KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜREÇLERİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Nurgül OKUR BEKAR

ŞUBAT 2012
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜREÇLERİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Yüksek Matematikçi Nurgül OKUR BEKAR

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 02.01.2012
Tezin Savunma Tarihi : 03.02.2012

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İhsan ÜNVER

Trabzon 2012

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Nurgül OKUR BEKAR Tarafından Hazırlanan

ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜREÇLERİNİN

ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 10/01/2012 gün ve 1437 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

DOKTORA TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. İhsan ÜNVER**	…………………………………
Üye	**: Prof. Dr. Haskız COŞKUN**	…………………………………
Üye	**: Prof. Dr. Tahir KHANİYEV**	…………………………………
Üye	**: Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK**	…………………………………
Üye	**: Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN**	…………………………………

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma, ödüllü yenileme süreçlerinin asimptotik yöntemlerle incelenmesi amacı ile KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora tez çalışması olarak yapılmıştır.

Tez konusunun belirlenmesinden, tezde ele alınan problemin çözümüne kadar olan bu süreçte, emeği, öneri ve yönlendirmeleri ile çok büyük katkısı bulunan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. İhsan ÜNVER'e teşekkür eder, sonsuz saygılarımı sunarım.

Öğrenimim boyunca en başından beri bana inanan, bana yol gösteren, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım sevgili hocalarım TOBB ETÜ öğretim üyesi Prof. Dr. Tahir KHANİYEV'e ve Bakü Devlet Üniversitesi öğretim üyesi Doç. Dr. Rovshan ALİYEV'e bana karşı göstermiş olduğu sabır için teşekkür ederim.

Aynı zamanda çalışma süresince, değerli görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan tez izleme jüri üyesi hocalarım Prof. Dr. Haskız COŞKUN ve Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK'e, seminerlerdeki katkılarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN ve Doç. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ'a ve bölümdeki tüm değerli öğretim üyeleri ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, "KTÜ BAP projesi; Ödüllü yenileme sürecinin asimptotik yöntemlerle incelenmesi; Proje No: 2008.111.003.3" adlı proje ile destek veren KTÜ BAP birimine teşekkür ederim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme, özellikle İKÇÜ öğretim üyesi sevgili ağabeyim Prof. Dr. Salih OKUR'a ve sevgili ablam Nuran OKUR'a, ayrıca GÜ öğretim üyesi eşim Yrd. Doç. Dr. Kerim BEKAR'a, kızım Dua Melike ve oğlum Umut Mete'nin bakımında bize yardımcı olan Sevgi EMİRZEOĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Nurgül OKUR BEKAR

Trabzon 2012

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum "ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜREÇLERİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ" başlıklı bu çalışmayı, baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. İhsan ÜNVER'in sorumluluğunda tamamladığımı, veri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri kendim yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 02/01/2012

Nurgül OKUR BEKAR

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜREÇLERİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Nurgül OKUR BEKAR

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. İhsan ÜNVER
2012, 93 Sayfa

Bu tezde, "Ödüllü Yenileme Süreci" olarak adlandırılan yarı-Markov bir model ele alınmış ve bu modeli ifade eden stokastik süreç matematiksel olarak inşa edilmiştir. Ayrıca, bu sürecin sınır fonksiyonelleri, sürecin ergodikliği, ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik momentleri detaylı olarak birkaç kısımda incelenmiştir.

Sözü edilen kısımlarda, sürecin sınır fonksiyonellerinin ilk dört başlangıç momenti, ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik momentleri bir yenileme fonksiyonu aracılığı ile ifade edilmiş ve bu fonksiyonlar için kesin ve asimptotik sonuçlar elde edilmiştir.

Bunun yanı sıra, gamma ve Weibull müdahaleli ödüllü yenileme süreçlerinin sınır fonksiyonellerinin ilk dört başlangıç momentleri için kesin ve asimptotik sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar kullanılarak, sözü edilen süreçlerin sınır fonksiyonellerinin merkezi momentleri ve çarpıklık-basıklık katsayıları asimptotik olarak verilmiştir. Ayrıca, bu süreçlerin ergodik olduğu gösterilmiş, ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik momentleri için kesin ve asimptotik sonuçlar elde edilmiş ve ergodik dağılım fonksiyonu için zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiştir. Bunlara ilaveten, elde edilen asimptotik sonuçlar yardımıyla, ödüllü yenileme sürecinin müdahale anını gösteren sınır fonksiyonelinin momentleri ve gamma müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu için simülasyon sonuçları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ödüllü yenileme süreci, Sınır fonksiyoneli, Momentler, Çarpıklık-basıklık katsayısı, Ergodiklik, Asimptotik açılım, Simülasyon, Zayıf yakınsaklık.

PhD. Thesis

SUMMARY

INVESTIGATION OF THE RENEWAL REWARD PROCESSES BY ASYMPTOTIC METHODS

Nurgül OKUR BEKAR

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. İhsan ÜNVER
2012, 93 Pages

In this thesis, semi-Markov, a model called as "The renewal reward processes", is considered and the stochastic process expressed by this model is constructed mathematically. Then, the boundary functionals, the ergodicity, the ergodic distribution function and the ergodic moments of this process thoroughly investigated in a few sections.

Mentioned in sections, the first four initial moments of the boundary functionals, the ergodic distribution function and the ergodic moments of the process is expressed by means of a renewal function, the exact and asymptotic results for these are obtained.

Besides, the exact and asymptotic results are obtained for the first initial moments of the boundary functional of the renewal reward processes with gamma and Weibull interference of chance. Using these results, the first four central moments and asymmetry-symmetry coefficients of the boundary functionals of the mentioned processes are given asymptotically. Furthermore, the ergodicity of these processes is proved, the exact and asymptotic results are obtained for the ergodic distribution function and the ergodic moments, and the weak convergence theorem is obtained for the ergodic distribution function of these processes. In addition, by means of the obtained asymptotic results, the simulation results are given for the moments of the representing interference time boundary functional of the renewal reward and the ergodic distribution function of the renewal reward processes with gamma and Weibull interference of chance.

Key Words: Renewal reward process, Boundary functional, Moments, Asymmetry-symmetry coefficients, Ergodicity, Asymptotic expansion, Simulation, Weak convergence.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

SEMBOLLER DİZİNİ

$a(x) \sim b(x)$	: $a(x)$ ’in $b(x)$ ’e asimptotik denkliği
$d_z F$	: F fonksiyonunun z değişkenine göre diferansiyeli
$E(\xi)$	: ξ rasgele değişkeninin beklenen değeri
$E_z(\xi)$	: ξ rasgele değişkeninin koşullu beklenen değeri
$E(\xi^n)$	: ξ rasgele değişkeninin n. başlangıç momenti
$E\lvert\xi\rvert$	: ξ rasgele değişkeninin mutlak momenti
$\varepsilon(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$	: Heaviside birim fonksiyonu
$f(x)\big\rvert_{x=0}$	: $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki değeri
$\varphi_1 * \varphi_2$	: φ_1 ve φ_2 fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı
φ^{*n}	: φ fonksiyonunun kendisiyle n. konvolüsyon çarpımı
$I_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}$	: A kümesinin indikatör (gösterge) fonksiyonu
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	: x, ∞ ’a giderken $f(x)$ fonksiyonunun limiti
$P\{A\}$	: A olayının olasılığı
$P_z\{A\}$	: A olayının koşullu olasılığı
$Var(\xi)$	: ξ rasgele değişkeninin varyansı
$Var_z(\xi)$	: ξ rasgele değişkeninin koşullu varyansı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu tezde, A.N. Kolmogorov tarafından 1960-1970'li yıllarda tanımlanmış ve literatürde "kesikli müdahaleli stokastik süreçler" olarak bilinen stokastik süreçler ailesinin önemli bir alt sınıfı ele alınmış ve bu süreç asimptotik yöntemlerle incelenmiştir.

Literatürde bu konuda önemli teorik sonuçlar mevcut olsa da, elde edilen sonuçlar genel olarak uygulamada kullanılabilir bir matematiksel yapıda değillerdir. 1973 yılında A.V. Skorohod tarafından bu sınıf için genel ergodik teorem ispat edilmiştir. Ancak bu teorem yardımıyla, genel durumda bu sınıfın ergodik dağılımı ve onun karakteristikleri için pratik öneme sahip açık ifadeler elde edilememiştir. Bu nedenle 1980'li yıllardan sonra, daha dar fakat önemli olan bazı sınıflar ele alınmaya başlanmıştır. Örneğin çeşitli bariyerli yenileme süreçleri, ödüllü yenileme süreçleri, rasgele yürüyüş süreçleri vs. bu sınıfa ait olan bazı özel alt sınıflar. Fakat bu süreçler, bu güne kadar her yönüyle araştırılamamıştır. Bunun temel nedeni, bu süreçlerin olasılık ve sayısal karakteristiklerinin çok karmaşık bir matematiksel yapıya sahip olmasıdır. Özellikle müdahaleyi ifade eden rasgele değişkenler, yeterince geniş sınıfa ait olduklarında, sürecin temel karakteristikleri için kullanılabilir formüllerin elde edilmesi imkânsız denecek kadar zordur.

1990'lı yıllardan sonra, bu zorluğu ortadan kaldırmak için araştırmalar, iki farklı yöntemle yapılmıştır. Bir taraftan, benzetim yöntemleri kullanılarak bu süreçler için bilgisayar yardımıyla sayısal sonuçlar alınmış, diğer taraftan asimptotik yöntemlere başvurarak yaklaşık fakat yeterince sade ifadeler elde edilmiştir. Bu nedenle son yıllarda, asimptotik yöntemler kullanılarak yapılmış literatürde birçok değerli çalışma mevcuttur. Örneğin, Alsmeyer (1988), Aras ve Woodroofe (1993), Lotov (1996). Bu çalışmalarda süreçlerin sınır fonksiyonelleri için asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Ancak birçok pratik problemin çözümü için sınır fonksiyonellerinin yanı sıra, sürecin kendi olasılık ve sayısal karakteristiklerinin de bilinmesi büyük önem taşımaktadır. Bu nedenle, bu tezde ele alınan sürecin sınır fonksiyonellerinin yanı sıra, ergodik dağılımı ve ergodik momentleri için asimptotik sonuçların elde edilmesi amaçlanmıştır.

Kısım 1.3'de ödüllü yenileme süreçleri hakkında, geniş bir literatür taraması verilecektir. Ancak sözü edilen kısmın ve tezin daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıda konunun terminolojisi ve çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremler verilecektir.

1.2. Stokastik süreçler

Stokastik süreçleri tanımlayabilmek için öncelikle σ-cebir, olasılık uzayı, olay, rasgele değişken gibi kavramların bilinmesi gerekmektedir. Aşağıda bu kavramların tanımları verilmektedir.

Tanım 1.2.1. $\Omega \neq \varnothing$ kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $\Im$ sınıfı

1) $\Omega \in \Im$,
2) $\forall A \in \Im$ için $\overline{A} \in \Im$,
3) İkişer ikişer ayrık kümelerin oluşturduğu $\forall (A_n) \in \Im$ dizisi için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Im$

özelliklerine sahip olsun. Bu takdirde $\Im$ sınıfına Ω'da bir "σ-cebir"dir denir. Bir σ-cebir, sayılabilir birleşim, kesişim ve tümleme işlemine göre kapalıdır.

Tanım 1.2.2. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesindeki açık aralıkların sınıfını kapsayan en küçük aralıkların σ-cebirine "Borel cebiri" denir. Borel cebirinin her bir elemanına "Borel kümesi" denir.

Tanım 1.2.3. $\Im$, $\Omega \neq \varnothing$ kümesi üzerinde tanımlanmış bir σ-cebir olmak üzere, $P : \Im \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

1) $\forall A \in \Im$ için $P(A) \geq 0$,
2) $P(\Omega) = 1$,
3) İkişer ikişer ayrık kümelerin oluşturduğu $\forall (A_n) \in \Im$ dizisi için

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

özelliklerine sahip ise, P fonksiyonuna $\Im$ üzerinde bir "olasılık ölçüsü" denir. $P(A)$ değerine ise, A kümesinin olasılık ölçüsü veya "A kümesinin olasılığı" denir.

Tanım 1.2.4. $\Omega \neq \emptyset$ bir küme, $\Im$, Ω'da tanımlanmış bir σ-cebir ve P, $\Im$ üzerinde tanımlanmış bir olasılık ölçüsü olmak üzere, $(\Omega, \Im, P)$ üçlüsüne bir "olasılık uzayı" denir.

Tanım 1.2.5. Sonuçlarının kümesi belli olan, ancak gerçekleştiğinde hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden bilinmeyen deneylere "olasılık deneyi" veya "stokastik deney" denir.

Tanım 1.2.6. Bir stokastik deneyin tüm olabilir sonuçlarının kümesine "örnek uzay" denir. Örnek uzayın her alt kümesine "olay" denir.

Bir $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı, bir stokastik deneyin modeli olarak kullanıldığında, $\Im$ σ-cebirindeki kümeler, deney ile ilgili olaylara karşılık gelir. Bir σ-cebir, sayılabilir birleşim, kesişim ve tümleme işlemine göre kapalı olduğundan, σ-cebirdeki kümeler üzerinde bu işlemler sonucu elde edilen bir küme ise bir olaya karşılık gelir.

Bir stokastik deneyin sonuçlarının kümesi olan örnek uzayın elemanları çok değişik türde olabilir. Rasgele değişkenler yardımıyla, örnek uzayın elemanlarına reel sayılar eşlenmekte ve böylece olasılık ölçüleri Borel cebiri üzerindeki olasılık ölçülerine indirgenmiş olmaktadır.

Bir stokastik deney sonucunda değerler alan fonksiyona rasgele değişken denir. Rasgele değişkenler tanım kümesine göre kesikli, mutlak sürekli ve singüler olmak üzere üç kısma ayrılırlar. Örneğin, 1 madeni para 10 kez atıldığında yazı gelmesi sayısı kesikli, bir elektrik cihazının bozulmadan çalışma süresi ise sürekli rasgele değişkendir.

Rasgele değişken, matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

Tanım 1.2.7. $(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonu

$\forall x \in \mathbb{R}$ sayısı için $\{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \Im$

yani $\Im$-ölçülebilir ise, ξ fonksiyonuna bir "rasgele değişken" denir.

Tanımından görüldüğü gibi rasgele değişken aslında, belli özellikleri olan bir değişkenli fonksiyondur. Birçok durumda ikinci bir değişkene de ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin, sıvı içerisinde oluşan bir hareket sonucunda bir parçacığın zaman geçtikçe konumu veya hızı veyahut borsadaki herhangi bir hisse senedinin fiyatının zamanla değişmesi, sadece bir rasgele değişken yardımıyla tanımlanamaz. Bu durumda stokastik süreç kavramına ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 1.2.8. $(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı ve $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$ bir küme olsun. Reel değerli $\xi(\omega, t)$ fonksiyonu, her $t \in T$ için Ω kümesinde tanımlanmış bir rasgele değişken ise, bu fonksiyona bir "rasgele fonksiyon" denir. Bazen $\eta(\omega, t)$, $X(\omega, t)$, $Y(\omega, t)$ sembolleri ile bazen de ω değişkeni olmadan $\xi(t)$, $\eta(t)$ sembolleri ile gösterilir. Eğer burada $T=\mathbb{R}^{+}$ ise ve t parametresi zamanı ifade ediyorsa, bu durumda $\xi(\omega,t)$ rasgele fonksiyonuna bir "stokastik süreç" denir.

Tanımından görüldüğü gibi bir stokastik süreç, sonsuz sayıdaki rasgele değişkenlerin bir ailesidir. Bu durumda stokastik süreçler için de rasgele değişkenler için verilen kavramların benzerini vermek mümkündür. Bundan sonraki kısımlarda, bir stokastik süreç $X(\omega,t)$ sembolü ile gösterilecektir.

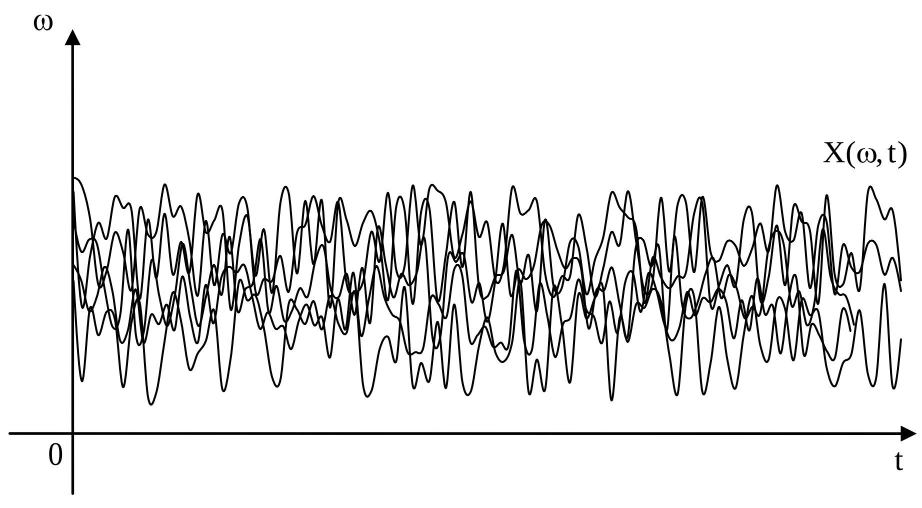
Not 1.2.1. Bir stokastik süreç, olayı temsil eden ω parametresinin yanı sıra, zamanı temsil eden t parametresine de bağlı bir fonksiyondur. Bu nedenle, aşağıdaki durumlar oluşmaktadır:

i) Her bir stokastik sürecin genel durumda, sonsuz sayıda realizasyonu vardır. Çünkü grafiklerin sayısı ω'nın sayısına bağlıdır.

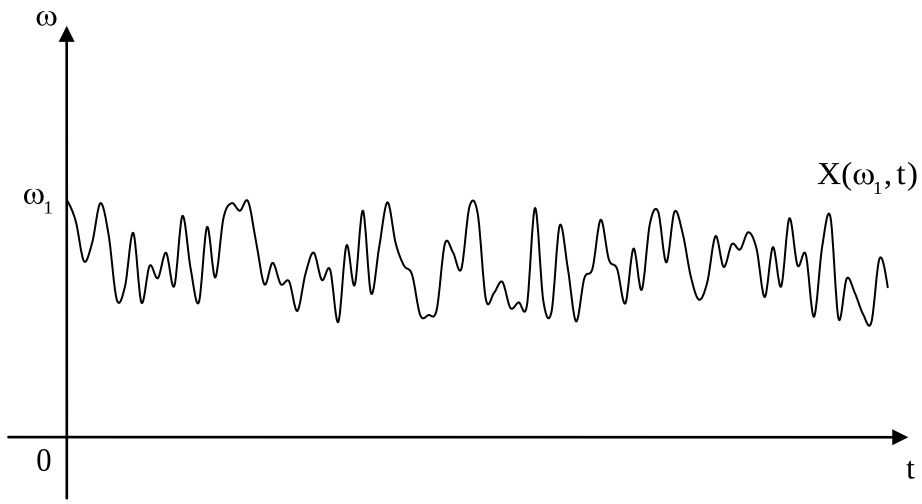
ii) Eğer $X(\omega,t)$ stokastik sürecinin ω parametresi sabit tutulursa, yalnız t'ye bağlı olan ve rasgele olmayan bir fonksiyon elde edilir.

iii) Eğer $X(\omega,t)$ stokastik sürecinin t parametresi sabit tutulursa, yalnız ω'ya bağlı olan bir fonksiyon, yani bir rasgele değişken elde edilir.

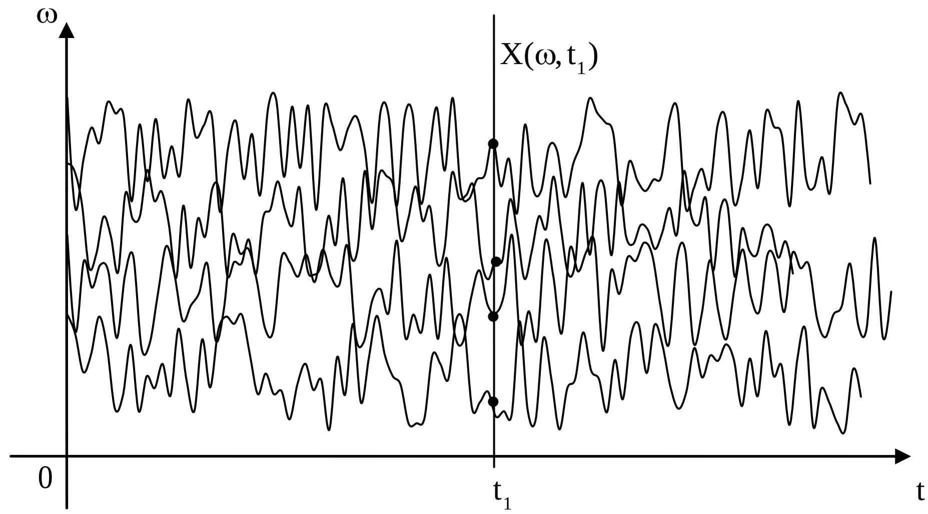
Bu durumlar sırasıyla aşağıdaki şekillerdeki gibi gösterilebilir:



Şekil 1. $X(\omega,t)$ stokastik sürecinin realizasyonları



Şekil 2. ω parametresi sabit iken $X(\omega, t)$ sürecinin bir realizasyonu



Şekil 3. t parametresi sabit iken $X(\omega, t)$ sürecinin bir realizasyonu

1.2.1. Stokastik Süreçlerin Bazı Karakteristikleri

Bilinmektedir ki, bir tane rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu bir argümanlı, yani

$$F(x) = P\{\xi \le x\}$$

şeklinde; iki tane rasgele değişkenin ortak dağılım fonksiyonu iki argümanlı, yani

$$F(x_1, x_2) = P\{\xi_1 \le x_1, \xi_2 \le x_2\}$$

şeklinde; $\ldots$; n tane rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu ise n argümanlı, yani

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{\xi_1 \le x_1, \xi_2 \le x_2, \ldots, \xi_n \le x_n\}$$

şeklindedir.

Bir stokastik süreç, sonsuz sayıdaki rasgele değişkenlerin bir ailesi olduğundan, onun dağılım fonksiyonu ise sonsuz argümanlı olmalıdır. Ancak bu tip fonksiyonları matematiksel olarak ifade etmek ve incelemek mümkün değildir. Bu nedenle, bir stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılımlarının bilinmesi gerekmektedir. Çünkü bir stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu yardımıyla, sürecin diğer karakteristikleri ve süreçle ilgili olayların olasılıkları bulunabilir.

Tanım 1.2.1.1. $X(\omega, t)$ bir stokastik süreç olsun. $X(\omega, t_1)$, $X(\omega, t_2)$, $\ldots$, $X(\omega, t_n)$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonuna, yani

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P\{\omega : X(\omega, t_1) \le x_1, \ldots, X(\omega, t_n) \le x_n\}, \; t_1, t_2, \ldots, t_n \in T, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

fonksiyonuna $X(\omega, t)$ sürecinin "n-boyutlu dağılım fonksiyonu" denir.

$$\{F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)\}, \; n \ge 1$$

ailesine ise, sürecin "sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları" denir. Sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) $F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \infty) = F_{t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$,

2) $F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{t_{i_1},t_{i_2},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$,

burada $i_1, i_2, \ldots, i_k$ indekslerin yer değişimini göstermektedir.

Bir n değişkenli fonksiyonlar ailesi verildiğinde bu ailenin, bir stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu olup olmadığını anlayabilmek için aşağıdaki teoreme ihtiyaç vardır.

Teorem 1.2.1.1 (Kolmogorov teoremi). $\{F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)\}, t_i \in T, \; t_1 < \ldots < t_n, \; n \ge 1$, Tanım 1.2.1.1'deki 1. ve 2. özelliklere sahip sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları ailesi olsun. Bu durumda öyle bir $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı ve $X(\omega, t)$ stokastik süreci vardır ki,

$$P\{\omega : X(\omega, t_1) \le x_1, \ldots, X(\omega, t_n) \le x_n\} = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

eşitliğini sağlar. Bu takdirde, bir stokastik süreç ile onun sonlu boyutlu dağılımları birbirlerini bire-bir tanımlamaktadır.

Not 1.2.1.1. $T \subseteq \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ ise, $X(\omega, t)$ stokastik sürecine "kesikli zamanlı stokastik süreç", T aralık ise $X(\omega, t)$'e "sürekli zamanlı stokastik süreç" denir. Bu durumda

i) Eğer $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin D durum (değerler) kümesi kesikli ise, sürecin sonlu boyutlu dağılımları

$$p_{t_1,\ldots,t_n}(k_1,\ldots,k_n) = P\left\{\omega:\ X_{t_1}(\omega) = k_1,\ldots,X_{t_n}(\omega) = k_n\right\},\ t_n \in T,\ n = 1,2,\ldots$$

ii) Eğer $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin D durum kümesi sayılamayan sonsuz elemana sahip ise, sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\ldots\int_{-\infty}^{x_n} p_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n)du_1\ldots du_n$$

ile tanımlanmaktadır. Burada $p_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n)$, sürecin n-boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir.

Olasılık teorisinden bir rasgele değişkenin sayısal karakteristiklerinin (beklenen değer, varyans vs.) birer sabit sayı olduğu bilinmektedir. Bir stokastik sürecin de benzer karakteristikleri vardır, fakat bu karakteristikler $t \in T$ parametresine bağlı birer rasgele olmayan fonksiyondur.

Tanım 1.2.1.2. $X(\omega, t)$ bir stokastik süreç, $F_t(x)$ bu stokastik sürecin bir boyutlu dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda

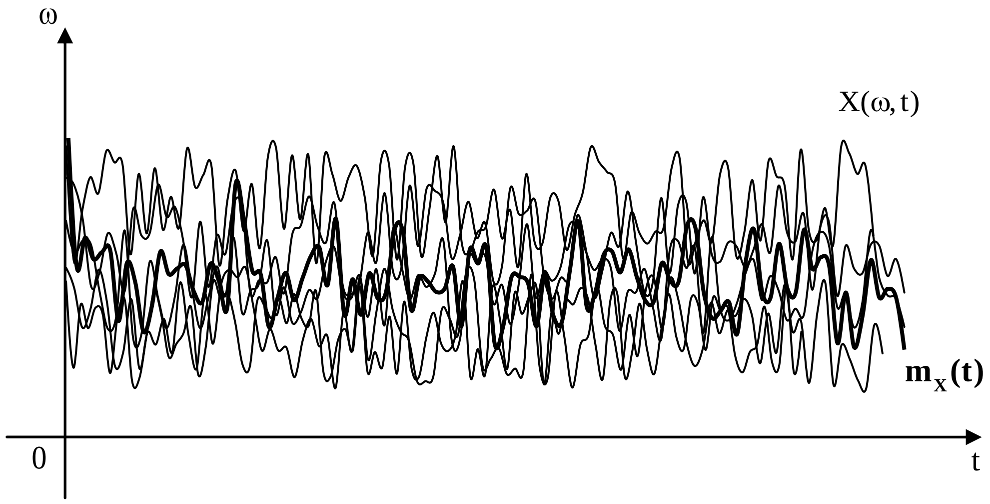
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF_t(x) < +\infty$$

ise

$$E(X(\omega,t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_t(x),\ t \in T$$

integraline $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin "beklenen değeri" denir. Bir stokastik sürecin beklenen değeri $m_X(t)$ sembolü ile de gösterilmektedir.

Bir stokastik sürecin beklenen değeri, rasgele olmayan, $t \in T$ parametresine bağlı öyle bir "orta" fonksiyondur ki, sürecin realizasyonları onun etrafında dağılmıştır. Bu durum aşağıdaki şekildeki gibi gösterilebilir:



Şekil 4. $X(\omega,t)$ stokastik sürecinin beklenen değeri

Tanım 1.2.1.3. $X(\omega,t)$ bir stokastik süreç olsun. Bu durumda

$$V_X(t) = \mathrm{Var}\left(X(\omega,t)\right) = E\left(X(\omega,t) - m_X(t)\right)^2$$

fonksiyonuna $X(\omega,t)$ stokastik sürecinin "varyans"ı denir. Ayrıca, $\sigma_X(t) = \sqrt{V_X(t)}$ fonksiyonuna $X(\omega,t)$ stokastik sürecinin "standart sapması" denir.

Bir stokastik sürecin varyansı, rasgele olmayan, $t \in T$ parametresine bağlı bir fonksiyon olup sürecin realizasyonlarının, beklenen değerinin etrafında nasıl dağıldığını gösteren bir karakteristiktir.

1.2.2. Stokastik Süreçlerin Sınıflandırılması

Stokastik süreçleri belli özelliklerine göre sınıflandırmak mümkündür. Örneğin, zaman parametresi kesikli veya sürekli olan süreçler, realizasyonu kesikli veya sürekli olan süreçler, stokastik sürecin değerlerinin stokastik ilişkisine göre oluşan süreçler, vs. Stokastik süreçlerin sınıflandırılması, süreçlerin incelenmesinde kolaylıklar sağlar.

Genel olarak stokastik süreçler; "Gauss süreçleri, değerleri bağımsız süreçler, artışları bağımsız süreçler, durağan ve durağan olmayan süreçler, Markov ve yarı Markov süreçler" şeklinde sınıflandırılmaktadır.

Aşağıda bu süreçlerden bazılarının tanımları verilmektedir:

Tanım 1.2.2.1. $X(t)$ bir stokastik süreç olsun ve bu sürecin $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ noktalarındaki değerleri $X(t_1),\ X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ ile gösterilsin. Eğer her $n = 1, 2, \ldots$ için $X(t_1),\ X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n)$ rasgele değişkenleri tam bağımsız ise, bu sürece "değerleri bağımsız olan stokastik süreç" denir.

Not 1.2.2.1. Değerleri bağımsız olan bir stokastik süreçlerin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$F_{t_1 t_2 \ldots t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{t_1}(x_1) F_{t_2}(x_2) \ldots F_{t_n}(x_n).$$

Başka bir deyişle, değerleri bağımsız olan sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları, bir boyutlu dağılım fonksiyonlarının çarpımına eşittir. Değerleri bağımsız olan stokastik süreçlerin sonlu boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$p_{t_1 t_2 \ldots t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{t_1}(x_1) p_{t_2}(x_2) \ldots p_{t_n}(x_n).$$

Tanım 1.2.2.2. $X(\omega, t)$ bir stokastik süreç olsun. Her $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ için

$$\left(X(t_1) - X(t_0)\right),\ \left(X(t_2) - X(t_1)\right),\ \ldots,\ \left(X(t_n) - X(t_{n-1})\right),\ n = 1, 2, \ldots$$

farklarına "$X(\omega, t)$ stokastik sürecinin artışları" denir. Eğer her t_n ve n için bu artışlar birbirinden bağımsız rasgele değişkenler ise, $X(\omega, t)$ stokastik sürecine "artışları bağımsız stokastik süreç" denir. Bu koşul matematiksel olarak aşağıdaki gibi verilebilir:

$$P\left\{X(t_1) - X(t_0) \le x_1, \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1}) \le x_n\right\} = \prod_{k=1}^{n} P\left\{X(t_k) - X(t_{k-1}) \le x_k\right\}.$$

Örnek 1.2.2.1. Artışları bağımsız süreçlere Poisson ve Wiener süreçlerini de örnek göstermek mümkündür. Bu süreçler olasılık teorisinde çok önemli bir role sahiptir. Çünkü birçok olasılık modelleri bu süreçlerin yardımıyla verilebilir.

