KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Γ^3 VE G_5 HECKE GRUPLARININ ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI

DOKTORA TEZİ

Yavuz KESİCİOĞLU

HAZİRAN 2011
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Γ^3 VE G_5 HECKE GRUPLARININ ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI

Yavuz KESİCİOĞLU

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13.05.2011
Tezin Savunma Tarihi : 21.06.2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

Trabzon 2011

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Yavuz KESİCİOĞLU Tarafından Hazırlanan

Γ^3 VE G_5 HECKE GRUPLARININ ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 31.05.2011 gün ve 1407 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 21.06.2011 tarihinde yapılan sınavda

DOKTORA TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ ....

Üye : Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ ....

Üye : Prof. Dr. Ekrem YANMAZ ....

Üye : Prof. Dr. Zameddin İSMAYİLOV ....

Üye : Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL ....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, Γ^3 ve G_5 Hecke gruplarının alt yörüngesel grafları incelenmiştir.

Konunun seçilmesinde ve çalışma süresince özendirici, yapıcı tutumu ile destek olan ayrıca çalışmanın planlanmasında ve değerlendirilmesinde yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ'a en içten duygularımla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tez önerisi ve raporlar aşamasında tavsiye ve eleştirileriyle tezin şekillenmesinde emeği geçen sayın hocam Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ ve Prof. Dr. Ekrem YANMAZ'a şükranlarımı sunarım.

Ayrıca yetişmemde emeği geçen KTÜ Matematik bölümünün değerli tüm hocalarına, çalışma süresi boyunca moral desteklerinden dolayı Rize Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi ve KTÜ Fen Fakültesi'ndeki tüm asistan arkadaşlarıma, çalışmalarım sırasında beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK' a, desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen sevgili eşim M. Nesibe KESİCİOĞLU' na ve aileme çok teşekkür ederim.

Yavuz KESİCİOĞLU
Trabzon 2011

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum "*Γ^3 VE G_5 HECKE GRUPLARININ ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI*" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım *Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ*'ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 21/06/2011

Yavuz KESİCİOĞLU

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

Γ^3 VE G_5 HECKE GRUPLARININ ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI

Yavuz KESİCİOĞLU

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

2011, 75 Sayfa

Bu tezde, esas amaç modular grubun $\Gamma^3 \coloneqq \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : ab + cd \equiv 0 \ (mod\ 3)\right\}$ alt grubunun ve $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanları tarafından üretilen G_5 Hecke grubunun sırasıyla $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ve $\mathbb{Q}[\lambda] \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketleriyle oluşan altyörüngesel graflarının devre uzunlukları ile bu grupların üretici eliptik elamanları arasındaki ilişkiyi incelemektir.

Birinci bölümde Öklid olmayan kristalize grupların yapısı irdelendi. $PSL(2,\mathbb{R})$, Γ Modüler grubu, kongrüans alt gruplarının bazı özellikleri, imprimitif hareket, graf teori, Hecke grupları ve cebirsel sayı cisimleri hakkında ihtiyaç duyduğumuz temel kavramlar verildi.

İkinci bölümde iki farklı problem ele alınmıştır. Birinci problemde, Γ^3 modular alt grubunun oluşturduğu alt yörüngesel graflar incelendi. Bu graflardaki kenar ve devre şartları belirlendi ve bu şartlar altında grafların bağlantılılığı incelendi. İkinci problemde ise, G_5 Hecke grubunun oluşturduğu alt yörüngesel graflar incelendi ve bazı özel durumlarda bu graflardaki kenar şartları bulundu.

Anahtar Kelimeler: Modular Grup, Hecke Grubu, Alt Yörüngesel Graf, Bağlantılılık

PhD. Thesis

SUMMARY

SUBORBITAL GRAPHS OF HECKE GROUPS Γ^3 AND G_5

Yavuz KESİCİOĞLU

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
2011, 75 Pages

In this thesis, the main object is to examine the relationships between the lengths of circuits of suborbital graphs arising from the action of the subgroup $\Gamma^3 \coloneqq \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : ab + cd \equiv 0 \pmod 3\right.$ of modular group Γ and Hecke group $G5$ generated by $0-110\text{and}1\lambda01$ on $\mathbb{Q}\cup\infty$ and $\mathbb{Q}[\lambda] \cup \{\infty\}$ respectively and orders of generating elliptic elements of these groups. And furthermore connectedness of suborbital graphs for the group Γ^3 is presented.

In Chapter 1, the structure of Non-Euclidean crystalllographic groups is discussed and some properties of $PSL(2,\mathbb{R})$, the modular group Γ, congruence subgroups of Γ and also the preliminary definitions we require for imprimitive action, graph theory, Hecke groups and algebraic number fields are given.

In Chapter 2, two different problems are discussed. Firstly, suborbital graphs arising from modular subgroup Γ^3 are examined. And then edge and circuit conditions on these graphs are determined and the connectedness of graphs are examined under these conditions. Secondly, suborbital graphs arising from Hecke group G_5 are examined and edge conditions of these graphs are obtained under some certain conditions.

Key Words: Modular Group, Hecke Group, Suborbital Graph, Connectedness

ŞEKİLLER DİZİNİ

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_\infty$	: Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi
$\varphi(\mathrm{N})$	: Euler fonksiyonu
Γ	: Modüler grup
Γ^3	: Γ modular grubunun elemanlarının küpleri alınarak elde edilen grup
$\Gamma_0^3(n)$	: Γ^3 grubunun bir alt grubu
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$	: Gerçel katsayılı, lineer, kesir dönüşümlerinin grubu
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\hat{\mathbb{Q}}$	: Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
λ	:$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ irrasyonel sayısı
$\mathbb{Z}[\lambda]$	:$a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a + b\lambda$ şeklindeki sayılar
$\mathbb{Q}[\lambda]$	:$a, b \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $a + b\lambda$ şeklindeki sayılar
$\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\lambda])$.	: $\mathbb{Z}[\lambda]$ nın birim elemanları kümesi
G_5	: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanları tarafından üretilen Hecke grubu
$\mathbb{H}$	: Hiperbolik doğrular
$\mathcal{O}(\alpha,\beta)$	: (α,β)'yı içeren alt yörüngeyi
$\mathcal{U}$	: $\mathbb{C}$ de üst yarı düzlem
U_N	: $(\mathrm{u},\mathrm{N})=1$ ve $\mathrm{u}<\mathrm{N}$
$\lvert \mathrm{A}:\mathrm{B} \rvert$	: B alt grubunun A grubundaki indeksi
$\mathrm{G}x$	: x noktasının G yörüngesi
G_x	: x noktasının G'deki sabitleyeni
$\mu(\mathrm{E})$	: E kümesinin hiperbolik alanı
$\ell(C)$	: Parçalı, sürekli, diferansiyellenebilir bir C eğrisinin hiperbolik uzunluğu
∞	: Sonsuz

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

19. yüzyılın sonlarına doğru ayrık gruplar teorisine temel teşkil edebilecek bazı önemli sonuçlar ilk defa Henry Poincare tarafından göz önüne getirilmiş ve eliptik fonksiyonlar teorisinin genelleştirilmesi için kullanılmıştır. Fuchsian grupları adı verilen ve sistematik çalışmasını Henry Poincare'nin geliştirdiği bu ayrık grupların invaryant bıraktığı fonksiyonlar üzerinde birçok bilim adamı çalışmalar yapmıştır. Lineer kesirli dönüşümler grubu özellikle 19. yüzyılda Öklid olmayan geometriler ve İnvaryant teorinin keşfiyle birlikte büyük önem kazanmış, topolojik grup yapısına uygun olması nedeniyle gerek analiz, gerekse cebirsel yöntemlerle derinlemesine incelenmiştir. Eliptik eğrilerin aritmetiği, integral kuadratik formlar ve eliptik modüler fonksiyonlar teorilerindeki önemi nedeniyle en çok Γ modüler grubunun kongrüans alt grupları olan $\Gamma(\mathrm{N})$, $\Gamma_0(\mathrm{N})$, $\Gamma^0(\mathrm{N})$, $\Gamma_1(\mathrm{N})$ grupları üzerinde çalışılmıştır. Son yıllarda sayılar teorisinde de Γ modüler grubunun kongrüans alt grupları Pierre de Fermat'ın 1637 yılında ifade ettiği son teoreminin ispatında oldukça önemli bir yer teşkil ettiği görülmektedir.

Erich Hecke, 1936 yılında "Über die Bestimmung Dirichletcher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" adlı çalışmasında, λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere,

$T(z) = -\frac{1}{z}$ ve $U(z) = z + \lambda$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen ve $H(\lambda)$ ile gösterilen grupları tanıtmıştır [8]. Burada $S = T.U$ alınırsa

$$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$$

elde edilir. Bu gruplar, $H(\lambda)$ bir Fuchsian grup olduğunda Dirichlet serilerinin çalışılmasında kullanılır.

Charles C. Sims tarafından 1967 yılında yayınlanan "Graphs and Finite Permutation Groups" adlı makalede ve Gareth A. Jones, David Singerman ve K. Wicks' in, 1991 yılında yayınlanan “The Modular Group and Generalized Farey Graphs” adlı çalışmasında altyörüngesel graflar ve bu graflardaki devre uzunlukları incelenmiştir. S.P. Chan, M.L. Lang, C.H. Lim 1994 yılında “The invariants of the Congruence Subgroups $G_0(\beta)$ of the Hecke Group G_5” adlı çalışmada $\beta \subset \mathbb{Z}[\lambda]$ sıfırdan farklı bir ideal olmak üzere $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda_5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanları tarafından üretilen G_5 Hecke grubunda Γ modular grubunun $\Gamma_0(n)$ alt grubuna karşılık gelen $G_0(\beta)$ kongrüans alt grubun simgesindeki invaryantlar bulunmuş ve $G_0(\beta)$ grubunun üretici eliptik elemanlarının mertebelerinin 2 veya 5 olduğu gösterilmiştir. M. Akbaş’ ın 2001 yılındaki “On Suborbital Graphs For The Modular Group” adlı çalışmasında devre uzunlukları ile ayrık grupların üretici eliptik elemanlarının mertebeleri arasındaki ilişki ortaya konmuştur.

Birinci bölümde çalışmamız için gerekli bazı temel tanım ve sonuçlar verilmiştir.

İkinci bölümde iki problem ele alınmıştır. Birinci problemde Γ modular grubunun $\Gamma^3 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : ab + cd \equiv 0 \ (mod\ 3) \right\}$ alt grubunun $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki altyörüngesel grafları, bu grafların bağlantılılığı ve bunların sonucu olarakta bu grafların orman olma durumları ele alınmıştır. İkinci problemde ise G_5 Hecke grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda] = \mathbb{Q}[\lambda] \cup \{\infty\}$ üzerindeki altyörüngesel grafları incelenmiş ve alt yörüngesel graflardaki devre uzunluklarının 2 veya 5 olup olmayacağı sorusuna cevap aranmıştır. Burada problem tam olarak çözümlenememesine rağmen, belli şartlarda graflarda 3 ve 4 uzunluklu devrelerin olamayacağı gösterildi.

