

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**BİR TİP MODÜLER GRAF VE FİBONACCİ SAYILARI**

**DOKTORA TEZİ**

**Tuncay KÖR**

**KASIM 2012  
TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**BİR TİP MODÜLER GRAF VE FİBONACCİ SAYILARI**

**Tuncay KÖR**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde**  
**"DOKTOR (MATEMATİK)"**  
**Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 05.11.2012**  
**Tezin Savunma Tarihi : 30.11.2012**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ**

**Trabzon 2012**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Matematik Ana Bilim Dalında**

**Tuncay KÖR Tarafından Hazırlanan**

**BİR TİP MODÜLER GRAF VE FİBONACCİ SAYILARI**

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 06/11/2012 gün ve 1480/04 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 30.11.2012 tarihinde yapılan sınavda**

**DOKTORA TEZİ**

**olarak kabul edilmiştir.**

**Jüri Üyeleri**

**Başkan : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ .....**

**Üye : Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ .....**

**Üye : Prof. Dr. Ekrem YANMAZ .....**

**Üye :Prof.Dr. Ekrem KADIOĞLU .....**

**Üye :Prof.Dr. Zameddin İSMAİLOV .....**

**Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ**

**Enstitü Müdürü**

## ÖNSÖZ

Bu çalışma,  $\Gamma$  Modüler grubunun alt gruplarından  $\Gamma^3$  grubunun genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki hareketinden doğan alt yörüngesel graflarından  $F_{1,1}^3$  grafinin bağlantısızlığını göstermek ve buradan elde edilecek sonuçları sunmak amacı ile Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora tez çalışması olarak yapılmıştır.

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanmasına kadar olan süreçte emeğiyle, öneri ve yönlendirmeleriyle önemli katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ' a en içten dileklerle saygı ve şükranlarımı sunuyorum.

Aynı zamanda bu tez aşamasında değerli görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan tez izleme jüri üyesi hocalarım, Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ, Prof. Dr. Ekrem YANMAZ' a teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tezi tamamlama sürecinde verdikleri destekten dolayı oda arkadaşlarım Hüsnü Anıl ÇOBAN ve Ümit ERTUĞRUL'a teşekkür ederim. Ayrıca tezin yazımında verdikleri destekten dolayı Bahadır GÜLER, Ali Hikmet DEĞER, Murat BEŞENK ve Süleyman ŞENGÜL'e teşekkür ederim.

Yine öğrenim sürecinde katkı sağlayan matematik bölümündeki tüm değerli öğretim üyelerine ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve doktoramı tamamlamam ve dahası için bana verdiği büyük destekleriyle sevgili eşime çok teşekkür ederim.

Tuncay KÖR  
Trabzon 2012

## **TEZ BEYANNAMESİ**

Doktora Tezi olarak sunduğum “BİR TİP MODÜLER GRAF VE FİBONACCİ SAYILARI” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ’ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 30/11/2012

Tuncay KÖR

## İÇİNDEKİLER

	<b><u>Sayfa No</u></b>
ÖNSÖZ .....	III
TEZ BEYANNAMESİ .....	IV
İÇİNDEKİLER .....	V
ÖZET .....	VII
SUMMARY .....	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	IX
SEMBOLLER DİZİNİ.....	X
1. GENEL BİLGİLER .....	1
1.1. Giriş .....	1
1.2. Topolojik Gruplar .....	2
1.3. Öklid Olmayan Kristalize Gruplar.....	5
1.4. Modüler Grup .....	9
1.5. $\Gamma$ nin $\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cup \infty$ Üzerindeki Hareketi .....	11
1.6. Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları .....	12
1.7. İmpirimitif Hareket.....	14
1.8. Hiperbolik Geometri .....	15
1.8.1. Klein-Beltrami Modeli.....	19
1.8.2. Poincare Disk Modeli: .....	20
1.8.3. Poincare Yarı-Düzlem Modeli.....	21
1.9. Graf Teori .....	22
1.10. Alt Yörüngesel Graflar .....	24
1.11. Farey Grafi.....	26
1.12. Fibonacci Sayıları .....	27
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	29
2.1 $\Gamma^3$ Modüler Alt Grubu .....	29
2.2. $F_{u,n}^3$ Alt Grafi .....	33
2.3. $F^3$ Grafının Bağlantısızlığı .....	35
3. İRDELEME .....	59

4.	SONUÇLAR.....	60
5.	ÖNERİLER.....	61
6.	KAYNAKLAR.....	62

ÖZGEÇMİŞ

Doktora Tezi

ÖZET

BİR TİP MODÜLER GRAF VE FİBONACCİ SAYILARI

Tuncay KÖR

Karadeniz Teknik Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
Danışman: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ  
2012, 63 Sayfa

Bu tezde  $\Gamma$  Modüler grubunun alt gruplarından olan  $\Gamma^3$  grubunun  $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki alt yörüngesel graflarından  $F_{1,1}^3$  grafinin bağlantısız olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmada  $\Gamma^3$  grubunun  $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  üzerindeki hareketinden elde edilen alt yörüngesel graflar çalışıldı. Bu graflar, köşe kümesi  $\hat{\mathbb{Q}}$  ve kenar kümesi  $\Gamma^3$  ün  $\hat{\mathbb{Q}}^2$  kartezyen çarpımı üzerindeki yörüngelerinden meydana gelen  $\Gamma^3$  invariant yönlü graflardır.  $v = \frac{r}{s}$  ve  $w = \frac{x}{y}$ ,  $\hat{\mathbb{Q}}$  nin elemanları olmak üzere  $\hat{\mathbb{Q}}$  üzerinde trivyal olmayan bir denklik bağıntısını  $v \approx w$  olacak şekilde tanımladık. Bu “ $\approx$ ” bağıntısı  $\Gamma^3$  invariant bir denklik bağıntısıdır ve bunun sonucu olarak  $\Gamma^3$ ,  $\hat{\mathbb{Q}}$  üzerinde imprimitif olarak hareket eder. Bu bağıntı  $\hat{\mathbb{Q}}$ 'yı bloklara ayırır. Hareket transitif olduğundan tüm alt graflar izomorfturlar.  $F_{1,1}^3$  ile köşeleri  $[\infty]$  bloğunda olan alt grafi gösterdik.

Birinci bölümde konu ile ilgili genel bilgiler ve literatürdeki bazı önemli tanım, teorem ve sonuçlar verilmiştir.

İkinci bölümde  $F_{1,1}^3$  grafinin bağlantısızlığının yanı sıra her  $m$  tam sayısı için  $(9m^2 - 4)a^2 + 4$  ve  $5b^2 \pm 4$  sayılarını tam kare yapan  $a$  ve  $b$  tam sayıları bulunmuştur. Ayrıca burada bulunan  $b$  tam sayılarının Fibonacci sayıları ile ilişkisi ortaya konmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Modüler grup, Alt Yörüngesel Graf, Bağlantısızlık, Fibonacci Sayıları



PhD. Thesis

SUMMARY

ONE TYPE MODULAR GRAPH AND FIBONACCI NUMBERS

Tuncay KÖR

Karadeniz Technical University  
The Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Mathematics Graduate Programme  
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ  
2012, 63 Pages

In this thesis, it is showed that the suborbital graph  $F_{1,1}^3$  of  $\Gamma^3$ , a subgroup of modular group  $\Gamma$ , on extended rational numbers  $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  is disconnected.

In this study the action of  $\Gamma^3$  on  $\widehat{\mathbb{Q}}$  by using suborbital graphs was studied. These are  $\Gamma^3$  invariant directed graphs with vertex set  $\widehat{\mathbb{Q}}$  and their edge-sets being the orbits of  $\Gamma^3$  on the cartesian square  $\widehat{\mathbb{Q}}$ . We defined a non-trivial equivalence relation on  $\widehat{\mathbb{Q}}$  as if “ $v = \frac{r}{s}$  and  $w = \frac{x}{y}$  are the elements of  $\widehat{\mathbb{Q}}$  then  $v \approx w$  if and only if some conditions are satisfied”. This is  $\Gamma^3$  invariant equivalence relation and so that  $\Gamma^3$  act imprimitively on  $\widehat{\mathbb{Q}}$ . There, this relation divides  $\widehat{\mathbb{Q}}$  into blocks. Because of transitive action, all subgraphs are isomorphic. We denote the subgraph  $F_{1,1}^3$  whose vertices from the block  $[\infty]$ .

In the first chapter, some necessary definitions and notations for the foregoing chapter are given.

In second chapter, as well as disconnectedness of  $F_{1,1}^3$ , the integers  $a$  and  $b$  made  $(9m^2 - 4)a^2 + 4$  and  $5b^2 \pm 4$  squares are found for all integers  $m$ . The relation between the integers  $b$  making  $5b^2 \pm 4$  squares and Fibonacci numbers are revealed.

**Key Words:** Modular Group, Suborbital Graph, Disconnectedness, Fibonacci Numbers

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa No

Şekil 1. Üç açısı dik olan hiperbolik dörtgen .	17
Şekil 2. Üst yarı düzlem modeline göre hiperbolik doğrular.	18
Şekil 3. Klein-Beltrami Modeline göre doğrular.	19
Şekil 4. Poincare Disk Modelinde doğru.	20
Şekil 5. Poincare Disk Modelinde paralel ve kesişen doğrular.	20
Şekil 6. Poincare Yarı-Düzlem Modelinde Doğrular	21
Şekil 7. Poincare Yarı-Düzlem Modeline Göre Paralel Doğrular	21
Şekil 8. Devreler	23
Şekil 9. Farey Grafi	26
Şekil 10. Üst yarı düzlemde kesişen doğrulara bir örnek.	27
Şekil 11. Kesişen İki Kenar	35
Şekil 12. Bağlantılı graf.	36
Şekil 13. Bağlantısız graf.	36
Şekil 14. $F^3$ Grafi	40
Şekil 15. Grafın Birinci Bölümü.	45
Şekil 16. Grafın İkinci Bölümü	47
Şekil 17. $\infty \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$ yolu	47
Şekil 18. $[3,4]$ aralığındaki $F^3$ grafi.	49
Şekil 19. Grafın Üçüncü Bölümü	50
Şekil 20. Grafın Dördüncü Bölümü.	52

## SEMBOLLER DİZİNİ

$Gx$	: $x$ in $G$ yörüngesi
$S_x$	: $x$ noktasının sabitleyeni
$\Gamma$	: Modüler grup
$\Gamma^3$	: Modüler grubun elemanlarının küpleri alınarak elde edilen alt grup
$\Gamma_0(n)$	: Modüler grubun $c \equiv 0 \pmod{n}$ olan alt grubu
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{Q}}$	: Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	: Üst yarı düzlemi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\infty$	: Sonsuz
$\Gamma_\infty$	: $\infty$ un $\Gamma$ Modüler grubundaki sabitleyeni
$\Gamma_\infty^3$	: $\infty$ un $\Gamma^3$ Modüler grubundaki sabitleyeni
$PSL(2, \mathbb{R})$	: Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu
$SL(2, \mathbb{Z})$	: Katsayıları tam sayı olan lineer matrislerin grubu
$[\alpha]$	: Alfa bloğu
$\mathbf{F}_m$	: Farey dizisi
$O(\alpha, \beta)$	: $(\alpha, \beta)$ nın yörüngesi
$\gamma \rightarrow \delta$	: $\gamma$ dan $\delta$ ya (yönlendirilmiş) bir kenar
$f_n$	: $n$ . Fibonacci sayısı
$\approx$	: G-invaryant denklik bağıntısı
$(G, X)$	: Topolojik dönüşüm grubu

# 1. GENEL BİLGİLER

## 1.1. Giriş

Bin sekizyüzlü yılların sonlarında ayırık gruplar teorisine temel teşkil edebilecek bazı önemli sonuçlar ilk defa Henry Poincare tarafından elde edilmiş ve eliptik fonksiyonlar teorisinin genelleştirilmesi için kullanılmıştır. Fuchsian grupları adı verilen ve sistematik çalışmasını Henry Poincare'nin geliştirdiği bu ayırık grupların invariant bıraktığı fonksiyonlar üzerinde birçok bilim adamı çalışmalar yapmıştır.

Lineer kesirli dönüşümler grubu özellikle 19. yüzyılda Öklid olmayan geometriler ve invariant teorisinin keşfiyle birlikte büyük önem kazanmış, topolojik grup yapısına uygun olması nedeniyle gerek analiz gerekse cebirsel yöntemlerle derinlemesine incelenmiştir.

Eliptik eğrilerin aritmetiği, sayılar teorisi, integral kuadratik formlar ve eliptik modüler fonksiyonlar teorilerindeki önemi nedeniyle en çok  $\Gamma$  modüler grubunun kongrüans alt grupları olan  $\Gamma(n)$ ,  $\Gamma_0(n)$ ,  $\Gamma^0(n)$ ,  $\Gamma_1(n)$  grupları üzerinde çalışılmıştır.

Özellikle son yıllarda, sayılar teorisinde  $\Gamma$  modüler grubunun kongrüans alt grupları kullanılmaya başlandı. Örneğin Pierre De Fermat'ın 1637 yılında ifade ettiği son teoreminin ispatında  $\Gamma$  modüler grubu ve kongrüans alt gruplarının oldukça önemli bir yer teşkil ettiği görülmektedir.

Charles C. Sims tarafından 1967 yılında yayınlanan "Graphs and Finite Permutation Groups" adlı makalede ve Gareth A. Jones, David Singerman ve K. Wicks' in 1991 yılında yayınlanan "The Modular Group and Generalized Farey Graphs" adlı çalışmalarında altyörüngesel graflar ve bu graflardaki devre uzunlukları incelenmiştir.

M. Akbaş'ın 2001 yılındaki "On Suborbital Graphs For The Modular Group" adlı çalışmasında devre uzunlukları ile ayırık grupların üretici eliptik elemanlarının mertebeleri arasındaki ilişki ortaya konmuştur.

Bu tezin ikinci bölümde ele alınan çalışmanın probleminde; (Gareth A. Jones, David Singerman, K. Wicks, 1991) çalışmalarındaki yöntemle paralel olarak,  $\Gamma$  modüler grubunun  $\Gamma^3 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : ab + cd \equiv 0 \pmod{3} \right\}$  alt grubunun  $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  üzerindeki hareketinden doğan alt yörüngesel graflardan  $F_{1,1}^3 = F^3$  alt grafının bağlantılılık özellikleri incelendi .

$\Gamma^3$  alt grubunun  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerindeki imprimitif hareketinden doğan altyörüngesel graflar üzerine ilk çalışmalar Y. Kesicioğlu'nun 2011 yılındaki doktora tezinde yer almıştır [11]. Söz konusu doktora çalışmasında  $F_{u,n}^3$  alt yörüngesel grafini elde etmek için  $\Gamma_0^3(n)$  alt grubunun ürettiği  $\Gamma^3$ invariant denklik bağıntısı tanıtıldı ve söz konusu çalışma ile  $F_{1,1}^3 = F^3$  grafi haricinde kalan  $F_{u,n}^3$  tipindeki tüm alt grafların bağlantılılık özellikleri incelendi.  $F^3$  grafi için ise [11] de " $F_{1,1}$  alt grafi bağlantısızdır" şeklinde bir konjektür verildi.

Böylece bu doktora çalışmasında, [11] de açık bırakılan " $F_{1,1}$  alt grafi bağlantısızdır" şeklindeki konjektürünün doğruluğunu kanıtlayıp, sayılar teorisi açısından ilgi çekici sonuçlar elde ettik.

## 1.2. Topolojik Gruplar

Çalışmamız tamamen topolojik gruplar ve bunların bir küme üzerindeki hareketi üzerine kurulu olduğundan bu bölümde; topolojik grup ve topolojik dönüşüm grubu ile ilgili temel kavramları verdik.

### Tanım 1.2.1

$(G, *)$  bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde her  $g, h \in G$  için;

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad m : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\rightarrow g * h \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \text{ii.} \quad i : G &\rightarrow G \\ g &\rightarrow g^{-1} \end{aligned} \tag{1.2}$$

sırasıyla (1.1) ve (1.2) ile verilen grubun iki elemanının çarpım işlemi ve grubun bir elemanını o elemanın tersine eşleyen  $m$  ve  $i$  dönüşümleri sürekli ise  $G$  ye bir topolojik grup adı verilir.

**Tanım 1.2.2**

$G$  bir topolojik grup ve  $X$  bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde;  $\wedge : G \times X \rightarrow X$  öyle ki  $\wedge(g, x) = g \wedge x =: gx$  ile tanımlanan  $\wedge$  dönüşümü sürekli bir dönüşüm ve bunun yanında her  $g_1, g_2 \in G$  ve her  $x \in X$  için;

$$i. \quad g_1 g_2 x = g_1 (g_2 x) \quad (1.3)$$

$$ii. \quad e x = x \quad (e, G\text{'nin birim elemanı.}) \quad (1.4)$$

(1.3), (1.4) şartları sağlanıyorsa,  $[G, X, \wedge]$  üçlüsüne bir topolojik dönüşüm grubu adı verilir.

Yukarıdaki i ve ii şartları sağlandığında  $G$ 'ye  $X$  kümesi üzerinde hareket eder denir. Çoğu kez bu yapı,  $(G, X)$  biçiminde gösterilir.

Ayrıca yukarıdaki tanım da yapıldığı gibi  $G$  de  $g_1$  ve  $g_2$  gibi iki elemanın çarpım işlemi  $g_1 g_2$  biçiminde gösterilebilir.

Bu durumda  $G$  grubu  $X$  kümesi üzerinde hareket eden bir hareket grubudur.

**Tanım 1.2.3.[1]**

$(G, X)$  topolojik dönüşüm grubu verilsin.  $\forall x, y \in X$  için;

$$"x \sim y \Leftrightarrow y = gx, \exists g \in G" \quad (1.5)$$

şeklinde tanımlanan " $\sim$ " bağıntısı,  $X$  kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Bu bağıntının  $X$  topolojik uzayında ayırdığı denklik sınıflarına hareketin yörüngeleri adı verilir.  $X$  kümesinin bir  $x$  elemanını ihtiva eden yörünge,

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\} = \{y \in X : y = gx, \exists g \in G\} = Gx \quad (1.6)$$

ile gösterilir.

Bütün yörüngelerden oluşan kümeyi  $X/G$  ile gösterelim. Yani,  $X/G := \{Gx \mid x \in X\}$  bir yörüngeler uzayı olup  $X/G$  üzerindeki topoloji;  $x \in X$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi : X &\rightarrow X/G \\ x &\rightarrow \varphi(x) := Gx \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı  $\varphi$  fonksiyonunu sürekli yapan en ince topolojidir. Bu topoloji,

$$\tau_\varphi := \{U \subset X/G \mid \varphi^{-1}(U) \text{ kümesi } X \text{ de açık}\} \quad (1.7)$$

ile verilir.

Böylece,  $X/G := \{[x] : x \in X\}$  ile gösterilen yörüngeler uzayı, topolojik özdeşlik altında, elemanları yörüngeler olan, bir topolojik uzaydır.

#### **Tanım 1.2.4**

$(G, X)$  bir topolojik dönüşüm grubu olsun. Bu takdirde,

$S(x) = \{g \in G : gx = x\}$  alt kümesine;  $x \in X$  noktasının  $G$  grubuna göre sabitleyeni adı verilir.

#### **Sonuç 1.2.5. [9]**

$(G, X)$  bir topolojik dönüşüm grubu ve  $x \in X$  olsun. Bu durumda  $x$  noktasının  $G$  grubuna göre sabitleyeni olan  $S(x)$ ,  $G$  nin bir alt grubudur. ■

#### **Tanım 1.2.6**

$(G, X)$  bir topolojik dönüşüm grubu ve  $P \subset X$  olsun. Bu takdirde,  $\{gP : g \in G\}$  ailesinin farklı elemanları ikişer ikişer ayrık ise yani;  $P$  kümesi bir yörüngeden en fazla bir eleman içeriyorsa  $P$  ye bir  $G$  paketleme adı verilir.

#### **Tanım 1.2.7**

$(G, X)$  bir topolojik dönüşüm grubu ve  $C \subset X$  olsun. Eğer;  $\bigcup_{g \in G} \{gC\} = X$  ise  $C$ 'ye bir  $G$ -örtme adı verilir.

Yani,  $C$  kümesi her bir yörüngeden en az bir eleman içerir.

#### **Tanım 1.2.8**

$(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subset X$  olsun. Eğer  $\forall x \in A$  için,  $A \cap U = \{x\}$  olacak şekilde bir  $U \in \tau$  varsa,  $A$  kümesine,  $\tau$  topolojisine göre,  $X$ 'in bir ayrık alt kümesi adı verilir.

#### **Tanım 1.2.9**

$(G, X)$  topolojik dönüşüm grubu verilsin.  $x, y \in X$  keyfi iki eleman olsun.  $gx = y$  olacak biçimde bir  $g \in G$  elemanı varsa,  $G$  grubuna  $X$  üzerinde transitif olarak hareket eder denir.

Bu tanıma göre, hareket transitif ise,  $\forall x \in X$  için  $Gx = X$  dir. Yani, hareketin tek bir yörüngesi vardır. Bu yörünge de grubun transitif olarak hareket ettiği  $X$  kümesidir.

**Tanım 1.2.10. [2]**

$G$  bir grup ve  $H < G$  olsun.  $G$  nin  $H$  alt grubuna göre sağ ve sol denklik sınıflarının sayısı aynıdır. Bu sayıya  $H$  alt grubunun  $G$  grubu içerisindeki indeksi denir ve  $|G:H|$  ile gösterilir.

**Lemma 1.2.11. [2]**

$G$  grubu boştan farklı bir  $X$  kümesi üzerinde hareket etsin ve  $x \in X$  olsun. Bu durumda  $|Gx| = |G:G_x|$  dir. Burada  $|Gx|$  ile,  $Gx$ 'in eleman sayısı gösterilmiştir. ■

**Tanım 1.2.12**

$G$  bir grup olsun.  $C := \{g \in G \mid \forall x \in G \text{ için } gx = xg\}$  kümesine  $G$  grubunun merkezi denir.

**Tanım 1.2.13**

Geometride iki noktayı birleştiren minimal uzunluklu eğrilere jeodezikler adı verilir.

