KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÜNİTER UZAYLARDA DÖNÜŞÜM GRUPLARI VE NOKTA İNVARYANTLARININ TAM SİSTEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Hüsnü Anıl ÇOBAN

MART 2013
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÜNİTER UZAYLARDA DÖNÜŞÜM GRUPLARI VE NOKTA İNVARYANTLARININ TAM SİSTEMLERİ

Yüksek Matematikçi Hüsnü Anıl ÇOBAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 04.01.2013
Tezin Savunma Tarihi : 01.03.2013

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV

Trabzon 2013

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Hüsnü Anıl ÇOBAN Tarafından Hazırlanan

ÜNİTER UZAYLARDA DÖNÜŞÜM GRUPLARI VE NOKTA İNVARYANTLARININ TAM SİSTEMLERİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 15 / 01 / 2013 gün ve 1489/03 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

DOKTORA TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR

Üye : Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV

Üye : Prof. Dr. Ömer PEKŞEN

Üye : Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ

Üye : Prof. Dr. Ziya YAPAR

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Üniter uzaylarda dönüşüm gruplarını incelemek ve nokta invaryantlarının tam sistemlerini bulmak amacı ile Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora tez çalışması olarak yapılmıştır.

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanmasına kadar olan süreçte önerileri ve yönlendirmeleriyle önemli katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV' e en içten dileklerimle saygı ve şükranlarımı sunuyorum. Aynı zamanda bu tez aşamasında değerli görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan tez izleme jüri üyesi hocalarım, Sayın Prof. Dr. Ömer PEKŞEN ve Sayın Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ' a teşekkürü bir borç bilirim. Başım her sıkıştığında yardımını aldığım Yrd. Doç. Dr. İdris ÖREN' e, tezi tamamlama sürecinde verdikleri destekten dolayı oda arkadaşlarım Öğr. Gör. Dr. Tuncay KÖR ve Arş. Gör. Ümit ERTUĞRUL' a teşekkür ederim. Yine öğrenim sürecinde katkı sağlayan matematik bölümündeki diğer tüm değerli öğretim üyelerine ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Çalışanı olduğum " Karadeniz Teknik Üniversitesi BAP projesi; Üniter Uzaylarda Nokta ve Eğri Sisteminin Tam İnvaryantlar Sistemi; Proje No: 2009.111.03.1" adlı proje ile destek veren KTÜ BAP birimine teşekkür ederim.

Tükenmeyen ilgi ve destekleriyle yaşamıma güç katan aileme ve sevgili eşim Şeyma' ya çok teşekkür ederim.

Hüsnü Anıl ÇOBAN

Trabzon 2013

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Üniter Uzaylarda Dönüşüm Grupları ve Nokta İnvaryantlarının Tam Sistemleri” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV’ in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 01/03/2013

Hüsnü Anıl ÇOBAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

ÜNİTER UZAYLARDA DÖNÜŞÜM GRUPLARI VE NOKTA İNVARYANTLARININ TAM SİSTEMLERİ

Hüsnü Anıl ÇOBAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV

2013, 96 Sayfa

Bu çalışmada aşağıdaki temel sonuçlar elde edildi:

1) $H:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, *n*-boyutlu $\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayından *2n*-boyutlu $\mathbb{R}^{2n}$ reel vektör uzayına, doğal lineer dönüşüm olsun. $F:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, keyfi bir lineer dönüşüm olmak üzere, F ve $HFH^{-1}:\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ lerin determinantları arasında bağlantı bulundu.

2) *n*-boyutlu üniter uzayda keyfi izometrinin öteleme ve reel üniter dönüşümlerin bileşkesi şeklinde yazıldığı gösterildi.

3) G, $\mathbb{C}^n$ uzayında üniter grup veya izometri grubu olmak üzere, *n*-boyutlu üniter uzayda sonlu sayıda noktadan oluşan ailenin G-invaryantları tam sistemi bulundu. Bu tam sistemin minimal tam sistem olduğu gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Üniter Geometri, Üniter Grup, İnvaryantlar, İzometriler

PhD. Thesis

SUMMARY

TRANSFORMATION GROUPS IN UNITARY SPACES AND THE COMPLETE SYSTEMS OF INVARIANTS OF POINTS

Hüsnü Anıl ÇOBAN

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematic Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV

2013, 96 Pages

In this thesis, the following main results have been obtained:

1) Let $H:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ be the natural linear operator from the *n*-dimensional $\mathbb{C}^n$ complex vector space to the *2n*-dimensional $\mathbb{R}^{2n}$ real vector space. For an arbitrary linear transformation $F:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, the relation between the determinants $\det(F)$ and $\det(HFH^{-1})$ is found.

2) In the *n*-dimensional unitary space, an arbitrary isometry is a composition of a translation and a real unitary transformation.

3) Let G be the unitary group or the group of all isometries of $\mathbb{C}^n$. In the *n*-dimensional unitary space, complete systems of G-invariants have been obtained for finite subsets of $\mathbb{C}^n$. The minimality properties of these complete systems of G-invariants have been proved.

Key Words: Unitary Geometry, Unitary Group, Invariants, Isometries

SEMBOLLER DİZİNİ

$[a_{ij}];\ i, j = 1, 2, ..., n;\ a_{ij} \in \mathbb{R}$	$n \times n$ tipinde reel katsayılı bir matris
$\mathscr{A}^T = [a_{ji}]$	$\mathscr{A} = [a_{ij}]$ matrisinin transpozesi
boy E	E kompleks vektör uzayının boyutu
$\mathbb{C}^n$	n-boyutlu kompleks vektör uzayı
$\mathbb{C} - lineer$	Kompleks lineer
$\lVert x \quad y \rVert$	$= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$
$[x \quad y]$	$= \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$
$GL(n, \mathbb{R})$	$n \times n$ tipindeki determinantı sıfır olmayan tüm matrislerin oluşturduğu küme
$Gr(.......)$	Kompleks vektör uzayındaki skaler (iç) çarpımlı Gram Matrisi
$\mathrm{Im}\{.......\}$	Parantez içi ifadenin sanal kısmı
$Iz(\mathbb{R}^n)$	Tüm reel izometriler kümesi
$Iz(\mathbb{C}^n)$	Tüm kompleks izometriler kümesi
$M(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$	Kompleks vektör uzayındaki tüm kompleks lineer operatörler kümesi
$M(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$	Kompleks vektör uzayındaki tüm reel lineer operatörler kümesi
$M(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$	$2n$-boyutlu reel vektör uzayındaki tüm reel lineer operatörler kümesi
$M(n \times n, \mathbb{C})$	$n \times n$ tipinde kompleks matrisler kümesi
$M(n \times n, \mathbb{R})$	$n \times n$ tipinde reel matrisler kümesi
$O(n)$	n-boyutlu ortogonal dönüşümler grubu
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{R} - lineer$	Reel lineer

$\mathbb{R}-izomorfizma$	Reel izomorfizma
$\mathbb{R}-cebir$	Reel sayılar üzerinde cebir
$\mathrm{Re}\{.......\}$	Parantez içi ifadenin reel kısmı
$SO(n)$	n -boyutlu özel ortogonal dönüşümler grubu
$SU(n)$	n -boyutlu özel üniter dönüşümler grubu
$T(\mathbb{C}^n)$	$\mathbb{C}^n$ ’ deki tüm kompleks ötelemeler kümesi
$U(n)$	n -boyutlu üniter dönüşümler grubu
$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$	Kompleks vektör uzayında skaler (iç) çarpım
$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$	Reel vektör uzayında skaler (iç) çarpım
$\blacklozenge$	İspatın sonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu tez çalışmasında üniter geometri problemleri incelendi.

Öklid (M.Ö.330 – M.Ö.275) matematik kültürünü, matematiğin özlerini, özellikle geometriyi geliştirip sistemli hale getiren matematikçilerden biridir. “Temel Öğeler” adlı yapıtıyla, matematiğin temellerini atmıştır. Öklid, kendinden önce gelenlerin eserleriyle kendi öz yapıtlarını da derleyerek bugün Öklid geometrisi adıyla bilinen geometriyi aksiyomlarına dayanarak geliştirmiştir.

1636 civarında, Fermat ve Descartes tarafından cebir ile geometrinin bağlantısını mümkün kılan kartezyen geometri tanıtılmıştır. Fakat bu çalışma, 19. yüzyılın ortalarına kadar pek fazla ilgi görmemiştir. Daha sonra kompleks sayıların girişi ve cebirin esas teoreminin ispatı bu bağlantıyı aydınlığa kavuşturmuştur.

1804’ de Bolzano, “*Betrachtungen über einige Gegenstande der elementar geometrie”* ile elemanter geometrinin kuruluşu üzerine bir çalışma yayımlamıştır. Bolzano, bu kitapta, noktaları, doğruları ve düzlemleri tanımlanmış cisimler olarak düşünmüş ve onlar üzerinde ikili işlemler tanımlamıştır. Bu, geometri aksiyomatiğinde ve lineer uzay kavramının doğuşu için gerekli soyutlamalara doğru atılan ilk önemli adımdır.

1814’ de Argand, düzlemde noktalar olarak kompleks sayıları, reel sayıların sıralı ikilileri olarak ifade etmiştir. Hamilton, genel soyut terimleri kullanmamasına rağmen kompleks sayıları, reel sayılar üzerinde iki boyutlu vektör uzayları olarak ifade etmiştir.

1857’ de Cayley, daha genel soyut sistemlere doğru ilerlemeye yardımcı olan matris cebirini tanıtmıştır.

Bazı iyi tanımlı sınıfların matematiksel nesnelerini sınıflandırmaya gelindiğinde, invaryant yapılarına kaçınılmaz bir şekilde gerek duyulmasından sonra, invaryant düşüncesi matematikteki en genel ve temel kavram olmuştur.

İnvaryant teori, determinantlar teorisiyle yakından ilgili olarak, keyfi dereceli formların yapısal invaryantlarıyla çalışıldığı dönem olan 1850-1870 yılları arasında gelişmeye başlamıştır. İnvaryantlar teorisinde G bir grup olmak üzere $\mathbb{R}[x_1,...,x_m]^G$ nin üreteçleri, bu üreteçler arasındaki bağıntılar ve denklik problemi üzerinde durulmuştur.

Birbirine $G-$denk olan iki nokta ailesi için herhangi bir $G-$invaryant polinom (rasyonel fonksiyon) için değerleri eşit çıkmakta iken bunun tersi her zaman doğru değildir. Denklik problemi, yukarıdaki tersten gidişin ne zaman doğru olduğunu soran problemdir.

1872' de F. Klein, "Erlanger Programı" olarak bilinen konuşmasında her geometrinin, o geometriyi oluşturan grubun invaryantlar teorisi olduğunu ifade etmiştir. Burada geometri olarak o dönemde bilinen klasik geometrilere işaret etmiştir.

1890' da D. Hilbert, invaryantlar teorisi ile ilgili temel çalışmalar yapmıştır.

1946' da H.Weyl [33], kitabında klasik gruplar hakkında nokta sistemleri üzerinde üreteç problemi için kendisine ait ve kendisinden önce alınan sonuçları derleyerek iyi bir şekilde ifade etmiştir.

1963' de A. I. Mal'Cev' in kitabında [22], keyfi boyutlu iç çarpımlı uzayın, bir alt uzayı ve onun ortogonal tümleyeninin direkt toplamı olarak yazılabilmesi için gerekli olan şart verilmiştir.

1985' de D. Khadjiev ve B. Tursunov [15], $SU(2)$ grubu için eğrilerin sonlu ailesinin invaryantlarını incelemişlerdir.

1987' de A. M. Suhtaeva [32], $SL(n,\mathbb{C})$ ve $GL(n,\mathbb{C})$ gruplarının $\mathbb{C}^n$ deki hareketleri için yolların denklik problemini incelemiştir.

1988' de D. Khadjiev' in kitabında [16] ve R. Aripov' un makalelerinde Öklid grubu için noktaların üreteçleri yardımıyla denklik problemi ve yörünge problemi incelenmiştir.

Yakın dönemde ise D. Khadjiev danışmanlığında hazırlanan tezlerde, 2002' de Y. Bahar [1], 2004'te İ. Ören [25], 2005' te M. Karataş [13], 2007' de İ. Ören [26], 2008' de G. Kaya [14] ve 2011' de D. Mollaveisoğlu [23], farklı geometriler için nokta invaryantları halkası ve cismi, eğrilerin diferansiyel invaryantları cisminin üreteçleri ve denklik problemleri üzerinde incelemeler yapmışlardır.

Bunun yanında, 2004' de D. Khadjiev ve Ö. Pekşen [17], 2009' da K. K. Muminov [24], 2010' da Y. Sağıroğlu ve Ö. Pekşen [31], 2010' da D. Khadjiev [18], 2012' de Ö. Pekşen, D. Khadjiev ve İ. Ören [27] çalışmalarıyla invaryant yöntemlerini diferensiyel geometri problemlerine uygulamışlardır.

Fizik alanındaki çalışmalarda da üniter uzay ve üniter dönüşümler önemli olmuştur. Özellikle parçacıklar teorisinin geliştirilmesi çalışmalarında, J. A. Buras, K. Gemmler, G. Isidori [2], M. Calixto, V. Aldaya [3] ve O. Romanets, L. Tolos, C. Garcia-Recio, J. Nieves, L. L. Salcedo, R. Timmermans [30], üniter grup ve determinantı bir olan tüm üniter dönüşümlerden oluşan özel üniter grup, önemli bir yere sahiptir. Bununla birlikte, V. Wessels, W. N. Polyzou [34], M. Li, Y. Zhong, G. Guo [19] ve S. Davis [5] kuantum teorisi problemleri ile ilgili makalelerinde ve E. Epelmbaum nükleer enerji konusu ile ilgili makalesinde [7] üniter yapıyı kullanmışlardır. Ayrıca, R. Penrose ve W. Rinder [28, 29], 4-boyutlu reel Minkowski Uzay-Zaman yerine 2-boyutlu üniter uzayı kullanarak fiziksel kavramları geliştirmişlerdir.

Bu çalışmada aşağıdaki temel sonuçlar elde edildi:

1) $H:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, *n*-boyutlu $\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayından *2n*-boyutlu $\mathbb{R}^{2n}$ reel vektör uzayına, doğal lineer dönüşüm olsun. $F:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, keyfi bir lineer dönüşüm olmak üzere, F ve $HFH^{-1}:\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ lerin determinantları arasında bağlantı bulundu.

2) *n*-boyutlu üniter uzayda keyfi izometrinin reel üniter dönüşümler ve ötelemelerin bileşkesi şeklinde yazıldığı gösterildi.

3) G, $\mathbb{C}^n$ uzayında üniter grup veya izometri grubu olmak üzere, *n*-boyutlu üniter uzayda sonlu sayıda noktadan oluşan ailenin G-invaryantları tam sistemi bulundu. Bu tam sistemin minimal tam sistem olduğu gösterildi.

1.2. Bilineer Formlu Uzaylar

Tanım 1.2.1. ([10], s. 359, Definition)

$\mathbb{R}$**,** reel sayılar cismi, V, $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g:V\times V \to \mathbb{R}$ dönüşüm olmak üzere, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ için,

i) $g\left(av_1 + bv_2, w_1\right) = ag\left(v_1, w_1\right) + bg\left(v_2, w_1\right)$

ii) $g\left(v_1, aw_1 + bw_2\right) = ag\left(v_1, w_1\right) + bg\left(v_1, w_2\right)$

özelliklerini sağlayan g dönüşümüne, bilineer form denir.

Örnek 1.2.2.

$V = \mathbb{R}^4$ alalım. $f:\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dönüşümünü,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ olmak üzere,}$$

$$f\left(x,y\right)=2x_1y_1+5x_2y_2-3x_1y_2+4x_3y_2-x_4y_4$$

şeklinde tanımlayalım. f , bilineer formdur.

Örnek 1.2.3.

$V=\mathbb{R}^n$ alalım. $h:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü,

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \text{ olmak üzere,}$$

$$h\left(x,y\right)=x_1^{\ 2}y_1$$

şeklinde tanımlayalım. h, bilineer form değildir.

Tanım 1.2.4. ([10], s. 367, Definition)

$\mathbb{R}$, reel sayılar cismi, V , $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g:V\times V\rightarrow\mathbb{R}$ bilineer dönüşüm olmak üzere, keyfi $v,w\in V$ için $g\left(v,w\right)=g\left(w,v\right)$ ise, g ye simetrik denir.

Örnek 1.2.5.

$V=\mathbb{R}^n$ alalım. $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü,

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \text{ olmak üzere,}$$

$$f\left(x,y\right)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$$

şeklinde tanımlayalım. f , simetriktir.

Örnek 1.2.6.

$V=\mathbb{R}^n$ alalım. $h:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü,

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \text{ olmak üzere,}$$

$$h\left(x,y\right)=x_1y_2$$

şeklinde tanımlayalım. h, simetrik değildir.

Tanım 1.2.7. ([10], s. 365, Definition)

$\mathbb{R}$, reel sayılar cismi, V, $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g: V\times V \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşüm olsun. Keyfi sıfırdan farklı $w\in V$ için $g(v,w)=0$ olduğundan $v=0$ olduğu elde edilirse g dönüşümüne bozulmamış bilineer dönüşüm denir.

Örnek 1.2.8.

$V=\mathbb{R}^n$ alalım. $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dönüşümünü,

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \text{ olmak üzere,}$$

$$f(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$$

şeklinde tanımlayalım. f, bozulmamıştır. f nin bozulmamış olduğunu göstermek için keyfi $x\in\mathbb{R}^n$ için $f(x,y)=0$ olduğunda $y=0$ olduğunu göstermek gerekir. Bunun için özel olarak $x=y$ alınırsa,

$$f(y,y)=y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}+...+y_n^{\ 2}=0$$

elde edilir. $f(y,y)=y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}+...+y_n^{\ 2}=0$ olması için $y_i=0$, $1\le i\le n$ olmalıdır. Buradan, $y=0$ dır. O halde f, bozulmamıştır.

Örnek 1.2.9.

$V=\mathbb{R}^n$, $n>1$ alalım. $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dönüşümünü,

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \text{ olmak üzere,}$$

$$f(x,y)=x_1y_1$$

şeklinde tanımlayalım. f, bozulmuştur.

Tanım 1.2.10. ([10], s. 379)

g, V lineer uzayında bir bilineer form olsun. Eğer $F:V\to V$ dönüşümü için keyfi $x,y\in V$ olmak üzere $g(F(x),F(y))=g(x,y)$ ise F ye g yi koruyan dönüşüm denir.

Önerme 1.2.11. ([10], s. 379)

Bilineer formu koruyan dönüşümler kümesi bileşke işlemine göre birimli yarı gruptur.

İspat: g, V lineer uzayda bir bilineer form olmak üzere, F_1 ve F_2, bilineer formu saklayan dönüşümler olsunlar. Keyfi $a,b\in V$ için,

$$g(F_1(a),F_1(b))=g(a,b) \text{ ve } g(F_2(a),F_2(b))=g(a,b)$$

dir.

$$g((F_1F_2)(a),(F_1F_2)(b))=g(F_1(F_2(a)),F_1(F_2(b)))=g(F_2(a),F_2(b))=g(a,b).$$

Dolayısı ile F_1F_2 bilineer formu koruyan dönüşümdür. Birim dönüşüm de bilineer formu koruyan dönüşüm olduğundan, bilineer formu saklayan dönüşümler bileşke işlemine göre birimli yarı gruptur. ◆

Önerme 1.2.12. ([20], s. 175, Theorem 5.14.)

$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ dönüşümü lineer ve birebir ise örtendir.

İspat: $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ dönüşümü lineer ve birebir olsun.

$\mathbb{R}^n$ de $\{e_1,\ ...,\ e_n\}$ tabanını alalım. $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$ nin de $\mathbb{R}^n$ de bir taban olduğunu gösterelim. Bunun için $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$ nin lineer bağımsız olduğunu göstermeliyiz.

Farz edelim $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$ lineer bağımlı olsun. O halde en az biri sıfırdan faklı olan $\lambda_1,\ ...,\ \lambda_n\in\mathbb{R}$ için $\lambda_1F(e_1)+...+\lambda_nF(e_n)=0$ dır. F nin lineer olduğunu kullanarak $F\left(\lambda_1e_1+...+\lambda_ne_n\right)=0$ elde edilir. Burada F, birebir olduğundan $\lambda_1e_1+...+\lambda_ne_n=0$ dır. λ_i, $1\le i\le n$ lerden en az biri sıfırdan farklı olduğundan $\{e_1,...,e_n\}$ lineer bağımlıdır. Bu ise seçimimizle çelişir. O halde $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$ lineer bağımsızdır. $\mathbb{R}^n$ nin boyutu n olduğundan $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$, $\mathbb{R}^n$ de bir tabandır. Şimdi $\mathbb{R}^n$ de keyfi bir y elemanını alalım. $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$, $\mathbb{R}^n$ de bir taban olduğundan dolayı $\mu_1,\ ...,\ \mu_n\in\mathbb{R}$ olmak üzere, y elemanını $y=\mu_1F(e_1)+...+\mu_nF(e_n)$ şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$y=\mu_1F(e_1)+...+\mu_nF(e_n)=F\left(\mu_1e_1+...+\mu_ne_n\right)$$

olduğundan $y=F(x)$ olacak şekilde $x=\mu_1e_1+...+\mu_ne_n\in\mathbb{R}^n$ vardır.

Dolayısı ile, F örtendir. ◆

Teorem 1.2.13. ([10], s. 379, Theorem 7.)

V sonlu boyutlu vektör uzayı ve f, V de bozulmamış bilineer form olmak üzere, f yi koruyan V deki tüm lineer dönüşümlerin kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur.

İspat: $G=\{T:V\to V:\ f(\alpha,\beta)=f(T(\alpha),T(\beta)),\ \forall\alpha,\beta\in V\}$ olsun. G nin bileşke işlemine göre bir grup olduğunu gösterelim.

Önerme 1.2.11. e göre G bir monoiddir.

Keyfi $T\in G$ için, $T^{-1}\in G$ olduğunu gösterelim. $T\in G$ için $\alpha\in V$ olmak üzere, $T(\alpha)=0$ olsun. Bu takdirde, keyfi $\beta\in V$ için,

$$f(\alpha,\beta)=f(T(\alpha),T(\beta))=f(0,T(\beta))=0$$

elde edilir. Ancak f bozulmamış olduğundan, $\alpha=0$ dır. Dolayısı ile T birebir, lineer ve V sonlu boyutlu olduğundan Önerme 1.2.12. den T örtendir. Böylece T nin tersi mevcuttur.

$$f(T^{-1}(\alpha),T^{-1}(\beta))=f(T(T^{-1}(\alpha)),T(T^{-1}(\beta)))=f(\alpha,\beta)$$

olduğundan $T^{-1}\in G$ dir.

Dolayısı ile G, bileşke işlemine göre bir gruptur. ◆

1.3. Üniter Uzay

Tanım 1.3.1. ([10], s. 271, Definition)

E, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere, $\varphi:E\times E\to\mathbb{C}$ dönüşümü aşağıdaki aksiyomları $\forall x,\ y,\ z\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{C}$ için sağlasın:

1) $\varphi(x+y,\ z)=\varphi(x,\ z)+\varphi(y,\ z)$

2) $\varphi(\lambda x,\ y)=\lambda\varphi(x,\ y)$

3) $\varphi(x,\ y)=\overline{\varphi(y,\ x)}$

4) $\varphi(x,x)\geq 0$

5) $\varphi(x,\ x)=0\Leftrightarrow x=0$

Bu şekilde tanımlanan φ dönüşümüne, E kompleks vektör uzayında skaler (iç) çarpım denir. $(E,\ \varphi)$ ikilisine de iç çarpımlı kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 1.3.2. ([10], s. 277, Definition)

Sonlu boyutlu kompleks iç çarpımlı vektör uzayına üniter uzay denir.

Örnek 1.3.3.

$E=\mathbb{C}$ alalım. $\varphi:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dönüşümünü $x,\ y\in\mathbb{C}$ olmak üzere $\varphi(x,\ y)=x\overline{y}$ şeklinde tanımlayalım. Keyfi $x,\ y,\ z,\lambda\in\mathbb{C}$ olmak üzere $(\mathbb{C},\ \varphi)$ nin üniter uzay olduğunu gösterelim:

1) $\varphi(x+y,\ z)=(x+y)\overline{z}=x\overline{z}+y\overline{z}=\varphi(x,\ z)+\varphi(y,\ z)$

2) $\varphi(\lambda x,\ y)=(\lambda x)\overline{y}=\lambda(x\overline{y})=\lambda\varphi(x,\ y)$

3) $\varphi(x,\ y)=x\overline{y}=\overline{y\overline{x}}=\overline{\varphi(y,\ x)}$

4) $\varphi(x,\ x)=x\overline{x}=|x|^2\geq 0$

5) $\varphi(x,\ x)=0$ için $x\overline{x}=0$ dır. Dolayısı ile $|x|^2=0$, buradan da $x=0$ dır.

$x=0$ ise $\varphi(x,\ x)=0$ olduğu açıktır.

Örnek 1.3.4.

$E=\mathbb{C}^2$ alalım. $\varphi:\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ dönüşümünü,

$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ olmak üzere, $\varphi(x,\ y)=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}$

şeklinde tanımlayalım. $(\mathbb{C}^2,\ \varphi)$ nin üniter uzay olduğunu gösterelim. Bunun için,

1) $\varphi(x+y,z)=(x_1+y_1)\overline{z_1}+(x_2+y_2)\overline{z_2}=x_1\overline{z_1}+y_1\overline{z_1}+x_2\overline{z_2}+y_2\overline{z_2}$

$$=(x_1\overline{z_1}+x_2\overline{z_2})+(y_1\overline{z_1}+y_2\overline{z_2})=\varphi(x,z)+\varphi(y,z)$$

2) $\varphi(\lambda x,y)=\lambda x_1\overline{y_1}+\lambda x_2\overline{y_2}=\lambda(x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2})=\lambda\varphi(x,y)$

3) $\varphi(x,y)=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}=\overline{y_1\overline{x_1}}+\overline{y_2\overline{x_2}}=\overline{\varphi(y,x)}$

4) $\varphi(x,x)=|x_1|^2+|x_2|^2\geq 0$

5) $\varphi(x,x)=|x_1|^2+|x_2|^2=0\Leftrightarrow x_1=0,x_2=0\Leftrightarrow x=0$

olduğundan $(\mathbb{C}^2,\ \varphi)$ üniter uzaydır.

Örnek 1.3.5.

$E=\mathbb{C}^n$ alalım. $\varphi:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ dönüşümünü,

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n \text{ olmak üzere, } \varphi(x,\ y)=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$$

şeklinde tanımlayalım. $(\mathbb{C}^n,\ \varphi)$ üniter uzaydır.

Örnek 1.3.6.