1.2.2.1. Markov ve Yarı-Markov Süreçler

Stokastik süreçlerin değerlerinin bağımsızlığı koşulu bazen sağlanmamaktadır. Bu durumda, değerleri arasında bağımlılık olan süreçlerin incelenmesi gerekmektedir. Böyle bağımlılık çeşitlerinden biri, literatürde Markov bağımlılığı olarak ile bilinmektedir. Markov bağımlılığı "sürecin her bir keyfi gelecek anındaki değerinin dağılımı, yalnız şimdiki andaki değerinin dağılımına bağlı olup, geçmişteki değerlerinin dağılımına bağlı olmaması" olarak ifade edilebilir. Başka bir deyişle, "gelecek geçmişe bağlı olmayıp, yalnız şimdiki ana bağlı”dır. Değerleri arasında bu tip bağımlılık olan süreçlere, “Markov süreçleri” denir. Ayrıca bir stokastik süreç, bazı $t \in T$ ’ler için Markov bağımlılığa sahipse, o sürece “yarı-Markov süreç” denir. Markov süreçlerini matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür:

Tanım 1.2.2.1.1. $(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı ve $T = [0, +\infty)$ olsun. $X(t) = X(\omega, t)$ ise $\Omega \times T$ ’de tanımlanmış bir stokastik süreç olsun. Eğer $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, $x_1, x_1, \ldots, x_n \in R$ için

$$P\{X(t_n) \le x_n | X(t_1) \le x_1, \ldots, X(t_{n-1}) \le x_{n-1}\} = P\{X(t_n) \le x_n | X(t_{n-1}) \le x_{n-1}\}$$

sağlanıyorsa, $X(t)$ stokastik sürecine “Markov süreci” denir. Markov sürecinde zaman kesikli olduğunda ise o sürece “Markov zinciri” denir.

Tanım 1.2.2.1.2. Markov zincirleri için ergodik teoremi vermek için aşağıdaki iki koşul mevcut olmalıdır:

1. Markov zinciri ayrılmayan ve periyodik olmayan bir zincir olsun.
2. Öyle bir E_0 durumu mevcut olsun ki, sistemin bu duruma dönme süresinin beklenen değeri sonlu olsun.

Bu durumda keyfi i ve j değerleri için i’den bağımsız pozitif

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = p_j > 0, \ i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

limitleri mevcut olsun. Eğer p_j olasılıkları

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1 \\ &p_j = \sum_{k=0}^{\infty} p_k p_{kj}, \ j = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

denklemler sistemini sağlarsa, uygun zincire “ergodik zincir” denir. Burada p_j olasığı sistemin uzun bir süreden sonra E_j durumuna gelme olasılığıdır. Bu, p_j olasığının sistemin ilk andaki durumuna bağımlı olmadığını ifade eder. Yani sistem nereden harekete başladığını unutur. $\{p_j\}_{j=\overline{0,\infty}}$ dağılımına “durağan veya sonuncu dağılım” denir. (1.1) özelliği $\{p_j\}_{j=\overline{0,\infty}}$ dağılımının p_{ij} geçiş olasılıklarına göre değişmez olduğunu gösterir. Yani $p_k = P\{\omega : X_n(\omega) = k\}$ ise $P\{\omega : X_{n+1}(\omega) = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_j p_{jk} = p_k$ ’dır.

Teorem 1.2.2.1.1 (Genel Ergodiklik Teoremi). $X(t)$ süreci kesikli müdahaleli bir yarı-Markov süreç olsun. Ayrıca aşağıdaki iki varsayım sağlansın:

1. Öyle bir $0<\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_n<\ldots<\infty$ artan zaman anları bulunsun ki, $X(t)$ sürecinin bu anlardaki değerleri $(X(\tau_n),\ n=1,2,\ldots)$ ergodik bir Markov zinciri oluştursun.

2. $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n,\ldots$ anları arasında geçen zaman sürelerinin beklenen değeri sonlu olsun. Yani her $n=1,2,\ldots$ için $E(\tau_n-\tau_{n-1})<\infty$ olsun.

Bu takdirde $X(t)$ süreci ergodiktir (Gihman ve Skorohod, 1975).

Teorem 1.2.2.1.2. Teorem 1.2.2.1.1'in varsayımları sağlanmış olsun. Bu takdirde, her sınırlı ölçülebilir $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(X(u))du = S_f \equiv \frac{1}{E(\tau_1)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)P_z\left\{\tau_1>t;X(t)\in dx\right\}dtd\pi(z).$$

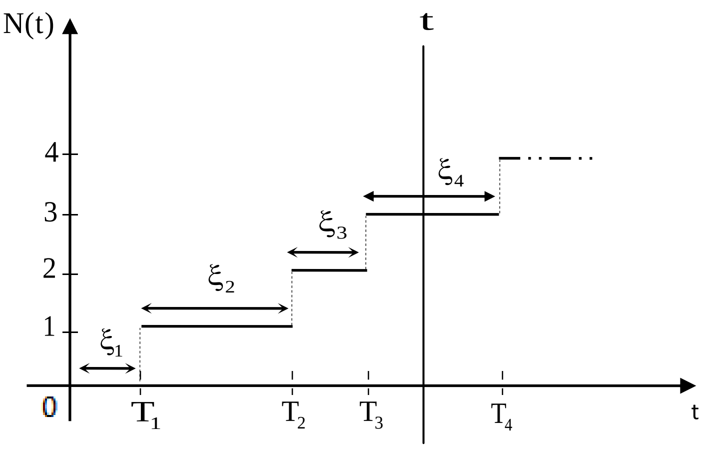
Burada $\pi(z)$ dağılımı $\left\{X(\tau_n),\ n=1,2,\ldots\right\}$ Markov zincirinin ergodik dağılımıdır (Gihman ve Skorohod, 1975).

Not 1.2.2.1.1. Yukarıdaki teorem, zaman ortalamalarının durum ortalamalarına 1 olasılığı ile yakınsadığını ifade eder ve ergodik süreçler için en temel bağıntıyı ortaya koyar.

1.2.2.2. Sayma Süreci

Tanım 1.2.2.2.1. $N(t)=N(\omega,t)$, $\omega\in\Omega$, $t\geq 0$, $\left[0,t\right]$ aralığında gerçekleşen olayların sayısı olmak üzere, $\left\{N(t),\ t\geq 0\right\}$ stokastik sürecine "sayma süreci" denir. Sayma sürecinin özellikleri aşağıdaki gibidir:

1) $N(t)\geq 0$,
2) $N(t)$ tamsayı değerli bir rastgele değişken,
3) Eğer $s<t$ ise $N(s)\leq N(t)$,
4) $s<t$ için $N(s,t)=N(t)-N(s)$, yani $\left[s,t\right]$ aralığındaki olayların sayısı, $\left[0,t\right]$ aralığındaki olayların sayısı ile $\left[0,s\right]$ aralığındaki olayların sayısının farkına eşittir.



Şekil 5. Sayma sürecinin bir realizasyonu

Not 1.2.2.2.1. Şekil 5'den görüldüğü gibi $N(t)$, $[0,t]$ aralığındaki olayların sayısını gösterir. t sabit tutulduğunda mesela, $t \in [T_3, T_4)$ iken $N(t) = 3$'dir.

Örnek 1.2.2.2.1. Bir futbol maçında ilk 30 dakika içinde atılan gol sayısı, bir sayma süreci ile bulunabilir. Gerçekten bu rastgele sayı hem t'ye hem de ω'ya bağlıdır ve $N(t)$ gol sayısını gösterir.

1.2.2.3. Yenileme ve Ödüllü Yenileme Süreçleri

Yenileme süreçleri, yarı-Markov süreçlerinin özel bir hali olup Poisson süreçlerinin genelleştirilmişi olarak da ifade edilebilir. Bir Poisson süreci kısaca, olaylar arası geçen zaman süreleri, birbirinden bağımsız ve aynı üstel dağılıma sahip rasgele değişkenler olan, bir sayma süreci olarak tanımlanabilir. Bir yenileme süreci ise, Poisson sürecinden daha genel bir sayma sürecidir. Çünkü bu süreçte olaylar arası geçen zaman süreleri, birbirinden bağımsız ve aynı keyfi dağılıma sahip rasgele değişkenlerdir.

Yenileme sürecini matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür:

Tanım 1.2.2.3.1. $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında $\{\xi_n\}$, $n \geq 1$ negatif olmayan birbirinden bağımsız ve aynı keyfi dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Bu durumda, n. yenilemenin gerçekleşme anı

$$T_0 = 0, \; T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \; , \; n \geq 1$$

ve t anında veya t anından önce gerçekleşen yenilemelerin sayısının maksimumu

$$N(t) = \max\{n: T_n \leq t\}$$

olmak üzere, $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine "yenileme süreci" denir.

Örnek 1.2.2.3.1. Elimizde tek pille çalışan bir el radyosu olduğunu kabul edelim. Başlangıçta radyoda daha önce hiç kullanılmamış bir pil olduğunu düşünerek, bozuldukça yenisiyle değiştirilen, aynı marka pillerin ömürlerinin dizisi bir yenileme süreci oluşturur. Bu süreç için n. değiştirilen pilin ömrü ξ_n, n. değiştirmenin yapıldığı zaman T_n olup, $N(t)$, $[0, t]$ zaman aralığında değiştirilen pillerin sayısıdır.

Örnek 1.2.2.3.2. Bir lamba $\xi_0 = 0$ anında çalışmaya başlasın ve $T_1 = \xi_1$ rasgele anında bozulsun ve yenisi ile değiştirildiği farz edilsin. Yeni lamba ise $T_2 = \xi_1 + \xi_2$ rasgele anında bozulsun ve yenisi ile değiştirilsin. Böylece ξ_n rasgele değişkeni n. lambanın ömrü, T_n ise n. yenileme anı olur. Bu durumda $\{T_n\}$, $n \geq 1$ dizisine "yenileme dizisi" denir ve ξ_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(t) = P\{\xi_n \leq t\}$ ise, n. lambanın t zaman süresinde bozulma olasılığını verir.

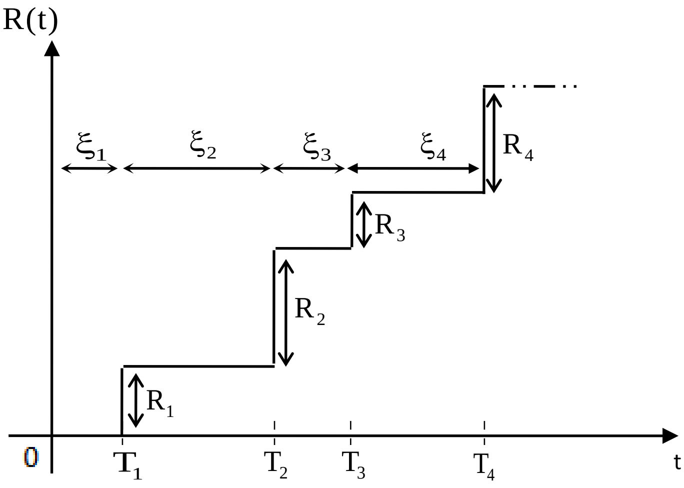
Tanım 1.2.2.3.2. $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında $\{\xi_n\}$, $n \geq 1$ aynı dağılıma sahip, bağımsız ve pozitif değerli rasgele değişkenler dizisi yardımıyla oluşturulan

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t,\ t > 0\}$$

yenileme süreci verilsin. Burada $T_0 = 0$, $T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $n \geq 1$'dır. Bunun yanı sıra, yenilemenin olduğu her bir zamanda bir ödül verildiği kabul edilsin. Bu durumda R_n, n. yenileme anında kazanılan "ödül" olmak üzere, $\{R_n\}$, $n \geq 1$ aynı dağılıma sahip, bağımsız rasgele değişkenler dizisi ve (ξ_n, R_n), $n \geq 1$ birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun. Bu takdirde,

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n$$

ile tanımlanan $\{R(t), t \geq 0\}$ sürecine, "ödüllü yenileme süreci" denir ve $R(t)$, t zamanına kadar kazanılan toplam ödülü ifade eder (Ross, 1996).



Şekil 6. Ödüllü yenileme sürecinin bir realizasyonu

Aşağıda yenileme süreçlerinin olasılık karakteristikleri ve yenileme teorisinde kullanılan bazı teoremler verilecektir:

Tanım 1.2.2.3.3. X ve Y birbirinden bağımsız, sırasıyla F ve G dağılım fonksiyonlarına sahip iki rasgele değişken olsun. Bu durumda $X+Y$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X+Y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(t-x)dF(x)=(F*G)(t)$$

dır. Ayrıca F ve G dağılım fonksiyonlarına sırasıyla f ve g olasılık fonksiyonları karşılık geldiğinde, $F*G$ dağılım fonksiyonuna da $f*g$ yoğunluk fonksiyonu karşılık gelir. Burada

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-x)f(x)dx\,,\ t\in\mathbb{R}$$

dır. Dağılım fonksiyonları arasındaki konvolüsyon aynı zamanda değişme ve birleşme özelliğine sahiptir

Yukarıda verilen teorem herhangi sonlu sayıdaki bağımsız rasgele değişkenler için de geçerlidir. $X_1,X_2,\ldots,X_n$ birbirinden bağımsız ve aynı F dağılım fonksiyonuna ve f yoğunluk fonksiyonuna sahip n tane rasgele değişken olsun. $X_1+X_2+\ldots+X_n$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F^{*n} ve yoğunluk fonksiyonu f^{*n} 'dır. Burada her n doğal sayısı için

$$F^{*(n+1)} = F^{*n} * F$$

olarak tanımlanır. Burada

$$F^{*1} = F,\ F^{*0}(x) = \varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

dır (Feller, 1971).

Teorem 1.2.2.3.1. $\{N(t), t \ge 0\}$ yenileme sürecinin dağılımı, ξ_n 'in dağılım fonksiyonu $F(t) = P\{\xi_n \le t\}$ ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$P\{N(t) = n\} = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t),\ n \ge 0,$$

burada $F^{*n}(t) = \int_0^t F^{*(n-1)}(t-x)dF(x),\ n \ge 1$ ve $F^{*0}(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 'dır.

İspat. T_n bağımsız ve aynı dağılıma sahip n tane pozitif rasgele değişkenlerin toplamı olduğu için olasılık teorisinden

$$P\{T_n \le t\} = F^{*n}(t)$$

olduğu bilinmektedir. Ayrıca $N(t)$ 'nin tanımına göre, t anına kadar gerçekleşen yenilemelerin sayısının, n'e eşit veya n'den büyük olması olayı ile t anında veya t anından önce, n. yenileme meydana gelmesi olayı birbirine denktir. Yani

$$N(t) \ge n \Leftrightarrow T_n \le t$$

olduğu açıktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= P\{N(t) \ge n\} - P\{N(t) \ge n+1\} \\ &= P\{T_n \le t\} - P\{T_{n+1} \le t\} \\ &= F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 1.2.2.3.4. $\{N(t), t \ge 0\}$ yenileme sürecinin beklenen değerine "yenileme fonksiyonu" denir ve $U(t)$ ile gösterilir. $U(t)$ yenileme fonksiyonu, $\{N(t), t \ge 0\}$ yenileme sürecinin $[0, t]$ aralığındaki yenilemelerin ortalama sayısını ifade eder.

Teorem 1.2.2.3.2. $U(t)$ yenileme fonksiyonu T_n 'nin dağılım fonksiyonu ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t).$$

İspat. $I_n \equiv I_n(t)$ ile n. yenilemenin $[0,t]$ aralığında olması olayının göstergesi işaret edilsin:

$$I_n = \begin{cases} 1, & \text{eğer n. yenileme } [0,t] \text{ aralığında ise} \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases} = \begin{cases} 1, & T_n \le t \\ 0, & T_n > t \end{cases}.$$

Bu durumda $N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n$ ve $P\{I_n = 1\} = P\{T_n \le t\}$ olduğu açıktır. Buna göre $I_n \ge 0$ için

$$U(t) = E(N(t)) = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} I_n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E(I_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{I_n = 1\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \le t\} = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)$$

elde edilir.

Teorem 1.2.2.3.3. $\forall t \in [0,\infty)$ için $U(t) < \infty$ ’dır.

İspat. ξ_n, $n \ge 1$ pozitif değerli ve kendi aralarında bağımsız rasgele değişkenler olduklarından ve $F^{*n}(t)$ ’nin tanımına göre

$$F^{*n}(t) = P\{T_n \le t\} = P\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots \xi_n \le t\} \le P\{\xi_1 \le t, \xi_2 \le t, \ldots \xi_n \le t\} = (F(t))^n$$

dır. Buradan $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) \le \sum_{n=0}^{\infty} (F(t))^n$ elde edilir. Böylece $|F(t)| < 1$ koşulunu sağlayan tüm t ’ler için $\sum_{n=0}^{\infty} (F(t))^n$ bir geometrik seridir ve yakınsaktır. O halde, böyle t ’ler için $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) < \infty$ ’dır. Diğer yandan, sonlu aralıkta tanımlanmış dağılımlar için öyle r sayısı seçmek mümkündür ki, $F^{*r}(t) < 1$ olsun. Buna göre bu serinin $n = r, 2r, 3r, \ldots,$ numaralı elemanları yakınsak seri oluşturur. $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)$ serisinin elemanları n ’e göre monoton oldukları için bu seri tüm n ’ler için yakınsaktır (Feller, 1971).

Teorem 1.2.2.3.4. Yenileme fonksiyonu, her mertebeden sonlu momente sahiptir.

İspat. $P\{\xi_n = 0\} < 1$ olduğu için olasılığın süreklilik özelliğinden $\exists \alpha > 0$ öyle ki $P\{\xi_i > \alpha\} \ge 0$ ’dır. Bu durumda

$$\bar{\xi}_n = \begin{cases} 0, & \xi_n < \alpha \\ \alpha, & \xi_n \ge \alpha \end{cases}$$

olmak üzere, $\{\bar{\xi}_n\}$, $n \ge 1$, birbirinden bağımsız, negatif olmayan, aynı dağılımlı rasgele değişkenler dizisidir. $\bar{N}(t) = \sup\{n : \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \ldots + \bar{\xi}_n \le t\}$ ise bu dizi üzerine kurulu bir diğer yenileme süreci olsun. Bu takdirde, $\overline{N}(t)$ yenileme sürecinde yenilemeler yalnızca $t = n\alpha,\ n = 0,1,\ldots$ zamanlarında gerçekleşebilir ve bu zamanların her birinde gerçekleşen yenilemelerin sayısı, birbirinden bağımsız, $1/P\{\xi_n \geq \alpha\}$ başarı olasılıklı, geometrik dağılıma sahip rasgele değişkenler olur. Bu durumda, $\overline{N}(t)$ negatif binom dağılımına sahip bir rasgele değişkendir. Bu nedenle

$$E(\overline{N}(t)) \leq \frac{t/\alpha + 1}{P\{\xi_n \geq \alpha\}} < \infty$$

dır ve $\bar{\xi}_n \leq \xi_n$ olduğu için $\overline{N}(t) \geq N(t)$'dır. Ayrıca, negatif binom dağılımına sahip bir rasgele değişkenin, her mertebeden sonlu momente sahip olduğu literatürden bilinmektedir (Ross, 1996). Bu ise ispatı bitirir.

Not 1.2.2.3.1. Yenileme fonksiyonu sağdan sürekli azalmayan bir fonksiyondur. Bununla birlikte

$$\lim_{t\to\infty} U(t) = \lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t\to\infty} F^{*n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

olmak üzere bir yenileme fonksiyonu $t \to \infty$ iken 1'e yakınsama özelliği hariç, bir dağılım fonksiyonunun bütün özelliklerine sahiptir.

$\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi ve ξ rasgele değişkeni aynı $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı olsun. Bunların dağılım fonksiyonları sırasıyla $F_n(x)$ ve $F(x)$ ile gösterilsin ve aşağıdaki tanımlar verilsin.

Tanım 1.2.2.3.5.

1) Olasılığa göre yakınsaklık: Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0$$

ise, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi, ξ rasgele değişkenine "olasılığa göre yakınsak"tır denir ve $\xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi(\omega)$ şeklinde yazılır.

2) Ortalamaya göre yakınsaklık: $\forall r > 0$ için $E(|\xi_n(\omega)|^r) < \infty$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} E(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^r) = 0$$

ise, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi, ξ rasgele değişkenine "r. mertebeden orta yakınsak"tır denir. Özel olarak,

$$\lim_{n\to\infty} E(|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|^2)=0$$

ise, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi, ξ rasgele değişkenine "ortalama karesel yakınsak"tır denir ve l.i.m. ile gösterilir.

3) Dağılıma göre yakınsaklık: $F(x)$'in sürekli olduğu noktalar için

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$$

ise, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi ξ rasgele değişkenine "dağılıma göre yakınsak"tır denir ve $\xi_n(\omega)\xrightarrow[n\to\infty]{d}\xi(\omega)$ şeklinde yazılır. Literatürde bu yakınsaklık çeşidi, zayıf yakınsaklık olarak da bilinmektedir.

4) 1 olasılığı ile yakınsaklık: Ölçüsü sıfır olan bir kümenin dışında

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)=\xi(\omega)\right\}=1 \text{ veya } P\left\{\lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)\neq\xi(\omega)\right\}=0$$

ise, 1 olasılığı ile $\xi_n(\omega)\xrightarrow[n\to\infty]{P}\xi(\omega)$ ise, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi ξ rasgele değişkenine "1 olasılığı ile yakınsak"tır denir ve $\xi_n(\omega)\xrightarrow[n\to\infty]{1}\xi(\omega)$ şeklinde yazılır.

Tanım 1.2.2.3.6. $f(x)$ ve $g(x)$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesi üzerinde tanımlı iki fonksiyon olsun. Bu takdirde

1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to a]{} c$ (sabit) ise $f(x)=O(g(x))$ olarak yazılır.

Örneğin, $1-\cos x=O(x^2)$'dır. Çünkü $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$'dır.

2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to a]{} 0$ ise $f(x)=o(g(x))$ olarak yazılır.

Örneğin, $1-\cos x=o(x)$'dır. Çünkü $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$'dır.

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to a]{} 1$ ise $f(x)\sim g(x)$ olarak yazılır ve buna $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları "asimptotik olarak denk"tirler denir.

Tanım 1.2.2.3.7. Bir ξ rasgele değişkeni 1 olasılığı ile

$$\{ak+b : k=0,\pm1,\pm2,\ldots,\ a,b>0\}$$

kümesinden değerler alıyorsa, ξ rasgele değişkene "aritmetik rasgele değişken" denir.

Teorem 1.2.2.3.5 (Elementer Yenileme Teoremi). Bir $\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme sürecinde, ardışık yenilemeler arası geçen zaman süreleri, aritmetik olmayan bir $F(t)$ dağılım fonksiyonuna ve sonlu μ ortalamasına sahip olsun. Bu takdirde

$$\frac{U(t)}{t} \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{1}{\mu}$$

dır (bkz, örneğin, Ross, 1996). Burada $\mu = E(\xi_n)$ 'dır.

Bu teoreme göre, uzun süre çalışmakta olan bir yenileme sürecinde, birim zamanda yapılan yenilemelerin beklenen sayısının $\frac{1}{\mu}$ olduğu söylenebilir.

Teorem 1.2.2.3.6 (Birinci Yenileme Teoremi). Herhangi bir $\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme sürecinde, ardışık yenilemeler arası geçen zaman süreleri, aritmetik olmayan bir $F(t)$ dağılım fonksiyonuna ve sonlu μ ortalamasına sahip ise herhangi bir $h > 0$ için

$$U(t) - U(t-h) \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{h}{\mu}$$

dır (Smith, 1958).

Teorem 1.2.2.3.7 (Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi). Herhangi bir $\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme sürecinde, ardışık yenilemeler arası geçen zaman süreleri, aritmetik olmayan bir $F(t)$ dağılım fonksiyonuna, sonlu μ ortalamasına ve sonlu σ^2 varyansına sahip olsun. Bu takdirde

$$0 \leq \left(U(t) - \frac{t}{\mu} \right) \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu^2}$$

olur (Feller, 1971).

N tam değerli rasgele değişkeni ve $\{\xi_n\}$ dizisi $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış olsun. Ayrıca $N \geq 0$ ve ξ_n rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız olsun. $\Im_{k,n}$ ile $\xi_k, \ldots, \xi_n$ rasgele değişkenlerinin ürettiği sigma cebir, yani $\Im_{k,n} = \sigma(\xi_k, \ldots, \xi_n)$ gösterilsin. Bu takdirde aşağıdaki tanım ve teoremleri vermek mümkündür:

Tanım 1.2.2.3.8. Her $n = 1, 2, \ldots$ için $\{N \leq n\}$ olayı, $\Im_{n+1,\infty}$ sigma cebirinden bağımsız olduğunda N rasgele değişkenine "gelecekten bağımsız rasgele değişken" denir.

Tanım 1.2.2.3.9. Her $n=1,2,\ldots$ için $\{N\le n\}\in \Im_{k,n}$ olduğunda N rasgele değişkenine "Markov rasgele değişkeni" veya "durdurma anı" denir.

Başka bir deyişle, bu durumda $\xi_k,\ldots,\xi_n$ rasgele değişkenlerinin değerleri bilindiğinde, $\{N\le n\}$ olayının gerçekleşip gerçekleşmediğini kesin olarak söylemek mümkündür. Bu durumda, N Markov rasgele değişkeni, ξ_k rasgele değişkenler dizisi için gelecekten bağımsız rasgele değişkendir (Borovkov, 1986).

$S_N=\xi_1+\ldots+\xi_N$ olsun. S_N rasgele sayıda rasgele değişkenin toplamıdır.

Teorem 1.2.2.3.8 (Kolmogorov-Prokhorov Teoremi). Negatif olmayan tam değerli rasgele değişkeni N, gelecekten bağımsız bir rasgele değişken olsun. Eğer

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{N\ge k\}E(|\xi_k|)<\infty \tag{1.2}$$

koşulu sağlanıyorsa, bu takdirde

$$E(S_N)=\sum_{k=1}^{\infty} P\{N\ge k\}E(\xi_k) \tag{1.3}$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca $\xi_k\ge 0$ olduğunda (1.2) koşuluna gerek yoktur (Borovkov, 1986). Bu teoremin önemli bir sonucu olan aşağıdaki teorem, literatürde Wald özdeşliği olarak bilinmektedir.

Teorem 1.2.2.3.9 (Wald Özdeşliği). $\xi_1,\xi_2,\ldots$ rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız ve aynı dağılıma sahip, N rasgele değişkeni ise gelecekten bağımsız bir rasgele değişken olsun. Ayrıca $E(\xi_k)<\infty$ ve $E(N)<\infty$ olsun. Bu takdirde

$$E(S_N)=E(\sum_{k=1}^{N}\xi_k)=E(\xi_1)E(N) \tag{1.4}$$

dır. (1.4) eşitliğine "Wald özdeşliği" denir (Borovkov, 1986).

Tanım 1.2.2.3.10. X ve Y, sırasıyla $F(t)$ ve $G(t)$, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı dağılım fonksiyonlarına sahip birbirinden bağımsız iki rasgele değişken olsun. Bu durumda $F(t)$ fonksiyonunun sırasıyla Laplace ve Laplace-Stieltjes dönüşümleri

$$\tilde{F}(\lambda)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}F(x)dx \text{ ve } F^*(\lambda)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dF(x),\ \lambda>0$$

ile ifade edilir. Bilinmelidir ki, $(F*G)(t)$, $X+Y$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$(F*G)(\lambda)=\tilde{F}(\lambda).\tilde{G}(\lambda)$$

dır (Feller, 1971).

Teorem 1.2.2.3.10 (Tauber-Abel Teoremi). $F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonlarının Laplace donüşümleri $\tilde{F}(\lambda)$ ve $\tilde{G}(\lambda)$ mevcut olsun. En azından öyle bir $(-\alpha,\beta)$ aralığı mevcut olsun ki, her $\lambda \in (-\alpha,\beta))$, $\alpha,\beta > 0$ için $\tilde{F}(\lambda)$ ve $\tilde{G}(\lambda)$ mevcut ve sonlu olsun. Ayrıca

$$t \to \infty \text{ iken } F(t) \sim G(t) \;\Leftrightarrow\; \lambda \to 0 \text{ iken } \tilde{F}(\lambda) \sim \tilde{G}(\lambda)$$

dır. Burada "$\sim$" simgesi ile iki fonksiyonun asimptotik denkliği gösterilmiştir, yani

$$\lim_{t\to\infty}\frac{F(t)}{G(t)} = 1 \text{ ise } F(t) \sim G(t) \text{ ve } \lim_{\lambda\to 0}\frac{\tilde{F}(\lambda)}{\tilde{G}(\lambda)} = 1 \text{ ise } \tilde{F}(\lambda) \sim \tilde{G}(\lambda)$$

dır. Bu önerme literatürde "Tauber-Abel teoremi" olarak bilinmektedir (Feller, 1971).

1.3. Literatür Araştırması

Yenileme süreçleri, stokastik süreçler teorisinde ve onun uygulamalarında önemli bir role sahiptir. Literatürde yenileme süreçlerinin kendi karakteristiklerine ait bazı çalışmalar mevcuttur. Örneğin, Smith (1958), Feller (1971), $U(t)$ yenileme fonksiyonu için iki terimli asimptotik açılım elde etmişlerdir.

Bu alanda diğer önemli bir çalışma, Alsmeyer (1988) tarafından yapılmıştır. Alsmeyer, $\{(S_n, U_n)\}_{n\geq 0}$ genişletilmiş yenileme süreci üzerinde $EU_{T(t)}$, $\mathrm{Var}\, U_{T(t)}$ ve $\mathrm{Cov}\left(U_{T(t)}, T(t)\right)$ fonksiyonları için $t \to \infty$ iken iki terimli asimptotik açılım elde etmiştir. Ayrıca benzer sonuçları $EU_{N(t)}$, $\mathrm{Var}\, U_{N(t)}$ ve $\mathrm{Cov}\left(U_{N(t)}, N(t)\right)$ fonksiyonları için de elde etmiştir. Burada

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i,\; U_n = \sum_{i=0}^{n} Y_i,\; T(t) = \inf\{n \geq 0 : S_n > t\},\; N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\},\; t \geq 0$$

ve (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), … birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip olmak üzere, (X_0, Y_0), (X_1, Y_1), … birbirinden bağımsız iki boyutlu rasgele vektörlerin bir dizi olarak tanımlanmıştır.

Yenileme süreçlerinin en çok uygulandığı alanlardan biri de risk teorisidir. Alsmeyer'in (1988) çalışmasındaki X_1, X_2,… ve Y_1, Y_2, … sırasıyla kolektif risk teorisinde, sigorta ödemeleri arasındaki zamanları ve sigorta ödemelerinin miktarını göstermektedir. Literatürde $\{N(t)\}_{t\geq 0}$, "sigorta ödemelerinin sayısı" ve $\{U_{N(t)}\}_{t\geq 0}$, "toplam sigorta ödemelerinin süreci" veya "risk süreci" olarak yer almaktadır (Ross, 1996).

Alsmeyer (1991), harmonik yenileme ölçüsü ile sürecin ilk kez kontrol seviyesinden düşme anı arasındaki ilişkiyi de incelemiştir. Bu çalışmada Alsmeyer, basamak anı ve yüksekliklerinin olasılık karakteristiklerini hesaplamak için gerekli olan harmonik yenileme ölçüsünü aşağıdaki gibi ele almıştır:

$$U_1\{I\} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P\{S_n \in I\}, I \subseteq \mathbb{R},\ \ S_n = \sum_{i=1}^{n}\eta_i,\ n \geq 1,$$

burada $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisini göstermektedir. Ayrıca Alsmeyer, harmonik yenileme fonksiyonu için aşağıdaki gibi iki terimli asimptotik açılım elde etmiştir:

$$U_1(x) = \log(x/\mu) + \gamma + o(1),\ x \to \infty$$

burada $E(\eta_1) \equiv \mu > 0$, $U_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P\{S_n \leq x\}$, bir harmonik yenileme fonksiyonu ve γ, Euler sabitidir.

Ayrıca Alsmeyer ve Hoefs (2001), durağan $(m+1)$-blokfaktörler için Markov yenileme teorisi incelemiştir.

Khaniyev (2005), genelleştirilmiş yenileme sürecinin ilk üç momentini analitik ve asimptotik yöntemlerle incelemiştir.

