KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T-NORMLARDAN ELDE EDİLEN T-KISMEN SIRA

DOKTORA TEZİ

Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

NİSAN 2012
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T-NORMLARDAN ELDE EDİLEN T-KISMEN SIRA

Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 22.03.2012
Tezin Savunma Tarihi : 13.04.2012

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Funda KARAÇAL

Trabzon 2012

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU Tarafından Hazırlanan

T-NORMLARDAN ELDE EDİLEN T-KISMEN SIRA

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 27/03/2012 gün ve 1450 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

DOKTORA TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. Funda KARAÇAL**	**…………………………**
Üye	**: Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV**	**…………………………**
Üye	**: Prof. Dr. Ekrem YANMAZ**	**…………………………**
Üye	**: Prof. Dr. Ali PANCAR**	**…………………………**
Üye	**: Doç. Dr. Sultan YAMAK**	**…………………………**

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, üçgensel normlardan elde edilen T-kısmen sıralama incelenmiştir.

Konunun seçilmesinde ve çalışma süresince özendirici, yapıcı tutumu ile destek olan ayrıca çalışmanın planlanmasında ve değerlendirilmesinde yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Funda KARAÇAL'a en içten duygularla teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tez önerisi ve raporlar aşamasında tavsiye ve eleştirileriyle tezin şekillenmesinde emeği geçen sayın hocam Prof. Dr. Djavvat KHADJIEV ve Prof. Dr. Ekrem YANMAZ'a şükranlarımı sunarım.

Ayrıca yetişmemde emeği geçen KTÜ Matematik bölümünün tüm değerli hocalarına, çalışma süresi boyunca moral desteklerinden dolayı Rize Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi ve KTÜ Fen Fakültesi'ndeki tüm asistan arkadaşlarıma, çalışmalarım sırasında beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK' a, desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen sevgili eşim Yavuz KESİCİOĞLU' na ve aileme çok teşekkür ederim.

Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU
Trabzon 2012

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum "*T-NORMLARDAN ELDE EDİLEN T-KISMEN SIRA*" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım *Prof. Dr. Funda KARAÇAL*'ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 13/04/2012

Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

T-NORMLARDAN ELDE EDİLEN T-KISMEN SIRA

Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Funda KARAÇAL
2012, 81 Sayfa

Bu tezin amacı bir L tam kafesi üzerindeki T t-normunun tüm idempotent elemanlarının oluşturduğu H_T alt kümesinin t-normlardan elde edilen sıralamaya göre tam kafes olması için t-norm üzerindeki şartları belirlemek ve atomların supremumu şeklinde yazılabilen, L tam kafesinin tüm elemanlarının $\boldsymbol{A}$ kümesini, t-normlardan elde edilen sıralamaya göre tam kafes yapan şartları incelemektir.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1' de, çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Bölüm 2 ise üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda öncelikle bir sınırlı L kafesi üzerindeki t-norm yardımıyla, L üzerinde $\preccurlyeq_T$ ile gösterilen bir T-kısmen sıralama tanımlanmış ve $\leq$ ile $\preccurlyeq_T$ sıralamaları arasındaki ilişki araştırılmıştır. İkinci kısımda, L bir zincir (veya kafes) olsa bile L' nin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bir zincir (veya kafes) olması gerekmediği örneklerle gösterilmiştir. L' yi $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bir kafes yapan bir şart belirlenmiştir. Son kısımda, T' nin tüm idempotent elemanlarının H_T kümesinin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bir tam kafes olması için t-norm üzerindeki bazı şartlar belirlenmiştir. Böylece, bir integral, komütatif, rezidual ℓ- monoid $M = (L, \odot, \leq)$ bölünebilir ise $\odot$ ikili işlemine göre tüm idempotent elemanların H_T alt kümesinin bir Heyting cebiri olduğu ve H_T' deki gerektirme ile $\odot$ ikili işlemine dayanan gerektirmenin aynı olduğu ispatlanmıştır. Bu sonuç ile Drossos'un çalışmasındaki teoremin ispatı için cebirsel güçlü De Morgan kuralının gerekmediği elde edilmiştir. Ayrıca, atomların supremumu şeklinde yazılabilen L' nin tüm elemanlarının $\boldsymbol{A}$ kümesini $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre tam kafes yapan bazı şartlar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: T-Norm, Sınırlı kafes, $\vee$- dağılmalılık, İdempotent eleman, Atom

PhD. Thesis

SUMMARY

A T-PARTIAL ORDER OBTAINED FROM T-NORMS

Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Funda KARAÇAL
2012, 81 Pages

The main aim of the present thesis is to determine the conditions on t-norm T for the subset H_T consisting of all idempotent elements of t-norm T on a complete lattice L and to investigate some conditions for the set $\boldsymbol{A}$ of all elements of a complete lattice L which are in the form of the supremum of any family of atoms to be a complete lattice with respect to the order obtained from t-norms.

This study consists of two main chapters. In Chapter 1, some definitions and theorems which are crucial for our study are stated. Chapter 2 contains three parts. In the first part, firstly, the notion T-partial order, denoted by $\preccurlyeq_T$, on a bounded lattice L by means of a t-norm on L is given. Also, in this part, some connections between the orders $\preccurlyeq_T$ and $\leq$ are investigated. In the second part, it is shown that L need not be a chain (or lattice) with respect to $\preccurlyeq_T$ even if L is a chain (or lattice). Also, it is determined a necessary condition making L a lattice with respect to $\preccurlyeq_T$. In the last part, some conditions are determined on t-norms for the set H_T of all idempotent elements of t-norm T to be a complete lattice with respect to the order $\preccurlyeq_T$. Also, it is proved that for an integral, commutative, residuated ℓ- monoid $M = (L, \odot, \leq)$, if M is divisible, then the subset H_T of all idempotent elements with respect to $\odot$ forms a Heyting algebra, and the implication in H_T coincides with the implication based on $\odot$. So, it is obtained from this conclusion that the algebraic strong De Morgan's law is not necessary for the proof of the Teorem in the study of Drossos. Also, it is examined that some conditions making the subset $\boldsymbol{A}$ of all elements of L which are in the form of the suremum of any family of atoms a complete lattice.

Key Words: T-Norm, Bounded lattice, $\vee$- distributive, Idempotent element, Atom

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$\cap$	: Arakesit işlemi
$\cup$	: Birleşim işlemi
$\subseteq$	: Kümeler arasında alt küme bağıntısı
$A \cap B$	: Kümelerin arakesiti
$A \cup B$	: Kümelerin birleşimi
$A \setminus B$	: Kümelerin farkı
A'	: Kümenin tümleyeni
$A \times B$	: Kümelerin kartezyen çarpımı
$\emptyset$	: Boş küme
$\bar{X}$	: X' in üst sınırlarının kümesi
$\underline{X}$	: X' in alt sınırlarının kümesi
$\wp(X)$	: X' in güç kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$[a, b]$	: Kapalı aralık
(a, b)	: Açık aralık
$[a, b), (a, b]$	: Yarı-açık aralık
Y^X	: X' den Y' e tüm fonksiyonların kümesi
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad (\in X^{\mathbb{N}})$	: X' deki elemanların dizisi
$\bigwedge, \wedge$	: Kafeste infimum işlemi
$\bigvee, \vee$	: Kafeste supremum işlemi
t-norm	: Üçgensel norm
t-conorm	: Üçgensel konorm
$T_{i=1}^{n} x_i, T_{i=1}^{\infty} x_i, T_{i\in I} x_i$	: Bir t-norm T' nin genişlemeleri
$S_{i=1}^{n} x_i, S_{i=1}^{\infty} x_i, S_{i\in I} x_i$	: Bir t-konorm S' nin genişlemeleri
$Z(T)$	: T t-normunun sıfır bölenlerinin kümesi
H_T	: T t-normunun idempotent elemanlarının kümesi

$T \downarrow L$	: T t-normunun L kafesine kısıtlanışı
T_M	: Minimum t-norm
T_P	: Çarpım t-norm
T_L	: Lukasiewicz t-norm
T_D	: [0,1] üzerindeki drastik çarpım
T_W	: Sınırlı bir kafes üzerindeki en küçük t-norm
S_M	: Maksimum t-konorm
S_P	: İstatistiksel toplam
S_L	: Lukasiewicz t-konorm (sınırlı toplam)
S_D	: Drastik toplam
T^{nM}	: Nilpotent minimum
$T_\wedge$	: İnfimum t-norm
$\lim_{x \searrow x_0} T(x,x)$	: T t-normunun (x_0, x_0) noktasındaki sağ taraflı limiti
$\rightarrow_*$	: $*$ yarı-grup işlemine göre rezidü işlemi
$\rightarrow_T$	: Sol sürekli t-norm T' ye göre rezidü işlemi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Üçgensel normların tarihi Menger' in 'Statistical Metrics' adlı çalışması ile başlar [55]. Bu çalışmada amaç, sayılardan ziyade olasılık dağılımının uzayın elemanları arasındaki mesafeyi modellemek için kullanılan metrik uzaylarını çalışmaktı. Üçgensel normlar klasik üçgen eşitsizliğinin genelleştirilmesi sırasında daha genel bir yapı olarak ortaya çıktı. T-normlar için esas küme aksiyomları oldukça zayıftı.

Böylece, t-normların büyük rol aldığı alan, olasılıksal metrik uzaylar teorisiydi (1964' ten sonra istatiksel metrik uzay olarak adlandırılmıştır). Schweizer ve Sklar [66-70], günümüzde de kullanılan t-normların aksiyomlarını vererek alanın hızlı bir şekilde gelişmesini sağlayan istatistiksel metrik uzaylarını ([71]' de verilen) tekrar tanımlamışlardır. Birçoğu [70]' de özetlenen t-normlarla ilgili pek çok sonuç bu gelişme sayesinde elde edilmiştir.

Matematiksel olarak, (sürekli) t-normlar teorisi (özel) fonksiyonel eşitlik teorisi ve (özel topolojik) yarı-gruplar teorisi olmak üzere oldukça bağımsız iki kökene sahiptir.

Fonksiyonel eşitliklerle ilgili olan t-normlar birleşmelilik eşitliğiyle yakından ilişkilidir. Bu konudaki ilk kaynak Abel [1] olarak görülür, bu yöndeki diğer sonuçlar [3,8,9,32]' de elde edilmiştir. Özellikle Aczel'in çalışması [2,4], t-normların gelişimi üzerinde halen büyük bir etkiye sahiptir. Önceki sonuçlara istinaden temel sonuç [52]' deki toplamsal üreteçler yardımıyla sürekli Arşimedyan t-normların tamamen sınıflandırılmasıydı (kesin t-normlar için bkz [68]).

Araştırmanın diğer bir yönü ise bazı doğal fonksiyonel eşitliklerin çözümü olarak t-normların parametrelenmiş bir çok ailesinin belirlenmesiydi. Muhtemelen, bu bağlamdaki en ünlü sonuç [24]' de verilmiştir ve bu sonuca göre Frank t-normlar ve t-konormlar ailesinin Frank fonksiyonel eşitliği olarak adlandırılan eşitlikler için tek çözümdür.

Kompakt, indirgenemez, bağlantılı, topolojik yarı-grupların bir sınıfı [23]' de çalışılmıştır. Bu çalışmada, sınır noktaları (aynı zamanda sırasıyla yutan eleman ve sınır şart) yalnızca idempotent elemanlar olan ve nilpotent elemanı mevcut olmayan yarı-gruplar karakterize edilmiştir. Bu ise kesin t-normların tam gösteriminin elde edilmesini sağlamıştır. [58]' de ise sınır noktaları yutan eleman ve sınır şartı olarak rol alan böyle tüm yarı-gruplar karakterize edilmiştir, (bkz. [61]). Bu ise tüm sürekli t-normlar için bir gösterimin elde edilmesini sağlamıştır [52].

(İzomorf) dönüşümler (yukarıda bahsedilen üreteçlerle yakından ilişkili) ve sırasal toplamlar (Clifford [11]' ün çalışmasına dayanır ve [12,45]' de belirtilir) gibi yarı-gruplar teorisinden pek çok inşa etme yöntemi, verilen bir takım ön örnekler yardımıyla tüm t-normlar ailesini inşa etmek için başarılı bir şekilde uygulanmıştır [69]. Özetle, yalnızca üç t-norm, yani minimum T_M, çarpım T_P ve Lukasiewicz t-norm T_L kullanılarak izomorf dönüşümler ve sırasal toplamlar vasıtasıyla tüm sürekli t-normları inşa etmek mümkündür [52].

En baştan beri T_D drastik çarpım gibi sürekli olmayan t-normlar ele alınmıştır [67]. Hatta [52]' de bu t-norm için bir toplamsal üreteç dahi verilmiştir. Buna rağmen, sürekli olmayan t-normların genel sınıflaması hala bilinmemektedir.

Zadeh, çığır açan çalışmasında [78] fuzzy kümeler teorisini, mantıksal tabanı iki değerli Boole mantığı olan klasik Kantor küme teorisinin bir genellemesi olarak tanıtmıştır. [78]' de fuzzy kümelerin kesişimini, birleşimini ve komplementini modellemek için sırasıyla minimum T_M, maksimum S_M ve standart negasyon N_S önerildi. Daha bu ilk çalışmada çarpım T_P, olasılıksal toplam S_P ve Lukasiewicz t-konorm S_L, fuzzy kümelerinin sırasıyla kesişimi ve birleşimi için uygun karşılıklar olarak ifade edilmişti.

Fuzzy kümelerin kesişimini ve birleşimini modelleyen genel t-norm ve t-konormların kullanımı, bağımsız en az iki temele sahipmiş gibi görünür. Bir tarafta, 70'lerde Trillas tarafından düzenlenen seminerler dizisi vardı. Diğer tarafta da, First International Symposium on Policy Analysis and Information Systems (Durham, NC, 1979) sempozyumunda ve First International Seminar on Fuzzy Set Theory (Linz, Avusturya, 1979) seminerinde Höhle' nin önerileri vardı. Bunun sebebi sınır şartlarının yanı sıra komütatiflik, birleşmelilik ve monotonluk aksiyomlarının genel olarak mantıksal ve hatta Kantor kesişim ve birleşiminin anlamlı genişlemesinin zorunlu özellikleri olarak ele alınmasıydı.

Toplamsal olmayan ölçümlere göre fuzzy kümelerin bu anlamdaki birleşimi olan t-normun ve t-konormların en erken izleri M. Sugeno'nun doktora tezinde [72] bulunabilir. İlk kez fuzzy kümelerin (T_M ve S_M' e dayanan) birleşim teorisi kavramı [59]' da ve S. Gottwald [26-28]'de verilmiştir. Fuzzy kümeleri üzerindeki işlemler için genel t-norm ve t-konormları kullanan ilk çalışmalar Anthony ve Sherwood [6], Alsina v.d [5], Dubois [21] ve Klement [46,47] (bkz. Dubois ve Prade [22]) olarak sayılabilir. Komplement fuzzy kümelerin modellemeleri olarak güçlü negasyonların tam sınıflandırılması [73]' de bulunabilir.

Üçgensel normlar bilgi bilimlerinin bir çok dalında önemli rol oynamaktadır [48, 51, 54, 56]. Fuzzy küme teorisi ile sıra teorisi arasındaki yakın ilişki sebebiyle (bkz. [25]), birçok kişi sınırlı kısmen sıralı kümeler üzerindeki t-normlarla çalışmışlardır [16, 17, 18, 20, 34, 60, 63]. Pek çok kişi de sınırlı kafesler üzerindeki t-normlar üzerinde çalışmışlardır [14, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 64, 65].

Ma ve Wu [53] bir L tam kafesi üzerindeki t-norm kavramını tanımlayarak, L üzerindeki gerektirmeler ile t-normlar arasındaki bağıntıyı araştırmışlar ve tüm sol sürekli t-normların kümesi ile L üzerindeki tüm sağ sürekli gerektirmelerin kümesi arasında birebir bir eşlemenin mevcut olduğunu göstermişlerdir.

De Baets ve Mesiar [14]' deki çalışmalarında sınırlı kısmen sıralı kümelerin genel yapıları üzerinde (ağırlıklı olarak sonlu zincirler, çarpım kafesleri ve reel birim kare üzerinde) çalışmışlardır. Bir t-normun idempotent elemanlarının sıfır bölenlerinin ve nilpotent elemanlarının kümesini tanımlayarak birbirleri ile olan ilişkilerini araştırmışlardır. Özellikle bir çarpım kafesi üzerinde tanımlanan ve t-normların direkt çarpımı olan t-normları karakterize etmişlerdir.

Wang ve Yu [74]' deki çalışmalarında bir tam Brouwerian L kafesi üzerindeki pseudo t-norm kavramını ele almışlar ve tüm sonsuz $\vee$-dağılmalı pseudo t-normların kümesi ile L üzerindeki tüm sonsuz $\wedge$- dağılmalı gerektirmeler arasındaki bağıntıyı detaylı bir şekilde incelemişlerdir.

Wang [75]' deki çalışmasında bir tam Brouwerian kafesi üzerindeki tüm sonsuz $\wedge$-dağılmalı gerektirmelerin kümesinin tüm sonsuz $\vee$-dağılmalı pseudo t-normların kümesinin, tüm gerektirmelerin kümesinin ve tüm pseudo t-normların kümesinin tam kafes olduğunu göstermiştir. Ayrıca yine bu çalışmasında bir ikili işlemden daha güçlü olan en küçük pseudo t-normu (en küçük sonsuz $\vee$-dağılmalı pseudo t-normu) ve bir ikili işlemden daha güçlü olan en büyük gerektirmeyi (en büyük sonsuz $\wedge$- dağılmalı gerektirmeyi) hesaplamak için formüller elde etmiştir. Ayrıca Wang ve Fang [76]' da çarpım kafesleri üzerindeki t-norm ve pseudo t-normların direkt parçalanışlarını ele almışlar ve bir çarpım kafesi üzerindeki gerektirme operatörünün, iki gerektirme operatörünün bir direkt çarpımı şeklinde olması için gerek ve yeter şartları belirlemişlerdir.

Zhang [79]' daki çalışmasında kısmen sıralı kümeler üzerinde üçgensel normları inşa etmek için çeşitli metotlar vermiştir. Bu metotlar kısaca, verilen sınırlı bir kısmen sıralı kümenin kapalı aralıklarının kısmen sıralı kümesi üzerindeki üçgensel normları inşa edilmesi ve kısmen sıralı kümeler arasındaki fonksiyon uzayları üzerindeki üçgensel normların inşa edilmesidir. Ayrıca, başka bir metot ise monoton fonksiyonlar ve pseudo-tersleri yardımıyla kapalı aralıklar üzerindeki üçgensel normların inşasının kategorik analizine dayanan sınırlı kısmen sıralı kümeler arasındaki Galois bağıntısı yardımıyla üçgensel normların inşa edilmesidir.

Jenei ve De Baets [35]' deki çalışmalarında direkt çarpım olmayan çarpım kafesleri üzerindeki t-normları (diğer bir deyişle çarpım kafesleri üzerindeki komütatif kısmen sıralı integral monoidleri) inşa etmek için bir metot vermişlerdir. Bu metot ise böyle t-normların geniş bir sınıfının üretilmesine olanak sağlamıştır. Böylece Jenei ve De Baets, [14]' deki çalışmada bırakılmış olan açık problem için bir çözüm elde etmişlerdir.

Susanne v.d [65]' deki çalışmasında sınırlı kafesler üzerindeki üçgensel t-normların en büyük ve en küçük mümkün genişlemelerini araştırmıştır. Ayrıca Susanne [64]' deki çalışmasında ise zincir olması veya kısmen sıralı kümelerin sırasal toplamı olması gerekmeyen bazı sınırlı kafesler üzerindeki t-normların sırasal toplamları üzerinde durmuş ve bu çalışmasında sırasal toplam operatörünün bazı sınırlı kafesler üzerinde yine bir t-norm olarak kaldığı gerekli ve yeterli şartları vermiştir.

Karaçal ve Khadjiev [39]' daki çalışmalarında tam kafesler üzerindeki t-normların iç direkt çarpım tanımını vermişler ve tam kafesler üzerindeki t-normların iç ve dış direkt çarpımları arasındaki bağıntıyı araştırmışlardır. Bu bağıntıyı kullanarak, Jenei ve De Baets' in [35]' deki çalışmalarında yer alan açık probleme cevap vermişlerdir. Karaçal [41]' deki çalışmasında güçlü negasyonların direkt çarpımları üzerinde çalışmış ve güçlü negasyonların direkt çarpımları olan, çarpım kafesleri üzerindeki güçlü negasyonları, karakterize etmiştir. Ayrıca Karaçal bu çalışmasında çarpım kafesi üzerinde tanımlanan ve t-normların direkt çarpımı olmayan bir t-normu üretmek için bir metot vermiştir. Bu metot böyle t-normların üretilmesinde oldukça kullanışlı olup [35]' de verilen 'direkt çarpım şeklinde olmayan ve çarpım kafesleri üzerinde tanımlanan t-normları belirlemek için başka yöntemler mevcut mudur?' açık problemi için bir cevap niteliğindedir.

Karaçal ve Sağıroğlu [42]' de T-asal eleman, T-asal radikal eleman ve T-yarı-asal eleman kavramlarını ele almışlar ve özellikleri üzerinde çalışmışlardır. T-asal elemanlar ve pseudo-komplementler yardımıyla verilen sonsuz $\vee$-dağılmalı t-normlardan yeni sonsuz $\vee$-dağılmalı t-normlar üretme yöntemleri araştırmışlardır.

De Baets ve Mesiar [14]’ de sınırlı kısmen sıralı kümeler üzerindeki t-normlar için kısaltma kuralının bir genellemesini ve pseudo-Arşimedyanlığını vermişler ve sınırlı kısmen sıralı bir küme veya sınırlı bir kafes üzerindeki pseudo-Arşimedyan ve kısaltma özelliğine sahip olmayan bir t-normun nilpotent elemanlarının mevcut olup olmadığı problemini bir açık problem olarak bırakmışlar ve Karaçal [40]’ daki çalışmasında bu problemin bir çözümü olarak bir kafes üzerinde nilpotent elemana sahip olan pseudo-Arşimedyan ve kısaltmalı olmayan bir t-norm örneği vermiştir.

Fuzzy teori üzerine 24. Linz seminerinde [50] üçgensel normlar ve üçgensel normlarla bağlantılı operatörler üzerine pek çok açık problem tartışılmıştır. Bu problemlerden biri de ‘$(1,1)$ noktasında sürekli olan sıfır bölenli şartlı kısaltma özelliğini sağlayan bir t-normun sürekli olması gerekir mi?’ şeklindedir. Karaçal [38]’ de (1,1) noktasında sürekli, şartlı kısaltma özelliğini sağlayan ve sıfır bölenli olan fakat sürekli olmayan bir t-norm örneği vererek, sıfır bölenli şartlı kısaltmalı Arşimedyan bir t-normun sürekliliğinin, (1,1) noktasındaki sürekliliğine denk olmadığını göstermiştir.

Khadjiev ve Karaçal [36]’ daki çalışmasında küçük uzunluklu tüm $\vee$- dağılmalı t-normları belirleme problemi üzerine çalışmışlardır. Ayrıca, bir L kafesi üzerindeki sonlu $\vee$-dağılmalı t-normların direkt parçalanışları ile L’ nin en büyük elemanının ve L’ deki comaximal ailelerin direkt parçalanışları arasındaki bağlantıyı araştırmışlardır. Ayrıca, [14]’ de ‘$([0,1]^2, \leq)$ üzerinde sürekli olan fakat $(([0,1], \leq)$ üzerinde sürekli olan) t-normların bir direkt çarpımı olmayan t-norm mevcut mudur?’ açık problemi için, Jenei ve De Baets [35]’ deki çalışmalarında böyle bir t-normun mevcut olduğunu göstermişlerdir.

Karaçal [37]’ deki çalışmasında çarpım kafesleri üzerindeki gerektirme operatörleri ve pseudo t-normların direkt parçalanışları için gerek ve yeter şartları belirlemiştir. Çarpım kafesleri üzerindeki gerektirme operatörlerinin, güçlü negasyonların ve t-konormların direkt çarpımı üzerinde çalışmış ve S-gerektirmelerin ve R-gerektirmelerin direkt parçalanabilirliğini araştırmıştır.

H. Mitsch [57]’ de bir $(S, .)$ yarı grubu üzerinde, S’ deki çarpım işlemi yardımıyla ‘doğal kısmen sıralama’ olarak adlandırılan bir sıralama tanımlamış ve bir X kümesi üzerindeki tüm dönüşümlerin $(T_X, \circ)$ düzgün yarı-grubu üzerindeki doğal kısmen sıralamadan üretilen benzer bağıntıları araştırmıştır. Burada ise, t-normlar aracılığıyla bir kısmen sıralama elde edilerek bu sıralamanın özellikleri araştırılmıştır.

Bu tezin amacı bir L tam kafesi üzerindeki t-norm T’ nin tüm idempotent elemanlarının oluşturduğu H_T alt kümesinin t-normlardan elde edilen sıralamaya göre tam kafes olması için t-norm üzerindeki kısıtlamaları belirlemek ve atomların supremumu şeklinde yazılabilen, L tam kafesinin tüm elemanlarının $\boldsymbol{A}$ kümesini, t-normlardan elde edilen sıralamaya göre tam kafes yapan şartları incelemektir.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1' de, çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Bölüm 2 üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda öncelikle sınırlı bir L kafesi üzerindeki t-norm yardımıyla L üzerinde $\preccurlyeq_T$ ile gösterilen bir T-kısmen sıralama tanımlanmış ve $\leq$ ile $\preccurlyeq_T$ sıralamaları arasındaki ilişki araştırılmıştır. İkinci kısımda, Uyarı 2.2' de verilen örnek ile, L bir zincir (veya kafes) olsa bile L' nin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bir zincir (veya kafes) olması gerekmediği gösterilmiştir. Özel olarak $T = T_W$ olarak alındığında, L' nin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bir kafes olduğu Önerme 2.5' de ispatlanmış buna karşın T_W' nın L' yi $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kafes yapan tek t-norm olmadığı Örnek 2.3' de gösterilmiştir. Üçüncü kısımda, Önerme 2.7' de, $[0,1]$ üzerindeki T t-normunun tüm idempotent elemanlarının kümesi H_T' nin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bir zincir olduğu ispatlanmış ve genel olarak L bir zincir ise H_T' nin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bir zincir olduğu ifade edilmiştir. Buna karşın, L' nin zincir olma şartının kaldırılması halinde $(H_T, \preccurlyeq_T)$' nin bir zincir olması gerekmediği Örnek 2.4' de gösterilmiştir. L bir tam kafes ve T, L üzerinde sonsuz $\vee$- dağılmalı bir t-norm olduğunda $(H_T, \preccurlyeq_T)$' in bir tam kafes olduğu Teorem 2.1' de ispatlanmıştır. Önerme 2.11' de bir integral, komütatif, rezidual ℓ-monoid $M = (L, \leq, \odot)$ bölünebilir ise $\odot$ ikili işlemine göre tüm idempotent elemanların H_T alt kümesinin bir Heyting cebiri olduğu ve H_T' deki gerektirme ile $\odot$ ikili işlemine dayanan gerektirmenin çakıştığı ispatlanmıştır. Böylece, bu sonuç ile Drossos'un [19] (Höhle [33], Sonuç 2.7) çalışmasındaki teoremin ispatı için cebirsel güçlü De Morgan kuralının gerekmediği elde edilmiştir. Ayrıca, Teorem 2.3' de, L bir tam kafes ve T, L üzerinde sıfır bölensiz sonsuz $\vee$- dağılmalı bir t-norm ise elemanları atomların bir ailesinin supremumu şeklinde olan bir $\boldsymbol{A}$ kümesinin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bir tam kafes olduğu ispatlanmıştır.