$E=\mathbb{C}$ alalım. $\varphi:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dönüşümünü, $x,\ y\in\mathbb{C}$ olmak üzere $\varphi(x,\ y)=x^2\overline{y}$ şeklinde tanımlayalım. $(\mathbb{C},\ \varphi)$ nin üniter uzay olmadığını gösterelim:

Keyfi $x,\ y,\ z\in\mathbb{C}$ olmak üzere,

$\varphi(x+y,\ z)=(x+y)^2\,\overline{z}=x^2\overline{z}+y^2\overline{z}+2xy\overline{z}$

olur. Ama iç çarpım tanımına göre $\varphi(x+y,\ z)=x^2\overline{z}+y^2\overline{z}$ olmalıdır. Bunun için $2xy\overline{z}=0$ olması gerekir. Buradan $x=0$ veya $y=0$ veya $z=0$ dır. Fakat bu şart tüm x,y,z ler için sağlanmadığından,

$\varphi(x+y,\ z)\neq x^2\overline{z}+y^2\overline{z}$

olup, φ iç çarpım değildir. Dolayısıyla $(\mathbb{C},\ \varphi)$ üniter uzay değildir.

Tanım 1.3.7.

Aşağıdaki özellikleri sağlayan $F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ dönüşümüne lineer dönüşüm denir.

i) $F(z_1+z_2)=F(z_1)+F(z_2)$, $z_1,z_2\in\mathbb{C}^n$

ii) $F(\lambda z)=\lambda F(z)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}^n$

Not 1.3.8.

Başka lineerlik kavramları da kullanıldığından bu durumdaki dönüşüme $\mathbb{C}-lineer$ diyeceğiz.

Tanım 1.3.9. ([8], s.220, 8.17. Definition)

$(E_1,\ \varphi_1)$ ve $(E_2,\ \varphi_2)$ üniter uzaylar olmak üzere,

i) F, birebir ve örten

ii) F, $\mathbb{C}-lineer$

iii) Keyfi $x,y\in E_1$ için $\varphi_2(F(x),\ F(y))=\varphi_1(x,\ y)$

şartlarını sağlayan $F:E_1\to E_2$ dönüşümü varsa, $(E_1,\ \varphi_1)$ ve $(E_2,\ \varphi_2)$ üniter uzaylarına izomorf denir. F dönüşümüne ise iç çarpım uzaylarının izomorfizması denir.

Önerme 1.3.10.

$(E_1,\ \varphi_1)$ ve $(E_2,\ \varphi_2)$ üniter uzaylarının izomorf olması için gerek ve yeter şart $boy\ E_1 = boy\ E_2$ olmasıdır.

İspat: ([10], s. 300, Corollary.)

Sonuç 1.3.11. ([9], s. 149, Teorem V.5.1.)

$(E,\ \varphi)$ üniter uzay ve $boy\ E = n$ olsun. $(E,\ \varphi)$ üniter uzayı, $(\mathbb{C}^n,\ \sigma)$ üniter uzayına izomorftur. Burada $\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ dir.

Not 1.3.12.

Bundan sonra $\sigma(x, y) = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ şeklinde alınacaktır.

Tanım 1.3.13. ([9], s. 166, Tanım V.7.2.)

$\mathbb{C}^n$ üniter uzayında $x \in \mathbb{C}^n$ için $\sqrt{\langle x,\ x\rangle_{\mathbb{C}}}$ sayısına x vektörünün normu denir ve $\|x\|$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.3.14. ([20], s. 227)

$\|x\| = 1$ ise, x vektörüne birim vektör denir.

Tanım 1.3.15.

$x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{C}^n$ olsun. Bu takdirde,

$$\langle x_i, x_j\rangle_{\mathbb{C}} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ ise} \\ 1, & i = j \text{ ise} \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq m$$

ise $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ sistemine ortonormal sistem denir.

Teorem 1.3.16. ([9], s. 176, Teorem V.7.7.)

$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sistemi $\mathbb{C}^n$ de bir ortonormal taban ve $x \in \mathbb{C}^n$ olsun. Bu takdirde, $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ için,

$$\lambda_i = \langle x,\ e_i\rangle_{\mathbb{C}},\ 1 \leq i \leq n$$

dir.

1.4. Üniter Dönüşümler, Üniter Matrisler ve *U(n), SU(n)* Grupları

$\mathbb{C}^n$ vektör uzayındaki tüm kompleks lineer dönüşümler kümesini $M(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$ ile gösterelim.

Tanım 1.4.1. ([9], s.573, Tanım XIII.2.1.)

$A\in M(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$ dönüşümü, keyfi $u,v\in\mathbb{C}^n$ için $\langle A(u),v\rangle_{\mathbb{C}}=\langle u,A^*(v)\rangle_{\mathbb{C}}$ eşitliğindeki A^* dönüşümüne A nın ekidir (ek dönüşümüdür) denir.

Not 1.4.2.

$M(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$ gösterimi [9]' da, V, $n-boyutlu$ kompleks iç çarpım uzayı olmak üzere, $Hom(V,V)$ şeklinde verilmiştir.

Teorem 1.4.3. ([9], s. 492, Teorem X1.1.15.)

$A\in M(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$ olsun. Keyfi $u,v\in\mathbb{C}^n$ için A nın A^* ek dönüşümü mevcuttur, $\langle A(u),v\rangle_{\mathbb{C}}=\langle u,A^*(v)\rangle_{\mathbb{C}}$ bağıntısını sağlar ve A^* tek türlüdür.

Örnek 1.4.4.

$\mathbb{C}^3$ içindeki A, $\mathbb{C}-lineer$ dönüşüm şöyle tanımlansın:

$$A(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix})=\begin{pmatrix} 2x+iy\\ y-5iz\\ x+(1-i)y+3z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & i & 0\\ 0 & 1 & 5i\\ 1 & 1-i & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned}\langle A(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}),\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\rangle_{\mathbb{C}} &= \begin{pmatrix} 2x+iy\\ y-5iz\\ x+(1-i)y+3z\end{pmatrix}^T\overline{\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}}\\ &=\bar{a}(2x+iy)+\bar{b}(y-5iz)+\bar{c}(x+(1-i)y+3z)\\ &=x(2\bar{a}+\bar{c})+y(\bar{a}i+\bar{b}+(1-i)\bar{c})+z(5i\bar{b}+3)\\ &=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}^T\overline{\begin{pmatrix} 2a+c\\ -ai+b+(1+i)c\\ -5ib+3\end{pmatrix}}=\langle\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2a+c\\ -ai+b+(1+i)c\\ -5ib+3\end{pmatrix}\rangle_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

dir. Böylelikle,

$$A^*(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2a+c \\ -ai+b+(1+i)c \\ -5ib+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 1+i \\ 0 & -5i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Tanım 1.4.5. ([9], s.587, Tanım XIII.3.1.)

$A \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ dönüşümü ve keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için,

$\langle A(x), A(y) \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}$

eşitliği sağlanıyorsa A dönüşümüne, üniterdir denir.

Örnek 1.4.6.

$A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{3+i}{4} x_1 - \frac{2-i\sqrt{2}}{4} x_2 \\ \frac{2-i\sqrt{2}}{4} x_1 + \frac{3-i}{4} x_2 \end{pmatrix}$$

dönüşümü üniterdir. Gerçekten de; keyfi $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ için,

$$\langle A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}), A(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \begin{pmatrix} \frac{3+i}{4} x_1 - \frac{2-i\sqrt{2}}{4} x_2 \\ \frac{2-i\sqrt{2}}{4} x_1 + \frac{3-i}{4} x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3+i}{4} y_1 - \frac{2-i\sqrt{2}}{4} y_2 \\ \frac{2-i\sqrt{2}}{4} y_1 + \frac{3-i}{4} y_2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3+i}{4} x_1 - \frac{2-i\sqrt{2}}{4} x_2 \\ \frac{2-i\sqrt{2}}{4} x_1 + \frac{3-i}{4} x_2 \end{pmatrix}^T \overline{\begin{pmatrix} \frac{3+i}{4} y_1 - \frac{2-i\sqrt{2}}{4} y_2 \\ \frac{2-i\sqrt{2}}{4} y_1 + \frac{3-i}{4} y_2 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3+i}{4} x_1 - \frac{2-i\sqrt{2}}{4} x_2 \\ \frac{2-i\sqrt{2}}{4} x_1 + \frac{3-i}{4} x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{3-i}{4} \overline{y_1} - \frac{2+i\sqrt{2}}{4} \overline{y_2} \\ \frac{2+i\sqrt{2}}{4} \overline{y_1} + \frac{3+i}{4} \overline{y_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \overline{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}} = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}$$

Dolayısı ile A dönüşümü üniterdir.

Teorem 1.4.7. ([9], s. 587, Teorem XIII.3.1.)

$\mathbb{C}^n$ kompleks iç çarpım uzayı olsun. $A \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ dönüşümü üniterdir $\Leftrightarrow$ $A^* A = I$ dır.

Tanım 1.4.8. ([10], s. 303, Definition)

$\mathbb{C}^n$ nin bir $\{e_1, ..., e_n\}$ ortonormal tabana göre $A \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ dönüşümüne karşılık gelen matrisi $\mathscr{A}$ olsun. $\mathscr{A}$ nın eşlenik transpozesi $\mathscr{A}^*$ olmak üzere $\mathscr{A}^* \mathscr{A} = I_n$ ise $\mathscr{A}$ matrisine üniter matris denir.

Teorem 1.4.9. ([9], s. 589, Teorem XIII.3.2.)

$A \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ ise aşağıdaki önermeler karşılıklı olarak eşdeğerdir:

i) A üniterdir.

ii) A, $\mathbb{C}^n$ deki normları korur, yani, keyfi $x \in \mathbb{C}^n$ için $\|A(x)\| = \|x\|$ dir.

iii) Keyfi $x \in \mathbb{C}^n$ birim vektörü için $A(x)$ de birim vektördür.

Teorem 1.4.10. ([9], s. 592, Teorem XIII.3.3.)

$\mathbb{C}^n$ kompleks iç çarpım uzayı ve $A \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ bir üniter dönüşüm olsun.

1) A nın her bir karakteristik değerinin modülü 1 dir.

2) A nın determinantının modülü +1 dir.

Teorem 1.4.11. ([9], s. 592, Teorem XIII.3.3.)

$\mathbb{C}^n$ kompleks iç çarpım uzayı olsun.

1) $\mathbb{C}^n$ kompleks iç çarpım uzayındaki bütün üniter dönüşümlerin kümesi çarpma işlemine göre bir gruptur.

2) $\mathbb{C}^n$ kompleks iç çarpım uzayındaki determinantı 1 olan bütün üniter dönüşümlerinin kümesi üniter dönüşümler grubunun bir alt grubudur.

$n \times n$ tipindeki kompleks matrislerin oluşturduğu kümeyi $M(n \times n, \mathbb{C})$ ile gösterelim.

Tanım 1.4.12. ([9], s. 593, Tanım XIII.3.2.)

i) Bütün $\mathscr{A} \in M(n \times n, \mathbb{C})$ üniter matrislerin kümesinin çarpma işlemine göre oluşturduğu gruba üniter grup denir ve $U(n)$ ile gösterilir.

ii) Determinantı 1 olan bütün üniter matrislerin oluşturduğu alt gruba özel üniter grup denir ve $SU(n)$ ile gösterilir.

Örnek 1.4.13. $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in SU(2)$ dir.

1.5. Kompleks Vektör Uzaylarında *R*-lineer Dönüşümler

Tanım 1.5.1. ([4], s. 49, Tanım 37)

Aşağıdaki özellikleri sağlayan $F:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümüne $\mathbb{R}-lineer$ dönüşüm denir.

i) $F(z_1+z_2)=F(z_1)+F(z_2)$, $\forall z_1,z_2 \in \mathbb{C}^n$

ii) $F(\lambda z)=\lambda F(z)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$

Önerme 1.5.2.

Keyfi $\mathbb{C}-lineer$ dönüşüm $\mathbb{R}-lineerdir$.

İspat: F, keyfi $\mathbb{C}-lineer$ dönüşüm olsun. Bu takdirde,

a) $F(z_1+z_2)=F(z_1)+F(z_2)$, $\forall z_1,z_2 \in \mathbb{C}^n$

b) $F(\lambda z)=\lambda F(z)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$

dir. “b” keyfi $\lambda \in \mathbb{C}$ için geçerli olduğundan, $\lambda=\alpha+i0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ için de geçerlidir. Dolayısı ile, $F(\lambda z)=F(\alpha z)=\alpha F(z)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dir. Sonuç olarak, F nin $\mathbb{R}-lineer$ olduğu elde edilir. ♦

Örnek 1.5.3.

$\Im:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$z \to \Im(z)=\overline{z}$

dönüşümü verilsin. Burada, $z=\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere $\overline{z}=\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ ... \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}$ dir.

Bu takdirde, $\Im$, $\mathbb{C}-lineer$ değildir, $\mathbb{R}-lineerdir$. Gerçekten de; keyfi $z_1,z_2 \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\Im(z_1+z_2)=\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}=\Im(z_1)+\Im(z_2)$$

dir. Burada $\Im$ nin $\mathbb{C}-lineer$ olması için $\Im(\lambda z)=\lambda\Im(z)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$ olması gerekir. Keyfi $z \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\Im(\lambda z)=\overline{\lambda z}=\overline{\lambda}\,\overline{z}=\overline{\lambda}\Im(z)$$

dir. Buradan, $\Im(z)=\overline{z}\neq 0$ ise $\overline{\lambda}=\lambda$ dır. Bu durumda, $\lambda\in\mathbb{R}$ dir.

Keyfi $\lambda\in\mathbb{C}$ için geçerli olması gerektiğinden $\Im:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ dönüşümü $\mathbb{C}-lineer$ değildir. Fakat $\Im(\lambda z)=\lambda\Im(z)$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall z\in\mathbb{C}^n$ olduğundan $\Im:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ dönüşümü $\mathbb{R}-lineerdir$.

Not 1.5.4.

$\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayındaki tüm reel lineer dönüşümler kümesini $M(\mathbb{C}^n,\mathbb{R})$ ile gösterelim. $M(\mathbb{C}^n,\mathbb{R})$ kümesi, reel lineer dönüşümlerin toplamı ve reel sayı ile çarpımı işlemlerine göre bir reel vektör uzayıdır.

Önerme 1.5.5. ([12], s.347)

$\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayında, $\Im(z)=\overline{z}$, $z\in\mathbb{C}^n$ olmak üzere, keyfi $F\in M(\mathbb{C}^n,\mathbb{R})$ için $F=A_1+A_2\Im$ olacak şekilde $A_1,A_2\in M(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$ vardır.

İspat:

$F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$

$$\begin{pmatrix} z_1\\ \dots\\ z_n\end{pmatrix}\to F(\begin{pmatrix} z_1\\ \dots\\ z_n\end{pmatrix})$$

$z_k=x_k+iy_k$, $i=\sqrt{-1}$, $1\leq k\leq n$ olarak alalım.

$$F(\begin{pmatrix} z_1\\ \dots\\ z_n\end{pmatrix})=F(\begin{pmatrix} x_1+iy_1\\ \dots\\ x_n+iy_n\end{pmatrix})=F(\begin{pmatrix} x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix})+F(\begin{pmatrix} iy_1\\ \dots\\ iy_n\end{pmatrix})$$

$$=F(\begin{pmatrix} x_1\\ \dots\\ 0\end{pmatrix})+\dots+F(\begin{pmatrix} 0\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix})+F(\begin{pmatrix} iy_1\\ \dots\\ 0\end{pmatrix})+\dots+F(\begin{pmatrix} 0\\ \dots\\ iy_n\end{pmatrix})$$

$$=x_1F(\begin{pmatrix} 1\\ \dots\\ 0\end{pmatrix})+\dots+x_nF(\begin{pmatrix} 0\\ \dots\\ 1\end{pmatrix})+y_1F(\begin{pmatrix} i\\ \dots\\ 0\end{pmatrix})+\dots+y_nF(\begin{pmatrix} 0\\ \dots\\ i\end{pmatrix})$$

Burada, $F(\begin{pmatrix} 1\\ \dots\\ 0\end{pmatrix}),\dots,F(\begin{pmatrix} 0\\ \dots\\ 1\end{pmatrix}),F(\begin{pmatrix} i\\ \dots\\ 0\end{pmatrix}),\dots,F(\begin{pmatrix} 0\\ \dots\\ i\end{pmatrix})\in\mathbb{C}^n$ dır. Burada,

$$F(\begin{pmatrix}1\\ \dots\\ 0\end{pmatrix})=\alpha_{11},\ \dots,\ F(\begin{pmatrix}0\\ \dots\\ 1\end{pmatrix})=\alpha_{1n},\ F(\begin{pmatrix}i\\ \dots\\ 0\end{pmatrix})=\alpha_{21},\ \dots,\ F(\begin{pmatrix}0\\ \dots\\ i\end{pmatrix})=\alpha_{2n}$$

ile gösterelim.

$$=x_1\alpha_{11}+\dots+x_n\alpha_{1n}+y_1\alpha_{21}+\dots+y_n\alpha_{2n}$$

$$=\frac{z_1+\overline{z_1}}{2}\alpha_{11}+\dots+\frac{z_n+\overline{z_n}}{2}\alpha_{1n}+\frac{z_1-\overline{z_1}}{2i}\alpha_{21}+\dots+\frac{z_n-\overline{z_n}}{2i}\alpha_{2n}$$

$$=(\frac{\alpha_{11}}{2}+\frac{\alpha_{21}}{2i})z_1+\dots+(\frac{\alpha_{1n}}{2}+\frac{\alpha_{2n}}{2i})z_n+(\frac{\alpha_{11}}{2}-\frac{\alpha_{21}}{2i})\overline{z_1}+\dots+(\frac{\alpha_{1n}}{2}-\frac{\alpha_{2n}}{2i})\overline{z_n}$$

Burada,

$$(\frac{\alpha_{11}}{2}+\frac{\alpha_{21}}{2i})=\begin{pmatrix}a_{11}\\ \dots\\ a_{n1}\end{pmatrix},\ \dots,\ (\frac{\alpha_{1n}}{2}+\frac{\alpha_{2n}}{2i})=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \dots\\ a_{nn}\end{pmatrix},\ (\frac{\alpha_{11}}{2}-\frac{\alpha_{21}}{2i})=\begin{pmatrix}b_{11}\\ \dots\\ b_{n1}\end{pmatrix},\ \dots,\ (\frac{\alpha_{1n}}{2}-\frac{\alpha_{2n}}{2i})=\begin{pmatrix}b_{1n}\\ \dots\\ b_{nn}\end{pmatrix}$$

alınsın.

$$=\begin{pmatrix}a_{11}\\ \dots\\ a_{n1}\end{pmatrix}z_1+\dots+\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \dots\\ a_{nn}\end{pmatrix}z_n+\begin{pmatrix}b_{11}\\ \dots\\ b_{n1}\end{pmatrix}\overline{z_1}+\dots+\begin{pmatrix}b_{1n}\\ \dots\\ b_{nn}\end{pmatrix}\overline{z_n}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}z_1+\dots+a_{1n}z_n\\ \dots\\ a_{n1}z_1+\dots+a_{nn}z_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}\overline{z_1}+\dots+b_{1n}\overline{z_n}\\ \dots\\ b_{n1}\overline{z_1}+\dots+b_{nn}\overline{z_n}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \dots&\dots&\dots\\ a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ \dots\\ z_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&\dots&b_{1n}\\ \dots&\dots&\dots\\ b_{n1}&\dots&b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{z_1}\\ \dots\\ \overline{z_n}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \dots&\dots&\dots\\ a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ \dots\\ z_n\end{pmatrix}=A_1(\begin{pmatrix}z_1\\ \dots\\ z_n\end{pmatrix}),\ \begin{pmatrix}b_{11}&\dots&b_{1n}\\ \dots&\dots&\dots\\ b_{n1}&\dots&b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{z_1}\\ \dots\\ \overline{z_n}\end{pmatrix}=A_2(\begin{pmatrix}\overline{z_1}\\ \dots\\ \overline{z_n}\end{pmatrix})$$

$$=A_1(\begin{pmatrix}z_1\\ \dots\\ z_n\end{pmatrix})+A_2(\begin{pmatrix}\overline{z_1}\\ \dots\\ \overline{z_n}\end{pmatrix})=A_1(\begin{pmatrix}z_1\\ \dots\\ z_n\end{pmatrix})+(A_2\Im)(\begin{pmatrix}z_1\\ \dots\\ z_n\end{pmatrix})=(A_1+A_2\Im)(\begin{pmatrix}z_1\\ \dots\\ z_n\end{pmatrix})$$

Dolayısı ile $F=A_1+A_2\Im$ dir. ♦

Önerme 1.5.6. ([12], s. 347)

Keyfi $F \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ için $F = A_1 + A_2 \Im$, $A_1, A_2 \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ olacak şekilde tek türlü (A_1, A_2) ikilisi vardır.

İspat:

Farz edelim, A_1, A_2, B_1, $B_2 \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ olmak üzere, $F = A_1 + A_2 \Im = B_1 + B_2 \Im$ olsun.

Keyfi $\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ için,

$$(A_1 + A_2 \Im)(\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}) = (B_1 + B_2 \Im)(\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix})$$

$$A_1(\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}) + A_2 \Im(\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}) = B_1(\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}) + B_2 \Im(\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ ... & ... & ... \\ b_{n1} & ... & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ ... \\ \overline{z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & ... & c_{1n} \\ ... & ... & ... \\ c_{n1} & ... & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & ... & d_{1n} \\ ... & ... & ... \\ d_{n1} & ... & d_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ ... \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} z_1 + ... + a_{1n} z_n \\ ... \\ a_{n1} z_1 + ... + a_{nn} z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} \overline{z_1} + ... + b_{1n} \overline{z_n} \\ ... \\ b_{n1} \overline{z_1} + ... + b_{nn} \overline{z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} z_1 + ... + c_{1n} z_n \\ ... \\ c_{n1} z_1 + ... + c_{nn} z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} \overline{z_1} + ... + d_{1n} \overline{z_n} \\ ... \\ d_{n1} \overline{z_1} + ... + d_{nn} \overline{z_n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} z_1 + ... + a_{1n} z_n + b_{11} \overline{z_1} + ... + b_{1n} \overline{z_n} \\ ... \\ a_{n1} z_1 + ... + a_{nn} z_n + b_{n1} \overline{z_1} + ... + b_{nn} \overline{z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} z_1 + ... + c_{1n} z_n + d_{11} \overline{z_1} + ... + d_{1n} \overline{z_n} \\ ... \\ c_{n1} z_1 + ... + c_{nn} z_n + d_{n1} \overline{z_1} + ... + d_{nn} \overline{z_n} \end{pmatrix}$$

$i = \sqrt{-1}$ olmak üzere, $z_1 = x_1 + iy_1$, $\dots$, $z_n = x_n + iy_n$ alınırsa,

$$a_{11}(x_1 + iy_1) + ... + a_{1n}(x_n + iy_n) + b_{11}(x_1 - iy_1) + ... + b_{1n}(x_n - iy_n) =$$
$$= c_{11}(x_1 + iy_1) + ... + c_{1n}(x_n + iy_n) + d_{11}(x_1 - iy_1) + ... + d_{1n}(x_n - iy_n)$$

……………………………

$$a_{n1}(x_1 + iy_1) + ... + a_{nn}(x_n + iy_n) + b_{n1}(x_1 - iy_1) + ... + b_{nn}(x_n - iy_n) =$$
$$= c_{n1}(x_1 + iy_1) + ... + c_{nn}(x_n + iy_n) + d_{n1}(x_1 - iy_1) + ... + d_{nn}(x_n - iy_n)$$

$$\Rightarrow (a_{11}+b_{11}-c_{11}-d_{11})x_1+(a_{11}-b_{11}-c_{11}+d_{11})iy_1+...$$

$$+(a_{1n}+b_{1n}-c_{1n}-d_{1n})x_n+(a_{1n}-b_{1n}-c_{1n}+d_{1n})iy_n=0$$

$\forall x_1, y_1, ..., x_n, y_n \in \mathbb{R}$ için doğru olduğundan $x_1=1$ ve $y_1=x_2=y_2=...=x_n=y_n=0$ için de doğrudur. Bu takdirde,

$$a_{11}+b_{11}-c_{11}-d_{11}=0$$

dır. Buradan da

$$a_{11}-c_{11}=d_{11}-b_{11} \qquad (*)$$

elde edilir. Yine $\forall x_1, y_1, ..., x_n, y_n \in \mathbb{R}$ için doğru olduğundan $y_1=1$ ve $x_1=x_2=y_2=...=x_n=y_n=0$ için de doğrudur. Bu takdirde,

$$a_{11}-b_{11}-c_{11}+d_{11}=0$$

dır. Buradan da

$$a_{11}-c_{11}=b_{11}-d_{11} \qquad (**)$$

elde edilir. $(*)$ ve $(**)$' dan $a_{11}=c_{11}$ ve $b_{11}=d_{11}$ elde edilir.

……………………

Benzer düşünce uygulanarak $\forall x_1, y_1, ..., x_n, y_n \in \mathbb{R}$ için doğru olduğundan $x_n=1$ ve $x_1=y_1=...=x_{n-1}=y_{n-1}=y_n=0$ için de doğrudur. Bu takdirde,

$$a_{1n}+b_{1n}-c_{1n}-d_{1n}=0$$

dır. Buradan da

$$a_{1n}-c_{1n}=d_{1n}-b_{1n} \qquad (***)$$

elde edilir. Yine $\forall x_1, y_1, ..., x_n, y_n \in \mathbb{R}$ için doğru olduğundan $y_n=1$ ve $x_1=y_1=...=x_{n-1}=y_{n-1}=x_n=0$ için de doğrudur. Bu takdirde,

$$a_{1n}-b_{1n}-c_{1n}+d_{1n}=0$$

dır. Buradan da

$$a_{1n}-c_{1n}=b_{1n}-d_{1n} \qquad (****)$$

elde edilir. $(***)$ ve $(****)$' dan $a_{1n}=c_{1n}$ ve $b_{1n}=d_{1n}$ elde edilir.

Diğer satırlar için de aynı işlemler tekrarlanarak,

$A_1=B_1$ ve $A_2=B_2$

olduğu elde edilir. ♦

Önerme 1.5.7.

$\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayında, keyfi $A\in M(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$ ve Örnek 1.5.3. te tanımlanan $\Im:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ dönüşümü için, $\Im A=\overline{A}\Im$ dir.

İspat: Keyfi $\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n$ için,

$$(\Im A)(\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix})=\Im(A(\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}))=\Im(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix})=\Im(\begin{pmatrix} a_{11}z_1+\dots+a_{1n}z_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}z_1+\dots+a_{nn}z_n \end{pmatrix})$$

$$=\overline{\begin{pmatrix} a_{11}z_1+\dots+a_{1n}z_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}z_1+\dots+a_{nn}z_n \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} \overline{a_{11}}\,\overline{z_1}+\dots+\overline{a_{1n}}\,\overline{z_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{a_{n1}}\,\overline{z_1}+\dots+\overline{a_{nn}}\,\overline{z_n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \dots & \overline{a_{1n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{a_{n1}} & \dots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \dots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}$$

$$=\overline{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}\,\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}}=\overline{A}(\Im(\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}))=(\overline{A}\Im)(\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix})$$

Dolayısı ile, $\Im A=\overline{A}\Im$ dir. ♦

Önerme 1.5.8. ([4], s. 54, Önerme 27)

$\mathbb{C}^n$ uzayındaki tüm $\mathbb{R}-lineer$ dönüşümlerin kümesi $+$, $\cdot$, $r_.$ işlemlerine göre $\mathbb{R}-cebir$ oluşturur. Yani, $\left(M\left(\mathbb{C}^n,\mathbb{R}\right),+,\cdot,r_.\right)$ bir $\mathbb{R}-cebirdir$.