Bu çalışmalardan farklı olarak, ödüllü yenileme süreçleri üzerinde yapılmış birçok çalışma mevcuttur. Örneğin, Jewell (1967), yenileme sürecine gömülü ödüllü yenileme sürecinin değişimini incelemiştir. Ayrıca, Brown ve Solomon (1975), $\{C(t),\ t \geq 0\}$ ödüllü yenileme sürecinin birinci ve ikinci momentleri için iki terimli asimptotik açılım elde etmiş ve bu sürecin varyansının $\mathrm{Var}\ C(t) = ct + d + o(1)$ şeklinde olduğunu göstermiştir. Bu çalışmada, Brown ve Solomon, ödüllü yenileme sürecini aşağıdaki gibi inşa etmiştir:

$$C(t) = \begin{cases} 0 & ,\ t < X_0 \\ \sum_{i=0}^{N(t)-1} Y_i\ , & t \geq X_0 \end{cases},\ N(t) = \min\{\, j : S_j > t\},\ t \geq 0,\ S_j = \sum_{i=0}^{j} X_i\ ,\ j = 0,1,2,\ldots$$

burada $\{(X_i, Y_i),\ i = 0,1,2,\ldots\}$ bağımsız rasgele vektörlerin bir dizisi olmak üzere, (X_i, Y_i), $i \geq 1$ aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler ve $\{X_i,\ i = 0,1,2,\ldots\}$ bir yenileme dizisidir.

Ayrıca Ross (1996), kalan ömür ve yaşı ifade eden yenileme sürecini ve onun asimptotik davranışını, Csenki (2000), geriye dönük ödül yapılı bir ödüllü yenileme sürecinin asimptotikliğini ve Levy ve Taqqu (2001), ağır kuyruklu dağılıma sahip bir ödüllü yenileme sürecinin asimptotikliğini incelemişlerdir.

Kokangül vd. (2011), üçgensel müdahaleli ödüllü yenileme sürecinini, Mammadova (2011) ise, normal müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin ergodik dağılımının ve sınır fonksiyonellerinin temel olasılık parametrelerini asimptotik yöntemlerle incelemiştir.

Okur Bekar (2006), yüksek lisans tezinde üstel müdahaleli ödüllü yenileme sürecini aşağıdaki gibi bir kaç aşamada incelemiştir. Bu çalışmada

1) Süreç matematiksel olarak inşa edilmiştir.
2) Sürecin sınır fonksiyonelleri analitik ve asimptotik yöntemlerle incelenmiştir.
3) Özel olarak, Erlang dağılımının ürettiği yenileme fonksiyonu bulunmuştur.
4) Sürecin bir boyutlu dağılımları incelenmiştir.
5) Sürecin toplamsal fonksiyonellerinin dağılımları incelenmiştir.
6) Sürecin ergodikliği ve ergodik dağılım fonksiyonunun kesin şekli bulunmuştur.
7) Üstel müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun kesin şekli elde edilmiştir.
8) Üstel müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin ergodik dağılımının temel olasılık parametreleri bulunmuştur.

Yukarıdaki çalışmadan farklı olarak, bu tezde ödüllü yenileme sürecinin sınır fonksiyonelleri ve ergodik dağılımının olasılık karakterisitkleri bir yenileme fonksiyonu aracılığı ile elde edilmiştir.

Ayrıca bu tezde, sürecin müdahale dağılımı üstelden daha geniş olan gamma ve Weibull sınıfından alınarak, sınır fonksiyonelleri ve ergodik dağılımının temel olasılık parametreleri analitik ve asimptotik yöntemlerle incelenmiştir.

Bu tezde, sürecin müdahale dağılımının gamma ve Weibull sınıfından olması durumunda, üstel müdahaleli ödüllü yenileme sürecinde kullanılan Laplace yönteminin yetersiz kaldığı görülmüş ve bu durumda sürecin incelenmesinde yukarıdaki çalışmadan farklı yöntemler kullanılmıştır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Aşağıdaki kurallarla çalışan bir stok kontrol modelini ele alınsın:

Bir depodaki "stok miktarı" $X(t)$, $t = 0$ başlangıç anında $X(0) \equiv X_0 \equiv s + v$ 'a eşit olsun. Burada $0 < s < \infty$ olup, s' ye "stok kontrol seviyesi" denir.

Ayrıca, depodaki stok miktarının, önceden belirlenmiş s kontrol seviyesinin altına ininceye dek geçen rasgele anlar $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ ile ve bu rasgele anlardaki rasgele miktardaki azalmalar ise $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n, ...$ ile gösterilsin. Bu durumda, depodaki stok miktarı aşağıdaki gibi değişmektedir:

$$X(T_1) \equiv X_1 = s+v-\eta_1, \quad X(T_2) \equiv X_2 = s+v-\left(\eta_1+\eta_2\right), ..., \quad X(T_n) \equiv X_n = s+v-\sum_{i=1}^{n}\eta_i$$

Sürecin bu biçimde değişmesine "doğal değişim" denilsin. $X_n < s$ olduğu ilk anda (τ_1), sistemin doğal değişimine müdahale edilerek, depodaki stok seviyesi ani olarak, ζ_1 pozisyonuna getirilsin ve böylece sistemin çalışmasının birinci periyodu tamamlanmış olsun.

Daha sonra sistem, yeni başlangıç durumu olan ζ_1 noktasından başlayarak, doğal değişimini birinci devredekine benzer biçimde sürdürsün. Stok miktarı, s kontrol seviyesinin altına indiği anda, sisteme birinci devredeki gibi müdahale edilerek, depodaki stok seviyesi ani olarak ζ_2 pozisyonuna getirilsin ve bundan sonra süreç benzer şekilde çalışmaya devam etsin. Bu modeli ifade eden stokastik sürece "kesikli şans karışımlı süreç" denir.

Bilinmelidir ki, ζ_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu uygun şekilde değiştirilerek, onlarca özel bariyerli yarı-Markov süreç elde edilebilir. Bu çalışmada, ζ_1, ζ_2, $\ldots$ pozisyonları, sırasıyla gamma ve Weibull dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenler olarak kabul edilecektir.

Aşağıda bu modeli ifade eden $X(t)$ sürecinin matematiksel kuruluşu verilmektedir.

2. 1. Sürecin Matematiksel Kuruluşu

$\{\xi_n, \eta_n, \zeta_n\}$, $n \geq 1$ dizisi, $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış, bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele vektörler dizisi olsun. Ayrıca ξ_n, η_n ve ζ_n rasgele değişkenleri kendi aralarına bağımsız ve pozitif değerli değişkenler olsun. Bu rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonlarının bilindiği varsayılsın ve bunlar sırası ile aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$\Phi(t) = P\{\xi_1 \leq t\},\ t > 0;\ F(x) = P\{\eta_1 \leq x\},\ x > 0;\ \pi(v) = P\{\zeta_1 \leq v\},\ v > 0.$$

Bunun yanı sıra $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ başlangıç rasgele değişkenleri kullanılarak $\{T_n\}$ ve $\{S_n\}$ yenileme dizileri aşağıdaki gibi inşa edilsin:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i,\ T_0 = S_0 = 0,\ n \geq 1.$$

Tam değerler alan $\{N_n\}$, $n \geq 0$ rasgele değişkenler dizisi ise aşağıdaki gibi verilsin:

$$N_0 = 0,\ N_1 = N(v) = \inf\{k \geq 1:\ S_k > v\}, v > 0;$$

$$N_{n+1} \equiv N_{n+1}(\zeta_n) = \inf\left\{k \geq N_n + 1: S_k - S_{N_n} > \zeta_n\right\},\ n \geq 1$$

burada $\inf(\varnothing) = +\infty$ şartı kabul edilmiştir. Ayrıca

$$\tau_0 = 0;\ \tau_1 = T_{N_1} = \sum_{i=1}^{N(v)} \xi_i;\ \tau_{n+1} \equiv \tau_{n+1}(\zeta_n) = T_{N_{n+1}} = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} \xi_i,\ n \geq 1$$

olsun ve $\nu(t)$ yenileme süreci aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\nu(t) = \max\{n \geq 0:\ T_n \leq t\},\ t > 0.$$

Bu durumda, $X(t)$ stokastik süreci aşağıdaki gibi verilebilir:

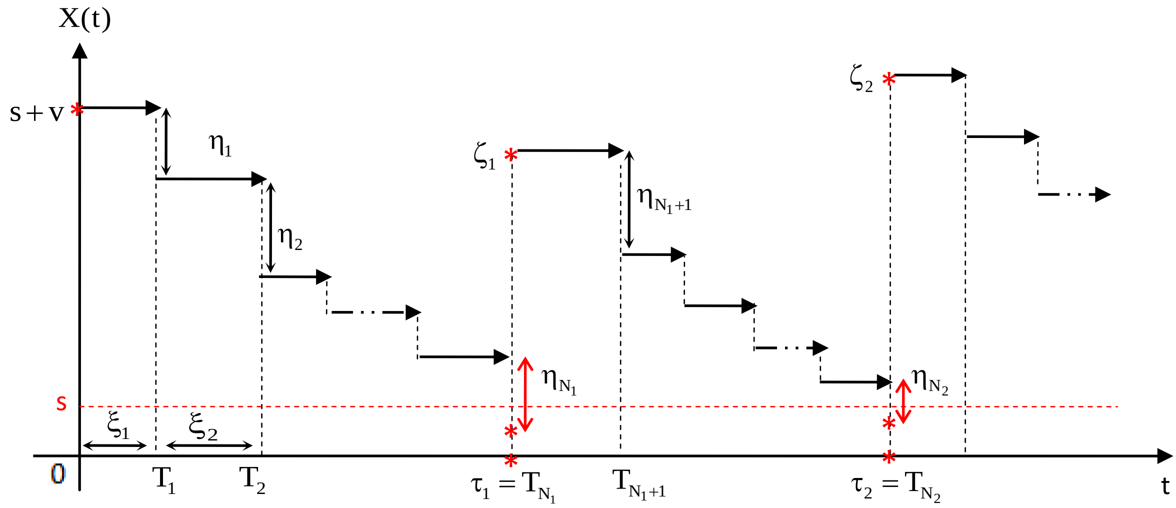
$$\forall t \in [\tau_n, \tau_{n+1})\ \text{için}\ X(t) = \max\left\{s,\ s + \zeta_n - S_{\nu(t)} + S_{N_n}\right\},\ n \geq 0$$

burada $\zeta_0 = s + v$, $0 \leq s < \infty$ ve $S_{N_n} = S_{\nu(\tau_n + 0)}$ ’dir.

Bu şekilde tanımlanan $X(t)$ sürecine, literatürde “kesikli müdahaleli ödüllü yenileme süreci” denir. Kesikli müdahaleyi ifade eden $\{\zeta_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenleri gamma dağılımında sahip olduğunda, sürece “gamma müdahaleli ödüllü yenileme süreci”, Weibull dağılımında sahip olduğunda ise, sürece “Weibull müdahaleli ödüllü yenileme süreci” denir.

Bu çalışmada amaç, gamma ve Weibull müdahaleli ödüllü yenileme süreçlerinin olasılık karakteristiklerini incelemektir.

$X(t)$ sürecinin bir realizasyonu aşağıdaki gibi gösterilebilir:



Şekil 7. $X(t)$ Ödüllü yenileme sürecinin bir realizasyonu

2.2. Sürecin Sınır Fonksiyonellerinin İncelenmesi

τ_1 rasgele değişkenine, "sürecin ilk kez kontrol seviyesine ulaşma anı" denir ve N_1 sınır fonksiyoneli ise, "bu ana kadar olan sıçramaların sayısını" göstermektedir. Bu rasgele değişkenler birer sınır fonksiyoneli olup sürecin birçok karakteristiklerinin incelenmesinde büyük önem taşımaktadır. Özellikle sürecin ergodik dağılımlarının incelenmesi için bu rasgele değişkenlerin dağılımının ve bazı olasılık karakteristiklerinin bilinmesi gereklidir. Bu nedenle bu kısımda, sırasıyla N_1 ve τ_1 sınır fonksiyonelleri incelenecektir.

2.2.1. Sürecin Sınır Fonksiyonellerinin İlk Dört Momenti İçin Kesin Formüller

Bu kısımda sürecin sınır fonksiyonellerinin ilk dört momenti, η_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu tarafından üretilen $U_\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x)$ yenileme fonksiyonu yardımıyla ifade edilecektir. Burada $F(x) = P\{\eta_1 \leq x\}$, η_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu göstermektedir.

Teorem 2.2.1.1. $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonunun yardımıyla, $N_1(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$EN_1(x) = U_\eta(x), \tag{1}$$

$$EN_1^2(x) = 2U_\eta^{*2}(x) + U_\eta(x), \tag{2}$$

$$EN_1^3(x) = 6U_\eta^{*3}(x) + 6U_\eta^{*2}(x) + U_\eta(x), \tag{3}$$

$$EN_1^4(x) = 24U_\eta^{*4}(x) + 36U_\eta^{*3}(x) + 14U_\eta^{*2}(x) + U_\eta(x). \tag{4}$$

İspat. $\{\eta_k\}$, $k \geq 1$ birbirinden bağımsız rasgele değişkenler dizisi olduğundan

$$EN_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P\{N_1(x) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n\left[F^{*(n-1)}(x) - F^{*n}(x)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) \equiv U_\eta(x)$$

dır. $N_1(x)$ sınır fonksiyonelinin moment çıkaran fonksiyonu $\Psi(v,x) = E[v^{N_1(x)}]$ olsun. Bu takdirde,

$$\Psi(v,x) = E(v^{N_1(x)}) = \sum_{n=1}^{\infty} v^n P\{N_1(x) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} v^n\left[F^{*(n-1)}(x) - F^{*n}(x)\right],\ |v| < 1 \tag{5}$$

dır. $\Psi(v,x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $\tilde{\Psi}(v,\beta)$ şeklinde gösterilsin. Bu durumda $\beta > 0$ için $\varphi(\beta) = E(e^{-\beta\eta_1})$ olmak üzere

$$\tilde{\Psi}(v,\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta x}\Psi(v,x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} v^n \int_0^{\infty} e^{-\beta x}\left[F^{*(n-1)}(x) - F^{*n}(x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} v^n\left[\int_0^{\infty} e^{-\beta x} dF^{*(n-1)}(x) - \int_0^{\infty} e^{-\beta x} dF^{*n}(x)\right] = \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} v^n\left[\varphi^{n-1}(\beta) - \varphi^n(\beta)\right]$$

$$= \frac{v(1-\varphi(\beta))}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left[v\varphi(\beta)\right]^{n-1}$$

dır. O halde $|v\varphi(\beta)| < 1$ için

$$\tilde{\Psi}(v,\beta) = \frac{v(1-\varphi(\beta))}{\beta(1-v\varphi(\beta))} \tag{6}$$

dır. Diğer taraftan, moment çıkaran fonksiyonunun özelliklerine göre

$$\Psi^{(n)}(1,x) = E\left(N_1^{[n]}(x)\right)$$

dır. Burada $N_1^{[n]}(x) = N_1(x)\left(N_1(x)-1\right)\ldots\left(N_1(x)-n+1\right)$'dır. O halde

$$\tilde{\Psi}^{(n)}(1,\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta x} E\left(N_1^{[n]}(x)\right)dx \tag{7}$$

dır. Buna göre, v parametresine göre (6) eşitliğinin iki kez türevi alınırsa

$$\tilde{\Psi}''(v,\beta)=\frac{2\varphi(\beta)\left(1-\varphi(\beta)\right)}{\beta\left(1-v\varphi(\beta)\right)^{3}} \tag{8}$$

elde edilir. Bu durumda, (7) eşitliği ve $v=1$ için (8) eşitliği kullanılarak

$$\tilde{\Psi}''(1,\beta)=\int_{0}^{\infty}e^{-\beta x}E\left(N_1^{[2]}(x)\right)dx=\frac{2\varphi(\beta)}{\beta\left(1-\varphi(\beta)\right)^{2}} \tag{9}$$

elde edilir. Ayrıca $x\geq y$ ve $\beta>0$ için

$$\int_{0}^{\infty}e^{-\beta x}U_{\eta}^{*2}(x)dx=\int_{x=0}^{\infty}e^{-\beta x}\left(\int_{y=0}^{x}U_{\eta}(x-y)dU_{\eta}(y)\right)dx=\int_{y=0}^{\infty}dU_{\eta}(y)\int_{y=x}^{\infty}e^{-\beta x}U_{\eta}(x-y)dx$$

$$=\int_{y=0}^{\infty}dU_{\eta}(y)\int_{v=0}^{\infty}e^{-\beta(v+y)}U_{\eta}(v)dv=\int_{y=0}^{\infty}e^{-\beta y}dU_{\eta}(y)\int_{v=0}^{\infty}e^{-\beta v}U_{\eta}(v)dv$$

dır. Burada

$$\int_{y=0}^{\infty}e^{-\beta y}dU_{\eta}(y)=\frac{\varphi(\beta)}{1-\varphi(\beta)}\quad \text{ve}\quad \int_{v=0}^{\infty}e^{-\beta v}U_{\eta}(v)dv=\frac{1}{\beta\left(1-\varphi(\beta)\right)}$$

olduğundan $\beta>0$ için

$$\int_{0}^{\infty}e^{-\beta x}U_{\eta}^{*2}(x)dx=\frac{\varphi(\beta)}{\beta\left(1-\varphi(\beta)\right)^{2}} \tag{10}$$

elde edilir. Sonuç olarak (10) eşitliği, (9) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$E\left(N_1^{[2]}(x)\right)=2U_{\eta}^{*2}(x) \tag{11}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}E\left(N_1^{[2]}(x)\right)&=E\left[N_1(x)\left(N_1(x)-1\right)\right]\\&=EN_1^2(x)-EN_1(x)\\&=EN_1^2(x)-U_{\eta}(x)\end{aligned} \tag{12}$$

olduğundan (11) ve (12) eşitliklerinden (2) eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde, $N_1(x)$ sınır fonksiyonelinin üçüncü momenti elde edilir. Yani, (6) eşitliğinin v parametresine göre üç kez türevi alınırsa

$$\tilde{\Psi}'''(v,\beta)=\frac{6\varphi^{2}(\beta)\left(1-\varphi(\beta)\right)}{\beta\left(1-v\varphi(\beta)\right)^{4}} \tag{13}$$

elde edilir. Bu durumda (13) ve (8) eşitlikleri kullanılarak

$$\tilde{\Psi}'''(1,\beta)=\int_0^{\infty}e^{-\beta x}E\left(N_1^{[3]}(x)\right)dx=\frac{6\varphi^2(\beta)}{\beta\left(1-\varphi(\beta)\right)^3} \tag{14}$$

elde edilir. Ayrıca $\beta>0$ için

$$\int_0^{\infty}e^{-\beta x}U_{\eta}^{*3}(x)dx=\frac{\varphi^2(\beta)}{\beta\left(1-\varphi(\beta)\right)^3} \tag{15}$$

olduğu açıktır. Sonuç olarak (14) ve (15) eşitliklerinden

$$E\left(N_1^{[3]}(x)\right)=6U_{\eta}^{*3}(x) \tag{16}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} E\left(N_1^{[3]}(x)\right)&=E\left[N_1(x)\left(N_1(x)-1\right)\left(N_1(x)-2\right)\right]\\ &=EN_1^3(x)-3EN_1^2(x)+2EN_1(x)\\ &=EN_1^3(x)-6U_{\eta}^{*3}(x)-U_{\eta}(x) \end{aligned} \tag{17}$$

olduğundan (16) ve (17) eşitliklerinden (3) eşitliği elde edilir.

$N_1(x)$ sınır fonksiyonelinin dördüncü momenti de yukarıdaki yöntemle elde edilebilir. O halde, (6) eşitliğinin v parametresine göre dört kez türevi alınırsa

$$\tilde{\Psi}^{(IV)}(v,\beta)=\frac{24\varphi^3(\beta)\left(1-\varphi(\beta)\right)}{\beta\left(1-v\varphi(\beta)\right)^5} \tag{18}$$

elde edilir. Bu durumda (18) ve (8) eşitlikleri kullanılarak

$$\tilde{\Psi}^{(IV)}(1,\beta)=\int_0^{\infty}e^{-\beta x}E\left(N_1^{[4]}(x)\right)dx=\frac{24\varphi^3(\beta)}{\beta\left(1-\varphi(\beta)\right)^4} \tag{19}$$

elde edilir. Ayrıca $\beta>0$ için

$$\int_0^{\infty}e^{-\beta x}U_{\eta}^{*4}(x)dx=\frac{\varphi^3(\beta)}{\beta\left(1-\varphi(\beta)\right)^4} \tag{20}$$

olduğu açıkça görülmektedir. Sonuç olarak (20) eşitliğinde (19) eşitliği yerine yazılırsa

$$E\left(N_1^{[4]}(x)\right)=24U_{\eta}^{*4}(x) \tag{21}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} E\left(N_1^{[4]}(x)\right)&=E\left[N_1(x)\left(N_1(x)-1\right)\left(N_1(x)-2\right)\left(N_1(x)-3\right)\right]\\ &=EN_1^4(x)-6EN_1^3(x)+11EN_1^2(x)-6EN_1(x)\\ &=EN_1^4(x)-36U_{\eta}^{*3}(x)-14U_{\eta}^{*2}(x)-U_{\eta}(x) \end{aligned} \tag{22}$$

dır. Son olarak (21) ve (22) eşitlikleri ile (4) eşitliği elde edilir.

$\tau_1(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momentinin, $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonunun yardımıyla ifade edilebilmesi için aşağıdaki yardımcı teoreme ihtiyaç vardır:

Yardımcı Teorem 2.2.1.1. ξ_1 ve η_1 başlangıç rasgele değişkenleri ek olarak aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) $a_4 = E(\xi_1^4) < \infty$, ii) $m_3 = E(\eta_1^3) < \infty$.

Bu takdirde, $\tau_1(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti ξ_1 ve $N_1(x)$ rasgele değişkenlerinin momentleri yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir (Okur Bekar, 2006):

$$E\tau_1(x) = a_1 EN_1(x), \tag{23}$$

$$E\tau_1^2(x) = a_1^2 EN^2(x) + (a_2 - a_1^2) EN_1(x), \tag{24}$$

$$E\tau_1^3(x) = a_1^3 EN_1^3(x) + 3a_1(a_2 - a_1^2) EN_1^2(x) + (2a_1^3 - 3a_1 a_2 + a_3) EN_1(x) \tag{25}$$

$$\begin{aligned} E\tau_1^4(x) = {} & a_1^4 EN_1^4(x) + 6a_1^2(a_2 - a_1^2) EN_1^3(x) \\ & + (11a_1^4 - 18a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 3a_2^2) EN_1^2(x) \\ & + (a_4 + 12a_1^2 a_2 - 4a_1 a_3 - 3a_2^2 - 6a_1^4) EN_1(x), \end{aligned} \tag{26}$$

burada $a_k = E(\xi_1^k)$, $k = \overline{1,4}$’dır.

Teorem 2.2.1.2. ξ_1 ve η_1 başlangıç rasgele değişkenleri ek olarak aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) $a_4 = E(\xi_1^4) < \infty$, ii) $m_3 = E(\eta_1^3) < \infty$.

Bu takdirde, $\tau_1(x)$ sınır fonksiyonelinin de ilk dört momenti, $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonunun yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\tau_1(x) = a_1 U_\eta(x), \tag{27}$$

$$E\tau_1^2(x) = 2a_1^2 U_\eta^{*2}(x) + a_2 U_\eta(x), \tag{28}$$

$$E\tau_1^3(x) = 6a_1^3 U_\eta^{*3}(x) + 6a_1 a_2 U_\eta^{*2}(x) + a_3 U_\eta(x), \tag{29}$$

$$E\tau_1^4(x) = 24a_1^4 U_\eta^{*4}(x) + 36a_1^2 a_2 U_\eta^{*3}(x) + \left(8a_1 a_3 + 6a_2^2\right) U_\eta^{*2}(x) + a_4 U_\eta(x), \tag{30}$$

burada $a_k = E(\xi_1^k)$, $k = \overline{1,4}$’dır.

İspat. Yardımcı teorem 2.2.1.1’de elde edilen (1)-(4) eşitlikleri, Yardımcı Teorem 2.2.1.2’deki (23)-(26) eşitliklerinde uygun şekilde yerine yazıldığında, $\tau_1(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti, $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonunun yardımıyla sırasıyla (27)-(30) eşitliklerindeki gibi ifade edilmiş olur.

Sonuç 2.2.1.1. η_1 rasgele değişkeni mutlak sürekli dağılıma sahip olsun. Bu takdirde, Teorem 2.2.1.2'nin koşulları altında $E\tau_1^n(x)$ $(n=\overline{1,4})$ fonksiyonu, $[0,\infty)$ aralığının her hangi bir kapalı alt aralığında sınırlıdır.

İspat. Bilinmektedir ki $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonu, η_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu tarafından üretilmektedir ve η_1 mutlak sürekli dağılıma sahip bir rasgele değişkendir. Bu durumda $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonu, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde süreklidir ve bu nedenle $[0,\infty)$ aralığının her hangi bir kapalı alt aralığında sınırlıdır. Bu durumda, $U_\eta^{*n}(x)\,(n=\overline{1,4})$ konvolüsyon çarpımı da $[0,\infty)$ aralığının her hangi bir kapalı alt aralığında sınırlıdır. Sonuç olarak, $X(t)$ sürecinin $\tau_1(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti de yenileme fonksiyonunun konvolüsyon çarpımı ile yazılabildiği için $[0,\infty)$ aralığının her hangi bir kapalı alt aralığında sınırlıdır.

2.2.2. Sürecin Sınır Fonksiyonellerinin İlk Dört Momenti İçin Asimptotik Açılımlar

Önceki kısımda, sürecin sınır fonksiyonellerinin ilk dört momenti ile $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonu yardımıyla elde edilmiştir. Ancak elde edilen bu formüllerin problemlerin çözümlenmesinde uygulanması oldukça zor olacağından, pratikte daha kolay kullanılabilir formüllerin elde edilmesine ihtiyaç vardır.

Bütün bu nedenler göz önünde bulundurularak, ele alınan sürecin gerekli olasılık karakteristiklerinin asimptotik yöntemlerle incelenmesi gerekmektedir. Bu durumda, sürecin sınır fonksiyonellerinin ilk dört momenti için asimptotik açılımlar elde edilmelidir. Bu amaca ulaşmak için aşağıda bir yardımcı teorem verilecektir:

Yardımcı Teorem 2.2.2.1. η_1 başlangıç rastgele değişkeninin ilk üç momenti mevcut ve sonlu olsun. Bu takdirde, $x\to\infty$ iken $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonunun n. konvolüsyon çarpımı $(n=\overline{1,4})$ için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$U_\eta(x)=\frac{x}{m_1}+\frac{m_2}{2m_1^2}+o\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (31)$$

$$U_\eta^{*2}(x)=\frac{x^2}{2m_1^2}+\left(\frac{m_2}{m_1^3}-\frac{1}{m_1}\right)x+\left(\frac{3m_2^2}{4m_1^4}-\frac{m_3}{3m_1^3}-\frac{m_2}{2m_1^2}\right)+o(1), \tag{32}$$

$$U_\eta^{*3}(x)=\frac{x^3}{6m_1^3}+\left(\frac{3m_2}{4m_1^4}-\frac{1}{m_1^2}\right)x^2+\left(\frac{3m_2^2}{m_1^5}-\frac{m_3}{2m_1^4}-\frac{2m_2}{m_1^3}+\frac{1}{m_1}\right)x+o(x), \tag{33}$$

$$U_\eta^{*4}(x)=\frac{x^4}{24m_1^4}+\left(\frac{m_2}{3m_1^5}-\frac{1}{2m_1^3}\right)x^3+\left(\frac{5m_2^2}{4m_1^6}-\frac{7m_3}{12m_1^5}-\frac{9m_2}{4m_1^4}+\frac{3}{2m_1^2}\right)x^2+o(x^2), \tag{34}$$

burada $m_k=E(\eta_1^k)$, $k=\overline{1,3}$ ’dır.

İspat. $E(\eta_1^2)<\infty$ koşulu altında, $x\to\infty$ iken $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik açılım doğrudur:

$$U_\eta(x)=\frac{x}{m_1}+\frac{m_2}{2m_1^2}+o(\frac{1}{x}).$$

Ayrıca $E(\eta_1^3)<\infty$ koşulu altında, $\varphi(\beta)$ ’nin üç terimli Maclauren serisini $\beta\to 0$ iken aşağıdaki gibi yazmak mümkündür (Lukac, 1970):

$$\varphi(\beta)=E(e^{-\beta\eta_1})=1-\beta E(\eta_1)+\frac{\beta^2}{2!}E(\eta_1^2)-\frac{\beta^3}{3!}E(\eta_1^3)+o(\beta^3), \tag{35}$$

$$\varphi^2(\beta)=1-2m_1\beta+\left(m_1^2+m_2\right)\beta^2-\left(m_1m_2+\frac{m_3}{3}\right)\beta^3+o(\beta^3), \tag{36}$$

$$\varphi^3(\beta)=1-3m_1\beta+\left(3m_1^2+\frac{3}{2}m_2\right)\beta^2-\left(m_1^3+3m_1m_2+\frac{m_3}{2}\right)\beta^3+o(\beta^3) \tag{37}$$

Bu durumda aşağıdaki asimptotik açılımlar doğrudur:

$$\left(1-\varphi(\beta)\right)^{-1}=\frac{1}{\beta m_1}\left[1+\frac{m_2}{2m_1}\beta-\left(\frac{m_2^2}{4m_1^2}-\frac{m_3}{6m_1}\right)\beta^2+o(\beta^2)\right],$$

$$\left(1-\varphi(\beta)\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\beta m_1\right)^2}\left[1+\frac{m_2}{m_1}\beta+\left(\frac{3m_2^2}{4m_1^2}-\frac{m_3}{3m_1}\right)\beta^2+o(\beta^2)\right], \tag{38}$$

$$\left(1-\varphi(\beta)\right)^{-3}=\frac{1}{\left(m_1\beta\right)^3}\left[1+\frac{3m_2}{2m_1}\beta+\left(\frac{3m_2^2}{2m_1^2}-\frac{m_3}{2m_1}\right)\frac{\beta^2}{2}+o(\beta^2)\right], \tag{39}$$

$$\left(1-\varphi(\beta)\right)^{-4}=\frac{1}{\left(m_1\beta\right)^4}\left[1+\frac{2m_2}{m_1}\beta+\left(\frac{5m_2^2}{2m_1^2}-\frac{2m_3}{3m_1}\right)\beta^2+o(\beta^2)\right]. \tag{40}$$

Yukarıdaki asimptotik açılımlar göz önünde bulundurularak, $\beta\to 0$ iken

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} U_\eta^{*2}(x)dx = \frac{\varphi(\beta)}{\beta(1-\varphi(\beta))^2}$$

$$= \frac{1}{m_1^2}\frac{1}{\beta^3} + \left(\frac{m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)\frac{1}{\beta^2} + \left(\frac{3m_2^2}{4m_1^4} - \frac{m_3}{m_1^3} - \frac{m_2}{2m_1^2}\right)\frac{1}{\beta} + o(\frac{1}{\beta}), \qquad (41)$$

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} U_\eta^{*3}(x)dx = \frac{\varphi^2(\beta)}{\beta(1-\varphi(\beta))^3}$$

$$= \frac{1}{m_1^3}\frac{1}{\beta^4} + \left(\frac{3m_2}{2m_1^4} - \frac{2}{m_1^2}\right)\frac{1}{\beta^3} + \left(\frac{3m_2^2}{m_1^5} - \frac{m_3}{2m_1^4} - \frac{2m_2}{m_1^3} + \frac{1}{m_1}\right)\frac{1}{\beta^2} + o(\frac{1}{\beta^2}), \qquad (42)$$

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} U_\eta^{*4}(x)dx = \frac{\varphi^3(\beta)}{\beta(1-\varphi(\beta))^4}$$

$$= \frac{1}{m_1^4}\frac{1}{\beta^5} + \left(\frac{2m_2}{m_1^5} - \frac{3}{m_1^3}\right)\frac{1}{\beta^4} + \left(\frac{5m_2^2}{2m_1^6} - \frac{7m_3}{3m_1^5} - \frac{9m_2}{2m_1^4} + \frac{3}{m_1^2}\right)\frac{1}{\beta^3} + o(\frac{1}{\beta^3}) \qquad (43)$$

asimptotik açılımları elde edilir. Son olarak (41), (42) ve (43) eşitliklerinin her iki tarafının β parametresine göre ters Laplace dönüşümü alınırsa, Tauber-Abel teoremi kullanılarak (32), (33) ve (34) eşitlikleri elde edilir.