1.2. Kısmen Sıralı Kümeler ve Kafesler

1.2.1. Kısmen Sıralı Kümeler

Tanım 1.1. P bir küme ve $\leq$, P üzerinde bir bağıntı olsun. Her $x, y, z \in P$ için

P1. $(x, x) \in\leq$ (Yansıma)

P2. $(x, y) \in\leq$ ve $(y, x) \in\leq$ ise $x = y$ (Ters Simetri)

P3. $(x, y) \in\leq$ ve $(y, z) \in\leq$ ise $(x, z) \in\leq$ (Geçişme)

koşulları sağlanıyorsa, $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir sıralama (veya kısmen sıralama) denir. Eğer $(x, y) \in\leq$ ise bu durum $x \leq y$ şeklinde gösterilir. Üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı mevcut olan P kümesine sıralı küme (veya kısmen sıralı küme) denir ve $(P, \leq)$ ikilisi ile gösterilir.

$x \leq y$ ise bu durum 'y, x' i içerir' olarak ifade edilir. Eğer $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise $x < y$ yazılır ve 'x, y' de öz olarak içerilir' olarak ifade edilir. Ayrıca '$x \leq y$ yanlış' ise $x \nleq y$ yazılır. $x \nleq y$ ve $y \nleq x$ ise 'x ve y elemanları kıyaslanamaz' denir ve $x \parallel y$ ile gösterilir.

Örnek 1.1. X bir küme ise ve $(\wp(X), \subseteq)$ kısmen sıralı bir kümedir.

Örnek 1.2. $(\mathbb{N}, |)$ kısmen sıralı bir kümedir.

Uyarı 1.1. $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun

(i) Bir $a \in P$ elemanı her $x \in P$ için $a \leq x$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa bu elemanın tek olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Böyle bir eleman (eğer mevcutsa) 0 ile gösterilir ve P' nin en küçük elemanı olarak adlandırılır.

(ii) Bir $b \in P$ elemanı her $x \in P$ için $x \leq b$ koşulunu sağlayacak şekilde mevcutsa 1 ile gösterilir ve P' nin en büyük elemanı olarak adlandırılır. Böyle bir eleman mevcutsa tek olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Eğer 0 ve 1 mevcutsa, 0 ve 1' e evrensel sınırlar denir. Çünkü her $x \in P$ için $0 \leq x \leq 1$' dır.

Tanım 1.2. $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in P$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise $(P, \leq)$ kısmen sıralı kümesine zincir veya tam sıralı küme denir.

Örnek 1.3. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi doğal sıralamaya göre bir zincirdir.

Teorem 1.1. [7] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $S \subseteq P$ alt kümesi ise, $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir kümedir. Özel olarak, P bir zincir ise S de zincirdir.

Tanım 1.3. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. $\theta: P \longrightarrow Q$ dönüşümüne sıra korur dönüşüm veya izoton denir:$\Leftrightarrow$ Her $x, y \in P$ için $x \leq_1 y$ ise $\theta(x) \leq_2 \theta(y)$' dir.

$(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ kısmen sıralı kümelerine izomorftur denir:$\Leftrightarrow$ Birebir, örten bir $\theta: P \longrightarrow Q$ dönüşümü her $x, y \in P$ için

$\theta(x) \leq_2 \theta(y) \Leftrightarrow x \leq_1 y$

sağlayacak şekilde mevcuttur. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ kısmen sıralı kümeleri izomorf ise bu durum $P \cong Q$ ile gösterilir.

$(P, \leq_1)$ kısmen sıralı kümesinden kendisine tanımlanan bir izomorfiye bir otomorfi denir.

Tanım 1.4. ρ, P üzerinde bir bağıntı olsun.

$\rho^{-1} = \{(a, b) | (b, a) \in \rho\}$

olarak tanımlanan ρ^{-1} bağıntısına ρ bağıntısının tersi denir.

Teorem 1.2. (Duallik Prensibi) [7] Bir kısmen sıralamanın tersi de yine bir kısmen sıralamadır.

Tanım 1.5. $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. Aynı elemanlar üzerinde kısmen sıralamanın tersi ile tanımlanan $(Q, \geq)$ kümesi de yine bir kısmen sıralı küme olup bu kısmen sıralı kümeye $(P, \leq)$ kısmen sıralı kümesinin duali denir.

Tanım 1.6. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. $x, y \in P$ için,

$x \leq_1 y$ ise $\theta(x) \geq_2 \theta(y)$ ve

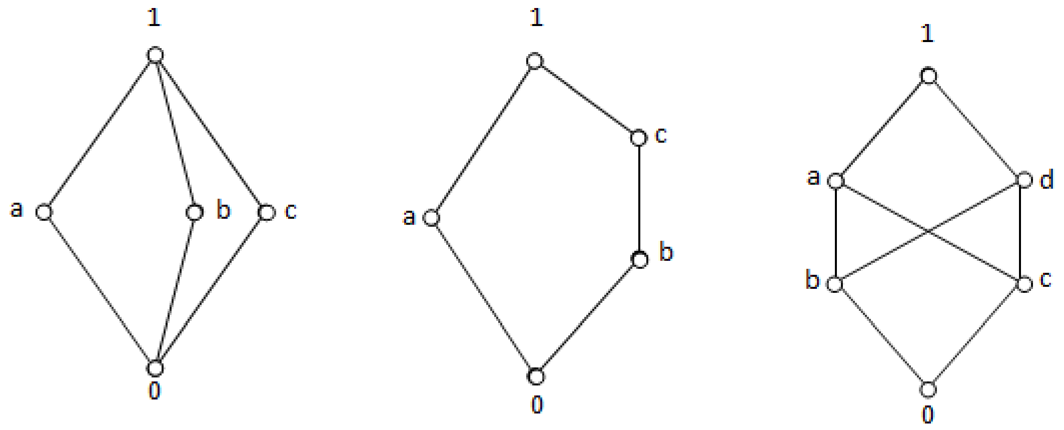
$\theta(x) \leq_2 \theta(y)$ ise $x \geq_1 y$

gerektirmelerini sağlayan $\theta: P \longrightarrow Q$ dönüşümüne ters sıra korur dönüşüm veya antiton denir. θ antiton, 1-1 ve örten bir dönüşüm ise θ dönüşümüne dual izomorfi denir.

Tanım 1.7. $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. $a, b \in P$ için 'a örter b' denir:$\Leftrightarrow$ $a > b$ olup $a > x > b$ olacak şekilde bir $x \in P$ elemanı mevcut değildir.

Kısmen sıralı bir P kümesinin $n(P)$ mertebesi ile P' nin elemanlarının (kardinal) sayısı kastedilir. Bu sayı sonlu ise P' ye sonlu kısmen sıralı bir küme denir. Örtme bağıntısı kullanılarak keyfi bir sonlu kısmen sıralı kümenin grafiksel gösterimi şu şekilde elde edilir: P' nin her bir elemanını göstermek için küçük bir daire çizilir. $a > b$ olduğunda a, b' den daha yukarı yazılır ve a' dan b' ye düz bir çizgi çizilir. Sonuçta elde edilen şekle

P’ nin bir Hasse diyagramı denir. Aşağıda bazı kısmen sıralı kümelerin hasse diyagram örneklerine yer verilmiştir.



M_5 N_5 P_6

Şekil 1.1. Diyagram örnekleri

Tanım 1.8. $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun.

(i) $a \in X$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $a \leq x$ ise bu a elemanına X kümesinin en küçük elemanıdır denir ve EkeX ile gösterilir.

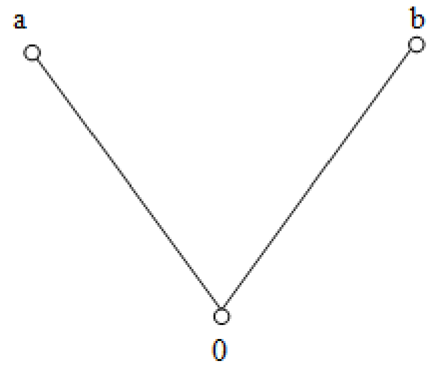
X kümesinin en büyük elemanı dual olarak tanımlanır ve EbeX ile gösterilir.

(ii) $a \in X$ olsun. Eğer $x < a$ olacak şekilde $x \in X$ mevcut değil ise bu a elemanına X kümesinin bir minimal elemanı denir.

X kümesinde maksimal eleman, dual şekilde tanımlanır.

En küçük eleman bir minimal eleman ve en büyük eleman da bir maksimal elemandır. Ancak tersinin doğru olması gerekmez. Örneğin;

$P = \{0, a, b\}$ üzerinde $\leq$ sıralaması aşağıdaki gibi tanımlansın.



Şekil 1.2. $(P, \leq)$

Bu sıralamaya göre a elemanı P kümesinin maksimal elemanıdır ancak P kümesinin en büyük elemanı değildir.

Teorem 1.3. [7] $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $\emptyset \neq X \subseteq P$ sonlu alt küme olsun. Bu takdirde X minimal ve maksimal elemanlara sahiptir.

Teorem 1.4. [7] Zincirlerde minimal (maksimal) ve en küçük (en büyük) eleman kavramları denktir. Böylece keyfi sonlu bir zincir en küçük ve en büyük elemanlara sahiptir.

Teorem 1.5. [7] n elemanlı her sonlu zincir n ordinal sayısına ($\{1,2,\dots,n\}$ tamsayılarının zincirine) izomorftur.

Tanım 1.9. $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun.

(i) $a \in P$ ve her $x \in X$ için $x \leq a$ ise, bu a elemanına X kümesinin bir üst sınırı denir ve X kümesinin üst sınırlarının kümesi $\overline{X}$ ile gösterilir. Bu durumda

$$\overline{X} = \{a \in P | \forall x \in X \text{ için } x \leq a\}$$

dır.

(ii) $b \in P$ ve her $x \in X$ için $b \leq x$ ise, bu b elemanına X kümesinin bir alt sınırı denir ve X kümesinin alt sınırlarının kümesi $\underline{X}$ ile gösterilir. Bu takdirde

$$\underline{X} = \{b \in P | \forall x \in X \text{ için } b \leq x\}$$

dir.

Tanım 1.10. Bir sonlu n zincirinin uzunluğu $n-1$ olarak tanımlanır. Daha genel olarak, bir P kısmen sıralı kümesinin $\ell(P)$ uzunluğu P' deki sonlu zincirlerin uzunluğunun en küçük üst sınırı olarak tanımlanır. Eğer $\ell(P)$ sonlu ise P kısmen sıralı kümesine sonlu uzunlukludur denir.

Tanım 1.11. $(P,\leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun. $\overline{X}$ kümesinin (eğer varsa) en küçük elemanına X kümesinin supremumu denir ve $supX$ ile gösterilir. Dual olarak, $\underline{X}$ kümesinin (eğer varsa) en büyük elemanına X kümesinin infimumu denir ve $infX$ ile gösterilir. Yani

$supX = Eke\overline{X}$ ve $infX = Ebe\underline{X}$

dir. $supX$ ve $infX$ (eğer mevcut ise) Tanım 1.1, P2 özelliği ile tektir.

1.2.2. Kafesler

Tanım 1.12. Kısmen sıralı $(P,\leq)$ kümesine kafes denir:$\Leftrightarrow$ Her $x, y \in P$ için $sup\{x,y\}$ ve $inf\{x,y\}$ mevcuttur.

P kafesinde $x, y \in P$ için $x \vee y := sup\{x,y\}$ ve $x \wedge y := inf\{x,y\}$ ile tanımlanır.

Eğer $(P,\leq)$ bir kafes ise, $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri P üzerinde ikili işlemlerdir. Dolayısıyla $(P,\vee,\wedge)$ bir cebirsel yapıdır.

Örnek 1.4. Şekil 1.1' de verilen diyagram örneklerinde M_5 ve N_5 kafes olup P_6 kafes değildir.

Örnek 1.5. $(\wp(X),\subseteq)$ kısmen sıralı kümesi bir kafestir. Bu kafeste $\forall A, B \in \wp(X)$ için $A \vee B = A \cup B$ ve $A \wedge B = A \cap B$' dir.

Tanım 1.13. Bir P kafesine sınırlı kafes denir:$\Leftrightarrow$ P, en küçük eleman 0 ve en büyük eleman 1' e sahiptir.

Örnek 1.6. Örnek 1.5' de verilen $(\wp(X),\subseteq,\vee,\wedge)$ kafesi sınırlı bir kafestir, bu kafeste en büyük eleman $1 = X$ ve en küçük eleman $0 = \emptyset$' dir. $(\mathbb{N},\leq)$ zinciri sınırlı olmayan bir kafestir. Bu kafeste infimum ve supremum işlemleri $x, y \in \mathbb{N}$ için $x \vee y := Ebe\{x,y\}$ ve $x \wedge y := Eke\{x,y\}$ şeklindedir.

Tanım 1.14. Bir L kafesine tam kafes denir:$\Leftrightarrow$ Her $X \subseteq L$ alt kümesi için $supX$ ve $infX$ mevcuttur.

Tanım 1.14' de $X = L$ alındığında boştan farklı her tam kafesin en küçük elemanının ve en büyük elemanının mevcut olduğu görülür. Böylece her tam kafes sınırlıdır. Her sonlu veya sonlu uzunluklu kafes tam kafestir.

Keyfi bir zincir kafestir. Çünkü $x \wedge y$, x ve y elemanlarının küçük olanı, $x \vee y$ de x ve y elemanlarının büyük olanıdır. Her kafesin tam kafes olması gerekmez. Rasyonel sayılar kümesi tam kafes değildir ve $\mathbb{R}$- reel sayılar kümesi $-\infty$ ve $+\infty$ evrensel sınırlar olarak kabul edilmedikçe tam kafes değildir. Ayrıca, $([0,1], \leq)$ zinciri bir tam kafes olup $[0,1]$ aralığı literatürde birim aralık olarak adlandırılır.

Örnek 1.5' de verilen bir X kümesinin tüm alt kümelerinin kafesi $(\wp(X), \subseteq, \vee, \wedge)$ tam kafestir, burada $\emptyset$ en küçük eleman, X en büyük elemandır ve $S_\alpha \subseteq X$ alt kümelerinden oluşan keyfi A ailesi için $infA = \bigcap_A S_\alpha$ ve $supA = \bigcup_A S_\alpha$' dır.

Tanım 1.15. L bir kafes ve $X \subseteq L$ olsun. X alt kümesine L kafesinin alt kafesidir denir:$\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$ için $a \wedge b \in X$ ve $a \vee b \in X$' dir.

$(L, \leq)$ bir kafes ve $X \subseteq L$, L kafesinin alt kafesi ise $(X, \leq)$ bir kafestir. Bir kafeste boş küme ve tek elemanlı alt kümeler alt kafestir. Daha genel olarak, $(L, \leq)$ bir kafes ve $a, b \in L$ için $a \leq b$ ise

$$[a, b] \coloneqq \{x \in L | a \leq x \leq b\}$$

ile tanımlanan $[a, b]$ kapalı aralığı bir alt kafestir.

Bir L kafesinin aynı sıralama altında kafes olan bir alt kümesinin alt kafes olması gerekmez. Aşağıdaki kafes bu duruma bir örnek olarak verilebilir.

Örnek 1.7. Σ, bir G grubunun tüm alt gruplarının ailesi olsun. $H, K \in \Sigma$ için

$$H \leq K \Leftrightarrow H \subseteq K$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde $(\Sigma, \leq)$ bir tam kafestir, burada $H \wedge K = H \cap K$ (küme kesişimi) ve $H \vee K$, H ve K alt gruplarını içeren en küçük alt gruptur. Ancak $(\Sigma, \leq)$ kafesi $(\wp(G), \subseteq)$ kafesinin bir alt kafesi değildir.

Teorem 1.6. [7] L bir tam kafes ve $S \subseteq L$ olsun. Eğer

(i) $1 \in S$,

(ii) $T \subseteq S \Rightarrow infT \in S$

ise, S bir tam kafestir.

Tanım 1.16. $(P, \leq_1)$ ve $(Q, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. P ve Q kısmen sıralı kümelerinin

$$P \times Q = \{(x, y) | x \in P, y \in Q\}$$

şeklinde tanımlanan $P \times Q$ kartezyen çarpım kümesi

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2 \text{ ve } y_1 \leq_2 y_2 \quad x_1, x_2 \in P,\ y_1, y_2 \in Q$$

bağıntısı altında kısmen sıralı bir kümedir. Bu $(P \times Q, \leq)$ kısmen sıralı kümesine P ve Q kısmen sıralı kümelerinin direkt çarpım kümesi denir.

Teorem 1.7. [7] L ve M iki kafes olsun. $L \times M$ direkt çarpımı da yine bir kafestir. Burada $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L \times M$ için

$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$

$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2)$

dır.

Bir kafeste $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri önemli cebirsel özelliklere sahiptir.

Lemma 1.1. [7] P kısmen sıralı bir küme olsun. İnfimum ve supremum işlemleri (eğer mevcutsa) aşağıdaki özelliklere sahiptir:

L1. $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x,$ (İdempotent)

L2. $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x,$ (Komütatif)

L3. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$ (Birleşme)

L4. $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x.$ (Yoketme)

Üstelik, $x \leq y$ olması $x \wedge y = x$ ve $x \vee y = y$ şartlarının her birine denktir.

Lemma 1.2. [7] P, 0 en küçük elemanına sahip kısmen sıralı bir küme ise her $x \in P$ için

$0 \wedge x = 0$ ve $0 \vee x = x$

dir. Dual olarak P, 1 evrensel üst sınırına sahip ise her $x \in P$ için

$x \wedge 1 = x$ ve $x \vee 1 = 1$

dir.

Lemma 1.3. [7] Herhangi bir kafeste infimum ve supremum işlemleri sıra korurdur. Yani bir L kafesinde $x, y, z \in L$ için

$y \leq z$ ise $x \wedge y \leq x \wedge z$ ve $x \vee y \leq x \vee z,$

sağlanır.

Lemma 1.4. [7] L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için

$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ve $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

eşitsizlikleri sağlanır.

Lemma 1.5. [7] L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için modüler eşitsizlik olarak bilinen

$x \leq z$ ise $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 1.17. İdempotent, komütatif ve birleşme özelliklerine sahip ikili işlemli bir sisteme yarı kafes denir.

Sonuç 1.1. [7] P kısmen sıralı bir küme ve P' de alınan herhangi iki elemanın infimumu mevcut olsun. Bu takdirde, P, $\wedge$ ikili işlemine göre bir yarı kafestir. Böyle yarı kafeslere infimum-yarı kafesler denir. Dual olarak, P kısmen sıralı kümesinde alınan herhangi iki elemanın supremumu mevcut ise P, $\vee$ ikili işlemine göre bir yarı kafestir. Böyle yarı kafeslere supremum-yarı kafesler denir.

Sonuç 1.1' in tersine olarak, Lemma 1.6' yı verelim:

Lemma 1.6. [7] P bir küme, $\circ$ P üzerinde bir ikili işlem ve $(P,\circ)$ bir yarı kafes olsun. Bu takdirde $x \leq y \Leftrightarrow x \circ y = x$ olarak tanımlanan $\leq$ bağıntısı altında $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir kümedir, burada $x \circ y = inf\{x, y\}$ şeklinde tanımlıdır.

Teorem 1.8. [7] $(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir kafestir $\Leftrightarrow$ $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri L1-L4 özelliklerini sağlar.

Teorem 1.9. [7] Keyfi bir L kafesinde aşağıdaki ifadeler denktir:

L5′. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad \forall x, y, z \in L,$

L5″. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad \forall x, y, z \in L,$

Kolaylık açısından L5′ ve L5″ eşitliklerini L5 olarak göstereceğiz.

Tanım 1.18. Bir kafese dağılmalı kafes denir:$\Leftrightarrow$ L5′ özelliği (böylece L5″) sağlanır.

Lemma 1.7. [7] L bir zincir ise L dağılmalı bir kafestir.

Keyfi dağılmalı kafesin duali de dağılmalı kafestir. Ayrıca herhangi bir dağılmalı kafesin alt kafesi ve dağılmalı kafeslerin direkt çarpımları da dağılmalı kafestir.

Teorem 1.10 [7]. Bir dağılmalı kafeste $c \wedge x = c \wedge y$ ve $c \vee x = c \vee y$ ise, $x = y$' dir.

Tanım 1.19. L bir kafes olsun. L kafesine modüler kafes denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in L$ için

L6. $x \leq z$ ise $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

sağlanır.

Her kafesin modüler olması gerekmez: Şekil 1.1' de 5-elemanlı N_5 kafesi modüler değildir. Her dağılmalı kafes modülerdir. Fakat tersinin doğru olması gerekmez. Örnek olarak Şekil 1.1' de M_5 kafesi modülerdir ancak dağılmalı değildir. M_5' in modüler olması aşağıdaki teoremin bir sonucudur.

Teorem 1.11. [7] Herhangi bir G grubunun normal alt grupları bir modüler kafes oluşturur.

Bir modüler kafesin keyfi alt kafesleri modülerdir ve modüler kafeslerin direkt çarpımları da modülerdir.

Aşağıdaki teorem modüler olmayan kafesleri sınıflandırma yöntemini vermektedir.

Teorem 1.12. [7] Modüler olmayan bir L kafesi N_5 kafesini bir alt kafes olarak içerir.

Tanım 1.20. L sınırlı bir kafes ve $x, y \in L$ olsun. y elemanına x elemanının komplementi denir:$\Leftrightarrow$ $x \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$' dir. Bu durumda y elemanı, yani x elemanının komplementi x' ile gösterilir.

Eğer bir kafesin her elemanının komplementi mevcut ise böyle kafeslere komplementli kafes denir.

Tanım 1.21. Bir kafese yerel komplementli kafes denir:$\Leftrightarrow$ Bu kafesin tüm kapalı aralıkları komplementlidir.

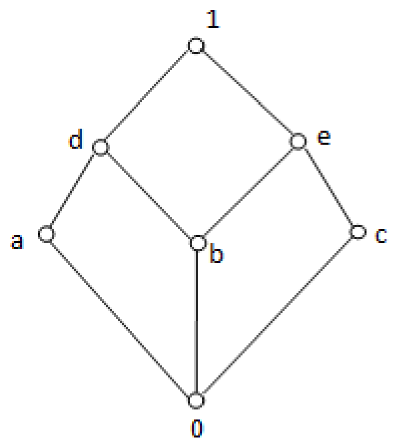
Bir X kümesinin tüm alt kümelerinin kafesi komplementlidir. Şekil 1.1' deki M_5 kafesi komplementli kafese bir örnektir. Teorem 1.10 ile bir dağılmalı kafesin verilen bir $[a, b]$ aralığındaki bir elemanın bir tek yerel komplementi mevcuttur.

Teorem 1.13. [7] Keyfi komplementli modüler kafes yerel komplementlidir.

5-elemanlı modüler olmayan Şekil 1.1' deki N_5 kafesi komplementlidir ancak yerel komplementli değildir.

Tanım 1.22. [7] L bir kafes olsun. $x \in L$ elemanına atom denir :$\Leftrightarrow$ x, $L \setminus \{0\}$' ın minimal elemanıdır.

Kafes diyagramı aşağıdaki gibi verilen $(L = \{0, a, b, c, d, 1\}, \leq)$ kafesini alalım:



Şekil 1.3. $(L, \leq)$ kafesi

L kafesindeki atomların a, b, c olduğu kolaylıkla görülebilir.

Teorem 1.14. [7] Sonlu uzunluklu yerel komplementli bir kafeste her eleman içerdiği atomların supremumu şeklindedir.

Sonuç 1.2. [7] Sonlu uzunluklu komplementli modüler kafeste, her eleman içerdiği atomların supremumu şeklindedir.

Tanım 1.23. [7] Bir atomik kafes, her elemanı içerdiği atomların supremumu şeklinde olan kafestir.

Şekil 1.3' deki kafesin bir atomik kafes olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tanım 1.24. L sınırlı bir kafes olsun. L kafesine Boole kafesi denir:$\Leftrightarrow$ L dağılmalı ve komplementli bir kafestir.

Örnek 1.8. Örnek 1.5' de verilen $(\wp(X), \subseteq, \vee, \wedge)$ kafesi bir Boole kafesidir, burada her $A \subseteq X$ alt kümesi için $A' = X \setminus A$' dır.

Teorem 1.10 ile herhangi bir dağılmalı kafeste komplementler tektir.

Teorem 1.15. [7] L bir Boole kafesi olsun. Her $x \in L$ elemanının bir tek x' komplementi mevcuttur. Üstelik her $x, y \in L$ için

L7. $x \wedge x' = 0$ ve $x \vee x' = 1$,

L8. $(x')' = x$,

L9. $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ ve $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

özellikleri sağlanır.

Tanım 1.25. L bir kafes olsun. L kafesine Boole cebiridir denir:$\Leftrightarrow$ L kafesi $\wedge, \vee, '$ işlemleri ile L1-L9 özelliklerini sağlar.

A bir Boole cebiri olsun. $\emptyset \neq B \subseteq A$ kümesine A Boole cebirinin (Boole) alt cebiridir denir: $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in B$ için $a \wedge b, a \vee b, a' \in B$' dir.

Teorem 1.16. [7] L sınırlı ve dağılmalı bir kafes olsun. Bu takdirde L' nin komplementli elemanları bir alt kafes oluşturur.

Tanım 1.26. [30] L, 0 en küçük elemanına sahip bir kafes olsun. Bir a^* elemanına $a \in L$ elemanının pseudo-komplementi denir :$\Leftrightarrow$ $a \wedge a^* = 0$ ve $a \wedge x = 0$ olan her x için $x \leq a^*$ dır.

Her elemanı pseudo-komplemente sahip olan kafese pseudo-komplementli kafes denir.

Örnek 1.9. Şekil 1.1.' de verilen N_5 kafesini alalım. Açıkça a' nın pseudo-komplementi c; b, c elemanlarının pseudo-komplementi a; 1'in pseudo- komplementi 0 ve 0' ın pseudo-komplementi de 1' dir. Böylece bu kafeste her elemanın pseudo-komplementi mevcut olduğundan N_5 pseudo-komplementli bir kafestir.

Tanım 1.27. [30] L bir infimum-yarı kafes ve $a, b \in L$ olsun. a elemanının b elemanına göre yerel pseudo-komplementi $a * b \in L$ elemanıdır öyleki $a \wedge x \leq b \iff x \leq a * b$.

Tanım 1.28. [7] Bir L kafesine Brouwerian kafesi denir:$\iff$ $X = \{x \in L | a \wedge x \leq b\}$ kümesi $a * b$ ile gösterilen bir en büyük eleman içerir; burada $a * b$, a elemanının b elemanına göre yerel pseudo-komplementidir.

Teorem 1.17. [7] Bir kafes Brouwerian kafes ise dağılmalıdır.

Teorem 1.18. [7] Bir tam kafes Brouweriandır $\iff$ Supremum infimum üzerine tam olarak dağılmalıdır; yani keyfi $\{x_\alpha | \alpha \in I\}$ kümesi için

$$a \wedge \bigvee_I x_\alpha = \bigvee_I (a \wedge x_\alpha)$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 1.29. [29, 30] Yerel pseudo- komplementli dağılmalı kafese Heyting Cebiri denir.

1.3. $[0, 1]$ Üzerinde Üçgensel Normlar ve Konormlar

1.3.1. Temel Tanım ve Teoremler

1.3.1.1. $[0, 1]$ Üzerinde Üçgensel Normlar

Aksi belirtilmedikçe, $[0,1]$ üzerindeki doğal sıralamayı $\leq$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.30. Bir üçgensel norm (kısaca t-norm) T, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir ikili işlemdir; yani $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu her $x, y, z \in [0,1]$ için

T1. $T(x, y) = T(y, x)$ (Komütatiflik)

T2. $T\big(x, T(y, z)\big) = T(T(x, y), z)$ (Birleşme)

T3. $y \leq z$ ise $T(x, y) \leq T(x, z)$ (Monotonluk)

T4. $T(x, 1) = x$ (Sınır şartı)

özelliklerini sağlar.