Önerme 1.5.9. ([4], s. 60, Önerme 30)

$H:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{pmatrix} a_1+ib_1 \\ \dots \\ a_n+ib_n \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

dönüşümü $\mathbb{R}-izomorfizmadır$.

Önerme 1.5.10. ([4], s. 62, Önerme 31)

$H^{-1}:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{C}^n$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \\ b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1+ib_1 \\ \ldots \\ a_n+ib_n \end{pmatrix}$$

dönüşümü $\mathbb{R}-izomorfizmadır$.

Önerme 1.5.11. ([4], s. 65, Önerme 32)

$H:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{pmatrix} a_1+ib_1 \\ \ldots \\ a_n+ib_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \\ b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

dönüşümünü alalım. Buna göre, $F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}-lineerdir \Leftrightarrow HFH^{-1}:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-lineerdir$.

Not 1.5.12.

$\mathbb{R}^{2n}$ reel vektör uzayındaki tüm reel lineer dönüşümler kümesini $M(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ ile gösterelim. $M(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ kümesi, lineer dönüşümlerin toplamı ve reel sayı ile çarpımı işlemlerine göre reel vektör uzayıdır.

$M(\mathbb{C}^n,\mathbb{R})$ ve $M(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ reel vektör uzaylar arasında $W:M(\mathbb{C}^n,\mathbb{R})\to M(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ dönüşümünü $W(F)=HFH^{-1}$ şeklinde tanımlayalım.

Teorem 1.5.13. ([4], s. 70, Teorem 19)

$W:M(\mathbb{C}^n,\mathbb{R})\to M(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ dönüşümü $\mathbb{R}-izomorfizmadır$.

İspat:

$F_1,F_2\in M(\mathbb{C}^n,\mathbb{R})$ için, $W(F_1)=W(F_2)$ olsun. W dönüşümünün tanımından,

$HF_1H^{-1}=HF_2H^{-1}$

dir. Eşitliğin her iki tarafına soldan ve sağdan sırasıyla H^{-1} ve H dönüşümleri ile bileşke işlemi uygulanırsa,

$$H^{-1}(HF_1H^{-1})H = H^{-1}(HF_2H^{-1})H$$

$$(H^{-1}H)F_1(H^{-1}H) = (H^{-1}H)F_2(H^{-1}H)$$

$$F_1 = F_2$$

elde edilir. Dolayısı ile W, birebirdir.

Keyfi $F^{'} \in M(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ için $W(F) = F^{'}$ olacak şekilde en az bir $F \in M(\mathbb{C}^{n},\mathbb{R})$ var mıdır?

$F^{'} = W(F) = HFH^{-1}$ ve $F^{'} \in M(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ olduğundan Önerme 1.5.11. e göre $F \in M(\mathbb{C}^{n},\mathbb{R})$ dir. Dolayısı ile W, örtendir.

$$W(F_1+F_2) = H(F_1+F_2)H^{-1} = (H(F_1)+H(F_2))H^{-1} = HF_1H^{-1} + HF_2H^{-1}$$
$$= W(F_1) + W(F_2)$$

Keyfi $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $W(\lambda F_1) = \lambda W(F_1)$ olduğunu gösterelim.

$$W(\lambda F_1) = H(\lambda F_1)H^{-1} = \lambda(HF_1H^{-1}) = \lambda W(F_1)$$

dır. Dolayısı ile, W, $\mathbb{R}-lineerdir$.

Sonuç olarak W, $\mathbb{R}-izomorfizmadır$. ♦

Teorem 1.5.14. ([4], s. 72, Teorem 20)

$M(\mathbb{C}^{n},\mathbb{R})$ ve $M(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ $\mathbb{R}-cebirlerin$ $W : M(\mathbb{C}^{n},\mathbb{R}) \to M(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ dönüşümü $\mathbb{R}-cebir\ izomorfizmasıdır$.

İspat: Teorem 1.5.13. den W, $\mathbb{R}-lineerdir$.

$W(F_1F_2) = W(F_1)W(F_2)$ olduğunu gösterelim.

$$W(F_1F_2) = H(F_1F_2)H^{-1} = HF_1(H^{-1}H)F_2H^{-1} = (HF_1H^{-1})(HF_2H^{-1})$$
$$= W(F_1)W(F_2)$$

dir. Dolayısı ile W dönüşümü $\mathbb{R}-cebir\ izomorfizmadır$. ♦

Teorem 1.5.15.

$H : \mathbb{C}^{n} \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümü olmak üzere,

$$H(M(\mathbb{C}^{n},\mathbb{C}))H^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : A, B \in M(n \times n, \mathbb{R}) \right\}$$

dir.

İspat: Keyfi $P \in M(\mathbb{C}^{n},\mathbb{C})$ için,

$$P:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix} \to P(\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}) = P(\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}) + ... + P(\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}) = z_1 P(\begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}) + ... + z_n P(\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$z_k = x_k + iy_k \,,\ i = \sqrt{-1}\,,\ 1 \le k \le n\,,\ P(\begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{11} + ib_{11} \\ ... \\ a_{n1} + ib_{n1} \end{pmatrix}, \ \dots\ ,\ P(\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{1n} + ib_{1n} \\ ... \\ a_{nn} + ib_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P(\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}) = (x_1 + iy_1)\begin{pmatrix} a_{11} + ib_{11} \\ ... \\ a_{n1} + ib_{n1} \end{pmatrix} + ... + (x_n + iy_n)\begin{pmatrix} a_{1n} + ib_{1n} \\ ... \\ a_{nn} + ib_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 - b_{11}y_1 + i(a_{11}y_1 + b_{11}x_1) + ... + a_{1n}x_n - b_{1n}y_n + i(a_{1n}y_n + b_{1n}x_n) \\ .... \\ a_{n1}x_1 - b_{n1}y_1 + i(a_{n1}y_1 + b_{n1}x_1) + ... + a_{nn}x_n - b_{nn}y_n + i(a_{nn}y_n + b_{nn}x_n) \end{pmatrix}$$

Önerme 1.5.9. daki $H:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizması$ kullanılarak,

$$H(P(\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n - b_{11}y_1 - ... - b_{1n}y_n \\ .... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n - b_{n1}y_1 - ... - b_{nn}y_n \\ b_{11}x_1 + ... + b_{1n}x_n + a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n \\ .... \\ b_{n1}x_1 + ... + b_{nn}x_n + a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n \end{pmatrix}$$

$$(HPH^{-1})(\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \\ y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & -b_{11} & ... & -b_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} & -b_{n1} & ... & -b_{nn} \\ b_{11} & ... & b_{1n} & a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & ... & b_{nn} & a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \\ y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = X$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = Y$, $\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = A$, $\begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ ... & ... & ... \\ b_{n1} & ... & b_{nn} \end{pmatrix} = B$ olarak alınırsa,

$$(HPH^{-1})(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısı ile,

$$H(M(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}))H^{-1} \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : A, B \in M(n\times n, \mathbb{R}) \right\}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : A, B \in M(n\times n, \mathbb{R}) \right\} \subseteq H(M(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}))H^{-1}$$

olduğu gösterilir. Sonuç olarak,

$$H(M(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}))H^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : A, B \in M(n\times n, \mathbb{R}) \right\}$$

dir. ♦

Not 1.5.16.

Teorem 1.5.15. deki eşitlik simplektik geometri üzerine yapılan çalışmalarda [21, 35] ve kompleks vektör uzaydaki reel lineer operatörler üzerine yapılan çalışmada [12] ifade edilmiştir.

1.6. Reel ve Sanal Üniter Dönüşümler

Tanım 1.6.1. ([4], s. 78, Tanım 38)

$A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü öyle ki keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\mathrm{Re}\{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{< x, y >_{\mathbb{C}}\}$$

eşitliği sağlanıyorsa, A dönüşümüne reel üniter dönüşüm denir.

Örnek 1.6.2.

$$\Im : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$z \to \Im(z) = \overline{z}$$

dönüşümü reel üniter dönüşümdür. Gerçekten de; keyfi $x, y \in \mathbb{C}$ için,

$$< \Im(x), \Im(y) >_{\mathbb{C}} = < \overline{x}, \overline{y} >_{\mathbb{C}} = \overline{x}y$$

$x = a + ib$ ve $y = c + id$ için,

$$< \Im(x), \Im(y) >_{\mathbb{C}} = (a - ib)(c + id) = ac + bd + i(ad - bc)$$

$$< x, y >_{\mathbb{C}} = (a + ib)(c - id) = ac + bd + i(bc - ad)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\{< \Im(x), \Im(y) >_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{< x, y >_{\mathbb{C}}\}$$

$\Rightarrow \Im$ dönüşümü reel üniterdir.

Tanım 1.6.3. ([4], s. 79, Tanım 39)

$A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü öyle ki keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\operatorname{Im}\{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}\} = \operatorname{Im}\{< x, y >_{\mathbb{C}}\}$$

eşitliği sağlanıyorsa, A dönüşümüne sanal üniter dönüşüm denir.

Örnek 1.6.4.

$A:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(a+ib) \to 2a+3b+i(a+2b)$

dönüşümü sanal üniterdir. Gerçekten de; $a+ib$, $c+id \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned}< A(a+ib), A(c+id) >_{\mathbb{C}} &=< 2a+3b+i(a+2b), 2c+3d+i(c+2d) >_{\mathbb{C}} \\ &= (2a+3b+i(a+2b))(2c+3d-i(c+2d)) \\ &= (2a+3b)(2c+3d)+(a+2b)(c+2d) \\ &\quad +i((a+2b)(2c+3d)-(2a+3b)(c+2d)) \\ &= 4ac+6ad+6bc+9bd+ac+2ad+2bc+4bd \\ &\quad +i(2ac+3ad+4bc+6bd-2ac-4ad-3bc-6bd) \\ &= 5ac+8ad+8bc+13bd+i(bc-ad)\end{aligned}$$

$$< (a+ib),(c+id) >_{\mathbb{C}} = (a+ib)(c-id) = ac+bd+i(bc-ad)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\{< A(a+ib), A(c+id) >_{\mathbb{C}}\} = \operatorname{Im}\{< a+ib, c+id >_{\mathbb{C}}\}$$

$\Rightarrow$ A dönüşümü sanal üniterdir.

Önerme 1.6.5. ([4], s. 79, Önerme 36)

$A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü üniterdir $\Leftrightarrow$ A dönüşümü reel üniter ve sanal üniterdir.

Teorem 1.6.6.

$A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü reel üniterdir $\Leftrightarrow$ $H:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümü için HAH^{-1} dönüşümü ortogonaldir.

İspat: $(\Rightarrow)$:

$H:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümünü alalım. $A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü reel üniter olsun. Dolayısıyla, keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\operatorname{Re}\{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}\} = \operatorname{Re}\{< x, y >_{\mathbb{C}}\}$$

dir.

$i=\sqrt{-1}$ için $x=\begin{pmatrix} a_1+ib_1 \\ \ldots \\ a_n+ib_n \end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix} c_1+id_1 \\ \ldots \\ c_n+id_n \end{pmatrix}$ alalım.

$$<x,y>_{\mathbb{C}} = x^T\overline{y} = \begin{pmatrix} a_1+ib_1 \\ \ldots \\ a_n+ib_n \end{pmatrix}^T \overline{\begin{pmatrix} c_1+id_1 \\ \ldots \\ c_n+id_n \end{pmatrix}}$$

$$= a_1c_1+b_1d_1+\ldots+a_nc_n+b_nd_n+i(b_1c_1-a_1d_1+\ldots+b_nc_n-a_nd_n)$$

$$\Rightarrow \ \operatorname{Re}\{<x,y>_{\mathbb{C}}\} = a_1c_1+b_1d_1+\ldots+a_nc_n+b_nd_n$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \\ b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_n \\ d_1 \\ \ldots \\ d_n \end{pmatrix} = <H(x),H(y)>_{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \ \operatorname{Re}\{<x,y>_{\mathbb{C}}\} = <H(x),H(y)>_{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \ \operatorname{Re}\{<A(x),A(y)>_{\mathbb{C}}\} = <H(A(x)),H(A(y))>_{\mathbb{R}}$$

elde edilir.

$\operatorname{Re}\{<A(x),A(y)>_{\mathbb{C}}\} = \operatorname{Re}\{<x,y>_{\mathbb{C}}\}$ olduğundan,

$$<H(A(x)),H(A(y))>_{\mathbb{R}} = <H(x),H(y)>_{\mathbb{R}}$$

dir.

$$<(HAH^{-1})(H(x)),(HAH^{-1})(H(y))>_{\mathbb{R}} = <H(x),H(y)>_{\mathbb{R}}$$

olduğundan, HAH^{-1}, ortogonaldir.

$(\Leftarrow)$:

$A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümünü alalım. $H:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-$*izomorfizma* için HAH^{-1} dönüşümü ortogonal olsun.

Keyfi $x,y \in \mathbb{C}^n$ için,

$$<(HAH^{-1})(H(x)),(HAH^{-1})(H(y))>_{\mathbb{R}} = <H(x),H(y)>_{\mathbb{R}}$$

dir. Dolayısı ile,

$$<H(A(x)),H(A(y))>_{\mathbb{R}} = <H(x),H(y)>_{\mathbb{R}}$$

dir. $i=\sqrt{-1}$ için $x=\begin{pmatrix} a_1+ib_1 \\ \ldots \\ a_n+ib_n \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} c_1+id_1 \\ \ldots \\ c_n+id_n \end{pmatrix}$ olarak seçelim. Bu takdirde,

$$H(x)=\begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \\ b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},\ H(y)=\begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_n \\ d_1 \\ \ldots \\ d_n \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

$$< H(x), H(y) >_{\mathbb{R}} = a_1c_1+b_1d_1+\ldots+a_nc_n+b_nd_n = \mathrm{Re}\{< x, y >_{\mathbb{C}}\}$$

dir. Buradan,

$$< H(A(x)), H(A(y)) >_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}\{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}\}$$

elde edilir. $< H(A(x)), H(A(y)) >_{\mathbb{R}} =< H(x), H(y) >_{\mathbb{R}}$ olduğundan,

$$\mathrm{Re}\{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{< x, y >_{\mathbb{C}}\}$$

elde edilir. A dönüşümü reel üniterdir. ♦

Not 1.6.7.

Tüm reel üniter dönüşümlerin kümesini $\mathrm{Re}U(n)$ ile gösterelim.

Sonuç 1.6.8.

$\mathrm{Re}U(n)$ bileşke işlemine göre gruptur.

İspat

i) Keyfi $A_1, A_2 \in \mathrm{Re}U(n)$ için $A_1A_2 \in \mathrm{Re}U(n)$ midir? Keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\mathrm{Re}\{\langle (A_1A_2)(x), (A_1A_2)(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle A_1(A_2(x)), A_1(A_2(y))\rangle_{\mathbb{C}}\}$$

$A_1 \in \mathrm{Re}U(n)$ olduğundan,

$$= \mathrm{Re}\{\langle A_2(x), A_2(y)\rangle_{\mathbb{C}}\}$$

$A_2 \in \mathrm{Re}U(n)$ olduğundan,

$$= \mathrm{Re}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$$

dir. Dolayısı ile $A_1A_2 \in \mathrm{Re}U(n)$ dir.

ii) $I:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, birim dönüşüm için $\mathrm{Re}\{\langle I(x), I(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ olduğundan $I \in \mathrm{Re}U(n)$ dir.

iii) Keyfi $A \in \mathrm{Re}U(n)$ için $A^{-1} \in \mathrm{Re}U(n)$ midir?

Teorem 1.6.6. dan, $H:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümü için, $HAH^{-1}\in O(2n)$ dir. $O(2n)$ bileşke işlemine göre grup olduğundan, keyfi ortogonal dönüşümün tersi var ve tersi de ortogonal dönüşümdür.

$A(x)=A(y)$ olacak şekilde $x,y\in\mathbb{C}^n$ olsun.

$H:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümü için,

$$(HAH^{-1})(H(x))=(HAH^{-1})(H(y))$$

dir. Teorem 1.6.6. dan, $HAH^{-1}\in O(2n)$ olduğundan HAH^{-1}, birebirdir. Dolayısı ile,

$$H(x)=H(y)$$

dir. Buradan da,

$$x=y$$

dir. Sonuç olarak, A, birebirdir. Keyfi $y\in\mathbb{C}^n$ için $A(x)=y$ olacak şekilde $x\in\mathbb{C}^n$ var mıdır?

$H:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümü kullanılarak, $A(x)=y$ den,

$$(HAH^{-1})(H(x))=H(y)$$

elde edilir. Teorem 1.6.6. dan, $HAH^{-1}\in O(2n)$ olduğundan HAH^{-1}, örtendir. Dolayısı ile keyfi $H(y)\in\mathbb{R}^{2n}$ için $(HAH^{-1})(H(x))=H(y)$ olacak şekilde $H(x)\in\mathbb{R}^{2n}$ dir. Buradan da $x\in\mathbb{C}^n$ elde edilir. Sonuç olarak, A, örtendir.

A, birebir ve örten olduğundan A^{-1} vardır. $A^{-1}\in \mathrm{Re}U(n)$ midir?

Keyfi $x,y\in\mathbb{C}^n$ için $x=A^{-1}(\varsigma)$ ve $y=A^{-1}(\xi)$ olacak şekilde $\varsigma,\xi\in\mathbb{C}^n$ vardır. $A\in \mathrm{Re}U(n)$ olduğundan,

$$\mathrm{Re}\{<A(x),A(y)>_{\mathbb{C}}\}=\mathrm{Re}\{<x,y>_{\mathbb{C}}\}$$

dir. Yukarıdaki ifadede, x ve y yerine eşitleri olan $A^{-1}(\varsigma)$ ve $A^{-1}(\xi)$ yazılırsa,

$$\mathrm{Re}\{<A(A^{-1}(\varsigma)),A(A^{-1}(\xi))>_{\mathbb{C}}\}=\mathrm{Re}\{<A^{-1}(\varsigma),A^{-1}(\xi)>_{\mathbb{C}}\}$$

elde edilir. $AA^{-1}=I$ olduğundan,

$$\mathrm{Re}\{<\varsigma,\xi>_{\mathbb{C}}\}=\mathrm{Re}\{<A^{-1}(\varsigma),A^{-1}(\xi)>_{\mathbb{C}}\}$$

elde edilir. Buradan, $A^{-1}\in \mathrm{Re}U(n)$ dir. (i), (ii), (iii)' den $\mathrm{Re}U(n)$, bileşke işlemine göre gruptur. ♦

1.7. Kompleks Vektör Uzaylarındaki Metrikler ve İzometriler

Örnek 1.7.1. ([36], s. 230, Örnek 17.2.3.)

$d:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, $d(x,\ y)=|x-y|$, $x,\ y\in\mathbb{C}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir metriktir.

Örnek 1.7.2. ([36], s. 233, Önerme 17.2.3.)

$$d:\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\to\mathbb{R} \quad , \quad d(x,\ y)=\sqrt{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2} \quad , \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad , \quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir metriktir.

Örnek 1.7.3. ([36], s. 233, Önerme 17.2.3.)

$d:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}$, $d(x,\ y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir metriktir.

Tanım 1.7.4. ([8], s. 200)

$\mathbb{C}^n$ üniter uzayında, $d:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}$, $d(x,y)=\|x-y\|$, $x,\ y\in\mathbb{C}^n$ ifadesine x ve y vektörleri arasındaki uzaklık denir.

Tanım 1.7.5. ([8], s. 220, 8.17. Definition)

$\mathbb{C}^n$ üniter uzay olmak üzere, $\forall x,\ y\in\mathbb{C}^n$ için $d(F(x),F(y))=d(x,y)$ eşitliğini sağlayan $F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ dönüşümüne izometri denir.

Örnek 1.7.6.

$\mathbb{C}^n$ de öteleme dönüşümünü alalım. Keyfi $x,\ a\in\mathbb{C}^n$ için $F(x)=x+a$ dönüşümü için F bir izometridir. Gerçekten, keyfi $x,\ y\in\mathbb{C}^n$ için,

$$d(F(x),\ F(y))=d(x+a,\ y+a)=\|(x+a)-(y+a)\|=\|x-y\|=d(x,\ y)$$

olur.

Örnek 1.7.7.

$\mathbb{C}$ de F dönme hareketini alalım. F bir izometridir. Gerçekten, keyfi $x=x_1+ix_2\in\mathbb{C}$ ve $F(x_1+ix_2)=e^{i\theta}(x_1+ix_2)$ olmak üzere, keyfi $x,\ y\in\mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned}\|F(x)-F(y)\|^2 &= \langle F(x)-F(y),\ F(x)-F(y)\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \left\langle (x_1-y_1)e^{i\theta}+i(x_2-y_2)e^{i\theta},\ (x_1-y_1)e^{i\theta}+i(x_2-y_2)e^{i\theta}\right\rangle_{\mathbb{C}}\end{aligned}$$

$$= (x_1 - y_1)^2 e^{i\theta} e^{-i\theta} + \left(x_2 - y_2\right)^2 e^{i\theta} e^{-i\theta}$$
$$-i\left(x_1 - y_1\right)\left(x_2 - y_2\right) e^{i\theta} e^{-i\theta} + i\left(x_2 - y_2\right)\left(x_1 - y_1\right) e^{i\theta} e^{-i\theta}$$
$$= (x_1 - y_1)^2 + \left(x_2 - y_2\right)^2 = \|x - y\|^2$$

$$\|F(x) - F(y)\| = \|x - y\|$$

olup, F izometridir.

Örnek 1.7.8.

Birim dönüşüm izometridir. Gerçekten keyfi $x,\ y \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\|I(x) - I(y)\| = \|x - y\|$$

dir.

Not 1.7.9.

$\mathbb{C}^n$ nin tüm izometriler kümesini $Iz(\mathbb{C}^n)$ ile gösterelim.

Önerme 1.7.10. ([4], s. 93, Önerme 37)

$F_1,\ F_2 \in Iz(\mathbb{C}^n)$ olmak üzere $F_1 F_2 \in Iz(\mathbb{C}^n)$ dir.

Sonuç 1.7.11. ([4], s. 93, Sonuç 16)

$Iz(\mathbb{C}^n)$ bileşke işlemine göre birimli yarı gruptur.

Önerme 1.7.12. ([4], s. 93, Önerme 38)

Keyfi izometri birebirdir.

Önerme 1.7.13. ([4], s. 93, Önerme 39)

Keyfi $A \in U(n)$ dönüşümü için $A \in Iz(\mathbb{C}^n)$ dir.

Not 1.7.14.

$\mathbb{C}^n$ deki tüm ötelemelerin oluşturduğu kümeyi $T(\mathbb{C}^n)$ ile gösterelim.

Önerme 1.7.15. ([4], s. 94, Önerme 40)

Keyfi $B \in T(\mathbb{C}^n)$ dönüşümü için $B \in Iz(\mathbb{C}^n)$ dir.

Sonuç 1.7.16. ([4], s. 94, Sonuç 17)

Öteleme ve Üniter dönüşümlerin bileşkesi de izometridir.

Önerme 1.7.17.

$H:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{pmatrix} x_1+iy_1 \\ ... \\ x_n+iy_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \\ y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}-izomorfizma$ olmak üzere, keyfi $x\in\mathbb{C}^n$ için $\|x\|=\|H(x)\|$ dur.

İspat: Keyfi $x\in\mathbb{C}^n$ için, $x=\begin{pmatrix} x_1+iy_1 \\ ... \\ x_n+iy_n \end{pmatrix}$ olarak gösterilirse,

$$\|x\|^2 =< x,x >_{\mathbb{C}} =< \begin{pmatrix} x_1+iy_1 \\ ... \\ x_n+iy_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1+iy_1 \\ ... \\ x_n+iy_n \end{pmatrix} >_{\mathbb{C}}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1+iy_1 \\ ... \\ x_n+iy_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1-iy_1 \\ ... \\ x_n-iy_n \end{pmatrix} = x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+...+x_n^{\,2}+y_n^{\,2}$$

$H:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizması$ için,

$$\|H(x)\|^2 =< H(x),H(x) >_{\mathbb{R}} =< \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \\ y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \\ y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \\ y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \\ y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+...+x_n^{\,2}+y_n^{\,2}$$

dir. Dolayısı ile, $\|H(x)\|^2=\|x\|^2$ olduğundan,

$$\|H(x)\|=\|x\|$$

dir. ♦

Teorem 1.7.18. ([4], s. 96, Teorem 28)

$F \in Iz(\mathbb{C}^n)$ dir ancak ve ancak $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ olmak üzere $HFH^{-1} \in Iz(\mathbb{R}^{2n})$ dir.

Önerme 1.7.19. ([4], s. 96, Önerme 42)

$F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü ötelemedir $\Leftrightarrow$ $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ olmak üzere $HFH^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dönüşümü ötelemedir.

Sonuç 1.7.20.

$\mathbb{C}^n$ de her izometri örtendir.

İspat: Teorem 1.7.18. den $\mathbb{C}^n$ deki her izometri $\mathbb{R}^{2n}$ de de izometridir. $\mathbb{R}^{2n}$ de izometriler örten olduğundan ve Teorem 1.5.13. den $\mathbb{C}^n$ deki her izometri de örtendir. ♦

Önerme 1.7.21.

$Iz(\mathbb{C}^n)$, bileşke işlemine göre gruptur.

İspat: Sonuç 1.7.11. den, $Iz(\mathbb{C}^n)$ bileşke işlemine göre monoiddir.

Önerme 1.7.12. ve Önerme 1.7.20. den keyfi izometrinin tersi vardır. Şimdi $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, keyfi bir izometri olmak üzere, F^{-1} in de izometri olduğunu gösterelim.

Keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için, $x = F^{-1}(\varpi)$ ve $y = F^{-1}(\sigma)$ olacak şekilde $\varpi, \sigma \in \mathbb{C}^n$ vardır. F, izometri olduğundan,

$$d(F(x), F(y)) = d(x, y)$$

dir. Yukarıdaki ifadede, x ve y yerine eşitleri olan $F^{-1}(\varpi)$ ve $F^{-1}(\sigma)$ yazılırsa,

$$d(F(F^{-1}(\varpi)), F(F^{-1}(\sigma))) = d(F^{-1}(\varpi), F^{-1}(\sigma))$$

elde edilir. $FF^{-1} = I$ olduğundan,

$$d(\varpi, \sigma) = d(F^{-1}(\varpi), F^{-1}(\sigma))$$

elde edilir. Bu da F^{-1} in de izometri olduğunu gösterir.

Dolayısı ile $Iz(\mathbb{C}^n)$, bileşke işlemine göre gruptur. ♦

1.8. Bir Kümenin Bir Grup Etkisi ile Hareketi

Tanım 1.8.1.

G bir grup ve K bir küme olsun. Bir $\gamma : G \times K \to K$ dönüşümü verilsin. Keyfi $g_1, g_2 \in G$, keyfi $x \in K$ için,

a) $\gamma(g_1g_2,x)=\gamma(g_1,\gamma(g_2,x))$

b) e, G nin birimi olmak üzere, $\gamma(e,x)=x$

koşulları sağlanıyorsa, γ ya G nin K üzerindeki sağ etkisi veya K nın G altında hareketi denir. K nin G altındaki hareketi $G:K$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.8.2.

