KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ TUTAN BARİYERLİ YARI-MARKOV RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Ali Akbar FATTAHPOUR MARANDİ

MAYIS 2012
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ TUTAN BARİYERLİ YARI-MARKOV RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Yüksek Matematikçi Ali Akbar FATTAHPOUR MARANDİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 23.03.2012
Tezin Savunma Tarihi : 04.05.2012

Tez Danışmanı : Prof. Dr. İhsan ÜNVER
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Tahir KHANİYEV

Trabzon 2012

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Ali Akbar FATTAHPOUR MARANDİ Tarafından Hazırlanan

GENELLEŞTİRİLMİŞ TUTAN BARİYERLİ YARI-MARKOV RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 03.04.2012 gün ve 1451 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

DOKTORA TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. İhsan ÜNVER ……………………………………

Üye : Prof. Dr. Hülya BAYRAK ……………………………………

Üye : Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK ……………………………………

Üye : Yrd. Doç. Dr.Tülay KESEMEN ……………………………………

Üye :Yrd. Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN ……………………………………

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Sürecinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi amacı ile KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Doktora tez çalışması olarak yapılmıştır.

Çalışmanın tamamlanana kadar olan süreçte, emeği, öneri ve yönlendirmeleri ile önemli katkıda bulunan, öğrenimim boyunca en başından beri bana inanan, bana yol gösteren, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım çok değerli danışman hocalarım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi öğretim üyesi Sayın Prof. Dr. Tahir KHANİYEV'e ve KTÜ Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. İhsan ÜNVER'e sonsuz teşekkür eder ve saygılarımı sunarım.

Aynı zamanda çalışma süresince, değerli öneri ve yardımlarıyla katkıda bulunan tez izleme jüri üyeleri hocalarım Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK'e ve Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN'e teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmam süresince desteklerinden dolayı KTÜ Fen Fakültesi Matematik Bölümü mensuplarına, özellikle manevi desteklerinden dolayı Bakü Devlet Üniversitesi öğretim üyesi Doç. Dr. Rovshan ALİYEV'e teşekkür ederim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme, özellikle değerli babam Ali Asghar FATTAHPOUR'e, sevgili annem Fateme ZADESAMAD'e, eşim M.AFKARY'e ve kardeşlerime şükranlarımı sunarım.

Ali Akbar FATTAHPOUR MARANDİ

Trabzon 2012

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum "GENELLEŞTİRİLMİŞ TUTAN BARİYERLİ YARI-MARKOV RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ" başlıklı bu çalışmayı, baştan sona kadar danışmanlarım Prof. Dr. İhsan ÜNVER ve Prof. Dr. Tahir KHANİYEV'in sorumluluğunda tamamladığımı, veri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri kendim yaptığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 23/03/2012

Ali Akbar FATTAHPOUR MARANDİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ TUTAN BARİYERLİ YARI-MARKOV RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Ali Akbar FATTAHPOUR MARANDİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışmanlar : Prof. Dr. İhsan ÜNVER ve Prof. Dr. Tahir KHANİYEV
2012, 80 Sayfa, 9 Ek Sayfa

Bu çalışmada, “Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Sürecinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi” konusu ele alınmıştır. Bu süreç için genel bir giriş yapıldıktan sonra ele alınan süreç matematiksel olarak inşa edilmiş ve bu sürecin bazı genel koşullar altında ergodik olduğu gösterilmiştir.

Bunun yanı sıra, sürecin ergodik dağılım fonksiyonu, ergodik karakteristik fonksiyonu ve ergodik dağılımın momentleri $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin karakteristikleri yardımı ile ifade edilmiştir.

Çalışmanın diğer bölümlerinde, sürecin ergodik dağılımın momentlerinin aşikar şekli ve ilk dört momenti için asimptotik açılımlar elde edilmiştir.

Daha sonra, sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiş ve limit dağılımının aşikâr şekli bulunmuştur.

Ayrıca, sürecin sınır fonksiyonellerinin momentleri için asimptotik sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak, özel durumlar için zayıf yakınsama teoremi ve sürecin ergodik dağılımının momentleri için asimptotik açılımlar verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Yarı-Markov rasgele yürüyüş süreç, Tutan bariyer, Ergodik dağılım, Sınır fonksiyoneli, Ergodik Momentler, Asimptotik açılım,Zayıf yakınsaklık.

PhD. Thesis

SUMMARY

ASYMPTOTIC EXPANSIONS FOR THE ERGODIC MOMENTS OF SEMI-MARKOVIAN RANDOM WALK WITH A GENERALIZED DELAYING BARRIER

Ali Akbar FATTAHPOUR MARANDİ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. İhsan ÜNVER and Prof. Dr. Tahir KHANİYEV
2012, 80 Pages, 9 Pages Appendix

In this study, a number of very interesting problems of stock control, queuing and reliability theories are expressed by means of random walk with various types of barriers. These barriers can be reflecting, delaying, absorbing, elastic, and etc., depending on concrete problems at hand. In this topic, there are many interesting studies in literature.

Here, a semi – Markovian random walk process $(X(t))$ with a generalized delaying barrier is considered and ergodic theorem for this process is proved under some weak conditions. Then, the exact expressions and asymptotic expansions for the first four ergodic moments of the process $X(t)$ are obtained. However, the results of these studies are not readily applicable to real-world problems probable characteristics of considered process have very complex mathematical structure. To avoid this difficulty, the asymptotic approach method is used in this study to calculate the ergodic moments of the process $X(t)$. Moreover, the characteristic function of the ergodic distribution of the process $X(t)$ is expressed by characteristic function of a boundary functional $S_{N(z)}$.

Mentioned in sections, the first four initial moments of the boundary functionals, the ergodic distribution function and the ergodic moments of the process is expressed by means of a renewal function, the exact and asymptotic results for these are obtained. Then, using this representation, it is shown that the ergodic distribution of the "standardized" process $Y_\lambda(t) \equiv X(t)/\lambda$ converges to a limit distribution, when $\lambda \to \infty$. Finally, the explicit form of the limit distribution is obtained.

Key Words: Semi - Markovian random walk, Delaying barrier, Ergodic distribution, Ergodic moments, Asymptotic expansion, Boundary functional, Ladder epoch, Weak convergence, Ladder height.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$a(x) \sim b(x)$	: $a(x)$ 'in $b(x)$ 'e asimptotik denkliği
$d_z F$	: F fonksiyonunun z değişkenine göre diferansiyeli
$E(\xi)$	: ξ rasgele değişkeninin beklenen değeri
$E_z(\xi)$	: ξ rasgele değişkeninin koşullu beklenen değeri
$E(\xi^n)$	: ξ rasgele değişkeninin n. başlangıç momenti
$E\|\xi\|$	: ξ rasgele değişkeninin mutlak momenti
$\varepsilon(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$	: Heaviside birim fonksiyonu
$f(x)\big\|_{x=0}$	: $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki değeri
$\varphi_1 * \varphi_2$	: φ_1 ve φ_2 fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı
φ^{*n}	: φ fonksiyonunun kendisiyle n. konvolüsyon çarpımı
$I_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}$	: A kümesinin indikatör (gösterge) fonksiyonu
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$	: x, ∞ 'a giderken $f(x)$ fonksiyonunun limiti
$P\{A\}$	: A olayının olasılığı
$P_z\{A\}$	: A olayının koşullu olasılığı
$Var(\xi)$	: ξ rasgele değişkeninin varyansı
$Var_z(\xi)$	: ξ rasgele değişkeninin koşullu varyansı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Stokastik finans, matematiksel biyoloji, güvenilirlik, kuyruk, stok kontrol teorisi ve matematiksel sigortanın pek çok ilginç problemi, rasgele yürüyüş süreçleri veya bu süreçlerin çeşitli modifikasyonları yardımıyla çözülebilir.

Stokastik süreç kavramı sistematik olarak A.N.Kolmogorov ve A.Y.Khinchin gibi ünlü olasılıkçılar tarafından ortaya konulmuş ve bu alanda ilk esaslı sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır.

A.N.Kolmogorov günümüzde Markov tipli stokastik süreçlerin esaslarını ortaya koyarken, A.Khinchin çalışmalarında stasyoner stokastik süreçler üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Bu alanda emeği geçen başlıca bilim adamları arasında N.Winer, W.Feller, J.Dobb, R.Fisher, J.Neumann ve H.Cramer gibi olasılkçıların isimleri anılmaktadır.

Stok kontrol teorisi, kuyruk teorisi ve güvenirlik teorisindeki problemlerin çoğu, bariyerli veya bariyersiz rasgele yürüyüş süreçleri yardımıyla ifade edilebilir, öyle ki bu bariyerler ele alınan probleme bağlı olarak değişik tiplerden olabilir (örneğin; yansıtan, tutan, yutan v.s.). Özellikle kuyruk teorisi ve şans oyunlarında yutan bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri kullanılmaktadır. Örneğin, başlangıç sermayesi a, $a > 0$ birim olan bir kumarbazın başlangıç sermayesi b, $b > 0$ birim olan bir kumarbaza karşı oyun oynadığını varsayalım ve kumarbaz her bir oyunun sonunda bir birim kazansın veya kaybetsin. Ayrıca kumarbazın sermayesi ‘0’a düşünceye kadar veya ‘a+b’ye ulaşıncaya kadar oyuna devam ettiğini varsayalım. Bu durumda kumarbazın sermayesini ‘0’ ve ‘a+b’de yutan bariyerlere sahip basit rasgele yürüyüş süreci olarak adlandırılan bir stokastik süreçle karakterize etmek mümkündür. Eğer kumarbazın sermayesi belirli bir adım sonunda sıfır oluyorsa bu durumda kumarbaz iflas etmiş ve karşı kumarbaz onun bütün sermayesini kazanmış olacaktır.

Stok kontrol teorisindeki birçok problemin çözümlenmesinde basit rasgele yürüyüş süreçleri yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle bilim adamları çalışmalarını basit rasgele yürüyüş süreçleri yerine, genel durum uzaylarına sahip rasgele yürüyüş süreçleri veya bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri üzerinde yoğunlaştırmışlardır. Basit rasgele yürüyüş süreçleri genel durum uzaylarına sahip rasgele yürüyüş süreçlerinin değişik özel durumlarıdır.

Tezin daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıda konunun terimleri ve çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

1.2. Stokastik Süreçler

Stokastik süreçleri tanımlayabilmek için öncelikle σ-cebir, olasılık uzayı, olay, rasgele değişken gibi kavramların bilinmesi gerekmektedir. Aşağıda bu kavramların tanımları verilmektedir.

Tanım 1.2.1. $\Omega \neq \emptyset$ kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $\Im$ sınıfı

1) $\Omega \in \Im$,
2) $\forall A \in \Im$ için $\overline{A} \in \Im$,
3) İkişer ikişer ayrık kümelerin oluşturduğu $\forall (A_n) \in \Im$ dizisi için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Im$

özelliklerine sahip olsun. Bu takdirde $\Im$ sınıfına Ω'da bir "σ-cebir"dir denir. Bir σ-cebir, sayılabilir birleşim, kesişim ve tümleme işlemine göre kapalıdır.

Tanım 1.2.2. ¡ reel sayılar kümesindeki açık aralıkların sınıfını kapsayan en küçük aralıkların σ-cebirine "Borel cebiri" denir. Borel cebirinin her bir elemanına "Borel kümesi" denir.

Tanım 1.2.3. $\Im$, $\Omega \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlanmış bir σ-cebir olmak üzere, $P : \Im \to$ ¡ fonksiyonu

1) $\forall A \in \Im$ için $P(A) \geq 0$,
2) $P(\Omega) = 1$,
3) İkişer ikişer ayrık kümelerin oluşturduğu $\forall (A_n) \in \Im$ dizisi için

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

özelliklerine sahip ise, P fonksiyonuna $\Im$ üzerinde bir "olasılık ölçüsü" denir. $P(A)$ değerine ise, A kümesinin olasılık ölçüsü veya "A kümesinin olasılığı" denir.

Tanım 1.2.4. $\Omega \neq \varnothing$ bir küme, $\Im$, Ω'da tanımlanmış bir σ-cebir ve P, $\Im$ üzerinde tanımlanmış bir olasılık ölçüsü olmak üzere, $(\Omega, \Im, P)$ üçlüsüne bir "olasılık uzayı" denir.

Tanım 1.2.5. Sonuçlarının kümesi belli olan, ancak gerçekleştiğinde hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden bilinmeyen deneylere "olasılık deneyi" veya "stokastik deney" denir.

Tanım 1.2.6. Bir stokastik deneyin tüm olabilir sonuçlarının kümesine "örnek uzay" denir. Örnek uzayın her alt kümesine "olay" denir.

Bir $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı, bir stokastik deneyin modeli olarak kullanıldığında, $\Im$ σ-cebirindeki kümeler, deney ile ilgili olaylara karşılık gelir. Bir σ-cebir, sayılabilir birleşim, kesişim ve tümleme işlemine göre kapalı olduğundan, σ-cebirdeki kümeler üzerinde bu işlemler sonucu elde edilen bir küme ise bir olaya karşılık gelir.

Bir stokastik deneyin sonuçlarının kümesi olan örnek uzayın elemanları çok değişik türde olabilir. Rasgele değişkenler yardımıyla, örnek uzayın elemanlarına reel sayılar eşlenmekte ve böylece olasılık ölçüleri Borel cebiri üzerindeki olasılık ölçülerine indirgenmiş olmaktadır.

Bir stokastik deney sonucunda değerler alan fonksiyona rasgele değişken denir. Rasgele değişkenler tanım kümesine göre kesikli, mutlak sürekli ve singüler olmak üzere üç kısma ayrılırlar. Örneğin, 1 madeni para 10 kez atıldığında yazı gelmesi sayısı kesikli, bir elektrik cihazının bozulmadan çalışma süresi ise sürekli rasgele değişkendir.

Rasgele değişken, matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

Tanım 1.2.7. $(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$\forall x \in \mathbb{R}$ sayısı için $\{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \Im$

yani $\Im$-ölçülebilir ise, ξ fonksiyonuna bir "rasgele değişken" denir.

Tanımından görüldüğü gibi rasgele değişken aslında, belli özellikleri olan bir değişkenli fonksiyondur. Birçok durumda ikinci bir değişkene de ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin, sıvı içerisinde oluşan bir hareket sonucunda bir parçacığın zaman geçtikçe konumu veya hızı veyahut borsadaki herhangi bir hisse senedinin fiyatının zamanla değişmesi, sadece bir rasgele değişken yardımıyla tanımlanamaz. Bu durumda stokastik süreç kavramına ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 1.2.8. $(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı ve $\varnothing \neq T \subseteq \mathbb{R}$ bir küme olsun. Reel değerli $\xi(\omega, t)$ fonksiyonu, her $t \in T$ için Ω kümesinde tanımlanmış bir rasgele değişken ise, bu fonksiyona bir "rasgele fonksiyon" denir. Bazen $\eta(\omega, t)$, $X(\omega, t), Y(\omega, t)$ sembolleri ile bazen de ω değişkeni olmadan $\xi(t)$, $\eta(t)$ sembolleri ile gösterilir. Eğer burada $T = \mathbb{R}^{+}$ ise ve t parametresi zamanı ifade ediyorsa, bu durumda $\xi(\omega, t)$ rasgele fonksiyonuna bir "stokastik süreç" denir.

Tanımından görüldüğü gibi bir stokastik süreç, sonsuz sayıdaki rasgele değişkenlerin bir ailesidir. Bu durumda stokastik süreçler için de rasgele değişkenler için verilen kavramların benzerini vermek mümkündür. Bundan sonraki kısımlarda, bir stokastik süreç $X(\omega, t)$ sembolü ile gösterilecektir.

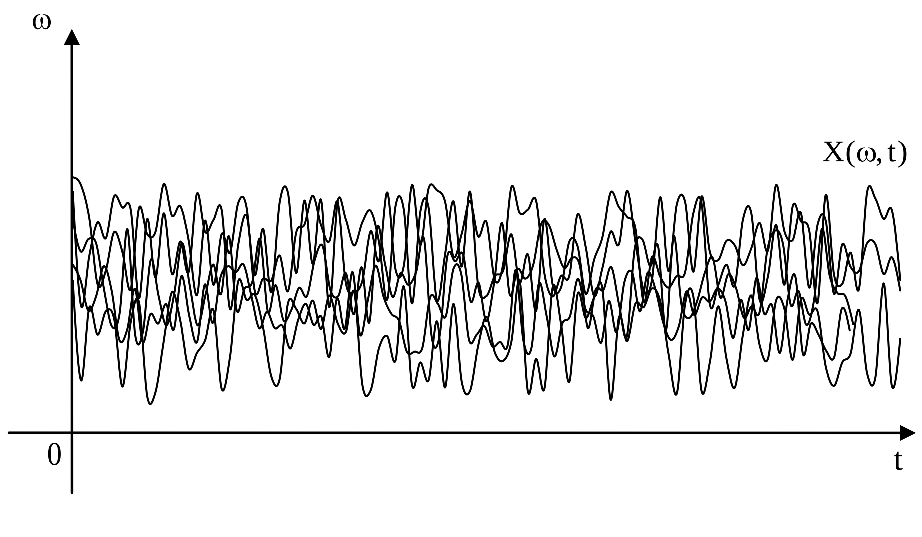
Not 1.2.1. Bir stokastik süreç, olayı temsil eden ω parametresinin yani sıra, zamanı temsil eden t parametresine de bağlı bir fonksiyondur. Bu nedenle, aşağıdaki durumlar oluşmaktadır:

i) Her bir stokastik sürecin genel durumda, sonsuz sayıda realizasyonu vardır. Çünkü grafiklerin sayısı ω'nın sayısına bağlıdır.

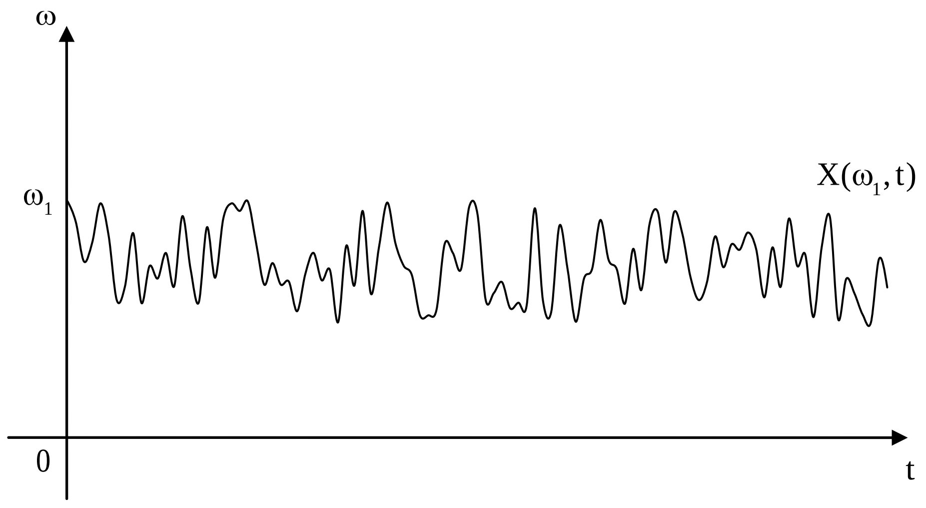
ii) Eğer $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin ω parametresi sabit tutulursa, yalnız t'ye bağlı olan ve rasgele olmayan bir fonksiyon elde edilir.

iii) Eğer $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin t parametresi sabit tutulursa, yalnız ω'ya bağlı olan bir fonksiyon, yani bir rasgele değişken elde edilir.

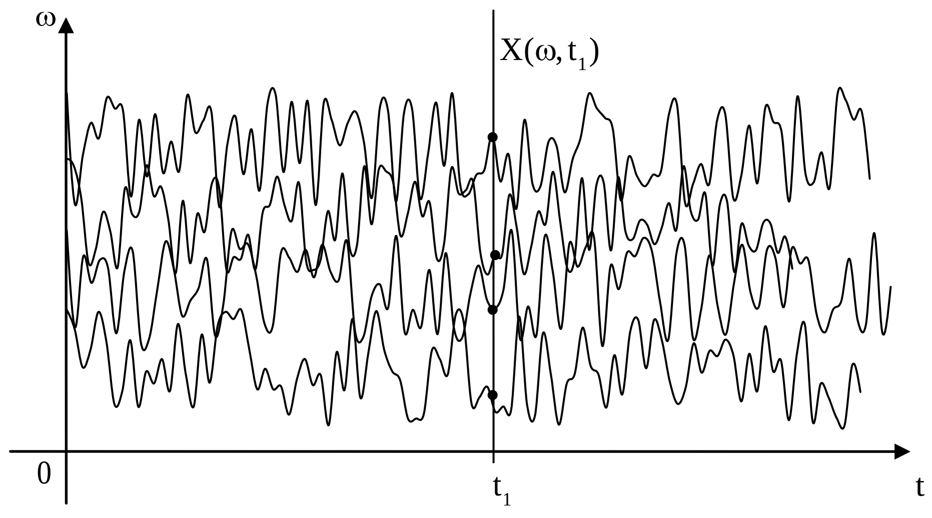
Bu durumlar sırasıyla aşağıdaki şekillerdeki gibi gösterilebilir:



Şekil 1. $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin realizasyonları



Şekil 2. ω parametresi sabit iken $X(\omega, t)$ sürecinin bir realizasyonu



Şekil 3. t parametresi sabit iken $X(\omega, t)$ sürecinin bir realizasyonu

1.2.1. Stokastik Süreçlerin Bazı Karakteristikleri

Bilinmektedir ki, bir tane rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu bir argümanlı, yani

$$F(x)=P\{\xi\le x\}$$

şeklinde; iki tane rasgele değişkenin ortak dağılım fonksiyonu iki argümanlı, yani

$$F(x_1,x_2)=P\{\xi_1\le x_1,\xi_2\le x_2\}$$

şeklinde; … ; n tane rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu ise n argümanlı, yani

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P\{\xi_1\le x_1,\xi_2\le x_2,\ldots,\xi_n\le x_n\}$$

şeklindedir.

Bir stokastik süreç, sonsuz sayıdaki rasgele değişkenlerin bir ailesi olduğundan, onun dağılım fonksiyonu ise sonsuz argümanlı olmalıdır. Ancak bu tip fonksiyonları matematiksel olarak ifade etmek ve incelemek mümkün değildir. Bu nedenle, bir stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılımlarının bilinmesi gerekmektedir. Çünkü bir stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu yardımıyla, sürecin diğer karakteristikleri ve süreçle ilgili olayların olasılıkları bulunabilir.

Tanım 1.2.1.1. $X(\omega,t)$ bir stokastik süreç olsun. $X(\omega,t_1),\ X(\omega,t_2),\ \ldots,\ X(\omega,t_n)$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonuna, yani

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)=P\{\omega: X(\omega,t_1)\le x_1,\ldots,X(\omega,t_n)\le x_n\},\ t_1,t_2,\ldots,t_n\in T,\quad x_i\in\mathbb{R}$$

fonksiyonuna $X(\omega,t)$ sürecinin “n-boyutlu dağılım fonksiyonu” denir.

$$\{F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)\},\ n\ge 1$$

ailesine ise, sürecin “sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları” denir. Sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) $F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},\infty)=F_{t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$,

2) $F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=F_{t_{i_1},t_{i_2},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_n})$,

burada $i_1,i_2,\ldots,i_k$ indekslerin yer değişimini göstermektedir.

Bir n değişkenli fonksiyonlar ailesi verildiğinde bu ailenin, bir stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu olup olmadığını anlayabilmek için aşağıdaki teoreme ihtiyaç vardır.

Teorem 1.2.1.1 (Kolmogorov teoremi). $\left\{F_{t_1,K,t_n}(x_1,K,x_n)\right\}, t_i \in T,\ \ t_1 < ... < t_n,\ \ n \geq 1,$ Tanım 1.2.1.1'deki 1. ve 2. özelliklere sahip sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları ailesi olsun. Bu durumda öyle bir $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı ve $X(\omega,t)$ stokastik süreci vardır ki,

$$P\left\{\omega : X(\omega,t_1) \leq x_1, K, X(\omega,t_n) \leq x_n\right\} = F_{t_1,K,t_n}(x_1,K,x_n)$$

eşitliğini sağlar. Bu takdirdebir stokastik süreç ile onun sonlu boyutlu dağılımları birbirlerini bire-bir tanımlamaktadır.

Not 1.2.1.1. $T \subseteq ¥ = \{0,1,...,\}$ ise, $X(\omega,t)$ stokastik sürecine "kesikli zamanlı stokastik süreç", T aralık ise $X(\omega,t)$'e "sürekli zamanlı stokastik süreç" denir. Bu durumda

i) Eğer $X(\omega,t)$ stokastik sürecinin D durum (değerler) kümesi kesikli ise, sürecin sonlu boyutlu dağılımları

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(k_1,\ldots,k_n) = P\left\{\omega :\ X_{t_1}(\omega) = k_1,\ldots,X_{t_n}(\omega) = k_n\right\},\ t_n \in T,\ n = 1,2,\ldots$$

ii) Eğer $X(\omega,t)$ stokastik sürecinin D durum kümesi sayılamayan sonsuz elemana sahip ise, sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu

$$F_{t_1,K,t_n}(x_1,,K,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} p_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n)du_1\ldots du_n$$

ile tanımlanmaktadır. Burada $p_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n)$, sürecin n-boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir.

Olasılık teorisinden bir rasgele değişkenin sayısal karakteristiklerinin (beklenen değer, varyans vs.) birer sabit sayı olduğu bilinmektedir. Bir stokastik sürecin de benzer karakteristikleri vardır, fakat bu karakteristikler $t \in T$ parametresine bağlı birer rasgele olmayan fonksiyondur.

Tanım 1.2.1.2. $X(\omega,t)$ bir stokastik süreç, $F_t(x)$ bu stokastik sürecin bir boyutlu dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda

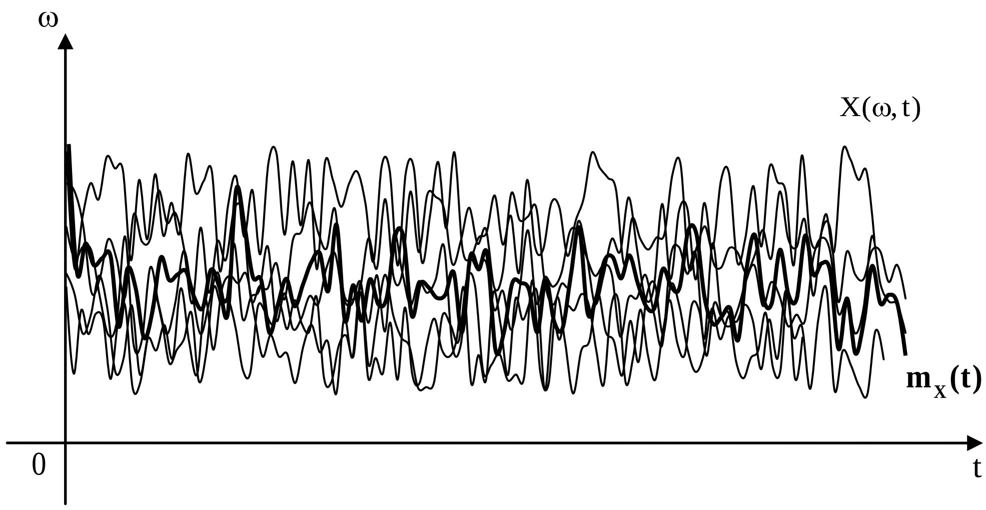
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF_t(x) < +\infty$$

ise

$$E(X(\omega,t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_t(x),\ t \in T$$

integraline $X(\omega,t)$ stokastik sürecinin "beklenen değeri" denir. Bir stokastik sürecin beklenen değeri $m_X(t)$ sembolü ile de gösterilmektedir.

Bir stokastik sürecin beklenen değeri, rasgele olmayan, $t \in T$ parametresine bağlı öyle bir "orta" fonksiyondur ki, sürecin realizasyonları onun etrafında dağılmıştır. Bu durum aşağıdaki şekildeki gibi gösterilebilir:



Şekil 4. $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin beklenen değeri

Tanım 1.2.1.3. $X(\omega, t)$ bir stokastik süreç olsun. Bu durumda

$$V_X(t) = Var\left(X(\omega, t)\right) = E\left(X(\omega, t) - m_X(t)\right)^2$$

fonksiyonuna $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin "varyans"ı denir. Ayrıca, $\sigma_X(t) = \sqrt{V_X(t)}$ fonksiyonuna $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin "standart sapması" denir.

Bir stokastik sürecin varyansı, rasgele olmayan, $t \in T$ parametresine bağlı bir fonksiyon olup sürecin realizasyonlarının, beklenen değerinin etrafında nasıl dağıldığını gösteren bir karakteristiktir.

1.2.2. Stokastik Süreçlerin Sınıflandırılması

Stokastik süreçleri belli özelliklerine göre sınıflandırmak mümkündür. Örneğin, zaman parametresi kesikli veya sürekli olan süreçler, realizasyonu kesikli veya sürekli olan süreçler, stokastik sürecin değerlerinin stokastik ilişkisine göre oluşan süreçler, vs. Stokastik süreçlerin sınıflandırılması süreçlerin incelenmesinde kolaylıklar sağlar.

Genel olarak stokastik süreçler; “Gauss süreçleri, değerleri bağımsız süreçler, artışları bağımsız süreçler, durağan ve durağan olmayan süreçler, Markov ve yarı Markov süreçler” şeklinde sınıflandırılmaktadır.

Aşağıda bu süreçlerden bazılarının tanımları verilmektedir:

Tanım 1.2.2.1. $X(t)$ bir stokastik süreç olsun ve bu sürecin $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ noktalarındaki değerleri $X(t_1),\ X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ ile gösterilsin. Eğer her $n = 1, 2, \ldots$ için $X(t_1),\ X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n)$ rasgele değişkenleri tam bağımsız ise, bu sürece “değerleri bağımsız olan stokastik süreç” denir.

Not 1.2.2.1. Değerleri bağımsız olan stokastik süreçlerin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$F_{t_1 t_2 \ldots t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{t_1}(x_1) F_{t_2}(x_2) \ldots F_{t_n}(x_n) .$$

Başka bir deyişle, değerleri bağımsız olan sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları, bir boyutlu dağılım fonksiyonlarının çarpımına eşittir. Değerleri bağımsız olan stokastik süreçlerin sonlu boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$p_{t_1 t_2 \ldots t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{t_1}(x_1) p_{t_2}(x_2) \ldots p_{t_n}(x_n) .$$

Tanım 1.2.2.2. $X(\omega, t)$ bir stokastik süreç olsun. Her $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ için

$$\left(X(t_1) - X(t_0)\right),\ \left(X(t_2) - X(t_1)\right),\ \ldots,\ \left(X(t_n) - X(t_{n-1})\right),\ n = 1, 2, \ldots$$

farklarına “ $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin artışları” denir. Eğer her t_n ve n için bu artışlar birbirinden bağımsız rasgele değişkenler ise, $X(\omega, t)$ stokastik sürecine “artışları bağımsız stokastik süreç” denir. Bu koşul matematiksel olarak aşağıdaki gibi verilebilir:

$$P\left\{X(t_1) - X(t_0) \le x_1, \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1}) \le x_n\right\} = \prod_{k=1}^{n} P\left\{X(t_k) - X(t_{k-1}) \le x_k\right\}.$$

Örnek 1.2.2.1. Artışları bağımsız süreçlere Poisson ve Wiener süreçlerini de örnek göstermek mümkündür. Bu süreçler olasılık teorisinde çok önemli bir role sahiptir. Çünkü birçok olasılık modelleri bu süreçlerin yardımıyla verilebilir.