Örnek 1.10. Temel olarak kabul edilen dört t-norm T_M, T_P, T_L, T_D aşağıdaki gibidir:

$T_M(x, y) = min(x, y)$ (Minimum)

$T_P(x, y) = xy$ (Çarpım)

$T_L(x, y) = max(x + y - 1,0)$ (Lukasiewicz t-norm)

$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0,1)^2, \\ min(x, y), & \text{Aksi halde.} \end{cases}$$ (Drastik çarpım)

Uyarı 1.3. T, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde bir t-norm olsun.

(i) Tanım 1.30 ile her T t-normu her $x \in [0,1]$ için

$$T(0, x) = T(x, 0) = 0 \quad (1.1)$$

$$T(1, x) = x \quad (1.2)$$

eşitliklerini sağlar. (1.1) ve (1.2)' de verilen eşitliklere ilave sınır şartı denir. Böylece her t-norm $[0,1]^2$ birim kare üzerinde çakışıktır.

(ii) Bir T t-normunun ikinci bileşene göre monotonluğu, (T1) komütatiflik ve (T3) monotonluk özellikleri ile tanımlanır. Bu monotonluk her iki bileşene göre monotonluğa denktir; yani

$$x_1 \leq x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2 \text{ ise } T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2) \quad (1.3)$$

sağlanır.

Tanım 1.31.

(i) T_1 ve T_2 iki t-norm olsun. Eğer her $x, y \in [0,1]$ için $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ eşitsizliği sağlanıyor ise T_1, T_2 t-normundan daha zayıftır veya denk olarak T_2, T_1 t-normundan daha güçlüdür denir ve bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

(ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise yani $T_1 \leq T_2$ ve bir $x_0, y_0 \in [0,1]$ için $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ ise, bu durum $T_1 < T_2$ ile gösterilir.

Uyarı 1.4.

(i) T, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde bir t-norm olsun. (1.3)' ün bir sonucu olarak her $x, y \in [0,1]$ için $T(x, y) \leq T(x, 1) = x$ ve $T(x, y) \leq T(1, y) = y$ olup $T(x, y) \leq min\,(x, y) = T_M(x, y)$' dir. Böylece, T_M minimum t-normu en güçlü t-normdur. $[0,1]^2$' nin sınırları üzerinde her t-norm çakışık ve her $x, y \in (0,1)$ için $T(x, y) \geq 0 = T_D(x, y)$ olduğundan T_D drastik çarpımı en zayıf t-normdur. Bu durumda keyfi T t-normu için

$$T_D \leq T \leq T_M \quad (1.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

(ii) Açıkça $T_L < T_P$ olduğundan dört temel t-norm arasında

$$T_D < T_L < T_P < T_M \tag{1.5}$$

ilişkisi mevcuttur.

Önerme 1.1. [49] $(0,1) \subseteq A \subseteq [0,1]$ bir küme ve $*: A^2 \longrightarrow A$, A üzerinde bir ikili işlem ve her $x, y, z \in A$ için (T1)-(T3) özellikleri ile birlikte

$$x * y \leq min(x, y) \tag{1.6}$$

özelliği sağlansın. O halde

$$T(x,y) = \begin{cases} x * y, & (x,y) \in (A \setminus \{1\})^2, \\ min(x,y), & \text{Aksi halde,} \end{cases} \tag{1.7}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ dönüşümü bir t-normdur. Üstelik, T, $(A \setminus \{1\})^2$' e kısıtlanışı, $*$ işleminin $(A \setminus \{1\})^2$' ne kısıtlanışı ile aynı olan tek t-normdur.

Tanım 1.32. Her $x, y, z \in [0,1]$ için (T1)-(T3) ve (1.6) özelliklerini sağlayan bir $F: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonuna bir t-altnorm denir.

Açık olarak her t-norm bir t-altnormdur, fakat tersinin doğru olması gerekmez: örneğin, sıfır fonksiyonu, yani $F(x,y) = 0$ ile verilen $F: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-altnormdur fakat bir t-norm değildir.

Sonuç 1.3. [49] F bir t-altnorm ise

$$T(x,y) = \begin{cases} F(x,y), & (x,y) \in [0,1)^2, \\ min(x,y), & \text{Aksi halde,} \end{cases}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur.

Önerme 1.2. [49]

(i) Her $x \in [0,1]$ için $T(x,x) = x$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_M minimum t-normdur.

(ii) Her $x \in [0,1)$ için $T(x,x) = 0$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_D drastik çarpımıdır.

Uyarı 1.5.

(i) Her t-norm T (T2) birleşme kuralı ve indüksiyon ile aşağıdaki n-li işleme genişletilebilir. Yani, her $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n$ n-sıralısı için

$$T_{i=1}^{n} x_i = T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n)$$

dir. Eğer özel olarak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ ise kısaca

$$x_T^{(n)} = T(x, x, \dots, x)$$

yazılır. Bu durumda $x_T^{(0)} = 1$ ve $x_T^{(1)} = x$ olarak tanımlanır.

(ii) $[0,1]$' in elemanlarının her $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisi yani $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ için

$$T_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} T_{i=1}^{n} x_i \tag{1.8}$$

ile tanımlanır.

(iii) Keyfi bir I indis kümesi ve her $(x_i)_{i\in I} \in [0,1]^I$ için, yani $[0,1]$' in elemanlarının her $(x_i)_{i\in I}$ ailesi için aşağıdaki ifade iyi tanımlıdır ve (1.8)' in bir genellemesidir:

$$T_{i\in I} x_i = inf\left\{T_{j=1}^{k} x_{i_j} \,\middle|\, (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}), (x_i)_{i\in I} \text{ nın sonlu alt ailesidir}\right\}.$$

Örnek 1.11. T_M minumum ve T_p çarpım t- normlarının n-li genişlemelerinin

$$T_M(x_1, x_2, \dots, x_n) = min(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$T_P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

olduğu açıktır. T_L Lukasiewicz t-normunun ve T_D drastik çarpımının n-li genişlemeleri

$$T_L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max(\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1), 0),$$

$$T_D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} x_i, & x_j = 1, \forall j \neq i \text{ ise,} \\ 0, & \text{Aksi halde,} \end{cases}$$

şeklindedir.

Aşağıda verilen $[0,1]$ üzerinde tanımlı dönüşümlerden görüldüğü üzere Tanım 1.30' daki (T1)-(T4) aksiyomları birbirinden bağımsızdır. Bu örnekteki fonksiyonlardan her biri (T1)-(T4) aksiyomlarından yalnızca birini sağlamaz.

Örnek 1.12. $i = 1,2,3,4$ için $F_i: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonları sırası ile

$$F_1(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \left[0, {}^{1}\!/_{2}\right] \times [0,1) \text{ ise,} \\ min(x, y), & \text{Aksi halde,} \end{cases}$$

$$F_2(x, y) = x.y.max(x, y),$$

$$F_3(x,y) = \begin{cases} 1/2, & (x,y) \in (0,1)^2 \text{ ise,} \\ min(x,y), & \text{Aksi halde,} \end{cases}$$

$$F_4(x,y) = 0$$

şeklinde tanımlansın. Açıkça her bir F_i , (Ti) dışındaki (T1)-(T4) aksiyomlarını sağlar.

Şimdi F_1 fonksiyonunun (T1) aksiyomunu sağlamadığını gösterelim. $0 < x < 1 / 2$ ve $1 / 2 < y < 1$ olsun. Bu takdirde,

$$F_1(x,y) = 0$$

dır. Diğer taraftan $(y,x) \notin [0,1 / 2] \times [0,1)$ olduğundan

$$F_1(y,x) = min(y,x) = x$$

dir. Böylece $F_1(x,y) \neq F_1(y,x)$ olup (T1) aksiyomu sağlanmaz. Şimdi F_1' in (T2) aksiyomunu sağladığını gösterelim. $(x,y) \in [0,1 / 2] \times [0,1)$ olsun. O halde her $z \in [0,1]$ için

$$F_1(F_1(x,y),z) = F_1(0,z) = min(0,z) = 0$$

dır. Eğer $(y,z) \in [0,1 / 2] \times [0,1)$ ise

$$F_1\big(x,F_1(y,z)\big) = F_1(x,0) = min(x,0) = 0$$

olup $F_1\big(x,F_1(y,z)\big) = F_1(F_1(x,y),z)$ eşitliği sağlanır. $(y,z) \notin [0,1 / 2] \times [0,1)$ olsun. O halde $y \notin [0,1 / 2]$ veya $z \notin [0,1)$' dir. $y \notin [0,1 / 2]$ olsun. Bu takdirde, $1 > y > 1 / 2$ olup

$$F_1\big(x,F_1(y,z)\big) = F_1\big(x,min(y,z)\big)$$

dir. $min(y,z) = y$ ise $F_1\big(x,F_1(y,z)\big) = F_1(x,y) = 0$ olup

$$F_1(F_1(x,y),z) = F_1(x,F_1(y,z))$$

eşitliği sağlanır. $min(y,z) = z$ olsun. $1 > y$ olduğundan $1 > z$' dir. Böylece, $(x,z) \in [0,1 / 2] \times [0,1)$ olup

$$F_1\big(x,F_1(y,z)\big) = F_1(x,z) = 0$$

dır. Böylece $(x,y) \in [0,1 / 2] \times [0,1)$ için $F_1(F_1(x,y),z) = F_1(x,F_1(y,z))$ eşitliği sağlanır. $(x,y) \notin [0,1 / 2] \times [0,1)$ olsun. Bu takdirde $x \notin [0,1 / 2]$ veya $y \notin [0,1)$' dir. $x \notin [0,1 / 2]$ olsun. O halde

$F_1(F_1(x,y),z) = F_1(min(x,y),z)$

dir. $min(x,y) = x$ ise $F_1(F_1(x,y),z) = F_1(x,z) = min(x,z)$' dir. Diğer taraftan, $x \notin [0,1 / 2]$ ve $min(x,y) = x$ olduğundan $y > 1 / 2$' dir. Böylece,

$$F_1\big(x, F_1(y,z)\big) = F_1\big(x, min(y,z)\big) = min\big(x, min(y,z)\big)$$
$$= min(min(x,y),z) = min(x,z)$$

olup eşitlik sağlanır. Şimdi $y \notin [0,1)$ olsun. O halde $y = 1$ olup

$$F_1(F_1(x,y),z) = F_1(min(x,1),z)$$
$$= F_1(x,z) = F_1\big(x, F_1(1,z)\big)$$
$$= F_1\big(x, F_1(y,z)\big)$$

eşitliği sağlanır. Böylece F_1, (T2) aksiyomunu sağlar. F_1 fonksiyonunun (T3) aksiyomunu sağladığını gösterelim. $y,z \in [0,1]$ için $y \leq z$ olsun. Farzedelim ki $x \in [0,1 / 2]$ olsun. $y \in [0,1)$ veya $y \notin [0,1)$' dir. $y \in [0,1)$ ise $F_1(x,y) = 0$' dır. Eğer $z \in [0,1)$ ise $F_1(x,z) = 0$ olup $F_1(x,y) = F_1(x,z)$' dir. $z \notin [0,1)$ ise $z = 1$' dir. Böylece

$$F_1(x,z) = min(x,z) = min(x,1) = x$$

olup $F_1(x,y) = 0 \leq x = F_1(x,z)$ eşitsizliği sağlanır. $y \notin [0,1)$ olsun. Bu takdirde $y = 1$ olup $y \leq z$ olduğundan $z = 1$' dir. Buradan $F_1(x,y) = x = F_1(x,z)$' dir. Böylece $x \in [0,1 / 2]$ için (T3) aksiyomunu sağlanır. Şimdi $x \notin [0,1 / 2]$ olsun. O halde $y \leq z$ olduğundan

$$F_1(x,y) = min(x,y) \leq min(x,z) = F_1(x,z)$$

olup F_1, (T3) aksiyomunu sağlar. Her $x \in [0,1]$ için $F_1(x,1) = min(x,1) = x$ olduğundan (T4) sınır şartı sağlanır.

Şimdi F_2 fonksiyonu için (T1)-(T4) aksiyomlarını araştıralım. Her $x,y \in [0,1]$ için $F_2(x,y) = x.y.max(x,y) = y.x.max(y,x) = F_2(y,x)$ olduğundan F_2, (T1) aksiyomunu sağlar.

$$F_2(F_2(1/2,1/2), 1 / 5) = F_2(1 / 8,1 / 5) = 1 / 200$$

ve

$$F_2(1 / 2, F_2(1 / 2,1 / 5)) = F_2(1 / 2,1 / 20) = 1 / 80$$

olup (T2) aksiyomu sağlanmaz.

$y, z \in [0,1]$ için $y \leq z$ olsun. $F_2(x, y) = x.y.max(x, y) \leq x.z.max(x, z) = F_2(x, z)$ olduğundan (T3) aksiyomu sağlanır. Son olarak her $x \in [0,1]$ için $F_2(x, 1) = x.1.max(x, 1) = x$ olduğundan (T4) aksiyomu da sağlanır.

Şimdi F_3 fonksiyonunun (T1) aksiyomunu sağladığını gösterelim. $(x, y) \in (0,1)^2$ olsun. O halde $F_3(x, y) = 1/2 = F_3(y, x)$' dir. $(x, y) \notin (0,1)^2$ ise o halde $(y, x) \notin (0,1)^2$ olup

$$F_3(x, y) = min(x, y) = F_3(y, x)$$

eşitliği sağlanır. Böylece F_3 fonksiyonu (T1) aksiyomunu sağlar. $x, y, z \in (0,1)$ ise $F_3(F_3(x, y), z) = F_3\big(x, F_3(y, z)\big)$ olduğu açıktır. $x, y \in (0,1)$ ve $z \notin (0,1)$ olsun. O halde $z = 0$ veya $z = 1$' dir. $z = 0$ olsun. Buradan

$$F_3(F_3(x, y), z) = F_3(1 / 2, z) = 0$$

ve

$$F_3\big(x, F_3(y, z)\big) = F_3\big(x, min(y, 0)\big) = 0$$

olup eşitlik sağlanır. Eğer $z = 1$ ise,

$$F_3(F_3(x, y), z) = F_3(1 / 2, z) = 1 / 2$$

ve

$$F_3\big(x, F_3(y, z)\big) = F_3\big(x, min(y, 1)\big) = 1 / 2$$

olup eşitlik sağlanır. $x \in (0,1)$ ve $y, z \notin (0,1)$ olsun. O halde

$$F_3(F_3(x, y), z) = F_3(min(x, y), z) = min(min(x, y), z)$$

ve

$$F_3\big(x, F_3(y, z)\big) = F_3\big(x, min(y, z)\big) = min\big(x, min(y, z)\big)$$

olup $F_3(F_3(x, y), z) = F_3\big(x, F_3(y, z)\big)$ eşitliği sağlanır. $x, y, z \notin (0,1)$ için eşitliğin sağlandığı açıktır. Böylece F_3 (T2) aksiyomunu sağlar. F_3 fonksiyonunun (T3) aksiyomunu sağlamadığını göstermek için $x, z = 0{,}3$ ve $y = 1$ alalım. $x \leq y$ olup $F_3(x, z) = 0.5$ ve $F_3(y, z) = 0.3$ olup $F_3(x, z) \nleq F_3(y, z)$' dir. Böylece F_3 fonksiyonu (T3) aksiyomunu sağlamaz. Her $x \in [0,1]$ için $F_3(x,1) = min(x,1) = x$ olduğundan (T4) aksiyomu sağlanır.

Son olarak, F_4 fonksiyonunun (T1), (T2), (T3) aksiyomlarını sağladığı açıktır. Yalnızca (T4) aksiyomunu sağlamadığını gösterelim. $x \in (0,1]$ için $F_4(x,1) = 0 \neq x$ olduğundan (T4) aksiyomu sağlanmaz.

1.3.1.2. $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ Üzerinde Üçgensel Konormlar

Tanım 1.33. Bir üçgensel konorm (veya kısaca t-konorm) S, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde her $x,y,z \in [0,1]$ için (T1)-(T3) şartlarını ve her $x \in [0,1]$ için

(S4) $\quad S(x,0) = x \quad$ (Sınır şartı)

şartını sağlayan $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonudur.

Aksiyomatik olarak t-normlar ve t-konormlar sadece sınır şartlarında farklılık gösterirler. Aslında, t-norm ve t-konorm kavramları bazı anlamlarda dualdirler.

Örnek 1.13. S_M, S_p, S_L ve S_D temel t-konormları sırası ile

$S_M(x,y) = max(x,y)$ (Maksimum)

$S_P(x,y) = x + y - xy$ (İstatistiksel toplam)

$S_L(x,y) = min(x+y,1)$ (Lukasiewicz t-konorm, sınırlı toplam)

$S_D(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in (0,1)^2, \\ max(x,y), & \text{Aksi halde.} \end{cases}$ (Drastik toplam)

şeklinde tanımlanır.

Önerme 1.3. [49] $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir ikili işlem olsun. S bir t-konormdur $\Leftrightarrow$ Bir T t-normu her $x,y \in [0,1]$ için

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y) \tag{1.9}$$

olacak şekilde mevcuttur.

Uyarı 1.6.

(i) $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir t-konorm ise

$$T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y) \tag{1.10}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur. (1.9) ile verilen t-konorma, t-norm T' nin dual t-konormu denir. Benzer şekilde, (1.10) ile verilen t-norma S t-konormunun dual t-normu denir.

(ii) (T_M, S_M), (T_P, S_P), (T_L, S_L) ve (T_D, S_D) ikişer tarzda birbirine dual t-norm ve t-konorm çiftleridir.

(iii) $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ bir t-konorm olsun. Her $x \in [0,1]$ için

$$S(1, x) = S(x, 1) = 1$$

$$S(0, x) = x$$

ilave sınır şartları olarak adlandırılan eşitlikler sağlanır. Böylece, tüm t-konormlar $[0,1]^2$ sınırı üzerinde çakışıktır, yani aynı değeri alırlar.

T-normlarda olduğu gibi bir S t-konormu elde etmek için gerek ve yeter koşul Önerme 1.1' in duali ile, (S1)-(S3) şartlarının ve her (x, y) için $S(x, y) \geq max(x, y)$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

(iv) Duallik sıralamayı değiştirir: yani T_1 ve T_2 t-normları için $T_1 \leq T_2$ ve S_1, T_1 t-normuna ve S_2, T_2 t-normuna karşılık gelen dual t-konormlar ise $S_1 \geq S_2$' dir. Her S t-konormu için

$$S_M \leq S \leq S_D$$

dir. Yani S_M maksimum t-konormu en zayıf, S_D drastik toplam en güçlü t-konormdur. Temel dört t-konorm için aşağıdaki ilişki mevcuttur:

$$S_M < S_P < S_L < S_D$$

(v) Verilen bir t-konorm S için Uyarı 1.5' e benzer şekilde $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in [0,1]^n$ n-sıralılarına, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizilerine ve I keyfi küme olmak üzere $(x_i)_{i \in I} \in [0,1]^I$ ailelerine genişletme işlemi aşağıdaki gibidir:

$$S_{i=1}^{n} x_i = S(S_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = S(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$S_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n \to \infty} S_{i=1}^{n} x_i$$

$$S_{i \in I} x_i = sup \left\{ S_{j=1}^{k} x_{i_j} \middle| (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}), (x_i)_{i \in I} \text{ nın sonlu alt ailesidir} \right\}.$$

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ olduğunda $S(x, x, \cdots, x)$ yerine kısaca $x_S^{(n)}$ yazılır ve her $x \in [0,1]$ için $x_S^{(0)} = 0$ ve $x_S^{(1)} = x$ olarak gösterilir.

Örnek 1.14. S_M maksimum t-konormunun n-li genişlemesinin

$$S_M(x_1, x_2, \dots x_n) = max(x_1, x_2, \dots x_n)$$

olduğu açıktır. S_P istatistiksel toplam, S_L Lukasiewicz t-konorm ve S_D drastik toplam için n-li genişlemeler

$$S_P(x_1, x_2, \dots x_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$$

$$S_L(x_1, x_2, \dots x_n) = min(\sum_{i=1}^{n} x_i, 1)$$

$$S_D(x_1, x_2, \dots x_n) = \begin{cases} x_i, & \forall i \neq j \ \ x_j = 0 \ \text{ ise,} \\ 1, & \text{Aksi halde,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 1.7. (T, S) birbirlerine dual t-norm ve t-konorm çifti ise, (1.9) ve (1.10) dual ifadeleri,

$$S_{k \in K} x_k = 1 - T_{k \in K}(1 - x_k)$$

$$T_{k \in K} x_k = 1 - S_{k \in K}(1 - x_k)$$

şeklinde genişletilebilir, burada K keyfi bir indis kümesidir.

1.3.1.3. Süreklilik

Tanım 1.34. Bir $F: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonuna süreklidir denir:⟺ Her yakınsak $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizileri için

$$F(\lim_{n \to \infty} x_n, \lim_{n \to \infty} y_n) = \lim_{n \to \infty} F(x_n, y_n)$$

dir.

Açıkça, T_M, T_P ve T_L temel t-normları ve S_M, S_P ve S_L dual t-konormları süreklidir. T_D drastik çarpım ve S_D drastik toplam ise sürekli değildir.

Önerme 1.4. [49] Azalan olmayan yani, $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$ olduğunda $F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2)$ eşitsizliğini sağlayan bir $F: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu süreklidir⟺ F her bir bileşene göre süreklidir, yani her $x_0, y_0 \in [0,1]$ için

$$F(x_0, .): [0,1] \longrightarrow [0,1] \text{ düşey kesimi}$$

$$F(., y_0): [0,1] \longrightarrow [0,1] \text{ yatay kesimi}$$

tek değişkenli sürekli fonksiyonlardır.

Tanım 1.35. Bir $F: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonuna sırası ile alt (üst) yarı süreklidir denir : ⟺ Her $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ öyleki sırası ile

$$F(x,y) > F(x_0,y_0) - \varepsilon, \qquad (x,y) \in (x_0 - \delta, x_0] \times (y_0 - \delta, y_0]$$

$$F(x,y) < F(x_0,y_0) + \varepsilon, \qquad (x,y) \in [x_0, x_0 + \delta) \times [y_0, y_0 + \delta)$$

sağlanır.

Uyarı 1.8.

(i) $T^{nM}(x,y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 1, \\ min(x,y), & \text{Aksi halde,} \end{cases}$

ile tanımlanan $T^{nM}: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ dönüşümü bir t-normdur [49] ve bu t-norm nilpotent minimum t-norm olarak adlandırılır. T^{nM} nilpotent minimum t-norm alt yarı süreklidir fakat üst yarı sürekli değildir.

(ii) Bir t-norm T alt (üst) yarı süreklidir⟺ (1.9) ile verilen onun dual t-konormu üst (alt) yarı süreklidir.

Önerme 1.5. [49] Bir $F: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ azalmayan fonksiyonu alt yarı süreklidir⟺ F her bir bileşene göre sol süreklidir, yani her $x_0, y_0 \in [0,1]$ ve her $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ için

$$Sup\{F(x_n, y_0) | n \in \mathbb{N}\} = F(sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\}, y_0)$$

$$Sup\{F(x_0, y_n) | n \in \mathbb{N}\} = F(x_0, sup\{y_n | n \in \mathbb{N}\})$$

dir.

Benzer şekilde azalmayan bir fonksiyonun üst yarı sürekliliği her bir bileşene göre sağ sürekliliğine denktir.

Tanım 1.36. Bir t-norm T (t-konorm S) sınır süreklidir denir ⟺ T t-normu (S t-konormu) $[0,1]^2$' nin sınırları üzerinde yani $[0,1]^2 \setminus (0,1)^2$ üzerinde süreklidir.

Örnek 1.15. $T(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in (0, {}^1\!/_2)^2, \\ min(x,y), & \text{Aksi halde,} \end{cases}$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu sınır sürekliliği sağlayan fakat sol sürekli olmayan bir t-normdur.

T' nin sınır sürekli bir t-norm olduğu açıktır. T' nin sol sürekli olmadığını gösterelim. $x_n = (1/2) - (1 / n)$, $n \geq 2$ dizisi ve $y_0 = 1 / 3$ noktası için

$$\vee_{n\in\mathbb{N}} T(x_n, {}^1\!/_3) = \vee_{n\in\mathbb{N}} T({}^1\!/_2 - {}^1\!/_\mathrm{n}\,, {}^1\!/_3) = 0$$

dır. Diğer taraftan

$$T\left(\vee_{n\in\mathbb{N}} x_n\,, {}^1\!/_3\right) = T\left(\vee_{n\in\mathbb{N}}({}^1\!/_2 - {}^1\!/_\mathrm{n}), {}^1\!/_3\right) = T\left({}^1\!/_2, {}^1\!/_3\right)$$

$$= min(1/2, 1/3) = 1/3$$

olduğu görülür. Böylece $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} T(x_n, 1/3) \neq T\left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} x_n, 1/3\right)$ olup T sol sürekli bir t-norm değildir.

1.3.2. Cebirsel Özellikler

1.3.2.1. Elemanter Cebirsel Özellikler

Tanım 1.37. T bir t-norm olsun.

(i) Bir $a \in [0,1]$ elemanına T'nin bir idempotent elemanıdır denir:$\Leftrightarrow$ $T(a,a) = a$' dır. 0 ve 1 her t-norm için idempotent elemanlar olup bu elemanlara trivial idempotent elemanlar denir. $(0,1)$' deki idempotent elemanlar ise trivialden farklı idempotent elemanlar olarak adlandırılır.

(ii) Bir $a \in (0,1)$ elemanına t-norm T'nin nilpotent elemanı denir:$\Leftrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$ öyleki $a_T^{(n)} = 0$' dır.

(iii) Bir $a \in (0,1)$ elemanına T'nin sıfır böleni denir :$\Leftrightarrow$ $\exists b \in (0,1)$ öyleki $T(a,b) = 0$' dır.

Örnek 1.16.

- Her $a \in [0,1]$ için $T_M(a,a) = min(a,a) = a$ olduğundan keyfi $a \in [0,1]$ elemanı T_M minimum t-normunun idempotent elemanıdır (aslında Önerme 1.2'nin bir sonucu olarak T_M minimum t-normu idempotent elemanlarının kümesi [0,1]' e eşit olan tek t-normdur).
- Her $a \in (0,1)$ elemanı T_L Lukasiewicz t-normunun ve T_D drastik çarpımın hem sıfır böleni hem de nilpotent elemanıdır. Gerçekten;

Her $a \in (0,1)$ için $1 - a > 0$ olduğundan bir $n \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyleki $1/n \leq 1 - a$' dır. $n - na \geq 1$ olup $na - (n-1) \leq 0$' dır. Böylece bir $n \in \mathbb{N}$ için $a_{T_L}^{(n)} = max(na - (n-1), 0) = 0$' dır. Bu ise her $a \in (0,1)$ elemanının T_L Lukasiewicz t-normunun bir nilpotent elemanı olduğu anlamına gelir.

Her $a \in (0,1)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{T_D}^{(n)} = 0$ olduğundan her $a \in (0,1)$ elemanı T_D drastik çarpımın bir nilpotent elemanıdır.

Her $a \in (0,1)$ için $1 - a \in (0,1)$ olup $T_L(a, 1 - a) = max(a + (1 - a) - 1, 0) = 0$' dır. Bu ise keyfi $a \in (0,1)$ elemanının T_L Lukasiewicz t-normunun sıfır böleni olduğunu gösterir.

Her $a \in (0,1)$ için $T_D(a, a) = 0$ olduğundan keyfi $a \in (0,1)$ elemanı T_D drastik çarpımın da sıfır bölenidir.

- T_M minimum t-normu sıfır bölene sahip değildir. Gerçekten;

$T_M(a, b) = 0$ olacak şekilde bir $b \in (0,1)$ elemanı mevcut olsa $min(a, b) = 0$ olacağından $a = 0$ veya $b = 0$ olmalıdır ki bu ise bir çelişkidir.

