıcaklık gradyanı için ısı ters yönde akacaktır.). Böylece, ele alınan varsayımlar altında dt zaman aralığı üzerinde A kesitinin içinden geçen enerji (ısı) miktarı aşağıdaki şekildedir:

$$H(x) = -adtk(x)u_x(x,t). \tag{1.19}$$

Aynı zaman aralığında, B kesitinin içinden geçen enerji miktarı ise

$$H(x+dx) = -adtk(x+dx)u_x(x+dx,t). \tag{1.20}$$

Sonuç olarak, dt aralığı üzerinde, çubuğun ele alınan küçük parçasının içindeki net ısı değişimi ΔE ile gösterilirse, ΔE, (1.19) ve (1.20) ile verilen ısı miktarları arasındaki fark olacaktır:

$$\Delta E = adt\left[k(x+dx)u_x(x+dx,t) - k(x)u_x(x,t)\right]. \tag{1.21}$$

Isıdaki bu değişim, m kütle olmak üzere ele alınan parçadaki sıcaklığın değişim miktarı olarak aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$\Delta E = c(x)m\Delta u(x,t). \tag{1.22}$$

Ayrıca x noktasında, dt zaman aralığından sonra meydana gelen sıcaklık değişimi Δu 'nun tüm hacim için aynı olduğu (dx çok küçük ve $u(x,t)$ sürekli olduğu için) ve kütlenin $a\rho(x)dx$ olarak ölçüldüğü farzedilsin. Bu durumda (1.22) eşitliğinden

$$\Delta E = c(x)a\rho(x)dx\left[u(x,t+dt)-u(x,t)\right].$$

Son denklem ile (1.21) denkleminin eşitliğinden

$$adt\left[k(x+dx)u_x(x+dx,t)-k(x)u_x(x,t)\right]=c(x)a\rho(x)dx\left[u(x,t+dt)-u(x,t)\right]$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafı $adtdx$ ile bölünüp, $dt\to 0$ ve $dx\to 0$ götürülürse

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)u_x(x,t)\right]=c(x)\rho(x)u_t(x,t)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem için $r(x)=c(x)\rho(x)$ olarak tanımlansın ve değişkenlerine ayırma metoduyla $u(x,t)=y(x)T(t)$ şeklinde çözüm aransın. Bu durumda aşağıdaki şekilde iki denkleme ulaşılır:

$$T'(t)=\lambda T(t),$$

$$-\left[k(x)y'(x)\right]'=\lambda r(x)y(x). \tag{1.23}$$

Şimdi ise problemin sınır koşulları belirlenmelidir. Sınır koşulları çubuğun uç noktalarına bağlıdır ve genel formu

$$j_0 y(0)-y'(0)=0,\quad j_L y(L)+y'(L)=0$$

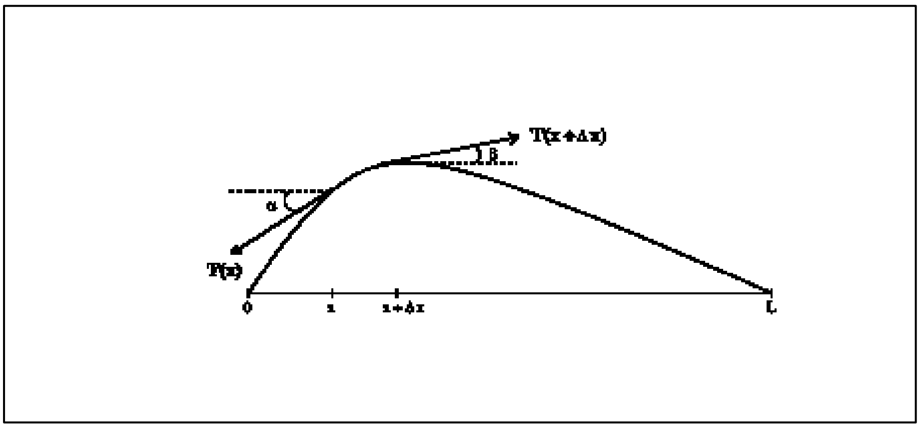
şeklindedir. Burada j_0 ve j_L ile, ilgili uç noktalardaki ısı yayım gücü kastedilmektedir. Belirtilsin ki bu iki değer, hem birbirinden hem de çubuk boyunca dış yüzeyin yayım gücünden farklı olabilir. Ayrıca sınır koşulu olarak, Dirichlet ($y(0)=y(L)=0$) veya Neumann ($y'(0)=y'(L)=0$) şartları da alınabilir. Son olarak, başlangıç sıcaklık dağılım fonksiyonu f olmak üzere

$$u(x,0)=f(x).$$

Yukarıdaki fiziksel varsayımlardan dolayı $k(x)$ ve $r(x)$ pozitif değerli fonksiyonlar olarak alınmalıdır ve dikkat edilirse (1.23) denklemi, (1.1) ile verilen Sturm- Liouville denkleminin özel bir halidir (potansiyel fonksiyonunun $q(x)=0$ alınmış şeklidir).

1.3.3. Titreşen Tel

Isı problemi gibi sık sık karşılaşılan, dalga denkleminden meydana gelen, bir diğer Sturm-Liouville problemi de titreşen tel problemidir. Kemanın üzerinde olduğu gibi esnekliğe sahip bir tel, çekilerek iki ucundan bir yere sabitlensin. Sturm-Liouville denklemi telin bu aşamadan sonraki hareketini tanımlamaktadır. Elde edilen sonuçlar farklı uzunluk ve farklı kalınlıktaki tellerin niçin farklı titreştiklerini teorik alt yapılarla kanıtlamaktadırlar.



Şekil 2. İp üzerindeki gerilme kuvvetleri

1.3.3.1. Fiziksel Prensipler

Dikey ve yatay olmak üzere iki tür dalga vardır. Bu dalga türleriyle, hareket eden dalga yönüyle ilgili titreşim yönü kastedilmektedir. Dalganın tepe noktası ve iki dalga arasındaki çukur hareket eden dalga yönüne dik oldukları için, su dalgaları ve keman telleri yatay dalga hareketi gösterirler (Keman teli yukarı çıkıp aşağı inse bile, tel boyunca hareket eden dalga, telin bağlı olduğu bir uçtan diğer uca doğru gider).

Titreşen telin dalga hareketi, hareketsiz telin konumundan $x-$ ekseni boyunca $u = u(x,t)$ yerdeğiştirme fonksiyonu ile tanımlanabilir (hareketsizlik anında hiçbir bozunum olmaksızın telin yeterince gergin olduğu farzedilmektedir öyle ki $u = 0$ formundadır). Zamanın bir fonksiyonu olarak $u,$ telin şeklinin zamana bağlı olarak değişimini tanımlar. Aşağıdaki fiziksel varsayımlar kabul edilsin:

1) Telin bir ucu $x = 0,$ diğer ucu ise $x = L$ konumundadır.

2) Tel boyunca gerilme kuvveti aynıdır. Gerilme kuvveti $T = T(x)$ ile gösterilsin. Ayrıca yatay yöndeki bozukluk açısı çok küçüktür.
3) Tel ölçülemeyecek kadar ince kalınlıkta olsun. Böylece dalga hareketine ait telin iç gerilme ve bükülme kuvveti ihmal edilebilir.
4) Birim uzunluk başına düşen kütle miktarı, yani telin yoğunluğu ρ tel boyunca aynıdır.
5) Telin elastikesi (esnekliği) uzunluk boyunca aynıdır ve dikey yöndedir.

1.3.3.2. Model

$t = 0$ anında çekilmiş bir tel göz önüne alınsın (Şekil 2). Bu durumda telin başlangıç şekli $f(x) := u(x,0)$ ile tanımlansın. Telin küçük bir bölgesi $[x, x+\Delta x]$ ele alınsın öyle ki Şekil 2' de tasvir edildiği üzere, bu bölgede telin yukarıya doğru yer değiştirdiği kabul edilsin (bu durum aşağıya doğru hareket etmesine simetrik olarak denktir). Teldeki bükülmeye karşı koyulamayacağından, herhangi bir noktadaki gerilme tel boyunca olacaktır (yani gerilme kuvveti teğetseldir). Tel yatay olarak hareket etmediğinden gerilme kuvvetinin yatay bileşeni T_h sabit olmalıdır. $T_1 := T(x)$ ve $T_2 := T(x+\Delta x)$ olarak tanımlanırsa

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T_h. \tag{1.24}$$

Dikey yöndeki toplam kuvvet ise dikey bileşenler $-T_1 \sin\alpha$ ile $T_2 \sin\beta$' nın toplamıdır (eksi işareti, x noktasındaki aşağı doğru yönü ifade etmektedir). Newton' un ikinci kanununa göre bu kuvvet, tel bölgesinin kütlesi $\rho\Delta x$ ile bölgedeki salınımın (salınım bir $x_0 \in [x, x+\Delta x]$ için $u_{xx}(x_0,t)$ olarak yazılabilir) çarpımına eşittir. Böylece

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x u_{tt}(x_0,t)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı T_h ile bölünüp, (1.24) kullanılırsa

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho\Delta x u_{tt}(x_0,t)}{T_h},$$

yani

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x u_{tt}(x_0,t)}{T_h} \tag{1.25}$$

bulunur. Burada $\tan\alpha$ ve $\tan\beta$ sırasıyla x ve $x+\Delta x$ noktalarındaki telin eğimidir, bu yüzden bu değerler $\tan\alpha = u_x(x,t)$, $\tan\beta = u_x(x+\Delta x,t)$ olarak ifade edilebilir. Bu eşitlikler (1.25) denkleminde kullanılıp, her iki taraf Δx ile bölünürse

$$\frac{1}{\Delta x}\left[u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)\right]=\frac{\rho}{T_h}u_{tt}(x_0,t). \tag{1.26}$$

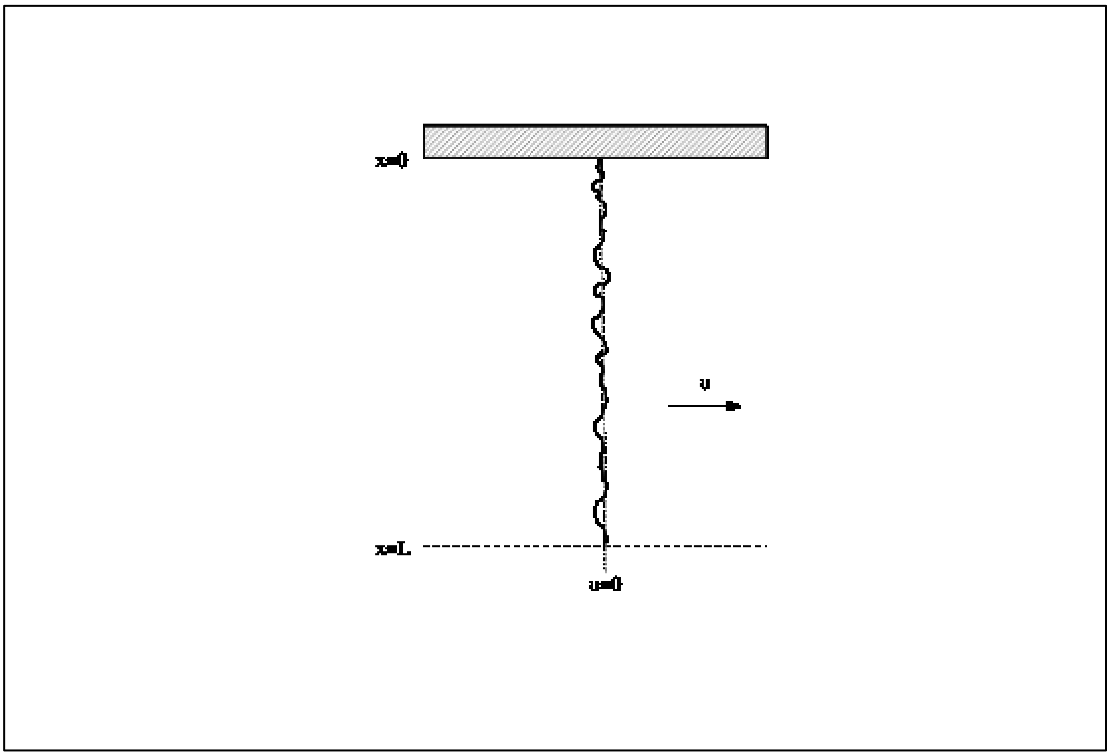
Son eşitlikten $\Delta x \to 0$ iken limit alınırsa, sol tarafta $u(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre iki kere kısmi türevi elde edilir. Sağ taraf ise x değişkeninden bağımsızdır. T_h ve ρ pozitif sabitler olduğundan $c^2 := \dfrac{T_h}{\rho}$ olarak alınırsa, (1.25) eşitliğinden bir boyutlu dalga denklemi

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} = u_{xx}$$

elde edilir. $u(x,t)=y(x)S(t)$ alınarak son eşitliğe değişkenlerine ayırma metodu uygulanırsa, eşitliğin her iki tarafında birbirinden bağımsız değişkenlerin fonksiyonları olacağından, her iki taraf da aynı sabite eşit olacaktır. Bu sabit λ ile gösterilsin. Böylece y için

$$y'' - \lambda y = 0, \quad y(0)=0, \quad y(L)=0 \tag{1.27}$$

problemi elde edilir. Bu problem, katsayı fonksiyonlarının sabit olduğu standart regüler Sturm-Liouville problemi formundadır.



Şekil 3. Yatay olarak titreşen, asılmış tel

1.3.3.3. Varyasyon

Bu bölümde, yukarıda verilen problem daha karmaşık sınır koşullarını içeren problemlere genişletilecektir. Elde edilecek problemlere [22] gibi bir çok fizik kaynağında rastlanmaktadır. Şekil 3' deki gibi, telin bir tavandan asıldığı farzedilsin. Telin alt kısmı ise sürtünmesiz bir yola tutturulsun öyle ki tel yan tarafa doğru serbestçe salınabilsin (tel yatay dalga hareket yaptığından). Fiziksel olarak bu modelde telin alt kısmındaki sınır koşulları, $x = L$ noktasında tele etki eden yan yönde hiçbir kuvvetin bulunmaması olarak ifade edilebilir. Bu, matematiksel olarak ise

$$\rho u_x(L,t) = 0 \tag{1.28}$$

ile verilir. Bu sınır koşulundan yukarıda verilen y denklemi için Neumann ($y'(L) = 0$) sınır koşulu elde edilir.

Bir başka göz önüne alınması gereken unsur ise telin yatay hareket yapan serbest ucunda bükülme olmasıdır. Hooke Yasasına göre bükülme, telin serbest ucundaki $u(L,t)$

yerdeğiştirmesi için, $s^2u(L,t)$ kadar karşıt bir kuvvet uygulayacaktır. Burada s^2 bükülme sabitidir. Böylece telin serbest ucu için

$$\rho u_x(L,t) = -s^2 u(L,t) \tag{1.29}$$

koşulu sağlanır. Bu durumda değişkenlerine ayırma metodu uygulandığında yukarıda verilen y denklemi için sınır koşulunun genel formu

$$\frac{y'(L)}{y(L)} = \cot\beta$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\beta = \pi$ olarak alındığında Dirichlet sınır koşulu elde edilir (bu durum ilk olarak ele alınan (1.27) ile verilen sabitlenmiş uç problemidir). $\beta = \frac{\pi}{2}$ olarak alındığında ikinci olarak ele alınan (1.28) ile verilen herhangi bir bükülmenin olmadığı serbest uç problemi, β nın $(0,\pi)$ aralığındaki diğer değerleri için ise bükülmenin olduğu (1.29) ile verilen serbest uç problemi elde edilir.

Şimdi problem, telin uç kısmına M kütleli bir blok eklenerek (sürtünmesiz olarak) ele alınsın. Tel hareket ediyorken, bloğun da sadece yan tarafa doğru hareket ettiği kabul edilsin. Bloğun eylemsizliğine dayanan telin ucunda bir kuvvet oluşacaktır. Böylece Newton' un ikinci kanunu gereği, $Mu_{tt}(L,t)$ eylemsizlik kuvveti vardır (tel bloğun hareket yönünde gerileceğinden işaret pozitiftir). Değişkenlerine ayırma metoduyla

$$u_{tt}(L,t) = y(L)S''(t) = \lambda y(L)S(t) = \lambda u(L,t)$$

olduğu için, verilen durum

$$\rho u_x(L,t) = \lambda M u(L,t)$$

olarak elde edilir. Böylece sınır koşullarında özdeğer parametresi içerilir. Bloğun ucunda telde s^2 bükülme sabitli bükülme olduğu farzedildiğinde

$$\rho u_x(L,t) = \lambda M u(L,t) - s^2 u(L,t)$$

bulunur. Bu durumda değişkenlerine ayırma metodu uygulandığında, yukarıda verilen y problemi için ise sınır koşulu

$$\frac{y'(L)}{y(L)} = A\lambda - B$$

olarak λ için lineer forma dönüşür. Burada A ve B pozitif sabitlerdir.

1.4. Liouville Dönüşümü

Aşağıda ikinci mertebeden kendine eş bir diferensiyel denklemin, Liouville dönüşümüyle kendine eş daha basit bir şeklinin elde edilebileceği gösterilecektir:

Notasyon: $C^{(r)}(I)$ sembolü ile I aralığı üzerinde r kere sürekli türevlenebilen fonksiyonların kümesi, $L(I)$ sembolü ile I aralığı üzerinde Lebek ölçülebilen fonksiyonların kümesi, $AC(I)$ sembolü ile I aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyonların kümesi; $L_{loc}(I)$ ve $AC_{loc}(I)$ sembolleri ile sırasıyla, I aralığının bütün kompakt alt kümeleri üzerinde L ve AC olan fonksiyonların kümesi gösterilmektedir.

Teorem 1.5: [12]: $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, aşağıdaki Sturm-Liouville denklemi göz önüne alınsın:

$$-\left[p(x)y'(x)\right]' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), \quad x \in I. \tag{1.30}$$

Burada $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ fonksiyonları I aralığı üzerinde reel değerli fonksiyonlar olsun ve

i) $p(x),\ p'(x) \in AC_{loc}(I)$ ve $p(x) > 0,$

ii) $r(x),\ r'(x) \in AC_{loc}(I)$ ve $r(x) > 0,$

iii) $q(x) \in L_{loc}(I)$

özellikleri sağlansın. Ayrıca $k \in I,\ K \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\ell(.) : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın öyle ki

$$X = \ell(x) := K + \int_k^x \left\{\frac{r(t)}{p(t)}\right\}^{1/2} dt \tag{1.31}$$

olsun. Bu durumda

$$Y(X) := \{p(x)r(x)\}^{1/4}\, y(x) \tag{1.32}$$

dönüşümü (1.30) denklemini

$$Y''(X)+Q(X)Y(X)=\lambda Y(X) \tag{1.33}$$

denklemine dönüştürür.

İspat: $A:=K-\int_a^k\left\{\frac{r(t)}{p(t)}\right\}^{1/2}dt,\quad B:=K+\int_k^b\left\{\frac{r(t)}{p(t)}\right\}^{1/2}dt$ olsun. Bu durumda $\ell(k)=K$ ve $-\infty\le A<B\le\infty$. Uç noktaları A ve B olan $\mathbb{R}$' nin bir J aralığı tanımlansın. i, ii ve iii hipotezlerinden $A(B)\in J$' dir ancak ve ancak $a(b)\in I$' dır. Ayrıca $\ell(.)\in C^2(I)$' dır ve $\ell(x)$ fonksiyonu artandır. Böylece $\ell(.)$ fonksiyonunun tersi vardır. $\ell(.)$ fonksiyonunun tersi $L(.)$ ile gösterilsin. $L(.)\in C^{(2)}(J)$ dir ve

$$\begin{aligned}Y(X)&=\{p(x)r(x)\}^{1/4}\,y(x)\quad (x\in I)\\&=\{p(L(X))r(L(X))\}^{1/4}\,y(L(X))\quad (X\in J).\end{aligned}$$

Şimdi (1.32) dönüşümünün her iki tarafının türevi alınsın. Bu durumda (1.31)' yı kullanarak zincir kuralı uygulanırsa

$$y'(x)=\left\{\left(p(x)r(x)\right)^{-1/4}\right\}'Y(X)+\left(p(x)r(x)\right)^{-1/4}Y'(X)\left\{\frac{r(x)}{p(x)}\right\}^{1/2},$$

yani

$$y'(x)=\left\{\left(p(x)r(x)\right)^{-1/4}\right\}'Y(X)+p^{-3/4}(x)r^{1/4}(x)Y'(X) \tag{1.34}$$

olarak bulunur. Son eşitliğin her iki tarafının tekrar türevi alınırsa

$$\begin{aligned}y''(x)=&\left[\left\{\left(p(x)r(x)\right)^{-1/4}\right\}'\right]'Y(X)+\left[-\frac{1}{4}p^{-5/4}(x)r^{-1/4}(x)p'(x)\right.\\&\left.-\frac{1}{4}p^{-1/4}(x)r^{-5/4}(x)r'(x)\right]Y'(X)p^{-1/2}(x)r^{1/2}(x)\\&+\left[-\frac{3}{4}p^{-7/4}(x)r^{1/4}(x)p'(x)+\frac{1}{4}p^{-3/4}(x)r^{-3/4}(x)r'(x)\right]Y'(X)\\&+p^{-3/4}(x)r^{1/4}(x)Y''(X)p^{-1/2}(x)r^{1/2}(x),\end{aligned}$$

yani

$$y''(x) = \left[\left\{\left(p(x)r(x)\right)^{-1/4}\right\}'\right]' Y(X) - p^{-7/4}(x)r^{1/4}(x)p'(x)Y'(X) \qquad (1.35)$$
$$+\, p^{-5/4}(x)r^{3/4}(x)Y''(X).$$

(1.34) ve (1.35) eşitlikleri ele alınan $-p(x)y''(x) - p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x)$ denkleminde yerine koyulursa

$$-p(x)\left[\left\{\left(p(x)r(x)\right)^{-1/4}\right\}'\right]' Y(X) - p(x)p^{-7/4}(x)r^{1/4}(x)p'(x)Y'(X)$$
$$+p(x)p^{-5/4}(x)r^{3/4}(x)Y''(X) - p'(x)\left\{\left(p(x)r(x)\right)^{-1/4}\right\}' Y(X)$$
$$-p'(x)p^{-3/4}(x)r^{1/4}(x)Y'(X) + q(x)p^{-1/4}(x)r^{-1/4}(x)Y(X)$$
$$= \lambda r(x)p^{-1/4}(x)r^{-1/4}(x)Y(X).$$

Son eşitlikte her iki taraf $Y''(X)$' in katsayı fonksiyonuyla bölünürse,

$$Q(X) := r^{-1}(x)q(x) - \left\{r^{-3}(x)p(x)\right\}^{1/4}\left[p(x)\left\{\left(p(x)r(x)\right)^{-1/4}\right\}'\right]', \quad x \in I \qquad (1.36)$$

olmak üzere $Y''(X) + Q(X)Y(X) = \lambda Y(X)$ denklemi elde edilir. Dikkat edilirse i, ii ve iii hipotezlerinden (1.36) eşitliğinin sağ tarafı $L_{loc}(I)$ olduğundan, $Q \in L_{loc}(J)$' dir. ■

Teorem 1.5' in sonucu olarak, (1.30) denkleminin özdeğerleri ile (1.33) denkleminin özdeğerleri aynı olduğu için, (1.30) denkleminin özdeğerlerini bulmak için daha basit formda olan (1.33) denklemi ile çalışılabilir.

1.5. Serilerle Hata Hesabı

Genel olarak kuvvet serisi formunda verilen, sabit terimi olmayan bir

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

fonksiyonunun, ters fonksiyonu olan

$$x = A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \ldots$$

seri açılımı katsayılar belirlenerek elde edilebilir. Bunun için n. katsayının hesaplanabileceği genel bir formüle [24] çalışmasında yer verilmiştir.

Tez çalışmasında özdeğerler için geliştirilmiş asimptotik tahminler hesaplarken kullanılacak olan bu yöntemin ele alınan problemlere uygulanışı aşağıdaki şekildedir:

Asimptotik seri açılımı

$$(n+1)\pi = a_0\Lambda^{1/2} + a_1\Lambda^{-1/2} + a_2\Lambda^{-3/2} + \dots \tag{1.37}$$

göz önüne alınsın. Burada a_i, $i = 0,1,2,...$ bilinen katsayılar ve $a_0 \neq 0$ olsun. Amaç, (1.37) açılımından $\Lambda^{1/2}$ terimini artan doğruluk derecesiyle $\Lambda^{-1/2}$ teriminin kuvvetleri cinsinden hesaplamaktır. Serilerle hata hesabı yöntemiyle, serinin birinci terimi kullanılarak $\Lambda^{1/2}$ için birinci asimptotik yaklaşım, serinin birinci ve ikinci terimi kullanılarak ikinci asimptotik yaklaşım belirlenir ve süreç bu şekilde devam eder. Her bir iterasyonda hata terimi geliştirilir. Bu ardışık yaklaşımlar a_i katsayıları bilindiği müddetçe gerçekleştirilebilir. Böylelikle (1.37) denklemine serilerle hata hesabı uygulanırsa, $\Lambda_{1,n}^{1/2}$ ile gösterilen ilk yaklaşım

$$\Lambda_{1,n}^{1/2} = \frac{(n+1)\pi}{a_0} = O(n) \tag{1.38}$$

olur. Bu durumda

$$\Lambda_{1,n}^{-1/2} = \frac{1}{\Lambda_{1,n}^{1/2}} = \frac{a_0}{(n+1)\pi} = O\left(n^{-1}\right) \tag{1.39}$$

olarak bulunur. (1.39) eşitliği (1.37) eşitliğinde kullanılarak $\Lambda_{2,n}^{1/2}$ ile gösterilen ikinci yaklaşım aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\Lambda_{2,n}^{1/2} = \frac{(n+1)\pi}{a_0} + O\left(n^{-1}\right). \tag{1.40}$$

Bulunan bu ikinci yaklaşım ise (1.38) ile verilen birinci yaklaşımdan daha geliştirilmiş bir yaklaşımdır. Son eşitlik kullanılarak

$$\Lambda_{2,n}^{-1/2}=\frac{1}{\Lambda_{2,n}^{1/2}}=\frac{1}{\frac{(n+1)\pi}{a_0}+O\left(n^{-1}\right)}=\frac{1}{\frac{(n+1)\pi}{a_0}\left[1+O\left(n^{-2}\right)\right]}$$
$$=\frac{a_0}{(n+1)\pi}\left[\frac{1}{1+O\left(n^{-2}\right)}\right] \tag{1.41}$$

bulunur. $|x|<1$ iken $\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m x^m=\frac{1}{1+x}$ olduğundan

$$\frac{1}{1+O\left(n^{-2}\right)}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left[O\left(n^{-2}\right)\right]^m=1-O\left(n^{-2}\right)+O\left(n^{-4}\right)-\ldots=1+O\left(n^{-2}\right)$$

sağlanır. Bu eşitlik (1.41)' de kullanılırsa

$$\Lambda_{2,n}^{-1/2}=\frac{a_0}{(n+1)\pi}\left[\frac{1}{1+O\left(n^{-2}\right)}\right]=\frac{a_0}{(n+1)\pi}+O\left(n^{-3}\right) \tag{1.42}$$

olarak elde edilir. (1.42) eşitliği (1.37)' de kullanılırsa

$$(n+1)\pi=a_0\Lambda_{3,n}^{1/2}+a_1\left[\frac{a_0}{(n+1)\pi}+O\left(n^{-3}\right)\right]$$

eşitliğinden $\Lambda_{3,n}^{1/2}$ ile gösterilen üçüncü yaklaşım aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\Lambda_{3,n}^{1/2}=\frac{(n+1)\pi}{a_0}-\frac{a_1}{(n+1)\pi}+O\left(n^{-3}\right). \tag{1.43}$$

Bu ise (1.40) ile verilen ikinci yaklaşımdan daha geliştirilmiş bir yaklaşımdır. Son eşitlik kullanılarak

$$\Lambda_{3,n}^{-1/2}=\frac{1}{\frac{(n+1)\pi}{a_0}\left[1-\frac{a_0a_1}{(n+1)^2\pi^2}+O\left(n^{-4}\right)\right]}$$
$$=\frac{a_0}{(n+1)\pi}\left[1+\frac{a_0a_1}{(n+1)^2\pi^2}+O\left(n^{-4}\right)\right]=\frac{a_0}{(n+1)\pi}+\frac{a_0^2a_1}{(n+1)^3\pi^3}+O\left(n^{-5}\right) \tag{1.44}$$

ve

$$\begin{aligned}\Lambda_{3,n}^{-3/2} &= \left[\frac{a_0}{(n+1)\pi} + \frac{a_0^2 a_1}{(n+1)^3 \pi^3} + O\left(n^{-5}\right)\right]^3 \\ &= \frac{a_0^3}{(n+1)^3 \pi^3} + \frac{2a_0^3 a_1}{(n+1)^4 \pi^4} + O\left(n^{-6}\right)\end{aligned} \tag{1.45}$$

olarak hesaplanır. (1.44) ve (1.45) eşitlikleri (1.37) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}(n+1)\pi = a_0\Lambda_{4,n}^{1/2} &+ a_1\left[\frac{a_0}{(n+1)\pi} + \frac{a_0^2 a_1}{(n+1)^3 \pi^3} + O\left(n^{-5}\right)\right] \\ &+ a_3\left[\frac{a_0^3}{(n+1)^3 \pi^3} + \frac{2a_0^3 a_1}{(n+1)^4 \pi^4} + O\left(n^{-6}\right)\right]\end{aligned}$$

eşitliğinden $\Lambda_{4,n}^{1/2}$ ile gösterilen dördüncü yaklaşım

$$\Lambda_{4,n}^{1/2} = \frac{(n+1)\pi}{a_0} - \frac{a_1}{(n+1)\pi} - \frac{a_0 a_1^2}{(n+1)^3 \pi^3} - \frac{a_0^2 a_3}{(n+1)^3 \pi^3} - \frac{2a_0^2 a_1 a_3}{(n+1)^4 \pi^4} + O\left(n^{-5}\right)$$

bir önceki yaklaşımdan daha iyi bir yaklaşım olarak elde edilir. Bu yöntem istenilen hata terimine ulaşıncaya kadar devam ettirilebilir. Genel olarak, $O\left(\Lambda^{-k}\right)$ teriminde k ne kadar büyükse hata terimi o kadar iyi demektir. Bu yöntem tezde Serilerle Hata Hesabı olarak adlandırılacaktır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

Bu tez çalışmasında

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,b],$$

$$-\left[\beta_{11}y(a)-\beta_{12}y'(a)\right]=\lambda\left[\alpha_{11}y(a)-\alpha_{12}y'(a)\right],$$

$$-\left[\beta_{21}y(b)-\beta_{22}y'(b)\right]=\lambda\left[\alpha_{21}y(b)-\alpha_{22}y'(b)\right]$$

problemi α_{ik}, β_{ik} $(i,k=1,2)$ reel sayılarının özel durumları için ayrı ayrı göz önüne alınacak ve öncelikle $q(t)$ potansiyel fonksiyonunun integrallenebilir olma şartı altında, daha sonra $q'(t)$ fonksiyonunun mevcut olması durumunda, problemlerin λ özdeğerleri için asimptotik tahminler elde edilecektir. Son olarak ise, $[a,\infty)$ aralığında integrallenebilir $q(t)$ fonksiyonu için

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,\infty),$$
$$a_1y(a)+a_2y'(a)=\lambda\left[a_1'y(a)+a_2'y'(a)\right], \quad a_1,a_2,a_1',a_2'\in\mathbb{R}$$

problemi ele alınıp, spektral fonksiyonunun türevi incelenecektir.