**Tanım 1.2.14**

Bir  $T$  dönüşümünün periyodu (veya mertebesi)  $T^m = I$  eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır. Böyle bir  $m$  sayısı yoksa  $T$ ' ye sonsuz periyotludur denir.

**Tanım 1.2.15**

$n \in \mathbb{N}$  için  $1 \leq a \leq n$  ve  $(a, n) = 1$  olan  $a$  tam sayılarının sayısı  $n \in \mathbb{N}$  nin bir fonksiyonu olarak  $\varphi(n)$  ile gösterilir ve bu  $\varphi$  fonksiyonuna Euler fonksiyonu adı verilir.

**Sonuç 1.2.16. [19]**

$p_1, p_2, \dots, p_s$  farklı asal sayılar,  $r_1, r_2, \dots, r_s$  pozitif tam sayılar olmak üzere  $m \in \mathbb{N}$  sayısının asal çarpanlara ayrılışı  $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s}$  ise,

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) \quad (1.8)$$

dir. ■

**1.3. Öklid Olmayan Kristalize Gruplar**

Bu bölümde Öklid olmayan Kristalize gruplar (N.E.C. Gruplar) hakkında tezde kullanılacak temel tanım ve kavramlar verildi.

$\mathcal{G}$  ile  $\Sigma := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  genişletilmiş kompleks düzlemin aşağıda gösterildiği gibi (A) ve (B) tipli dönüşümlerinin grubunu gösterelim.



$$(A) \quad z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad ad - bc = 1$$

$$(B) \quad z \rightarrow \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad ad - bc = -1$$

Buradan görülürki  $\mathcal{G}$  nin her bir elemanı,  $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  üst yarı düzleminin kendi üzerine bir konform veya ters konform homeomorfizmasıdır.

(A) biçimindeki dönüşümlerin gurubunu  $PSL(2, \mathbb{R})$  ile göstereceğiz.  $PSL(2, \mathbb{R})$  grubu,  $\mathcal{G}$  de 2 indeksli bir alt gruptur. Ayrıca,  $\mathcal{U}$  nun her konform (açı koruyan) homeomorfizmi  $PSL(2, \mathbb{R})$  de kalır [3].

$\mathcal{G}$  yi topolojik grup yapmak için  $\mathcal{G}$  üzerinde bir topolojik yapı aşağıdaki biçimde oluşturulabilir.

$K = \{(a, b, c, d) : ad - bc = \pm 1\} \subset \mathbb{R}^4$  alt kümesini alalım. Bu  $K$  alt kümesi üzerinde  $\mathbb{R}^4$  deki adi topolojinin kondurduğu alt uzay topolojisine göre bir topolojik uzaydır.

Burada,  $\delta : K \rightarrow K$ ,  $\delta(a, b, c, d) = (-a, -b, -c, -d)$  homeomorfizmi ile  $(a, b, c, d)$  ve  $(-a, -b, -c, -d)$  noktalarını özdeşleştirirsek (1.7) ile verilen topolojide olduğu gibi  $\mathcal{G}$  grubu özdeşlik topolojisi ile bir topolojik grup yapısına sahip olur.

$\mathcal{G}$  topolojik grubu,  $PSL(2, \mathbb{R})$  ve  $\mathcal{G} \setminus PSL(2, \mathbb{R})$  olmak üzere, iki bileşene sahiptir.

$\mathcal{G}$  topolojik grubunun ayrık alt gruplarına, öklid olmayan kristalize gruplar veya kısaca NEC grupları adı verilir. Özel olarak  $PSL(2, \mathbb{R})$  deki bir NEC grubuna ise Fuchsian grup adı verilir.

$\mathcal{U}$  üst yarı düzlemi, öklid olmayan (hiperbolik) düzlemin bir modeline aşağıdaki biçimde dönüştürülebilir:

Bir yay elemanının, hiperbolik uzunluk elemanı  $ds$  olmak üzere;

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{|dz|^2}{y^2}, \quad z = x + iy \quad (1.9)$$

ile tanımlanır.

Böylece parçalı sürekli, diferansiyellenebilir bir  $C$  eğrisinin hiperbolik uzunluğu;

$$l(C) = \int_c ds = \int_c \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \quad (1.10)$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi  $\mathcal{U}$  üst yarı düzleminde bir metrik verelim.  $z, w$  üst yarı düzlemin iki keyfi noktası olmak üzere;  $z$  ve  $w$  yı birleştiren tüm eğrilerin uzunluklarının infimumu üst yarı düzlemde bir metriktir. Yani;  $C$  ile  $z$  ve  $w$  yı birleştiren tüm parçalı diferansiyellenebilen eğriler gösterilirse  $\rho : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $\rho(z, w) := \inf l(C)$  ile tanımlı  $\rho$  fonksiyonu üst yarı düzlemde bir metriktir.

Üst yarı düzlemde ölçülebilir bir  $E$  kümesinin hiperbolik alanı ise;

$$\mu(E) = \iint_E \frac{dx dy}{y^2} \quad \text{olarak tanımlanır. [9]}$$

Yukarıdaki metriğin jeodezikleri, Şekil 2 deki gibi gösterilen reel eksene dik yarı çemberler ve yarı doğrulardır. Bunlar hiperbolik doğrular olarak adlandırılırlar.

$\mathcal{U}$  üst yarı düzlemde iki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık; bu iki noktayı birleştiren bir tek hiperbolik doğru parçasının uzunluğudur. Bu metrikle tanımlanan topoloji; bilinen öklid topolojisine eş değerdir. Yani; bir topolojideki açık küme, diğer topolojide de açıktır.

Hiperbolik uzaklık ve alan  $PSL(2, \mathbb{R})$  nin dönüşümleri altında invaryant kalır [3].

Şimdi  $\mathcal{G}$  nin elemanlarını yönlendirilmelerine ve sabit nokta kümelerine göre sınıflandıralım:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in PSL(2, \mathbb{R}) \setminus \{I\} \quad \text{olmak üzere;}$$

$$T(z) = z \Rightarrow \frac{az + b}{cz + d} = z \quad \text{olup buradan} \quad cz^2 + (d - a)z - b = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

Buradan,  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{R})$  olduğundan,  $ad - bc = 1$  olup bu kuadratik denklemin çözümünden  $T$  dönüşümünün sabit noktalarının

$$z_{1/2} = \frac{(a-d) \mp \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \quad (1.11)$$

olduğu görülür. (1.11) eşitliğine göre  $T$  dönüşümünü sabit noktalarının özelliklerine göre üç sınıfa ayırabiliriz.

i.  $|a+d| > 2$  ise (1.11) den iki farklı sabit nokta vardır ve bu sabit noktalar  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  kümesindedirler. Bu durumda  $T$  ye bir hiperbolik dönüşüm adı verilir.

ii.  $|a+d| = 2$  ise (1.11) den birbirine eşit iki sabit nokta vardır ve bunlar  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  kümesindedirler. Bu durumda  $T$  ye bir parabolik dönüşüm adı verilir.

iii.  $|a+d| < 2$  ise (1.11) den birbirinin eşleniği olan iki kompleks sabit nokta vardır. Bu sabit noktalardan biri açıkça üst yarı düzlemde kalır. Bu durumda  $T$  ye bir eliptik dönüşüm adı verilir.

$T(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \in \mathcal{G} \setminus PSL(2, \mathbb{R})$  için ise sınıflandırma aşağıdaki gibidir. Bu durumda,  $z = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  yazılırsa,

$$cz\bar{z} + dz - a\bar{z} - b = 0 \quad (1.12)$$

denklemi elde edilir. (1.12) denkleminde  $z = x + iy$  ve  $\bar{z} = x - iy$  ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} c(x+iy)(x-iy) + d(x+iy) - a(x-iy) - b &= 0 \\ c(x^2 + y^2) + dx - ax + i(dy + ay) - b &= 0 \\ \left. \begin{aligned} c(x^2 + y^2) + (d-a)x - b &= 0 \\ (d+a)y &= 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

biçiminde iki denklem elde edilir. Bu iki denklemi inceleyelim.

i.  $a+d \neq 0$  ise  $y = 0$  dir. Bu durumda  $cx^2 + (d-a)x - b = 0$  denklemi elde edilir. Bu denklemin diskriminantı,

$$\Delta = (d-a)^2 + 4bc = d^2 - 2ad + a^2 + 4bc$$

dir. Buradan  $ad - bc = -1$  eşitliği kullanılırsa  $\Delta = (a+d)^2 + 4 > 0$  elde edilir. Dolayısıyla  $T$  nin iki farklı sabit noktası vardır ve bunlar  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  kümesindedirler. Bu durumda  $T$  dönüşümüne bir kayan-yansıma adı verilir.

ii.  $a+d = 0$  ise  $(a+d)y = 0$  eşitliği özdeş olarak gerçekleşeceğinden

$c(x^2 + y^2) + (d - a)x - b = 0$  eşitliği gereği  $T$  nin sabit noktaları kümesi,  $c \neq 0$  için, bir çember üzerindeki tüm noktalardır.  $a + d = 0$  ve  $ad - bc = -1$  eşitlikleri yardımıyla bu çemberin merkezinin  $\left(\frac{a}{c}, 0\right)$  ve yarıçapının  $\frac{1}{|c|}$  olduğu görülür. Eğer  $c = 0$  ise  $(d - a)x - b = 0$  düşey doğrusu elde edilir. Bu durumda  $T$  dönüşümüne bir yansıma adı verilir.

Buna göre  $\mathcal{G}$  grubunun hiperbolik, parabolik, eliptik, kayan-yansıma ve yansıma diye adlandırılan beş tip elemanı vardır [3].

### Tanım 1.3.1

$T_1$  ve  $T_2$  dönüşümleri  $\mathcal{G}$  grubunun herhangi iki elemanı olsun.

$T_2 = TT_1T$  olacak şekilde bir  $T \in \mathcal{G}$  elemanı varsa  $T_2$  ve  $T_1$  dönüşümlerine birbirinin eşleniğidir denir.

### Lemma 1.3.2. [3]

$T_1$  ve  $T_2$  birbirinin eşleniği ise aynı tiptendirler. ■

$\mathcal{G}$  nin elemanlarını izleri (trace) denilen  $a + d$  ve ayrıca determinantlarına göre sınıflandırabiliriz.

$\mathcal{G}$  nin eşlenik elemanlarının aynı tip olduğu gerçeği kullanıldığında, dönüşümlerin her biri bir doğal gösterime sahiptir. Doğal gösterimler aşağıdaki şekilde sınıflandırılır.

### Eleman Türü

### Doğal Gösterim

Hiperbolik

$$z \rightarrow \lambda z \quad (\lambda > 1)$$

Eliptik

$$z \rightarrow \omega, \quad \frac{\omega - i}{\omega + i} = e^{i\theta} \frac{z - i}{z + i}, \quad \theta \neq 2n\pi$$

Parabolik

$$z \rightarrow z \pm 1$$

Kayan-yansıma

$$z \rightarrow \lambda \bar{z} \quad (\lambda < -1)$$

Yansıma

$$z \rightarrow -\bar{z}$$

## 1.4. Modüler Grup

Modüler grup, Möbiüs dönüşümleri grubunun en önemli alt gruplarından biridir ve kısaca  $\Gamma$  ile gösterilir. Burada yapılan tüm çalışmalar ve irdelemeler Modüler grubun bir takım alt grupları üzerinden yürütülmüştür.

Modüler grup kavramı; sayılar teorisi, cebir ve geometri başta olmak üzere ileri matematiğin pek çok dalında karşımıza çıkar. Modüler grup, geometrik dönüşümlerin bir grubu veya matrisler grubu olarak gösterilebilir. Bu bölümde Modüler grubun bu çalışma için gerekli olacak önemli özellikleri verilecektir.

**Tanım 1.4.1**

$PSL(2, \mathbb{R})$  grubunun çok iyi bilinen alt gruplarından biri olan  $\Gamma$  modüler grubu  $\Gamma := PSL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ ve } ad - bc = 1 \right\}$  şeklinde tanımlanır. Bu grup aşağıdaki gibi  $2 \times 2$  lik tam sayılar matrisleriyle de temsil edilebilir:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad \det A = 1. \quad (1.13)$$

Burada,  $A$  ve  $-A$  aynı dönüşümü temsil ettiğinden söz konusu matris negatifi ile eş alınır. Böylece matris ve dönüşüm arasında bir ayırım yapılmayacaktır. Ayrıca,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}, \quad k \neq 0 \quad (1.14)$$

matrisleri yine aynı dönüşümü temsil ettiğinden matris hesaplamalarında uygun olduğu yerde bu matrisler aynıymış gibi alınır. (Burada determinantın 1 olma şartı aranmayacaktır.)

Modüler grup yukarıda verilen topoloji ile birlikte bir topolojik gruptur. Dahası, Modüler grup bir ayrık yani Fuchsian gruptur.

Aşağıdaki teorem  $\Gamma$  modüler grubunun  $T(z) = z + 1$  ve  $U(z) = -\frac{1}{z}$  dönüşümleri ile üretildiğini göstermektedir.

**Teorem 1.4.2. [5]**

$\Gamma$  modüler grubu  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ve  $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  matrisleriyle üretilir. ■

Modüler grubun üreteçleri olan  $T$  ve  $U$  elmanları,  $U^2 = 1$  ve  $(UT)^3 = 1$  bağıntılarını sağlar.  $T$  ve  $U$  nun yerine  $UT$  ve  $U$  üreteçleri kullanılarak, modüler grubun sırasıyla 2. ve 3. mertebeden  $C_2$  ve  $C_3$  devirli gruplarının serbest çarpımına izomorf olduğu gösterilebilir. Yani,  $\Gamma$  için  $\Gamma \cong C_2 * C_3$  şeklinde bir gösterim vardır [5].

### 1.5. $\Gamma$ nin $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ Üzerindeki Hareketi

$\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin her elemanı  $x, y \in \mathbb{Z}$  ve  $(x, y) = 1$  olmak üzere bir  $x/y$  indirgenmiş kesri olarak gösterilebilir.  $x/y = -x/-y$  olduğundan bu gösterim tek değildir.

Burada  $\infty$  elemanının gösterimi  $1/0 = -1/0$  olarak alınır.

$\Gamma$  modüler grubunun  $\widehat{\mathbb{Q}}$  genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki hareketi,  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  ve  $r = \frac{x}{y}$ ,  $s = \frac{ax+by}{cx+dy} \in \widehat{\mathbb{Q}}$  olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Gamma \times \widehat{\mathbb{Q}} \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}}, (T, r) \rightarrow s = Tr = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

dir.

Açık olarak, bir  $r = \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$  indirgenmiş oranı verildiğinde, buradaki (1.15) hareketi ile  $r = \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$  nin  $\frac{ax+by}{cx+dy} \in \widehat{\mathbb{Q}}$  görüntüsü yine bir indirgenmiş oran olacaktır.

Şimdi,  $\Gamma$  nin  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerindeki hareketini özetleyen aşağıdaki iki teoremi verelim.

#### **Teorem 1.5.1. [6]**

$\Gamma$  nin  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerindeki hareketi transitiftir.

**İspat:**  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \widehat{\mathbb{Q}}: \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$  ve  $(a, b) = (c, d) = 1$  olsun. Bu durumda  $a\alpha - b\beta = 1$  ve  $c\delta - d\gamma = 1$  olacak şekilde  $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{Z}$  tam sayıları vardır. Burada  $T(z) = \frac{az+\beta}{bz+\alpha}$  ve  $S(z) = \frac{cz+\gamma}{dz+\delta}$  şeklinde tanımlanırsa  $T(\infty) = \frac{a}{b}$  ve  $S(\infty) = \frac{c}{d}$  olacak şekilde bir  $\varphi := ST^{-1} \in \Gamma$  dönüşümü vardır.

Dolayısıyla  $\Gamma$ , modüler grubu  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerinde transitif olarak hareket eder. ■

Bu Teorem ile;  $\forall r, s \in \widehat{\mathbb{Q}}$  için  $T(r) = s$  olan bir  $T \in \Gamma$  dönüşümünün var olduğu sonucuna varırız.

Böylece,  $\infty \in \widehat{\mathbb{Q}}$  olduğundan ve hareket transitif olduğundan  $\infty$  elemanının yörüngesi olan  $[\infty]$  sınıfının  $\widehat{\mathbb{Q}}$  kümesine eşit olacağı anlamına gelir. Bu da  $\Gamma$  nin  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerindeki hareketinin tek bir yörüngeden ibaret olduğunu verir.

**Teorem 1.5.2. [6]**

$\Gamma$  nın  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerindeki hareketi göz önüne alındığında;  $\widehat{\mathbb{Q}}$  kümesinin herhangi bir noktasının sabitleyeni sonsuz devirli bir gruptur.

**İspat:** Burada, bir  $r \in \widehat{\mathbb{Q}}$  noktasının sabitleyeni  $\Gamma_r = \{g \in \Gamma : gr = r\}$  ile gösterilir ve Sonuç 1.2.5 ten  $\Gamma_r$ ,  $\Gamma$ 'nin bir alt grubudur. Lemma 1.3.2 ve Teorem 1.5.1 gereği sadece  $\infty$  elemanının  $\Gamma_\infty$  sabitleyenini göz önüne almak yeterlidir.

$b \in \mathbb{Z}$  olmak üzere,  $\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z} \right\}$  olduğu kolayca görülebilir. Böylece,  $\Gamma_\infty = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  dir ve  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sonsuz mertebeli bir üretici eleman olduğundan  $\Gamma_\infty$  grubu sonsuz mertebeli devirli bir gruptur. ■

**1.6. Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları**

Çalışmalarımız tamamen Modüler grubun alt gruplarına dayandığı için bu bölümde bizim için çok önemli olan alt grupları ve bu grupların özelliklerini vereceğiz.

**Tanım 1.6.1**

$n$  pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\Gamma(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{n}, b \equiv c \equiv 0 \pmod{n} \right\} \quad (1.16)$$

bir gruptur. Bu gruba  $\Gamma$  nın bir temel kongrüans alt grubu adı verilir.

$\Gamma$  grubunun (1.16) ile verilen  $\Gamma(n)$  temel kongrüans alt gruplarını içeren herhangi bir alt grubuna  $\Gamma$  nın kongrüans alt grubu adı verilir.

Üzerinde en çok çalışılan bazı kongrüans alt grupları;

$$\Gamma_1(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{n}, c \equiv 0 \pmod{n} \right\} \quad (1.17)$$

$$\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0 \pmod{n} \right\} \quad (1.18)$$

$$\Gamma^0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b \equiv 0 \pmod{n} \right\} \quad (1.19)$$

gruplarıdır ve  $n \in \mathbb{Z}$  olmak üzere bu gruplar arasında  $\Gamma(n) \leq \Gamma_1(n) \leq \Gamma_0(n) \leq \Gamma$  ilişkisi vardır. [5]

Ayrıca  $\Gamma(n)$ ,  $\Gamma$  grubunun normal bir alt grubudur, dolayısıyla  $\Gamma(n)$  grubu  $\Gamma_0(n)$  ve  $\Gamma_1(n)$  gruplarının da normal alt grubudur. Diğer taraftan  $\Gamma_1(n) \triangleleft \Gamma_0(n)$  dir. Buna göre indeksler,  $n > 2$  için,

$$|\Gamma: \Gamma_0(n)| = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \quad (1.20)$$

$$|\Gamma: \Gamma_1(n)| = \frac{n^2}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \quad (1.21)$$

$$|\Gamma: \Gamma(n)| = \frac{n^3}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \quad (1.22)$$

dir. [5]

$n = 2$  durumunda  $|\Gamma: \Gamma_0(2)| = 3$ ,  $|\Gamma: \Gamma_1(2)| = 3$ ,  $|\Gamma: \Gamma(2)| = 6$  dir.

$n > 2$  için yukarıda verilen indekslerden,

$$|\Gamma_0(n): \Gamma_1(n)| = \frac{|\Gamma: \Gamma_1(n)|}{|\Gamma: \Gamma_0(n)|} = \frac{n}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad (1.23)$$

$$|\Gamma_1(n): \Gamma(n)| = \frac{|\Gamma: \Gamma(n)|}{|\Gamma: \Gamma_1(n)|} = n. \quad (1.24)$$

sonuçları elde edilir.

$\Gamma$  grubunun her bir kongrüans alt grubu üst yarı düzlemde hareket eder ve birimden farklı her elemanın sabit noktalara göre sınıflandırılmasının mümkün olduğunu biliyoruz.

$A$  ile birimden farklı bir elemanın matris gösterimini temsil edersek;  $|tr(A)| = 0$  veya  $|tr(A)| = 1$  ise,  $A$  dönüşümünün üst yarı düzlemde bir sabit noktası vardır ve  $A$  nın mertebesi sırasıyla 2 veya 3 olur. Bu durumda  $A$  dönüşümü bir eliptik dönüşümdür.

Eğer,  $|tr(A)| = 2$  ise,  $A$  dönüşümü bir parabolik dönüşümdür ve böyle bir dönüşümün reel eksen üzerinde bir tek sabit noktası vardır.

Aynı zamanda, parabolik bir dönüşümün mertebesi sonsuzdur ve parabolik dönüşümün sabit noktalarına cusp adı verilir.



Böylece,  $\Gamma_0(n), \Gamma_1(n)$  ve  $\Gamma(n)$  gruplarının cusp kümesi de  $\widehat{\mathbb{Q}}$  dir. Çünkü bu gruplar  $\Gamma$  grubunun sonlu indeksli alt gruplarıdır ve bir  $\Lambda$  Fuchsian grubunun sonlu indeksli herhangi bir alt grubu da  $\Lambda$  ile aynı cusp kümesine sahiptir [7].

**Teorem 1.6.2**

$n > 1$  olmak üzere  $\Gamma_0(n)$  grubunun  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerindeki hareketi transitif değildir.