- T_M minimum t-normunun nilpotent elemanı da mevcut değildir. Eğer $a \in (0,1)$

için bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı $a_{T_M}^{(n)} = 0$ olacak şekilde mevcut olsa $a = 0$ olur ki bu ise bir çelişkidir.

- $a \neq 0$ elemanı T_D drastik çarpımın idempotent elemanı ise $T_D(a, a) = a$ eşitliği

sadece $a = 1$ olduğunda sağlanır. Bu ise T_D drastik çarpımın sadece trivial idempotent elemanlara sahip olduğunu gösterir.

- T_L Lukasiewicz t-normu trivialden farklı idempotent elemanlara sahip değildir.

Gerçekten, $a \in [0,1]$, T_L Lukasiewicz t-normunun idempotent elemanı olsun. Bu takdirde, $T_L(a, a) = a$ olup T_L' nin tanımı ile $max(0, 2a - 1) = a$' dır. Böylece $a = 0$ veya $2a - 1 = a$ olmalıdır. Buradan $a = 0$ veya $a = 1$ olduğu elde edilir.

- T_P çarpım t-normunun da trivialden farklı idempotent elemanı yoktur. Gerçekten,

$a \in [0,1]$, T_P çarpım t-normunun idempotent elemanı olsun. Bu takdirde $T_P(a, a) = a$ olup $a^2 = a$' dır. Buradan $a = 0$ veya $a = 1$ olduğu görülür.

- T_P çarpım t-normu nilpotent elemana ve sıfır bölene sahip değildir. Gerçekten,

Bir $a \in (0,1)$ elemanı T_P çarpım t-normunun nilpotent elemanı olsa, bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı $a_{T_P}^{(n)} = 0$ olacak şekilde mevcut olmalıdır. Buradan $a^n = 0$ olup bu eşitlik yalnızca $a = 0$ olması halinde sağlanır. Bu ise çelişki olup T_P çarpım t-normu nilpotent elemana sahip değildir.

Ayrıca T_P çarpım t-normu sıfır bölene de sahip değildir. Farzedelim ki $a \in (0,1)$ elemanı T_P' nin sıfır böleni olsun. O halde bir b$\in (0,1)$ elemanı $T_P(a, b) = 0$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan $ab = 0$ olup $a = 0$ veya $b = 0$ olduğu elde edilir. Bu ise çelişki olup T_P çarpım t-normu sıfır bölene sahip değildir

İdempotent elemanlar aşağıdaki yolla karakterize edilebilirler.

Önerme 1.6. [49]

(i) Bir $a \in [0,1]$ elemanı bir t-norm T' nin idempotent elemanıdır$\Leftrightarrow$ Her $x \in [a,1]$ için $T(a,x) = min(a,x)$' dir.

(ii) Eğer T sürekli bir t-norm ise $a \in [0,1]$, T' nin bir idempotent elemanıdır$\Leftrightarrow$ Her $x \in [0,1]$ için $T(a,x) = min(a,x)$' dir.

Uyarı 1.9.

(i) Eğer $a \in [0,1]$ bir t-norm T' nin idempotent elemanı ise, indüksiyon ile her $n \in \mathbb{N}$ için $a_T^{(n)} = a$' dır. Sonuç olarak, $(0,1)$' in hiçbir elemanı hem idempotent hem de nilpotent eleman olamaz.

(ii) Bir t-norm T' nin her nilpotent elemanı aynı zamanda T' nin bir sıfır bölenidir. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin; $^2/_3 \in (0,1)$, T^{nM} nilpotent minimum t-normunun sıfır bölenidir ancak nilpotent elemanı değildir.

(iii) Eğer bir t-norm T bir a nilpotent elemana sahip ise o halde $b_T^{(2)} = 0$ olacak şekilde bir $b \in (0,1)$ elemanı daima mevcuttur.

(iv) Eğer bir $a \in (0,1)$ elemanı t-norm T' nin bir nilpotent elemanı (sıfır böleni) ise her $b \in (0,a)$ sayısı aynı zamanda T' nin bir nilpotent elemanıdır (sıfır bölenidir).

(v) Bir t-norm T' nin nilpotent elemanlarının ve sıfır bölenlerinin kümesi ya boş kümedir ya da $(0,c)$ veya $(0,c]$ şeklinde bir aralıktır.

Tanım 1.38. [49] T bir t-norm olsun.

(i) T t-normuna kesin monotondur denir :$\Leftrightarrow$

(KEM) $x > 0$ ve $y < z$ ise $T(x,y) < T(x,z)$.

(ii) T t-normu kısaltma kuralını sağlar denir :$\Leftrightarrow$

(KIK) $x > 0$ ve $T(x,y) = T(x,z)$ ise $y = z$.

(iii) T t-normu şartlı kısaltma özelliğini sağlar denir :$\Leftrightarrow$

(ŞKK) $T(x,y) = T(x,z) > 0$ ise $y = z$.

(iv) T t-normu Arşimedyandır denir :$\Leftrightarrow$

(AÖ) Her $x, y \in (0,1)$ için bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı $x_T{}^{(n)} < y$ olacak şekilde mevcuttur.

(v) T t-normu limit özelliğini sağlar denir :$\Leftrightarrow$

(LÖ) Her $x \in (0,1)$ için $\lim_{n\to\infty} x_T{}^{(n)} = 0$.

Örnek 1.17.

- T_M minimum t-normu Tanım 1.38' de verilen özelliklerden hiçbirini sağlamaz.

Gerçekten, $x = 1/3$, $y = 2/3, z = 3/4$ olsun. $y < z$ olup $T_M(1/3, 2/3) = 1/3 = T_M(1/3, 3/4)$' dir. Böylece T_M kesin monoton değildir.

$T_M(1/3, 2/3) = 1/3 = T_M(1/3, 3/4)$ olup $2/3 \neq 3/4$ olduğundan T_M kısaltma kuralını sağlamaz.

$x = 2/3$, $y = 1/3$ için $x_{T_M}^{(n)} = x = 2/3 < y = 1/3$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut değildir. Böylece T_M Arşimedyan da değildir.

$x = 1/4$ için $x_{T_M}^{(n)} = 1/4$ olup $\lim_{n\to\infty} x_{T_M}^{(n)} = 1/4 \neq 0$' dır. Böylece T_M limit özelliğini sağlamaz.

- T_P çarpım t-normu Tanım 1.38' de verilen özelliklerin hepsini sağlar. Gerçekten;

$x, y, z \in [0,1]$ için $x > 0$ ve $y < z$ olsun. $T_P(x, y) = xy < xz = T_P(x, z)$ olduğundan T_P kesin monotondur.

$T_P(x, y) = T_P(x, z) > 0$ olsun. $xy = xz > 0$ olduğundan $x \neq 0$ ve $x(y - z) = 0$' dır. Buradan $x \neq 0$ olduğundan $y = z$' dir. Böylece, T_P şartlı kısaltma özelliğini sağlar.

Her $x, y \in (0,1)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{T_P}^{(n)} \geq y$ olsun. O halde $x^n \geq y$ olup $0 = \lim_{n\to\infty} x^n \geq y$' dir. Bu ise çelişki olup bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı $x_{T_P}^{(n)} < y$ olacak şekilde mevcuttur. Yani T_P, Arşimedyandır.

Her $x \in (0,1)$ için $\lim_{n\to\infty} x_{T_P}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$ olduğundan T_P limit özelliğini sağlar.

- T_L Lukasiewicz t-normu Arşimedyandır, şartlı kısaltma özelliğini ve limit özelliğini sağlar ancak Tanım 1.38' de verilen diğer özelliklerin hiçbirini sağlamaz.

T_L Arşimedyandır. Gerçekten; $x, y \in (0,1)$ olsun. Eğer bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_{T_L}^{(n)} = 0$ ise $y > 0$ olduğundan $x_{T_L}^{(n)} < y$' dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{T_L}^{(n)} \neq 0$ ve $x_{T_L}^{(n)} \geq y$ olsun. O halde

$$0 \neq x_{T_L}^{(n)} = max(nx - (n-1), 0) \geq y$$

dir. Böylece, $nx - (n-1) \geq y$ olup $nx - n \geq y - 1$' dir. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $n \leq \frac{y-1}{x-1}$ olduğu elde edilir. Bu ise çelişki olup bir $n \in \mathbb{N}$, $x_{T_L}^{(n)} < y$ olacak şekilde mevcuttur. Böylece, T_L Arşimedyandır.

T_L Lukasiewicz t-normu şartlı kısaltma kuralını sağlar. Gerçekten; $T_L(x,y) = T_L(x,z) > 0$ olsun. Buradan $T_L(x,y) = max(x+y-1,0) = x+y-1$' dir. Diğer taraftan $T_L(x,z) = max(x+z-1,0) = x+z-1$' dir. $T_L(x,y) = T_L(x,z)$ olduğundan $x+y-1 = x+z-1$' dir. Böylece, $y = z$ olup T_L şartlı kısaltma kuralını sağlar.

T_L Lukasiewicz t-normu limit özelliğini sağlar. Gerçekten;
her $n \in \mathbb{N}$ için $nx-(n-1) > 0$ olsun. Buradan $nx-(n-1) > 0$ olduğundan $nx > (n-1)$' dir. Böylece $x > \frac{n-1}{n}$ olduğundan $x > \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = 1$ çelişkisi elde edilir. O halde bir $n \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki $nx-(n-1) \leq 0$' dır. Böylece bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı mevcuttur öyle ki $x_{T_L}^{(n)} = max(nx-(n-1),0) = 0$' dır. Her $m > n$ için $x_{T_L}^{(m)} \leq x_{T_L}^{(n)} = 0$ olduğundan $\lim_{m\to\infty} x_{T_L}^{(m)} = 0$' dır. Böylece T_L limit özelliğini sağlar.

$T_L(1/2, 1/2) = 0 = T_L(1/2, 1/3)$ olmasına rağmen $1/2 \neq 1/3$ olduğundan kısaltma kuralı sağlanmaz.

$x = 1/2$, $y = 1/3 < z = 1/2$ olsun. $T_L(x,y) = 0$ ve $T_L(x,z) = 0$ olup $T_L(x,y) < T_L(x,z)$ sağlanmaz. Böylece, T_L kesin monoton değildir.

- T_D drastik çarpımı Arşimedyandır, şartlı kısaltma özelliğini ve limit

özelliğini sağlar ancak Tanım 1.38' de verilen diğer özelliklerin hiçbirini sağlamaz.

T_D drastik çarpımı Arşimedyandır. $x,y \in (0,1)$olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için
$x_{T_D}^{(n)} = 0$ ve $y > 0$ olduğundan $x_{T_D}^{(n)} < y$' dir. Böylece T_D Arşimedyandır.

$T_D(x,y) = T_D(x,z) > 0$ olsun. $T_D(x,y) \neq 0$ olduğundan $y = 1$ veya $x = 1$' dir. $y = 1$ ise $T_D(x,y) = x = T_D(x,z)$ olup buradan $z = 1$ olduğu elde edilir. Böylece $y = z$' dir. $x = 1$ ise $T_D(x,y) = y$ ve $T_D(x,z) = z$' dir. $T_D(x,y) = T_D(x,z)$ olduğundan $y = z$' dir. Böylece T_D şartlı kısaltma kuralını sağlar.

Her $x \in (0,1)$ için $x_{T_D}^{(n)} = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_{T_D}^{(n)} = 0$' dır. Böylece T_D limit özelliğini sağlar.

$T_D(1/2, 1/3) = 0 = T_D(1/2, 3/4)$ olup $1/3 \neq 3/4$ olduğundan T_D kısaltma özelliğini sağlamaz.

$1/3 < 1/2$ olup $T_D(1/2, 1/3) = 0$ ve $T_D(1/2, 1/2) = 0$ olduğundan $T_D(1/2, 1/3) < T_D(1/2, 1/2)$ sağlanmaz. Böylece, T_D kesin monoton değildir.

Önerme 1.7. [49] T bir t-norm olsun. Bu takdirde;

(i) T kesin monotondur $\Leftrightarrow$ T kısaltma özelliğini sağlar.

(ii) T kesin monoton ise T sadece trivial idempotent elemanlara sahiptir.

(iii) T kesin monoton ise T sıfır bölene sahip değildir.

Teorem 1.19. [49] Bir t-norm T için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) T Arşimedyandır.

(ii) T limit özelliğini sağlar.

(iii) T sadece trivial idempotent elemanlara sahiptir. Bir $x_0 \in (0,1)$ için $\lim_{x \searrow x_0} T(x,x) = x_0$ ise $T(y_0, y_0) = x_0$ olacak şekilde bir $y_0 \in (x_0, 1)$ elemanı mevcuttur, burada $\lim_{x \searrow x_0} T(x,x)$ notasyonu t-norm T' nin (x_0, x_0) noktasındaki sağ taraflı limitini göstermektedir.

Tanım 1.39. [49]

(i) Bir t-norm T' ye kesin denir$\Leftrightarrow$ T süreklidir ve kesin monotondur.

(ii) Bir t-norm T' ye nilpotent denir $\Leftrightarrow$ T süreklidir ve her $a \in (0,1)$ elemanı T' nin bir nilpotent elemanıdır.

Örnek 1.18. T_P çarpım t-normunun ve T_L Lukasiewicz t-normunun sürekli olduğu açıktır. $x, y, z \in [0,1]$ için $x > 0$ ve $y < z$ olsun. $T_P(x,y) = xy < xz = T_P(x,z)$ olduğundan T_P çarpım t-normu kesin monotondur. Böylece T_P kesin t-normdur. Ayrıca, her $a \in (0,1)$ elemanı T_L Lukasiewicz t-normunun bir nilpotent elemanı olduğundan (bkz. Örnek 1.16) T_L bir nilpotent t-normdur.

Önerme 1.8. [49] T bir t-norm olsun. Bu takdirde

(i) Eğer T sağ sürekli ve trivial idempotent elemanlara sahip ise Arşimedyandır.

(ii) Eğer T sağ sürekli ve şartlı kısaltma kuralını sağlıyor ise Arşimedyandır.

(iii) Eğer her $x_0 \in (0,1)$ için $\lim_{x \searrow x_0} T(x,x) < x_0$ ise T Arşimedyandır.

(iv) T kesin ise Arşimedyandır.

(v) Keyfi $x \in (0,1)$ elemanı T' nin bir nilpotent elemanı ise T Arşimedyandır.

Önerme 1.9. [49] Her Arşimedyan t-norm T için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) T sol süreklidir.

(ii) T süreklidir.

Örnek 1.19.

(i) T_L Lukasiewicz t-normu bir Arşimedyan t-normun kesin monoton olması gerekmediğine ve limit özelliğinin kısaltma özelliğini gerektirmediğine örnektir. T_P çarpım t-normu nilpotent elemana sahip olmayan sürekli Arşimedyan t-norma bir örnektir. T_D drastik çarpımı her $a \in (0,1)$ elemanı nilpotent eleman olan fakat sürekli olmayan Arşimedyan t-norma örnektir.

(ii) $T(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{2}, & (x,y) \in [0,1)^2, \\ min(x,y), & \text{Aksi halde,} \end{cases}$

ile tanımlanan dönüşüm sürekli olmayan ve böylece kesin olması gerekmeyen bir kesin monoton t-normdur.

Öncelikle bu t-normun sürekli olmadığını gösterelim. $x_n = 1 - {}^1/_n$, $n \geq 1$ ve $y_0 = {}^1/_2$ olsun. $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} T(x_n, y_0) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \frac{(1-{}^1/_n)\cdot\frac{1}{2}}{2} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{4}\left(1 - {}^1/_n\right) = \frac{1}{4}$' dir. Diğer taraftan $T(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} x_n, y_0) = T\left(1, {}^1/_2\right) = {}^1/_2$ olup $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} T(x_n, y_0) \neq T(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} x_n, y_0)$' dir. Buradan, T t-normu Önerme 1.5 ile sürekli değildir. Böylece, T t-normu kesin t-norm da değildir.

Fakat T t-normu kesin monotondur. Gerçekten, $x > 0$ ve $y < z$ olsun. $x \in (0,1)$ ve $y, z \in [0,1)$ alalım. $x > 0$ ve $y < z$ olduğundan $xy < xz$' dir. Buradan $\frac{xy}{2} < \frac{xz}{2}$ olup $T(x,y) < T(x,z)$' dir. $x \in (0,1), y \in [0,1)$ ve $z \notin [0,1)$ olsun. Buradan $z = 1$ olup $T(x,y) = \frac{xy}{2} < \frac{xz}{2} = \frac{x}{2} < x = T(x,z)$' dir. $x \notin [0,1)$ ve $y, z \in [0,1)$ olsun. Buradan $x = 1$ olup $T(x,y) = y < z = T(x,z)$ eşitsizliği sağlanır. Böylece T t-normu kesin monotondur.

(iii) $T(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \left[0, {}^1/_2\right]^2, \\ 2\left(x - {}^1/_2\right)\left(y - {}^1/_2\right) + {}^1/_2, & (x,y) \in ({}^1/_2, 1]^2, \\ min(x,y), & \text{Aksi halde} \end{cases}$

ile tanımlanan dönüşüm sürekli olmayan ve sadece trivial idempotent elemanlara sahip olan bir t-normdur. Öncelikle bu t-normun sürekli olmadığını gösterelim. $x_n = {}^1/_2 + {}^1/_n$, $n \geq 2$ ve $y_0 = {}^1/_2$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} T(x_n, y_0) &= \lim_{n\to\infty} T({}^1/_2 + {}^1/_n, {}^1/_2) \\ &= \lim_{n\to\infty} min({}^1/_2 + {}^1/_n, {}^1/_2) \\ &= \lim_{n\to\infty} {}^1/_2 = {}^1/_2 \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan $T\left(\lim_{n\to\infty} x_n, y_0\right) = T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$ olup $\lim_{n\to\infty} T(x_n, y_0) \neq T\left(\lim_{n\to\infty} x_n, y_0\right)$' dir. Böylece, Tanım 1.34 süreklilik tanımı ve Önerme 1.4 ile T sürekli değildir.

$a \in [0,1]$ keyfi idempotent eleman olsun. O halde $T(a,a) = a$' dır. Eğer $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ise $T(a,a) = 0$ olduğundan $a = 0$ elde edilir. $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ olsun. O halde $T(a,a) = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = a$' dır. Buradan gerekli düzenlemeler yapılarak denklem çözülürse, $a = 1$ veya $a = \frac{1}{2}$ olduğu görülür. $a > \frac{1}{2}$ olduğundan $a = 1$ olmalıdır. Böylece, $a \in [0,1]$ T t-normunun keyfi idempotent elemanı ise ya $a = 0$ ya da $a = 1$' dir. Bu ise T t-normunun sadece trivial idempotent elemanlara sahip bir t-norm olduğu anlamına gelir.

Ayrıca T, $\left[0, \frac{1}{2}\right]^2$ üzerinde sabit olduğundan kesin monoton değildir. Üstelik, her $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = \frac{1}{2}$ olduğundan T t-normu limit özelliğini ve Teorem 1.19' un bir sonucu olarak Arşimedyanlığı sağlamaz. Bu ise sadece trivial idempotent elemanlara sahip olan bir t-normun kesin monoton veya Arşimedyan olması gerekmediğini gösterir.

Teorem 1.20. [49] T sürekli Arşimedyan bir t-norm olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) T nilpotenttir.

(ii) T' nin bir nilpotent elemanı mevcuttur.

(iii) T' nin bir sıfır böleni mevcuttur.

(iv) T kesin değildir.

Tanım 1.40. T bir t-norm, S bir t-konorm olsun. T' e S üzerinde dağılmalıdır denir $:\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in [0,1]$ için

$$T\big(x, S(y,z)\big) = S(T(x,y), T(x,z))$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde S, T üzerinde dağılmalıdır denir $:\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in [0,1]$ için

$$S\big(x, T(y,z)\big) = T(S(x,y), S(x,z))$$

eşitliği sağlanır. Eğer S, T üzerinde ve T, S üzerinde dağılmalı ise (T, S) çiftine dağılmalı çift denir.

Önerme 1.10. [49] T bir t-norm ve S bir t-konorm olsun. Bu takdirde

(i) S, T üzerinde dağılmalıdır $\Leftrightarrow T = T_M$' dir.

(ii) T, S üzerinde dağılmalıdır $\Leftrightarrow S = S_M$' dir.

(iii) (T, S) bir dağılmalı çifttir $\Leftrightarrow T = T_M$ ve $S = S_M$' dir.

Uyarı 1.10. Eğer T bir t-norm, S dual t-konormu ve T, S üzerinde (veya S, T üzerinde) dağılmalı ise $T = T_M$ ve $S = S_M$' dir.

1.3.2.2. Yarı Gruplar ve T-normlar

Tanım 1.41.

(i) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $*$, X üzerinde bir ikili işlem, yani $*: X^2 \longrightarrow X$ bir fonksiyon olsun. $(X,*)$ çiftine bir yarı grup denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in X$ için

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

eşitliği sağlanır.

(ii) Bir $(X,*)$ yarı grubuna değişmeli denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in X$ için

$$x * y = y * x$$

dir.

(iii) Bir $e \in X$ elemanına $(X,*)$ yarı grubunun etkisiz veya birim elemanı denir : $\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $x * e = e * x = x$ eşitliği sağlanır.

Birim elemanlı bir yarı gruba monoid denir.

(iv) Bir $a \in X$ elemanına $(X,*)$ yarı grubunun sıfırlayanı denir : $\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için

$$x * a = a * x = a$$

eşitliği sağlanır.

(v) Bir $x \in X$ elemanına $(X,*)$ yarı grubunun idempotent elemanı denir : $\Leftrightarrow$

$$x * x = x$$

dir.

(vi) Eğer $(X,*)$ bir a sıfırlayanına sahip ise bir $x \in X \setminus \{a\}$ elemanına $(X,*)$' ın nilpotent elemanı denir :$\Leftrightarrow$ Bir $n \in \mathbb{N}$, $x^n = a$ olacak şekilde mevcuttur.

Bir $(X,*)$ yarı grubunda birim eleman ve sıfırlayan eleman mevcut ise tek oldukları kolayca görülür. Bir $(X,*)$ yarı grubunda birim elemanın ve sıfırlayan elemanın (mevcutsa) idempotent oldukları açıktır. Böyle idempotent elemanlara trivial idempotent elemanlar denir.

Tanım 1.42. $\preccurlyeq$, X üzerinde kısmen veya tam sıralama olsun. $(X,*,\preccurlyeq)$ üçlüsüne sırası ile kısmen sıralı yarı grup veya tam sıralı yarı grup denir $:\Leftrightarrow$ Her $x,y,z \in X$ için $y \preccurlyeq z$ ise $x * y \preccurlyeq x * z$ ve $y * x \preccurlyeq z * x$' dir.

Örnek 1.20. $*: \left[{}^{1}\!/_{2}, 1\right]^2 \to \left[{}^{1}\!/_{2}, 1\right]$ işlemi

$x * y = max\left(xy, {}^{1}\!/_{2}\right)$

ile tanımlansın. Bu takdirde $(\left[{}^{1}\!/_{2}, 1\right],*,\leq)$ değişmeli, 1-birim elemanlı, ${}^{1}\!/_{2}$ sıfırlayanlı, tam sıralı bir yarı gruptur.

Tanım 1.43.

(i) $(X,*)$ ve $(Y,\diamond)$ yarı gruplarına izomorftur denir:$\Leftrightarrow$ Bir $\varphi: X \longrightarrow Y$, 1-1 ve örten fonksiyonu her $x,y \in X$ için

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \diamond \varphi(y), \tag{1.11}$$

eşitliğini sağlar.

(ii) İki kısmen veya tam sıralı $(X,*,\preccurlyeq)$ ve $(Y,\diamond,\sqsubseteq)$ yarı grupları izomorftur denir:$\Leftrightarrow$ (1.11)' i sağlayan $\varphi: X \longrightarrow Y$ 1-1, örten fonksiyonu bir sıra korur dönüşümdür, yani her $x,y \in X$ için

$x \preccurlyeq y$ ise $\varphi(x) \sqsubseteq \varphi(y)$

dir.

Önerme 1.11. [49]

(i) $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur$\Leftrightarrow$ $([0,1],T,\leq)$ üçlüsü 1-birim elemanlı, 0- sıfırlayanlı, tam sıralı, değişmeli yarı gruptur.

(ii) $S: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu bir t-konormdur$\Leftrightarrow$ $([0,1],S,\leq)$ üçlüsü 0- birimli, 1-sıfırlayanlı, tam sıralı, değişmeli yarı gruptur.

(iii) Eğer $[a,b] \subseteq [-\infty,\infty]$, $([a,b],*,\leq)$ b birimli tam sıralı değişmeli yarı grup ve $\varphi: [0,1] \to [a,b]$ fonksiyonu 1-1, örten ve kesin artan ise; yani her $x_1,x_2 \in [0,1]$ için $x_1 < x_2$ iken $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ ise

$T(x,y) = \varphi^{-1}\big(\varphi(x) * \varphi(y)\big)$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur. Açık olarak, iki tam sıralı $([a,b],*,\leq)$ ve $([0,1],T,\leq)$ yarı grupları izomorftur.

(iv) Özel olarak, T bir t-norm, S bir t-konorm ve $\varphi: [0,1] \to [0,1]$ kesin artan 1-1 ve örten bir fonksiyon ise

$T_\varphi(x,y) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x),\varphi(y)))$

$S_\varphi(x,y) = \varphi^{-1}(S(\varphi(x),\varphi(y)))$

ile tanımlanan T_φ, S_φ: $[0,1]^2 \to [0,1]$ işlemleri sırasıyla T ve S' ye izomorf olan t-norm ve t-konormdur.

Örnek 1.21. $*: [1/2\,, 1]^2 \to [1/2\,, 1]$ işlemi

$x * y = max(xy, 1/2)$

ile tanımlansın. Bu takdirde T_L Lukasiewicz t-normu ve $*$ işlemi izomorftur.

$f: [a,b] \to [c,d]$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x_1, x_2 \in [a,b]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) \geq f(x_2)$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna artmayan fonksiyon denir.

Tanım 1.44. $[a,b] \subseteq [-\infty,\infty]$ olsun. $[a,b]$ üzerinde bir $\varphi: [a,b] \to [a,b]$ artmayan fonksiyonuna involüsyon denir:⟺ $\varphi \circ \varphi = id_{[a,b]}$' dir.

1.3.2.3. Kafes Sıralı Monoidler ve Sol Sürekli T-normlar

Tanım 1.45. [31, 49, 77] $(L,\leq)$ bir kafes ve $(L,\odot)$ bir monoid olsun.

(i) $(L,\odot,\leq)$ üçlüsüne bir kafes sıralı monoid (veya ℓ- monoid) denir:⟺ Her $x,y,z \in L$ için

(LM1) $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$

(LM2) $(x \vee y) \odot z = (x \odot z) \vee (y \odot z)$

eşitlikleri sağlanır.

(ii) Bir $(L,\odot,\leq)$ ℓ- monoidine komütatif denir:⟺ $(L\ \odot)$ yarı grubu komütatiftir.

(iii) Bir $(L,\odot,\leq)$ ℓ- monoidine rezidual ℓ- monoid denir:⟺ $\to_\odot: L^2 \longrightarrow L$ ($\odot$- rezidü) işlemi her $x,y,z \in L$ için

(R) $x \odot y \leq z \Leftrightarrow x \leq y \to_\odot z$

olacak şekilde mevcuttur.

(iv) Bir $(L,\odot,\leq)$ ℓ- monoidine integral denir:⟺ $(L,\leq)$ kafesinde en büyük eleman mevcuttur ve bu en büyük eleman $(L,\odot)$ yarı grubunun birim elemanı ile çakışır.