Not 2.2.2.1. Yardımcı Teorem 2.2.2.1 (31)-(34) eşitliklerindeki sonsuz küçük ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

Öncelikle $U_\eta^{*2}(x)$ fonksiyonunun asimptotik davranışı incelensin. Bu amaca ulaşmak için aşağıdaki notasyon dahil edilsin:

$$R_2(x) = U_\eta^{*2}(x) - \frac{x^2}{2m_1^2} - \left(\frac{m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)x, \quad x > 0.$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının x parametresine göre Laplace dönüşümü alınırsa

$$\tilde{R}_2(\beta) = \frac{\varphi(\beta)}{\beta(1-\varphi(\beta))^2} - \frac{1}{\beta^3 m_1^2} - \left(\frac{m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)\frac{1}{\beta^2}$$

$$= \frac{1}{\beta(1-\varphi_\eta(\beta))^2} - \frac{1}{\beta(1-\varphi_\eta(\beta))} - \frac{1}{\beta^3 m_1^2} - \left(\frac{m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)\frac{1}{\beta^2}, \quad |\varphi_\eta(\beta)| < 1$$

elde edilir. Burada $\beta \to 0$ iken $E(\eta_1^3) < \infty$ koşulu altında

$$(1-\varphi(\beta))^{-1} = \frac{1}{\beta m_1}\left[1 + \frac{m_2}{2m_1}\beta - \left(\frac{m_2^2}{4m_1^2} - \frac{m_3}{6m_1}\right)\beta^2 + o(\beta^2)\right],$$

$$\left(1-\varphi(\beta)\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\beta m_1\right)^2}\left[1+\frac{m_2}{m_1}\beta+\left(\frac{3m_2^2}{4m_1^2}-\frac{m_3}{3m_1}\right)\beta^2+o(\beta^2)\right]$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\beta\tilde{R}_2(\beta)=\frac{3m_2^2}{4m_1^4}-\frac{m_3}{3m_1^3}-\frac{m_2}{2m_1^2}+o(1),\ \beta\to 0$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\lim_{\beta\to 0}\beta\tilde{R}_2(\beta)=\frac{3m_2^2}{4m_1^4}-\frac{m_3}{3m_1^3}-\frac{m_2}{2m_1^2}$$

dır. Şimdi yukarıdaki eşitliğe Tauber-Abel teoremi uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\lim_{x\to\infty}R_2(x)=\lim_{\beta\to 0}\beta\tilde{R}_2(\beta)=\frac{3m_2^2}{4m_1^4}-\frac{m_3}{3m_1^3}-\frac{m_2}{2m_1^2}.$$

Bu sonuç $x\to\infty$ iken aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$R_2(x)=\frac{3m_2^2}{4m_1^4}-\frac{m_3}{3m_1^3}-\frac{m_2}{2m_1^2}+o(1).$$

Bununla birlikte sonuç olarak

$$U_\eta^{*2}(x)=\frac{x^2}{2m_1^2}+\left(\frac{m_2}{m_1^3}-\frac{1}{m_1}\right)x+\left(\frac{3m_2^2}{4m_1^4}-\frac{m_3}{3m_1^3}-\frac{m_2}{2m_1^2}\right)+o(1)$$

elde edilir. Benzer şekilde $U_\eta^{*n}(x)$ $(n=1,3,4)$ fonksiyonunun asimptotik davranışı incelenebilir.

Uyarı 2.2.2.1. Aşağıda sürecin sınır fonksiyonellerinin ilk dört momenti için asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar, Okur Bekar'ın (2006) yüksek lisans tezinden farklı olarak, yenileme fonksiyonunun yukarıdaki konvolüsyon çarpımları yardımıyla elde edilmiştir.

Teorem 2.2.2.1. η_1 başlangıç rastgele değişkeninin ilk üç momenti mevcut ve sonlu olsun. Bu takdirde, $x\to\infty$ iken $N_1(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$EN_1(x)=\frac{x}{m_1}+\frac{m_2}{2m_1^2}+o\left(\frac{1}{x}\right), \tag{44}$$

$$EN_1^2(x)=\frac{x^2}{m_1^2}+\left(\frac{2m_2}{m_1^3}-\frac{1}{m_1}\right)x+\left(\frac{3m_2^2}{2m_1^4}-\frac{2m_3}{3m_1^3}-\frac{m_2}{2m_1^2}\right)+o(1), \tag{45}$$

$$EN_1^3(x)=\frac{x^3}{m_1^3}+\left(\frac{9m_2}{2m_1^4}-\frac{3}{m_1^2}\right)x^2+\left(\frac{9m_2^2}{m_1^5}-\frac{3m_3}{m_1^4}-\frac{6m_2}{m_1^3}+\frac{1}{m_1}\right)x+o(x), \tag{46}$$

$$EN_1^3(x)=\frac{x^4}{m_1^4}+\left(\frac{8m_2}{m_1^5}-\frac{6}{m_1^3}\right)x^3+\left(\frac{30m_2^2}{m_1^6}-\frac{8m_3}{m_1^5}-\frac{27m_2}{m_1^4}+\frac{7}{m_1^2}\right)x^2+o(x^2), \tag{47}$$

burada $m_k=E(\eta_1^k)$, $k=\overline{1,3}$'dır.

Teorem 2.2.2.2. ξ_1 ve η_1 başlangıç rasgele değişkenleri ek olarak aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) $a_3=E(\xi_1^3)<\infty$, ii) $m_3=E(\eta_1^3)<\infty$.

Bu takdirde, $x\to\infty$ iken $\tau_1(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$E\tau_1(x)=\frac{a_1}{m_1}x+\frac{m_2a_1}{2m_1^2}+o(\frac{1}{x}), \tag{48}$$

$$E\tau_1^2(x)=\frac{a_1^2}{m_1^2}x^2+\left(\frac{2m_2a_1^2}{m_1^3}+\frac{a_2-2a_1^2}{m_1}\right)x$$
$$+\left(\frac{3m_2^2a_1^2}{2m_1^4}-\frac{2m_3a_1^2}{3m_1^3}+\frac{m_2(a_2-2a_1^2)}{2m_1^2}\right)+o(1), \tag{49}$$

$$E\tau_1^3(x)=\frac{a_1^3}{m_1^3}x^3+\left(\frac{9m_2a_1^3}{2m_1^4}+\frac{3a_1(a_2-2a_1^2)}{m_1^2}\right)x^2$$
$$+\left(\frac{9m_2^2a_1^3}{m_1^5}-\frac{3m_3a_1^3}{m_1^4}+\frac{6m_2a_1(a_2-2a_1^2)}{m_1^3}+\frac{6a_1^3-6a_1a_2+a_3}{m_1}\right)x+o(x), \tag{50}$$

$$E\tau_1^4(x)=\frac{a_1^4}{m_1^4}x^4+\left(\frac{8m_2a_1^4}{m_1^5}+\frac{6a_1^2(a_2-2a_1^2)}{m_1^3}\right)x^3+\left(\frac{30m_2^2a_1^4}{m_1^6}-\frac{8m_3a_1^4}{m_1^5}\right.$$
$$\left.+\frac{27m_2a_1^2(a_2-2a_1^2)}{m_1^4}+\frac{36a_1^4-36a_1^2a_2+4a_3a_1+3a_2^2}{m_1^2}\right)x^2+o(x^2), \tag{51}$$

burada $a_k=E(\xi_1^k)$, $m_k=E(\eta_1^k)$, $k=\overline{1,3}$'dır.

2.2.3. Simülasyon Sonuçları

Bu kısımda, Teorem 2.2.2.2'de $X(t)$ sürecinin τ_1 sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için elde edilen asimptotik açılımdaki ilk iki terim kullanılarak, bu momentler için yaklaşık değerler oluşturulmuştur. Bunun için, ξ_1 rasgele değişkeninin $\lambda = 1$ parametreli üstel dağılımına sahip olduğu, η_1 rasgele değişkeninin ise $\mu = 20$ parametreli Erlang dağılımına sahip olduğu göz önünde bulundurulmuştur. Bu değerler sembolik olarak $\tilde{E}(\tau_1^k)$ ile gösterilmiştir. Benzer şekilde, bu momentler için Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak elde edilen simülasyon değerleri ise $\hat{E}(\tau_1^k)$ ile gösterilmiştir. Ayrıca her bir simülasyon değeri, bilgisayarda MATLAB programı kullanılarak ve sürecin $n = 10^8$ sayıda realizasyonu (izi) üretilerek elde edilmiştir. Bu değerler yardımıyla, sürecin τ_1 sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki tablolar oluşturulmuştur. Burada sırasıyla Δ_k, δ_k ve AP_k, bu momentlerin yaklaşık değerleri ile simülasyon değerleri arasındaki mutlak hatayı, nispi hatayı ve doğruluk yüzdelerini göstermektedir:

$$\Delta_k = \left|\hat{E}(\tau_1^k) - \tilde{E}(\tau_1^k)\right|;\ \delta_k = \frac{\Delta_k}{\hat{E}(\tau_1^k)}.100\%;\ AP_k = 100\% - \delta_k,\ k = 1,2,3,4.$$

Tablo 1. $E\tau_1(x)$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	$\hat{E}\tau_1(x)$	$\tilde{E}\tau_1(x)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
100	1000,7139	1000,75	0,0361	0,003607425	99,99639258
90	900,7015	900,75	0,0485	0,005384692	99,99461531
80	800,6122	800,75	0,1378	0,017211829	99,98278817
70	700,9908	700,75	0,2408	0,034351378	99,96564862
60	600,5483	600,75	0,2017	0,033585975	99,96641403
50	500,689	500,75	0,061	0,012183212	99,98781679
40	400,5812	400,75	0,1688	0,042138772	99,95786123
30	300,7854	300,75	0,0354	0,011769188	99,98823081
20	200,6349	200,75	0,1151	0,057367886	99,94263211
10	100,7138	100,75	0,0362	0,035943436	99,96405656

Tablo 2. $E\tau_1^2(x)$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	$\hat{E}\tau_1^2(x)$	$\tilde{E}\tau_1^2(x)$	Δ_2	δ_2 (%)	AP_2 (%)
100	1001578	1001996,625	418,625	0,0417965	99,958203
90	812350	811796,625	553,375	0,0681203	99,93188
80	640990	641596,625	606,625	0,0946388	99,905361
70	491260	491396,625	136,625	0,0278111	99,972189
60	361310	361196,625	113,375	0,0313789	99,968621
50	250930	250996,625	66,625	0,0265512	99,973449
40	160660	160796,625	136,625	0,0850398	99,91496
30	90454	90596,625	142,625	0,1576768	99,842323
20	40435	40396,625	38,375	0,0949054	99,905095
10	10190	10196,625	6,625	0,0650147	99,934985

Tablo 3. $E\tau_1^3(x)$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	$\hat{E}\tau_1^3(x)$	$\tilde{E}\tau_1^3(x)$	Δ_3	δ_3 (%)	AP_3 (%)
100	1003610000	1003753250	143250	0,0142735	99,9857265
90	732500000	732040425	459575	0,0627406	99,9372594
80	514150000	514402600	252600	0,0491296	99,9508704
70	344690000	344839775	149775	0,0434521	99,9565479
60	217450000	217351950	98050	0,0450908	99,9549092
50	125890000	125939125	49125	0,0390222	99,9609778
40	64500000	64601300	86300	0,1337673	99,8662327
30	27272000	27338475	66475	0,2437482	99,7562518
20	8161000	8150650	10350	0,1268227	99,8731773
10	1036300	1037825	1525	0,1471582	99,8528418

Tablo 4. $E\tau_1^4(x)$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	$\hat{E}\tau_1^4(x)$	$\tilde{E}\tau_1^4(x)$	Δ_4	δ_4 (%)	AP_4 (%)
100	1010000000000	1006010000000	920000000	0,09153411	99,90847
90	661030000000	660482000000	547900000	0,0828858	99,91711
80	412400000000	412678000000	278400000	0,06750727	99,93249
70	242030000000	242163000000	132900000	0,05491055	99,94509
60	130980000000	130900000000	80400000	0,06138342	99,93862
50	63216000000	63252500000	36500000	0,05773855	99,94226
40	25940000000	25985600000	45600000	0,17579029	99,82421
30	8235800000	8262900000	27100000	0,32905122	99,67095
20	1651200000	1648400000	2800000	0,16957364	99,83043
10	105900000	106100000	200000	0,18885741	99,81114

Not 2.2.3.1. Tablo 1, 2, 3 ve 4'den görüldüğü gibi, x parametresinin çok küçük değerleri için oldukça yüksek doğruluk seviyesinde yaklaşık sonuçlar elde edilmiştir. Yani, her $x \in [10;100]$ için asimptotik ve simülasyon değerleri arasındaki uyum yüzdeleri, %99'un üzerindedir. Bu nedenle, Teorem 2.2.2.2'deki asimptotik açılımlardan elde edilen yaklaşık değerler, simülasyon sonucu elde edilen değerlere çok büyük uyum sağlamaktadır. Bu ise, x parametresinin büyük olmayan değerleri için bile olsa, sözü edilen asimptotik açılımların çeşitli modellerde güvenilir bir şekilde kullanılabileceği anlamına gelir.

Uyarı. Aşağıda sırasıyla Kısım 2.2.4 ve 2.2.5'de, müdahaleyi temsil eden rasgele değişkenin gamma ve Weibull dağılımına sahip olması durumunda, sürecin $N_1(x)$ ve $\tau_1(x)$ sınır fonksiyonelinin bazı olasılık karakteristikleri için asimptotik açılımlar elde edilecektir.

Bu amaca ulaşmak için aşağıdaki notasyonlar verilsin:

$$R_n(x) \equiv EN_1^n(x) - a_n x^n - b_n x^{n-1} - c_n x^{n-2} \ , \ n = 1, 2, \ldots \quad (52)$$

$$R_n(x) \equiv E\tau_1^n(x) - a_n x^n - b_n x^{n-1} - c_n x^{n-2} \ , \ n = 1, 2, \ldots \quad (53)$$

olsun ve burada a_n, b_n ve c_n sırasıyla Teorem 2.2.2.1 ve Teorem 2.2.2.2'de elde edilen asimptotik açılımların ilgili katsayılarıdır.

Ayrıca $R_n(x)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığının her hangi bir kapalı alt aralığında sınırlıdır ve bu fonksiyon aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$R_n(x) = x^{n-2} g(x)\ ,\ n = 1,2,\ldots \tag{54}$$

burada $g(x)$ fonksiyonu sınırlıdır ve $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ 'dır.

2.2.4. Müdahalenin Gamma Dağılımına Sahip Olması Durumunda Sürecin Sınır Fonksiyonellerinin Karakteristikleri İçin Asimptotik Açılımlar

Bu kısımda, ζ_1 rasgele değişkeninin (α,λ), $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ parametreli gamma dağılımına sahip olması durumunda, sürecin sınır fonksiyonellerinin bazı olasılık karakteristikleri için asimptotik açılımlar elde edilecektir. Bunun için Kısım 2.2.3'de yer alan Teorem 2.2.2.1 ve Teorem 2.2.2.2'deki $x \to \infty$ iken, sürecin sınır fonksiyonelleri için elde edilen asimptotik açılımlar kullanılacaktır. Burada ζ_1 rasgele değişkeni (α,λ), $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ parametreli gamma dağılımına sahip olduğundan

$$d\pi(v) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} v^{\alpha-1} e^{-\lambda v} dv$$

dır. Ayrıca bu sonuçların $\lambda \to 0$ iken anlamlı olabilmesi için aşağıdaki yardımcı teoreme ihtiyaç vardır:

Yardımcı Teorem 2.2.4.1. Eğer $g(x)$ $(g:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R})$ fonksiyonu sınırlı ve $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ ise bu takdirde, her $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki bağıntı doğrudur (Aliyev vd, 2010):

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} g\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt = 0\,. \tag{55}$$

Teorem 2.2.4.1. Teorem 2.2.2.1'in koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken $N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört başlangıç momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$EN_1(\zeta_1) = \frac{\alpha}{m_1\lambda} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(\lambda)\,, \tag{56}$$

$$EN_1^2(\zeta_1) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{m_1^2\lambda^2} + \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)\frac{\alpha}{\lambda} + \left(\frac{3m_2^2}{2m_1^4} - \frac{2m_3}{3m_1^3} - \frac{m_2}{2m_1^2}\right) + o(1)\,, \tag{57}$$

$$EN_1^3(\zeta_1) = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{m_1^3\lambda^3} + \left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{3}{m_1^2}\right)\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$$

$$+\left(\frac{9m_2^2}{m_1^5}-\frac{3m_3}{m_1^4}-\frac{6m_2}{m_1^3}+\frac{1}{m_1}\right)\frac{\alpha}{\lambda}+o(\frac{1}{\lambda}), \tag{58}$$

$$EN_1^4(\zeta_1)=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{m_1^4\lambda^4}+\left(\frac{8m_2}{m_1^5}-\frac{6}{m_1^3}\right)\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3}$$

$$+\left(\frac{30m_2^2}{m_1^6}-\frac{8m_3}{m_1^5}-\frac{27m_2}{m_1^4}+\frac{7}{m_1^2}\right)\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}+o(\frac{1}{\lambda^2}), \tag{59}$$

burada $m_k=E(\eta_1^k)$, $k=\overline{1,4}$'dır.

İspat. $E(\eta_1^2)<\infty$ koşulu altında, Teorem 2.2.2.1'den (44) eşitliğine göre aşağıdaki asimptotik açılım mevcuttur:

$$EN_1(x)=\frac{x}{m_1}+\frac{m_2}{2m_1^2}+R_1(x),\ x\to\infty \tag{60}$$

burada $R_1(x)=\frac{1}{x}g(x)$ ve $g(x)=o(1)$'dır. Bu durumda

$$EN_1(\zeta_1)=\int_0^\infty EN_1(v)d\pi(v)=\int_0^\infty EN_1(v)d\pi(v)=\int_0^\infty\left(\frac{z}{m_1}+\frac{m_2}{2m_1^2}+R_1(v)\right)d\pi(v)$$

$$=\frac{1}{m_1}\int_0^\infty vd\pi(v)+\frac{m_2}{2m_1^2}\int_0^\infty d\pi(v)+\int_0^\infty R_1(v)d\pi(v)$$

$$=\frac{1}{m_1}E(\zeta_1)+\frac{m_2}{2m_1^2}+E(R_1(\zeta_1)) \tag{61}$$

dır. Burada $E(\zeta_1)=\frac{\alpha}{\lambda}$ olduğu olasılık teorisinden bilinmektedir ve $E(R_1(\zeta_1))$ aşağıdaki gibi değerlendirilebilir:

$$E(R_1(\zeta_1))=\int_0^\infty R_1(v)d\pi(v)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty v^{\alpha-1}e^{-\lambda v}R_1(v)dv$$

$$=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty v^{\alpha-2}e^{-\lambda v}g(v)dv=\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-2}e^{-t}g(\frac{t}{\lambda})dt\,. \tag{62}$$

Bu durumda Yardımcı Teorem 2.2.4.1'e göre (62) eşitliğinden her $\alpha>1$ için $\lambda\to 0$ iken

$$E(R_1(\zeta_1))=o(\lambda) \tag{63}$$

elde edilir. Bu durumda, (63) eşitliği, (61) eşitliğinde yerine yazılırsa, $N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin birinci momenti, (56) eşitliğindeki gibi olur.

Benzer şekilde, $N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ikinci, üçüncü ve dördüncü momentleri için $\lambda \to 0$ iken asimptotik açılımlar elde etmek mümkündür. $E(\eta_1^3) < \infty$ koşulu altında, Teorem 2.2.2.1'e göre sırasıyla (45), (46) ve (47) eşitliklerinden

$$EN_1^2(\zeta_1) = \frac{1}{m_1^2}E(\zeta_1^2) + \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)E(\zeta_1) + \left(\frac{3m_2^2}{2m_1^4} - \frac{2m_3}{3m_1^3} - \frac{m_2}{2m_1^2}\right) + E(R_2(\zeta_1)), \quad (64)$$

$$EN_1^3(\zeta_1) = \frac{1}{m_1^3}E(\zeta_1^3) + \left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{3}{m_1^2}\right)E(\zeta_1^2)$$

$$+\left(\frac{9m_2^2}{m_1^5} - \frac{3m_3}{m_1^4} - \frac{6m_2}{m_1^3} + \frac{1}{m_1}\right)E(\zeta_1) + E(R_3(\zeta_1)), \quad (65)$$

$$EN_1^4(\zeta_1) = \frac{1}{m_1^4}E(\zeta_1^4) + \left(\frac{8m_2}{m_1^5} - \frac{6}{m_1^3}\right)E(\zeta_1^3)$$

$$+\left(\frac{30m_2^2}{m_1^6} - \frac{8m_3}{m_1^5} - \frac{27m_2}{m_1^4} + \frac{7}{m_1^2}\right)E(\zeta_1^2) + E(R_4(\zeta_1)) \quad (66)$$

elde edilebildiği açıkça görülmektedir. Burada

$$E(\zeta_1^n) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\lambda^n\Gamma(\alpha)}, \; n = 1, 2, \ldots \quad (67)$$

olduğu olasılık teorisinden bilinmektedir. Bu durumda $E(R_2(\zeta_1))$, $E(R_3(\zeta_1))$ ve $E(R_4(\zeta_1))$ fonksiyonları hesaplanmalıdır. (54) eşitliğine göre, her $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken Yardımcı Teorem 2.2.4.1 kullanılarak

$$E(R_2(\zeta_1)) = o(1), \quad (68)$$

$$E(R_3(\zeta_1)) = o(\frac{1}{\lambda}), \quad (69)$$

$$E(R_4(\zeta_1)) = o(\frac{1}{\lambda^2}) \quad (70)$$

elde edilir. Son olarak sırasıyla (67)-(70) eşitlikleri, (64)-(66) eşitliğinde yerine yazılırsa, ispat tamamlanır.

Uyarı 2.2.4.1. Böylece $N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört başlangıç momenti asimptotik olarak elde edilmiştir. Bu momentler yardımıyla, $N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört merkezi momenti (μ_k, $k = \overline{1,4}$), çarpıklık (γ_3) ve basıklık katsayıları (γ_4) da aşağıdaki sonuçlardaki gibi asimptotik olarak elde edilebilir. Olasılık teorisinden bilinmektedir ki

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3},\ \gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,\ \sigma^2 = Var(N_1(\zeta_1)) \tag{71}$$

dır. Burada $\mu_k = E(N_1(\zeta_1) - a)^k,\ k = \overline{1,4},\ a = E(N_1(\zeta_1))$'dır.

Sonuç 2.2.4.2. Teorem 2.2.4.1'in koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken $X(t)$ sürecinin $N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört merkezi momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 \sim \frac{1}{m_1^2}\left(\frac{\alpha}{\lambda^2}\right),\ \mu_3 \sim \frac{1}{m_1^3}\left(\frac{2\alpha}{\lambda^3}\right),\ \mu_4 \sim \frac{1}{m_1^4}\left(\frac{3\alpha^2 + 6\alpha}{\lambda^4}\right), \tag{72}$$

burada $m_k = E(\eta_1^k),\ k = \overline{1,4}$'dır.

Sonuç 2.2.4.3. Teorem 2.2.4.1'nin koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken $X(t)$ sürecinin $N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin çarpıklık ve basıklık katsayıları asimptotik olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\gamma_3 \sim \frac{2}{\sqrt{\alpha}},\ \gamma_4 \sim \frac{6}{\alpha}. \tag{73}$$

Teorem 2.2.4.2. Teorem 2.2.2.2'nin koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken $\tau_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört başlangıç momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$E\tau_1(\zeta_1) = \frac{a_1}{m_1}\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{m_2 a_1}{2m_1^2} + o(\lambda), \tag{74}$$

$$E\tau_1^2(\zeta_1) = \frac{a_1^2}{m_1^2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} + \left(\frac{2m_2 a_1^2}{m_1^3} + \frac{a_2 - 2a_1^2}{m_1}\right)\frac{\alpha}{\lambda} + \left(\frac{3m_2^2 a_1^2}{2m_1^4} - \frac{2m_3 a_1^2}{3m_1^3} + \frac{m_2(a_2 - 2a_1^2)}{2m_1^2}\right) + o(1), \tag{75}$$

$$E\tau_1^3(\zeta_1) = \frac{a_1^3}{m_1^3}\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3} + \left(\frac{9m_2 a_1^3}{2m_1^4} + \frac{3a_1(a_2 - 2a_1^2)}{m_1^2}\right)\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} + \left(\frac{9m_2^2 a_1^3}{m_1^5} - \frac{3m_3 a_1^3}{m_1^4} + \frac{6m_2 a_1(a_2 - 2a_1^2)}{m_1^3} + \frac{6a_1^3 - 6a_1 a_2 + a_3}{m_1}\right)\frac{\alpha}{\lambda} + o(\frac{1}{\lambda}), \tag{76}$$

$$E\tau_1^4(\zeta_1) = \frac{a_1^4}{m_1^4}\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\lambda^4} + \left(\frac{8m_2 a_1^4}{m_1^5} + \frac{6a_1^2(a_2 - 2a_1^2)}{m_1^3}\right)\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3}$$
$$+\left(\frac{30m_2^2 a_1^4}{m_1^6} - \frac{8m_3 a_1^4}{m_1^5} + \frac{27m_2 a_1^2(a_2 - 2a_1^2)}{m_1^4}\right.$$

$$+\frac{36a_1^4-36a_1^2a_2+4a_3a_1+3a_2^2}{m_1^2}\Bigg)\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}+o(\frac{1}{\lambda^2}), \qquad (77)$$

burada $a_k=E(\xi_1^k)$, $m_k=E(\eta_1^k)$, $k=\overline{1,4}$’dır.

İspat. Bu teoremin ispatı bir önceki teoreme benzer şekilde yapılır.

Sonuç 2.2.4.5. Teorem 2.2.2.2’nin koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\alpha>1$ için $\lambda\to 0$ iken $X(t)$ sürecinin $\tau_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört merkezi momenti asimptotik olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mu_1=0,\ \mu_2\sim\frac{a_1^2}{m_1^2}\left(\frac{\alpha}{\lambda^2}\right),\ \mu_3\sim\frac{a_1^3}{m_1^3}\left(\frac{2\alpha}{\lambda^3}\right),\ \mu_4\sim\frac{a_1^4}{m_1^4}\left(\frac{3\alpha^2+6\alpha}{\lambda^4}\right), \qquad (78)$$

burada $a_k=E(\xi_1^k)$, $m_k=E(\eta_1^k)$, $k=\overline{1,4}$’dır.

Sonuç 2.2.4.6. Teorem 2.2.4.2’nin koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\alpha>1$ için $\lambda\to 0$ iken $X(t)$ sürecinin $\tau_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyoneli için çarpıklık ve basıklık katsayıları asimptotik olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\gamma_3\sim\frac{2}{\sqrt{\alpha}},\ \gamma_4\sim\frac{6}{\alpha}. \qquad (79)$$

2.2.5. Müdahalenin Weibull Dağılımına Sahip Olması Durumunda Sürecin Sınır Fonksiyonellerinin Karakteristikleri İçin Asimptotik Açılımlar

Bu kısımda, ζ_1 rasgele değişkeninin (α,λ), $\alpha>0$, $\lambda>0$ parametreli Weibull dağılımına sahip olması durumunda, sürecin sınır fonksiyonellerinin bazı karakteristikleri için asimptotik açılımlar elde edilecektir. Bu amaca ulaşmak için bir önceki kısımda olduğu gibi yine Kısım 2.2.3’de yer alan Teorem 2.2.2.1 ve Teorem 2.2.2.2’deki $x\to\infty$ iken, sürecin sınır fonksiyonelleri için elde edilen asimptotik açılımlar kullanılacaktır. Burada ζ_1 rasgele değişkeninin (α,λ), $\alpha>0$, $\lambda>0$ parametreli Weibull dağılımına sahip olduğundan

$$d\pi(v)=\alpha\lambda(\lambda v)^{\alpha-1}e^{-(\lambda v)^{\alpha}}dv$$

dır. Ayrıca bu sonuçların $\lambda\to 0$ iken anlamlı olabilmesi için aşağıdaki yardımcı teoreme ihtiyaç vardır:

Yardımcı Teorem 2.2.5.1. Eğer $g(x)\ \left(g:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}\right)$ fonksiyonu sınırlı ve $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ ise bu takdirde, her $\alpha>1$ için aşağıdaki bağıntı doğrudur:

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^{\infty} e^{-t} g\left(\frac{t^{1/\alpha}}{\lambda}\right)dt=0. \tag{80}$$

İspat. Her $\varepsilon>0$ için en az bir $m(\varepsilon)>0$ vardır, öyle ki $x>m(\varepsilon)$ için $|g(x)|<\varepsilon$'dır. En az bir $b>0$ seçelim ki, $\int_0^{b} e^{-t}dt<\varepsilon$ olsun. Bu takdirde $g(x)$ fonksiyonunun $[0,b]$ aralığında maksimumu vardır ve her $\lambda<\dfrac{b^{1/\alpha}}{m(\varepsilon)}$ için aşağıdaki işlemler yapılabilir:

$$\left|\int_0^{\infty} e^{-t} g\left(\frac{t^{1/\alpha}}{\lambda}\right)dt\right| \le \int_0^{b} e^{-t}\left|g\left(\frac{t^{1/\alpha}}{\lambda}\right)\right|dt+\int_b^{\infty} e^{-t}\left|g\left(\frac{t^{1/\alpha}}{\lambda}\right)\right|dt \le$$

$$\le \max_{x\ge 0}|g(x)|\int_0^{b} e^{-t}dt+\varepsilon\int_b^{\infty} e^{-t}dt \le \varepsilon M+\varepsilon\int_0^{\infty} e^{-t}dt=\varepsilon(M+1),$$

burada $M=\max\limits_{x\ge 0}|g(x)|$'dır. M sonlu ve $\varepsilon>0$ keyfi pozitif sayı olduğundan ispat biter.

Teorem 2.2.5.1. Teorem 2.2.2.1'in koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\alpha>1$ için $\lambda\to 0$ iken $N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört başlangıç momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$EN_1(\zeta_1)=\frac{c_1(\alpha)}{m_1\lambda}+\frac{m_2}{2m_1^2}+o(\lambda), \tag{81}$$

$$EN_1^2(\zeta_1)=\frac{c_2(\alpha)}{m_1^2\lambda^2}+\left(\frac{2m_2}{m_1^3}-\frac{1}{m_1}\right)\frac{c_1(\alpha)}{\lambda}+\left(\frac{3m_2^2}{2m_1^4}-\frac{2m_3}{3m_1^3}-\frac{m_2}{2m_1^2}\right)+o(1), \tag{82}$$

$$\begin{aligned} EN_1^3(\zeta_1)=&\frac{c_3(\alpha)}{m_1^3\lambda^3}+\left(\frac{9m_2}{2m_1^4}-\frac{3}{m_1^2}\right)\frac{c_2(\alpha)}{\lambda^2}\\ &+\left(\frac{9m_2^2}{m_1^5}-\frac{3m_3}{m_1^4}-\frac{6m_2}{m_1^3}+\frac{1}{m_1}\right)\frac{c_1(\alpha)}{\lambda}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned} EN_1^4(\zeta_1)=&\frac{c_4(\alpha)}{m_1^4\lambda^4}+\left(\frac{8m_2}{m_1^5}-\frac{6}{m_1^3}\right)\frac{c_3(\alpha)}{\lambda^3}\\ &+\left(\frac{30m_2^2}{m_1^6}-\frac{8m_3}{m_1^5}-\frac{27m_2}{m_1^4}+\frac{7}{m_1^2}\right)\frac{c_2(\alpha)}{\lambda^2}+o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \end{aligned} \tag{84}$$

burada $m_k = E(\eta_1^k)$, $c_k(\alpha) = \Gamma\left(1 + k/\alpha\right)$, $k = \overline{1,4}$'dır.