1.2.2.1. Markov ve Yarı-Markov Süreçler

Stokastik süreçlerin değerlerinin bağımsızlığı koşulu bazen sağlanmamaktadır. Bu durumda, değerleri arasında bağımlılık olan süreçlerin incelenmesi gerekmektedir. Böyle bağımlılık çeşitlerinden biri, literatürde Markov bağımlılığı olarak bilinmektedir. Markov bağımlılığı "sürecin her bir keyfi gelecek anındaki değerinin dağılımı, yalnız şimdiki andaki değerinin dağılımına bağlı olup, geçmişteki değerlerinin dağılımına bağlı olmaması" olarak ifade edilebilir. Başka bir deyişle, "gelecek geçmişe bağlı olmayıp, yalnız şimdiki ana bağlı"dır. Değerleri arasında bu tip bağımlılık olan süreçlere, "Markov süreçleri" denir. Ayrıca bir stokastik süreç, bazı $t \in T$'ler için Markov bağımlılığa sahipse, o sürece "yarı-Markov süreç" denir. Markov süreçlerini matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür:

Tanım 1.2.2.1.1. $(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı ve $T = [0, +\infty)$ olsun. $X(t) = X(\omega, t)$ ise $\Omega \times T$'de tanımlanmış bir stokastik süreç olsun. Eğer $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, $x_1, x_1, \ldots, x_n \in R$ için

$$P\left\{X(t_n) \le x_n \middle| X(t_1) \le x_1, \ldots, X(t_{n-1}) \le x_{n-1}\right\} = P\left\{X(t_n) \le x_n \middle| X(t_{n-1}) \le x_{n-1}\right\}$$

sağlanıyorsa, $X(t)$ stokastik sürecine "Markov süreci" denir. Markov sürecinde zaman kesikli olduğunda ise o sürece "Markov zinciri" denir.

Tanım 1.2.2.1.2. Markov zincirleri için ergodik teoremi vermek için aşağıdaki iki koşul mevcut olmalıdır:

1. Markov zinciri ayrılmayan ve periyodik olmayan bir zincir olsun.
2. Öyle bir E_0 durumu mevcut olsun ki, sistemin bu duruma dönme süresinin beklenen değeri sonlu olsun.

Bu durumda keyfi i ve j değerleri için i'den bağımsız pozitif

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = p_j > 0, \; i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

limitleri mevcut olsun. Eğer p_j olasılıkları

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1 \\ &p_j = \sum_{k=0}^{\infty} p_k p_{kj}, \; j = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

denklemler sistemini sağlarsa, uygun zincire “ergodik zincir” denir. Burada p_j olasığı sistemin uzun bir süreden sonra E_j durumuna gelme olasılığıdır. Bu, p_j olasılığının sistemin ilk andaki durumuna bağımlı olmadığını ifade eder. Yani sistem nereden harekete başladığını unutur. $\{p_j\}_{j=\overline{0,\infty}}$ dağılımına “durağan veya sonuncu dağılım” denir. (1.1) özelliği $\{p_j\}_{j=\overline{0,\infty}}$ dağılımının p_{ij} geçiş olasılıklarına göre değişmez olduğunu gösterir. Yani $p_k = P\{\omega : X_n(\omega) = k\}$ ise $P\{\omega : X_{n+1}(\omega) = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_j p_{jk} = p_k$ ’dır.

Teorem 1.2.2.1.1 (Genel Ergodiklik Teoremi). $X(t)$ süreci kesikli müdahaleli bir yarı-Markov süreç olsun. Ayrıca aşağıdaki iki varsayım sağlansın:

1. Öyle bir $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < \ldots < \infty$ artan zaman anları bulunsun ki, $X(t)$ sürecinin bu anlardaki değerleri $(X(\tau_n),\ n = 1, 2, \ldots)$ ergodik bir Markov zinciri oluştursun.

2. $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ anları arasında geçen zaman sürelerinin beklenen değeri sonlu olsun. Yani her $n = 1, 2, \ldots$ için $E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty$ olsun.

Bu takdirde $X(t)$ süreci ergodiktir (Gihman ve Skorohod, 1975) denir.

Teorem 1.2.2.1.2. Teorem 1.2.2.1.1’in varsayımları sağlanmış olsun. Bu takdirde, her sınırlı ölçülebilir $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(u))du = S_f \equiv \frac{1}{E(\tau_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) P_z \{\tau_1 > t; X(t) \in dx\} dt d\pi(z) .$$

Burada $\pi(z)$ dağılımı $\{X(\tau_n),\ n = 1, 2, \ldots\}$ Markov zincirinin ergodik dağılımıdır (Gihman ve Skorohod, 1975).

Not 1.2.2.1.1. Yukarıdaki teorem, zaman ortalamalarının durum ortalamalarına 1 olasılığı ile yakınsadığını ifade eder ve ergodik süreçler için en temel bağıntıyı ortaya koyar.

Aşağıda tezde kullanılan yakınsama çeşitleri verilmiştir:

$\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi ve ξ rasgele değişkeni aynı $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı olsun. Bunların dağılım fonksiyonları sırasıyla $F_n(x)$ ve $F(x)$ ile gösterilsin ve aşağıdaki tanımlar verilsin.

Tanım 1.2.2.1.2.

1) Olasılığa göre yakınsaklık: Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\omega : \left|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

ise, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi, ξ rasgele değişkenine "olasılığa göre yakınsak"tır denir ve $\xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi(\omega)$ şeklinde yazılır.

2) Ortalamaya göre yakınsaklık: $\forall r > 0$ için $E(\left|\xi_n(\omega)\right|^r) < \infty$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} E(\left|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\right|^r) = 0$$

ise,$\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi, ξ rasgele değişkenine "r. mertebeden orta yakınsak"tır denir. Özel olarak,

$$\lim_{n\to\infty} E(\left|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\right|^2) = 0$$

ise, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi, ξ rasgele değişkenine "ortalama karesel yakınsak"tır denir ve l.i.m. ile gösterilir.

3) Dağılıma göre yakınsaklık: $F(x)$'in sürekli olduğu noktalar için

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

ise, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi ξ rasgele değişkenine "dağılıma göre yakınsak"tır denir ve $\xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi(\omega)$ şeklinde yazılır. Literatürde bu yakınsaklık çeşidi, zayıf yakınsaklık olarak da bilinmektedir.

4) 1 olasılığı ile yakınsaklık: Ölçüsü sıfır olan bir kümenin dışında

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right\} = 1 \text{ veya } P\left\{\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \neq \xi(\omega)\right\} = 0$$

ise, 1 olasılığı ile $\xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi(\omega)$ ise, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi ξ rasgele değişkenine "1 olasılığı ile yakınsak"tır denir ve $\xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{1} \xi(\omega)$ şeklinde yazılır.

Tanım 1.2.2.1.3. $f(x)$ ve $g(x)$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesi üzerinde tanımlı iki fonksiyon olsun. Bu takdirde

1) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} c\,(\text{sabit})$ ise $f(x) = O(g(x))$ olarak yazılır.

Örneğin, $1 - \cos x = O(x^2)$'dır. Çünkü $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$'dır.

2) $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ olarak yazılır.

Örneğin, $1-\cos x = o(x)$'dır. Çünkü $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$'dır.

3) $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ ise $f(x) \sim g(x)$ olarak yazılır ve buna $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları "asimptotik olarak denk"tirler denir.

Aşağıda rasgele yürüyüş süreçleri ve yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri üzerine bir literatür araştırması verilmiştir.

1.3. Literatür Araştırması

Bu çalışmada, stokastik süreçlerin önemli bir sınıfını oluşturan "Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecinin" özel durumu ele alınmıştır. Bu nedenle önce yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçlerinin son yıllardaki gelişimi kısaca verelimiştir.

Yarı-Markov süreç kavramı ilk kez, birbirinden bağımsız olarak ve hemen hemen aynı zamanlarda, Levy (1987), Smith (1966) ve Takacs (1997) gibi olasılıkçılar tarafından ortaya atılmıştır.

Fakat bunların hepsinde durum uzayı sonlu olduğundan ve sıçrama anları belirlendiğinden bu kavramın genelleştirilmesi gerekli idi. Bu nedenle Çınlar (1975), Gihman ve Skorohod (1975), Serfoza (1971) çalışmalarında genel durum uzayına sahip yarı-Markov süreci tanımlarını vermişlerdir. Gihman ve Skorohod'un vermiş olduğu tanım kısaca verilsin: $(\Omega, \Im, P_x)$, $x \in X$, olasılık uzayları ailesi verilmiş olsun ve bir (Ω, σ, P_x) olasılık uzayında tanımlanmış bir $\{X_n : n \geq 0\}$ Markov zincirinin verilmiş olduğu kabul edilsin.

Bu zincirin $P_x\{X_0(u) = x\} = 1$ olmak üzere durum uzayı (X, B) ve geçiş olasılığı ise $\Pi(x, B)$ olsun. $\eta_1(u)$, $\eta_2(u), \eta_3(u), \ldots$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip ve $\{X_n : n \geq 0\}$ ailesinden $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Her $x, y \in X$ için $F_{x,y}(t)$ nin negatif olmayan herhangi bir rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu olduğu varsaylsın. $\varphi_{x,y}(t)$ ise $F_{x,y}(t)$ fonksiyonu $\varphi_{x,y}(\xi)$nin $[0,1]$ de dağılım fonksiyonu olacak şekilde negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

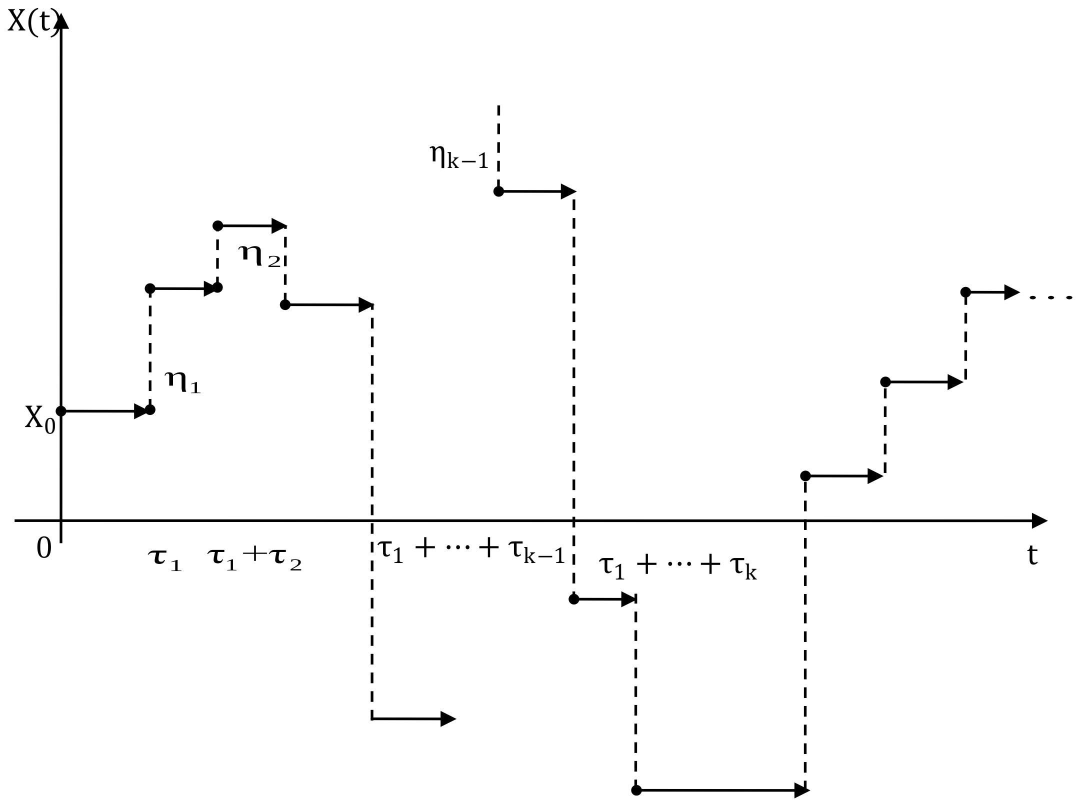
Burada ξ rasgele değışkeni $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip bir rasgele değişken dir. Bu takdirde

$$\tau_k = \varphi_{x_{k-1},x_k}(\eta_k)$$

olmak üzere

$$X(t) = X_{k-1}(u), \text{eğer} \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i \le t < \sum_{i=1}^{k} \tau_i \text{ ise}, \sum_{i=1}^{0} = 0$$

ifadesiyle tanımlanan sürece bir yarı-Markov süreç adı verilir.
Bu sürecin bir görünüşü Şekil 1 de görüldüğü gibidir.



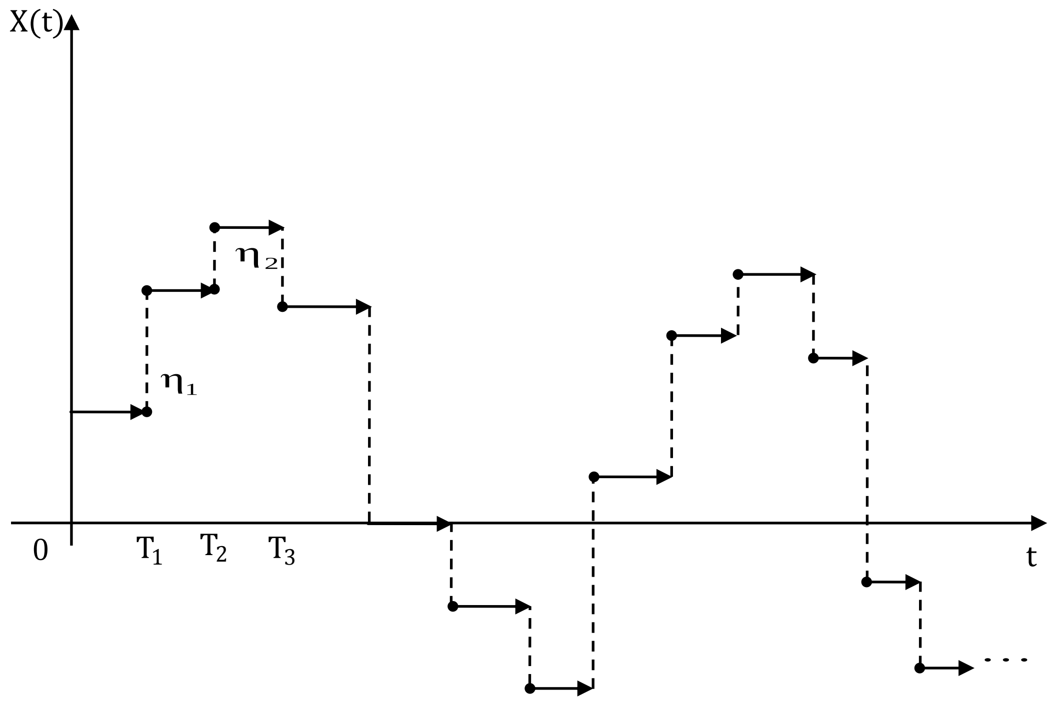
Şekil 5. Yarı-Markov sürecinin bir görünüşü

Nasirova, 1970 yılında Gihman ve Skorohod'un vermiş olduğu yarı-Markov sürecin tanımını ve dağılımını vermiştir. Şimdi bu tanım verilsin:

$\{(\xi_i, \eta_i): i = 1,2,3, \ldots\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rasgele değişkenler çiftleri dizisi olup ξ_i ler pozitif değerli olsun. Bu takdirde

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i , \qquad T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = T_{n+1} \text{ ise,}$$

ile tanımlanan $X(t)$ stokastik sürecine bir yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci adı verilir. Bu sürecin görünüşlerinden birisi Şekil 2 de verildiği gibidir.



Şekil 6. Yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Sürecin supremumunun dağılımını, sürecin supremumu ile infimumunun birleşik dağılımını elde etmiş ve süreç için limit teoremleri vermiştir.

Yarı-Markov süreçleri ile ilgili birçok önemli problem Brovkov (1986), Korolyuk ve Turbin (1976), Çınlar (1975), Takas (1977), Korolyuk ve Pirlive (1984), Tomko (1989), Spitzer (1964), Feller (1971), Anisimov (1973), Shurenkov (1989) v.s. tarafından detaylarıyla incelenmiştir.

Stokastik süreçlerin esas sınır fonksiyonellerinin incelenmesi de oldukça önemlidir. Bu konuda ilk çalışmayı Spitzer (1964) yapmıştır. Onun çalışmalarını Rogozin (1964) ve

Gusak ve Korolyuk (1968) toplam dizisi için genelleştirmiştir. Daha sonra Rogozin (1964) aynı çalışmaları artımları bağımsız olan süreçler için de genelleştirmiştir.

Hem pratik hem de teorik bakımdan yarı-Markov süreçleri için ergodik teoremler ve süreçlerin ergodik dağılımları da oldukça önemlidir. Yarı-Markov süreçler için en genel durumda limit teoremleri Anisimova (1973), Sil'vestrov (1975), Dzhafarov, Nasirova ve Skorohod(1976), Korolyuk ve Svishchuk (1989) tarafından verilmiştir. Rasgele yürüyüş süreçleri için limit teoremleri ise Skorohod ve Slobodenyuk (1970), Nasirova (1970) ve Harlamov (1977) tarafından verilmiştir.

Yarı-Markov süreçlerin incelenmesinden sonra, uygulamada ortaya çıkan bazı problemlerin çözümlenmesi için süreçlerin bariyerli tipleri ele alınmıştır.

Örneğin, stok kontrol teorisi, kuyruk teorisi ve güvenirlik teorisindeki problemlerin çoğu, bariyerli veya bariyersiz rasgele yürüyüş süreçleri yardımıyla ifade edilebilir.

Bu bariyerler, ele alınan probleme bağlı olarak değişik tiplerden olabilir (örneğin: yansıtan, tutan, yutan v.s.).

Nasirova (1970), sıfır seviyesinde tutan bariyere sahip olan bir bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecini şu şekilde kurmuştur:

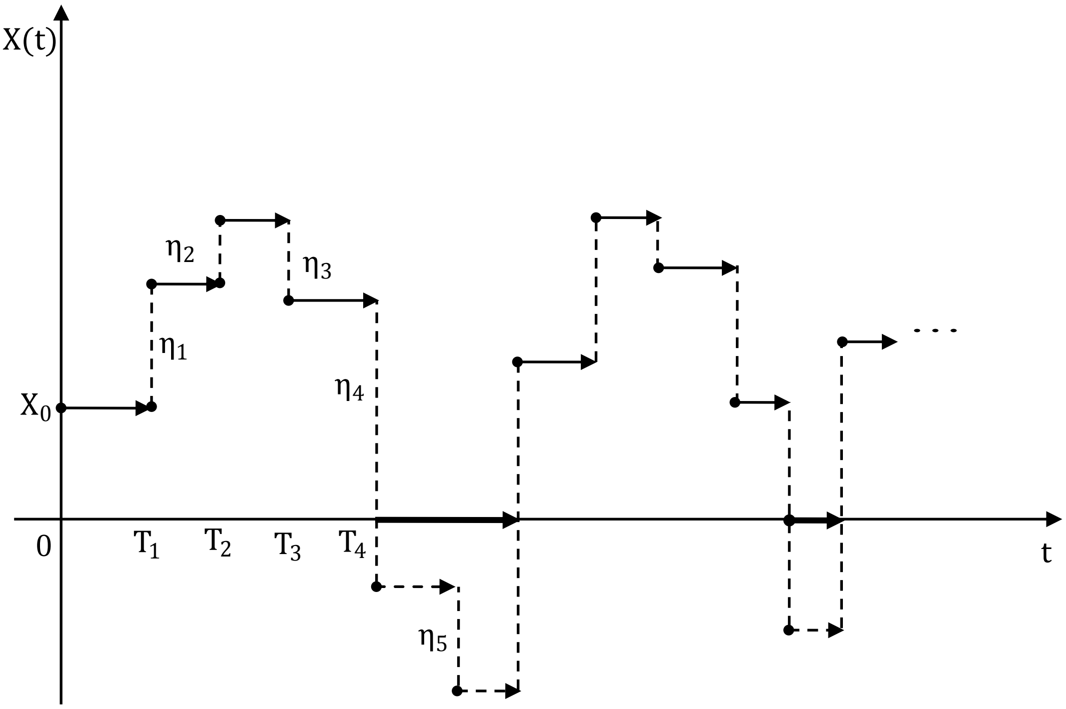
$\{(\xi_i, \eta_i): i = 1,2,3, \ldots\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı, baağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rasgele değişkenler çiftleri dizisi olup ξ_i ler pozitif değerli olsun. Bu takdirde

$$X_n = \max\{0, X_{n-1} + \eta_n\}, n \geq 1 \;\; ; \;\; X_0 = z > 0$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n \quad \text{eğer } T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = T_{n+1} \text{ ise},$$

ile tanımlanan $X(t)$ stokastik süreci sıfır sevyesinde tutan bariyerli bir yarı-Markov rasgele yürüyüş süreç uluşturacaktır. Bu sürecin görünüşlerinden biri Şekil 3 de verilmiştir.

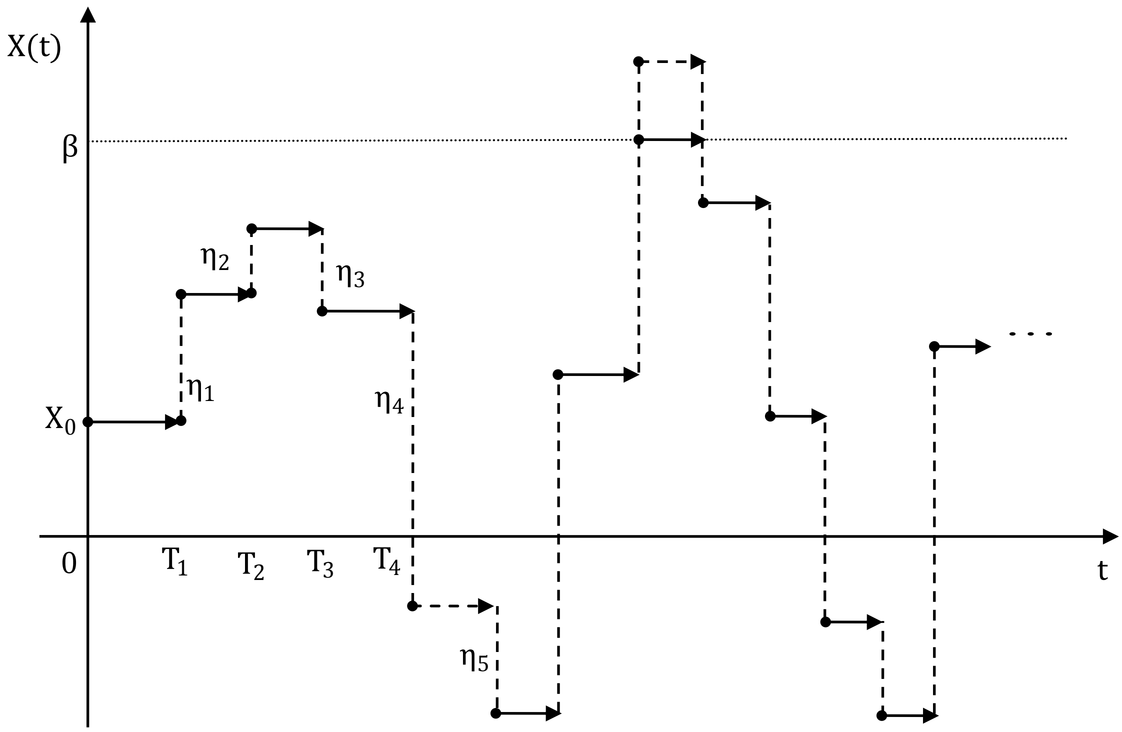


Şekil 7. Sıfır seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Nasirova (1970), bu sürecin dağılımı ile sürecin esas sınır fonksiyonellerinin dağılımını incelemiştir. Nasirova ve Skorohod (1979), bu sürecin ergodik olduğunu göstermişlerdir ve sürecin ergodik dağılım fonksiyonunu elde etmişlerdir.

Benzer şekilde, $\beta > 0$ seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci de Nasirova ve Skorohod (1979), Feller (1971), Spitzer (1964), gibi olasılıkçılar tarafından ncelenmiştir.

Bu sürecin bir görünüşü Şekil 4'de verilmiştir.

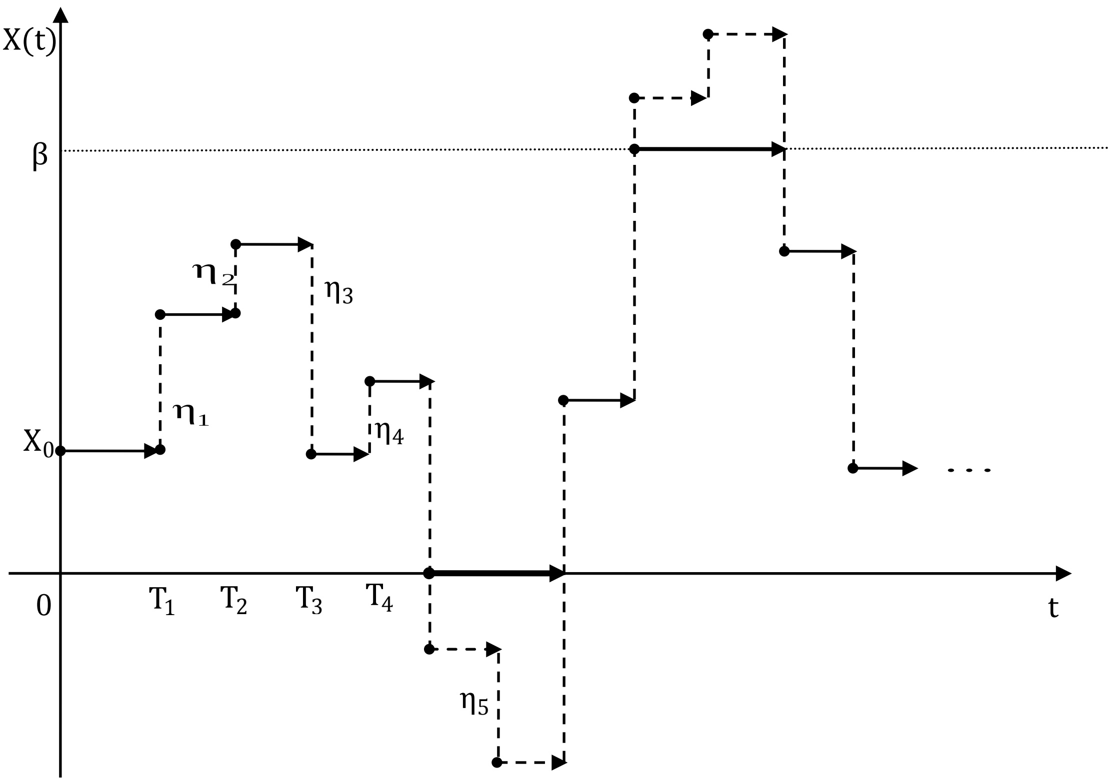


Şekil 8. β >0 seviyelerinde tutan bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Literatürde iki bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri hakında birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalarda bariyerlerin her ikisinin de tutan veya yutan olduğu durumlar ele alınmıştır. Khaniyev (1988), iki tutan bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecini incelemiştir.

Khaniyev (1988), bu süreç için, sürecin dağılımını, verilen bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımını ve sürecin beklenen değer ve varyans gibi bazı olasılık karekteristiklerini hesaplamış ve süreç için ergodik teoremini ifade ve ispat etmiştir.

Ayrıca bu süreç için limit teoremlerini vermiş ve sürecin asimptotik durumunu incelemiştir. Bu sürecin görünüşlerinden biri Şekil 5'deki gibidir.



Şekil 9. Sıfır ve β>0 seviyelerinde tutan bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Son yıllarda bariyerli ve bariyersiz, yarı-Markov, rasgele yürüyüş süreçleri ve çeşitli stokastik süreçler üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Örneğin; Maden (1997), Aliyev v.d. (2000), Khaniyev (2001), Khaniyev; Küçük (2002), Khaniyev (2003), Ünver; Kesemen (2004), Kesemen (2006) Khaniyev; Mamadova (2006), Ünver (2007), Nasirova; Khaniyev (2008), Nasirova; Aliyeva (2009), Aliyev, v.d. (2010), Mamadova (2011).

Ayrıca, Maden (1997) doktora tezinde sıfır seviyesinde yansıtan ve β>0 seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecini incelemiştir.

Diğer çalışmalardan farklı olarak, bu çalışmada Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci incelenmiştir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Fiziksel Model

Bir hastanenin başlangıçtaki boş yatak sayısı $\lambda z > 0$ olsun.

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, , n \geq 1$$

rastgele anında bu hastanedeki boş yatak sayısı gelen hastalardan dolayı azalsın veya hastaneden taburcu olan hastalardan dolayı artsın. Bu artma ve azalma miktarların $\eta_n, n > 1$ ile gösterilsin. Rastgele değişkenin tanımı gereği $\{\eta_n\}, n > 1$ rastgele değişkenleri pozitif veya negatif olabilirler. Hastanedeki yatak sayısı sıfırdan büyük olduğu sürece, sistem kendi değişimini bu şekilde sürdürsün. Fakat yatak sayısı eksiye indiği anda hastane yönetimi yatak ihtiyacını gidermek için konteynır yatak alma kararı alsın. Alınan yatak sayısı birçok faktöre bağlı olarak değişebilmekte ve keyfi dağılıma sahip bir rastgele değişken ile ifade edilebilmektedir. Yeni yataklar alındıktan sonra hastane yeni başlangıç yatakları ile birlikte çalışmaya başlasın ve faaliyetini yatak miktarı eksiye düşünceye kadar devam ettirsin. Yatak sayısı tekrar eksiye düştüğünde tekrardan sisteme müdahale edilsin ve alınan konteynırlarla artırılan yatak sayısına göre yeni başlangıç durumu belirlenip sistem yeniden faaliyete geçirilsin. Bu şekilde çalışan bir hastanedeki yatak sayısının değişimi bir "Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreci" yardımı ile ifade edilebilir.

Bu çalışmada yukarıda tanımladığımız şartlarda uzun süre çalışan bir hastanenin yatak değişimini ifade eden süreci matematiksel olarak tanımlamak, bu sürecin ergodik dağılımı, momentleri için kesin ve asimptotik sonuçlar elde etmeyi ve ergodik dağılım fonksiyonu için zayıf yakınsaklık teoremini ispat etmeyi amaçlamaktadır.

Aşağıda bu modeli ifade eden $X(t)$ sürecinin matematiksel kuruluşu verilmektedir.

2.2. Sürecin Matematiksel Kuruluşu

$\{(\xi_n, \eta_n)\}, n = 1,2,3, \ldots$ dizisi, $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış, bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişken çiftleri dizisi olsun. Burada ξ_i'ler sadece pozitif;

η_i'ler ise hem negatif, hem de pozitif değerler alan rasgele değişkenler olsun. Ayrıca ξ_n ve η_n rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız olsun ve dağılım fonksiyonları bilinsin, yani

$$\Phi(t) = P\{\xi_n \le t\};\ F(x) = P\{\eta_n \le x\}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

$\{(\xi_n, \eta_n)\}, n = 1,2,3, \ldots$ dizisini kullanarak, $\{T_n\}$ yenileme dizisini ve $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\,,\ T_0 = S_0 = 0\,,\ n \ge 1.$$

Ayrıca N_n tam değerli rasgele değişkenler dizisi aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun:

$$N_0 = 0, N_1 \equiv N_1(z) \equiv N(z) \equiv \inf\{n \ge 1: \lambda z - S_n < 0\}\,;\, S_{N(z)} = \sum_{i=1}^{N(z)} \eta_i$$

$$N_{n+1} = \inf\left\{r \ge 1: \lambda\zeta_1 - \left(S_{\sum_{i=1}^{n}(N_i+L_i)+r} - S_{\sum_{i=1}^{n}(N_i+L_i)}\right) < 0\right\}, n \ge 1.$$

Burada $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ rasgele değişkenleri 1.,2.,...,n.,... devrelerde sürecin sıfırdan çıkabilmesi için gereken sıçrama sayısıdır ve $\inf(\emptyset) = +\infty$ şartı kabul edilmiştir. Ayrıca

$$\theta_1 = \sum_{i=1}^{L_1} \xi_{N_1+i}\ , \theta_2 = \sum_{i=1}^{L_2} \xi_{N_1+L_1+N_2+i}\,, \ldots, \theta_n = \sum_{i=1}^{L_n} \xi_{N_1+L_1+\cdots+N_{n-1}+L_{n-1}+N_n+i}$$

$$\tau_0 = \gamma_0 = 0, \tau_1 \equiv \tau(z) = \sum_{i=1}^{N(z)} \xi_i\ ;$$

$$\gamma_1 \equiv \gamma(z) \equiv \tau(z) + \theta_1;\ \gamma_n = \tau_n + \theta_n\,, n \ge 1.$$

Ayrıca, $\nu(t) = \max\{n \ge 0; T_n \le t\}$ olsun. Burada $\nu(t)$'ye $\{\xi_n\}$ rasgele değişkenleri dizisinin yenileme süreci denir.