Tanım 1.45' deki (iii) ve (iv) şartlarını sağlayan$(L,\odot,\leq)$ ℓ- monoidine bir integral, rezidual, ℓ- monoid denir. Bir integral, rezidual, ℓ- monoidde (R), $\to_\odot$ ikili işlemini tek türlü olarak belirler ve $\to_\odot$ ikili işlemine L üzerinde rezidü işlemi denir. Eğer, $(L,\odot)$

komütatif ise $(L, \odot, \leq)$ integral, rezidual, ℓ- monoidine, komütatif, integral, rezidual, ℓ- monoid (yani rezidual kafes) denir.

Tanım 1.46. [33] $M = (L, \odot, \leq)$ bir integral, komütatif, rezidual ℓ- monoid olsun. Eğer her $x, y \in M$ için

$$(x \to_{\odot} y) \vee (y \to_{\odot} x) = 1$$

ise, M cebirsel güçlü De Morgan kuralını sağlar denir.

Örnek 1.22. $x \odot y = \begin{cases} min(x,y), & x + y \leq 1, \\ max(x,y), & \text{Aksi halde,} \end{cases}$

ile tanımlanan $\odot: [0,1]^2 \to [0,1]$ için $([0,1], \odot, \leq)$ bir komütatif, rezidual, ℓ- monoiddir ve $\to_{\odot}$, $\odot$- reziduali

$$x \to_{\odot} y = \begin{cases} max(1-x, y), & x \leq y, \\ min(1-x, y), & \text{Aksi halde,} \end{cases}$$

şeklindedir.

Uyarı 1.11. $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir t-norm ise $([0,1], T, \leq)$ bir komütatif, integral, ℓ- monoiddir. Bu ifadenin tersi de doğrudur, yani $([0,1], T, \leq)$ bir komütatif, integral, ℓ-monoid ise, T bir t-normdur. Böylece komütatif, integral, ℓ-monoidler üzerindeki özellikler t-normlar için de sağlanır.

Önerme 1.12. [49] Keyfi $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(i) $([0,1], T, \leq)$ bir komütatif, integral, rezidual, ℓ- monoiddir.

(ii) T sol sürekli t-normdur. Bu durumda $\to_T$ T- reziduali

$$x \to_T y = Sup\{z \in [0,1] | T(x,z) \leq y\}$$

ile verilir.

Tanım 1.47. Bir komütatif, integral, ℓ- monoid $(L, \odot, \leq)$' e bölünebilir denir:$\Leftrightarrow$ Her $x, y \in L$ için

$x \leq y$ ise bir $z \in L$ elemanı $y \odot z = x$ olacak şekilde mevcuttur.

Uyarı 1.12. Bir komütatif, integral, rezidual, ℓ- monoid bölünebilirdir $\Leftrightarrow$ $x \wedge y = x \odot (x \to_{\odot} y)$ eşitliği sağlanır.

1.4. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar

Tanım 1.48. [39] L sınırlı bir kafes olsun. Bir üçgensel norm T (kısaca t-norm) L üzerinde komütatif, birleşme, monoton özelliklerini sağlayan 1- birim elemanlı bir ikili işlemdir.

Uyarı 1.13.

(i) T_1 ve T_2 sınırlı bir L kafesi üzerinde iki t-norm olsun. Eğer her $x, y \in L$ için $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ eşitsizliği sağlanıyor ise T_1, T_2 t-normundan daha zayıftır veya denk olarak T_2, T_1 t-normundan daha güçlüdür denir ve bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

(ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise yani $T_1 \leq T_2$ ve bir $x_0, y_0 \in L$ için $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ ise, bu durum $T_1 < T_2$ ile gösterilir.

$$T_W(x, y) = \begin{cases} x, & y = 1, \\ y, & x = 1, \\ 0, & \text{Aksi halde} \end{cases}$$

olsun. O halde T_W, L üzerinde bir t-normdur ve özel olarak $L = [0,1]$ olduğunda T_W, T_D ile gösterilir. L üzerindeki keyfi t-norm T için $T_W \leq T$ olduğundan bu t-norm, L üzerindeki en küçük t-normdur.

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki en büyük t-norm $T_\wedge(x, y) = x \wedge y$ ile verilir ve özel olarak $L = [0,1]$ olduğunda $T_\wedge = T_M$' dir.

Tanım 1.49. [14] T, sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm olsun. Bir $x \in L$ elemanına T' nin bir sıfır böleni denir $:\Leftrightarrow$ $x \wedge y \neq 0$ ve $T(x, y) = 0$ olacak şekilde bir $y \in L$ elemanı mevcuttur. T' nin sıfır bölenlerinin kümesi $Z(T)$ ile gösterilecektir.

Eğer $Z(T) = \emptyset$ ise T' ye sıfır bölensiz denir.

$L = [0,1]$ olarak alınırsa Tanım 1.49 ve Tanım 1.37 (iii)' deki sıfır bölen tanımlarının denk olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tanım 1.50. [10] Sınırlı bir L kafesi üzerindeki bir t-norm T' e bölünebilirdir denir $:\Leftrightarrow$ $x \leq y$ olan her $x, y \in L$ için $x = T(y, z)$ olacak şekilde bir $z \in L$ mevcuttur.

Sınırlı bir L kafesi üzerindeki T_W t-normu bölünebilir olmayan bir t-normdur. Diğer taraftan, $T_\wedge$ infimum t-normu bölünebilir bir t-normdur: $x \leq y$ olması $x \wedge y = x$ olmasına denktir.

Tanım 1.51. [14] Sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm T alalım. Bir $x \in L$ elemanına T' nin idempotent elemanıdır denir $:\Leftrightarrow$ $T(x, x) = x$ eşitliği sağlanır.

Açık olarak, 0 ve 1 elemanları herhangi bir t-normun idempotent elemanlarıdır. Bu elemanlara trivial idempotent elemanlar denir. Bunlardan farklı idempotent elemanlara da trivial olmayan idempotent elemanlar denir.

Tanım 1.52. [39]

(i) Sınırlı bir L kafesi üzerindeki bir t-norm T' ye $\vee$- dağılmalıdır denir $:\Leftrightarrow$

Her $a, b_1, b_2 \in L$ için

$$T(a, b_1 \vee b_2) = T(a, b_1) \vee T(a, b_2)$$

eşitliği sağlanır.

(ii) Bir L tam kafesi üzerindeki bir t-norm T'ye sonsuz $\vee$-dağılmalıdır denir :⟺ Her $\{a, b_\tau \in L;\ \tau \in I\} \subseteq L$ alt kümesi için $T(a, \bigvee_I b_\tau) = \bigvee_I T(a, b_\tau)$ eşitliği sağlanır.

Uyarı 1.14. Özel olarak $L = [0,1]$ ise bir t-norm T' nin $\vee$- dağılmalı olması sol sürekli olmasına denktir.

Önerme 1.13. [15] T, $[0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun. T bölünebilirdir ⟺ T süreklidir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar 'A T-partial order obtained from t-norms' isimli makalede yayınlanmıştır [44].

2.1. $\preccurlyeq_T$ -Üçgensel Sıralama

L sınırlı bir kafes ve T L üzerinde bir t-norm olsun. L üzerinde $\preccurlyeq_T$ bağıntısını

$$x \preccurlyeq_T y :\Leftrightarrow T(\ell, y) = x \text{ olacak şekilde bir } \ell \in L \text{ elemanı mevcuttur} \tag{2.1}$$

olarak tanımlayalım.

Önerme 2.1. L sınırlı bir kafes ve T L üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde, $(L, \preccurlyeq_T)$ kısmen sıralı bir kümedir.

İspat: $1 \in L$ ve her $x \in L$ için $T(1, x) = x$ olduğundan $x \preccurlyeq_T x$' dir. Böylece yansıma özelliği sağlanır.

$x, y \in L$, $x \preccurlyeq_T y$ ve $y \preccurlyeq_T x$ olsun. (2.1) ile $\ell_1, \ell_2 \in L$ elemanları

$T(\ell_1, y) = x$ ve $T(\ell_2, x) = y$

eşitliklerini sağlayacak şekilde mevcuttur. T t-normunun monotonluğu kullanılırsa

$x = T(\ell_1, y) \leq T(1, y) = y$

olduğu, yani $x \leq y$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde,

$y = T(\ell_2, x) \leq T(1, x) = x$

olduğundan $y \leq x$' dir. $\leq$' in ters simetrikliği kullanılarak $x = y$ olduğu elde edilir. Böylece $\preccurlyeq_T$ bağıntısı ters-simetri özelliğini sağlar.

Şimdi $\preccurlyeq_T$ bağıntısının geçişme özelliğini sağladığını gösterelim. $x, y, z \in L$, $x \preccurlyeq_T y$ ve $y \preccurlyeq_T z$ olsun. O halde $\ell_1, \ell_2 \in L$ elemanları

$T(\ell_1, y) = x$ ve $T(\ell_2, z) = y$

olacak şekilde mevcuttur. $T(\ell_1, \ell_2) \in L$ için

$T(T(\ell_1, \ell_2), z) = T\big(\ell_1, T(\ell_2, z)\big) = T(\ell_1, y) = x$

olduğundan

$x \preccurlyeq_T z$

dir. Böylece $\preccurlyeq_T$ bağıntısı geçişme özelliğini sağlar. Sonuç olarak $\preccurlyeq_T$, L üzerinde bir kısmen sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.1. Önerme 2.1 ile verilen $\preccurlyeq_T$ sıralama bağıntısına t-norm T' den elde edilen T-sıralama (üçgensel sıralama) denir.

Önerme 2.2. $(L, \leq)$ sınırlı bir kafes, T L üzerinde bir t-norm ve $\preccurlyeq_T$, t-norm T' den elde edilen kısmen sıralama olsun. Eğer $x \preccurlyeq_T y$ ise $x \leq y$, yani $\preccurlyeq_T \subseteq \leq$' dir.

İspat: $x \preccurlyeq_T y$ olsun. Tanım 2.1 ile bir $\ell \in L$ için

$$x = T(\ell, y)$$

sağlanır. $\ell \leq 1$ ve T' nin monotonluğu kullanılarak

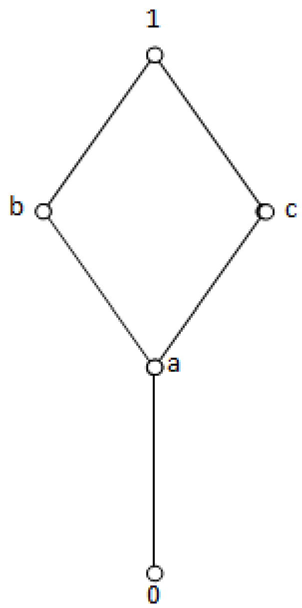
$$x = T(\ell, y) \leq T(1, y) = y$$

elde edilir. Böylece, $x \leq y$' dir.

Uyarı 2.1. Önerme 2.2' nin tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek:

$L = \{0, a, b, c, 1\}$ ve L üzerinde $\leq$ sıralaması Şekil 2.1' deki gibi verilsin.



Şekil 2.1. L üzerindeki $\leq$ sıralaması

$T = T_W$ alındığında, $a \leq b$ olduğu halde $a \not\preccurlyeq_{T_W} b$ olduğunu gösterelim. Farzedelim ki $a \preccurlyeq_{T_W} b$ olsun. O halde bir $\ell \in L$ elemanı için

$$T_W(\ell, b) = a$$

dır. $\ell = 0$ olsun. Bu durumda,

$$a = 0$$

olur ki bu bir çelişkidir. $\ell = a, b$ veya c olduğunda

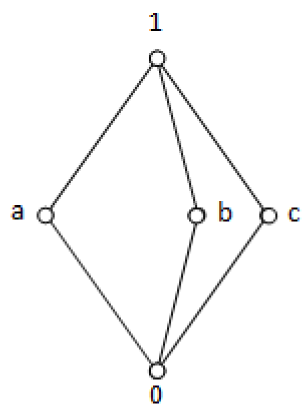
$$T_W(\ell, b) = 0 = a$$

olup yine bir çelişki elde edilir.

$\ell = 1$ olması durumunda ise

$$a = T_W(1, b) = b$$

olur ki bu ise yine bir çelişkidir. Böylece $T_W(\ell, b) = a$ olacak şekilde bir $\ell \in L$ elemanı mevcut değildir, yani $a \not\preccurlyeq_{T_W} b$' dir. L üzerindeki $\preccurlyeq_{T_W}$ aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.2. L üzerindeki $\preccurlyeq_{T_W}$ sıralaması

Önerme 2.3. L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. $\preccurlyeq_T$ ile $\leq$ sıralamalarının eşit olması için gerek ve yeter şart T t-normunun L üzerinde bölünebilir bir t-norm olmasıdır.

İspat: $\preccurlyeq_T = \leq$ olsun. $a, b \in L$ için $a \leq b$ ise $a \preccurlyeq_T b$' dir. Bu takdirde, bir $\ell \in L$ için

$$T(b, \ell) = a$$

dir. Böylece, T bölünebilir bir t-normdur.

Tersine olarak, T bölünebilir bir t-norm olsun. Önerme 2.2' den $\preccurlyeq_T \subseteq \leq$ olduğu açıktır. $a, b \in L$ için $a \leq b$ olsun. T bölünebilir bir t-norm olduğundan bir $z \in L$ elemanı

$$T(b, z) = a$$

olacak şekilde mevcuttur. Böylece $a \preccurlyeq_T b$ olup $\preccurlyeq_T = \leq$' dir.

2.2. $(L, \preccurlyeq_T)$ Kısmen Sıralı Kümesinin Bazı Özellikleri

Bölüm 2.1' de $(L, \preccurlyeq_T)$' nin bir kısmen sıralı küme olduğu gösterildi. Fakat, $(L, \preccurlyeq_T)$' nin genelde kafes olması gerekmez. Bu kısımda, bu konuya ait t-norm örnekleri verilecektir.

Uyarı 2.2. $(L, \leq)$' in bir zincir olması $(L, \preccurlyeq_T)$' nin bir zincir olmasını gerektirmez. Örneğin;

$L = [0,1]$ kafesini ve

$$T^{nM}(x,y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 1, \\ min(x,y), & \text{Aksi halde,} \end{cases} \quad [49]$$

ile tanımlanan nilpotent minimum t-normunu alalım.

$1/3 \leq 1/2$ olmasına rağmen, $1/3$ ve $1/2$ $L = [0,1]$ üzerinde $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz. Gerçekten;

$1/2 \preccurlyeq_{T^{nM}} 1/3$ olsun. Önerme 2.2 ile $1/2 \leq 1/3$ olması gerekir ki bu ise bir çelişkidir. Böylece $1/2 \not\preccurlyeq_{T^{nM}} 1/3$' dir.

Farzedelim ki $1/3 \preccurlyeq_{T^{nM}} 1/2$ olsun. O halde bir $\ell \in [0,1]$ için

$$T^{nM}(\ell, 1/2) = 1/3$$

sağlanır. $T^{nM}(\ell, 1/2) = 1/3$ olduğundan, T^{nM}' nin tanımı ile $\ell + 1/2 > 1$, yani

$$\ell > 1/2$$

olmalıdır. Buradan $1/3 = T^{nM}(\ell, 1/2) = min(\ell, 1/2) = 1/2$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Böylece, $1/3 \not\preccurlyeq_{T^{nM}} 1/2$' dir. Sonuç olarak, $1/3$ ve $1/2$ $L = [0,1]$ üzerinde $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz. Dolayısıyla, $(L, \preccurlyeq_{T^{nM}})$, bir zincir değildir.

Önerme 2.4. $(L, \leq)$ sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. $(L, \preccurlyeq_T)$ bir zincir ise T bölünebilir bir t-normdur; yani $\preccurlyeq_T = \leq$' dir.

İspat: $a, b \in L$ için $a < b$ ve $a \not\prec_T b$ olsun. $(L, \preccurlyeq_T)$ bir zincir olduğundan $b \prec_T a$ olup Önerme 2.2 ile $b < a$' dır. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $\preccurlyeq_T = \leq$ olup Önerme 2.3 ile T bölünebilir bir t-normdur.

Uyarı 2.3. L sınırlı bir kafes olsun. L üzerinde bir T t-normunu alalım. $X \subseteq L$ için L üzerinde $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre X kümesinin üst sınırlarının kümesini $\bar{X}_T$ ile ve $\preccurlyeq_T$

sıralamasına göre X kümesinin alt sınırlarının kümesini de $\underline{X}_T$ ile gösterelim. $X = \{a, b\}$ olarak alınırsa, $T(a, b) \preccurlyeq_T a$ ve $T(a, b) \preccurlyeq_T b$ olduğundan $T(a, b) \in \underline{\{a, b\}}_T$ olup

$$\underline{\{a, b\}}_T \neq \emptyset$$

dır. $T(a, 1) = a$ ve $T(b, 1) = b$ olduğundan $a \preccurlyeq_T 1$ ve $b \preccurlyeq_T 1$' dir. Buradan $1 \in \overline{\{a, b\}}_T$ olup

$$\overline{\{a, b\}}_T \neq \emptyset$$

dır. Ayrıca $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre en küçük eleman 0, en büyük eleman ise 1' dir. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $S_\alpha \subseteq X$ ailelerinin keyfi B ailesinin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre üst sınırların en küçüğü ve alt sınırların en büyüğü mevcut ise sırasıyla $\bigvee_T S_\alpha$ ve $\bigwedge_T S_\alpha$ ile gösterilecektir.

L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. L, $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre her zaman kafes olmayabilir. Bunu aşağıdaki örnekle inceleyelim.

Örnek 2.1. $L = [0,1]$ ve L üzerinde $T^{nM}: [0,1]^2 \to [0,1]$

$$T^{nM}(x, y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 1, \\ min(x, y), & \text{Aksi halde,} \end{cases}$$

olarak tanımlanan nilpotent minimum t-normu alalım. $(L, \preccurlyeq_{T^{nM}})$ infimum-yarı kafestir fakat supremum-yarı kafes değildir.

$x \preccurlyeq_{T^{nM}} y$ veya $y \preccurlyeq_{T^{nM}} x$ ise sırasıyla $x \wedge_{T^{nM}} y = x$ veya y' dir. Farzedelim ki $x \not\preccurlyeq_{T^{nM}} y$ ve $y \not\preccurlyeq_{T^{nM}} x$ olsun. Bu durumda

$$x + y \leq 1$$

olmalıdır. Çünkü $x + y > 1$ olsa $T^{nM}(x, y) = min\,(x, y)$' dir. Bu durumda

$$T^{nM}(x, y) = \text{x veya } y$$

olup $x \preccurlyeq_{T^{nM}} y$ veya $y \preccurlyeq_{T^{nM}} x$' dir. Bu ise kabulümüz ile çelişir.

$x + y \leq 1$ olsun. $0 \in \underline{\{x, y\}}_{T^{nM}}$ olduğu açıktır. $x \wedge_{T^{nM}} y = 0$ olduğunu gösterelim. $k \in \underline{\{x, y\}}_{T^{nM}} \setminus \{0\}$ olsun. Buradan,

$$k \preccurlyeq_{T^{nM}} x \text{ ve } k \preccurlyeq_{T^{nM}} y$$

dir. O halde, $\ell_1, \ell_2 \in [0,1]$ elemanları

$$0 \neq k = T^{nM}(x, \ell_1) = T^{nM}(y, \ell_2)$$

olacak şekilde mevcuttur. $T^{nM}(x, \ell_1) \neq 0$ olduğundan

$$x + \ell_1 > 1 \text{ ve } T^{nM}(x, \ell_1) = min\,(x, \ell_1)$$

dir. Eğer $T^{nM}(x, \ell_1) = min(x, \ell_1) = x$ ise

$$k = x \preccurlyeq_{T^{nM}} y$$

olduğu elde edilir ki bu ise x ve y' nin $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz olması ile çelişir. Böylece

$$T^{nM}(x,\ell_1)=\ell_1=k$$

dır. $x+\ell_1>1$ ve $x+y\leq 1$ olduğundan $k=\ell_1>1-x\geq y$' dır. $0\neq k=T^{nM}(y,\ell_2)$ olduğundan

$$k=T^{nM}(y,\ell_2)=min\,(y,\ell_2)$$

dır. $k=T^{nM}(y,\ell_2)=min\,(\mathrm{y},\ell_2)=y$ olamaz. Aksi halde x ve y $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre kıyaslanabilir olur ki bu ise kabulümüz ile çelişir. Böylece

$$k=T^{nM}(y,\ell_2)=\ell_2$$

olmalıdır. $k=\ell_1=\ell_2>1-x\geq y$ olduğundan

$$k=T^{nM}(y,\ell_2)=T^{nM}(y,k)=min(y,k)=y$$

olduğu elde edilir ki bu ise x ve y' nin $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz olması kabulü ile çelişir. Böylece $k=0$ olup $x\wedge_{T^{nM}}y$ mevcuttur.

Şimdi $(L,\preccurlyeq_{T^{nM}})$' nin supremum-yarı kafes olmadığını gösterelim. Uyarı 2.2 ile $1/3$ ve $1/2$' nin $L=[0,1]$ üzerinde $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz olduğu biliniyor. $k\in\overline{\{1/2,1/3\}}_{T^{nM}}$ olsun. O halde

$$1/2\preccurlyeq_{T^{nM}}k \text{ ve } 1/3\preccurlyeq_{T^{nM}}k$$

dır. Böylece $\ell_1,\ell_2\in[0,1]$ elemanları

$$1/2=T^{nM}(k,\ell_1) \text{ ve } 1/3=T^{nM}(k,\ell_2)$$

olacak şekilde mevcuttur. $1/2=min(k,\ell_1)$ ve $1/3=min(k,\ell_2)$ olduğundan

$$k+\ell_1>1 \text{ ve } k+\ell_2>1$$

dır. Uyarı 2.2' de verilen örnek ile, $1/2$ ve $1/3$, $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz. Buradan, $\ell_1=1/2$ ve $\ell_2=1/3$ olduğu elde edilir. Böylece, $1/2=T^{nM}(k,1/2)$ ve $1/3=T^{nM}(k,1/3)$ olduğundan

$$k+1/2>1 \text{ ve } k+1/3>1$$

dır. Buradan

$$k>2/3>1/2$$

dır. Böylece $\overline{\{1/2,1/3\}}_{T^{nM}}\subseteq(2/3,1]$ olduğu elde edilir.

Şimdi $(^2/_3\,,1] \subseteq \overline{\{^1/_2\,,^1/_3\}}_{T^{nM}}$ olduğunu gösterelim. $x \in (^2/_3\,,1]$ olsun. Böylece $x > {}^2/_3$' dir. Buradan

$$T^{nM}(x, {}^1/_2) = min(x, {}^1/_2) = {}^1/_2$$

ve

$$T^{nM}(x, {}^1/_3) = min(x, {}^1/_3) = {}^1/_3$$

olup ${}^1/_2 \preccurlyeq_{T^{nM}} x$ ve ${}^1/_3 \preccurlyeq_{T^{nM}} x$' dir. Dolayısıyla

$$x \in \overline{\{^1/_2\,,^1/_3\}}_{T^{nM}}$$

dir. Böylece $(^2/_3\,,1] = \overline{\{^1/_2\,,^1/_3\}}_{T^{nM}}$ eşitliği elde edilir. Buradan, $\preccurlyeq_{T^{nM}}$ sıralamasına göre $(^2/_3\,,1]$ kümesinin en küçük elemanı mevcut olmadığından $([0,1], \preccurlyeq_{T^{nM}})$ supremum- yarı kafes değildir.

Uyarı 2.1' de verilen özel L kafesi ve bu kafes üzerinde tanımlı T_W t-normu için $(L, \preccurlyeq_{T_W})$' nın bir kafes olduğu kolaylıkla görülebilir. Aşağıda verilen Önerme 2.5 ile, her sınırlı L kafesi ve L üzerinde verilen T_W t-normu için $(L, \preccurlyeq_{T_W})$' nın kafes olduğu gösterilmiştir.

Önerme 2.5. L sınırlı bir kafes olsun. Eğer $T = T_W$ ise keyfi $a \in L \setminus \{0,1\}$ için

$$a \wedge_{T_W} b = 0 \text{ ve } a \vee_{T_W} b = 1, \forall b \in L \setminus \{0,1,a\}$$

dır. Böylece $(L, \preccurlyeq_{T_W})$ bir kafestir.

İspat: Her $a, b \neq 0,1$ ve $a \neq b$ için $T_W(a,b) = 0$ ve her $k \in L$ için $T_W(a,k) \neq b$, $T_W(b,k) \neq a$ olduğundan a ve b $\preccurlyeq_{T_W}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz.

$a \in L \setminus \{0,1\}$ keyfi alalım. Her $b \in L \setminus \{0,1,a\}$ için $a \wedge_{T_W} b = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Farzedelim ki $a \wedge_{T_W} b = x \neq 0$ olsun. O halde

$$x \preccurlyeq_{T_W} a \quad \text{ve} \quad x \preccurlyeq_{T_W} b$$

dir. Böylece $x_1 \in L \setminus \{0\}$ elemanı

$$T_W(a, x_1) = x \neq 0$$

olacak şekilde mevcuttur. Eğer $x = a$ ise a ve b kıyaslanamaz olduğundan çelişkidir. Eğer $T_W(a, x_1) = 1$ veya x_1 ise $a = 1$ olur ki bu ise a' nın seçimi ile çelişir. Böylece $a \wedge_{T_W} b = 0$' dır.

$a \in L \setminus \{0,1\}$ keyfi alalım. Her $b \in L \setminus \{0,1,a\}$ için $a \vee_{T_W} b = 1$ olduğunu gösterelim. $a \vee_{T_W} b = x$ olsun. O halde

$a \preccurlyeq_{T_W} x$ ve $b \preccurlyeq_{T_W} x$

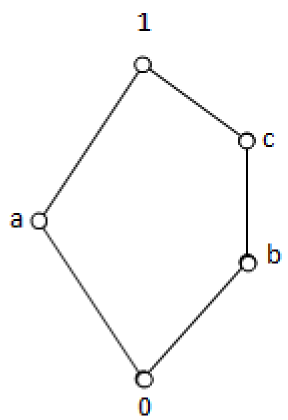
dir. Böylece $x_1, x_2 \in L \setminus \{0\}$ elemanları

$T_W(x, x_1) = a$ ve $T_W(x, x_2) = b$

olacak şekilde mevcuttur. Eğer $x = a$ ise $T_W(a, x_2) = b$ olur ki bu ise a ve b' nin $\preccurlyeq_{T_W}$ sıralamasına göre kıyaslanamaz olması ile çelişir. O halde $x_1 = a$ olup, $x = 1$ olmalıdır. Böylece $a \vee_{T_W} b = 1$ olup $(L, \preccurlyeq_{T_W})$ bir kafestir.

Önerme 2.5'in tersinin doğru olmadığına bir örnek olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.2. Kafes diyagramı aşağıdaki şekilde verilen $(L = \{0, a, b, c, 1\}, \leq)$ kafesini alalım:



Şekil 2.3. $(L, \leq)$ kafesi

$T: L^2 \to L$ fonksiyonunu

$$T(x, y) = \begin{cases} 0, & x, y \in \{b, c\}, \\ x \wedge y, & \text{Aksi halde,} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde, T L üzerinde bir t-normdur. Gerçekten;

Öncelikle T' nin birleşme özelliğini sağladığını gösterelim. Her $x, y, z \in \{b, c\}$ için $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$ eşitliğinin sağlandığı açıktır. $x, y \in \{b, c\}$ ve $z \notin \{b, c\}$ olsun. O halde

$$T(T(x, y), z) = T(0, z) = 0 \wedge z = 0$$

dır. $z \notin \{b, c\}$ olduğundan $z \in \{0, a, 1\}$' dir. $z = 0$ veya $z = 1$ olduğunda eşitliğin sağlandığı açıktır. $z = a$ olsun. Buradan

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,0) = 0$$

olup eşitlik sağlanır. $x \in \{b,c\}$ ve $y,z \notin \{b,c\}$ olsun. $y,z \in \{0,1\}$ olması durumunda eşitlik her zaman sağlandığından $y,z = a$ olsun. Bu takdirde

$$T(T(x,y),z) = T(0,a) = 0$$

ve

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x,a) = x \wedge a = 0$$

olup eşitlik sağlanır. $x,y,z \notin \{b,c\}$ için eşitliğin sağlandığı açıktır. Böylece T birleşme özelliğini sağlar.