$GL(n,\zeta)$, $\zeta=\mathbb{R},\mathbb{C}$ olmak üzere, $n\times n$ tipindeki, determinantı sıfır olmayan tüm matrislerin oluşturduğu küme olsun. $GL(n,\zeta)$ bileşke işlemine göre bir gruptur.

$$\gamma(g,x)=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \ , \quad \forall g=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}\in GL(n,\zeta) \ , \quad \forall x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}\in \zeta^n$$

olacak şekilde iki matrisin çarpımı olarak tanımlayalım.

Bu takdirde, $h=\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}\in GL(n,\zeta)$ için,

a) $$\gamma(gh,x)=(\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix})\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} g_{11}h_{11}+\ldots+g_{1n}h_{n1} & \cdots & g_{11}h_{1n}+\ldots+g_{1n}h_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1}h_{11}+\ldots+g_{nn}h_{n1} & \cdots & g_{n1}h_{1n}+\ldots+g_{nn}h_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (g_{11}h_{11}+\ldots+g_{1n}h_{n1})x_1+\ldots+(g_{11}h_{1n}+\ldots+g_{1n}h_{nn})x_n \\ \cdots \\ (g_{n1}h_{11}+\ldots+g_{nn}h_{n1})x_1+\ldots+(g_{n1}h_{1n}+\ldots+g_{nn}h_{nn})x_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} g_{11}(h_{11}x_1+\ldots+h_{1n}x_n)+\ldots+g_{1n}(h_{n1}x_1+\ldots+h_{nn}x_n) \\ \cdots \\ g_{n1}(h_{11}x_1+\ldots+h_{1n}x_n)+\ldots+g_{nn}(h_{n1}x_1+\ldots+h_{nn}x_n) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11}x_1+\ldots+h_{1n}x_n \\ \cdots \\ h_{n1}x_1+\ldots+h_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix})=\gamma(g,\gamma(h,x))$$

b) $$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix}\in GL(n,\zeta)$$ birim elemanını alalım. $\forall x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ ...\\ x_n\end{pmatrix}\in \zeta^n$ için,

$$\gamma(I,x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ ...\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ ...\\ x_n\end{pmatrix}=x$$

olduğundan γ, ζ^n kümesinin $GL(n,\zeta)$ grubu altında hareketidir.

Örnek 1.8.3.

Keyfi $g=\left[a_{ij}\right]\in O(n)$ ve keyfi $x=\left[x_j\right]\in \mathbb{R}^n$, $1\le i,j\le n$ olmak üzere,

$$\gamma(g,x)=\left[a_{ij}\right]\left[x_j\right]=\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_j\right]$$

şeklinde tanımlayalım.

Keyfi $h=\left[b_{jk}\right]\in O(n)$, $1\le j,k\le n$ için,

a) $$\gamma(gh,x)=(\left[a_{ij}\right]\left[b_{jk}\right])\left[x_k\right]=\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right]\left[x_k\right]=\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_{ij}b_{jk})x_k\right]$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ij}(b_{jk}x_k)\right]=\left[a_{ij}\right]\left[\sum_{k=1}^{n}b_{jk}x_k\right]$$

$$=\left[a_{ij}\right](\left[b_{jk}\right]\left[x_k\right])=\gamma(g,\gamma(h,x))$$

b) $$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix}\in O(n)$$ birim elemanını alalım. Keyfi $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ ...\\ x_n\end{pmatrix}\in \mathbb{R}^n$

için;

$$\gamma(I,x)=x$$

olduğundan γ, $\mathbb{R}^n$ nin $O(n)$ altındaki hareketidir.

Örnek 1.8.4.

Keyfi $g\in O(n)$ ve keyfi $(x,y)\in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ olmak üzere $\gamma(g,(x,y))=(gx,gy)$ olarak tanımlayalım. Burada gx iki matrisin çarpımı işlemidir.

Keyfi $g_1, g_2 \in O(n)$ ve keyfi $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için,

a) $\gamma(g_1 g_2,(x,y)) = ((g_1 g_2)x,(g_1 g_2)y) = (g_1(g_2 x), g_1(g_2 y))$

$$= \gamma(g_1,(g_2 x, g_2 y)) = \gamma(g_1, \gamma(g_2,(x,y)))$$

b) $I \in O(n)$ birim eleman olmak üzere,

$$\gamma(I,(x,y)) = (Ix, Iy) = (x,y)$$

olduğundan γ, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ in $O(n)$ altındaki hareketidir.

Örnek 1.8.5.

Keyfi $g = \left[a_{ij}\right] \in U(n)$ ve keyfi $x = \left[x_j\right] \in \mathbb{C}^n$, $1 \le i, j \le n$ olmak üzere,

$$\gamma(g,x) = \left[a_{ij}\right]\left[x_j\right] = \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j\right]$$

şeklinde tanımlayalım.

Keyfi $h = \left[b_{jk}\right] \in U(n)$, $1 \le j,k \le n$ için,

a) $\gamma(gh,x) = (\left[a_{ij}\right]\left[b_{jk}\right])\left[x_k\right] = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right]\left[x_k\right] = \left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (a_{ij} b_{jk}) x_k\right]$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} x_k)\right] = \left[a_{ij}\right]\left[\sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k\right]$$

$$= \left[a_{ij}\right](\left[b_{jk}\right]\left[x_k\right]) = \gamma(g, \gamma(h,x))$$

b) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in U(n)$ birim elemanını alalım. Keyfi $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$

için,

$$\gamma(I,x) = x$$

olduğundan γ, $\mathbb{C}^n$ nin $U(n)$ altındaki hareketidir.

Örnek 1.8.6.

Keyfi $g \in U(n)$ ve keyfi $(x,y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ olmak üzere $\gamma(g,(x,y)) = (gx, gy)$ olarak tanımlayalım. Burada gx iki matrisin çarpımı işlemidir.

Keyfi $g_1, g_2 \in U(n)$ ve keyfi $(x,y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ için,

a) $\gamma(g_1 g_2,(x,y)) = ((g_1 g_2)x,(g_1 g_2)y) = (g_1(g_2 x), g_1(g_2 y))$

$$= \gamma(g_1,(g_2x, g_2y)) = \gamma(g_1, \gamma(g_2,(x, y)))$$

b) $I \in U(n)$ birim eleman olmak üzere,

$\gamma(I,(x, y)) = (Ix, Iy) = (x, y)$

olduğundan γ, $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ in $U(n)$ altındaki hareketidir.

1.9. Nokta Sistemlerinin *G*-denkliği

Not 1.9.1.

Buradan itibaren G bir grup, K bir küme olmak üzere $G:K$ hareketi γ ile gösterilecektir.

Tanım 1.9.2. ([18], s. 545)

G bir grup, K bir küme ve $G:K$ verilsin. $y = \gamma(g, x)$ olacak şekilde $g \in G$ varsa $x, y \in K$ elemanlarına $G-denk$ denir ve bu durum $x \overset{G}{\sim} y$ şeklinde gösterilir.

Önerme 1.9.3.

G bir grup, K bir küme ve $G:K$ olsun. $\overset{G}{\sim}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: "$\overset{G}{\sim}$" bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını göstermemiz gerekir. Şimdi bunları gösterelim:

i) Keyfi $x \in K$ için $x \overset{G}{\sim} x$ dir. $g = e \in G$ alalım.

$x = \gamma(g, x) = \gamma(e, x) = x$

olup, $x \overset{G}{\sim} x$ dir.

ii) Keyfi $x, y \in K$ için $x \overset{G}{\sim} y \Leftrightarrow y \overset{G}{\sim} x$ dir.

$x \overset{G}{\sim} y$ ise $y = \gamma(g, x)$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. Buradan her iki tarafa $g^{-1} \in G$ ile "γ" hareketi uygulanırsa,

$\gamma(g^{-1}, y) = \gamma(g^{-1}, \gamma(g, x)) = \gamma(g^{-1}g, x) = \gamma(e, x) = x$

olup, $y \overset{G}{\sim} x$ dir.

iii) Keyfi $x, y, z \in K$ için $x \overset{G}{\sim} y$ ve $y \overset{G}{\sim} z$ ise $x \overset{G}{\sim} z$ dir.

$x \overset{G}{\sim} y$ ise $y = \gamma(g_1, x)$ olacak şekilde $g_1 \in G$ vardır. $(*)$

$y \overset{G}{\sim} z$ ise $z = \gamma(g_2, y)$ olacak şekilde $g_2 \in G$ vardır. $(**)$

$(**)$' da y yerine $(*)$' daki eşiti alınırsa,

$z = \gamma(g_2, \gamma(g_1, x)) = \gamma(g_2 g_1, x)$

elde edilir. $g_2 g_1 \in G$ olduğu için $x \overset{G}{\sim} z$ dir. ◆

Örnek 1.9.4.

$G = O(1) = \{-1, 1\}$ olsun. $\mathbb{R}$ nin $O(1)$ grubu altındaki hareketini $\gamma(g, x) = gx$, $\forall g \in O(1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ olacak şekilde iki reel sayının çarpımı olarak alalım.

$x, y \in \mathbb{R}$ için $y = \pm x$ ise $x \overset{O(1)}{\sim} y$ dir.

Örnek 1.9.5.

$G = \{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in [0, 2\pi)\}$ olsun. $\mathbb{R}^2$ nin G grubu altındaki hareketini $\gamma(g, x) = gx$, $\forall g \in G$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$ olacak şekilde iki matrisin çarpımı olarak alalım.

$x, y \in \mathbb{R}^2$ için,

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ ise $x \overset{G}{\sim} y$ dir.

Örnek 1.9.6.

$G = O(n)$ olsun. $\mathbb{R}^n$ nin $O(n)$ grubu altındaki hareketini $\gamma(g, x) = gx$, $\forall g \in O(n)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ olacak şekilde iki matrisin çarpımı olarak alalım.

$x, y \in \mathbb{R}^n$ için $y = gx$ olacak şekilde $g \in O(n)$ var ise $x \overset{O(n)}{\sim} y$ dir.

Örnek 1.9.7.

$G = U(1) = \{a + ib \in \mathbb{C} :\ a^2 + b^2 = 1\}$ olsun. $\mathbb{C}$ nin $U(1)$ grubu altındaki hareketini $\gamma(g, x) = gx$, $g \in U(1)$, $x \in \mathbb{C}$ olacak şekilde iki kompleks sayının çarpımı olarak alalım.

$x, y \in \mathbb{C}$ için $y = gx$ olacak şekilde $g \in U(1)$ var ise $x \overset{U(1)}{\sim} y$ dir.

Örnek 1.9.8.

$G = U(n)$ olsun. $\mathbb{C}^n$ in $U(n)$ grubu altındaki hareketini $\gamma(g, x) = gx$, $\forall g \in U(n)$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$ olacak şekilde iki matrisin çarpımı olarak alalım.

$x, y \in \mathbb{C}^n$ için $y = gx$ olacak şekilde $g \in U(n)$ var ise $x \overset{U(n)}{\sim} y$ dir.

Not 1.9.9.

G bir grup, K bir küme olsun. Bundan sonra $G:K$ hareketini, $\forall g\in G$, $\forall x\in K$ için kısaca $\gamma(g,x)=gx$ ile gösterelim.

Tanım 1.9.10.

$\{x_\tau,\tau\in T\}$ ve $\{y_\tau,\tau\in T\}$ iki vektör ailesi olsun. $y_\tau=gx_\tau$, $\forall\tau\in T$ olacak şekilde $g\in G$ var ise bu vektör ailelerine $G-denktir$ denir.

İki vektör ailesinin denkliği $\{x_\tau,\tau\in T\}\overset{G}{\sim}\{y_\tau,\tau\in T\}$ ile gösterilir.

Önerme 1.9.11.

G bir grup, $\{x_\tau,\tau\in T\}$ vektör ailesi ve $G:\{x_\tau,\tau\in T\}$ olsun. Bu takdirde, “$\overset{G}{\sim}$” bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Önerme 1.9.3. dekine benzer şekilde yapılır. ◆

Tanım 1.9.12.

V_1 ve V_2 , $\mathbb{C}^n$ de kompleks alt uzaylar olsunlar. Eğer $F(V_1)=V_2$ olacak şekilde $F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ üniter dönüşüm varsa, V_1 ve V_2 alt uzaylar $U(n)$ *-denk* denir ve bu durum, $V_1\overset{U(n)}{\sim}V_2$ şeklinde gösterilir.

Not 1.9.13. Tanım 1.9.12., Tanım 1.3.9. un özel halidir.

Önerme 1.9.14. ([10], s. 300, Corollary.)

V_1 ve V_2, $\mathbb{C}^n$ de kompleks alt uzaylar olsunlar. Bu takdirde,

$$V_1\overset{U(n)}{\sim}V_2 \Leftrightarrow boyV_1=boyV_2$$

dir.

İspat:

$(\Rightarrow)$: V_1 ve V_2 alt uzaylar için $V_1\overset{U(n)}{\sim}V_2$ olsun. Bu takdirde, $F(V_1)=V_2$ olacak şekilde $F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ üniter dönüşüm vardır.

$F(V_1)=V_2$ olduğundan $F_{V_1}:V_1\to V_2$ dönüşümü örtendir.

F , üniter dönüşüm olduğundan,

$$\|F(v_1)\|=\|v_1\| ,\ \forall v_1\in V_1$$

dir.

$F(v_1)=F(v_2)$ olacak şekilde $v_1,v_2\in V_1$ olsun.

$$\|F(v_1)-F(v_2)\| = \|F(v_1-v_2)\| = \|v_1-v_2\|$$

$$\left\| \underbrace{F(v_1)-F(v_2)}_{=0} \right\| = \|v_1-v_2\|$$

$$\Rightarrow \|v_1-v_2\| = 0 \;\Rightarrow\; v_1 = v_2$$

Dolayısı ile F_{V_1} , birebirdir. Tanım 1.3.9. a göre $F_{V_1}: V_1 \to V_2$ dönüşümü izomorfizmadır. Önerme 1.3.10. dan,

$$boyV_1 = boyV_2$$

dir.

$(\Leftarrow)$: $boyV_1 = boyV_2 = k$ olsun.

V_1 deki ortonormal taban $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ olsun. ([9], s. 194, Teorem V.8.8.)' e göre, V_1 alt uzayın $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ ortonormal tabanı, uzayın $\{e_1, e_2, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$ tabanına kadar genişletilebilir.

V_2 deki ortonormal taban $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ olsun. Benzer şekilde, ([9], s. 194, Teorem V.8.8.)' e göre, bu taban da uzayın $\{f_1, f_2, ..., f_k, f_{k+1}, ..., f_n\}$ ortonormal tabanına kadar genişletilebilir.

$F: V \to V$ dönüşümünü $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ tabanda $F(e_i) = f_i$, $1 \le i \le n$ şeklinde ve keyfi $x \in V$ için $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$ ise $F(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) = x_1f_1 + x_2f_2 + ... + x_nf_n$ şeklinde tanımlayalım.

Keyfi $x, y \in V$ için,

$$F(x) = F(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) = x_1f_1 + x_2f_2 + ... + x_nf_n$$

$$F(y) = F(y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n) = y_1f_1 + y_2f_2 + ... + y_nf_n$$

$$\langle F(x), F(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x_1f_1 + x_2f_2 + ... + x_nf_n, y_1f_1 + y_2f_2 + ... + y_nf \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$= x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + ... + x_n\overline{y_n}$$

Keyfi $x, y \in V$ için $\langle F(x), F(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$ dir. Diğer taraftan $F(V_1) = V_2$ dir.

Dolayısı ile, $V_1 \overset{U(n)}{\sim} V_2$ dir. ♦

1.10. *G*-invaryant Fonksiyonlar ve İnvaryantların Minimal Tam Sistemleri

Tanım 1.10.1. ([18], s. 545)

G bir grup, K, H birer küme ve $G:K$ olsun. $f:K \to H$ olmak üzere keyfi $g \in G$ ve keyfi $x \in K$ için $f(gx) = f(x)$ ise f fonksiyonuna $G-invaryant$ fonksiyon denir.

Örnek 1.10.2.

$O(1):\mathbb{R}$ hareketini, Örnek 1.9.4. deki gibi alalım.

Bu takdirde, $1x = x$ ve $(-1)x = -x$ dir. Burada f fonksiyonu, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlanırsa,

$f(1x) = f(x)$ ve $f((-1)x) = f(-x) = f(x)$

eşitlikleri sağlandığından f, $O(1)-invaryant$ fonksiyondur.

Not 1.10.3.

x_i, $1 \leq i \leq n$, bilinmeyenler ve $X \subseteq \mathbb{R}^n$ küme olmak üzere, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in X$ olsun.

$\mathbb{R}[x]$, n bilinmeyenli reel katsayılı polinomlar $\mathbb{R}-cebiri$ ve $\mathbb{R}(x)$ ise n bilinmeyenli reel katsayılı rasyonel fonksiyonlar $\mathbb{R}-cebiri$ olsun. $G \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ alt grubu ve $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi için $G:X$ hareketi $\gamma(g,x) = gx$, $\forall g \in G$, $\forall x \in X$ olmak üzere iki matrisin çarpımı şeklinde olsun. Reel katsayılı, tüm $G-invaryant$ polinomlar kümesi $\mathbb{R}[x]^G$ ve tüm $G-invaryant$ rasyonel fonksiyonlar kümesi ise $\mathbb{R}(x)^G$ şeklinde gösterilir.

Önerme 1.10.4. G grubu ve $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi için $G:X$ hareketi $\gamma(g,x) = gx$, $\forall g \in G$, $\forall x \in X$ olmak üzere iki matrisin çarpımı şeklinde olsun. $x, y \in X$ için $x \overset{G}{\sim} y$ ve keyfi $f \in \mathbb{R}[x]^G$ için $f(x) = f(y)$ dir.

İspat: $x, y \in X$ için $x \overset{G}{\sim} y$ olduğundan $y = gx$ olacak şekilde $g \in G$ vardır.

Keyfi $f : X \to \mathbb{R}$, $G-invaryant$ polinomu için,

$$f(y) = f(gx) = f(x)$$

olduğundan $f(x) = f(y)$ dir. ◆

Örnek 1.10.5.

$O(n) : \mathbb{R}^n$ hareketi, Örnek 1.9.6. daki gibi olsun. Keyfi $x \in \mathbb{R}^n$ için, $f(x) = \langle x, x \rangle_{\mathbb{R}}$ olarak tanımlayalım. Keyfi $g \in O(n)$ için,

$$f(gx) = \langle gx, gx \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, x \rangle_{\mathbb{R}} = f(x)$$

olduğundan f fonksiyonu $O(n) - invaryant$ fonksiyondur.

Örnek 1.10.6.

$SO(n) : \mathbb{R}^n$ hareketi, $\gamma(g, x) = gx$, $\forall g \in SO(n)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ olacak şekilde iki matrisin çarpımı olsun.

Keyfi $x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \cdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, \ldots, x_n = \begin{pmatrix} x_{n1} \\ \cdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \|x_1 \ldots x_n\|$ ve $\det(\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}) = [x_1 \ldots x_n]$ ile gösterelim.

$f(x_1, \ldots, x_n) = [x_1 \ldots x_n]$ olarak tanımlayalım. Keyfi $g \in SO(n)$ için,

$$f(g(x_1, \ldots, x_n)) = f(gx_1, \ldots, gx_n) = [gx_1 \ldots gx_n] = [\|g\| \|x_1 \ldots x_n\|]$$

$$= [g][x_1 \ldots x_n] = [x_1 \ldots x_n] = f(x_1, \ldots, x_n)$$

olduğundan f fonksiyonu $SO(n) - invaryant$ fonksiyondur.

Örnek 1.10.7.

$O(n):\mathbb{R}^n$ hareketi, Örnek 1.9.6. daki gibi olsun. Keyfi $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}^n$ için,

$$f(x_1,...,x_n)=\det(\begin{pmatrix} \langle x_1,x_1\rangle_{\mathbb{R}} & ... & \langle x_1,x_n\rangle_{\mathbb{R}} \\ ... & ... & ... \\ \langle x_n,x_1\rangle_{\mathbb{R}} & ... & \langle x_n,x_n\rangle_{\mathbb{R}} \end{pmatrix})$$

olarak tanımlayalım. Keyfi $g\in O(n)$ için,

$$f(gx_1,...,gx_n)=\det(\begin{pmatrix} \langle gx_1,gx_1\rangle_{\mathbb{R}} & ... & \langle gx_1,gx_n\rangle_{\mathbb{R}} \\ ... & ... & ... \\ \langle gx_n,gx_1\rangle_{\mathbb{R}} & ... & \langle gx_n,gx_n\rangle_{\mathbb{R}} \end{pmatrix})$$

$$=\det(\begin{pmatrix} \langle x_1,x_1\rangle_{\mathbb{R}} & ... & \langle x_1,x_n\rangle_{\mathbb{R}} \\ ... & ... & ... \\ \langle x_n,x_1\rangle_{\mathbb{R}} & ... & \langle x_n,x_n\rangle_{\mathbb{R}} \end{pmatrix})=f(x_1,...,x_n)$$

olduğundan f fonksiyonu, $O(n)-$ *invaryant* fonksiyondur.

Not 1.10.8.

$G:\mathbb{R}^n$ hareketini alalım. Keyfi $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $G-$ *invaryant* polinom ve $x,y\in\mathbb{R}^n$ için $f(x)=f(y)$ ise $y\overset{G}{\sim}x$ olmayabilir.

Örnek 1.10.9.

$\mathbb{R}$ nin $\mathbb{R}-\{0\}$ çarpım grubu altındaki hareketi, $\gamma(g,x)=gx$, $\forall g\in\mathbb{R}-\{0\}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ olacak şekilde iki reel sayının çarpımı olsun. $f\in\mathbb{R}[x]^G$ için,

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0,\ n\in\mathbb{N}$$

biçimindedir. $f\in\mathbb{R}[x]^G$ olduğundan, $\forall x\in\mathbb{R}$ ve $\forall g\in\mathbb{R}-\{0\}$ için,

$$f(gx)=f(x)$$

dir. Buradan,

$$f(gx)=a_n(gx)^n+a_{n-1}(gx)^{n-1}+...+a_0=a_ng^nx^n+a_{n-1}g^{n-1}x^{n-1}+...+a_0$$

ve

$$f(gx) = a_n g^n x^n + a_{n-1} g^{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 = f(x)$$

yazılır. Her iki tarafın eşitliğinden,

$$a_n g^n = a_n,\ a_{n-1} g^{n-1} = a_n,\ \dots,\ a_1 g = a_1$$

olmalıdır. Bu eşitlikler her g için geçerli olacağından,

$$a_n = a_{n-1} = ... = a_1 = 0$$

elde edilir. Dolayısı ile f, sabit polinomdur. Böylelikle keyfi $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x) = f(y)$ dir.

Özellikle $x = 1$ ve $y = 0$ alındığında $f(1) = f(0)$ olmasına rağmen $1 = \lambda 0$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ olamayacağından $1,\ 0$ a $G-$*denk* değildir.

Tanım 1.10.10. ([18], s. 545, Definition 1)

G bir grup, K, H birer küme ve $G:K$ olsun. $f_i : K \to H$, $1 \le i \le m$, $G-$*invaryant* fonksiyonlar olmak üzere $\{f_1,..., f_m\}$ sistemini alalım.

$x, y \in K$ için $f_i(x) = f_i(y)$, $1 \le i \le m$ olmasından $x \overset{G}{\sim} y$ elde edilirse $\{f_1,..., f_m\}$ sistemine $G-$*invaryant* fonksiyonların tam sistemi denir.

Tanım 1.10.11. ([18], s. 545, Definition 2)

G bir grup, K, H birer küme ve $G:K$ olsun. $f_i : K \to H$, $1 \le i \le m$, $G-$ *invaryant* fonksiyonlar olmak üzere, $P = \{f_1,..., f_m\}$ sistemi $G-$ *invaryant* fonksiyonların bir tam sistemi olsun.

Her $1 \le i \le m$ için $P - \{f_i\}$ tam sistem değil ise $G-$*invaryant* fonksiyonların P tam sistemine bir minimal tam sistem denir.

Not 1.10.12.

G bir grup olmak üzere, $G-$ *invaryant* fonksiyonların tam ve minimal tam sistemlerine örnekler bölüm 1.11. de verildi.

1.11. İki Boyutlu Öklid Uzayında Üçgenlerin Tam İnvaryant Sistemleri

Teorem 1.11.1.

$\{x_1, x_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ için $rank\{x_1, x_2\} = 2$ ve $O(2) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ hareketi, $\gamma(g, (x_1, x_2)) = (gx_1, gx_2)$, $\forall g \in O(2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ olacak şekilde gx_i, $i = 1,2$ iki matrisin çarpımı olsun.

$$f_1(x_1, x_2) = \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \langle x_2, x_2 \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$f_3(x_1, x_2) = \langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$f_4(x_1, x_2) = \frac{\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{R}}}{\|x_1\| \|x_2\|}$$

$$f_5(x_1, x_2) = \frac{\langle x_2 - x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{R}}}{\|x_2 - x_1\| \|x_1\|}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde, $\{f_1, f_2, f_3\}$, $\{f_1, f_2, f_4\}$ ve $\{f_1, f_4, f_5\}$ sistemleri $O(2)$-*invaryant* fonksiyonların tam sistemleridirler.

İspat:

$\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ sistemlerini alalım. $rank\{x_1, x_2\} = rank\{y_1, y_2\} = 2$ olsun.

a)

$\langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_1, y_1 \rangle_{\mathbb{R}}$, $\langle x_2, x_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_2, y_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ ve $\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ olsun.

$$\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x_2, x_2 \rangle_{\mathbb{R}} + \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{R}} - 2\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_2, y_2 \rangle_{\mathbb{R}} + \langle y_1, y_1 \rangle_{\mathbb{R}} - 2\langle y_1, y_2 \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_1, y_1 \rangle_{\mathbb{R}} \quad , \quad \langle x_2, x_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_2, y_2 \rangle_{\mathbb{R}} \quad , \quad \langle x_2 - x_1, x_2 - x_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_2 - y_1, y_2 - y_1 \rangle_{\mathbb{R}}$$

olduğundan,

$$\langle x_1, x_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_1, y_2\rangle_{\mathbb{R}}$$

elde edilir. Dolayısı ile,

$$\langle x_1, x_1\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_1, y_1\rangle_{\mathbb{R}},\ \langle x_2, x_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_2, y_2\rangle_{\mathbb{R}} \text{ ve } \langle x_1, x_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_1, y_2\rangle_{\mathbb{R}}$$

dir. ([14], s. 78, Teorem 18)' e göre, $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ için,

$$\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\} \Leftrightarrow \langle x_i, x_j\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_i, y_j\rangle_{\mathbb{R}},\ i \le j,\ 1 \le i, j \le m$$

olduğundan, $\langle x_1, x_1\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_1, y_1\rangle_{\mathbb{R}}$, $\langle x_2, x_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_2, y_2\rangle_{\mathbb{R}}$ ve $\langle x_1, x_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_1, y_2\rangle_{\mathbb{R}}$ için,

$$\{x_1, x_2\} \overset{O(2)}{\sim} \{y_1, y_2\}$$

dir. Dolayısı ile $\{f_1, f_2, f_3\}$ sistemi $O(2)$-*invaryant* fonksiyonların bir tam sistemidir.

b) $\langle x_1, x_1\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_1, y_1\rangle_{\mathbb{R}}$, $\langle x_2, x_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_2, y_2\rangle_{\mathbb{R}}$ ve $\dfrac{\langle x_1, x_2\rangle_{\mathbb{R}}}{\|x_1\|\|x_2\|} = \dfrac{\langle y_1, y_2\rangle_{\mathbb{R}}}{\|y_1\|\|y_2\|}$ olsun.