**İspat:** Aksini varsayalım ve  $0, \infty \in \widehat{\mathbb{Q}}$  seçelim. Bu takdirde,  $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  olacak şekilde  $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$  vardır.  $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ise  $\frac{b}{a} = \frac{1}{0}$  elde edilir. Bu eşitlikten  $b = 1$  ve  $d = 0$  dir. Diğer taraftan  $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$  olduğundan  $ad - bcn = 1$  olmalıdır. Bu ise ancak  $c = -1$  ve  $n = 1$  olmasıyla mümkündür. Bu durum hipotezdeki  $n > 1$  ile çelişir ve böylece ispat tamamlanır. ■

## 1.7. İmpirimitif Hareket

**Tanım 1.7.1.**

i)  $X \neq \emptyset$  bir küme olsun.  $\xi: X \rightarrow X$  bire-bir ve örten ise  $\xi$  ye  $X$  in bir permütasyonu denir.  $X$  in tüm permütasyonlarının kümesi  $S^X$  ile gösterilir.

ii)  $S^X$  fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur.  $S^X$  grubuna  $X$  üzerinde simetrik grup denir.

$S^X$  grubunun alt gruplarına da  $X$  kümesi üzerinde permütasyon grupları adı verilir.

**Tanım 1.7.2**

$G, X$  üzerinde bir permütasyon grubu olsun. Bu takdirde;  $G, X$  üzerinde hareket eder. Gerçekten  $g \in G$  ise  $g: X \rightarrow X$  birebir ve örten bir dönüşümdür. Bu durumda  $gx := g(x)$  olarak alınırsa  $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$  ve  $1x = x$  olduğu açıktır.

Bu harekete  $G$  grubunun  $X$  üzerindeki doğal hareketi denir ve “ $(G, X)$  permütasyon grubu” ifadesi kullanılır.

Ayrıca  $G$  grubu  $X$  kümesi üzerinde transitif olarak hareket ediyorsa  $(G, X)$  ikilisine transitif permütasyon grubu adı verilir.

**Tanım 1.7.3**

$(G, X)$  bir transitif permütasyon grubu ve “ $\approx$ ”  $X$  üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Eğer  $\alpha, \beta \in X$  için  $\alpha \approx \beta$  olduğunda,  $\forall g \in G$  için  $g(\alpha) \approx g(\beta)$  oluyorsa  $\approx$  denklik bağıntısına  $X$  üzerinde  $G$  –invariant denklik bağıntısı adı verilir.

Bu bağıntının denklik sınıflarına da bloklar adı verilir.

Burada,  $X$  üzerinde her durumda tanımlı olan iki tane  $G$  –invariant denklik bağıntısını verelim:

$$i) \text{ Özdeşlik Bağıntısı : " } \forall \alpha, \beta \in X, \alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ " } \quad (1.25)$$

$$ii) \text{ Evrensel Bağıntı : " } \forall \alpha, \beta \in X \text{ için } \alpha \approx \beta \text{ " } \quad (1.26)$$

Eğer  $X$  üzerinde (1.25) ve (1.26) dan farklı bir  $G$  –invariant denklik bağıntısı daha varsa  $G$  nin  $X$  üzerindeki hareketine imprimitif hareket aksi halde primitif hareket denir.

**Lemma 1.7.4. [6]**

$(G, X)$  transitif permütasyon grubu olsun. Bu taktirde  $G$  nin  $X$  üzerindeki hareketi primitiftir  $\Leftrightarrow$  Her bir  $\alpha \in X$  noktasının sabitleyeni olan  $G_\alpha$  grubu  $G$  nin bir maksimal alt grubudur. ■

**Teorem 1.7.5. [6]**

$(G, X)$  bir transitif permütasyon grubu olsun.  $G_\alpha < H < G$  ise,

$$\text{" } g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \in gH \text{ " } \quad (1.27)$$

ile verilen " $\approx$ " bağıntısı  $X$  üzerinde iyi tanımlı bir  $G$  –invariant denklik bağıntısı olup özdeşlik veya evrensel bağıntı değildir. ■

Böylece, (1.27) ile verilen " $\approx$ " bağıntısına göre  $G$  grubu  $X$  kümesi üzerinde imprimitif olarak hareket eder.

## 1.8. Hiperbolik Geometri

Matematik alanı içerisinde geometri Euclidean ve Non-Euclidian olmak üzere iki sınıfa ayrılır. Bu iki tip geometri arasındaki temel farklar doğrularının paralellik özelliklerinden kaynaklanır. Euclidian geometrinin dayandığı beş aksiyom vardır.

1. İki noktadan bir doğru geçer.
2. Doğru parçaları iki ucundan sonsuza doğru bir doğru boyunca uzatılabilir.
3. Merkezi ve yarıçapı verilen çember çizilebilir.

4. Tüm dik açılar denktir.

5. Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebilir (Euclid'in Paralellik Aksiyomu). Bu aksiyom Euclid'in "The Elements" adlı kitabındaki ifadesiyle bire-bir örtüşmese de daha anlaşılır olması sebebiyle böyle de ifade edilebilir.[22]

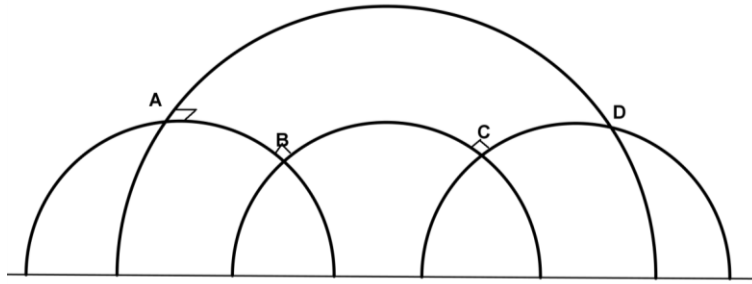
Hiperbolik geometri alanındaki ilk araştırmacılar Euclid'in paralellik aksiyomu çevresinde bir tutarsızlık bulmaya çalışanlardan oluşuyordu. Matematikçiler tarih boyunca Euclid'in ilk dört aksiyomunu kullanarak yukarıda paralellik aksiyomu denilen Euclid'in beşinci aksiyomunu ispatlamaya çalışmışlardı. Euclid'in paralellik aksiyomuna göre, "bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız bir paralel doğru çizilebilirdi" ve bu aksiyom pek çok matematikçiye göre çok karmaşıktı ve ilk dört aksiyomdan elde edilebilmeydi. Bu ihtimal üzerine matematikçiler, Euclid'in beşinci aksiyomunun doğru olmadığı varsayımlar üzerine çalıştılar. 1700 ün ortalarında Girolamo Saccheri'nin öncülük ettiği gibi, Hiperbolik Paralel Aksiyomu olarak bildiğimiz, bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel çizilebileceği varsayımından yola çıkanlar Hiperbolik Geometrinin ortaya çıkmasını sağladılar. Diğer taraftan, bir doğruya dışındaki bir noktadan hiç bir paralel doğru çizilemeyeceği varsayımı ile yola çıkanlar da Eliptik Geometrinin geliştirilmesine öncülük ettiler.[23]

Euclid'in beşinci aksiyomunun doğru olmadığı geometrilerin de bulunabileceği düşüncesiyle Proclus, Ömer Hayyam, Nasir al-Din al-Tusi, ve sonradan Giovanni Gerolamo Saccheri, John Wallis, Lambert, ve Legendre çalışmışlardır. On dokuzuncu yüzyılda Janos Bolyai ve Nikolai Ivanovich Lobachevsky'nin çalışmaları bu alanda çok etkili oldu. Öyle ki Hiperbolik Geometrinin bazı parçaları onların isimleriyle anılır. Sonrasında Eugenio Beltrami Hiperbolik Geometri için modeller sağladı ve bu modelleri kullanarak, "Eğer Euclid Geometrisi tutarlıysa, hiperbolik geometri de tutarlıdır" önermesini kanıtladı.

Hiperbolik düzlemin dikkate değer bir özelliği de bu geometride verilen her paralel doğru çifti için, her iki doğruya da dik olan yalnızca bir doğru çizilebiliyor olmasıdır. Bunun bir sonucu olarak hiperbolik düzlemde dikdörtgenlerin olamayacağı Lambert ve Saccheri'nin çalışmalarında yer almıştır.

Girolamo Saccheri ve Lambert, Euclid'in beşinci aksiyomunun yanlış olduğu varsayımı altında bir çelişki aramak amacıyla Hiperbolik Paralel Aksiyomu olarak bilinen çoklu paraleller hipotezini kabul ederek dikdörtgeni tanımlamaya çalıştı.

Lambert Saccheri'nin ardından çoklu paraleller hipotezi altında aşağıdaki şekildeki gibi 3 açısı dik olan bir dikdörtgenin dördüncü açısının dik olup olamayacağını merak etti. Lambert dördüncü açı için üç olasılığı (dar, dik, geniş) inceledi. Hiperbolik üçgenin iç açıları toplamı  $\pi$  radyandan küçük olduğundan hiperbolik dörtgenin tüm açılarının toplamının  $2\pi$  radyandan küçük olacağını dolayısıyla hiperbolik düzlemde dikdörtgenlerin olamayacağını ilk olarak ortaya koydu. Yani, çoklu paraleller hipotezi altında paralel iki doğruya aynı anda dik olan en fazla bir tane doğru çizilebilirdi.



Şekil 1. Üç açısı dik olan hiperbolik dörtgen .

Paralellik aksiyomunun aksi üzerine çalışan Karl Friedrich Gauss, Janos Bolyai ve Nikolai Ivanovich Lobachevsky yaklaşık olarak aynı zamanlarda şekil 1 deki dördüncü açının dar olduğunu gösterdiler ve şimdilerde Hiperbolik Geometri olarak bilinen konular üzerinde çalıştılar. [21]

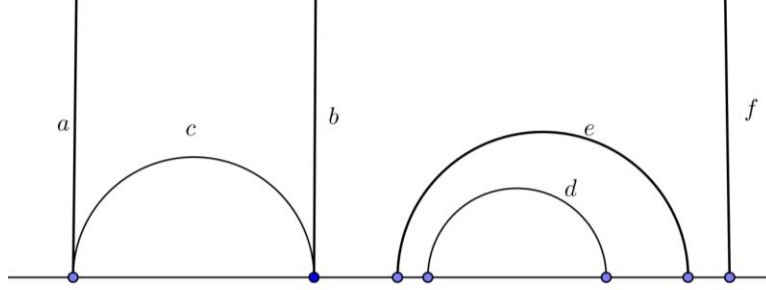
Hiperbolik Geometride (hiperboloid geometrisi -saddle geometry- ya da Lobachevskian geometri olarak da adlandırılır) paralellik terimi yalnızca hiperbolik düzlemde kesişmeyen ancak sonsuzda kesişecek olan bir doğru çiftini anlatmak için kullanılır. Eğer bu doğru çifti ne hiperbolik düzlemde ne de sonsuzda kesişirse (yani her iki durumda da kesişmezse) aşırı paralel (ultra paralel) olarak adlandırılırlar. İki doğru sadece sonsuzda kesişirse bu iki doğruya paralel (hyper paralel) doğrular denir. Hiperbolik geometride; bir  $\ell$  doğrusu ve doğrunun dışında bir  $P$  noktası verildiğinde  $P$ 'den geçen ve  $\ell$ 'ye paralel olan yalnız ve yalnız iki tane ultra olmayan paralel doğru geçerken sonsuz sayıda ultra paralel doğru geçer. [22]

Kısa bir süre sonra Fransız matematikçi Poincare ve İtalyan matematikçi Beltrami hiperbolik geometriyi görsel hale getirmeye yardımcı çeşitli modeller geliştirdiler. Her ikisine atfedilen bir model Beltrami-Poincare üst yarı düzlem modelidir. Bu model

hiperbolik paraleller postülatını destekler ve diğerleri tarafından geliştirilen sonuçları resimlemek için değerlidir.

Bu üst yarı düzlem modeline göre hiperbolik doğrular reel eksene dik yarı doğrular ve yarı çemberlerdir.

Aşağıdaki şekilde bu modele ait doğru örnekleri verildi.



Şekil 2. Üst yarı düzlem modeline göre hiperbolik doğrular.

Yukarıdaki şekilde  $a$  ve  $b$  doğruları  $c$ 'ye paralel,  $d, e, f$  doğruları ise  $c$ 'ye ultra paraleldir.

Öklid düzlemi ve hiperbolik düzlem; uzaklık, açı ve süreklilik gibi pek çok aynı kavrama sahiptirler. Her iki geometride de aynı olan temel özellikleri aşağıda ki gibi sıralayabiliriz. [4]

- İki farklı  $P$  ve  $Q$  noktası verildiğinde, her ikisinden geçen sadece bir doğru vardır.
- İki farklı  $P$  ve  $Q$  noktası verildiğinde  $P$  ve  $Q$  nun her ikisinden aynı uzaklıkta olan bütün noktalar kümesi bir doğrudur.

- Her  $\ell$  doğrusu düzlemi iki bağlantılı bileşene böler.  $P$  ve  $Q$ ,  $\ell$  doğrusu üzerinde olmayan iki nokta olsun.  $PQ$  doğru parçası  $\ell$  ile kesişmesi veya kesişmemesine göre,  $P$  ve  $Q$  nun  $\ell$  nin zıt tarafları üzerinde veya aynı taraf üzerinde olduğunu söyleyebiliriz.  $\ell$  nin aynı tarafı üzerinde olan iki noktanın bağıntısı, iki denklik sınıfı ile birlikte bir denklik bağıntısıdır.

- Benzer şekilde,  $\ell$  doğrusu üzerindeki her  $P$  noktası  $\ell$  nin diğer noktalarını iki sınıfa ayırır:  $P$  nin bir tarafı üzerinde olanlar ve  $P$  nin diğer tarafı üzerinde olanlar.

- Bir  $\ell$  doğrusu üzerinde bir  $P$  noktası ve  $d > 0$  pozitif gerçel sayısı verildiğinde,  $\ell$  üzerinde  $P$  den  $d$  uzaklığında tam iki nokta vardır, bunlardan her biri  $P$  noktasının farklı taraflarındadır.

- İki üçgenin aynı uzunlukta olan karşılıklı kenarları varsa, iki üçgen benzerdir ve bir üçgeni diğerine resmeden (ve karşılıklı kenarları koruyan) bir düzlem izometrisi mevcuttur.

Hiperbolik geometri, öklit uzayının bir alt uzayı olarak düşünülebilir. Bu durumda hiperbolik geometri aslında çift yanaklı bir hiperboloidin bir yanağının yüzeyindeki geometri olarak alınabilir. Bu çanak yüzeyini bir düzleme izdüşümleyerek üst yarı düzlem modelinin yanında daha başka modeller de oluşturulabilir.

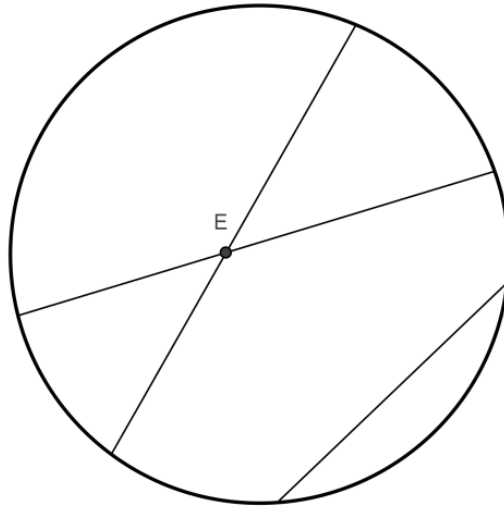
Aşağıda bu modellerden önemli üç tanesi kısaca tanıtıldı.

### 1.8.1. Klein-Beltrami Modeli

Klein-Beltrami modeli olarak bilinen bu model 1870 yıllarında Eugenio Beltrami ve Felix Klein tarafından ortaya konmuş olup bu model Hiperbolik geometrinin bilinen ilk modelidir.

Bu modelde hiperbolik düzlem, bir dairenin içindeki Öklit noktalardan oluşur ve doğrular dairenin sınır çemberin kirişleridir. Bu modelde hiperbolik açılar bozulmasına rağmen bilinen en basit modeldir [23].

Çemberin üzerindeki noktalar geometriye dahil olmayacağından burada kesişen iki kiriş aslında paralel olacaktır. Bu kirişlere yakınsak paralel doğru denir. Eğer tamamen ayrık iki kiriş ise sadece paralel ya da bazen paralel ötesi doğrular denir.



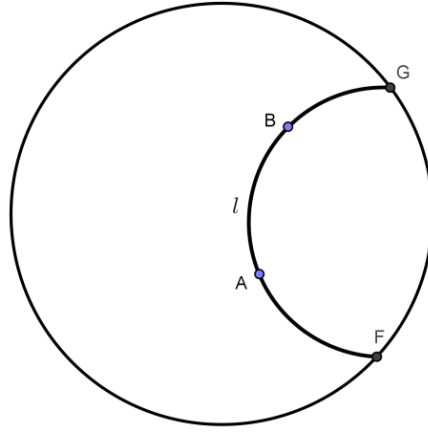
Şekil 3. Klein-Beltrami Modeline göre doğrular.

### 1.8.2. Poincare Disk Modeli

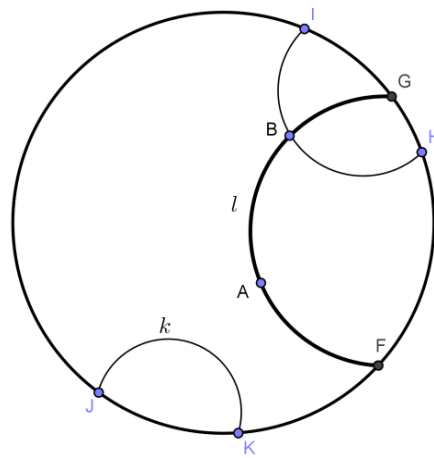
Eğer hiperboloide stereografik izdüşüm uygulanırsa bu sefer oluşturulan modele Poincare disk modeli denir. Burada geometri yine bir çemberin içinde kalan noktalardan oluşacaktır ancak bu modelde doğrular bu sınır çemberine dik olan çember yayları ve çemberin çapları olacaktır. (Şekil 4-5)

**Not:** Bu modelde iki doğrunun dik olması demek, doğruların kesişim noktasındaki teğetlerinin dik olması demektir.

Bu izdüşümün en önemli özelliği açıları ve çemberleri korumasıdır.[23]



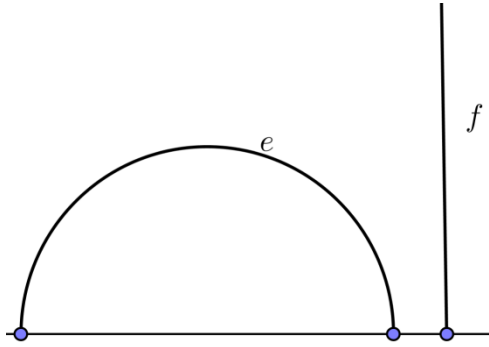
Şekil 4. Poincare Disk Modelinde doğru.



Şekil 5. Poincare Disk Modelinde paralel ve kesişen doğrular.

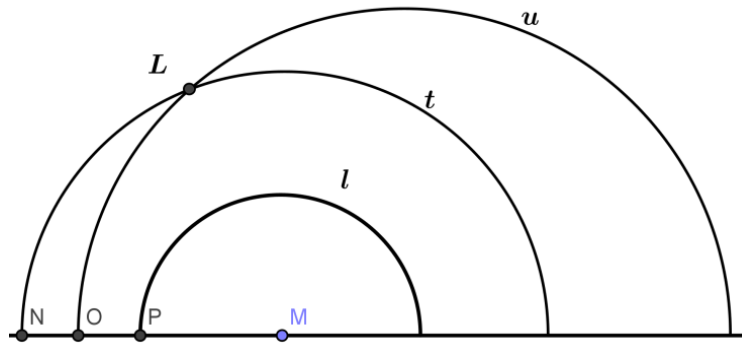
### 1.8.3. Poincare Yarı-Düzlem Modeli

Eğer hiperboloit XY düzlemine dik olan bir düzleme izdüşümlenirse, oluşan model Poincare yarı-düzlem modelidir. Bu modelde hiperboloit düzlemin belli bir doğrusunun yarattığı bir yarısındaki noktalara eşlenmiştir ve doğrular bu ayıran doğruya dik olan ya öklitçi ışınlardır ya da çember yaylarıdır (Şekil 6).



Şekil 6. Poincare Yarı-Düzlem Modelinde Doğrular

Şekil 7 de verilen  $l$  hiperbolik doğrusuna dışındaki  $L$  noktasından sonsuz sayıda paralel doğrular çizilebileceği gösterilmiştir.  $N$  ve  $P$  noktaları arasında  $O$  noktası gibi sonsuz sayıda nokta vardır ve bu noktaların her birinden ve  $L$  den geçen geçen her Öklid çemberinin üst yarısı düzlemle arakesiti bir hiperbolik doğrudur ve bu doğrular  $l$ 'ye paraleldirler.



Şekil 7. Poincare Yarı-Düzlem Modeline Göre Paralel Doğrular



## 1.9. Graf Teori

Kombinatorik, genellikle sonlu soyut nesnelere konu alan pür matematik dalıdır. Dalla ilgilenen matematikçilere kombinatorialist veya kombinatorist denir. Matematiğin, cebir, olasılık kuramı, ergodik teori ve geometri gibi farklı dallarıyla da ilgili olan kombinatorik ayrıca bilgisayar bilimi ve istatistiksel fizik gibi dallarda uygulanmıştır. Kombinatorik dahilindeki konulardan bazıları; belirli kriterleri karşılayan nesnelere “sayılması”, kriterlerin ne zaman karşılanmış olacağına karar vermek, kriterleri karşılayan nesnelere inşa edilmesi ve analiz edilmesi; “en büyük”, “en küçük” veya “optimal” nesnelere bulmak ve bu nesnelere sahip olabileceği cebirsel yapıları bulmaktır.

Kombinatorik ile ilgili çeşitli kuramlar ve problemler Orta Çağ'da ve hatta antik çağlarda Hindistan ve Çin gibi medeniyetlerde mevcuttur. Her ne kadar özellikle 20. yüzyılın sonlarına doğru birçok güçlü teori ortaya konmuşsa da, kombinatorik problem çözmekle ne kadar ilgiliyse teori oluşturmakla da o kadar ilgilidir.

Kombinatoriğin en eski ve erişilebilir konularından birisi de graf teorisidir ki bu teoremin diğer birçok alanla da (doğal olarak) ilişkisi mevcuttur.