Şimdi T' nin monoton olduğunu gösterelim. $x < y$ ve $x \in \{b,c\}$ olsun. Bu takdirde $y = 1$ olmalıdır. Eğer $z \in \{b,c\}$ ise

$$T(x,z) = 0 \leq T(y,z) = z$$

dir. $z \notin \{b,c\}$ olsun. Buradan $\leq$' in monotonluğu kullanılırsa

$$T(x,z) = x \wedge z \leq z = 1 \wedge z = T(y,z)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Şimdi $x \leq y$ ve $x \notin \{b,c\}$ olsun. Eğer $y \in \{b,c\}$ ise $x = 0$ olup

$$T(x,z) = 0 \leq T(y,z)$$

dir. $y \notin \{b,c\}$ olsun. Buradan

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

olup T monotondur. Her $x \in L$ için $T(x,1) = x \wedge 1 = x$ olduğundan sınır şartı sağlanır. Her $x,y \in \{b,c\}$ için $T(x,y) = 0 = T(y,x)$' dir. $x \notin \{b,c\}$ veya $y \notin \{b,c\}$ ise

$$T(x,y) = x \wedge y = y \wedge x = T(y,x)$$

olup T komütatiftir. Böylece, T bir t-normdur.

Şimdi a, b ve c elemanlarının $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanamadığını gösterelim. Farzedelim ki $b \preccurlyeq_T c$ olsun. O halde, bir $\ell \in L$ elemanı

$$T(c,\ell) = b$$

olacak şekilde mevcuttur. Eğer $\ell \in \{b,c\}$ olsa,

$$0 = T(c,\ell) = b$$

çelişkisi elde edilir. Buradan, $\ell \in L \setminus \{b,c\}$' dir. $\ell = a$ ise

$$b = T(c,\ell) = T(c,a) = c \wedge a = 0$$

olduğundan bir çelişki elde edilir. $\ell = 0$ olsa $0 = b$ olur ki bu ise yine bir çelişkidir. Bu durumda $\ell = 1$ olmalıdır. Bu ise bizi $c = T(c, 1) = b$ çelişkisine götürür. Buradan, $T(c, \ell) = b$ olacak şekilde bir $\ell \in L$ mevcut değildir. Böylece

$$b \npreccurlyeq_T c$$

dir. Diğer taraftan, Önerme 2.2 ile $c \npreccurlyeq_T b$' dir. Böylece, b ve c elemanları $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanamaz.

Şimdi farzedelim ki $a \preccurlyeq_T b$ olsun. O halde $\ell^* \in L$ elemanı

$$T(b, \ell^*) = a$$

olacak şekilde mevcuttur. Buradan $\ell^* = b$ veya c olamaz. Eğer $\ell^* = b$ veya c olsa $a = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Böylece, $\ell^* \in \{0, a, 1\}$' dir. $\ell^* = 0$ ve $\ell^* = 1$ ise sırasıyla $a = 0$ ve $a = 1$ çelişkisi elde edilir. $\ell^* = a$ ise $a = T(b, \ell^*) = b \wedge a = 0$ olup yine bir çelişki elde edilir. Böylece $a \npreccurlyeq_T b$' dir.

$b \preccurlyeq_T a$ olduğunu kabul edelim. Bir $k \in L$ elemanı

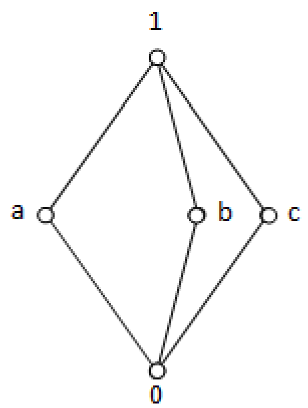
$$T(a, k) = b$$

olacak şekilde mevcuttur. Buradan $b = T(a, k) = a \wedge k$ olup eşitliğin her iki tarafının a ile supremumu alınırsa

$$1 = b \vee a = (a \wedge k) \vee a = a$$

çelişkisi elde edilir. Böylece, $b \npreccurlyeq_T a$ olduğu elde edilir. Bu ise a ve b elemanlarının kıyaslanamadığı anlamına gelir. Benzer şekilde a ve c elemanlarının da kıyaslanamadığı gösterilebilir.

Her $x \in L$ için $T(x, 1) = x$ ve $T(x, 0) = 0$ olduğundan sırasıyla $x \preccurlyeq_T 1$ ve $0 \preccurlyeq_T x$' dir. Böylece, L üzerinde $\preccurlyeq_T$ sıralaması aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.4. L üzerindeki $\preccurlyeq_T$ sıralaması

Böylece her $a \in L \setminus \{0,1\}$ için $a \wedge_T b = 0$ ve $a \vee_T b = 1, \forall b \in L \setminus \{0,1,a\}$ olmasına rağmen $T \neq T_W$' dır.

$(L, \preccurlyeq_T)$ bir kafes olacak şekilde $T = T_W$' dan farklı başka t-normlar da mevcuttur. Bunu aşağıdaki örnek üzerinde görelim.

Örnek 2.3. [0,1] üzerinde

$$T(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \left(0, {}^{1}\!/_{2}\right)^2, \\ min(x,y), & \text{Aksi halde,} \end{cases}$$

fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonun [0,1] üzerinde bir t-norm olduğu [49]' da verilmiştir. $([0,1], \preccurlyeq_T)$ sınırlı bir kafestir.

x ve y elemanlarının $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanması halinde $x \vee_T y$ ve $x \wedge_T y$' nin mevcut olduğu açıktır. $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanamayan x ve y elemanlarını alalım. $x \vee_T y = {}^{1}\!/_{2}$ olduğunu gösterelim.

$x \notin (0, {}^{1}\!/_{2})$ veya $y \notin (0, {}^{1}\!/_{2})$ olsun. O halde

$$T(x,y) = min\,(x,y)$$

olup x ve y $\preccurlyeq_T$' ye göre kıyaslanamaz olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece $x, y \in (0, {}^{1}\!/_{2})$' dir.

Şimdi ${}^{1}\!/_{2} \in \overline{\{x,y\}}_T$ olduğunu gösterelim. $T\left(x, {}^{1}\!/_{2}\right) = min\left(x, {}^{1}\!/_{2}\right) = x$ olduğundan

$$x \preccurlyeq_T {}^{1}\!/_{2}$$

dir. Benzer şekilde $y \preccurlyeq_T {}^{1}\!/_{2}$' dir. Böylece

$${}^{1}\!/_{2} \in \overline{\{x,y\}}_T$$

dir. $k \in \overline{\{x,y\}}_T$ keyfi alalım. Buradan $x \preccurlyeq_T k$ ve $y \preccurlyeq_T k$' dır. Böylece $\ell_1, \ell_2 \in [0,1]$ elemanları

$$x = T(k, \ell_1) \quad \text{ve} \quad y = T(k, \ell_2)$$

olacak şekilde mevcuttur. $x \neq 0$ olduğundan

$$x = T(k, \ell_1) = min(k, \ell_1)$$

dir. x ve y $\preccurlyeq_T$' e göre kıyaslanamadığından $x = k$ olamaz. O halde

$$\ell_1 = x \in \left(0, {}^{1}\!/_{2}\right)$$

dir. Buradan $k \notin \left(0, {}^{1}\!/_{2}\right)$ ve $k \neq 0$' dır; yani

$$k \geq {}^{1}\!/_{2}$$

dir. ${}^1\!/_2 = T\left(k, {}^1\!/_2\right) = min\left(k, {}^1\!/_2\right)$ olduğundan

$$k \succcurlyeq_T {}^1\!/_2$$

dir. Böylece $x \vee_T y = {}^1\!/_2$ olduğu elde edilir.

$k \in \underline{\{x, y\}}_T$ keyfi olsun. $k \preccurlyeq_T x$ ve $k \preccurlyeq_T y$ olduğundan $x_1, y_1 \in [0,1]$ elemanları

$$k = T(x, x_1) \quad \text{ve} \quad k = T(y, y_1)$$

olacak şekilde mevcuttur. x ve y $\preccurlyeq_T$' e göre kıyaslanamadığından $k = x$ veya $k = y$ olamaz. Böylece

$$k = x_1 \text{ ve } k = y_1$$

dir. Ayrıca, $k = T(x, k)$ olduğundan

$$k \leq x < {}^1\!/_2$$

dır. $x, k \in \left(0, {}^1\!/_2\right)$ olmasından $k = T(x, k) = 0$ olduğu elde edilir. Buradan $x \wedge_T y = 0$ olup $([0,1], \preccurlyeq_T)$ bir kafestir. $([0,1], \preccurlyeq_T)$ kafesinin sınırlı olduğu açıktır.

Önerme 2.6. L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Eğer $a, b \in L$ için $a \preccurlyeq_T b$ ise her $c \in L$ için

$$T(a, c) \preccurlyeq_T T(b, c)$$

dir.

İspat: $a, b \in L$ için $a \preccurlyeq_T b$ olsun. O halde, bir $x \in L$ elemanı için

$$T(x, b) = a$$

dır. T' nin birleşme özelliği kullanılırsa,

$$T(a, c) = T(T(x, b), c) = T(x, T(b, c))$$

olduğu elde edilir. Buradan,

$$T(a, c) \preccurlyeq_T T(b, c)$$

dir. Böylece t-norm T, $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre monotondur.

Sonuç 2.1. L sınırlı bir kafes ve T L üzerinde bir t-norm olsun. $(L, \preccurlyeq_T)$ bir kafes ise $T: (L, \preccurlyeq_T)^2 \longrightarrow (L, \preccurlyeq_T)$ bir t-normdur.

İspat: T, L sınırlı kafesi üzerinde bir t-norm olduğundan birleşme, komütatiflik ve sınır şartı özelliklerinin sağlandığı açıktır. Önerme 2.6 ile T, $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre monoton olduğundan $T: (L, \preccurlyeq_T)^2 \longrightarrow (L, \preccurlyeq_T)$ bir t-normdur.

2.3. H_T ve A Kümeleri Üzerinde Bazı Belirlemeler

L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. T' nin tüm idempotent elemanlarının kümesini, yani

$\{x \in L | T(x,x) = x\}$

kümesini H_T ile, elemanları atomların bir ailesinin supremumu şeklinde olan L'nin tüm elemanlarının kümesini, yani

$\{a \in L | a$ atomların bir ailesinin supremumuna eşittir$\}$

kümesini $\boldsymbol{A}$ ile gösterelim.

Önerme 2.7. $L = [0,1]$ ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. O halde $(H_T, \preccurlyeq_T)$ bir zincirdir.

İspat: a ve b, $[0,1]$ üzerinde iki idempotent eleman olsun. $a, b \in [0,1]$ olduğundan $a \leq b$ veya $b \leq a$' dır. Farzedelim ki $a \leq b$ olsun.

$a = T(a,a) \leq T(a,b) \leq T(a,1) = a$

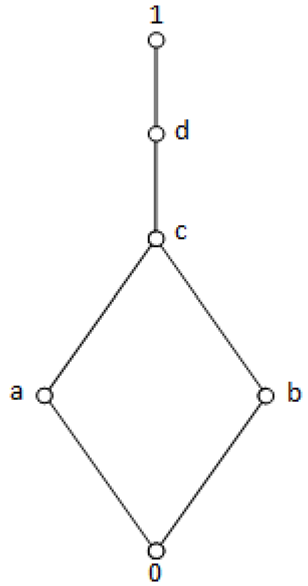
olduğundan

$T(a,b) = a$

dır. Buradan $a \preccurlyeq_T b$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde $b \leq a$ ise $b \preccurlyeq_T a$ olduğu gösterilebilir. Böylece $(H_T, \preccurlyeq_T)$ bir zincirdir.

Uyarı 2.4. Genel olarak L bir zincir ise Önerme 2.7 yine doğrudur. Şimdi zincir olmayan L için Önerme 2.7' nin sağlanmadığını gösteren aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 2.4. Kafes diyagramı aşağıdaki gibi verilen $L = (\{0, a, b, c, d, 1\}, \leq)$ kafesini alalım.



Şekil 2.5. $(L, \leq)$ kafesi

$T: L^2 \to L$ fonksiyonunu her $x, y \in L$ için

$$T(x,y) = \begin{cases} c, & x = d \text{ ve } y = d, \\ x \wedge y, & \text{Aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde T, L üzerinde bir t-normdur. Gerçekten;

Öncelikle T' nin birleşme özelliğini sağladığını gösterelim. Her $x, y, z \in L \setminus \{d\}$ için

$$T(T(x,y),z) = (x \wedge y) \wedge z$$
$$= x \wedge (y \wedge z) = T\big(x, T(y,z)\big)$$

olduğundan eşitlik sağlanır. Eğer $x, y, z = d$ ise eşitliğin sağlandığı açıktır. $x, y = d$ ve $z \geq d$ olsun. Bu durumda

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,d) = c$$

ve

$$T(T(x,y),z) = T(c,z) = c \wedge z = c$$

olup eşitlik sağlanır. $z < d$ olsun. Bu takdirde

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,z) = z \text{ ve}$$
$$T(T(x,y),z) = T(c,z) = c \wedge z = z$$

olup eşitlik sağlanır. $x = d$ ve $y, z \in L \setminus \{d\}$ ise

$$T(x,T(y,z)) = T(x, y \wedge z) = x \wedge (y \wedge z)$$

ve

$$T(T(x,y),z) = T(x \wedge y, z) = (x \wedge y) \wedge z$$

olup, açık olarak eşitlik sağlanır. Böylece birleşme özelliği sağlanır.

T' nin komütatifliği sağladığı açıktır. Her $x \in L$ için $T(x,1) = x \wedge 1 = x$ olduğundan sınır şartı sağlanır.

Şimdi T' nin monotonluğu sağladığını gösterelim. $x, y \in L$ için $x \leq y$ ve $y = d$ olsun. Eğer $x = d$ ise $x = y$ olup her $z \in L$ için

$$T(x,z) = T(y,z)$$

dir. $x \neq d$ olsun. Buradan $x \leq y$ ve $y = d$ olduğundan $x \leq c$' dir. Eğer $z = d$ ise

$$T(x,z) = x \wedge z = x \text{ ve } T(y,z) = c$$

olup $x \leq c$ olduğundan $T(x,z) \leq T(y,z)$ eşitsizliği sağlanır. $z \neq d$ olsun. O halde

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

olup eşitsizlik sağlanır. Böylece $x \leq y$ ve $y = d$ olduğunda eşitsizlik sağlanır. Şimdi $x, y \in L$, $x \leq y$ için $y \neq d$ olsun. O halde $x \neq d$ olup her $z \in L$ için

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece T, monotonluğu sağlar. Bu takdirde, T bir t-normdur.

Her $x \in L \setminus \{d\}$ için $T(x,x) = x$ olduğundan $H_T = L \setminus \{d\} = \{0, a, b, c, 1\}$' dir. a ve b, $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre kıyaslanamadığından $(H_T, \preccurlyeq_T)$ bir zincir değildir. Gerçekten;

Farzedelim ki $a \preccurlyeq_T b$ olsun. Buradan, bir $k \in L$ elemanı

$$T(b,k) = a$$

olacak şekilde mevcuttur. T' nin tanımı ile $b \wedge k = a$ olup eşitliğin her iki tarafının b elemanı ile supremumu alınırsa

$$b = (b \wedge k) \vee b = a \vee b = c$$

çelişkisi elde edilir. Böylece, $a \not\preccurlyeq_T b$' dir. Benzer şekilde $b \not\preccurlyeq_T a$ olup $(H_T, \preccurlyeq_T)$ bir zincir değildir.

Önerme 2.8. [62] $(L, \leq)$ sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde, her $a, b \in H_T$ için $T(a,b) \in H_T$' dir.

İspat: T t-normun birleşme ve değişme özelliği kullanılırsa

$$T(T(a,b), T(a,b)) = T(T(T(a,b),a),b)$$

$$= T(T(T(b,a),a),b) = T(T(b,T(a,a)),b)$$
$$= T(T(b,a),b) = T\big(a,T(b,b)\big) = T(a,b)$$

olduğu elde edilir. Böylece, her $a,b \in H_T$ için $T(a,b) \in H_T$' dir.

Teorem 2.1. L bir tam kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Her $a,b \in H_T$ için $a \wedge_T b = T(a,b)$' dir. T sonsuz $\vee$-dağılmalı t-norm ise her $\{a_\tau | \tau \in Q\} \subseteq H_T$ için

$$\vee_T\{a_\tau | \tau \in Q\} = \vee\{a_\tau | \tau \in Q\}$$

olup, $(H_T, \preccurlyeq_T)$ bir tam kafestir.

İspat: $T(a,b) \preccurlyeq_T a$ ve $T(a,b) \preccurlyeq_T b$ olduğundan

$$T(a,b) \in \underline{\{a,b\}}_T$$

dir. $\ell \in \underline{\{a,b\}}_T$ keyfi olsun. $\ell \preccurlyeq_T a$ ve $\ell \preccurlyeq_T b$' dir. Bu durumda $\exists a_1, b_1 \in L$ öyleki

$$\ell = T(a,a_1) = T(b,b_1)$$

dir. Ayrıca

$$T(\ell,b) = T(T(b,b_1),b) = T(T(b,b),b_1) = T(b,b_1) = \ell$$

ve

$$T(\ell,a) = T(T(a,a_1),a) = T(T(a,a),a_1) = T(a,a_1) = \ell$$

sağlanır. $(L, \preccurlyeq_T)$ üzerinde t-norm T, Önerme 2.6 ile $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre monoton olduğundan,

$$\ell = T(\ell,a) \preccurlyeq_T T(b,a) = T(a,b)$$

dır. Böylece $T(a,b)$, $\{a,b\}$ kümesinin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre alt sınırlarının en büyüğüdür, yani

$$T(a,b) = a \wedge_T b$$

dir. Önerme 2.8 ile $(a,b \in H_T)$ $a \wedge_T b = T(a,b) \in H_T$ olduğuna dikkat edelim.

$\{a_\tau | \tau \in Q\} \subseteq H_T$ için $\vee_T\{a_\tau | \tau \in Q\} = \vee\{a_\tau | \tau \in Q\}$ olduğunu gösterelim. Her $\tau \in Q$ için $a_\tau = T(a_\tau, a_\tau) \leq T(\vee_{\tau\in Q} a_\tau, \vee_{\tau\in Q} a_\tau)$ olduğundan

$$\vee_{\tau\in Q} a_\tau \leq T(\vee_{\tau\in Q} a_\tau, \vee_{\tau\in Q} a_\tau) \leq \vee_{\tau\in Q} a_\tau$$

dır. Böylece

$$\vee_{\tau\in Q} a_\tau \in H_T$$

dır.

Ayrıca, $\vee_{\tau\in Q} a_\tau \in \overline{\{a_\tau | \tau \in Q\}}_T$' dir. Gerçekten;

$$a_\tau = T(a_\tau, a_\tau) \leq T(\vee_{\tau\in Q} a_\tau, a_\tau) \leq a_\tau$$

olduğundan

$$T\left(\bigvee_{\tau\in Q} a_\tau , a_\tau\right) = a_\tau$$

dır. Böylece $a_\tau \preccurlyeq_T \bigvee_{\tau\in Q} a_\tau$ olup $\bigvee_{\tau\in Q} a_\tau \in \overline{\{a_\tau | \tau \in Q\}}_T$' dır.

$k \in \overline{\{a_\tau | \tau \in Q\}}_T$ keyfi olsun. Buradan $a_\tau \preccurlyeq_T k$' dir. Böylece, $\{b_\tau | \tau \in Q\} \subseteq L$ alt kümesi mevcuttur öyleki her $\tau \in Q$ için

$$a_\tau = T(k, b_\tau)$$

sağlanır. T sonsuz $\bigvee$- dağılmalı t-norm olduğundan

$$\bigvee_{\tau\in Q} a_\tau = \bigvee_{\tau\in Q} T(k, b_\tau) = T(k, \bigvee_{\tau\in Q} b_\tau)$$

olup $\bigvee_{\tau\in Q} a_\tau \preccurlyeq_T k$' dır. Bu ise

$$\bigvee_T \{a_\tau | \tau \in Q\} = \bigvee \{a_\tau | \tau \in Q\}$$

olduğunu gösterir. Sonuç olarak, $0 \in H_T$ olduğundan $(H_T, \preccurlyeq_T)$ bir tam kafestir.

Aşağıdaki sonuç Teorem 2.1' in ispatından elde edilir.

Sonuç 2.2. L sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde $\bigvee$-dağılmalı bir t-norm olsun. O halde her $a, b \in H_T$ için

$$a \wedge_T b = T(a, b) \text{ ve } a \vee_T b = a \vee b$$

dir. Böylece $(H_T, \preccurlyeq_T)$ sınırlı bir kafestir.

İspat: Teorem 2.1' in ispatının bir özel hali olarak, her $a, b \in H_T$ için

$$a \wedge_T b = T(a, b) \text{ ve } a \vee_T b = a \vee b$$

olduğu açıktır. Her $a \in H_T$ için $a \wedge_T 1 = T(a, 1) = a$ olduğundan $a \preccurlyeq_T 1$ ve $a \wedge_T 0 = T(a, 0) = 0$ olduğundan $0 \preccurlyeq_T a$' dır. Böylece $(H_T, \preccurlyeq_T)$ sınırlı bir kafestir.

Sonuç 2.3. L bir tam kafes ve T, L üzerinde sonsuz $\bigvee$ -dağılmalı bir t-norm ise $(H_T, \preccurlyeq_T)$ bir Heyting cebiridir.

İspat: T, tam kafes L üzerinde sonsuz $\bigvee$ -dağılmalı bir t-norm ise, Teorem 2.1 ile her $a, b \in H_T$ ve $\{a_\tau | \tau \in Q\} \subseteq H_T$ için

$$a \wedge_T b = T(a, b) \text{ ve } \bigvee_T \{a_\tau | \tau \in Q\} = \bigvee \{a_\tau | \tau \in Q\}$$

dir. T sonsuz $\bigvee$ -dağılmalı bir t-norm olduğundan $a \in H_T$ ve $\{b_\tau | \tau \in Q\} \subseteq H_T$ için

$$T\left(a, \bigvee_{\tau\in Q} b_\tau\right) = \bigvee_{\tau\in Q} T(a, b_\tau)$$

dir. Teorem 2.1 ile

$$T\left(a, \bigvee_{\tau\in Q} b_\tau\right) = a \wedge_T \left(\bigvee_{\tau\in Q} b_\tau\right) \text{ ve } \bigvee_{\tau\in Q} T(a, b_\tau) = \bigvee_{\tau\in Q} (a \wedge_T b_\tau)$$

olduğundan

$$a \wedge_T \left(\bigvee_{\tau\in Q} b_\tau\right) = \bigvee_{\tau\in Q} (a \wedge_T b_\tau)$$

olduğu elde edilir. Ayrıca her $\{a_\tau | \tau \in Q\} \subseteq H_T$ için

$\bigvee_T\{a_\tau | \tau \in Q\} = \bigvee\{a_\tau | \tau \in Q\}$

olduğundan $a \wedge_T (\bigvee_T b_\tau) = \bigvee_T(a \wedge_T b_\tau)$' dır. Böylece $(H_T, \preccurlyeq_T)$ bir Heyting cebiridir.

Sonuç 2.4. L bir tam kafes, T sonsuz $\bigvee$- dağılmalı, bölünebilir t-norm olsun. O halde $(H_T, \leq)$ bir Heyting cebiridir.

İspat: T bölünebilir bir t-norm olduğundan $\leq = \preccurlyeq_T$' dir. Her $a, b \in H_T$ için

$a \wedge b \preccurlyeq_T a$ ve $a \wedge b \preccurlyeq_T b$

olup

$a \wedge b \preccurlyeq_T a \wedge_T b$

dir. Diğer taraftan, $a \wedge_T b = T(a, b) \leq a \wedge b$ olduğundan her $a, b \in H_T$ için

$T(a, b) = a \wedge b,$

dir. Her $a, b \in H_T$ ve $\{b_\tau | \tau \in Q\} \subseteq H_T$ için

$\bigvee_{\tau \in Q}(a \wedge b_\tau) = \bigvee_{\tau \in Q} T(a, b_\tau) = T(a, \bigvee_{\tau \in Q} b_\tau) = a \wedge \left(\bigvee_{\tau \in Q} b_\tau\right)$

olduğundan $(H_T, \leq)$ bir Heyting cebiridir.

Sonuç 2.5. L sınırlı bir kafes ve T $\bigvee$- dağılmalı, bölünebilir bir t-norm olsun. O halde $(H_T, \leq)$ dağılmalı kafestir.

İspat: L sınırlı bir kafes ve T $\bigvee$- dağılmalı bir t-norm ise Sonuç 2.2 ile her $a, b \in H_T$ için

$a \wedge_T b = T(a, b)$ ve $a \vee_T b = a \vee b$

dir. T bölünebilir bir t-norm olduğundan $\leq = \preccurlyeq_T$' dir.

$T(a, b) = a \wedge b$

olduğu Sonuç 2.4' ün ispatının ilk kısmından elde edilir. T, $\bigvee$- dağılmalı bir t-norm olduğundan, her $a, b, c \in H_T$ için

$$
\begin{aligned}
a \wedge (b \vee c) = T(a, b \vee c) &= T(a, b) \vee T(a, c) \\
&= (a \wedge b) \vee (a \wedge c)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Böylece $(H_T, \leq)$ dağılmalı bir kafestir.

L bir tam kafes, T t-normu L kafesi üzerinde bir t-norm ve $L_1 \subseteq L$ olsun. Bu çalışmada $T \downarrow L_1$ notasyonu T' nin L_1 kafesine kısıtlanışını göstermek için kullanılacaktır.

Önerme 2.9. $(L, \leq)$ sınırlı bir kafes ve T, L üzerinde $\bigvee$- dağılmalı bir t-norm olsun. O halde $T \downarrow H_T$, $(H_T, \preccurlyeq_T)$ üzerinde bir t-normdur.

İspat: Önerme 2.8 ile her $a, b \in H_T$ için $T(a, b) \in H_T$' dir. Önerme 2.6 ile T' nin $\preccurlyeq_T$' e göre monotonluğu açık olup, birleşme özelliğinin ve komütatifliğin sağlandığı da kolaylıkla gösterilebilir. $1 \in H_T$ olduğundan her $x \in H_T$ için $T(x, 1) = x$' dir. Böylece $T \downarrow H_T$, H_T üzerinde bir t-normdur.

Önerme 2.10. T sınırlı bir L kafesi üzerinde bir t-norm ve K, L' nin bir alt kafesi olsun. Eğer her $x, y \in K$ için $x \wedge_T y = T(x, y)$ ise

$$T \downarrow K = \wedge$$

dır. Özel olarak, $K = L$ ise $T = \wedge$' dır.

İspat: Her $x \in K$ için $x = x \wedge_T x = T(x, x)$' dir. Ayrıca, her $x, y \in K$ için $x \wedge y \in K$ olup

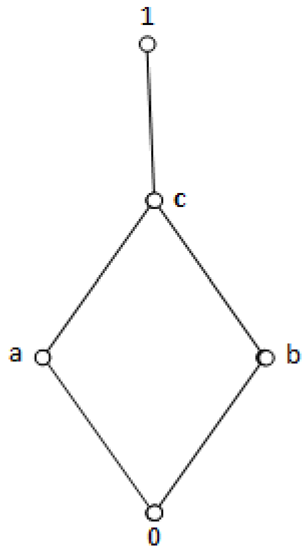
$$x \wedge y = T(x \wedge y, x \wedge y) \leq T(x, y) \leq x \wedge y$$

dir. Böylece $T(x, y) = x \wedge y$' dir.