İspat. Bir önceki kısımdan da anlaşıldığı gibi, $E(\eta_1^3) < \infty$ koşulu altında

$$EN_1(\zeta_1) = \frac{1}{m_1} E(\zeta_1) + \frac{m_2}{2m_1^2} + E(R_1(\zeta_1)), \tag{85}$$

$$EN_1^2(\zeta_1) = \frac{1}{m_1^2} E(\zeta_1^2) + \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right) E(\zeta_1) + \left(\frac{3m_2^2}{2m_1^4} - \frac{2m_3}{3m_1^3} - \frac{m_2}{2m_1^2}\right) + E(R_2(\zeta_1)), \tag{86}$$

$$EN_1^3(\zeta_1) = \frac{1}{m_1^3} E(\zeta_1^3) + \left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{3}{m_1^2}\right) E(\zeta_1^2)$$

$$+ \left(\frac{9m_2^2}{m_1^5} - \frac{3m_3}{m_1^4} - \frac{6m_2}{m_1^3} + \frac{1}{m_1}\right) E(\zeta_1) + E(R_3(\zeta_1)), \tag{87}$$

$$EN_1^4(\zeta_1) = \frac{1}{m_1^4} E(\zeta_1^4) + \left(\frac{8m_2}{m_1^5} - \frac{6}{m_1^3}\right) E(\zeta_1^3)$$

$$+ \left(\frac{30m_2^2}{m_1^6} - \frac{8m_3}{m_1^5} - \frac{27m_2}{m_1^4} + \frac{7}{m_1^2}\right) E(\zeta_1^2) + E(R_4(\zeta_1)) \tag{88}$$

olduğu açıkça görülmektedir. Burada

$$E(\zeta_1^n) = \Gamma\left(1 + n/\alpha\right) \frac{1}{\lambda^n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{89}$$

olduğu olasılık teorisinden bilinmektedir. Bu durumda $E(R_1(\zeta_1))$, $E(R_2(\zeta_1))$, $E(R_3(\zeta_1))$ ve $E(R_4(\zeta_1))$ fonksiyonları hesaplanmalıdır. (54) eşitliğine göre, $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken Yardımcı Teorem 2.2.5.1 kullanılarak

$$E(R_1(\zeta_1)) = o(\lambda), \tag{90}$$

$$E(R_2(\zeta_1)) = o(1), \tag{91}$$

$$E(R_3(\zeta_1)) = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{92}$$

$$E(R_4(\zeta_1)) = o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{93}$$

elde edilir. Son olarak sırasıyla (89)-(93) eşitlikleri, (85)-(88) eşitliğinde yerine yazılırsa, ispat tamamlanır.

Sonuç 2.2.5.2. Teorem 2.2.2.1'nin koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken $X(t)$ sürecinin $N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört merkezi momenti asimptotik olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mu_1 = 0, \tag{94}$$

$$\mu_2 \sim \left(c_2(\alpha) - (c_1(\alpha))^2\right)\frac{1}{m_1^2\lambda^2}, \tag{95}$$

$$\mu_3 \sim \left(c_3(\alpha) - 3c_2(\alpha)c_1(\alpha) + 2(c_1(\alpha))^3\right)\frac{1}{m_1^3\lambda^3}, \tag{96}$$

$$\mu_4 \sim \left(c_4(\alpha) - 4c_3(\alpha)c_1(\alpha) + 6c_2(\alpha)(c_1(\alpha))^2 - 3(c_1(\alpha))^4\right)\frac{1}{m_1^4\lambda^4}, \tag{97}$$

burada $m_k = E(\eta_1^k)$, $c_k(\alpha) = \Gamma\left(1 + {k}/{\alpha}\right)$, $k = \overline{1,4}$'dır.

Sonuç 2.2.5.3. Teorem 2.2.5.1'nin koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken $X(t)$ sürecinin $N_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin çarpıklık ve basıklık katsayıları asimptotik olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\gamma_3 \sim \frac{c_3(\alpha) - 3c_2(\alpha)c_1(\alpha) + 2(c_1(\alpha))^3}{\left(c_2(\alpha) - (c_1(\alpha))^2\right)^{1/3}}, \tag{98}$$

$$\gamma_4 \sim \frac{c_4(\alpha) - 4c_3(\alpha)c_1(\alpha) + 6c_2(\alpha)(c_1(\alpha))^2 - 3(c_1(\alpha))^4}{\left(c_2(\alpha) - (c_1(\alpha))^2\right)^2} - 3, \tag{99}$$

burada $c_k(\alpha) = \Gamma\left(1 + {k}/{\alpha}\right)$, $k = \overline{1,4}$'dır.

Teorem 2.2.5.2. Teorem 2.2.2.2'nin koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken $\tau_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört başlangıç momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$E\tau_1(\zeta_1) = \frac{a_1}{m_1}\frac{c_1(\alpha)}{\lambda} + \frac{m_2 a_1}{2m_1^2} + o(\lambda), \tag{100}$$

$$\begin{aligned} E\tau_1^2(\zeta_1) = {} & \frac{a_1^2}{m_1^2}\frac{c_2(\alpha)}{\lambda^2} + \left(\frac{2m_2 a_1^2}{m_1^3} + \frac{a_2 - 2a_1^2}{m_1}\right)\frac{c_1(\alpha)}{\lambda} \\ & + \left(\frac{3m_2^2 a_1^2}{2m_1^4} - \frac{2m_3 a_1^2}{3m_1^3} + \frac{m_2(a_2 - 2a_1^2)}{2m_1^2}\right) + o(1), \end{aligned} \tag{101}$$

$$\begin{aligned} E\tau_1^3(\zeta_1) = {} & \frac{a_1^3}{m_1^3}\frac{c_3(\alpha)}{\lambda^3} + \left(\frac{9m_2 a_1^3}{2m_1^4} + \frac{3a_1(a_2 - 2a_1^2)}{m_1^2}\right)\frac{c_2(\alpha)}{\lambda^2} \\ & + \left(\frac{9m_2^2 a_1^3}{m_1^5} - \frac{3m_3 a_1^3}{m_1^4} + \frac{6m_2 a_1(a_2 - 2a_1^2)}{m_1^3} + \frac{6a_1^3 - 6a_1 a_2 + a_3}{m_1}\right)\frac{c_1(\alpha)}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \end{aligned} \tag{102}$$

$$E\tau_1^4(\zeta_1)=\frac{a_1^4}{m_1^4}\frac{c_4(\alpha)}{\lambda^4}+\left(\frac{8m_2a_1^4}{m_1^5}+\frac{6a_1^2(a_2-2a_1^2)}{m_1^3}\right)\frac{c_3(\alpha)}{\lambda^3}$$

$$+\left(\frac{30m_2^2a_1^4}{m_1^6}-\frac{8m_3a_1^4}{m_1^5}+\frac{27m_2a_1^2(a_2-2a_1^2)}{m_1^4}\right.$$

$$\left.+\frac{36a_1^4-36a_1^2a_2+4a_3a_1+3a_2^2}{m_1^2}\right)\frac{c_2(\alpha)}{\lambda^2}+o(\frac{1}{\lambda^2}), \tag{103}$$

burada $a_k=E(\xi_1^k)$, $m_k=E(\eta_1^k)$, $c_k(\alpha)=\Gamma\left(1+{}^k\!/_\alpha\right)$, $k=\overline{1,4}$’dır.

İspat. Bu teoremin ispatı bir önceki teoreme benzer şekilde yapılır.

Sonuç 2.2.5.4. Teorem 2.2.5.2’nin koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\alpha>1$ için $\lambda\to 0$ iken $X(t)$ sürecinin $\tau_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört merkezi momenti asimptotik olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mu_1=0, \tag{104}$$

$$\mu_2\sim\left(c_2(\alpha)-(c_1(\alpha))^2\right)\frac{a_1^2}{m_1^2\lambda^2}, \tag{105}$$

$$\mu_3\sim\left(c_3(\alpha)-3c_2(\alpha)c_1(\alpha)+2(c_1(\alpha))^3\right)\frac{a_1^3}{m_1^3\lambda^3}, \tag{106}$$

$$\mu_4\sim\left(c_4(\alpha)-4c_3(\alpha)c_1(\alpha)+6c_2(\alpha)(c_1(\alpha))^2-3(c_1(\alpha))^4\right)\frac{a_1^4}{m_1^4\lambda^4}, \tag{107}$$

burada $a_k=E(\xi_1^k)$, $m_k=E(\eta_1^k)$, $c_k(\alpha)=\Gamma\left(1+{}^k\!/_\alpha\right)$, $k=\overline{1,4}$’dır.

Sonuç 2.2.5.5. Teorem 2.2.2.2’nin koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\alpha>1$ için $\lambda\to 0$ iken $X(t)$ sürecinin $\tau_1(\zeta_1)$ sınır fonksiyonelinin çarpıklık ve basıklık katsayıları asimptotik olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\gamma_3\sim\frac{c_3(\alpha)-3c_2(\alpha)c_1(\alpha)+2(c_1(\alpha))^3}{\left(c_2(\alpha)-(c_1(\alpha))^2\right)^{1/3}}, \tag{108}$$

$$\gamma_4\sim\frac{c_4(\alpha)-4c_3(\alpha)c_1(\alpha)+6c_2(\alpha)(c_1(\alpha))^2-3(c_1(\alpha))^4}{\left(c_2(\alpha)-(c_1(\alpha))^2\right)^2}-3, \tag{109}$$

burada $c_k(\alpha)=\Gamma\left(1+{}^k\!/_\alpha\right)$, $k=\overline{1,4}$’dır.

2.3. Sürecin Ergodikliği ve Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Kesin Formüller

Bu kısımda, sürecin ergodik dağılımının olasılık karakteristikleri incelenecektir. Ancak bunun için öncelikle, sürecin ergodik olduğunu ispatlamak gerekir. Bu nedenle, aşağıda $X(t)$ sürecinin ergodikliği incelenecektir:

Teorem 2.3.1. Başlangıç rasgele değişkenler dizisi $\{(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)\}$, $n \geq 1$ için ek olarak aşağıdaki koşullar sağlasın:

1) $0 < E(\xi_1) < \infty$,

2) $E(\eta_1) > 0$,

3) $E(\eta_1^2) < \infty$,

4) η_1, aritmetik olmayan bir rasgele değişkendir.

Bu takdirde, $X(t)$ süreci ergodiktir (Mammadova, 2011).

İspat. Ele alınan $X(t)$ süreci literatürde “Kesikli şans karışımlı yarı-Markov süreçler” olarak adlandırılan bir stokastik süreçler sınıfına aittir. Bu sınıf için genel ergodik teorem A.N. Skorohod tarafından ispatlanmıştır (Gihman ve Skohorod, 1975). Hatırlanmalıdır ki, ele alınan süreç için ergodikliğini ispatlamak Teorem 2.3.1’in koşulları sağlandığında, yukarıda adı geçen genel ergodik teoremin şartlarının da sağlandığını göstermeye denktir. Bu nedenle, $X(t)$ sürecinin ergodik olabilmesi için, sürecin genel ergodik teoremin varsayımlarını sağladığı gösterilmesi gerekmektedir:

1. $X(t)$ sürecinin içinde gömülü ergodik bir Markov zinciri mevcut olmalıdır.

O halde, Teorem 2.3.1’in koşulları altında, 1. varsayımın sağlandığı gösterilsin:

Böyle bir Markov zincirini belirlemek için öncelikle monoton artan rasgele değişkenler dizisi tanımlamak gerekir. Bu amaçla, bu koşulu sağlayan $\{\tau_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ rasgele değişkenler dizisi ele alınabilir. Çünkü tanımı gereği, 1 olasılığı ile

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < \tau_{n+1} < \ldots$$

dır. Hatırlanacak olursa, τ_n’ler $X(t)$ sürecinin ardışık olarak kontrol seviyesinin altına düşme anlarıdır ve tanımları gereği Markov momentleridir. Sürecin matematiksel kuruluşuna göre, $X(t)$ sürecinin bu anlardaki değerleri 1 olasılığı ile, $X(\tau_n + 0) = \zeta_n$’dir. $\{\zeta_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ bağımsız rasgele değişkenler dizisi olduğu için $\{X(\tau_n + 0)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ dizisi bir Markov zinciri oluşturur. Ayrıca, ζ_n rasgele değişkenleri aynı dağılıma sahip olduklarına göre, $\{X(\tau_n + 0)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ zinciri, $\pi(v) \equiv P\{\zeta_1 \le v\}$ durağan dağılımına sahip bir ergodik zincirdir. Dolayısıyla, $X(t)$ süreci genel ergodik teoremin 1. koşulunu sağlar.

2. $\{\tau_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Markov momentleri arasında geçen sürenin beklenen değeri sonlu, yani her $n = 2, 3, \ldots$ için

$$E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty \tag{110}$$

olmalıdır. Bu durumda

$\tau_n - \tau_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip olduğundan, 2. varsayımın sağlanması için

$$E(\tau_1) < \infty \text{ ve } E(\tau_n - \tau_{n-1}) \equiv \int_0^\infty E(\tau_1(v))d\pi(v) < \infty, \; n = 2, 3, \ldots \tag{111}$$

integrallerinin sonlu olduğunu göstermek yeterlidir. Hatırlanmalıdır ki, Wald özdeşliğine göre

$$E(\tau_1(v)) = E(\sum_{i=1}^{N_1(v)} \xi_i) = E(\xi_1)E(N_1(v)) = E(\xi_1)U_\eta(v) \tag{112}$$

dır. Burada $U_\eta(v)$ fonksiyonu, η_1 rasgele değişkeninin ürettiği yenileme fonksiyonudur. Dolayısıyla

$$E(\tau_n - \tau_{n-1}) \equiv \int_0^\infty E(\tau_1(v))d\pi(v) = E(\xi_1)EU_\eta(\zeta_1) < \infty \tag{113}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 2.3.1'in koşullarına göre $0 < E(\xi_1) < \infty$'dır. Bu durumda 2. varsayımın sağlanması için

$$U_\eta(v) < \infty \text{ ve } EU_\eta(\zeta_1) = \int_0^\infty U_\eta(v)d\pi(v) < \infty \tag{114}$$

olmalıdır. $U_\eta(v)$ yenileme fonksiyonu her $0 \le v < \infty$ için sonlu olduğu bilinmektedir. Bu durumda

$$EU_\eta(\zeta_1) = \int_0^\infty U_\eta(v)d\pi(v) < \infty \tag{115}$$

olduğunu göstermek gerekir. Teorem 2.3.1'in koşullarından $E(\eta_1^2) < \infty$ olduğundan kesinleştirilmiş yenileme teoremine göre $v \to \infty$ iken

$$U_\eta(v) = \frac{v}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + g(v) \tag{116}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$g(v) = U_\eta(v) - \frac{v}{m_1} - \frac{m_2}{2m_1^2} \tag{117}$$

olsun. Kesinleştirilmiş yenileme teoremine göre $\lim_{v\to\infty} g(v) = 0$'dır (Feller, 1971). Bu takdirde, öyle bir $b > 0$ sayısı bulmak mümkündür ki, $\varepsilon > 0$ için $v \geq b$ olduğunda

$$|g(v)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{118}$$

olsun. Şimdi (118) eşitliği dikkate alınarak (115) eşitliğindeki integral aşağıdaki şekilde değerlendirilebilir:

$$\begin{aligned} EU_\eta(\zeta_1) &= \int_0^b U_\eta(v)d\pi(v) + \int_b^\infty U_\eta(v)d\pi(v) \leq U_\eta(b)\int_0^b d\pi(v) + \int_b^\infty U_\eta(v)d\pi(v) \\ &= U_\eta(b)\int_0^b d\pi(v) + \int_b^\infty \left\{\frac{v}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}\right\} d\pi(v) \\ &= U_\eta(b)\int_0^b d\pi(v) + \frac{1}{m_1}\int_b^\infty v d\pi(v) + \left\{\frac{m_2}{2m_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\int_b^\infty d\pi(v) \\ &\leq U_\eta(b) + \frac{E(\zeta_1)}{m_1} + \left\{\frac{m_2}{2m_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \end{aligned} \tag{119}$$

Burada

$$\int_0^b d\pi(v) \leq \int_0^\infty d\pi(v) = 1,\ \int_b^\infty d\pi(v) \leq \int_0^\infty d\pi(v) = 1,\ \int_b^\infty v d\pi(v) \leq \int_0^\infty v d\pi(v) \equiv E(\zeta_1)$$

eşitsizlikleri kullanılmıştır. Böylece $0 < E(\eta_1) < \infty$ ve $E(\eta_1^2) < \infty$ koşulları sağlandığında $U_\eta(v)$ ve $EU_\eta(\zeta_1)$ 'in sonlu oldukları ispatlanmış olur.

Bu durumda 2. varsayımın sağlandığını gösterilmiştir.

Sonuç olarak, genel ergodik teoreme göre, ele alınan $X(t)$ süreci, Teorem 2.3.1'in koşulları altında ergodiktir. Bu da Teorem 2.3.1'in ispatını tamamlar.

Önerme 2.3.1. Teorem 2.3.1'in şartları sağlansın. Bu takdirde, her ölçülebilir sınırlı $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki bağıntı 1 olasılığı ile doğrudur (Gihman ve Skorohod, 1975):

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(X(u))du \equiv S_f = \frac{1}{E(\tau_1(\zeta_1))}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_s^\infty f(x)P_{v+s}\{\tau_1 > t;\ X(t)\in dx\}dt d\pi(v). \tag{120}$$

Uyarı 2.3.1. Bilinmelidir ki, (120) eşitliğindeki

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_s^\infty f(x) P_{v+s}\{\tau_1 > t;\, X(t) \in dx\} dt d\pi(v) \tag{121}$$

üç katlı integrali sonludur (Mammadova, 2011).

İspat. $f(x)$ sınırlı ölçülebilir bir fonksiyon olduğundan

$$\sup_{x \in R^+} |f(x)| \equiv M < \infty \tag{122}$$

olarak yazılabilir. Bu takdirde aşağıdaki işlemler yapılabilir:

$$\left| \int_0^\infty \int_0^\infty \int_s^\infty f(x) P_{v+s}\{\tau_1 > t;\, X(t) \in dx\} dt d\pi(v) \right| \le M \int_0^\infty \int_0^\infty \int_s^\infty P_{v+s}\{\tau_1 > t;\, X(t) \in dx\} dt d\pi(v)$$

$$= M \int_0^\infty \int_0^\infty P_{v+s}\{\tau_1 > t\} dt d\pi(v)$$

$$= M \int_0^\infty E(\tau_1(v)) d\pi(v)\,. \tag{123}$$

Burada

$$\int_0^\infty E(\tau_1(v)) d\pi(v) < \infty \tag{124}$$

olduğu Teorem 2.3.1'de gösterilmiştir. O halde (122) ve (124), (123)'de dikkate alınırsa, (121)'deki integralin sonlu olduğu açıkça görülür.

Teorem 2.3.2. Teorem 2.3.1'in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde, her bir ölçülebilir sınırlı $f(x)$ fonksiyonu ($f:[0,+\infty) \to R$) için aşağıdaki eşitlik, 1 olasılığı ile doğrudur:

$$S_f \equiv \frac{1}{E(\tau_1(\zeta_1))} \int_0^\infty f(x) d_x \left(E\left(\tilde{G}(0, x, \zeta_1) \right) \right). \tag{125}$$

İspat. Önerme 2.3.1'e göre genel ergodik teoremin koşulları sağlandığında, her ölçülebilir sınırlı $f(x)$ fonksiyonu için (120) eşitliğinin 1 olasılığı ile doğru olduğu bilinmektedir. Buna göre, (120) eşitliğinde

$$G(t, x, v) \equiv P_{s+v}\{\tau_1 > t; X(t) \le x\} \equiv P\{\tau_1 > t; X(t) \le x \mid X(0) = v + s\}$$

olduğu göz önünde bulundurulursa

$$S_f \equiv \frac{1}{E(\tau_1)} \int_0^\infty f(x) d_x \left(\int_0^\infty \int_0^\infty G(t, x, v) dt d\pi(v) \right) \tag{126}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^\infty\int_0^\infty G(t,x,v)dtd\pi(v) \equiv E\left(\tilde{G}(0,x,\zeta_1)\right)$$

olduğundan (125) eşitliğini kolaylıkla elde etmek mümkündür.

Önerme 2.3.2. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q(x) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{\, X(t) \le x \,\} = \frac{E\left(\tilde{G}(0,x,\zeta_1)\right)}{E(\tau_1(\zeta_1))} \tag{127}$$

İspat. Teorem 2.3.2'de, (125) eşitliğinde $f(x)$ fonksiyonunun yerine

$$f(x) = I_{[0,x]} = \begin{cases} 1 \ , \ x \in [0,v] \\ 0 \ , \ x \notin [0,v] \end{cases}$$

indikatör fonksiyonu yerine yazılır ve gerekli işlemleri yapılırsa, sürecin ergodik dağılım fonksiyonu (127) eşitliğindeki gibi elde edilir.

Önerme 2.3.3. Her $x \in [s,\infty)$ için $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun kesin şekli aşağıdaki gibidir (Okur Bekar, 2006):

$$Q_X(x) = 1 - \frac{EU_\eta(\zeta_1 + s - x)}{EU_\eta(\zeta_1)}. \tag{128}$$

İspat. $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$, $n \ge 1$ birbirinden bağımsız rasgele değişkenler dizi olduğundan

$$G(t,x,v) = P_{v+s}\{\tau_1 > t; X(t) \le x\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{v+s}\{\nu(t) = n; \tau_1 > t, X(t) \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \le t < T_{n+1}; s < v + s - S_n \le x \,|\, X(0) = v + s\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \le t < T_{n+1}\} P\{s < v + s - S_n \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \le t < T_n + \xi_{n+1}\} \left(P\{S_n \le v\} - P\{S_n \le v + s - x\}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \le t; T_n + \xi_{n+1} > t\} \left(F^{*n}(v) - F^{*n}(v + s - x)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \le t; \xi_{n+1} > t - T_n\} \left(F^{*n}(v) - F^{*n}(v + s - x)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t P\{T_n \in dy; \xi_{n+1} > t - y\} \left(F^{*n}(v) - F^{*n}(v + s - x)\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t P\{T_n\in dy\}P\{\xi_{n+1}>t-y\}\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t d\Phi^{*n}(y)\left(1-\Phi(t-y)\right)\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^t d\Phi^{*n}(y)-\int_0^t \Phi(t-y)d\Phi^{*n}(y)\right)\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^t d\Phi^{*n}(y)-\int_0^t d\Phi^{*n+1}(y)\right)\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\Phi^{*n}(t)-\Phi^{*n+1}(t)\right)\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\Phi^{*n}(t)-\Phi^{*n+1}(t)\right)\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right)$$

dır. O halde aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür:

$$G(t,x,v)\equiv P_{s+v}\left\{\tau_1>t;\, X(t)\le x\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\Phi^{*n}(t)\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right). \qquad (129)$$

Burada

$$\Delta\Phi^{*n}(t)=\Phi^{*n}(t)-\Phi^{*n+1}(t);\ \Phi^{*n}(t)=P\left\{T_n\le t\right\};\ F^{*n}(v)=P\left\{S_n\le v\right\}$$

dır. (133) eşitliğinin her iki tarafında t parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\tilde{G}(\beta,x,v)=\int_0^{\infty}e^{-\beta t}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\Phi^{*n}(t)\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right)d(t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right)\int_0^{\infty}e^{-\beta t}\Delta\Phi^{*n}(t)d(t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right)\int_0^{\infty}e^{-\beta t}\left(\Phi^{*n}(t)-\Phi^{*n+1}(t)\right)d(t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right)\left(\int_0^{\infty}e^{-\beta t}\Phi^{*n}(t)d(t)-\int_0^{\infty}e^{-\beta t}\Phi^{*n+1}(t)d(t)\right).$$

Yukarıdaki integrallerin her birine kısmi integrasyon metodu uygulanır ve

$$\Phi_n(0)=P\left\{T_n\le 0\right\}=0$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$\tilde{G}(\beta,x,v)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right)\left(\frac{1}{\beta}\int_0^{\infty}e^{-\beta t}d\Phi^{*n}(t)-\frac{1}{\beta}\int_0^{\infty}e^{-\beta t}d\Phi^{*n+1}(t)\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right)\left(\frac{1}{\beta}\left(E(e^{-\beta\xi_1})\right)^{n}-\frac{1}{\beta}\left(E(e^{-\beta\xi_1})\right)^{n+1}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right)\left(\frac{1}{\beta}\left(\varphi(\beta)\right)^{n}-\frac{1}{\beta}\left(\varphi(\beta)\right)^{n+1}\right)$$

$$=\frac{1-\varphi(\beta)}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}(\varphi(\beta))^{n}\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right) \tag{130}$$

olduğu görülür. Burada her $\beta>0$ için $\varphi(\beta)=E(e^{-\beta\xi})$ 'dır. Buradan $\beta\to 0$ iken (130) eşitliğinin her iki tarafının limiti alınırsa, $\varphi(0)=E(e^{0})=E(1)=1$ olduğundan L'Hospital kuralı ile

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{1-\varphi(\beta)}{\beta}=\lim_{\beta\to 0}\frac{-\varphi'(\beta)}{1}=-\lim_{\beta\to 0}E\left(-\xi_1 e^{-\beta\xi_1}\right)=E\xi_1$$

elde edilir ve bu durumda

$$\tilde{G}(0,x,v)\equiv\lim_{\beta\to 0}\tilde{G}(\beta,x,v)$$

$$=E\xi_1\sum_{n=0}^{\infty}\left(F^{*n}(v)-F^{*n}(v+s-x)\right)$$

$$=E\xi_1\left(U_\eta(v)-U_\eta(v+s-x)\right) \tag{131}$$

olduğu görülür. (131) eşitliğinin her iki tarafı $\pi(v)$ dağılımına göre ortalanırsa

$$E\left(\tilde{G}(0,x,\zeta_1)\right)=\int_0^{\infty}\tilde{G}(0,x,v)d\pi(v)=E\xi_1\int_0^{\infty}\left(U_\eta(v)-U_\eta(v+s-x)\right)d\pi(v)$$

$$=E\xi_1\left(EU_\eta(\zeta_1)-EU_\eta(\zeta_1+s-x)\right) \tag{132}$$

elde edilir. Diğer taraftan, Teorem 2.3.1, (113) eşitliğinden

$$E(\tau_1(\zeta_1))=E(\xi_1)EU_\eta(\zeta_1) \tag{133}$$

olduğu bilinmektedir. Bu durumda (132) ve (133) eşitlikleri (127) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, (128) eşitliği elde edilir.

Sonuç 2.3.1. $\bar{X}(t)\equiv X(t)-s$ olsun. Bu durumda, her $x\geq 0$ için $\bar{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_{\bar{X}}(x)=1-\frac{EU_\eta(\zeta_1-x)}{EU_\eta(\zeta_1)}. \tag{134}$$

2.3.1. Müdahalenin Gamma Dağılımına Sahip Olması Durumunda Sürecin Ergodik Karakteristiklerinin İncelenmesi

Bu kısımda, ζ_1 rasgele değişkeni (α,λ), $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ parametreli gamma dağılımına sahip olması durumunda, öncelikle sürecin ergodikliği gösterilecektir. Daha sonra, sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için kesin ve asimptotik formüller elde edilecek, simülasyon sonuçları verilecek ve zayıf yakınsama teoremi ispatlanacaktır. Ayrıca, sürecin ergodik momentleri için kesin ve asimptotik formüller elde edilecektir.

2.3.1.1. Sürecin Ergodikliği ve Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Kesin Formüller

Aşağıda gamma müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin ergodikliği gösterilecektir:

Teorem 2.3.1.1.1. Teorem 2.3.1'in koşulları altında, ζ_1 rasgele değişkeni (α,λ), $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ parametreli gamma dağılımına sahip olsun. Bu takdirde, gamma müdahaleli ödüllü yenileme süreci ergodiktir.

İspat. Sürecin ergodik olabilmesi için, genel ergodik teoremin varsayımlarını sağladığı gösterilmesi gerekmektedir:

1. $\{X(\tau_n + 0)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ zincirinin, $\pi(v) \equiv P\{\zeta_1 \le v\}$ durağan dağılımına sahip ergodik bir ergodik zincir olduğu, Teorem 2.3.1'den bilinmektedir. Buna göre, $\{X(\tau_n + 0)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, (α,λ), $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ parametreli gamma dağılımına sahip olsun. Bu durumda da, $X(t)$ süreci genel ergodik teoremin 1. koşulunun sağlandığı açıkça görülmektedir.

2. $\{X(\tau_n + 0)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ zinciri, (α,λ), $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ parametreli gamma dağılımına sahip olduğunda da, her $n = 2, 3, \ldots$ için

$$E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty \tag{135}$$

olduğu gösterilmelidir:

$$E(\tau_n - \tau_{n-1}) \equiv \int_0^\infty E(\tau_1(v))d\pi(v) = E(\xi_1)\int_0^\infty U_\eta(v)d\pi(v) < \infty \tag{136}$$

şeklinde yazılabildiği bilinmektedir. Teorem 2.3.1'den $0 < E(\xi_1) < \infty$'dır. Bu durumda $U_\eta(v) < \infty$ olduğu bilindiğine göre, 2. varsayımın sağlanması için

$$\int_0^{\infty} U_\eta(v)d\pi(v) < \infty \tag{137}$$

olduğunu göstermek gerekir. Başka bir deyişle

$$EU_\eta(\zeta_1) = \int_0^{\infty} U_\eta(v)d\pi(v) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} U_\eta(v)v^{\alpha-1}e^{-\lambda v}dv < \infty \tag{138}$$

olduğunu göstermek gerekir. Teorem 2.3.1'e göre

$$g(v) = U_\eta(v) - \frac{v}{m_1} - \frac{m_2}{2m_1^2}$$

ve $\lim_{v\to\infty} g(v) = 0$'dır. Bu takdirde öyle bir $b(\varepsilon) > 0$ sayısı bulmak mümkündür ki, $\varepsilon > 0$ için $v \geq b(\varepsilon)$ olduğunda

$$|g(v)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{139}$$

dır. Buna göre, (138) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$EU_\eta(\zeta_1) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{b(\varepsilon)} U_\eta(v)v^{\alpha-1}e^{-\lambda v}dv + \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_{b(\varepsilon)}^{\infty} U_\eta(v)v^{\alpha-1}e^{-\lambda v}dv \equiv J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon) \tag{140}$$

$U_\eta(v)$ yenileme fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon olduğundan dolayı her $v \geq b(\varepsilon)$ için $U_\eta(z) \leq U_\eta(b(\varepsilon)) < \infty$'dır. Dolayısıyla

$$J_1(\varepsilon) \equiv \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{b(\varepsilon)} U_\eta(v)v^{\alpha-1}e^{-\lambda v}dv \leq U_\eta(b(\varepsilon))\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{b(\varepsilon)} v^{\alpha-1}e^{-\lambda v}dv \leq U_\eta(b(\varepsilon)) \tag{141}$$

olur. Diğer yandan $b(\varepsilon)$ sayısının tanımı gereği

$$U_\eta(b(\varepsilon)) \leq \frac{b(\varepsilon)}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{142}$$

dır. Buradan (141) ve (142) eşitsizliklerinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$J_1(\varepsilon) \leq \frac{b(\varepsilon)}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{143}$$

(140) eşitliğindeki ikinci integral ise aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$J_2(\varepsilon) \equiv \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_{b(\varepsilon)}^{\infty} U_\eta(v)v^{\alpha-1}e^{-\lambda v}dv$$

$$\leq \frac{\lambda^\alpha}{m_1\Gamma(\alpha)}\int_{b(\varepsilon)}^{\infty} v^{\alpha-1}e^{-\lambda v}dv + \left(\frac{m_2}{2m_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_{b(\varepsilon)}^{\infty} v^{\alpha-1}e^{-\lambda v}dv$$

$$\leq \frac{\alpha}{\lambda m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{144}$$

(140) eşitliğinde, (143) ve (144) eşitsizlikleri kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$EU_\eta(\zeta_1) \equiv J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon) \leq \frac{\alpha}{\lambda m_1} + \frac{b(\varepsilon)}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + \varepsilon. \tag{145}$$

Teorem 2.3.1'den $E(\eta_1) > 0$ ve $E(\eta_1^2) < \infty$'dır. Ayrıca $1 < \alpha < \infty$, $0 < \lambda < \infty$ ve her $\varepsilon > 0$ için $b(\varepsilon) < \infty$'dır. Bütün bunlar (145) eşitsizliğinde dikkate alınırsa

$$EU_\eta(\zeta_1) < \infty \tag{146}$$

elde edilir. Sonuç olarak (146) eşitliği ile

$$E(\tau_1) < \infty \text{ ve } E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty, \; n = 2,3,\ldots$$

olduğu ispatlanmıştır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Not 2.3.1.1.1. Sonuç 2.3.1'e göre, $\overline{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$Q_{\overline{X}}(x) = 1 - \frac{EU_\eta(\zeta_1 - x)}{EU_\eta(\zeta_1)}, \; x \geq 0. \tag{147}$$

(147) eşitliğinden $\overline{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun, $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonuna bağlı olduğu görülmektedir. Ancak literatürden de bilindiği gibi, $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonunun açık şeklini bulmak oldukça zordur. Bu nedenle en basit durumlar, örneğin aşağıdaki gibi η_1 rasgele değişkeninin üstel ve Erlang dağılıma sahip olması durumları ele alınarak, gamma müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu için kesin formüller elde edilebilir:

Örnek 2.3.1.1.1. Teorem 2.3.1.1.1'in koşulları sağlansın ve η_1, $\mu > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde, her $x \geq 0$ ve $\alpha > 0$ için gamma müdahaleli ödüllü yenileme sürecin ergodik dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q(x) = 1 - \left[\left(1 - \frac{\lambda\mu x}{\lambda + \alpha\mu}\right)\left(1 - \pi(x)\right) + \frac{\mu x}{\lambda + \alpha\mu}\rho(x)\right], \tag{148}$$

burada $\rho(x) = \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$, $\pi(x) = \int_0^x \rho(v)dv$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$'dır.