$\Omega$  sonlu bir küme,  $E$ ,  $\Omega \times \Omega$  nın bir alt kümesi ve  $E' := \{(\alpha, \beta) | (\beta, \alpha) \in E\}$  olarak tanımlansın. Bu durumda  $E \cap E' = \emptyset$  olmak üzere  $(\Omega, E)$  çiftine  $(\Omega$  kümesi üzerinde) yönlendirilmiş bir graf ve ayrıca  $E$ ,  $\Omega$  nın iki elemanlı alt kümeleri yani,  $E(\Omega) := \{\{\alpha, \beta\} | \alpha, \beta \in \Omega, \alpha \neq \beta\}$  olmak üzere  $(\Omega, E)$  çiftine  $(\Omega$  kümesi üzerinde) yönlendirilmemiş bir graf denir. Böylece bir graf, ya yönlendirilmiş ya da yönlendirilmemiştir.

Eğer  $(\Omega, E)$  bir graf ise  $E$  nin elemanlarına kenarlar ve  $\Omega$  nın elemanlarına da köşeler (noktalar) adı verilir. Bu takdirde noktalar, bir öklid uzayında, yönlendirilmiş veya yönlendirilmemiş doğru parçaları tarafından birleştirildiğinde kenarlar oluşur. Yönlendirilmiş durumda  $(\alpha, \beta)$  kenarını  $\alpha$  dan  $\beta$  ya gider, yönlendirilmemiş durumda ise  $\{\alpha, \beta\}$  kenarını  $\alpha$  dan  $\beta$  ya veya  $\beta$  dan  $\alpha$  ya gider şeklinde ve  $\alpha$  dan  $\beta$  ya veya  $\beta$  dan  $\alpha$  ya bir kenar varsa bu durumda  $\alpha$  ve  $\beta$  noktaları bir kenar tarafından birleştirilir şeklinde adlandıracağız.

$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s = \beta$  noktaların (köşelerin) bir dizisi olsun. Bu takdirde  $0 \leq i < s$  olmak üzere  $\alpha_i$  ve  $\alpha_{i+1}$  noktaları bir kenar tarafından bağlanıyor ise  $\alpha$  dan  $\beta$  ya  $s$  uzunluklu bir yol vardır denir.

Eğer bir grafta herhangi iki  $\alpha$  ve  $\beta$  noktası için  $\alpha$  dan  $\beta$  ya bir yol varsa bu grafa bağlantılıdır denir.

### Tanım 1.9.1

$X \neq \emptyset$  bir küme,  $\Delta \subset X \times X$  bir bağıntı olsun. Bu takdirde,  $G = (X, \Delta)$  ikilisine bir graf denir.  $X$  in elemanlarına grafın köşeleri ve  $\Delta$  nın elemanlarına grafın kenarları adı verilir.  $(a, b) \in \Delta$  ise bu durumda  $a \rightarrow b$  ile gösterilir.

Eğer  $(a, b) \in \Delta$  veya  $(b, a) \in \Delta$  ise  $a$  ile  $b$  bir kenar ile bağlanmıştır. Bu durumda  $a$  ve  $b$  ye komşu köşeler denir.

### Tanım 1.9.2

$G = (X, \Delta)$  bir graf ve  $A \subset X$  olsun.  $G' = (A, \Delta \cap (A \times A))$  grafına, köşe kümesi  $A$  olan  $G$  nin bir alt grafi adı verilir.

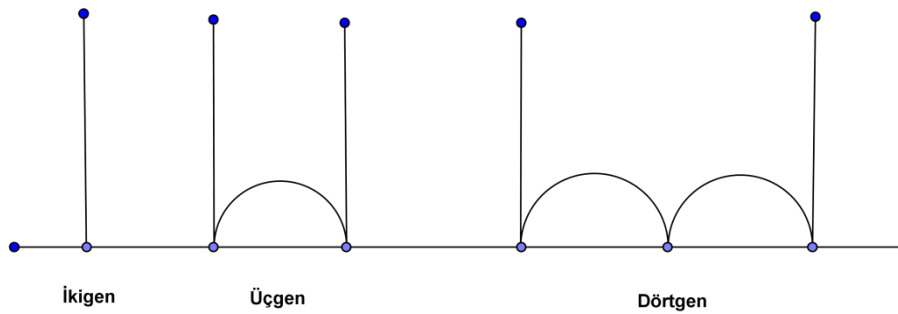
### Tanım 1.9.3

$a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$  bir  $G$  grafının köşelerinin bir dizisi olsun. Eğer her  $1 \leq i \leq n$  için  $a_{i-1}$  ve  $a_i$  bir kenar ile bağlanmışlarsa  $a$  dan  $b$  ye  $n$  uzunluğunda bir yol vardır denir.

Eğer;  $a = b$  ve  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  köşelerinin tümü farklı ise bu yola  $n$  kenarlı bir devre (circuit) denir.

Ayrıca  $a_i, a_{i+1}$  ikilileri için  $a_i \rightarrow a_{i+1}$  ise bu devreye yönlenmiş bir devre denir.

Üç kenarlı bir devreye bir üçgen, dört kenarlı bir devreye bir dörtgen ve altı kenarlı bir devreye bir altıgen denir.



Şekil 8. Devreler

**Tanım 1.9.4**

$n \geq 3$  olmak üzere  $n$  kenarlı bir devre içermeyen grafa orman denir.

**Sonuç 1.9.5**

$G = (X, \Delta)$  bir graf olsun.  $X$  üzerinde;

$$" a \approx b : \Leftrightarrow a = b \text{ veya } a \neq b \text{ ise } a \text{ dan } b \text{ ye bir yol vardır } " \quad (1.28)$$

şeklinde tanımlanan " $\approx$ " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

**Tanım 1.9.6.**

i)  $X$  in kendisi (1.28) ile verilen bu " $\approx$ " bağıntısı altında bir denklik sınıfı ise  $G$  grafına bağlantılıdır denir.

ii) Eğer  $X_1$  (1.28) bağıntısı altında bir denklik sınıfı ise  $(X_1, \Delta \cap (X_1 \times X_1))$  bağlantılı bir graftır ve bu grafa  $G$  grafının bir bağlantılı bileşeni adı verilir.

**Tanım 1.9.7.**

İki grafın köşeleri arasında birebir ve örten bir dönüşüm mevcut ve bu dönüşüm komşu köşeleri, komşu köşelere resmediyorsa bu iki grafa izomorf graflar adı verilir.

**1.10. Alt Yörüngesel Graflar****Tanım 1.10.1. [8]**

$(G, X)$  bir transitif permütasyon grubu olsun.  $G$  nin  $X \times X$  üzerindeki hareketini  $g \in G$  olmak üzere,

$$" g : (\alpha, \beta) \rightarrow (g(\alpha), g(\beta)), \quad (\alpha, \beta) \in X \times X "$$

ile tanımlayalım. Bu hareketin yörüngelerine  $G$  nin alt yörüngeleri adı verilir.

Burada  $(\alpha, \beta)$  ikilisini içeren alt yörüngeyi  $O(\alpha, \beta)$  ile gösterelim. Bu  $O(\alpha, \beta)$  alt yörüngesinden  $G(\alpha, \beta)$  alt yörüngesel grafını oluşturabiliriz.

Bu  $G(\alpha, \beta)$  alt yörüngesel grafın köşeleri  $X$  kümesinin elemanlarıdır ve eğer;  $\gamma, \delta \in X$  noktaları için  $(\gamma, \delta) \in O(\alpha, \beta)$  ise,  $\gamma$  dan  $\delta$  ya  $\gamma \rightarrow \delta$  ile gösterilen bir yönlendirilmiş kenar vardır denir.

Böyle bir kenarı,  $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  üst yarı düzleminde bir hiperbolik jeodezik olarak göstereceğiz.

Açık olarak  $O(\beta, \alpha)$  yörüngesi de bir alt yörüngedir ve bu durumda; ya  $O(\alpha, \beta) \neq O(\beta, \alpha)$  ya da  $O(\alpha, \beta) = O(\beta, \alpha)$  dır.

Eğer;  $O(\alpha, \beta) \neq O(\beta, \alpha)$  ise  $G(\beta, \alpha)$ ,  $G(\alpha, \beta)$  nın oklarının ters yönlendirilmişidir ve  $G(\alpha, \beta)$  ile  $G(\beta, \alpha)$  ya eşleşmiş alt yörüngesel graflar denir.

Eğer  $O(\alpha, \beta) = O(\beta, \alpha)$  ve  $(\gamma, \delta) \in O(\alpha, \beta)$  ise bu taktirde  $\gamma$  dan  $\delta$  ya kenarı  $\gamma - \delta$  ( $\gamma \leftrightarrow \delta$  nın yerine) ile gösterilecektir. Bu durumda  $G(\alpha, \beta)$  yönlendirilmemiş bir kenar olarak düşünülebilir ve  $G(\alpha, \beta)$  ya kendisiyle eşleşmiştir denir.

$O(\alpha, \alpha) = \{(x, x) : x \in X\}$ ,  $X \times X$  in bir köşegenidir.  $G(\alpha, \alpha)$  alt yörüngesel grafi, her bir köşesi  $\alpha \in X$  olan bir düğüm noktasından oluşur. Bu grafa aşikar alt yörüngesel graf adı verilir.

Şimdi,  $G = \Gamma$  ve  $X = \widehat{\mathbb{Q}}$  alalım.  $\Gamma$ ,  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden her bir alt yörünge  $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$  olmak üzere  $(\infty, v)$  çiftini içerir. Eğer  $n \geq 0$  ve  $(u, n) = 1$  olmak üzere  $v = \frac{u}{n}$  ise bu alt yörüngeyi  $O_{u,n}$  ile göstereceğiz ve buna karşılık gelen  $G(\infty, v)$  alt yörüngesel grafini da  $G_{u,n}$  ile göstereceğiz.

Eğer;  $v = \infty$  ise,  $G_{1,0} = G_{-1,0}$  grafına aşikar alt yörüngesel graf adı verilir. Bundan dolayı  $v \in \mathbb{Q}$  olduğunu farz edebiliriz.

Eğer  $v' \in \mathbb{Q}$  ise bu taktirde,  $O(\infty, v) = O(\infty, v') \Leftrightarrow v$  ve  $v'$   $\Gamma_\infty$ 'un aynı yörüngesindedir.  $\Gamma_\infty$  grubu  $z : v \rightarrow v + 1$  ile üretildiğinden  $z\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u+n}{n} = \frac{u'}{n}$  elde edilir. Buradan  $n = n'$  ve  $u \equiv u' \pmod{n}$  bulunur. Yani,

$$G_{u,n} = G_{u',n'} \Leftrightarrow n = n' \text{ ve } u \equiv u' \pmod{n} \text{ dir.} \quad (1.29)$$

Eğer  $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \in O_{u,n}$  ise, buna karşılık olarak,  $G_{u,n}$  grafında  $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$  yazacağız.

### **Teorem 1.10.2. [6]**

$G_{u,n}$  grafında  $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$  kenarı mevcuttur  $\Leftrightarrow$

- i)  $x \equiv ur \pmod{n}$ ,  $y \equiv us \pmod{n}$  ve  $ry - sx = n$  veya
- ii)  $x \equiv -ur \pmod{n}$ ,  $y \equiv -us \pmod{n}$  ve  $ry - sx = -n$  dir. ■

### 1.11. Farey Grafi

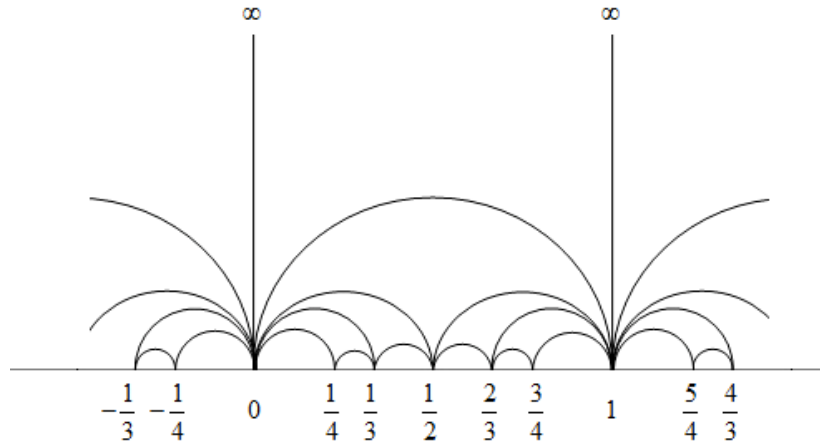
$m \geq 1$  ve  $m \in \mathbb{N}$  olsun.  $|y| \leq m$  olmak üzere bütün  $\frac{x}{y}$  rasyonel sayılarından oluşan kesin monoton artan diziye  $m$ . mertebeden Farey dizisi denir ve  $\mathbf{F}_m$  ile gösterilir. Örneğin  $\mathbf{F}_4$  dizisi,

$$\dots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \dots \quad (1.30)$$

biçimindedir.

Açık olarak  $\mathbf{F}_1 \subset \mathbf{F}_2 \subset \mathbf{F}_3 \subset \dots$  ve  $\bigcup_{m \geq 1} \mathbf{F}_m = \mathbb{Q}$  dır.

$G_{1,1}$  grafi da Farey dizileri ile olan ilişkisinden dolayı Farey grafi olarak adlandırılır ve  $\mathbf{F}$  ile gösterilir.



Şekil 9. Farey Grafi

#### **Teorem 1.11.1. [6]**

$\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$  olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- i)  $\frac{r}{s}$  ve  $\frac{x}{y}$ ,  $\mathbf{F}$  de kõşelerdir.
- ii)  $ry - sx = \pm 1$
- iii)  $\frac{r}{s}$  ve  $\frac{x}{y}$ , bir  $m$  doğal sayısı için  $\mathbf{F}_m$  nin ardışık terimleridir. ■

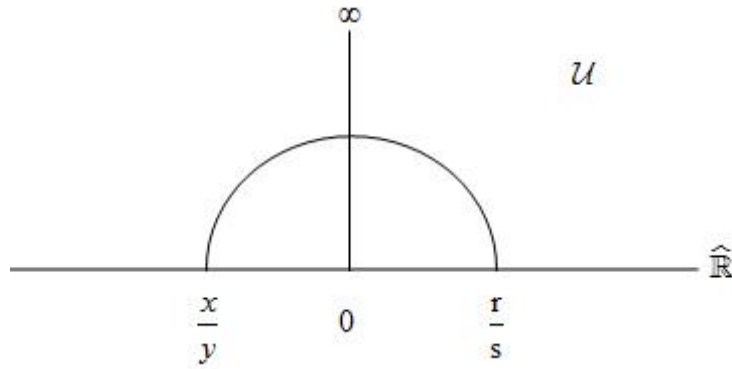
$\mathbf{F}$  nin komşu iki kõşesini üst yarı düzlemde bulunan bir hiperbolik doğru ile bağlayalım.

Bu durumda  $\mathbf{F}$  nin kenarlarıyla ilgili aşağıdaki önemli sonucu verebiliriz.

**Teorem 1.11.2.[6]**

**F** grafının kenarları,  $\mathcal{U} = \{ z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0 \}$  üst yarı düzleminde kesişmezler.

**İspat :**  $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in F$  kenarını alalım. Burada  $ry - sx = \pm 1$  dir. Kabul edelim ki 0 ile  $\infty$ 'u birleştiren  $\text{Re}(z) = 0$  doğrusu  $\frac{r}{s}$  yi  $\frac{x}{y}$  ye birleştiren doğruyu üst yarı düzlemde kessin. Bu taktirde  $\frac{x}{y} < 0 < \frac{r}{s}$  alınabilir. Buna göre  $ry - sx = 1$  olur.  $x < 0$  ve  $r, s, y > 0$  olduğundan  $1 = ry - sx \geq 2$  çelişkisi elde edilir. Bu çelişkiden **F** nin kenarlarının  $\mathcal{U}$  üst yarı düzleminde kesişmedikleri bulunur. ■



Şekil 10. Üst yarı düzlemde kesişen doğruya bir örnek.

**1.12. Fibonacci Sayıları**

Pisalı Leonardo Fibonacci Rönesans öncesi Avrupa'nın en önde gelen Matematikçisidir. Fibonacci için, “Matematiği Araplardan alıp, Avrupa'ya aktaran kişi” denilebilir. Fibonacci'nin yaşamı hakkında matematik yazıları dışında pek az şey biliniyor. İlk ve en iyi bilinen kitabı Liber Abaci'nin yazıldığı 1202 tarihine bakılırsa, 1170 dolayında doğmuş olabileceği sanılıyor. Bu yönde pek kanıt olmamakla birlikte İtalya'nın Pisa kentinde doğmuş olması olasılığı var. Fibonacci'nin adı daha çok, Liber Abaci'de yer alan bir problemde ortaya çıkan bir sayı dizisi nedeniyle bilinir.

Liber Abaci'de yer alan problemin metni şöyledir:

“Adamın biri, dört bir yanı duvarla çevrili yere bir çift tavşan koymuş. Her çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift yavru tavşan verdiği, her yeni çiftin de erginleşmesi için

bir ay gerektiği ve tavşanların ölmediği var sayılırsa, 100 ay sonunda dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur?”

Her ayda kaç çift erişkin tavşan olduğunu hesaplırsak aşağıdaki diziyi buluruz.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots \quad (1.31)$$

Burada üçüncüden itibaren her sayı kendinden önce iki toplamına eşittir. Yani her ay sonundaki tavşan çifti sayısı, o aydan hemen önceki iki aydaki sayıların toplamına eşittir. Buradan hareketle Fibonacci sayılarının dizisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

**Tanım 1.12.2.**

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, n \geq 1 \quad (1.32)$$

kuralı ile yinelenen sayılara Fibonacci sayıları denir.

Yani; ilk iki terimi 1 ve sonra gelen her terimi kendisinden önceki iki terimin toplamı şeklinde ilerleyen sayı dizisine Fibonacci sayıları denir.

İlk birkaç Fibonacci sayısı (1.31) de olduğu gibi; 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... şeklindedir.

**Sonuç 1.12.3. [20]**

$n$ -inci Fibonacci sayısı

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (1.33)$$

dir. ■

## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, elemanları  $\Gamma$  modüler grubunun elemanlarının küpleri olan  $\Gamma^3 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : ab + cd \equiv 0 \pmod{3} \right\}$  alt grubunun  $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki alt yörüngesel graflarından  $F_{1,1}^3$  grafinin bağlantısızlığı ele alındı. Kolaylık açısından bu grafi kısaca  $F^3$  ile göstereceğiz.

Ayrıca, çalışmanın bu bölümünde;  $F^3$  alt grafinin bağlantısızlığının yanı sıra her  $m$  tam sayısı için  $(9m^2 - 4)a^2 + 4$  ve  $5b^2 \mp 4$  sayılarını tam kare yapan tüm  $a$  ve  $b$  tam sayıları bulundu. Ayrıca yukarıda sözü edilen  $b$  tam sayılarının Fibonacci sayıları ile ilişkisi ortaya kondu.

Jones, Singerman ve Wicks [6] çalışmalarında bazı alt yörüngesel grafları elde etmek ve bu grafların bağlantısızlık ve orman özelliklerini ortaya koymak amacıyla;  $\Gamma_0(n)$  kongrüans alt grubunun  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerinde doğurduğu  $\Gamma$  invaryant denklik bağıntısı için primitif hareket notasyonunu kullandılar [8, 13, 14].

2011 yılında Y. Kesicioğlu doktora çalışmasında  $F_{u,n}^3$  alt yörüngesel grafini elde etmek için [6] da ki grupların yerine  $\Gamma^3$  ve  $\Gamma_0^3(n)$  alt gruplarını kullandı. Bu değişiklik ile  $\Gamma_0^3(n)$  alt grubunun ürettiği  $\Gamma^3$  invaryant denklik bağıntısı tanıtılmış oldu. Böylece bu çalışma ile  $F_{u,n}^3$  tipindeki tüm alt grafların bağlantılılık özellikleri incelendi. Ancak  $F^3$  grafinin bağlantısızlığı ispatlanamadı. Kesicioğlu [11] de bunu bir konjektür olarak bıraktı.

Bu konjektürün doğruluğunu bu bölümde ispatlayacağız. Ayrıca bu çalışma ile sayılar teorisi açısından bazı önemli sonuçları vereceğiz.

Şimdi, çalışmamız için gerekli ön bilgileri kısaca verelim. İlk olarak çalışmada üzerinde çalıştığımız  $\Gamma^3$  grubunu ve bu grubun temel özelliklerini verelim.

### 2.1. $\Gamma^3$ Modüler Alt Grubu

$\Gamma^3$  ile  $\Gamma$  modüler grubunun elemanlarının küpleri alınarak elde edilen grubu göstereceğiz. [10] dan görülebileceği gibi,  $\Gamma^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : ab + cd \equiv 0 \pmod{3} \right\}$  dir.



$\Gamma^3$  grubunun elemanları;  $a, b, c, d$  birer tam sayı olmak üzere,  $\begin{pmatrix} 3a & b \\ c & 3d \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} a & 3b \\ 3c & d \end{pmatrix}$  ve  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  matris gösterimlerinden birine sahiptir (Kesicioğlu, 2011).

**Teorem 2.1.1.[10]**

$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  olmak üzere,

$\Gamma = \Gamma^3 + y\Gamma^3 + y^2\Gamma^3$ ,  $\Gamma^3 = \langle x, yxy^2, y^2xy \rangle$  ve ayrıca  $|\Gamma : \Gamma^3| = 3$  tür. ■

**Lemma 2.1.2.**

i)  $\Gamma^3$  grubunun  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerindeki hareketi transitiftir.

ii)  $\widehat{\mathbb{Q}}$  nın elemanlarının sabitleyeni sonsuz mertebeli devirli bir gruptur.

**İspat :**

i)  $\frac{a}{3b} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ ,  $(a, 3b) = 1$  alalım. Bu takdirde,  $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$  öyle ki  $ay_0 - 3bx_0 = 1$  dir.

Böylece,  $T = \begin{pmatrix} a & x_0 \\ 3b & y_0 \end{pmatrix} \in \Gamma$  dir.  $ay_0 - 3bx_0 = 1$  lineer diophantine denkleminin genel çözümü  $n \in \mathbb{Z}$  için  $x = x_0 + an$ ,  $y = y_0 + 3bn$  dir.