Teorem 2.2. [19] $M = (L, \odot, \leq)$ bir integral, komütatif, rezidual ℓ- monoid olsun. Eğer M bölünebilir ve cebirsel güçlü De Morgan kuralını sağlıyor ise $\odot$ ikili işlemine göre tüm idempotent elemanların H_T alt kümesi bir Heyting cebiri oluşturur ve H_T' deki gerektirme $\odot$ ikili işlemine dayanan gerektirme ile çakışır.

Uyarı 2.5. Keyfi bir L kafesi için $M = (L, \odot, \leq)$ integral, komütatif, rezidual, ℓ-monoidin bölünebilir olması, cebirsel güçlü De Morgan kuralını sağlamasını gerektirmez. Şimdi aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 2.5. $(L = \{0, a, b, c, 1\}, \leq)$ kafesinin kafes diyagramı aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 2.6. $(L = \{0, a, b, c, 1\}, \leq)$ kafesi

$\odot = T_\wedge$ ve $\rightarrow_{T_\wedge}: L^2 \longrightarrow L$ ikili işlemi her $x, y \in L$ için

$$x \rightarrow_{T_\wedge} y = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & \text{Aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\rightarrow_{T_\wedge}$ ikili işleminin L üzerinde bir rezidü işlemi olduğu açıktır. Böylece, $M = (L, T_\wedge, \leq)$ bir integral, komütatif, rezidual, ℓ- monoiddir. $T_\wedge$ bölünebilir bir t-norm olduğundan M bölünebilirdir. Ancak, $a, b \in L$ için

$$\left(a \rightarrow_{T_\wedge} b\right) \vee \left(b \rightarrow_{T_\wedge} a\right) = b \vee a = c \neq 1$$

olduğundan M cebirsel güçlü De Morgan kuralını sağlamaz.

Uyarı 2.6. Drossos'un çalışmasındaki [19] (Höhle [33], Sonuç 2.7) Teorem 2.2' de cebirsel güçlü De Morgan kuralı bu teoremin ispatı için gerekli değildir. Aşağıdaki Önerme 2.11' de bu teoremin ispatı için cebirsel güçlü De Morgan kuralının gerekli olmadığı görülür.

Önerme 2.11. $M = (L, \odot, \leq)$ bir integral, komütatif, rezidual ℓ- monoid olsun. Eğer M bölünebilir ise, $\odot$ işlemine göre tüm idempotent elemanların H_T alt kümesi bir Heyting cebiri oluşturur ve H_T' deki gerektirme ile $\odot$ ikili işlemine dayanan gerektirme aynı olur.

İspat: Öncelikle $\odot$ işleminin bir t-norm olduğunu göstermek için monotonluğu sağladığını göstermeliyiz.

Tanım 1.45 (*iii*)' de tanımlanan (R) özelliği ile $(x \rightarrow_\odot y) \leq (x \rightarrow_\odot y)$ olmasından

$$x \odot (x \rightarrow_\odot y) \leq y$$

olduğunu benzer şekilde $(x \odot y) \leq (x \odot y)$ olmasından da

$$x \leq (y \rightarrow_\odot x \odot y)$$

olduğunu elde ederiz. $x, y, z \in L$ ve $x \leq y$ olsun. $y \leq (z \rightarrow_\odot (y \odot z))$ olup buradan

$$x \leq (z \rightarrow_\odot (y \odot z))$$

dir. Böylece

$$x \odot z \leq y \odot z$$

dir. $\odot$ işlemi komütatif olduğundan her $x, y, z \in L$ için $z \odot x \leq z \odot y$ eşitsizliği de sağlanır. Böylece $\odot$ işlemi monotonluğu sağlar ve t-normdur.

$M = (L, \odot, \leq)$ ℓ- monoid olduğundan $\odot$ işlemi L üzerinde $\bigvee$- dağılmalıdır. Sonuç 2.2 uygulanırsa, her $x, y \in H_T$ için $x \wedge_\odot y = x \odot y$ olduğu elde edilir. M bölünebilir olduğundan Önerme 2.3 ile $\preccurlyeq_\odot$ sıralaması $\leq$ sıralamasına eşittir. Böylece her $x, y \in H_T$ için $x \wedge y = x \wedge_\odot y = x \odot y$' dir.

Önerme 2.12. T, $[0,1]$ üzerinde sıfır bölensiz bir t-norm ve $(L, \preccurlyeq_T)$ bir kafes olsun. Her $a, b \in L \setminus \{0\}$ için

$$a \wedge_T b \neq 0$$

dır.

İspat: Her $a, b \in L \setminus \{0\}$ için $T(a,b) \in \underline{\{a,b\}}_T$ olduğundan

$$T(a,b) \preccurlyeq_T a \wedge_T b$$

dir. Önerme 2.2 ile

$$T(a,b) \leq a \wedge_T b$$

dir. Eğer $a \wedge_T b = 0$ olsa

$$T(a,b) = 0$$

olur ki bu ise T t-normunun $[0,1]$ üzerinde sıfır bölensiz bir t-norm olması ile çelişir.

T t-normunun sıfır bölensiz olma şartı kaldırılırsa Önerme 2.12 sağlanmayabilir. Şimdi aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 2.6. $L = [0,1]$ ve $T = T_W$ olsun. Her $a \in [0,1] \setminus \{0,1\}$ için bir $b \in [0,1] \setminus \{0,1\}$, $b \neq a$ elemanı $a < b$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan $a \wedge b = a$' dır. $a, b \in [0,1] \setminus \{0,1\}$ olduğundan $T_W(a,b) = 0$' dır. Böylece, her $a \in [0,1] \setminus \{0,1\}$ elemanı T_W t-normunun sıfır bölenidir. Yani $Z(T) \neq \emptyset$' dır.

Şimdi $x, y \in [0,1] \setminus \{0,1\}$ elemanlarını $x \neq y$ olacak şekilde seçelim ve $x \wedge_{T_W} y = c$ diyelim. Buradan $c \preccurlyeq_{T_W} x$ ve $c \preccurlyeq_{T_W} y$' dir. Bu takdirde $\ell_1, \ell_2 \in [0,1]$ elemanları

$$T_W(\ell_1, x) = c \text{ ve } T_W(\ell_2, y) = c$$

olacak şekilde mevcuttur. Eğer $\ell_1 = 1$ olsa $x = c$ olur ki buradan

$$T_W(\ell_2, y) = c = x \neq 0$$

dır. $\ell_2 = 0$ olsa

$$0 = T_W(\ell_2, y) = c = x$$

olur ki bu ise bir çelişkidir. $\ell_2 = 1$ olsa

$$x = y$$

olur ki bu ise kabulümüz ile çelişir. Böylece $\ell_2 \in [0,1] \setminus \{0,1\}$' dir. $\ell_2, y \in [0,1] \setminus \{0,1\}$ olduğundan

$$0 = T_W(\ell_2, y) = c = x \neq 0$$

çelişkisi elde edilir. Yani, $\ell_1 = 1$ olamaz. Yani, $\ell_1 \in [0,1)$' dir. Böylece $\ell_1 \in [0,1)$ ve $x \in [0,1] \setminus \{0,1\}$ için

$$c = T_W(\ell_1, x) = 0$$

olduğundan

$$x \wedge_{T_W} y = 0$$

dır. Bu ise t-norm üzerindeki sıfır bölensiz olma şartının kaldırılması durumunda Önerme 2.12' nin sağlanması gerekmediğini gösterir.

Teorem 2.3. L bir tam kafes, T, L üzerinde sıfır bölensiz sonsuz $\vee$- dağılmalı bir t-norm ve

$\boldsymbol{A} = \{a \in L | a,$ atomların bir ailesinin supremumuna eşittir$\}$

olsun. Bu takdirde,

i. $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ bir tam kafestir. Üstelik, her $a, b \in \boldsymbol{A}$ için

$a \wedge_T b = T(a, b)$

dir, yani $T \downarrow \boldsymbol{A} = \wedge_T$' dir.

ii. $T \downarrow \boldsymbol{A}$, $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ üzerinde bir t-norm olup sonsuz $\vee_T$-dağılmalıdır.

İspat:

i. Boş küme üzerinden supremum 0 olup $0 \in \boldsymbol{A}$' dır. Böylece, $\boldsymbol{A} \neq \emptyset$' dır. $a, b \in \boldsymbol{A}$ olsun.O halde $Q_1 = \{a_\tau | \; a_\tau$ bir atomdur ve $\tau \in I_1\}$ ve $Q_2 = \{a_\beta | \; a_\beta$ bir atomdur ve $\beta \in I_2\}$ kümeleri mevcuttur öyleki

$a = \bigvee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau$ ve $b = \bigvee_{a_\beta \in Q_2} a_\beta$

dir. Şimdi

$$Q_1 \subseteq Q_2 \iff a \preccurlyeq_T b \tag{2.2}$$

olduğunu gösterelim. Her a_τ, x_β, $a_\tau \neq x_\beta$ atomları için

$$T(a_\tau, x_\beta) = 0 \tag{2.3}$$

dır. T sıfır bölensiz bir t-norm olduğundan, her a_τ atomu için

$$T(a_\tau, a_\tau) = a_\tau \tag{2.4}$$

olduğuna dikkat edelim. T' nin sonsuz $\vee$- dağılmalılığı, (2.3) ve (2.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} T(a, b) &= T\left(\bigvee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau, \bigvee_{a_\beta \in Q_2} a_\beta\right) \\ &= T\left(\bigvee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau, \left(\bigvee_{a_\beta \in Q_1} a_\beta \vee \bigvee_{a_\beta \in Q_2 \setminus Q_1} a_\beta\right)\right) \\ &= \left[\bigvee_{\substack{a_\beta \in Q_2 \setminus Q_1 \\ a_\tau \in Q_1}} T(a_\tau, a_\beta)\right] \vee \left[\bigvee_{\substack{a_\beta \in Q_1 \\ a_\tau \in Q_1}} T(a_\tau, a_\beta)\right] \end{aligned}$$

$$= \bigvee_{\substack{a_\beta \in Q_1 \\ a_\tau \in Q_1}} T(a_\tau, a_\beta) = \bigvee_{a_\tau \in Q_1} T(a_\tau, a_\tau) = \bigvee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau = a$$

olduğu elde edilir. Buradan, $a \preccurlyeq_T b$ olup $a \wedge_T b = a$' dır. Tersine olarak, $a \preccurlyeq_T b$ ise $Q_1 \subseteq Q_2$ olduğunu gösterelim. $a = \bigvee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau$ ve $b = \bigvee_{a_\beta \in Q_2} a_\beta$ için

$$a_\tau \preccurlyeq_T a \preccurlyeq_T b$$

olduğundan $a_\tau \preccurlyeq_T b$' dir. Buradan, bir $\ell \in L$

$$T(b, \ell) = a_\tau$$

olacak şekilde mevcuttur. T, sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norm olduğundan

$$T\left(\bigvee_{a_\beta \in Q_2} a_\beta, \ell\right) = \bigvee_{a_\beta \in Q_2} T(a_\beta, \ell) = a_\tau$$

olduğu elde edilir. a_τ bir atom olduğundan birden fazla $a_\beta \in Q_2$ için $\bigvee_{a_\beta \in Q_2} T(a_\beta, \ell) = a_\tau$ olamaz. Böylece bir $a_{\beta'} \in Q_2$

$$T(a_{\beta'}, \ell) = a_\tau$$

olacak şekilde mevcuttur. $a_\tau = T(a_{\beta'}, \ell) \leq a_{\beta'}$ ve a_τ, $a_{\beta'}$ atom olduğundan

$$a_\tau = a_{\beta'} \in Q_2$$

dir. Buradan, $Q_1 \subseteq Q_2$ olduğu elde edilir. Böylece, (2.2) ispat edilir.

$a, b \in \boldsymbol{A}$ keyfi elemanlar olsun. Farzedelim ki $Q_1 \nsubseteq Q_2$ ve $Q_2 \nsubseteq Q_1$ olsun. O halde $Q_1 = \{a_\tau \mid a_\tau \text{ bir atomdur ve } \tau \in I_1\}$ ve $Q_2 = \{a_\beta \mid a_\beta \text{ bir atomdur ve } \beta \in I_2\}$ kümeleri mevcuttur öyleki

$$a = \bigvee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau \text{ ve } b = \bigvee_{a_\beta \in Q_2} a_\beta$$

dır. $a \wedge_T b = \bigvee_{a_\gamma \in Q_1 \cap Q_2} a_\gamma$ olduğunu iddia ediyoruz. (2.2) ile

$$\bigvee_{a_\gamma \in Q_1 \cap Q_2} a_\gamma \preccurlyeq_T a \text{ ve} \bigvee_{a_\gamma \in Q_1 \cap Q_2} a_\gamma \preccurlyeq_T b$$

olduğu açıktır. Böylece,

$$\bigvee_{a_\gamma \in Q_1 \cap Q_2} a_\gamma \in \underline{\{a, b\}}_T$$

dir. $t \in \underline{\{a, b\}}_T \setminus \{0\}$ keyfi olsun. O halde, $t \preccurlyeq_T a$ ve $t \preccurlyeq_T b$ olup $\ell_1, \ell_2 \in L$ elemanları

$$T(a, \ell_1) = t \text{ ve } T(b, \ell_2) = t$$

olacak şekilde mevcuttur. Böylece,

$$t = T\left(\bigvee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau, \ell_1\right) = \bigvee_{a_\tau \in Q_1} T(a_\tau, \ell_1)$$

dır. Her $a_\tau \in Q_1$ için $T(a_\tau, \ell_1) \leq a_\tau$ ve a_τ bir atom olduğundan $T(a_\tau, \ell_1) = 0$ veya $T(a_\tau, \ell_1) = a_\tau$' dır. Her $a_\tau \in Q_1$ için $T(a_\tau, \ell_1) = a_\tau$ olsa, $t = T\left(\bigvee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau, \ell_1\right) =$

$\bigvee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau = a$ olup $t \preccurlyeq_T b$ olduğundan $a \preccurlyeq_T b$' dir. Buradan, (2.2) ile $Q_1 \subseteq Q_2$ olur ki bu ise kabulümüz ile çelişir. Böylece, bir $a_{\tau_0} \in Q_1$ mevcuttur öyle ki

$$T(a_{\tau_0}, \ell_1) \neq a_{\tau_0}$$

dır. a_{τ_0} bir atom ve $T(a_{\tau_0}, \ell_1) \neq a_{\tau_0}$ olduğundan $T(a_{\tau_0}, \ell_1) = 0$' dır. Böylece her $a_\nu \in Q^* \subseteq Q_1$ için $T(a_\nu, \ell_1) \neq 0$ olacak şekilde bir $Q^* \subseteq Q_1$ alt kümesi mevcuttur öyleki

$$t = \bigvee_{a_\tau \in Q_1} T(a_\tau, \ell_1) = \bigvee_{a_\nu \in Q^*} T(a_\nu, \ell_1) = \bigvee_{a_\nu \in Q^*} a_\nu$$

dır. Benzer şekilde bir $Q^{**} \subseteq Q_2$ için $t = \bigvee_{a_\mu \in Q^{**}} a_\mu$, eşitliğinin sağlandığı da gösterilebilir.

$a_\alpha \in Q^*$ keyfi olsun. (2.2) ile $a_\alpha \preccurlyeq_T \bigvee_{a_\nu \in Q^*} a_\nu$ olduğu açıktır. Ayrıca,

$$a_\alpha \preccurlyeq_T \bigvee_{a_\nu \in Q^*} a_\nu = \bigvee_{a_\mu \in Q^{**}} a_\mu$$

olduğundan

$$a_\alpha \preccurlyeq_T \bigvee_{a_\mu \in Q^{**}} a_\mu$$

dir. Böylece bir $x_1 \in L$ elemanı için

$$a_\alpha = T\left(x_1, \bigvee_{a_\mu \in Q^{**}} a_\mu\right) = \bigvee_{a_\mu \in Q^{**}} T(x_1, a_\mu)$$

dir. Her μ için $T(x_1, a_\mu) = 0$ ise,

$$a_\alpha = 0$$

olur ki bu ise a_α' nın atom olması ile çelişir. Üstelik, a_α bir atom olduğundan birden fazla a_μ için $a_\alpha = \bigvee_{a_\mu \in Q^{**}} a_\mu$ olamaz. Böylece, bir τ_i

$$a_\alpha = b_{\tau_i} \in Q^{**}$$

olacak şekilde mevcuttur. Buradan $Q^* \subseteq Q^{**}$' dır. Benzer şekilde, $Q^{**} \subseteq Q^*$ olduğu gösterilebilir. Böylece $Q^* = Q^{**}$' dır. $Q^* = Q^{**} \subseteq Q_1 \cap Q_2$ olduğundan (2.2) ile

$$t = \bigvee_{a_\nu \in Q^*} a_\nu \preccurlyeq_T \bigvee_{a_\gamma \in Q_1 \cap Q_2} a_\gamma$$

olduğu elde edilir. Böylece $a \wedge_T b = \bigvee_{a_\gamma \in Q_1 \cap Q_2} a_\gamma$' dır.

$\{a_i | i \in I\} \subseteq \boldsymbol{A}$ keyfi alalım. Her $i \in I$ için atomların Q_i kümesi mevcuttur öyleki

$$a_i = \bigvee_{c_\eta \in Q_i} c_\eta$$

dir. $\bigvee_T a_i = \bigvee_{c_\xi \in \bigcup_{i \in I} Q_i} c_\xi$ olduğunu iddia ediyoruz. (2.2) kullanılırsa

$$a_i \preccurlyeq_T \bigvee_{c_\xi \in \bigcup_{i \in I} Q_i} c_\xi$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$\bigvee_{c_\xi \in \bigcup_{i \in I} Q_i} c_\xi \in \overline{\{a_i | i \in I\}}_T$$

dir. $s \in \overline{\{a_i | i \in I\}}_T$ keyfi olsun. O halde her $i \in I$ için

$$a_i \preccurlyeq_T s$$

dir. $c_\xi \in \bigcup_{i\in I} Q_i$ atomunu keyfi alalım. Buradan, $i_0 \in I$ mevcuttur öyleki

$$c_\xi \in Q_{i_0}$$

dır. Böylece, $a_{i_0} = \bigvee_{c_\xi \in Q_{i_0}} c_\xi$ için (2.3) ve (2.4) ile

$$T(c_\xi, a_{i_0}) = T(c_\xi, \bigvee_{c_\xi \in Q_{i_0}} c_\xi) = \bigvee_{c_\xi \in Q_{i_0}} T(c_\xi, c_\xi) = c_\xi$$

olup $c_\xi \preccurlyeq_T a_{i_0}$' dır. Her $i \in I$ için $a_i \preccurlyeq_T s$ olduğundan $a_{i_0} \preccurlyeq_T s$' dir. Böylece, $\preccurlyeq_T$' nin geçişme özelliği ile

$$c_\xi \preccurlyeq_T s$$

olduğu elde edilir. Buradan, $\ell_\xi \in L$ elemanları

$$T(s, \ell_\xi) = c_\xi$$

olacak şekilde mevcuttur. Eşitliğin her iki tarafına supremum uygulanırsa, T' nin sonsuz $\vee$-dağılmalılığı ile

$$\bigvee_{c_\xi \in \bigcup_{i\in I} Q_i} c_\xi = \bigvee T(s, \ell_\xi) = T(s, \bigvee \ell_\xi)$$

olduğu elde edilir. Böylece, $\bigvee_{c_\xi \in \bigcup_{i\in I} Q_i} c_\xi \preccurlyeq_T s$ olup

$$\bigvee_{c_\xi \in \bigcup_{i\in I} Q_i} c_\xi = \bigvee_T \{a_i | i \in I\}$$

dır. Böylece, $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ bir tam kafestir. Son olarak, her $a, b \in \boldsymbol{A}$ için

$$a \wedge_T b = \bigvee_{a_\gamma \in Q_1 \cap Q_2} a_\gamma = T\left(\bigvee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau, \bigvee_{a_\beta \in Q_2} a_\beta\right) = T(a, b)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece,

$$T \downarrow \boldsymbol{A} = \wedge_T$$

dir.

ii. Teorem 2.3 (i) ile $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ tam kafestir ve her $a, b \in \boldsymbol{A}$ için $T(a, b) = a \wedge_T b$' dir. $\boldsymbol{A}$' nın en büyük elemanının tüm atomların supremumu olduğu açıktır. $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{A}$ kümesinin en büyük elemanını göstersin. Buradan, Q, L' deki tüm atomların kümesi olmak üzere $\mathbf{1} = \bigvee_{a_\beta \in Q} a_\beta$' dır. $a \in \boldsymbol{A}$ keyfi alalım. Atomların bir Q_1 alt kümesi

$$a = \bigvee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau$$

olacak şekilde mevcuttur. Teorem 2.3 (i)' nin ispatı ile

$$T(a, \mathbf{1}) = T\left(\bigvee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau, \bigvee_{a_\beta \in Q} a_\beta\right) = \left(\bigvee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau\right) \wedge_T \left(\bigvee_{a_\beta \in Q} a_\beta\right)$$

$$= \bigvee_{a_\xi \in Q_1 \cap Q} a_\xi = \bigvee_{a_\xi \in Q_1} a_\xi = a$$

dır. Böylece, T, $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ üzerinde sınır şartını sağlar. T' nin, $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ üzerinde birleşme özelliğini ve monotonluğu sağladığı ve komütatif olduğu açıktır. Böylece, $T \downarrow (\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ bir t-normdur. $a \in \boldsymbol{A}$, $\{b_\tau | \tau \in Q\} \subseteq \boldsymbol{A}$ için

$$\begin{aligned} T(a, \vee_T b_\tau) &= a \wedge_T (\vee_T b_\tau) \\ &= a \wedge_T (\vee b_\tau) \\ &= T\left(a, \vee_{\tau \in Q} b_\tau\right) \\ &= \vee_{\tau \in Q} T(a, b_\tau) = \vee_T T(a, b_\tau) \end{aligned}$$

olup $T \downarrow (\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ sonsuz $\vee_T$-dağılmalıdır.

Sonuç 2.6. Eğer L' deki atomlar sonlu sayıda ve T sıfır bölensiz, $\vee$- dağılmalı bir t-norm ise Teorem 2.3 yine doğrudur. Yani, $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ bir tam kafestir ve her $a, b \in \boldsymbol{A}$ için

$$a \wedge_T b = T(a, b)$$

dir.

Sonuç 2.7. L bir tam kafes ve T, L üzerinde sonsuz $\vee$- dağılmalı sıfır bölensiz bir t-norm olsun. O halde $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ bir Boole cebiridir.

İspat: $a, b, c \in \boldsymbol{A} \setminus \{0\}$ için $a \wedge_T (b \vee_T c) = (a \wedge_T b) \vee_T (a \wedge_T c)$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için

$$a \wedge_T (b \vee_T c) \leq (a \wedge_T b) \vee_T (a \wedge_T c)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. O halde, $Q_1 = \{a_\tau |\, a_\tau \text{ bir atomdur ve } \tau \in I_1\}$ ve $Q_2 = \left\{a_\beta \middle|\, a_\beta \text{ bir atomdur ve } \beta \in I_2\right\}$ kümeleri mevcuttur öyleki

$$b = \vee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau \text{ ve } c = \vee_{a_\beta \in Q_2} a_\beta$$

dır. Teorem 2.3' ün ispatı kullanılırsa

$$a \wedge_T (b \vee_T c) = T(a, b \vee_T c) \text{ ve}$$

$$b \vee_T c = \left(\vee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau\right) \vee \left(\vee_{a_\beta \in Q_2} a_\beta\right) = \vee_{a_\gamma \in Q_1 \cup Q_2} a_\gamma$$

olduğu elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} a \wedge_T (b \vee_T c) &= T(a, \left(\vee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau\right) \vee \left(\vee_{a_\beta \in Q_2} a_\beta\right)) \\ &= T(a, \vee_{a_\tau \in Q_1} a_\tau) \vee T(a, \vee_{a_\beta \in Q_2} a_\beta) \\ &= \left(\vee_{a_\tau \in Q_1} T(a, a_\tau)\right) \vee \left(\vee_{a_\beta \in Q_2} T(a, a_\beta)\right) \end{aligned}$$

dır. a_τ, a_β atomları için

$$T(a, a_\tau) \preccurlyeq_T a \wedge_T b = T(a, b) \tag{2.5}$$

$$T(a, a_\beta) \preccurlyeq_T a \wedge_T c = T(a, c) \tag{2.6}$$

dir. (2.5) ve (2.6) kullanılarak

$$\left(\bigvee_{a_\tau \in Q_1} T(a, a_\tau)\right) \vee \left(\bigvee_{a_\beta \in Q_2} T(a, a_\beta)\right) = \left(\bigvee_{a_\tau \in Q_1} T(a, a_\tau)\right) \vee_T \left(\bigvee_{a_\beta \in Q_2} T(a, a_\beta)\right)$$
$$\leq T(a, b) \vee_T T(a, c)$$

olduğu elde edilir. Böylece dağılma özelliği sağlanır. Q, L' deki tüm atomların kümesi olsun. O halde b' nin komplementinin

$$\bigvee_{a_\tau \in Q \setminus Q_1} a_\tau$$

olduğu açıktır.

Örnek 2.7. K boştan farklı bir küme, $|K| \geq 3$ ve $L_K = \{0, p_\tau \ (\tau \in K), b, 1\}$, $0 < p_\tau < b < 1$, $\tau \in K$ ve $\alpha \neq \beta$ için $p_\alpha \wedge p_\beta = 0$ olsun. O halde L_K üzerinde $\bigvee$- dağılmalı bir t-norm mevcuttur fakat sıfır bölensiz $\bigvee$- dağılmalı bir t-norm mevcut değildir. Gerçekten;

T, L_K üzerinde sıfır bölensiz $\bigvee$- dağılmalı bir t-norm olsa

$$0 \preccurlyeq_T p_\tau(\tau \in K) \preccurlyeq_T b$$

dir. Açıkça,

$$\boldsymbol{A} = \{0, p_\tau \ (\tau \in K), b\}$$

dir. $p_\tau \wedge p_\beta = 0$ ve $p_\tau \vee p_\beta = b$ olduğundan $\boldsymbol{A} = \{0, p_\tau \ (\tau \in K), b\}$ bir Boole cebiri değildir. Bu ise Sonuç 2.7 ile çelişir.

Teorem 1.14 ile sonlu uzunluklu yerel komplementli bir L kafesi atomik olduğundan Sonuç 2.8' in ispatı kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 2.8. Sonlu uzunluklu, yerel komplementli bir L kafesi üzerinde sıfır bölensiz $\bigvee$- dağılmalı bir t-norm mevcutsa $(L, \leq)$ bir Boole cebiridir.

İspat: L sonlu uzunluklu bir kafes olsun. Buradan L bir tam kafestir. L sonlu uzunluklu ve yerel komplementli bir kafes olduğundan atomik kafestir. Böylece $L = \boldsymbol{A}$ olup, Teorem 2.3 ile $(L, \preccurlyeq_T)$ tam kafestir ve her $x, y \in L$ için

$$x \wedge_T y = T(x, y)$$

dir. $(L, \preccurlyeq_T)$ bir tam kafes ve T, L kafesi üzerinde sıfır bölensiz $\bigvee$- dağılmalı bir t-norm olduğundan Sonuç 2.7 ile $(L, \preccurlyeq_T)$ bir Boole cebiridir. Her $x, y \in L$ için

$$x \wedge y = (x \wedge y) \wedge_T (x \wedge y) = T(x \wedge y, x \wedge y)$$
$$\leq T(x, y) \leq x \wedge y$$

olduğundan $T(x, y) = x \wedge y$ olduğu elde edilir. Böylece,

$T = \wedge$

dır. Önerme 2.2 ile $\preccurlyeq_T \subseteq \leq$ olduğu açıktır. $x, y \in L$ için $x \leq y$ olsun. $T(x,y) = x \wedge y = x$ olduğundan $x \preccurlyeq_T y$ olup

$\preccurlyeq_T = \leq$

eşitliği elde edilir. Böylece, $(L, \leq)$ Boole cebiridir.