1.2. Topolojik Gruplar

Tanım 1.1. $(G,\cdot)$ bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun. Bu taktirde her $g, h \in G$ için

i) $m: G \times G \longrightarrow G$

$(g, h) \rightarrow g.h$

ii) $i: G \longrightarrow G$

$g \rightarrow g^{-1}$

dönüşümleri sürekli ise G ye bir topolojik grup denir.

Tanım 1.2. G bir topolojik grup ve X bir topolojik uzay olsun. Bu taktirde

$$\Lambda: G \times X \longrightarrow X$$

$$\Lambda(g, x) = g\Lambda x =: gx$$

sürekli bir dönüşüm ve her $g_1, g_2 \in G$ ve her $x \in X$ için

i) $g_1 g_2 x = g_1(g_2 x)$
ii) $ex = x$ (e G' nin birimi)

şartları sağlanıyorsa $[G, X, \Lambda]$ üçlüsüne veya $[G, X]$ ikilisine bir topolojik dönüşüm grubu adı verilir. Bu durumda G ye X üzerinde bir hareket grubu denir.

Tanım 1.3. Δ bir topolojik uzayın alt kümesi olsun. Eğer her $x \in \Delta$ için $U \cap \Delta = \{x\}$ olacak şekilde bir U komşuluğu varsa Δ ya ayrıktır denir.

Örneğin, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi $\mathbb{R}$ nin bir ayrık alt kümesidir. $\mathbb{R}$ nin her bir sonlu alt kümesi de $\mathbb{R}$ nin bir ayrık alt kümesidir. $\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$ kümesi $\mathbb{R}$ nin ayrık bir alt kümesidir. Ancak $A = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\} \cup \{0\}$ kümesi $\mathbb{R}$ nin ayrık bir alt kümesi değildir.

Lemma 1.1 [18]. $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x, y \in X$ olsun. Bu taktirde

$$x \approx y :\Leftrightarrow \exists g \in G : gx = y$$

şeklinde tanımlanan " $\approx$ " bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.4. " $\approx$ " bağıntısının denklik sınıflarına hareketin yörüngeleri denir. Ayrıca $x \in X$ noktasını içeren yörüngeye x in yörüngesi denir ve bu $Gx \coloneqq \{gx | g \in G\}$ kümesidir.

Tanım 1.5. G, X üzerinde hareket etsin ve $x, y \in X$ keyfi olsun. $gx = y$ olacak biçimde bir $g \in G$ elemanı varsa G ye X üzerinde transitif olarak hareket ediyor denir. Bu tanıma göre hareket transitif ise $\forall x \in X$ için $Gx = X$ elde edilir. Yani bir tek yörünge vardır. Yörünge grubun transitif olarak hareket ettiği kümedir.

Tanım 1.6. G bir grup ve $H < G$ olsun. H alt grubuna göre sağ ve sol denklik sınıflarının sayısı aynıdır. Bu sayıya H alt grubunun G içerisindeki indeksi denir ve $|G : H|$ ile gösterilir.

Tanım 1.7. G, X üzerinde hareket etsin ve $x \in X$ olsun. $G_x \coloneqq \{g \in G | gx = x\}$ kümesine x noktasının sabitleyeni denir.

Şimdi genel anlamda yörünge ile sabitleyen arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Lemma 1.2 [18]. G, X üzerinde hareket etsin ve $x \in X$ olsun. Bu durumda $|Gx| = |G: G_x|$ dir.

İspat: $Gx = \{gx | g \in G\}$ ve $G_x = \{g \in G | \ \forall x \in X$ için $gx = x\}$ olduğunu biliyoruz. $Y \coloneqq \{gG_x : g \in G\}$ için $\alpha: Gx \longrightarrow Y, \alpha(gx) \coloneqq gG_x$ şeklinde tanımlansın.

i) α nın iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $g_1, g_2 \in G$ ve $x \in X$ olsun. Eğer $g_1x = g_2x$ ise $\alpha(g_1x) = \alpha(g_2x)$ midir?

$$g_1x = g_2x \Longrightarrow {g_2}^{-1}g_1x = {g_2}^{-1}(g_1x) = {g_2}^{-1}g_2x = x \Longrightarrow {g_2}^{-1}g_1 \in G_x$$

dir. Şimdi ${g_2}^{-1}g_1 \in G_x \Longrightarrow g_1G_x = g_2G_x$ yani ${g_2}^{-1}g_1 \in G_x \Longrightarrow {g_2}^{-1}g_1G_x = G_x$ olduğunu gösterelim. $h \in G_x$ olsun.

$${g_2}^{-1}g_1hx = {g_2}^{-1}g_1x = x \Longrightarrow {g_2}^{-1}g_1G_x \subset G_x \qquad (*)$$

$$g_2hx = g_2x = g_1x \Longrightarrow g_1^{-1}g_2hx = x \Longrightarrow g_1^{-1}g_2h \in G_x \Longrightarrow h \in {g_2}^{-1}g_1G_x \Longrightarrow G_x \subset {g_2}^{-1}g_1G_x \qquad (**)$$

olup $(*)$ ve $(**)$ dan ${g_2}^{-1}g_1G_x = G_x$ dir. Böylece

$$g_1x = g_2x \Longrightarrow g_1G_x = g_2G_x \Longrightarrow \alpha(g_1x) = \alpha(g_2x)$$

bulunur.

ii) α nın birebir olduğunu gösterelim. $g_1, g_2 \in G$ ve $x \in X$ için $\alpha(g_1x) = \alpha(g_2x)$ olsun. $\alpha(g_1x) = \alpha(g_2x) \Longrightarrow g_1G_x = g_2G_x \Longrightarrow {g_2}^{-1}g_1 \in G_x \Longrightarrow {g_2}^{-1}g_1x = x$ dir. $g_1x = g_2{g_2}^{-1}g_1x = g_2({g_2}^{-1}g_1x) = g_2x$ olup α birebirdir.

iii) α nın örten olduğunu gösterelim. $v \in Y$ olsun. Buna göre $v = gG_x$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. Buradan $\alpha(gx) = gG_x = v$ olup α örtendir.

Dolayısıyla $|Gx| = |Y| = |G: G_x|$ elde edilir.

Tanım 1.8. G bir grup olsun. $C \coloneqq \{g \in G | \forall x \in G \text{ için } gx = xg\}$ kümesine G nin merkezi denir.

Tanım 1.9. Geometride iki noktayı birleştiren minimal uzunluklu eğrilere geodezik adı verilir.

Tanım 1.10. Bir T dönüşümünün periyodu (veya mertebesi) $T^m = I$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır. Böyle bir m sayısı yoksa T' ye sonsuz periyotludur denir.

Tanım 1.11. $n \in \mathbb{N}$ için $1 \leq a \leq n$ ve $(a, n) = 1$ olan a tamsayılarının sayısı $\varphi(n)$ ile gösterilir. Bu fonksiyona Euler fonksiyonu denir.

$m = {p_1}^{r_1}{p_2}^{r_2} \cdots {p_s}^{r_s}$ ise bu taktirde

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$$

dir.

1.3. Öklid Olmayan Kristalize Gruplar

1) G ile $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzleminin

$$(A) \qquad \left\{z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = 1\right\}$$

$$(B) \qquad \left\{z \longrightarrow \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = -1\right\}$$

biçimindeki dönüşümlerinin grubunu gösterelim. G grubunun her bir elemanı $\mathcal{U} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} |\, Im\, z > 0\}$ üst yarı düzlemin kendi üzerine bir konform veya ters konform homeomorfizmasıdır.

(A) biçimindeki dönüşümlerin grubu $PSL(2, \mathbb{R})$ ile gösterilir. Bu grup G de 2 indeksli bir alt gruptur. $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemin her konform homeomorfizmi $PSL(2, \mathbb{R})$' dedir [9].

G üzerinde bir topolojik yapı aşağıdaki biçimde oluşturulabilir:

$K = \{(a, b, c, d): ad - bc = \pm 1\} \subset \mathbb{R}^4$ alt kümesini alalım. K kümesi $\mathbb{R}^4$ ten indirgenen Öklid metriği ile bir metrik uzaydır. Bu alt küme üzerinde $\mathbb{R}^4$ deki Öklid topolojisinin oluşturduğu alt uzay topolojisini göz önüne alalım. K alt uzayında (a, b, c, d) ile $(-a, -b, -c, -d)$ noktalarını özdeşleştirelim.$\delta: K \longrightarrow K,\ \delta(a, b, c, d) \coloneqq (-a, -b, -c, -d)$ ile tanımlanırsa δ bir homeomorfizmdir ve özdeşlikle beraber δ, K üzerinde $2.$ mertebeden bir devirli grup olarak hareket eder.

Şimdi $K/_{\langle\delta\rangle}$ kümesi üzerine bölüm topolojisi koyalım. G ile $K/_{\langle\delta\rangle}$ arasında birebir ve örten bir dönüşüm vardır. Dolayısıyla $p: K \longrightarrow K/_{\langle\delta\rangle},\ p(a, b, c, d) \coloneqq [(a, b, c, d)]$ ile tanımlanan projeksiyon sürekli bir dönüşümdür. G grubunun üzerindeki topolojiyi $K/_{\langle\delta\rangle}$ üzerindeki topoloji olarak alabiliriz. Böylece G grubunun bir topolojik yapısı oluşturulur. Ayrıca $G, \mathcal{U}$ üzerinde bir hareket grubu ve G nin de her dönüşümü $\mathcal{U}$ üzerinde sürekli olduğundan $[G, \mathcal{U}]$ bir topolojik dönüşüm grubudur. Üstelik $G, \mathcal{U}$ üzerinde transitif olarak hareket eder.

G topolojik grubu $PSL(2, \mathbb{R})$ ve $G \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ olmak üzere iki bileşene sahiptir.

G' nin ayrık alt gruplarına Öklid olmayan kristalize gruplar, kısaca NEC grupları, adı verilir. $PSL(2, \mathbb{R})$ deki bir NEC grubuna ise bir Fuchsian grup denir. Eğer bir NEC grubu (B) türündeki elemanları yani ters yönlendirilmiş elemanları içeriyorsa buna özel bir NEC grubu diyeceğiz. $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemi, Öklid olmayan (hiperbolik) düzlemin bir modeline aşağıdaki biçimde dönüştürülebilir:

Bir yay elemanının ds hiperbolik uzunluğu

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{|dz|^2}{y^2}, z = x + iy$$

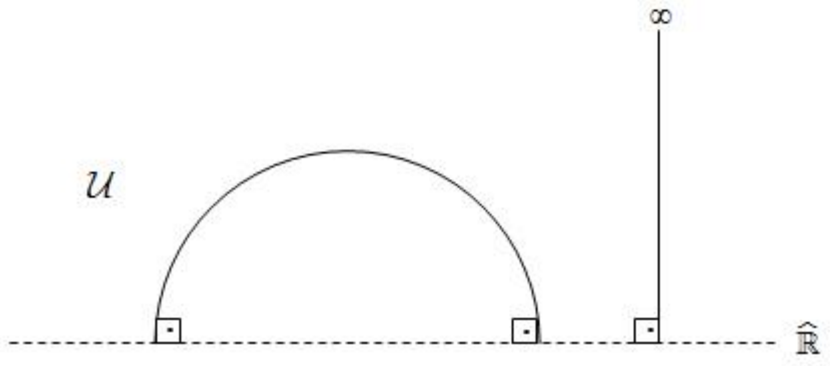
ile tanımlanır. Böylece parçalı, sürekli, diferansiyellenebilir bir C eğrisinin hiperbolik uzunluğu

$$\ell(C) := \int_C\ ds = \int_C\ \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

ve ölçülebilir bir E kümesinin hiperbolik alanı

$$\mu(E) := \iint_E \frac{dxdy}{y^2}$$

olarak tanımlanır. Yukarıdaki metriğin geodezikleri, reel eksene dik yarı çemberler ve yarı doğrulardır. Bunlar hiperbolik doğrular olarak adlandırılır.