Burada, eğer;  $x_0 \equiv 0 \pmod{3}$  ise  $T$  nin  $\Gamma^3$  te oluşu açıktır.  $x_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$  durumunda ise,  $x_0$  ve  $a$  tam sayılarının durumuna bağlı olarak  $x = x_0 + an$ , eşitliğinden  $n \in \mathbb{Z}$  yi  $x \equiv 0 \pmod{3}$  olacak biçimde seçebiliriz. Bu durumda  $x_0$  yerine  $x \equiv 0 \pmod{3}$  denklemini sağlayan  $x$  tam sayısı alınarak  $T \in \Gamma^3$  olur. Bu şekilde belirlenen  $T \in \Gamma^3$  elemanı ile,  $\frac{a}{3b} \in \widehat{\mathbb{Q}}$  şeklindeki noktaların  $\infty$  un yörüngesinde kalacağı anlaşılır. Çünkü;  $T(\infty) = \frac{a}{3b}$  dir.

Benzer yaklaşımla;  $\frac{3a}{b} \in \widehat{\mathbb{Q}}$  noktalarının da  $\infty$  un yörüngesinde olduğu kolayca görülür.

Şimdi de son olarak  $\frac{a}{b} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ ,  $(a, b) = 1$  ve  $a, b \not\equiv 0 \pmod{3}$  durumunu inceleyelim.

$(a, b) = 1$  olduğundan  $\exists x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$  öyle ki  $ay_1 - bx_1 = 1$  dir. Böylece,  $T = \begin{pmatrix} a & x_1 \\ b & y_1 \end{pmatrix} \in \Gamma$  dir ve dolayısıyla  $x_1, y_1 \equiv 0 \pmod{3}$  olamaz.  $x_1, y_1 \not\equiv 0 \pmod{3}$  ise  $T \in \Gamma^3$  olup problem yoktur.

Varsayalım ki,  $x_1 = 3l$  ve  $y_1 \not\equiv 0 \pmod{3}$  olsun.  $ay_1 - bx_1 = 1$  denkleminin genel çözümünü  $n \in \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$  olmak üzere  $x = 3l + an$ , ve  $y = y_1 + (-b)n$  şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla,  $n = 3k - 1$  ya da  $n = 3k + 1$  şeklindedir.

$n = 3k + 1$  ise,  $x = 3l + 3ak + a$ , ( $a \not\equiv 0 \pmod{3}$ ) ve  $y = y_1 - 3bk - b$  dir. Burada  $y_1 - b \not\equiv 0 \pmod{3}$  olmasını istiyoruz. Varsayalım ki  $y_1 - b \equiv 0 \pmod{3}$  olsun.

Bu takdirde,  $n = 3k - 1$  alınırsa  $x = 3l + 3ak - a$ , ( $a \not\equiv 0 \pmod{3}$ ) ve  $y = y_1 - 3bk + b$  elde edilir. Ayrıca bu durumda  $y_1 + b \not\equiv 0 \pmod{3}$  olacağından  $y \not\equiv 0 \pmod{3}$  elde edilir. Yani,  $n = 3k + 1$  için eğer  $y \equiv 0 \pmod{3}$  oluyorsa,  $n = 3k - 1$  için kesinlikle  $y \not\equiv 0 \pmod{3}$  elde edilecektir ki  $n = 3k \pm 1$  için  $a \not\equiv 0 \pmod{3}$  olduğundan  $x \not\equiv 0 \pmod{3}$  tür. Böylece,  $x_1 \not\equiv 0 \pmod{3}$  olarak seçilebilir.

Dolayısıyla  $T(\infty) = \frac{a}{b}$  olacak şekilde en az bir  $T \in \Gamma^3$  vardır. Böylece  $\Gamma^3$  grubunun  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerindeki hareketinin transitifliği gösterilmiştir.

ii)  $\Gamma^3$  grubu  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerinde transitif olarak hareket ettiği için  $\widehat{\mathbb{Q}}$  daki herhangi iki noktanın sabitleyeni  $\Gamma^3$  grubunda eşleniktirler. Bu yüzden  $\infty$  noktasının sabitleyeni olan  $\Gamma_\infty^3$  grubunu göz önüne almak yeterlidir.

$$\Gamma_\infty^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ olduğu açıktır.}$$

$$\text{Gerçekten, } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ eşitliğinden } a = 1, c = 0, d = 1 \text{ elde edilir.}$$

Ayrıca  $ab + cd \equiv 0 \pmod{3}$  olduğundan,  $b \equiv 0 \pmod{3}$  tür. Bu ise,  $\Gamma_\infty^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  olduğunu doğrular. ■

$n \in \mathbb{Z}$  olmak üzere,  $\Gamma_0^3(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^3 : c \equiv 0 \pmod{n} \right\}$  olsun. Bu takdirde  $\Gamma_0^3(n)$ ,  $\Gamma^3$  grubunun bir alt grubudur.

Burada,  $n \in \mathbb{N}$  için  $\Gamma_\infty^3 \leq \Gamma_0^3(n) \leq \Gamma^3$  olduğu açıktır. Ayrıca  $n > 1$  ise,  $\Gamma_\infty^3 < \Gamma_0^3(n) < \Gamma^3$  dir. Gerçekten:

$$n \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n+1 & n+2 \end{pmatrix} \in \Gamma^3 \text{ fakat, } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n+1 & n+2 \end{pmatrix} \notin \Gamma_0^3(n),$$

$$n \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ n+1 & -n \end{pmatrix} \in \Gamma^3 \text{ fakat, } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ n+1 & -n \end{pmatrix} \notin \Gamma_0^3(n),$$

$$n \equiv 2 \pmod{3} \text{ ise } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma^3 \text{ fakat, } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix} \notin \Gamma_0^3(n) \text{ dir.}$$

**Lemma 2.1.3. [11]**

$$|\Gamma_0^3(n) : \Gamma_\infty^3(n)| = 3 \text{ tür.} \blacksquare$$

Lemma 1.7.5'ten biliyoruz ki  $\Gamma^3$  grubunun  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerindeki hareketi imprimitiftir. Yani; özdeşlik ve evrensel bağıntıların dışında da bağıntılar vardır.

Şimdi, Teorem 1.7.5'te (1.27) ile verilen bağıntıdan yola çıkarak " $\approx$ " ile gösterilen ve  $\Gamma_0^3(n)$  grubuyla  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerine indirgenmiş olan  $\Gamma^3$  \_ invaryant denklik bağıntısını aşağıda oluşturalım.

$$v = \frac{r}{s} \text{ ve } w = \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} \text{ olsun.}$$

$\Gamma^3$  grubunun  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerindeki hareketinin transitifliğinden,

$v = g(\infty)$  ve  $w = g'(\infty)$  olacak şekilde  $g, g' \in \Gamma^3$  elemanları vardır. Bu takdirde bu  $g$  ve  $g'$  elemanları aşağıdaki (2.1) de gösterildiği gibidir.

$$g = \begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix}, \quad g' = \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Böylece Teorem 1.7.5 gereği;

$$v \approx w \Leftrightarrow g^{-1}g' \in \Gamma_0^3(n) \quad (2.2)$$

(2.2) ile verilen bağıntı doğru olduğundan aşağıda (2.3) ile verilen bağıntı da doğrudur.

$$v \approx w \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \pmod{n} \quad (2.3)$$

(2.2) ve (2.3) ile verilen bağıntılardan  $\infty \in \widehat{\mathbb{Q}}$  elemanını içeren  $[\infty]$  denklik sınıfının aşağıdaki gibi olacağı kolayca görülür.

$$[\infty] = \left\{ \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0 \pmod{n} \right\} \quad (2.4)$$

Literatür gereği (2.4) ile verilen denklik sınıfına grafın  $\infty$  bloğu diyeceğiz.

Bu durumda, blokların sayısı;  $\psi(n) = |\Gamma^3: \Gamma_0^3(n)|$  dir [11].

Burada verdiğimiz denklik bağıntıları [6] da ki ile aynı olmasına rağmen, [6] da ki  $F_{1,1}$  alt grafının bağlantılı olduğu kolayca gösterilir ancak burada aksine  $F_{1,1}^3$  alt grafının bağlantısız olduğunu göreceğiz.

Böylece, farklı alt gruplar kullanmakla alt grafın karakterinin değişebileceğini gördük.

## 2.2. $F_{u,n}^3$ Alt Grafi

$(\alpha, \beta) \in \widehat{\mathbb{Q}} \times \widehat{\mathbb{Q}}$  ve  $g \in \Gamma^3$  olmak üzere,  $\Gamma^3$  grubunun,  $\widehat{\mathbb{Q}} \times \widehat{\mathbb{Q}}$  kümesi üzerindeki  $g : (\alpha, \beta) \rightarrow (g(\alpha), g(\beta))$  şeklinde tanımlı hareketini ele alalım.

Bu hareketin yörüngeleri alt yörüngeler olarak adlandırılır.

$(\alpha, \beta)$  ikilisini içeren  $O^3(\alpha, \beta)$  alt yörüngesinden  $G^3(\alpha, \beta)$  alt yörüngesel grafını oluşturabiliriz.

Bu alt yörüngesel grafın köşeleri  $\widehat{\mathbb{Q}}$  kümesinin elemanlarıdır ve kenarları,  $(a, b) \in O^3(\alpha, \beta) = \{(g(\alpha), g(\beta)) : g \in \Gamma^3\}$  çiftleri olup bu kenarları  $a \rightarrow b$  ile göstereceğiz.

Bu kenarlar üst yarı düzlemde birer hiperbolik jeodezik olarak gösterilirler.

$\Gamma^3$ ,  $\widehat{\mathbb{Q}}$  üzerinde transitif olarak hareket ettiği için her alt yörünge,  $\frac{u}{n}$  ( $n \geq u, (u, n) = 1$ ) noktaları için  $(\infty, \frac{u}{n})$  çiftini içerir.

Bu durumda alt yörüngesel grafi kısaca  $G_{u,n}^3$  ile göstereceğiz.

$\Gamma^3$ , blokları geçişli olarak permüte ettiği için, [6] da olduğu gibi bloklara karşılık gelen tüm alt graflar izomorfiktirler.

Böylece,  $G_{u,n}^3$  nin köşeleri,  $[\infty] = \left\{ \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0 \pmod{n} \right\}$  bloğunu oluşturan  $F_{u,n}^3$  alt grafını göz önüne alacağız.

### **Teorem 2.2.1. [11]**

$F_{u,n}^3 = F_{u',n'}^3 \Leftrightarrow n = n'$  ve  $u \equiv u' \pmod{3n}$  dir.

**İspat:**  $F_{u,n} = F_{u',n'} \Leftrightarrow O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) = O\left(\infty, \frac{u'}{n'}\right) \Leftrightarrow \exists T \in \Gamma^3 : T(\infty) = \infty$  ve  $T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u'}{n'}$  tür.  $T(\infty) = \infty$  olduğundan  $T \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \Gamma_\infty^3$  tür.

Buradan,  $T = \begin{pmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  dir. Ayrıca  $T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u'}{n'}$  olduğundan  $\begin{pmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ n' \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{u+3kn}{n} = \frac{u'}{n'}$  olup  $(u', n') = 1$  olduğundan  $n = n'$  ve  $u' = u + 3kn \Rightarrow u' \equiv u \pmod{3n}$  dir.

Böylece  $F_{u,n} = F_{u',n'} \Leftrightarrow n = n'$  ve  $u \equiv u' \pmod{3n}$  dir. ■

**Sonuç 2.2.2. [11]**

$n \in \mathbb{N}$  keyfi sabit olmak üzere  $3\phi(n)$  tane farklı  $G_{u,n}$  alt yörüngesel grafi vardır. ■

**Teorem 2.2.3. [11]**

$$\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in F_{u,n} \Leftrightarrow$$

- a)  $r \equiv 0 \pmod{3}$  ise  $x \equiv \pm ur \pmod{n}$ ,  $y \equiv \pm us \pmod{3n}$  ve  $ry - sx = \pm n$
- b)  $s \equiv 0 \pmod{3}$  ise  $x \equiv \pm ur \pmod{3n}$ ,  $y \equiv \pm us \pmod{n}$  ve  $ry - sx = \pm n$
- c)  $r, s \not\equiv 0 \pmod{3}$  ise  $x \equiv \pm ur \pmod{n}$ ,  $x \not\equiv \pm ur \pmod{3n}$ ,  
 $y \equiv \pm us \pmod{n}$ ,  $y \not\equiv \pm us \pmod{3n}$  ve  $ry - sx = \pm n$  dir. ■

Bu Teorem [11] de  $F_{u,n}$  için ispatlanmış olup burada  $u = n = 1$  alınarak özel bir durum ele alınmıştır. Bu özel durumdan elde edilen  $F_{1,1}^3$  alt grafini kısaca  $F^3$  ile göstermiştik.

Böylece, Teorem 2.2.3'ün bir sonucu olarak aşağıda  $F^3$  alt grafi için kenar şartlarını verebiliriz.

**Sonuç 2.2.4.**

$$\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \text{ } F^3 (= F_{1,1}^3) \text{ grafinde bir kenardır } \Leftrightarrow$$

- a)  $r \equiv 0 \pmod{3}$  ise,  $y \equiv \pm s \pmod{3}$ ,  $ry - sx = \pm 1$ ,
- b)  $s \equiv 0 \pmod{3}$  ise,  $x \equiv \pm r \pmod{3}$ ,  $ry - sx = \pm 1$ ,
- c)  $r, s \not\equiv 0 \pmod{3}$  ise,  $x \not\equiv \pm r \pmod{3}$ ,  $y \not\equiv \pm s \pmod{3}$ ,  $ry - sx = \pm 1$ .

**İspat:** Teorem 2.2.3 te  $u = n = 1$  alınarak ispat tamamlanır. ■

Buradan  $F^3$  için aşağıdaki iki lemma kolayca elde edilir.

**Lemma 2.2.5**

$$F^3 \text{ te } \frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \text{ dir } \Leftrightarrow F^3 \text{ te } \frac{x}{y} \rightarrow \frac{r}{s} \text{ dir.}$$

**İspat:**  $F^3$  te  $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$  olsun. Sonuç 2.2.4 de ki üç durum benzerlik gösterdiği için  $r \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $ry - sx = 1$  ( bu durumda  $y \equiv s \pmod{3}$  tür ) olduğunu varsayıp  $\frac{x}{y} \rightarrow \frac{r}{s}$  olduğunu göstereceğiz. Diğer tüm durumlar tamamen benzer şekilde gösterilir.

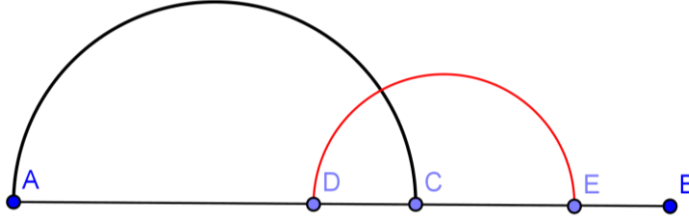
$r \equiv 0 \pmod{3}$  ve  $ry - sx = 1$  olduğundan Sonuç 2.2.4(a) gereği  $x, y, s \not\equiv 0 \pmod{3}$  tür. Bu durumda  $\frac{x}{y} \rightarrow \frac{r}{s}$  olduğunu gösterirken Sonuç 2.2.4(c) yi göz önüne almalıyız.

$ry - sx = 1$  olduğundan,  $xs - ry = -1$  dir. O zaman göstermeliyiz ki;  $y \not\equiv -s \pmod{3}$  ve  $x \not\equiv -r \pmod{3}$  tür.  $y, s \not\equiv 0 \pmod{3}$  ve  $y \equiv s \pmod{3}$  olduğundan  $y \not\equiv -s \pmod{3}$  kolaylıkla elde edilir.

Benzer şekilde;  $r \equiv 0 \pmod{3}$  ve  $x \not\equiv 0 \pmod{3}$  olduğundan  $x \not\equiv -r \pmod{3}$  elde edilir. Böylece Sonuç 2.2.4(c) gereği,  $\frac{x}{y} \rightarrow \frac{r}{s} F^3$  te kenardır. ■

**Lemma 2.2.6. [6]** Üst yarı düzlemde  $F^3$  grafının kenarları kesişmez. ■

Bu Lemmaya göre  $F^3$  grafında aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi kesişen iki kenar bulunmaz.



Şekil 11. Kesişen İki Kenar

**Teorem 2.2.7.[11]**

$F_{u,n}$  grafi kendisiyle eşleşmiştir ancak ve ancak,  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$  ve  $u^2 \equiv -1 \pmod{n}$  dir. ■

**Teorem 2.2.8. [11]**

$\Gamma_0^3(n)$  alt grubu  $F_{u,n}$  grafının köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder. ■

### 2.3. $F^3$ Grafının Bağlantısızlığı

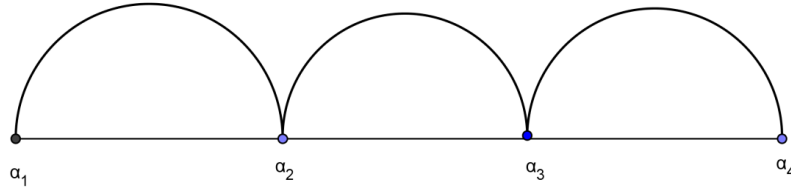
Bu kesimde çalışmamızın ana problemi olan  $F^3$  grafının bağlantılılık durumu ele alınacaktır.

**Tanım 2.3.1.**

$m \in \mathbb{N}$  ve  $m \geq 2$  için,  $v_1, v_2, \dots, v_m$   $F^3$  grafının köşelerinin sonlu bir dizisi olsunlar. Bu takdirde,  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$  gösterimi  $F^3$ 'te bir sonlu yol olarak adlandırılır. Bu durumda,

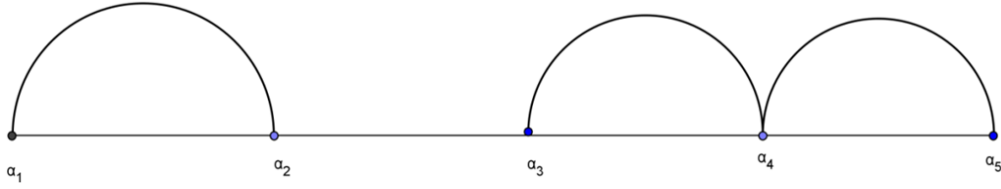
“ $F^3$  ün  $\Lambda$  alt grafına bağlantılıdır denir :  $\Leftrightarrow \Lambda$  nın her  $x$  ve  $y$  köşesi  $F^3$  te sonlu bir yol ile bağlıdır.”

Aksi takdirde,  $\Lambda$  alt grafına bağlantısızdır denir.



Şekil 12. Bağlantılı graf.

Yukarıdaki Şekil 11'de  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  elemanlarını köşe kabul eden  $K$  grafi bağlantılıdır.



Şekil 13. Bağlantısız graf.

Yukarıdaki Şekil 12'de  $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  kümesinin elemanlarını köşe kabul eden  $K$  grafi bağlantılı değildir.

**Teorem 2.3.2 [11]**

$$F_{0,1}$$

$$F_{1,2}, F_{3,2}, F_{5,2}$$

$$F_{1,3}, F_{2,3}, F_{4,3}, F_{5,3}, F_{7,3} \text{ ve } F_{8,3}$$

$$F_{1,4}, F_{3,4}, F_{5,4}, F_{7,4}, F_{9,4} \text{ ve } F_{11,4}$$

alt grafları bağlantısızdır. ■

**Teorem 2.3.3. [11]**

$n \geq 5$  için  $F_{u,n}$  alt grafları bağlantısızdır. ■

Teorem 2.3.2 ve Teorem 2.3.3 ile [11] de  $F_{u,n}$  graflarının bağlantısızlığı ile ilgili elde edilmiş sonuçlar verildi. Buradan hareketle [11] de bir konjektür olarak verilen  $F_{1,1}$  grafinin bağlantısızlığı bu bölümde ele alındı.

**Önerme 2.3.4**

$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^3$ ,  $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{a+b}{c+d} > 1$ ,  $(c+d) - (a+b) = -1$  olsun. Bu takdirde;

$\frac{1}{1} \rightarrow \frac{a+b}{c+d} F^3$  te bir kenardır  $\Leftrightarrow a \equiv b \equiv c \equiv 2 \pmod{3}$ ,  $d \equiv 1 \pmod{3}$  dir.

**İspat:** Gerek Şart:  $\frac{1}{1} \rightarrow \frac{a+b}{c+d} F^3$  te bir kenar olsun. Bu durumda, Sonuç 2.2.4 (c) den,  $a+b \not\equiv 2 \pmod{3}$  ve  $c+d \not\equiv 2 \pmod{3}$  olduğu görülür. Diğer taraftan,  $(c+d) - (a+b) = -1$  olduğu da göz önüne alınırsa  $a+b \equiv 1 \pmod{3}$  ve  $c+d \equiv 0 \pmod{3}$  olduğu elde edilir.  $a+b \equiv 1 \pmod{3}$  ve  $c+d \equiv 0 \pmod{3}$  denkliklerinin yanı sıra  $T \in \Gamma^3$  gereği  $ab+cd \equiv 0 \pmod{3}$  olduğundan  $a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv 1 \pmod{3}$  olduğu kolaylıkla görülür.  $c+d \equiv 0 \pmod{3}$  gerçeğinden yola çıkarak aşağıdaki üç farklı durum için  $a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv 1 \pmod{3}$  denkleğini sağlayan  $a, b, c$  ve  $d$  çözümlerini elde edeceğiz.