Aşağıda asimptotik hesaplamalarda kullanılacak yöntem için gerekli teoriye yer verilecektir:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,b] \tag{2.1}$$

denkleminin reel ve sanal kısımları sıfıra eşit olmayan kompleks değerli bir çözümü $y(t,\lambda)$ olsun. Bu durumda $y_1(t,\lambda)$ ve $y_2(t,\lambda)$, (2.1) denkleminin reel çözümleri olmak üzere

$$y(t,\lambda)=y_1(t,\lambda)+iy_2(t,\lambda) \tag{2.2}$$

yazılabilir. Eğer $y_1(t,\lambda)$ ve $y_2(t,\lambda)$ lineer bağımsız ise $y(t,\lambda)$ sıfırdan farklıdır. Ayrıca

$$y(t,\lambda)=R(t,\lambda)\exp\left(i\theta(t,\lambda)\right) \tag{2.3}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $R(t,\lambda)$ ve $\theta(t,\lambda)$ reel değerli fonksiyonlardır. Böylece (2.3) eşitliğinden

$$\frac{y'(t,\lambda)}{y(t,\lambda)}=\frac{R'(t,\lambda)\exp(i\theta(t,\lambda))+R(t,\lambda)i\theta'(t,\lambda)\exp(i\theta(t,\lambda))}{R(t,\lambda)\exp(i\theta(t,\lambda))}$$

olduğundan

$$\frac{y'(t,\lambda)}{y(t,\lambda)}=\frac{R'(t,\lambda)}{R(t,\lambda)}+i\theta'(t,\lambda) \tag{2.4}$$

elde edilir.

Lemma 2.1: [5]: Eğer $R^2(t_0,\lambda)\theta'(t_0,\lambda)\neq 0$ olacak şekilde bir $t_0\in[a,b]$ mevcutsa, $y_1(t,\lambda)$ ve $y_2(t,\lambda)$ lineer bağımsızdır.

İspat: (2.2) eşitliği, (2.3) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}y_1(t,\lambda)+iy_2(t,\lambda)&=R(t,\lambda)\left[\cos\theta(t,\lambda)+i\sin\theta(t,\lambda)\right]\\&=R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)+iR(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda)\end{aligned}$$

olduğundan

$$y_1(t,\lambda)=R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda),$$

$$y_2(t,\lambda)=R(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda)$$

ve böylece

$$y_1'(t,\lambda)=R'(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)-R(t,\lambda)\theta'(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda),$$

$$y_2'(t,\lambda)=R'(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda)+R(t,\lambda)\theta'(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)$$

olarak bulunur. Bu değerler yardımıyla Wronskian determinantı aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}W(y_1,y_2)(t_0,\lambda)&=\begin{vmatrix}y_1(t_0,\lambda) & y_2(t_0,\lambda)\\ y_1'(t_0,\lambda) & y_2'(t_0,\lambda)\end{vmatrix}\\&=R(t_0,\lambda)\cos\theta(t_0,\lambda)\\&\times\left[R'(t_0,\lambda)\sin\theta(t_0,\lambda)+R(t_0,\lambda)\theta'(t_0,\lambda)\cos\theta(t_0,\lambda)\right]\\&-R(t_0,\lambda)\sin\theta(t_0,\lambda)\\&\times\left[R'(t_0,\lambda)\cos\theta(t_0,\lambda)-R(t_0,\lambda)\theta'(t_0,\lambda)\sin\theta(t_0,\lambda)\right].\end{aligned}$$

Son eşitlikte $W(y_1,y_2)(t_0,\lambda)=R^2(t_0,\lambda)\theta'(t_0,\lambda)\neq 0$ olduğundan $y_1(t,\lambda)$ ve $y_2(t,\lambda)$ fonksiyonlarının lineer bağımsız oldukları elde edilir. ■

Lemma 2.2: [5]: $z(t,\lambda)$, (2.1) denkleminin reel değerli bir çözümü olmak üzere, $R(t_0,\lambda)^2\theta'(t_0,\lambda)\neq 0$ olacak şekilde bir $t_0\in[a,b]$ mevcutsa

$$z(t,\lambda)=p(t,\lambda)\cos\Psi(t,\lambda)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\dfrac{p'(t,\lambda)}{p(t,\lambda)}=\dfrac{R'(t,\lambda)}{R(t,\lambda)}$ ve $\Psi'(t,\lambda)=\theta'(t,\lambda),\ t\in[a,b]$.

İspat: c_1,c_2 keyfi reel sayılar olmak üzere Lemma 2.1' den $z(t,\lambda)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$z(t,\lambda)=c_1y_1(t,\lambda)+c_2y_2(t,\lambda)=c_1R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)+c_2R(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda).$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}(c_1-ic_2)R(t,\lambda)\exp(i\theta(t,\lambda))&=c_1R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)-ic_2R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)\\&\quad+ic_1R(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda)-i^2c_2R(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda)\\&=c_1R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)+c_2R(t,\lambda)\sin\theta(t,\lambda)\\&\quad+iR(t,\lambda)\left[c_1\sin\theta(t,\lambda)-c_2\cos\theta(t,\lambda)\right]\end{aligned}$$

eşitliği doğrudur. Bu eşitlikte ε,δ reel sabitler olmak üzere $c_1-ic_2:=\varepsilon\exp(i\delta)$ olarak tanımlanırsa $z(t,\lambda)$ aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}z(t,\lambda)&=\mathrm{Re}\{\varepsilon\exp(i\delta)R(t,\lambda)\exp(i\theta(t,\lambda))\}=\mathrm{Re}\{\varepsilon R(t,\lambda)\exp(i[\theta(t,\lambda)+\delta])\}\\&=\varepsilon R(t,\lambda)\mathrm{Re}\{\cos[\theta(t,\lambda)+\delta]+i\sin[\theta(t,\lambda)+\delta]\}\\&=\varepsilon R(t,\lambda)\cos[\theta(t,\lambda)+\delta].\end{aligned}$$

Son eşitlikte $p(t,\lambda):=\varepsilon R(t,\lambda)$, $\Psi(t,\lambda):=\theta(t,\lambda)+\delta$ olarak tanımlandığında istenilen elde edilir. ■

Sonuç olarak, Lemma 2.2' den $R(t,\lambda)$ ve $\theta(t,\lambda)$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere (2.1) denkleminin herhangi bir reel değerli çözümü

$$y(t,\lambda)=R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda) \tag{2.5}$$

formundadır.

Ele alınan (2.1) denklemine

$$v(t,\lambda) := \frac{y'(t,\lambda)}{y(t,\lambda)} \tag{2.6}$$

dönüşümü uygulansın. Bu durumda

$$y'(t,\lambda) = y(t,\lambda)v(t,\lambda)$$

ve

$$y''(t,\lambda) = y'(t,\lambda)v(t,\lambda) + y(t,\lambda)v'(t,\lambda) = y(t,\lambda)v^2(t,\lambda) + y(t,\lambda)v'(t,\lambda)$$

olduğundan, bu değerler $y''(t) + [\lambda - q(t)]y(t) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa

$$y(t,\lambda)v^2(t,\lambda) + y(t,\lambda)v'(t,\lambda) + \lambda y(t,\lambda) - q(t)y(t,\lambda) = 0,$$

yani

$$y(t,\lambda)\left[v^2(t,\lambda) + v'(t,\lambda) + \lambda - q(t)\right] = 0$$

elde edilir. Son eşitlik gereğince $v(t,\lambda)$ aşağıdaki Riccati diferensiyel denklemini sağlar:

$$v'(t,\lambda) = -\lambda + q(t) - v^2(t,\lambda). \tag{2.7}$$

Böylece $v(t,\lambda) = \dfrac{y'(t,\lambda)}{y(t,\lambda)}$ dönüşümü ve (2.4) eşitliğinden

$$S(t,\lambda) := \operatorname{Re}\{v(t,\lambda)\},\ T(t,\lambda) := \operatorname{Im}\{v(t,\lambda)\}$$

olmak üzere

$$S(t,\lambda) = \frac{R'(t,\lambda)}{R(t,\lambda)}, \tag{2.8}$$

$$T(t,\lambda) = \theta'(t,\lambda) \tag{2.9}$$

olarak elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafının $[a,b]$ aralığı üzerinden integrali alınırsa

$$\theta(b,\lambda) - \theta(a,\lambda) = \int_a^b T(x,\lambda)dx \tag{2.10}$$

bulunur. Ele alınacak problemlerin λ özdeğerleri için asimptotik tahminleri hesaplarken (2.10) eşitliği kullanılacaktır.

Aşağıda pozitif özdeğerler için

$$\left|\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x} q(x)\,dx\right| \le A(t)\eta(\lambda),\ t\in[a,b] \tag{2.11}$$

eşitsizliğini sağlayacak $A(t)$ ve $\eta(\lambda)$ fonksiyonları belirlenecektir öyleki

i) $A(t)$, t değişkeninin azalan bir fonksiyonu,

ii) $A(.)\in L[a,b]$,

iii) $\lambda\to\infty$ iken $\eta(\lambda)\to 0$

olacaktır. Bu esnada $\int_t^b |q(x)|\,dx = 0$ trivial durumu göz ardı edilecektir. $q(t)\in L[a,b]$ olduğundan $\left|\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x} q(x)\,dx\right| \le \int_t^b |q(x)|\,dx < \infty$. Böylece

$$F(t,\lambda) := \begin{cases} \left|\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x} q(x)\,dx\right| \Big/ \int_t^b |q(x)|\,dx, & \int_t^b |q(x)|\,dx \ne 0 \text{ ise,} \\ 0 & , \int_t^b |q(x)|\,dx = 0 \text{ ise,} \end{cases} \tag{2.12}$$

olarak tanımlanırsa, $0\le F(t,\lambda)\le 1$ elde edilir. $\eta(\lambda) := \sup_{a\le t\le b} F(t,\lambda)$ olarak alınırsa (2.12)' den $\eta(\lambda)$ fonksiyonu iyi tanımlıdır ve $\lambda\to\infty$ iken $\eta(\lambda)\to 0$ [5].

$A(t) := \int_t^b |q(x)|\,dx$ olarak tanımlansın. $t_1, t_2 \in [a,b]$ olmak üzere $t_1 < t_2$ için

$$A(t_1)-A(t_2) = \int_{t_1}^b |q(x)|\,dx - \int_{t_2}^b |q(x)|\,dx = \int_{t_1}^b |q(x)|\,dx + \int_b^{t_2} |q(x)|\,dx = \int_{t_1}^{t_2} |q(x)|\,dx > 0$$

yani $A(t_1) > A(t_2)$ olduğundan $A(t)$ fonksiyonu azalandır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \int_a^b A(t)\,dt &= \int_a^b\int_t^b |q(x)|\,dx\,dt = \int_a^b\int_a^x |q(x)|\,dt\,dx = \int_a^b |q(x)| \int_a^x dt\,dx = \int_a^b |q(x)|(x-a)\,dx \\ &\le (b-a)\int_a^b |q(x)|\,dx < \infty \end{aligned}$$

olduğundan $A(t)\in L[a,b]$' dir.

Böylece $\eta(\lambda)=\sup\limits_{a\le t\le b} F(t,\lambda)$ ve $A(t)=\int\limits_t^b |q(x)|dx$ seçimleriyle (2.11) eşitsizliği i), ii) ve iii) koşulları ile sağlanmış olur.

Bu çalışmada genelliği bozmadan $\int\limits_a^b q(x)dx=0$ alınacaktır ve problemlerin yaklaşık özdeğerlerini hesaplamak için [5,7] çalışmasındaki yönteme benzer yöntem uygulanacaktır. Bu amaçla $[a,b]$ aralığında (2.7) ile verilen $v'(t,\lambda)=-\lambda+q(t)-v^2(t,\lambda)$ denklemini göz önünde bulundurarak

$$v(t,\lambda):=i\lambda^{1/2}+\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda) \tag{2.13}$$

oluşturulsun. Bu eşitlik (2.7) denkleminde yerine koyulursa

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n'(t,\lambda)=-\lambda+q(t)-i^2\lambda-2i\lambda^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda)-\left[\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda)\right]^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned} v_1'(t,\lambda)+v_2'(t,\lambda)+\sum_{n=3}^{\infty} v_n'(t,\lambda)=-\lambda+q(t)+\lambda-2i\lambda^{1/2}v_1(t,\lambda)\\ -2i\lambda^{1/2}v_2(t,\lambda)-2i\lambda^{1/2}\sum_{n=3}^{\infty} v_n(t,\lambda)\\ -v_1^2(t,\lambda)-\Big[v_2^2(t,\lambda)+v_3^2(t,\lambda)\\ +\ldots+v_n^2(t,\lambda)+\ldots\\ +2v_1(t,\lambda)v_2(t,\lambda)+2v_1(t,\lambda)v_3(t,\lambda)+\ldots\\ +2v_2(t,\lambda)v_3(t,\lambda)+2v_2(t,\lambda)v_4(t,\lambda)+\ldots\Big] \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikten v_n, $n\ge 1$ aşağıdaki şekilde seçilsin:

$$\begin{aligned} &v_1'(t,\lambda)+2i\lambda^{1/2}v_1(t,\lambda)=q(t),\\ &v_2'(t,\lambda)+2i\lambda^{1/2}v_2(t,\lambda)=-v_1^2(t,\lambda),\\ &v_n'(t,\lambda)+2i\lambda^{1/2}v_n(t,\lambda)=-\left(v_{n-1}^2(t,\lambda)+2v_{n-1}(t,\lambda)\sum_{m=1}^{n-2} v_m(t,\lambda)\right),\ n\ge 3 \end{aligned} \tag{2.14}$$

ve

$$
\begin{aligned}
&v_1(t,\lambda) = -e^{-2i\lambda^{1/2}t}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q(x)\,dx,\\
&v_2(t,\lambda) = e^{-2i\lambda^{1/2}t}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}v_1^2(x,\lambda)\,dx, \qquad (2.15)\\
&v_n(t,\lambda) = e^{-2i\lambda^{1/2}t}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}\left(v_{n-1}^2(x,\lambda)+2v_{n-1}(x,\lambda)\sum_{m=1}^{n-2}v_m(x,\lambda)\right)dx,\ n\ge 3.
\end{aligned}
$$

Lemma 2.3: [5]: $9\eta(\lambda)(b-a)\int_a^b |q(x)|\,dx \le 1$ ise $n \ge 1$ için

$$
|v_n(t,\lambda)| \le \frac{A(t)\eta(\lambda)}{2^{n-1}}, \quad t\in[a,b]
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemmayı ispatlamak için n' e göre tümevarım yöntemi uygulanacaktır. (2.15) eşitliğinden $t\in[a,b]$ olmak üzere

- $n=1$ için

$$
\begin{aligned}
|v_1(t,\lambda)| &= \left|-e^{-2i\lambda^{1/2}t}\right|\left|\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q(x)\,dx\right| = \left|\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q(x)\,dx\right|\\
&= \int_t^b |q(x)|\,dx\,\frac{\left|\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q(x)\,dx\right|}{\int_t^b |q(x)|\,dx}\\
&\le A(t)\eta(\lambda).
\end{aligned}
$$

- $n=2$ için

$$
\begin{aligned}
|v_2(t,\lambda)| &= \left|e^{-2i\lambda^{1/2}t}\right|\left|\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}v_1^{\,2}(x,\lambda)\,dx\right| \le \int_t^b |v_1(x,\lambda)|^2\,dx \le \int_t^b A^2(x)\eta^2(\lambda)\,dx\\
&= \eta^2(\lambda)\int_t^b A^2(x)\,dx \le A(t)\eta(\lambda)\left[\eta(\lambda)\int_a^b A(x)\,dx\right]\\
&\le A(t)\eta(\lambda)\left[\eta(\lambda)(b-a)\int_a^b |q(x)|\,dx\right] < \frac{A(t)\eta(\lambda)}{2}.
\end{aligned}
$$

- Farzedilsin ki $n\ge 3$ olmak üzere $n-1$ için lemma doğru olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\left|v_n(t,\lambda)\right| &= \left|e^{-2i\lambda^{1/2}t}\right|\left|\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}\left(v_{n-1}{}^2(x,\lambda)+2v_{n-1}(x,\lambda)\sum_{m=1}^{n-2}v_m(x,\lambda)\right)dx\right| \\
&\le \int_t^b\left[\left|v_{n-1}(x,\lambda)\right|^2+2\left|v_{n-1}(x,\lambda)\right|\sum_{m=1}^{n-2}\left|v_m(x,\lambda)\right|\right]dx \\
&\le \int_t^b A^2(x)\eta^2(\lambda)\left[\frac{1}{2^{2n-4}}+\frac{1}{2^{n-2}}\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{2^{m-1}}\right]dx \\
&\le A(t)\eta(\lambda)\int_a^b A(x)\eta(\lambda)\frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{1}{2^{n-3}}+\frac{1}{2^{-2}}\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{2^m}\right]dx \\
&\le A(t)\eta(\lambda)\frac{1}{2^{n-1}}\int_a^b A(x)\eta(\lambda)(1+8)dx=\frac{A(t)\eta(\lambda)}{2^{n-1}}9\eta(\lambda)\int_a^b A(x)dx \\
&\le \frac{A(t)\eta(\lambda)}{2^{n-1}}9\eta(\lambda)(b-a)\int_a^b\left|q(x)\right|dx\le\frac{A(t)\eta(\lambda)}{2^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Böylece n için de lemmanın doğruluğu gösterilmiş oldu. ■

Ayrıca Lemma 2.3’ ün ispatında bulunan eşitsizliklerin bir sonucu olarak aşağıdaki lemma elde edilir:

Lemma 2.4: [5]: $\{k_n\}$ bir reel sayılar dizisi olmak üzere

$$\left|v_n(t,\lambda)\right|\le k_n\eta^n(\lambda)$$

eşitsizliği sağlanır.

Aşağıda $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t,\lambda)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}v_n{}'(t,\lambda)$ serilerinin yakınsaklığı incelenecektir.

- $\sum_{n=1}^{\infty}\left|v_n(t,\lambda)\right|$ serisi göz önüne alınsın. Lemma 2.3’ ten $\left|v_n(t,\lambda)\right|\le\dfrac{A(t)\eta(\lambda)}{2^{n-1}}$ olarak bulunmuştu. O halde ele alınan serinin kısmi toplamlar dizisi için

$$\sum_{n=1}^{m}\left|v_n(t,\lambda)\right|\le\sum_{n=1}^{m}\frac{A(t)\eta(\lambda)}{2^{n-1}}=A(t)\eta(\lambda)\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{n-1}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $0\le\eta(\lambda)\le1$, $A(t)$ sonlu azalan bir fonksiyon olduğundan C sabit olmak üzere, $\sum_{n=1}^{m}\left|v_n(t,\lambda)\right|\le C\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{n-1}}$ bulunur. Böylece $\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{n-1}}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t,\lambda)$ serisi mutlak yakınsaktır. Ayrıca $\sum_{n=1}^{m}\left|v_n(t,\lambda)\right|$ serisinin yakınsaklığı t değişkeninden bağımsız olduğundan, Weierstrass M-Testi’ nden bu yakınsama düzgündür.

- $\sum_{n=1}^{\infty}\left|v_n{}'(t,\lambda)\right|$ serisi göz önüne alınsın. (2.14) eşitliğinde

$v_n{}'(t,\lambda)+2i\lambda^{1/2}v_n(t,\lambda)=-\left(v_{n-1}^2(t,\lambda)+2v_{n-1}(t,\lambda)\sum_{m=1}^{n-2}v_m(t,\lambda)\right)$ olarak bulunmuştu. O halde ele alınan serinin kısmi toplamlar dizisi için

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\left|v_n{}'(t,\lambda)\right| &\le 2\lambda^{1/2}\sum_{n=1}^{m}\left|v_n(t,\lambda)\right|+\sum_{n=1}^{m}\left|v_{n-1}(t,\lambda)\right|^2\\ &+2\sum_{n=1}^{m}\left(\left|v_{n-1}(t,\lambda)\right|\left|\sum_{s=1}^{n-2}v_s(t,\lambda)\right|\right)\end{aligned}\tag{2.16}$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk serinin düzgün yakınsak olduğu bir önceki adımda gösterildi. Ayrıca $\sum_{n=1}^{m}\left|v_n(t,\lambda)\right|$ serisi yakınsak olduğundan bir $n\ge n_0$ için $n\to\infty$ iken $\left|v_n(t,\lambda)\right|\to 0$' dır. Böylece $\left|v_n(t,\lambda)\right|\le 1$ olduğundan $\left|v_n(t,\lambda)\right|^2\le\left|v_n(t,\lambda)\right|$. O halde $n\ge n_0$ için $\sum_{n=n_0}^{m}\left|v_n(t,\lambda)\right|^2\le\sum_{n=n_0}^{m}\left|v_n(t,\lambda)\right|$ eşitsizliği sağlanır, yani (2.16) eşitsizliğinin ikinci terimi olan $\sum_{n=1}^{m}\left|v_{n-1}(t,\lambda)\right|^2$ serisi düzgün yakınsaktır. (2.16) eşitsizliğindeki üçüncü seri için ise

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\left(\left|v_{n-1}(t,\lambda)\right|\left|\sum_{s=1}^{n-2}v_s(t,\lambda)\right|\right) &\le\sum_{n=1}^{m}\left(\left|v_{n-1}(t,\lambda)\right|\sum_{s=1}^{n-2}\left|v_s(t,\lambda)\right|\right)\\ &\le\sum_{n=1}^{m}\left(\left|v_{n-1}(t,\lambda)\right|\sum_{s=1}^{\infty}\left|v_s(t,\lambda)\right|\right)\\ &=\sum_{n=1}^{m}\left|v_{n-1}(t,\lambda)\right|\sum_{s=1}^{\infty}\left|v_s(t,\lambda)\right|<\infty\end{aligned}$$

sağlandığından bu eşitsizlikten serinin düzgün yakınsaklığı elde edilir. Böylece $\sum_{n=1}^{\infty}v_n'(t,\lambda)$ serisi mutlak yakınsaktır. Ayrıca $\sum_{n=1}^{m}\left|v_n'(t,\lambda)\right|$ serisinin yakınsaklığı t değişkeninden bağımsız olduğundan, Weierstrass M- Testi' ne göre bu yakınsama düzgündür.

Sonuç olarak $t\in[a,b]$ için $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t,\lambda)$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n{}'(t,\lambda)$ serileri düzgün mutlak yakınsaktır ve $v(t,\lambda)=i\lambda^{1/2}+\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t,\lambda)$, (2.7) denkleminin bir çözümüdür. Dikkat edilirse

$v_n(t,\lambda)$ fonsiyonları elde edilirken $v'(t,\lambda)=\left[i\lambda^{1/2}+\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t,\lambda)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}v_n'(t,\lambda)$ eşitliği kullanılmıştı. $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t,\lambda)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}{v_n}'(t,\lambda)$ serilerinin düzgün mutlak yakınsak olduğu elde edildiğinden bu eşitlik doğrudur. Böylece $T(t,\lambda):=\operatorname{Im}\{v(t,\lambda)\}$ olduğundan

$$T(t,\lambda)=\lambda^{1/2}+\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t,\lambda). \tag{2.17}$$

Aşağıda (2.15)' teki eşitliklerin $[a,b]$ aralığı üzerinde integralleri alınacaktır:

$$\begin{aligned}\int_a^b v_1(x,\lambda)dx &= -\int_a^b e^{-2i\lambda^{1/2}t}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q(x)\,dxdt = -\left[-\frac{e^{-2i\lambda^{1/2}t}}{2i\lambda^{1/2}}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q(x)\,dx\right]\Bigg|_{t=a}^{b} \\ &\quad -\frac{1}{2i\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{-2i\lambda^{1/2}t}e^{2i\lambda^{1/2}t}q(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2i\lambda^{1/2}}\left[-e^{-2i\lambda^{1/2}a}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q(x)\,dx+\int_a^b q(t)\,dt\right]=\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}q(x)\,dx,\end{aligned}$$

bu durumda

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\int_a^b v_1(x,\lambda)dx &= \operatorname{Im}\left\{\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}q(x)\,dx\right\}\\
&= \operatorname{Im}\left\{\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}x}e^{-2i\lambda^{1/2}a}q(x)\,dx\right\}\\
&= \operatorname{Im}\left\{\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b\left[\cos\left(2\lambda^{1/2}x\right)+i\sin\left(2\lambda^{1/2}x\right)\right]\right.\\
&\left.\times\left[\cos\left(2\lambda^{1/2}a\right)-i\sin\left(2\lambda^{1/2}a\right)\right]q(x)\,dx\right\}\\
&= \operatorname{Im}\left\{\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\left[\int_a^b iq(x)\sin\left(2\lambda^{1/2}x\right)\cos\left(2\lambda^{1/2}a\right)dx\right.\right.\\
&\left.-\int_a^b iq(x)\cos\left(2\lambda^{1/2}x\right)\sin\left(2\lambda^{1/2}a\right)dx\right]+\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\\
&\left.\times\int_a^b\left[\cos\left(2\lambda^{1/2}x\right)\cos\left(2\lambda^{1/2}a\right)+\sin\left(2\lambda^{1/2}x\right)\sin\left(2\lambda^{1/2}a\right)\right]q(x)\,dx\right\}\\
&= \frac{\lambda^{-1/2}}{2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a\right)\int_a^b q(x)\cos\left(2\lambda^{1/2}x\right)dx\\
&+\frac{\lambda^{-1/2}}{2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a\right)\int_a^b q(x)\sin\left(2\lambda^{1/2}x\right)dx.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b v_2(x,\lambda)dx &= \int_a^b e^{-2i\lambda^{1/2}t}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}v_1^2(x,\lambda)\,dxdt\\
&= \left[-\frac{e^{-2i\lambda^{1/2}t}}{2i\lambda^{1/2}}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}v_1^2(x,\lambda)\,dx\right]\Bigg|_{t=a}^{b}\\
&-\frac{1}{2i\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{-2i\lambda^{1/2}t}e^{2i\lambda^{1/2}t}v_1^2(t,\lambda)\,dt\\
&= \frac{1}{2i\lambda^{1/2}}\left[e^{-2i\lambda^{1/2}a}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}x}v_1^2(x,\lambda)\,dx-\int_a^b v_1^2(t,\lambda)\,dt\right]\\
&= \frac{1}{2i\lambda^{1/2}}\int_a^b\left(e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}-1\right)v_1^2(x,\lambda)\,dx\\
&= \frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b\left(1-e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}\right)v_1^2(x,\lambda)\,dx
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ve $n \geq 3$ için

$$
\begin{aligned}
\int_a^b v_n(x,\lambda)dx &= \int_a^b e^{-2i\lambda^{1/2}t}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}\left(v_{n-1}^2(x,\lambda)+2v_{n-1}(x,\lambda)\sum_{m=1}^{n-2}v_m(x,\lambda)\right)dxdt \\
&= \left[-\frac{e^{-2i\lambda^{1/2}t}}{2i\lambda^{1/2}}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}\left(v_{n-1}^2(x,\lambda)+2v_{n-1}(x,\lambda)\sum_{m=1}^{n-2}v_m(x,\lambda)\right)dx\right]\Bigg|_{t=a}^{b} \\
&-\frac{1}{2i\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{-2i\lambda^{1/2}t}e^{2i\lambda^{1/2}t}\left(v_{n-1}^2(x,\lambda)+2v_{n-1}(t,\lambda)\sum_{m=1}^{n-2}v_m(t,\lambda)\right)dt \\
&= \frac{1}{2i\lambda^{1/2}}\left[e^{-2i\lambda^{1/2}a}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}x}\left(v_{n-1}^2(x,\lambda)+2v_{n-1}(x,\lambda)\sum_{m=1}^{n-2}v_m(x,\lambda)\right)dx\right. \\
&\left.-\int_a^b\left(v_{n-1}^2(t,\lambda)+2v_{n-1}(t,\lambda)\sum_{m=1}^{n-2}v_m(t,\lambda)\right)dt\right] \\
&= \frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b\left(1-e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}\right)\left(v_{n-1}^2(x,\lambda)+2v_{n-1}(x,\lambda)\sum_{m=1}^{n-2}v_m(x,\lambda)\right)dx.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Aşağıda daha önce $S(t,\lambda)=\mathrm{Re}\{v(t,\lambda)\}$ ve $T(t,\lambda)=\mathrm{Im}\{v(t,\lambda)\}$ olarak tanımlanan fonksiyonların asimptotik ifadelerine yer verilecektir:

(2.15) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
v_1(t,\lambda) &= -e^{-2i\lambda^{1/2}t}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q(x)dx \\
&= -\left[\cos\left(2\lambda^{1/2}t\right)-i\sin\left(2\lambda^{1/2}t\right)\right] \\
&\times\int_t^b\left[\cos\left(2\lambda^{1/2}x\right)+i\sin\left(2\lambda^{1/2}x\right)\right]q(x)dx.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Böylelikle (2.13), Lemma 2.4 ve (2.21)’ den $v(t,\lambda)$ aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$
\begin{aligned}
v(t,\lambda) &= i\lambda^{1/2}+\left[i\sin\left(2\lambda^{1/2}t\right)-\cos\left(2\lambda^{1/2}t\right)\right] \\
&\times\int_t^b\left[\cos\left(2\lambda^{1/2}x\right)+i\sin\left(2\lambda^{1/2}x\right)\right]q(x)dx \\
&+O\left(\eta^2(\lambda)\right).
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Bu durumda (2.22) eşitliğinden

$$S(t,\lambda)=\operatorname{Re}\{v(t,\lambda)\}$$
$$=-\cos\left(2\lambda^{1/2}t\right)\int_t^b q(x)\cos\left(2\lambda^{1/2}x\right)dx-\sin\left(2\lambda^{1/2}t\right)\int_t^b q(x)\sin\left(2\lambda^{1/2}x\right)dx$$
$$+O\left(\eta^2(\lambda)\right)$$

olarak hesaplanır. Son eşitlikte

$$\sin\xi_t:=\int_t^b q(x)\cos\left(2\lambda^{1/2}x\right)dx, \qquad (2.23)$$

$$\cos\xi_t:=\int_t^b q(x)\sin\left(2\lambda^{1/2}x\right)dx \qquad (2.24)$$

olarak tanımlanırsa

$$S(t,\lambda)=-\left[\cos\left(2\lambda^{1/2}t\right)\sin\xi_t+\sin\left(2\lambda^{1/2}t\right)\cos\xi_t\right]+O\left(\eta^2(\lambda)\right),$$

yani

$$S(t,\lambda)=-\sin\left(\xi_t+2\lambda^{1/2}t\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right) \qquad (2.25)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde (2.22) eşitliği kullanılarak

$$T(t,\lambda)=\operatorname{Im}\{v(t,\lambda)\}$$
$$=\lambda^{1/2}+\sin\left(2\lambda^{1/2}t\right)\int_t^b q(x)\cos\left(2\lambda^{1/2}x\right)dx-\cos\left(2\lambda^{1/2}t\right)\int_t^b q(x)\sin\left(2\lambda^{1/2}x\right)dx$$
$$+O\left(\eta^2(\lambda)\right)$$

olarak hesaplanır. Son eşitlikte, (2.23) ve (2.24) göz önünde bulundurulursa

$$T(t,\lambda)=\lambda^{1/2}+\sin\left(2\lambda^{1/2}t\right)\sin\xi_t-\cos\left(2\lambda^{1/2}t\right)\cos\xi_t+O\left(\eta^2(\lambda)\right),$$

yani

$$T(t,\lambda)=\lambda^{1/2}-\cos\left(\xi_t+2\lambda^{1/2}t\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right) \qquad (2.26)$$

olarak ifade edilir.