Şekil 1. Hiperbolik doğrular

$\mathcal{U}$ üst yarı düzlemde iki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık, bu iki noktayı birleştiren bir tek hiperbolik doğru parçasının uzunluğudur. Bu metrikle tanımlanan topoloji, bilinen Öklid topolojisine eş değerdir. Yani bir topolojideki açık küme, diğer topolojide de açıktır. Hiperbolik uzaklık ve alan $PSL(2,\mathbb{R})$' nin dönüşümleri altında invaryant kalır [9].

2) Şimdi G grubunun elemanlarını yön durumlarına ve sabit nokta kümelerine göre sınıflandıralım:

($\boldsymbol{A}^*$) $T \in PSL(2,\mathbb{R})\backslash\{I\}$ dönüşümünün sabit noktalarını bulalım. Bunun için, $\frac{az+b}{cz+d} = z$ yazılırsa,

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0 \tag{1}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri T nin sabit noktalarıdır. T nin en fazla iki sabit noktası vardır. (1) denkleminin kökleri ise,

$$z_{1,2} = \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$$

olarak bulunur. Burada üç durum söz konusudur;

i) $|a+d|>2$ ise, iki farklı sabit nokta vardır ve bunlar $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ üzerindedirler. Bu durumda T ye bir hiperbolik dönüşüm adı verilir.

ii) $|a+d|=2$ ise, birbirine eşit iki sabit nokta vardır ve bunlar $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ üzerindedirler. Bu durumda T ye bir parabolik dönüşüm adı verilir.

iii) $|a+d|<2$ ise, birbirinin eşleniği olan iki kompleks sabit nokta vardır. Bu sabit noktalardan sadece biri açıkça $\mathcal{U}$ kümesindedir. Bu durumda T ye bir eliptik dönüşüm adı verilir.

($\boldsymbol{B}^*$) Şimdi de $T\in G\backslash PSL(2,\ \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $z=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ yazılırsa

$$cz\bar{z}+dz-a\bar{z}-b=0 \tag{2}$$

denklemi elde edilir. (2) denkleminde $z=x+iy$ ve $\bar{z}=x-iy$ ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$c(x+iy)(x-iy)+d(x+iy)-a(x-iy)-b=0$$

$$c(x^2+y^2)+dx-ax+i(dy+ay)-b=0$$

$$\left.\begin{array}{c} c(x^2+y^2)+(d-a)x-b=0 \\ (d+a)y=0 \end{array}\right\}$$

biçiminde iki denklem elde edilir. Bu iki denklemi inceleyelim:

i) $a+d\neq 0$ ise $y=0$ dır. Bu durumda $cx^2+(d-a)x-b=0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin diskriminantı

$$\Delta=(d-a)^2+4bc=d^2-2ad+a^2+4bc$$

dir. Buradan $ad-bc=-1$ eşitliği kullanılırsa $\Delta=(\mathrm{a}+\mathrm{d})^2+4>0$ elde edilir. Dolayısıyla T nin iki farklı sabit noktası vardır ve bunlar $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ üzerindedirler. Bu durumda T ye bir kayan-yansıma denir.

ii) $a+d=0$ ise $(a+d)y=0$ eşitliği özdeş olarak gerçekleşeceğinden

$c(x^2+y^2)+(d-a)x-b=0$ eşitliği gereği T nin sabit noktaları kümesi $c \neq 0$ için bir çemberdir. $a+d=0$ ve $ad-bc=-1$ eşitlikleri yardımıyla bu çemberin merkezinin $\left(\frac{a}{c},0\right)$ ve yarıçapının $\frac{1}{|c|}$ olduğu görülür. Eğer $c=0$ ise $(d-a)x-b=0$ düşey doğrusu elde edilir. Bu durumda T dönüşümüne bir yansıma adı verilir.

Buna göre G grubunun hiperbolik, parabolik, eliptik, kayan-yansıma ve yansıma diye adlandırılan beş tip elemanı vardır [9].

Tanım 1.12. T_1 ve T_2, G grubunun herhangi iki elemanı olsun. $T_1 = TT_2T^{-1}$ olacak şekilde bir $T \in G$ varsa T_1 ve T_2 birbirinin eşleniğidir denir.

Lemma 1.3 [9]. T_1 ve T_2 birbirinin eşleniği ise aynı tiptendirler.■

G nin elemanlarını izleri (trace) denilen $a+d$ ye ve determinantlarına göre sınıflandırabiliriz. G nin eşlenik elemanlarının aynı tip olduğu gerçeği kullanıldığında, dönüşümlerin her biri bir doğal gösterime sahiptir. Doğal gösterimler aşağıdaki şekilde sınıflandırılır:

Eleman Türü	Doğal Gösterim
Hiperbolik	$z \longrightarrow \lambda z \quad (\lambda > 1)$
Eliptik	$z \longrightarrow w, \frac{w-i}{w+i} = e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}, \ \theta \neq 2n\pi$
Parabolik	$z \longrightarrow z \pm 1$
Kayan-yansıma	$z \longrightarrow \lambda \bar{z} \quad (\lambda < -1)$
Yansıma	$z \longrightarrow -\bar{z}$

1.4. Modüler Grup

Tanım 1.13. $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun

$$\Gamma := PSL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbb{Z} \text{ ve } ad-bc=1 \right\}$$

alt grubuna Modüler Grup adı verilir. Bu grup aşağıdaki gibi 2×2 lik tam sayılar matrisleriyle de temsil edilebilir:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, det\ A = 1.$$

A ve $-A$ aynı dönüşümü temsil ettiğinden söz konusu matris negatifi ile eş alınır. Böylece matris ve dönüşüm arasında bir ayrım yapılmayacaktır. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}, k \neq 0$$

matrisleri yine aynı dönüşümü temsil ettiğinden matris hesaplamalarında uygun olduğu yerde bu matrisler eşit olarak yazılabilir. (Burada determinantın 1 olma şartı aranmayacaktır.) Aşağıdaki teorem Γ modüler grubunun $T(z) = z + 1$ ve $U(z) = -\frac{1}{z}$ dönüşümleri ile üretildiğini göstermektedir.

Teorem 1.1 [22]. Γ modüler grubu $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisleriyle üretilir. ■

1.5. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ Üzerindeki Hareketi

$\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin her elemanı $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $(x, y) = 1$ olmak üzere bir x/y indirgenmiş kesri olarak gösterilebilir. $x/y = -x/-y$ olduğundan bu gösterim tek değildir. ∞ u $1/0 = -1/0$ olarak gösterelim. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \to \frac{ax+by}{cx+dy}$$

dir. $T \in \Gamma$ olmak üzere

$$T\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{a\frac{x}{y}+b}{c\frac{x}{y}+d} = \frac{ax+by}{cx+dy} \text{ ve } T\left(\frac{-x}{-y}\right) = \frac{-ax-by}{-cx-dy} = \frac{ax+by}{cx+dy} = T\left(\frac{x}{y}\right)$$

olduğundan Γ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi iyi tanımlıdır. Eğer $(x, y) = 1$ ve $ad - bc = 1$ ise $\frac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiş kesirdir.

Aksini varsayalım; $\frac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiş formda olmasın. Buna göre $n|ax + by$ ve $n|cx + dy$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu durumda $k, l \in \mathbb{Z}$ için

$$ax + by = kn \tag{3}$$

ve

$$cx + dy = \ell n \tag{4}$$

dir. (3) eşitliğinin her iki tarafı d ile (4) eşitliğinin ise $-b$ ile çarpıldığında

$$(ad - bc)x = (kd - b\ell)n \tag{5}$$

ve benzer şekilde (3) eşitliğinin her iki tarafı $-c$ ile (4) eşitliğinin ise a ile çarpıldığında

$$(ad - bc)y = (a\ell - ck)n \tag{6}$$

elde edilir. (5) ve (6) dan $n|x, n|y$ çelişkisi elde edilir [10].

Teorem 1.2 [10]. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

İspat. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \widehat{\mathbb{Q}}: \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ ve $(a,b) = (c,d) = 1$ olsun. Bu durumda $a\alpha - b\beta = 1$ ve $c\delta - d\gamma = 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{Z}$ tam sayıları vardır. Burada $T(z) = \frac{az+\beta}{bz+\alpha}$ ve $S(z) = \frac{cz+\gamma}{dz+\delta}$ şeklinde tanımlanırsa $T(\infty) = \frac{a}{b}$ ve $S(\infty) = \frac{c}{d}$ olacak şekilde bir $\varphi := ST^{-1} \in \Gamma$ dönüşümü vardır. Dolayısıyla Γ, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket eder. ∎

Teorem 1.3 [10]. $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi bir noktasının sabitleyeni sonsuz devirlidir.

İspat. Teorem 1.2 den $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi iki elemanının sabitleyenlerinin Γ da eşlenik oldukları açıktır. Gerçekten:

$p, q \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olsun. $S_p = \{T_1 \in \Gamma: T_1 p = p\}, S_q = \{T_2 \in \Gamma: T_2 q = q\}$ ise S_p ve S_q Γ' da eşlenik dir. Γ, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olduğundan bir $T \in \Gamma$ için $T(p) = q$ dur. Şimdi $S_p = T^{-1}S_qT$ olduğunu gösterelim. $T^{-1}S_qT := \{T^{-1}ST: S \in S_q\}$. $N \in S_p$ keyfi olsun. $N \in T^{-1}S_qT$ olduğunu gösterelim. Bir $A \in S_q$ arıyoruz öyle ki $N = T^{-1}AT$ olacak. $A = TNT^{-1}$ dir. $TNT^{-1}(q) = TN(p) = T(p) = q \Longrightarrow A = TNT^{-1}$ dir. Böylece

$$T^{-1}AT = N \in T^{-1}S_qT \Longrightarrow S_p \subset T^{-1}S_qT \tag{7}$$

$M \in T^{-1}S_qT$ keyfi olsun. $\exists B \in S_q: M = T^{-1}BT$ dir. Buradan

$$M(p) = T^{-1}BT(p) = T^{-1}B(q) = T^{-1}(q) = p \Longrightarrow M \in S_p \Longrightarrow T^{-1}S_qT \subset S_p \tag{8}$$

dir. Böylece (7) ve (8) den $S_p = T^{-1}S_qT$ olduğu görülür.