İspat. η_1, $\mu > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip bir rasgele değişken olduğunda, η_1 rasgele değişkeninin ürettiği yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Okur Bekar, 2006):

$U_\eta(v) = \mu v + 1,\ \mu > 0$.

Bu durumda, (147) eşitliğindeki $EU_\eta(\zeta_1 - x)$ ve $EU_\eta(\zeta_1)$ beklenen değerlerinin hesaplanması gerekmektedir. Öncelikle $EU(\zeta_1 - x)$ beklenen değeri aşağıdaki gibi elde edilsin:

$$EU(\zeta_1 - x) = \int_x^\infty U_\eta(v-x)d\pi(v) = \int_x^\infty \left(\mu(v-x)+1\right)d\pi(v)$$

$$= \int_x^\infty \left((1-\mu x)+\mu v\right)d\pi(v)$$

$$= (1-\mu x)\int_x^\infty d\pi(v) + \mu\int_x^\infty v d\pi(v)$$

$$= (1-\mu x)\left(\int_0^\infty d\pi(v) - \int_0^x d\pi(v)\right) + \mu\left(\int_0^\infty v d\pi(v) - \int_0^x v d\pi(v)\right)$$

$$= (1-\mu x)(1-\pi(x)) + \mu\left(\frac{\alpha}{\lambda}(1-\pi(x)) + \frac{x}{\lambda}\rho(x)\right)$$

$$= \left[(\lambda + \alpha\mu - \lambda\mu x)(1-\pi(x)) + \mu x\rho(x)\right]\frac{1}{\lambda}. \tag{149}$$

Benzer şekilde, $EU_\eta(\zeta_1)$ beklenen değeri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$EU_\eta(\zeta_1) = \int_0^\infty U_\eta(v)d\pi(v) = \int_0^\infty (\mu v + 1)d\pi(v) = \mu\frac{\alpha}{\lambda} + 1. \tag{150}$$

(147) eşitliğinde, (149) ve (150) eşitlikleri yerine yazılırsa, sürecin ergodik dağılım fonksiyonu (148) eşitliğindeki gibi elde edilir.

Örnek 2.3.1.1.2. Teorem 2.3.1.1.1 'in koşulları sağlansın ve η_1, $(2,\mu)$, $\mu > 0$ parametreli Erlang dağılımına sahip rasgele değişken olsun. Bu takdirde, her $x \ge 0$ ve $\alpha > 0$ için gamma müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_{\bar{X}}(x) = \frac{4\lambda(\lambda+2\mu)^\alpha}{(2\mu\alpha + 3\lambda)(\lambda+2\mu)^\alpha + 4\lambda^{\alpha+1}}\left\{\frac{\mu x}{\lambda}(1-\rho(x)) + \left(\frac{\mu\alpha}{2\lambda} + \frac{3}{4} - \frac{\mu x}{2}\right)\pi(x)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right)^\alpha\left[1 - e^{2\mu x}\left(1-\pi_{\alpha,\lambda+2\mu}(x)\right)\right]\right\}, \tag{151}$$

burada $\rho_{\alpha,\lambda+2\mu}(x) = \dfrac{(\lambda+2\mu)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-(\lambda+2\mu)x}$, $\pi_{\alpha,\lambda+2\mu}(x) = \int_0^x \rho_{\alpha,\lambda+2\mu}(v)dv$ 'dır.

İspat. η_1, $(2,\mu)$ parametreli Erlang dağılımına sahip bir rasgele değişken olduğunda, η_1 rasgele değişkeninin ürettiği yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibidir (Okur Bekar, 2006):

$$U_\eta(v)=\frac{\mu v}{2}+\frac{3}{4}+e^{-2\mu v},\ \mu>0.$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
EU_\eta(\zeta_1-x)&=\int_x^\infty U_\eta(v-x)d\pi(v)=\int_x^\infty\left(\frac{\mu(v-x)}{2}+\frac{3}{4}+e^{-2\mu(v-x)}\right)d\pi(v)\\
&=\frac{\mu}{2}\int_x^\infty v d\pi(v)+\left(\frac{3}{4}-\frac{\mu}{2}x\right)\int_x^\infty d\pi(v)+e^{2\mu x}\int_x^\infty e^{-2\mu v}d\pi(v)\\
&=\frac{\mu}{2}\left(\int_0^\infty v d\pi(v)-\int_0^x v d\pi(v)\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{\mu}{2}x\right)\left(\int_0^\infty d\pi(v)-\int_0^x d\pi(v)\right)\\
&\quad+e^{2\mu x}\left(\int_0^\infty e^{-2\mu v}d\pi(v)-\int_0^x e^{-2\mu v}d\pi(v)\right)\\
&=\frac{\mu}{2}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\left(1-\pi(x)\right)+\frac{x}{\lambda}\rho(x)\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{\mu}{2}x\right)\left(1-\pi(x)\right)\\
&\quad+e^{2\mu x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right)^{\alpha}\left(1-\pi_{\alpha,\lambda+2\mu}(x)\right)
\end{aligned}\tag{152}$$

dır. Benzer şekilde, $EU_\eta(\zeta_1)$ beklenen değeri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
EU_\eta(\zeta_1)&=\int_0^\infty U_\eta(v)d\pi(v)=\int_0^\infty\left(\frac{\mu v}{2}+\frac{3}{4}+e^{-2\mu v}\right)d\pi(v)\\
&=\frac{\mu}{2}\int_0^\infty v d\pi(v)+\frac{3}{4}\int_0^\infty d\pi(v)+\int_0^\infty e^{-2\mu v}d\pi(v)\\
&=\frac{\mu\alpha}{2\lambda}+\frac{3}{4}+\left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right)^{\alpha}.
\end{aligned}\tag{153}$$

(147) eşitliğinde, (152) ve (153) eşitlikleri yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, sürecin ergodik dağılım fonksiyonu elde edilir.

2.3.1.2. Sürecin Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Asimptotik Açılımlar

Önceki kısımda da görüldüğü gibi, sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için ancak özel durumlarda kesin formüller elde etmek mümkünüdür. Ayrıca bu formüller karmaşık matematiksel bir yapıya sahiptir. Bu nedenle, uygulanabilirliği açısından sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için asimptotik açılımlar elde etmek gerekir. Bu amaca ulaşmak için

$W_\lambda(t) \equiv \lambda \bar{X}(t)$

olsun. Bu durumda, (147) eşitliğini aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$Q_{W_\lambda}(x) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{W_\lambda(t) \le x\} = 1 - EU_\eta(\zeta_1 - \frac{x}{\lambda})\left(EU_\eta(\zeta_1)\right)^{-1}. \tag{154}$$

Bundan yola çıkarak, ζ_1 rasgele değişkenin gamma dağılımına sahip olması durumunda, $W_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun asimptotik davranışı aşağıdaki gibi incelenebilir:

Teorem 2.3.1.2.1. Teorem 2.3.1.1.1 'in koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken $W_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$Q_{W_\lambda}(x) = R_\alpha(x) + \frac{m_2}{2m_1\alpha}\left(\pi_{\alpha,1}(x) - R_\alpha(x)\right)\lambda + o(\lambda),\; x \ge 0, \tag{155}$$

burada $m_k = E(\eta_1^k)$, $k = 1,2$; $R_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\int_0^x \left(1 - \pi_{\alpha,1}(t)\right)dt$; $\pi_{\alpha,1}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ 'dır.

İspat. $EN_1(\zeta_1) = EU_\eta(\zeta_1)$ olduğu göz önünde bulundurulursa, Teorem 2.2.4.1'in (57) eşitliğinden

$$EU_\eta(\zeta_1) = \frac{\alpha}{m_1\lambda} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(\lambda) \tag{156}$$

dır. Bu durumda (156) eşitliğinden

$$\left(EU_\eta(\zeta_1)\right)^{-1} = \frac{\lambda m_1}{\alpha}\left(1 - \frac{m_2\lambda}{2m_1\alpha} + o(1)\right). \tag{157}$$

elde edilir. Ayrıca $v - \frac{x}{\lambda} > 0$ için $E(\eta_1^2) < \infty$ koşulu altında

$$U_\eta(v - \frac{x}{\lambda}) = \frac{v - x/\lambda}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + R_1(v),\; v \to \infty$$

burada $R_1(v)=\frac{1}{v}g(v)$ ve $g(v)=o(1)$ 'dır. Bu durumda

$$EU_\eta(\zeta_1-\frac{x}{\lambda})=\int_{\frac{x}{\lambda}}^{\infty}U_\eta(v-\frac{x}{\lambda})d\pi(v)=\int_{\frac{x}{\lambda}}^{\infty}\left(\frac{v-x/\lambda}{m_1}+\frac{m_2}{2m_1^2}+R_1(v)\right)d\pi(v)$$

$$=\frac{1}{m_1}\int_{\frac{x}{\lambda}}^{\infty}v d\pi(v)+\left(\frac{m_2}{2m_1^2}-\frac{x}{m_1\lambda}\right)\int_{\frac{x}{\lambda}}^{\infty}d\pi(v)+\int_{\frac{x}{\lambda}}^{\infty}\frac{1}{v}g(v)d\pi(v) \tag{158}$$

dır. O halde (158) eşitliğinde, $t=\lambda v$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$EU_\eta(\zeta_1-\frac{x}{\lambda})=\frac{1}{m_1\lambda\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}t^{\alpha}e^{-t}dt+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{m_2}{2m_1^2}-\frac{x}{m_1\lambda}\right)\int_x^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt+J(\alpha,\lambda,x) \tag{159}$$

elde edilir. Burada

$$J(\alpha,\lambda,x)=\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}t^{\alpha-2}e^{-t}g(\frac{t}{\lambda})dt \tag{160}$$

dır. O halde Yardımcı Teorem 2.2.4.1 kullanılarak, her $\alpha>1$ için $\lambda\to 0$ iken

$$J(\alpha,\lambda,x)=\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}t^{\alpha-2}e^{-t}g(\frac{t}{\lambda})dt\le\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-2}e^{-t}g(\frac{t}{\lambda})dt=o(\lambda) \tag{161}$$

elde edilir. Bu durumda (161) eşitliği, (159) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$EU_\eta(\zeta_1-\frac{x}{\lambda})=\frac{1}{m_1\lambda\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}t^{\alpha}e^{-t}dt+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{m_2}{2m_1^2}-\frac{x}{m_1\lambda}\right)\int_x^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt+o(\lambda)\,. \tag{162}$$

Ayrıca, (162) asimptotik açılımdaki ilk integrale aşağıdaki gibi bir kez kısmi integrasyon uygulayarak

$$EU_\eta(\zeta_1-\frac{x}{\lambda})=\frac{1}{m_1\lambda\Gamma(\alpha)}\left(x^{\alpha}e^{-x}+\alpha\int_x^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt\right)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{m_2}{2m_1^2}-\frac{x}{m_1\lambda}\right)\int_x^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt+o(\lambda)$$

$$=\frac{x^{\alpha}e^{-x}}{m_1\lambda\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{m_2}{2m_1^2}+\frac{\alpha-x}{m_1\lambda}\right)\int_x^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt+o(\lambda)$$

$$=\frac{x^{\alpha}e^{-x}}{m_1\lambda\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{m_2}{2m_1^2}+\frac{\alpha-x}{m_1\lambda}\right)\left(\int_o^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt-\int_0^{x}t^{\alpha-1}e^{-t}dt\right)+o(\lambda)$$

$$=\frac{x^{\alpha}e^{-x}}{m_1\lambda\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{m_2}{2m_1^2}+\frac{\alpha-x}{m_1\lambda}\right)\big(\Gamma(\alpha)-\Gamma(\alpha)\pi_{\alpha,1}(x)\big)+o(\lambda)$$

$$=\frac{x^{\alpha}e^{-x}}{m_1\lambda\Gamma(\alpha)}+\left(\frac{m_2}{2m_1^2}+\frac{\alpha-x}{m_1\lambda}\right)\big(1-\pi_{\alpha,1}(x)\big)+o(\lambda) \tag{163}$$

elde edilir. Sonuç olarak, (157) ve (163) asimptotik açılımları, (154) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken $W_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$Q_{W_\lambda}(x) = \frac{x}{\alpha}\left(1-\pi_{\alpha,1}(x)\right) - \frac{x^\alpha e^{-x}}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \pi_{\alpha,1}(x)$$

$$-\frac{m_2\lambda}{2m_1\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\left(1-\pi_{\alpha,1}(x)\right) - \frac{x^\alpha e^{-x}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right) + o(\lambda)\,. \qquad (164)$$

Burada

$$R_\alpha(x) = \frac{x}{\alpha}\left(1-\pi_{\alpha,1}(x)\right) - \frac{x^\alpha e^{-x}}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \pi_{\alpha,1}(x)$$

olsun. $R_\alpha(x)$ fonksiyonunun sağ tarafını tek bir integral altında yazmak mümkündür:

$$R_\alpha(x) = \frac{x}{\alpha}\left(1-\pi_{\alpha,1}(x)\right) - \frac{x^\alpha e^{-x}}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

$$= \frac{x}{\alpha}\left(1-\pi_{\alpha,1}(x)\right) - \left.\frac{t^\alpha\left(e^{-t}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right|_0^x + \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^x \alpha\, t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

$$= \frac{x}{\alpha}\left(1-\pi_{\alpha,1}(x)\right) - \frac{1}{\alpha}\int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^\alpha e^{-t} dt$$

$$= \frac{x}{\alpha}\left(1-\pi_{\alpha,1}(x)\right) - \frac{1}{\alpha}\int_0^x t\left(1-\pi_{\alpha,1}(t)\right)' dt$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(t\left(1-\pi_{\alpha,1}(t)\right)\Big|_0^x - \int_0^x t\left(1-\pi_{\alpha,1}(t)\right)' dt \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^x \left(1-\pi_{\alpha,1}(t)\right) dt\,. \qquad (165)$$

Son olarak (165) eşitliği, (164) asimptotik açılımda yerine yazılırsa, sürecin ergodik dağılım fonksiyonunun asimptotik açılımı elde edilir.

2.3.1.3. Simülasyon Sonuçları

Bu kısımda, Teorem 2.3.1.2.1'de $W_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu için elde edilen asimptotik açılımın ilk iki terim kullanılarak, bu ergodik dağılım fonksiyonu için yaklaşık değerler oluşturulmuştur. Bunun için, ζ_1 rasgele değişkeni sırasıyla $(\alpha = 5; \lambda = 1)$ ve $(\alpha = 5; \lambda = 0.5)$ parametreli gamma dağılımına ve η_1 rasgele değişkeni ise, $\mu = 10$ parametreli Erlang dağılımına sahip olduğu göz önünde bulundurulmuştur. Bu değerler sembolik olarak $\tilde{Q}_{W_\lambda}(x)$ ile gösterilmiştir. Benzer şekilde, ergodik dağılım fonksiyonu için Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak elde edilen simülasyon değerleri ise $\hat{Q}_{W_\lambda}(x)$ ile gösterilmiştir.

Ayrıca her bir simülasyon değeri, bilgisayarda MATLAB programı kullanılarak ve sürecin $n = 10^8$ sayıda realizasyonu (izi) üretilerek elde edilmiştir. Bu değerler yardımıyla, ergodik dağılım fonksiyonu için aşağıdaki tablolar oluşturulmuştur. Burada oluşturulan tablolar Tablo 1-4'deki yöntemle düzenlenmiştir:

Tablo 5. $\lambda = 1$ iken $Q_{W_\lambda}(x)$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	$\hat{Q}_{W_\lambda}(x)$	$\tilde{Q}_{W_\lambda}(x)$	Δ_1	δ_1 (%)	AP_1 (%)
0,2	0,03890	0,038800063	0,000099937	0,256907457	99,74309254
0,4	0,07770	0,077601225	0,000098774	0,127123456	99,87287654
0,6	0,11650	0,116404990	0,000095010	0,081553624	99,91844638
0,8	0,15530	0,155206876	0,000093123	0,059963884	99,94003612
1,0	0,19410	0,193988040	0,000111960	0,057681748	99,94231825
1,2	0,23280	0,232708602	0,000091398	0,039260430	99,96073957
1,4	0,27140	0,271304393	0,000095606	0,035227236	99,96477276
1,6	0,30975	0,309687006	0,000062994	0,020337200	99,97966280
1,8	0,34780	0,347746650	0,000053350	0,015339410	99,98466059
2,0	0,38535	0,385356902	0,000069016	0,001791006	99,99820899

Tablo 6. $\lambda = 0.5$ iken $Q_{W_\lambda}(x)$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	$\hat{Q}_{W_\lambda}(x)$	$\tilde{Q}_{W_\lambda}(x)$	Δ_2	δ_2 (%)	AP_2 (%)
0,2	0,03936000	0,039400029	0,000040028	0,101699426	99,8983005
0,4	0,07874000	0,078800294	0,000060293	0,076572996	99,9234270
0,6	0,11815000	0,118198945	0,000048945	0,041426572	99,9585734
0,8	0,15754000	0,157585084	0,000045084	0,028617761	99,9713822
1,0	0,19692000	0,196931075	0,000011075	0,005624221	99,9943757
1,2	0,23618000	0,236187033	0,000070333	0,002977963	99,9970220
1,4	0,27528000	0,275278747	0,000012529	0,000455152	99,9995448
1,6	0,31411000	0,314108700	0,000012995	0,000413711	99,9995862
1,8	0,35255960	0,352559624	0,000023732	0,000006731	99,9999932
2,0	0,39049964	0,390499642	0,000016615	0,000004255	99,9999995

Not 2.3.1.3.1. Tablo 5 ve 6'dan görüldüğü gibi, λ parametresinin çok küçük değerleri için oldukça yüksek doğruluk seviyesinde yaklaşık sonuçlar elde edilmiştir. Yani, $\lambda = 1$ ve $\lambda = 0.5$ iken, her $x \in [0.2; 2.0]$ için asimptotik ve simülasyon değerleri arasındaki uyum yüzdeleri %99'un üzerindedir. Bu nedenle, Teorem 2.3.1.2.1'deki asimptotik açılımlardan elde edilen yaklaşık değerler, simülasyon sonucu elde edilen değerlere çok büyük uyum sağlamaktadır. Bu ise, λ parametresinin büyük olmayan değerleri için bile olsa, sözü edilen asimptotik açılımların çeşitli modellerde güvenilir bir şekilde kullanılabileceği anlamına gelir.

2.3.1.4. Sürecin Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Zayıf Yakınsaklık Teoremi

Bu kısımda, ζ_1 rasgele değişkenin gamma dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için zayıf yakınsama teoremi ispatlanacaktır.

Teorem 2.3.1.4.1. Teorem 2.3.1.2.1'in koşulları sağlansın. Bu takdirde, her $x \geq 0$ ve $\alpha > 1$ için $W_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu, $R_\alpha(x)$ dağılım fonksiyonuna yakınsamaktadır:

$$Q_{W_\lambda}(x) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} R_\alpha(x), \tag{166}$$

burada $R_\alpha(x) \equiv \frac{1}{\alpha}\int_0^x \left(1-\pi_{\alpha,1}(t)\right)dt$ 'dır.

İspat. $R_\alpha(x)$ ve $\pi_{\alpha,1}(x)$ fonksiyonları, birer dağılım fonksiyonu olduğu için her $x \ge 0$, $\alpha > 1$ için $0 \le R_\alpha(x) \le 1$ ve $0 \le \pi_{\alpha,1}(x) \le 1$'dır. Bu nedenle aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\max_x \left|\pi_{\alpha,1}(x) - R_\alpha(x)\right| \le 1. \tag{167}$$

Teorem 2.3.1.2.1'den $m_2 = E(\eta_1^2) < \infty$ olduğundan, her $\alpha > 1$ için (167) eşitsizliği kullanılarak

$$\frac{m_2}{2m_1\alpha}\left|\pi_{\alpha,1}(x) - R_\alpha(x)\right| \le \frac{m_2}{2m_1\alpha} < \infty \tag{168}$$

elde edilir. Teorem 2.3.1.2.1'den bilinmektedir ki

$$Q_{W_\lambda}(x) = R_\alpha(x) + \frac{m_2}{2m_1\alpha}\left(\pi_{\alpha,1}(x) - R_\alpha(x)\right)\lambda + o(\lambda) \tag{169}$$

dır. Bu durumda (168) eşitsizliği (169) asimptotik açılımında dikkate alınırsa, $\lambda \to 0$ iken (169) asimptotik açılımının ikinci teriminin sıfıra yakınsar. Bunun sonucu olarak, $\lambda \to 0$ iken her $x \ge 0$ ve $\alpha > 1$ için $Q_{W_\lambda}(x)$ dağılım fonksiyonu, $R_\alpha(x)$ dağılım fonksiyonuna yakınsar.

2.3.1.5. Sürecin n. Mertebeden Ergodik Momenti İçin Kesin Formüller

Sonuç 2.3.1'e göre, sürecin ergodik dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_{\bar{X}}(x) = 1 - \frac{EU_\eta(\zeta_1 - x)}{EU_\eta(\zeta_1)},\ x \ge 0. \tag{170}$$

Bu kısımda amaç, (170) eşitliğinden yola çıkarak, sürecin n. mertebeden ergodik momentinin kesin ifadesini elde etmektir. Bu amaçla, sürecin n. mertebeden ergodik momenti aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$E(\bar{X}^n) = \lim_{t\to\infty} E(\bar{X}^n(t)),\ n = 1, 2, \ldots.$$

Teorem 2.3.1.5.1. Teorem 2.3.1'in koşulları sağlansın. Eğer $\bar{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momenti ($E(\bar{X}^n)$, $n = 1, 2, \ldots$) mevcut ve sonlu ise, bu takdirde $E(\bar{X}^n)$, $n = 1, 2, \ldots$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(\bar{X}^n) = \frac{n}{EU_\eta(\zeta_1)} \int_0^\infty x^{n-1} EU_\eta(\zeta_1 - x)dx\,, \; n = 1, 2, \ldots \tag{171}$$

İspat. $\bar{X}^n > 0$ ve $E(\bar{X}^n) < \infty$ olduğundan aşağıdaki eşitlik doğrudur (Shiryayev,1973-1974):

$$E(\bar{X}^n) = \int_0^\infty x^n dQ_{\bar{X}}(x) = n\int_0^\infty x^{n-1}\left(1 - Q_{\bar{X}}(x)\right)dx\,. \tag{172}$$

(172) eşitliğinde (170) eşitliği yerine yazılırsa, (171) eşitliği kolayca elde edilir.

Not 2.3.1.5.1. Teorem 2.3.1.5.1'e göre, $\bar{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momentinin kesin ifadesi de, η_1 rasgele değişkeninin ürettiği $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonuna bağlıdır. $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonunun açık şeklini bulmak zor olduğu için, aşağıda teorik ve bazı durumlarda pratik yönden önemini de dikkate alınarak, η_1 rasgele değişkeni sırasıyla üstel ve Erlang dağılımına sahip iken, $\bar{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momentinin açık şekli bulunacaktır.

Örnek 2.3.1.5.1. Teorem 2.3.1.1.1 'in koşulları sağlansın ve η_1, $\mu > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip bir rasgele değişken olsun. Eğer $\bar{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momenti ($E(\bar{X}^n)$, $n = 1, 2, \ldots$) mevcut ve sonlu ise, bu takdirde $E(\bar{X}^n)$, $n = 1, 2, \ldots$ ergodik momentinin açık şekli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(\bar{X}^n) = \frac{\lambda(n+1) + \mu(\alpha + n)}{(\lambda + \alpha\mu)(n+1)} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda^n}, \tag{173}$$

burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ Euler'in gamma fonksiyonudur.

İspat. η_1, $\mu > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip bir rasgele değişken ve $\bar{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momenti ($E(\bar{X}^n)$, $n = 1, 2, \ldots$) mevcut ve sonlu olsun. Bu takdirde, η_1 rasgele değişkeninin ürettiği yenileme fonksiyonunun aşağıdaki gibi olduğu bilinmektedir:

$$U_\eta(v) = \mu v + 1, \; \mu > 0.$$

Bütün bunlar dikkate alınarak, ilk olarak $\int_0^\infty x^{n-1} EU_\eta(\zeta_1 - x)dx$ integrali hesaplansın:

$$\int_0^\infty x^{n-1} EU_\eta(\zeta_1 - x)dx = \int_0^\infty x^{n-1}\left(\int_0^\infty U_\eta(v - x)d\pi(v)\right)dx\,, \; v - x \geq 0$$

$$=\int_0^\infty x^{n-1}\left(\int_x^\infty U_\eta(v-x)d\pi(v)\right)dx=\int_0^\infty\left(\int_0^v x^{n-1}U_\eta(v-x)dx\right)d\pi(v)$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^v x^{n-1}\left(\mu(v-x)+1\right)dx\right)d\pi(v)$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^v x^{n-1}\left((1+\mu v)-\mu x\right)dx\right)d\pi(v)$$

$$=\int_0^\infty\left(\frac{(1+\mu v)v^n}{n}-\frac{\mu v^{n+1}}{n+1}\right)d\pi(v)=\int_0^\infty\left(\frac{\mu v^{n+1}}{n(n+1)}+\frac{v^n}{n}\right)d\pi(v)$$

$$=\frac{\mu}{n(n+1)}E(\zeta_1^{n+1})+\frac{1}{n}E(\zeta_1^n). \tag{174}$$

Şimdi $EU_\eta(\zeta_1)$ integrali hesaplansın:

$$EU_\eta(\zeta_1)=\int_0^\infty U_\eta(v)d\pi(v)=\int_0^\infty(1+\mu v)d\pi(v)=1+\mu E(\zeta_1). \tag{175}$$

(174) ve (175) eşitlikleri (171) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$E(\bar{X}^n)=\frac{n}{1+\mu E(\zeta_1)}\left(\frac{\mu}{n(n+1)}E(\zeta_1^{n+1})+\frac{1}{n}E(\zeta_1^n)\right) \tag{176}$$

elde edilir. Burada ζ_1, (α,λ), $\alpha>0$, $\lambda>0$ parametreli gamma dağılımına sahip bir rasgele değişken olduğundan

$$E(\zeta_1^n)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\lambda^n\Gamma(\alpha)} \tag{177}$$

dır. Son olarak (177) eşitliği, (176) eşitliğinde uygun olarak yerine yazılırsa, $\bar{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momenti elde edilir.

Örnek 2.3.1.5.2. Teorem 2.3.1.1.1 'in koşulları sağlansın ve η_1, $(2,\mu)$, $\mu>0$ parametreli Erlang dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Eğer $\bar{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momenti ($E(\bar{X}^n)$, $n=1,2,\ldots$) mevcut ve sonlu ise, bu takdirde $E(\bar{X}^n)$, $n=1,2,\ldots$ ergodik momentinin açık şekli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\bar{X}^n=\frac{4\lambda(\lambda+2\mu)^\alpha}{(3\lambda+2\mu\alpha)(\lambda+2\mu)^\alpha}\left[\left(\frac{\mu(\alpha+n)}{2(n+1)\lambda}+\frac{3}{4}\right)\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\lambda^n}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right)^\alpha\frac{n\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}\frac{(-1)^k k!}{(2\mu)^{k+1}}\frac{\Gamma(\alpha+n-k-1)}{(\lambda-2\mu)^{\alpha+n-k-1}}\right]. \tag{178}$$

İspat. η_1, $(2,\mu)$, $\mu>0$ parametreli Erlang dağılımına sahip bir rasgele değişken ve $\overline{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momenti ($E(\overline{X}^n)$, $n=1,2,\ldots$) mevcut ve sonlu olsun. Bu takdirde, η_1 rasgele değişkeninin ürettiği yenileme fonksiyonunun aşağıdaki gibi olduğu bilinmektedir:

$$U_\eta(v)=\frac{\mu v}{2}+\frac{3}{4}+e^{-2\mu v},\ \mu>0.$$

Bütün bunlar dikkate alınarak, ilk olarak $\int_0^\infty x^{n-1}EU_\eta(\zeta_1-x)dx$ integrali hesaplansın:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{n-1}EU_\eta(\zeta_1-x)dx &= \int_0^\infty x^{n-1}\left(\int_0^\infty U_\eta(v-x)d\pi(v)\right)dx,\ v-x\ge 0\\
&= \int_0^\infty x^{n-1}\left(\int_x^\infty U_\eta(v-x)d\pi(v)\right)dx=\int_0^\infty\left(\int_0^z x^{n-1}U_\eta(v-x)dx\right)d\pi(v)\\
&= \int_0^\infty\left[\int_0^v x^{n-1}\left(\frac{\mu}{2}(v-x)+\frac{3}{4}+e^{-2\mu(v-x)}\right)dx\right]d\pi(v)\\
&= \int_0^\infty\left[\int_0^v x^{n-1}\left(\left(\frac{3}{4}+\frac{\mu v}{2}\right)-\frac{\mu x}{2}+e^{-2\mu v}e^{2\mu x}\right)dx\right]d\pi(v)\\
&= \int_0^\infty\left(\left(\frac{3}{4}+\frac{\mu v}{2}\right)\int_0^v x^{n-1}dx-\frac{\mu}{2}\int_0^v x^n dx+e^{-2\mu v}\int_0^v x^{n-1}e^{2\mu x}dx\right)d\pi(v)\\
&= \int_0^\infty\left(\frac{\mu}{2n(n+1)}v^{n+1}+\frac{3}{4n}v^n+e^{-2\mu v}J(v)\right)d\pi(v)\\
&= \frac{\mu}{2n(n+1)}E(\zeta_1^{n+1})+\frac{3}{4n}E(\zeta_1^n)+E(e^{-2\mu\zeta_1})E(J(\zeta_1))
\end{aligned}\tag{179}$$

burada $J(v)=\int_0^v x^{n-1}e^{2\mu x}dx$, $n=1,2,\ldots$'dır.

Şimdi $EU_\eta(\zeta_1)$ integrali hesaplansın:

$$\begin{aligned}
EU_\eta(\zeta_1)&=\int_0^\infty U_\eta(v)d\pi(v)=\int_0^\infty\left(\frac{\mu v}{2}+\frac{3}{4}+e^{-2\mu v}\right)d\pi(v)\\
&=\frac{3}{4}+\frac{\mu}{2}E(\zeta_1)+E(e^{-2\mu\zeta_1}).
\end{aligned}\tag{180}$$

(179) ve (180) eşitlikleri (171) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$E(\bar{X}^n)=\frac{n}{\frac{\mu}{2}E(\zeta_1)+\frac{3}{4}+E(e^{-2\mu\zeta_1})}\left(\frac{\mu}{2n(n+1)}E(\zeta_1^{n+1})+\frac{3}{4n}E(\zeta_1^n)+E(e^{-2\mu\zeta_1})E(J(\zeta_1))\right) \quad (181)$$

elde edilir. Burada ζ_1, (α,λ), $\alpha>0$, $\lambda>0$ parametreli gamma dağılımına sahip bir rasgele değişken olduğundan

$$E(e^{-2\mu\zeta_1})=\left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right)^{\alpha} \text{ ve } E(J(\zeta_1))=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}\frac{(-1)^k k!}{(2\mu)^{k+1}}\frac{\Gamma(\alpha+n-k-1)}{(\lambda-2\mu)^{\alpha+n-k-1}} \quad (182)$$

dır. Son olarak (177) ve (182) eşitliği, (181) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\bar{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momenti elde edilir.