Şimdi de bu çalışmanın temel amacı olan $X(t)$ süreci, her $t \in [\gamma_n, \gamma_{n+1}), n \ge 0$ için

$$X(t) = \mathrm{Max}\left\{0\,;\ \lambda\zeta_n - \left(S_{\nu(t)} - S_{N_1+L_1+\cdots+N_n+L_n}\right)\right\}$$

olarak tanımlansın. Burada λ pozitif bir sabit; $\zeta_0 = \lambda z > 0$'dır ve $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ bağımsız, aynı dağılıma sahip pozitif değerli rasgele değişkenler olup, dağılım fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

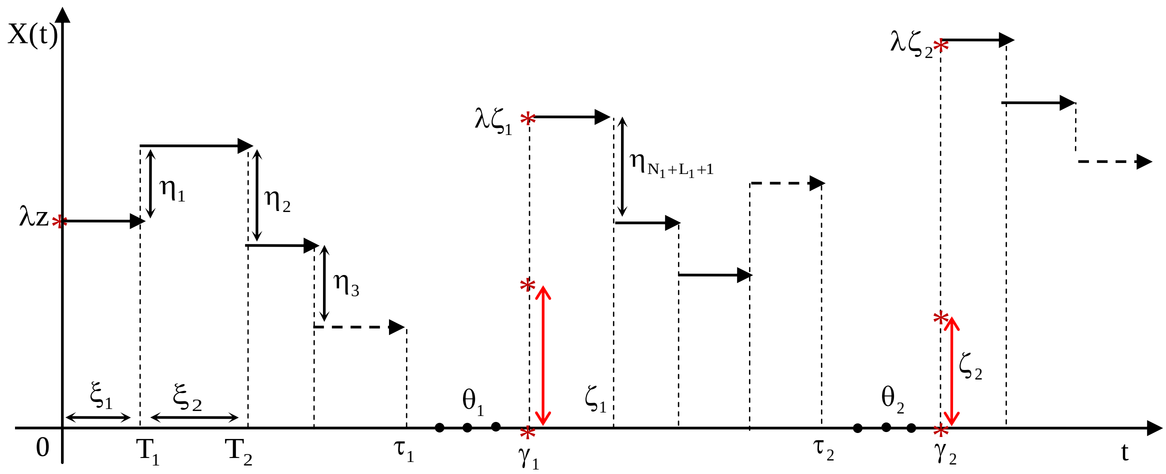
Her $z \ge 0$ için

$$P\{\zeta_n \le z\} \equiv \pi(z) = \frac{F(0) - F(-z)}{F(0)}, \qquad F(z) = P\{-\eta_n \le z\}$$

dır.

$X(t)$ sürecine, literatürde "Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreci" denir.

Aşağıda $X(t)$ sürecinin bir örnek realizasyon (gerçekleşmesinin) grafiği verilmiştir:



Şekil 10. Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Sürecinin bir gösterimi

2.3. Sürecin Bir Boyutlu Dağılımının İncelenmesi

Bu kısmın temel amacı, $X(t)$ sürecinin bir boyutlu durağan olmayan dağılım fonksiyonunu $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin bilinen olasılık karakteristikleri yardımıyla hesaplamaktır.

Bunun için $\widetilde{M}(\alpha)$ ve $M^*(\alpha)$ ile $M(t)$ fonksiyonun sırasıyla Laplace ve Laplace-Stiltijes dönüşümleri gösterilsin.

Ayrıca, $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu $Q(t, x, \lambda z)$ ile gösterilsin, yani

$$Q(t, x, \lambda z) \equiv P_{\lambda z}\{X(t) \leq x\}$$

olsun.

Teorem 2.3.1. $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonunun Laplace dönüşümü $(\widetilde{Q}(\alpha; x; \lambda z))$ $\{T_n\}$ yenileme sürecinin ve $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin yukarıda tanımlanmış olasılık karakteristikleri ile aşağıdaki gibi ifade edebilebilir:

$$\widetilde{Q}(\alpha; x; \lambda z) = \widetilde{G}(\alpha; x; \lambda z) + \frac{E\left(\widetilde{G}(\alpha; x; \lambda\zeta)\right) R^*(\alpha; \lambda z)}{1 - E(R^*(\alpha; \lambda z))}$$

burada

$$R(t,\lambda z) = R_1(t;\lambda z) * R_2(t),\ \ R_1(t;\lambda z) = P_{\lambda z}\{\tau_1 \le t\} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,(\lambda z)\Phi_n(t),$$

$$R_2(t) = P\{\theta_1 \le t\} = F(0)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{F}(0)\right)^{n-1}\ \Phi_n(t),$$

$$G(t;x;\lambda z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(x,\lambda z)\Delta\Phi_n(t) + R_1(t;\lambda z) * \bar{R}_2(t)\varepsilon(x)\,, \qquad \bar{M}(x) = 1 - M(x),$$

$$M_1(t) * M_2(t) \equiv \int_0^t M_2(t-s)dM_1(s),$$

$$a_n(x,\lambda z) \equiv\ P\{\lambda z - S_i > 0, i = \overline{1,n}\,;\ \lambda z - S_n \le x\},$$

$$b_n(\lambda z) \equiv\ P\{\lambda z - S_i > 0, i = \overline{1,n-1}\,;\ \lambda z - S_n < x\},$$

$$\Phi_n(t) \equiv\ P\{T_n \le t\} = P\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i \le t\right\} = \Phi^{*n}(t);\ \Phi_0(x) = \varepsilon(x) = \begin{cases}0\,, & x < 0\\ 1\,, & x \ge 0\end{cases}{}'$$

$$\Delta\Phi_n(t) = \Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)$$

dır.

İspat. Toplam olasılık formülüne göre,

$$P_{\lambda z}\{X(t) \le t\} = P_{\lambda z}\left\{t < \gamma_1; X(t) \le x\right\} + P_{\lambda z}\left\{t \ge \gamma_1; X(t) \le x\right\} \tag{1}$$

yazılabilir. Yazım kısalığı için (1) eşitliğinin birinci toplamı $G(t,x,\lambda z)$ ile gösterilsin, yani

$$G(t,x,\lambda z) \equiv P_{\lambda z}\left\{t < \gamma_1\ ;\ X(t) \le x\right\}$$

olsun. $G(t,x,\lambda z)$ fonksiyonu T_n ve S_n dizilerinen olasılık karakteristikleri ile ifade edilecektir, dolayısıyla $G(t,x,\lambda z)$ fonksiyonunun bilindiğini kabul edelim.

Şimdi (1) eşitliğindeki ikinci toplamı inceleyelim:

$$P_{\lambda z}\{t \ge \gamma_1\ ;\ X(t) \le x\} = \int_{v=0}^{\infty}\int_{s=0}^{t} P_{\lambda z}\{\gamma_1 \epsilon ds; \zeta_1 \epsilon dv; X(t) \le x\}$$

$$= \int_{v=0}^{\infty}\int_{s=0}^{t} P\{\zeta_1 \epsilon dv\}P_{\lambda z}\{\gamma_1 \epsilon ds\}P_{\lambda z}\{X(t-s) \le x\}$$

dır. Ayrıca

$$\pi_1\{dv\} = P\{\zeta_1 \epsilon dv\}\,;\ R(ds;\lambda z) = P_{\lambda z}\{\gamma_1 \epsilon ds\}$$

olduğundan denklem

$$P_{\lambda z}\{t \ge \gamma_1; X(t) \le x\} = \int_{v=0}^{\infty}\int_{s=0}^{t} \pi_1\{dv\}R(ds;\lambda z)Q(t-s;x;\lambda v)$$

$$= \int_{v=0}^{\infty}\int_{s=0}^{t} Q(t-s;x;\lambda v)R(ds;\lambda z)\pi_1\{dv\}$$

şeklinde yazılabilir. Notasyon kısalığı için son denklem

$$\begin{aligned} P_{\lambda z}\{t \geq \gamma_1; X(t) \leq x\} &= \int_{v=0}^{\infty} Q(t-s;x;\lambda v) * R(ds;\lambda z)\pi_1\{dv\} \\ &= \left(\int_{v=0}^{\infty} Q(t-s;x;\lambda v)\pi_1\{dv\}\right) * R(ds;\lambda z) \end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada

$$M_1(t) * M_2(t) \equiv \int_0^t M_1(t-s)dM_2(s) = \int_0^t M_2(t-s)dM_1(s)$$

özelliği kullanılmıştır. Ayrıca

$$E\big(M(\lambda\zeta_1)\big) = \int_{v=0}^{\infty} M(\lambda v)\,\pi_1\{dv\}$$

olduğundan $P_{\lambda z}\{t \geq \gamma_1; X(t) \leq x\}$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$P_{\lambda z}\{t \geq \gamma_1; X(t) \leq x\} = E\big(Q(t;x;\lambda\zeta_1)\big) * R(t;\lambda z) \tag{2}$$

$R(t;\lambda z)$ fonksiyonu, T_n ve S_n dizilerinin olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade edilebilir. Bunun için (2) formülünü, (1) eşitliğinde yerine yazarak, aşağıdaki integral denklemi elde edilir:

$$Q(t,x,\lambda z) = G(t,x,\lambda z) + E\big(Q(t;x;\lambda\zeta_1)\big) * R(t;\lambda z) \tag{3}$$

Dolayısıyla $R(t;\lambda z)$ fonksiyonu da bilinen fonksiyon olarak kabul edilebilir. (3) denklemi 2.tip Volterra İntegral denklemi olup, bilinmeyen $Q(t,x,\lambda z)$ dağılımının bulunması için temel matematiksel bağıntıdır. (3) eşitliğinin her iki tarafı $\pi_1(z)$ dağılımına göre ortalanırsa aşağıdaki yenileme denklemi elde edilir:

$$E\big(Q(t;x;\lambda\zeta_1)\big) = E\big(G(t,x,\lambda\zeta_1)\big) + E\big(Q(t;x;\lambda\zeta_1)\big) * E\big(R(t;\lambda\zeta_1)\big) \tag{4}$$

burada

$$E\big(G(t,x,\lambda\zeta_1)\big) \equiv \int_0^{\infty} G(t,x,\lambda z)\pi_1(dz)\,;$$

$$E(R(t;\lambda\zeta_1)) \equiv \int_0^{\infty} R(t;\lambda z)d\pi_1(z)$$

dır. (4) eşitliği, $E(Q(t,x,\lambda\zeta_1))$ bilinmeyen fonksiyonu için bir yenileme denklemidir (bak, Feller W., s.186). (4) yenileme denkleminin her iki tarafına t parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$E\left(\tilde{Q}(\alpha;x;\lambda\zeta_1)\right) = E\left(\tilde{G}(\alpha,x,\lambda\zeta_1)\right) + E\left(\tilde{Q}(\alpha;x;\lambda\zeta_1)\right)E\big(R^*(\alpha;\lambda\zeta_1)\big) \tag{5}$$

denklemi bulunur. Burada

$$E\left(\widetilde{M}(\alpha;x;\lambda\zeta_1)\right) \equiv \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, E\big(M(t;x;\lambda\zeta_1)\big)dt,$$

$$E(R^*(t;\lambda\zeta_1)) \equiv \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, d_t E\big(R(t;\lambda\zeta_1)\big);\ \alpha > 0$$

dır. (5) eşitliğinden aşağıdaki formül elde edilir:

$$E\left(\widetilde{Q}(\alpha;x;\lambda\zeta_1)\right) = \frac{E\left(\widetilde{G}(\alpha,x,\lambda\zeta_1)\right)}{1 - E(R^*(\alpha;\lambda\zeta_1))} \tag{6}$$

(3) eşitliğinin her iki tarafına t parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\widetilde{Q}(\alpha;x;\lambda z) = \widetilde{G}(\alpha,x,\lambda z) + E\left(\widetilde{Q}(\alpha;x;\lambda\zeta_1)\right)R^*(\alpha;\lambda z) \tag{7}$$

eşitliği elde edilir. $E\left(\widetilde{Q}(\alpha;x;\lambda\zeta_1)\right)$ için (6)'da kesin bir ifade elde edilmiştir. Bu ifade (7)'de yerine yazılırsa

$$\widetilde{Q}(\alpha;x;\lambda z) = \widetilde{G}(\alpha,x,\lambda z) + \frac{E\left(\widetilde{G}(\alpha;x;\lambda\zeta_1)\right)R^*(\alpha;\lambda z)}{1 - E(R^*(\alpha;\lambda\zeta_1))} \tag{8}$$

bulunur. Burada $''\sim''$ simgesi ile Laplace dönüşümü, $''*''$ simgesi ile Laplace-Stiltijes dönüşümü gösterilmiştir.

Böylece, aradığımız $Q(t;x;\lambda z)$ dağılımının Laplace dönüşümü, $G(t,x,\lambda z)$ ve $R(t;\lambda z)$ fonksiyonları yardımı ile ifade edilmiş oldu.

Şimdi de $G(t,x,\lambda z)$ ve $R(t;\lambda z)$ fonksiyonlarını, T_n ve S_n dizilerinin olasılık karakteristikleri ile ifade etmemiz gerekir.

Önce $R(t;\lambda z)$ fonksiyonunu hesaplayalım:

$$R(t;\lambda z) \equiv P_{\lambda z}\{\gamma_1 \le t\} = P_{\lambda z}\{\tau_1 + \theta_1 \le t\} = R_1(t;\lambda z) * R_2(t)$$

burada

$$R_1(t;\lambda z) = P_{\lambda z}\{\tau_1 \le t\}\,;\ R_2(t) = P\{\theta_1 \le t\}$$

dır.

İlk olarak $R_1(t;\lambda z)$'i hesaplayalım:

$$R_1(t;\lambda z) \equiv P_{\lambda z}\{\tau_1 \le t\} = \int_0^t P_{\lambda z}\{\tau_1 \epsilon du\}$$

Diğer taraftan

$$P_{\lambda z}\{\tau_1 \epsilon du\} = P_{\lambda z}\left\{T_{N_1} \epsilon du\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\lambda z}\{N_1 = n; T_n \epsilon du\}$$

olduğundan

$$P_{\lambda z}\{\tau_1 \epsilon du\} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\lambda z}\{\lambda z - S_1 > 0\,; \lambda z - S_2 > 0\,; \dots; \lambda z - S_{n-1} > 0; \lambda z - S_n \leq 0\ ; T_n \epsilon du\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_{\lambda z}\{\lambda z - S_i > 0\,; i = \overline{1, n-1}; \lambda z - S_n \leq 0\,\} P\{\,T_n \epsilon du\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\lambda z) d\Phi_n(u)$$

olarak bulunur. Burada

$$b_n(\lambda z) = P_{\lambda z}\{\lambda z - S_i > 0\,; i = \overline{1, n-1}; \lambda z - S_n < 0\,\};$$

$$\Phi_n(t) = P\left\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t\right\}$$

dır. Dolayısıyla

$$R_1(t; \lambda z) = \int_0^t P_{\lambda z}\{\tau_1 \epsilon du\} = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\lambda z) d\Phi_n(u)$$

elde edilir. Şimdi de $R_2(t)$'i hesaplayalım:

$$R_2(t) \equiv P\{\theta_1 \leq t\} = \int_0^t R_2(ds)$$

Ama

$$R_2(ds) = P\{\theta_1 \epsilon ds\} = P\left\{\sum_{i=1}^{L_1} \xi_i \epsilon ds\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{L_1 = n;\ T_n = \sum_{i=1}^{L_1} \xi_i \epsilon ds\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{L_1 = n\} P\{T_n \epsilon ds\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{(-\eta_1) < 0; (-\eta_2) < 0; \dots; (-\eta_{n-1}) < 0; (-\eta_n) \geq 0\} P\{T_n \epsilon ds\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\eta_1 > 0; \eta_2 > 0; \dots; \eta_{n-1} > 0; \eta_n \leq 0\} d\Phi_n(s)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{F}(0)\right)^{n-1} F(0) d\Phi_n(s)$$

dır. Dolayısıyla

$$R_2(t) = \int_0^t R_2(ds) = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{F}(0)\right)^{n-1} F(0) d\Phi_n(s)$$

$$= F(0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{F}(0)\right)^{n-1} \Phi_n(t)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\bar{R}_2(t-u)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\bar{R}_2(t-u) \equiv P\{\theta_1 > t-u\} = 1 - F(0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{F}(0)\right)^{n-1} \Phi_n(t-u)$$

$$1 - R_2(t-u) = 1 - F(0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{F}(0)\right)^{n-1} \Phi_n(t-u)$$

Dolayısıyla

$$R_2(t) = F(0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{F}(0)\right)^{n-1} \Phi_n(t)$$

elde edilir. Burada $R(t;\lambda z) = R_1(t;\lambda z) * R_2(t)$'dır.

Şimdi $G(t;x;\lambda z)$ hesaplayabiliriz

$$G(t;x;\lambda z) = P_{\lambda z}\{t < \gamma_1; X(t) \leq x\}$$

$$= P_{\lambda z}\{t \epsilon [0,\tau_1);\ X(t) \leq x\} + P_{\lambda z}\{t \epsilon [\tau_1,\gamma_1);\ X(t) \leq x\}$$

$$= G_1(t;x;\lambda z) + G_2(t;x;\lambda z).$$

Son denklemde yer alan $G_1(t;x;\lambda z)$ terimi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$G_1(t;x;\lambda z) = P_{\lambda z}\left\{t < T_{N_1};\ X(t) \leq x\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{\nu(t) = n; t < T_n;\ X(t) \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{T_n \leq t < T_{n+1};\ X(t) \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{T_n \leq t < T_{n+1}; \lambda z - S_1 > 0\,; \dots; \lambda z - S_n > 0; X(t) \equiv \lambda z - S_n \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z}\{T_n \le t < T_{n+1}\} P\{\lambda z - S_i > 0\,; i = \overline{1,n}\,;\ \lambda z - S_n \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\,\Phi_n(t) a_n(x; \lambda z).$$

kısaca

$$G_1(t; x; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\,\Phi_n(t) a_n(x; \lambda z)$$

elde edilir. Burada $a_n(x; \lambda z) = P\{\lambda z - S_i > 0\,; i = \overline{1,n}\,;\ \lambda z - S_n \le x\}$;

$$\Delta\Phi_n(t) = \Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)$$

dır.

$G(t; x; \lambda z)$ de hesaplanması gereken $G_2(t; x; \lambda z)$ terimi ise

$$G_2(t; x; \lambda z) \equiv P_{\lambda z}\{t \epsilon [\tau_1, \gamma_1);\ X(t) \le x\}$$

$$= P_{\lambda z}\{t \epsilon [\tau_1, \gamma_1);\ 0 \le x\} = P_{\lambda z}\{\tau_1 \le t < \gamma_1\} \varepsilon(x)$$

$$= \int_{u=0}^{t} P_{\lambda z}\{\tau_1 \epsilon du; u \le t < u + \theta_1\}\, \varepsilon(x)$$

$$= \int_{u=0}^{t} P_{\lambda z}\{\tau_1 \epsilon du; t - u < \theta_1\}\, \varepsilon(x)$$

$$= \int_{u=0}^{t} P\{\tau_1 \epsilon du\} P\{t - u < \theta_1\}\, \varepsilon(x)$$

$$= \int_{u=0}^{t} P\{t - u < \theta_1\} R_1(du; \lambda z)\, \varepsilon(x)$$

şeklinde bulunur. Dolayısı ile

$$G_2(t; x; \lambda z) = \int_{u=0}^{t} \overline{R}_2(t - u) R_1(du; \lambda z)\, \varepsilon(x) = R_1(t; \lambda z) * \overline{R}_2(t) \varepsilon(x)$$

dır. Burada

$$\overline{R}_2(t) = 1 - R_2(t);\ R_2(t) = F(0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\overline{F}(0)\right)^{n-1} \Phi_n(t)$$

$$R_1(t; \lambda z) \equiv P_{\lambda z}\{\tau_1 \le t\} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\lambda z) \Phi_n(t)$$

$$b_n(\lambda z) = P_{\lambda z}\{\lambda z - S_i > 0\,;\, i = \overline{1, n-1}; \lambda z - S_n < 0\}\,;\ \varepsilon(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ 1\,, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$a_n(x, \lambda z) \equiv P\{\lambda z - S_i > 0, i = \overline{1, n}\,;\ \lambda z - S_n \leq x\}$$

dır. Özetle

$$G(t; x; \lambda z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(x; \lambda z)\Delta\Phi_n(t) + R_1(t; \lambda z) * \overline{R}_2(t)\varepsilon(x)$$

dır. Böylece $G(t; x; \lambda z)$ ve $R(t; \lambda z)$ fonksiyonları T_n ve S_n dizileri yardımıyla ifade edilmiş oldu. Dolayısıyla Teorem 2.3.1'in ispatı tamamlanmıştır. ■

2.4. Sürecin Ergodikliği

Yukarıdaki bölümlerde alınan sonuçlarda görüldüğü gibi, sürecin kendinin sonlu boyutlu dağılımlarının hesaplaması oldukça zordur. Bu zorluğu aşmak için, sürecin durağan karakteristiklerinin hesaplanması amaca yönelik aşamadır. Fakat sürecin durağan karakteristiklerinin incelenebilmesi için, önce sürecin bazı koşullar altında ergodik olduğunu ispatlamak gereklidir. Bu nedenle, bu kısımda ele aldığımız $X(t)$ surecinin ergodikliği incelenecek ve ergodik dağılımın açık şekli ve ergodik dağılımın momentleri bulunacaktır. Önce sürecin ergodikliğini belirten teoremi verelim.

Teorem 2.4.1 (Ergodik Teorem). $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenler dizisi başlangıç koşullarına ilaveten aşağıdaki koşulları sağlasın:

1) $0 < E(\xi_1) < +\infty$;
2) $P\{\eta_1 > 0\} > 0$ ve $P\{\eta_1 < 0\} > 0$;
3) η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan bir rasgele değişken olsun;
4) $E(\eta_1) > 0$.

Bu takdirde $X(t)$ süreci ergodiktir.

İspat. Ele aldığımız süreç literatürde "Kesikli Müdahaleli Yarı-Markov Süreçleri" adı ile bilinen geniş bir stokastik süreçler sınıfına aittir. Bu sınıf için genel ergodik teorem, Gihman ve Skorohod tarafından ispat edilmiştir (bak., Gihman ve Skorohod, 1975- s.243). Teoremin ispatı için, Teorem 2.4.1'in koşullarından, genel ergodik teoremin koşularını elde etmenin mümkün olduğunu göstermemiz gerekmektedir.

Bu genel teoremin aşağıdaki iki varsayımı vardır:

1.Varsayım: Öyle bir monoton artan rasgele anlar dizisi olmalıdır ki, sürecin bu anlarındaki değişkenleri bir ergodik Markov zinciri oluştura bilsin.

2.Varsayım: Bu ardışık anlar arasında geçen sürelerin beklenen değeri sonlu olmalıdır.

Birinci varsayımın sağlanması amacı ile,

$\gamma_0 \equiv 0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \cdots < \gamma_n < \gamma_{n+1} < \cdots$

rasgele değişkenler dizisini ele alalım.

Tanımına göre γ_n'ler $(n = 0,1,2,3, \ldots)$ 1 olasılığı ile monoton artan Markov zinciri momentleridirler. Ayrıca, $X(\gamma_n) \equiv \zeta_n^+$ olduğuna göre ve ζ_n^+'ler bağımsız, aynı dağılımlı rasgele değişkenler dizisi oldukları için $X(\gamma_n)$ dizisi bir ergodik Markov zinciri oluşturmuş olur. Dolayısı ile genel ergodik Teoremin 1.şartı sağlanır.

Şimdi de 2. varsayımın sağlandığını ispatlayalım. Önce, $\forall\ 0 < z < +\infty$ için

$$E(\gamma_1) \equiv E(\gamma(z)) < +\infty \tag{9}$$

olduğunu gösterelim:

$$\gamma_1 = \tau_1 + \theta_1 \tag{10}$$

dır. Dolayısıyla

$$E(\gamma_1) = E(\tau_1) + E(\theta_1) \tag{11}$$

Diğer yandan tanımına göre

$$\theta_1 = \sum_{i=1}^{L_1} \xi_i \tag{12}$$

dır. Burada L_1 rasgele değişkeni p= F(0) parametreli Geometrik dağılıma sahiptir ve ξ_i'lerden bağımsızdır. Bu durumda, Wald özdeşliğine göre,

$$E(\theta_1) = E\left(\sum_{i=1}^{L_1} \xi_i\right) = E(L_1)E(\xi_1) \tag{13}$$

elde edilir. L_1 Geometrik dağılıma sahip olduğuna göre,

$$E(L_1) = \frac{1}{F(0)}$$

elde edilir. $F(0) = P\{\eta_1 \leq 0\} > 0$ olduğu için $E(L_1) < +\infty$ elde edilir.

Diğer taraftan Teorem 2.4.1'in 1.şartına göre $0 < E(\xi_1) < \infty$' dır. Dolayısıyla

$$E(\theta_1) = E(L_1)E(\xi_1) < +\infty \tag{14}$$

elde edilir. Bu takdirde sadece $E(\tau_1)$'in sonlu olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

$$E(\tau_1) \equiv E(\tau(z)) = E\left(\sum_{i=1}^{N(z)} \xi_i\right)$$

Wald özdeşliğine göre,

$$E(\tau_1) = E(N(z))E(\xi_1) \tag{15}$$

dır. $E(\xi_1)$ sonlu olduğuna göre, $E(N(z))$'in sonluluğunu göstermemiz gerekmektedir. Tanımı gereği;

$$N(z) \equiv \inf\{n \geq 1: z - S_n < 0\} = \inf\{n \geq 1: S_n > z\}$$

dır.

$N(z)$'in beklenen değerinin sonlu olduğunu göstermek için $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin basamak yükseklikliklerin (χ_n^+) ve anların (ν_n^+) tanımlanmıştır:

$$\nu_1^+ = \inf\{n \geq 1: S_n > 0\} \ \text{ve} \ \chi_1^+ = \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i \tag{16}$$

dır. ν_1^+' ya 1. basamak anı, χ_1^+' ya birinci basamak yükseliği denir (Feller, 1971). $(\nu_n^+; \chi_n^+)$, $n = 1,2,3, \dots$ rasgele değişken çıftleri $(\nu_1^+; \chi_1^+)$ ile aynı dağılıma sahip bağımsız rasgele değişken çifti olsunlar. Bu rasgele değişkenin yardımı ile aşağıdaki yenileme sürecini inşa edelim:

$$H(z) = \inf\left\{n \geq 1: \sum_{i=1}^{n} \chi_1^+ > z\right\} \tag{17}$$

E.Dyinkin prensibine göre,

$$N(z) = \sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+ \quad ; \quad S_{N(z)} = \sum_{i=1}^{H(z)} \chi_i^+ \tag{18}$$

şekilde gösterilebilir. Buradan, Wald özdeşliğine göre

$$E(N(z)) = E\left(\sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+\right) = E(H(z))E(\nu_1^+) \tag{19}$$

elde edilir. $E(\eta_1) > 0$ olduğuna göre, $E(\nu_1^+) < +\infty$ elde edilir (Feller, 1971).

Diğer taraftan

$$E(H(Z)) = U_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_+^{*n}(z)$$

olduğu için $E(H(Z))$ fonksiyonu $\{\chi_n^+\}$ dizisi tarafından oluşturulan yenileme fonksiyonudur. Burada $F(z)_+ \equiv P\{\chi_1^+ \leq z\}$ fonksiyonu 1. basamak yükseliğinin dağılım fonksiyonudur. Feller (1971)'e göre, her sonlu z için $E(H(z)) < +\infty$' dır. Bu takdirde (19)'e göre $E(N(z))$ sonludur. (15)'e göre ise $E(\tau(z))$ sonludur. Dolaysıyla, $\forall\, z \in (0; +\infty)$ için

$$E(\gamma_1) \equiv E(\gamma(z)) = E(\tau(z)) + E(\theta_1) < +\infty$$

dır. Sonuç olarak, genel ergodik Teoremin 2. koşulu da sağlandı. O halde, $X(t)$ süreci ergodiktir.

Şimdi, Teorem 2.4.1'in koşulları altında $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının analitik şekli aşağıda önerme şeklinde verilebilir.

Önerme 2.4.1. Teorem 2.4.1'in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, her sonlu ölçülebilir $f(x)(f: [0, +\infty) \to R)$ fonksiyonu için aşağıdaki bağıntı 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X(s))ds \equiv S_f = \frac{1}{E(\gamma_1)} \int_{z=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} f(x)\, P\{\gamma_1 > t; X(t) \in dx\} dt d\pi(z), (20)$$

burada $\pi(z)$ ile $\zeta_1{}'$ in dağılım fonksiyonu gösterilmiştir.

İspat. $f(x)$ sınırlı ölçülebilir bir fonksiyon olduğundan

$$\sup_{x\in R^+} |f(x)| \equiv M < \infty \tag{21}$$

olarak yazılabilir. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\left|\int_{z=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} f(x) P\{\gamma_1 > t; X(t) \in dx\} dt d\pi(z)\right| &\leq M \int_{z=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} P\{\gamma_1 > t; X(t) \in dx\} dt d\pi(z) \\ &= M \int_{z=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} P\{\gamma_1 > t\} dt d\pi(z) \\ &= M \int_{z=0}^{\infty} E(\gamma_1(z)) d\pi(z) \qquad (22)\end{aligned}$$

dır. Burada

$$\int_{z=0}^{\infty} E(\gamma_1(z)) d\pi(z) < \infty \tag{23}$$

olduğu Teorem 2.4.1'de gösterilmiştir. O halde (21) ve (23), (22)'de dikkate alınırsa, önermedeki üç katlı integralin sonlu olduğu açıkça görülür. ■

Not 2.4.1. Başka bir değişle, $X(t)$ sürecinin zaman ortalaması, $t \to \infty$ iken, mekan ortalamasına, 1 olasılığı ile yakınsamaktadır.

Bu genel sonuçtan ele aldığımız $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı ve ergodik dağlımının karakteristik fonksiyonu için özel formüller elde edilebilir. (Gihman, Skorohod (1975), s.243).

Teorem 2.4.2. Teorem 2.4.1'in koşulları sağlansın. Bu takdirde her sınırlı ölçülebilir $f(x)(f: [0, +\infty) \to R)$ fonksiyonu için aşağıdaki bağıntı, 1 olasılığı ile yazılabilir:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f\big(X(s)\big)ds = S_f = \frac{F(0)\int_0^\infty f(x)dA(x,.) + \int_0^\infty f(x)dB(x,.)}{F(0)A(\infty,.) + 1} \tag{24}$$

burada

$$A(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,z)\,; \quad B(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x,z)$$

$$a_n(x,\lambda z) = P\{\lambda z - S_m > 0, m = \overline{1,n}; \lambda z - S_n \le x\}, x > 0;$$

$$b_n(x,\lambda z) = P\{\lambda z - S_m > 0, m = \overline{1,n-1}; \lambda z - S_n \le x\}, x \le 0;$$

$$A(x,.) = \int_0^\infty A(x,z)d\pi(z)\ , B(x,.) = \int_0^\infty B(x,z)d\pi(z)\,;$$

$$A(\infty,.) = \lim_{x\to\infty} A(x,.)$$

dır.