S_p ve S_q Γ' da eşleniktirler. Yani izomorfturlar. $S_p \cong S_q \Longrightarrow \Gamma_{\mathrm{p}} \cong \Gamma_q$ dur.

Bu yüzden ∞' un Γ_∞ sabitleyenini düşünmek yeterlidir. Γ_∞' u $b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şeklindeki elemanların oluşturduğu kolaylıkla görülür. Gerçekten $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $T(\infty) = \infty$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle = \Gamma_\infty$$

dur. Böylece Γ_∞, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanları ile üretilen sonsuz devirli bir gruptur. $\Gamma_q = L\Gamma_\infty L^{-1} = \langle L \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L^{-1} \rangle$ dir. ■

1.6. Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları

Tanım 1.14. n pozitif tamsayı olmak üzere Γ grubunun temel kongrüans alt grubu

$$\Gamma(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, a \equiv d \equiv 1\ (mod\ n),\ b \equiv\ c \equiv 0\ (mod\ n) \right\}$$

ile tanımlanır. Γ grubunun $\Gamma(n)$ temel kongrüans alt gruplarını içeren herhangi bir alt grubuna kongrüans alt grubu denir. Üzerinde en çok çalışılan bazı kongrüans alt grupları

$$\Gamma_1(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, a \equiv d \equiv 1\ (mod\ n),\ \ c \equiv 0\ (mod\ n) \right\}$$

$$\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\ c \equiv 0\ (mod\ n) \right\};\ \Gamma^0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\ b \equiv 0\ (mod\ n) \right\}$$

gruplarıdır. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\Gamma(n) \le \Gamma_1(n) \le \Gamma_0(n) \le \Gamma$ biçimindedir.

Ayrıca $\Gamma(n)$, Γ grubunun normal bir alt grubudur, dolayısıyla $\Gamma(n)$ grubu $\Gamma_0(n)$ ve $\Gamma_1(n)$ gruplarının da normal alt grubudur. Diğer taraftan $\Gamma_1(n) \lhd \Gamma_0(n)$ dir. Buna göre indeksler $n > 2$ için

$$|\Gamma{:}\,\Gamma_0(n)| = n\prod_{p|n}\left(1 + \frac{1}{p}\right),\ |\Gamma{:}\,\Gamma_1(n)| = \frac{n^2}{2}\prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

$$|\Gamma:\Gamma(n)| = \frac{n^3}{2}\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$$

dir.

$n=2$ durumunda $|\Gamma:\mathit{\Gamma}_0(2)| = 3, |\Gamma:\mathit{\Gamma}_1(2)| = 3, |\Gamma:\Gamma(2)| = 6$ dir. $n>2$ için yukarıda verilen indekslerden aşağıdaki sonuçlar kolayca elde edilir;

$$|\mathit{\Gamma}_0(n):\mathit{\Gamma}_1(n)| = \frac{|\Gamma:\mathit{\Gamma}_1(n)|}{|\Gamma:\mathit{\Gamma}_0(n)|} = \frac{n}{2}\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right),\ |\mathit{\Gamma}_1(n):\Gamma(n)| = \frac{|\Gamma:\Gamma(n)|}{|\Gamma:\mathit{\Gamma}_1(n)|} = n.$$

$\mathit{\Gamma}_0(n), \mathit{\Gamma}_1(n)$ ve $\Gamma(n)$ gruplarının cusp kümesi de $\widehat{\mathbb{Q}}$ dır. Çünkü bu gruplar Γ grubunun sonlu indeksli alt gruplarıdır ve bir Λ Fuchsian grubunun sonlu indeksli herhangi bir alt grubu da Λ ile aynı cusp kümesine sahiptir [16].

Teorem 1.4. $n>1$ olmak üzere $\mathit{\Gamma}_0(n)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif değildir.

İspat. Aksini varsayalım ve $0,\infty \in \widehat{\mathbb{Q}}$ seçelim. Bu taktirde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \mathit{\Gamma}_0(n)$ vardır. Bu eşitlikten $b=1$ ve $d=0$ elde edilir. Determinant göz önüne alındığında bunun $c=-1$ ve $n=1$ olmasıyla, diğer bir ifadeyle ancak $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ olması durumunda mümkün olduğu görülür. ■

1.7. İmprimitif Hareket

Tanım 1.15. i) $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $\xi: X \longrightarrow X$ birebir ve örten ise ξ ye X in bir permütasyonu denir. X in tüm permütasyonlarının kümesi S^X ile gösterilir.

ii) $\xi_1, \xi_2 \in S^X$ ise $\xi_1 \circ \xi_2 \in S^X$ olduğu açıktır. S^X grubuna X üzerinde simetrik grup denir. S^X grubunun alt gruplarına da X üzerinde permütasyon grupları denir.

Tanım 1.16. G, X üzerinde bir permütasyon grubu olsun. Bu taktirde G, X üzerinde hareket eder. Gerçekten $g \in G$ ise $g: G \longrightarrow G$ birebir ve örten bir dönüşümdür. Bu durumda

$gx := g(x)$ olarak alınırsa $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ ve $1x = x$ olduğu açıktır. Bu harekete G grubunun X üzerindeki doğal hareketi denir ve "(G, X) permütasyon grubu" ifadesi kullanılır. Ayrıca G, X üzerinde transitif olarak hareket ediyorsa (G, X) ikilisine transitif permütasyon grubu adı verilir.

Tanım 1.17. $(G,$X) bir transitif permütasyon grubu ve "$\approx$" X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Eğer $\alpha, \beta \in$ X için $\alpha \approx \beta$ olduğunda $\forall g \in G$ için $g(\alpha) \approx g(\beta)$ oluyorsa $\approx$ denklik bağıntısına X üzerinde $G - invaryanttır$ denir. Bu bağıntının denklik sınıflarına da $bloklar$ denir. Burada iki tane $G - invaryant$ denklik bağıntısı verelim:

i) Özdeşlik Bağıntısı: $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

ii) Evrensel Bağıntı: $\forall \alpha, \beta \in$ X için $\alpha \approx \beta$

Eğer X üzerinde i) ve ii) den farklı bir $G - invaryant$ denklik bağıntısı daha varsa $(G,$X)'e imprimitif aksi halde primitif denir.

Lemma 1.4 [10]. $(G,$X) transitif olsun. Bu taktirde $(G,$X) primitiftir $\Leftrightarrow$ bir $\alpha \in$ X noktasının sabitleyeni G_α her bir $\alpha \in$ X için G nin bir maksimal alt grubudur.■

Teorem 1.5 [10]. $(G,$X) bir transitif permütasyon grubu olsun. $G_\alpha < H < G$ ise

$$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \in gH$$

ile verilen " $\approx$ " bağıntısı X üzerinde iyi tanımlı bir $G - invaryant$ denklik bağıntısı olup Özdeşlik veya Evrensel bağıntısı değildir. Yani bu " $\approx$ " bağıntısına göre $G,$X üzerinde imprimitif olarak hareket eder.■

1.8. Graf Teori

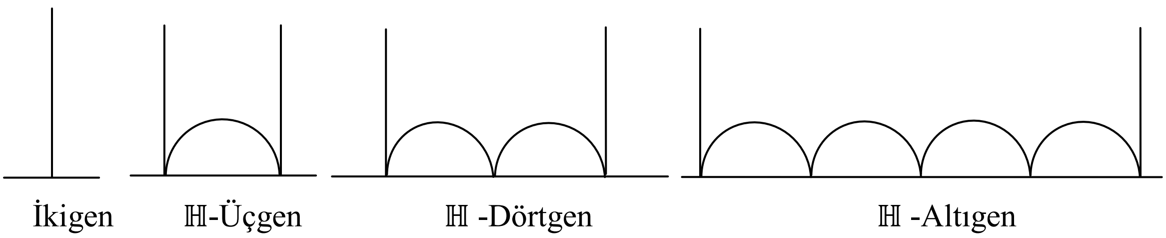
Tanım 1.18. $X \neq \emptyset$ bir küme, $\Delta \subset X \times X$ bir bağıntı olsun. $G = (X, \Delta)$ ikilisine bir graf denir. X in elemanlarına grafın köşeleri ve Δ nın elemanlarına grafın kenarları adı verilir. $(a, b) \in \Delta$ ise bu durumda $a \longrightarrow b$ ile gösterilir. Eğer $(a, b) \in \Delta$ veya $(b, a) \in \Delta$ ise a ile b bir kenar ile bağlanmıştır. Bu durumda a ve b ye komşu köşeler denir.

Tanım 1.19. $G = (X, \Delta)$ bir graf ve $A \subset X$ olsun. $G' = (A, \Delta \cap \mathrm{A} \times \mathrm{A})$ grafına köşe kümesi A olan G' nin bir alt grafı adı verilir.

Tanım 1.20. $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ bir G grafının köşelerinin bir dizisi olsun. Eğer her $1 \leq i \leq n$ için a_{i-1} ve a_i bir kenar ile bağlanmışlarsa a dan b ye n uzunluğunda bir yol vardır denir. Eğer $a = b$ ve $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ köşelerinin tümü farklı ise bu yola n kenarlı bir devre (circuit) denir. Ayrıca a_i, a_{i+1} ikilileri için $a_i \longrightarrow a_{i+1}$ ise bu devreye yönlenmiş bir devre denir. Üç kenarlı bir devreye bir üçgen, dört kenarlı bir devreye bir dörtgen ve altı kenarlı bir devreye bir altıgen denir.

Tanım 1.21. $n \geq 3$ olmak üzere n kenarlı bir devre içermeyen grafa orman denir. Graf hiperbolik doğruların bir birleşimidir.

Örnek 1.1.



Şekil 2. Devreler

Tanım 1.22. $G = (X, \Delta)$ bir graf olsun. X üzerinde bir " $\approx$ " bağıntısını şöyle tanımlayalım:

"$a \approx b :\Leftrightarrow a = b$ veya a≠b ise a dan b ye bir yol vardır".

Açık olarak " $\approx$ " bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.23. i) X in kendisi bu " $\approx$ " bağıntısı altında bir denklik sınıfı ise G grafına bağlantılıdır denir.

ii) Eğer X_1 " $\approx$ " bağıntısı altında bir denklik sınıfı ise $(X_1, \Delta \cap X_1 \times X_1)$ bağlantılı bir graftır ve bu grafa G grafının bağlantılı bileşeni denir.

İki grafın köşeleri arasında birebir ve örten bir dönüşüm mevcut ve bu dönüşüm komşu köşeleri, komşu köşelere gönderiyorsa bu iki grafa izomorf graflar denir.

1.9. Alt Yörüngesel Graflar

Tanım 1.24. $x \in X$ noktasının $G(x)$ yörüngesi (veya G- yörüngesi) X in bir alt kümesidir ve

$$G(x) = \{g(x) \in X : g \in G\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.25 [10]. (G, X) bir transitif permütasyon grubu olsun. G nin $X \times X$ üzerindeki hareketini $g \in G$ olmak üzere

$$g : (\alpha, \beta) \longrightarrow \big(g(\alpha), g(\beta)\big), (\alpha, \beta) \in X \times X$$

ile tanımlayalım. Bu hareketin yörüngelerine G nin alt yörüngeleri denir. (α, β) yı içeren alt yörüngeyi $O(\alpha, \beta)$ ile gösterelim.