Buradan,

$$\langle x_1, x_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_1, y_2\rangle_{\mathbb{R}}$$

elde edilir. Dolayısı ile,

$$\langle x_1, x_1\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_1, y_1\rangle_{\mathbb{R}},\ \langle x_2, x_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_2, y_2\rangle_{\mathbb{R}} \text{ ve } \langle x_1, x_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_1, y_2\rangle_{\mathbb{R}}$$

dir. ([14], s. 78, Teorem 18)' den, $\{x_1, x_2\} \overset{O(2)}{\sim} \{y_1, y_2\}$ dir. Sonuç olarak, $\{f_1, f_2, f_4\}$ sistemi $O(2)$-*invaryant* fonksiyonların bir tam sistemidir.

c) Şimdi $\{f_1, f_4, f_5\}$ sisteminin tam sistem olup olmadığını araştıralım.

$$\langle x_1, x_1\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y_1, y_1\rangle_{\mathbb{R}},\ \frac{\langle x_1, x_2\rangle_{\mathbb{R}}}{\|x_1\|\|x_2\|} = \frac{\langle y_1, y_2\rangle_{\mathbb{R}}}{\|y_1\|\|y_2\|} \text{ ve } \frac{\langle x_2 - x_1, x_1\rangle_{\mathbb{R}}}{\|x_2 - x_1\|\|x_1\|} = \frac{\langle y_2 - y_1, y_1\rangle_{\mathbb{R}}}{\|y_2 - y_1\|\|y_1\|}$$

olsun. Bu takdirde,

$$\frac{\langle x_2 - x_1, x_2\rangle_{\mathbb{R}}}{\|x_2 - x_1\|\|x_2\|} = \frac{\langle y_2 - y_1, y_2\rangle_{\mathbb{R}}}{\|y_2 - y_1\|\|y_2\|}$$

dır. Burada,

$$\frac{\langle x_1, x_2\rangle_{\mathbb{R}}}{\|x_1\|\|x_2\|} = \cos\alpha\,,\ \frac{\langle x_2 - x_1, x_1\rangle_{\mathbb{R}}}{\|x_2 - x_1\|\|x_1\|} = \cos\gamma\,,\ \frac{\langle x_2 - x_1, x_2\rangle_{\mathbb{R}}}{\|x_2 - x_1\|\|x_2\|} = \cos\beta$$

ile gösterelim. Kosinüs teoreminden,

$$\|x_1\|^2 = \|x_2 - x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\|x_2 - x_1\|\|x_2\|\cos\beta \tag{1}$$

$$\|x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2 - x_1\|^2 - 2\|x_1\|\|x_2 - x_1\|\cos\gamma \tag{2}$$

$$\|x_2 - x_1\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\|x_1\|\|x_2\|\cos\alpha \tag{3}$$

(1) ve (3)' den,

$$\begin{array}{l} \|x_1\|^2 = \|x_2 - x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\|x_2 - x_1\|\|x_2\|\cos\beta \\ \|x_2 - x_1\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\|x_1\|\|x_2\|\cos\alpha \\ \hline \|x_2\| = \|x_2 - x_1\|\cos\beta + \|x_1\|\cos\alpha \end{array} \tag{i}$$

(1) ve (2)' den,

$$\begin{array}{l} \|x_1\|^2 = \|x_2 - x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\|x_2 - x_1\|\|x_2\|\cos\beta \\ \|x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2 - x_1\|^2 - 2\|x_1\|\|x_2 - x_1\|\cos\gamma \\ \hline \|x_2 - x_1\| = \|x_2\|\cos\beta + \|x_1\|\cos\gamma \end{array} \tag{ii}$$

ve

(2) ve (3)' den,

$$\begin{array}{l} \|x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2 - x_1\|^2 - 2\|x_1\|\|x_2 - x_1\|\cos\gamma \\ \|x_2 - x_1\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\|x_1\|\|x_2\|\cos\alpha \\ \hline \|x_1\| = \|x_2 - x_1\|\cos\gamma + \|x_2\|\cos\alpha \end{array} \tag{iii}$$

elde edilir. (i) ve (ii)' den,

$$\begin{array}{l} \|x_2\| - \|x_2 - x_1\|\cos\beta = \|x_1\|\cos\alpha \quad (\cos\beta) \\ -\|x_2\|\cos\beta + \|x_2 - x_1\| = \|x_1\|\cos\gamma \\ \hline \|x_2 - x_1\|(1 - \cos^2\beta) = \|x_1\|(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta) \end{array}$$

$$\|x_2 - x_1\| = \frac{\|x_1\|(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta)}{(1 - \cos^2\beta)}$$

elde edilir.

$$\frac{\langle x_1,x_2\rangle_{\mathbb{R}}}{\|x_1\|\|x_2\|}=\frac{\langle y_1,y_2\rangle_{\mathbb{R}}}{\|y_1\|\|y_2\|}\ ,\ \frac{\langle x_2-x_1,x_1\rangle_{\mathbb{R}}}{\|x_2-x_1\|\|x_1\|}=\frac{\langle y_2-y_1,y_1\rangle_{\mathbb{R}}}{\|y_2-y_1\|\|y_1\|}\ ,\ \frac{\langle x_2-x_1,x_2\rangle_{\mathbb{R}}}{\|x_2-x_1\|\|x_2\|}=\frac{\langle y_2-y_1,y_2\rangle_{\mathbb{R}}}{\|y_2-y_1\|\|y_2\|}$$

ve $\langle x_1,x_1\rangle_{\mathbb{R}}=\langle y_1,y_1\rangle_{\mathbb{R}}$ eşitliklerinden,

$$\|x_2-x_1\|=\frac{\|x_1\|(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)}{(1-\cos^2\beta)}=\frac{\|y_1\|(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)}{(1-\cos^2\beta)}=\|y_2-y_1\|$$

elde edilir.

Benzer şekilde, (ii) ve (iii)' den,

$$\begin{array}{l} -\|x_2\|\cos\beta-\|x_2-x_1\|=\|x_1\|\cos\gamma \quad (\text{-}\cos\gamma) \\ \|x_2\|\cos\alpha+\|x_2-x_1\|\cos\gamma=\|x_1\| \\ \hline \|x_2\|(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)=\|x_1\|(1-\cos^2\gamma) \end{array}$$

$$\|x_2\|=\frac{\|x_1\|(1-\cos^2\gamma)}{(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)}=\frac{\|y_1\|(1-\cos^2\gamma)}{(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)}=\|y_2\|$$

elde edilir. Dolayısı ile,

$$\langle x_1,x_1\rangle_{\mathbb{R}}=\langle y_1,y_1\rangle_{\mathbb{R}},\ \langle x_2,x_2\rangle_{\mathbb{R}}=\langle y_2,y_2\rangle_{\mathbb{R}}\ \text{ve}\ \langle x_2-x_1,x_2-x_1\rangle_{\mathbb{R}}=\langle y_2-y_1,y_2-y_1\rangle_{\mathbb{R}}$$

elde edilir. İspatın "a" şıkkından, $\{x_1,x_2\}\overset{O(2)}{\sim}\{y_1,y_2\}$ dir. Buradan, $\{f_1,f_4,f_5\}$ sistemi $O(2)$ -*invaryant* fonksiyonların bir tam sistemidir.

Dolayısı ile, $\{f_1,f_2,f_3\}$, $\{f_1,f_2,f_4\}$ ve $\{f_1,f_4,f_5\}$ sistemleri $O(2)$ -*invaryant* fonksiyonların tam sistemleridirler. ◆

Sonuç 1.11.2.

$\{x_1,x_2,x_3\}\subseteq\mathbb{R}^2$ için $rank\{x_1,x_2,x_3\}=2$ ve $Iz(\mathbb{R}^2):\mathbb{R}^2$ hareketi, keyfi $F\in Iz(\mathbb{R}^2)$ ve keyfi $x\in\mathbb{R}^2$ için $\gamma(F,x)=F(x)=gx+b$ olsun, burada $g\in O(2)$, $b\in\mathbb{R}^2$ dir.

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=\langle x_1-x_3,x_1-x_3\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3)=\langle x_2-x_3,x_2-x_3\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3)=\langle x_2-x_1,x_2-x_1\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$f_4(x_1,x_2,x_3)=\frac{\langle x_1-x_3,x_2-x_3\rangle_{\mathbb{R}}}{\|x_1-x_3\|\|x_2-x_3\|}$$

$$f_5(x_1,x_2,x_3)=\frac{\langle x_2-x_1,x_1-x_3\rangle_{\mathbb{R}}}{\|x_2-x_1\|\|x_1-x_3\|}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde, $\{f_1,f_2,f_3\}$, $\{f_1,f_2,f_4\}$ ve $\{f_1,f_4,f_5\}$ sistemleri $Iz(\mathbb{R}^2)$-*invaryant* fonksiyonların tam sistemleridirler.

İspat:

$\{x_1,x_2,x_3\}$, $\{y_1,y_2,y_3\}\subseteq\mathbb{R}^2$ sistemlerini alalım.

$rank\{x_1,x_2,x_3\}=rank\{y_1,y_2,y_3\}=2$ olsun.

([14], s. 84, Teorem 22)' e göre, $\{x_1,x_2,...,x_m\}$, $\{y_1,y_2,...,y_m\}\subseteq\mathbb{R}^n$ için,

$$\{x_1,x_2,...,x_m\}\overset{Iz(\mathbb{R}^n)}{\sim}\{y_1,y_2,...,y_m\}\Leftrightarrow\{x_1-x_m,...,x_{m-1}-x_m\}\overset{O(n)}{\sim}\{y_1-y_m,...,y_{m-1}-y_m\}$$

olduğundan,

$$\{x_1,x_2,x_3\}\overset{Iz(\mathbb{R}^2)}{\sim}\{y_1,y_2,y_3\}\Leftrightarrow\{x_1-x_3,x_2-x_3\}\overset{O(2)}{\sim}\{y_1-y_3,y_2-y_3\}$$

dir. Teorem 1.11.1. e göre $\{f_1,f_2,f_3\}$, $\{f_1,f_2,f_4\}$ ve $\{f_1,f_4,f_5\}$ sistemleri $O(2)$-*invaryant* fonksiyonların tam sistemleridirler. Yine ([14], s. 84, Teorem 22)' den,

$\{f_1,f_2,f_3\}$, $\{f_1,f_2,f_4\}$ ve $\{f_1,f_4,f_5\}$

sistemleri $Iz(\mathbb{R}^2)$-*invaryant* fonksiyonların tam sistemleridirler. ◆

Örnek 1.11.3.

$O(2):\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ hareketi, $\gamma(g,(x_1,x_2))=(gx_1,gx_2)$, $\forall g\in O(2)$, $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^2$ olacak şekilde gx_i, $i=1,2$ iki matrisin çarpımı olsun.

$$\{x_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, x_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\},\ \{y_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, y_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\}\subseteq\mathbb{R}^2$$

sistemlerini alalım. Teorem 1.11.1. de tanımlanan f_1, f_2 fonksiyonları için,

$$f_1(x_1,x_2)=f_1(y_1,y_2)=1 \text{ ve } f_2(x_1,x_2)=f_2(y_1,y_2)=1$$

olmasına rağmen,

$$2=f_3(x_1,x_2)\neq f_3(y_1,y_2)=1$$

olduğundan $\{x_1,x_2\}$ ve $\{y_1,y_2\}$ sistemleri $O(2)$-*denk* değildir. Dolayısı ile $\{f_1, f_2\}$ sistemi $O(2)$-*invaryant* fonksiyonların bir tam sistemi değildir.

$$\{x_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, x_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\},\ \{y_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, y_2=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\}\subseteq\mathbb{R}^2$$

sistemlerini alalım. Teorem 1.11.1. de tanımlanan f_1, f_3 fonksiyonları için,

$$f_1(x_1,x_2)=f_1(y_1,y_2)=1 \text{ ve } f_3(x_1,x_2)=f_3(y_1,y_2)=1$$

olmasına rağmen,

$$2=f_2(x_1,x_2)\neq f_2(y_1,y_2)=3$$

olduğundan $\{x_1,x_2\}$ ve $\{y_1,y_2\}$ sistemleri $O(2)$-*denk* değildir. Dolayısı ile $\{f_1, f_3\}$ sistemi $O(2)$-*invaryant* fonksiyonların bir tam sistemi değildir.

$$\{x_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, x_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\},\ \{y_1=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}, y_2=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\}\subseteq\mathbb{R}^2$$

sistemlerini alalım. Teorem 1.11.1. de tanımlanan f_2, f_3 fonksiyonları için,

$$f_2(x_1,x_2)=f_2(y_1,y_2)=1 \text{ ve } f_3(x_1,x_2)=f_3(y_1,y_2)=1$$

olmasına rağmen,

$$2 = f_1(x_1, x_2) \neq f_1(y_1, y_2) = 3$$

olduğundan $\{x_1, x_2\}$ ve $\{y_1, y_2\}$ sistemleri $O(2)$-*denk* değildir. Dolayısı ile $\{f_2, f_3\}$ sistemi $O(2)$-*invaryant* fonksiyonların bir tam sistemi değildir.

Bu takdirde, $\{f_1, f_2, f_3\}$ sistemi $O(2)$-*invaryant* fonksiyonların bir minimal tam sistemidir.

Benzer şekilde, Teorem 1.11.1. de tanımlanan fonksiyonlar için $\{f_1, f_2, f_4\}$ ve $\{f_1, f_4, f_5\}$ sistemler de $O(2)$-*invaryant* fonksiyonların bir minimal tam sistemidir.

Not 1.11.4.

Teorem 1.11.1. de verilen $\{f_1, f_2, f_3\}$, $\{f_1, f_2, f_4\}$, $\{f_1, f_4, f_5\}$ sistemleri sırasıyla, $\{x_1, x_2\}$ ve $\{y_1, y_2\}$ vektör sistemlerinin oluşturduğu üçgenler için Kenar Kenar Kenar, Kenar Açı Kenar, Açı Kenar Açı eşitlik bağıntılarıdırlar.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Kompleks Vektör Uzaylarında *C*-lineer Dönüşümler Hakkında

Teorem 2.1.1.

Keyfi $F \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ ve $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ olmak üzere $F^{'} = HFH^{-1}$ için,

$$\left|\det F\right|^2 = \det F^{'}$$

dür.

İspat: $F \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ için,

$$F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \to F(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}) = F(\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}) + F(\begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}) + \dots + F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix})$$

$$= z_1 F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}) + z_2 F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}) + \dots + z_n F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$= z_1 \begin{pmatrix} a_{11} + ib_{11} \\ a_{21} + ib_{21} \\ \dots \\ a_{n1} + ib_{n1} \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} a_{12} + ib_{12} \\ a_{22} + ib_{22} \\ \dots \\ a_{n2} + ib_{n2} \end{pmatrix} + \dots + z_n \begin{pmatrix} a_{1n} + ib_{1n} \\ a_{2n} + ib_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} + ib_{nn} \end{pmatrix}, \ i = \sqrt{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+ib_{11} & a_{12}+ib_{12} & \dots & a_{1n}+ib_{1n} \\ a_{21}+ib_{21} & a_{22}+ib_{22} & \dots & a_{2n}+ib_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+ib_{n1} & a_{n2}+ib_{n2} & \dots & a_{nn}+ib_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$= (\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} + i \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{B})(\underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}}_{Z})$$

$$= (A+iB)(Z)$$

elde edilir. Önerme 1.5.15. den $F' = HFH^{-1} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ dir.

$\begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{pmatrix}$ matrisini alalım. ([21], s. 2, Proposition 2.1.)’ den,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & -iI_n \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ iI_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

dir. Buradan,

$$\det(\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}) = \det(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & -iI_n \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ iI_n & I_n \end{pmatrix})$$

$$= \det(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & -iI_n \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix})\det(\begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{pmatrix})\det(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ iI_n & I_n \end{pmatrix})$$

$$= \det(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & -iI_n \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ iI_n & I_n \end{pmatrix})\det(\begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{pmatrix})$$

$$= \det(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & 2I_n \end{pmatrix})\det(\begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{pmatrix})$$

$$= \det(\begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{pmatrix}) = \det(A+iB)\det(A-iB)$$

$$= \det(A+iB)\overline{\det(A+iB)} = \left|\det(A+iB)\right|^2$$

dir. Dolayısı ile,

$$\left|\det F\right|^2 = \det F^{'}$$

elde edilir. ♦

Sonuç 2.1.2.

Keyfi $F \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ ve $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ olmak üzere $F^{'} = HFH^{-1}$ için,

i) $\det F^{'} \geq 0$ dır.

ii) $\left|\det F\right| = 1 \Leftrightarrow \det F^{'} = 1$ dir.

2.2. Üniter Dönüşümlerin Yapısı

Teorem 2.2.1.

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü için aşağıdaki önermeler karşılıklı olarak eşdeğerdir.

i) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ için $< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}} =< x, y >_{\mathbb{C}}$ dir.

ii) $\forall x \in \mathbb{C}^n$ için $\left\|A(x)\right\| = \left\|x\right\|$ ve A, $\mathbb{C}-lineerdir$.

iii) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ için $\mathrm{Re}\left\{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}\right\} = \mathrm{Re}\left\{< x, y >_{\mathbb{C}}\right\}$ ve A, $\mathbb{C}-lineerdir$.

iv) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ için $\mathrm{Im}\left\{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}\right\} = \mathrm{Im}\left\{< x, y >_{\mathbb{C}}\right\}$ ve A, $\mathbb{C}-lineerdir$.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için $< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}} =< x, y >_{\mathbb{C}}$ olsun.

$\mathbb{C}^n$ de bir $e_1,...,e_n$ ortonormal tabanı alalım.

A üniter olduğundan,

$< A(e_i), A(e_j) >_{\mathbb{C}} =< e_i, e_j >_{\mathbb{C}} = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le n$

dir. Dolayısı ile $A(e_1),..., A(e_n)$ de bir ortonormal tabandır.

Keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için,

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \ , \ a_k =< x, e_k >_{\mathbb{C}} \ , \ 1 \le k \le n$$

$$y = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k \ , \ b_k =< y, e_k >_{\mathbb{C}} \ , \ 1 \le k \le n$$

dır. Benzer şekilde,

$$A(x) = \lambda_1 A(e_1) + .. + \lambda_n A(e_n) \ , \ \lambda_k =< A(x), A(e_k) >_{\mathbb{C}} =< x, e_k >_{\mathbb{C}} = a_k \ , \ 1 \le k \le n$$

$$A(y) = \beta_1 A(e_1) + .. + \beta_n A(e_n) \ , \ \beta_k =< A(y), A(e_k) >_{\mathbb{C}} =< y, e_k >_{\mathbb{C}} = b_k \ , \ 1 \le k \le n$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$A(x) = a_1 A(e_1) + .. + a_n A(e_n)$$

$$A(y) = b_1 A(e_1) + .. + b_n A(e_n)$$

elde edilmiş olur.

$$A(x + y) = A((a_1 + b_1)e_1 + ... + (a_n + b_n)e_n) = (a_1 + b_1)A(e_1) + ... + (a_n + b_n)A(e_n)$$

$$= a_1 A(e_1) + .. + a_n A(e_n) + b_1 A(e_1) + .. + b_n A(e_n)$$

$$= A(x) + A(y)$$

Keyfi $\eta \in \mathbb{C}$ için,

$$A(\eta x) = A(\eta(a_1 e_1 + ... + a_n e_n)) = A(\eta a_1 e_1 + ... + \eta a_n e_n)$$

$$= \eta a_1 A(e_1) + .. + \eta a_n A(e_n) = \eta A(x)$$

Dolayısı ile, A, $\mathbb{C}-lineerdir$.

$< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}} =< x, y >_{\mathbb{C}}$, keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için doğru olduğundan $y = x$ için de doğrudur. Dolayısı ile,

$$< A(x), A(x) >_{\mathbb{C}} =< x, x >_{\mathbb{C}}$$

$$\Rightarrow \|A(x)\|^2 = \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \|A(x)\| = \|x\|$$

elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Keyfi $x \in \mathbb{C}^n$ için $\|A(x)\| = \|x\|$ ve A, $\mathbb{C}-lineer$ olsun.

Keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\|A(x+y)\| = \|x+y\|$$

$$\|A(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2$$

$$< A(x+y), A(x+y) >_{\mathbb{C}} =< x+y, x+y >_{\mathbb{C}}$$

dir. A, $\mathbb{C}-lineer$ olduğundan,

$$< A(x)+A(y), A(x)+A(y) >_{\mathbb{C}} =< x+y, x+y >_{\mathbb{C}}$$

$$< A(x), A(x) >_{\mathbb{C}} + < A(x), A(y) >_{\mathbb{C}} + < A(y), A(x) >_{\mathbb{C}} + < A(y), A(y) >_{\mathbb{C}} =$$

$$=< x, x >_{\mathbb{C}} + < x, y >_{\mathbb{C}} + < y, x >_{\mathbb{C}} + < y, y >_{\mathbb{C}}$$

Keyfi $x \in \mathbb{C}^n$ için $\|A(x)\| = \|x\|$ olduğundan,

$$< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}} + \overline{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}} =< x, y >_{\mathbb{C}} + \overline{< x, y >_{\mathbb{C}}}$$

dir. Buradan da,

$$2\,\mathrm{Re}\{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}\} = 2\,\mathrm{Re}\{< x, y >_{\mathbb{C}}\}$$

$$\mathrm{Re}\{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{< x, y >_{\mathbb{C}}\},\ \forall x, y \in \mathbb{C}^n$$

elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Keyfi $p, y \in \mathbb{C}^n$ için $\mathrm{Re}\{< A(p), A(y) >_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{< p, y >_{\mathbb{C}}\}$ ve A, $\mathbb{C}-lineer$ olsun. $\mathrm{Re}\{< A(p), A(y) >_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{< p, y >_{\mathbb{C}}\}$ olduğundan,

$$2\,\mathrm{Re}\{< A(p), A(y) >_{\mathbb{C}}\} = 2\,\mathrm{Re}\{< p, y >_{\mathbb{C}}\}$$

$$< A(p), A(y) >_{\mathbb{C}} + \overline{< A(p), A(y) >_{\mathbb{C}}} = < p, y >_{\mathbb{C}} + \overline{< p, y >_{\mathbb{C}}}$$

$$\frac{< A(p), A(y) >_{\mathbb{C}} + \overline{< A(p), A(y) >_{\mathbb{C}}}}{2} = \frac{< p, y >_{\mathbb{C}} + \overline{< p, y >_{\mathbb{C}}}}{2}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının pay ve paydası $i = \sqrt{-1}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{i(< A(p), A(y) >_{\mathbb{C}} + \overline{< A(p), A(y) >_{\mathbb{C}}})}{2i} = \frac{i(< p, y >_{\mathbb{C}} + \overline{< p, y >_{\mathbb{C}}})}{2i}$$

$$\frac{< A(ip), A(y) >_{\mathbb{C}} - \overline{< A(ip), A(y) >_{\mathbb{C}}}}{2i} = \frac{< ip, y >_{\mathbb{C}} - \overline{< ip, y >_{\mathbb{C}}}}{2i}$$

elde edilir.

Keyfi $p, y \in \mathbb{C}^n$ için doğru olduğundan $p = \frac{x}{i}$ için de doğrudur. Buradan,

$$\frac{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}} - \overline{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}}}{2i} = \frac{< x, y >_{\mathbb{C}} - \overline{< x, y >_{\mathbb{C}}}}{2i}$$

elde edilir. Dolayısı ile keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\mathrm{Im}\{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Im}\{< x, y >_{\mathbb{C}}\}$$

dir.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Keyfi $p, y \in \mathbb{C}^n$ için $\mathrm{Im}\{< A(p), A(y) >_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Im}\{< p, y >_{\mathbb{C}}\}$ ve A, $\mathbb{C}-lineer$ olsun. $\mathrm{Im}\{< A(p), A(y) >_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Im}\{< p, y >_{\mathbb{C}}\}$ olduğundan,

$$\frac{< A(p), A(y) >_{\mathbb{C}} - \overline{< A(p), A(y) >_{\mathbb{C}}}}{2i} = \frac{< p, y >_{\mathbb{C}} - \overline{< p, y >_{\mathbb{C}}}}{2i}$$

dır. Keyfi $p, y \in \mathbb{C}^n$ için doğru olduğundan $p = ix$, $i = \sqrt{-1}$ için de doğrudur. Yukarıdaki eşitlikte p yerine ix yazılırsa,

$$\frac{< A(ix), A(y) >_{\mathbb{C}} - \overline{< A(ix), A(y) >_{\mathbb{C}}}}{2i} = \frac{< ix, y >_{\mathbb{C}} - \overline{< ix, y >_{\mathbb{C}}}}{2i}$$

$$\frac{i(< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}} + \overline{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}})}{2i} = \frac{i(< x, y >_{\mathbb{C}} + \overline{< x, y >_{\mathbb{C}}})}{2i}$$

$$\frac{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}} + \overline{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}}}{2} = \frac{< x, y >_{\mathbb{C}} + \overline{< x, y >_{\mathbb{C}}}}{2}$$

elde edilir. Dolayısı ile keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\mathrm{Re}\{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{< x, y >_{\mathbb{C}}\}$$

dir.

(iii) $\Rightarrow$ (i):

Keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için $\mathrm{Re}\{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{< x, y >_{\mathbb{C}}\}$ ve A, $\mathbb{C}-lineer$ olsun. (iii) $\Rightarrow$ (iv) olduğundan keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için $\mathrm{Im}\{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Im}\{< x, y >_{\mathbb{C}}\}$ dir.

Önerme 1.6.5. ten keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için,

$$< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}} = < x, y >_{\mathbb{C}}$$

dir. ♦

Not 2.2.2.

[9] numaralı kaynaktan alınan, bu tezde Teorem 1.4.9. şeklinde verilen teorem, $\mathbb{C}^n$ deki keyfi $A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümün $\mathbb{C}-lineer$ olmasından yola çıkılarak ispatlanmıştır. Teorem 2.2.1. de ise $\mathbb{C}-lineer$ şartı olmadan verilen keyfi bir $A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümünün üniterlik şartları incelendi. Bu sayede, $\mathbb{C}^n$ deki keyfi $A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ üniter dönüşümün $\mathbb{C}-lineer$ olduğu ispat edildi. Ayrıca, Tanım 1.6.1. ve Tanım 1.6.3. ile tanımlanan reel üniter ve sanal üniter dönüşümler ile üniter dönüşüm arasındaki ilişki gösterildi. Böylelikle $\mathbb{C}^n$ deki keyfi $A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümün üniter dönüşüm olmasıyla ilgili minimal şartlar belirlenmiş oldu.