Not edilmelidir ki,

$$J(v)=\int_0^v x^{n-1}e^{2\mu x}dx\,,\ n=1,2,\ldots$$

olduğu göz önünde bulundurularak, (182) eşitliğindeki $E(J(\zeta_1))$ integrali aşağıdaki gibi elde edilir:

$$n=1\Rightarrow J(v)=\int_0^v e^{2\mu x}dx=\frac{e^{2\mu v}}{2\mu}\,,$$

$$n=2\Rightarrow J(v)=\int_0^v xe^{2\mu x}dx=v\frac{e^{2\mu v}}{2\mu}-\frac{e^{2\mu v}}{(2\mu)^2}\,,$$

$$n=3\Rightarrow J(v)=\int_0^v x^2e^{2\mu x}dx=v^2\frac{e^{2\mu v}}{2\mu}-2v\frac{e^{2\mu v}}{(2\mu)^2}+\frac{e^{2\mu v}}{(2\mu)^3}\,,$$

$$n=4\Rightarrow J(v)=\int_0^v x^3e^{2\mu x}dx=v^3\frac{e^{2\mu v}}{2\mu}-3v^2\frac{e^{2\mu v}}{(2\mu)^2}+6v\frac{e^{2\mu v}}{(2\mu)^3}-6\frac{e^{2\mu v}}{(2\mu)^4}\,,$$

$$\vdots$$

Bu şekilde devam edilirse

$$\begin{aligned}J(v)=\int_0^v x^{n-1}e^{2\mu x}dx&=v^{n-1}\frac{e^{2\mu v}}{2\mu}-(n-1)v^{n-2}\frac{e^{2\mu v}}{(2\mu)^2}+(n-1)(n-2)v^{n-3}\frac{e^{2\mu v}}{(2\mu)^3}-\ldots\\&=\frac{e^{2\mu v}}{2\mu}\left(v^{n-1}-\frac{(n-1)v^{n-2}}{2\mu}+\frac{(n-1)(n-2)v^{n-3}}{(2\mu)^2}-\ldots\right)\\&=\frac{e^{2\mu v}}{2\mu}\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}\frac{(-1)^k k!}{(2\mu)^k}v^{n-k-1}\end{aligned} \quad (183)$$

olduğu açıkça görülür. O halde (183) eşitliğinden

$$E(J(\zeta_1)) = \int_0^\infty J(v)d\pi(v) = \int_0^\infty \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^k k!}{(2\mu)^{k+1}} v^{n-k-1} e^{2\mu v} \right] d\pi(v)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^k k!}{(2\mu)^{k+1}} \int_0^\infty v^{n-k-1} e^{2\mu v} d\pi(v) \tag{184}$$

elde edilir. (184) eşitliğindeki integral ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\int_0^\infty v^{n-k-1} e^{2\mu v} d\pi(v) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty v^{\alpha+n-k-2} e^{-(\lambda-2\mu)v} dv$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{t}{\lambda - 2\mu} \right)^{\alpha+n-k-2} e^{-t} \frac{dt}{\lambda - 2\mu}$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\lambda-2\mu)^{\alpha+n-k-1}} \int_0^\infty t^{\alpha+n-k-2} e^{-t} dt$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+n-k-1)}{(\lambda-2\mu)^{\alpha+n-k-1}}. \tag{185}$$

(185) eşitliği, (184) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$E(J(\zeta_1)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^k k!}{(2\mu)^{k+1}} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+n-k-1)}{(\lambda-2\mu)^{\alpha+n-k-1}}$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^k k!}{(2\mu)^{k+1}} \frac{\Gamma(\alpha+n-k-1)}{(\lambda-2\mu)^{\alpha+n-k-1}} \tag{186}$$

elde edilir.

2.3.1.6. Sürecin n. Mertebeden Ergodik Momenti İçin Asimptotik Açılımlar

Bu kısımda amaç, η_1 rasgele değişkeni keyfi bir dağılıma ve ζ_1 rasgele değişkeni gamma dağılımına sahip olması durumunda, $\overline{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momenti için $\lambda \to 0$ iken üç terimli asimptotik açılımlar elde etmektir. Bu amaçla aşağıdaki notasyon verilsin:

$$U_n(x) \equiv x^{n-1} * U_\eta(x) \equiv \int_0^x (x-t)^{n-1} U_\eta(t)dt, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{187}$$

Teorem 2.3.1.6.1. Eğer $\bar{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunu n. ergodik mertebeden momenti mevcut ve sonlu ise, bu takdirde $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Khaniyev vd, 2011):

$$E(\bar{X}^n) = n\,EU_n(\zeta_1)\left[EU_\eta(\zeta_1)\right]^{-1},\ n = 1, 2, \ldots. \tag{188}$$

İspat. Teorem 2.3.1.6.1'e göre, $\bar{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunu n. ergodik mertebeden momenti aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(\bar{X}^n) = n\left[EU_\eta(\zeta_1)\right]^{-1}\int_0^\infty x^{n-1}EU_\eta\left(\zeta_1 - x\right)dx\,. \tag{189}$$

Burada

$$\int_0^\infty x^{n-1}EU_\eta(\zeta_1 - x)dx = \int_0^\infty x^{n-1}\left(\int_0^\infty U_\eta(v-x)d\pi(v)\right)dx = \int_0^\infty d\pi(v)\int_0^v x^{n-1}U_\eta(v-x)dx$$

$$= \int_0^\infty d\pi(v)\int_0^v (v-t)^{n-1}U_\eta(t)dt = \int_0^\infty U_n(v)d\pi(v) = EU_n(\zeta_1) \tag{190}$$

elde edilir. Son olarak, (190) eşitliği (189)'de yerine yazılırsa (188) elde edilir.

Not 2.3.1.6.1. Bilindiği gibi $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonun kesin ve açık ifadesi sadece basit dağılımlar örneğin üstel, Erlang, vs… için elde edilebilir. Fakat bu genel durum için oldukça zordur. Bu nedenle η_1 rasgele değişkeni genel sınıftan bir dağılıma sahip olduğunda (189) eşitliğini, $E(\bar{X}^n)$ için kullanmak uygun değildir. Diğer taraftan $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımını kullanarak, $E(\bar{X}^n)$ için $\lambda \to 0$ iken üç terimli bir asimptotik açılım elde etmek mümkündür. Bu nedenle, (188) eşitliğine göre, $U_n(x)$ fonksiyonunun asimptotik davranışı incelenmesi gerekmektedir. Bunun için aşağıdaki yardımcı teoreme ihtiyaç vardır:

Yardımcı Teorem 2.3.1.6.1. Eğer $E(\eta_1^3) < \infty$ ise, her $n = 1, 2, 3, \ldots$ için $x \to \infty$ iken aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir (Khaniyev vd, 2011):

$$U_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2}\frac{x^n}{n} - \left(\frac{m_3}{6m_1^2} - \frac{m_2^2}{4m_1^3}\right)\frac{x^{n-1}}{n} + o(x^{n-1})\,, \tag{191}$$

burada $m_k = E(\eta_1^k)$, $k = 1, 2, 3$'dır.

İspat. $\varphi(\beta)=E(e^{-\beta\eta_1})$, $\beta>0$ olmak üzere, $U_n(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{U}_n(\beta)=\frac{(n-1)!}{\beta^{n+1}\left(1-\varphi(\beta)\right)}. \tag{192}$$

Ayrıca, $\beta\to 0$ iken $\varphi(\beta)$ fonksiyonun Taylor açılımı aşağıdaki gibidir:

$$\varphi(\beta)=1-\beta m_1+\frac{\beta^2}{2!}m_2-\frac{\beta^3}{3!}m_3+o(\beta^3). \tag{193}$$

(193) asimptotik açılımı (192) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\beta\to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\tilde{U}_n(\beta)=\frac{(n-1)!}{m_1\beta^{n+2}}+\frac{m_2}{2m_1^2}\frac{(n-1)!}{\beta^{n+1}}-\left(\frac{m_3}{6m_1^2}-\frac{m_2^2}{4m_1^3}\right)\frac{(n-1)!}{\beta^n}+o(\frac{1}{\beta^n}). \tag{194}$$

(194) eşitliğinde Tauber-Abel teoremi kullanılırsa, (191) eşitliği elde edilir.

Teorem 2.3.1.6.2. Teorem 2.3.1.1.1 'in koşullarına ilaveten, $E(\eta_1^3)<\infty$ olsun. Bu takdirde, $\alpha>1$ için $\lambda\to 0$ iken $\overline{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momenti asimptotik olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\left(\overline{X}^n\right)=\frac{A_n}{\lambda^n}+\frac{B_n}{\lambda^{n-1}}+\frac{C_n}{\lambda^{n-2}}+o(\frac{1}{\lambda^{n-2}}),\quad n=1,2,\dots \tag{195}$$

burada $r_n(\alpha)=\dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{\alpha\Gamma(\alpha)}$ olmak üzere

$$A_n=\frac{r_{n+1}(\alpha)}{(n+1)},\ B_n=\frac{m_2 n(\alpha-1)}{2m_1(n+1)\alpha}r_n(\alpha),\ C_n=\left(\frac{m_2^2(1-n)}{4m_1^2\alpha}-\frac{m_3}{6m_1}\right)r_{n-1}(\alpha)$$

dır.

İspat. $\lambda\to 0$ iken $\overline{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momenti için üç terimli bir asimptotik açılım elde edebilmek için (188) eşitliğine göre, $\alpha>1$ için $\lambda\to 0$ iken $EU_\eta(\zeta_1)$ ve $EU_n(\zeta_1)$ ($n=1,2,3,\dots$) için asimptotik açılım elde etmek yeterli olacaktır:

$$EU_\eta(\zeta_1)=\frac{\alpha}{m_1\lambda}+\frac{m_2}{2m_1^2}+o(\lambda) \tag{196}$$

olduğu önceki kısımda gösterilmişti. Bu durumda, $EU_n(\zeta_1)$ için $\lambda\to 0$ iken asimptotik açılım elde edilsin. Yardımcı teorem 2.3.1.6.1'e göre, eğer $E(\eta_1^3)<\infty$ ise, aşağıdaki asimptotik açılım doğrudur:

$$U_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2}\frac{x^n}{n} - \left(\frac{m_3}{6m_1^2} - \frac{m_2^2}{4m_1^3}\right)\frac{x^{n-1}}{n} + R_n(x),\ x \to \infty, \tag{197}$$

burada $R_n(x) = x^{n-1}g(x)$ ve $g(x) = o(1)$'dır.

Bu durumda, (197) eşitliği kullanılarak aşağıdaki işlemler yapılabilir:

$$EU_n(\zeta_1) = \int_0^\infty \left[\frac{v^{n+1}}{n(n+1)m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2}\frac{v^n}{n} - \left(\frac{m_3}{6m_1^2} - \frac{m_2^2}{4m_1^3}\right)\frac{v^{n-1}}{n} + R_n(v)\right]d\pi(v)$$

$$= \frac{1}{n(n+1)m_1}\int_0^\infty v^{n+1}d\pi(v) + \frac{m_2}{2nm_1^2}\int_0^\infty v^n d\pi(v)$$

$$-\left(\frac{m_3}{6m_1^2} - \frac{m_2^2}{4m_1^3}\right)\frac{1}{n}\int_0^\infty v^{n-1}d\pi(v) + \int_0^\infty R_n(v)d\pi(v)$$

$$= \frac{E(\zeta_1^{n+1})}{n(n+1)m_1} + \frac{m_2E(\zeta_1^n)}{2nm_1^2} - \left(\frac{m_3}{6m_1^2} - \frac{m_2^2}{4m_1^3}\right)\frac{E(\zeta_1^{n-1})}{n} + E(R_n(\zeta_1)). \tag{198}$$

Ayrıca, Yardımcı Teorem 2.2.4.1'de α yerine, $\alpha + n - 1$ yazılırsa, her $\alpha > 1$ için

$$E(R_n(\zeta_1)) = o\left(\frac{1}{\lambda^{n-1}}\right),\ \lambda \to 0 \tag{199}$$

sonucu elde edilir. Bu durumda, (199) eşitliği, (198) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\lambda \to 0$ iken

$$EU_n(\zeta_1) = \frac{E(\zeta_1^{n+1})}{n(n+1)m_1} + \frac{m_2E(\zeta_1^n)}{2nm_1^2} - \left(\frac{m_3}{6m_1^2} - \frac{m_2^2}{4m_1^3}\right)\frac{E(\zeta_1^{n-1})}{n} + o\left(\frac{1}{\lambda^{n-1}}\right) \tag{200}$$

dır. Burada $E(\zeta_1^n) = \dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{\lambda^n\Gamma(\alpha)}$ olduğu açıktır. Son olarak (200) ve (196) eşitlikleri, (188) eşitliğinde yerine yazılırsa, sürecin n. mertebeden ergodik momentinin asimptotik açılımı elde edilir.

2.3.2. Müdahalenin Weibull Dağılımına Sahip Olması Durumunda Ödüllü Yenileme Sürecinin Ergodik Karakteristiklerinin İncelenmesi

Bu kısımda, ζ_1 rasgele değişkeni (α,λ), $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ parametreli Weibull dağılımına sahip olması durumunda, öncelikle sürecin ergodikliği gösterilecektir. Daha sonra, sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için kesin ve asimptotik formüller elde edilecek ve zayıf yakınsama teoremi ispatlanacaktır. Ayrıca, sürecin ergodik momentleri için kesin ve asimptotik formüller elde edilecektir.

2.3.2.1. Sürecin Ergodikliği ve Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Kesin Formüller

Aşağıda Weibull müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin ergodikliği gösterilecektir:

Teorem 2.3.2.1.1. Teorem 2.3.1'in koşulları altında, ζ_1 rasgele değişkeni (α,λ), $\alpha>0$, $\lambda>0$ parametreli Weibull dağılımına sahip olsun. Bu takdirde, $X(t)$ süreci ergodiktir.

İspat. $X(t)$ sürecinin ergodik olabilmesi için, sürecin genel ergodik teoremin varsayımlarını sağladığı gösterilmesi gerekmektedir:

1. $\{X(\tau_n+0)\}$, $n=1,2,\ldots$ zincirinin, $\pi(v)\equiv P\{\zeta_1\le v\}$ durağan dağılımına sahip ergodik bir ergodik zincir olduğu, Teorem 2.3.1'den bilinmektedir. Buna göre, $\{X(\tau_n+0)\}$, $n=1,2,\ldots$, (α,λ), $\alpha>0$, $\lambda>0$ parametreli Weibull dağılımına sahip olsun. Bu durumda da, $X(t)$ süreci genel ergodik teoremin 1. koşulunun sağlandığı açıkça görülmektedir.

2. $\{X(\tau_n+0)\}$, $n=1,2,\ldots$ zinciri, (α,λ), $\alpha>0$, $\lambda>0$ parametreli Weibull dağılımına sahip olduğunda da, her $n=2,3,\ldots$ için

$$E(\tau_n-\tau_{n-1})<\infty \tag{201}$$

olduğu gösterilmelidir:

$$E(\tau_n-\tau_{n-1})(\zeta_1)\equiv\int_0^\infty E(\tau_1(v))d\pi(v)=E(\xi_1)\int_0^\infty U_\eta(v)d\pi(v)<\infty \tag{202}$$

(202) şeklinde yazılabildiği bilinmektedir. Teorem 2.3.1'den $0<E(\xi_1)<\infty$'dır. Bu durumda $U_\eta(v)<\infty$ olduğu bilindiğine göre, 2. varsayımın sağlanması için

$$\int_0^\infty U_\eta(v)d\pi(v)<\infty \tag{203}$$

olduğunu göstermek gerekir. Başka bir deyişle

$$EU_\eta(\zeta_1)=\int_0^\infty U_\eta(v)d\pi(v)=\alpha\lambda^\alpha\int_0^\infty U_\eta(v)v^{\alpha-1}e^{-(\lambda v)^\alpha}dv<\infty \tag{204}$$

olduğunu göstermek gerekir. Teorem 2.3.1'den

$$g(v)=U_\eta(v)-\frac{v}{m_1}-\frac{m_2}{2m_1^2}$$

ve $\lim\limits_{v\to\infty}g(v)=0$'dır. Bu takdirde öyle bir $b(\varepsilon)>0$ sayısı bulmak mümkündür ki, $\varepsilon>0$ için $v\ge b(\varepsilon)$ olduğunda

$$|g(v)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{205}$$

dır. Buna göre, (204) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$EU_\eta(\zeta_1) = \alpha\lambda^\alpha \int_0^{b(\varepsilon)} U_\eta(v) v^{\alpha-1} e^{-(\lambda v)^\alpha} dv + \alpha\lambda^\alpha \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} U_\eta(v) v^{\alpha-1} e^{-(\lambda v)^\alpha} dv$$

$$\equiv J_3(\varepsilon) + J_4(\varepsilon)\,. \tag{206}$$

$U_\eta(v)$ yenileme fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon olduğundan dolayı her $v \geq b(\varepsilon)$ için $U_\eta(z) \leq U_\eta(b(\varepsilon)) < \infty$'dır. Dolayısıyla

$$J_3(\varepsilon) \equiv \alpha\lambda^\alpha \int_0^{b(\varepsilon)} U_\eta(v) v^{\alpha-1} e^{-(\lambda v)^\alpha} dv \leq U_\eta(b(\varepsilon))\alpha\lambda^\alpha \int_0^{b(\varepsilon)} v^{\alpha-1} e^{-(\lambda v)^\alpha} dv \leq U_\eta(b(\varepsilon)) \tag{207}$$

olur. Diğer yandan $b(\varepsilon)$ sayısının tanımı gereği

$$U_\eta(b(\varepsilon)) \leq \frac{b(\varepsilon)}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{208}$$

dır. Buradan (207) ve (208) eşitsizliklerinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$J_3(\varepsilon) \leq \frac{b(\varepsilon)}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{209}$$

(206) eşitliğindeki ikinci integral ise aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$J_4(\varepsilon) \equiv \alpha\lambda^\alpha \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} U_\eta(v) v^{\alpha-1} e^{-(\lambda v)^\alpha} dv$$

$$\leq \frac{\alpha\lambda^\alpha}{m_1} \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} v^{\alpha-1} e^{-(\lambda v)^\alpha} dv + \left(\frac{m_2}{2m_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha\lambda^\alpha \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} v^{\alpha-1} e^{-(\lambda v)^\alpha} dv$$

$$\leq \frac{\Gamma\left(1+ 1/\alpha\right)}{\lambda m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{210}$$

(209) ve (210) eşitsizlikleri kullanılarak, (206) eşitliğine göre aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$EU_\eta(\zeta_1) \equiv J_3(\varepsilon) + J_4(\varepsilon) \leq \frac{\Gamma\left(1+ 1/\alpha\right)}{\lambda m_1} + \frac{b(\varepsilon)}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + \varepsilon\,. \tag{211}$$

Teorem 2.3.1'den $E(\eta_1) > 0$ ve $E(\eta_1^2) < \infty$'dır. Ayrıca $\alpha > 1$, $\lambda > 0$ için $\Gamma\left(1+ 1/\alpha\right) < \infty$ ve her $\varepsilon > 0$ için $b(\varepsilon) < \infty$'dır. Bütün bunlar (211) eşitsizliğinde dikkate alınırsa

$$EU_{\eta}(\zeta_1) < \infty \tag{212}$$

elde edilir. Sonuç olarak (212) ile

$$E(\tau_1) < \infty \text{ ve } E(\tau_n - \tau_{n-1}) \equiv \int_0^{\infty} E(\tau_1(v))d\pi(v) < \infty, \; n = 2,3,\ldots$$

olduğu ispatlanmıştır. Bu da 2. varsayımın sağlandığını gösterir. Sonuç olarak, genel ergodik teoreme göre, ele alınan $X(t)$ süreci Teorem 2.3.2.1.1 'in koşulları altında ergodiktir.

Not 2.3.2.1.1. Sonuç 2.3.1'e göre, $\overline{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_{\overline{X}}(x) = 1 - \frac{EU_{\eta}(\zeta_1 - x)}{EU_{\eta}(\zeta_1)}, \; x \geq 0. \tag{213}$$

Literatürden de bilindiği gibi $U_{\eta}(x)$ yenileme fonksiyonunun açık şeklini bulmak oldukça zordur. Bu nedenle, aşağıda müdahalenin Weibull dağılımı olması durumunda $\overline{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun açık şeklini elde etmek için, η_1 rasgele değişkeninin üstel dağılıma sahip olması durumu ele alınacaktır:

Örnek 2.3.2.1.1. Teorem 2.3.2.1.1 'in koşulları altında η_1, $\mu > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde, her $x \geq 0$, $\alpha > 0$ ve $\lambda > 0$ için $\overline{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$Q_{\overline{X}}(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^{\alpha}} \left(1 + \frac{\mu}{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}}\right) \frac{\lambda}{\mu c_1(\alpha) + \lambda}, \tag{214}$$

burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, $c_1(\alpha) = \Gamma\left(1 + 1/\alpha\right)$'dır.

İspat. η_1, $\mu > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde

$$U_{\eta}(v) = \mu v + 1, \; \mu > 0$$

olduğundan

$$EU(\zeta_1 - x) = \int_x^{\infty} U_{\eta}(v - x)d\pi(v) = (1 - \mu x)\int_x^{\infty} d\pi(v) + \mu \int_x^{\infty} v \, d\pi(v)$$

eşitliği kolaylıkla elde edilir. Bu durumda ζ_1, (α, λ), $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ parametreli Weibull dağılımına sahip bir rasgele değişken olduğuna göre $d\pi(v) = \alpha\lambda(\lambda v)^{\alpha-1} e^{-(\lambda v)^{\alpha}} dv$ 'dır:

$$EU(\zeta_1 - x) = \left(1-\mu x\right)\alpha\lambda\int_x^{\infty}(\lambda v)^{\alpha-1}e^{-(\lambda v)^{\alpha}}dv + \mu\alpha\int_x^{\infty}(\lambda v)^{\alpha}e^{-(\lambda v)^{\alpha}}dv$$

$$= \left(1-\mu x\right)e^{-(\lambda x)^{\alpha}} + \mu\left(x + \frac{1}{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}}\right)e^{-(\lambda x)^{\alpha}}$$

$$= e^{-(\lambda x)^{\alpha}}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}}\right) \tag{215}$$

dır. Benzer şekilde, $EU_\eta(\zeta_1)$ beklenen değeri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$EU_\eta(\zeta_1) = \int_0^{\infty} U_\eta(v)d\pi(v) = \int_0^{\infty}\left(\mu v + 1\right)d\pi(v)$$

$$= \mu\int_0^{\infty} v\,d\pi(v) + \int_0^{\infty} d\pi(v) = \frac{\mu}{\lambda}\Gamma\left(1 + \tfrac{1}{\alpha}\right) + 1. \tag{216}$$

(213) eşitliğinde, (215) ve (216) eşitlikleri yerine yazılırsa, sürecin ergodik dağılım fonksiyonu elde edilir.

2.3.2.2. Sürecin Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Asimptotik Açılımlar

Bu kısımda, ζ_1 rasgele değişkenin Weibull dağılımına sahip olması durumunda, $W_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun asimptotik davranışı incelenecektir. Hatırlanmalıdır ki

$$Q_{W_\lambda}(x) = 1 - EU_\eta(\zeta_1 - \frac{x}{\lambda})\left(EU_\eta(\zeta_1)\right)^{-1} \tag{217}$$

dır.

Teorem 2.3.2.2.1. Teorem 2.3.2.1.1 'in koşulları sağlansın. Bu takdirde, her $x \geq 0$ ve $\alpha > 1$ için $W_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $(Q_{W_\lambda}(x))$ için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$Q_{W_\lambda}(x) = R_\alpha(x) + \frac{m_2}{2m_1c_1(\alpha)}\left(\pi_{\alpha,1}(x) - R_\alpha(x)\right)\lambda + o(\lambda), \tag{218}$$

burada $m_k = E(\eta_1^k)$, $k = 1,2$; $R_\alpha(x) = \dfrac{1}{c_1(\alpha)}\displaystyle\int_0^x\left(1 - \pi_{\alpha,1}(t)\right)dt$, $c_1(\alpha) = \Gamma\left(1 + \tfrac{1}{\alpha}\right)$;

$\pi_{\alpha,1}(x) = 1 - e^{-x^{\alpha}}$, $(\alpha,1)$ parametreli Weibull dağılım fonksiyonudur.

İspat. Teorem 2.2.5.1'den (62) eşitliği ile

$$EU_\eta(\zeta_1) = \frac{1}{m_1}E(\zeta_1) + \frac{m_2}{2m_1^2} + E(R_1(\zeta_1)) \tag{219}$$

burada $R_1(v) = \frac{1}{v}g(v)$ ve $g(v) = o(1)$'dır. Bu durumda

$$E(R_1(\zeta_1)) = \int_0^\infty \frac{1}{v}g(v)d\pi(v) = \alpha\lambda\int_0^\infty (\lambda v)^{\alpha-1}e^{-(\lambda v)^\alpha}\frac{1}{v}g(v)dv = \lambda\int_0^\infty e^{-t}g(\frac{t^{1/\alpha}}{\lambda})dt \tag{220}$$

dır. Yardımcı teorem 2.2.5.1'den her $\alpha > 1$ için

$$E(R_1(\zeta_1)) = o(\lambda) \tag{221}$$

olduğu görülür. Bu durumda (221) eşitliği, (219) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$EU_\eta(\zeta_1) = \frac{\Gamma\left(1+1/\alpha\right)}{\lambda m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(\lambda)\,. \tag{222}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\left(EU_\eta(\zeta_1)\right)^{-1} = \frac{\lambda m_1}{\Gamma\left(1+1/\alpha\right)}\left(1 - \frac{m_2\lambda}{2m_1\Gamma\left(1+1/\alpha\right)} + o(\lambda)\right). \tag{223}$$

elde edilir. Ayrıca $v - \frac{x}{\lambda} > 0$ için $E(\eta_1^2) < \infty$ koşulu altında

$$U_\eta(v - \frac{x}{\lambda}) = \frac{v - x/\lambda}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + R_1(v)\,,\ v \to \infty$$

burada $R_1(v) = \frac{1}{v}g(v)$ ve $g(v) = o(1)$'dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} EU_\eta(\zeta_1 - \frac{x}{\lambda}) &= \int_{\frac{x}{\lambda}}^\infty U_\eta(v - \frac{x}{\lambda})d\pi(v) = \int_{\frac{x}{\lambda}}^\infty \left(\frac{v - x/\lambda}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + R_1(v)\right)d\pi(v) \\ &= \frac{1}{m_1}\int_{\frac{x}{\lambda}}^\infty v d\pi(v) + \left(\frac{m_2}{2m_1^2} - \frac{x}{m_1\lambda}\right)\int_{\frac{x}{\lambda}}^\infty d\pi(v) + \int_{\frac{x}{\lambda}}^\infty R_1(v)d\pi(v) \end{aligned} \tag{224}$$

dır. (224) eşitliğinde, ζ_1, (α,λ), $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ parametreli Weibull dağılımına sahip bir rasgele değişken olduğuna göre, $d\pi(v) = \alpha\lambda(\lambda v)^{\alpha-1}e^{-(\lambda v)^\alpha}dv$ olduğu dikkate alınarak $t = (\lambda v)^\alpha$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$EU_\eta(\zeta_1 - \frac{x}{\lambda}) = \frac{1}{m_1\lambda}\int_{x^\alpha}^\infty t^{1/\alpha}e^{-t}dt + \left(\frac{m_2}{2m_1^2} - \frac{x}{m_1\lambda}\right)\int_{x^\alpha}^\infty e^{-t}dt + E(R_1(\zeta_1)) \tag{225}$$

elde edilir. Buradan her $x \geq 0$ için

$$E(R_1(\zeta_1)) = \lambda \int_{x^\alpha}^{\infty} e^{-t} g(\frac{t^{1/\alpha}}{\lambda}) dt \leq \lambda \int_{0}^{\infty} e^{-t} g(\frac{t^{1/\alpha}}{\lambda}) dt$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.2.5.1'den her $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken

$$E(R_1(\zeta_1)) = o(\lambda) \tag{226}$$

dır. Ayrıca (226) eşitliği, (225) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$EU_\eta(\zeta_1 - \frac{x}{\lambda}) = \frac{1}{m_1\lambda}\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \int_0^{x^\alpha} t^{1/\alpha} e^{-t} dt \right) + \left(\frac{m_2}{2m_1^2} - \frac{x}{m_1\lambda} \right) e^{-x^\alpha} + o(\lambda) \tag{227}$$

elde edilir. Bu durumda (227) asimptotik açılımdaki integrale aşağıdaki gibi bir kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
EU_\eta(\zeta_1 - \frac{x}{\lambda}) &= \frac{1}{m_1\lambda}\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \int_0^{x^\alpha} t^{1/\alpha - 1} e^{-t} dt \right) + \left(\frac{m_2}{2m_1^2} - \frac{x}{m_1\lambda} \right) e^{-x^\alpha} + o(\lambda) \\
&= \frac{1}{m_1\lambda}\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + x e^{-x^\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int_0^{x^\alpha} t^{1/\alpha - 1} e^{-t} dt \right) + \left(\frac{m_2}{2m_1^2} - \frac{x}{m_1\lambda} \right) e^{-x^\alpha} + o(\lambda) \\
&= \frac{1}{m_1\lambda}\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + x e^{-x^\alpha} - \int_0^{x} \left(1 - \pi_{\alpha,1}(t)\right) dt \right) + \left(\frac{m_2}{2m_1^2} - \frac{x}{m_1\lambda} \right) e^{-x^\alpha} + o(\lambda) \\
&= \frac{1}{m_1\lambda}\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \int_0^{x} \left(1 - \pi_{\alpha,1}(t)\right) dt \right) + \frac{m_2}{2m_1^2} e^{-x^\alpha} + o(\lambda)
\end{aligned} \tag{228}$$

elde edilir. (223) ve (228) asimptotik açılımları, (217) eşitliğinde yerine yazılırsa, $W_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun asimptotik açılımıelde edilir.

2.3.2.3. Sürecin Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Zayıf Yakınsaklık Teoremi

Bu kısımda, $\lambda \to 0$ iken $W_\lambda(t)$ sürecinin $Q_{W_\lambda}(x)$ ergodik dağılım fonksiyonu için zayıf yakınsama teoremi ispatlanacaktır.

Teorem 2.3.2.3.1. Teorem 2.3.2.1.1'in koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\lambda \to 0$ iken her $x \geq 0$ ve $\alpha > 1$ için $W_\lambda(t)$ sürecinin $Q_{W_\lambda}(x)$ ergodik dağılım fonksiyonu, $R_\alpha(x)$ dağılım fonksiyonuna yakınsamaktadır:

$$Q_{W_\lambda}(x) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} R_\alpha(x), \tag{229}$$

burada $R_\alpha(x) = \frac{1}{c_1(\alpha)}\int_0^x \left(1-\pi_{\alpha,1}(t)\right)dt$, $c_1(\alpha) = \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$'dır.