Aşağıdaki bölümde

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,b],$$

$$-\left[\beta_{11}y(a)-\beta_{12}y'(a)\right]=\lambda\left[\alpha_{11}y(a)-\alpha_{12}y'(a)\right],$$

$$-\left[\beta_{21}y(b)-\beta_{22}y'(b)\right]=\lambda\left[\alpha_{21}y(b)-\alpha_{22}y'(b)\right]$$

problemi α_{ik}, β_{ik} $(i,k=1,2)$ reel sayılarının özel durumları için ayrı ayrı göz önüne alınacak ve $q(t)$ potansiyel fonksiyonunun integrallenebilir olma şartı altında λ özdeğerleri için asimptotik yaklaşımlar elde edilecektir.

2.1. Potansiyel Fonksiyonunun İntegrallenebilir Olması Durumu

Bu bölümde, farklı türdeki sınır koşullarını ifade etmek için aşağıdaki kısaltmalar kullanılacaktır:

D-Dirichlet Şartı: $y(b)=0,$

N-Non-Dirichlet Şartı: $\dfrac{y'(a)}{y(a)}=\cot\beta, \quad \beta\in(0,\pi),$

A-Afin λ-Bağımlı Şart: $\dfrac{y'(a)}{y(a)}=c\lambda+d,$

B-Bilineer λ-Bağımlı Şart: $\dfrac{y'(a)}{y(a)}=\dfrac{c\lambda+d}{e\lambda+f}, \quad cf-ed\neq 0,$

K-Kuadratik λ-Bağımlı Şart: $\dfrac{y'(a)}{y(a)}=c\lambda^2+d\lambda+e.$

2.1.1. Standart Durum (ND)

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \tag{2.27}$$

$$y(a)\cos\beta-y'(a)\sin\beta=0, \quad \beta\in(0,\pi), \tag{2.28}$$

$$y(b)=0. \tag{2.29}$$

Teorem 2.1: (2.27)-(2.29) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)}+\frac{1}{(2n+3)\pi}\left\{2\cot\beta+\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q(x)dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right).$$

İspat: (2.5) eşitliğiyle verildiği üzere $y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0$ denkleminin herhangi bir reel değerli çözümü $y(t,\lambda)=R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)$ formundadır. Bu durumda $t=a$ sınırında

$$y(a,\lambda)=R(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)$$

ve

$$y'(a,\lambda)=R'(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)-R(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\sin\theta(a,\lambda).$$

Böylece (2.28) sınır koşulundan

$$R(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)\cos\beta-\left[R'(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)-R(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\sin\theta(a,\lambda)\right]\sin\beta$$
$$=0$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse

$$R(a,\lambda)\left\{\cos\theta(a,\lambda)\left[\cos\beta-\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}\sin\beta\right]+\sin\theta(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\sin\beta\right\}=0 \qquad (2.30)$$

bulunur. Burada γ_1,

$$\sin\gamma_1:=\cos\beta-\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}\sin\beta, \qquad (2.31)$$

$$\cos\gamma_1:=\theta'(a,\lambda)\sin\beta \qquad (2.32)$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa (2.30) eşitliğinden

$$R(a,\lambda)\{\cos\theta(a,\lambda)\sin\gamma_1+\sin\theta(a,\lambda)\cos\gamma_1\}=0$$

denklemine ulaşılır. Böylece

$$R(a,\lambda)\sin\left(\gamma_1+\theta(a,\lambda)\right)=0$$

olduğundan

$$\sin\left(\gamma_1+\theta(a,\lambda)\right)=0,$$

yani

$$\theta(a,\lambda) = -\gamma_1 \tag{2.33}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.25) ve (2.26) eşitlikleri (2.31) ve (2.32) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\sin\gamma_1}{\cos\gamma_1} = \frac{\cos\beta + \sin\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right)\sin\beta + O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{\lambda^{1/2}\sin\beta - \cos\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right)\sin\beta + O\left(\eta^2(\lambda)\right)},$$

bu durumda

$$\frac{\sin\gamma_1}{\cos\gamma_1} = \frac{\cos\beta + \sin\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right)\sin\beta + O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{\lambda^{1/2}\sin\beta\left[1 - \lambda^{-1/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right) + \lambda^{-1/2}O\left(\eta^2(\lambda)\right)\right]}$$

bulunur. $|x| < 1$ iken $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ olduğu için

$$\tan\gamma_1 = \left[\lambda^{-1/2}\cot\beta + \lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right) + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\left[1 + \lambda^{-1/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right) + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right],$$

yani

$$\tan\gamma_1 = \lambda^{-1/2}\cot\beta + \lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right) + \lambda^{-1}\cot\beta\cos\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right)$$
$$+ O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right).$$

Son eşitlikte $\arctan x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \lambda^{-1/2}\cot\beta + \lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right) + \lambda^{-1}\cot\beta\cos\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right) \\ &\quad + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right).\end{aligned} \tag{2.34}$$

$t = b$ sınırında ise $y(t,\lambda) = R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)$ formunda olduğundan

$$y(b,\lambda) = R(b,\lambda)\cos\theta(b,\lambda).$$

Böylece (2.29) ile verilen $y(b) = 0$ sınır koşulundan

$$R(b,\lambda)\cos\theta(b,\lambda) = 0$$

olduğundan

$$\cos\theta(b,\lambda) = 0,$$

yani

$$\theta(b,\lambda)=\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi \tag{2.35}$$

elde edilir.

(2.10) eşitliğinde

$$\theta(b,\lambda)-\theta(a,\lambda)=\int_a^b T(x,\lambda)dx$$

olarak verilmişti. $T(t,\lambda)$ fonksiyonunun (2.17) ile verilen değeri bu eşitlikte yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\theta(b,\lambda)-\theta(a,\lambda)&=\int_a^b\left[\lambda^{1/2}+\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x,\lambda)\right]dx\\&=\lambda^{1/2}(b-a)+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im}\int_a^b v_n(x,\lambda)dx\end{aligned} \tag{2.36}$$

bulunur. Son eşitlikte Lemma 2.4, (2.18)-(2.20) ve (2.33)-(2.35) kullanılırsa

$$\lambda^{1/2}(b-a)+\dot{I}m\left\{\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}q(x)dx\right\}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi+\lambda^{-1/2}\cot\beta+\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

olduğundan $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı ve serilerle hata hesabı ile

$$\lambda_n^{1/2}(b-a)=\frac{(2n+3)\pi}{2}+\frac{2(b-a)}{(2n+3)\pi}\left\{\cot\beta+\sin\left(\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}+\xi_a\right)\right\}$$

$$-\dot{I}m\left\{\frac{i(b-a)}{(2n+3)\pi}\int_a^b e^{i\frac{(2n+3)\pi}{(b-a)}(x-a)}q(x)dx\right\}+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

olarak hesaplanır. Bu durumda (2.23)-(2.24) ile verilen $\sin\xi_t$ ve $\cos\xi_t$ tanımları kullanılırsa

$$\lambda_n^{1/2} = \frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)} + \frac{2}{(2n+3)\pi}\cot\beta$$
$$+\frac{2}{(2n+3)\pi}\left(\sin\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$+\frac{2}{(2n+3)\pi}\left(\cos\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$-\frac{1}{(2n+3)\pi}\left(\sin\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$-\frac{1}{(2n+3)\pi}\left(\cos\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right),$$

yani

$$\lambda_n^{1/2} = \frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)} + \frac{1}{(2n+3)\pi}\left\{2\cot\beta + \left(\sin\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx\right.$$
$$\left.+\left(\cos\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx\right\}+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

olarak elde edilir. ■

2.1.2. Lineer Durum (AD ve AN)

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \tag{2.37}$$

$$y'(a)-[c\lambda+d]y(a)=0, \quad c,d\in\mathbb{R},\ c\neq 0, \tag{2.38}$$

$$y(b)=0. \tag{2.39}$$

Teorem 2.2: (2.37)-(2.39) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2} = \frac{(n+2)\pi}{b-a} - \frac{1}{2(n+2)\pi}\left\{\frac{2}{c}+\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+2)\pi(x-a)}{b-a}\right)q(x)dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right).$$

İspat: (2.5) eşitliğiyle verildiği üzere $y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0$ denkleminin herhangi bir reel değerli çözümü $y(t,\lambda)=R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)$ formundadır. Bu durumda $t=a$ sınırında

$$y(a,\lambda)=R(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)$$

ve

$$y'(a,\lambda)=R'(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)-R(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\sin\theta(a,\lambda).$$

Böylece (2.38) sınır koşulundan

$$R'(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)-R(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\sin\theta(a,\lambda)-[c\lambda+d]R(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)=0$$

eşitliği sağlanır. Son eşitlik düzenlenirse

$$R(a,\lambda)\left\{\cos\theta(a,\lambda)\left[\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}-(c\lambda+d)\right]-\sin\theta(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\right\}=0 \tag{2.40}$$

bulunur. Burada γ_2,

$$\sin\gamma_2 := \frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}-c\lambda-d, \tag{2.41}$$

$$\cos\gamma_2 := -\theta'(a,\lambda) \tag{2.42}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa (2.40) eşitliğinden

$$R(a,\lambda)\{\cos\theta(a,\lambda)\sin\gamma_2+\sin\theta(a,\lambda)\cos\gamma_2\}=0$$

elde edilir. Böylece

$$R(a,\lambda)\sin(\gamma_2+\theta(a,\lambda))=0$$

olduğundan

$$\sin(\gamma_2+\theta(a,\lambda))=0,$$

yani

$$\theta(a,\lambda)=-\gamma_2 \tag{2.43}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.25) ve (2.26) eşitlikleri (2.41) ve (2.42) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\cos\gamma_2}{\sin\gamma_2}=\frac{-\lambda^{1/2}+\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-c\lambda-d+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}$$

olduğundan

$$\frac{\cos\gamma_2}{\sin\gamma_2}=\frac{-\lambda^{1/2}+\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-c\lambda\left[1+\frac{d}{c}\lambda^{-1}+\frac{1}{c}\lambda^{-1}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\cot\gamma_2=\left[\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}-\frac{1}{c}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\left[1-\frac{d}{c}\lambda^{-1}-\frac{1}{c}\lambda^{-1}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right],$$

yani

$$\cot\gamma_2=\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}-\frac{1}{c}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{d}{c^2}\lambda^{-3/2}-\frac{1}{c^2}\lambda^{-3/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)$$
$$+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)$$

bulunur. Son eşitlikte $\operatorname{arccot} x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılırsa

$$\gamma_2=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+\frac{1}{c}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d}{c^2}\lambda^{-3/2}+\frac{1}{c^2}\lambda^{-3/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)$$
$$+\frac{1}{3c^3}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right). \qquad (2.44)$$

$t=b$ sınırı için ise Teorem 2.1' de (2.35) ile verildiği üzere $\theta(b,\lambda)=\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi$ eşitliği mevcuttur.

(2.36) eşitliğinde Lemma 2.4, (2.18)-(2.20), (2.35), (2.43) ve (2.44) kullanılırsa

$$\lambda^{1/2}(b-a)+\operatorname{Im}\left\{\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}q(x)\,dx\right\}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+\frac{1}{c}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

olduğundan $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı ve serilerle hata hesabı ile

$$\lambda_n^{1/2}(b-a)=(n+2)\pi-\frac{1}{c}\frac{b-a}{(n+2)\pi}+\frac{1}{c}\frac{(b-a)^2}{(n+2)^2\pi^2}\cos\left(\frac{2(n+2)\pi a}{b-a}+\xi_a\right)$$
$$-\text{İm}\left\{\frac{i(b-a)}{2(n+2)\pi}\int_a^b e^{2i\frac{(n+2)\pi}{b-a}(x-a)}q(x)dx\right\}+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

olarak hesaplanır. Bu durumda

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(n+2)\pi}{b-a}-\frac{1}{c}\frac{1}{(n+2)\pi}+\frac{1}{c}\frac{b-a}{(n+2)^2\pi^2}\cos\left(\frac{2(n+2)\pi a}{b-a}+\xi_a\right)$$
$$-\frac{1}{2(n+2)\pi}\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+2)\pi(x-a)}{b-a}\right)q(x)dx+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right).$$

Son eşitlikte (2.23)-(2.24) ile verilen $\sin\xi_t$ ve $\cos\xi_t$ tanımları kullanılırsa

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(n+2)\pi}{b-a}-\frac{1}{c}\frac{1}{(n+2)\pi}$$
$$-\frac{1}{2(n+2)\pi}\left(\sin\frac{2(n+2)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+2)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$-\frac{1}{2(n+2)\pi}\left(\cos\frac{2(n+2)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+2)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

olarak elde edilir. ■

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0,\quad t\in[a,b], \tag{2.45}$$

$$y'(a)-\left[c\lambda+d\right]y(a)=0,\quad c,d\in\mathbb{R},\ c\neq 0, \tag{2.46}$$

$$y(b)\cos\beta-y'(b)\sin\beta=0,\quad \beta\in(0,\pi). \tag{2.47}$$

Teorem 2.3: (2.45)-(2.47) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)}-\frac{1}{(2n+3)\pi}\left\{2\cot\beta+\frac{2}{c}+\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q(x)dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right).$$

İspat: (2.46) sınır koşulu göz önünde bulundurulduğunda $\theta(a,\lambda)$ değeri, Teorem 2.2' in ispatında (2.43) ve (2.44) ile belirlidir.

(2.5) eşitliğiyle verildiği üzere $y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0$ denkleminin herhangi bir reel değerli çözümü $y(t,\lambda)=R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)$ formundadır. Bu durumda $t=b$ sınırında

$$y(b,\lambda)=R(b,\lambda)\cos\theta(b,\lambda)$$

ve

$$y'(b,\lambda)=R'(b,\lambda)\cos\theta(b,\lambda)-R(b,\lambda)\theta'(b,\lambda)\sin\theta(b,\lambda).$$

Böylece (2.47) sınır koşulundan

$$R(b,\lambda)\cos\theta(b,\lambda)\cos\beta-\sin\beta\left[R'(b,\lambda)\cos\theta(b,\lambda)-R(b,\lambda)\theta'(b,\lambda)\sin\theta(b,\lambda)\right]$$
$$=0$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse

$$R(b,\lambda)\left\{\cos\theta(b,\lambda)\left[\cos\beta-\frac{R'(b,\lambda)}{R(b,\lambda)}\sin\beta\right]+\sin\theta(b,\lambda)\theta'(b,\lambda)\sin\beta\right\}=0 \qquad (2.48)$$

bulunur. Burada γ_3,

$$\sin\gamma_3:=\cos\beta-\frac{R'(b,\lambda)}{R(b,\lambda)}\sin\beta, \qquad (2.49)$$

$$\cos\gamma_3:=-\theta'(b,\lambda)\sin\beta \qquad (2.50)$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa, (2.48) eşitliğinden

$$R(b,\lambda)\{\cos\theta(b,\lambda)\sin\gamma_3-\sin\theta(b,\lambda)\cos\gamma_3\}=0$$

denklemine ulaşılır. Böylece

$$R(b,\lambda)\sin\left(\gamma_3-\theta(b,\lambda)\right)=0$$

olduğundan

$$\sin\left(\gamma_3-\theta(b,\lambda)\right)=0,$$

yani

$$\theta(b,\lambda)=\gamma_3+(n+1)\pi. \qquad (2.51)$$

(2.8), (2.9), (2.25) ve (2.26) eşitlikleri (2.49) ve (2.50) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\sin\gamma_3}{\cos\gamma_3}=\frac{\cos\beta+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-\lambda^{1/2}\sin\beta+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}$$

olduğundan

$$\frac{\sin\gamma_3}{\cos\gamma_3}=\frac{\cos\beta+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-\lambda^{1/2}\sin\beta\left[1-O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]}$$

olarak elde edilir. Bu durumda

$$\tan\gamma_3=\left[-\lambda^{-1/2}\cot\beta+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]\times\left[1+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right],$$

yani

$$\tan\gamma_3=-\lambda^{-1/2}\cot\beta+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right).$$

Son eşitlikte $\arctan x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı ile

$$\gamma_3=-\lambda^{-1/2}\cot\beta+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right). \tag{2.52}$$

(2.36) eşitliğinde Lemma 2.4, (2.18)-(2.20), (2.43), (2.44), (2.51) ve (2.52) kullanılırsa

$$\lambda^{1/2}(b-a)+\text{İm}\left\{\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}q(x)dx\right\}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$
$$=(n+1)\pi-\lambda^{-1/2}\cot\beta+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+\frac{1}{c}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

olduğundan $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı ve serilerle hata hesabı ile

$$\lambda_n^{1/2}(b-a)=\frac{(2n+3)\pi}{2}-\frac{2(b-a)}{(2n+3)\pi}\cot\beta-\frac{1}{c}\frac{2(b-a)}{(2n+3)\pi}$$
$$+\frac{1}{c}\frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(2n+3)\pi a}{(b-a)}+\xi_a\right)$$
$$-\text{İm}\left\{\frac{i(b-a)}{(2n+3)\pi}\int_a^b e^{i\frac{(2n+3)\pi}{b-a}(x-a)}q(x)dx\right\}+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

olarak bulunur. Bu durumda son eşitlikte (2.23)-(2.24) ile verilen $\sin\xi_t$ ve $\cos\xi_t$ tanımları kullanılıp, gerekli hesaplamalar yapıldığında $\lambda_n^{1/2}$

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)}-\frac{2}{(2n+3)\pi}\cot\beta-\frac{1}{c}\frac{2}{(2n+3)\pi}$$
$$-\frac{1}{(2n+3)\pi}\left(\sin\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$-\frac{1}{(2n+3)\pi}\left(\cos\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

şeklinde elde edilir. ■

Örnek 2.1: Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-\cos t]y(t)=0,\quad t\in[0,\pi],$$
$$y'(0)-[c\lambda+d]y(0)=0,\quad c,d\in\mathbb{R},\ c\neq 0,$$
$$y(\pi)\cos\beta-y'(\pi)\sin\beta=0,\quad \beta\in(0,\pi).$$

Bu durumda problemin özdeğerleri için asimptotik tahminler aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{2n+3}{2}-\frac{2}{(2n+3)\pi}\left[\cot\beta+\frac{1}{c}\right]+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right).$$

2.1.3. Bilineer Durum (BD ve BN)

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0,\quad t\in[a,b],\tag{2.53}$$
$$[e\lambda+f]y'(a)-[c\lambda+d]y(a)=0,\quad c,d,e,f\in\mathbb{R},\ e\neq 0,\tag{2.54}$$
$$y(b)=0.\tag{2.55}$$

Teorem 2.4: (2.53)-(2.55) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)}+\frac{1}{(2n+3)\pi}\left\{\frac{2c}{e}+\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q(x)dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right).$$

İspat: (2.5) eşitliğiyle verildiği üzere $y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0$ denkleminin herhangi bir reel değerli çözümü $y(t,\lambda)=R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)$ formundadır. Bu durumda $t=a$ sınırında

$$y(a,\lambda)=R(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)$$

ve

$$y'(a,\lambda)=R'(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)-R(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\sin\theta(a,\lambda).$$

Böylece (2.54) sınır koşulundan

$$\begin{aligned}&[e\lambda+f]\left[R'(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)-R(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\sin\theta(a,\lambda)\right]\\&-[c\lambda+d]R(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)=0\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse

$$R(a,\lambda)\left\{\begin{aligned}&\cos\theta(a,\lambda)\left[(e\lambda+f)\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}-(c\lambda+d)\right]\\&-\sin\theta(a,\lambda)(e\lambda+f)\theta'(a,\lambda)\end{aligned}\right\}=0 \tag{2.56}$$

bulunur. Burada γ_4,

$$\sin\gamma_4:=(e\lambda+f)\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}-c\lambda-d, \tag{2.57}$$

$$\cos\gamma_4:=-(e\lambda+f)\theta'(a,\lambda) \tag{2.58}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa (2.56) eşitliğinden

$$R(a,\lambda)\{\cos\theta(a,\lambda)\sin\gamma_4+\sin\theta(a,\lambda)\cos\gamma_4\}=0$$

denklemine ulaşılır. Böylece

$$R(a,\lambda)\sin(\gamma_4+\theta(a,\lambda))=0$$

olduğundan

$$\sin(\gamma_4+\theta(a,\lambda))=0,$$

yani

$$\theta(a,\lambda)=-\gamma_4 \tag{2.59}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.25) ve (2.26) eşitlikleri (2.57) ve (2.58) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\sin\gamma_4}{\cos\gamma_4}=\frac{(e\lambda+f)\left[-\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)\right]-c\lambda-d}{-(e\lambda+f)\left[\lambda^{1/2}-\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)\right]}$$

olduğundan

$$\frac{\sin\gamma_4}{\cos\gamma_4}=\frac{\begin{array}{l}-e\lambda\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-f\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-c\lambda-d\\+O\left(\lambda\eta^2(\lambda)\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}{-e\lambda^{3/2}\left[\begin{array}{l}1-\lambda^{-1/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{f}{e}\lambda^{-1}-\frac{f}{e}\lambda^{-3/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right]}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\tan\gamma_4=\left[\begin{array}{l}\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d}{e}\lambda^{-3/2}+\frac{f}{e}\lambda^{-3/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right]$$
$$\times\left[\begin{array}{l}1+\lambda^{-1/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{f}{e}\lambda^{-1}+\frac{f}{e}\lambda^{-3/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right],$$

yani

$$\tan\gamma_4=\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{c}{e}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

bulunur. Son eşitlikte $\arctan x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılırsa

$$\gamma_4=\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{c}{e}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right). \quad (2.60)$$

$t=b$ sınırı için ise Teorem 2.1' de (2.35) ile verildiği üzere $\theta(b,\lambda)=\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi$ eşitliği mevcuttur.

(2.36) eşitliğinde Lemma 2.4, (2.18)-(2.20), (2.35), (2.59) ve (2.60) kullanılırsa

$$\lambda^{1/2}(b-a)+\operatorname{Im}\left\{\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}q(x)\,dx\right\}+O\left(\lambda^{-1}\eta(n)\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi+\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{c}{e}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)$$
$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

olduğundan $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı ve serilerle hata hesabı ile

$$\lambda_n^{1/2}(b-a)=\frac{(2n+3)\pi}{2}+\frac{c}{e}\frac{2(b-a)}{(2n+3)\pi}+\frac{2(b-a)}{(2n+3)\pi}\sin\left(\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}+\xi_a\right)$$
$$+\frac{c}{e}\frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}+\xi_a\right)$$
$$-\operatorname{İm}\left\{\frac{i(b-a)}{(2n+3)\pi}\int_a^b e^{i\frac{(2n+3)\pi}{b-a}(x-a)}q(x)dx\right\}+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

olarak bulunur. Bu durumda son eşitlikte (2.23)-(2.24) ile verilen $\sin\xi_t$ ve $\cos\xi_t$ tanımları kullanılıp, gerekli hesaplamalar yapıldığında $\lambda_n^{1/2}$

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)}+\frac{c}{e}\frac{2}{(2n+3)\pi}$$
$$+\frac{1}{(2n+3)\pi}\left(\sin\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$+\frac{1}{(2n+3)\pi}\left(\cos\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

şeklinde elde edilir. ■

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0,\qquad t\in[a,b], \tag{2.61}$$

$$[e\lambda+f]y'(a)-[c\lambda+d]y(a)=0,\quad c,d,e,f\in\mathbb{R},\ e\neq 0, \tag{2.62}$$

$$y(b)\cos\beta-y'(b)\sin\beta=0,\quad \beta\in(0,\pi). \tag{2.63}$$

Teorem 2.5: (2.61)-(2.63) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(n+1)\pi}{b-a}+\frac{1}{2(n+1)\pi}\left\{-2\cot\beta+\frac{2c}{e}+\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+1)\pi(x-a)}{b-a}\right)q(x)dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right).$$

İspat: (2.62) sınır koşulu göz önünde bulundurulduğunda $\theta(a,\lambda)$ değeri, Teorem 2.4' ün ispatında (2.59) ve (2.60) ile belirlidir. (2.63) sınır koşulu göz önünde bulundurulduğunda ise $\theta(b,\lambda)$ değeri, Teorem 2.3' ün ispatında (2.51) ve (2.52) ile belirlidir.