$O(\alpha, \beta)$ alt yörüngesinden $G(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafını oluşturabiliriz:

Bu grafın köşeleri X in elemanlarıdır ve eğer $\gamma, \delta \in X$ noktaları için $(\gamma, \delta) \in O(\alpha, \beta)$ ise γ dan δ ya $\gamma \rightarrow \delta$ ile gösterilen bir yönlendirilmiş kenar vardır. Bu kenarı $\mathfrak{U} = \{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}$ üst yarı düzlemde bir hiperbolik geodezik olarak çizebiliriz. Açık olarak $O(\beta, \alpha)$' da alt yörüngedir ve ya $O(\alpha, \beta) \neq O(\beta, \alpha)$ yada $O(\alpha, \beta) = O(\beta, \alpha)$ dır. Eğer $O(\alpha, \beta) \neq O(\beta, \alpha)$ ise $G(\beta, \alpha)$, $G(\alpha, \beta)$ nın oklarının ters yönlendirilmişidir ve $G(\alpha, \beta)$ ile $G(\beta, \alpha)$ ya eşleşmiş alt yörüngesel graflar denir. Eğer $O(\alpha, \beta) = O(\beta, \alpha)$ ve $(\gamma, \delta) \in O(\alpha, \beta)$ ise bu taktirde γ dan δ ya kenarı $\gamma - \delta$ ($\gamma \leftrightarrow \delta$ nın yerine) ile gösterilecektir. Bu durumda $G(\alpha, \beta)$ yönlendirilmemiş bir kenar olarak düşünülebilir ve $G(\alpha, \beta)$ ya kendisiyle eşleşmiş denir.

$O(\alpha, \alpha) = \{(x, x) : x \in X\}, X \times X$' in bir köşegenidir. $G(\alpha, \alpha)$ alt yörüngesel grafı her bir köşesi $\alpha \in X$ olan bir düğüm noktasından oluşur. Bu grafa trivial alt yörüngesel graf denir.

Şimdi $G = \Gamma$ ve $X = \widehat{\mathbb{Q}}$ alalım. Γ, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden her bir alt yörünge $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere bir (∞, v) çiftini içerir. Eğer $n \geq 0$ ve $(u, n) = 1$ olmak üzere $v = \frac{u}{n}$ ise bu alt yörüngeyi $O_{u,n}$ ile ve buna karşılık gelen $G(\infty, v)$ alt yörüngesel grafını da $G_{u,n}$ ile göstereceğiz.

Eğer $v = \infty$ ise $G_{1,0} = G_{-1,0}$ aşikar alt yörüngesel graftır. Bundan dolayı $v \in \mathbb{Q}$ olduğunu farz edebiliriz. Eğer $v' \in \mathbb{Q}$ ise bu taktirde $O(\infty, v) = O(\infty, v') \Leftrightarrow v$ ve v' Γ_∞' un aynı yörüngesindedir. Γ_∞ grubu $z: v \longrightarrow v + 1$ ile üretildiğinden $z\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u+n}{n} = \frac{u'}{n'}$ dür. Buradan $n = n'$ ve $u \equiv u'(mod\ n)$ bulunur. Yani

$$G_{u,n} = G_{u',n'} \Leftrightarrow n = n' \text{ ve } u \equiv u'(modn)$$

dir.

Eğer $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \in O_{u,n}$ ise $G_{u,n}$ de $\frac{r}{s} \longrightarrow \frac{x}{y}$ yazacağız.

Teorem 1.6 [10]. $G_{u,n}$ de $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ kenarı mevcuttur $\Leftrightarrow$

i) $x \equiv ur\ (modn), y \equiv us\ (modn)$ ve $ry - sx = n$ veya

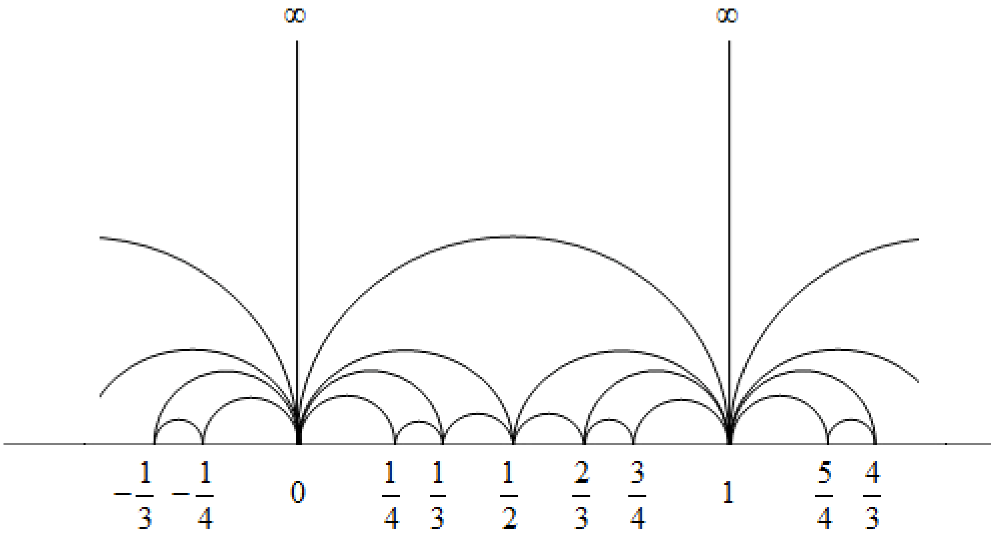
ii) $x \equiv -ur\ (modn), y \equiv -us\ (modn)$ ve $ry - sx = -n.$ ■

1.10. Farey Grafı

$m \geq 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. Bütün $\frac{x}{y}, |y| \leq m$ rasyonel sayılarından oluşan kesin monoton artan diziye m. mertebeden Farey dizisi denir. Farey dizisi F_m ile gösterilir, örneğin F_4 dizisi,

$$\ldots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \ldots$$

biçimindedir. Açık olarak $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ ve $\bigcup_{m \geq 1} F_m = \mathbb{Q}$ dur. $G_{1,1}$, Farey dizileri ile olan ilişkisinden dolayı Farey grafı olarak adlandırılır ve F ile gösterilir.



Şekil 3. Farey Grafı

Farey grafı ile Farey dizileri arasındaki bağlantıyı veren aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 1.7 [10]. $\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, F de köşelerdir.

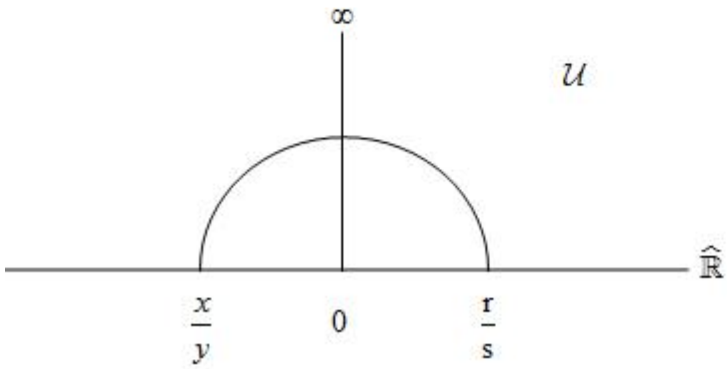
ii) $ry - sx = \pm 1$

iii) $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ bir m doğal sayısı için F_m nin ardışık terimleridir. ■

F nin komşu iki köşesini $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemde bulunan ve bu iki köşeden geçen merkezi reel eksende ve reel eksene dik yarı çemberlerle bağlayalım. Bu durumda F nin kenarlarıyla ilgili aşağıdaki önemli sonucu verebiliriz:

Teorem 1.8 [10]. F nin kenarları $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}: Im(z) > 0\}$ üst yarı düzlemde kesişmezler.

İspat. $\frac{r}{s} \longrightarrow \frac{x}{y} \in F$ kenarını alalım. Burada $ry - sx = \pm 1$ dir. Kabul edelim ki 0 ile ∞'u birleştiren $Rez = 0$ doğrusu $\frac{r}{s}$' yi $\frac{x}{y}$' ye birleştiren doğruyu üst yarı düzlemde kessin. Bu taktirde $\frac{x}{y} < 0 < \frac{r}{s}$ alınabilir. Buna göre $ry - sx = 1$ olur. $x < 0$ ve $r, s, y > 0$ olduğundan $1 = ry - sx \geq 2$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişkiden F nin kenarlarının $\mathcal{U}$ üst yarı düzleminde kesişmedikleri bulunur. ■



Şekil 4. $\mathcal{U}$ üst yarı düzleminde kesişen doğrular

1.11. Hecke Grupları

$T: z \longrightarrow -\frac{1}{z}$ ve $U = z + \lambda, (\lambda \in \mathbb{R})$ elemanları ile üretilen $PSL(2, \mathbb{R})$ nin alt gruplarının ayrık olması durumu özel bir önem taşır. Bu durumda karşımıza "λ nın hangi değerleri için bu gruplar ayrık olur? " sorusu çıkmaktadır. λ nın $\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}, q \geq 2$ değerleri için yukarıda verilen grupların ayrık olduğu Hecke tarafından gösterilmiştir.

Tanım 1.26. Yukarıda tanımlanan ve ayrık oldukları Hecke tarafından verilmiş gruplara özel olarak Hecke grupları denir ve $\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}$ değerine karşılık gelen Hecke grubunu G_q ile gösterelim. T ve U dönüşümlerinin $PSL(2, \mathbb{R})$ deki matris gösterimlerini kullanırsak,

$$G_q = \langle T, U \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$$

olur. $q = 3$ olması durumunda $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olur. Bu durumda G_3 Hecke grubu, Γ modular grubu olarak karşımıza çıkar. Herhangi bir G_q Hecke grubu için

$$S := TU = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda_q \end{pmatrix}$$

tanımlansın. Bu durumda

$$G_q = \langle T, U \rangle = \langle T, S \rangle$$

olur. G_q Hecke grupları T ve S ile üretilen devirli grupların serbest çarpımıdır. Dolayısıyla

$$G_q = \langle T, S \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_q$$

olur.