2.3. *n*-boyutlu Kompleks Vektör Uzayında İzometri

Teorem 2.3.1.

Keyfi $F:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ izometri, öteleme ve reel üniter dönüşümlerin bileşkesi şeklinde yazılabilir. Yani, keyfi $F \in Iz(\mathbb{C}^n)$ ve keyfi $x \in \mathbb{C}^n$ için, $F(x) = gx + b$ şeklindedir, burada, $g \in \mathrm{Re}U(n)$ ve $b \in \mathbb{C}^n$ dir. Bu yazılım tek türlüdür.

İspat: $W: M\left(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}\right) \to M\left(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}\right)$ dönüşümü $\mathbb{R}-izomorfizma$ olduğundan, $W\left(F\right) = F^{'} = HFH^{-1}$ olacak şekilde $F^{'}:\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dönüşümü var ve tektir.

$F^{'}$ izometrisi için tek türlü $B^{'}$ ötelemesi ve $A^{'}$ ortogonal dönüşümü vardır öyle ki $F^{'} = B^{'}A^{'}$ dür. Eşitliğin her iki tarafına soldan H^{-1}, sağdan H ile bileşke işlemi uygulanırsa,

$$H^{-1}F^{'}H = H^{-1}(B^{'}A^{'})H$$

dir. $F^{'} = HFH^{-1}$ den,

$$H^{-1}(HFH^{-1})H = H^{-1}(B^{'}A^{'})H$$

$$F = H^{-1}B^{'}(HH^{-1})A^{'}H$$

$$F = (H^{-1}B^{'}H)(H^{-1}A^{'}H)$$

elde edilir. Önerme 1.7.19. dan $B^{'} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ ötelemesi için $H^{-1}B^{'}H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü ötelemedir ve $H^{-1}B^{'}H$ tek türlüdür. $H^{-1}B^{'}H = B$ ile gösterelim.

Teorem 1.6.6. dan $A^{'} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ ortogonal dönüşümü için $H^{-1}A^{'}H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ olacak şekilde reel üniter dönüşümü vardır ve tek türlüdür. $H^{-1}A^{'}H = A$ ile gösterelim. Sonuç olarak,

$$F = BA$$

şeklindedir ve tek türlüdür.

Yani keyfi $F \in Iz(\mathbb{C}^n)$, öteleme ve reel üniter dönüşümlerinin bileşkesi şeklinde tek türlüdür. ♦

Not 2.3.2.

Burada $\mathbb{C}^n$ deki keyfi izometrinin, reel uzaylardaki gibi öteleme ve üniter dönüşümlerin bileşkesi şeklinde yazılabileceği bekleniyordu. Fakat aldığımız sonuçlar gösteriyor ki reel uzaydaki her şeyin benzeri kompleks uzayda doğru değildir. Dolayısı ile kompleks uzaydaki cebir ve geometri, reel uzaydaki cebir ve geometriden farklıdır.

2.4. *n*-boyutlu Üniter Uzayda Nokta Sistemlerinin *U(n)* İnvaryantları Tam Sistemi

Tanım 2.4.1. ([8], s. 192)

$\mathbb{C}^n$ üniter uzay ve $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{C}^n$ olsun.

$$\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & \dots & \langle x_1, x_m \rangle_{\mathbb{C}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle x_m, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & \dots & \langle x_m, x_m \rangle_{\mathbb{C}} \end{pmatrix}$$

matrisine $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{C}^n$ vektörlerinin Gram Matrisi denir. Bu matris $Gr(x_1, x_2, ..., x_m)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.2. ([8], s. 192)

Gram Matrisinin determinantına Gram Determinantı denir. Bu determinant $\det Gr(x_1, x_2, ..., x_m)$ şeklinde gösterilir.

$$\det Gr(x_1, x_2, ..., x_m) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_1, x_m \rangle_{\mathbb{C}} \\ ... & ... & ... \\ \langle x_m, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_m, x_m \rangle_{\mathbb{C}} \end{vmatrix}$$

Not 2.4.3.

$$x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}^n \quad \text{için,} \quad x_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ ... \\ x_{ni} \end{pmatrix}, \quad 1 \le i \le n \quad \text{olmak üzere,} \quad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisini $\left\| x_1 \quad x_2 \quad ... \quad x_n \right\|$ ile gösterelim.

Bu matrisin determinantını ise $\left[x_1 \quad x_2 \quad ... \quad x_n \right]$ ile gösterelim.

Önerme 2.4.4.

$x_1, x_2, ..., x_m$ ve $y_1, y_2, ..., y_k \in \mathbb{C}^n$ olsun. Bu takdirde,

$$\left\| x_1 \quad x_2 \quad ... \quad x_m \right\|^T \overline{\left\| y_1 \quad y_2 \quad ... \quad y_k \right\|} = \begin{pmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_1, y_k \rangle_{\mathbb{C}} \\ ... & ... & ... \\ \langle x_m, y_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_m, y_k \rangle_{\mathbb{C}} \end{pmatrix}$$

dır.

İspat:

$$\left\| x_1 \quad x_2 \quad ... \quad x_m \right\|^T \overline{\left\| y_1 \quad y_2 \quad ... \quad y_k \right\|} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nm} \end{pmatrix}^T \overline{\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & ... & y_{1k} \\ y_{21} & x_{22} & ... & y_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{n1} & y_{n2} & ... & y_{nk} \end{pmatrix}}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i1}\overline{y_{i1}} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}\overline{y_{ik}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{im}\overline{y_{i1}} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_{im}\overline{y_{ik}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \langle x_1, y_1\rangle_{\mathbb{C}} & \dots & \langle x_1, y_k\rangle_{\mathbb{C}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle x_m, y_1\rangle_{\mathbb{C}} & \dots & \langle x_m, y_k\rangle_{\mathbb{C}} \end{pmatrix} \blacklozenge$$

Sonuç 2.4.5.

$x_1, x_2, ..., x_n$ ve $y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}\overline{\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}} = \begin{vmatrix} \langle x_1, y_1\rangle_{\mathbb{C}} & \dots & \langle x_1, y_n\rangle_{\mathbb{C}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle x_n, y_1\rangle_{\mathbb{C}} & \dots & \langle x_n, y_n\rangle_{\mathbb{C}} \end{vmatrix}$$

dır.

İspat: Önerme 2.4.4. de $m = k = n$ alınırsa,

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{Vmatrix}^T \overline{\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{Vmatrix}} = \begin{pmatrix} \langle x_1, y_1\rangle_{\mathbb{C}} & \dots & \langle x_1, y_n\rangle_{\mathbb{C}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle x_n, y_1\rangle_{\mathbb{C}} & \dots & \langle x_n, y_n\rangle_{\mathbb{C}} \end{pmatrix}$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafının determinantı alınırsa,

$$\begin{vmatrix} \langle x_1, y_1\rangle_{\mathbb{C}} & \dots & \langle x_1, y_n\rangle_{\mathbb{C}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle x_n, y_1\rangle_{\mathbb{C}} & \dots & \langle x_n, y_n\rangle_{\mathbb{C}} \end{vmatrix} = \det\left(\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{Vmatrix}^T \overline{\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{Vmatrix}}\right)$$

$$= \det\left(\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{Vmatrix}^T\right) \det\left(\overline{\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{Vmatrix}}\right)$$

$$= \det\left(\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{Vmatrix}\right)\overline{\det\left(\begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{Vmatrix}\right)}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}\overline{\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}} \blacklozenge$$

Sonuç 2.4.6.

$x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere,

$$\begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_1, x_n \rangle_{\mathbb{C}} \\ ... & ... & ... \\ \langle x_n, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_n, x_n \rangle_{\mathbb{C}} \end{vmatrix} = \left| \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{bmatrix} \right|^2$$

dir.

İspat:

$$\begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_1, x_n \rangle_{\mathbb{C}} \\ ... & ... & ... \\ \langle x_n, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_n, x_n \rangle_{\mathbb{C}} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{bmatrix} \overline{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{bmatrix}} = \left| \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{bmatrix} \right|^2 \ \blacklozenge$$

Önerme 2.4.7. ([8], s. 192)

Keyfi $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{C}^n$ için,

i) $\det Gr(x_1, x_2, ..., x_m) \geq 0$

ii) $\det Gr(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \Leftrightarrow \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ sistemi lineer bağımlıdır.

İspat: Bu teoremin ispatını *n*-boyutlu kompleks uzayda *m* tane vektör için üç durumda inceleyeceğiz.

1) $m = n$ olsun.

i) $\det Gr(x_1, x_2, ..., x_n) = \left| [x_1, x_2, ..., x_n] \right|^2 \geq 0$ dır.

ii) $(\Rightarrow)$: $\det Gr(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ olsun. Bu durumda,

$$\left| [x_1, x_2, ..., x_n] \right|^2 = 0 \Rightarrow \left| [x_1, x_2, ..., x_n] \right| = 0$$

dır. Dolayısı ile $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sistemi lineer bağımlıdır.

$(\Leftarrow)$: $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sistemi lineer bağımlı olsun.

$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sistemi lineer bağımlı olduğundan x_k vektörünü $1 \le k \le n$ için diğer vektörlerin bir lineer toplamı şeklinde yazmak mümkündür.

Genelliği bozmadan $k = n$ alıp, $x_n = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_{n-1} x_{n-1}$ yazalım.

$$\det Gr(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_1, x_n \rangle_{\mathbb{C}} \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle x_{n-1}, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & \langle x_{n-1}, x_2 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_{n-1}, x_n \rangle_{\mathbb{C}} \\ \langle x_n, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & \langle x_n, x_2 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_n, x_n \rangle_{\mathbb{C}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_1, x_n \rangle_{\mathbb{C}} \\ ... & ... & ... \\ \langle x_{n-1}, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_{n-1}, x_n \rangle_{\mathbb{C}} \\ \langle \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{n-1} x_{n-1}, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{n-1} x_{n-1}, x_n \rangle_{\mathbb{C}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_1, x_n \rangle_{\mathbb{C}} \\ ... & ... & ... \\ \langle x_{n-1}, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_{n-1}, x_n \rangle_{\mathbb{C}} \\ \lambda_1 \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} + ... + \lambda_{n-1} \langle x_{n-1}, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \lambda_1 \langle x_1, x_n \rangle_{\mathbb{C}} + ... + \lambda_{n-1} \langle x_{n-1}, x_n \rangle_{\mathbb{C}} \end{vmatrix} = 0$$

Çünkü matrisin son satırı diğer satırların bir lineer toplamıdır. Dolayısı ile $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sistemi lineer bağımlı iken $\det Gr(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ elde edilir.

2) $m > n$ olsun.

i) n-boyutlu uzayda n den daha büyük sayıda m tane vektör olduğundan $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ vektörleri lineer bağımlıdır. O halde, en azından bir $\lambda_\tau \neq 0$ için,

$$-\lambda_\tau x_\tau = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_{\tau-1} x_{\tau-1} + \lambda_{\tau+1} x_{\tau+1} + ... + \lambda_m x_m$$

$$x_\tau = -\frac{\lambda_1}{\lambda_\tau} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_\tau} x_2 - ... - \frac{\lambda_{\tau-1}}{\lambda_\tau} x_{\tau-1} - \frac{\lambda_{\tau+1}}{\lambda_\tau} x_{\tau+1} - ... - \frac{\lambda_m}{\lambda_\tau} x_m$$

$-\dfrac{\lambda_k}{\lambda_\tau} = \mu_k$, $k = 1, 2, ..., \tau-1, \tau+1, ..., m$ ile gösterelim. Bu takdirde,

$$x_\tau = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + ... + \mu_{\tau-1} x_{\tau-1} + \mu_{\tau+1} x_{\tau+1} + ... + \mu_m x_m$$

elde edilir. x_τ aşağıdaki determinantta yerine yazılırsa τ. satır diğer satırların bir lineer toplamı olacağından,

$$\det Gr(x_1, x_2, ..., x_m) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_1, x_m \rangle_{\mathbb{C}} \\ ... & ... & ... \\ \langle x_{\tau-1}, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_{\tau-1}, x_m \rangle_{\mathbb{C}} \\ \langle x_\tau, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_\tau, x_m \rangle_{\mathbb{C}} \\ \langle x_{\tau+1}, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_{\tau+1}, x_m \rangle_{\mathbb{C}} \\ ... & ... & ... \\ \langle x_m, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_m, x_m \rangle_{\mathbb{C}} \end{vmatrix} = 0$$

olur.

ii) $m > n$ durumda keyfi m tane vektör her koşulda lineer bağımlıdır. Yani, keyfi $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ vektörleri için,

$$\det Gr(x_1, x_2, ..., x_m) = 0$$

dır.

3) $m < n$ olsun.

$\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ vektörleri ile üretilen alt uzayı $W \subset \mathbb{C}^n$ ile gösterelim. W, $\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}$ iç çarpımına göre bir üniter uzaydır. $boyW = k$ olsun. Önerme 1.9.14. e göre $F(W) = \mathbb{C}^k$ olacak şekilde $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ üniter dönüşüm vardır. Yani,

$$(\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}})_W = (\langle F(x), F(y) \rangle_{\mathbb{C}})_{\mathbb{C}^k}$$

dir.

$$\det Gr(x_1, x_2, ..., x_m) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_1, x_m \rangle_{\mathbb{C}} \\ ... & ... & ... \\ \langle x_m, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle x_m, x_m \rangle_{\mathbb{C}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle F(x_1), F(x_1) \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle F(x_1), F(x_m) \rangle_{\mathbb{C}} \\ ... & ... & ... \\ \langle F(x_m), F(x_1) \rangle_{\mathbb{C}} & ... & \langle F(x_m), F(x_m) \rangle_{\mathbb{C}} \end{vmatrix}$$

olduğu görülür. Böylece,

$$\det Gr(x_1, x_2, ..., x_m) = \det Gr(F(x_1), F(x_2), ..., F(x_m))$$

elde edilir. Şimdi ispata geçelim.

i) m-boyutlu uzayda m tane noktanın Gram Determinantı' nın sıfır veya pozitif olduğu $m = n$ durumunda gösterilmişti. Buna göre $\det Gr(x_1, x_2, ..., x_m) \geq 0$ dır.

ii) $(\Rightarrow)$: $\det Gr(x_1, x_2, ..., x_m) = 0$ olsun. $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ sisteminin lineer bağımlı olduğunu gösterelim.

Farz edelim $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ sistemi lineer bağımsız olsun. Bu durumda yukarıda verildiği gibi, $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ vektörleri ile üretilen alt uzay $L \subset \mathbb{C}^n$ olmak üzere, Önerme 1.9.14. e göre $F(L) = \mathbb{C}^m$ olacak şekilde bir $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ üniter dönüşüm vardır. $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ sistemi lineer bağımsız ise $\{F(x_1), F(x_2), ..., F(x_m)\}$ sistemi de $\mathbb{C}^m$ de lineer bağımsızdır. Dolayısı ile,

$$\det Gr(F(x_1), F(x_2), ..., F(x_m)) \neq 0$$

olur. Bunun sonucu olarak da

$$\det Gr(x_1, x_2, ..., x_m) \neq 0$$

olur ki bu bir çelişkidir. $\det Gr(x_1, x_2, ..., x_m) = 0$ olarak kabul edilmişti.

Sonuç olarak, $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ sistemi lineer bağımlıdır.

$(\Leftarrow)$: $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ sistemi lineer bağımlı iken $\det Gr(x_1, x_2, ..., x_m) = 0$ olduğu ispatın 1. maddesinin "ii" koşulundakine benzer şekilde gösterilir. ♦

Teorem 2.4.8.

$\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$ olsun. Bu takdirde,

$$\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{U(n)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\} \Leftrightarrow \langle x_i, x_j \rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_i, y_j \rangle_{\mathbb{C}},\ i \leq j\ ,\ 1 \leq i, j \leq m \qquad (*)$$

dir.

İspat:

$(\Rightarrow)$: $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$ için $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{U(n)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ olsun. Bu takdirde, $y_i = F(x_i)$, $1 \le i \le m$ olacak şekilde $F \in U(n)$ vardır. Böylelikle,

$$\langle y_i, y_j \rangle_{\mathbb{C}} = \langle F(x_i), F(x_j) \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x_i, x_j \rangle_{\mathbb{C}}, \ 1 \le i, j \le m$$

dir.

$(\Leftarrow)$: $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$ için $\langle x_i, x_j \rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_i, y_j \rangle_{\mathbb{C}}$, $i \le j$, $1 \le i, j \le m$ olsun. $\langle x_i, x_j \rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\langle x_j, x_i \rangle_{\mathbb{C}}}$, $i \le j$, $1 \le i, j \le m$ olduğundan, $\langle x_i, x_j \rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_i, y_j \rangle_{\mathbb{C}}$, $1 \le i, j \le m$ dir.

$rank\{x_1, x_2, ..., x_m\} = r_x$ ve $rank\{y_1, y_2, ..., y_m\} = r_y$ ile gösterelim.

a) $r_x = 1$ olsun.

$m = 1$ için ispat edelim. Bu takdirde,

$x_1 \ne 0$ dır. $(*)$' dan,

$$\langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_1, y_1 \rangle_{\mathbb{C}} \Rightarrow |x_1|^2 = |y_1|^2 \Rightarrow |x_1| = |y_1| \Rightarrow y_1 \ne 0$$

elde edilir.

$\{x_1\}$ den oluşan uzayı V_x ile, $\{y_1\}$ lerden oluşan uzayı V_y ile gösterelim.

V_x de ortonormal taban $\{e_1\}$ olsun. Bu tabanı ([9], s. 194, Teorem V.8.8.)' e göre tüm uzayın tabanına kadar genişletebiliriz. Böylelikle, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ elde edilir.

V_y de ortonormal taban $\{f_1\}$ olsun. Bu tabanı da ([9], s. 194, Teorem V.8.8.)' e göre tüm uzayın tabanına kadar genişletebiliriz. Böylelikle, $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ elde edilir.

Bu takdirde, $F(e_i) = f_i$, $1 \le i \le n$ olacak şekilde $F \in U(n)$ vardır.

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = \delta_1 e_1 \\ y_1 = \tau_1 f_1 = \tau_1 F(e_1) \end{array}\right\}$$ olacak şekilde $\delta_1,\ \tau_1 \in \mathbb{C}$ vardır.

$\langle x_1, x_1\rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_1, y_1\rangle_{\mathbb{C}}$ de bu eşitlikler yerine yazılırsa,

$$\langle \delta_1 e_1, \delta_1 e_1\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \tau_1 f_1, \tau_1 f_1\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \tau_1 F(e_1), \tau_1 F(e_1)\rangle_{\mathbb{C}}$$

$$|\delta_1|^2 \langle e_1, e_1\rangle_{\mathbb{C}} = |\tau_1|^2 \langle F(e_1), F(e_1)\rangle_{\mathbb{C}}$$

elde edilir. $\langle e_1, e_1\rangle_{\mathbb{C}} = \langle F(e_1), F(e_1)\rangle_{\mathbb{C}} \neq 0$ olduğundan,

$$|\delta_1| = |\tau_1|$$

dir.

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = |\delta_1| e^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \\ \tau_1 = |\tau_1| e^{i\beta}, \beta \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow\ \tau_1 = \underbrace{e^{i(\beta-\alpha)}}_{=\varepsilon} \delta_1,\ |\varepsilon| = 1,\ i = \sqrt{-1}$$

olduğundan,

$$y_1 = \tau_1 f_1 = \tau_1 F(e_1) = \varepsilon \delta_1 F(e_1) = \varepsilon F(\delta_1 e_1) = \varepsilon F(x_1)$$

elde edilir.

$\varepsilon \in \mathbb{C}$ ve $F \in U(n)$ için $\varepsilon F \in U(n)$ dir. Dolayısı ile,

$$y_1 = F_1(x_1),\ F_1 = \varepsilon F \in U(n)$$

dir. Sonuç olarak, $\{x_1\} \overset{U(n)}{\sim} \{y_1\}$ dir.

Şimdi $r_x = 1$ için $m \geq 2$ durumunu ispat edelim.

$x_1 \neq 0$ alalım. Dolayısı ile $x_i = \lambda_i x_1,\ 2 \leq i \leq m$ dir.

$$\langle x_1, x_1\rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_1, y_1\rangle_{\mathbb{C}} \Rightarrow |x_1|^2 = |y_1|^2 \Rightarrow |x_1| = |y_1| \Rightarrow y_1 \neq 0$$

Tanım 2.4.1. ve $(*)$' dan,

$$Gr(x_1, x_i) = Gr(y_1, y_i)\,,\ 2 \le i \le m$$

Önerme 2.4.7. den, $\det Gr(x_1, x_i) = 0$, $2 \le i \le m$ dır. Dolayısı ile $\det Gr(y_1, y_i) = 0$, $2 \le i \le m$ dır. Önerme 2.4.7. den, $\{y_1, y_i\}$, $2 \le i \le m$ sistemi de lineer bağımlıdır. Bu takdirde,

$$y_i = \mu_i y_1\,,\ 2 \le i \le m$$

dir.

$$\langle x_i, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_i, y_1 \rangle_{\mathbb{C}}\,,\ 2 \le i \le m$$

$$\langle \lambda_i x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \mu_i y_1, y_1 \rangle_{\mathbb{C}}\,,\ 2 \le i \le m$$

$$\lambda_i \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} = \mu_i \langle y_1, y_1 \rangle_{\mathbb{C}}\,,\ 2 \le i \le m$$

$\langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_1, y_1 \rangle_{\mathbb{C}} \ne 0$ olduğundan $\lambda_i = \mu_i$, $2 \le i \le m$ dir.

$\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ lerden oluşan uzayı V_x ile, $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ lerden oluşan uzayı V_y ile gösterelim.

V_x de ortonormal taban $\{e_1\}$ olsun. Bu tabanı ([9], s. 194, Teorem V.8.8.)' e göre tüm uzayın tabanına kadar genişletebiliriz. Böylelikle, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ elde edilir.

V_y de ortonormal taban $\{f_1\}$ olsun. Bu tabanı da ([9], s. 194, Teorem V.8.8.)' e göre tüm uzayın tabanına kadar genişletebiliriz. Böylelikle, $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ elde edilir.

Bu takdirde, $F(e_i) = f_i$, $1 \le i \le n$ olacak şekilde $F \in U(n)$ vardır.

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \delta_i e_1 \\ y_i &= \tau_i f_1 = \tau_i F(e_1) \end{aligned}\right\} \text{ olacak şekilde } \delta_i,\ \tau_i \in \mathbb{C},\ 1 \le i \le m \text{ vardır.}$$

$r_x = 1$, $m = 1$ durumundan,

$$y_1 = \varepsilon F(x_1)$$

dir. $r_x = 1$, $m = 1$ durumundaki $\tau_1 = \varepsilon \delta_1$ eşitliği kullanılarak,

$$y_i = \lambda_i y_1 = \lambda_i \tau_1 f_1 = \lambda_i \varepsilon \delta_1 F(e_1) = \varepsilon F(\lambda_i \delta_1 e_1) = \varepsilon F(\lambda_i x_1) = \varepsilon F(x_i)\,,\ 2 \le i \le m$$

elde edilir.

$\varepsilon \in \mathbb{C}$ ve $F \in U(n)$ için $\varepsilon F \in U(n)$ dir. Dolayısı ile,

$$y_i = F_1(x_i)\,,\ F_1 = \varepsilon F \in U(n)\,,\ 1 \le i \le m$$

dir. Sonuç olarak, $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{U(n)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ dir.

Eğer $x_1 = 0$ ve bir j, $2 \le j \le m$, için $x_j \ne 0$ ise ispat benzer şekilde yapılır.

$r_x = 1$ durumu için ispat bitti.

b) $r_x = n$ olsun.

İspatın “a” şıkkında $n = 1$ için incelendiğinden, $n > 1$ için inceleyelim.

Bunun için de önce $m = n$ durumunu inceleyelim. Tanım 2.4.1. ve $(*)$’ dan,

$$Gr(x_1, x_2, ..., x_n) = Gr(y_1, y_2, ..., y_n)$$

dir. $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan, Önerme 2.4.7. ye göre,

$$\det Gr(x_1, x_2, ..., x_n) \ne 0$$

dır. Dolayısı ile, $\det Gr(y_1, y_2, ..., y_n) \ne 0$ dır. Önerme 2.4.7. den, $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ sistemi de lineer bağımsızdır.

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix},\ x_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \cdots \\ x_{ni} \end{pmatrix},\ 1 \le i \le n \text{ olacak şekilde tanımlayalım.}$$

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix},\ y_i = \begin{pmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \cdots \\ y_{ni} \end{pmatrix},\ 1 \le i \le n \text{ olacak şekilde tanımlayalım.}$$

$\det Gr(x_1, x_2, ..., x_n) = \det Gr(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ olduğundan ve Sonuç 2.4.6. dan,

$$\left|\det \mathrm{X}\right|^2 = \left|\det \Upsilon\right|^2 \neq 0$$

dır. Bu takdirde,

$$\mathrm{B} = \Upsilon \mathrm{X}^{-1}$$

olacak şekilde $\mathrm{B} \in M(n \times n, \mathbb{C})$ matrisi mevcuttur. Burada $\Upsilon = \mathrm{BX}$ yazılabilir. Önerme 2.4.4. den,

$$\mathrm{X}^T \overline{\mathrm{X}} = Gr(x_1, x_2, ..., x_n) = Gr(y_1, y_2, ..., y_n) = \Upsilon^T \overline{\Upsilon}$$

dir. $\Upsilon = \mathrm{BX}$ den,

$$\mathrm{X}^T \overline{\mathrm{X}} = \Upsilon^T \overline{\Upsilon} = (\mathrm{BX})^T \overline{(\mathrm{BX})} = \mathrm{X}^T \mathrm{B}^T \overline{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{X}}$$

$\det \mathrm{X} \neq 0$ olduğundan $(\mathrm{X}^T)^{-1}$ ve $(\overline{\mathrm{X}})^{-1}$ mevcuttur. $\mathrm{X}^T \overline{\mathrm{X}} = \mathrm{X}^T \mathrm{B}^T \overline{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{X}}$ eşitliğinin her iki tarafı soldan $(\mathrm{X}^T)^{-1}$ ve sağdan $(\overline{\mathrm{X}})^{-1}$ ile çarpılırsa,

$$(\mathrm{X}^T)^{-1}(\mathrm{X}^T \overline{\mathrm{X}})(\overline{\mathrm{X}})^{-1} = (\mathrm{X}^T)^{-1}(\mathrm{X}^T \mathrm{B}^T \overline{\mathrm{B}}\overline{\mathrm{X}})(\overline{\mathrm{X}})^{-1}$$

eşitliğinden,

$$\mathrm{B}^T \overline{\mathrm{B}} = I$$

elde edilir. Dolayısı ile, $\mathrm{B} \in U(n)$ dir.