(2.36) eşitliğinde Lemma 2.4, (2.18)-(2.20), (2.51), (2.52), (2.59) ve (2.60) kullanılırsa

$$\lambda^{1/2}(b-a)+\dot{I}m\left\{\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}q(x)dx\right\}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$
$$=(n+1)\pi-\lambda^{-1/2}\cot\beta+\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{c}{e}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)$$
$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

olduğundan $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı ve serilerle hata hesabı ile

$$\lambda_n^{1/2}(b-a)=(n+1)\pi-\frac{(b-a)}{(n+1)\pi}\cot\beta+\frac{c}{e}\frac{(b-a)}{(n+1)\pi}+\frac{(b-a)}{(n+1)\pi}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi a}{b-a}+\xi_a\right)$$
$$-\dot{I}m\left\{\frac{i(b-a)}{2(n+1)\pi}\int_a^b e^{2i\frac{(n+1)\pi}{b-a}(x-a)}q(x)dx\right\}+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

olarak bulunur. Bu durumda son eşitlikte (2.23)-(2.24) ile verilen $\sin\xi_t$ ve $\cos\xi_t$ tanımları kullanılıp, gerekli hesaplamalar yapıldığında $\lambda_n^{1/2}$

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(n+1)\pi}{b-a}-\frac{1}{(n+1)\pi}\cot\beta+\frac{c}{e}\frac{1}{(n+1)\pi}$$
$$+\frac{1}{2(n+1)\pi}\left(\sin\frac{2(n+1)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+1)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$+\frac{1}{2(n+1)\pi}\left(\cos\frac{2(n+1)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+1)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

şeklinde elde edilir. ■

Örnek 2.2: Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-\sin t]y(t)=0,\quad t\in[0,\pi],$$
$$[e\lambda+f]y'(0)-[c\lambda+d]y(0)=0,\quad c,d,e,f\in\mathbb{R},\ e\neq 0,$$
$$y(\pi)\cos\beta-y'(\pi)\sin\beta=0,\quad \beta\in(0,\pi).$$

Bu durumda problemin özdeğerleri için asimptotik tahminler aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\lambda_n^{1/2}=(n+1)+\frac{1}{(n+1)\pi}\left[-\cot\beta+\frac{c}{e}-\frac{1}{4n^2+8n+3}\right]+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right).$$

2.1.4. Kuadratik Durum (KD ve KN)

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \tag{2.64}$$

$$y'(a)-\left[c\lambda^2+d\lambda+e\right]y(a)=0, \quad c,d,e\in\mathbb{R},\ c\neq 0, \tag{2.65}$$

$$y(b)=0. \tag{2.66}$$

Teorem 2.6: (2.64)-(2.66) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(n+2)\pi}{b-a}-\frac{1}{2(n+2)\pi}\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+2)\pi(x-a)}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right).$$

İspat: (2.5) eşitliğiyle verildiği üzere $y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0$ denkleminin herhangi bir reel değerli çözümü $y(t,\lambda)=R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)$ formundadır. Bu durumda $t=a$ sınırında

$$y(a,\lambda)=R(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)$$

ve

$$y'(a,\lambda)=R'(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)-R(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\sin\theta(a,\lambda).$$

Böylece (2.65) sınır koşulundan

$$R'(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)-R(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\sin\theta(a,\lambda)-\left[c\lambda^2+d\lambda+e\right]R(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)$$
$$=0$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse

$$R(a,\lambda)\left\{\cos\theta(a,\lambda)\left[\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}-\left(c\lambda^2+d\lambda+e\right)\right]-\sin\theta(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\right\}=0 \tag{2.67}$$

bulunur. Burada γ_5,

$$\sin\gamma_5:=\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}-c\lambda^2-d\lambda-e, \tag{2.68}$$

$$\cos\gamma_5:=-\theta'(a,\lambda) \tag{2.69}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa (2.67) eşitliğinden

$$R(a,\lambda)\left\{\cos\theta(a,\lambda)\sin\gamma_5+\sin\theta(a,\lambda)\cos\gamma_5\right\}=0$$

denklemine ulaşılır. Böylece

$$R(a,\lambda)\sin\left(\gamma_5+\theta(a,\lambda)\right)=0$$

olduğundan

$$\sin\left(\gamma_5+\theta(a,\lambda)\right)=0,$$

yani

$$\theta(a,\lambda)=-\gamma_5 \tag{2.70}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.25) ve (2.26) eşitlikleri (2.68) ve (2.69) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\cos\gamma_5}{\sin\gamma_5}=\frac{-\lambda^{1/2}+\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-c\lambda^2-d\lambda-e+O\left(\eta^2(\lambda)\right)},$$

bu durumda

$$\frac{\cos\gamma_5}{\sin\gamma_5}=\frac{-\lambda^{1/2}+\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-c\lambda^2\left[1+\frac{d}{c}\lambda^{-1}+\frac{e}{c}\lambda^{-2}+\frac{1}{c}\lambda^{-2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right]}$$

olduğundan

$$\cot\gamma_5=\left[\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}-\frac{1}{c}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\left[1-\frac{d}{c}\lambda^{-1}-\frac{e}{c}\lambda^{-2}-\frac{1}{c}\lambda^{-2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d^2}{c^2}\lambda^{-2}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right],$$

yani

$$\cot\gamma_5=\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}-\frac{1}{c}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{d}{c^2}\lambda^{-5/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)$$

şeklinde bulunur. Son eşitlikte $\operatorname{arccot} x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılırsa

$$\gamma_5=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+\frac{1}{c}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d}{c^2}\lambda^{-5/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right). \tag{2.71}$$

$t=b$ sınırı için ise Teorem 2.1' de (2.35) ile verildiği üzere $\theta(b,\lambda)=\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi$ eşitliği mevcuttur.

(2.36) eşitliğinde Lemma 2.4, (2.18)-(2.20), (2.35), (2.70) ve (2.71) kullanılırsa

$$\lambda^{1/2}(b-a)+\dot{I}m\left\{\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}q(x)dx\right\}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+\frac{1}{c}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)$$

olduğundan $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı ve serilerle hata hesabı ile

$$\lambda_n^{1/2}(b-a)=(n+2)\pi-\frac{1}{c}\frac{(b-a)^3}{(n+2)^3\pi^3}+\frac{1}{c}\frac{(b-a)^4}{(n+2)^4\pi^4}\cos\left(\frac{2(n+2)\pi a}{b-a}+\xi_a\right)$$
$$-\dot{I}m\left\{\frac{i(b-a)}{2(n+2)\pi}\int_a^b e^{2i\frac{(n+2)\pi}{b-a}(x-a)}q(x)dx\right\}+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

olarak bulunur. Bu durumda son eşitlikte (2.23)-(2.24) ile verilen $\sin\xi_t$ ve $\cos\xi_t$ tanımları kullanılıp, gerekli hesaplamalar yapıldığında $\lambda_n^{1/2}$

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(n+2)\pi}{b-a}-\frac{1}{2(n+2)\pi}\left(\sin\frac{2(n+2)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+2)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$-\frac{1}{2(n+2)\pi}\left(\cos\frac{2(n+2)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+2)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

şeklinde elde edilir. ■

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0,\quad t\in[a,b], \tag{2.72}$$

$$y'(a)-\left[c\lambda^2+d\lambda+e\right]y(a)=0,\quad c,d,e\in\mathbb{R},\ c\neq 0, \tag{2.73}$$

$$y(b)\cos\beta-y'(b)\sin\beta=0,\quad \beta\in(0,\pi). \tag{2.74}$$

Teorem 2.7: (2.72)-(2.74) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)}-\frac{1}{(2n+3)\pi}\left\{2\cot\beta+\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q(x)dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right).$$

İspat: (2.73) sınır koşulu göz önünde bulundurulduğunda $\theta(a,\lambda)$ değeri, Teorem 2.6' nın ispatında (2.70) ve (2.71) ile belirlidir. (2.74) sınır koşulu göz önünde bulundurulduğunda ise $\theta(b,\lambda)$ değeri, Teorem 2.3' ün ispatında (2.51) ve (2.52) ile belirlidir. (2.36) eşitliğinde Lemma 2.4, (2.18)-(2.20), (2.51), (2.52), (2.70) ve (2.71) kullanılırsa

$$\lambda^{1/2}(b-a)+\text{İm}\left\{\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}q(x)dx\right\}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$
$$=(n+1)\pi-\lambda^{-1/2}\cot\beta+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+\frac{1}{c}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

olduğundan $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı ve serilerle hata hesabı ile

$$\lambda_n^{1/2}(b-a)=\frac{(2n+3)\pi}{2}-\frac{2(b-a)}{(2n+3)\pi}\cot\beta-\text{İm}\left\{\frac{i(b-a)}{(2n+3)\pi}\int_a^b e^{i\frac{(2n+3)\pi}{b-a}(x-a)}q(x)dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

olarak bulunur. Bu durumda son eşitlikte (2.23)-(2.24) ile verilen $\sin\xi_t$ ve $\cos\xi_t$ tanımları kullanılıp, gerekli hesaplamalar yapıldığında $\lambda_n^{1/2}$

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)}-\frac{2}{(2n+3)\pi}\cot\beta$$
$$-\frac{1}{(2n+3)\pi}\left(\sin\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$-\frac{1}{(2n+3)\pi}\left(\cos\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

şekilde elde edilir. ■

2.1.5. İki Sınır Koşulunun da Özdeğer Parametresine Bağlı Olduğu Durum

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0,\quad t\in[a,b], \tag{2.75}$$

$$a_1y(a)+a_2y'(a)=\lambda\left[a_1'y(a)+a_2'y'(a)\right],\quad a_1,a_2,a_1',a_2'\in\mathbb{R} \tag{2.76}$$

$$b_1y(b)+b_2y'(b)=\lambda\left[b_1'y(b)+b_2'y'(b)\right],\quad b_1,b_2,b_1',b_2'\in\mathbb{R}. \tag{2.77}$$

Teorem 2.8: $a_2' \neq 0,\ b_2' \neq 0$ ise, (2.75)-(2.77) probleminin λ_n özdeğerleri, $n \to \infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2} = \frac{(n+1)\pi}{b-a} + \frac{1}{(n+1)\pi}\left\{\frac{a_2'b_1' - a_1'b_2'}{a_2'b_2'} + \frac{1}{2}\int_a^b \left(\cos\frac{2(n+1)\pi(x-a)}{b-a}\right) q(x)\,dx\right\}$$
$$+ O\left(n^{-2}\eta(n)\right) + O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right).$$

İspat: (2.5) eşitliğiyle verildiği üzere $y''(t) + [\lambda - q(t)]y(t) = 0$ denkleminin herhangi bir reel değerli çözümü $y(t,\lambda) = R(t,\lambda)\cos\theta(t,\lambda)$ formundadır. Bu durumda $t = a$ sınırında

$$y(a,\lambda) = R(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)$$

ve

$$y'(a,\lambda) = R'(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda) - R(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\sin\theta(a,\lambda).$$

Böylece (2.76) sınır koşulundan

$$\begin{aligned}
&a_1 R(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda) + a_2 R'(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda) - a_2 R(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\sin\theta(a,\lambda)\\
&-\lambda a_1' R(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda) - \lambda a_2' R'(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda)\\
&+\lambda a_2' R(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\sin\theta(a,\lambda) = 0
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Son eşitlik düzenlenirse

$$R(a,\lambda)\left\{\begin{array}{l}\cos\theta(a,\lambda)\left[a_1 + a_2\dfrac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)} - \lambda a_1' - \lambda a_2'\dfrac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}\right]\\ +\sin\theta(a,\lambda)\left[-a_2\theta'(a,\lambda) + \lambda a_2'\theta'(a,\lambda)\right]\end{array}\right\} = 0 \tag{2.78}$$

bulunur. Benzer şekilde $t = b$ sınırında, (2.77) sınır koşulundan

$$R(b,\lambda)\left\{\begin{array}{l}\cos\theta(b,\lambda)\left[b_1 + b_2\dfrac{R'(b,\lambda)}{R(b,\lambda)} - \lambda b_1' - \lambda b_2'\dfrac{R'(b,\lambda)}{R(b,\lambda)}\right]\\ +\sin\theta(b,\lambda)\left[-b_2\theta'(b,\lambda) + \lambda b_2'\theta'(b,\lambda)\right]\end{array}\right\} = 0. \tag{2.79}$$

(2.78) eşitliğinde γ_6,

$$\sin\gamma_6 := a_1 + a_2\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)} - \lambda a_1' - \lambda a_2'\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}, \tag{2.80}$$

$$\cos\gamma_6 := -a_2\theta'(a,\lambda) + \lambda a_2'\theta'(a,\lambda) \tag{2.81}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa

$$R(a,\lambda)\left\{\cos\theta(a,\lambda)\sin\gamma_6+\sin\theta(a,\lambda)\cos\gamma_6\right\}=0$$

denklemine ulaşılır. Böylece

$$R(a,\lambda)\sin\left(\gamma_6+\theta(a,\lambda)\right)=0$$

olduğundan

$$\sin\left(\gamma_6+\theta(a,\lambda)\right)=0,$$

yani

$$\theta(a,\lambda)=-\gamma_6 \tag{2.82}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.25) ve (2.26) eşitlikleri (2.80) ve (2.81) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\sin\gamma_6}{\cos\gamma_6}=\frac{\begin{array}{l}-\lambda a_1'+\lambda a_2'\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+a_1-a_2\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\eta^2(\lambda)\right)+O\left(\lambda\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}{\begin{array}{l}\lambda^{3/2}a_2'-\lambda a_2'\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\lambda^{1/2}a_2+a_2\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\eta^2(\lambda)\right)+O\left(\lambda\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}$$

olduğundan

$$\frac{\sin\gamma_6}{\cos\gamma_6}=\frac{\begin{array}{l}-\lambda a_1'+\lambda a_2'\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+a_1-a_2\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\eta^2(\lambda)\right)+O\left(\lambda\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}{\lambda^{3/2}a_2'\left[\begin{array}{l}1-\lambda^{-1/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\lambda^{-1}\dfrac{a_2}{a_2'}+\lambda^{-3/2}\dfrac{a_2}{a_2'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right]}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\tan\gamma_6=\left[\begin{array}{l}-\lambda^{-1/2}\dfrac{a_1'}{a_2'}+\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\lambda^{-3/2}\dfrac{a_1}{a_2'}-\lambda^{-3/2}\dfrac{a_2}{a_2'}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right]$$
$$\times\left[\begin{array}{l}1+\lambda^{-1/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\lambda^{-1}\dfrac{a_2}{a_2'}-\lambda^{-3/2}\dfrac{a_2}{a_2'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right],$$

yani

$$\tan\gamma_6 = -\lambda^{-1/2}\frac{a_1'}{a_2'} + \lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right) - \lambda^{-1}\frac{a_1'}{a_2'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right)$$
$$+ O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

bulunur. Son eşitlikte $\arctan x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılırsa

$$\gamma_6 = -\lambda^{-1/2}\frac{a_1'}{a_2'} + \lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right) - \lambda^{-1}\frac{a_1'}{a_2'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right) + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right). \tag{2.83}$$

(2.79) eşitliğinde γ_7,

$$\sin\gamma_7 := b_1 + b_2\frac{R'(b,\lambda)}{R(b,\lambda)} - \lambda b_1' - \lambda b_2'\frac{R'(b,\lambda)}{R(b,\lambda)}, \tag{2.84}$$

$$\cos\gamma_7 := b_2\theta'(b,\lambda) - \lambda b_2'\theta'(b,\lambda) \tag{2.85}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa

$$R(b,\lambda)\left\{\cos\theta(b,\lambda)\sin\gamma_7 - \sin\theta(b,\lambda)\cos\gamma_7\right\} = 0$$

denklemine ulaşılır. Böylece

$$R(b,\lambda)\sin\left(\gamma_7 - \theta(b,\lambda)\right) = 0$$

olduğundan

$$\sin\left(\gamma_7 - \theta(b,\lambda)\right) = 0,$$

yani

$$\theta(b,\lambda) = (n+1)\pi + \gamma_7 \tag{2.86}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.25) ve (2.26) eşitlikleri (2.84) ve (2.85) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\sin\gamma_7}{\cos\gamma_7} = \frac{-\lambda b_1' + b_1 + O\left(\eta^2(\lambda)\right) + O\left(\lambda\eta^2(\lambda)\right)}{-\lambda^{3/2}b_2'\left[1 - \lambda^{-1}\frac{b_2}{b_2'} + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right) + O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\tan\gamma_7 = \left[\lambda^{-1/2}\frac{b_1'}{b_2'} - \lambda^{-3/2}\frac{b_1}{b_2'} + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\left[1+\lambda^{-1}\frac{b_2}{b_2'} + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)\right],$$

yani

$$\tan\gamma_7 = \lambda^{-1/2}\frac{b_1'}{b_2'} + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

bulunur. Son eşitlikte $\arctan x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı ile

$$\gamma_7 = \lambda^{-1/2}\frac{b_1'}{b_2'} + O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right). \tag{2.87}$$

(2.36) eşitliğinde Lemma 2.4, (2.18)-(2.20), (2.82), (2.83), (2.86) ve (2.87) kullanılır-sa

$$\lambda^{1/2}(b-a) + \operatorname{İm}\left\{\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}q(x)\,dx\right\} + O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$
$$= (n+1)\pi + \lambda^{-1/2}\frac{b_1'}{b_2'} - \lambda^{-1/2}\frac{a_1'}{a_2'} + \lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) - \lambda^{-1}\frac{a_1'}{a_2'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)$$
$$+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

olduğundan son eşitlikte $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı, serilerle hata hesabı ve (2.23)-(2.24) eşitlikleriyle verilen $\sin\xi_t$, $\cos\xi_t$ tanımları kullanılıp, gerekli hesaplamalar yapıldığında $\lambda_n^{1/2}$

$$\lambda_n^{1/2} = \frac{(n+1)\pi}{b-a} + \frac{1}{(n+1)\pi}\left[\frac{a_2'b_1' - a_1'b_2'}{a_2'b_2'}\right]$$
$$+\frac{1}{2(n+1)\pi}\left(\sin\frac{2(n+1)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+1)\pi x}{b-a}\right)q(x)\,dx$$
$$+\frac{1}{2(n+1)\pi}\left(\cos\frac{2(n+1)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+1)\pi x}{b-a}\right)q(x)\,dx$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right) + O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

şeklinde elde edilir. ■

Örnek 2.3: Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t) + [\lambda - \cos t]\,y(t) = 0, \quad t\in[0,\pi],$$

$$a_1y(0)+a_2y'(0)=\lambda\left[a_1'y(0)+a_2'y'(0)\right],\quad a_1,a_2,a_1',a_2'\in\mathbb{R},\quad a_2'\neq 0,$$
$$b_1y(\pi)+b_2y'(\pi)=\lambda\left[b_1'y(\pi)+b_2'y'(\pi)\right],\quad b_1,b_2,b_1',b_2'\in\mathbb{R},\quad b_2'\neq 0.$$

Bu durumda problemin özdeğerleri için asimptotik tahminler aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\lambda_n^{1/2}=(n+1)+\frac{1}{(n+1)\pi}\left[\frac{a_2'b_1'-a_1'b_2'}{a_2'b_2'}\right]+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right).$$

Teorem 2.9: $a_2'\neq 0,\ b_2'=0$ ise, (2.75)-(2.77) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)}+\frac{2}{(2n+3)\pi}\left\{\frac{a_2'b_2-a_1'b_1'}{a_2'b_1'}+\frac{1}{2}\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q(x)\,dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right).$$

İspat: (2.76) sınır koşulu göz önünde bulundurulduğunda $\theta(a,\lambda)$ değeri, Teorem 2.8' in ispatında (2.82) ve (2.83) ile belirlidir. $t=b$ sınırında ise $b_2'=0$ olduğundan (2.79) eşitliğinde γ_8,

$$\sin\gamma_8:=b_1+b_2\frac{R'(b,\lambda)}{R(b,\lambda)}-\lambda b_1', \tag{2.88}$$

$$\cos\gamma_8:=b_2\theta'(b,\lambda) \tag{2.89}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa

$$R(b,\lambda)\left\{\cos\theta(b,\lambda)\sin\gamma_8-\sin\theta(b,\lambda)\cos\gamma_8\right\}=0$$

denklemine ulaşılır. Böylece

$$R(b,\lambda)\sin\left(\gamma_8-\theta(b,\lambda)\right)=0$$

olduğundan

$$\sin\left(\gamma_8-\theta(b,\lambda)\right)=0,$$

yani

$$\theta(b,\lambda)=(n+1)\pi+\gamma_8 \tag{2.90}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.25) ve (2.26) eşitlikleri (2.88) ve (2.89) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\cos\gamma_8}{\sin\gamma_8}=\frac{\lambda^{1/2}b_2+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-\lambda b_1'\left[1-\lambda^{-1}\dfrac{b_1}{b_1'}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{\cos\gamma_8}{\sin\gamma_8}=\left[-\lambda^{-1/2}\frac{b_2}{b_1'}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]\times\left[1+\lambda^{-1}\frac{b_1}{b_1'}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right],$$

yani

$$\cot\gamma_8=-\lambda^{-1/2}\frac{b_2}{b_1'}-\lambda^{-3/2}\frac{b_1b_2}{(b_1')^2}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)$$

bulunur. Son eşitlikte $\operatorname{arc}\cot x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılırsa

$$\gamma_8=\frac{\pi}{2}+\lambda^{-1/2}\frac{b_2}{b_1'}+\lambda^{-3/2}\frac{b_1b_2}{(b_1')^2}-\lambda^{-3/2}\frac{b_2^3}{3(b_1')^3}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right). \tag{2.91}$$

(2.36) eşitliğinde Lemma 2.4, (2.18)-(2.20), (2.82), (2.83), (2.90) ve (2.91) kullanılırsa

$$\lambda^{1/2}(b-a)+\text{İm}\left\{\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}q(x)\,dx\right\}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$
$$=(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}+\lambda^{-1/2}\frac{b_2}{b_1'}+\lambda^{-3/2}\frac{b_1b_2}{(b_1')^2}-\lambda^{-3/2}\frac{b_2^3}{3(b_1')^3}-\lambda^{-1/2}\frac{a_1'}{a_2'}$$
$$+\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\lambda^{-1}\frac{a_1'}{a_2'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

olduğundan son eşitlikte $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı, serilerle hata hesabı ve (2.23)-(2.24) eşitlikleriyle verilen $\sin\xi_t$, $\cos\xi_t$ tanımları kullanılıp, gerekli hesaplamalar yapıldığında

$\lambda_n^{1/2}$

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)}+\frac{2}{(2n+3)\pi}\left[\frac{a_2'b_2-a_1'b_1'}{a_2'b_1'}\right]$$
$$+\frac{1}{(2n+3)\pi}\left(\sin\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$+\frac{1}{(2n+3)\pi}\left(\cos\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 2.10: $a_2'=0,\ b_2'\neq 0$ ise, (2.75)-(2.77) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)}+\frac{2}{(2n+3)\pi}\left\{\frac{a_1'b_1'-a_2b_2'}{a_1'b_2'}-\frac{1}{2}\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q(x)dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right).$$

İspat: Bu durumda $a_2'=0$ olduğundan (2.78) eşitliğinde γ_9,

$$\sin\gamma_9 := a_1+a_2\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}-\lambda a_1', \tag{2.92}$$

$$\cos\gamma_9 := -a_2\theta'(a,\lambda) \tag{2.93}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa

$$R(a,\lambda)\left\{\cos\theta(a,\lambda)\sin\gamma_9+\sin\theta(a,\lambda)\cos\gamma_9\right\}=0$$

denklemine ulaşılır. Böylece

$$R(a,\lambda)\sin\left(\gamma_9+\theta(a,\lambda)\right)=0$$

olduğundan

$$\sin\left(\gamma_9+\theta(a,\lambda)\right)=0,$$

yani

$$\theta(a,\lambda)=-\gamma_9 \tag{2.94}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.25) ve (2.26) eşitlikleri (2.92) ve (2.93) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\cos\gamma_9}{\sin\gamma_9}=\frac{-\lambda^{1/2}a_2+a_2\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-\lambda a_1'+a_1-a_2\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}$$

olduğundan

$$\frac{\cos\gamma_9}{\sin\gamma_9}=\frac{-\lambda^{1/2}a_2+a_2\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)}{-\lambda a_1'\left[1-\lambda^{-1}\frac{a_1}{a_1'}+\lambda^{-1}\frac{a_2}{a_1'}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{\cos\gamma_9}{\sin\gamma_9}=\left[\lambda^{-1/2}\frac{a_2}{a_1'}-\lambda^{-1}\frac{a_2}{a_1'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\left[1+\lambda^{-1}\frac{a_1}{a_1'}-\lambda^{-1}\frac{a_2}{a_1'}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\right],$$

yani

$$\cot\gamma_9=\lambda^{-1/2}\frac{a_2}{a_1'}-\lambda^{-1}\frac{a_2}{a_1'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\lambda^{-3/2}\frac{a_1a_2}{\left(a_1'\right)^2}$$
$$-\lambda^{-3/2}\frac{a_2^2}{\left(a_1'\right)^2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)$$

bulunur. Son eşitlikte $\operatorname{arccot} x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılırsa

$$\gamma_9=\frac{\pi}{2}-\lambda^{-1/2}\frac{a_2}{a_1'}+\lambda^{-1}\frac{a_2}{a_1'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\lambda^{-3/2}\frac{a_1a_2}{\left(a_1'\right)^2}$$
$$+\lambda^{-3/2}\frac{a_2^2}{\left(a_1'\right)^2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\lambda^{-3/2}\frac{a_2^3}{3\left(a_1'\right)^3}+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right). \tag{2.95}$$

(2.77) sınır koşulu göz önünde bulundurulduğunda $\theta(b,\lambda)$ değeri, Teorem 2.8' in ispatında (2.86) ve (2.87) ile belirlidir.

(2.36) eşitliğinde Lemma 2.4, (2.18)-(2.20), (2.82), (2.83), (2.94) ve (2.95) kullanılırsa

$$\lambda^{1/2}(b-a)+\operatorname{Im}\left\{\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}q(x)\,dx\right\}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)$$
$$=(n+1)\pi+\lambda^{-1/2}\frac{b_1'}{b_2'}+\frac{\pi}{2}-\lambda^{-1/2}\frac{a_2}{a_1'}+\lambda^{-1}\frac{a_2}{a_1'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\lambda^{-3/2}\frac{a_1a_2}{\left(a_1'\right)^2}$$
$$+\lambda^{-3/2}\frac{a_2^2}{\left(a_1'\right)^2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\lambda^{-3/2}\frac{a_2^3}{3\left(a_1'\right)^3}+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

olduğundan son eşitlikte $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı, serilerle hata hesabı ve (2.23)-(2.24) eşitlikleriyle verilen $\sin\xi_t$, $\cos\xi_t$ tanımları kullanılıp, gerekli hesaplamalar yapıldığında $\lambda_n^{1/2}$

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)}+\frac{2}{(2n+3)\pi}\left[\frac{a_1'b_1'-a_2b_2'}{a_1'b_2'}\right]$$
$$-\frac{1}{(2n+3)\pi}\left(\sin\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)\,dx$$
$$-\frac{1}{(2n+3)\pi}\left(\cos\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q(x)\,dx$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 2.11: $a_2'=0,\ b_2'=0$ ise, (2.75)-(2.77) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(n+2)\pi}{b-a}+\frac{1}{(n+2)\pi}\left\{\frac{a_1'b_2-a_2b_1'}{a_1'b_1'}-\frac{1}{2}\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+2)\pi(x-a)}{b-a}\right)q(x)\,dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right).$$

İspat: (2.76) sınır koşulu göz önünde bulundurulduğunda $\theta(a,\lambda)$ değeri, Teorem 2.10'un ispatında (2.94) ve (2.95) ile belirlidir. (2.77) sınır koşulu göz önünde bulundurulduğunda ise $\theta(b,\lambda)$ değeri, Teorem 2.9' un ispatında (2.90) ve (2.91) ile belirlidir. Böylece (2.36) eşitliğinde Lemma 2.4, (2.18)-(2.20), (2.90), (2.91), (2.94) ve (2.95) kullanılırsa

$$\lambda^{1/2}(b-a)+\mathrm{\dot{I}m}\left\{\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}q(x)dx\right\}+O\left(\lambda^{-1}\eta(\lambda)\right)+O\left(\lambda^{-1/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

$$=(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}+\lambda^{-1/2}\frac{b_2}{b_1'}+\lambda^{-3/2}\frac{b_1b_2}{(b_1')^2}-\lambda^{-3/2}\frac{b_2^3}{3(b_1')^3}+\frac{\pi}{2}-\lambda^{-1/2}\frac{a_2}{a_1'}$$

$$+\lambda^{-1}\frac{a_2}{a_1'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\lambda^{-3/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}+\lambda^{-3/2}\frac{a_2^2}{(a_1')^2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\lambda^{-3/2}\frac{a_2^3}{3(a_1')^3}$$

$$+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)$$

olduğundan son eşitlikte $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı, serilerle hata hesabı ve (2.23)-(2.24) eşitlikleriyle verilen $\sin\xi_t$, $\cos\xi_t$ tanımları kullanılıp, gerekli hesaplamalar yapıldığında $\lambda_n^{1/2}$

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(n+2)\pi}{b-a}+\frac{1}{(n+2)\pi}\left[\frac{a_1'b_2-a_2b_1'}{a_1'b_1'}\right]$$

$$-\frac{1}{2(n+2)\pi}\left(\sin\frac{2(n+2)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+2)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$

$$-\frac{1}{2(n+2)\pi}\left(\cos\frac{2(n+2)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+2)\pi x}{b-a}\right)q(x)dx$$

$$+O\left(n^{-2}\eta(n)\right)+O\left(n^{-1}\eta^2(n)\right)$$

şeklinde elde edilir. ■

2.2. Potansiyel Fonksiyonunun Türevlenebilir Olması Durumu

Bu bölümde ele alınan

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0,\qquad t\in[a,b],$$

$$-\left[\beta_{11}y(a)-\beta_{12}y'(a)\right]=\lambda\left[\alpha_{11}y(a)-\alpha_{12}y'(a)\right],$$

$$-\left[\beta_{21}y(b)-\beta_{22}y'(b)\right]=\lambda\left[\alpha_{21}y(b)-\alpha_{22}y'(b)\right]$$

problemi α_{ik}, β_{ik} $(i,k=1,2)$ reel sayılarının özel durumları için ayrı ayrı göz önüne alınacak ve $q'(t)$ fonksiyonunun mevcut olması durumunda λ özdeğerleri için asimptotik tahminler elde edilecektir.

$q(t)$ fonksiyonunun türevlenebilir olarak kabul edildiği bu durumda

$$F^*(t,\lambda):=\begin{cases}\left|\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q'(x)dx\right| \Big/ \int_t^b |q'(x)|dx, & \int_t^b |q'(x)|dx \neq 0 \text{ ise},\\ 0 &, \int_t^b |q'(x)|dx = 0 \text{ ise},\end{cases}$$

ve $\eta^*(\lambda):=\sup_{a\le t\le b} F^*(t,\lambda)$ olarak tanımlansın. Bir önceki bölümde (2.15) eşitliği ile $v_1(t,\lambda)=-e^{-2i\lambda^{1/2}t}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q(x)dx$ olarak bulunmuştu. $q(t)$ fonksiyonu türevlenebilir olduğundan kısmi integral alınıp $v_1(t,\lambda)$ aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} v_1(t,\lambda) &= -e^{-2i\lambda^{1/2}t}\left[\left.\frac{q(x)e^{2i\lambda^{1/2}x}}{2i\lambda^{1/2}}\right|_{x=t}^{b} - \frac{1}{2i\lambda^{1/2}}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q'(x)dx\right] \\ &= \frac{1}{2}i\lambda^{-1/2}\left[q(b)e^{2i\lambda^{1/2}(b-t)}-q(t)\right]-\frac{1}{2}i\lambda^{-1/2}e^{-2i\lambda^{1/2}t}\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q'(x)dx \\ &= \frac{1}{2}i\lambda^{-1/2}\left[q(b)\left\{\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)+i\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)\right\}-q(t)\right] \\ &-\frac{1}{2}i\lambda^{-1/2}\int_t^b\left[\cos 2\lambda^{1/2}(x-t)+i\sin 2\lambda^{1/2}(x-t)\right]q'(x)dx, \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} v_1(t,\lambda) &= -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_t^b\left(\sin 2\lambda^{1/2}(x-t)\right)q'(x)dx \\ &+i\left\{\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)\right. \\ &\left.-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(t)-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_t^b\left(\cos 2\lambda^{1/2}(x-t)\right)q'(x)dx\right\}. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Şimdi (2.12) ile tanımlanan $F(t,\lambda)$ fonksiyonunun ilk integral terimine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$F(t,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\left|e^{2i\lambda^{1/2}b}q(b)-e^{2i\lambda^{1/2}t}q(t)-\int_t^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q'(x)dx\right|}{\int_t^b |q(x)|dx}, & \int_t^b |q(x)|dx \neq 0 \text{ ise},\\ 0 &, \int_t^b |q(x)|dx = 0 \text{ ise},\end{cases}$$

elde edilir. Böylece C sabit olmak üzere

$$F(t,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\lambda^{1/2}}\left|C-F^*(\lambda)\int_t^b |q'(x)|dx\right| \Big/ \int_t^b |q(x)|dx, & \int_t^b |q(x)|dx\neq 0 \text{ ise,}\\ 0 & , \int_t^b |q(x)|dx=0 \text{ ise,}\end{cases}$$

olduğundan $O(\eta(\lambda))=O(\lambda^{-1/2}\eta^*(\lambda))$ olarak bulunur. Daha önce (2.13) ile

$v(t,\lambda)=i\lambda^{1/2}+\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t,\lambda)$ olarak bulunmuştu. Bu durumda Lemma 2.4 göz önüne alınarak $v(t,\lambda)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$v(t,\lambda)=i\lambda^{1/2}+v_1(t,\lambda)+O\left(\lambda^{-1}\left[\eta^*(\lambda)\right]^2\right). \tag{2.97}$$

Gösterim: Bu bölümde $\eta^*(\lambda)$ fonksiyonu $\eta(\lambda)$ olarak gösterilecektir.