İspat. İspata geçmeden önce, kısalık için aşağıdaki notasyonu tanımlayalım:

$$G(t,x,z) \equiv P_z\{\gamma_1 > t;\ X(t) \le x\}. \tag{25}$$

Toplam olasılık formülünden yararlanarak (24) eşitliğini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$G(t,x,z) = \big(1 - \Phi(t)\big)\varepsilon(x-z) + \sum_{n=1}^{\infty}[\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)]a_n(x,z)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}[\Phi_n(t) - \Phi_n(t) * H(t)]b_n(x,z). \tag{26}$$

Burada $\Phi(t) \equiv P\{\xi_1 \le t\}$,

$$\Phi_n(t) \equiv P\{T_n \le t\} = P\left\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \le t\right\} = \Phi^{*n}(t)$$

dır. $*$ sembolu ile konvolusyon çarpım gösterilmiştır:

$$\Phi^{*n}(t) = \int_0^t \Phi^{*(n-1)}(t-s)\, d\Phi(s), n = 2,3,\dots;$$

$\Phi^{*1}(t) = \Phi(t);\ \Phi^{*0}(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases}0, & t < 0\\ 1, & t \ge 0\end{cases}$ ise H(t)$\equiv$ $P\{\theta_1 \le t\}$'dır ve aşikâr şekli aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 2.4.2. θ_1-rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu aşikâr şekilde ξ_1 ve η_1 rasgele değişkenin olasılık karakteristikleri ile ifade edilebilir:

$$F_\theta(t) \equiv P\{\theta_1 \le t\} \equiv H(t) = (F(0)) \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{F}(0)))^{n-1} \Phi^{*n}(t) \qquad (27)$$

burada $F(x) \equiv P\{\eta_1 \le x\}$, $\Phi(t) \equiv P\{\xi_1 \le t\}$ 'dır.

İspat. Tanımına göre

$$\theta_1 \equiv \sum_{i=1}^{L_1} \xi_i$$

dır.

Diğer taraftan L_1 rasgele değişkeni, pozitif sıçramaya kadar olan sıçrayışların toplam sayısını göstermektedir ve $p = F(0)$ parametreli Geometri dağılımına sahiptir, yani:

$P\{L_1 = n\} = q^{n-1}\, p = (\bar{F}(0))^{n-1} F(0)$ (n=1.2.3...)

elde edilir.

Şimdi θ_1'in dağılım fonksiyonunu hesaplayalım:

$$F_\theta(t) \equiv P\{\theta_1 \le t\} \equiv H(t) = P\left\{\sum_{i=1}^{L_1} \xi_i \le t\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{L_1 = n, \sum_{i=1}^{n} \xi_i \le t\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{L_1 = n, T_n \le t\}$$

ξ_i ve η_i'ler birbirinden bağımsız oldukları için:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{L_1 = n\}\{T_n \le t\} = \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{F}(0))^{n-1} F(0)\, \Phi^{*n}(t)$$

$$= F(0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{F}(0)\right)^{n-1} \Phi^{*n}(t)$$

dır. Şimdi yeniden (26) eşitliğine geri dönelim. (26) eşitliğinin her iki tarafını $e^{-\lambda t}$ ile çarpıp t'ye göre 0'dan ∞'a kadar integrali alınırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\tilde{G}(\lambda, x, z) = \frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda} \varepsilon(x-z) + \frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi(\lambda)\right)^n a_n(x,z)$$

$$+ \frac{1-H^*(\lambda)}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi(\lambda)\right)^n b_n(x,z) \qquad (28)$$

Burada $\tilde{G}(\lambda,x,z)$ ile $G(t,x,z)$ fonksiyonunun t parametresine göre Laplace dönüşümünü;

$H^*(\lambda)$ ile H(t) dağılım fonksiyonun Laplace-Stiljes dönüşümü; $\varphi(\lambda)$ ile $\Phi(t)$ dağılım fonksiyon Laplace-Stiljes dönüşümü gösterilmiştir, yani

$$H^*(\lambda) = E\left(e^{-\lambda\,\theta_1}\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\,H(t)\,, \qquad \varphi(\lambda) = E(e^{-\lambda\,\xi_1}) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\Phi(t)$$

dır. Teorem 2.4.1'in koşullarına göre $E\left(\xi_1\right) < +\infty$ olduğundan

$$\lim_{\lambda\to 0}\,(1 - \varphi(\lambda))/\lambda = E(\xi_1)$$

elde edilir. Hatırlatalım ki W.Feller (1971)'e göre

$$\varphi(\lambda) = E\left(e^{-\lambda\xi_1}\right) = E\{1 - \lambda\xi_1 + o(\lambda)\} = 1 - \lambda E(\xi_1) + o(\lambda)$$

dır. Diğer taraftan

$$E(\theta_1) = E\left(\sum_{i=1}^{L_1} \xi_i\right) = E(L_1)E(\xi_1) = \frac{1}{F(0)}\,E(\xi_1)$$

dır. Teorem 2.4.1'in koşullarına göre, $F(0) \equiv P\left\{\eta_1 < 0\right\} > 0$'dır. Bu durumda, $1/F(0) < +\infty$ dır. Ayrıca, $E(\xi_1) < +\infty$ dır, dolayısıyla $E(\theta_1) = E(\xi_1)/F(0) < +\infty$'dır. Bu takdirde

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1 - H^*(\lambda)}{\lambda} = E(\theta_1) = \frac{E(\xi_1)}{F(0)}$$

elde edilir (Feller, 1971).

Diğer taraftan Teorem 2.4.1'in koşulları altında

$$A(x,z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x,z) \quad \text{ve } B(x,z) = \sum_{n=0}^\infty b_n(x,z)$$

serileri yakınsaktırlar.

Bu durumda, (28) eşitliğinde $\lambda \to 0$ iken limite geçilirse aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\int_0^\infty G(t,x,z)dt = E(\xi_1)A(x,z) + E(\theta_1)B(x,z)$$

$$= [E(\xi_1)/F(0)][F(0)A(x,z) + B(x,z)] \tag{29}$$

elde edilir.

Şimdi de (29) eşitliğinin her iki tarafın z parametresine göre ortalayalım:

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty G(t,x,z)dt\right)d\pi(z) = \frac{E(\xi_1)}{F(0)}[F(0)A(x,.) + B(x,.)]. \tag{30}$$

Burada

$$A(x,.) = \int_0^\infty A(x,z)d\pi(z) \equiv E(A(x,\zeta_1))$$

$$B(x,.) = \int_0^\infty B(x,z)d\pi(z) \equiv E(B(x,\zeta_1))$$

dır. (30) eşitliğini Önerme 4.1'de göz önüne alırsak, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$S_f = \frac{1}{E(\gamma_1)}\left\{\frac{E(\xi_1)}{F(0)}\left[F(0)\int_0^\infty f(x)dA(x,.) + \int_0^\infty f(x)dB(x,.)\right]\right\}$$

$$= \frac{E(\xi_1)}{F(0)E(\gamma_1)}\left\{F(0)\int_0^\infty f(x)dA(x,.) + \int_0^\infty f(x)dB(x,.)\right\}. \qquad (31)$$

Diğer taraftan

$$E(\gamma_1) = E(\tau_1) + E(\theta_1) = E\left(\sum_{i=1}^{N_1} \xi_i\right) + E\left(\sum_{i=1}^{L_1} \xi_i\right)$$

$$= E(\xi_1)E\big(N_1(\zeta_1)\big) + \frac{E(\xi_1)}{F(0)} = \frac{E(\xi_1)}{F(0)}\left\{F(0)E\big(N_1(\zeta_1)\big) + 1\right\}$$

dır. Burada

$$E\big(N_1(\zeta_1)\big) \equiv \int_0^\infty E(\,N_1(z)d\pi(z)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\int_0^\infty A(x,z)d\pi(z) = \lim_{x\to\infty} A(x,.) = A(\infty,.)$$

dır. Dolayısıyla

$$S_f = \frac{F(0)\int_0^\infty f(x)dA(x,.) + \int_0^\infty f(x)dB(x,.)}{F(0)A(\infty,.) + 1} \qquad (32)$$

elde edilir. Önerme 4.1'in ifadesinde S_f'nin (32) ifadesi göz önüne alınırsa, 1 olasılığı ile

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f\big(X(s)\big)ds = \frac{F(0)\int_0^\infty f(x)dA(x,.) + \int_0^\infty f(x)dB(x,.)}{F(0)A(\infty,.) + 1}$$

olduğu görülür. Bu da Teorem 2.4.2'nin ispatını tamamlar. ■

Teorem 2.4.2'den birçok değerli sonuçlar almak mümkündür. Bunlardan bazılarını aşağıdaki şekilde verelim.

Sonuç 2.4.1. Teorem 2.4.1'in koşulları altında, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun $(Q(u))$ kesin analitik ifadesi aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$Q(u) = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \leq u\} = \frac{F(0)A(u,.) + B(u,.)}{F(0)A(\infty,.) + 1}. \tag{33}$$

İspat. Teorem 2.4.2'de f(x) yerine, $I_u(x) \equiv \begin{cases} 1 & ,x \leq u \\ 0 & ,x > u \end{cases}$ indikatör fonksiyonunu yazılırsa

$$S_f = \frac{F(0)\int_0^u 1dA(x,.) + \int_0^u 1dB(x,.)}{F(0)A(\infty,.) + 1} = \frac{F(0)A(u,.) + B(u,.)}{F(0)A(\infty,.) + 1}$$

elde edilir.

Sonuç 2.4.2. Teorem 2.4.1'in koşulları altında, X(t) sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonunun $\left(\varphi_X(\alpha)\right)$ kesin analitik ifadesi aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\varphi_X(\alpha) = \frac{F(0)\int_0^\infty e^{i\alpha x}dA(x,.) + \int_0^\infty e^{i\alpha x}dB(x,.)}{F(0)A(\infty,.) + 1} \tag{34}$$

İspat: Teorem 2.4.2'de f(x) yerine önce $f(x) = \cos(\alpha x)$, daha sonra $f(x) = \sin(\alpha x)$ yazıp, alınan sonuçları $e^{i\alpha x} = \cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x)$ Euler özdeşliğine göre toplarsak,

$$\varphi_X(\alpha) = \lim_{t\to\infty} E(e^{i\alpha X(t)}) = \frac{F(0)\int_0^\infty e^{i\alpha x}dA(x,.) + \int_0^\infty e^{i\alpha x}dB(x,.)}{F(0)A(\infty,.) + 1}$$

eşitliği elde edilir. ■

Sonuç 2.4.1 ve Sonuç 2.4.2'de ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik karakteristik fonksiyonu için kesin ifadeler elde edildi.

Fakat bu ifadelere dâhil olan A(x,z) ve B(x,z) fonksiyonlarını hesaplamak, karmaşık matematiksel yapılardan dolayı oldukça zordur.

Bu nedenle Q(x) (ergodik dağılım fonksiyon) ve $\varphi_X(\alpha)$ (ergodik karakteristik fonksiyon) için alternatif ifadelere ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu problemin çözüm yöntemlerinden birisi, X(t) sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonunu, N(z) ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonellerinin karakteristikleri ile ifade etmektir.

Bu amaçla, rasgele yürüyüş süreci için temel özdeşlikten (Feller, 1971) yararlanarak aşagıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.4.3. Teorem 2.4.1'in koşulları sağlansın. Bu takdirde X(t) sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\big(\varphi_X(\alpha)\big)$, N(z) ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonellerinin olasılık karakteristikleri ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\varphi_X(\alpha) = \frac{1}{E(N_1(\zeta_1)) + K} \int_0^\infty e^{i\alpha z} \frac{\varphi_{S_{N(z)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_\eta(-\alpha) - 1} d\pi(z)$$
$$+ \frac{K}{E(N_1(\zeta_1)) + K} \int_0^\infty e^{i\alpha z}\, \varphi_{S_{N(z)}}(-\alpha) d\pi(z), \tag{35}$$

burada

$$K \equiv 1/F(0) = 1/P\{\eta_1 < 0\};\ \varphi_\eta(-\alpha) \equiv E\big(e^{-i\alpha\eta_1}\big) \equiv E(\exp(-i\alpha\eta_1))\,;$$

$$S_{N(z)} \equiv \sum_{i=1}^{N(z)} \eta_i\ ;\ E\big(N_1(\zeta_1)\big) \equiv \int_0^\infty E(\,N_1(z))d\pi(z)\,;$$

$$N_1 \equiv N_1(z) \equiv N(z);\ \varphi_{S_{N(z)}}(-\alpha)\ \equiv E\big(\exp(-i\alpha S_{N(z)})\big)$$

dır.

İspat. Rasgele yürüyüş süreci için temel özdeşlikten (bkz, Feller, 1971) ve kesin ifade (34)'ten yararlanarak ispat edilebilir (bkz, Kesemen, 2006).

2.5. Sürecin Ergodik Dağılımının Momentleri İçin Kesin İfadeler

Bu kısmın amacı, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının momentleri için kesin ifadeler elde etmektir. Bu amaç için aşağıdaki notasyonları dâhil edelim:

$$m_n = E(\eta_1^n)\ ;\ m_{n1} = \frac{m_n}{nm_1}\ , n= 1,2,3, ...$$

ζ_1'in dağılım fonksiyonunu $\pi(z)$ ile göstereceğiz.

$$M_n(z) \equiv E\big(S_{N(z)}^n\big);\ M_{n1}(z) = \frac{M_n(z)}{M_1(z)},\ E(X^n) \equiv \lim_{t\to\infty} E(X^n(t))\ , n= 1,2,3, ...$$

$$E\big(\zeta_1^r M_n(\zeta_1)\big) \equiv \int_0^\infty z^r\, M_n(z)d\pi(z)\ , r = 0,1,2,3, ...\ n = 1,2,3, ...$$

Şimdi de bu kısmın temel amacını ifade eden teoremi verelim.

Teorem 2.5.1. Teorem 2.4.1'in koşullarına ilaveten, $E\big(|\eta_1|^2\big) < +\infty$ koşulu da sağlanmış olsun. Bu takdirde X(t) sürecinin ergodik dağılımının birinci momenti aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$E(X) = \frac{1}{E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1}$$

$$\left\{E(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)) - \frac{1}{2}E(M_2(\tilde{\zeta}_1)) + A_1 E(M_1(\tilde{\zeta}_1)) + Km_1 E(\tilde{\zeta}_1)\right\}, \tag{36}$$

burada $m_{21} = \frac{m_2}{2m_1}$, $\tilde{\zeta}_1 = \lambda\zeta_1$; $A_1 = m_{21} - Km_1$; K= $1/F(0)$ 'dır.

Teorem 2.5.2. Teorem 2.4.1'in koşullarına ilaveten, $E(|\eta_1|^3) < +\infty$ koşulu da sağlanmış olsun. Bu takdirde X(t) sürecinin ergodik dağılımının ikinci momenti ($E(X^2)$) aşağıdaki şekil yazılabilir:

$$E(X^2) = \frac{1}{E(M_1(\tilde{\zeta}_1)) + Km_1}\{E(\tilde{\zeta}_1^2 M_1(\tilde{\zeta}_1)) - E(\tilde{\zeta}_1 M_2(\tilde{\zeta}_1)) + \frac{1}{3}E(M_3(\tilde{\zeta}_1))$$

$$+A_1[2E(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)) - E(M_2(\tilde{\zeta}_1))] + A_2 E(M_1(\tilde{\zeta}_1)) + Km_1 E(\tilde{\zeta}_1^2)\}, \tag{37}$$

burada $\tilde{\zeta}_1 = \lambda\zeta_1$; $A_1 = m_{21} - Km_1$; $A_2 = 2m_{21}^2 - m_{31}$ 'dır.

Teorem 2.5.3. Teorem 2.4.1'in koşullarına ilaveten, $E(|\eta_1|^4) < +\infty$ koşulu da sağlanmış olsun. Bu takdirde X(t) sürecinin ergodik dağılımının üçüncü momenti ($E(X^3)$) aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$E(X^3) = \frac{1}{E(M_1(\tilde{\zeta}_1)) + Km_1}\{E(\tilde{\zeta}_1^3 M_1(\tilde{\zeta}_1)) - \frac{3}{2}E(\tilde{\zeta}_1^2 M_2(\tilde{\zeta}_1)) + E(\tilde{\zeta}_1 M_3(\tilde{\zeta}_1))$$

$$-\frac{1}{4}E(M_4(\tilde{\zeta}_1)) + A_1[3E(\tilde{\zeta}_1^2 M_1(\tilde{\zeta}_1)) - 3E(\tilde{\zeta}_1 M_2(\tilde{\zeta}_1)) + E(M_3(\tilde{\zeta}_1))]$$

$$+3A_2\left[E(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)) - \frac{1}{2}E(M_2(\tilde{\zeta}_1))\right] + 3A_3 E(M_1(\tilde{\zeta}_1)) + Km_1 E(\tilde{\zeta}_1^3)\}, \tag{38}$$

burada $A_1 = m_{21} - Km_1$; $A_2 = 2m_{21}^2 - m_{31}$; $A_3 = \frac{m_{41}}{3} - 2m_{21}m_{31} + 2m_{21}^3$'dır.

Teorem 2.5.4. Teorem 2.4.1'in koşullarına ilaveten, $E(|\eta_1|^5) < +\infty$ koşulu da sağlanmış olsun. Bu takdirde X(t) sürecinin ergodik dağılımının dördüncü momenti ($E(X^4)$) aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$E(X^4) = \frac{1}{E(M_1(\tilde{\zeta}_1)) + Km_1}$$

$$\{E(\tilde{\zeta}_1^4 M_1(\tilde{\zeta}_1)) - 2E(\tilde{\zeta}_1^3 M_2(\tilde{\zeta}_1)) + 2E(\tilde{\zeta}_1^2 M_3(\tilde{\zeta}_1)) - E(\tilde{\zeta}_1 M_4(\tilde{\zeta}_1)) + \frac{1}{5}E(M_5(\tilde{\zeta}_1))$$

$$+A_1[4E(\tilde{\zeta}_1^3 M_1(\tilde{\zeta}_1)) - 6E(\tilde{\zeta}_1^2 M_2(\tilde{\zeta}_1)) + 4E(\tilde{\zeta}_1 M_3(\tilde{\zeta}_1)) - E(M_4(\tilde{\zeta}_1))]$$

$$+2A_2[3E(\tilde{\zeta}_1^2 M_1(\tilde{\zeta}_1)) - 3E(\tilde{\zeta}_1 M_2(\tilde{\zeta}_1)) + E(M_3(\tilde{\zeta}_1))]$$

$$+6A_3[2E(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)) - E(M_2(\tilde{\zeta}_1))] + 3A_4 E(M_1(\tilde{\zeta}_1)) + Km_1 E(\tilde{\zeta}_1^4)\}, \tag{39}$$

burada $A_1 = m_{21} - Km_1$; $A_2 = 2m_{21}^2 - m_{31}$; $A_3 = \frac{m_{41}}{3} - 2m_{21}m_{31} + 2m_{21}^3$;

$$A_4 = 4m_{21}^4 - 6m_{21}^2 m_{31} + m_{31}^2 + \tfrac{4}{3} m_{21} m_{41} - \tfrac{1}{6} m_{51}\text{'dır.}$$

İspat. (Teorem 2.5.1- Teorem 2.5.4)

(35) eşitliğinde X(t) sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\big(\varphi_X(\alpha)\big)$, N(z) ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelleri yardımı ile ifade edilmiştir. Bu eşitliğin her iki tarafını $(i\alpha)$'nın derecelerine göre $\alpha \to 0$ iken Taylor serisine ayırarak, $E(X^n)$'leri $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonunun momentleri ile $(M_n(z))$ ifade edebiliriz.

İspat yönteminin benzerliğinden dolayı, Teorem 2.5.1-5.4'ün yerine sadece ilk iki teoremin ispatını vereceğiz.

$E(|\eta_1|^3) < +\infty$ olduğunda (Feller, 1971), η_1 rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\varphi_\eta(-\alpha) \equiv E\left(e^{-i\alpha\eta_1}\right) = E\left\{1 - i\alpha\eta_1 + \frac{(i\alpha)^2}{2!}{\eta_1}^2\right\} + o((i\alpha)^2)$$

$$= 1 - i\alpha m_1 + \frac{(i\alpha)^2}{2!} m_2 + o((i\alpha)^2) \tag{40}$$

$$\varphi_\eta(-\alpha) - 1 = -i\alpha m_1 + \frac{(i\alpha)^2}{2!} m_2 + o((i\alpha)^2) \tag{41}$$

Benzer şekilde, $\alpha \to 0$ iken, $S_{N(z)}$'in karakteristik fonksiyonu için Taylor açılımı yazılabilir:

$$\varphi_{S_{N(z)}}(-\alpha) - 1 = -i\alpha M_1(z) + \frac{(i\alpha)^2}{2!} M_2(z) + o((i\alpha)^2) \tag{42}$$

(42) ifadesini (41) ifadesine bölerek, aşağıdaki açılım ($\alpha \to 0$ iken) elde edilir:

$$\frac{\varphi_{S_{N(z)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_\eta(-\alpha) - 1} = \frac{-i\alpha M_1(z)\left\{1 - \frac{i\alpha}{2} M_{21}(z) + \frac{(i\alpha)^2}{6} M_{31}(z) + o((i\alpha)^2)\right\}}{-i\alpha m_1\left\{1 - \frac{i\alpha}{2} m_{21} + \frac{(i\alpha)^2}{6} m_{31} + o((i\alpha)^2)\right\}}$$

$$= \frac{M_1(z)}{m_1} \cdot \frac{1 - \frac{i\alpha}{2} M_{21}(z) + \frac{(i\alpha)^2}{6} M_{31}(z) + o((i\alpha)^2)}{1 - \frac{i\alpha}{2} m_{21} + \frac{(i\alpha)^2}{6} m_{31} + o((i\alpha)^2)}$$

$$= \frac{M_1(z)}{m_1}\{1 - \frac{i\alpha}{2}[M_{21}(z) - m_{21}]$$

$$+ \frac{(i\alpha)^2}{12}[2M_{31}(z) - 3m_{21}M_{21}(z) + 3{m_{21}}^2 - 2m_{31}] + o((i\alpha)^2)\}. \tag{43}$$

Diğer taraftan her $z \in (0, +\infty)$ için, $\alpha \to 0$ iken aşağdaki açılım yazılabilir:

$$e^{i\alpha z} = 1 + i\alpha z + \frac{(i\alpha)^2}{2!} z^2 + o(\alpha^2)\,. \qquad (44)$$

(43) ve (44) açılımlarından, aşağıdaki açılım elde edilir:

$$e^{i\alpha z}\frac{\varphi_{S_{N(z)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_\eta(-\alpha) - 1} = \frac{M_1(z)}{m_1}\{1 - \frac{i\alpha}{2}[2z - M_{21}(z) + m_{21}]$$

$$+\frac{(i\alpha)^2}{12}[6z^2 + 2M_{31}(z) - 6zM_{21}(z) - 3m_{21}M_{21}(z)$$

$$+6zm_{21} + 3{m_{21}}^2 - 2m_{31}]\} + o((\alpha)^2). \qquad (45)$$

(45) açılımından aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\int_0^\infty e^{i\alpha z}\frac{\varphi_{S_{N(z)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_\eta(-\alpha) - 1} d\pi(z)$$

$$= \frac{E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right)}{m_1} + \frac{i\alpha}{2m_1}\int_0^\infty [2z\,M_1(z) - M_2(z) + m_{21}M_1(z)]d\pi(z)$$

$$+\frac{(i\alpha)^2}{12m_1}\{\int_0^\infty [2M_3(z) - 6zM_2(z) + 6z^2M_1(z) + 6m_{21}zM_1(z)$$

$$-3m_{21}M_2(z) + (3{m_{21}}^2 - 2m_{31})M_1(z)]d\pi(z)\} + o((i\alpha)^2). \qquad (46)$$

Şimdi de, $\alpha \to 0$ iken, (32) eşitliğindeki 2. toplananı hesaplayalım:

$$k\int_0^\infty e^{i\alpha z}\varphi_{S_{N(z)}}(-\alpha)\,d\pi(z) = k\int_0^\infty e^{i\alpha z}E\left(e^{-i\alpha S_{N(z)}}\right)d\pi(z)$$

$$= k + i\alpha k\left[E(\tilde{\zeta}_1) - E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right)\right]$$

$$+\frac{(i\alpha)^2}{2}k\left[E(\tilde{\zeta}_1^2) + E\left(M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) - 2E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right)\right] + o(\alpha^2). \qquad (47)$$

(46) ve (47) açılımlarını toplayarak aşağıdaki açılım elde edilir:

$$\left[K + E\left(N_1(\tilde{\zeta}_1)\right)\right]\varphi_X(\alpha) = \left[K + \frac{E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right)}{m_1}\right] + (i\alpha)\{\frac{1}{2m_1}E\left(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right)$$

$$-\frac{1}{2m_1}E\left(M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) + \left(\frac{m_{21}}{2m_1} - K\right)\left(E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + KE(\tilde{\zeta}_1)\right)\}$$

$$+\frac{(i\alpha)^2}{2}\{KE\left(M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) - 2KE\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + KE(\tilde{\zeta}_1^2) - \frac{E\left(\tilde{\zeta}_1 M_2(\tilde{\zeta}_1)\right)}{m_1}$$

$$+\frac{E\left(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right)}{m_1}m_{21} + \frac{E\left(\tilde{\zeta}_1^2 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right)}{m_1} + \frac{E\left(M_3(\tilde{\zeta}_1)\right)}{3m_1} - \frac{E\left(M_2(\tilde{\zeta}_1)\right)}{2}m_{21}$$

$$+\frac{1}{6m_1}E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right)(3{m_{21}}^2 - 2m_{31})\} + o(\alpha^2). \qquad (48)$$

Şimdi de gerekli hesaplamaları yaparak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\varphi_X(\alpha) = 1 + \frac{i\alpha}{Km_1 + E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right)}\{E\left(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - \frac{E\left(M_2(\tilde{\zeta}_1)\right)}{2}$$

$$+\left(\frac{m_{21}}{2} - Km_1\right)E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1 E(\tilde{\zeta}_1)\}$$

$$+\frac{(i\alpha)^2}{2\left[Km_1 + E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right)\right]}\{\frac{E\left(M_3(\tilde{\zeta}_1)\right)}{3} + E\left(\tilde{\zeta}_1^2 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - E\left(\tilde{\zeta}_1 M_2(\tilde{\zeta}_1)\right)$$

$$+(m_{21} - 2Km_1)E\left(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + \left(Km_1 - \frac{m_{21}}{2}\right)E\left(M_2(\tilde{\zeta}_1)\right)$$

$$+\left(\frac{{m_{21}}^2}{2} - \frac{m_{31}}{3}\right)E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1 E(\tilde{\zeta}_1^2)\} + o(\alpha^2). \qquad (49)$$

Diğer taraftan $\alpha \to 0$ iken, X(t) sürecinin karakteristik fonksiyonunun Taylor açılımı aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_X(\alpha) = E\left(e^{i\alpha X}\right) = 1 + i\alpha E(X) + \frac{(i\alpha)^2}{2}E(X^2) + o(\alpha^2). \qquad (50)$$

(49) ve (50) açılımlarını karşılaştırarak aşağıdaki kesin ifadeler elde edilir:

$$E(X) = \frac{1}{E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1}\Big\{E\left(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - \frac{1}{2}E\left(M_2(\tilde{\zeta}_1)\right)$$

$$+(m_{21} - Km_1)E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1 E(\tilde{\zeta}_1)\Big\}. \qquad (51)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1}\{E\left(\tilde{\zeta}_1^2 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - E\left(\tilde{\zeta}_1 M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) + \frac{1}{3}E\left(M_3(\tilde{\zeta}_1)\right)$$

$$+(m_{21} - Km_1)\left[2E\left(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - E\left(M_2(\tilde{\zeta}_1)\right)\right]$$

$$+(2{m_{21}}^2 - m_{31})E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1 E(\tilde{\zeta}_1^2)\}. \qquad (52)$$

Benzer şekilde, $E(X^3)$ ve $E(X^4)$'ün de kesin ifadeleri elde edilebilir. Bu da Teorem 2.5.1-2.5.4'ün ispatlarını tamamlar. Böylece, X(t) sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin ifadeleri elde edilmiş olur. ■

2.6. $S_{N(z)}$ Sınır Fonksiyonelinin Momentleri İçin Asimptotik Açılımların Elde Edilmesi

Önceki alt kısımda $X(t)$ sürecinin ilk dört momentinin $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti ile ifade edildi. Fakat bu kesin ifadeleri hesaplamak oldukça zordur. Bu nedenle bu çalışmada çeşitli asimptotik yöntemleri kullanarak $X(t)$ sürecinin momentleri için üç terimli açılımlar elde etmeyi amaçlıyoruz. Bu maksatla, önce $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri için $\lambda \to \infty$ iken asimptotik açılımlar elde etmeye ve bazı önemli matematiksel yardımcı teoremları ispatlamaya çalışacağız.

Bunun için $\{S_n\}, n \geq 0$ rasgele yürüyüş surecinin üçüncü kısımda tanımlanmış basamak anlarını ve basamak yüksekliklerini kullanacağız. Birinci basamak anını (ν_1^+) ve birinci basamak yüksekliğinin (χ_1^+) tanımını tekrar verelim:

$$\nu_1^+ = \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\}, \chi_1^+ = S_{\nu_1^+} \equiv \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i$$

ν_1^+ ve χ_1^+ rasgele değişkenlerine literatürde, sırasıyla, $\{S_n\}, n \geq 0$ rasgele yürüyüş surecinin birinci basamak anı ve birinci basamak yüksekliği denir. Bu özel rasgele değişkenler rasgele yürüyüş süreçlerinin incelenmesinde önemli bir rol oynamaktadırlar (bkz., Feller (1971), s.391). $\{\nu_1^+\}$ ve $\{\chi_1^+\}, n \geq 1$, dizileri bağımsız ve sırasıyla ν_1^+ ve χ_1^+ ile aynı dağılıma sahip pozitif değerli rasgele değişkenler dizileri olsun.

$H(z)$, $\chi_n^+, n \geq 1$, rasgele değişkenlerinin ürettiği yenileme sürecini göstersin, yani

$$H(z) = \inf\left\{n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} \chi_1^+ > z\right\}, z \geq 0$$

olsun.

E.Dynkin prensibine göre $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelleri $\{\nu_1^+\}$ ve $\{\chi_1^+\}, n \geq 1$ değişkenleri yardımı ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$N(z) = \sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+ \;;\; S_{N(z)} = \sum_{i=1}^{H(z)} \chi_i^+$$

$U_+(z) = E(H(z))$ ile $\chi_n^+, n \geq 1$, basamak yüksekliklerinin ürettiği yenileme fonksiyonunu göstersin, yani

$$U_+(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} F_+^{*n}(z), z \geq 0$$

olsun. Burada $F_+^{*n}(z)$ ile $F(z)_+ \equiv P\{\chi_1^+ \leq z\}$ dağılım fonksiyonunun n kat konvolüsyon çarpımı gösterilmiştir.

Bu kısımda amaç,

$$E\left(\tilde{\zeta}_1^n M_k(\zeta_1)\right) = \int_{z=0}^{\infty} (\lambda z)^n M_k(z) d\pi(z) \;\; ; n = 1,2,3,\ldots ; k = 0,1,2,\ldots$$

tipli integrallar için asimptotik sonuçlar elde etmektir. Burada $\pi(z)$, ζ_1 rasgele değişkenin dağılım fonksiyonunu gösterir. $S_{N(z)}$'in momentleri yukarıda $M_k(z)$ ile gösterilmiştir, yani $M_k(z) \equiv E(S_{N(z)}^k)$; $k = \overline{1,5}$'dır. Bu kısmın temel amacı, $M_k(z)$ momentleri için, $\lambda \to \infty$ iken 3 terimli asimptotik açılım elde etmektir. Bunun için Kovalenko, Kuznetsov, Shurenkov (1989) ve Rogozin (1964) kaynaklarından yararlanarak, aşağıdaki yardımcı teoremler verilebilir:

Yardımcı Teorem 2.6.1. $E\left(|\eta_1|^3\right) < +\infty$ olsun. Bu takdirde $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti ($M_k(z)$) için, $z \to \infty$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir

$$1)\; M_1(z) \equiv E(S_{N(z)}) = z + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + o\left(\frac{1}{z}\right);$$

$$2)\; M_2(z) \equiv E\left({S_{N(z)}}^2\right) = z^2 + 2\mu_{21} z + \mu_{31} + o(1);$$

$$3)\; M_3(z) \equiv E\left({S_{N(z)}}^3\right) = z^3 + 3\mu_{21} z^2 + 3\mu_{31} z + o(z);$$

$$4)\; M_4(z) \equiv E\left({S_{N(z)}}^4\right) = z^4 + 4\mu_{21} z^3 + 6\mu_{31} z^2 + o(z^2);$$

$$5)\; M_5(z) \equiv E\left({S_{N(z)}}^5\right) = z^5 + 5\mu_{21} z^4 + 10\mu_{31} z^3 + o(z^3).$$

Burada $\mu_k \equiv E(\chi_1^{+k})$, $\mu_{k1} = \frac{\mu_k}{k\mu_1}$, $k = 1,2,3$ dır. χ_1^+ ise $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin birinci basamak yüksekliğidir.