$\Upsilon = \mathrm{BX}$ olduğundan,

$$\left\| y_1 \quad y_2 \quad ... \quad y_n \right\| = \mathrm{B} \left\| x_1 \quad x_2 \quad ... \quad x_n \right\| = \left\| Bx_1 \quad Bx_2 \quad ... \quad Bx_n \right\|$$

elde edilir. Dolayısı ile,

$$y_i = \mathrm{B}x_i,\ 1 \leq i \leq n,\ \mathrm{B} \in U(n)$$

dir. Bununla “b” durumu için teoremin ispatı bitti.

c) Şimdi $r_x = n$ kabulü için $m > n$ durumunu inceleyelim. Bu takdirde,

$\{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m\}$

$\{y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}, ..., y_m\}$

olur. Burada lineer bağımsız n tane vektörden oluşan sistemi $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olarak seçelim.

Tanım 2.4.1. ve $(*)$' dan,

$$Gr(x_1, x_2, ..., x_n) = Gr(y_1, y_2, ..., y_n)$$

dir. Önerme 2.4.7. den,

$$\det Gr(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$$

dır. Dolayısı ile $\det Gr(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ dır. Önerme 2.4.7. den, $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ sistemi de lineer bağımsızdır.

Tanım 2.4.1. ve $(*)$' dan,

$$Gr(x_1, x_2, ..., x_n, x_i) = Gr(y_1, y_2, ..., y_n, y_i)\ , \ n+1 \leq i \leq m$$

dir. Önerme 2.4.7. den,

$$\det Gr(x_1, x_2, ..., x_n, x_i) = 0\ , \ n+1 \leq i \leq m$$

dır. Dolayısı ile $\det Gr(y_1, y_2, ..., y_n, y_i) = 0$, $n+1 \leq i \leq m$ dır. Önerme 2.4.7. den, $n+1 \leq i \leq m$ olmak üzere, $\{x_1, x_2, ..., x_n, x_i\}$ sistemi lineer bağımlı olduğundan $\{y_1, y_2, ..., y_n, y_i\}$ sistemi de lineer bağımlıdır. Dolayısı ile,

$$r_y = n$$

dir.

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix},\ x_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \cdots \\ x_{ni} \end{pmatrix},\ 1 \leq i \leq n \ \text{ olacak şekilde tanımlayalım}$$

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}, \ y_i = \begin{pmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \cdots \\ y_{ni} \end{pmatrix}, \ 1 \le i \le n$$ olacak şekilde tanımlayalım.

İspatın “b” şıkkından, $\mathrm{B} = \Upsilon \mathrm{X}^{-1}$, $\mathrm{B} \in U(n)$ olacak şekilde $\mathrm{B} \in M_{n\times n}$ matrisi vardır.

$$\mathrm{X}^T \overline{x_i} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^T \overline{\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \cdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_i \rangle_{\mathbb{C}} \\ \langle x_2, x_i \rangle_{\mathbb{C}} \\ \cdots \\ \langle x_n, x_i \rangle_{\mathbb{C}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle y_1, y_i \rangle_{\mathbb{C}} \\ \langle y_2, y_i \rangle_{\mathbb{C}} \\ \cdots \\ \langle y_n, y_i \rangle_{\mathbb{C}} \end{pmatrix} = \Upsilon^T \overline{y_i}, \ \ n+1 \le i \le m$$

$$\mathrm{X}^T \overline{x_i} = \Upsilon^T \overline{y_i} = (\mathrm{B}\mathrm{X})^T \overline{y_i} = \mathrm{X}^T \mathrm{B}^T \overline{y_i}, \ n+1 \le i \le m$$

$\det \mathrm{X} \ne 0$ olduğundan $(\mathrm{X}^T)^{-1}$ vardır.

$$(\mathrm{X}^T)^{-1}(\mathrm{X}^T \overline{x_i}) == (\mathrm{X}^T)^{-1} \mathrm{X}^T \mathrm{B}^T \overline{y_i}, \ n+1 \le i \le m$$

$$\overline{x_i} = \mathrm{B}^T \overline{y_i}, \ n+1 \le i \le m$$

$$\overline{y_i} = \overline{\mathrm{B} x_i}, \ n+1 \le i \le m$$

$$y_i = \mathrm{B} x_i, \ n+1 \le i \le m, \ \mathrm{B} \in U(n)$$

Sonuç olarak,

$$y_i = \mathrm{B} x_i, \ 1 \le i \le m, \ \mathrm{B} \in U(n)$$

elde edilir. Dolayısı ile,

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \overset{U(n)}{\sim} \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

dir. $r_x = n$ durumu için ispat bitti.

d) $r_x < n$ olsun.

$r_x = k < n$ durumunu inceleyelim.

Bu durumda lineer bağımsız k vektörü $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ olarak seçelim. Tanım 2.4.1. ve $(*)$' dan,

$$Gr(x_1, x_2, ..., x_k) = Gr(y_1, y_2, ..., y_k)$$

dır. Önerme 2.4.7. den,

$$\det Gr(x_1, x_2, ..., x_k) \neq 0$$

dır. Dolayısı ile, $\det Gr(y_1, y_2, ..., y_k) \neq 0$ dır. Önerme 2.4.7. den, $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ sistemi de lineer bağımsızdır. Bununla birlikte, Tanım 2.4.1. ve $(*)$' dan,

$$Gr(x_1, x_2, ..., x_k, x_i) = Gr(y_1, y_2, ..., y_k, y_i)\,,\ k+1 \leq i \leq m$$

dir. Önerme 2.4.7. den,

$$\det Gr(x_1, x_2, ..., x_k, x_i) = 0\,,\ k+1 \leq i \leq m$$

dır. Dolayısı ile, $\det Gr(y_1, y_2, ..., y_k, y_i) = 0$, $k+1 \leq i \leq m$ dır. Önerme 2.4.7. den, $k+1 \leq i \leq m$ olmak üzere, $\{x_1, x_2, ..., x_k, x_i\}$ sistemi lineer bağımlı olduğundan $\{y_1, y_2, ..., y_k, y_i\}$ sistemi de lineer bağımlıdır. Dolayısı ile,

$$r_y = k$$

dır.

$\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ lerden oluşan uzayı V_x ile, $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ lerden oluşan uzayı V_y ile gösterelim.

V_x de ortonormal taban $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ olsun. Bu tabanı ([9], s. 194, Teorem V.8.8.)' e göre tüm uzayın tabanına kadar genişletebiliriz. Böylelikle $\{e_1, e_2, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$ elde edilir.

V_y de ortonormal taban $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ olsun. Bu tabanı ([9], s. 194, Teorem V.8.8.)' e göre tüm uzayın tabanına kadar genişletebiliriz. Böylelikle $\{f_1, f_2, ..., f_k, f_{k+1}, ..., f_n\}$ elde edilir.

Önerme 1.9.14. ten, $F_1(V_x)=\mathbb{C}^k$ olacak şekilde $F_1 \in U(n)$ ve $F_2(V_y)=\mathbb{C}^k$ olacak şekilde $F_2 \in U(n)$ vardır.

Bu durumda,

$$\{F_1(x_1), F_1(x_2), ..., F_1(x_m), F_1(e_{k+1}), ..., F_1(e_n)\}$$

$$\{F_2(y_1), F_2(y_2), ..., F_2(y_m), F_2(f_{k+1}), ..., F_2(f_n)\}$$

sistemleri için,

$$\langle F_1(x_i), F_1(x_j)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x_i, x_j\rangle_{\mathbb{C}}\,,\ \langle y_i, y_j\rangle_{\mathbb{C}} = \langle F_2(y_i), F_2(y_j)\rangle_{\mathbb{C}}\,,\ 1 \le i, j \le m$$

olduğundan,

$$\langle F_1(x_i), F_1(x_j)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle F_2(y_i), F_2(y_j)\rangle_{\mathbb{C}}\,,\ 1 \le i, j \le m$$

ve

$$\langle F_1(x_i), F_1(e_j)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x_i, e_j\rangle_{\mathbb{C}} = 0\,,\ 1 \le i \le m\,,\ k+1 \le j \le n$$

$$\langle F_2(y_i), F_2(f_j)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_i, f_j\rangle_{\mathbb{C}} = 0\,,\ 1 \le i \le m\,,\ k+1 \le j \le n$$

elde edilir.

Bu takdirde, ispatın “b” ve “c” şıklarından,

$$F_3(F_1(x_i)) = F_2(y_i)\,,\ 1 \le i \le m$$

olacak şekilde $F_3 \in U(k)$ vardır. $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \oplus (\mathbb{C}^k)^{\perp}$ olduğundan, keyfi $z \in \mathbb{C}^n$,

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_k \\ z_{k+1} \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_k \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ z_{k+1} \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix},\ z_{\mu} \in \mathbb{C}\,,\ 1 \le \mu \le n$$

dir.

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_k \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = z' \in \mathbb{C}^k , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ z_{k+1} \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix} = z'' \in (\mathbb{C}^k)^{\perp} \text{ gösterilirse, } z = z' + z'' \text{ dür.}$$

$\tilde{F}_3 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümünü $\tilde{F}_3(z) = \tilde{F}_3(z' + z'') = F_3(z') + z''$ olarak tanımlayalım. $\tilde{F}_3$, $F_3 \in U(k)$ nın tüm $\mathbb{C}^n$ uzayına genişlemesidir.

Keyfi $u, v \in \mathbb{C}^n$ için,

$$\langle \tilde{F}_3(u), \tilde{F}_3(v) \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \tilde{F}_3(u' + u''), \tilde{F}_3(v' + v'') \rangle_{\mathbb{C}} , \; u', v' \in \mathbb{C}^k , \; u'', v'' \in (\mathbb{C}^k)^{\perp}$$

$$= \langle F_3(u') + u'', F_3(v') + v'' \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$= \langle F_3(u'), F_3(v') \rangle_{\mathbb{C}} + \langle F_3(u'), v'' \rangle_{\mathbb{C}} + \langle u'', F_3(v') \rangle_{\mathbb{C}} + \langle u'' + v'' \rangle_{\mathbb{C}}$$

$F_3(u') \in \mathbb{C}^k$ ve $v'' \in (\mathbb{C}^k)^{\perp}$ olduğundan $\langle F_3(u'), v'' \rangle_{\mathbb{C}} = 0$, $u'' \in (\mathbb{C}^k)^{\perp}$ ve $F_3(v') \in \mathbb{C}^k$ olduğundan da $\langle u'', F_3(v') \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ dır. Buradan da,

$$= \langle F_3(u'), F_3(v') \rangle_{\mathbb{C}} + \langle u'' + v'' \rangle_{\mathbb{C}} \qquad (i)$$

dür.

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \langle (u' + u''), (v' + v'') \rangle_{\mathbb{C}} , \; u', v' \in \mathbb{C}^k , \; u'', v'' \in (\mathbb{C}^k)^{\perp}$$

$$= \langle u', v' \rangle_{\mathbb{C}} + \langle u', v'' \rangle_{\mathbb{C}} + \langle u'', v' \rangle_{\mathbb{C}} + \langle u'' + v'' \rangle_{\mathbb{C}}$$

$u' \in \mathbb{C}^k$ ve $v'' \in (\mathbb{C}^k)^{\perp}$ olduğundan $\langle u', v'' \rangle_{\mathbb{C}} = 0$, $u'' \in (\mathbb{C}^k)^{\perp}$ ve $v' \in \mathbb{C}^k$ olduğundan da $\langle u'', v' \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ dır. Buradan da,

$$= \langle u', v' \rangle_{\mathbb{C}} + \langle u'' + v'' \rangle_{\mathbb{C}} \qquad (ii)$$

dür. (i) ve (ii)' den,

$$\langle \tilde{F}_3(u), \tilde{F}_3(v)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, v\rangle_{\mathbb{C}}$$

elde edilir. Dolayısı ile, $\tilde{F}_3 \in U(n)$ dir. Buradan,

$$y_i = (F_2^{-1}\tilde{F}_3 F_1)(x_i)\,,\ 1 \le i \le m$$

$$y_i = F(x_i)\,,\ F = F_2^{-1}\tilde{F}_3 F_1 \in U(n)\,,\ 1 \le i \le m$$

dir. Sonuç olarak,

$$\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{U(n)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\}$$

dir. $r_x = k < n$ durumu için de ispat bitti. ♦

Teorem 2.4.9.

$T = \{\langle x_j, x_k\rangle_{\mathbb{C}} : j \le k,\ 1 \le j,\ k \le m\}$ sistemi $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{C}^n$ vektörlerinin $U(n)$ invaryantlarının bir minimal tam sistemidir.

İspat: T nin her bir uygun alt kümesi, $p \le q$ olmak üzere $1 \le p, q \le m$ için $T_1 = T - \{\langle x_p, x_q\rangle_{\mathbb{C}}\}$ sisteminin bir altkümesinin içinde barındırılır. Şimdi T_1 in $U(n)$ invaryantlarının bir tam sistemi olmadığını gösterelim:

İlk olarak farz edelim ki $p \ne q$ olsun.

$\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$ sistemlerini alalım.

Burada, $1 \le j \le m$ ve $i = \sqrt{-1}$ için,

$$x_p = x_q = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix},\ x_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}\,,\ j \ne p\,,\ j \ne q$$

ve

$$y_p = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \; y_q = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\theta} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \; y_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}, \; j \neq p, \; j \neq q$$

olsun. Bu takdirde, $j \leq k$ ve $(j,k) \neq (p,q)$ için,

$$\langle x_j, x_k \rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_j, y_k \rangle_{\mathbb{C}} = 0$$

dir. Fakat bu eşitliklerden $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{U(n)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ olduğu çıkmıyor. Çünkü,

$$1 = \langle x_p, x_q \rangle_{\mathbb{C}} \neq \langle y_p, y_q \rangle_{\mathbb{C}} = 0$$

olduğundan $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ sistemler $U(n)$*-denk* değildir. Bu da T_1 in $U(n)$ invaryantlarının bir tam sistemi olmadığını gösterir.

İkinci olarak farz edelim $p = q$ olsun.

$\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$ sistemlerini alalım.

Burada, $1 \leq j \leq m$ ve $i = \sqrt{-1}$ için,

$$x_p = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}, \; j \neq p$$

ve

$$y_p = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \; y_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}, \; j \neq p$$

olsun. Bu takdirde, $j \leq k$ ve $(j,k) \neq (p,p)$ için,

$$\langle x_j, x_k \rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_j, y_k \rangle_{\mathbb{C}} = 0$$

dir. Fakat bu eşitliklerden $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{U(n)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ olduğu çıkmıyor. Çünkü,

$$1 = \langle x_p, x_p \rangle_{\mathbb{C}} \neq \langle y_p, y_p \rangle_{\mathbb{C}} = 2$$

olduğundan $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ sistemler $U(n)$*-denk* değildir. Bu da T_1 in $U(n)$ invaryantlarının bir tam sistemi olmadığını gösterir. ♦

2.5. *n*-boyutlu Üniter Uzayında Nokta Sistemlerinin *Iz(C^n)* İnvaryantları Tam Sistemi

Önerme 2.5.1.

$\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$ olsun. Bu takdirde,

$$\{x_1, ..., x_m\} \overset{Iz(\mathbb{C}^n)}{\sim} \{y_1, ..., y_m\} \iff \{x_1 - x_m, ..., x_{m-1} - x_m\} \overset{\mathrm{Re}\,U(n)}{\sim} \{y_1 - y_m, ..., y_{m-1} - y_m\}$$

dir.

İspat:

$(\Rightarrow)$: $\{x_1, ..., x_m\} \overset{Iz(\mathbb{C}^n)}{\sim} \{y_1, ..., y_m\}$ olsun.

Bu takdirde, $y_i = F(x_i)$, $1 \le i \le m$ olacak şekilde $F \in Iz(\mathbb{C}^n)$ vardır.

Önerme 1.5.9. daki $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ dönüşümünü kullanarak,

$$H(y_i) = H(F(x_i)),\ 1 \le i \le m$$

elde edilir. Buradan,

$$H(y_i) = H(F(H^{-1}H)(x_i)),\ 1 \le i \le m$$

$$H(y_i) = HFH^{-1}(H(x_i)),\ 1 \le i \le m$$

elde edilir. Teorem 1.7.18. den $HFH^{-1} \in Iz(\mathbb{R}^{2n})$ dir.

Dolayısı ile, $\{H(x_1),...,H(x_m)\}$, $\{H(y_1),...,H(y_m)\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ için,

$H(y_i) = HFH^{-1}(H(x_i))$, $1 \le i \le m$

olacak şekilde $HFH^{-1} \in Iz(\mathbb{R}^{2n})$ vardır. Buradan,

$$\{H(x_1),...,H(x_m)\} \overset{Iz(\mathbb{R}^{2n})}{\sim} \{H(y_1),...,H(y_m)\}$$

dir.

([14], s. 84, Teorem 22)' den, $\{H(x_1),...,H(x_m)\} \overset{Iz(\mathbb{R}^{2n})}{\sim} \{H(y_1),...,H(y_m)\}$ ise

$$\{H(x_1)-H(x_m),...,H(x_{m-1})-H(x_m)\} \overset{O(2n)}{\sim} \{H(y_1)-H(y_m),...,H(y_{m-1})-H(y_m)\}$$

dir. Önerme 1.5.9. dan $H:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ dönüşümü $\mathbb{R}-izomorfizma$ olduğundan,

$$\{H(x_1-x_m),...,H(x_{m-1}-x_m)\} \overset{O(2n)}{\sim} \{H(y_1-y_m),...,H(y_{m-1}-y_m)\}$$

elde edilir. Buradan,

$H(y_i-y_m) = A^{'}(H(x_i-x_m))$, $1 \le i \le m-1$

olacak şekilde $A^{'} \in O(2n)$ vardır. Eşitliğin her iki tarafına H^{-1} ile soldan bileşke işlemi uygulanırsa,

$H^{-1}(H(y_i-y_m)) = H^{-1}(A^{'}(H(x_i-x_m)))$, $1 \le i \le m-1$

$H^{-1}(H(y_i-y_m)) = H^{-1}(A^{'}(HH^{-1})(H(x_i-x_m)))$, $1 \le i \le m-1$

$y_i - y_m = (H^{-1}A^{'}H)(x_i-x_m)$, $1 \le i \le m-1$

elde edilir. $H^{-1}A^{'}H = A$ olarak işaretleyelim. Buradan $A^{'} = HAH^{-1}$ elde edilir.

Teorem 1.6.6. dan, $A^{'} = HAH^{-1} \in O(2n)$ olmak üzere $A \in \mathrm{Re}U(n)$ dir.

$A \in \mathrm{Re}U(n)$ ve $y_i - y_m = A(x_i - x_m)$, $1 \le i \le m-1$ olduğundan,

$$\{x_1 - x_m, ..., x_{m-1} - x_m\} \overset{\mathrm{Re}U(n)}{\sim} \{y_1 - y_m, ..., y_{m-1} - y_m\}$$

dir.

$(\Leftarrow)$: $\{x_1 - x_m, ..., x_{m-1} - x_m\} \overset{\mathrm{Re}U(n)}{\sim} \{y_1 - y_m, ..., y_{m-1} - y_m\}$ olsun. Bu takdirde,

$$y_i - y_m = A(x_i - x_m),\ 1 \le i \le m-1$$

olacak şekilde $A \in \mathrm{Re}U(n)$ vardır.

Önerme 1.5.9. daki $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ dönüşümü için,

$$H(y_i - y_m) = H(A(x_i - x_m)),\ 1 \le i \le m-1$$

elde edilir. Buradan da,

$$H(y_i - y_m) = H(A(H^{-1}H)(x_i - x_m)),\ 1 \le i \le m-1$$

$$H(y_i - y_m) = HAH^{-1}(H(x_i - x_m)),\ 1 \le i \le m-1$$

elde edilir. Teorem 1.6.6. dan $A \in \mathrm{Re}U(n)$ için $HAH^{-1} \in O(2n)$ dir.

Dolayısı ile, $\{H(x_1 - x_m), ..., H(x_{m-1} - x_m)\}$, $\{H(y_1 - y_m), ..., H(y_{m-1} - y_m)\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ sistemleri için $H(y_i - y_m) = HAH^{-1}(H(x_i - x_m))$, $1 \le i \le m-1$ olduğundan,

$$\{H(x_1 - x_m), ..., H(x_{m-1} - x_m)\} \overset{O(2n)}{\sim} \{H(y_1 - y_m), ..., H(y_{m-1} - y_m)\}$$

dir. Önerme 1.5.9. dan $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ dönüşümü $\mathbb{R} - \mathit{izomorfizma}$ olduğundan,

$$\{H(x_1) - H(x_m), ..., H(x_{m-1}) - H(x_m)\} \overset{O(2n)}{\sim} \{H(y_1) - H(y_m), ..., H(y_{m-1}) - H(y_m)\}$$

elde edilir.

([14], s. 84, Teorem 22)' den,

$$\{H(x_1), ..., H(x_m)\} \overset{Iz(\mathbb{R}^{2n})}{\sim} \{H(y_1), ..., H(y_m)\}$$

dir. Bu takdirde,

$$H(y_i) = F^{'}(H(x_i))\,,\ 1 \le i \le m$$

olacak şekilde $F^{'} \in Iz(\mathbb{R}^{2n})$ vardır. Eşitliğin her iki tarafına H^{-1} ile soldan bileşke işlemi uygulanırsa,

$$H^{-1}(H(y_i)) = H^{-1}(F^{'}(H(x_i)))\,,\ 1 \le i \le m$$

$$H^{-1}(H(y_i)) = H^{-1}(F^{'}(HH^{-1})(H(x_i)))\,,\ 1 \le i \le m$$

$$y_i = (H^{-1}F^{'}H)(x_i)\,,\ 1 \le i \le m$$

elde edilir. $H^{-1}F^{'}H = F$ olarak işaretleyelim. Buradan $F^{'} = HFH^{-1}$ elde edilir.

Teorem 1.7.18. den $F^{'} = HFH^{-1} \in Iz(\mathbb{R}^{2n})$ ise $F \in Iz(\mathbb{C}^n)$ dir.

Dolayısı ile, $\{x_1,...,x_m\}$, $\{y_1,...,y_m\}$ $\subseteq$ $\mathbb{C}^n$ sistemleri için $y_i = F(x_i)$, $1 \le i \le m$ olacak şekilde $F \in Iz(\mathbb{C}^n)$ vardır. Bu takdirde,

$$\{x_1,...,x_m\} \overset{Iz(\mathbb{C}^n)}{\sim} \{y_1,...,y_m\}$$

dir. ♦

Önerme 2.5.2.

$\{x_1, x_2,...,x_m\}$, $\{y_1, y_2,...,y_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$ olsun. Bu takdirde,

$$\{x_1,...,x_m\} \overset{\mathrm{Re}U(n)}{\sim} \{y_1,...,y_m\} \iff \mathrm{Re}\{\langle x_i, x_j\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle y_i, y_j\rangle_{\mathbb{C}}\},\ i \le j\,,\ 1 \le i, j \le m$$

dir.

İspat:

$(\Rightarrow)$: $\{x_1, x_2,...,x_m\}$, $\{y_1, y_2,...,y_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$ olmak üzere, $\{x_1,...,x_m\} \overset{\mathrm{Re}U(n)}{\sim} \{y_1,...,y_m\}$ olsun. Bu takdirde, $y_i = A(x_i)$, $1 \le i \le m$ olacak şekilde $A \in \mathrm{Re}U(n)$ vardır. Buradan da,

$$\mathrm{Re}\{\langle x_i, x_j\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle A(x_i), A(x_j)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle y_i, y_j\rangle_{\mathbb{C}}\},\ 1 \le i, j \le m$$

olduğu elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$ olmak üzere,

$$\mathrm{Re}\{\langle x_i, x_j\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle y_i, y_j\rangle_{\mathbb{C}}\},\ i \le j,\ 1 \le i, j \le m$$

olsun. $\langle x_i, x_j\rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\langle x_j, x_i\rangle_{\mathbb{C}}}$, $i \le j$, $1 \le i, j \le m$ olduğundan,

$$\mathrm{Re}\{\langle x_i, x_j\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle y_i, y_j\rangle_{\mathbb{C}}\},\ 1 \le i, j \le m$$

dir.

Keyfi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^n$ için $z_1 = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ ... \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}$, $z_2 = \begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ ... \\ c_n + id_n \end{pmatrix}$ alalım. Bu takdirde,

$$\mathrm{Re}\{\langle z_1, z_2\rangle_{\mathbb{C}}\} = a_1c_1 + ... + a_nc_n + b_1d_1 + ... + b_nd_n$$

dir. Önerme 1.5.9. daki $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ dönüşümü için,

$$H(z_1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \\ b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix},\ H(z_2) = \begin{pmatrix} c_1 \\ ... \\ c_n \\ d_1 \\ ... \\ d_n \end{pmatrix}$$

dir. Buradan,

$$\langle H(z_1), H(z_2)\rangle_{\mathbb{R}} = a_1c_1 + ... + a_nc_n + b_1d_1 + ... + b_nd_n$$

dir. Buradan da,

$$\mathrm{Re}\{\langle z_1, z_2\rangle_{\mathbb{C}}\} = \langle H(z_1), H(z_2)\rangle_{\mathbb{R}}$$

eşitliği elde edilir. Bu sonuçtan yararlanılarak,

$$\mathrm{Re}\{\langle x_i, x_j\rangle_{\mathbb{C}}\} = \langle H(x_i), H(x_j)\rangle_{\mathbb{R}}\,,\ 1 \le i, j \le m$$

elde edilir. Dolayısı ile,

$$\mathrm{Re}\{\langle y_i, y_j\rangle_{\mathbb{C}}\} = \langle H(y_i), H(y_j)\rangle_{\mathbb{R}}\,,\ 1 \le i, j \le m$$

dir. $\mathrm{Re}\{\langle x_i, x_j\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle y_i, y_j\rangle_{\mathbb{C}}\}$, $1 \le i, j \le m$ olduğundan,

$$\langle H(x_i), H(x_j)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle H(y_i), H(y_j)\rangle_{\mathbb{R}}\,,\ 1 \le i, j \le m$$

dir.

([14], s. 78, Teorem 18)' den, $\langle H(x_i), H(x_j)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle H(y_i), H(y_j)\rangle_{\mathbb{R}}$, $1 \le i, j \le m$ ise,

$$\{H(x_1),\dots,H(x_m)\} \overset{O(2n)}{\sim} \{H(y_1),\dots,H(y_m)\}$$

dir. Dolayısı ile, $H(y_i) = A^{'}(H(x_i))$, $1 \le i \le m$ olacak şekilde $A^{'} \in O(2n)$ vardır. Eşitliğin her iki tarafına soldan H^{-1} ile bileşke işlemi uygulanırsa,

$$H^{-1}(H(y_i)) = H^{-1}(A^{'}(H(x_i)))\,,\ 1 \le i \le m$$

$$H^{-1}(H(y_i)) = H^{-1}(A^{'}(HH^{-1})(H(x_i)))\,,\ 1 \le i \le m$$

$$y_i = (H^{-1}A^{'}H)(x_i)\,,\ 1 \le i \le m$$

elde edilir. $H^{-1}A^{'}H = A$ olarak işaretleyelim. Buradan $A^{'} = HAH^{-1}$ elde edilir.

Teorem 1.6.6. dan $A^{'} = HAH^{-1} \in O(2n)$ ise $A \in \mathrm{Re}U(n)$ dir. $A \in \mathrm{Re}U(n)$ ve $y_i = A(x_i)$, $1 \le i \le m$ olduğundan,

$$\{x_1,\dots,x_m\} \overset{\mathrm{Re}U(n)}{\sim} \{y_1,\dots,y_m\}$$

dir. ♦

Sonuç 2.5.3.