Sonuç 2.9. Eğer L bir atomik tam Brouwerian kafesi ise $(L, \leq)$ bir Boole cebiridir.

İspat: Sonuç 2.7' de $T = \wedge$ olarak alalım. Buradan, T, L üzerinde $\vee$- dağılmalıdır ve L tam Brouwerian kafesi olduğundan $L = \boldsymbol{A}$' dır. Böylece, Sonuç 2.7 ile $(L, \preccurlyeq_T)$ bir Boole cebiridir. $T = \wedge$ olduğundan $\preccurlyeq_T = \leq$ olup $(L, \leq)$ bir Boole cebiridir.

Önerme 2.13. Eğer L bir tam Brouwerian kafesi ve T, L üzerinde sıfır bölensiz sonsuz $\vee$- dağılmalı bir t-norm ise

$T \downarrow (\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T) = \wedge \downarrow \boldsymbol{A}$

dır.

İspat: Teorem 2.3 (*i*) ile $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ bir tam kafestir. Teorem 2.3 (*ii*) ile $T \downarrow (\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ bir t-normdur. Sonuç 2.7 ile $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ bir Boole cebiridir. Özel olarak, Teorem 2.3' te t-normu $\wedge$ olarak alalım. L bir tam Brouwerian kafesi olduğundan, $\wedge$ sonsuz $\vee$- dağılmalı bir t-normdur. Ayrıca $\wedge$ sıfır bölensiz bir t-norm olup Sonuç 2.7 ile $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_\wedge) = (\boldsymbol{A}, \leq)$ bir Boole cebiridir. Böylece, her $a \in \boldsymbol{A}$ için $a \wedge a' = 0$ ve $a \vee a' = 1$ olacak şekilde bir $a' \in \boldsymbol{A}$ mevcuttur. Buradan, her $a, b \in \boldsymbol{A}$ için

$$\begin{aligned} a \wedge b &= T(a,1) \wedge T(b,1) \\ &= T(a, b \vee b') \wedge T(b, a \vee a') \\ &= (T(a,b) \vee T(a,b')) \wedge (T(b,a) \vee T(b,a')) \\ &= [\big(T(a,b) \vee T(a,b')\big) \wedge T(b,a)] \vee [\big(T(a,b) \vee T(a,b')\big) \wedge T(b,a')] \\ &= T(a,b) \vee [\big(T(a,b) \vee T(a,b')\big) \wedge T(b,a')] \\ &= T(a,b) \vee \big(T(a,b) \wedge T(b,a')\big) \vee (T(a,b') \wedge T(b,a')) \end{aligned}$$

Eşitliğin sağ tarafında, $T(a,b) \leq a$ ve $T(b,a') \leq a'$ olup $T(a,b) \wedge T(b,a') \leq a \wedge a' = 0$ olduğundan $T(a,b) \wedge T(b,a') = 0$' dır. Benzer şekilde, $T(a,b') \wedge T(b,a') = 0$ olup

$a \wedge b = T(a,b)$

dır. Böylece, $T \downarrow (\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T) = \wedge \downarrow \boldsymbol{A}$' dır.

Önerme 2.14. L bir tam kafes, T sıfır bölensiz sonsuz $\vee$- dağılmalı bir t-norm ve $A(L)$ atomların kümesi olsun. O halde bir $A \subseteq L$ alt kümesi mevcuttur öyleki $A \cong \wp(A(L))$ ve A bir Boole cebiridir.

İspat: $\boldsymbol{A} = \{a \in L | a$ atomların bir ailesinin supremumuna eşittir$\}$ olsun. Sonuç 2.7 ile $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T)$ bir Boole cebiridir.

$$f\left(\bigvee_Q p_i\right) = \bigcup_Q \{p_i\}$$

ile tanımlanan $f: \boldsymbol{A} \longrightarrow \wp(A(L))$ dönüşümü bir izomorfidir. Gerçekten;

$a, b \in \boldsymbol{A}$ için $a = b$ olsun. O halde atomların iki Q_1, Q_2 ailesi mevcuttur öyleki

$$a = \bigvee_{p_i \in Q_1} p_i \text{ ve } b = \bigvee_{q_j \in Q_2} q_j$$

dir. $a = b$ olduğundan $\bigvee_{p_i \in Q_1} p_i = \bigvee_{q_j \in Q_2} q_j$ olup her i için

$$p_i \leq \bigvee_{q_j \in Q_2} q_j$$

dir. Buradan, $p_i \wedge \left(\bigvee_{q_j \in Q_2} q_j\right) = p_i$ ‘ dir. T sıfır bölensiz bir t-norm olduğundan

$$T\left(p_i, \bigvee_{q_j \in Q_2} q_j\right) \neq 0$$

dır. $0 \neq T\left(p_i, \bigvee_{q_j \in Q_2} q_j\right) \leq p_i$ ve p_i bir atom olduğundan

$$T\left(p_i, \bigvee_{q_j \in Q_2} q_j\right) = p_i$$

dir. T’ nin sonsuz $\bigvee$- dağılmalılığı ile her i için

$$p_i = T\left(p_i, \bigvee_{q_j \in Q_2} q_j\right) = \bigvee_{q_j \in Q_2} T(p_i, q_j)$$

eşitliği elde edilir. Farzedelim ki her i ve her j için $T(p_i, q_j) = 0$ olsun. Buradan

$$p_i = 0$$

olup bu bir çelişkidir. Böylece, her i için en az bir j mevcuttur öyleki

$$T(p_i, q_j) \neq 0$$

dır. $0 \neq T(p_i, q_j) \leq p_i$ ve p_i atom olduğundan

$$T(p_i, q_j) = p_i$$

dir. Ayrıca, $p_i = T(p_i, q_j) \leq q_j$ ve p_i, q_j atom olduğundan

$$p_i = q_j$$

dir. Buradan $f\left(\bigvee_{p_i \in Q_1} p_i\right) = \bigcup_{p_i \in Q_1} \{p_i\} = \bigcup_{q_j \in Q_2} \{q_j\} = f\left(\bigvee_{q_j \in Q_2} q_j\right)$ olduğu yani f’ nin iyi tanımlı olduğu elde edilir.

f’ nin birebirliğini gösterelim. $a, b \in \boldsymbol{A}$ için $f(a) = f(b)$ olsun. O halde

$$\bigcup_{p_i \in Q_1} \{p_i\} = \bigcup_{q_j \in Q_2} \{q_j\}$$

olduğundan $Q_1 = Q_2$ olup her i için bir j mevcuttur öyle ki $p_i = q_j$’ dir. Böylece

$$a = \bigvee_{p_i \in Q_1} p_i = \bigvee_{q_j \in Q_2} q_j = b$$

olduğu yani f’ nin birebir bir dönüşüm olduğu elde edilir.

$X \in \wp(A(L))$, yani $X \subseteq A(L)$ keyfi olsun. O halde X atomların ailesi için

$X = \bigcup_{p_i \in X}\{p_i\}$

dir. $a = \bigvee_{p_i \in X} p_i$ diyelim. Açıkça $a \in \boldsymbol{A}$ olup

$f(a) = f\left(\bigvee_{p_i \in X} p_i\right) = \bigcup_{p_i \in X}\{p_i\} = X$

dir. Böylece f örtendir.

f' nin supremum ve infimum koruyan bir dönüşüm olduğunu gösterelim. $a, b \in \boldsymbol{A}$ keyfi olsun. Buradan, atomların iki Q_1, Q_2 ailesi mevcuttur öyleki

$a = \bigvee_{a_i \in Q_1} a_i$ ve $b = \bigvee_{a_j \in Q_2} a_{\mathrm{j}}$

dir. Teorem 2.3' ün ispatı ile keyfi $\{a_i | i \in I\} \subseteq \boldsymbol{A}$ ailesi için $\bigvee_{a_\xi \in \bigcup_{i \in I} Q_i} a_\xi = \bigvee_T \{a_i | i \in I\}$ olduğundan

$$f(a \vee_T b) = f\left(\left(\bigvee_{a_i \in Q_1} a_i\right) \vee_{\mathrm{T}} \left(\bigvee_{a_j \in Q_2} a_j\right)\right)$$

$$= f\left(\bigvee_{a_\mu \in Q_1 \cup Q_2} a_\mu\right)$$

$$= \bigcup_{a_\mu \in Q_1 \cup Q_2} a_\mu$$

$$= \left(\bigcup_{a_\xi \in Q_1} a_\xi\right) \cup \left(\bigcup_{a_\xi' \in Q_2} a_\xi'\right) = f(a) \cup f(b)$$

eşitliği elde edilir. Teorem 2.3' ün ispatı ile keyfi $a, b \in \boldsymbol{A}$ için $a \wedge_T b = \bigvee_{a_\gamma \in Q_1 \cap Q_2} a_\gamma$ olduğundan

$$f(a \wedge_T b) = f\left(\left(\bigvee_{a_i \in Q_1} a_i\right) \wedge_{\mathrm{T}} \left(\bigvee_{a_j \in Q_2} a_j\right)\right)$$

$$= f\left(\bigvee_{a_\gamma \in Q_1 \cap Q_2} a_\gamma\right)$$

$$= \bigcup_{a_\gamma \in Q_1 \cap Q_2} a_\gamma$$

$$= \left(\bigcup_{a_\xi \in Q_1} a_\xi\right) \cap \left(\bigcup_{a_\xi' \in Q_2} a_\xi'\right) = f(a) \cap f(b)$$

dir. Böylece, $\boldsymbol{A} \cong \wp(A(L))$' dir.

Sonuç 2.12. Eğer L sınırlı ve dağılmalı bir kafes ve $|A(L)| < \infty$ ise L' nin bir A alt kafesi mevcuttur öyleki $A \cong \wp(A(L))$ olup A bir Boole cebiridir.

İspat: L üzerindeki t-normu $T = \wedge$ t-norm olarak alalım. L dağılmalı bir kafes olduğundan her $x, y, z \in L$ için

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

dir. $T = \wedge$ olduğundan $T(x, y \vee z) = T(x, y) \vee T(x, z)$ olup T $\vee$-dağılmalı bir t-normdur. $x \in L$, $T = \wedge$ t-normunun bir sıfır böleni olsun. O halde bir $y \in L$ elemanı $x \wedge y \neq 0$ ve $T(x, y) = 0$ olacak şekilde mevcuttur. $T = \wedge$ olduğundan bu bir çelişki olup $T = \wedge$ t-normu sıfır bölensizdir. $|A(L)| < \infty$ ve ve $T =\wedge$ sıfır bölensiz sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norm olduğundan Sonuç 2.6 ile $(\boldsymbol{A}, \preccurlyeq_T) = (\boldsymbol{A}, \leq)$ bir tam kafestir ve her $a, b \in \boldsymbol{A}$ için

$$a \wedge_T b = T(a,b) = a \wedge b \text{ ve } a \vee_T b = a \vee b$$

dir. Böylece, $(\boldsymbol{A}, \leq)$, $(L, \leq)$' in bir alt kafesi olup Önerme 2.14 ile $\boldsymbol{A} \cong \wp(A(L))$.

3. İRDELEME

Bu çalışmada bir t-norm yardımıyla T-sıralama olarak adlandırılan bir kısmen sıralama tanımlanarak bu sıralamanın özellikleri araştırılmıştır.

Bu tezin amacı bir L tam kafesi üzerindeki t-norm T' nin tüm idempotent elemanlarının oluşturduğu H_T alt kümesinin t-normlardan elde edilen sıralamaya göre tam kafes olması için t-norm üzerindeki şartları belirlemek ve atomların supremumu şeklinde yazılabilen, L tam kafesinin tüm elemanlarının $\boldsymbol{A}$ kümesini, t-normlardan elde edilen sıralamaya göre tam kafes yapan şartları incelemektir. Bu amaçla öncelikle, normal sıralama ile T-sıralama arasında bir bağıntının olup olmadığı gözden geçirilmiş ve T-sıralamaya göre sıralanmış elemanların normal sıralamaya göre de sıralanmış olduğu elde edilmiştir ancak tersinin doğru olmadığı örneklerle gösterilmiştir. Doğal olarak normal sıralamaya göre zincir (veya kafes) olan bir yapının T-sıralamaya göre zincir (veya kafes) olması gerekmediği elde edilmiştir. Burada şu soru akla gelmektedir: Acaba hangi şartlarda normal sıralamaya göre bir kafes olan yapı, aynı zamanda T-sıralamaya göre de bir kafes olur? Bir zincir üzerinde tanımlanan bir t-norm için karşılık gelen T-sıralamaya göre t-normun tüm idempotent elemanlarının kümesinin bir zincir (kafes) olduğu görülmüştür. Üstelik bir tam kafes üzerindeki t-norm sonsuz $\vee$-dağılmalı ise, t-normun tüm idempotent elemanlarının kümesinin bir tam kafes olduğu elde edilmiştir. Ayrıca, bir tam kafes üzerinde alınan bir t-norm sonsuz $\vee$-dağılmalı ise her elemanı atomların supremumu şeklinde yazılan kümenin, bu şekilde tanımlanan t-norma karşılık gelen T-sıralamaya göre bir tam kafes olduğu da elde edilmiştir.

4. SONUÇLAR

Yaptığımız çalışmada elde edilen başlıca sonuçlar şunlardır:

1. Bir sınırlı L kafesi üzerindeki t-norm yardımıyla $\preccurlyeq_T$ ile gösterilen bir T-kısmen sıralama tanımlanmış ve $\leq$ ile $\preccurlyeq_T$ sıralamaları arasındaki ilişki araştırılmıştır.

2. L bir zincir (veya kafes) olsa bile L' nin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bir zincir (veya kafes) olması gerekmediği örneklerle gösterilmiştir. L' yi $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bir kafes yapan şart belirlenmiştir.

3. T t-normunun tüm idempotent elemanlarının kümesi H_T' nin $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre bir tam kafes olması için t-norm üzerinde gerekli bazı şartlar belirlenmiştir.

4. Bir integral, komütatif, rezidual ℓ- monoid $M = (L, \odot, \leq)$ bölünebilir ise o halde $\odot$ ikili işlemine göre tüm idempotent elemanların H_T alt kümesinin bir Heyting cebiri olduğu ve H_T' deki gerektirme ile $\odot$ ikili işlemine dayanan gerektirmenin aynı olduğu ispatlanmıştır.

5. Drossos'un [19] (Höhle [33], Sonuç 2.7) çalışmasındaki teoremin ispatı için cebirsel güçlü De Morgan kuralının gerekmediği elde edilmiştir.

6. Atomların supremumu şeklinde yazılabilen L' nin tüm elemanlarının kümesini $\preccurlyeq_T$ sıralamasına göre tam kafes yapan t-norm üzerindeki bazı şartlar incelenmiştir.

5. ÖNERİLER

1. Örnek 2.1' de $(L = [0,1], \preccurlyeq_{T^{nM}})$' nin infimum- yarı kafes olduğu fakat supremum- yarı kafes olmadığı gösterilmiştir. $(L, \preccurlyeq_T)$'yi yarı kafes (infimum- yarı kafes veya supremum yarı- kafes) yapan $[0,1]$ üzerindeki t-normlar karakterize edilmemiştir. $(L, \preccurlyeq_T)$' yi yarı kafes (infimum- yarı kafes veya supremum- yarı kafes) yapan T t-normlar araştırılabilir.

2. T t-normu T_W olarak alındığında $(L, \preccurlyeq_T)$' nin bir kafes olduğu ve Örnek 2.3'de verilen T_W'dan farklı bir t-norm T için $(L, \preccurlyeq_T)$' nin kafes olduğu gösterilmiştir. $(L, \preccurlyeq_T)$' yi kafes yapan bu t-normlardan farklı t-normların mevcut olup olmadığı araştırılabilir.

3. Teorem 2.1' de L bir tam kafes ve T, L üzerinde sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norm ise $(H_T, \preccurlyeq_T)$' nin bir tam kafes olduğu ve Teorem 2.3' de L bir tam kafes ve T, L üzerinde sıfır bölensiz sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norm olduğunda $(A, \preccurlyeq_T)$' nin bir tam kafes olduğu gösterilmiştir. L bir tam kafes ve T, L üzerinde keyfi bir t-norm ise $(B, \preccurlyeq_T)$ tam kafes olan $B \subseteq L$ alt kümesini tanımlamak için başka yöntemler araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Abel N., Untersuchungen der Funktionen Zweier Unabhängigen Veränderlichen Größen x und y Wie $f(x, y)$, Welche die Eigenschaft Haben, daß $f(z, f(x, y))$ Eine Symmetrische Funktion Von x, y und z ist, J. Reine Angew. Math., 1 (1826) 11 – 15.

2. Aczél J., Lectures on Functional Equations and Their Applications, Academic Press, New York, 1966.

3. Aczél J., Sur Les Opérations Definies Pour Des Nombres Réels, Bull. Soc. Math. France, 76 (1949) 59 – 64.

4. Aczél J., Vorlesungen Über Funktionalgleichhungen und Ihre Anwendungen, Birkhäuser, Basel, 1961.

5. Alsina C., Trillas E. and Valverde L., On non-distibutive logical connectives for fuzzy sets theory, BUSEFAL 3 (1980) 18-29.

6. Anthony J. M. and Sherwood H., Fuzzy groups redefined, J. Math. Anal. Appl., 69 (1979) 124-130.

7. Birkhoff G., Lattice Theory, 3 rd edition, Providence, Rhode Island, 1967.

8. Brouwer L. E. J., Die Theorie der Endlichen Kontinuierlichen Gruppen Unabhängig Von Den Axiomen Von Lie, Mah. Ann., 67 (1909) 246 – 267.

9. Cartan E., La theorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs, Mem. Sci. Math., 42 (1930) 1165-1226.

10. Casasnovas J. and Mayor G., Discrete t-norms and operations on extended multisets, Fuzzy Sets and Systems, 159 (2008) 1165-1177.

11. Clifford A. H., Naturally totally ordered commutative semigroups, Amer. J. Math., 76 (1954) 631-646.

12. Climescu A.C., Sur l'equation fonctionelle de l'associativite, Bull. Ecole Polytechn. Iassy, 1 (1946) 1-16.

13. Davey B. A. and Priestley H. A., Introduction to lattices and order, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

14. De Baets B. and Mesiar R., Triangular norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 61-75.

15. De Baets B. and Mesiar R., Triangular norms on the real unit square, Proceedings of the 1999 EUSFLAT-EST YLF Joint Conference, 1999, Palma de Mallorca, Spain, 351-354.

16. De Baets B., Oplossen van vaagrelationele vergelijkingen:een ordetheoretisch benadering, Ph. D. Dissertation, University of Gent, Gent, 1995.

17. De Baets B., An order-theoretic approach to solving sup-T equations, Fuzzy Set Theory and Advanced Mathematical Applications, 1995, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 67-87.

18. De Cooman G. and Kerre E., Order norms on bounded partially ordered sets, J. Fuzzy Math., 2(1994) 281-310.

19. Drossos C. A., Generalized t-norm structures, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999), 53-59.

20. Drossos C. and Navara M., Generalized t-conorms and closure operators, Proc. 4 th Eur. Congr on Intelligent Techniques and Soft Computing, 1996, Aachen, Germany, 22-26.

21. Dubois D., Triangular norms for fuzzy sets, Proc. 2nd Internt. Seminar on Fuzzy Set Theory, 1980, Linz, 39-68.

22. Dubois D. and Prade H., Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York, 1980.

23. Faucett W. M., Compact Semigroups Irreducibly Connected Between Two Idempotents, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955) 741 – 747.

24. Frank M. J., On the Simultaneous Associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$, Aequations Math., 19 (1979) 194 – 226.

25. Goguen J., L-Fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl., 18 (1967) 145-174.

26. Gottwald S., Untersuchungen zur mehrwertigen Mengenlehre.I, Math. Nachr., 72 (1976) 297-303.

27. Gottwald S., Untersuchungen zur mehrwertigen Mengenlehre.II, Math. Nachr., 74 (1976) 329-336.

28. Gottwald S., Untersuchungen zur mehrwertigen Mengenlehre.III, Math. Nachr., 79 (1977) 207-217.

29. Gottwald S., A Treatise on Many-valued Logic, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

30. Gratzer G., General Lattice Theory, Academic Press, New York, San Francisco, 1978.

31. Hájek P., Metamathematics of Fuzzy Logic, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

32. Hosszù M., Some functional equations related with the associativity law, Publ. Math. Debrecen, 3 (1954) 205 – 214.

33. Höhle U., Commutative, residuated ℓ-monoids, in: U. Höhle, E.P. Klement (Eds.), Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets: A Handbook on the Math. Foundations of Fuzzy Set Theory, Kluwer, Dordrecht, 1995.

34. Jenei S., A more efficient method for defining fuzzy connectives, Fuzzy Sets and Systems, 90 (1997) 25-35.

35. Jenei S. and De Baets B., On the direct decomposability of t-norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 139 (2003) 699-707.

36. Khadjiev D. and Karaçal F., The Description of all $\vee$- distributive triangular norms of lenghts 2 and 3, Fuzzy Days, 2001, Dortmund, Germany, 829-833.

37. Karaçal F., On the direct decomposability of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms on product lattices, Advances in Soft Computing 2, 2005, Dortmund, Germany, 357-367.

38. Karaçal F., An answer to an open problem on triangular norms, Fuzzy Sets and Systems, 155 (2005) 459-463.

39. Karaçal F. and Khadjiev Dj., $\bigvee$-Distributive and infinitely $\bigvee$-distributive t-norms on complete lattice, Fuzzy Sets and Systems, 151 (2005) 341-352.

40. Karaçal F., A note on pseudo Archimedean and non-cancellative t-norm, EUSFLAT Conf., 2005, Barcelona, Spain, 856-859.

41. Karaçal F., On the direct decomposability of strong negations and S-implication operators on product lattices, Information Sciences, 176 (2006) 3011-3025.

42. Karaçal F. and Sağıroğlu Y., Infinitely $\bigvee$-distributive t-norms on complete lattices and pseudo-complements, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 32-43.

43. Karaçal F. and Kesicioğlu M. N.,T-Actions on Bounded Lattices, Lattice-Valued Logic and its Applications, 31 st Linz Seminar on Fuzzy Set Theory, 2010, Linz, Austria, 102-104.

44. Karaçal F. and Kesicioğlu M. N., A T- partial order obtained from t-norms, Kybernetika, 47 (2011) 300-314.

45. Klein-Barmen F., Über gewisse Halbverbande und kommutative Semigruppen II, Math. Z, 48 (1942-1943) 715-734.

46. Klement E.P., Some remarks on t-norms, fuzzy σ-algebras and fuzzy measures, Proceedings Second International Seminar on Fuzzy Set Theory, 1980, Linz, 125-142.

47. Klement E.P., Operations on fuzzy sets and fuzzy numbers related to triangular norms, Proc. 11 th Internat. Symp. on Multiple-Valued Logic, Norman, IEEE Press, New York, 1981, 218-225.

48. Klement E.P., Operations on fuzzy sets an axiomatic approach, Information Sciences, 27 (1982) 221-232.

49. Klement E.P., Mesiar R. and Pap E., Triangular norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

50. Klement E.P., Mesiar R. and Pap E., Problems on triangular norms and related operators, Fuzzy Sets and Systems, 145 (2004) 471-479.

51. Liang X. and Pedrycz W., Logic-based fuzzy networks: A study in system modeling with triangular norms and uninorms, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 3475-3502.

52. Ling C., Representation of associative functions, Publ. Math. Debrecen, 12 (1965) 189-212.

53. Ma Z. and Wu W.-M., Logical operators on complete lattices, Inform. Sci., 55 (1991) 77-97.

54. Maes K. C. and Mesiarova-Zemankova A., Cancellativity properties for t-norms and t-subnorms, Information Sciences, 179 (2009) 1221-1233.

55. Menger K., Statistical metrics, Proc. Nat. Acad. Sci., 8 (1942) 535-537.

56. Mesiarova A., H-transformation of t-norms, Information Sciences, 176 (2006) 1531-1545.

57. Mitsch H., A natural partial order for semigroups, Proceedings of the American Mathematical Society, 97 (1986) 384-388.

58. Mostert P. S. and Shields A. L., On the structure of semi-groups on a compact manifold with boundary, Ann. of Math. Ser. II, 65 (1957) 117-143.

59. Negoita C. V. and Ralescu D. A., Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis, Wiley, New York, 1975.

60. Nuguyen H. and Walker E., A first Course in Fuzzy Logic, CRC Press, Boca Raton, 1997.

61. Paalman-de Miranda A. B., Topological Semigroups, Matematisch Centrum, Amsterdam, 1964.

62. Ray S., Modified TL-subgroups of a group, Fuzzy Sets and Systems, 91 (1997) 375-387.

63. Ray S., Representation of Boolean algebra by its triangular norms, Mathware Soft Comput., 4 (1997) 63-68.

64. Saminger S., On ordinal sums of triangular norms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems, 157 (2006) 1403-1416.

65. Saminger-Platz S., Klement E.P. and Mesiar R., On extensions of triangular norms on bounded lattices, Indagations Mathematicae, 19 (2009) 135-150.

66. Schweizer B. and Sklar A., Espaces Metriques Aleatories, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 247 (1958) 2092 – 2094.

67. Schweizer B. and Sklar A., Statistical Metric Spaces, Pasific J. Math., 10 (1960) 313 – 334.

68. Schweizer B. and Sklar A., Associative fuctions and statistical triangle inequalities, Publ. Math. Debrecen, 8 (1961) 169 – 186.

69. Schweizer B. and Sklar A., Associative fuctions and abstract semigroups, Publ. Math. Debrecen, 10 (1963) 69-81.

70. Schweizer B. and Sklar A., Probabilistic Metric Spaces, North-Holland, New York, 1983.

71. Serstnev A. N., Random normed spaces: problems of completeness, Kazan. Gos. Univ. Ucen. Zap., 122 (1962) 3-20.

72. Sugeno M., Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph. D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, 1974.

73. Trillas E., Sobre funciones de negacion en la teoria de conjuntas difusos, Stochastica, 3 (1979) 47-60.

74. Wang Z. and Yu Y., Pseudo t-norms and implication operators on a complete Brouwerian lattice, Fuzzy Sets and Systems, 132 (2002) 113-124.

75. Wang Z., Generating pseudo-t-norms and implication operators, Fuzzy Sets and Systems, 157 (2006) 398-410.

76. Wang Z. and Fang J.-x., On the direct decomposability of pseudo-t-norms, t-norms and implication operators on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 158 (2007) 2494-2503.

77. Wang Z., T-filters of integral residuated ℓ- monoids, Information Sciences, 177 (2007) 887-896.

78. Zadeh L. A., Fuzzy sets, Inform. Control, 8 (1965) 338-353.

79. Zhang D., Triangular norms on partially ordered sets, Fuzzy Sets and Systems, 153 (2005) 195-209.

ÖZGEÇMİŞ

Mücahide Nesibe Kesicioğlu 1981 yılında Kırıkkale'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kırıkkale' de tamamladı. 2003 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden birincilikle mezun oldu. 2006 yılında K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü'nden Yüksek Lisans derecesini aldı ve aynı enstitüde Doktora eğitimine başladı. 2005 yılında K.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı ve burada 3 yıl çalıştı. 2008 yılından itibaren Rize Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk sahibi olup, iyi derecede İngilizce bilmektedir.

Başlıca Eserler

1. Karaçal F., Kesicioğlu M. N., A t-partial order obtained from t-norms, Kybernetika, 47 (2011) 300-314.

2. Karaçal F., Kesicioğlu M. N.,T-Actions on Bounded Lattices, Lattice-Valued Logic and its Applications, 31 st Linz Seminar on Fuzzy Set Theory, 2010, Linz, Austria, 102-104.