İspat. 1) $S_{N(z)}$ sınır fonksiyoneli aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$S_{N(z)} = z + \hat{\chi}_{1z}^+$$

Burada $\hat{\chi}_{1z}^+$ ile , $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin ilk kez z seviyesini aşarken, bu seviyeden yukarıda kalan kısmı gösterir. $z = 0$ olduğunda $\hat{\chi}_{1z}^+ \equiv \chi_1^+$ elde edilir. Bu takdirde

$$E(S_{N(z)}) = z + E(\hat{\chi}_{1z}^+) \tag{53}$$

eşitliği elde edilir.

Rogozin (1964)'e göre, $z \to \infty$ iken,

$$E(\hat{\chi}_{1z}^{+k}) = \frac{\mu_{k+1}}{(k+1)\mu_1} + o(1), \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

açılımı doğrudur. Burada $\mu_k \equiv E\left(\chi_1^{+k}\right)$'dır. Dolayısıyla

$$E(\hat{\chi}_{1z}^{+}) = \frac{\mu_2}{2\mu_1} + o(1)$$

elde edilir ve (53) eşitliği aşağıdaki şekilde yazılır:

$$E\left(S_{N(z)}\right) = z + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + o(1).$$

Fakat Kovalenko, Kuznetsov, Shurenkov (1989)'a göre,

$$E\left(|\eta_1|^3\right) < +\infty$$

olduğunda

$$E\left(S_{N(z)}\right) = z + \frac{\mu_2}{2\mu_1} + o\left(\frac{1}{z}\right) \tag{54}$$

açılımı yazılırsa, yardımcı teoremin birinci şıkkının ispatı tamamlanır.

$$2)\ E\left(S_{N(z)}^2\right) = E(z + \hat{\chi}_{1z}^{+})^2 = z^2 + 2zE(\hat{\chi}_{1z}^{+}) + E(\hat{\chi}_{1z}^{+2}) \tag{55}$$

eşitliğinde Rogozin (1964) açılımı uygulanırsa,

$$E\left(S_{N(z)}^2\right) = z^2 + 2z\frac{\mu_2}{2\mu_1} + \frac{\mu_3}{3\mu_1} + o(1) = z^2 + 2\mu_{21}z + \mu_{31} + o(1) \tag{56}$$

açılımı elde edilir.

Benzer yöntemle 3), 4) ve 5) için aşağıdaki gibi sonuçlar elde edilir:

$$3)\ E\left(S_{N(z)}^3\right) = E(z + \hat{\chi}_{1z}^{+})^3 = E\{z^3 + 3z^2\hat{\chi}_{1z}^{+} + 3z\hat{\chi}_{1z}^{+2} + \hat{\chi}_{1z}^{+3}\} \tag{57}$$

$$= z^3 + 3z^2E\left(\hat{\chi}_{1z}{}^{+}\right) + 3zE\left(\hat{\chi}_{1z}{}^{+2}\right) + o(z)$$

$$= z^3 + 3z^2\frac{\mu_2}{2\mu_1} + 3z\frac{\mu_3}{3\mu_1} + o(z)$$

$$= z^3 + 3\mu_{21}z^2 + 3\mu_{31}z + o(z). \tag{58}$$

$$4)\ E\left(S_{N(z)}^4\right) = E(z + \hat{\chi}_{1z}^{+})^4 = z^4 + 4z^3E(\hat{\chi}_{1z}^{+}) + 6z^2E(\hat{\chi}_{1z}^{+2}) + o(z^2) \tag{59}$$

$$= z^4 + 4z^3\frac{\mu_2}{2\mu_1} + 6z^2\frac{\mu_3}{3\mu_1} + o(z^2) = z^4 + 4\mu_{21}z^3 + 6\mu_{31}z^2 + o(z^2). \tag{60}$$

$$5)\ E\left(S_{N(z)}^5\right) = E\left(z + \hat{\chi}_{1z}{}^{+}\right)^5 = z^5 + 5z^4E\left(\hat{\chi}_{1z}{}^{+}\right) + 10z^3E\left(\hat{\chi}_{1z}{}^{+2}\right) + o(z^3) \tag{61}$$

$$= z^5 + 5z^4\frac{\mu_2}{2\mu_1} + 10z^3\frac{\mu_3}{3\mu_1} + o(z^3)$$

$$= z^5 + 5\mu_{21}z^4 + 10\mu_{31}z^3 + o(z^3). \tag{62}$$

Böylece, yardımcı teorem 2.6.1'in ispatı tamamlanır.

Yardımcı teorem 2.6.1'de $M_k(z) \equiv E\left(S_{N(z)}^k\right), k = \overline{1,5}$, momentleri için $\lambda \to \infty$ iken üç terimli açılımlar elde edildi. Fakat ele aldığımız sürecinin ergodik momentlerini hesaplamak için $M_k(z)$'in kendisi değil, onun aşağıdaki şekildeki integrallerini bilmemiz gerekmektedir:

$$E\left(\tilde{\zeta}_1^n M_k(\tilde{\zeta}_1)\right) \equiv \int_0^\infty (\lambda z)^n\, M_k(\lambda z) d\pi(z), \qquad k = \overline{1,5}\,; \;\; n = 0,1,2,3,\ldots \tag{63}$$

Burada $\pi(z)$ ile ζ_1 rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu gösterilmiştir. ζ_1 ise, $n > N_1$ iken $\{\eta_n\}$ rasgele değişken dizisinin ilk poztitif değerli terimini göstermektedir. Bir başka deyişle, ζ_1'i aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\mu \equiv \min\left\{n \geq 1 : \eta_{N_1+n} > 0\right\} \tag{64}$$

olmak üzere $\zeta_1 = \eta_{N_1+\mu}$ yazılabilir.

$\{\eta_n\}$, $n = 1,2,3,\ldots$ dizisi, bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenden oluştuğu için ζ_1'in dağılımı η_μ'nün dağılımı ile aynı olacaktır, yani

$$\pi(z) \equiv p\{\zeta_1 \leq z\} = p\{\eta_{N_1+\mu} \leq z\} = p\{\eta_\mu \leq z\} \tag{65}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda, μ'nün dağılımı ile $\min\{n \geq 1 : \eta_n > 0\}$ şekilde tanımlanan rasgele değişkenin dağılımı aynı olacaktır. Dolaysıyla , μ için tanım olarak

$$\mu \equiv \min\{n \geq 1 : \eta_n > 0\} \tag{66}$$

ifadesini kabul edebiliriz.

(66) eşitliği ile tanımlanan μ rasgele değişkeni, $p = F(0)$ parametreli geometrik dağılıma sahip olduğu için

$$p\{\mu = n\} = q^{n-1}.p\,, n = 1,2,3,\ldots$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mu = K_1 \in$Geom$(p = F(0))$'dır.

Amacımız $E(\tilde{\zeta}_1) \equiv \lambda\beta \to \infty$ iken, (63) integralları için iki terimli asimptotik açılımlar elde etmektir.

Bu amaç için önce aşağıdaki yardımcı teoremleri ispat etmemiz gerekmektedir.

Yardımcı Teorem 2.6.2. $E(\eta_1) > 0$ ve $E\left(\chi_1^{+3}\right) < +\infty$ olsun. Bu takdirde her $n = 0,1,2,3,\ldots$ için, $\lambda \to \infty$ iken aşağıdaki iki terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

1) $E\left(\tilde{\zeta}_1^n M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) = \lambda^{n+1}\beta_{n+1} + \lambda^n \mu_{21}\beta_n + o(\lambda^n),$

2) $E\left(\tilde{\zeta}_1^n M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) = \lambda^{n+2}\beta_{n+2} + 2\lambda^{n+1}\mu_{21}\beta_{n+1} + o\left(\lambda^{n+1}\right),$

3) $E\left(\tilde{\zeta}_1^n M_3(\tilde{\zeta}_1)\right) = \lambda^{n+3}\beta_{n+3} + 3\lambda^{n+2}\mu_{21}\beta_{n+2} + o\left(\lambda^{n+2}\right),$

4) $E\left(\tilde{\zeta}_1^n M_4(\tilde{\zeta}_1)\right) = \lambda^{n+4}\beta_{n+4} + 4\lambda^{n+3}\mu_{21}\beta_{n+3} + o\left(\lambda^{n+3}\right),$

5) $E\left(\tilde{\zeta}_1^n M_5(\tilde{\zeta}_1)\right) = \lambda^{n+5}\beta_{n+5} + 5\lambda^{n+4}\mu_{21}\beta_{n+4} + o(\lambda^{n+4})$.

Burada $\tilde{\zeta}_1 \equiv \lambda\zeta_1$; $\beta_k \equiv E(\zeta_1^k)$; $\mu_{k1} = \frac{\mu_k}{k\mu_1}, k = 1,2,3$ 'dır.

İspat . 1) Yardımcı teorem 2.6.1'e göre

$$M_1(\lambda z) = \lambda z + \mu_{21} + \frac{1}{\lambda z} g_1(\lambda z)$$

dır, burada $g_1(\lambda z)$ sınırlı fonksiyon olup, $\forall\, z > 0 \ \lim_{\lambda\to\infty} \lambda z g_1(\lambda z) = 0$'dır. Bu açılımı göz önünde bulundurarak,

$$E(M_1(\tilde{\zeta}_1)) \equiv \lambda\beta_1 + \mu_{21} + o(\frac{1}{\lambda})$$

elde edilir.

Burada

$$\beta_n \equiv E(\zeta_1^n), n = 1,2,3, \ldots ; \beta \equiv \beta_1 \equiv E(\zeta_1);\ \mu_{21} = \frac{\mu_2}{2\mu_1}$$

dır. Diğer taraftan $n = 1,2,3, \ldots$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
E\left(\tilde{\zeta}_1^n M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) &= \int_0^\infty (\lambda z)^n \left(\lambda z + \mu_{21} + \frac{1}{\lambda z} g_1(\lambda z)\right) d\pi(z) \\
&= \int_0^\infty \lambda^{n+1} z^{n+1} d\pi(z) + \mu_{21} \int_0^\infty \lambda^n z^n d\pi(z) + \int_0^\infty \lambda^{n-1} z^{n-1} g_1(\lambda z) d\pi(z)) \\
&= \lambda^{n+1} E(\zeta_1^{n+1}) + \lambda^n \mu_{21} E(\zeta_1^n) + 0\lambda^{n-1} E(\zeta_1^{n-1}) + o(\lambda^{n-1}) \\
&= \lambda^{n+1}\beta_{n+1} + \lambda^n \mu_{21}\beta_n + o(\lambda^n)
\end{aligned}$$

açılımı elde edilebilir. Burada

$$\beta_k \equiv E(\zeta_1^k) \text{ ve } E(\zeta_1^n) = \int_0^\infty z^n d\pi(z)$$

dır.

2) Yardımcı teorem 2.6.1'de $M_2(z) = (\lambda z)^2 + 2\mu_{21}(\lambda z) + g_2(\lambda z)$ olduğu gösterilmiştir. Burada $g_2(\lambda z)$ sınırlı fonksiyon olup, $\forall\, z > 0 \ \lim_{\lambda\to\infty} g_2(\lambda z) = 0$ 'dır. Bu durumda, her $n = 0,1,2,3, \ldots$ için

$$\begin{aligned}
E\left(\tilde{\zeta}_1^n M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) &= \int_0^\infty (\lambda z)^n M_2(\lambda z) d\pi(z) \\
&= \int_0^\infty (\lambda z)^n \{(\lambda z)^2 + 2\mu_{21}\lambda z + g_2(\lambda z)\} d\pi(z)
\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^{n+2} d\pi(z) + 2\,\mu_{21} \int_0^\infty (\lambda z)^{n+1} d\pi(z) + \int_0^\infty (\lambda z)^n g_2(z) d\pi(z)$$

$$= \lambda^{n+2} E\left(\zeta_1^{n+2}\right) + 2\mu_{21}\lambda^{n+1} E\left(\zeta_1^{n+1}\right) + o(\lambda^{n+1})$$

$$= \lambda^{n+2}\beta_{n+2} + 2\mu_{21}\lambda^{n+1}\beta_{n+1} + o(\lambda^{n+1})$$

açılımı elde edilir ve Yardımcı Teorem 2.6.2'nin ikinci kısmının ispatı tamamlanır.

3) Yardımcı teorem 2.6.1'de

$$M_3(z) = (\lambda z)^3 + 3\mu_{21}(\lambda z)^2 + g_3(\lambda z)$$

olduğu gösterilmiştir. Burada $g_3(\lambda z)$ sınırlı bir fonksiyon olup aşağıdaki özelliği sağlamaktadır:

$$\forall\, z > 0 \text{ için}, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \frac{g_3(\lambda z)}{(\lambda z)^2} = 0$$

dır. Bu durumda, her $n = 0,1,2,3$ için

$$E\left(\tilde{\zeta}_1^n M_3(\tilde{\zeta}_1)\right) = \int_0^\infty (\lambda z)^n M_3(\lambda z) d\pi(z)$$

$$= \int_0^\infty (\lambda z)^n \left((\lambda z)^3 + 3\mu_{21}(\lambda z)^2 + g_3(\lambda z^2)\right) d\pi(z)$$

$$= \lambda^{n+3} \int_0^\infty z^{n+3} d\pi(z) + 3\,\mu_{21}\lambda^{n+2} \int_0^\infty z^{n+2} d\pi(z)$$

$$+ \int_0^\infty z^{n+1} g_3(\lambda z^2) d\pi(z)$$

$$= \lambda^{n+3} E\left(\zeta_1^{n+3}\right) + 3\mu_{21}\lambda^{n+2} E\left(\zeta_1^{n+2}\right) + o\left(\lambda^{n+2}\right)$$

$$= \lambda^{n+3}\beta_{n+3} + 3\mu_{21}\lambda^{n+2}\beta_{n+2} + o(\lambda^{n+2})$$

açılımı elde edilebilir. Bu da yardımcı teorem 2.6.2'nin üçüncü kısmının ispatın tamamlar.

4) Yardımcı teorem 2.6.1'de

$$M_4(z) = (\lambda z)^4 + 4\mu_{21}(\lambda z)^3 + g_4(\lambda z)$$

olduğu gösterilmiştir. Burada $g_4(\lambda z)$ sınırlı bir fonksiyon olup aşağıdaki özelliği sağlamaktadır:

$$\forall\, z > 0 \text{ için}, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \frac{g_4(\lambda z)}{(\lambda z)^3} = 0$$

dır.

Bu durumda, her $n = 0,1,2,3$ için

$$\mathrm{E}\left(\tilde{\zeta}_1^{n}\mathrm{M}_4\left(\tilde{\zeta}_1\right)\right)=\int_0^{\infty}(\lambda z)^n\mathrm{M}_4(\lambda z)d\pi(z)$$

$$=\int_0^{\infty}(\lambda z)^n\left((\lambda z)^4+4\mu_{21}(\lambda z)^3+g_4(\lambda z^3)\right)d\pi(z)$$

$$=\lambda^{n+4}\int_0^{\infty}z^{n+4}d\pi(z)+4\,\mu_{21}\lambda^{n+3}\int_0^{\infty}z^{n+3}d\pi(z)$$

$$+\int_0^{\infty}z^{n+2}g_4(\lambda z^3)d\pi(z)$$

$$=\lambda^{n+4}\mathrm{E}\left(\zeta_1^{n+4}\right)+4\mu_{21}\lambda^{n+3}\mathrm{E}\left(\zeta_1^{n+3}\right)+o\left(\lambda^{n+3}\right)$$

$$=\lambda^{n+4}\beta_{n+4}+4\mu_{21}\lambda^{n+3}\beta_{n+3}+o(\lambda^{n+3})$$

açılımı elde edilebilir. Bu da yardımcı teorem 2.6.2’nin dördüncü kısmının ispatın tamamlar.

5) Yardımcı teorem 2.6.1'de, $\mathrm{M}_5(z)=(\lambda z)^5+5\mu_{21}(\lambda z)^4+g_5(\lambda z)$ olduğu gösterilebilir. Burada $g_5(\lambda z)$ sınırlı bir fonksiyon olup aşağıdaki özelliği sağlamaktadır:

$$\forall\, z>0 \text{ için },\qquad \lim_{\lambda\to\infty}\frac{g_5(\lambda z)}{(\lambda z)^4}=0$$

dır. Bu durumda, her $n=0,1,2,3,\ldots$ için

$$\mathrm{E}\left(\tilde{\zeta}_1^{n}\mathrm{M}_5\left(\tilde{\zeta}_1\right)\right)=\int_0^{\infty}(\lambda z)^n\mathrm{M}_5(\lambda z)d\pi(z)$$

$$=\int_0^{\infty}(\lambda z)^n\{(\lambda z)^5+5\mu_{21}(\lambda z)^4+g_5(\lambda z)\}d\pi(z)$$

$$=\int_0^{\infty}(\lambda z)^{n+5}d\pi(z)+5\,\mu_{21}\int_0^{\infty}(\lambda z)^{n+4}d\pi(z)+\int_0^{\infty}(\lambda z)^n g_5(z)d\pi(z)$$

$$=\lambda^{n+5}\mathrm{E}\left(\zeta_1^{n+4}\right)+5\mu_{21}\lambda^{n+4}\mathrm{E}\left(\zeta_1^{n+4}\right)+o(\lambda^{n+4})$$

$$=\lambda^{n+5}\beta_{n+5}+5\mu_{21}\lambda^{n+4}\beta_{n+4}+o(\lambda^{n+4})$$

açılımı elde edilir ve yardımcı teorem 2.6.2’nin beşinci kısmının ispatı tamamlanır. Böylece yardımcı teorem 2.6.2'nin ispatı tamamlanır, yani $S_{N(z)}$ sınır fonksiyoneli ile bağlı integralların asimptotik davranışı incelenmiş oldu. ■

2.7. Sürecin Ergodik Momentleri İçin İki Terimli Asimptotik Açılımlar

Bu kısmın amacı, $\left(E(X^k),\ k=\overline{1,4}\ \right) X(t)$ sürecinin ilk dört ergodik momenti için $E(\zeta_1) \equiv \lambda\beta \to \infty$ iken, iki terimli asimptotik açılımlar elde etmektir. Bu amaç için Yardımcı Teorem 2.6.2'de, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri ile ilgili integrallerin asimptotik açılımlarını, elde ettiğimiz momentler için kesin ifadelerde kullanacağız.

Bu kısmın temel sonucunu aşağıdaki teorem yardım ile verebiliriz:

Teorem 2.7.1. $E(\eta_1) > 0; E(|\eta_1|^3) < +\infty$ ve $E(\zeta_1) \equiv \lambda\beta \to \infty$ iken aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir:

1) $E(X) = \lambda\beta_{21} + D_1 + o(1)$,

2) $E(X^2) = \lambda^2\beta_{31} + \lambda D_2 + o(\lambda)$,

3) $E(X^3) = \lambda^3\beta_{41} + \lambda^2 D_3 + o(\lambda^2)$,

4) $E(X^4) = \lambda^4\beta_{51} + \lambda^3 D_4 + o(\lambda^3)$.

Burada

$D_1 = [m_{21} - c_{21}B_1]$; $D_2 = [2m_{21}\beta_{21} - c_{31}B_1]$; ;

$D_3 = [3m_{21}\beta_{31} - c_{41}B_1]; D_4 = [4m_{21}\beta_{41} - c_{51}B_1]$;

$$B_1 = \mu_{21} + Km_1\ ; \beta_1 \equiv \beta = E(\zeta_1)\ ; \beta_{n1} = \frac{\beta_n}{n\beta_1}\ , c_{n1} = \frac{\beta_{n1}}{\beta}\ , n = \overline{2,5};$$

$$m_{n1} = \frac{m_n}{nm_1}; \mu_{n1} = \frac{\mu_n}{n\mu_1};\ m_n = E(\eta_1)^n\ ;\ \mu_n = E(\chi_1{}^+)^n\ ; K = \frac{1}{F(0)},$$

$F(0) = P\{\eta_1 < 0\}$ dır.

İspat. Teorem 2.5.1'de $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının birinci momenti aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$E(X) = \frac{1}{E(M_1(\tilde{\zeta}_1)) + Km_1}\left\{E(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)) - \frac{1}{2}E(M_2(\tilde{\zeta}_1)) + A_1 E(M_1(\tilde{\zeta}_1)) + Km_1 E(\tilde{\zeta}_1)\right\}$$

Notasyon kısalığı için, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(X) = I_1(\lambda)\{I_2(\lambda) + I_3(\lambda)\}, \tag{67}$$

burada

$$I_1(\lambda) \equiv \frac{1}{E(M_1(\tilde{\zeta}_1)) + Km_1}\ ;\ I_2(\lambda) \equiv E\left(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - \frac{1}{2}E\left(M_2(\tilde{\zeta}_1)\right);$$

$$I_3(\lambda) \equiv A_1 E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1 E(\tilde{\zeta}_1);\ A_1 = m_{21} - Km_1; K = \frac{1}{F(0)};$$

$M_n(\tilde{\zeta}_1) = E\left(S^n_{N(\tilde{\zeta}_1)}\right)$, dır.

Yardımcı teorem 2.6.2'de elde edilen asimptotik açılımlar (53)'de göz önünde bulundurulursa aşağıdaki ifader yazılabilir:

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1} = \frac{1}{\lambda\beta_1 + \mu_{21} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) + Km_1}$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta\left(1 + \frac{\mu_{21} + Km_1}{\lambda\beta} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)}.$$

Diğer taraftan

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda\beta}\left(1 - \frac{\mu_{21} + km_1}{\lambda\beta} + \frac{(\mu_{21} + km_1)^2}{(\lambda\beta)^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta}\left(1 - \frac{B_1}{\lambda\beta} + \frac{B_1^2}{(\lambda\beta)^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right), \tag{68}$$

dır. Burada

$$B_1 = \mu_{21} + Km_1$$

dır. Benzer hesaplamalar yapılırsa, $I_2(\lambda)$ ve $I_3(\lambda)$ ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$I_2(\lambda) = E\left(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - \frac{1}{2}E\left(M_2(\tilde{\zeta}_1)\right)$$

$$= \lambda^2\beta_2 + \lambda\mu_{21}\beta + o(1) - \frac{1}{2}(\lambda^2\beta_2 + 2\lambda\mu_{21}\beta + \mu_{31}) + o(1)$$

$$= \frac{1}{2}\lambda^2\beta_2 - \frac{1}{2}\mu_{31} + o(1); \tag{69}$$

$$I_3(\lambda) = (m_{21} - Km_1)E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1 E(\tilde{\zeta}_1)$$

$$= (m_{21} - Km_1)\left(\lambda\beta_1 + \mu_{21} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) + Km_1\lambda\beta$$

$$= m_{21}\lambda\beta + (m_{21} - Km_1)\mu_{21} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{70}$$

$I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$ ve $I_3(\lambda)$ ifadeleri (68), (69) ve (70)'de yerine yazılırsa, $E(X)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$E(X) = I_1(\lambda)\{I_2(\lambda) + I_3(\lambda)\}$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta}\left(1 - \frac{B_1}{\lambda\beta} + \frac{B_1^2}{(\lambda\beta)^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)$$

$$\left\{\frac{1}{2}\lambda^2\beta_2 + m_{21}\lambda\beta + (m_{21} - Km_1)\mu_{21} + o(1)\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta}\left\{\frac{\lambda^2\beta_2}{2} + m_{21}\lambda\beta + (m_{21} - Km_1)\mu_{21} - \lambda\frac{\beta_2 B_1}{2\beta} - m_{21}B_1 + \frac{\beta_2 B_1^2}{2\beta^2} + o(1)\right\}$$

$$= \lambda\frac{\beta_2}{2\beta} + m_{21} + \frac{m_{21}\mu_{21}}{\lambda\beta} - \frac{Km_1\mu_{21}}{\lambda\beta} - \frac{1}{2}\frac{\beta_2 B_1}{\beta^2} - \frac{m_{21}B_1}{\lambda\beta} + \frac{1}{2}\frac{\beta_2 B_1^2}{\lambda\beta^3} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \lambda\beta_{21} + [m_{21} - c_{21}B_1] + o(1).$$

Burada

$$\beta_{n1} = \frac{\beta_n}{n\beta_1}\ ;\ \beta_1 \equiv \beta = E(\zeta_1);\ c_{21} = \frac{\beta_{21}}{\beta}\ ;\ B_1 = \mu_{21} + Km_1;$$

$$m_{n1} = \frac{m_n}{nm_1}\ ;\ \mu_{n1} = \frac{\mu_n}{n\mu_1}\ ;\mu_n = E(\chi_1^+)^n\ ;K = \frac{1}{F(0)}$$

dır. Dolayısıyla

$$E(X) = \lambda\beta_{21} + D_1 + o(1)$$

dır. Burada $D_1 = m_{21} - c_{21}B_1$’ dır.

Bu da Teorem 2.7.1'in 1. şıkkının ispatını tamamlar.

2) Teorem 2.5.2’de X(t) sürecinin ergodik dağılımının ikinci momenti aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$E(X^2) = \frac{1}{E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1}\left\{E\left(\tilde{\zeta}_1^2 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - E\left(\tilde{\zeta}_1 M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) + \frac{1}{3}E\left(M_3(\tilde{\zeta}_1)\right)\right.$$

$$\left. + A_1\left[2E\left(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - E\left(M_2(\tilde{\zeta}_1)\right)\right] + A_2 E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1 E(\tilde{\zeta}_1^2)\right\}.$$

Burada $A_1 = m_{21} - Km_1$ ve $A_2 = 2m_{21}^2 - m_{31}$’dır.

Notasyon kısalığı için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(X^2) = I_1(\lambda)\{I_2(\lambda) + I_3(\lambda) + I_4(\lambda)\}\,. \tag{71}$$

Benzer şekilde, Yardımcı Teorem 2.6.2’de elde edilen asimptotik açılımlar (53)’de göz önünde bulundurulursa aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1} = \frac{1}{\lambda\beta}\left(1 - \frac{B_1}{\lambda\beta} + \frac{B_1^2}{(\lambda\beta)^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right), \tag{72}$$

$$I_2(\lambda) = E\left(\tilde{\zeta}_1^2 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - E\left(\tilde{\zeta}_1 M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) + \tfrac{1}{3}E\left(M_3(\tilde{\zeta}_1)\right)$$

$$= \lambda^3\beta_3 + \lambda^2\mu_{21}\beta_2 + o(\lambda^2) - \left(\lambda^3\beta_3 + 2\lambda^2\mu_{21}\beta_2 + o(\lambda^2)\right)$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\lambda^3\beta_3 + 3\lambda^2\mu_{21}\beta_2 + o(\lambda^2)\right) = \lambda^3\frac{\beta_3}{3} + o(\lambda^2)\,, \tag{73}$$

$$I_3(\lambda) = (A_1)\left[2E\left(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - E\left(M_2(\tilde{\zeta}_1)\right)\right]$$

$$= (A_1)\left[2\left(\lambda^2\beta_2 + \lambda\mu_{21}\beta + o(1)\right) - \left(\lambda^2\beta_2 + 2\lambda\mu_{21}\beta + o(1)\right)\right]$$
$$= (A_1)\left(\lambda^2\beta_2 + o(\lambda)\right), \qquad (74)$$
$$I_4(\lambda) = A_2 E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1 E(\tilde{\zeta}_1^2) = A_2\left(\lambda\beta_1 + \mu_{21} + o(1)\right) + Km_1\lambda^2\beta_2$$
$$= Km_1\lambda^2\beta_2 + A_2\lambda\beta + o(\lambda). \qquad (75)$$

$I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$, $I_3(\lambda)$ ve $I_4(\lambda)$ ifadelerini (71)'de yerlerine yazılırsa, $E(X^2)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$E(X^2) = \frac{1}{\lambda\beta}\left(1 - \frac{B_1}{\lambda\beta} + \frac{B_1^2}{(\lambda\beta)^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)\left\{\frac{\lambda^3\beta_3}{3} + (A_1)\lambda^2\beta_2 + \lambda^2\beta_2\, Km_1 + A_2\lambda\beta + o(\lambda)\right\}$$
$$= \frac{1}{\lambda\beta}\left(1 - \frac{B_1}{\lambda\beta} + \frac{B_1^2}{(\lambda\beta)^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)\left\{\frac{\lambda^3\beta_3}{3} + m_{21}\lambda^2\beta_2 + A_2\lambda\beta + o(\lambda)\right\}$$
$$= \frac{1}{\lambda\beta}\left\{\frac{\lambda^3\beta_3}{3} + m_{21}\lambda^2\beta_2 + A_2\lambda\beta - \lambda^2\frac{B_1}{\beta}\frac{\beta_3}{3} - m_{21}\lambda\frac{\beta_2}{\beta}B_1 + \frac{\lambda\beta_3}{\beta^2}B_1^2 + o(\lambda)\right\}$$
$$= \frac{\lambda^2\beta_3}{3} + m_{21}\lambda\frac{\beta_2}{\beta} + A_2 - \lambda\frac{\beta_3 B_1}{3\beta^2} - m_{21}\frac{\beta_2}{\beta^2}B_1 + \frac{\beta_3}{3\beta^3}B_1^2 + o(1)$$
$$= \lambda^2\beta_{31} + 2\lambda m_{21}\beta_{21} - \lambda\frac{\beta_{31}B_1}{\beta} - o(\lambda).$$

Dolayısıyla

$$E(X^2) = \lambda^2\beta_{31} + \lambda D_2 + o(\lambda)$$

dır. Burada

$$D_2 = \left[2m_{21}\beta_{21} - c_{31}B_1\right];\ c_{31} = \frac{\beta_{31}}{\beta}\ ;\ B_1 = \mu_{21} + Km_1;\ \beta_{31} = \frac{\beta_3}{3\beta}$$

dır. Bu da Teorem 2.7.1'in 2. şıkkının ispatının tamamlar.