$\{x_1, x_2,\dots,x_m\}$, $\{y_1, y_2,\dots,y_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$ olsun. Bu takdirde,

$$\{x_1,...,x_m\} \overset{Iz(\mathbb{C}^n)}{\sim} \{y_1,...,y_m\} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\{\langle x_i - x_m, x_j - x_m\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle y_i - y_m, y_j - y_m\rangle_{\mathbb{C}}\},$$

$i \le j$, $1 \le i, j \le m-1$

dir.

İspat: $\{x_1, x_2,..., x_m\}$, $\{y_1, y_2,..., y_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$ için Önerme 2.5.1. den,

$$\{x_1,...,x_m\} \overset{Iz(\mathbb{C}^n)}{\sim} \{y_1,...,y_m\} \Leftrightarrow \{x_1 - x_m,..., x_{m-1} - x_m\} \overset{\mathrm{Re}U(n)}{\sim} \{y_1 - y_m,..., y_{m-1} - y_m\}$$

dir. Önerme 2.5.2. den,

$$\{x_1 - x_m,..., x_{m-1} - x_m\} \overset{\mathrm{Re}U(n)}{\sim} \{y_1 - y_m,..., y_{m-1} - y_m\} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{Re}\{\langle x_i - x_m, x_j - x_m\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle y_i - y_m, y_j - y_m\rangle_{\mathbb{C}}\},\ i \le j\ ,\ 1 \le i, j \le m-1$$

dir. ♦

Teorem 2.5.4.

$IzT = \{\mathrm{Re}\{\langle x_j - x_m, x_k - x_m\rangle_{\mathbb{C}}\} : j \le k,\ 1 \le j,\ k \le m-1\}$ sistemi $x_1, x_2,..., x_m \in \mathbb{C}^n$ vektörlerinin $Iz(\mathbb{C}^n)$ invaryantlarının bir minimal tam sistemidir.

İspat: IzT nin her bir uygun alt kümesi, $p \le q$ olmak üzere $1 \le p, q \le m-1$ için $IzT_1 = IzT - \{\mathrm{Re}\{\langle x_p - x_m, x_q - x_m\rangle_{\mathbb{C}}\}\}$ sisteminin bir altkümesinin içinde barındırılır. Şimdi IzT_1 in $Iz(\mathbb{C}^n)$ invaryantlarının bir tam sistemi olmadığını gösterelim:

İlk olarak farz edelim $p \ne q$ olsun.

$\{x_1, x_2,..., x_m\}$ ve $\{y_1, y_2,..., y_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$ sistemlerini alalım.

Burada, $1 \le j \le m-1$ ve $i = \sqrt{-1}$ için,

$$x_p = x_q = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ x_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{i\theta} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ x_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0},\ j \neq p,\ j \neq q$$

ve

$$y_p = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ y_q = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\theta} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ y_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{i\theta} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ y_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0},\ j \neq p,\ j \neq q$$

olsun. Bu takdirde, $1 \leq j,k \leq m-1$ olmak üzere, $j \leq k$ ve $(j,k) \neq (p,q)$ için,

$$\mathrm{Re}\{\langle x_j - x_m, x_k - x_m\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle y_j - y_m, y_k - y_m\rangle_{\mathbb{C}}\} = 1$$

dir. Fakat bu eşitlikler $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{Iz(\mathbb{C}^n)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ olduğunu göstermez. Çünkü,

$$2 = \mathrm{Re}\{\langle x_p - x_m, x_q - x_m\rangle_{\mathbb{C}}\} \neq \mathrm{Re}\{\langle y_p - y_m, y_q - y_m\rangle_{\mathbb{C}}\} = 1$$

olduğundan $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ sistemler $Iz(\mathbb{C}^n)$ *-denk* değildir. Bu da IzT_1 in $Iz(\mathbb{C}^n)$ invaryantlarının bir tam sistemi olmadığını gösterir.

İkinci olarak farz edelim $p = q$ olsun.

$\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$ sistemlerini alalım.

Burada, $1 \leq j \leq m-1$ ve $i = \sqrt{-1}$ için,

$$x_p = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ x_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{i\theta} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ x_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0},\ j \neq p$$

ve

$$y_p = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ y_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{i\theta} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ y_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0},\ j \neq p$$

olsun. Bu takdirde, $1 \leq j,k \leq m-1$ olmak üzere , $j \leq k$ ve $(j,k) \neq (p,p)$ için,

$$\mathrm{Re}\{\langle x_j - x_m, x_k - x_m \rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle y_j - y_m, y_k - y_m \rangle_{\mathbb{C}}\} = 1$$

dir. Fakat bu eşitlikler $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{Iz(\mathbb{C}^n)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ olduğu çıkmıyor. Çünkü,

$$2 = \mathrm{Re}\{\langle x_p - x_m, x_p - x_m \rangle_{\mathbb{C}}\} \neq \mathrm{Re}\{\langle y_p - y_m, y_p - y_m \rangle_{\mathbb{C}}\} = 3$$

olduğundan $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ sistemler $Iz(\mathbb{C}^n)$ *-denk* değildir. Bu da IzT_1 in $Iz(\mathbb{C}^n)$ invaryantlarının bir tam sistemi olmadığını gösterir.♦

2.6. Bir Boyutlu Üniter Uzayında Üçgenlerin Tam İnvaryant Sistemleri

Önerme 2.6.1.

$\{x_1, x_2\} \subseteq \mathbb{C}$ için $\|x_1\| \neq 0$ ve $\|x_2\| \neq 0$ olsun.

$U(1):\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ hareketi, $\gamma(g,(x_1,x_2))=(gx_1,gx_2)$, $\forall g\in U(1)$, $\forall x_1,x_2\in\mathbb{C}$ olacak şekilde gx_i, $i=1,2$ iki kompleks sayının çarpımı olsun.

$$f_1(x_1,x_2)=\langle x_1,x_1\rangle_{\mathbb{C}}$$

$$f_2(x_1,x_2)=\langle x_2,x_2\rangle_{\mathbb{C}}$$

$$f_3(x_1,x_2)=\langle x_2-x_1,x_2-x_1\rangle_{\mathbb{C}}$$

$$f_4(x_1,x_2)=\frac{\langle x_1,x_2\rangle_{\mathbb{C}}}{\|x_1\|\|x_2\|}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde, $\{f_1,f_2,f_4\}$ sistemi $U(1)$-*invaryant* fonksiyonların bir tam sistemidir. Fakat, $\{f_1,f_2,f_3\}$ sistemi $U(1)$-*invaryant* fonksiyonların bir tam sistemi değildir.

İspat: $\{x_1,x_2\}$, $\{y_1,y_2\}\subseteq\mathbb{C}$ sistemlerini alalım.

a) $f_1(x_1,x_2)=f_1(y_1,y_2)$, $f_2(x_1,x_2)=f_2(y_1,y_2)$, $f_4(x_1,x_2)=f_4(y_1,y_2)$

olsun. $\{x_1,x_2\}\overset{U(1)}{\sim}\{y_1,y_2\}$ midir?

$$\langle x_1,x_1\rangle_{\mathbb{C}}=\langle y_1,y_1\rangle_{\mathbb{C}},\ \langle x_2,x_2\rangle_{\mathbb{C}}=\langle y_2,y_2\rangle_{\mathbb{C}},\ \frac{\langle x_1,x_2\rangle_{\mathbb{C}}}{\|x_1\|\|x_2\|}=\frac{\langle y_1,y_2\rangle_{\mathbb{C}}}{\|y_1\|\|y_2\|}$$

olsun. Buradan,

$$\langle x_1,x_2\rangle_{\mathbb{C}}=\langle y_1,y_2\rangle_{\mathbb{C}}$$

elde edilir. Dolayısı ile,

$$\langle x_1,x_1\rangle_{\mathbb{C}}=\langle y_1,y_1\rangle_{\mathbb{C}},\ \langle x_2,x_2\rangle_{\mathbb{C}}=\langle y_2,y_2\rangle_{\mathbb{C}},\ \langle x_1,x_2\rangle_{\mathbb{C}}=\langle y_1,y_2\rangle_{\mathbb{C}}$$

dir. Teorem 2.4.8. e göre $\{x_1, x_2\} \overset{U(1)}{\sim} \{y_1, y_2\}$ dir. Yani, $\{f_1, f_2, f_4\}$ sistemi $U(1)$-*invaryant* fonksiyonların bir tam sistemidir.

Dolayısı ile, Teorem 1.11.1. deki $\{f_1, f_2, f_4\}$ sisteminin benzeri Üniter uzayda da doğrudur.

b) $f_1(x_1, x_2) = f_1(y_1, y_2)$, $f_2(x_1, x_2) = f_2(y_1, y_2)$, $f_3(x_1, x_2) = f_3(y_1, y_2)$

olsun. $\{x_1, x_2\} \overset{U(1)}{\sim} \{y_1, y_2\}$ midir?

$$\langle x_1, x_1\rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_1, y_1\rangle_{\mathbb{C}},\ \langle x_2, x_2\rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_2, y_2\rangle_{\mathbb{C}},\ \langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle_{\mathbb{C}}$$

ve

$$\langle x_2 - x_1, x_2 - x_1\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x_2, x_2\rangle_{\mathbb{C}} + \langle x_1, x_1\rangle_{\mathbb{C}} - 2\,\mathrm{Re}\{\langle x_1, x_2\rangle_{\mathbb{C}}\}$$

$$\langle y_2 - y_1, y_2 - y_1\rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_2, y_2\rangle_{\mathbb{C}} + \langle y_1, y_1\rangle_{\mathbb{C}} - 2\,\mathrm{Re}\{\langle y_1, y_2\rangle_{\mathbb{C}}\}$$

olduğundan,

$$\mathrm{Re}\{\langle x_1, x_2\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle y_1, y_2\rangle_{\mathbb{C}}\}$$

elde edilir. Fakat, $\langle x_1, x_2\rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_1, y_2\rangle_{\mathbb{C}}$ olmadığına örnek verelim:

$\{x_1 = 1,\ x_2 = i\}$, $\{y_1 = 1,\ y_2 = -i\}$ sistemlerini alalım.

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(y_1, y_2) = 1,\ f_2(x_1, x_2) = f_2(y_1, y_2) = 1,\ f_3(x_1, x_2) = f_3(y_1, y_2) = 2$$

dir. Şimdi gösterelim ki bu sistemler $U(1)$-*denk* değildirler:

$$1 = (a + ib)1$$

için $a = 1$, $b = 0$ ve

$$-i = (a + ib)i$$

için $a = -1$, $b = 0$ olduğundan,

$$y_i = (a + ib)x_i\,,\ 1 \leq i \leq 2$$

olacak şekilde $a + ib \in U(1)$ olmadığından $\{x_1, x_2\}$ ve $\{y_1, y_2\}$ sistemleri $U(1)$-*denk* değildir. Buradan $\{f_1, f_2, f_3\}$ sistemi $U(1)$-*invaryant* fonksiyonların bir tam sistemi değildir.

Dolayısı ile Öklid uzayındaki Teorem 1.11.1. in benzeri Üniter uzayda doğru değildir.

Not 2.6.2.

Önerme 2.6.1. e göre, $\{x_1, x_2\}$ ve $\{y_1, y_2\}$ vektör sistemleri için, iki boyutlu reel vektör uzayındaki Kenar Açı Kenar eşitlik bağıntısının benzeri bir boyutlu üniter uzayda doğru iken iki boyutlu reel vektör uzayındaki Kenar Kenar Kenar eşitlik bağıntısının benzeri bir boyutlu üniter uzayda doğru değildir.

3. İRDELEME

Tezde, n-boyutlu kompleks vektör uzayındaki problemlerin çözümü için $2n$-boyutlu reel vektör uzayına başvuruldu. Böylelikle, n-boyutlu kompleks vektör uzayındaki keyfi F kompleks lineer dönüşümün determinantı ile bu dönüşüme doğal izomorfizma dönüşümün uygulanması yoluyla elde edilen $2n$-boyutlu reel vektör uzayındaki $F^{'}$ lineer dönüşümün determinantı arasında $\left|\det F\right|^2 = \det F^{'}$ eşitliği bulundu. Böylelikle, "n-boyutlu kompleks vektör uzayındaki problemlerin çözümü için $2n$-boyutlu reel vektör uzayına başvuru" yaklaşımına bir katkı sağlanmış oldu. Ayrıca, n-boyutlu kompleks vektör uzayındaki keyfi izometrinin, öteleme ve [4]' de tanımlanan reel üniter dönüşümlerin bileşkesi şeklinde tek türlü ifade edildiği, $2n$-boyutlu reel vektör uzayındaki keyfi izometrinin öteleme ve ortogonal dönüşümlerin bileşkesi şeklinde olduğu sonucundan yararlanılarak gösterildi. Burada beklenti n-boyutlu keyfi izometrinin, $2n$-boyutlu reel vektör uzayındakine benzer olarak öteleme ve üniter dönüşümlerin bileşkesi şeklinde olacağı idi. $2n$-boyutlu reel vektör uzayındaki ortogonal gruba göre nokta sistemlerinin denklik probleminin çözümünden yararlanılarak, n-boyutlu kompleks vektör uzayındaki nokta sistemlerinin izometri grubuna göre denklik problemi çözüldü. Benzer yaklaşım, yani kompleks vektör uzayını incelemek için reel vektör uzayına başvuru [6, 11, 12] çalışmalarında da uygulanmıştır.

[9]' dan alınan, bu tezde Teorem 1.4.9. şeklinde verilen teoremdeki üniterlik şartları, $\mathbb{C}^n$ den kendisine tanımlanan keyfi dönüşümün kompleks lineer olduğu kabulünden yola çıkılarak ifade ve ispat edilmiştir. Teorem 2.2.1. de ise Teorem 1.4.9. dan farklı olarak, keyfi üniter dönüşümün kompleks lineer olduğu ispatlandı. Ayrıca, reel üniter ve [4]' de tanımlanan sanal üniter dönüşümler ile üniter dönüşüm arasında ilişki kuruldu. Böylelikle, $\mathbb{C}^n$ den kendisine tanımlanan keyfi dönüşümün üniter olması ile ilgili minimal şartlar belirlenmiş oldu.

n-boyutlu kompleks vektör uzayında sonlu sayıda noktadan oluşan nokta ailelerinin üniter ve izometri gruplarına göre nokta invaryantlarının tam sistemleri bulundu. Bu tam sistemlerin minimal tam sistemler olduğu gösterildi. Kompleks vektör uzaylarda benzer çalışmalarda, nokta sistemleri için $SU(2)$-denklik probleminin çözümü [23]' de, $SU(2)$-grubu için eğrilerin sonlu ailesinin invaryantlarının incelenmesi [15]' de verilmiştir.

Teorem 1.11.1. de reel vektör uzayında üçgenler için verilen Kenar Kenar Kenar, Kenar Açı Kenar ve Açı Kenar Açı eşitlik bağıntılarının doğruluğu invaryant teorisi yöntemleri kullanılarak cebirsel gösterildi. Önerme 2.6.1. de üçgenler için verilen bu Kenar Açı Kenar eşitlik bağıntısı benzerinin üniter uzayında doğru olduğu, Kenar Kenar Kenar eşitlik bağıntısı benzerinin ise üniter uzayında doğru olmadığı yine invaryant teori yöntemleri kullanılarak cebirsel gösterildi. Beklentiden farklı olarak, n-boyutlu kompleks vektör uzayındaki keyfi izometrinin, öteleme ve reel üniter dönüşümlerin bileşkesi şeklinde ifade edilmesi ve Önerme 2.6.1. de elde edilen sonuçlar $2n$-boyutlu Öklid uzayındaki her şeyin benzerinin n-boyutlu üniter uzayında doğru olmadığını gösterdi.

Fizik alanındaki çalışmalarda da üniter uzay, $U(n)$ ve $SU(n)$ dönüşüm grupları önemlidir. Özellikle parçacıklar teorisinin geliştirilmesinde [2, 3, 30], $U(n)$ ve $SU(n)$ dönüşüm grupları çok önemli bir yere sahiptirler. Bununla birlikte, kuantum teorisi ile ilgili çalışmalarda [5, 19, 34], nükleer enerji konusundaki çalışmada [7], üniter uzayından ve üniter dönüşümlerden yararlanılmıştır. Ayrıca [28, 29]' da fiziksel kavramları geliştirmek için üniter yapının kullanılması teorik fizik için konunun önemini göstermektedir.

4. SONUÇLAR

Tezde elde edilen temel sonuçları aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz.

1) Keyfi $F \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ ve $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ olmak üzere $F^{'} = HFH^{-1}$ için,

$$\left|\det F\right|^2 = \det F^{'}$$

dür. (Teorem 2.1.1.)

2) $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü için aşağıdaki önermeler karşılıklı olarak eşdeğerdir.

i) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ için $< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}} =< x, y >_{\mathbb{C}}$

ii) $\forall x \in \mathbb{C}^n$ için $\|A(x)\| = \|x\|$ ve A, $\mathbb{C}-lineerdir$.

iii) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ için $\mathrm{Re}\left\{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}\right\} = \mathrm{Re}\left\{< x, y >_{\mathbb{C}}\right\}$ ve A, $\mathbb{C}-lineerdir$.

iv) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ için $\mathrm{Im}\left\{< A(x), A(y) >_{\mathbb{C}}\right\} = \mathrm{Im}\left\{< x, y >_{\mathbb{C}}\right\}$ ve A, $\mathbb{C}-lineerdir$.

(Teorem 2.2.1.)

3) Keyfi $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ izometri, öteleme ve reel üniter dönüşümlerin bileşkesi şeklinde yazılabilir. Yani, keyfi $F \in Iz(\mathbb{C}^n)$ ve keyfi $x \in \mathbb{C}^n$ için, $F(x) = gx + b$ şeklindedir, burada, $g \in \mathrm{Re}U(n)$ ve $b \in \mathbb{C}^n$ dir. Bu yazılım tek türlüdür. (Teorem 2.3.1)

4) $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$ için,

$$\{x_1, ..., x_m\} \overset{U(n)}{\sim} \{y_1, ..., y_m\} \iff \langle x_i, x_j \rangle_{\mathbb{C}} = \langle y_i, y_j \rangle_{\mathbb{C}} \, , \; i \le j \, , \; 1 \le i, j \le m$$

olduğu gösterilmiştir. (Teorem 2.4.8.)

5) $T = \{\langle x_i, x_j \rangle_{\mathbb{C}} : \; i \le j, \; 1 \le i, j \le m\}$ sistemi $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{C}^n$ vektörlerinin $U(n)$ invaryantlarının bir minimal tam sistemidir. (Teorem 2.4.9.)

6) $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subseteq \mathbb{C}^n$ için,

$$\{x_1, ..., x_m\} \overset{Iz(\mathbb{C}^n)}{\sim} \{y_1, ..., y_m\} \iff \mathrm{Re}\{\langle x_i - x_m, x_j - x_m \rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle y_i - y_m, y_j - y_m \rangle_{\mathbb{C}}\},$$

$i \le j$, $1 \le i, j \le m-1$

olduğu gösterilmiştir. (Sonuç 2.5.3.)

7) $IzT = \{\mathrm{Re}\{\langle x_i - x_m, x_j - x_m \rangle_{\mathbb{C}}\} : \; i \le j, \; 1 \le i, j \le m-1\}$

sistemi $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{C}^n$ vektörlerinin $Iz(\mathbb{C}^n)$ invaryantlarının bir minimal tam sistemidir. (Teorem 2.5.4.)

5. ÖNERİLER

Üniter geometrinin gelişimi için aşağıdaki problemlerin çözülmesi oldukça önemlidir:

1) n-boyutlu kompleks vektör uzayındaki yapılar ile $2n$-boyutlu reel vektör uzayındaki yapılar arasında Teorem 2.1.1. de olduğu gibi başka bağlantıların varlığının incelenmesi.

2) Bu tezde, Öklid uzayında üçgenler için verilen Kenar Açı Kenar eşitlik teoreminin benzerinin üniter uzayında doğru olduğu, Kenar Kenar Kenar teoreminin benzerinin üniter uzayında doğru olmadığı gösterildi. Benzer inceleme ile, elemanter geometride (Öklid geometrisinde) üçgenler, dörtgenler ve n-genler için verilen teoremlerin Üniter uzayındaki benzerlerinin hangilerinin doğru, hangilerinin yanlış olduğunun bulunması.

3) Öklid geometrisinde noktalar ve doğrulardan oluşan sistemlerin denklik problemi benzerinin Üniter geometri için incelenmesi.

4) Üniter uzaylarda eğrilerin minimal tam invaryantlar sisteminin bulunması.

6. KAYNAKLAR

1. Bahar, Y., Parametrik Eğrilerin Diferansiyel İnvaryantları, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2002.

2. Buras, J. A., Gemmler, K. ve Isidori, G., Quark Flavour Mixing with Right-handed Currents: An Effective Theory Approach, Nuclear Physics B, 843 (2011) 107-142.

3. Calixto, M. ve Aldaya, V., Broken Unitary Symmetries and Fermi-Dirac Statistics, Modern Physics Letters A, 22, 40 (2007) 3037-3045.

4. Çoban, H. A., 1 ve 2 Boyutlu Üniter Uzaylarda Dönüşüm Grupları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2008

5. Davis, S., Quantum Theory and the Category of Complex Numbers, International Journal of Theoretical Physics, 45, 10 (2006) 1935-1949.

6. Eirola, T., Huhtanen, M. ve Pfaler, J. V., Solution Methods for $\mathbb{R}$-lineer Problems in $\mathbb{C}^n$, Society for Industrial and Applied Mathematics, 25, 3 (2004) 804-828

7. Epelbaum, E., Four-nucleon Force Using the Method of Unitary Transformation, The Eurepean Physical Journal, 34 (2007) 197-214.

8. Greub, W. H., Linear Algebra, Third Edition, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1967.

9. Hacısalihoğlu, H. H., Lineer Cebir, 3. Baskı, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Ankara, 1985.

10. Hoffman, K. ve Kunze, R., Linear Algebra, Upper Saddle River, N. J. : Prentice Hall, 1971.

11. Huhtanen, M. ve Pfaler, V. J., The Real Linear Eigenvalue Problem in $\mathbb{C}^n$, Linear Algebra and Its Applications, 394 (2005) 169-199.

12. Huhtanen, M., Real Linear Kronecker Product Operations, Linear Algebra and Its Applications, 418 (2006) 347-361.

13. Karataş, M., *n*-boyutlu Öklid Geometrisinde Noktaların İnvaryantları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2005.

14. Kaya, G., *n*-boyutlu Öklid ve Ortogonal Geometrilerde Noktalar Sistemlerinin Denklik Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2008.

15. Khadjiev, D. ve Tursunov, B., SU(2)-Invariants of a Finite Number of Curves, Dokl. Akad. Nauk. UzSSR, 12 (1985) 4-6.

16. Khadjiev, D., An Application of the Invariant Theory to the Differential Geometry of Curves, Fan, Tashkent, 1988. (in Russian)

17. Khadjiev, D. ve Pekşen, Ö., The Complete System of Global Integral and Differential Invariants for Equi-Affine Curves, Differential Geometry and Its Applications, 29 (2004) 167-175.

18. Khadjiev, D., Complete System of Differential Invariants of Vector Fields in a Euclidean Space, Turk J. Math, 34 (2010) 543-559.

19. Li, M., Zhong, Y. ve Guo, G., Average Position in Quantum Walks with a U(2) Coin, www.arxiv.org/abs/1210.3118, 11.10.2012.

20. Lipschutz, S. ve Lipson, M. L., Linear Algebra, Fourth Edition, The McGraw-Hill Book Co., New York, 2009.

21. Mackey, D. S. ve Mackey, N., On The Determinant of Symplectic Matrices, Numerical Analysis Report No:422, Manchester Centre for Computational Mathematics, Manchester, England, 2003.

22. Mal'Cev, A. I., Foundations of Linear Algebra, W. H. Freeman and Comp., San Francisco, 1965 (Trans. Russian).

23. Mollaveisoğlu, D., Kuaternionlar Uzayında Dönüşüm Grupları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.

24. Muminov, K. K., Equivalence of Curves with Respect to the Action of the Symplectic Group, Russian Mathematics, 53, 6 (2009) 24-28.

25. Ören, İ., Minkowski Uzayzaman Geometrisinde Noktaların İnvaryantları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2004.

26. Ören, İ., O(3,1)-Ortogonal Grubu İçin Noktaların İnvaryantları, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2007.

27. Pekşen, Ö., Khadjiev., D. ve Ören, İ., Invariant Parametrizations and Complete Systems of Global Invariants of Curves in the Pseudo-Euclidean Geometry, Turk J Math, 36 (2012) 147-160.

28. Penrose, R. ve Rindler, W., Spinors and Space-time, Cambridge University Press 1, 1984.

29. Penrose, R. ve Rindler, W., Spinors and Space-time, Cambridge University Press 2, 1986.

30. Romanets, O., Tolos, L., Garcia-Recio, C., Nieves, J., Salcedo, L. L. ve Timmermans, R., Heavy-Quark Spin Symmetry for Charmed and Strange Baryon Resonances, Nuclear Physics A, 1 (2012) 1-4.

31. Sağıroğlu, Y. ve Pekşen, Ö., The Equivalence of Centro-equiaffine Curves, Turk J Math, 34 (2010) 95-104.

32. Suhtaeva, A. M., On Equivalence of Curves in $\mathbb{C}^n$ with restpect to the Action of Groups SL(n, $\mathbb{C}$) and GL(n, $\mathbb{C}$), Dokl. Akad. Nauk. of SSRUZ, 6 (1987) 11-13.

33. Weyl, H., The Classical Groups, Their Invariants and Representations, Second Edition, Princeton, New Jersey Princeton University Press, 1946.

34. Wessels, V. ve Polyzou, W. N., Stability of Covaryant Relastivistic Quantum Theory, Few-Body Systems, 35 (2004) 51-76.

35. www.maths.ed.ac.uk_~aar_papers_mschap.pdf., Linear Symplectic Geometry, 30.04.2012.

36. www.acikders.org.tr/mod/resource/view.php?id=772., Bölüm 17. Metrik Uzaylar, 03.09.2012.

ÖZGEÇMİŞ

Hüsnü Anıl ÇOBAN, 21.06.1978 tarihinde Kastamonu’ nun Taşköprü İlçesi’ nde doğdu. İlk ve ortaöğrenimini Kastamonu’ da tamamladı. 1996-2000 yılları arasında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Samsun Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümünde lisans eğitimini tamamladı. 2001-2005 yılları arasında Milli Eğitim Bakanlığına bağlı Bursa Gemlik Abdullah Fehmi İlköğretim Okulunda, 2005’ te Van Başkale Albayrak İlköğretim Okulunda, 2006-2009 yılları arasında Trabzon Yomra Özdil Çok Programlı Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yaptı. Bu arada, 2005-2008 yılları arasında KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2008 yılında KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalında doktora eğitimine başladı. 2009 yılından itibaren de KTÜ Fen Fakültesi Matematik Bölümünde öğretim görevlisi olarak görev yapmaktadır. Yabancı dili İngilizce’ dir.