Böylece $S(t,\lambda)=\operatorname{Re}\{v(t,\lambda)\}$ olduğundan (2.96) ve (2.97) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}S(t,\lambda)=&-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(\cos 2\lambda^{1/2}t\right)\int_t^b\left(\sin 2\lambda^{1/2}x\right)q'(x)dx\\&-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(\sin 2\lambda^{1/2}t\right)\int_t^b\left(\cos 2\lambda^{1/2}x\right)q'(x)dx+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Son eşitlikte

$$\sin\xi_t:=\int_t^b\left(\cos 2\lambda^{1/2}x\right)q'(x)dx, \tag{2.98}$$

$$\cos\xi_t:=\int_t^b\left(\sin 2\lambda^{1/2}x\right)q'(x)dx \tag{2.99}$$

olarak tanımlanırsa $S(t,\lambda)$ aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}S(t,\lambda)=&-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-t)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)\\&+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right).\end{aligned} \tag{2.100}$$

Benzer şekilde $T(t,\lambda)=\operatorname{İm}\{v(t,\lambda)\}$ olduğundan (2.96) ve (2.97) kullanılarak

$$T(t,\lambda)=\lambda^{1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(t)$$
$$-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(\sin 2\lambda^{1/2}t\right)\int_t^b\left(\sin 2\lambda^{1/2}x\right)q'(x)\,dx$$
$$-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\left(\cos 2\lambda^{1/2}t\right)\int_t^b\left(\cos 2\lambda^{1/2}\right)q'(x)\,xdx\ +O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)$$

olarak bulunur. Son eşitlikte (2.98) ve (2.99) göz önünde bulundurulduğunda $T(t,\lambda)$ aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned}T(t,\lambda)&=\lambda^{1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-t)-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(t)\\&-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}t+\xi_t\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right).\end{aligned}\tag{2.101}$$

Ayrıca (2.15) eşitliğinden kısmi integral alma ile

$$\int_a^b v_1(x,\lambda)dx=\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}q(x)\,dx$$

olarak hesaplanmıştı. Bu eşitliğin sağ tarafında tekrar kısmi integral alınırsa

$$\begin{aligned}\int_a^b v_1(x,\lambda)dx&=\frac{i}{2}\lambda^{-1/2}e^{-2i\lambda^{1/2}a}\left[\left.\frac{q(x)e^{2i\lambda^{1/2}x}}{2i\lambda^{1/2}}\right|_{x=a}^{b}-\frac{1}{2i\lambda^{1/2}}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q'(x)\,dx\right]\\&=\frac{1}{4}\lambda^{-1}e^{2i\lambda^{1/2}(b-a)}q(b)-\frac{1}{4}\lambda^{-1}q(a)-\frac{1}{4}\lambda^{-1}e^{-2i\lambda^{1/2}a}\int_a^b e^{2i\lambda^{1/2}x}q'(x)\,dx\\&=\frac{1}{4}\lambda^{-1}q(b)\left[\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+i\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\right]-\frac{1}{4}\lambda^{-1}q(a)\\&-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\int_a^b\left[\cos 2\lambda^{1/2}(x-a)+i\sin 2\lambda^{1/2}(x-a)\right]q'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Bu durumda

$$\text{İm}\int_a^b v_1(x,\lambda)dx=\frac{1}{4}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right).$$

Ayrıca Bölüm 2.1’ de (2.19) ve (2.20) eşitlikleriyle bulunduğu üzere

$$\int_a^b v_2(t,\lambda)dt=\frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b\left(1-e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}\right)v_1^2(x,\lambda)\,dx$$

ve $n\geq 3$ için

$$\int_a^b v_n(t,\lambda)dt = \frac{i}{2\lambda^{1/2}}\int_a^b \left(1-e^{2i\lambda^{1/2}(x-a)}\right)\left(v_{n-1}^2(x,\lambda)+2v_{n-1}(x,\lambda)\sum_{m=1}^{n-2}v_m(x,\lambda)\right)dx.$$

Böylelikle son eşitliklerle

$$\begin{aligned}\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \dot{I}m\{v_n(t,\lambda)\}dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \dot{I}m\left\{\int_a^b v_n(t,\lambda)dt\right\} \\ &= \frac{1}{4}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{4}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \\ &\quad + O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{aligned} \qquad (2.102)$$

olarak elde edilir.

2.2.1. Standart Durum (ND)

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \qquad (2.103)$$

$$y(a)\cos\beta - y'(a)\sin\beta = 0, \quad \beta\in(0,\pi), \qquad (2.104)$$

$$y(b)=0. \qquad (2.105)$$

Teorem 2.12: (2.103)-(2.105) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\begin{aligned}\lambda_n^{1/2} &= \frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)} + \frac{1}{(2n+3)\pi}\left\{2\cot\beta - \frac{b-a}{(2n+3)\pi}\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx\right. \\ &\quad + \frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\cot\beta\left[q(b)+q(a)-\frac{2}{3}\cot^2\beta\right] \\ &\quad \left.+ \frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\cot\beta\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx\right\} \\ &\quad + O\left(n^{-4}\eta(n)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right).\end{aligned}$$

İspat: Bölüm 2.1' de, (2.30) ile verildiği üzere (2.104) sınır koşulu için aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$R(a,\lambda)\left\{\cos\theta(a,\lambda)\left[\cos\beta - \frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}\sin\beta\right] + \sin\theta(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\sin\beta\right\} = 0.$$

Bu durumda α_1,

$$\sin\alpha_1 := \cos\beta - \frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}\sin\beta, \tag{2.106}$$

$$\cos\alpha_1 := \theta'(a,\lambda)\sin\beta \tag{2.107}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa (2.30) eşitliğinden

$$R(a,\lambda)\left\{\cos\theta(a,\lambda)\sin\alpha_1 + \sin\theta(a,\lambda)\cos\alpha_1\right\} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$R(a,\lambda)\sin\left(\alpha_1 + \theta(a,\lambda)\right) = 0$$

olduğundan

$$\sin\left(\alpha_1 + \theta(a,\lambda)\right) = 0,$$

yani

$$\theta(a,\lambda) = -\alpha_1 \tag{2.108}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.100) ve (2.101) eşitlikleri (2.106) ve (2.107) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = \frac{\begin{array}{l}\cos\beta + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin\beta q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin\beta\cos\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right)\\ +O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}{\begin{array}{l}\lambda^{1/2}\sin\beta + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin\beta q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin\beta q(a)\\ -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin\beta\sin\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right) + O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}},$$

yani

$$\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = \frac{\begin{array}{l}\cos\beta + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin\beta q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin\beta\cos\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right)\\ +O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}{\lambda^{1/2}\sin\beta\begin{bmatrix}1 + \frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1}q(a)\\ -\frac{1}{2}\lambda^{-1}\sin\left(2\lambda^{1/2}a + \xi_a\right) + O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{bmatrix}}$$

bulunur. $|x|<1$ iken $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+x}$ dir. O halde

$\left|\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(a)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right|<1$ olduğu

için

$$\tan\alpha_1=\begin{bmatrix}\lambda^{-1/2}\cot\beta+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}1-\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +\frac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(b)\cos^2 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(a)\\ -\frac{1}{2}\lambda^{-2}q(a)q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ -\frac{1}{2}\lambda^{-2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{1}{2}\lambda^{-2}q(a)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{bmatrix},$$

yani

$$\begin{aligned}\tan\alpha_1 &= \lambda^{-1/2}\cot\beta+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ &-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\cot\beta q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\cot\beta q(a)\\ &+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\cot\beta\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ &+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ &+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ &+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right).\end{aligned}$$

Son eşitlikte $\arctan x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \lambda^{-1/2}\cot\beta + \frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ &-\frac{1}{3}\lambda^{-3/2}\cot^3\beta - \frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\cot\beta q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) + \frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\cot\beta q(a)\\ &+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\cot\beta\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) + \frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ &-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ &+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ &+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) - \frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ &+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right).\end{aligned} \tag{2.109}$$

(2.105) sınır koşulu için ise daha önce (2.35) ile verildiği üzere aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\theta(b,\lambda) = \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi \tag{2.110}$$

elde edilir.

(2.10) eşitliğinde

$$\theta(b,\lambda) - \theta(a,\lambda) = \int_a^b T(x,\lambda)dx$$

olarak verilmişti. $T(t,\lambda)$ fonksiyonunun (2.17) ile verilen değeri bu eşitlikte yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\theta(b,\lambda) - \theta(a,\lambda) &= \int_a^b \left[\lambda^{1/2} + \operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,\lambda)\right]dx\\ &= \lambda^{1/2}(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im}\int_a^b v_n(x,\lambda)dx\end{aligned} \tag{2.111}$$

bulunur. (2.111) eşitliğinde (2.35), (2.102) ve (2.108)-(2.110) kullanılırsa

$$\frac{(2n+3)\pi}{2}+\lambda^{-1/2}\cot\beta+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)$$
$$-\frac{1}{3}\lambda^{-3/2}\cot^3\beta-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\cot\beta q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\cot\beta q(a)$$
$$+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\cot\beta\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)$$
$$+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)$$
$$+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)$$
$$+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)$$
$$=\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{4}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right).$$

Böylece son eşitlikte (2.98)-(2.99) ile verilen $\sin\xi_t$, $\cos\xi_t$ tanımları ve $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı kullanılırsa, serilerle hata hesabı ile

$$\lambda_n^{1/2}(b-a)=\frac{(2n+3)\pi}{2}+\frac{2(b-a)}{(2n+3)\pi}\cot\beta-\frac{1}{3}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}\cot^3\beta$$
$$-\frac{1}{2}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}\cot\beta q(b)\cos(2n+3)\pi+\frac{1}{2}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}\cot\beta q(a)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}\cot\beta\left(\sin\frac{(2n+3)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx$$
$$+\frac{1}{2}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}\cot\beta\left(\cos\frac{(2n+3)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx$$
$$-\frac{1}{4}\frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\left(\cos\frac{(2n+3)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx$$
$$+\frac{1}{4}\frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\left(\sin\frac{(2n+3)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx$$
$$+O\left(n^{-4}\eta(\lambda)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(\lambda)\right),$$

yani

$$
\begin{aligned}
\lambda_n^{1/2} &= \frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)} \\
&+\frac{1}{(2n+3)\pi}\left\{2\cot\beta-\frac{b-a}{(2n+3)\pi}\left(\cos\frac{(2n+3)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx\right. \\
&-\frac{b-a}{(2n+3)\pi}\left(\sin\frac{(2n+3)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx \\
&+\frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\cot\beta\left[q(b)+q(a)-\frac{2}{3}\cot^2\beta\right] \\
&+\frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\cot\beta\left(\sin\frac{(2n+3)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx \\
&\left.+\frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\cot\beta\left(\cos\frac{(2n+3)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx\right\} \\
&+O\left(n^{-4}\eta(n)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. ■

2.2.2. Lineer Durum (AD ve AN)

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \tag{2.112}$$

$$y'(a)-[c\lambda+d]y(a)=0, \quad c,d\in\mathbb{R},\ c\neq 0, \tag{2.113}$$

$$y(b)=0. \tag{2.114}$$

Teorem 2.13: (2.112)-(2.114) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$
\begin{aligned}
\lambda_n^{1/2} &= \frac{(n+2)\pi}{(b-a)}+\frac{1}{(n+2)\pi}\left\{-\frac{1}{c}+\frac{b-a}{4(n+2)\pi}\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+2)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx\right. \\
&+\frac{1}{2c}\frac{(b-a)^2}{(n+2)^2\pi^2}\left[q(a)-q(b)+\frac{2(1+3cd)}{3c^2}\right] \\
&\left.+\frac{1}{2c}\frac{(b-a)^2}{(n+2)^2\pi^2}\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+2)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx\right\} \\
&+O\left(n^{-4}\eta(n)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right).
\end{aligned}
$$

İspat: Bölüm 2.1' de, (2.40) ile verildiği üzere (2.113) sınır koşulu için aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$R(a,\lambda)\left\{\cos\theta(a,\lambda)\left[\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}-(c\lambda+d)\right]-\sin\theta(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\right\}=0.$$

Bu durumda α_2,

$$\sin\alpha_2 := \frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}-c\lambda-d, \tag{2.115}$$

$$\cos\alpha_2 := -\theta'(a,\lambda) \tag{2.116}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa (2.40) eşitliğinden

$$R(a,\lambda)\{\cos\theta(a,\lambda)\sin\alpha_2+\sin\theta(a,\lambda)\cos\alpha_2\}=0$$

elde edilir. Böylece

$$R(a,\lambda)\sin(\alpha_2+\theta(a,\lambda))=0$$

olduğundan

$$\sin(\alpha_2+\theta(a,\lambda))=0,$$

yani

$$\theta(a,\lambda)=-\alpha_2 \tag{2.117}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.100) ve (2.101) eşitlikleri (2.115) ve (2.116) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}=\frac{\begin{array}{c}-\lambda^{1/2}-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(a)\\ +\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}{\begin{array}{l}-c\lambda-d-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}$$

olduğundan

$$\frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}=\frac{\begin{array}{l}-\lambda^{1/2}-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(a)\\+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}{-c\lambda\left[\begin{array}{l}1+\frac{d}{c}\lambda^{-1}+\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\-\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right]}.$$

Bu durumda

$$\cot\alpha_2=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}q(a)\\-\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right]$$
$$\times\left[\begin{array}{l}1-\frac{d}{c}\lambda^{-1}-\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\+\frac{d^2}{c^2}\lambda^{-2}+\frac{d}{c^2}\lambda^{-5/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{d}{c^2}\lambda^{-5/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right],$$

yani

$$\begin{aligned}\cot\alpha_2&=\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}q(a)\\&-\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{d}{c^2}\lambda^{-3/2}-\frac{1}{2c^2}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\&+\frac{1}{2c^2}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d^2}{c^3}\lambda^{-5/2}-\frac{d}{2c^2}\lambda^{-5/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\&+\frac{d}{2c^2}\lambda^{-5/2}q(a)+\frac{d}{2c^2}\lambda^{-5/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right).\end{aligned}$$

Son eşitlikte $\operatorname{arccot} x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha_2&=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}-\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}q(a)\\&+\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d}{c^2}\lambda^{-3/2}+\frac{1}{2c^2}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\&-\frac{1}{2c^2}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{d^2}{c^3}\lambda^{-5/2}+\frac{d}{2c^2}\lambda^{-5/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\&-\frac{d}{2c^2}\lambda^{-5/2}q(a)-\frac{d}{2c^2}\lambda^{-5/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{1}{3c^3}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right).\end{aligned}\tag{2.118}$$

(2.114) sınır koşulu için ise bir önceki teoremde (2.110) ile verildiği üzere $\theta(b,\lambda)=\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi$ eşitliği mevcuttur.

(2.111) eşitliğinde (2.35), (2.102), (2.110), (2.117) ve (2.118) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&(n+2)\pi-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}+\frac{1}{3c^3}\lambda^{-3/2}-\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}q(a)\\
&+\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d}{c^2}\lambda^{-3/2}+\frac{1}{2c^2}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\
&-\frac{1}{2c^2}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{d^2}{c^3}\lambda^{-5/2}+\frac{d}{2c^2}\lambda^{-5/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\
&-\frac{d}{2c^2}\lambda^{-5/2}q(a)-\frac{d}{2c^2}\lambda^{-5/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\\
&=\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{4}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right).
\end{aligned}
$$

Böylece son eşitlikte (2.98)-(2.99) ile verilen $\sin\xi_t$, $\cos\xi_t$ tanımları ve $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı kullanılırsa, serilerle hata hesabı ile

$$
\begin{aligned}
\lambda_n^{1/2}(b-a)=(n+2)\pi&-\frac{1}{c}\frac{(b-a)}{(n+2)\pi}-\frac{1}{2c}\frac{(b-a)^3}{(n+2)^3\pi^3}q(b)\cos 2(n+2)\pi\\
&+\frac{1}{2c}\frac{(b-a)^3}{(n+2)^3\pi^3}q(a)+\frac{d}{c^2}\frac{(b-a)^3}{(n+2)^3\pi^3}+\frac{1}{3c^3}\frac{(b-a)^3}{(n+2)^3\pi^3}\\
&+\frac{1}{2c}\frac{(b-a)^3}{(n+2)^3\pi^3}\left(\sin\frac{2(n+2)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+2)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx\\
&+\frac{1}{2c}\frac{(b-a)^3}{(n+2)^3\pi^3}\left(\cos\frac{2(n+2)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+2)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx\\
&+\frac{1}{4}\frac{(b-a)^2}{(n+2)^2\pi^2}\left(\cos\frac{2(n+2)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+2)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx\\
&-\frac{1}{4}\frac{(b-a)^2}{(n+2)^2\pi^2}\left(\sin\frac{2(n+2)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+2)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx\\
&+O\left(n^{-4}\eta(\lambda)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(\lambda)\right),
\end{aligned}
$$

yani

$$\lambda_n^{1/2} = \frac{(n+2)\pi}{(b-a)}$$
$$+\frac{1}{(n+2)\pi}\left\{-\frac{1}{c}+\frac{1}{4}\frac{(b-a)}{(n+2)\pi}\left(\cos\frac{2(n+2)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+2)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx\right.$$
$$-\frac{1}{4}\frac{(b-a)}{(n+2)\pi}\left(\sin\frac{2(n+2)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+2)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx$$
$$+\frac{1}{2c}\frac{(b-a)^2}{(n+2)^2\pi^2}\left[q(a)-q(b)+\frac{2(1+3cd)}{3c^2}\right]$$
$$+\frac{1}{2c}\frac{(b-a)^2}{(n+2)^2\pi^2}\left(\sin\frac{2(n+2)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+2)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx$$
$$\left.+\frac{1}{2c}\frac{(b-a)^2}{(n+2)^2\pi^2}\left(\cos\frac{2(n+2)\pi}{b-a}a\right)\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+2)\pi}{b-a}x\right)q'(x)dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-4}\eta(n)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right)$$

olarak bulunur. ■

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0,\qquad t\in[a,b], \tag{2.119}$$

$$y'(a)-[c\lambda+d]y(a)=0,\quad c,d\in\mathbb{R},\ c\neq 0, \tag{2.120}$$

$$y(b)\cos\beta-y'(b)\sin\beta=0,\quad \beta\in(0,\pi). \tag{2.121}$$

Teorem 2.14: (2.119)-(2.121) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)}+\frac{1}{(2n+3)\pi}\left\{-2\cot\beta-\frac{2}{c}\right.$$
$$+\frac{b-a}{(2n+3)\pi}\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx$$
$$+\frac{4}{c}\frac{(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\left[q(b)+q(a)+\frac{2(1+3cd)}{3c^2}+\frac{2}{3}\cot^3\beta\right]$$
$$\left.+\frac{4}{c}\frac{(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-4}\eta(n)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right).$$

İspat: (2.120) sınır koşulu göz önünde bulundurulduğunda $\theta(a,\lambda)$ değeri, Teorem 2.13' ün ispatında (2.117) ve (2.118) ile belirlidir. (2.121) sınır koşulu için ise, Bölüm 2.1 de (2.48) ile verildiği üzere aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$R(b,\lambda)\left\{\cos\theta(b,\lambda)\left[\cos\beta-\frac{R'(b,\lambda)}{R(b,\lambda)}\sin\beta\right]+\sin\theta(b,\lambda)\theta'(b,\lambda)\sin\beta\right\}=0.$$

Bu eşitlikte α_3,

$$\sin\alpha_3:=\cos\beta-\frac{R'(b,\lambda)}{R(b,\lambda)}\sin\beta, \tag{2.122}$$

$$\cos\alpha_3:=-\theta'(b,\lambda)\sin\beta \tag{2.123}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa

$$R(b,\lambda)\{\cos\theta(b,\lambda)\sin\alpha_3-\sin\theta(b,\lambda)\cos\alpha_3\}=0$$

elde edilir. Böylece

$$R(b,\lambda)\sin\left(\alpha_3-\theta(b,\lambda)\right)=0$$

olduğundan

$$\sin\left(\alpha_3-\theta(b,\lambda)\right)=0,$$

yani

$$\theta(b,\lambda)=\alpha_3+(n+1)\pi \tag{2.124}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.100) ve (2.101) eşitlikleri (2.122) ve (2.123) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\sin\alpha_3}{\cos\alpha_3}=\frac{\cos\beta+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)}{-\lambda^{1/2}\sin\beta+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)}$$

olduğundan

$$\frac{\sin\alpha_3}{\cos\alpha_3}=\frac{\cos\beta+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)}{-\lambda^{1/2}\sin\beta\left[1-O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]}$$

olarak elde edilir. Bu durumda

$$\tan\alpha_3=\left[-\lambda^{-1/2}\cot\beta+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]\times\left[1+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right],$$

yani

$$\tan\alpha_3=-\lambda^{-1/2}\cot\beta+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right).$$

Son eşitlikte $\arctan x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılırsa

$$\alpha_3=-\lambda^{-1/2}\cot\beta+\frac{1}{3}\lambda^{-3/2}\cot^3\beta+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right). \tag{2.125}$$

(2.111) eşitliğinde (2.35), (2.102), (2.117), (2.118) (2.124) ve (2.125) kullanılırsa

$$\begin{aligned}&(n+1)\pi-\lambda^{-1/2}\cot\beta+\frac{1}{3}\lambda^{-3/2}\cot^3\beta+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{c}\lambda^{-1/2}-\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\&+\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}q(a)+\frac{1}{2c}\lambda^{-3/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d}{c^2}\lambda^{-3/2}+\frac{1}{2c^2}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\&+\frac{1}{3c^3}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\\&=\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{4}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right).\end{aligned}$$

Böylece son eşitlikte (2.98)-(2.99) ile verilen $\sin\xi_t$, $\cos\xi_t$ tanımları ve $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı kullanılırsa, serilerle hata hesabı ile

$$\begin{aligned}\lambda_n^{1/2}(b-a)=&\frac{(2n+3)\pi}{2}-\frac{2(b-a)}{(2n+3)\pi}\cot\beta-\frac{1}{c}\frac{2(b-a)}{(2n+3)\pi}+\frac{1}{3}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}\cot^3\beta\\&-\frac{1}{2c}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}q(b)\cos(2n+3)\pi+\frac{1}{2c}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}q(a)\\&+\frac{d}{c^2}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}\\&+\frac{1}{2c}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}\left(\cos\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q'(x)dx\\&+\frac{1}{2c}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}\left(\sin\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q'(x)dx\\&+\frac{1}{4}\frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\left(\cos\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q'(x)dx\\&-\frac{1}{4}\frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\left(\sin\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q'(x)dx\\&+\frac{1}{3c^3}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}+O\left(n^{-4}\eta(n)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikten $\lambda_n^{1/2}$ çekilirse teorem istenilen şekilde ispatlanmış olur. ■

Örnek 2.4: Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-\cos t]y(t)=0, \quad t\in[0,\pi],$$

$$y'(0)-[c\lambda+d]y(0)=0, \quad c,d\in\mathbb{R},\ c\neq 0,$$

$$y(\pi)\cos\beta-y'(\pi)\sin\beta=0, \quad \beta\in(0,\pi).$$

Bu durumda problemin özdeğerleri için asimptotik tahminler aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{2n+3}{2}-\frac{2}{(2n+3)\pi}\left[\cot\beta+\frac{1}{c}\right]+\frac{8}{3c}\frac{1}{(2n+3)^3\pi}\left[\frac{1+3cd}{c^2}+\cot^3\beta\right]$$
$$+O\left(n^{-4}\eta(n)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right).$$

2.2.3. Bilineer Durum (BD ve BN)

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \tag{2.126}$$

$$[e\lambda+f]y'(a)-[c\lambda+d]y(a)=0, \quad c,d,e,f\in\mathbb{R},\ e\neq 0, \tag{2.127}$$

$$y(b)=0. \tag{2.128}$$

Teorem 2.15: (2.126)-(2.128) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)}+\frac{1}{(2n+3)\pi}\left\{\frac{2c}{e}-\frac{(b-a)}{(2n+3)\pi}\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx\right.$$
$$+\frac{4c}{e}\frac{(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\left[q(b)+q(a)+\frac{2}{3ce^2}\left(3de^2-3cef-c^3\right)\right]$$
$$\left.+\frac{4c}{e}\frac{(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-4}\eta(n)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right).$$

İspat: Bölüm 2.1 de, (2.56) ile verildiği üzere (2.127) sınır koşulu için aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$R(a,\lambda)\left\{\cos\theta(a,\lambda)\left[(e\lambda+f)\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}-(c\lambda+d)\right]-\sin\theta(a,\lambda)(e\lambda+f)\theta'(a,\lambda)\right\}=0.$$

Bu eşitlikte α_4,

$$\sin\alpha_4 := (e\lambda + f)\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)} - c\lambda - d, \tag{2.129}$$

$$\cos\alpha_4 := -(e\lambda + f)\theta'(a,\lambda) \tag{2.130}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa

$$R(a,\lambda)\{\cos\theta(a,\lambda)\sin\alpha_4 + \sin\theta(a,\lambda)\cos\alpha_4\} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$R(a,\lambda)\sin(\alpha_4 + \theta(a,\lambda)) = 0$$

olduğundan

$$\sin(\alpha_4 + \theta(a,\lambda)) = 0,$$

yani

$$\theta(a,\lambda) = -\alpha_4 \tag{2.131}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.100) ve (2.101) eşitlikleri (2.129) ve (2.130) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\sin\alpha_4}{\cos\alpha_4} = \frac{\begin{array}{l} -c\lambda - \frac{1}{2}\lambda^{1/2}eq(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) + \frac{1}{2}\lambda^{1/2}e\cos(2\lambda^{1/2}a + \xi_a) - d \\ -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}fq(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}f\cos(2\lambda^{1/2}a + \xi_a) \\ +O(\eta^2(\lambda)) + O(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)) \end{array}}{\begin{array}{l} -e\lambda^{3/2} - \frac{1}{2}\lambda^{1/2}eq(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) + \frac{1}{2}\lambda^{1/2}eq(a) \\ +\frac{1}{2}\lambda^{1/2}e\sin(2\lambda^{1/2}a + \xi_a) - f\lambda^{1/2} - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}fq(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) \\ +\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}fq(a) + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}f\sin(2\lambda^{1/2}a + \xi_a) + O(\eta^2(\lambda)) + O(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)) \end{array}}$$

olduğundan

$$\frac{\sin\alpha_4}{\cos\alpha_4}=\frac{\begin{array}{l}-c\lambda-\frac{1}{2}\lambda^{1/2}eq(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{1/2}e\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-d\\ -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}fq(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}f\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\eta^2(\lambda)\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}{-e\lambda^{3/2}\left[\begin{array}{l}1+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(a)\\ -\frac{1}{2}\lambda^{-1}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{f}{e}\lambda^{-1}\\ +\frac{f}{2e}\lambda^{-2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{f}{2e}\lambda^{-2}fq(a)\\ -\frac{f}{2e}\lambda^{-2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right]}.$$

Bu durumda

$$\tan\alpha_4=\left[\begin{array}{l}\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d}{e}\lambda^{-3/2}\\ +\frac{f}{2e}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{f}{2e}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right]$$

$$\times\left[\begin{array}{l}1-\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{f}{e}\lambda^{-1}\\ -\frac{f}{2e}\lambda^{-2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{f}{2e}\lambda^{-2}fq(a)+\frac{f}{2e}\lambda^{-2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +\frac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(b)\cos^2 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(a)+\frac{1}{4}\lambda^{-2}\sin^2\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +\frac{f^2}{e^2}\lambda^{-2}-\frac{1}{2}\lambda^{-2}q(a)q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ -\frac{1}{2}\lambda^{-2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +\frac{f}{e}\lambda^{-2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-2}q(a)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{f}{e}\lambda^{-2}q(a)\\ -\frac{f}{e}\lambda^{-2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right],$$

yani

$$
\begin{aligned}
\tan\alpha_4 = {} & \frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d}{e}\lambda^{-3/2} \\
& +\frac{f}{2e}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{f}{2e}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \\
& -\frac{c}{2e}\lambda^{-3/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{c}{2e}\lambda^{-3/2}q(a)+\frac{c}{2e}\lambda^{-3/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \\
& -\frac{cf}{e^2}\lambda^{-3/2}-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) \\
& +\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) \\
& +\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{f}{2e}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) \\
& +\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{f}{2e}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \\
& -\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right).
\end{aligned}
$$

Son eşitlikte $\arctan x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\alpha_4 = {} & \frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d}{e}\lambda^{-3/2} \\
& -\frac{c^3}{3e^3}\lambda^{-3/2}-\frac{c}{2e}\lambda^{-3/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{c}{2e}\lambda^{-3/2}q(a) \\
& +\frac{c}{2e}\lambda^{-3/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{cf}{e^2}\lambda^{-3/2}+\frac{f}{2e}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) \\
& -\frac{f}{2e}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{f}{2e}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \\
& -\frac{f}{2e}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) \\
& +\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) \\
& +\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \\
& +\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \\
& -\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right). \qquad (2.132)
\end{aligned}
$$

(2.128) sınır koşulu için ise (2.110) ile verildiği üzere $\theta(b,\lambda)=\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi$ eşitliği mevcuttur.