G_q' nun kongrüans alt gruplarını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz: β, $\mathbb{Z}[\lambda]$' nın bir ideali olmak üzere

$$G_0(\beta) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_q : c \in \beta\right\}, G^0(\beta) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_q : b \in \beta\right\}$$

$$G^1(\beta) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_q : a-1, c, d-1 \in \beta\right\}$$

$$G(\beta) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_q : a-1, b, c, d-1 \in \beta\right\}$$

dır. Hecke gruplarıyla çalışmanın başlıca güçlüklerinden biri

$$PSL_2(\mathbb{Z}[\lambda]) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z}[\lambda]\right\}$$

nın herhangi bir elemanının G_q Hecke grubuna ait olup olmadığına karar vermekteki zorluktur. Gerçekten Γ' dan başka sadece G_4 ve G_6 Hecke gruplarını kolayca tanımlayabiliriz. G_4' ün elemanları aşağıdaki matrislerden oluşmaktadır:

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ c\sqrt{2} & d \end{pmatrix}, ad - 2bc = 1\right\} \text{ ve } \left\{\begin{pmatrix} a\sqrt{2} & b \\ c & d\sqrt{2} \end{pmatrix}, 2ad - bc = 1\right\}$$

ve benzer şekilde G_6' nın elemanları:

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b\sqrt{3} \\ c\sqrt{3} & d \end{pmatrix}, ad - 3bc = 1\right\} \text{ ve } \left\{\begin{pmatrix} a\sqrt{3} & b \\ c & d\sqrt{3} \end{pmatrix}, 3ad - bc = 1\right\}$$

şeklindedir. G_4 ve G_6 nın bu iki tip elamanlarına sırasıyla çift ve tek elemanlar denir.

Peki G_5 in elemanları nelerdir? Bu problemi çözmek için 1952 yılında David Rosen, doktora tezinde, sürekli kesirlerin yeni bir çeşidi olan λ_q- kesirlerini ortaya atmıştır. λ_q-kesirleri nelerdir? λ_q-kesirleri

$$r_0\lambda + \cfrac{\varepsilon_1}{r_1\lambda + \cfrac{\varepsilon_2}{r_2\lambda + \cfrac{\varepsilon_3}{\ddots}}} =: [r_0; \varepsilon_1 : r_1\lambda, \varepsilon_2 : r_2\lambda, \dots]$$

şeklindeki sürekli kesirlerdir. Burada, genellikle, sabit bir q için $\lambda = 2Cos\frac{\pi}{q}, q \geq 3, \varepsilon_i = \pm 1$ ve $r_i \in \mathbb{Z}^+, i \geq 1, r_0 \in \mathbb{Z}$ dir. Bu sürekli kesir bir en yakın tamsayı algortiması ile geliştirilmiştir. Eğer ξ bir reel sayı ise biz ξ ye en yakın λ nın bir tamsayı katını araştırıyoruz. Yani, eğer "{ }" en yakın tamsayıyı gösteriyorsa bu taktirde $\left\{\frac{\xi}{\lambda}\right\} = r_0$ yazacağız. Burada $-\frac{1}{2} \leq r_0 - \frac{\xi}{\lambda} < \frac{1}{2}$ yani r_0 eşitsizlikte tek türlü belirlenir.

$$r_0\lambda - \frac{\lambda}{2} < \xi \leq r_0\lambda + \frac{\lambda}{2} \tag{9}$$

Böylece $\xi = r_0\lambda + \frac{\varepsilon_1}{\xi_1}$ dir. Burada eğer $r_0\lambda < \xi$ ise $\varepsilon_1 > 0$ ve $r_0\lambda > \xi$ ise $\varepsilon_1 < 0$ olduğundan $\xi_1 = \frac{\varepsilon_1}{\xi - r_0\lambda} > 0$ olduğu görülür. Eğer $\xi = n\lambda + \frac{\lambda}{2} = (n+1)\lambda - \frac{\lambda}{2}$ ise bu taktirde (9) eşitsizliğinden $r_0 = n$ ve $\varepsilon_1 = 1$ dir. Bu taktirde $r_0\lambda - \frac{\lambda}{2} < \xi \leq r_0\lambda + \frac{\lambda}{2}$ ifadesi $\xi_1 \geq \frac{2}{\lambda} > 1 > \frac{\lambda}{2}$ olduğunu vurgular ve böylece $r_1 = \left\{\frac{\xi_1}{\lambda}\right\} \geq 1$. Bu şekilde devam edersek $\xi_m > \frac{\lambda}{2}$ olduğunu buluruz ki bu $r_m \geq 1$ $(m \geq 1)$ olduğunu vurgular [19].

Bundan sonra λ- kesri λ_5- kesrini gösterecektir. Şimdi λ- kesrine bir örnek verelim.

Örnek 1.2. $1 \in \mathbb{Z}$ nin λ-kesirlerine ayrılmış şeklinin $\lambda - \frac{1}{\lambda}$ olduğunu gösterelim.

En yakın tamsayı algoritmasını uygulayalım. $\xi = 1$ olsun. ξ ye en yakın λ nın bir tam sayı katını araştıracağız. Bu tamsayı r_0 olsun. Bu taktirde

$$r_0 = \left\{\frac{\xi}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{1}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{1}{1.618}\right\} = \{0{,}618\} = 1$$

dir. $r_0\lambda = \lambda = 1{,}618 > \xi = 1$ olduğundan $\varepsilon_1 = -1$ dir. Böylece $\xi = r_0\lambda + \frac{\varepsilon_1}{\xi_1}, \xi_1 = \frac{\varepsilon_1}{\xi - r_0\lambda}$ eşitliklerinden

$$\xi = \lambda - \frac{1}{\xi_1},\ \xi_1 = \frac{-1}{1-\lambda}$$

elde edilir. Şimdi ξ_1 e en yakın tamsayı algoritmasını uygulayalım. λ nın ξ_1 e en yakın tamsayı katı r_1 olsun. Bu taktirde

$$r_1 = \left\{\frac{\xi_1}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{-1}{\lambda - \lambda - 1}\right\} = 1$$

dir. Burada $\lambda^2 = \lambda + 1$ olduğuna dikkat edelim. $r_1\lambda = \lambda = 1{,}61803 < \xi_1 = \frac{-1}{1-\lambda} = \frac{1}{0.618} = 1{,}61812$ olduğundan $\varepsilon_2 = 1$ dir. Böylece

$$\xi_1 = \lambda + \frac{1}{\xi_2},\ \xi_2 = \frac{1}{\frac{-1}{1-\lambda} - \lambda} = \frac{1}{\frac{-1-\lambda+\lambda+1}{1-\lambda}} = \frac{1}{0} = \infty$$

olup $\xi_1 = \lambda + \frac{1}{\infty} = \lambda$ bulunur. Buradan $\xi = \lambda - \frac{1}{\lambda}$ dir. Yani 1 in λ-kesirlerine ayrılmış şekli $\lambda - \frac{1}{\lambda}$ dır.■

λ-kesirlerine ayırma işlemi her zaman çok kolay değildir. Bunu aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek 1.3. $\frac{3+7\lambda}{5-2\lambda}$ ifadesini λ-kesirlerine ayıralım.

En yakın tamsayı algoritmasını kullanacağız. $\xi = \frac{3+7\lambda}{5-2\lambda}$ olsun. Buna göre λ nın ξ ye en yakın bir tamsayı katını araştıracağız. Bu tamsayı r_0 olsun. Bu taktirde

$$r_0 = \left\{\frac{\xi}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{\frac{3+7\lambda}{5-2\lambda}}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{3+7\lambda}{5\lambda - 2\lambda - 2}\right\} = \left\{\frac{3+7\lambda}{3\lambda - 2}\right\} = \left\{\frac{14{,}632}{2{,}854}\right\} = \{5{,}127\} = 5$$

dir. $r_0\lambda = 5\lambda = 8{,}09 < \xi = \frac{3+7\lambda}{5-2\lambda} = 8{,}294$ olduğundan $\varepsilon_1 = 1$ dir. Böylece $\xi = r_0\lambda + \frac{\varepsilon_1}{\xi_1}, \xi_1 = \frac{\varepsilon_1}{\xi - r_0\lambda}$ eşitliklerinden

$$\xi = 5\lambda + \frac{1}{\xi_1},\ \xi_1 = \frac{1}{\frac{3+7\lambda}{5-2\lambda} - 5\lambda} = \frac{5-2\lambda}{3 + 7\lambda - 25\lambda + 10\lambda + 10} = \frac{5-2\lambda}{13 - 8\lambda}$$

bulunur. Şimdi ξ_1 e en yakın tamsayı algoritmasını uygulayalım.

$$r_1 = \left\{\frac{\xi_1}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{5-2\lambda}{13\lambda - 8\lambda - 8}\right\} = \left\{\frac{5-2\lambda}{5\lambda - 8}\right\} = \left\{\frac{1{,}764}{0{,}089}\right\} = \{19{,}820\} = 20$$

dir. $r_1\lambda = 20\lambda = 32{,}36 > \xi_1 = \frac{5-2\lambda}{13-8\lambda} = 31{,}5$ olduğundan $\varepsilon_2 = -1$ dir. Böylece

$$\xi_1 = 20\lambda - \frac{1}{\xi_2},\quad \xi_2 = \frac{-1}{\dfrac{5-2\lambda}{13-8\lambda} - 20\lambda} = \frac{8\lambda - 13}{5 - 2\lambda - 260\lambda + 160\lambda + 160} = \frac{8\lambda - 13}{-102\lambda + 165}$$

elde edilir. Buna göre

$$\xi = 5\lambda + \cfrac{1}{20\lambda - \cfrac{1}{\xi_2}}$$

dir. Şimdi ξ_2 ye en yakın tamsayı algoritmasını uygulayalım.

$$r_2 = \left\{\frac{\xi_2}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{8\lambda - 13}{-102\lambda - 102 + 165\lambda}\right\} = \left\{\frac{8\lambda - 13}{63\lambda - 102}\right\} = \left\{\frac{-0{,}056}{-0{,}065}\right\} = \{0{,}861\} = 1$$

olup $r_2\lambda = \lambda = 1{,}618 > \xi_2 = \frac{8\lambda-13}{-102\lambda+165} = \frac{-0{,}056}{-0{,}036} = 1{,}55$ olduğundan $\varepsilon_3 = -1$ dir. Böylece

$$\xi_2 = \lambda - \frac{1}{\xi_3}, \xi_3 = \frac{-1}{\dfrac{8\lambda - 13}{-102\lambda + 165} - \lambda} = \frac{102\lambda - 165}{8\lambda - 13 + 102\lambda + 102 - 165\lambda} = \frac{102\lambda - 165}{-55\lambda + 89}$$

elde edilir. Buna göre

$$\xi = 5\lambda + \cfrac{1}{20\lambda - \cfrac{1}{\lambda - \cfrac{1}{\xi_3}}}$$

bulunur. Şimdi ξ_3' ye en yakın tamsayı algoritmasını uygulayalım.

$$r_3 = \left\{\frac{\xi_3}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{102\lambda - 165}{-55\lambda - 55 + 89\lambda}\right\} = \left\{\frac{102\lambda - 165}{34\lambda - 55}\right\} = \left\{\frac{0{,}036}{0{,}012}\right\} = 3$$

olup $r_3\lambda = 3\lambda = 4{,}854 > \xi_3 = \frac{102\lambda-165}{-55\lambda+89} = \frac{0{,}036}{0{,}009} = 4$ olduğundan $\varepsilon_4 = -1$ dir. Böylece

$$\xi_3 = 3\lambda - \frac{1}{\xi_4}, \xi_4 = \frac{-1}{\dfrac{102\lambda - 165}{-55\lambda + 89} - 3\lambda} = \frac{-1}{\dfrac{102\lambda - 165 + 165\lambda + 165 - 267\lambda}{-55\lambda + 89}} = \frac{-1}{0} = \infty$$

olup $\xi_3 = 3\lambda - \frac{1}{\infty} = 3\lambda$ bulunur. Böylece ξ nin λ- kesirlerine ayrılmış şekli

$$\frac{3+7\lambda}{5-2\lambda} = 5\lambda + \cfrac{1}{20\lambda - \cfrac{1}{\lambda - \cfrac{1}{3\lambda}}}$$

dır. ■

Teorem 1.9 [19]. Her reel sayı bir tek λ- kesir gösterimine sahiptir. ■

G_5 Hecke grubunun elamanlarını belirlemek için aşağıdaki teorem yardımcı olabilir.