1.Durum:  $c \equiv d \equiv 0 \pmod{3}$  olsun. Buradan,  $a^2+b^2 \equiv 1 \pmod{3}$  elde edilir.  $a+b \equiv 1 \pmod{3}$  olduğunda göz önüne alırsak  $ab \equiv 0 \pmod{3}$  olduğu görülür.  $ab \equiv 0 \pmod{3}$  ise,  $a \equiv 0 \pmod{3}$  veya  $b \equiv 0 \pmod{3}$  dir.  $a \equiv 0 \pmod{3}$  için,  $c \equiv 0 \pmod{3}$  olduğundan  $ad-bc \equiv 0 \pmod{3}$  elde edilir ki bu  $ad-bc = 1$  ile çelişir.  $b \equiv 0 \pmod{3}$  için de  $d \equiv 0 \pmod{3}$  olduğundan  $ad-bc \equiv 0 \pmod{3}$  elde edilir ki bu  $ad-bc = 1$  ile çelişir. Böylece,  $c \equiv d \equiv 0 \pmod{3}$  için çözüm yoktur.

2.Durum:  $c \equiv 1 \pmod{3}$  ve  $d \equiv 2 \pmod{3}$  olsun. Buradan, kolaylıkla  $a^2+b^2 \equiv 2 \pmod{3}$  elde edilir.  $a+b \equiv 1 \pmod{3}$  olduğunda göz önüne alırsak  $ab \equiv 1 \pmod{3}$  ve dolayısıyla  $a \equiv b \equiv 2 \pmod{3}$  elde edilir. Ancak bu durumda  $ad-bc \equiv 2 \pmod{3}$  çelişkisi elde edilir. Böylece,  $c \equiv 1 \pmod{3}$  ve  $d \equiv 2 \pmod{3}$  için de çözüm yoktur.

3.Durum:  $c \equiv 2 \pmod{3}$  ve  $d \equiv 1 \pmod{3}$  kongrüanslarını kabul edelim. Buradan,  $a^2+b^2 \equiv 2 \pmod{3}$  elde edilir.  $a+b \equiv 1 \pmod{3}$  olduğunu da göz önüne alırsak  $ab \equiv 1 \pmod{3}$  ve dolayısıyla  $a \equiv b \equiv 2 \pmod{3}$  elde edilir ki  $ad-bc = 1$  eşitliği ile birlikte  $a \equiv b \equiv c \equiv 2 \pmod{3}$ ,  $d \equiv 1 \pmod{3}$  istenilen çözümdür.

Yeter şart: Tersine,  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^3$ ,  $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{a+b}{c+d} > 1$ ,  $(c+d) - (a+b) = -1$  ve  $a \equiv b \equiv c \equiv 2 \pmod{3}$ ,  $d \equiv 1 \pmod{3}$  olsun. Bu durumda,  $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{a+b}{c+d}$  olup  $\frac{1}{1} \rightarrow \frac{a+b}{c+d}$  nin  $F^3$  te bir kenar olduğunu görelim. Sonuç 2.2.4 (c) yi göz önüne aldığımızda,



$r \equiv s \equiv 1$  ve  $ry - sx = -1$  durumları söz konusudur. Burada,  $x = a + b \equiv 1 \pmod{3}$  ve  $y = c + d \equiv 0$  olup Sonuç 2.2.4 (c) ye göre  $\frac{1}{1} \rightarrow \frac{a+b}{c+d} F^3$ 'te bir kenardır. ■

Yukarıda verdiğimiz Önerme 2.3.4 ile  $\frac{1}{1} \rightarrow T\left(\frac{1}{1}\right)$ 'i  $F^3$ 'te kenar yapan  $T$  dönüşümlerinin bir sınıfını belirlemiş olduk.

Bu önermenin bir sonucu olarak şimdi vereceğimiz önerme ile  $F^3$  te  $\frac{1}{1}$  in gideceği en uzak köşenin  $\frac{4}{3}$  olacağını göreceğiz.

### Önerme 2.3.5

$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^3$ ,  $T\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{a+b}{c+d} > 1$  olsun. Bu takdirde;

i.  $\frac{1}{1} \rightarrow T\left(\frac{1}{1}\right) F^3$  te bir kenar ise  $T\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{a+b}{c+d} \leq \frac{4}{3}$  tür.

ii.  $\frac{1}{1} \rightarrow \frac{4}{3} F^3$  te bir kenardır ancak ve ancak,  $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  olmak üzere  $T \in \Gamma^3$

dönüşümü  $T = \begin{pmatrix} -1 + 12n & 5 - 12n \\ -1 + 9n & 4 - 9n \end{pmatrix}$  biçimindedir.

iii.  $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  olmak üzere  $T = \begin{pmatrix} -1 + 12n & 5 - 12n \\ -1 + 9n & 4 - 9n \end{pmatrix} \in \Gamma^3$  biçimindeki dönüşümler hiperbolik dönüşümlerdir ve bu dönüşümlerin sabit noktalarının biri; çekici sabit nokta (attracting fixed point), diğeri; itici sabit noktadır (repelling fixed point) [15].

### İspat:

i.  $T\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{a+b}{c+d} > 1$  ve  $\frac{1}{1} \rightarrow T\left(\frac{1}{1}\right)$  i  $F^3$  te bir kenar ise Sonuç 2.2.4 den,

$a + b = c + d + 1$  dir. Böylece,  $T\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{a+b}{c+d} = 1 + \frac{1}{c+d}$  olup  $\frac{1}{1} \rightarrow 1 + \frac{1}{c+d} F^3$

grafında bir kenardır.

Önerme 2.3.4 ten  $c + d \equiv 0 \pmod{3}$  olduğundan  $c + d$  nin en küçük pozitif değeri 3 olur. Dolayısı ile  $T\left(\frac{1}{1}\right) = 1 + \frac{1}{c+d} \leq \frac{4}{3}$  elde edilir.

ii.  $T\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{4}{3} = \frac{a+b}{c+d}$  olsun.  $a + b = c + d + 1$  olduğundan  $T = \begin{pmatrix} a & 4 - a \\ c & 3 - c \end{pmatrix}$

biçimindedir.  $T \in \Gamma$  olduğundan,  $3a - 4c = 1$  ve dolayısıyla  $a = -1 + 4k$  ve  $c = -1 + 3k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  dir. Dolayısıyla,  $T = \begin{pmatrix} -1 + 4k & 5 - 4k \\ -1 + 3k & 4 - 3k \end{pmatrix}$  biçiminde olur. Öte

yandan  $T \in \Gamma^3$  olduğundan  $(-1 + 4k)(5 - 4k) + (-1 + 3k)(4 - 3k) \equiv 0 \pmod{3}$  dir.

Bu son denklikten  $k \equiv 0 \pmod{3}$  elde edilir. Böylece,  $k = 3n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  biçimindedir.

Sonuç olarak;  $T$  dönüşümü  $T = \begin{pmatrix} -1 + 12n & 5 - 12n \\ -1 + 9n & 4 - 9n \end{pmatrix}$  biçimindedir.

Önermenin tersi açıktır.

iii.  $T = \begin{pmatrix} -1 + 12n & 5 - 12n \\ -1 + 9n & 4 - 9n \end{pmatrix}$  dönüşümünün izi  $3n + 3$  olup  $\forall n \geq 0$  için

$|3n + 3| > 3 > 2$  olduğundan bu tip dönüşümler hiperboliktirler. Bu şekildeki  $T$  dönüşümlerinin sabit noktaları;

$$z_{1/2} = \frac{(21n - 5) \pm \sqrt{9n^2 + 18n + 5}}{18n - 2} \quad (2.5)$$

dir.

Öte yandan;  $T'(z) = \frac{1}{[(9n-1)z+4-9n]^2}$  olup,  $\forall n \geq 0$  tam sayısı için

$|T'(z_1)| = \left(\frac{2}{3n+3+\sqrt{9n^2+18n+5}}\right)^2 < 1$  ve  $|T'(z_2)| = \left(\frac{2}{3n+3-\sqrt{9n^2+18n+5}}\right)^2 > 1$  dir. Böylece, (2.5) deki  $z_1$  ve  $z_2$  sabit noktaları için;  $|T'(z_1)| < 1$  olduğundan  $z_1$ 'in bir çekici sabit nokta,  $|T'(z_2)| > 1$  olduğundan  $z_2$ 'nin de bir itici sabit nokta olduğu elde edilir ([15] s. 405). ■

Önerme 2.3.5 (ii) ile belirlenen  $T = \begin{pmatrix} -1 + 12n & 5 - 12n \\ -1 + 9n & 4 - 9n \end{pmatrix}$  dönüşümü için  $T^2(1) = \frac{12n+11}{9n+8}$  olup,  $T^2(1) - T(1) = \frac{1}{27n+24}$  dir. Böylece,  $T(1) \rightarrow T^2(1)$  kenarı göz önüne alınırsa  $T(1)$  ve  $T^2(1)$  köşeleri arasındaki en uzak mesafe;  $n = 0$  için elde edilen  $\frac{1}{24}$  olacaktır.

**Örnek 1:** Önerme 2.3.5 te  $n = 0$  için,  $T = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \Gamma^3$  dönüşümü ile  $\frac{1}{1} \rightarrow \frac{4}{3} \rightarrow \frac{11}{8}$  şeklinde en uzak köşeler oluşur.

Ayrıca,  $T = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  ile elde edilen  $T(z) = \frac{z-5}{z-4}$  dönüşümünün sabit noktaları  $z_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$  ve  $z_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$  dir. Bu sabit noktalardan  $z_1$  çekici,  $z_2$  itici sabit noktadır.

Şimdi, bizim çalışmamızın ana problemi olan  $F^3$  grafinin bağlantılılık özelliklerini irdelediğimiz teoremi ifade ve ispat edeceğiz.

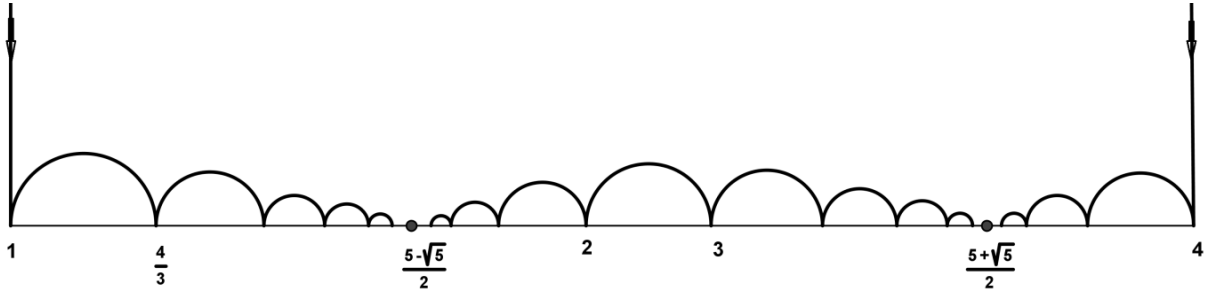
Teoremi burada ifade ettikten sonra ispatı şekillendirmek için yeni bir dizi lemma, önerme ve teorem ispatla paralel bir şekilde verilecektir.

### Teorem 2.3.6

$F^3$  grafi bağlantısız bir graftır.

**İspat:** Sonuç 2.2.4'ten kolayca görülür ki  $F^3$  periyodu 3 olan periyodik bir graftır. Yani,  $F^3$  te  $a \rightarrow b$  ise yine  $F^3$  te  $\forall m \in \mathbb{Z}$  için  $a + 3m \rightarrow b + 3m$  dir. Böylece, bir  $m \in \mathbb{Z}$  bulunabilir öyle ki  $a + m$  ve  $b + m$  den sadece biri  $\infty$  dur veya  $a + m$  ve  $b + m$  nin her ikisinde  $[1, 4]$  kapalı aralığının içindedir.

Bu yüzden aşağıda Şekil 14'te de görüldüğü gibi hesaplamamızı yalnızca  $[1, 4]$  aralığı için yapabiliriz.



Şekil 14.  $F^3$  Grafi

$T = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \in \Gamma^3$  hiperbolik dönüşümünü göz önüne alalım. Bu elemana karşılık gelen  $T(z) = \frac{z-5}{z-4}$  dönüşümü açık olarak  $[1, 4] \cap \mathbb{Q}$  üzerinde kesin artandır ve şekilde gösterilen  $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$  ve  $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$  noktaları dönüşümün sabit noktalarıdır (  $T$  dönüşümü hiperboliktir). Üstelik,  $T^m(\infty) \rightarrow T^m\left(\frac{1}{1}\right)$  kenarının negatif olmayan tüm  $m$  tam sayıları için  $F^3$  te bir kenar olduğu kolayca gösterilir.

Gerçekten; tümevarım yöntemiyle,

$$m = 1 \text{ için, } T(\infty) = T\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{1}{1} \rightarrow \frac{4}{3} = T\left(\frac{1}{1}\right) \text{ olup önerme doğru.}$$

$m = k$  için,  $T^k(\infty) \rightarrow T^k\left(\frac{1}{1}\right)$  olsun. Bu durumda göstermeliyiz ki,  $m = k + 1$  için de  $T^{k+1}(\infty) \rightarrow T^{k+1}\left(\frac{1}{1}\right)$  dir. Gerçekten;

$T^{k+1}(\infty) = T(T^k(\infty)) \rightarrow T\left(T^k\left(\frac{1}{1}\right)\right) = T^{k+1}\left(\frac{1}{1}\right)$  elde edilir ki böylece, her  $m \in \mathbb{N}$  için  $T^m(\infty) \rightarrow T^m\left(\frac{1}{1}\right)$  olduğu görüldü.

Buradan,  $\forall m$  için,  $T^m(1) = T^m(T(\infty)) \rightarrow T^m(T(1)) = T^{m+1}(1)$  ve  $T^m(\infty) \rightarrow T^m\left(\frac{1}{1}\right) = T^m(T(\infty)) = T^{m+1}(\infty)$  yani,

$$T^m(\infty) \rightarrow T^{m+1}(\infty) \quad (2.6)$$

elde edilir. Böylece eğer;

$$\frac{a}{b} := T^m\left(\frac{1}{0}\right) \rightarrow T^{m+1}\left(\frac{1}{0}\right) =: \frac{c}{d} \text{ ise } \frac{a}{b} = 1 + \frac{a-b}{b} \text{ ve}$$

$$T^{m+1}\left(\frac{1}{0}\right) = T\left(T^m\left(\frac{1}{0}\right)\right) = T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a-5b}{a-4b} = 1 + \frac{b}{3b-(a-b)} \text{ olduğundan,}$$

$$1 + \frac{a-b}{b} \rightarrow 1 + \frac{b}{3b-(a-b)} \quad (2.7)$$

$F^3$  te bir kenardır.

Örnek olarak;  $F^3$  grafında " $\infty \rightarrow \frac{1}{1} \rightarrow \frac{4}{3} \rightarrow \frac{11}{8}$ " sonlu yolunu elde ederiz.

Bu teoremin ispatını tamamlayabilmek için aşağıda bir dizi teorem, önerme ve lemmayı verelim.

**Lemma 2.3.7**

$T = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \in \Gamma^3$  olsun. Bu takdirde,  $\{T^m(1)\}$  dizisi kesin monoton artandır ve

$$T\left(\frac{1}{0}\right) \rightarrow T\left(\frac{1}{1}\right) \rightarrow T^2\left(\frac{1}{1}\right) \rightarrow \dots \rightarrow T^m\left(\frac{1}{1}\right) \rightarrow \dots \quad (2.8)$$

dizisi  $F^3$  te artan sırada sonsuz bir yoldur.

**İspat:** Sonuç 2.2.4 ve  $T(z) = \frac{z-5}{z-4}$  dönüşümünün  $[1, 4) \cap \mathbb{Q}$  üzerinde kesin artan olması göz önüne alınırsa sonuç aşıkardır. ■

**Lemma 2.3.8**

$a, b \in \mathbb{N}$  ve  $1 \leq \frac{a}{b} < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$  olsun. Bu takdirde,  $\frac{a}{b} < T\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$  dir.

**İspat:**  $\frac{a}{b} < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$  olduğundan  $2a - 5b < -\sqrt{5}b$  elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının karesini alırsak,  $-a^2 + 4ab < -ab + 5b^2$  eşitsizliği elde edilir ve dolayısıyla buradan  $\frac{a}{b} < \frac{-a+5b}{-a+4b} = T\left(\frac{a}{b}\right)$  elde edilir. Diğer taraftan,  $a^2 - 5ab + 5b^2 > 0$  olduğundan,

$$5(a - 4b)^2 < (3a - 10b)^2 \quad (2.9)$$

dir.  $\frac{a}{b} < 2$  olduğundan (2.9) eşitsizliğinin her iki tarafın karekökünü alırsak,

$$\sqrt{5}(a - 4b) > 3a - 10b \quad (2.10)$$

elde edilir. (2.10) dan  $\sqrt{5} < \frac{3a-10b}{a-4b} = 5 + \frac{10b-2a}{a-4b}$  elde edilir ve buradan,  $\sqrt{5} - 5 < (-2) \frac{-a+5b}{-a+4b}$  olur.

Sonuç olarak,  $T\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$  dir. ■

### Lemma 2.3.9

$T$  yukarıdaki gibi olmak üzere  $a$  ve  $b$  doğal sayıları için  $1 \leq \frac{a}{b} < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$  olsun. Bu takdirde  $\frac{a}{b} \rightarrow T\left(\frac{a}{b}\right)$   $F^3$  te bir kenardır  $\Leftrightarrow u^2 = 5b^2 + 4$  ve  $a = \frac{5b-\sqrt{5b^2+4}}{2}$  olacak şekilde  $u$  doğal sayısı vardır.

**İspat:**  $\frac{a}{b} \rightarrow T\left(\frac{a}{b}\right)$   $F^3$  te bir kenar olsun. Sonuç 2.2.4 ve Lemma 2.3.8 den  $a^2 - 5ab + 5b^2 - 1 = 0$  elde edilir.

Bu ikinci dereceden denklemi  $a$  ya göre çözdüğümüzde  $\frac{a}{b} < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$  olduğunu da göz önüne alırsak  $a = \frac{5b-\sqrt{5b^2+4}}{2}$  elde edilir.

Buradan,  $a$  ve  $b$  tam sayı olduğundan  $\sqrt{5b^2 + 4}$  sayısının bir  $u$  tam sayısı olduğu görülür. Böylece gerek şart gösterilmiş olur. Şimdi yeter şartı gösterelim.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{-5b+\sqrt{5b^2+4}}{2} & 5b \\ -b & \frac{5b+\sqrt{5b^2+4}}{2} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

elemanının  $\Gamma^3$  te ve  $M\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{a}{b}$ ,  $M\left(\frac{1}{1}\right) = T\left(\frac{a}{b}\right)$  olduğu kolaylıkla görülür.

Gerçekten; (2.11) ile verilen matrisin determinantından  $\frac{-5b+\sqrt{5b^2+4}}{2} \cdot \frac{5b+\sqrt{5b^2+4}}{2} - (5b) \cdot (-b) = 1$  olup  $M \in \Gamma$  dir. Ayrıca,

$$\frac{-5b + \sqrt{5b^2 + 4}}{2} \cdot 5b - b \cdot \frac{5b + \sqrt{5b^2 + 4}}{2} = -15b^2 + 2b\sqrt{5b^2 + 4} \quad (2.12)$$

eşitliğinden ve her  $b$  için  $b\sqrt{5b^2 + 4} \equiv 0 \pmod{3}$  denkleğinin doğru oluşundan  $M \in \Gamma^3$  elde edilir. Öte yandan,

$$M\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{-5b + \sqrt{5b^2 + 4}}{-2b} = \frac{5b - \sqrt{5b^2 + 4}}{b} = \frac{a}{b} \quad \text{ve} \quad T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{5b - a}{4b - a} = \frac{5b + \sqrt{5b^2 + 4}}{3b + \sqrt{5b^2 + 4}} = M\left(\frac{1}{1}\right) \text{ dir.}$$

Buradan,  $M\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{a}{b}$  ve  $M\left(\frac{1}{1}\right) = T\left(\frac{a}{b}\right)$  dir.

Böylece,  $F^3$  te kenar olma tanımından  $\frac{a}{b} \rightarrow T\left(\frac{a}{b}\right)$   $F^3$  te bir kenardır. ■

### **Teorem 2.3.10**

$\frac{x}{y}$  pozitif rasyonel sayısı  $A := \left\{T^m\left(\frac{1}{0}\right) : m \in \mathbb{N}\right\}$  kümesindedir  $\Leftrightarrow 5y^2 + 4 = u^2$

ve  $x = \frac{5y - \sqrt{5y^2 + 4}}{2}$  olacak şekilde bir  $u$  doğal sayısı vardır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ .) Lemma 2.3.9 dan gerek şart açıktır. Çünkü;  $\frac{x}{y} \in A$  ise,  $\exists m_0 \in \mathbb{N}$  öyle ki

$\frac{x}{y} = T^{m_0}\left(\frac{1}{0}\right) \xrightarrow{(2.6)} T^{m_0+1}\left(\frac{1}{0}\right) = T\left(\frac{x}{y}\right)$  olup, Lemma 2.3.9'dan  $5y^2 + 4 = u^2$  ve  $x = \frac{5y - \sqrt{5y^2 + 4}}{2}$  olacak şekilde bir  $u$  doğal sayısı vardır.