3) Teorem 2.5.3'de X(t) sürecinin ergodik dağılımının üçüncü momenti aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$E(X^3) = \frac{1}{E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1}\{E\left(\tilde{\zeta}_1^3 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - \frac{3}{2}E\left(\tilde{\zeta}_1^2 M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) + E\left(\tilde{\zeta}_1 M_3(\tilde{\zeta}_1)\right)$$
$$-\frac{1}{4}E\left(M_4(\tilde{\zeta}_1)\right) + 3A_1\left[E\left(\tilde{\zeta}_1^2 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - E\left(\tilde{\zeta}_1 M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) + \frac{1}{3}E\left(M_3(\tilde{\zeta}_1)\right)\right]$$
$$+3A_2 E\left(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - \frac{3A_2}{2}E\left(M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) + 3A_3 E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1 E(\tilde{\zeta}_1^3)\}.$$

Burada

$$A_1 = m_{21} - Km_1\,; A_2 = 2m_{21}^2 - m_{31};\; A_3 = \frac{m_{41}}{3} - 2m_{21}m_{31} + 2m_{21}^3$$

dır. Benzer şekilde, notasyon kısalığı için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(X^3) = I_1(\lambda)\{I_2(\lambda) + I_3(\lambda) + I_4(\lambda)\}\,. \tag{76}$$

Yardımcı Teorem 2.6.2'de elde edilen asimptotik açılımlar (53)'de göz önünde bulundurulursa aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1} = \frac{1}{\lambda\beta}\left(1 - \frac{B_1}{\lambda\beta} + \frac{B_1^2}{(\lambda\beta)^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right); \tag{77}$$

$$\begin{aligned} I_2(\lambda) &= E\left(\tilde{\zeta}_1^3 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - \frac{3}{2}E\left(\tilde{\zeta}_1^2 M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) + E\left(\tilde{\zeta}_1 M_3(\tilde{\zeta}_1)\right) - \frac{1}{4}E\left(M_4(\tilde{\zeta}_1)\right) \\ &= \lambda^4\beta_4 + \lambda^3\mu_{21}\beta_3 + o(\lambda^3) - \frac{3}{2}\left(\lambda^4\beta_4 + 2\lambda^3\mu_{21}\beta_3 + o(\lambda^3)\right) \\ &+ \left(\lambda^4\beta_4 + 3\lambda^3\mu_{21}\beta_3 + o(\lambda^3)\right) - \frac{1}{4}\left(\lambda^4\beta_4 + 4\lambda^3\mu_{21}\beta_3 + o(\lambda^3)\right) \\ &= \frac{1}{4}\lambda^4\beta_4 + o(\lambda^3)\,; \end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned} I_3(\lambda) &= 3A_1\left[E\left(\tilde{\zeta}_1^2 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - E\left(\tilde{\zeta}_1 M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) + \frac{1}{3}E\left(M_3(\tilde{\zeta}_1)\right)\right] \\ &= 3A_1\left[\lambda^3\beta_3 + \lambda^2\mu_{21}\beta_2 + o(\lambda^2) - \left(\lambda^3\beta_3 + 2\lambda^2\mu_{21}\beta_2 + o(\lambda^2)\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3}\left(\lambda^3\beta_3 + 3\lambda^2\mu_{21}\beta_2 + o(\lambda^2)\right)\right] \\ &= 3A_1\left(\frac{1}{3}\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^3)\right)\,; \end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned} I_4(\lambda) &= 3A_2E\left(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - \frac{3A_2}{2}E\left(M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) + 3A_3E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1E(\tilde{\zeta}_1^3) \\ &= 3A_2\left(\lambda^2\beta_2 + \lambda\mu_{21}\beta + o(\lambda)\right) - \frac{3A_2}{2}\left(\lambda^2\beta_2 + \lambda\mu_{21}\beta + o(\lambda)\right) \\ &\quad + 3A_3\left(\lambda\beta_1 + \mu_{21} + o(1)\right) + Km_1\lambda^3\beta_3 \\ &= Km_1\lambda^3\beta_3 + \frac{3A_2}{2}\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2). \end{aligned} \tag{80}$$

Benzer şekilde, $I_1(\lambda)$, $I_2(\lambda)$, $I_3(\lambda)$ ve $I_4(\lambda)$ ifadeleri (76)'da yerlerine yazılırsa, $E(X^3)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$E(X^3) = \frac{1}{\lambda\beta}\left(1 - \frac{B_1}{\lambda\beta} + \frac{B_1^2}{(\lambda\beta)^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)$$

$$\left\{\frac{\lambda^4\beta_4}{4} + m_{21}\lambda^3\beta_3 - Km_1\lambda^3\beta_3 + Km_1\lambda^3\beta_3 + \frac{3}{2}\,A_2\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda\beta}\left(\frac{\lambda^4\beta_4}{4} + m_{21}\lambda^3\beta_3 + \frac{3}{2}\,A_2\lambda^2\beta_2 - \lambda^3\frac{\beta_4 B_1}{4\beta}\right.$$

$$\left.-\lambda^2 m_{21}\frac{\beta_3}{\beta}B_1 + \frac{1}{4}\lambda^2\frac{\beta_4}{\beta^2}B_1^2 + o(\lambda^2)\right)$$

$$= \frac{\lambda^3\beta_4}{4\beta} + m_{21}\lambda^2\frac{\beta_3}{\beta} + \frac{3}{2}\,A_2\lambda\frac{\beta_2}{\beta} - \lambda^2\frac{\beta_4 B_1}{4\beta^2} - \lambda m_{21}\frac{\beta_3}{\beta^2}B_1 + \frac{1}{4}\lambda\frac{\beta_4}{\beta^3}B_1^2 + o(\lambda)$$

$$= \lambda^3\beta_{41} + 3\lambda^2 m_{21}\beta_{31} - \lambda^2\frac{\beta_{41}B_1}{\beta} + o(\lambda^2).$$

Dolayısıyla

$$E(X^3) = \lambda^3\beta_{41} + \lambda^2 D_3 + o(\lambda^2)$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$D_3 = [3m_{21}\beta_{31} - c_{41}B_1]\,;\; c_{41} = \frac{\beta_{41}}{\beta}$$

dır. Bu da Teorem 2.7.1'in üçüncü şıkkının ispatını tamamlar.

4) Teorem 2.5.4'de X(t) sürecinin ergodik dağılımının dördüncü momenti aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$E(X^4) = \frac{1}{E(M_1(\tilde{\zeta}_1)) + Km_1}$$

$$\{E\big(\tilde{\zeta}_1^4 M_1(\tilde{\zeta}_1)\big) - 2E\big(\tilde{\zeta}_1^3 M_2(\tilde{\zeta}_1)\big) + 2E\big(\tilde{\zeta}_1^2 M_3(\tilde{\zeta}_1)\big) - E\big(\tilde{\zeta}_1 M_4(\tilde{\zeta}_1)\big) + \frac{1}{5}E\big(M_5(\tilde{\zeta}_1)\big)$$

$$+A_1\big[4E\big(\tilde{\zeta}_1^3 M_1(\tilde{\zeta}_1)\big) - 6E\big(\tilde{\zeta}_1^2 M_2(\tilde{\zeta}_1)\big) + 4E\big(\tilde{\zeta}_1 M_3(\tilde{\zeta}_1)\big) - E\big(M_4(\tilde{\zeta}_1)\big)\big]$$

$$+2A_2\big[3E\big(\tilde{\zeta}_1^2 M_1(\tilde{\zeta}_1)\big) - 3E\big(\tilde{\zeta}_1 M_2(\tilde{\zeta}_1)\big) + E\big(M_3(\tilde{\zeta}_1)\big)\big]$$

$$+6A_3\big[2E\big(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)\big) - E\big(M_2(\tilde{\zeta}_1)\big)\big] + 3A_4 E\big(M_1(\tilde{\zeta}_1)\big) + Km_1 E\big(\tilde{\zeta}_1^4\big)\}$$

Burada

$$A_1 = m_{21} - Km_1;\; A_2 = 2m_{21}^2 - m_{31}\;;\; A_3 = \frac{m_{41}}{3} - 2m_{21}m_{31} + 2m_{21}^3$$

$$A_4 = 4m_{21}^4 - 6m_{21}^2 m_{31} + m_{31}^2 + \frac{4}{3}m_{21}m_{41} - \frac{1}{6}m_{51}$$

dır. Benzer şekilde, notasyon kısalığı için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(X^4) = I_1(\lambda)\{I_2(\lambda) + I_3(\lambda) + I_4(\lambda) + I_5(\lambda)\}\,. \tag{81}$$

Yardımcı teorem 2.6.2'de elde edilen asimptotik açılımlar (53)'de göz önünde bulundurulursa aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1} = \frac{1}{\lambda\beta}\left(1 - \frac{B_1}{\lambda\beta} + \frac{B_1^2}{(\lambda\beta)^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right). \tag{82}$$

$$\begin{aligned} I_2(\lambda) &= E\left(\tilde{\zeta}_1^4 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - 2E\left(\tilde{\zeta}_1^3 M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) + 2E\left(\tilde{\zeta}_1^2 M_3(\tilde{\zeta}_1)\right) - E\left(\tilde{\zeta}_1 M_4(\tilde{\zeta}_1)\right) + \frac{1}{5}E\left(M_5(\tilde{\zeta}_1)\right) \\ &= \lambda^5\beta_5 + \lambda^4\mu_{21}\beta_4 + o(\lambda^4) - 2\left(\lambda^5\beta_5 + 2\lambda^4\mu_{21}\beta_4 + o(\lambda^4)\right) \\ &\quad + 2\left(\lambda^5\beta_5 + 3\lambda^4\mu_{21}\beta_4 + o(\lambda^4)\right) - \left(\lambda^5\beta_5 + 4\lambda^4\mu_{21}\beta_4 + o(\lambda^4)\right) \\ &\quad + \frac{1}{5}\left(\lambda^5\beta_5 + 5\lambda^4\mu_{21}\beta_4 + o(\lambda^4)\right) = \frac{1}{5}\lambda^5\beta_5 + o(\lambda^4)\,. \end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned} I_3(\lambda) &= A_1\left[4E\left(\tilde{\zeta}_1^3 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - 6E\left(\tilde{\zeta}_1^2 M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) + 4E\left(\tilde{\zeta}_1 M_3(\tilde{\zeta}_1)\right) - E\left(M_4(\tilde{\zeta}_1)\right)\right] \\ &= A_1\left[\left(\lambda^4\beta_4 + \lambda^3\mu_{21}\beta_3 + o(\lambda^3)\right) - 6\left(\lambda^4\beta_4 + 2\lambda^3\mu_{21}\beta_3 + o(\lambda^3)\right)\right. \\ &\quad \left. + 4\left(\lambda^4\beta_4 + 3\lambda^3\mu_{21}\beta_3 + o(\lambda^3)\right) - \left(\lambda^4\beta_4 + \lambda^3\mu_{21}\beta_3 + o(\lambda^3)\right)\right] \\ &= A_1(\lambda^4\beta_4) + o(\lambda^3)\,. \end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned} I_4(\lambda) &= 2A_2\left[3E\left(\tilde{\zeta}_1^2 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - 3E\left(\tilde{\zeta}_1 M_2(\tilde{\zeta}_1)\right) + E\left(M_3(\tilde{\zeta}_1)\right)\right] \\ &= 2A_2\left[3\left(\lambda^3\beta_3 + \lambda^2\mu_{21}\beta_2 + o(\lambda^2)\right) - 3\left(\lambda^3\beta_3 + 2\lambda^2\mu_{21}\beta_2 + o(\lambda^2)\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(\lambda^3\beta_3 + 3\lambda^2\mu_{21}\beta_2 + o(\lambda^2)\right)\right] = 2A_2\left(\lambda^3\beta_3 + o(\lambda^2)\right). \end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned} I_5(\lambda) &= 6A_3\left[2E\left(\tilde{\zeta}_1 M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) - E\left(M_2(\tilde{\zeta}_1)\right)\right] + 3A_4E\left(M_1(\tilde{\zeta}_1)\right) + Km_1E\left(\tilde{\zeta}_1^4\right) \\ &= 6A_3\left[2\left(\lambda^2\beta_2 + \lambda\mu_{21}\beta + o(\lambda)\right) - \left(\lambda^2\beta_2 + o(\lambda^2)\right)\right] + 3A_4\left(o(\lambda^2)\right) + Km_1\lambda^4\beta_4 \\ &= Km_1\lambda^4\beta_4 + o(\lambda^2)\,. \end{aligned} \tag{86}$$

(82), (83), (84), (85) ve (86) ifadelerini, (81)'de yerlerine yazılırsa, $E(X^4)$'un asimptotik açılımı, aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$E(X^4) = \frac{1}{\lambda\beta}\left(1 - \frac{B_1}{\lambda\beta} + \frac{B_1^2}{(\lambda\beta)^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)$$

$$\left\{\frac{\lambda^5\beta_5}{5}+m_{21}\lambda^4\beta_4-Km_1\lambda^4\beta_4+2A_2\,\lambda^3\beta_3+Km_1\lambda^4\beta_4+o(\lambda^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{\lambda\beta}\left(\frac{\lambda^5\beta_5}{5}+m_{21}\lambda^4\beta_4+2A_2\,\lambda^3\beta_3-\lambda^4\frac{\beta_5 B_1}{5\beta}-\lambda^3 m_{21}\frac{\beta_4}{\beta}B_1\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\lambda^3\frac{\beta_5}{\beta^2}B_1^2+o(\lambda^3)\right)$$

$$=\frac{\lambda^4\beta_5}{5}+\frac{m_{21}\lambda^3\beta_4}{\beta}+\frac{2A_2\,\lambda^2\beta_3}{\beta}-\lambda^3\frac{\beta_5 B_1}{5\beta^2}-\lambda^2 m_{21}\frac{\beta_4}{\beta^2}B_1+\frac{1}{5}\lambda^2\frac{\beta_5}{\beta^2}B_1^2+o(\lambda^2)$$

$$=\lambda^4\beta_{51}+4\lambda^3 m_{21}\beta_{41}-\lambda^3\frac{\beta_{51}B_1}{\beta}+o(\lambda^3).$$

Dolayısıyla

$$E(X^4)=\lambda^4\beta_{51}+\lambda^3 D_4+o(\lambda^3)$$

dır. Burada

$$D_4=\left[4m_{21}\beta_{31}-c_{51}B_1\right];\ c_{51}=\frac{\beta_{51}}{\beta}$$

dır. Bu da Teorem 2.7.1'in dördüncü şıkkının ispatını tamamlar. ■

2.8. Sürecin Ergodik Dağılımı İçin Zayıf Yakınsama Teoremi

Bu alt kısmın amacı, $X(t)$ süreci için $\lambda\to\infty$ iken zayıf yakınsama teoremini elde etmek ve ispatlamaktır. Bu amaç için yeni yardımcı süreç, $Y_\lambda(t)$ sürecini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$Y_\lambda(t)\equiv\frac{X(t)}{\lambda}$$

$Y_\lambda(t)$ süreci, $X(t)$ sürecinin lineer bir dönüşümü olduğu için Teorem 2.3.1'in koşulları altında, $Y_\lambda(t)$ süreci de ergodiktir.

Şimdi de $Y_\lambda(t)$ sürecinin asimptotik davranışını incelemek için aşağıdaki notasyonları dahil edelim.

$X(t)$ ve $Y(t)$ süreçlerinin ergodik dağılımlarının karakteristik fonksiyonunu sırasıyla, $\varphi_X(\alpha)$ ve $\varphi_Y(\alpha)$ ile gösterelim, yani

$$\varphi_X(\alpha)\equiv\lim_{t\to\infty}E\big(\exp(i\alpha X(t))\big)\text{ ve }\varphi_Y(\alpha)\equiv\lim_{t\to\infty}E(\exp(i\alpha Y_\lambda(t)))$$

dır.

Zayıf yakınsama teoremini vermeden önce aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 2.8.1. Ergodik teoremin koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, $Y_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu, $\lambda \to \infty$ iken, aşağıdaki limit karakteristik fonksiyonuna $(\varphi_0(\alpha))$ yakınsar:

$$\varphi_Y(\alpha) \to \varphi_0(\alpha) \equiv \frac{\varphi_\zeta(\alpha) - 1}{i\alpha E(\zeta_1)}, \alpha \neq 0.$$

İspat: Teorem 2.4.3'de, $X(t)$ sürecinin ergodik dagılımının karakteristik fonksiyonu $(\varphi_x(\alpha))$, $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonellerinin olasılık karakteristikleri ile aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$\varphi_X(\alpha) = \frac{1}{E(N_1(\tilde{\zeta}_1)) + K} \int_{z=0}^{\infty} e^{i\alpha\lambda z} \frac{\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_\eta(-\alpha) - 1} d_z\pi(z)$$

$$+ \frac{K}{E(N_1(\tilde{\zeta}_1)) + K} \int_{z=0}^{\infty} e^{i\alpha\lambda z} \varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\alpha) d_z\pi(z), \qquad \alpha \in R\backslash\{0\}; \tag{87}$$

burada

$$K \equiv \frac{1}{F(0)} = \frac{1}{P\{\eta_1 < 0\}}; \; \varphi_\eta(-\alpha) \equiv E\left(e^{-i\alpha\eta_1}\right) \equiv E\left(\exp(-i\alpha\eta_1)\right);$$

$$\varphi_{S_{N(\lambda z)}}(-\alpha) \equiv E\left(\exp(-i\alpha S_{N(\lambda z)})\right); \; E\left(N_1(\tilde{\zeta}_1)\right) \equiv \int_0^\infty E\left(N_1(\lambda z)\right) d\pi(z);$$

$$N_1 \equiv N_1(z) \equiv N(z); \; S_{N(z)} \equiv \sum_{i=1}^{N(z)} \eta_i \;; \; \tilde{\zeta}_1 = \lambda\zeta_1$$

dır. ζ_1 ise $(-\eta_1)$'in pozitif kısmıdır ve dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$P\{\zeta_n \leq z\} \equiv \pi(z) = \frac{F(0) - F(-z)}{F(0)}, F(z) = P\{-\eta_n \leq z\}.$$

Diğer taraftan $Y_\lambda(t)$ sürecinin dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$Q_Y(x) = \lim_{t\to\infty} P\{Y_\lambda(t) \leq x\}$$

$$= \lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{X(t)}{\lambda} \leq x\right\} = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \leq \lambda x\} = Q_X(\lambda x). \tag{88}$$

Şimdi de $Y(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu elde edilsin:

$$\varphi_Y(\alpha) \equiv \lim_{t\to\infty} E\left(\exp\left(i\alpha Y_\lambda(t)\right)\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} E\left(\exp\left(i\alpha \frac{X(t)}{\lambda}\right)\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} E\left(\exp\left(i\frac{\alpha}{\lambda} X(t)\right)\right) = \varphi_X\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right).$$

Özetle

$$\varphi_Y(\alpha) = \varphi_X\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \tag{89}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\varphi_Y(\alpha) = \frac{1}{E(N_1(\tilde{\zeta}_1)) + K}\int_0^\infty e^{i\frac{\alpha}{\lambda}z}\,\frac{\varphi_{S_{N(z)}}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right)-1}{\varphi_\eta\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right)-1}\,d_z\pi\left(\frac{z}{\lambda}\right)$$

$$+\frac{K}{E(N_1(\tilde{\zeta}_1) + K}\int_0^\infty e^{i\frac{\alpha}{\lambda}z}\,\varphi_{S_{N(z)}}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right)d_z\pi\left(\frac{z}{\lambda}\right), \qquad \alpha \in R\backslash\{0\}.$$

Bu teoremi kısalık amacıyla aşağıdaki notasyonla gösterelim:

$$\varphi_Y(\alpha) = R(\lambda)\{I_1(\lambda) + KI_2(\lambda)\}; \tag{90}$$

Burada

$$R(\lambda) = \frac{1}{E(N_1(\tilde{\zeta}_1) + K}\ ;\ I_1(\lambda) = \int_0^\infty e^{i\frac{\alpha}{\lambda}z}\,\frac{\varphi_{S_{N(z)}}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right)-1}{\varphi_\eta\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right)-1}\,d_z\pi(z/\lambda)\,;$$

$$I_2(\lambda) = \int_0^\infty \exp(i\frac{\alpha}{\lambda}z)\varphi_{S_{N(z)}}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right)d_z\pi(z/\lambda)$$

dır. Burada

$$\frac{z}{\lambda} = x \rightarrow z = \lambda x$$

dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$I_1(\lambda) = \int_0^\infty \exp(i\frac{\alpha}{\lambda}z)\frac{E(\exp(-i\frac{\alpha}{\lambda}S_{N(z)}))-1}{E(\exp(-i\frac{\alpha}{\lambda}\eta_1))-1}\,d_x\pi(x)\,,$$

$$= \int_0^\infty \exp(i\alpha x)\frac{E(\exp(-i\frac{\alpha}{\lambda}S_{N(\lambda x)}))-1}{E(\exp(-i\frac{\alpha}{\lambda}\eta_1))-1}\,d_x\pi(x).$$

Diğer taraftan $S_{N(z)}$'in asimptotik açılımının tanımına göre

$$E(S_{N(\lambda x)}) = \lambda x + \mu_{21} + o(1)$$

olduğu için,

$$I_1(\lambda) = \int_0^\infty \exp(i\alpha x)\frac{E(\exp(-i\frac{\alpha}{\lambda}S_{N(\lambda x)}))-1}{E(\exp(-i\frac{\alpha}{\lambda}\eta_1))-1}\,d_x\pi(x)$$

$$= \int_0^\infty \frac{E\left\{\exp\left(-i\frac{\alpha}{\lambda}(S_{N(\lambda x)}-\lambda x)\right)\right\}-e^{i\alpha x}}{E(\exp(-i\frac{\alpha}{\lambda}\eta_1))-1}\,d\pi(x)$$

$$= \int_0^\infty \frac{1 - i\frac{\alpha}{\lambda}\left(S_{N(\lambda x)} - \lambda x\right) + o(\frac{1}{\lambda}) - e^{i\alpha x}}{1 - i\frac{\alpha}{\lambda}m_1 - 1 + o(\frac{1}{\lambda})} d\pi(x)$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{i\alpha x} - 1 + i\frac{\alpha}{\lambda}\left(S_{N(\lambda x)} - \lambda x\right) + o(\frac{1}{\lambda})}{i\frac{\alpha}{\lambda}m_1 + o(\frac{1}{\lambda})} d\pi(x)$$

$$= \lambda \int_0^\infty \frac{e^{i\alpha x} - 1 + i\frac{\alpha}{\lambda}\left(\mu_{21} + o(1)\right) + o(\frac{1}{\lambda})}{i\alpha m_1 + o(1)} d\pi(x)$$

$$= \lambda \int_0^\infty \frac{e^{i\alpha x} - 1 + i\alpha\frac{\mu_{21}}{\lambda} + o(\frac{1}{\lambda})}{i\alpha m_1 + o(1)} d\pi(x)$$

dır. Özetle $I_1(\lambda)$ aşağıdaki şekilde yazılır:

$$I_1(\lambda) = \lambda \int_0^\infty \frac{e^{i\alpha x} - 1}{i\alpha m_1} d\pi(x) + o(1). \tag{91}$$

Ayrıca, Wald özdeşliğine göre,

$$E\left(S_{N(z)}\right) = m_1 E\left(N_1(z)\right); E\left(S_{N(\tilde{\zeta}_1)}\right) = m_1 E\left(N_1(\tilde{\zeta}_1)\right)$$

dır. Burada $\tilde{\zeta}_1 = \lambda\zeta_1$ dır. Diğer taraftan $R(\lambda)$ için aşağıdaki ifade elde edilsin:

$$R(\lambda) = \frac{1}{E(N_1(\tilde{\zeta}_1)) + K} = \frac{m_1}{m_1 E(N_1(\tilde{\zeta}_1)) + K m_1} = \frac{m_1}{E\left(S_{N(z)}\right) + K m_1} \tag{92}$$

Bizim varsayımlarımıza göre,

$$E\left(S_{N(z)}\right) = z + \mu_{21} + o(1) = \lambda x + \mu_{21} + o(1)$$

dır ve tanımına göre, $\lambda \to \infty$ iken, aşağıdaki açılım doğrudur:

$$E\left(S_{N(\lambda z)}\right) = \lambda m_1^+ + \mu_{21} + o(1). \tag{93}$$

Dolayısıyla (92) ve (93) eşitliğinden aşağıdaki ifade elde edilir:

$$R(\lambda) = \frac{m_1}{K m_1 + \lambda m_1^+ + \mu_{21} + o(1)} = \frac{m_1}{\lambda m_1^+ + (K m_1 + \mu_{21}) + o(1)} \tag{94}$$

Burada

$$E\left(\left(-\eta_1\right)^+\right) = m_1^+ \; ; \; E\left(\eta_1\right) = m_1 \; ; \; K = \frac{E(\theta_1)}{E(\xi_1)} = \frac{1}{F(0)} \; ; \; \mu_k = E\left(\chi_1^{+k}\right) ; \; \mu_k = \frac{\mu_k}{k\mu_1}$$

dır.

Diğer taraftan

$$R(\lambda) = \frac{m_1}{\lambda m_1^+}\left\{1 + \frac{K m_1 + \mu_{21}}{\lambda m_1^+} + o(\frac{1}{\lambda})\right\}^{-1}$$

olduğu için ve $\lambda \to \infty$ iken,

$$R(\lambda) = \frac{m_1}{\lambda m_1^+}\left\{1 - \frac{Km_1 + \mu_{21}}{\lambda m_1^+} + o(\frac{1}{\lambda})\right\} = \frac{m_1}{\lambda m_1^+}\{1 + o(1)\} \tag{95}$$

elde edilir.

$$R(\lambda)I_1(\lambda) = \frac{m_1}{\lambda m_1^+}\lambda\int_0^\infty \frac{e^{i\alpha x}-1}{i\alpha m_1}d\pi(x)\{1+o(1)\}$$

$$= \frac{m_1}{m_1^+}\int_0^\infty \frac{e^{i\alpha x}-1}{i\alpha m_1}d\pi(x)\{1+o(1)\}$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{i\alpha x}-1}{i\alpha m_1^+}(1+o_\lambda(1))d\pi(x)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifade $\lambda \to \infty$ iken,

$$\int_0^\infty \frac{e^{i\alpha x}-1}{i\alpha m_1^+}d\pi(x) + o(1) = \frac{E\left(e^{i\alpha\zeta_1}\right)-1}{i\alpha E(\zeta_1)} + o(1) = \frac{\varphi_\zeta(\alpha)-1}{i\alpha E(\zeta_1)} + o(1)$$

dır. Özetle

$$\lim_{\lambda\to\infty} R(\lambda)I_1(\lambda) = \frac{\varphi_\zeta(\alpha)-1}{i\alpha E(\zeta_1)} \tag{96}$$

elde edilir. Burada

$$\varphi_\zeta(\alpha) \equiv E(\exp(i\alpha\zeta_1)) \equiv \int_0^\infty \exp(i\alpha x)\, d_\zeta\pi(x)$$

dır.

Şimdi de $I_2(\lambda)$ terimi için aşağıdaki ifadeyi hesaplayalım:

$$I_2(\lambda) = \int_0^\infty \exp(i\frac{\alpha}{\lambda}z)\varphi_{S_{N(z)}}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right)d_z\pi(z/\lambda)$$

$$= \int_0^\infty \exp(i\alpha\frac{z}{\lambda})E(\exp(-\frac{\alpha}{\lambda}S_{N(z)}))d_z\pi(z/\lambda).$$

Burada

$$\frac{z}{\lambda} = x \to z = \lambda x$$

dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$I_2(\lambda) = \int_0^\infty \exp(i\alpha x)E(\exp(-i\frac{\alpha}{\lambda}S_{N(\lambda x)}))d\pi(x)$$

$$= \int_0^\infty E\left\{\exp(-i\frac{\alpha}{\lambda}(S_{N(\lambda x)} - \lambda x)\right\} d\pi(x)$$

$$= 1 - i\frac{\alpha}{\lambda}\int_0^\infty E\{S_{N(\lambda x)} - \lambda x\} d\pi(x) + o(\frac{1}{\lambda}) \tag{97}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $S_{N(z)}$'in asimptotik açılımının tanımını göz önünde bulundurarak, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$I_2(\lambda) = 1 - i\frac{\alpha}{\lambda}\Big(\mu_{21} + o(1)\Big) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - \frac{i\alpha\mu_{21}}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{98}$$

(95) ve (98) ifadelerinden, aşağıdaki terim elde edilir:

$$R(\lambda)KI_2(\lambda) = \frac{m_1}{\lambda m_1^+} K\left\{1 - \frac{i\alpha\mu_{21}}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} = \frac{Km_1}{\lambda m_1^+} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Bu takdirde $K < +\infty$; $m_1 < +\infty$; $m_1^+ > 0$; $m_1^+ < +\infty$; $\mu_{21} < +\infty$ olduğundan

$$R(\lambda)KI_2(\lambda) = \frac{c}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{99}$$

dır. Burada

$$c = \frac{Km_1}{m_1^+}\ , c \in (0, \infty)$$

dır. (99) ifadesinde limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to\infty} R(\lambda)KI_2(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{c}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = 0 \tag{100}$$

elde edilir.

$$\varphi_Y(\alpha) = R(\lambda)I_1(\lambda) + R(\lambda)KI_2(\lambda)$$

olduğuna göre, (96) ve (100) eşitliğini göz önünde bulundurarak,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \varphi_Y(\alpha) \equiv \varphi_0(\alpha) = \frac{\varphi_\zeta(\alpha) - 1}{i\alpha E(\zeta_1)} \tag{101}$$

elde edilir. (101) eşitliğinin sağ tarafındaki ifadeyi,

$$\varphi_0(\alpha) = \frac{\varphi_\zeta(\alpha) - 1}{i\alpha E(\zeta_1)} \tag{102}$$

olarak gösterelim.

Önerme 2.8.1. $\varphi_0(\alpha)$ bir karakteristik fonksiyonudur.

İspat. ζ_1'in dağılım fonksiyonun $\pi(z)$ olduğunu biliniyor. Bu dağılım fonksiyon yardımı ile yeni bir dağılım fonksiyon oluşturulsun.

$$G(x) \equiv \frac{1}{E(\zeta_1)} \int_0^x \left(1 - \pi_\zeta(z)\right) d(z)\,, x \geq 0 \tag{103}$$

ζ_1 pozitif değerli bir rasgele değişkendir.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = 0'$dır.

2) $G(x)$ monoton azalmayandır.

3) $\lim_{x \to +\infty} G(x) = \frac{E(\zeta_1)}{E(\zeta_1)} = 1$'dır, yani $G(x) \in [0,1]$'dır.

4) $G(x)$ sağdan sürekli fonksiyondur.

Ayrıca, $G(x)$ dağılımının $\{\zeta_n\}, n = 1,2,3, \ldots$ dizisinin oluşturduğu yenileme sürecinin "Kalan Ömrünün" limit dağılımı olduğu bilinmektedir (bkz. Feller (1971)). Dolayısıyla $G(x)$ bir dağılım fonksiyonudur.

Her bir dağılım fonksiyonun bir karakteristik fonksiyonu olduğunu da biliyoruz (bkz. Lukacs (1970)). Bu bilgi ışığında, $G(x)$'in karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{i\alpha x} dG(x) &= \frac{1}{E(\zeta_1)} \int_0^x e^{i\alpha x}\left(1 - \pi(x)\right) d(x) \\
&= \frac{1}{E(\zeta_1)} \int_0^x \left(1 - \pi(x)\right) d_x \left(\frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha}\right). \\
&= \frac{1}{E(\zeta_1)} \left\{ (1 - \pi(x)) \frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha} \bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha} d_x \pi(x) \right\} \\
&= \frac{1}{E(\zeta_1)} \left\{ -\frac{1}{i\alpha} + \frac{1}{i\alpha} \int_0^\infty e^{i\alpha x} d\pi(x) \right\} \\
&= \frac{1}{i\alpha E(\zeta_1)} \left\{ -1 + \varphi_\zeta(\alpha) \right\} = \frac{\varphi_\zeta(\alpha) - 1}{i\alpha E(\zeta_1)}
\end{aligned} \tag{104}$$

dır. Dolayısıyla $G(x)$ dağılımının karakteristik fonksiyonunun

$$\frac{\varphi_\zeta(\alpha) - 1}{i\alpha E(\zeta_1)}$$

ifadesine eşit olduğu görülmektedir.

Karakteristik fonksiyonlarının bire-bir özelliğine göre (bkz. Lukacs (1970))

$$\varphi_0(\alpha) = \frac{\varphi_\zeta(\alpha) - 1}{i\alpha E(\zeta_1)}$$

ifadesi $G(x)$ dağılımının karakteristik fonksiyonudur.

Böylece, $\lambda \to \infty$ iken $Y_\lambda(t)$ sürecinin karakteristik fonksiyonunun $\varphi_0(\alpha)$ limit karakteristik fonksiyonuna yakınsadığı ispat edilmiştir. ■

Not: Karakteristik fonksiyonun süreklilik özelliğine göre (bkz. Lukacs (1970)) aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.8.2. $Y_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılımı $Q_Y(x)$, $\lambda \to \infty$ iken $G(x)$ dağılımına zayıf yakınsar, yani her $x > 0$ için

$$\lim_{\lambda\to\infty} Q_Y(x) = G(x)$$

elde edilir. Burada

$$G(x) \equiv \frac{1}{E(\zeta_1)} \int_0^x \big(1 - \pi(z)\big) d(z)$$

dağılım fonksiyonu, $\{\xi_n\}$ dizisinin ürettiği yenileme süreci için "Kalan Ömrünün" limit dağılımıdır.