(2.111) eşitliğinde (2.35), (2.102), (2.110), (2.131) ve (2.132) kullanılırsa

$$\frac{(2n+3)}{2}\pi+\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d}{e}\lambda^{-3/2}$$
$$-\frac{c^3}{3e^3}\lambda^{-3/2}-\frac{c}{2e}\lambda^{-3/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{c}{2e}\lambda^{-3/2}q(a)+\frac{c}{2e}\lambda^{-3/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)$$
$$-\frac{cf}{e^2}\lambda^{-3/2}+\frac{f}{2e}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)$$
$$+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)$$
$$=\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{4}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right).$$

Böylece son eşitlikte (2.98)-(2.99) ile verilen $\sin\xi_t$, $\cos\xi_t$ tanımları ve $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı kullanılırsa, serilerle hata hesabı ile

$$\lambda_n^{1/2}(b-a)=\frac{(2n+3)\pi}{2}+\frac{2c}{e}\frac{(b-a)}{(2n+3)\pi}$$
$$+\frac{1}{4}\frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\left(\sin\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q'(x)dx$$
$$-\frac{1}{4}\frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\left(\cos\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q'(x)dx$$
$$+\frac{d}{e}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}-\frac{c^3}{3e^3}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}-\frac{c}{2e}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}q(b)\cos(2n+3)\pi$$
$$+\frac{c}{2e}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}q(a)-\frac{cf}{e^2}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}$$
$$+\frac{c}{2e}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}\left(\sin\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q'(x)dx$$
$$+\frac{c}{2e}\frac{8(b-a)^3}{(2n+3)^3\pi^3}\left(\cos\frac{(2n+3)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi x}{b-a}\right)q'(x)dx$$
$$+O\left(n^{-4}\eta(n)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right)$$

elde edilir. Son eşitlikten $\lambda_n^{1/2}$ çekilirse teorem istenilen şekilde ispatlanmış olur. ■

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0,\quad t\in[a,b], \tag{2.133}$$

$$\left[e\lambda+f\right]y'(a)-\left[c\lambda+d\right]y(a)=0,\quad c,d,e,f\in\mathbb{R},\ e\neq 0, \tag{2.134}$$

$$y(b)\cos\beta-y'(b)\sin\beta=0,\quad \beta\in(0,\pi). \tag{2.135}$$

Teorem 2.16: (2.133)-(2.135) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(n+1)\pi}{(b-a)}+\frac{1}{(n+1)\pi}\left\{-\cot\beta+\frac{c}{e}\right.$$
$$-\frac{b-a}{4(n+1)\pi}\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+1)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx$$
$$+\frac{c}{2e}\frac{(b-a)^2}{(n+1)^2\pi^2}\left[q(a)-q(b)-\frac{2(3cef-3de^2+c^3)}{3ce^2}+\frac{2e}{3c}\cot^3\beta\right]$$
$$\left.+\frac{c}{2e}\frac{(b-a)^2}{(n+1)^2\pi^2}\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+1)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-4}\eta(n)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right).$$

İspat: (2.134) sınır koşulu için $\theta(a,\lambda)$, Teorem 2.15' in ispatında (2.131) ve (2.132) eşitliklerinden; (2.135) sınır koşulu için ise $\theta(b,\lambda)$, Teorem 2.14' ün ispatında (2.124) ve (2.125) eşitliklerinden elde edilir. Bu eşitliklerle (2.35), (2.102) eşitlikleri (2.111) eşitliğinde kullanılırsa

$$(n+1)\pi-\lambda^{-1/2}\cot\beta+\frac{1}{3}\lambda^{-3/2}\cot^3\beta+\frac{c}{e}\lambda^{-1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)$$
$$-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d}{e}\lambda^{-3/2}-\frac{c^3}{3e^3}\lambda^{-3/2}-\frac{c}{2e}\lambda^{-3/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)$$
$$+\frac{c}{2e}\lambda^{-3/2}q(a)+\frac{c}{2e}\lambda^{-3/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{cf}{e^2}\lambda^{-3/2}+\frac{f}{2e}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)$$
$$-\frac{f}{2e}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{f}{2e}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)$$
$$-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)$$
$$+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)$$
$$+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{f}{2e}\lambda^{-2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)$$
$$-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)$$
$$=\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{4}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\left(\cos 2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right)$$

olduğundan, son eşitlikte (2.98)-(2.99) ile verilen $\sin\xi_t$, $\cos\xi_t$ tanımları ve $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı kullanılırsa, serilerle hata hesabı ile

$$
\begin{aligned}
\lambda_n^{1/2}(b-a) &= (n+1)\pi - \frac{b-a}{(n+1)\pi}\cot\beta + \frac{c}{e}\frac{b-a}{(n+1)\pi} \\
&+ \frac{(b-a)^2}{4(n+1)^2\pi^2}\left(\sin\frac{2(n+1)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+1)\pi x}{b-a}\right)q'(x)dx \\
&- \frac{(b-a)^2}{4(n+1)^2\pi^2}\left(\cos\frac{2(n+1)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+1)\pi x}{b-a}\right)q'(x)dx \\
&+ \frac{1}{3}\frac{(b-a)^3}{(n+1)^3\pi^3}\cot^3\beta + \frac{d}{e}\frac{(b-a)^3}{(n+1)^3\pi^3} - \frac{c^3}{3e^3}\frac{(b-a)^3}{(n+1)^3\pi^3} \\
&- \frac{c}{2e}\frac{(b-a)^3}{(n+1)^3\pi^3}q(b)\cos 2(n+1)\pi + \frac{c}{2e}\frac{(b-a)^3}{(n+1)^3\pi^3}q(a) - \frac{cf}{e^2}\frac{(b-a)^3}{(n+1)^3\pi^3} \\
&+ \frac{c}{2e}\frac{(b-a)^3}{(n+1)^3\pi^3}\left(\sin\frac{2(n+1)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+1)\pi x}{b-a}\right)q'(x)dx \\
&+ \frac{c}{2e}\frac{(b-a)^3}{(n+1)^3\pi^3}\left(\cos\frac{2(n+1)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+1)\pi x}{b-a}\right)q'(x)dx \\
&+ O\left(n^{-4}\eta(n)\right) + O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son eşitlikten $\lambda_n^{1/2}$ çekilirse teorem istenilen şekilde ispatlanmış olur. ■

Örnek 2.5: Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t) + [\lambda - \sin t]y(t) = 0, \quad t \in [0,\pi],$$

$$[e\lambda + f]y'(0) - [c\lambda + d]y(0) = 0, \quad c,d,e,f \in \mathbb{R}, \ e \neq 0,$$

$$y(\pi)\cos\beta - y'(\pi)\sin\beta = 0, \quad \beta \in (0,\pi).$$

Bu durumda problemin özdeğerleri için asimptotik tahminler aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$
\begin{aligned}
\lambda_n^{1/2} &= (n+1) + \frac{1}{(n+1)\pi}\left[-\cot\beta + \frac{c}{e} - \frac{1}{4n^2+8n+3}\right] \\
&+ \frac{c}{3e}\frac{1}{(n+1)^3\pi}\left[-\frac{\left(3cef - 3de^2 + c^3\right)}{ce^2} + \frac{e}{c}\cot^3\beta\right] + O\left(n^{-4}\eta(n)\right) + O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right).
\end{aligned}
$$

2.2.4. Kuadratik Durum (KD ve KN)

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \tag{2.136}$$

$$y'(a)-\left[c\lambda^2+d\lambda+e\right]y(a)=0, \quad c,d,e\in\mathbb{R},\ c\neq 0, \tag{2.137}$$

$$y(b)=0. \tag{2.138}$$

Teorem 2.17: (2.136)-(2.138) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(n+2)\pi}{b-a}+\frac{b-a}{4(n+2)^2\pi^2}\left\{\int_a^b \sin\left(\frac{2(n+2)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx-\frac{4}{c}\frac{(b-a)}{(n+2)\pi}\right\}$$
$$+O\left(n^{-4}\eta(n)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right).$$

İspat: Bölüm 2.1 de, (2.67) ile verildiği üzere (2.137) sınır koşulu için aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$R(a,\lambda)\left\{\cos\theta(a,\lambda)\left[\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}-\left(c\lambda^2+d\lambda+e\right)\right]-\sin\theta(a,\lambda)\theta'(a,\lambda)\right\}=0.$$

Bu durumda α_5,

$$\sin\alpha_5:=\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}-c\lambda^2-d\lambda-e, \tag{2.139}$$

$$\cos\alpha_5:=-\theta'(a,\lambda) \tag{2.140}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa (2.67) eşitliğinden

$$R(a,\lambda)\left\{\cos\theta(a,\lambda)\sin\alpha_5+\sin\theta(a,\lambda)\cos\alpha_5\right\}=0$$

elde edilir. Böylece

$$R(a,\lambda)\sin\left(\alpha_5+\theta(a,\lambda)\right)=0$$

olduğundan

$$\sin\left(\alpha_5+\theta(a,\lambda)\right)=0,$$

yani

$$\theta(a,\lambda)=-\alpha_5 \tag{2.141}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.100) ve (2.101) eşitlikleri (2.139) ve (2.140) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\cos\alpha_5}{\sin\alpha_5}=\frac{\begin{array}{l}-\lambda^{1/2}-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}{\begin{array}{l}-c\lambda^2-d\lambda-e-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}.$$

Bu durumda

$$\frac{\cos\alpha_5}{\sin\alpha_5}=\frac{\begin{array}{l}-\lambda^{1/2}-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(a)\\ +\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}{-c\lambda^2\left[\begin{array}{l}1+\frac{d}{c}\lambda^{-1}+\frac{e}{c}\lambda^{-2}+\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ -\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-3}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right]}$$

olduğundan

$$\cot\alpha_5=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}q(a)\\ -\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-3}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right]$$
$$\times\left[\begin{array}{l}1-\frac{d}{c}\lambda^{-1}-\frac{e}{c}\lambda^{-2}-\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ +\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d^2}{c^2}\lambda^{-2}+\frac{2de}{c^2}\lambda^{-3}\\ +\frac{d}{c^2}\lambda^{-7/2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{d}{c^2}\lambda^{-7/2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\lambda^{-3}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right],$$

yani

$$\begin{aligned}\cot\alpha_5 &= \frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}q(a)\\ &-\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{d}{c^2}\lambda^{-5/2}-\frac{e}{c^2}\lambda^{-7/2}+\frac{d^2}{c^3}\lambda^{-7/2}\\ &-\frac{d}{2c^2}\lambda^{-7/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{d}{2c^2}\lambda^{-7/2}q(a)+\frac{d}{2c^2}\lambda^{-7/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ &+O\left(\lambda^{-3}\eta^2(\lambda)\right)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Son eşitlikte $\operatorname{arccot} x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha_5 &= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}-\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}q(a)\\&+\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d}{c^2}\lambda^{-5/2}+\frac{e}{c^2}\lambda^{-7/2}-\frac{d^2}{c^3}\lambda^{-7/2}\\&+\frac{d}{2c^2}\lambda^{-7/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{d}{2c^2}\lambda^{-7/2}q(a)\\&-\frac{d}{2c^2}\lambda^{-7/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-3}\eta^2(\lambda)\right).\end{aligned} \tag{2.142}$$

(2.138) sınır koşulu için ise (2.110) ile verildiği üzere $\theta(b,\lambda)=\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi$ eşitliği mevcuttur.

(2.111) eşitliğinde (2.35), (2.102), (2.110), (2.141) ve (2.142) kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{(2n+3)\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}-\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}q(a)\\&+\frac{1}{2c}\lambda^{-5/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{d}{c^2}\lambda^{-5/2}+\frac{e}{c^2}\lambda^{-7/2}-\frac{d^2}{c^3}\lambda^{-7/2}\\&+\frac{d}{2c^2}\lambda^{-7/2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{d}{2c^2}\lambda^{-7/2}q(a)-\frac{d}{2c^2}\lambda^{-7/2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\&+O\left(\lambda^{-3}\eta^2(\lambda)\right)\\&=\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{4}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\&+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right).\end{aligned}$$

Böylece son eşitlikte (2.98)-(2.99) ile verilen $\sin\xi_t$, $\cos\xi_t$ tanımları ve $\eta(\lambda)$ fonksiyonun tanımı kullanılırsa serilerle hata hesabı ile

$$\begin{aligned}\lambda_n^{1/2}(b-a) &= (n+2)\pi-\frac{1}{c}\frac{(b-a)^3}{(n+2)^3\pi^3}\\&-\frac{(b-a)^2}{4(n+2)^2\pi^2}\sin\left(\frac{2(n+2)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\cos\left(\frac{2(n+2)\pi x}{b-a}\right)q'(x)dx\\&+\frac{(b-a)^2}{4(n+2)^2\pi^2}\cos\left(\frac{2(n+2)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\sin\left(\frac{2(n+2)\pi x}{b-a}\right)q'(x)dx\\&+O\left(n^{-4}\eta(n)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikten $\lambda_n^{1/2}$ çekilirse teorem istenilen şekilde ispatlanmış olur. ■

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \tag{2.143}$$

$$y'(a)-[c\lambda^2+d\lambda+e]y(a)=0, \quad c,d,e\in\mathbb{R},\ c\neq 0, \tag{2.144}$$

$$y(b)\cos\beta-y'(b)\sin\beta=0, \quad \beta\in[0,\pi). \tag{2.145}$$

Teorem 2.18: (2.143)-(2.145) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\begin{aligned}\lambda_n^{1/2}=&\frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)}+\frac{1}{(2n+3)\pi}\left\{-2\cot\beta+\frac{b-a}{(2n+3)\pi}\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx\right.\\&\left.-\frac{8(b-a)^2}{c(2n+3)^2\pi^2}+\frac{8(b-a)^2}{3(2n+3)^2\pi^2}\cot^3\beta\right\}\\&+O\left(n^{-4}\eta(n)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right).\end{aligned}$$

İspat: (2.144) sınır koşulu için $\theta(a,\lambda)$, Teorem 2.17' nin ispatında (2.141) ve (2.142) eşitliklerinden; (2.145) sınır koşulu için ise $\theta(b,\lambda)$, Teorem 2.14' ün ispatında (2.124) ve (2.125) eşitliklerinden elde edilir. Bu eşitliklerle (2.35), (2.102) eşitlikleri (2.111) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}&(n+1)\pi-\lambda^{-1/2}\cot\beta+\frac{1}{3}\lambda^{-3/2}\cot^3\beta+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{c}\lambda^{-3/2}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\\&=\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{4}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned}$$

olduğundan, son eşitlikte (2.98)-(2.99) ile verilen $\sin\xi_t$, $\cos\xi_t$ tanımları ve $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı kullanılırsa, serilerle hata hesabı ile $\lambda_n^{1/2}$ istenilen şekilde elde edilir. ■

2.2.5. İki Sınır Koşulunun da Özdeğer Parametresine Bağlı Olduğu Durum

Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0, \quad t\in[a,b], \tag{2.146}$$

$$a_1y(a)+a_2y'(a)=\lambda\left[a_1'y(a)+a_2'y'(a)\right], \quad a_1,a_2,a_1',a_2'\in\mathbb{R} \tag{2.147}$$

$$b_1y(b)+b_2y'(b)=\lambda\left[b_1'y(b)+b_2'y'(b)\right], \quad b_1,b_2,b_1',b_2'\in\mathbb{R}. \tag{2.148}$$

Teorem 2.19: $a_2'\neq 0$, $b_2'\neq 0$ ise, (2.146)-(2.148) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\begin{aligned}\lambda_n^{1/2}=&\frac{(n+1)\pi}{b-a}+\frac{1}{(n+1)\pi}\left\{\frac{a_2'b_1'-a_1'b_2'}{a_2'b_2'}\right.\\&-\frac{b-a}{4(n+1)\pi}\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+1)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx\\&-\frac{(b-a)^2}{(n+1)^2\pi^2}\left[\frac{3b_1(b_2')^2-3b_1'b_2b_2'+(b_1')^3}{3(b_2')^3}\right]\\&+\frac{(b-a)^2}{(n+1)^2\pi^2}\left[\frac{3a_1(a_2')^2-3a_1'a_2a_2'+(a_1')^3}{3(a_2')^3}\right]+\frac{(b-a)^2}{2(n+1)^2\pi^2}\frac{a_1'}{a_2'}\left[q(b)-q(a)\right]\\&\left.-\frac{(b-a)^2}{2(n+1)^2\pi^2}\frac{a_1'}{a_2'}\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+1)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx\right\}\\&+O\left(n^{-4}\eta(n)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right).\end{aligned}$$

İspat: Bölüm 2.1' de, (2.78) ile verildiği üzere (2.147) sınır koşulu için aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$R(a,\lambda)\left\{\begin{aligned}&\cos\theta(a,\lambda)\left[a_1+a_2\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}-\lambda a_1'-\lambda a_2'\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}\right]\\&+\sin\theta(a,\lambda)\left[-a_2\theta'(a,\lambda)+\lambda a_2'\theta'(a,\lambda)\right]\end{aligned}\right\}=0.$$

Bu eşitlikte α_6,

$$\sin\alpha_6:=a_1+a_2\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}-\lambda a_1'-\lambda a_2'\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)}, \tag{2.149}$$

$$\cos\alpha_6:=-a_2\theta'(a,\lambda)+\lambda a_2'\theta'(a,\lambda) \tag{2.150}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa

$$R(a,\lambda)\left\{\cos\theta(a,\lambda)\sin\alpha_6+\sin\theta(a,\lambda)\cos\alpha_6\right\}=0$$

elde edilir. Böylece

$$R(a,\lambda)\sin\left(\alpha_6+\theta(a,\lambda)\right)=0$$

olduğundan

$$\sin\left(\alpha_6+\theta(a,\lambda)\right)=0,$$

yani

$$\theta(a,\lambda)=-\alpha_6 \tag{2.151}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.100) ve (2.101) eşitlikleri (2.149) ve (2.150) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\sin\alpha_6}{\cos\alpha_6}=\frac{\begin{array}{l}-\lambda a_1'+\frac{1}{2}\lambda^{1/2}a_2'q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{1/2}a_2'\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+a_1\\ -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}a_2q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}a_2\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\eta^2(\lambda)\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}{\begin{array}{l}\lambda^{3/2}a_2'+\frac{1}{2}\lambda^{1/2}a_2'q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{1/2}a_2'q(a)\\ -\frac{1}{2}\lambda^{1/2}a_2'\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\lambda^{1/2}a_2-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}a_2q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ +\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}a_2q(a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}a_2\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\eta^2(\lambda)\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}$$

olduğundan

$$\frac{\sin\alpha_6}{\cos\alpha_6}=\frac{\begin{array}{l}-\lambda a_1'+\frac{1}{2}\lambda^{1/2}a_2'q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{1/2}a_2'\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+a_1\\ -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}a_2q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}a_2\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\eta^2(\lambda)\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}{\lambda^{3/2}a_2'\left[\begin{array}{l}1+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(a)\\ -\frac{1}{2}\lambda^{-1}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\lambda^{-1}\frac{a_2}{a_2'}-\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ +\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}q(a)+\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)+O\left(\lambda^{-5/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right]}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\tan\alpha_6=\begin{bmatrix}-\lambda^{-1/2}\dfrac{a_1'}{a_2'}+\dfrac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\dfrac{1}{2}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +\lambda^{-3/2}\dfrac{a_1}{a_2'}-\dfrac{1}{2}\lambda^{-2}\dfrac{a_2}{a_2'}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\dfrac{1}{2}\lambda^{-2}\dfrac{a_2}{a_2'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}1-\dfrac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\dfrac{1}{2}\lambda^{-1}q(a)\\ +\dfrac{1}{2}\lambda^{-1}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\lambda^{-1}\dfrac{a_2}{a_2'}+\dfrac{1}{2}\lambda^{-2}\dfrac{a_2}{a_2'}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ -\dfrac{1}{2}\lambda^{-2}\dfrac{a_2}{a_2'}q(a)-\dfrac{1}{2}\lambda^{-2}\dfrac{a_2}{a_2'}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\dfrac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(b)\cos^2 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ +\dfrac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(a)+\lambda^{-2}\dfrac{a_2^2}{(a_2')^2}-\dfrac{1}{2}\lambda^{-2}q(a)q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ -\dfrac{1}{2}\lambda^{-2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ -\lambda^{-2}\dfrac{a_2}{a_2'}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\dfrac{1}{2}\lambda^{-2}q(a)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +\lambda^{-2}\dfrac{a_2}{a_2'}q(a)+\lambda^{-2}\dfrac{a_2}{a_2'}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{bmatrix},$$

yani

$$\begin{aligned}\tan\alpha_6={}&-\lambda^{-1/2}\frac{a_1'}{a_2'}+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\&+\lambda^{-3/2}\frac{a_1}{a_2'}-\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\&+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_1'}{a_2'}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_1'}{a_2'}q(a)\\&-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_1'}{a_2'}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\lambda^{-3/2}\frac{a_1'a_2}{(a_2')^2}+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\&-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\&+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\&+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\&-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte $\arctan x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\alpha_6 = & -\lambda^{-1/2}\frac{a_1'}{a_2'}+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \\
& +\lambda^{-3/2}\frac{a_1}{a_2'}-\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \\
& +\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_1'}{a_2'}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_1'}{a_2'}q(a)-\lambda^{-3/2}\frac{a_1'a_2}{\left(a_2'\right)^2} \\
& -\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_1'}{a_2'}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) \\
& +\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) \\
& +\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \\
& +\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \\
& -\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) \\
& +\frac{1}{3}\lambda^{-3/2}\frac{\left(a_1'\right)^3}{\left(a_2'\right)^3}-\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{\left(a_1'\right)^2}{\left(a_2'\right)^2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) \\
& +\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{\left(a_1'\right)^2}{\left(a_2'\right)^2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right).
\end{aligned} \tag{2.152}$$

Bölüm 2.1’ de, (2.79) ile verildiği üzere (2.148) sınır koşulu için aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$R(b,\lambda)\left\{\begin{aligned}&\cos\theta(b,\lambda)\left[b_1+b_2\frac{R'(b,\lambda)}{R(b,\lambda)}-\lambda b_1'-\lambda b_2'\frac{R'(b,\lambda)}{R(b,\lambda)}\right]\\ &+\sin\theta(b,\lambda)\left[-b_2\theta'(b,\lambda)+\lambda b_2'\theta'(b,\lambda)\right]\end{aligned}\right\}=0.$$

Bu eşitlikte α_7,

$$\sin\alpha_7 := b_1+b_2\frac{R'(b,\lambda)}{R(b,\lambda)}-\lambda b_1'-\lambda b_2'\frac{R'(b,\lambda)}{R(b,\lambda)}, \tag{2.153}$$

$$\cos\alpha_7 := b_2\theta'(b,\lambda)-\lambda b_2'\theta'(b,\lambda) \tag{2.154}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa

$$R(b,\lambda)\left\{\cos\theta(b,\lambda)\sin\alpha_7-\sin\theta(b,\lambda)\cos\alpha_7\right\}=0$$

elde edilir. Böylece

$$R(b,\lambda)\sin\left(\alpha_7-\theta(b,\lambda)\right)=0$$

olduğundan

$$\sin\left(\alpha_7+\theta(b,\lambda)\right)=0,$$

yani

$$\theta(b,\lambda)=(n+1)\pi+\alpha_7 \tag{2.155}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.100) ve (2.101) eşitlikleri (2.153) ve (2.154) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\sin\alpha_7}{\cos\alpha_7}=\frac{-\lambda b_1'+b_1+O\left(\eta^2(\lambda)\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)}{-\lambda^{3/2}b_2'+\lambda^{1/2}b_2+O\left(\eta^2(\lambda)\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\tan\alpha_7=\left[\lambda^{-1/2}\frac{b_1'}{b_2'}-\lambda^{-3/2}\frac{b_1}{b_2'}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right]$$
$$\times\left[1+\lambda^{-1}\frac{b_2}{b_2'}+\lambda^{-2}\frac{b_2^2}{(b_2')^2}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\right],$$

yani

$$\tan\alpha_7=\lambda^{-1/2}\frac{b_1'}{b_2'}-\lambda^{-3/2}\frac{b_1}{b_2'}+\lambda^{-3/2}\frac{b_1'b_2}{(b_2')^2}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)$$

bulunur. Son eşitlikte $\arctan x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılırsa

$$\alpha_7=\lambda^{-1/2}\frac{b_1'}{b_2'}-\lambda^{-3/2}\frac{b_1}{b_2'}+\lambda^{-3/2}\frac{b_1'b_2}{(b_2')^2}-\lambda^{-3/2}\frac{(b_1')^3}{3(b_2')^3}+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right). \tag{2.156}$$

(2.111) eşitliğinde (2.35), (2.102), (2.151), (2.152), (2.155) ve (2.156) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\left(n+1\right)\pi+\lambda^{-1/2}\frac{b_1'}{b_2'}-\lambda^{-3/2}\frac{b_1}{b_2'}+\lambda^{-3/2}\frac{b_1'b_2}{\left(b_2'\right)^2}-\lambda^{-3/2}\frac{\left(b_1'\right)^3}{3\left(b_2'\right)^3}-\lambda^{-1/2}\frac{a_1'}{a_2'}\\
&+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q\left(b\right)\sin 2\lambda^{1/2}\left(b-a\right)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\lambda^{-3/2}\frac{a_1}{a_2'}\\
&-\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}q\left(b\right)\sin 2\lambda^{1/2}\left(b-a\right)+\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_1'}{a_2'}q\left(b\right)\cos 2\lambda^{1/2}\left(b-a\right)-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_1'}{a_2'}q\left(a\right)-\lambda^{-3/2}\frac{a_1'a_2}{\left(a_2'\right)^2}\\
&-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_1'}{a_2'}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q^2\left(b\right)\sin 2\lambda^{1/2}\left(b-a\right)\cos 2\lambda^{1/2}\left(b-a\right)\\
&+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q\left(a\right)q\left(b\right)\sin 2\lambda^{1/2}\left(b-a\right)+\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}q\left(b\right)\sin 2\lambda^{1/2}\left(b-a\right)\\
&+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q\left(b\right)\sin 2\lambda^{1/2}\left(b-a\right)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q\left(b\right)\cos 2\lambda^{1/2}\left(b-a\right)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&+\frac{1}{3}\lambda^{-3/2}\frac{\left(a_1'\right)^3}{\left(a_2'\right)^3}-\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{\left(a_1'\right)^2}{\left(a_2'\right)^2}q\left(b\right)\sin 2\lambda^{1/2}\left(b-a\right)+\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{\left(a_1'\right)^2}{\left(a_2'\right)^2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q\left(a\right)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2\left(\lambda\right)\right)\\
&=\lambda^{1/2}\left(b-a\right)+\frac{1}{4}\lambda^{-1}q\left(b\right)\sin 2\lambda^{1/2}\left(b-a\right)-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&+O\left(\lambda^{-2}\eta\left(\lambda\right)\right)
\end{aligned}
$$

olduğundan son eşitlikte $\eta\left(\lambda\right)$ fonksiyonunun tanımı, serilerle hata hesabı ve (2.98)-(2.99) eşitliklerinde verilen $\sin\xi_t$, $\cos\xi_t$ tanımları kullanılıp, gerekli hesaplamalar yapıldığında $\lambda_n^{1/2}$

$$
\begin{aligned}
\lambda_n^{1/2} &= \frac{(n+1)\pi}{b-a} + \frac{1}{(n+1)\pi}\left\{\left[\frac{a_2'b_1'-a_1'b_2'}{a_2'b_2'}\right]\right. \\
&- \frac{b-a}{4(n+1)\pi}\left(\cos\frac{2(n+1)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+1)\pi x}{b-a}\right)q'(x)\,dx \\
&+ \frac{b-a}{4(n+1)\pi}\left(\sin\frac{2(n+1)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+1)\pi x}{b-a}\right)q'(x)\,dx \\
&- \frac{(b-a)^2}{(n+1)^2\pi^2}\left[\frac{3b_1(b_2')^2-3b_1'b_2b_2'+(b_1')^3}{3(b_2')^3}\right] \\
&+ \frac{(b-a)^2}{(n+1)^2\pi^2}\left[\frac{3a_1(a_2')^2-3a_1'a_2a_2'+(a_1')^3}{3(a_2')^3}\right] + \frac{(b-a)^2}{2(n+1)^2\pi^2}\frac{a_1'}{a_2'}\left[q(b)-q(a)\right] \\
&- \frac{(b-a)^2}{2(n+1)^2\pi^2}\frac{a_1'}{a_2'}\left(\cos\frac{2(n+1)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+1)\pi x}{b-a}\right)q'(x)\,dx \\
&\left.- \frac{(b-a)^2}{2(n+1)^2\pi^2}\frac{a_1'}{a_2'}\left(\sin\frac{2(n+1)\pi a}{b-a}\right)\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+1)\pi x}{b-a}\right)q'(x)\,dx\right\} \\
&+ O\left(n^{-4}\eta(n)\right) + O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. ■

Örnek 2.6: Aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$y''(t)+[\lambda-\cos t]y(t)=0, \quad t\in[0,\pi],$$

$$a_1y(0)+a_2y'(0)=\lambda\left[a_1'y(0)+a_2'y'(0)\right], \quad a_1,a_2,a_1',a_2'\in\mathbb{R}, \quad a_2'\neq 0,$$

$$b_1y(\pi)+b_2y'(\pi)=\lambda\left[b_1'y(\pi)+b_2'y'(\pi)\right], \quad b_1,b_2,b_1',b_2'\in\mathbb{R}, \quad b_2'\neq 0.$$