( $\Leftarrow$ .) Tersine hipotez altında biz;  $5y^2 + 4 = u^2$  ve  $x = \frac{5y - \sqrt{5y^2 + 4}}{2}$  olacak şekilde bir  $u$  doğal sayısı bulunabildiğinde  $\frac{x}{y}$  sayısının  $A := \left\{T^m\left(\frac{1}{0}\right) : m \in \mathbb{N}\right\}$  kümesinde olacağını göstereceğiz.  $\lim_{m \rightarrow \infty} T^m\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$  (  $\left\{T^m\left(\frac{1}{0}\right)\right\}$  dizisi monoton artan ) olduğundan,  $y \geq 1$  için  $1 \leq \frac{x}{y} < \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$  olduğu açıktır.  $1 \leq \frac{x}{y} < \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$  için eğer,  $\frac{x}{y}$  elemanı  $A$  da değilse,  $T^k\left(\frac{1}{0}\right) < \frac{x}{y} < T^{k+1}\left(\frac{1}{0}\right)$  olacak şekilde  $k \in \mathbb{N}$  mevcuttur. Buradan,  $\forall k \in \mathbb{N}$  için

$$T^k\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{5a - \sqrt{5a^2 + 4}}{2} \quad (2.13)$$

şeklinde yazılabileceğinden ve (2.7) yi da göz önüne alırsak;

$$T^k\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{5a - \sqrt{5a^2 + 4}}{2} < \frac{5y - \sqrt{5y^2 + 4}}{2} < 1 + \frac{a}{3a - \frac{3a - \sqrt{5a^2 + 4}}{2}} \quad (2.14)$$

elde edilir. Kolaylık açısından,  $v := \sqrt{5a^2 + 4}$  ve  $u := \sqrt{5y^2 + 4}$  yazılırsa,

$$\frac{\frac{5a-v}{2}}{a} < \frac{\frac{5y-u}{2}}{y} < 1 + \frac{a}{\frac{3a+v}{2}} = \frac{\frac{5a+v}{2}}{\frac{3a+v}{2}} \quad (2.15)$$

elde edilir. Biliyoruz ki,

$$\frac{\frac{5y-u}{2}}{y} \rightarrow T\left(\frac{\frac{5y-u}{2}}{y}\right) = 1 + \frac{y}{3y - \frac{3y-u}{2}}$$

$F^3$  te bir kenardır. Lemma 2.2.6 dan,

$$T\left(\frac{\frac{5y-u}{2}}{y}\right) = \frac{\frac{5y+u}{2}}{\frac{3y+u}{2}} < \frac{\frac{5a+v}{2}}{\frac{3a+v}{2}} \quad (2.16)$$

dir ve  $\frac{5a-v}{a} < \frac{5y-u}{y}$  olduğundan,  $5ay - vy < 5ay - au$  eşitsizliği doğrudur. Dolayısıyla buradan  $vy > au$  elde edilir.

Diğer taraftan (2.16) eşitsizliğinden  $\frac{5y+u}{3y+u} < \frac{5a+v}{3a+v}$  elde edilir. Bu son eşitsizlikten  $vy < au$  elde edilir ki bu, daha önce doğruladığımız  $vy > au$  ile çelişir. Böylece ispat biter. ■

### Sonuç 2.3.11.

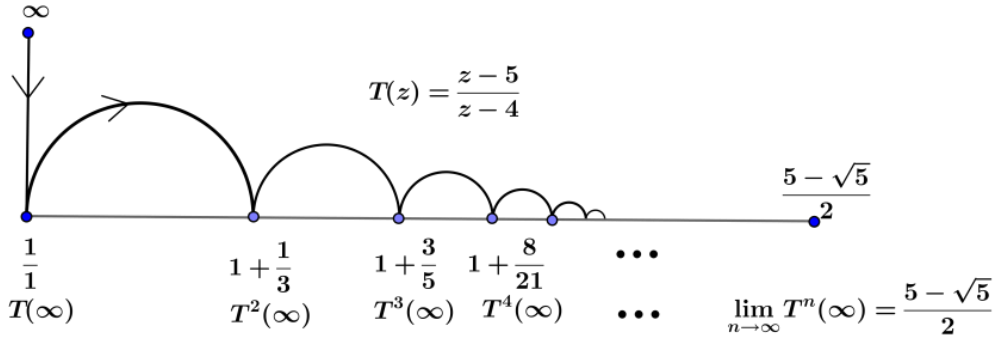
$$\frac{1}{0} \rightarrow 0 + \frac{1}{1} \rightarrow 1 + \frac{1}{3} \rightarrow 1 + \frac{3}{8} \rightarrow \dots \rightarrow 1 + \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1 + \frac{b_n}{3b_n - a_n} \rightarrow \dots \quad (2.17)$$

$F^3$  te sonsuz bir yoldur ve bu yolun tüm köşeleri  $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$  den küçüktür.

Ayrıca,  $1 + \frac{x}{y}$  köşesindeki  $x$  ve  $y$  doğal sayıları için  $5x^2 + 4$  ve  $5y^2 + 4$  tam karedir.

Üstelik,  $a_n = \frac{3b_n - \sqrt{5(b_n)^2 + 4}}{2}$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$  dir.

**İspat:**



Şekil 15. Grafın Birinci Bölümü

Lemma 2.3.7 den (2.17)  $F^3$  te sonsuz bir yoldur. Lemma 2.3.8 ve Teorem 2.3.10 dan bu yolun tüm köşeleri  $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$  sayısından küçüktür ve  $1 + \frac{x}{y}$  köşesindeki  $x$  ve  $y$  doğal sayıları için  $5x^2 + 4$  ve  $5y^2 + 4$  tam karedir.

Yine Teorem 2.3.10'a göre,  $a_n = \frac{3b_n - \sqrt{5(b_n)^2 + 4}}{2}$  olup,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{b_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{b_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3b_n - \sqrt{5(b_n)^2 + 4}}{2b_n}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

elde edilir. ■

**Teorem 2.3.12**

$T = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  ve  $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < \frac{a}{b} \leq 2$  olsun. Bu takdirde;

i.  $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < T\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{a}{b}$  dir.

ii.  $\frac{a}{b} \rightarrow T\left(\frac{a}{b}\right) F^3$  te bir kenardır  $\Leftrightarrow 5b^2 - 4$  tam karedir ve  $a = \frac{5b - \sqrt{5b^2 - 4}}{2}$  dir.

**İspat:**

i.  $T$  dönüşümü göz önüne alınırsa  $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < \frac{a}{b} \leq 2$  için  $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < T\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{a}{b}$  olduğu aşıkardır.

ii. " $\Rightarrow$ "  $\frac{a}{b} \rightarrow T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a+5b}{-a+4b} F^3$  te bir kenar olsun. Buradan,  $a^2 - 5ab + 5b^2 + 1 = 0$  elde edilir ve  $\frac{a}{b} \leq 2$  olduğunu da göz önüne alırsak,  $a = \frac{5b - \sqrt{5b^2 - 4}}{2}$  elde edilir.

Böylece,  $\sqrt{5b^2 - 4}$  ifadesi tam sayı olacağından,  $5b^2 - 4$  ifadesi bir tam karedir.



"  $\Leftarrow$  " Sonuç 2.2.4 gereği,  $\frac{a}{b} = \frac{5b - \sqrt{5b^2 - 4}}{2} \rightarrow T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{5b + \sqrt{5b^2 - 4}}{2} = \frac{x}{y}$   $F^3$  te bir

kenardır. Açıkça burada,  $b \not\equiv 0 \pmod{3}$  olmak durumundadır. Çünkü;  $b = 3t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  olduğunda  $\sqrt{5b^2 - 4} = \sqrt{45t^2 - 4}$  olur ki bu durumda,  $45t^2 - 4 \equiv 2 \pmod{3}$  yani,  $u^2 \equiv 2 \pmod{3}$  elde edilir.  $u^2 \equiv 2 \pmod{3}$  kongrüansının çözümü olmadığından  $b \equiv 0 \pmod{3}$  olamaz. Bu yüzden, Sonuç 2.2.4 de ki (a) veya (c) durumlarından biri söz konusu olabilir.

a) Sonuç 2.2.4(a) da ki gibi  $a \equiv 0 \pmod{3}$  durumunu ele alalım. Yukarıdan,  $b \equiv 1 \pmod{3}$  veya  $b \equiv 2 \pmod{3}$  elde edilir.  $b \equiv 1 \pmod{3}$  durumunda  $a \equiv 2 \pmod{3}$  olacağından  $b \equiv 1 \pmod{3}$  olamaz.  $b \equiv 1 \pmod{3}$  için ise,  $u \equiv 1 \pmod{3}$  ve  $a \equiv 0 \pmod{3}$  olur ve dolayısıyla  $b \equiv y \equiv 2 \pmod{3}$  elde edilir. Diğer taraftan  $T$  dönüşümünün tanımı gereği  $ay - bx = 1$  olduğunu da göz önüne aldığımızda Sonuç 2.2.4 (a) gereği,  $\frac{a}{b} \rightarrow T\left(\frac{a}{b}\right)$   $F^3$  te bir kenardır.

b) Sonuç 2.2.4(c) de ki gibi  $a, b \not\equiv 0 \pmod{3}$  durumunu ele alalım. Yukarıda olduğu gibi  $b \equiv 1 \pmod{3}$  ise,  $a \equiv 2 \pmod{3}$ ,  $u \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $y \equiv 2 \pmod{3}$ ,  $x \equiv 0 \pmod{3}$  elde edilir ve buradan  $b \not\equiv y \pmod{3}$  ve  $x \not\equiv a \pmod{3}$  olduğu görülür. Bu durumda da Sonuç 2.2.4(c) gereği,  $\frac{a}{b} \rightarrow T\left(\frac{a}{b}\right)$   $F^3$  te bir kenardır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

### Sonuç 2.3.13.

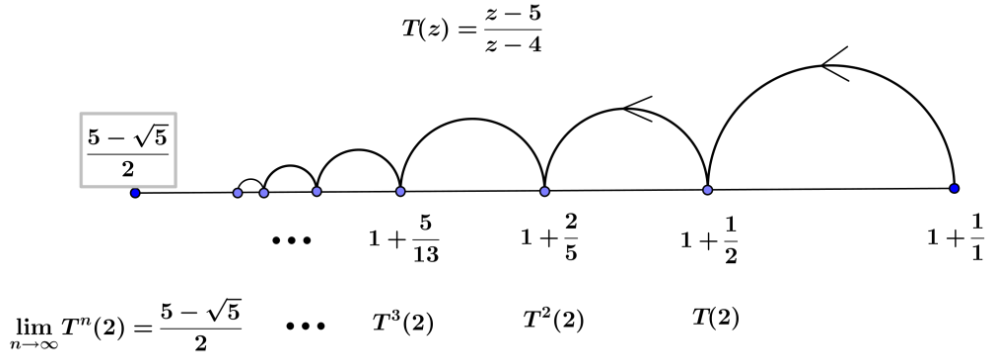
$$3 \xrightarrow{T} 2 = 1 + \frac{1}{1} \xrightarrow{T} 1 + \frac{1}{2} \xrightarrow{T} 1 + \frac{2}{5} \xrightarrow{T} \dots \xrightarrow{T} 1 + \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{T} 1 + \frac{b_n}{3b_n - a_n} \dots \quad (2.18)$$

yolu  $F^3$  te azalan sırada sonsuz bir yoldur. Ayrıca bu yolun tüm köşeleri,  $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$  sayısından büyüktür ve  $1 + \frac{x}{y}$  köşesindeki  $x$  ve  $y$  doğal sayıları için  $5x^2 - 4$  ve  $5y^2 - 4$  tam karedir.

Üstelik,  $a_n = \frac{3b_n - \sqrt{5(b_n)^2 - 4}}{2}$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$  dir.

Burada,  $T$  yukarıdaki gibidir.

**İspat:**



Şekil 16. Grafın İkinci Bölümü

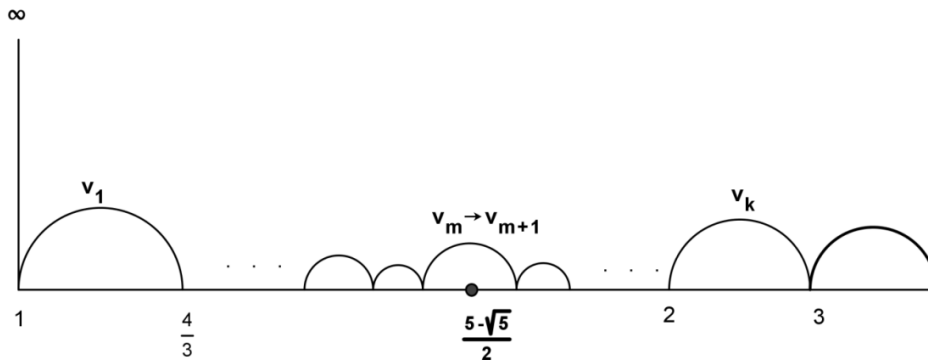
Teorem 2.3.15 den (2.18)  $F^3$  te azalan sırada sonsuz bir yoldur ve bu yolun tüm köşeleri  $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$  ten büyüktür.

Ayrıca aynı teoreme göre,  $1 + \frac{x}{y}$  köşesindeki  $x$  ve  $y$  doğal sayıları için  $5x^2 - 4$  ve  $5y^2 - 4$  tam karedir ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$  dir. ■

**Teorem 2.3.14**

$k$  bir doğal sayı ve  $v_1, v_2, \dots, v_k$  köşeleri  $F^3$  grafının  $[1, 3]$  aralığındaki en azından biri  $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$  sayısından küçük ve en azından biri  $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$  sayısından büyük olan köşeleri olarak verilsin. Bu takdirde,  $F^3$  te  $\infty \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$  biçiminde bir yol yoktur.

**İspat:**



Şekil 17.  $\infty \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$  yolu.

Eğer yukarıdaki şekilde de gösterildiği gibi  $F^3$  te  $\infty \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$  yolu mevcut ise;  $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ,  $F^3$  te köşe olmadığı için  $v_m < \frac{5-\sqrt{5}}{2} < v_{m+1}$  olacak şekilde  $1 \leq m < k$  vardır ve  $v_m \rightarrow v_{m+1}$   $F^3$  ün bir kenarıdır.

Sonuç 2.3.11 ve Sonuç 2.3.13 te ki kenarların (2.17) ve (2.18) dizileri biri artarak biri de azalarak  $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$  sayısına yakınsadığı için Lemma 2.2.6 gereği,

$$T^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_m \rightarrow v_{m+1} = T^n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

olacak şekilde  $m$  ve  $n$  doğal sayıları mevcuttur.

Varsayalım ki,  $n > m$  olsun. O halde; (2.19) ifadesi  $T^{-m}$  ile çarpılırsa ve Teorem 2.3.10 göz önüne alınır en azından bir  $b \in \mathbb{N}$  için,

$$\frac{1}{0} \rightarrow T^{n-m} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5b - \sqrt{5b^2 - 4}}{b} \quad (2.20)$$

elde edilir. Böylece Sonuç 2.2.4 den  $b = 1$  elde edilir. Yani;  $\frac{1}{0} \rightarrow \frac{2}{1}$   $F^3$  ün bir kenarıdır.

Bu durum yine Sonuç 2.2.4 ün (b) şıkkı ile çelişir.

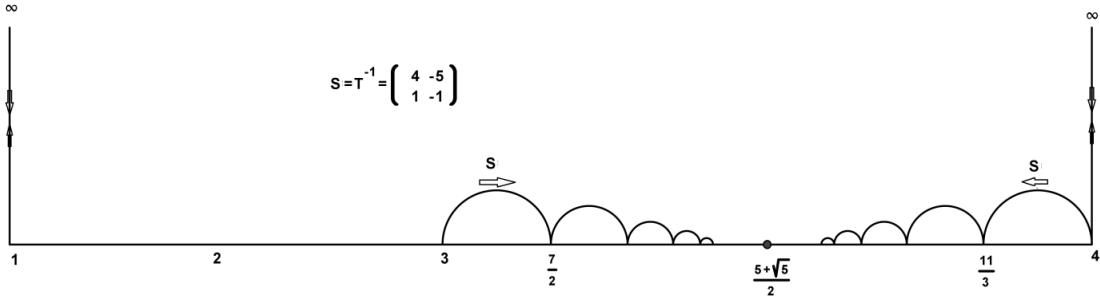
Varsayalım ki,  $n < m$  olsun. Bu durumda yukarıdakine benzer şekilde (2.19) ifadesini  $T^{-n}$  ile çarparsak,

$$T^{m-n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{3}{1} \quad (2.21)$$

elde edilir. Bu durumda,  $T^{m-n} \geq 2$  olur. Fakat Sonuç 2.3.11'e göre her durumda  $T^{m-n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$  olup bu bir çelişkidir.

O halde, geriye sadece  $m = n$  durumu kalıyor. Bu durumda açıkça  $\frac{1}{0} \rightarrow \frac{3}{1}$   $F^3$  grafının bir kenarı olmak zorundadır. Bu ise bir çelişkidir ve dolayısı ile ispat tamamlanır. ■

**Not:** Buradan itibaren [3,4] aralığında grafın seyrini görmek için  $T$  dönüşümü yerine  $S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  dönüşümünü göz önüne alacağız.



Şekil 18.  $[3,4]$  aralığındaki  $F^3$  grafi.

**Lemma 2.3.15**

$S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  ve  $3 \leq \frac{a}{b} < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$  olsun. Bu takdirde,

i.  $\frac{a}{b} < S\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$  dir.

ii.  $\frac{a}{b} \rightarrow S\left(\frac{a}{b}\right)$   $F^3$  ün bir kenarıdır  $\Leftrightarrow \sqrt{5b^2 - 4}$  ifadesi bir doğal sayıdır ve

$a = \frac{5b + \sqrt{5b^2 - 4}}{2}$  dir.

**İspat:**

i.  $z \in \mathbb{R}$  olmak üzere,  $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$  aralığında ki her  $z$  için  $z < S(z)$  eşitsizliği sağlanır.

Öte yandan  $\left[3, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \subset \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$  olduğundan  $3 \leq \frac{a}{b} < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$  için  $\frac{a}{b} < S\left(\frac{a}{b}\right)$  dir.

$S$  dönüşümü  $\left[3, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \cap \mathbb{Q}$  kesin kümesinde monoton artan ve  $S\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$  olduğundan  $S\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$  dir.

Böylece,  $3 \leq \frac{a}{b} < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$  için  $\frac{a}{b} < S\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$  olduğu gösterildi.

ii.  $\frac{a}{b} \rightarrow S\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4a-5b}{a-b}$   $F^3$  ün bir kenarı olsun. Bu durumda  $\frac{a}{b} < S\left(\frac{a}{b}\right)$  ve Sonuç

2.2.4 ten,

$$a^2 - 5ab + 5b^2 + 1 = 0 \quad (2.22)$$

elde edilir.  $3 \leq \frac{a}{b}$  olduğunu da göz önüne alarak (2.22) denklemini  $a$  için çözersek,



$S$  dönüşümü,  $[3, \frac{5+\sqrt{5}}{2}) \cap \mathbb{Q}$  kümesinde kesin monoton artan olduğundan (2.24) ile verilen yol artandır. Bu yolun köşe noktalarının dizisinin limitinin

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left( 4 - \frac{3b - \sqrt{5b^2 + 4}}{2} \right) = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \text{ olduğu kolaylıkla görülür.} \blacksquare$$

**Lemma 2.3.17**

$\frac{5+\sqrt{5}}{2} < \frac{a}{b} \leq 4$  olsun. Bu durumda,

i.  $\frac{a}{b} > S\left(\frac{a}{b}\right) > \frac{5+\sqrt{5}}{2}$  dir.

ii.  $\frac{a}{b} \rightarrow S\left(\frac{a}{b}\right)$ ,  $F^3$  ün bir kenarıdır  $\Leftrightarrow 5b^2 + 4$  tam karedir ve  $a = \frac{5b + \sqrt{5b^2 + 4}}{2}$  dir.

**İspat:**

i.  $\mathbb{R} - \left[ \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2} \right]$  kümesi üzerinde  $z > S(z)$  eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla  $\frac{5+\sqrt{5}}{2} < \frac{a}{b} \leq 4$  için  $\frac{a}{b} > S\left(\frac{a}{b}\right)$  dir. Öte yandan,  $S$  dönüşümü  $\left[ \frac{5+\sqrt{5}}{2}, 4 \right) \cap \mathbb{Q}$  kümesinde monoton artan ve  $S\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$  olduğundan  $S\left(\frac{a}{b}\right) > \frac{5+\sqrt{5}}{2}$  dir.

ii. Önce önermenin gerek şartını gösterelim. Bunun için,  $\frac{a}{b} \rightarrow S\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4a-5b}{a-b}$   $F^3$  ün bir kenarı olsun.  $\frac{a}{b} > S\left(\frac{a}{b}\right)$  olduğundan ve Sonuç 2.2.4 den,

$$a^2 - 5ab + 5b^2 - 1 = 0 \tag{2.25}$$

elde edilir.  $4 \geq \frac{a}{b}$  olduğunu da göz önüne alarak (2.25) denklemini  $a$  için çözersek,

$$a = \frac{5b + \sqrt{5b^2 + 4}}{2} \tag{2.26}$$

elde edilir. Diğer taraftan  $a, b \in \mathbb{N}$  olduğundan (2.26) eşitliğinden  $5b^2 + 4$  sayısının tam kare olduğu sonucuna varılır. Böylece gerek şartın ispatı biter. Şimdi, yeter şartın ispatını verelim.

Tersine,  $5b^2 + 4$  bir tam kare ve  $a = \frac{5b + \sqrt{5b^2 + 4}}{2}$  eşitlikleri göz önüne alınarak daha önce yaptığımız gibi Sonuç 2.2.4 te verilen kenar koşulları ile  $\frac{a}{b} \rightarrow S\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4a-5b}{a-b}$  nin  $F^3$  ün bir kenarı olduğu kolaylıkla elde edilir.  $\blacksquare$



$v_1, v_2, \dots, v_k$  köşeleri,  $F^3$  grafinin  $[3, 4]$  aralığındaki en azından biri  $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$  sayısından küçük ve en azından biri  $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$  sayısından büyük olan köşeleri olsun.  $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$  noktası  $F^3$  te köşe olmadığından  $v_m < \frac{5-\sqrt{5}}{2} < v_{m+1}$  olacak şekilde  $1 \leq m < k$  vardır ve  $v_m \rightarrow v_{m+1}$ ,  $F^3$  ün bir kenarıdır. (2.27) ile verilen köşeler dizisi,  $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$  irrasyonel sayısına yakınsadığı için Lemma 2.2.6 gereği,

$$S^m \left( \frac{3}{1} \right) = v_m \rightarrow v_{m+1} = S^n(4) \quad (2.28)$$

olacak şekilde  $m$  ve  $n$  doğal sayıları mevcuttur.

Varsayalım ki,  $n > m$  olsun. O halde; (2.28) ifadesi  $S^{-m}$  ile çarpılırsa Lemma 2.3.20 gereği mevcuttur en az bir  $b \in \mathbb{N}$  öyle ki  $\frac{3}{1} \rightarrow S^{n-m} \left( \frac{4}{1} \right) = \frac{5b + \sqrt{5b^2 + 4}}{2b} F^3$  ün bir kenarıdır. Buradan Sonuç 2.2.4'e göre,  $3b - \frac{5b + \sqrt{5b^2 + 4}}{2} = -1$  ve dolayısıyla  $b = 1$  olmak zorundadır. Yani;  $\frac{3}{1} \rightarrow \frac{4}{1} F^3$  ün bir kenarıdır. Bu ise yine Sonuç 2.2.4'ün (a) şıkkı ile çelişir.