Sonuç 2.8.1. $\pi(z) = \frac{F(0)-F(-z)}{F(0)}$ eşitliğini (103)'de yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$G(x) = \frac{\int_0^x F_\eta(-z)dz}{\int_0^\infty F_\eta(-z)dz}, \quad x \geq 0. \tag{105}$$

2.9. Zayıf Yakınsama Teoremi ve Ergodik Dağılımın Momentlerinin Asimptotik Açılımları İçin Özel Durumlar

Bu bölümde zayıf yakınsama ve asimptotik açılımlar için örnekler verilmiştir. Bu örneklerde η_n rastgele değişkeninin dağılımı sırasıyla üstel ve düzgün dağılım olarak ele alınmıştır.

1. Özel durum: η_n rasgele değişkeni üstel kuyruklu dağılıma sahip olsun, yani η_n rastgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilsin:

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{ab}{a+b} e^{ax} & , \ x < 0 \\ \dfrac{ab}{a+b} e^{-bx} & , \ x \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad F_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{a+b} e^{ax} & , \ x < 0 \\ 1 - \dfrac{a}{a+b} e^{-bx} & , \ x \geq 0 \end{cases}. \tag{106}$$

(106) eşitliğinden, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$F_\eta(-x) = \frac{b}{a+b} e^{-ax} \quad , \ x \geq 0. \tag{107}$$

Burada her $x \geq 0$ için

$$\int_0^x F_\eta(-z)dz = \frac{b}{a(a+b)}(1-e^{-ax}) \quad \text{ve}$$

$$\int_0^\infty F_\eta(-z)dz = \frac{b}{a(a+b)}. \tag{108}$$

dir. Dolayısıyla, gerekli hesaplamalar yapılırsa, G(x) aşağıdaki gibi bulunur:

$G(x) = 1 - e^{-ax}\ , x \geq 0.$

Bu örnekte, ilk dört momentlerin asimptotik açılımının aşikar şekli aşağıdaki gibi elde edilir.

Varsayılsın ki; X_1 ve X_2 bağımsız ve sırasıyla a ve b parametreli üstel dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun, η_1 rasgele değişkenini aşağıdaki gibi tanımlansın:

$\eta_1 = X_1 - X_2.$

Bu takdirde,

$m_n \equiv E(\eta_1^n) = E((X_1 - X_2)^n)\ ;\ E(X_1^n) = \frac{n!}{a^n}\ ;\ E(X_2^n) = \frac{n!}{b^n}$

eşitlikleri elde edilir.

Diğer taraftan üstel dağılımın unutkanlık özelliğine göre, ζ_1 rasgele değişkeninin dağılımı, X_2 rasgele değişkeninin dağılımına denk olup, momentleri de aynı olacaktır; yani

$$\beta_n \equiv E(\zeta_1^n) = E(X_2^n) = \frac{n!}{b^n}$$

dır. Benzer şekilde, üstel dağılımın unutkanlık özelliğine göre, χ_1^+'nın da dağılımı, X_1'in dağılımına denktir. Dolayısıyla momentleri aynıdır, yani

$$\mu_n \equiv E((\chi_1^+)^n) = E(X_1^n) = \frac{n!}{a^n}$$

dır.

Bu takdirde $X(t)$ sürecinin ilk momentinin asimptotik açılımı, aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$E(X) = \frac{1}{b}\lambda + D + o(1),$$

burada

$$D = \frac{a^2 + ab - b^2}{a^2(b-a)}$$

dır. Benzer hesaplamalar yapılırsa, $X(t)$ sürecinin 2., 3. ve 4. momentlerinin asimptotik açılımları da aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$E(X^2) = \frac{2}{b^2}\lambda^2 + \frac{2}{b}\lambda D + o(\lambda),$$

$$E(X^3) = \frac{6}{b^3}\lambda^3 + \frac{6}{b^2}\lambda^2 D + o(\lambda^2),$$

$$E(X^4) = \frac{24}{b^4}\lambda^4 + \frac{24}{b^3}\lambda^3 D + o(\lambda^3).$$

Yukarıdaki duruma özel bir örnek olarak,

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \gg 1\,; b = 2a\,, a \in (0,1)$$

eşitsizliği göz önüne alınsın. Bu taktirde $X(t)$ sürecinin momentlerinin asimptotik açılımları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(X) = \frac{1}{2a}\lambda - \frac{1}{a} + o(1),$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2a^2}\lambda^2 - \frac{1}{a^2}\lambda + o(\lambda),$$

$$E(X^3) = \frac{3}{4a^3}\lambda^3 - \frac{3}{2a^3}\lambda^2 + o(\lambda^2),$$

$$E(X^4) = \frac{3}{2a^4}\lambda^4 - \frac{3}{a^4}\lambda^3 + o(\lambda^3).$$

2. Özel durum: η_n rasgele değişkeni $[-a, b]$, $b > a > 0$ aralığında düzgün dağılıma sahip olsun, yani, η_n rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilsin:

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a+b}, & -a \le x \le b \\ 0 \quad , & \text{d.y.} \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < -a \\ \dfrac{x+a}{a+b}, & -a \le x \le b. \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Bu takdirde her $z \ge 0$ için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\int_0^x F_\eta(-z)dz = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2(a+b)}, & 0 \le x \le a \\ \dfrac{a^2}{2(a+b)}, & x > 0 \end{cases}.$$

Dolayısıyla , $X(t)$ sürecinin limit dağılımının aşikar şekli aşağıdaki şekilde bulunur:

$$G(x) = \min(1, \ \ x^2/\,a^2\,)\,; \ x \ge 0.$$

Daha önce Teorem 2.7.1'de sürecin ilk dört momentinin asimptotik açılımının aşikar şekli aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$1) E(X) = \lambda\beta_{21} + D_1 + o(1)$,

$2) E(X^2) = \lambda^2\beta_{31} + \lambda D_2 + o(\lambda)$,

$3) E(X^3) = \lambda^3\beta_{41} + \lambda^2 D_3 + o(\lambda^2)$,

$4) E(X^4) = \lambda^4\beta_{51} + \lambda^3 D_4 + o(\lambda^3)$,

Burada

$$D_1 = [m_{21} - c_{21}B_1] \quad ; \quad D_2 = [2m_{21}\beta_{21} - c_{31}B_1] ;$$

$$D_3 = [3m_{21}\beta_{31} - c_{41}B_1]; D_4 = [4m_{21}\beta_{41} - c_{51}B_1] ;$$

$$B_1 = \mu_{21} + Km_1 ; \beta_1 \equiv \beta = E(\zeta_1) ; \beta_{n1} = \frac{\beta_n}{n\beta_1} , c_{n1} = \frac{\beta_{n1}}{\beta}$$

dır.

η_n rastgele değişkeni $[-a, b]$, $b > a > 0$ aralığında düzgün dağılıma sahip olduğunda, ζ_1 ‘nın momentleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\beta_1 \equiv \beta \equiv E(\zeta_1) = \frac{a}{2} , \beta_2 \equiv E(\zeta_1{}^2) = \frac{a^2}{3} , \beta_{21} \equiv \frac{\beta_2}{2\beta_1} = \frac{a}{3} ;$$

$$\beta_3 \equiv E(\zeta_1{}^3) = \frac{a^3}{4} , \beta_{31} \equiv \frac{\beta_3}{3\beta_1} = \frac{a^2}{6} ; \beta_4 = \frac{a^4}{5} , \beta_{41} = \frac{a^3}{10} ;$$

$$\beta_5 \equiv E(\zeta_1{}^5) = \frac{a^5}{6} , \beta_{51} \equiv \frac{\beta_5}{5\beta_1} = \frac{a^4}{15} ;$$

$$c_{21} \equiv \frac{\beta_{21}}{\beta} = \frac{2}{3} , c_{31} \equiv \frac{\beta_{31}}{\beta} = \frac{a}{3} , c_{41} \equiv \frac{\beta_{41}}{\beta} = \frac{2a^2}{5} , c_{51} \equiv \frac{\beta_{51}}{\beta} = \frac{2a^3}{15} .$$

Ama η_n rasgele değişkeni $[-a, b]$, $b > a > 0$ aralığında düzgün dağılıma sahip olduğunda, χ_1^+ rasgele değişkeninin momentleri hesaplanamaz. χ_1^+ rasgele değişkeninin momentleri ancak özel durumlarda hesaplanabilir. Örneğin; η_n rastgele değişkeni $[-4,6]$ aralığinda düzgün dağılıma sahip olsun. Bu durumda χ_1^+ rasgele değişkeninin momentleri aşağıdaki gibi Monte-Carlo simülasyon yöntemiyle hesaplanabilir:

Rastgele yürüyüş sürecinin 1. basamak yüksekliğinin (χ_1^+) ile üç momenti simulasyon yöntemi ile yaklaşık olarak aşağıdaki şekilde bulunmuştur (N=100*106 trajectory üretilmiştir):

$$\mu_1 = 2.4068 \ ; \ \mu_2 = 8.8806 \ ; \ \mu_3 = 37.9020$$

$$\mu_{21} = 1.8449 ; \ \mu_{31} = 5.2493$$

$$\beta_1 \equiv \beta \equiv E(\zeta_1) = \frac{4}{2} = 2 ; \ \beta_2 = \frac{16}{3} ; \ \beta_3 = 16 ;$$

$$\beta_4 = \frac{256}{5} \ ; \ \beta_5 = \frac{1024}{6} \ ; \ c_{21} = \frac{2}{3} , c_{31} = \frac{4}{3} , c_{41} = \frac{16}{5} , c_{51} = \frac{128}{15} .$$

Bu takdirde sürecin ilk dört momentleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$E(X) = \frac{4}{3}\lambda + 1.77 + o(1) \,,$$

$$E(X^2) = \frac{8}{3}\lambda^2 + 6.65\lambda + o(\lambda),$$

$$E(X^3) = \frac{32}{5}\lambda^3 + 23.43\lambda^2 + o(\lambda^2),$$

$$E(X^4) = \frac{256}{15}\lambda^4 + 88.39\lambda^3 + o(\lambda^3).$$

3. BULGULAR

Bu çalışmada, Yarı-Markov süreçlerinin önemli bir sınıfını oluşturan "Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli Rasgele Yürüyüş Süreci" olarak adlandırılan bir model ele alınmış ve bu modeli ifade eden stokastik süreç matematiksel olarak inşa edilmiştir. Ayrıca, süreçin ergodik dağılım fonksiyonunun kesin ifadesi bulunmuştur. Fakat bu formüllerin karmaşık yapılarından dolayı pratik problemlerin çözümlenmesinde kullanılması oldukça zor olduğundan, pratikte daha kolay uygulanabilir formüllerin elde edilmesi gereksinimi vardır. Bütün bu nedenler göz önünde bulundurularak, ele alınan sürecin gerekli olasılık karakteristikleri asimptotik yöntemlerle incelenmiştir.

Ayrıca, bu sürecin bazı zayıf şartlar altında ergodik olduğu gösterilmiş ve ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik momentleri için kesin ve asimptotik sonuçlar elde edilmiştir.

Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli Yarı – Markov Rasgele Yürüyüş Süreci' nin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyoneli yardımıyla ifade edilmiştir. İlaveten ele alınan sürecin sınır fonksiyonellerinin momentleri için üç terimli asimptotik açılımlar ortaya konulmuştur. Daha sonra Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli Yarı – Markov Rasgele Yürüyüş Süreci' nin ergodik dağılımının ilk dört momenti, için iki terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Ele alınan sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi ispatlanmıştır.

4. İRDELEME

Yarı-Markov modelleri ile ilgili literatürde birçok teorik çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmaların birçoğundaki sonuçlar teorik bakımdan önemli olsalar da, uygulamanın ihtiyacını karşılayabilecek nitelikte değildir. Buna karşın kesin ifadeleri içeren ve uygulama için yararlı olabilecek çalışmalar da vardır. Fakat bu güne kadar bu süreçler her yönüyle araştırılmış değiller. Bunun temel nedeni, bu süreçlerin olasılık ve sayısal karakteristiklerinin çok karmaşık bir matematiksel yapıya sahip olmasıdır. Özellikle, müdahaleyi ifade eden rasgele değişkenler yeterince geniş bir sınıfa ait olduklarında sürecin temel karakteristikleri için kullanılabilir formüllerin elde edilmesi çok zordur. Rasgele faktörlerin etkisi altında değişen ve değişimi stokastik süreçlerle ifade edilebilen birçok dinamik sisteme, gerektiğinde “dışarıdan müdahale edilmesi” eylemi, çoğu zaman, birçok faktörün toplam etkisi altında oluşmaktadır. Dolayısıyla “müdahale” kararları verilirken birçok faktörün toplam etkisi göz önünde bulundurularak verilmektedir.

Literatürde, son yıllarda asimptotik yöntemler uygulanarak yaklaşık, fakat pratik öneme sahip olan asimptotik sonuçlar elde etmeğe yönelik birçok değerli çalışmalar ortaya konulmuştur. Bu sonuçlar genellikle rasgele yürüyüş sürecinin sınır fonksiyonelleri ile ilgilidirler. Fakat birçok pratik problemlerin çözümünde sınır fonksiyonellerinin yanı sıra sürecin ergodik dağılımının bilinmesi de büyük önem taşımaktadır. Bu konuda son yıllarda bazı önemli çalışmalar yapılmıştır. Bu durumda farklı yöntemler uygulayarak asimptotik sonuçlara ulaşmak mümkündür. Bu nedenle bu tezde, bir Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli rasgele yürüyüş süreci ele alınmış ve bu sürecin asimptotik yöntemlerle incelenmesinde gerekli bazı önemli yardımcı teoremler kullanılmıştır.

Bu çalışmada asimptotik yöntemler kullanarak, Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli Rasgele Yürüyüş Süreci’ nin karakteristikleri için pratik öneme sahip asimptotik ifadeler elde edilmiştir.

Bu çalışma kapsamında incelenen modelde bazı değişikliklerin yapılabilmesi mümkündür. Örneğin, bu çalışmada kullanılan analitik ve asimptotik yöntemler iki bariyerli yarı - Markov süreçlerine de uygulanarak önemli asimptotik sonuçlar elde edilebilir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, “Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli Yarı – Markov Rasgele Yürüyüş Süreci” ele alınmış ve bu sürec için aşağıdaki teorik sonuçlar elde edilmiştir.

1) Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli Rasgele Yürüyüş Süreci’ nin ergodik dağılımı ve karakteristik fonksiyonu için kesin ifadeler bulunmuştur.
2) Ergodik dağılımın karakteristik fonksiyonu, $S_{N(z)}$sınır fonksiyoneli yardımıyla ifade edilmiştir.
3) $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir.
4) Sürecin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için kesin ifadeler bulunmuştur.
5) Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli Yarı – Markov Rasgele Yürüyüş Süreci’ nin ergodik dağılımının ilk dört momenti için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir.
6) Genelleştirilmiş Tutan Bariyerli Yarı – Markov Rasgele Yürüyüş Süreci’ nin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiş ve limit dağılımın aşikar şekli bulunmuştur.

6. ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmanın, Yarı - Markov Süreçleri teorisindeki bir eksikliyi giderebileceği umulmaktadır. Bununla beraber bu çalışmanın aşağıdaki yönlerde de geliştirilebilmesi mümkündür:

1) Başlangıç rasgele değişkenlerinin birbirine bağımlı olması durumunda, benzer problemin martingaller yöntemi ile incelenmesi.
2) Kesikli müdahaleyi ifade eden rasgele değişkenin dağılımını, daha geniş bir sınıftan seçerek benzer süreçlerin analitik ve asimptotik özelliklerinin incelenmesi.
3) Sıçrama miktarlarını ifade eden (η_i) rasgele değişkenlerin, sıçramalar arasında keçen sürelere (ξ_i) bağımlı olduğu durumda benzer problemin martingallar yöntemi ile incelenmesi.
4) Yakınsama teoremlerinde yakınsama hızının bulunması üzerine çalışmaların yapılması.
5) Ele alınan süreçler için toplamsal fonksiyonellerin olasılık karakteristiklerinin bulunması.
6) Sonsuz varyanslı rasgele değişkenler için benzer problemlerin incelenmesi.
7) Bu çalışmadaki analitik ve asimptotik yöntemleri kullanarak benzer problemlerin iki bariyerli yarı-Markov süreçleri için çözülmesi.
8) Bu çalışmadaki analitik ve asimptotik yöntemler kullanılarak, genelleştirilmiş ve genişletilmiş yenileme süreçlerinin incelenmesi.
9) Elde edilen sonuçların pratik alanlara uygulanması.

7. KAYNAKLAR

Abramowitz, M. ve Stegun, I.A., 1964. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Wiley, New York.

Afanaseva, L.G. ve Bulinskaya, E.V., 1980. Stochastic Processes in the Theory of Queues and Inventory Control, Moskow.

Afanasyeva, L.G. ve Bulinskaya, E. V., 1984. Some asymptotic results for random walks in a strip, Theory of Probability and Its Applications, 29, 4, 654-668.

Afanaseva, L.G. ve Bulinskaya, E.V., 1981. Storage capacity optimization, Engineering Cybernetics, 19, 5, 49-57.

Aliyev, R.T., 2010. Stokastik süreçler teorisine giriş, KTÜ Matbaası, Trabzon.

Aliyev, R.T., Khaniyev T. ve O. Bekar, N., 2009. Weak convergence theorem for the ergodic distribution of the renewal-reward process with a gamma distributed interference of chance, Theory of Stochastic Processes, 15, 31, 2, 42-53.

Aliyev, R.T., O. Bekar, N., Khaniyev T. ve Unver, I., 2010. Asymptotic expansions for the moments of the boundary functionals of the renewal reward process with a discrete interference of chance, Mathematical and Computational Applications, 15, 1,117-126.

Aliyev, R.T., Khaniyev, T.A. ve Kesemen, T., 2010. Asymptotic expansions for the moments of a semi-Markovian random walk with Gamma distributed interference of chance, Communications in Statistics - Theory and Methods, 39, 1, 130–143.

Alsmeyer, G., 1988. Second-order approximations for certain stopped sums in extended renewal theory, Advances in Applied Probability 20, 391–410.

Alsmeyer, G., 1991. Some relations between harmonic renewal measures and certain first passage times, Statistics and Probability Letters, 12, 1, 19-27.

Alsmeyer, G., 1994. On the Markov renewal theorem, Stochastic Processes and Their Application, 50, 37–56.

Alsmeyer, G., 1996. Superposed continuous renewal processes: a Markov renewal approach, Stochastic Processes and Their Application, 61, 311–322.

Alsmeyer, G. ve Hoefs, V., 2001. Markov renewal theory for stationary (m+1)-blockfactors, Markov Process, Rel. Fields 7, 325–348.

Anisimov, V.V., 1994. Limit theorems for processes with semi-Markov switching's and their applications, Random Operators and Stochastic Equations, 12, 4, 333-352.

Anisimov, V.V., 1973. The limiting behavior of a semi-Markov process with a decomposable state space, Soviet Math., 13, 1276-1279.

Anisimov, V.V., 1999. Averaging methods for transient regimes in overloading retrial queuing systems, Mathematical and Computational Modelling, 30, 3-4 65-78.

Anisimov, V.V. and Artalejo, J.R., 2001. Analysis of Markov multi-server retrial queues with negative arrivals, Queuing Systems: Theory and Applications, 39, 2-3 157-182.

Athreya, K.B., McDonald, D. ve Ney, P., 1978. Limit theorems for semi-Markov processes and renewal theory for Markov chains, Annals of Probability, 6, 788-797.

Anisimov, V.V., 1995. Diffusion approximation in switching stochastic models and its applications, In: Exploring Stochastic Laws, eds., A. V. Skorohod and Yu. V. Borovskikh, VSO, Zeist, The Netherlands, 13-40.

Aras, G. ve Woodroofe, M., 1993. Asymptotic expansions for the moments of a randomly stopped average, Annals of Statistics, 21, 503-519.

Asmussen, S., 1987. Applied Probability and Queues, Wiley, New York.

Borovkov, A.A., 1965. On the first passage time for one class of processes with independent increments, Theory of Probability and Its Applications, 10, 331-334.

Borovkov, A.A., 1975. On a walk in a strip with inhibitory boundaries, Mathematical Notes, 17, 385-389.

Borovkov, A.A., 1976. Stochastic Processes in Queuing Theory, Springer, New York.

Borovkov, A.A., 1986. Theory of Probability, Nauka, Moskov.

Borovkov, A.A., 1984. Asymptotic Methods in Queuing Theory. J. Willey, New York.

Brown, M. ve Ross, S.M., 1972. Asymptotic properties of processes, SIAM Journal of AppliedMathematics, 22, 1, 93-105.

Brown, M. ve Solomon, H., 1975. A second-order approximation for variance of a renewal reward process, Stochastic Processes and Their Application, 3, 301-314.

Chang, J.T., 1992. On moments of the first ladder height of random walks with small drift, Annals of Applied Probability, 2 , 714-738.

Chang, J.T. and Peres, Y., 1997. Ladder heights, Gaussian random walks and the Riemann zeta function, Annals of Probability, 25 , 787-802.

Csenki, A., 2000. Asymptotic for renewal-reward processes with retrospective reward structure, Oper. Res. Lett. 26, 201–209.

Cox, D.R., 1962. Renewal Theory, London: Methun & Co. Ltd.

Çınlar, E., 1968. Some joint distribution for Markov renewal processes, Australian Journal of Statistics, 10, 1.

Çınlar, E., 1975. Markov renewal theory, Advances in Applied Probability, 1, 123-187.

Çınlar, E., 1975. Introduction to stochastic processes, Englewood Cliffs, New Jersey.

Dickson, D., 1998. On a class of renewal risk processes, North American Actuarial Journal, 1, 2, 60–73.

Denuit, M., Lefevre, Cl. and Picard, Ph., 2003. Polynomial structures in order statistics distributions, Journal of Statistical Planning and Inference, 113, 151-178.

El-Shehawey, M. A., 1992. Limit distribution of first hitting time of delayed random walk, J. Ind. Soc. Oper.Res., 13, 1-4 , 63-72.

Ezhov, I.I. ve Korolyuk, V.S., 1967. Semi-Markovian processes and their applications, Cybernetica, Kiev, 5, 58-65.

Ezhov, I.I. ve Shrenkov V.S., 1977. Ergodic theorems connected with the Markov property of random processes, Theory of Probability and Its Applications, 21, 620-624.

Federyuk, M.V., 1984. Asymptotics for integrals and series, Nauka, Moscow.

Feller, W., 1964. On semi-Markov processes, Proceeding of National Academy of Sciences, USA, 51, 4, 130-145.

Feller, W., 1971. An Introduction to Probability and Its Applications II, J. Willey, New York.

Gihman, I.I. ve Skorohod, AV., 1975. Theory of Stochastic Processes II, Springer-Verlag, New York.

Gnedenke, I.I. ve Kovalenko, I.N., 1968. Introduction to Queuing Theory, IX, Translation Edited by D. Louvish, Jerusalem, Israel Program for Scientific Translation.

Grubel, R., 1986. On harmonic renewal measures, Probability Theory and Related Fields, 71, 393-403.

Gusak, D.V. ve Korolyuk, V.S., 1968. On the first passage time across a given level for processes with independent increments, Theory of Probability and Its Applications, 13, 448-456.

Gusak, D.V., 1969. On the joint distribution the first exit time and exit value for homogeneous processes with independent increments, Theory Probability Applications, 14, 14-23.

Gusak, D.V. ve Korolyuk, V.S., 1969. On the joint distribution process with stationary movements and its maximum, Theory of Probability and Its Applications, 14, 400-469.

Janssen, A.J.E.M. and van Leeuwarden, J.S.H., 2007. Cumulants of the maximum of the Gaussian random walk, Stochastic Processes and Their Applications, 117, 1928–1959.

Janssen, A.J.E.M. and van Leeuwarden, J.S.H., 2007. On Lerch's transcendent and the Gaussian random walk, Annals of Applied Probability, 17 , 421-439.

Kesemen, T., 2001. Genişletilmiş (s,S) Tipli Modellerin Analitik ve Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Kesemen, T., 2006. Rasgele hacimli genişletilmiş (s,S) tipli modellerin analitik ve asimptotik yöntemlerle incelenmesi, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Khaniyev, T. A., 1984. Distribution of a semi-Markov walk with two delayed screens, Some questions of the theory of stoch. Proc., Collect Sci. Works, Kiev, 106-113.

Khaniyev, T.A., 1986. An Ergodic Theo. for a semi-Markov walk with two delayed screens, İzc. Acad. Nauk. Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Math. Nauk, 4, 37-42.

Khaniyev, T.A., 1986. The explicit form of the ergodic distribution of the process of a semi-Markov walk dependent components (Russian), Prob. method the investigation of systems with an infinite number of degrees of freedom, Collect, Sci., Works, Kiev, 119-125.

Khaniyev, T.A., 1988. Distribution of the process of a semi-Markov walk on a closed interval with exponentally distributed components, İzc. Acad. Nauk. Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Math. Nauk, 1, 45-50.

Khaniyev, T.A. ve Özdemir, H., 1995. On the Laplace transform of finite dimensional distribution functions of semi-continuous random processes with reflecting and delaying screens, In, Exploring Stochastic Laws, eds., A. V. Skohorod and Yu. V. Borovkikh, VSP, Zeitst, The Netherlands, 167-174.

Khaniyev, T.A., 1997. On the probability characteristics of a semi-Markov random walks with two barriers, Buletin of the International Statis. Institu, 57, 2, 568-570.

Khaniyev, T.A. ve Ünver, İ., 1997. The study of the level zero crossing time of a semi-Markovian random walk with delaying screen, Turkish Journal of Mathematics, 21, 3, 257-268.

Khaniyev, T.A., Özdemir, H. ve Maden, S., 1998. Calculating the probability characteristics of a baundary functional of a semi-continous randaom process with reflecting and delaying screens, Applied Stochastic Models and Data Analysis, 14, 117-123.

Khaniyev, T.A., 1999. Some results on a stochastic process with a discrete chance interference, Matematical and Computational Applications, 4, 2, 145-152.

Khaniyev, T.A., Ünver, İ. ve Maden, S., 2001. On the semi-Markovian random walk with two reflecting barriers, Stochastic Analysis and Applications, 19, 5, 16.

Khaniyev, T.A., 2003. Markov Zincirleri, KTÜ Matbaası, Trabzon.

Khaniev, T. A., 2003. Some asymptotic results for the semi-Markov random walk with a special barrier, Turkish Journal of Mathematics, 27, 2 , 251-272.

Khaniyev, T.A. ve Kucuk, Z., 2004. Asymptotic expansions for the moments of the Gaussian random walk with two barriers, Statistics and Probability Letters, 69, 191-103.

Khaniyev, T.A., 2005. On the stationary characteristics of the extended model of type (s, S) with Gaussian distribution of summands, Journal of Statistical Computation and Simulation, 75, 81-14.

Khaniyev, T.A., 2005. About moments of generalized renewal process, Transactions of NAS of Azerbaijan, Series of Phy. Tech. And Mth. Sciences, 25, 1, 95-100.

Khaniyev, T.A. ve Mammadova, Z., 2006. On the stationary characteristics of the extended model of type (s,S) with Gaussian distribution of summands. Journal of Statistical Computation and Simulation, 76, 10, 861–874.

Khaniyev, T. A., Kesemen T., Kesemen O. and Aliyev R., 2006. Some asymptotic results for the stationary characteristics of the semi-Markov random walk with a barrier, Automatic Control and Computer Sciences, 1, 31-43.

Khaniyev, T.A., Aliyev, R.T., Kucuk, Z. ve Okur Bekar, N., 2008. On the distributions of a renewal reward process and it's additive functional, Mathematical and Computational Applications, 13, 1, 41-50.

Khaniyev, T.A., Kesemen, T., Aliyev, R.T. ve Kokangul, A., 2008. Asymptotic expansions for the moments of a semi-Markovian random walk with an exponential distributed interference of chance. Statistics and Probability Letters, 78, 6, 785–79.

Khaniyev T.A., Kokangul A. ve Aliyev R.T., 2011. An asymptotic approach for a semi-Markovian inventory model of type (s, S), Applied Stochastic Models in Business and Industry, Manuscript ASMB-07-151 (is accepted).

Korolyuk, V.S. ve Borovskikh, Y.V., 1981. Analytical Problems for Asymptotics of Probability Distributions, Naukova Dumka, Kiev.

Kovalenko, I.N., Kuznetchov, N. ve Shrenkov V.M., 1983. Stochastic Processes, Naukova Dumka, Kiev.

Kucuk, Z., 2003. İki Bariyerli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreçlerinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi Üzerine, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Lam, C.Y.T. ve Lehoczky, J.P., 1991. Superposition of renewal processes, Adv. Appl. Probab. 23, 64–85.

Levy, J.B. ve Taqqu, M.S, 1987. On renewal processes having stable inter-renewal intervals and stable rewards. Ann. Sci. Math. Que., 11, 95-110.

Levy, J.B. ve Taqqu, M.S, 2001. Renewal reward processes with heavy-tailed inter-renewal times and heavy-tailed rewards, Bernoulli 6,1, 23–44.

Lotov, V. I., 1991. On random walks within a stripe, Theory Probability and Its Applications, 36, 1, 160-165.

Lotov, V. I., 1996. On some boundary crossing problems for Gaussian random walks. Annals of Probability, 24, 4, 2154-2171.

Lukac, E., 1970. Characteristics Function, Griffin, London.

Mammadova, Z., 2011. Normal Müdahaleli Yarı-Markov Süreçlerinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Nasirova, T. I., 1984. Processes of Semi- Markovian Random Walk, Elm, Baku.

Nasirova, T.I., 1979. Distribution of a Semi-Markov walk process with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist, 20, 90-97.

Nasirova, T.I., Yapar C. ve Khaniyev, T.A., 1998. On the probability characteristics of the stock level in the model of type (s, S), Cybernetics and Systems Analysis, 5, 69-76.

Nasirova, T.I. and Skorohod, A.V., 1978. On a class of jump processes with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 16, 81-94.

Niemi, S., 1985. On non-singular Markov renewal processes with an application to a growth-catastrophe model, Journal of Applied Probability, 22, 253–266.

Niemi, S. ve Nummelin, E., 1986. On non-singular renewal kernels with an application to a semi-group of transition kernels, Stochastic Processes and Their Application, 22,177–202.

Pipiras, V., Taqqu, M.S. and Levy, J.B. 2002. Slow, fast and arbitrary growth conditions for renewal reward processes when the renewals and the rewards are heavy-tailed, Boston University, Preprint, to appear in Probab. Theory Relat. Fields.

Prabhu, N.U., 1980. Stochastic Storage Processes: Queues, Insurance Risk, and Dams, Springer, New York.

Resnick, S.I., 1992. Adventures in Stochastic Processes, Birkhauser Boston, Cambridge.

Rogozin, B.A., 1964. On the distribution of the first jump, Theory Probability Applications, 9, 450-464.

Ross, S.M., 1996. Stochastic Processes, New York, John Wiley & Sons.

Ross, S.M., 1993. Introduction to Probability Models, Academic Press, New York.

Sentura, L. ve Puri Prem, S.A., 1973. A semi- Markov storage model, Advances in Applied Probability, 1, 2, 362-378.

Serfoza, R.F., 1971. Functions of semi- Markov processes, SIAM J. Appl. Math., 20.

Shiryayev, A.N., 1973-1974. Probability, Statistics, Random Processes I-II, Moscow State University Press.

Shrenkov V.M., 1984. On the Markov renewal processes, Theory of Probability and Its Application, 29, 2, 248-263.

Shrenkov V.M., 1989. The Ergodic Markov Processes, Nauka, Moskow.

Silvestrov, D.S., 1994. Coupling for Markov renewal processes and the rate of conver. in ergodic theorems for proc. with semi-Markov switchings, Acta Appl. Math. 34, 109-124.

Skohorod, A.V., 1967. Random processes with independent increments, Nauka, Moskow.

Skorohod, A. V. and Slobodenyuk, N. P, 1970. Limit Theorems for Random Walks, Naukova Dumka, Kiev.

Smith, W. L., 1958. Renewal theorem and its ramifications, Journal Roy. Statist. Soc., 20, 243-302.

Smith, W. L., 1959. On the cumulants of renewal processes, Biometrika, 46, 1, 1-29.

Smith, W. L., 1965-1966. Some peculiar semi- Markov processes, Proc. 5-Th. Berkelly Symp. Mathematical Statististic and Probability, 2, 2, 255-263.