Bu durumda problemin özdeğerleri için asimptotik tahminler aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$
\begin{aligned}
\lambda_n^{1/2} &= (n+1) + \frac{1}{(n+1)\pi}\left[\frac{a_2'b_1'-a_1'b_2'}{a_2'b_2'}\right] - \frac{1}{(n+1)^3\pi}\left[\frac{3b_1(b_2')^2-3b_1'b_2b_2'+(b_1')^3}{3(b_2')^3}\right] \\
&+ \frac{1}{(n+1)^3\pi}\left[\frac{3a_1(a_2')^2-3a_1'(a_2')^2-3a_1'a_2a_2'+(a_1')^3}{3(a_2')^3}\right] + O\left(n^{-4}\eta(n)\right) + O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right).
\end{aligned}
$$

Teorem 2.20: $a_2'\neq 0,\ b_2'=0$ ise, (2.146)-(2.148) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2}=\frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)}+\frac{2}{(2n+3)\pi}\left\{\frac{a_2'b_2-a_1'b_1'}{a_2'b_1'}\right.$$
$$-\frac{b-a}{2(2n+3)\pi}\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx$$
$$+\frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\left[\frac{3b_1b_1'b_2-b_2^3}{3(b_1')^3}\right]$$
$$+\frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\left[\frac{3a_1(a_2')^2-3a_1'a_2a_2'+(a_1')^3}{3(a_2')^3}\right]-\frac{2(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\frac{a_1'}{a_2'}\left[q(b)+q(a)\right]$$
$$\left.-\frac{2(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\frac{a_1'}{a_2'}\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-4}\eta(n)\right)+O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right).$$

İspat: (2.147) sınır koşulu göz önünde bulundurulduğunda $\theta(a,\lambda)$ değeri, Teorem 2.19' un ispatında (2.151) ve (2.152) ile belirlidir. (2.148) sınır koşulu için ise $b_2'=0$ olduğundan (2.79)' da α_8,

$$\sin\alpha_8:=b_1+b_2\frac{R'(b,\lambda)}{R(b,\lambda)}-\lambda b_1', \tag{2.157}$$

$$\cos\alpha_8:=b_2\theta'(b,\lambda) \tag{2.158}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa

$$R(b,\lambda)\left\{\cos\theta(b,\lambda)\sin\alpha_8-\sin\theta(b,\lambda)\cos\alpha_8\right\}=0$$

elde edilir. Böylece

$$R(b,\lambda)\sin\left(\alpha_8-\theta(b,\lambda)\right)=0$$

olduğundan

$$\sin\left(\alpha_8-\theta(b,\lambda)\right)=0,$$

yani

$$\theta(b,\lambda)=(n+1)\pi+\alpha_8 \tag{2.159}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.100) ve (2.101) eşitlikleri (2.157) ve (2.158) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\cos\alpha_8}{\sin\alpha_8}=\frac{\lambda^{1/2}b_2+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)}{-\lambda b_1'\left[1-\lambda^{-1}\dfrac{b_1}{b_1'}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right]}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{\cos\alpha_8}{\sin\alpha_8}=\left[-\lambda^{-1/2}\frac{b_2}{b_1'}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right]\times\left[1+\lambda^{-1}\frac{b_1}{b_1'}+\lambda^{-2}\frac{b_1^2}{(b_1')^2}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\right],$$

yani

$$\cot\alpha_8=-\lambda^{-1/2}\frac{b_2}{b_1'}-\lambda^{-3/2}\frac{b_1b_2}{(b_1')^2}-\lambda^{-5/2}\frac{b_1^2b_2}{(b_1')^3}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)$$

bulunur. Son eşitlikte $\operatorname{arc}\cot x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı ile

$$\alpha_8=\frac{\pi}{2}+\lambda^{-1/2}\frac{b_2}{b_1'}+\lambda^{-3/2}\frac{b_1b_2}{(b_1')^2}-\lambda^{-3/2}\frac{b_2^3}{3(b_1')^3}+\lambda^{-5/2}\frac{b_1^2b_2}{(b_1')^3}-\lambda^{-5/2}\frac{b_1b_2^3}{(b_1')^4}$$
$$+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right). \tag{2.160}$$

(2.111) eşitliğinde (2.35), (2.102), (2.151), (2.152), (2.159) ve (2.160) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}+\lambda^{-1/2}\frac{b_2}{b_1'}+\lambda^{-3/2}\frac{b_1 b_2}{(b_1')^2}-\lambda^{-3/2}\frac{b_2^3}{3(b_1')^3}+\lambda^{-5/2}\frac{b_1^2 b_2}{(b_1')^3}-\lambda^{-5/2}\frac{b_1 b_2^3}{(b_1')^4}\\
&-\lambda^{-1/2}\frac{a_1'}{a_2'}+\frac{1}{2}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&+\lambda^{-3/2}\frac{a_1}{a_2'}-\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_1'}{a_2'}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_1'}{a_2'}q(a)-\lambda^{-3/2}\frac{a_1' a_2}{(a_2')^2}\\
&-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_1'}{a_2'}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q^2(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\
&+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\
&+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&+\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&+\frac{1}{3}\lambda^{-3/2}\frac{(a_1')^3}{(a_2')^3}-\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{(a_1')^2}{(a_2')^2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{(a_1')^2}{(a_2')^2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&-\frac{1}{4}\lambda^{-2}q(a)\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2}{a_2'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)\\
&=\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{4}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right).
\end{aligned}
$$

Böylece son eşitlikte $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı, serilerle hata hesabı ve (2.98)-(2.99) eşitliklerinde verilen $\sin\xi_t$, $\cos\xi_t$ tanımları kullanılıp, gerekli hesaplamalar yapıldığında $\lambda_n^{1/2}$ istenilen şekilde elde edilir. ■

Teorem 2.21: $a_2'=0,\ b_2'\neq 0$ ise, (2.146)-(2.148) probleminin λ_n özdeğerleri, $n\to\infty$ iken

$$\lambda_n^{1/2} = \frac{(2n+3)\pi}{2(b-a)} + \frac{2}{(2n+3)\pi}\left\{\frac{a_1'b_1' - a_2b_2'}{a_1'b_2'}\right.$$
$$-\frac{b-a}{2(2n+3)\pi}\int_a^b\left(\sin\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx$$
$$-\frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\left[\frac{3b_1(b_2')^2 - 3b_1'b_2b_2' + (b_1')^3}{3(b_2')^3}\right]$$
$$+\frac{4(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\left[\frac{-3a_1a_1'a_2 + a_2^3}{3(a_1')^3}\right] + \frac{2(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\frac{a_2}{a_1'}\left[q(b)+q(a)\right]$$
$$\left.+\frac{2(b-a)^2}{(2n+3)^2\pi^2}\frac{a_2}{a_1'}\int_a^b\left(\cos\frac{(2n+3)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)dx\right\}$$
$$+O\left(n^{-4}\eta(n)\right) + O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right).$$

İspat: Bu durumda $a_2' = 0$ olduğundan (2.78)' de α_9,

$$\sin\alpha_9 := a_1 + a_2\frac{R'(a,\lambda)}{R(a,\lambda)} - \lambda a_1', \tag{2.161}$$

$$\cos\alpha_9 := -a_2\theta'(a,\lambda) \tag{2.162}$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde tanımlanırsa

$$R(a,\lambda)\{\cos\theta(a,\lambda)\sin\alpha_9 + \sin\theta(a,\lambda)\cos\alpha_9\} = 0$$

elde edilir. Böylece

$$R(a,\lambda)\sin(\alpha_9 + \theta(a,\lambda)) = 0$$

olduğundan

$$\sin(\alpha_9 + \theta(a,\lambda)) = 0,$$

yani

$$\theta(a,\lambda) = -\alpha_9 \tag{2.163}$$

olarak hesaplanır. (2.8), (2.9), (2.100) ve (2.101) eşitlikleri (2.161) ve (2.162) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\frac{\cos\alpha_9}{\sin\alpha_9}=\frac{\begin{array}{l}-\lambda^{1/2}a_2-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}a_2q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}a_2q(a)\\ +\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}a_2\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-1}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}}{-\lambda a_1'\left[\begin{array}{l}1-\lambda^{-1}\frac{a_1}{a_1'}+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ -\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right]}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{\cos\alpha_9}{\sin\alpha_9}=\left[\begin{array}{l}\lambda^{-1/2}\frac{a_2}{a_1'}+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}q(a)\\ -\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right]$$

$$\times\left[\begin{array}{l}1+\lambda^{-1}\frac{a_1}{a_1'}-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ +\lambda^{-2}\frac{a_1^2}{(a_1')^2}-\lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\ +\lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\end{array}\right],$$

yani

$$\begin{aligned}\cot\alpha_9 &=\lambda^{-1/2}\frac{a_2}{a_1'}+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}q(a)\\ &-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\lambda^{-3/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}\\ &-\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2^2}{(a_1')^2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2^2}{(a_1')^2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\ &+\lambda^{-5/2}\frac{a_1^2a_2}{(a_1')^3}+\frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}q(a)\\ &-\frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte $\operatorname{arc}\cot x$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor açılımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha_9 &= \frac{\pi}{2} - \lambda^{-1/2}\frac{a_2}{a_1'} - \frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) + \frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}q(a)\\
&+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) - \lambda^{-3/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2} + \lambda^{-3/2}\frac{a_2^3}{3(a_1')^3}\\
&+\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2^2}{(a_1')^2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2^2}{(a_1')^2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&-\lambda^{-5/2}\frac{a_1^2a_2}{(a_1')^3} - \frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) + \frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}q(a) \qquad (2.164)\\
&+\frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) + \frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_2^3}{(a_1')^3}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\
&-\frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_2^3}{(a_1')^3}q(a) - \frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_2^3}{(a_1')^3}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) + \lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2^3}{(a_1')^4}\\
&+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right).\end{aligned}$$

(2.148) sınır koşulu göz önünde bulundurulduğunda $\theta(b,\lambda)$ değeri, Teorem 2.19' un ispatında (2.155) ve (2.156) ile belirlidir.

(2.111) eşitliğinde (2.35), (2.102), (2.159), (2.160), (2.163) ve (2.164) kullanılırsa

$$\begin{aligned}&(n+1)\pi + \lambda^{-1/2}\frac{b_1'}{b_2'} - \lambda^{-3/2}\frac{b_1}{b_2'} + \lambda^{-3/2}\frac{b_1'b_2}{(b_2')^2} - \lambda^{-3/2}\frac{(b_1')^3}{3(b_2')^3} + \frac{\pi}{2} - \lambda^{-1/2}\frac{a_2}{a_1'}\\
&-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) + \frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}q(a) + \frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&-\lambda^{-3/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2} + \lambda^{-3/2}\frac{a_2^3}{3(a_1')^3} + \frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2^2}{(a_1')^2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)\\
&-\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2^2}{(a_1')^2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) - \lambda^{-5/2}\frac{a_1^2a_2}{(a_1')^3} - \frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\
&+\frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}q(a) + \frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&+\frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_2^3}{(a_1')^3}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_2^3}{(a_1')^3}q(a)\\
&-\frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_2^3}{(a_1')^3}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right) + \lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2^3}{(a_1')^4} + O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\\
&= \lambda^{1/2}(b-a) + \frac{1}{4}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{4}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right)\end{aligned}$$

olduğundan son eşitlikte $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı, serilerle hata hesabı ve (2.98)-(2.99) eşitliklerinde verilen $\sin\xi_t$, $\cos\xi_t$ tanımları kullanılıp, gerekli hesaplamalar yapıldığında $\lambda_n^{1/2}$ istenilen şekilde elde edilir. ■

Teorem 2.22: $a_2' = 0,\ b_2' = 0$ ise, (2.146)-(2.148) probleminin λ_n özdeğerleri, $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{1/2} = {} & \frac{(n+2)\pi}{b-a} + \frac{1}{(n+2)\pi}\left\{\frac{a_1'b_2 - a_2b_1'}{a_1'b_1'}\right. \\
& + \frac{b-a}{4(n+2)\pi}\int_a^b\left(\sin\frac{2(n+2)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)\,dx \\
& - \frac{(b-a)^2}{(n+2)^2\pi^2}\left[\frac{3b_1b_1'b_2 - b_2^3}{3(b_1')^3}\right] + \frac{(b-a)^2}{(n+2)^2\pi^2}\left[\frac{-3a_1a_1'a_2 + a_2^3}{3(a_1')^3}\right] \\
& - \frac{(b-a)^2}{2(n+2)^2\pi^2}\frac{a_2}{a_1'}\left[q(b) - q(a)\right] \\
& \left. + \frac{(b-a)^2}{2(n+2)^2\pi^2}\frac{a_2}{a_1'}\int_a^b\left(\cos\frac{2(n+2)\pi(x-a)}{b-a}\right)q'(x)\,dx\right\} \\
& + O\left(n^{-4}\eta(n)\right) + O\left(n^{-3}\eta^2(n)\right).
\end{aligned}$$

İspat: (2.147) sınır koşulu göz önünde bulundurulduğunda $\theta(a,\lambda)$ değeri, Teorem 2.21' in ispatında (2.163) ve (2.164) ile belirlidir. (2.148) sınır koşulu göz önünde bulundurulduğunda ise $\theta(b,\lambda)$ değeri, Teorem 2.20' nin ispatında (2.159) ve (2.160) ile belirlidir. (2.111) eşitliğinde (2.35), (2.102), (2.159), (2.160), (2.163) ve (2.164) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}+\lambda^{-1/2}\frac{b_2}{b_1'}+\lambda^{-3/2}\frac{b_1b_2}{(b_1')^2}-\lambda^{-3/2}\frac{b_2^3}{3(b_1')^3}+\lambda^{-5/2}\frac{b_1^2b_2}{(b_1')^3}-\lambda^{-5/2}\frac{b_1b_2^3}{(b_1')^4}\\
&+\frac{\pi}{2}-\lambda^{-1/2}\frac{a_2}{a_1'}-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}q(a)\\
&+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\frac{a_2}{a_1'}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\lambda^{-3/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}+\lambda^{-3/2}\frac{a_2^3}{3(a_1')^3}\\
&+\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2^2}{(a_1')^2}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{a_2^2}{(a_1')^2}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)-\lambda^{-5/2}\frac{a_1^2a_2}{(a_1')^3}\\
&-\frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}q(a)\\
&+\frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2}{(a_1')^2}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_2^3}{(a_1')^3}q(b)\cos 2\lambda^{1/2}(b-a)\\
&-\frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_2^3}{(a_1')^3}q(a)-\frac{1}{2}\lambda^{-5/2}\frac{a_2^3}{(a_1')^3}\sin\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)+\lambda^{-5/2}\frac{a_1a_2^3}{(a_1')^4}+O\left(\lambda^{-2}\eta^2(\lambda)\right)\\
&=\lambda^{1/2}(b-a)+\frac{1}{4}\lambda^{-1}q(b)\sin 2\lambda^{1/2}(b-a)-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\cos\left(2\lambda^{1/2}a+\xi_a\right)\\
&+O\left(\lambda^{-2}\eta(\lambda)\right)+O\left(\lambda^{-3/2}\eta^2(\lambda)\right)
\end{aligned}
$$

olduğundan son eşitlikte $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun tanımı, serilerle hata hesabı ve (2.98)-(2.99) eşitliklerinde verilen $\sin\xi_t$, $\cos\xi_t$ tanımları kullanılıp, gerekli hesaplamalar yapıldığında $\lambda_n^{1/2}$ istenilen şekilde elde edilir. ■

2.3. Spektral Fonksiyonun Türevi

Bu bölümde öncelikle Titchmarsh' ın [25]' deki çalışmasında kullandığı yönteme benzer yöntemle, $q(t)$ fonksiyonunun $[a,\infty)$ aralığı üzerinde integrallenebilir olması durumunda

$$
y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0,\qquad t\in[a,\infty), \tag{2.165}
$$

$$
a_1y(a)+a_2y'(a)=\lambda\left[a_1'y(a)+a_2'y'(a)\right],\quad a_1,a_2,a_1',a_2'\in\mathbb{R} \tag{2.166}
$$

probleminin bir çözüm formu elde edilecektir. Daha sonra bu problemin spektral fonksiyonunun türevi için gerekli teoriye yer verilecektir.

$\phi(t,\lambda)=\phi(t)$ fonksiyonu $y''(t)+[\lambda-q(t)]y(t)=0$ denkleminin bir çözümü olsun öyle ki $\phi(a)=a_2-\lambda a_2'$, $\phi'(a)=\lambda a_1'-a_1$ başlangıç değer koşullarını sağlasın.

$s:=\sigma+i\kappa$ ve $\lambda:=s^2$ olsun. $\frac{1}{s}\int_a^t\{\sin s(t-x)\}\{s^2\phi(x)+\phi''(x)\}dx$ integrali göz önüne alınsın:

$$\frac{1}{s}\int_a^t\{\sin s(t-x)\}\{s^2\phi(x)+\phi''(x)\}dx=s\int_a^t\{\sin s(t-x)\}\phi(x)dx$$
$$+\frac{1}{s}\int_a^t\{\sin s(t-x)\}\phi''(x)dx.$$

Son integral terimine, $\sin s(t-x)=u$, $\phi''(x)dx=dv$ alarak kısmi integral yöntemi uygulanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{1}{s}\int_a^t\{\sin s(t-x)\}\{s^2\phi(x)+\phi''(x)\}dx=s\int_a^t\{\sin s(t-x)\}\phi(x)dx$$
$$+\frac{1}{s}\{\sin s(t-x)\}\phi'(x)\Big|_{x=a}^{t}$$
$$+\int_a^t\{\cos s(t-x)\}\phi'(x)dx.$$

Tekrar son integral terimine, $\cos s(t-x)=u$, $\phi'(x)dx=dv$ alarak kısmi integral yöntemi uygulansın ve başlangıç değer koşulları kullanılsın:

$$\frac{1}{s}\int_a^t\{\sin s(t-x)\}\{s^2\phi(x)+\phi''(x)\}dx=s\int_a^t\{\sin s(t-x)\}\phi(x)dx$$
$$-\frac{1}{s}\{\sin s(t-a)\}[\lambda a_1'-a_1]$$
$$+\{\cos s(t-x)\}\phi(x)\Big|_{x=a}^{t}$$
$$-s\int_a^t\{\sin s(t-x)\}\phi(x)dx,$$

yani

$$\frac{1}{s}\int_a^t\{\sin s(t-x)\}\{s^2\phi(x)+\phi''(x)\}dx=-\frac{1}{s}\{\sin s(t-a)\}[\lambda a_1'-a_1]+\phi(t)$$
$$-\{\cos s(t-a)\}[a_2-\lambda a_2'].$$

Böylece son eşitlikteki integral teriminde, $\phi(t)$ fonksiyonu $y''(t)+\left[\lambda-q(t)\right]y(t)=0$ denkleminin çözümü olduğundan $s^2\phi(x)+\phi''(x)=q(x)\phi(x)$ eşitliğini sağladığı kullanılırsa, $\phi(t,\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}\phi(t,\lambda)&=[a_2-\lambda a_2']\cos s(t-a)-\frac{1}{s}[a_1-\lambda a_1']\sin s(t-a)\\&+\frac{1}{s}\int_a^t\{\sin s(t-x)\}q(x)\phi(x,\lambda)dx.\end{aligned}\tag{2.167}$$

Teorem 2.23: $\phi(t,\lambda)$ fonksiyonu $t\to\infty$ iken

$$\phi(t,\lambda)=a(\lambda)\cos\left(\lambda^{1/2}t\right)+b(\lambda)\sin\left(\lambda^{1/2}t\right)+o(1)\tag{2.168}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ fonksiyonları t değişkeninden bağımsız, sürekli fonksiyonlardır.

İspat:

- $s=\sigma+i\kappa$ kompleks değerli bir sayı olsun öyle ki $\kappa\geq 0$.

$\phi_1(t):=\phi(t)e^{-\kappa(t-a)}$ olarak tanımlansın. Bu durumda (2.167) eşitliğiyle

$$\begin{aligned}\phi_1(t)&=e^{-\kappa(t-a)}[a_2-\lambda a_2']\cos s(t-a)-e^{-\kappa(t-a)}\frac{1}{s}[a_1-\lambda a_1']\sin s(t-a)\\&+\frac{1}{s}\int_a^t e^{-\kappa(t-x)}\{\sin s(t-x)\}q(x)\phi_1(x)dx\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}|\phi_1(t)|&\leq\left|e^{-\kappa(t-a)}\right|\left|a_2-s^2a_2'\right|\left|\cos s(t-a)\right|+\left|e^{-\kappa(t-a)}\right|\frac{1}{|s|}\left|a_1-s^2a_1'\right|\left|\sin s(t-a)\right|\\&+\frac{1}{|s|}\int_a^t\left|e^{-\kappa(t-x)}\right|\left|\sin s(t-x)\right|\left|q(x)\phi_1(x)\right|dx\end{aligned}$$

ve bu eşitsizlikte $\left|\cos s(t-a)\right|\leq e^{\kappa(t-a)}$, $\left|\sin s(t-a)\right|\leq e^{\kappa(t-a)}$ olduğu kullanılırsa

$$|\phi_1(t)|\leq\left|a_2-s^2a_2'\right|+\frac{1}{|s|}\left|a_1-s^2a_1'\right|+\frac{1}{|s|}\int_a^t\left|q(x)\phi_1(x)\right|dx$$

bulunur. Son eşitsizliğe Gronwall Lemması uygulanırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\phi_1(t)\right| \le \left\{\left|a_2 - s^2 a_2'\right| + \frac{1}{|s|}\left|a_1 - s^2 a_1'\right|\right\}\exp\left(\frac{1}{|s|}\int_a^t \left|q(x)\right| dx\right). \tag{2.169}$$

$q(t)$ fonksiyonu $[a,\infty)$ üzerinde integrallenebilir olduğundan, (2.169) eşitsizliğinden $\tau \ge |s| \ge \delta > 0,\ \kappa \ge 0$ olmak üzere her t için $\phi_1(t)$ fonksiyonu sınırlıdır.

- s reel değerli pozitif bir sayı olsun.

Bu durumda (2.167) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\left|\phi(t)\right| \le \left|a_2 - s^2 a_2'\right| + \frac{1}{|s|}\left|a_1 - s^2 a_1'\right| + \frac{1}{s}\int_a^t \left|q(x)\phi(x)\right| dx$$

ve buradan Gronwall Lemmasıyla

$$\left|\phi(t)\right| \le \left\{\left|a_2 - s^2 a_2'\right| + \frac{1}{|s|}\left|a_1 - s^2 a_1'\right|\right\}\exp\left(\frac{1}{|s|}\int_a^t \left|q(x)\right| dx\right) \tag{2.170}$$

elde edilir. Böylece son eşitsizlikten $\tau \ge s \ge \delta > 0$ olmak üzere, $\phi(t)$ fonksiyonu sınırlıdır. (2.167) eşitliği aşağıdaki şekilde yazılsın:

$$\begin{aligned}\phi(t,\lambda) &= \left[a_2 - s^2 a_2'\right]\cos s(t-a) - \frac{1}{s}\left[a_1 - s^2 a_1'\right]\sin s(t-a)\\ &+ \frac{1}{s}\int_a^\infty \left\{\sin s(t-x)\right\} q(x)\phi(x,\lambda)\,dx\\ &- \frac{1}{s}\int_t^\infty \left\{\sin s(t-x)\right\} q(x)\phi(x,\lambda)\,dx.\end{aligned} \tag{2.171}$$

(2.171) eşitliğindeki son integral terimi göz önüne alınsın:

$$-\frac{1}{s}\int_t^\infty \left\{\sin s(t-x)\right\} q(x)\phi(x)\,dx \le \frac{1}{|s|}\int_t^\infty \left|q(x)\right|\left|\phi(x)\right| dx.$$

Bu eşitsizlikte (2.169) ve (2.170) sonucu elde edilen $\phi(t)$ fonksiyonunun sınırlılığı kullanılırsa, $\left|\phi(t)\right| \le \mu$ olmak üzere

$$-\frac{1}{s}\int_t^\infty \left\{\sin s(t-x)\right\} q(x)\phi(x)\,dx \le \frac{\mu}{\delta}\int_t^\infty \left|q(x)\right| dx,$$

yani

$$-\frac{1}{s}\int_t^{\infty}\{\sin s(t-x)\}q(x)\phi(x)dx = O\left(\int_t^{\infty}|q(x)|dx\right)$$

olarak elde edilir. Böylece (2.171) eşitliği ile cosinüs ve sinüs fark formülleri kullanılarak, $\phi(t)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}\phi(t,\lambda) &= \left[a_2-\lambda a_2'\right]\{\cos st\cos sa+\sin st\sin sa\}\\ &\quad -\frac{1}{s}\left[a_1-\lambda a_1'\right]\{\sin st\cos sa-\sin sa\cos st\}\\ &\quad +\frac{1}{s}\int_a^{\infty}\{\sin st\cos sx-\sin sx\cos st\}q(x)\phi(x)dx+O\left(\int_t^{\infty}|q(x)|dx\right),\end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \cos st\left\{\left[a_2-\lambda a_2'\right]\cos sa+\frac{1}{s}\left[a_1-\lambda a_1'\right]\sin sa-\frac{1}{s}\int_a^{\infty}\{\sin sx\}q(x)\phi(x)dx\right\}\\ &\quad +\sin st\left\{\left[a_2-\lambda a_2'\right]\sin sa-\frac{1}{s}\left[a_1-\lambda a_1'\right]\cos sa+\frac{1}{s}\int_a^{\infty}\{\cos sx\}q(x)\phi(x)dx\right\}\\ &\quad +O\left(\int_t^{\infty}|q(x)|dx\right).\end{aligned}$$

$t\to\infty$ iken $\int_t^{\infty}|q(x)|dx\to 0$ olduğu için, son eşitlikte

$$\begin{aligned}a(\lambda) &:= \left[a_2-\lambda a_2'\right]\cos\lambda^{1/2}a+\frac{1}{\lambda^{1/2}}\left[a_1-\lambda a_1'\right]\sin\lambda^{1/2}a\\ &\quad -\frac{1}{\lambda^{1/2}}\int_a^{\infty}\{\sin\lambda^{1/2}x\}q(x)\phi(x)dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b(\lambda) &:= \left[a_2-\lambda a_2'\right]\sin\lambda^{1/2}a-\frac{1}{\lambda^{1/2}}\left[a_1-\lambda a_1'\right]\cos\lambda^{1/2}a\\ &\quad +\frac{1}{\lambda^{1/2}}\int_a^{\infty}\{\cos\lambda^{1/2}x\}q(x)\phi(x)dx\end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa, $\phi(t,\lambda)$ fonksiyonu

$$\phi(t,\lambda)=a(\lambda)\cos\lambda^{1/2}t+b(\lambda)\sin\lambda^{1/2}t+o(1) \tag{2.172}$$

şeklinde ifade edilmiş olur. $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ fonksiyonlarındaki integraller mutlak yakınsak olduğundan, bu fonksiyonlar λ parametresinin sürekli fonksiyonlarıdır. ■

Aşağıda ele alınan (2.165)-(2.166) probleminin reel değerli çözüm formu elde edilecektir:

Öncelikle, $y(t,\lambda)$ (2.165) denkleminin sıfırdan farklı kompleks değerli çözümü olsun. Daha önce (2.2)-(2.3) eşitliklerinde verildiği üzere (2.165) denkleminin reel çözümleri $y_1(t,\lambda)$, $y_2(t,\lambda)$ ile

$$y(t,\lambda)=y_1(t,\lambda)+iy_2(t,\lambda) \tag{2.173}$$

olarak ifade edilir ve $R(t,\lambda)$, $\theta(t,\lambda)$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{y'(t,\lambda)}{y(t,\lambda)}=\frac{R'(t,\lambda)}{R(t,\lambda)}+i\theta'(t,\lambda) \tag{2.174}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca Lemma 2.1 ve Lemma 2.2' e benzer olarak, eğer $R^2(t_0,\lambda)\theta'(t_0,\lambda)\neq 0$ olacak şekilde bir $t_0\in[a,\infty)$ mevcutsa, $y_1(t,\lambda)$ ile $y_2(t,\lambda)$ lineer bağımsızdır ve $z(t,\lambda)$, (2.165) denkleminin reel değerli bir çözümü olmak üzere

$$z(t,\lambda)=p(t,\lambda)\cos\Psi(t,\lambda)$$

olarak bulunur. Burada $\dfrac{p'(t,\lambda)}{p(t,\lambda)}=\dfrac{R'(t,\lambda)}{R(t,\lambda)}$ ve $\Psi'(t,\lambda)=\theta'(t,\lambda)$, $t\in[a,\infty)$.