Teorem 1.10 [20]. $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}$, $\mathrm{ad} - \mathrm{bc} = 1, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d} \in \mathbb{Z}[\lambda]$ olsun. $V \in \mathrm{G}_5 \Leftrightarrow$

i) $\frac{b}{d} = r_0\lambda + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{r_n\lambda} = \frac{P_n}{Q_n}, \frac{a}{c} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},$ (10)

ii) $\frac{a}{c} = r_0\lambda + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{r_n\lambda} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{r_{n+1}\lambda} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}, \frac{b}{d} = \frac{P_n}{Q_n},$ (11)

Eğer $i)$ sağlanıyor ise $V = \begin{pmatrix} vP_{n-1} & P_n \\ vQ_{n-1} & Q_n \end{pmatrix}$, $ii)$ sağlanıyor ise $V = \begin{pmatrix} vP_{n+1} & P_n \\ vQ_{n+1} & Q_n \end{pmatrix}$ şeklindedir. Burada $v = \pm 1$, $detV = 1$ olacak şekilde seçilir.■

Teorem 1.11 [20]. $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}$, $\mathrm{ad} - \mathrm{bc} = 1, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d} \in \mathbb{Z}[\lambda_q]$ olsun ve $\frac{b}{d}$ nin sonlu bir λ_q-kesir gösterimine sahip olduğunu varsayalım. Bu taktirde $V \in \mathrm{G_q} \Leftrightarrow V, (10)$ veya (11) şeklindedir. ■

Örnek 1.4 [20]. $V = \begin{pmatrix} -(9\lambda+4) & 35\lambda+24 \\ -(2\lambda+3) & 13\lambda+6 \end{pmatrix}$ olsun. $R = \frac{35\lambda+24}{13\lambda+6}$ yı en yakın tamsayı algoritmasını kullanarak λ-kesirleri cinsinden yazarsak $R = 2\lambda - \cfrac{1}{2\lambda + \cfrac{1}{\lambda - \cfrac{1}{3\lambda}}}$ elde edilir. Buradan $P_3 = 35\lambda + 24$ ve $Q_3 = 13\lambda + 6$ bulunur. Böylece b ve d Teorem 1.11' i sağlar. Sondan bir önceki yakınsaklık $2\lambda - \frac{1}{2\lambda + \frac{1}{\lambda}} = \frac{9\lambda+4}{2\lambda+3}$ dür. Teorem 1.11' in şartlarını sağlamak için $a = -(9\lambda + 4) = -P_2$, $c = -(2\lambda + 3) = -Q_2$ seçilebilir. Buna göre V, (10) şeklinde olduğundan $V \in \mathrm{G}_5$ dir.

Örnek 1.5 [20]. $A = \begin{pmatrix} -(22\lambda+13) & 11\lambda+13 \\ -(7\lambda+5) & 7\lambda-1 \end{pmatrix}$, $detA = 1$ olup (10) veya (11) şeklinde olmadığından $A \notin G_5$ dir.

1.12. İndirgenmiş Form

Tanım 1.27 [12]. x, G_5 in bir cusp noktası yani $x \in \mathbb{Q}(\lambda)$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $x = \frac{a}{b}$' ye bir indirgenmiş formdur denir:

i) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in G_5$ olacak şekilde $c, d \in \mathbb{Z}[\lambda]$ vardır.

ii) $b \geq 0$

iii) Eğer $x = \infty$ ise, indirgenmiş form $-\frac{1}{0}$ veya $\frac{1}{0}$ dır. Eğer ∞, sıralanmış cusp noktalarının solunda ise indirgenmiş form $-\frac{1}{0}$ sağında ise $\frac{1}{0}$ olarak alınır.

Açıkça $(a, b) = 1$ dir. Buradan eğer $(a', b') = 1$ olmak üzere $x = \frac{a'}{b'}$ ise bu taktirde $a = \mu a', b = \mu b'$ dür. Burada $\mu, \mathbb{Z}[\lambda]$ da bir birimdir.

İndirgenmiş form, genelde, oldukça karmaşık olabilir. Örneğin 1 ve $\frac{21}{34}$ ün indirgenmiş formları sırasıyla

$$\frac{\lambda}{\lambda} \text{ ve } \frac{193776765 + 313537392\lambda}{313733810 + 507631968\lambda} = \frac{21\lambda^{36}}{34\lambda^{36}}$$

dır.

Lemma 1.5 [12]. Bir $x \neq \infty$ cusp noktasının indirgenmiş formu tektir. ∎

İspat: $\frac{a_1}{b_1}$ ve $\frac{a_2}{b_2}$ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ olacak şekilde indirgenmiş formda olsunlar. Bu taktirde $\frac{c_1}{d_1}, \frac{c_2}{d_2} \in \mathbb{Q}[\lambda]$ vardır öyle ki

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \in G_5$$

dir.

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \infty = \infty$$

olup bir $m \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir. Buradan

$$\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 m\lambda + c_1 \\ b_1 & b_1 m\lambda + d_1 \end{pmatrix}$$

dir. Bu son eşitlikten $a_1 = \pm a_2, b_1 = \pm b_2$ dir. $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ indirgenmiş formda olduğundan $b_1, b_2 > 0$ dır. Böylece $a_1 = a_2$ ve $b_1 = b_2$ dir. ■

Sonuç 1.1 [12]. Eğer $\frac{a_1}{b_1}$ ve $\frac{a_2}{b_2}$ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ olan iki indirgenmiş form ise bu taktirde $a_1 = a_2$ ve $b_1 = b_2$ dir. ■

Lemma 1.6 [12]. $\frac{a}{b} > 0$ $(b > 0)$ bir indirgenmiş form olsun. Bu taktirde $b \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b = 1$ dir. ■

Sonuç 1.2 [12]. Eğer $x \neq \infty$ bir cusp noktası ve $x = \frac{a}{b}$ indirgenmiş formda ise bu taktirde $b = 1 \Leftrightarrow$ bir $m \in \mathbb{Z}$ için $x = m\lambda$ dır. ■

Bu sonuca göre $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_5 \Leftrightarrow b = m\lambda, m \in \mathbb{Z}$ ve benzer şekilde $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in G_5 \Leftrightarrow c = n\lambda, n \in \mathbb{Z}$ dir.

Tanım 1.28. Eğer (x_i, x_j) bir çift doğru (even line) ise bu taktirde

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_i, \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_j$$

olacak şekilde bir $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in G_5$ vardır $(b \neq 0,\ d \neq 0)$.

Lemma 1.7 [12]. Varsayalım ki $x_i = \frac{a_i}{b_i}$ ve $x_j = \frac{a_j}{b_j}$ indirgenmiş formda olmak üzere $x_i, x_j \in \mathbb{Q}[\lambda]$ ve $x_i < x_j$ dir. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler birbirine eşittir:

i) $\begin{pmatrix} a_j & a_i \\ b_j & b_i \end{pmatrix} \in G_q$

ii) (x_i, x_j) bir çift doğrudur.

iii) $a_j b_i - a_i b_j = 1$ dir.

İspat: $i) \Longrightarrow ii)$ ve $i) \Longrightarrow iii)$ açıktır.

$\boldsymbol{ii}) \Longrightarrow \boldsymbol{i})$ Eğer $x_i = \infty$ ise indirgenmiş form $-\frac{1}{0}$ dır ve (x_i, x_j) bir çift doğru olduğundan bir $m \in \mathbb{Z}$ için $\frac{m\lambda_q}{1}$ indirgenmiş formunda olan $x_j = m\lambda_q$ vardır. Açıkça

$$\begin{pmatrix} m\lambda_q & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G_q$$

dur. Benzer şekilde, eğer $x_j = \infty$ ise x_j ve x_i için indirgenmiş form sırasıyla $\frac{1}{0}$ ve $\frac{m\lambda_q}{1}$ $(m \in \mathbb{Z})$ dir. Açıkça

$$\begin{pmatrix} 1 & m\lambda_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_q$$

Şimdi $x_i, x_j \neq \infty$ olduğunu varsayalım. (x_i, x_j) bir çift doğru olduğundan ∞' u x_j'

ye ve 0' ı x_i ye götüren

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in G_q, (b \neq 0,\ d \neq 0)$$

vardır. Eğer gerekirse -1 ile çarparak, $b > 0$ olduğunu farz edebiliriz. Şimdi $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ ve $ad - bc = 1 > 0$ dan $d > 0$ dır. Böylece $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ sırasıyla x_j ve x_i için indirgenmiş formlardır. Lemma 1.5' den

$$\begin{pmatrix} a_j & a_i \\ b_j & b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in G_q$$

bulunur.

$\boldsymbol{iii}) \Longrightarrow \boldsymbol{i})$ $\frac{a_j}{b_j}$ indirgenmiş form olduğundan $c, d \in \mathbb{Z}[\lambda_q]$ vardır öyle ki

$$\begin{pmatrix} a_j & c \\ b_j & d \end{pmatrix} \in G_q, \begin{pmatrix} a_j & c \\ b_j & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i d - b_i c \\ a_j b_i - a_i b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i d - b_i c \\ 1 \end{pmatrix}$$

dir. $\frac{a_i}{b_i}$ indirgenmiş form olduğundan $\frac{a_i d - b_i c}{1}$ de bir indirgenmiş formdur. Sonuç 1.2 den bir $m \in \mathbb{Z}$ için $a_i d - b_i c = m\lambda_q$ dur. Böylece

$$\begin{pmatrix} a_j & a_i \\ b_j & b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_j & c \\ b_j & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m\lambda_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_q$$

dur. ■

1.13. Cebirsel Sayı Cisimleri

Tanım 1.29 [3]. Sıfır bölensiz, birimli, değişmeli halkaya bir tamlık bölgesi denir.

Örnek 1.6. m tam kare olmayan bir tam sayı olsun. Bu taktirde $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{m} \coloneqq \{a + b\sqrt{m} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ kümesi bir tamlık bölgesidir. Burada $\sqrt{m}$ sayısı $x^2 - m = 0$ denkleminin bir köküdür. Dolayısıyla $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{m}$' ye "Kuadratik Bölge" denir.