Spitzer, F., 1956. A combinatorial Yardımcı Teorem and its applications to probability theory, Trans. Amer.Math. Soc., 82, 323-339.

Spitzer, F., 1964. Principles of Random Walk, Princeton, N. J., D. Van Nostrand.

Takacs, L., 1997. Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes, second edition, Robert E. Krieger Publishing, New York.

Takacs, L., 1977. Combinatorial methods in the theory of stochastic processes, 2nd ed, Huntington, New York, Robert E. Krieger Publishing Co. XI.

Ünver, İ., 1997. On distributions of the semi- Markovian random walk with reflecting and delaying barriers, Bulletin of Calcutta Math. Society, 89, 231-242.

8. EKLER

EK – 1: Wald Özdeşliği

ν tam değerli rasgele değişkeni ve $\{\xi_n\}$ dizisi $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış olsunlar. Ayrıca $\nu \geq 0$ ve ξ_n rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız olsunlar. $\Im_{k,n}$ ile $\xi_k,..,\xi_n$ rasgele değişkenlerinin ürettiği sigma cebir, yani $\Im_{k,n} = \sigma(\xi_k,...,\xi_n)$ gösterilsin.

Tanım 1: Her $n = 1, 2, ...$ için $\{\nu \leq n\}$ olayı, $\Im_{n+1,\infty}$, sigma cebrinden bağımsız olduğunda ν rasgele değişkenine "gelecekten bağımsız" rasgele değişken denir.

Tanım 2: Her $n = 1, 2, ...$ için $\{\nu \leq n\} \in \Im_{1,n}$ olduğunda ν rasgele değişkenine Markov rasgele değişkeni veya durdurma anı denir.

Başka bir deyişle, bu durumda $\xi_1,...,\xi_n$ rasgele değişkenlerinin değerleri bilindiğinde $\{\nu \leq n\}$ olayının gerçekleşip gerçekleşmediğini kesin olarak söylemek mümkündür. Markov rasgele değişkeni ν, ξ_k rasgele değişkenler dizisi için "gelecekten bağımsız" rasgele değişkendir (Borovkov, 1984, s. 86).

$S_\nu = \xi_1 + ... + \xi_\nu$ olsun. S_ν rasgele sayıda rasgele değişkenin toplamıdır.

Teorem 1 (Kolmogorov – Prokhorov Teoremi) (Borovkov, 1984, s. 88): Negatif olmayan tam değerli rasgele değişkeni ν, "gelecekten bağımsız " bir rasgele değişken olsun. Eğer

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\nu \geq k)E(|\,\xi_k\,|) < \infty \tag{1}$$

koşulu sağlanıyorsa, bu takdirde

$$E(S_\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu \geq k)E(\xi_k) \tag{2}$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca $\xi_k \geq 0$ olduğunda (1) koşuluna gerek kalmıyor.

Bu teoremin önemli bir sonucu olan aşağıdaki teorem, literatürde Wald Özdeşliği olarak bilinmektedir.

Teorem 2 (Wald Özdeşliği) (Borovkov, 1984, s. 88): $\xi_1, \xi_2, ...$ rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız ve aynı dağılıma sahip, ν rasgele değişkeni ise "gelecekten bağımsız" bir rasgele değişken olsun. Ayrıca $E(\xi_k) < \infty$ ve $E(\nu)<\infty$ olsun. Bu takdirde

$$E(S_\nu) = E(\sum_{k=1}^{\nu} \xi_k) = E(\xi_1)E(\nu) \tag{3}$$

elde edilir. (3) eşitliğine Wald Özdeşliği denir.

EK – 2: Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi

$\{\eta_n\}$, n=1,2,...'ler bir $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız, aynı dağılıma sahip ve pozitif değerli rasgele değişkenler dizisi olsun. Bu dizinin yardımı ile aşağıdaki stokastik süreç inşa edilsin:

$$N(t) \equiv \min\{n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} \eta_i > t\}, \quad t>0 . \tag{4}$$

$N(t)$ sürecine literatürde "Yenileme Süreci" denir. $N(t)$ yenileme sürecinin beklenen değerine "Yenileme Fonksiyonu" denir ve genellikle $U(t)$ sembolü ile, yani

$$U(t) \equiv E(N(t)) \tag{5}$$

şeklinde gösterilir. η_n, n=1,2,... rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu $F(t)$, yani $F(t) \equiv P\{\eta_1 \leq t\}$ şeklinde olsun. Bu takdirde $U(t)$ yenileme fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) , \tag{6}$$

burada $F^{*n}(t)$ ile F(t) dağılım fonksiyonunun n. konvolüsyon çarpımı gösterilmiş olup aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$F^{*0}(t) = \varepsilon(t) \equiv \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases} ; F^{*1}(t) \equiv F(t) ; F^{*n}(t) = F^{*(n-1)}(t) * F(t) = \int_0^t F^{*(n-1)}(t-s)dF(s), \ n=2,3,...$$

$U(t)$ fonksiyonu, monoton azalmayan, pozitif değerli bir fonksiyondur ve $U(0) = 1$' dir. Ayrıca, her sonlu t için $U(t) < \infty$' dur (Feller, 1971,s.185). $U(t)$ fonksiyonu aşağıdaki integral denklemini sağlanmaktadır (Feller, 1971, s.186):

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t-s)dF(s), \ t \geq 0 . \tag{7}$$

$U(t)$ fonksiyonunun asimptotik davranışını incelemek, olasılık teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu nedenle, $U(t)$' nin $t \to \infty$ iken asimptotik davranışı ile ilgili literatürde birçok önemli sonuçlar mevcuttur. Bu sonuçların en önemlilerinden birisi "Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi" adı ile bilinmekte olup, Feller W. tarafından ispatlanmıştır. Burada bu teorem ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 1 (Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi): F(.) dağılımı aritmetik olmayan bir dağılım olsun. Ayrıca, bu dağılımın beklenen değeri (μ) ve varyansı (σ^2) sonlu olsun. Bu takdirde $t \to \infty$ iken

$$0 \leq U(t) - (t/\mu) \to (\mu^2 + \sigma^2)/2\mu^2 \tag{8}$$

elde edilir (Feller, 1971,s.366).

Not: "Birinci Yenileme Teoremi" olarak bilinen, aşağıdaki Teorem 2'den sadece $U(t) \sim t/\mu$ sonucuna ulaşılır. (8) sonucu bu sonuçtan çok daha güçlü bir sonuçtur. Tezin daha rahat anlaşılabilmesi için birinci yenileme teoremi aşağıdaki Teorem 2 şeklinde verilebilir (Feller, 1971, s.360).

Teorem 2 (Birinci Yenileme Teoremi): F(.) dağılımı aritmetik olmayan bir dağılım olsun. Ayrıca, F(.) dağılımının beklenen değeri (μ) sonlu olsun. Bu takdirdeher $h > 0$ sabiti için, $t \to \infty$ iken,

$$U(t) - U(t-h) \to h / \mu \tag{9}$$

elde edilir (Feller, 1971, s. 360).

EK-3: Basamak Değişkenleri

$\{\eta_n\},\ n \geq 1$ dizisi $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış, bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Ayrıca η_n, n=1,2,... rasgele değişkenleri hem pozitif, hem de negatif değerler alabilsin. Bu rasgele değişkenlerin yardımı ile aşağıdaki rasgele yürüyüş süreci tanımlansın:

$$S_0 = 0;\ S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i,\ n \geq 1. \qquad (10)$$

Şimdi de, 1. basamak anı ve 1. basamak yüksekliği aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\nu_1^+ = \min\{n \geq 1 : S_n > 0\};\ \chi_1^+ = S_{\nu_1^+} \equiv \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i\ . \qquad (11)$$

ν_1^+ rasgele değişkenine 1. basamak anı, χ_1^+ rasgele değişkenine ise 1. basamak yüksekliği denir (Feller, 1971, s.191-193).

$0 < E(\eta_n) < \infty$ koşulu sağlandığında, $E(\nu_1^+) < \infty;\ E(\chi_1^+) < \infty$ elde edilir (Feller, 1971, s.396-397).

EK-4: Dynkin Prensibi

$\{S_n\}$ rasgele yürüyüş süreci EK – 3'deki gibi tanımlanmış olsun. Bu takdirde $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin sınır fonksiyonelleri olarak bilinen $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ rasgele değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N(z) = \min\{n \geq 1 : S_n > z\},\ z > 0 \ \text{ve}\ S_{N(z)} = \sum_{i=1}^{N(z)} \eta_i\ . \qquad (12)$$

$N(z)$ sınır fonksiyoneli, $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş süreçlerinin $z > 0$ seviyesini ilk kez aşma anı olarak yorumlanır. $S_{N(z)} - z$ ise, $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin $z > 0$ seviyesini ilk kez aştığında z seviyesinin üzerinde kalan "artık" kısım olarak yorumlanır. Ayrıca, $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ rasgele değişkenlerine, $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin belli bir sınırı aşması ile ilgili oldukları için, sınır fonksiyonelleri denir.

$\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin incelenmesinde $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonellerinin çok büyük önemi vardır. Fakat η_1 hem negatif hem de pozitif değerler alabildiğine göre $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonellerini sadece yukarıdaki tanımlarından yararlanılarak incelemek oldukça zordur. Bu nedenle, bu fonksiyonellerin incelenmesi için literatürde "Dynkin prensibi" olarak bilinen bir matematiksel düşünceden yararlanılmaktadır. Bu düşünceyi ortaya koymak için $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin 1. basamak anı (ν_1^+) ve 1. basamak yüksekliği (χ_1^+) EK – 3' te olduğu gibi tanımlansın:

$$\nu_1^+ = \min\{n \geq 1 : S_n > 0\};\ \chi_1^+ = \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i = S_{\nu_1^+}\ . \qquad (13)$$

Ayrıca $(\nu_n^+; \chi_n^+)$, n=1,2,3,... rasgele değişken ikilileri $(\nu_1^+; \chi_1^+)$ ile aynı dağılıma sahip bağımsız rasgele çiftler dizisi olsun. Bu rasgele değişkenler yardımı ile aşağıdaki yenileme süreci inşa edilsin:

$$H(z) = \min\{n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ > z\}. \qquad (14)$$

Bu takdirde Dynkin prensibi matematiksel olarak, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$N(z) = \sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+ ; \quad S_{N(z)} = \sum_{i=1}^{H(z)} \chi_i^+ \qquad (15)$$

Dolayısıyla Dynkin prensibine göre, rasgele yürüyüş sürecinin içinde öyle iki ödüllü yenileme süreci inşa etmek mümkündür ki, $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelleri bu ödüllü yenileme süreçleri yardımı ile ifade edilebilsin (Rogozin, 1964, s.453). Hatırlatalım ki, yenileme ve ödüllü yenileme süreçleri hakkında literatürde oldukça zengin bilgiler vardır ve bu bilgiler kolaylıkla $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin incelenmesi için kullanılabilir.

EK - 5: E(N(z)) ve E(N(ζ₁))' in Sonlu Olması Üzerine

$N(z)$ sınır fonksiyoneli EK – 4' te olduğu şekilde tanımlanmış olsun. Bu durumda, Dynkin prensibine göre, $N(z) = \sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+$ şekilde gösterilebilir. Burada $H(z)$ ile $\{\chi_n^+, n = 1, 2, ...\}$ basamak yüksekliklerinin oluşturduğu yenileme süreci gösterilmiştir. EK – 1' deki Wald Özdeşliğine göre,

$$E(N(z)) = E(\sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+) = E(\nu_1^+) E(H(z)) \qquad (16)$$

elde edilir.

$H(z)$ bir yenileme süreci olduğundan her $z < \infty$ için $E(H(z)) < \infty$' dır (Feller, 1971,s.185). Diğer taraftan $0 < E(\eta_1) < \infty$ olduğu takdirde, $E(\nu_1^+) < \infty$' dur (Feller, 1971,s.396-397). Özetle her $0 < z < \infty$ için $0 < E(\eta_1) < \infty$ olduğunda, hem $E(\nu_1^+)$ hem de $E(H(z))$ sonlu elde edilir. Bunlar (16) eşitliğinde göz önüne alınırsa $E(N(z))$' de sonlu olduğu sonucu elde edilir. Yani, $E(N(z)) < \infty$ elde edilir.

Şimdi de $E(N(\zeta_1))$ ' in sonlu olduğunu gösterelim.

Wald özdeşliği (EK – 2) ve $E(N(\zeta_1))$ ' in tanımı gereği,

$$E(N(\zeta_1)) = E(\sum_{i=1}^{H(\zeta_1)} \nu_i^+) = E(\nu_1^+) E(H(\zeta_1)) \qquad (17)$$

elde edilir. Burada

$$E(H(\zeta_1)) = \int_0^{\infty} E(H(z)) d\pi(z) \qquad (18)$$

dır. $0 < E(\eta_1) < \infty$ olduğu için $E(\nu_1^+) < +\infty$' dır (Feller, 1971,s.396-397). Dolayısıyla $E(N(\zeta_1))$' in sonlu olması için $E(H(\zeta_1))$'in sonlu olmasını göstermek yeterlidir.

Kesinleştirilmiş yenileme teoremine göre (EK – 2), $z \to \infty$ iken

$$E(H(z)) \equiv U_+(z) = \frac{z}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + g(z) \qquad (19)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mu_k = E(\chi_1^{+k})$'dır. $g(z)$ ise sınırlı bir fonksiyon olup, $z \to \infty$ iken sıfıra yakınsamaktadır. Bu takdirdeöyle bir $b > 0$ sayısı bulmak mümkündür ki, her

$\varepsilon > 0$ için $z \ge b$ olduğunda $|g(z)| < \varepsilon / 2$ olsun. Bunu göz önünde bulundurarak, $\int_0^\infty E(H(z))d\pi(z)$ integrali aşağıdaki şekilde değerlendirilebilir:

$$\int_0^\infty E(H(z))d\pi(z) = \int_0^b E(H(z))d\pi(z) + \int_b^\infty E(H(z))d\pi(z) \le U_+(b)\int_0^b d\pi(z) + \int_b^\infty U_+(z)d\pi(z)$$
$$\le U_+(b) + \int_b^\infty \{\frac{z}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}\}d\pi(z) = U_+(b) + \frac{1}{\mu_1}\int_b^\infty z d\pi(z) + (\frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2})\int_b^\infty d\pi(z)$$
$$\le U_+(b) + \frac{E(\zeta_1)}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{20}$$

Burada

$$\int_0^b d\pi(z) \le \int_0^\infty d\pi(z) \equiv 1, \quad \int_b^\infty d\pi(z) \le \int_0^\infty d\pi(z) \equiv 1, \quad \int_b^\infty z d\pi(z) \le \int_0^\infty z d\pi(z) \equiv E(\zeta_1)$$

eşitsizlikleri kullanılmıştır. Böylece $0 < E(\eta_1) < \infty$ ve $E(\eta_1^2) < \infty$ koşulları sağlandığında $E(N(z))$ ve $E(N(\zeta_1))$ ‘ in sonlu oldukları ispatlanmış elde edilir.

EK-6: A(x,z) Serisinin Sonlu Olması Üzerine

Teorem 2.1.3.2’ nin ifadesinde aşağıdaki seri kullanılmıştır:

$$A(x,z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x,z)\,; \quad a_n(x,z) = P\{z - S_k > 0,\ k = 1,2,...,n;\ z - S_n \le x\}, \quad x,z>0\,. \tag{21}$$

Burada $S_n = \sum_{i=1}^n \eta_i,\ n \ge 1;\ S_0 = 0$ ile $\{\eta_n\}$ dizisinin oluşturduğu rasgele yürüyüş süreci gösterilmiştir. Hatırlanacak elde edilirsa, $\{\eta_n\},\ n \ge 1$ dizisi $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış, bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisidir. $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenler dizisi hem pozitif hem de negatif değerler alabilen rasgele değişkenlerdir. Ayrıca, $0 < E(\eta_n) < \infty$ koşulu sağlanmaktadır. Bu durumda, $A(x,z)$ serisinin sonlu olup olmadığı araştırılmalıdır.

$$\{\omega : z - S_k > 0\} \equiv C_k,\ \ k=0,1,...,n \ \text{ ve } \{\omega : z - S_n \le x\} \equiv D_n(x),\ \ n \ge 0 \tag{22}$$

olsun. O zaman,

$$a_n(x,z) = P\{C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_n \cap D_n(x)\},\ n=0,1,...$$

elde edilir. Kısaca $C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_n = B_n$ olsun.

$$D_n(x) = \{\omega : z - S_n \le x\} \subseteq \Omega$$

olduğuna göre $a_n(x,z) \le P(B_n \cap \Omega) = P(B_n)$ elde edilir.

$$A(x,z) \le \sum_{n=0}^\infty P(B_n) = \sum_{n=0}^\infty P\{z - S_k > 0; k = 0,1,...,n\}$$

elde edilir. Diğer taraftan $N(z) \equiv \min\{n \ge 1 : z - S_n \le 0\}$ sınır fonksiyonelinin tanımından

$$\{N(z) > n\} = \{z - S_k > 0,\ k=0,1,...,n\}$$

olduğu görülmektedir. Dolayısıyla

$$A(x,z) \le \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(z) > n\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(z) \ge n+1\} = \sum_{m=1}^{\infty} P\{N(z) \ge m\} = E(N(z))$$

elde edilir. EK – 5‘ te, $E(N(z))$ ’ in sonlu olduğu gösterilmiştir. Böylece, her $x > 0$, z>0 için $E(\eta_1) > 0$ olduğunda $A(x,z)$ sonludur, yani $A(x,z) < \infty$ ’ dur.

Böylece $A(x,z)$ serisinin sonlu olduğu gösterilmiş elde edilir.

EK – 7: Üç katlı İntegrallerin Sonlu Olması Üzerine

Tezdeki, Teorem 2.1.3.2’ de zaman ortalamalarının durum ortalamasına yakınsadığı ifade edilmiş ve aşağıdaki eşitlik verilmiştir (1 olasılığı ile):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X(u))du = S_f = \frac{1}{E(\tau_1(\zeta_1))}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(x)P_Z\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\}dtd\pi(z) \tag{23}$$

Burada $f(x)$ fonksiyonu sınırlı ölçülebilen bir fonksiyondur.

$$\sup_{x\in R^+} |f(x)| = M < \infty$$

olsun. Bu takdirde,

$$\left|\int_{z=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} f(x)P_Z\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\}dtd\pi(z)\right| \le M\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} P_Z\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\}dtd\pi(z)$$

$$= M\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} P_Z\{\tau_1 > t\}dtd\pi(z) = M\int_0^{\infty} E(\tau_1(z))d\pi(z) \tag{24}$$

elde edilir. EK – 1’ deki Wald özdeşliğine göre

$$E(\tau_1(z)) = E(\sum_{i=1}^{N_1(z)} \xi_i) = E(\xi_1)E(N_1(z)) \tag{25}$$

elde edilir. Teorem 2.1.3.1’ in koşullarına göre $0 < E(\xi_1) < \infty$ ‘ dur. Dolayısıyla $E(\tau_1(z))$ ‘ in sonlu olabilmesi için $E(N_1(z))$ ‘ in sonlu olması yeterlidir. EK – 4’ teki Dynkin Prensibine göre $N(z) = \sum_{i=0}^{H(z)} \nu_i^+$ şeklinde yazılabilir. Burada ν_1^+, 1. basamak anı; ν_n^+ ‘ lar ise ν_1^+ ile aynı dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenlerdir. $H(z)$ süreci, $\{\chi_n^+\}$, n=1,2,... basamak yüksekliklerinin oluşturduğu yenileme sürecidir. EK – 1’ deki Wald Özdeşliğine göre,

$$E(N_1(z)) = E(\sum_{i=1}^{H(z)} \nu_i^+) = E(\nu_1^+)E(H(z))$$

elde edilir. $E(H(z)) \equiv U_+(z)$ bir yenileme fonksiyonudur. Dolayısıyla her sonlu z için $U_+(z) = E(H(z))$ ‘ in sonlu olduğu bilinmektedir (Feller, 1971, s.185). $0 < E(\eta_1) < \infty$ olduğunda $E(\nu_1^+) < +\infty$ ‘ dır (Feller, 1971, s.396-397). Dolayısıyla $E(N_1(z))$ sonludur. Ayrıca EK – 5’ te $\int_0^{\infty} E(H(z))d\pi(z)$ integralinin sonlu olduğu $E(\eta_1) > 0$ ve $E(\eta_1^2) < \infty$ koşulları altında gösterilmiştir. Bu takdirde

$$\int_0^{\infty} E(\tau_1(z))d\pi(z) = E(\xi_1)\int_0^{\infty} E(N_1(z))d\pi(z) = E(\xi_1)E(\nu_1^+)\int_0^{\infty} E(H(z))d\pi(z) < \infty \tag{26}$$

elde edilir. $M \equiv \sup\limits_{x \in R} |f(x)| < \infty$ sonlu olduğu da göz önünde bulundurulursa, yukarıdaki üç katlı integrallerin sonlu oldukları ispat edilmiş elde edilir.

EK – 8: Tauber – Abel Teoremi.

$F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri $\tilde{F}(\lambda)$ ve $\tilde{G}(\lambda)$ mevcut olsun (en azından öyle bir $(-\alpha,\beta)$ aralığı mevcut olsun ki, her $\lambda \in (-\alpha,\beta)$; $\alpha,\beta > 0$ için $\tilde{F}(\lambda)$ ve $\tilde{G}(\lambda)$ mevcut ve sonlu olsun).

Ayrıca $t \to \infty$ iken $F(t) \sim G(t)$ olsun. Bu taktirde, $\lambda \to 0$ iken $\tilde{F}(\lambda) \sim \tilde{G}(\lambda)$ elde edilir. Bu önermenin tersi de doğrudur, yani eğer $\lambda \to 0$ iken $\tilde{F}(\lambda) \sim \tilde{G}(\lambda)$ ise $t \to \infty$ iken $F(t) \sim G(t)$ elde edilir.

Burada "~" simgesi ile iki fonksiyonun asimptotik denkliği gösterilmiştir, yani " $F(t) \sim G(t)$ " yazılabilmesi için $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{F(t)}{G(t)} = 1$ ve " $\tilde{F}(\lambda) \sim \tilde{G}(\lambda)$ " yazılabilmesi için $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{\tilde{F}(\lambda)}{\tilde{G}(\lambda)} = 1$ olmalıdır.

Bu önerme literatürde Tauber – Abel teoremi olarak bilinmektedir (Feller, 1971,s. 498).

EK – 9: Mill Teoremi

X rasgele değişkeni Standart Normal Dağılıma sahip olsun. Bu takdirdeX' in olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları sırasıyla $\varphi(t)$ ve $\Phi(t)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\varphi(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \ t \in R \ ; \ \Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(u)du .$$

Ayrıca $\overline{\Phi}(t) \equiv 1 - \Phi(t)$ olsun. Her $t > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik bilinmektedir:

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} < \frac{\overline{\Phi}(t)}{\varphi(t)} < \frac{1}{t} \tag{27}$$

$\frac{\overline{\Phi}(t)}{\varphi(t)}$ oranına Mill Oranı denir ve bu oran için $t \to \infty$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilmiştir (Abramowitz and Stegun, 1964, s.298).

Teorem (Mill Teoremi): $t \to \infty$ iken $\frac{\overline{\Phi}(t)}{\varphi(t)}$ oranı için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$\frac{\overline{\Phi}(t)}{\varphi(t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} + \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)!}{t^{2m+1}} \tag{28}$$

(Abramowitz and Stegun, 1964, s.298).

Bu teoremden aşağıdaki önemli sonuç elde edilir.

Sonuç 1: $t \to \infty$ iken $\dfrac{\overline{\Phi}(t)}{\varphi(t)/t} \to 1$ elde edilir veya $\overline{\Phi}(t) \sim \dfrac{\varphi(t)}{t}$, dır.

EK- 10: Kesikli Müdahaleli Yarı – Markov Süreçleri için Genel Ergodik Teoremi

Teorem 1 (Genel Ergodik Teorem) (Gihman and Skorohod, 1975, s. 243)**:**
$X(t)$ süreci kesikli müdahaleli bir yarı – Markov süreci olsun. Ayrıca aşağıdaki iki varsayım sağlansın:

1.Varsayım: Öyle bir $\tau_0 \equiv 0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n < ... < \infty$ artan zaman anları bulunsun ki, $X(t)$ sürecinin bu anlardaki değerleri ($X(\tau_n)$, n=1,2,...) ergodik bir Markov zinciri oluşturmuş olsun.

2.Varsayım: $\tau_0, \tau_1, \tau_2, ..., \tau_n, ...$ anları arasında geçen sürelerin beklenen değeri sonlu olmuş olsun, yani her n=1,2,... için $E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty$ olsun.

Bu takdirde $X(t)$ süreci ergodiktir.

Teorem 2 (Gihman and Skorohod, 1975, s. 243)**:** Teorem 1' in varsayımları sağlanmış olsun. Bu takdirdeher sınırlı ölçülebilir $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X(s))ds = S_f \equiv \frac{1}{E(\tau_1)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} f(x) P_z\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\} dt d\pi(z) \qquad (29)$$

Burada $\pi(z)$ dağılımı $\{X(\tau_n)\}$ Markov zincirinin ergodik dağılımıdır.

Not: Bu teorem, zaman ortalamalarının durum ortalamalarına 1 olasılığı ile yakınsadığını ifade eden bir önermedir ve ergodik süreçler için en temel bağıntıyı ortaya koyar.

EK-11: Rasgele Yürüyüş Süreçleri için Temel Özdeşlik

$\{\eta_n\}$, n=1,2,... dizisi $\{\Omega, \Im, P\}$ olasılık uzayında tanımlı bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. η_n rasgele değişkenleri hem pozitif hem de negatif değerler alabilsin. η_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(x)$ ile, karakteristik fonksiyonu ise $\varphi(\theta)$ ile gösterilsin, yani $F(x) = P\{\eta_1 \le x\}$; $\varphi(\theta)=E(\exp\{i\theta\eta_1\})$ olsun. $\{\eta_n\}$, n=1,2,... dizisinin yardımı ile aşağıdaki rasgele yürüyüş süreci tanımlansın:

$$S_0 = 0;\ S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i;\ n=1,2,...$$

$A \subseteq R$ reel sayılar kümesinin keyfi bir alt kümesi olsun. A' ile A' nın tümleyicisi gösterilsin, yani $A' = R \setminus A$ olsun. (Genellikle A' sonlu veya sonsuz aralık şeklinde ortaya çıkar.) $I \subseteq A'$ olsun. Eğer $S_1 \in A;\ S_2 \in A;\ ...;\ S_{n-1} \in A;\ S_n \in A\ (I \subseteq A')$ ise, Bu takdirde"Rasgele Yürüyüş Süreci ilk kez A' kümesine n. adımda ulaşmış ve bu andaki değeri I kümesindedir" denir. A' kümesine ilk kez ulaşma anını N ile sürecin bu andaki değerini ise S_N ile gösterelim. Dolayısıyla

$$N = \min\{n \ge 1:\ S_1 \in A;\ S_2 \in A; ...;\ S_{n-1} \in A;\ S_n \in A'\};\quad S_N = \sum_{i=1}^{N} \eta_i \qquad (30)$$

olsun. $(N; S_N)$ ikilisinin ortak dağılımı için aşağıdaki notasyon tanımlansın:

$P\{N=n;\ S_n \in I\} \equiv H_n\{I\},\ I \subseteq A',\ n=1,2,...$

Tanımı gereği $H_n\{I\}$ aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$H_n\{I\} = P\{S_1 \in A;\ S_2 \in A;\ ...;\ S_{n-1} \in A;\ S_n \in I\}$

Ayrıca, $I \subseteq A$ için $H_n\{I\} = 0$ olarak kabul edelim. Bu durumda, her $I \subseteq R$ için $H_n\{I\} = P\{S_1 \in A;\ S_2 \in A;\ ...;\ S_{n-1} \in A;\ S_n \in A'; S_n \in I\}$ şeklinde gösterilebilir. $H_n\{I\}$ olasılıklarına "ilk kez ulaşma" olasılıkları denir. $H_n\{I\}$ olasılıklarının incelenmesi, rasgele yürüyüş süreçlerinin A' kümesine ilk kez ulaşmasına kadar olan davranışı ile bağlantılıdır.

Ayrıca, her $I \subseteq A$ ve $n = 1, 2, ...$ için $G_n\{I\} = P\{S_1 \in A;\ S_2 \in A;\ ...;\ S_{n-1} \in A;\ S_n \in I\}$ olsun. $G_n\{I\}$, ilk n adımda sürecin A' kümesine ulaşmaması ve n. adımda I kümesinde olması olasılığıdır. $I \subseteq A'$ olduğunda $G_n\{I\}=0$ olsun. Bu takdirde $G_n\{I\}$ olasılıkları tüm $I \subseteq R$ ' ler için tanımlanmış elde edilir ve aşağıdaki şekilde göstermek daha uygundur:

$G_n\{I\} = P\{S_1 \in A;\ S_2 \in A;\ ...;\ S_n \in A;\ S_n \in I\}$

Tanıma göre, $G_n\{A\} = P\{S_1 \in A;\ S_2 \in A;\ ...;\ S_n \in A\} = P\{N > n\} = 1 - P\{N \le n\}$ elde edilir.

Amaç, $(N; S_N)$ ikilisinin dağılımını incelemektir (Feller, 1971,s. 598-600). Bu amaca ulaşmak için Fourier analizi yöntemini kullanılır. N tam değerli rasgele değişken olduğu için N ' nin moment çıkaran fonksiyonu, S_N ' nin ise karakteristik fonksiyonu kullanılsın. Bunun için aşağıdaki notasyonlar tanımlansın:

$$\chi(s,\theta) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{A'} e^{i\theta x} H_n\{dx\}\ ;\ \gamma(s,\theta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_{A} e^{i\theta x} G_n\{dx\} \tag{31}$$

($n = 0$. terim 2. seride 1' dir.)

$|s| < 1$ olduğunda her iki seri de yakınsak elde edilir. Rasgele yürüyüş süreçleri için temel özdeşlik $\chi(s,\theta)$ ve $\gamma(s,\theta)$ arasında kurulan bir ilişkiyi ifade eder (Feller, 1971,s. 598-600).

Temel Özdeşlik (Feller, 1971,s. 600)**:** Her $\theta \in R$ ve $|s| < 1$ için

$$1 - \chi(s,\theta) = \gamma(s,\theta)[1 - s\varphi(\theta)] \tag{32}$$

dır. (32) özdeşliğinden birçok önemli sonuçlar elde edilebilmektedir.

ÖZGEÇMİŞ

Ali Akbar FATTAHHPOUR MARANDİ, 25.07.1970 tarihinde, Marand şehrinde doğdu. İlköğretimini Hoguge Beşer Okulunda, Orta öğretimini Logman, lise öğretimini ise Şehid Seyyedzade, Marandin 1 Nolu Matematik ve Fizik Lisesi'nde tamamladı. 1990 yılında Tebriz Devlet Üniversitesi Şehit Recai Telim ve Terbiyet Yüksek okulundan mezun oldu ve aynı yılda da Ferdowsi Meşhat Üniversitesinde İstatistik Bölümü Lisans programını kazandı. 1996 yılında lisans, 1998 yılında ise yüksek lisans programından mezun oldu. 1998 – 2006 yılları arasında Merend'de ve Tebriz'de Yüksek okul öğretmeni olarak görev yaptı. 2006 yılında doktora öğrenimine başlamak nedeniyle Türkiye'yi seçti. 2007 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora programına kayıt oldu ve Mart 2012'de tamamladı.

Evli olup, üç çocuk babasıdır. İyi düzeyde Farsca ve orta düzeyde İngilizce bilmektedir.

Fattahpour Marandi, A.A., Khaniyev T., and Unver, I. 2012. Limit Distribution For Semi-Markovian Random Walk With A Generalized Delaying Barrier, Pakistan Journal of statistics, 15, 1, (is submitted) (SCI-C).

Khaniyev T., Fattahpour Marandi, A.A. and Unver, I., 2012. Asymptotic Expansions for the Ergodic Moments of Semi-Markovian Random Walk With A Generalized Delaying Barrier Theory of Probability and Mathematical Statistics, (is submitted) (SCI-C).