$S(t,\lambda)$ ve $T(t,\lambda)$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$S(t,\lambda):=\operatorname{Re}\left[\frac{y'(t,\lambda)}{y(t,\lambda)}\right], \tag{2.175}$$

$$T(t,\lambda):=\operatorname{\dot{I}m}\left[\frac{y'(t,\lambda)}{y(t,\lambda)}\right]. \tag{2.176}$$

Eğer $T(t_0,\lambda)\neq 0$ olacak şekilde t_0 mevcutsa $S(t,\lambda)$ ve $T(t,\lambda)$ lineer bağımsızdır. Ayrıca (2.165) denkleminin reel değerli çözümü $z(t,\lambda)=p(t,\lambda)\cos\Psi(t,\lambda)$ formunda ifade edilebildiğinden, (2.174) ve (2.175) eşitliklerinden

$$\frac{p'(t,\lambda)}{p(t,\lambda)}=\frac{R'(t,\lambda)}{R(t,\lambda)}=S(t,\lambda).$$

Bu durumda

$$\int_a^t \frac{p'(x,\lambda)}{p(x,\lambda)}dx = \int_a^t S(x,\lambda)dx$$

olduğundan

$$p(t,\lambda) = c_1 \exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right) \tag{2.177}$$

olarak bulunur. Ayrıca (2.174) ve (2.176) eşitliklerinden

$$\Psi'(t,\lambda) = \theta'(t,\lambda) = T(t,\lambda)$$

olduğundan

$$\Psi(t,\lambda) = \int_a^t T(x,\lambda)dx + c_2 \tag{2.178}$$

olarak hesaplanır. Bu durumda (2.177) ve (2.178) eşitlikleri ile (2.165) denkleminin reel değerli çözümü $z(t,\lambda)$ aşağıdaki formda ifade edilmiş olur:

$$z(t,\lambda) = c_1 \exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)\cos\left\{c_2 + \int_a^t T(x,\lambda)dx\right\}. \tag{2.179}$$

Böylece

$$\begin{aligned} z'(t,\lambda) &= c_1 S(t,\lambda)\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)\cos\left\{c_2 + \int_a^t T(x,\lambda)dx\right\} \\ &\quad - c_1 \exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)\sin\left\{c_2 + \int_a^t T(x,\lambda)dx\right\}T(t,\lambda). \end{aligned} \tag{2.180}$$

Bu durumda

$$z(a,\lambda) = c_1 \cos\{c_2\} \tag{2.181}$$

ve

$$z'(a,\lambda) = c_1 S(a,\lambda)\cos\{c_2\} - c_1 \sin\{c_2\}T(a,\lambda). \tag{2.182}$$

Özel olarak, $z \equiv \phi$ durumu göz önüne alınsın. $\phi(t,\lambda)$, $\phi(a) = a_2 - \lambda a_2'$ ve $\phi'(a) = \lambda a_1' - a_1$ başlangıç değer koşullarını sağlıyordu. O halde $a_2 \neq 0$ ve/veya $a_2' \neq 0$ ise (2.181) ve (2.182) eşitliklerinden

$$c_1 \cos\{c_2\} = a_2 - \lambda a_2', \tag{2.183}$$

$$c_1 S(a,\lambda)\cos\{c_2\} - c_1 \sin\{c_2\} T(a,\lambda) = \lambda a_1' - a_1. \tag{2.184}$$

(2.183) eşitliğinden elde edilen $c_1 = \dfrac{[a_2 - \lambda a_2']}{\cos\{c_2\}}$ değeri (2.184) eşitliğinde yerine koyulursa:

$$\frac{[a_2 - \lambda a_2']}{\cos\{c_2\}} S(a,\lambda)\cos\{c_2\} - \frac{[a_2 - \lambda a_2']}{\cos\{c_2\}} \sin\{c_2\} T(a,\lambda) = \lambda a_1' - a_1,$$

yani

$$[a_2 - \lambda a_2'] \tan\{c_2\} T(a,\lambda) = [a_2 - \lambda a_2'] S(a,\lambda) + [a_1 - \lambda a_1']$$

olduğundan

$$c_2 = \arctan\left(\frac{1}{T(a,\lambda)} \left\{ S(a,\lambda) + \frac{[a_1 - \lambda a_1']}{[a_2 - \lambda a_2']} \right\} \right) \tag{2.185}$$

olarak elde edilir.

Eğer $a_2 = 0$ ve $a_2' = 0$ ise (2.183) eşitliğinden

$$c_2 = \frac{\pi}{2} \tag{2.186}$$

ve

$$c_1 = \frac{[a_1 - \lambda a_1']}{T(a,\lambda)} \tag{2.187}$$

olarak hesaplanır.

Aşağıda Lemma 2.5, Harris' in [20] çalışmasında kullandığı yönteme benzer şekilde ispatlanacaktır:

Lemma 2.5: $\tau(.,\lambda)\in L[a,\infty)$ olmak üzere $T(t,\lambda)=\lambda^{1/2}+\tau(t,\lambda)$ ve $S(.,\lambda)\in L[a,\infty)$ ise

$$a^2(\lambda)+b^2(\lambda)=c_1^2\exp\left(2\int_a^\infty S(x,\lambda)dx\right).$$

İspat: (2.179) eşitliğinden

$$\phi(t,\lambda)=c_1\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)\cos\left\{c_2+\lambda^{1/2}(t-a)+\int_a^t \tau(x,\lambda)dx\right\}. \tag{2.188}$$

Öncelikle $\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)$ terimi göz önüne alınsın:

$$\begin{aligned}\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)&=\exp\left(\int_a^\infty S(x,\lambda)dx-\int_t^\infty S(x,\lambda)dx\right)\\&=\exp\left(\int_a^\infty S(x,\lambda)dx\right)-\exp\left(\int_a^\infty S(x,\lambda)dx\right)\\&+\exp\left(\int_a^\infty S(x,\lambda)dx-\int_t^\infty S(x,\lambda)dx\right)\\&=\exp\left(\int_a^\infty S(x,\lambda)dx\right)\left\{-1+\exp\left(-\int_t^\infty S(x,\lambda)dx\right)\right\}\\&+\exp\left(\int_a^\infty S(x,\lambda)dx\right),\end{aligned}$$

yani $\Phi_1(t,\lambda):=\exp\left(\int_a^\infty S(x,\lambda)dx\right)\left\{-1+\exp\left(-\int_t^\infty S(x,\lambda)dx\right)\right\}$ olmak üzere

$$\exp\left(\int_a^t S(x,\lambda)dx\right)=\exp\left(\int_a^\infty S(x,\lambda)dx\right)+\Phi_1(t,\lambda). \tag{2.189}$$

Dikkat edilirse $t\to\infty$ iken $\Phi_1(t,\lambda)\to 0$ ' dır. Şimdi de $\int_a^t \tau(x,\lambda)dx$ integrali ele alınsın:

$$\int_a^t \tau(x,\lambda)dx=\int_a^\infty \tau(x,\lambda)dx-\int_t^\infty \tau(x,\lambda)dx,$$

yani $\Phi_2(t,\lambda):=-\int_t^\infty \tau(x,\lambda)dx$ olmak üzere

$$\int_a^t \tau(x,\lambda)dx = \int_a^\infty \tau(x,\lambda)dx + \Phi_2(t,\lambda) \qquad (2.190)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $t \to \infty$ iken $\Phi_2(t,\lambda) \to \infty$ ' dır. (2.189) ve (2.190) eşitlikleriyle verilen formlar, (2.188) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\phi(t,\lambda) = c_1 \left\{ \exp\left(\int_a^\infty S(x,\lambda)dx \right) + \Phi_1(t,\lambda) \right\}$$
$$\times \cos\left\{ c_2 + \lambda^{1/2}(t-a) + \int_a^\infty \tau(x,\lambda)dx + \Phi_2(t,\lambda) \right\}$$

olduğundan

$$\phi(t,\lambda) = c_1 \exp\left(\int_a^\infty S(x,\lambda)dx \right) \cos\left\{ c_2 + \lambda^{1/2}(t-a) + \int_a^\infty \tau(x,\lambda)dx \right\} + o(1).$$

Son eşitlikte cosinüs toplam formülü uygulanırsa:

$$\phi(t,\lambda) = c_1 \exp\left(\int_a^\infty S(x,\lambda)dx \right) \cos\left\{ c_2 - \lambda^{1/2}a + \int_a^\infty \tau(x,\lambda)dx \right\} \cos\lambda^{1/2}t$$
$$- c_1 \exp\left(\int_a^\infty S(x,\lambda)dx \right) \sin\left\{ c_2 - \lambda^{1/2}a + \int_a^\infty \tau(x,\lambda)dx \right\} \sin\lambda^{1/2}t + o(1)$$

olarak ifade edilir. $\phi(t,\lambda)$ fonksiyonunun bu formundan, daha önce (2.172) ile verilen $\phi(t) = a(\lambda)\cos\lambda^{1/2}t + b(\lambda)\sin\lambda^{1/2}t + o(1)$ göz önünde bulundurulduğunda

$$a(\lambda) = c_1 \exp\left(\int_a^\infty S(x,\lambda)dx \right) \cos\left\{ c_2 - \lambda^{1/2}a + \int_a^\infty \tau(x,\lambda)dx \right\}$$

ve

$$b(\lambda) = -c_1 \exp\left(\int_a^\infty S(x,\lambda)dx \right) \sin\left\{ c_2 - \lambda^{1/2}a + \int_a^\infty \tau(x,\lambda)dx \right\}$$

olarak elde edilir. Bu durumda $a^2(\lambda) + b^2(\lambda) = c_1^2 \exp\left(2\int_a^\infty S(x,\lambda)dx \right)$ olarak hesaplanır. ■

Aşağıda (2.175) ve (2.176) ile tanımlanan $S(t,\lambda)$ ve $T(t,\lambda)$ fonksiyonları belirlenecektir:

Daha önce (2.6) ile verildiği üzere $v(t,\lambda) = \dfrac{y'(t,\lambda)}{y(t,\lambda)}$ dönüşümü (2.165) denklemini

$$v'(t,\lambda) = -\lambda + q(t) - v^2(t,\lambda) \tag{2.191}$$

Riccati denklemine indirger. Bu durumda $S(t,\lambda) = \mathrm{Re}\{v(t,\lambda)\}$, $T(t,\lambda) = \mathrm{\dot{I}m}\{v(t,\lambda)\}$ olarak elde edilir. Ayrıca (2.191) denklemi için, $\lim\limits_{t\to\infty} v_n(t,\lambda) = 0$, $n \geq 1$ olmak üzere (2.13) ile verilen

$$v(t,\lambda) = i\lambda^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda) \tag{2.192}$$

şeklinde çözüm aranırsa

$$v_1'(t,\lambda) + 2i\lambda^{1/2} v_1(t,\lambda) = q(t),$$
$$v_n'(t,\lambda) + 2i\lambda^{1/2} v_n(t,\lambda) = -v_{n-1}^2(t,\lambda) - 2v_n(t,\lambda)\sum_{k=1}^{n-1} v_k(t,\lambda), \quad n \geq 2$$

denklemlerinin seçimiyle

$$\begin{aligned} v_1(t,\lambda) &= -\int_t^{\infty} \exp\left(2i\lambda^{1/2}(x-t)\right) q(x)\,dx, \\ v_n(t,\lambda) &= \int_t^{\infty} \exp\left(2i\lambda^{1/2}(x-t) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\int_t^{x} v_k(s,\lambda)\,ds\right) v_{n-1}^2(x,\lambda)\,dx, \quad n \geq 2 \end{aligned} \tag{2.193}$$

olarak yazılabilir.

Ayrıca (2.11) eşitsizliğine benzer olarak, aşağıdaki varsayımlar kabul edilsin:

$$\left|\int_t^{\infty} \exp\left(2i\lambda^{1/2} x\right) q(x)\,dx\right| \leq a(t)\eta(\lambda), \quad \lambda \geq \lambda_0, \quad a \leq t < \infty \tag{2.194}$$

eşitsizliğini sağlayan $a(t)$ ve $\eta(\lambda)$ fonksiyonları mevcut olsun öyle ki

i) $a(t)$ azalan fonksiyon,

ii) $a(.) \in L[a,\infty)$,

iii) $\lambda \to \infty$ iken $\eta(\lambda) \to 0$.

Lemma 2.6: [20]: $\lambda_0 > 0$ olmak üzere, her $\lambda \geq \lambda_0$ ve $t \geq a$ için

$$|v_n(t,\lambda)| \leq \frac{\eta(\lambda)a(t)}{2^{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

İspat: Lemmayı ispatlamak için tümevarım yöntemi uygulanacaktır.

$n=1$ için (2.193) eşitliğinden iddianın doğruluğu elde edilir.

Farzedilsin ki $n=2,3,...,N$ için iddia doğru olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{2i\lambda^{1/2}(x-t)+2\sum_{k=1}^{N}\int_t^x v_k(s,\lambda)ds\right\} &\le 2\sum_{k=1}^{N}\int_t^x |v_k(s,\lambda)|ds \\ &\le 2\sum_{k=1}^{N}\frac{\eta(\lambda)}{2^{k-1}}\int_a^\infty a(s)ds \\ &\le 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\eta(\lambda)\int_a^\infty a(s)ds \\ &= 4\eta(\lambda)\int_a^\infty a(s)ds := A.\end{aligned} \tag{2.195}$$

Böylece (2.193), (2.195), hipotezin şartları ve $a(t)$ fonksiyonu üzerindeki kabullerden

$$\begin{aligned}|v_{N+1}(t,\lambda)| &\le \int_t^\infty \left|\exp\left(2i\lambda^{1/2}(x-t)\right)\exp\left(2\sum_{k=1}^{n}\int_t^x v_k(s,\lambda)ds\right)\right| v_N^2(x,\lambda)dx \\ &\le \int_t^\infty e^A\frac{a^2(x)\eta^2(\lambda)}{2^{2N-2}}dx \le e^A\frac{a(t)\eta^2(\lambda)}{2^{2N-2}}\int_t^\infty a(x)dx \\ &\le \frac{a(t)\eta(\lambda)}{2^N}\left\{\frac{\eta(\lambda)e^A}{2^{N-2}}\int_a^\infty a(x)dx\right\} \\ &\le \frac{a(t)\eta(\lambda)}{2^N}\left\{\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n\eta(\lambda)e^A\int_a^\infty a(x)dx\right\}.\end{aligned}$$

Son eşitsizlikte, λ_0 yeterince büyük seçilsin öyle ki $\lambda\ge\lambda_0$ için

$$2e^A\eta(\lambda)\int_a^\infty a(x)dx<1$$

olsun. Bu durumda $|v_{N+1}(t,\lambda)|\le\dfrac{|a(t)\eta(\lambda)|}{2^N}$ olarak elde edilir. ■

Böylelikle Lemma 2.6' dan $v(t,\lambda) = i\lambda^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda)$ sürekli fonksiyonların oluşturduğu düzgün yakınsak serisidir, yani $\lambda \geq \lambda_0$ ve $a \leq t$ için $v(t,\lambda)$ var ve süreklidir. Üstelik, $n \geq 2$ için

$$v_n'(t,\lambda) + \left\{2i\lambda^{1/2} + 2\sum_{k=1}^{n-1} v_k(t,\lambda)\right\} v_n(t,\lambda) = -v_{n-1}^2(t,\lambda)$$

olduğundan, λ_0 yeterince büyük seçilmek üzere, $\lambda \geq \lambda_0$ için Lemma 2.6 ile

$$\begin{aligned}
\left|v_n'(t,\lambda)\right| &\leq \left|v_{n-1}(t,\lambda)\right|^2 + \left\{2|\lambda|^{1/2} + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left|v_k(t,\lambda)\right|\right\}\left|v_n(t,\lambda)\right| \\
&\leq \frac{\eta^2(\lambda)a^2(t)}{2^{2n-4}} + \left\{2|\lambda|^{1/2} + 2\eta(\lambda)a(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}\right\}\frac{\eta(\lambda)a(t)}{2^{n-1}} \\
&= \frac{\eta(\lambda)a(t)}{2^{n-1}}\left\{\frac{\eta(\lambda)a(t)}{2^{n-3}} + 2|\lambda|^{1/2} + 4\eta(\lambda)a(t)\right\} \leq \frac{3|\lambda|^{1/2}\eta(\lambda)a(t)}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

sağlandığından $v(t,\lambda)$ mutlak süreklidir ve (2.191) denkleminin bir çözümünü temsil etmektedir. Bu durumda

$$S(t,\lambda) = \operatorname{Re}\{v(t,\lambda)\} = \operatorname{Re}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda)\right\} \tag{2.196}$$

ve

$$T(t,\lambda) = \dot{I}m\{v(t,\lambda)\} = \lambda^{1/2} + \dot{I}m\left\{\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t,\lambda)\right\} \tag{2.197}$$

olarak elde edilir. Böylece $T(t,\lambda)$ fonksiyonunun bu değerinden $\theta'(t_0,\lambda) = T(t_0,\lambda) \neq 0$ olacak şekilde $t_0 \in [a,\infty)$ mevcuttur.

Aşağıda verilen teori sonucunda (2.165)-(2.166) probleminin spektral fonksiyonunun türevi elde edilecektir. Bunun için öncelikle Teorem 2.24 göz önüne alınsın:

Teorem 2.24: [11]: (2.165) denkleminin bir çözümü $\phi(t,\lambda)$ olmak üzere,

$$\phi(t,\lambda) = a(\lambda)\cos\lambda^{1/2}t + b(\lambda)\sin\lambda^{1/2}t + o(1)$$

ise spektral fonksiyonun türevi için

$$\rho'(\lambda) = \pi^{-1}\lambda^{-1/2}\left\{a^2(\lambda) + b^2(\lambda)\right\}^{-1}$$

eşitliği mevcuttur. Burada $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$, λ parametresinin sürekli fonksiyonlarıdır.

Teorem 2.25: Varsayılsın ki

$$\left|\int_t^\infty \exp\left(2i\lambda^{1/2}x\right)q(x)dx\right| \le a(t)\eta(\lambda), \quad \lambda \ge \lambda_0, \quad a \le t < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan $a(t)$ ve $\eta(\lambda)$ fonksiyonları mevcut olsun öyle ki

i) $a(t)$ azalan fonksiyon,

ii) $a(.) \in L[a,\infty)$,

iii) $\lambda \to \infty$ iken $\eta(\lambda) \to 0$.

Bu durumda (2.165)-(2.166) probleminin spektral fonksiyonun türevi aşağıdaki şekildedir:

- $a_2 \ne 0$ ve/veya $a_2' \ne 0$ ise

$$\rho'(\lambda) = \frac{\pi^{-1}\lambda^{-1/2}T^2(a,\lambda)\exp\left(-2\int_a^\infty S(x,\lambda)dx\right)}{\left\{S(a,\lambda) - \frac{[a_1 - \lambda a_1']}{[\lambda a_2' - a_2]}\right\}^2 + T^2(a,\lambda)}.$$

- $a_2 = 0$ ve $a_2' = 0$ ise

$$\rho'(\lambda) = \frac{\pi^{-1}\lambda^{-1/2}T^2(a,\lambda)\exp\left(-2\int_a^\infty S(x,\lambda)dx\right)}{[a_1 - \lambda a_1']^2}.$$

İspat: Lemma 2.5' te elde edilen $a^2(\lambda) + b^2(\lambda) = c_1^2 \exp\left(2\int_a^\infty S(x,\lambda)dx\right)$ değeri, Teorem 2.24' te kullanılırsa

$$\rho'(\lambda) = \pi^{-1}\lambda^{-1/2}c_1^{-2}\exp\left(-2\int_a^\infty S(x,\lambda)dx\right) \tag{2.198}$$

olarak ifade edilir.

- $a_2 \ne 0$ ve/veya $a_2' \ne 0$ ise

Daha önce (2.185) eşitliğiyle $c_2 = \arctan\left(\frac{1}{T(a,\lambda)}\left\{S(a,\lambda) + \frac{[a_1 - \lambda a_1']}{[a_2 - \lambda a_2']}\right\}\right)$ olarak bulunmuştu. O halde

$$\frac{\sin^2 c_2}{\cos^2 c_2}=\frac{1}{T^2(a,\lambda)}\left\{S(a,\lambda)+\frac{[a_1-\lambda a_1']}{[a_2-\lambda a_2']}\right\}^2,$$

yani

$$\frac{1-\cos^2 c_2}{\cos^2 c_2}=\frac{1}{T^2(a,\lambda)}\left\{S(a,\lambda)+\frac{[a_1-\lambda a_1']}{[a_2-\lambda a_2']}\right\}^2$$

olduğundan

$$\frac{1}{\cos^2 c_2}=\frac{\left\{S(a,\lambda)+\frac{[a_1-\lambda a_1']}{[a_2-\lambda a_2']}\right\}^2+T^2(a,\lambda)}{T^2(a,\lambda)}.$$

Bu durumda $c_1=\frac{[a_2-\lambda a_2']}{\cos\{c_2\}}$ olduğundan, son eşitlikle

$$c_1^{-2}=\frac{T^2(a,\lambda)}{[a_2-\lambda a_2']^2\left[\left\{S(a,\lambda)+\frac{[a_1-\lambda a_1']}{[a_2-\lambda a_2']}\right\}^2+T^2(a,\lambda)\right]}.$$

Bu değer (2.198) eşitliğinde yerine yazılırsa, spektral fonksiyonun türevi istenilen şekilde elde edilir.

- $a_2=0$ ve $a_2'=0$ ise

Daha önce (2.187) eşitliğiyle $c_1=\frac{[a_1-\lambda a_1']}{T(a,\lambda)}$ olarak hesaplanmıştı. O halde $c_1^{-2}=\frac{T^2(a,\lambda)}{[a_1-\lambda a_1']^2}$ dir. Bu değer (2.198) eşitliğinde yerine yazılırsa, spektral fonksiyonun türevi istenilen şekilde bulunmuş olur. ■

3. SONUÇLAR

1) Potansiyel fonksiyonu integrallenebilir iken bir sınır değer koşulunda özdeğer parametresi bulunduran Sturm-Liouville problemleri göz önüne alınıp, problemin özdeğerleri için asimptotik tahminler hesaplanmıştır. Literatürde bu tür çalışmalar yaygın olup, bunların en önemlilerinden biri Fulton' un [14] çalışmasıdır. Fulton bu çalışmasında potansiyel fonksiyonunun sürekli olması durumunu ele almıştır. Sonuçlar karşılaştırıldığında potansiyel fonksiyonu üzerinde daha az varsayımlarla tezde elde edilen sonuçların, [14] çalışmasındaki sonuçlardan daha etkili olduğu (geliştirilmiş asimptotik tahminlerin elde edildiği) gözlenmiştir. Elde edilen sonuçların bir kısmı Mathematica Scandinavica [8] dergisinde yayınlanmıştır.

2) Potansiyel fonksiyonu integrallenebilir iken özellikle sampling (örnekleme) teoride önemli bir yere sahip olan iki sınır değer koşulunda da özdeğer parametresini bulunduran Sturm-Liouville probleminin yaklaşık özdeğerleri hesaplanmıştır. Literatürdeki bu problemin ele alındığı çalışmalardan biri de [2]' dir. Bu çalışmada potansiyel fonksiyonu sürekli iken problemin özdeğerleri, özfonksiyonları ve Green fonksiyonları incelenmiştir. Bu tez çalışmasında potansiyel fonksiyonu üzerindeki daha az varsayımlarla problemin özdeğerleri için hesaplanan asimptotik tahminler, [2] çalışmasının bir kısmını oluşturan özdeğerler için asimptotik tahminlerden daha geliştirilmiştir.

3) Potansiyel fonksiyonu integrallenebilir iken ele alınan bir sınır değer koşulunda özdeğer parametresi bulunduran Sturm-Liouville problemleri, potansiyel fonksiyonu türevlenebilir iken göz önüne alınıp, yöntem türevlenebilir potansiyel fonksiyonu için yeniden uygulanmıştır. Hesaplanan asimptotik özdeğer tahminleri, [7] çalışmasında bulunan sonuçlarla uyumludur.

4) Potansiyel fonksiyonu türevlenebilir iken iki sınır değer koşulunda da özdeğer parametresini bulunduran Sturm-Liouville problemi için asimptotik özdeğerler hesaplanmıştır.

5) Son olarak ise spektral fonksiyonun türevine yer verilmiştir. Harris tarafından 1997 yılında [20] çalışmasında bir ucu sonsuz olan aralıkta, sınır değerinde özdeğer parametresi içerilmeyen integrallenebilir potansiyel fonksiyonlu Sturm-Liouville probleminin spektral fonksiyonunun türevi bulunmuş iken; bu tez çalışmasında bir ucu sonsuz olan aralıkta, sınır değerinde özdeğer parametresi bulunduran integrallenebilir potansiyel fonksiyonlu Sturm-Liouville problemi için de spektral fonksiyonun türevi elde edilebilmiştir.

4. ÖNERİLER

1) Ele alınan problemlerin özfonksiyonları için yaklaşık asimptotik tahminleri hesaplanabilir.
2) Hesaplanan yaklaşık özdeğer ve özfonksiyon tahminleriyle problemlerin Green fonksiyonları bulunabilir.
3) Sınır koşullarının λ^n, $n \in \mathbb{Q}$ özdeğerine bağlı olduğu durumlar için potansiyel fonksiyonu integrallenebilir ve türevlenebilir iken yöntemin uygulanıp, genel bir sonucun elde edilip-edilemeyeceğine bakılabilir.
4) Potansiyel fonksiyonunun mutlak sürekli, simetrik tek kuyu potansiyeli olması gibi durumlar için ele alınan problemler ayrıca incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

1. Andrews, L. C., Elementary Partial Differential Equations with Boundary Value Prob lems, Academic Press Inc., London, 1986.

2. Annaby, M. H. ve Tharwat, M. M., On Sampling Theory and Eigenvalue Problems with an Eigenparameter in the Boundary Conditions, Science University of Tokyo Journal of Mathematics, 42, 2 (2006) 157-176.

3. Coddington, E. A. ve Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.

4. Code, W. J., Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter-Dependent Boundary Conditions, Doktora Tezi, College of Graduate Studies and Research University of Saskatchewan, Saskatoon, 2003.

5. Coşkun, H. ve Harris, B. J., Estimates for the Periodic and Semi-Periodic Eigenvalues of Hill' s Equation, Proceedings of Royal Society Edinburgh Section A, 130 (2000) 991-998.

6. Coşkun, H., On the Spectrum of a Second Order Periodic Differential Equation, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 33, 4 (2003) 1261-1277.

7. Coşkun, H. ve Bayram, N., Asymptotics of Eigenvalues for Regular Sturm-Liouville Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 306 (2005) 548-566.

8. Coşkun, H. ve Başkaya, E., Asymptotics of Eigenvalues of Regular Sturm-Liouville Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition for Integrable Potential, Mathematica Scandinavica, 107 (2010), 209-223.

9. Eastham, M. S. P., The Spectral Theory of Periodic Differential Equations, Scottish Academic Press, Edinburgh and London, 1973.

10. Eastham, M. S. P. ve Kalf, H., Schrödinger type operators with continuous spectra. Research Notes in Mathematics, Pitman, London, 1982.

11. Eastham, M. S. P., The Asymptotic Nature of Spectral Functions in Sturm-Liouville Problems with Continuous Spectrum, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 213 (1997) 573-582.

12. Everitt, W. N., On the Transformation Theory of Ordinary Second-Order Linear Symmetric Differential Expressions, Czechoslovak Mathematical Journal, 37, 107 (1982) 275-306.

13. Fix, G., Asymptotic Eigenvalues of Sturm-Liouville Systems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 19 (1967) 519-525.

14. Fulton, C. T., Two Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, Proceedings of Royal Society Edinburgh Section A, 77 (1977) 293-308.

15. Fulton, C. T., An Integral Equation Iterative Scheme for Asymptotic Expansions of Spectral Quantities of Regular Sturm-Liouville Problems, Journal of Integral Equations, 4 (1982) 163-172.

16. Fulton, C. T. ve Pruess, S. A., Eigenvalue and Eigenfunction Asymptotics for Regular Sturm-Liouville Problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 182 (1994) 297-340.

17. Gilbert, D. ve Pearson, D. B., On Subordinary and Analysis of the Spectrum of One Dimensional Schrödinger Operators, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 128 (1987) 30-56.

18. Harris, B. J., A Series Solution for Certain Riccati Equations with Applications to Sturm-Liouville Problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 137, 2 (1989) 462-470.

19. Harris, B. J., Asymptotics of Eigenvalues for Regular Sturm-Liouville Problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 183 (1994) 25-36.

20. Harris, B. J., The Form of the Spectral Functions Associated with Sturm-Liouville Problems with Continuous Spectrum, Mathematika, 44 (1997) 149-161.

21. Hochstadt, H., Asymptotic Estimates for the Sturm-Liouville Spectrum, Communications on Pure and Applied Mathematics, 14 (1961) 749-764.

22. Kreysig, E., Advanced Engineering Mathematics, 8th Edition, John Wiley & Sons, New York, 1999.

23. Lützen, J., Sturm and Liouville' s Work on Ordinary Linear Differential Equations, The Emergence of Sturm-Liouville Theory, Archive for History of Exact Sciences, 29, 4 (1984) 309-376.

24. Morse P. M. ve Feshbach H., Methods of Theoretical Physics I, International Student Edition, McGraw-Hill Book Company, Inc. ve Kogakusha Company, Ltd., Japan, 1953.

25. Titchmarsh, E. C., Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations I, 2nd Edition, Oxford University Press, London, 1962.

26. Walter, J., Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Mathematische Zeitschrift, 153 (1973) 301-312.

ÖZGEÇMİŞ

Elif BAŞKAYA, 1983 yılında Trabzon' da doğdu. İlköğrenimini Trabzon İskenderpaşa İlkokulu'nda, orta öğrenimini Trabzon Cumhuriyet Ortaokulu' nda, lise öğrenimini ise Trabzon Beşikdüzü Anadolu Öğretmen Lisesi' nde tamamladı.

2001-2002 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Bölümü Matematik Öğretmenliği programında lisans eğitimine başladı. 2005-2006 Eğitim-Öğretim yılının ilk dönemini Erasmus Öğrenci Değişim Programı kapsamında Danimarka-University South College' de geçirdi. 2006 yılında lisans eğitiminden matematik öğretmeni unvanıyla birincilikle mezun oldu.

2006-2007 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans (Matematik) programına başladı. TÜBİTAK Yurt İçi Yüksek Lisans Bursu almaya hak kazandı. Kasım 2007 tarihinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı' na Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2007-2008 Eğitim-Öğretim yılında "Harmonik Olmayan Salınım Probleminin Yaklaşık Özdeğer ve Özfonksiyonlarının Galerkin Yöntemiyle Hesaplanması" adlı teziyle yüksek lisansını bitirdi. 2008-2009 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora (Matematik) programına kabul edildi ve TÜBİTAK Yurt İçi Doktora Bursu almaya hak kazandı. Yabancı dili ingilizcedir.

Bu tez çalışmasının bir kısmı aşağıdaki çalışmada yayınlanmıştır:

Coşkun, H. ve Başkaya, E., Asymptotics of Eigenvalues of Regular Sturm-Liouville Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition for Integrable Potential, <u>Mathematica Scandinavica</u>, 107 (2010), 209-223.