Varsayalım ki,  $n < m$  olsun. Bu durumda yukarıdakine benzer şekilde (2.28) ifadesini  $S^{-n}$  ile çarparsak Lemma 2.3.15 gereği,  $S^{m-n} \left( \frac{3}{1} \right) \rightarrow \frac{4}{1}$  elde edilir ve dolayısıyla

$$\frac{5b + \sqrt{5b^2 - 4}}{2b} \rightarrow \frac{4}{1} \quad F^3 \text{ ün bir kenarıdır. Buradan Sonuç 2.2.4'e göre,}$$

$$\frac{5b + \sqrt{5b^2 - 4}}{2} - 4b = -1 \quad (2.29)$$

elde edilir. (2.29) denkleminin çözümünden  $b = 1$  veya  $b = 2$  bulunur. Sonuç 2.2.4'e göre;  $b = 1$  için,  $\frac{3}{1} \rightarrow \frac{4}{1}$  çelişkisi,  $b = 2$  için,  $\frac{7}{2} \rightarrow \frac{4}{1}$  çelişkisi elde edilir.

Son olarak  $m = n$  olduğunu varsayalım. Bu durumda da  $\frac{3}{1} \rightarrow \frac{4}{1} F^3$  ün bir kenarı olmak zorundadır. Bu ise bir çelişkidir ve ispat tamamlanır. ■

Daha önce ifade etmiş olduğumuz gibi Teorem 2.3.6 un ispatını aşağıda tamamlayalım.



**Teorem 2.3.6'nin İspatının Devamı :** Teorem 2.3.14 ve Teorem 2.3.19 gereği,  $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$  aralığında  $F^3$  grafinin köşeleri  $\infty$ 'a bağlanmaz ve dolayısıyla  $F^3$  grafi bağlantısızdır. Böylece Teorem 2.3.6'nin ispatı tamamlanmıştır. ■

Buraya kadar yaptıklarımızla çalışmanın ana problemi olan  $F^3$  grafinin bağlantısızlığını göstermiş olduk.

Şimdi, sayılar teorisi açısından önem arz eden sonuçlarımızı verelim. İlk olarak aşağıdaki teoremle, her  $m \in \mathbb{Z}$  için  $(9m^2 - 4)b^2 + 4$  sayısını tam kare yapan  $b$  doğal sayılarını elde edeceğiz.

**Teorem 2.3.20**

Tüm  $m$  doğal sayıları için  $(9m^2 - 4)b^2 + 4$  sayısını tam kare yapan  $b$  doğal sayıları

$$0, 1, 3m, 9m^2 - 1, 3m(9m^2 - 1) - 3m, \dots, x, y, 3my - x, \dots$$

şeklindedir.

**İspat:** İspat için yukarıda yapıldığı gibi yalnızca  $[1, 4]$  aralığını kullanmamız yeterlidir.

$M = \begin{pmatrix} -1 & 3m+2 \\ -1 & 3m+1 \end{pmatrix}$  matrisine karşılık gelen dönüşümün  $\Gamma^3$  te olduğu açıktır. Diğer taraftan Sonuç 2.2.4 ile,

$$\frac{1}{1} \rightarrow M \left( \frac{1}{1} \right) = \frac{3m+1}{3m} \quad (2.30)$$

$F^3$  te bir kenardır.

$M(x) = \frac{-x+3m+2}{-x+3m+1}$  dönüşümü için  $M'(x) = \frac{1}{(-x+3m+1)^2}$  olduğundan  $M$  dönüşümü  $[1, 4]$  aralığında artan bir dönüşümdür.

Ayrıca (2.30) dan  $\forall k \in \mathbb{N}$  için  $M^k \left( \frac{1}{1} \right) < M^{k+1} \left( \frac{1}{1} \right)$  olduğunu kolayca görebiliriz. Yani,  $\{M^k(1)\}$  dizisi  $[1, 4]$  aralığında artan bir dizidir. Üstelik,

$$M^k(1) = \left[ 1; \underbrace{3m, 3m, \dots, 3m}_{k \text{ tane}} \right] \text{ veya başka bir gösterimle;}$$

$$M^k(1) = 1 + \frac{1}{3m - \frac{1}{3m - \frac{1}{3m - \frac{1}{3m - \dots \frac{1}{3m}}}}} \quad (2.31)$$

sürekli kesir gösterimine sahiptir. Ayrıca,  $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k(1) = \frac{3m+2-\sqrt{9m^2-4}}{2}$  dir.

Böylece,  $\forall k \in \mathbb{N}$  için  $M^k(1) < \frac{3m+2-\sqrt{9m^2-4}}{2}$  eşitsizliği geçerlidir.

Eğer,  $\frac{a}{b} < \frac{3m+2-\sqrt{9m^2-4}}{2}$  ise,  $T\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{3m+2-\sqrt{9m^2-4}}{2}$  olduğu kolayca görülür. Üstelik,

$\frac{a}{b} \rightarrow T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a+(3m+2)b}{-a+(3m+1)b}$   $F^3$  te bir kenar ise Sonuç 2.2.4 den  $\forall k \in \mathbb{N}$  için

$M^k\left(\frac{1}{1}\right) \rightarrow M^{k+1}\left(\frac{1}{1}\right)$   $F^3$  te bir kenardır. Buradan,

$$\frac{1}{1} \xrightarrow{M} M\left(\frac{1}{1}\right) \xrightarrow{M} M^2\left(\frac{1}{1}\right) \xrightarrow{M} \dots \xrightarrow{M} \frac{a}{b} \xrightarrow{M} M\left(\frac{a}{b}\right) \xrightarrow{M} \dots \quad (2.32)$$

$F^3$  te sonsuz uzunluklu bir  $\gamma$  yoludur. (2.32) ile verilen bu  $\gamma$  yolunun  $\frac{a}{b}$  köşelerinin paydalarındaki  $b$  tam sayıları  $(9m^2 - 4)b^2 + 4$  sayısını tam kare yapar. O halde, (2.32) ile verilen  $\gamma$  yolunu yeniden;

$$1 + \frac{0}{1} \rightarrow 1 + \frac{1}{3m} \rightarrow 1 + \frac{3m}{9m^2-1} \rightarrow 1 + \frac{9m^2-1}{3m(9m^2-1)-3m} \rightarrow 1 + \frac{a'}{b'} \rightarrow 1 + \frac{b'}{3mb'-a'} \rightarrow \dots \quad (2.33)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca,

$$0, 1, 3m, 9m^2 - 1, 3m(9m^2 - 1) - 3m, \dots, x, y, 3my - x, \dots \quad (2.34)$$

tam sayıları,  $(9m^2 - 4)b^2 + 4$  sayısını tam kare yapar.

Şimdi rahatlıkla söyleyebiliriz ki sadece yukarıda (2.34) ile verilen negatif olmayan  $b$  tam sayıları için  $(9m^2 - 4)b^2 + 4$  tam sayısı bir tam kare olur.

Tersine,  $(9m^2 - 4)b^2 + 4$  sayısını tam kare yapan  $t$  doğal sayıları var olsun. O

halde;  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{(3m+2)t - \sqrt{(9m^2-4)t^2+4}}{2t}$  rasyonel sayısı  $\frac{3m+2-\sqrt{9m^2-4}}{2}$  sayısından daha küçüktür ve Sonuç 2.2.4 gereği,  $\frac{a_1}{b_1} \rightarrow T\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$   $F^3$  ün bir kenarıdır. Varsayalım ki bazı  $k$  doğal sayıları için  $M^k\left(\frac{1}{1}\right) < \frac{a_1}{b_1} < M^{k+1}\left(\frac{1}{1}\right)$  olsun. Lemma 2.2.6 dan,

$$T^m\left(\frac{1}{1}\right) < \frac{a_1}{b_1} < T^{m+1}\left(\frac{a_1}{b_1}\right) < M^{k+1}\left(\frac{1}{1}\right) \quad (2.35)$$

elde ederiz. Buradan bazı  $y$  ler için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$M^k\left(\frac{1}{1}\right) = 1 + \frac{(3m+2)y - \sqrt{(9m^2-4)y^2+4}}{2y} < \frac{a_1}{b_1} \quad (2.36)$$

Diğer taraftan aşağıdaki eşitliklerde doğrudur.

$$\frac{a_1}{b_1} = 1 + \frac{(3m+2)t - \sqrt{(9m^2-4)t^2+4}}{2t} \rightarrow T\left(\frac{a_1}{b_1}\right) \quad (2.37)$$

$$T\left(\frac{a_1}{b_1}\right) = 1 + \frac{t}{3mt - \frac{\sqrt{(9m^2-4)t^2+4}}{2}} \quad (2.38)$$

$$M^{k+1}\left(\frac{1}{1}\right) = 1 + \frac{y}{3my - \frac{\sqrt{(9m^2-4)y^2+4}}{2}} \quad (2.39)$$

(2.37) ve (2.38) den  $T\left(\frac{a_1}{b_1}\right) < M^{k+1}\left(\frac{1}{1}\right)$  eşitsizliği doğrudur. Yani,

$$1 + \frac{t}{3mt - \frac{\sqrt{(9m^2-4)t^2+4}}{2}} < 1 + \frac{y}{3my - \frac{\sqrt{(9m^2-4)y^2+4}}{2}} \quad (2.40)$$

eşitsizliği doğrudur. (2.36) eşitsizliğinden  $t\sqrt{(9m^2 - 4)y^2 + 4} > y\sqrt{(9m^2 - 4)y^2 + 4}$  elde edilir. (2.40) eşitsizliğinden de  $t\sqrt{(9m^2 - 4)y^2 + 4} < y\sqrt{(9m^2 - 4)y^2 + 4}$  elde edilir. Bu ise açık bir çelişkidir. Böylece,  $\frac{a_1}{b_1}$  sayısı  $\left\{M^k \left(\frac{1}{1}\right) : k \in \mathbb{N}\right\}$  kümesinde olmak zorundadır. Bu da teoremin ispatını tamamlar. ■

Sonuç 2.3.11 ve Sonuç 2.3.13 ü göz önüne alırsak aşağıdaki iki sonucu ispatsız olarak verebiliriz. Bu iki sonuç ile  $5b^2 \mp 4$  formundaki tam sayıları tam kare yapan  $b$  pozitif tam sayıları elde edildi.

**Sonuç 2.3.21**

$5b^2 + 4$  sayısını tam kare yapan negatif olmayan  $b$  tam sayıları,

$$0, 1, 3, 8, 21, 55, 144, \dots, x, y, 3y - x, \dots \quad (2.41)$$

şeklindedir. ■

**Sonuç 2.3.22**

$5b^2 - 4$  sayısını tam kare yapan negatif olmayan  $b$  tam sayıları,

$$1, 2, 5, 13, 34, 89, \dots, x, y, 3y - x, \dots \quad (2.42)$$

şeklindedir. ■

Yukarıdaki iki sonuçtan, Fibonacci dizisiyle ilişkili olarak aşağıdaki önemli sonucu elde ederiz.

**Sonuç 2.3.23**

$\{a_n\}$  ve  $\{b_n\}$  dizileri sırasıyla;  $(0, 1, 3, 8, 21, 55, 144, \dots, a, b, 3b - a, \dots)$  ve  $(1, 2, 5, 13, 34, 89, \dots, a, b, 3b - a, \dots)$  olsun. Bu iki dizinin elemanlarından elde edilen  $(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots)$  dizisi Fibonacci dizisidir.

**İspat:** Tümevarım yöntemiyle her  $n \in \mathbb{N}^+$  için  $a_n + b_n = a_{n+1}$  ve  $b_n + a_{n+1} = b_{n+1}$  olduğunu göstermeliyiz.  $n = 1$  için  $a_1 + b_1 = 0 + 1 = 1 = a_2$  ve  $b_1 + a_2 = 1 + 1 = 2 = b_2$  olup iddia doğrudur.

Varsayalım ki  $k \in \mathbb{N}^+$  için iddia doğru olsun. Yani;

$$a_k + b_k = a_{k+1} \text{ ve } b_k + a_{k+1} = b_{k+1} \quad (2.43)$$

olsun. Bu durumda göstermeliyiz ki;  $a_{k+1} + b_{k+1} = a_{k+2}$  ve  $b_{k+1} + a_{k+2} = b_{k+2}$  dir. Öncelikle  $a_{k+1} + b_{k+1} = a_{k+2}$  olduğunu gösterelim.

$\{a_n\}$  ve  $\{b_n\}$  dizilerinin tanımından  $a_{k+1} = 3a_k - a_{k-1}$  ve  $b_{k+1} = 3b_k - b_{k-1}$  olduğunu elde ederiz. Buradan (2.43) eşitsizliğini göz önüne alırsak,

$$a_{k+1} + b_{k+1} = 3(a_k + b_k) - (a_{k-1} + b_{k-1}) = 3a_{k+1} - a_k = a_{k+2} \quad (2.44)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} b_k + a_{k+1} &= 3b_{k-1} - b_{k-2} + 3a_k - a_{k-1} = 3(b_{k-1} + a_k) - (a_{k-1} + b_{k-2}) \\ &= 3b_k - b_{k-1} = b_{k+2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Böylece  $b_{k+1} + a_{k+2} = b_{k+2}$  olduğu da gösterilmiş olur. Bu ispatı bitirir. ■

### 3. İRDELEME

Charles C. Sims 1967 de yayınlanan “Graphs and Finite Permutation Groups” adlı makalesinde, bir  $\Omega$  kümesi üzerinde hareket eden bir  $G$  grubunun alt yörüngesel graflarını ve bu graflardaki devre uzunluklarını inceledi. Daha sonra bu sonuçlardan yola çıkarak 1988 yıllarında, Gareth A. Jones, David Singerman ve Keith Wicks  $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerinde hareket eden  $\Gamma$  Modüler grubunun alt yörüngesel graflarını araştırdılar [6]. Bu çalışmada  $\mathbf{G}_{u,n}$  graflarının bazı özellikleri ile birlikte, bir  $\mathbf{G}_{u,n}$  grafinin bir orman olabilmesi için gerek ve yeter şartın üçgen içermemesi olduğu yani,  $u^2 \pm u + 1 \not\equiv 0 \pmod{n}$  olduğu konjektürü verildi. Bu konjektür ise 2001 de M. Akbaş tarafından “On Suborbital Graphs for the Modular Group” adlı çalışmasında ispatlandı.[12]

2011 yılında; Yavuz Kesicioğlu'nun doktora çalışmasında [11]  $F_{u,n}^3$  alt yörüngesel grafini elde etmek için [6] daki  $\Gamma$  ve  $\Gamma_0(n)$  gruplarının yerine sırası ile  $\Gamma^3$  ve  $\Gamma_0^3(n)$  alt grupları kullanılmak suretiyle,  $\Gamma_0^3(n)$  alt grubunun doğurduğu  $\Gamma^3$  invariant denklik bağıtı tanımlandı. Böylece bu çalışma ile ilk defa  $F_{u,n}^3$  tipindeki alt grafların bağlantılılık özellikleri incelendi. Ancak  $F^3$  grafinin bağlantısızlığı ispat edilemedi.  $F^3$  grafinin bağlantısız olacağı Yavuz Kesicioğlu'nun bu çalışmasında sadece bir konjektür olarak verildi.

Biz bu tez çalışmasında, Yavuz Kesicioğlu'nun doktora tezinde konjektür olarak bıraktığı  $F^3$  grafinin bağlantılılık özelliklerini inceledik ve söz konusu konjektürde olduğu gibi  $F^3$  grafinin bağlantısız olduğunu gösterdik.

Ayrıca bu çalışmalar sırasında sayılar teorisi açısından önemli bazı sonuçlar elde ettik. Bu tez çalışması ile tüm  $m$  doğal sayıları için  $(9m^2 - 4)b^2 + 4$  sayısını tam kare yapan  $b$  doğal sayılarını bulduk. Bunun yanında  $5a^2 + 4$  ve  $5b^2 - 4$  sayılarını tam kare yapan tüm  $a$  ve  $b$  sayılarını ve bu sayıların Fibonacci sayıları ile olan ilişkisini ortaya koyduk.

#### 4. SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen başlıca önemli sonuçlar şu şekilde verilebilir.

1.  $F^3$  grafının bağlantısız olduğu gösterildi.
2. Önerme 2.3.4 ile  $\frac{1}{1} \rightarrow T\left(\frac{1}{1}\right)$  i  $F^3$  te kenar yapan  $\Gamma^3$  teki  $T$  dönüşümlerinin sınıfı bulundu.
3. Önerme 2.3.5 ile  $T \in \Gamma^3$  olmak üzere,  $\frac{1}{1} \rightarrow T\left(\frac{1}{1}\right)$   $F^3$  te bir kenar iken 1 ile  $T(1)$  köşeleri arası mesafenin en fazla  $\frac{1}{3}$  olduğu gösterildi.
4. Teorem 2.3.20 ile tüm  $m$  doğal sayıları için  $(9m^2 - 4)b^2 + 4$  sayısını tam kare yapan  $b$  doğal sayıları bulundu.
5.  $5a^2 + 4$  ve  $5b^2 - 4$  sayılarını tam kare yapan tüm  $a$  ve  $b$  pozitif tam sayıları bulundu. (Sonuç 2.3.21-22)
6.  $5a^2 + 4$  ve  $5b^2 - 4$  sayılarını tam kare yapan  $a$  ve  $b$  pozitif tam sayılarının Fibonacci sayılarını oluşturduğu ortaya kondu. (Sonuç 2.3.23)

## 5.ÖNERİLER

1.  $\Gamma^3$  grubunun  $T = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$  elemanının kuvvetlerinin  $\infty$ 'u neden en uzağa götürdüğü araştırılabilir. Yani, “Hangi özelliğe sahip Möbiüs dönüşümlerinin bu özelliği sağlar?” problemi göz önüne alınabilir.
2.  $5a^2 + 4$  ve  $5b^2 - 4$  sayılarını tam kare yapan  $a$  ve  $b$  pozitif tam sayılarından Fibonacci sayılarının elde edilmesi yanında;  $(9m^2 - 4)b^2 + 4$  sayısını tam kare yapan  $b$  tam sayılarının özellikleri araştırılabilir. Yani, bir anlamda genişletilmiş Fibonacci sayıları diyebileceğimiz yukarıdaki  $b$  tam sayılarının özellikleri araştırılabilir.
3. Keyfi  $m \in \mathbb{Z}$  için,  $(9m^2 - 4)b^2 - 4$  sayısını tam kare yapan her zaman bir  $b \in \mathbb{Z}$  mevcut olmayabilir. Mesela,  $m = 2$  alındığında,  $32b^2 - 4$  yi tam kare yapan  $b$  tam sayısı bulunamaz. Bu durumda, “Hangi  $m$  tam sayıları için  $(9m^2 - 4)b^2 - 4$  sayısını tam kare yapan  $b \in \mathbb{Z}$  ler bulunabilir?” problemi araştırılabilir.



## 6. KAYNAKLAR

1. Wilkie, H.C., On Non-Euclidean Crystallographic groups, Math. Zeitschr, 91(1966).
2. Akbaş, M., The Normalizer of Modular Subgroups, Ph.D. thesis, University of Southampton, 1989.
3. Jones, G.A. ve Singerman, D., Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
4. Değer, A. H.,  $\Gamma_0(n)$  Grubunun Alt Yörüngesel Graflarındaki  $\mathbb{Q}$  Köřeli Minimal Uzunluklu Eğriler, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.
5. Schoneberg, B., Elliptic Modular Functions, Springer Verlag, Berlin, 1974.
6. Jones, G.A., Singerman, D. Ve Wicks, K., The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Notes, CUP, Cambridge, 160(1991) 316-338.
7. Kader, S., Nec Grupların Simgeleri ve Graflar, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2008.
8. Neumann, P.M., Finite permutation Groups and Edge-Coloured Graphs and Matrices, In: M.P.J. Curran (Ed.), Topics in Group Theory and Computation, Academic Press, London, 1977.
9. Beardon, A.F., The Geometry of Discrete Groups, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1983.
10. Rankin, R.A., Modular Forms and Functions, Cambridge University Press, 1978.
11. Kesicioğlu, Y.,  $\Gamma^3$  ve  $G_5$  Hecke Gruplarının Alt Yörüngesel Grafları, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.
12. Akbaş, M., On Suborbital Graphs for The Modular Group, Bull. London Math. Soc., 33 (2001) 647-652.
13. Biggs, N.L. and White, A.T. Permutation Groups and Combinatorial Structures, LMS Lect. Note Ser., CUP, Cambridge, 1979.

14. Sims, C.C., Graphs and Finite Permutation Groups, *Mathematische. Zeitschrift.*, 95(1967) 76-86.
15. Palka, Bruce P., *An Introduction to Complex Function Theory*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1991.
16. Neumann, P.M., *Finite permutation Groups and Edge-Coloured Graphs and Matrices*, In: M.P.J. Curran (Ed.), *Topics in Group Theory and Computation*, Academic Press, London, 1977.
17. Başkan, T., *Ayrık Gruplar*, Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Beytepe, Ankara, 1980.
18. Jones, G.A. ve Singerman, D., *Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
19. Çallıalp, F., *Sayıların Teorisi*, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2009.
20. *Matematik Dünyası*, Türk Matematik Derneği, Ekim 1992.
21. Christi Donald, *Hyperbolic Geometry in the High School Geometry Classroom*, Iowa State University, 2011.
22. Anderson James W., *Hyperbolic Geometry*, Springer-Verlag, 2000.
23. Sheets Christina L., *Hyperbolic Geometry*, July 2007.

## ÖZGEÇMİŞ

Tuncay KÖR 1980 yılında Trabzon'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Trabzon da tamamladı. 2001 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun oldu. 2006 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalından Yüksek Lisans derecesini aldı ve aynı yerde Doktora programında eğitimine başladı. 2001 de Milli Eğitim Bakanlığında Matematik Öğretmeni olarak çalışma hayatına başlamış olup 2011 yılından itibaren de Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesinde Öğretim Görevlisi olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır. Yabancı dili İngilizcedir.