İspat. $R_\alpha(x)$ ve $\pi_{\alpha,1}(x)$ fonksiyonları, birer dağılım fonksiyonu olduğu için her $x \geq 0$, $\alpha > 0$ için $0 \leq R_\alpha(x) \leq 1$ ve $0 \leq \pi_{\alpha,1}(x) \leq 1$'dır. Bu nedenle, her $\alpha > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\max_x \left|\pi_{\alpha,1}(x) - R_\alpha(x)\right| \leq 1. \tag{230}$$

Teorem 2.3.2.1.1 'ün koşullarından $m_2 = E(\eta_1^2) < \infty$ olduğundan, her $\alpha > 1$ için (230) eşitsizliği kullanılarak

$$\frac{m_2}{2m_1\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\left|\pi_{\alpha,1}(x) - R_\alpha(x)\right| \leq \frac{m_2}{2m_1\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} < \infty \tag{231}$$

elde edilir. Teorem 2.3.2.1.1'den bilinmektedir ki

$$Q_{W_\lambda}(x) = R_\alpha(x) + \frac{m_2}{2m_1\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\left(\pi_{\alpha,1}(x) - R_\alpha(x)\right)\lambda + o(\lambda) \tag{232}$$

dır. Bu durumda (231) eşitsizliği (232) asimptotik açılımında dikkate alınırsa, $\lambda \to 0$ iken (232) asimptotik açılımının ikinci teriminin sıfıra yakınsar. Bunun sonucu olarak, $\lambda \to 0$ iken her $x \geq 0$ ve $\alpha > 1$ için $Q_{W_\lambda}(x)$ dağılım fonksiyonu, $R_\alpha(x)$ dağılım fonksiyonuna yakınsar.

2.3.2.4. Sürecin n. Mertebeden Ergodik Momenti İçin Kesin Formüller

Önceki kısımlarda belirtilen nedenler göz önünde bulundurularak, bu kısımda η_1 rasgele değişkeni sadece üstel dağılımına sahip olması durumunda, $\bar{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momentinin açık şekli bulunacaktır.

Örnek 2.3.2.4.1. Teorem 2.3.2.1.1 'in koşulları sağlansın. Ayrıca η_1, $\mu > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip bir rasgele değişken olsun. Eğer $\bar{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momenti ($E(\bar{X}^n)$, $n = 1,2,\ldots$) mevcut ve sonlu ise, bu takdirde $E(\bar{X}^n)$, $n = 1,2,\ldots$ergodik momentinin açık şekli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(\bar{X}^n) = \frac{c_{(n+1)}(\alpha)}{\lambda + \mu c_1(\alpha)}\frac{\mu}{(n+1)}\frac{1}{\lambda^n} + \frac{c_n(\alpha)}{\lambda + \mu c_1(\alpha)}\frac{1}{\lambda^{n-1}}, \tag{233}$$

burada $c_{n1}(\alpha)=\dfrac{c_n(\alpha)}{c_1(\alpha)}$, $c_n(\alpha)=\Gamma\left(1+{n}/{\alpha}\right)$'dır.

İspat. η_1, $\mu>0$ parametreli üstel dağılıma sahip bir rasgele değişken olduğunda

$$E(\bar{X}^n)=\frac{1}{1+\mu E(\zeta_1)}\left(\frac{\mu}{(n+1)}E(\zeta_1^{n+1})+E(\zeta_1^n)\right) \tag{234}$$

olduğu (176) eşitliğinden bilinmektedir. Burada ζ_1, (α,λ), $\alpha>0$, $\lambda>0$ parametreli Weibull dağılımına sahip bir rasgele değişken olduğundan olasılık teorisinden

$$E(\zeta_1^n)=\frac{1}{\lambda^n}\Gamma\left(1+{n}/{\alpha}\right) \tag{235}$$

dır. Son olarak (235) eşitliği, (234) eşitliğinde uygun olarak yerine yazılırsa, $\bar{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momenti (233) eşitliğindeki gibi elde edilir.

2.3.2.5. Sürecinin n. Mertebeden Ergodik Momenti İçin Asimptotik Açılımlar

Bu kısımda amaç, η_1 rasgele değişkeni keyfi bir dağılıma ve ζ_1 rasgele değişkeni (α,λ), $\alpha>0$, $\lambda>0$ parametreli Weibull dağılımına sahip iken, $\bar{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momenti için, $\lambda\to 0$ iken üç terimli asimptotik açılımlar elde etmektir. Önceki kısımlardan, $\bar{X}(t)$ sürecinin n. ergodik mertebeden momenti mevcut ve sonlu ise, bu takdirde $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonu kullanılarak

$$E(\bar{X}^n)=n\,EU_n(\zeta_1)\left[EU_\eta(\zeta_1)\right]^{-1},\ n=1,2,\ldots. \tag{236}$$

şeklinde yazılabildiği bilinmektedir. Buradan yola çıkarak, aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.3.2.5.1. Teorem 2.3.2.1.1 'in koşullarına ek olarak, $E(\eta_1^3)<\infty$ olsun. Bu takdirde, $\alpha>1$ için $\lambda\to 0$ iken $E(\bar{X}^n)$ için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$E(\bar{X}^n)=\frac{A_n}{\lambda^n}+\frac{B_n}{\lambda^{n-1}}+\frac{C_n}{\lambda^{n-2}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{n-2}}\right),\ n=1,2,\ldots \tag{237}$$

burada $c_{n1}(\alpha)=\dfrac{c_n(\alpha)}{c_1(\alpha)}$, $c_n(\alpha)=\Gamma\left(1+{n}/{\alpha}\right)$ olmak üzere

$$A_n=\frac{c_{(n+1)1}(\alpha)}{n+1},\ B_n=\left(c_{n1}(\alpha)-\frac{c_{(n+1)1}(\alpha)}{(n+1)c_1(\alpha)}\right)\frac{m_2}{2m_1},$$

$$C_n = \left(\frac{m_2^2}{4m_1^2} - \frac{m_3}{6m_1}\right) c_{(n-1)1}(\alpha) - \frac{m_2^2}{4m_1^2}\frac{c_{n1}(\alpha)}{c_1(\alpha)}$$

dır.

İspat. $\overline{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momenti için $\lambda \to 0$ iken üç terimli bir asimptotik açılım elde edebilmek için (236) eşitliğinden de görüldüğü üzere, $EU_\eta(\zeta_1)$ ve $EU_n(\zeta_1)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ için $\lambda \to 0$ iken asimptotik açılım elde etmek yeterli olacaktır. Buna göre, $W_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun için asimptotik açılım elde edilirken

$$EU_\eta(\zeta_1) = \frac{\alpha}{m_1\lambda} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(\lambda) \tag{238}$$

olduğu gösterilmişti. (198) eşitliğinden

$$EU_n(\zeta_1) = \frac{E(\zeta_1^{n+1})}{n(n+1)m_1} + \frac{m_2 E(\zeta_1^n)}{2nm_1^2} - \left(\frac{m_3}{6m_1^2} - \frac{m_2^2}{4m_1^3}\right)\frac{E(\zeta_1^{n-1})}{n} + E(R_n(\zeta_1)) \tag{239}$$

olduğu bilinmektedir. Ayrıca, Yardımcı Teorem 2.2.5.1'de α yerine, $\alpha + n - 1$ yazılırsa, her $\alpha > 1$ için

$$E(R_n(\zeta_1)) = o\left(\frac{1}{\lambda^{n-1}}\right), \ \lambda \to 0 \tag{240}$$

sonucu elde edilir. Bu durumda, (240) eşitliği, (239)'de yerine yazılırsa, $\lambda \to 0$ iken

$$EU_n(\zeta_1) = \frac{1}{n(n+1)m_1} E(\zeta_1^{n+1}) + \frac{m_2}{2nm_1^2} E(\zeta_1^n) - \left(\frac{m_3}{6m_1^2} - \frac{m_2^2}{4m_1^3}\right)\frac{1}{n} E(\zeta_1^{n-1}) + o\left(\frac{1}{\lambda^{n-1}}\right) \tag{241}$$

dır. Burada $E(\zeta_1^n) = \frac{1}{\lambda^n}\Gamma\left(1 + n/\alpha\right)$ olduğu açıktır. Son olarak (241) ve (238) eşitlikleri, (236) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken $\overline{X}(t)$ sürecinin n. mertebeden ergodik momentinin asimptotik açılımı elde edilir.

Sonuç 2.3.2.5.1. Teorem 2.3.2.5.1'nin koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken $\overline{X}(t)$ sürecinin ilk dört merkezi momenti asimptotik olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mu_1 = 0, \tag{242}$$

$$\mu_2 \sim \left(A_2 - (A_1)^2\right)\frac{1}{\lambda^2}, \tag{243}$$

$$\mu_3(\zeta_1) \sim \left(A_3 - 3A_2A_1 + 2(A_1)^3\right)\frac{1}{\lambda^3}, \tag{244}$$

$$\mu_4(\zeta_1) \sim \left(A_4 - 4A_3A_1 + 6A_2(A_1)^2 - 3(A_1)^4\right)\frac{1}{\lambda^4}, \tag{245}$$

burada $c_{k1}(\alpha) = \dfrac{c_k(\alpha)}{c_1(\alpha)}$, $c_k(\alpha) = \Gamma\left(1 + {k}/{\alpha}\right)$ olmak üzere $A_k = \dfrac{c_{(k+1)1}(\alpha)}{n+1}$, $k = \overline{1,4}$'dır.

Sonuç 2.3.2.5.2. Teorem 2.3.2.5.1'nin koşulları sağlansın. Bu takdirde, $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken $\bar{X}(t)$ sürecinin çarpıklık ve basıklık katsayıları asimptotik olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\gamma_3 \sim \frac{A_3 - 3A_2A_1 + 2(A_1)^3}{\left(A_2 - (A_1)^2\right)^{1/3}}, \; \gamma_4 \sim \frac{A_4 - 4A_3A_1 + 6A_2(A_1)^2 - 3(A_1)^4}{\left(A_2 - (A_1)^2\right)^2} - 3, \tag{246}$$

burada $c_{k1}(\alpha) = \dfrac{c_k(\alpha)}{c_1(\alpha)}$, $c_k(\alpha) = \Gamma\left(1 + {k}/{\alpha}\right)$ olmak üzere $A_k = \dfrac{c_{(k+1)1}(\alpha)}{n+1}$, $k = \overline{1,4}$'dır.

3. BULGULAR

Bu tezde, yarı-Markov modellerin önemli bir sınıfını oluşturan "Ödüllü Yenileme Süreci" olarak adlandırılan bir model ele alınmış ve bu modeli ifade eden stokastik süreç matematiksel olarak inşa edilmiştir. Daha sonra, bu sürecin sınır fonksiyonelleri, ergodikliği, ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik momentleri detaylı bir biçimde incelenmiştir.

Sözü edilen kısımlarda, sürecin sınır fonksiyonellerinin ilk dört başlangıç momenti, ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik momentleri, η_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu tarafından üretilen $U_\eta(x)$ yenileme fonksiyonu yardımıyla ifade edilmiştir. Fakat bu formüllerin karmaşık yapılarından dolayı pratik problemlerin çözümlenmesinde kullanılması oldukça zor olduğundan, pratikte daha kolay uygulanabilir formüllerin elde edilmesi gereksinimi vardır. Bütün bu nedenler göz önünde bulundurularak, ele alınan sürecin gerekli olasılık karakteristikleri asimptotik yöntemlerle incelenmiştir.

Bunun yanı sıra yukarıdaki sonuçlara dayanarak, gamma ve Weibull müdahaleli ödüllü yenileme süreçlerinin sınır fonksiyonellerinin ilk dört başlangıç momentleri için kesin ve asimptotik sonuçlar elde edilmiştir. Bunlara dayanarak, sınır fonksiyonelleri için merkezi momentleri ve çarpıklık-basıklık katsayıları asimptotik olarak verilmiştir.

Ayrıca, bu süreçlerin bazı zayıf şartlar altında ergodik olduğu gösterilmiş ve her birinin ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik momentleri için kesin ve asimptotik sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra ergodik dağılım fonksiyonu için zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiştir.

Bunlara ilaveten, elde edilen asimptotik sonuçların yardımıyla hesaplanan değerlerin, kesin değerlere ne kadar yakın olduğunu göstermek için özel bir durum ele alınmış ve bu durum için Monte Carlo simülasyon yöntemi uygulanarak, ödüllü yenileme sürecinin müdahale anını gösteren sınır fonksiyonelinin momentleri ve gamma müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu için değerler elde edilmiş ve bu değerler asimptotik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda, elde edilen asimptotik açılımların simülasyon sonuçlarına yeterince yakın oldukları tespit edilmiştir.

4. İRDELEME

Yarı-Markov modelleri ile ilgili literatürde birçok teorik çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmaların birçoğundaki sonuçlar teorik bakımdan önemli olsalar da, uygulamanın ihtiyacını karşılayabilecek nitelikte değildir. Kesin ifadeleri içeren ve uygulama için yararlı olabilecek çalışmalar da vardır. Fakat bu güne kadar bu süreçler her yönüyle incelenmemiştir. Bunun temel nedeni, olasılık ve sayısal karakteristiklerinin çok karmaşık bir matematiksel yapıya sahip olmasıdır. Özellikle, müdahaleyi ifade eden rasgele değişkenler yeterince geniş bir sınıfa ait olduklarında, sürecin temel karakteristikleri için kullanılabilir formüllerin elde edilmesi çok zordur.

Literatürde, son yıllarda asimptotik yöntemler uygulanarak yaklaşık fakat pratik öneme sahip olan asimptotik sonuçlar elde etmeye yönelik birçok çalışma mevcuttur. Örneğin, Okur Bekar'ın yüksek lisans tezinde müdahaleyi temsil eden rasgele değişkenin üstel dağılıma sahip olması durumunda, ödüllü sürecinin temel karakteristikleri için asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Bu açılımların elde edilmesinde ise Laplace dönüşümü geniş bir biçimde kullanılmıştır.

Fakat "müdahale" üstelden farklı ve daha geniş bir sınıfına ait olduğunda, bu yöntem yeterli olmamaktadır. Bu durumda farklı yöntemler uygulayarak asimptotik sonuçlara ulaşmak mümkündür. Bu nedenle bu tezde, ödüllü yenileme süreçleri ve bu süreçlerin iki alt sınıfını oluşturan, gamma ve Weibull müdahaleli ödüllü yenileme süreçleri ele alınmış ve bu süreçlerin asimptotik yöntemlerle incelenmesinde gerekli bazı önemli yardımcı teoremler kullanılmıştır.

Bu çalışma kapsamında incelenen modelde bazı değişikliklerin yapılması mümkündür. Örneğin, bu çalışmada kullanılan yöntemler genelleştirilmiş ve genişletilmiş ödüllü yenileme süreçlerine uygulanarak, önemli asimptotik açılımlar elde edilebilir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, ödüllü yenileme süreçleri ve bu süreçlerin önemli iki alt sınıfını oluşturan gamma ve Weibull müdahaleli ödüllü yenileme süreçleri ele alınmıştır. Bu süreçler için aşağıdaki sonuçlar ele alınmıştır:

1) Bir fiziksel model ele alınmış ve bu modeli ifade eden stokastik süreç, matematiksel olarak inşa edilmiştir.
2) Ödüllü yenileme süreçlerinin sınır fonksiyonellerinin momentleri, bir yenileme fonksiyonu yardımıyla ifade edilerek kesin formüller elde edilmiş ve bu formüller kullanılarak bu momentler için asimptotik sonuçlar bulunmuştur.
3) Ödüllü yenileme süreçlerinin ergodikliği gösterilmiş ve yine bir yenileme fonksiyonu aracılığı ile ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik momentleri için kesin ve asimptotik sonuçlar elde edilmiştir.
4) Gamma ve Weibull müdahaleli ödüllü yenileme süreçlerinin sınır fonksiyonellerinin momentleri için kesin ve asimptotik sonuçlar bulunmuştur.
5) Gamma ve Weibull müdahaleli ödüllü yenileme süreçlerinin ergodikliği gösterilmiş, ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik momentleri için kesin ve asimptotik sonuçlar elde edilmiştir.
6) Gamma ve Weibull müdahaleli ödüllü yenileme süreçlerinin ergodik dağılım fonksiyonu için zayıf yakınsama teoremi ispatlanmıştır.
7) Ödüllü yenileme süreçlerinin müdahale anını temsil eden sınır fonksiyonelinin momentleri ve gamma müdahaleli ödüllü yenileme süreçlerinin ergodik dağılım fonksiyonu için simülasyon sonuçları verilmiştir.

6. ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmanın, yenileme teorisindeki bir eksikliği giderilebileceği umulmaktadır. Ayrıca bu çalışmanın aşağıdaki yönlerden de geliştirilebilmesi mümkündür:

1) Müdahalenin dağılımının sınıfı pratikte sık kullanılan dağılımlara ait olması durumunda, ortaya çıkan benzer modellerin incelenmesi,
2) Başlangıç rasgele değişkenlerinin birbirine bağımlı olması durumunda, benzer problemin martingaller yöntemi ile incelenmesi,
3) Yakınsama teoremlerinde yakınsama hızının incelenmesi,
4) Sonsuz varyanslı ragele değişkenler için benzer problemin çözülmesi,
5) Bu çalışmadaki analitik ve asimptotik yöntemler kullanılarak, genelleştirilmiş ve genişletilmiş ödüllü yenileme süreçlerinin incelenmesi,
6) Elde edilen sonuçların pratik alanlara uygulanması.

7. KAYNAKLAR

Abramowitz, M. ve Stegun, I.A., 1964. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Wiley, New York.

Afanaseva, L.G. ve Bulinskaya, E.V., 1980. Stochastic Processes in the Theory of Queues and Inventory Control, Moskow.

Afanaseva, L.G. ve Bulinskaya, E.V., 1981. Storage capacity optimization, Engineering Cybernetics, 19, 5, 49-57.

Aliyev, R.T., 2010. Stokastik süreçler teorisine giriş, KTÜ Matbaası, Trabzon.

Aliyev, R.T., Khaniyev T. ve O. Bekar, N., 2009. Weak convergence theorem for the ergodic distribution of the renewal-reward process with a gamma distributed interference of chance, Theory of Stochastic Processes, 15 (31), 2, 42-53.

Aliyev, R.T., O. Bekar, N., Khaniyev T. ve Unver, I., 2010. Asymptotic expansions for the moments of the boundary functionals of the renewal reward process with a discrete interference of chance**,** Mathematical and Computational Applications, 15, 1, 117-126.

Aliyev, R.T., Khaniyev, T.A. ve Kesemen, T., 2010. Asymptotic expansions for the moments of a semi-Markovian random walk with Gamma distributed interference of chance, Communications in Statistics - Theory and Methods, 39, 1, 130–143.

Alsmeyer, G., 1988. Second-order approximations for certain stopped sums in extended renewal theory, Advances in Applied Probability 20, 391–410.

Alsmeyer, G., 1991. Some relations between harmonic renewal measures and certain first passage times, Statistics and Probability Letters, 12, 1, 19-27.

Alsmeyer, G., 1994. On the Markov renewal theorem, Stochastic Processes and Their Application, 50, 37–56.

Alsmeyer, G., 1996. Superposed continuous renewal processes: a Markov renewal approach, Stochastic Processes and Their Application, 61, 311–322.

Alsmeyer, G. ve Hoefs, V., 2001. Markov renewal theory for stationary (m+1)-blockfactors, Markov Process, Rel. Fields 7, 325–348.

Athreya, K.B., McDonald, D. ve Ney, P., 1978. Limit theorems for semi-Markov processes and renewal theory for Markov chains, Annals of Probability, 6, 788-797.

Anisimov, V.V., 1995. Diffusion approximation in switching stochastic models and its applications, In: Exploring Stochastic Laws, eds., A. V. Skorohod and Yu. V. Borovskikh, VSO, Zeist, The Netherlands, 13-40.

Aras, G. ve Woodroofe, M., 1993. Asymptotic expansions for the moments of a randomly stopped average, Annals of Statistics, 21, 503-519.

Borovkov, A.A., 1965. On the first passage time for one class of processes with independent increments, Theory of Probability and Its Applications, 10, 331-334.

Borovkov, A.A., 1986. Theory of Probability, Nauka, Moskov.

Borovkov, A.A., 1984. Asymptotic Methods in Queuing Theory. J. Willey, New York.

Brown, M. ve Ross, S.M., 1972. Asymptotic properties of processes, SIAM Journal of AppliedMathematics, 22, 1, 93-105.

Brown, M. ve Solomon, H., 1975. A second-order approximation for variance of a renewal reward process, Stochastic Processes and Their Application, 3, 301-314.

Csenki, A., 2000. Asymptotic for renewal-reward processes with retrospective reward structure, Oper. Res. Lett. 26, 201–209.

Cox, D.R., 1962. Renewal Theory, London: Methun & Co. Ltd.

Çınlar, E., 1968. Some joint distribution for Markov renewal processes, Australian Journal of Statistics, 10, 1.

Çınlar, E., 1975. Markov renewal theory, Advances in Applied Probability, 1, 123-187.

Çınlar, E., 1975. Introduction to stochastic processes, Englewood Cliffs, New Jersey.

Dickson, D., 1998. On a class of renewal risk processes, North American Actuarial Journal, 1, 2, 60–73.

Ezhov, I.I. ve Korolyuk, V.S., 1967. Semi-Markovian processes and their applications, Cybernetica, Kiev, 5, 58-65.

Ezhov, I.I. ve Shrenkov V.S., 1977. Ergodic theorems connected with the Markov property of random processes, Theory of Probability and Its Applications, 21, 620-624.

Federyuk, M.V., 1984. Asymptotics for integrals and series, Nauka, Moscow.

Feller, W., 1964. On semi-Markov processes, Proceeding of National Academy of Sciences, USA, 51, 4, 130-145.

Feller, W., 1971. An Introduction to Probability and Its Applications II, J. Willey, New York.

Gihman, I.I. ve Skorohod, AV., 1975. Theory of Stochastic Processes II, Springer-Verlag, New York.

Gnedenke, I.I. ve Kovalenko, I.N., 1968. Introduction to Queuing Theory, IX, Translation Edited by D. Louvish, Jerusalem, Israel Program for Scientific Translation.

Goovaerts M., Dhaene J. ve De Schepper A., 2000. Stochastic upper bounds for present value functions, Journal of Risk and Insurance, 67, 1, 1-14.

Grubel, R., 1986. On harmonic renewal measures, Probability Theory and Related Fields, 71, 393-403.

Gusak, D.V. ve Korolyuk, V.S., 1968. On the first passage time across a given level for processes with independent increments, Theory of Probability and Its Applications, 13, 448-456.

Gusak, D.V., 1969. On the joint distribution the first exit time and exit value for homogeneous processes with independent increments, Theory Probability Applications, 14, 14-23.

Gusak, D.V. ve Korolyuk, V.S., 1969. On the joint distribution process with stationary movements and its maximum, Theory of Probability and Its Applications, 14, 400-469.

Janson, S., 1983. Renewal theory for m-dependent variables. Annals of Probability. 11, 558–568.

Jewell, W.S., 1967. Fluctuation of a Renewal- Reward Process, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 19, 309-329.

Karlin, S., 1958. The Application of Renewal Theory to the Study of Inventory Policies. In K. Arrow, S. Karlin, & H. Scarf (Eds.), Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford, California: Stanford University Press.

Kesemen, T., 2006. Rasgele hacimli genişletilmiş (s,S) tipli modellerin analitik ve asimptotik yöntemlerle incelenmesi, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Khaniyev, T. A., 1984. Distribution of a semi-Markov walk with two delayed screens, Some questions of the theory of stoch. Proc., Collect Sci. Works, Kiev, 106-113.

Khaniyev, T.A., 1986. An Ergodic Theo. for a semi-Markov walk with two delayed screens, İzc. Acad. Nauk. Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Math. Nauk, 4, 37-42.

Khaniyev, T.A., 1986. The explicit form of the ergodic distribution of the process of a semi-Markov walk dependent components (Russian), Prob. method the investigation of systems with an infinite number of degrees of freedom, Collect, Sci., Works, Kiev, 119-125.

Khaniyev, T.A., 1988. Distribution of the process of a semi-Markov walk on a closed interval with exponentally distributed components, İzc. Acad. Nauk. Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Math. Nauk, 1, 45-50.

Khaniyev, T.A. ve Özdemir, H., 1995. On the Laplace transform of finite dimensional distribution functions of semi-continuous random processes with reflecting and delaying screens, In, Exploring Stochastic Laws, eds., A. V. Skohorod and Yu. V. Borovkikh, VSP, Zeitst, The Netherlands, 167-174.

Khaniyev, T.A., 1997. On the probability characteristics of a semi-Markov random walks with two barriers, Buletin of the International Statis. Institu, 57, 2, 568-570.

Khaniyev, T.A. ve Ünver, İ., 1997. The study of the level zero crossing time of a semi-Markovian random walk with delaying screen, Turkish Journal of Mathematics, 21, 3, 257-268.

Khaniyev, T.A., Özdemir, H. ve Maden, S., 1998. Calculating the probability characteristics of a baundary functional of a semi-continous randaom process with reflecting and delaying screens, Applied Stochastic Models and Data Analysis, 14, 117-123.

Khaniyev, T.A., 1999. Some results on a stochastic process with a discrete chance interference, Matematical and Computational Applications, 4, 2, 145-152.

Khaniyev, T.A., Ünver, İ. ve Maden, S., 2001. On the semi-Markovian random walk with two reflecting barriers, Stochastic Analysis and Applications, 19, 5, 16.

Khaniyev, T.A., 2003. Markov zincirleri, KTÜ Matbaası, Trabzon.

Khaniyev, T.A. ve Kucuk, Z., 2004. Asymptotic expansions for the moments of the Gaussian random walk with two barriers, Statistics and Probability Letters, 69, 191-103.

Khaniyev, T.A., 2005. On the stationary characteristics of the extended model of type (s, S) with Gaussian distribution of summands, Journal of Statistical Computation and Simulation, 75, 81-14.

Khaniyev, T.A., 2005. About moments of generalized renewal process, Transactions of NAS of Azerbaijan, Series of Phy. Tech. And Mth. Sciences, 25, 1, 95-100.

Khaniyev, T.A. ve Mammadova, Z., 2006. On the stationary characteristics of the extended model of type (s,S) with Gaussian distribution of summands. Journal of Statistical Computation and Simulation, 76, 10, 861–874.

Khaniyev, T.A., Aliyev, R.T., Kucuk, Z. ve Okur Bekar, N., 2008. On the distributions of a renewal reward process and it's additive functional, Mathematical and Computational Applications, 13, 1, 41-50.

Khaniyev, T.A., Kesemen, T., Aliyev, R.T. ve Kokangul, A., 2008. Asymptotic expansions for the moments of a semi-Markovian random walk with an exponential distributed interference of chance. Statistics and Probability Letters, 78, 6, 785–79.

Khaniyev T.A., Kokangul A. ve Aliyev R.T., 2011. An asymptotic approach for a semi-Markovian inventory model of type (s, S), Applied Stochastic Models in Business and Industry, Manuscript ASMB-07-151 (is accepted).

Kesten, H., 1974. Renewal theory for functionals of a Markov chain with general state space, Annals of Probability, 2, 355–386.

Korolyuk, V.S. ve Borovskikh, Y.V., 1981. Analytical Problems for Asymptotics of Probability Distributions, Naukova Dumka, Kiev.

Kovalenko, I.N., Kuznetchov, N. ve Shrenkov V.M., 1983. Stochastic Processes, Naukova Dumka, Kiev.

Lam, C.Y.T. ve Lehoczky, J.P., 1991. Superposition of renewal processes, Adv. Appl. Probab. 23, 64–85.

Levy, J.B. ve Taqqu, M.S, 1987. On renewal processes having stable inter-renewal intervals and stable rewards. Ann. Sci. Math. Que., 11, 95-110.

Levy, J.B. ve Taqqu, M.S, 2001. Renewal reward processes with heavy-tailed inter-renewal times and heavy-tailed rewards, Bernoulli 6,1, 23–44.

Lotov, V. I., 1996. On some boundary crossing problems for Gaussian random walks. Annals of Probability, 24, 4, 2154-2171.

Lukac, E., 1970. Characteristics Function, Griffin, London.

Mammadova, Z., 2011. Normal müdahaleli yarı-Markov süreçlerinin asimptotik yöntemlerle incelenmesi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Nasirova, T.I., Yapar C. ve Khaniyev, T.A., 1998. On the probability characteristics of the stock level in the model of type (s, S), Cybernetics and Systems Analysis, 5, 69-76.

Niemi, S., 1985. On non-singular Markov renewal processes with an application to a growth-catastrophe model, Journal of Applied Probability, 22, 253–266.

Niemi, S. ve Nummelin, E., 1986. On non-singular renewal kernels with an application to a semi-group of transition kernels, Stochastic Processes and Their Application, 22, 177–202.

Okur Bekar, N., 2006. Üstel Müdahaleli Ödüllü Yenileme Sürecinin Analitik ve Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Prabhu, N.U., 1980. Stochastic Storage Processes: Queues, Insurance Risk, and Dams, Springer, New York.

Resnick, S.I., 1992. Adventures in Stochastic Processes, Birkhauser Boston, Cambridge.

Rogozin, B.A., 1964. On the distribution of the first jump, Theory Probability Applications, 9, 450-464.

Ross, S.M., 1996. Stochastic Processes, New York, John Wiley & Sons.

Ross, S.M., 1993. Introduction to Probability Models, Academic Press, New York.

Sentura, L. ve Puri Prem, S.A., 1973. A semi- Markov storage model, Advances in Applied Probability, 1, 2, 362-378.

Serfoza, R.F., 1971. Functions of semi- Markov processes, SIAM J. Appl. Math., 20.

Shiryayev, A.N., 1973-1974. Probability, Statistics, Random Processes I-II, Moscow State University Press.

Shrenkov V.M., 1984. On the Markov renewal processes, Theory of Probability and Its Application, 29, 2, 248-263.

Shrenkov V.M., 1989. The Ergodic Markov Processes, Nauka, Moskow.

Silvestrov, D.S., 1994. Coupling for Markov renewal processes and the rate of conver. in ergodic theorems for proc. with semi-Markov switchings, Acta Appl. Math. 34, 109-124.

Skohorod, A.V., 1967. Random processes with independent increments, Nauka, Moskow.

Smith, W.L., 1954. Asymptotic renewal theorems. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A (Mathematical and Physical Sciences), 64, 9–48.

Smith, W. L., 1958. Renewal theorem and its ramifications, Journal Roy. Statist. Soc., 20 243-302.

Smith, W. L., 1959. On the cumulants of renewal processes, Biometrika, 46, 1, 1-29.

Smith, W. L., 1965-1966. Some peculiar semi- Markov processes, Proc. 5-Th. Berkelly Symp. Mathematical Statististic and Probability, 2, 2, 255-263.

Spitzer, F., 1956. A combinatorial lemma and its applications to probability theory, Trans. Amer.Math. Soc., 82, 323-339.

Takacs, L., 1977. Combinatorial methods in the theory of stochastic processes, 2nd ed, Huntington, New York, Robert E. Krieger Publishing Co. XI.

Ünver, İ., 1997. On distributions of the semi- Markovian random walk with reflecting and delaying barriers, Bulletin of Calcutta Math. Society, 89, 231-242.

V. Pipiras, M.S. Taqqu ve J.B. Levy, 2002. Slow, fast and arbitrary growth conditions for renewal reward processes when the renewals and the rewards are heavy-tailed, Boston University, Preprint, to appear in Probab. Theory Relat. Fields.

ÖZGEÇMİŞ

Nurgül OKUR BEKAR, 1978 yılında Çorum ilinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Çorum'da tamamladı. 1996-1997 eğitim-öğretim yılında KTÜ, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 1997-1998 yılları arasında Almanya'da Almanca dil eğitimi aldı. 1998-2002 yılları arasında KTÜ, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans öğrenimi yaptı. 2002-2006 yılları arasında KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans öğrenimi yaptı. 2006-2007 eğitim-öğretim yılında KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim dalında doktora programına başladı.

2003-2006 yılları arasında çeşitli dershanelerde Matematik Öğretmenliği yaptı. 2006-2007 yılları arasında KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak görev yaptı. 2007 yılında KTÜ, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne Öğretim Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevine devam etmektedir.

Evli olup iki çocuk annesidir. İngilizce, Almanca ve Arapça bilmektedir.

Aliyev, R.T., **O. Bekar, N.,** Khaniyev T., and Unver, I., Asymptotic expansions for the moments of the boundary functionals of the renewal-reward process with a discrete interference of chance**,** Mathematical and Computational Applications, 15, 1, (2010) 117-126 (SCI-C).

Aliyev, R.T., Khaniyev T., and **O. Bekar, N.,** Asymptotic results for the moments of a boundary functional of the renewal-reward process with a gamma distributed interference of chance, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2011, (is submitted) (SCI-C).