Örnek 1.7. m tam kare olmayan bir tam sayı ve $m \equiv 1\ (mod\ 4)$ olsun. Bu taktirde $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)$ bir tamlık bölgesidir. Şayet $m \not\equiv 1\ (mod\ 4)$ ise verilen küme bir tamlık bölgesi değildir. Gerçekten;

$$\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)\left(1 - \frac{1+\sqrt{m}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{m}}{2}\right) = \frac{1-m}{4} \notin \mathbb{Z}$$

dir. Bu tamlık bölgesi de kuadratik bir tamlık bölgesidir. Çünkü $\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)$ sayısı $x^2 - x + \frac{1-m}{4}$ kuadratik polinomunun (indirgenemez) bir köküdür.

Örnek 1.8. F bir cisim olsun. $F[x] \coloneqq \{p(x)\ polinomu : katsayıları\ F'de\}$ kümesi bir tamlık bölgesidir.

Tanım 1.30 [3]. D bir tamlık bölgesi, $a \in D$ olsun. $a|1$ ise a' ya D tamlık bölgesinin "birimi" (unit) adı verilir. D' nin birimlerinin kümesini $U(D)$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.31 [3]. D bir tamlık bölgesi, $I \subset D$ olsun. Bu taktirde

i) $\forall a, b \in I$ için $a + b \in I$ ve
ii) $\forall a \in I$ ve $\forall r \in D$ için $ra \in I$

ise I' ya D' nin bir ideali adı verilir.

Tanım 1.32 [3]. D bir tamlık bölgesi ve $a \in D$ olsun. $\langle a \rangle = \{ra : r \in D\}$ idealine bir Esas ideal denir. Buna göre $\langle 0 \rangle = \{0\}$ ve $\langle 1 \rangle = D$ esas ideallerdir.

Tanım 1.33 [3]. D tamlık bölgesine bir esas ideal bölgesi adı verilir $\Leftrightarrow$ D' nin her ideali esas idealdir.

Teorem 1.12 [3]. $\mathbb{Z}[\lambda]$ bir esas ideal bölgesidir. Burada $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dir. ■

Tanım 1.34 [3]. A ve B, $A \subset B$ olan tamlık bölgeleri olsun. $b \in B$ elemanına A üzerinde "tam"dır denir:$\Leftrightarrow$ $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$ olmak üzere b elemanı bir

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

monik polinom denklemini sağlar.

Her $a \in A$ elemanı A üzerinde tamdır. Çünkü $a, x - a \in A[x]$ in bir köküdür.

Tanım 1.35 [3]. $\mathbb{Z}$ üzerinde tam olan bir kompleks sayıya bir "Cebirsel Tamsayı " denir.

Örnek 1.9. $\sqrt{2}$ bir cebirsel tamsayıdır. Çünkü $\sqrt{2}$, $x^2 - 2 = 0$ denklemini sağlar.

Örnek 1.10. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bir cebirsel tamsayı değildir. Tersine, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nin bir cebirsel tamsayı olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + a_0 = 0$$

olacak şekilde bir pozitif n tamsayısı ve $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ tamsayıları vardır. Bu eşitliğin her iki yanını $\left(\sqrt{2}\right)^n$ ile çarparsak

$$1 + a_{n-1}\sqrt{2} + \cdots + a_1\left(\sqrt{2}\right)^n + a_0 = 0$$

elde edilir. Böylece

$$(1 + 2a_{n-2} + 4a_{n-4} + \cdots) + \sqrt{2}(a_{n-1} + 2a_{n-3} + \cdots) = 0$$

dır. Eğer $a_{n-1} + 2a_{n-3} + \cdots \neq 0$ ise bu taktirde

$$\sqrt{2} = \frac{-(1+2a_{n-2}+4a_{n-4}+\cdots)}{(a_{n-1}+2a_{n-3}+\cdots)}$$

iki tamsayının bölümüdür. Böylece $\sqrt{2}$ bir rasyonel sayıdır. Bu ise bir çelişkidir. Buradan $a_{n-1} + 2a_{n-3} + \cdots = 0$ ve böylece $1 + 2a_{n-2} + 4a_{n-4} + \cdots = 0$ dır. Bu da bir çelişkidir. Çünkü $1 + 2a_{n-2} + 4a_{n-4} + \cdots$ açıkça tek olan bir tamsayıdır.

Tanım 1.36 [3]. A ve B, $A \subset B$ olan tamlık bölgeleri olsun. Farz edelim ki A bir cisim ve $b \in B$ de A üzerinde tamdır. Bu taktirde b ye "A cismi üzerinde cebirsel" denir.

Tanım 1.37 [3]. $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirsel olan bir kompleks sayıya "cebirsel sayı" denir.

Teorem 1.13 [3]. Tüm cebirsel tamsayıların kümesi bir tamlık bölgesidir. ■

Örnek 1.11. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bir cebirsel sayıdır. Çünkü $x^2 - \frac{1}{2} = 0$ denklemini sağlar.

Örnek 1.12. m karesiz bir tamsayı ve $m \equiv 1(mod4)$ olmak üzere $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)$ kuadratik bölgesi $\mathbb{Z}$ üzerinde tamdır. Gerçekten, $\forall\alpha = u + v\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right) \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)$ elemanı $\mathbb{Z}$ üzerinde tamdır. Çünkü, $-(2u + v) \in \mathbb{Z}$ ve $u^2 + uv + \frac{1}{4}(1 - m)v^2 \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\alpha, x^2 - (2u + v)x + \left(u^2 + uv + \frac{1}{4}(1 - m)v^2\right) = 0$ polinom denklemini sağlar.

1.13.1. Bir Kuadratik Cisim Üzerindeki Cebirsel Tamsayılar

Burada bir $x^2 + ax + b \in \mathbb{Q}[x]$ indirgenemez kuadratik polinomunun bir $\alpha \in \mathbb{C}$ kökü ile $\mathbb{Q}$ nun birleşmesinden elde edilen $\mathbb{Q}(\alpha)$ cismindeki cebirsel tamsayıları belirleyeceğiz. Yani $\mathbb{Q}(\alpha)$, $\mathbb{C}$ nin $\mathbb{Q}$ ve α yı içeren en küçük cismidir. $x^2 + ax + b, \mathbb{Q}[x]$ de indirgenemez olduğundan $\alpha \notin \mathbb{Q}$ olduğuna dikkat edelim. $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ olmak üzere

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{x + y\alpha | x, y \in \mathbb{Q}\}$$

cismine bir "kuadratik cisim" veya "$\mathbb{Q}$ nun bir kuadratik genişlemesi" denir.

Teorem 1.14 [3]. K bir kuadratik cisim olsun. Bu taktirde $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ olacak şekilde bir tek karesiz m tamsayısı vardır.■

Şimdi m karesiz bir tamsayı olmak üzere $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \{a + b\sqrt{m} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ kuadratik cismindeki cebirsel tamsayıları belirleyeceğiz. K daki cebirsel tamsayıların kümesi "O_K" ile gösterilir.

Teorem 1.15 [3]. K kuadratik bir cisim ve m, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ olacak şekilde birtek karesiz tamsayı olsun. Bu taktirde K daki cebirsel tamsayıların O_K kümesi

$$O_K = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{m} & \text{, eğer } m \not\equiv 1(mod4) \\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right) & \text{, eğer } m \equiv 1(mod4) \end{cases}$$

dir.■

1.13.2. Bir Kuadratik Elemanın Normu ve İzi

Tanım 1.38 [3]. Eğer K bir kuadratik cisim ise bu taktirde bir m karesiz tam sayısı için $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ dir. $\alpha \in K$ olsun. Bu taktirde $\exists\, r, s \in \mathbb{Q}$ için $\alpha = r + s\sqrt{m}$ dir.

α' nın izi:

$$tr(\alpha) = \alpha + \alpha' = 2r$$

ve α' nın normu:

$$N(\alpha) = \alpha\alpha' = r^2 - s^2 m$$

dir. Eğer $\alpha \in O_K$ ise bu taktirde $tr(\alpha) \in \mathbb{Z}$ ve $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$ dir.

Teorem 1.16 [3]. K n. dereceden bir cebirsel sayı cismi $\alpha, \beta \in K$ olsun. Bu taktirde

$$tr(\alpha + \beta) = tr(\alpha) + tr(\beta) \text{ ve } N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$$

dır. ■

Aşağıdaki teorem bir birimin normu hakkındadır.

Teorem 1.17 [3]. K n. dereceden bir cebirsel sayı cismi olsun.

i) Eğer α O_K' nın bir birimi ise bu taktirde $N(\alpha) = \pm 1$ dir.
ii) Eğer $\alpha \in O_K$ ve $N(\alpha) = \pm 1$ ise bu taktirde α O_K' nın bir birimidir.■

Teorem 1.18 [3]. K bir cebirsel sayı cismi olsun. Eğer $\alpha \in O_K$, $N(\alpha) = \pm p$ olacak şekilde ise bu taktirde α bir indirgenemezdir. Burada p bir rasyonel asal sayıdır.■

Teorem 1.19 [3]. K n. dereceden bir cebirsel sayı cismi, O_K K' nın tamsayılar halkası ve $\alpha \in O_K$ olsun. Bu taktirde $N(\langle\alpha\rangle) = |N(\alpha)|$ dır. ■

Aşağıdaki teoremde $\langle\alpha\rangle$ esas idelinin normunu α' nın $\mathbb{Q}$ üzerindeki minimal polinomunun sabit terimi cinsinden belirleyeceğiz.

Teorem 1.20 [3]. K n. dereceden bir cebirsel sayı cismi, $\alpha \in K$ ve $irr_{\mathbb{Q}}(\alpha) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 \in \mathbb{Q}[x]$ olsun. Bu taktirde $N(\langle\alpha\rangle) = |b_0|^{n/m}$ dir. ■

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Γ^3 Modular Alt Grubunun Alt Yörüngesel Grafları

2.1.1. Γ^3 Modular Alt Grubu

Γ^3 grubu ile Γ modular grubunun elemanlarının küpleri alınarak elde edilen grubu göstereceğiz. [17] den görüleceği gibi $\Gamma^3 \coloneqq \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : ab + cd \equiv 0 \ (mod\ 3)\right\}$ dir. Buradan kolaylıkla Γ^3 grubunun herhangi bir elemanı, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} 3a & b \\ c & 3d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 3b \\ 3c & d \end{pmatrix} \text{ve } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

şeklindeki üç tipten biridir. İlk iki tipin Γ^3 te olduğu aşikardır. Üçüncü tipin Γ^3 te olduğunu aşağıda gösterelim.

Lemma 2.1. $a, b, c, d \not\equiv 0 \ (mod\ 3)$ olmak üzere $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^3$ ancak ve ancak $T \in \Gamma$ dır.

İspat: $T \in \Gamma$ olduğu açıktır.

Tersine $a, b, c, d \not\equiv 0 \ (mod\ 3)$ olmak üzere $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ olsun. Buradan

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^x + 3t & (-1)^y + 3k \\ (-1)^u + 3l & (-1)^v + 3m \end{pmatrix}$$

olacak şekilde x, y, u, v tamsayıları vardır. $detT = 1$ olduğundan

$$((-1)^x + 3t)((-1)^v + 3m) - ((-1)^u + 3l)((-1)^y + 3k) = 1$$

olup

$$(-1)^{x+v} - (-1)^{u+y} \equiv 1 \ (mod\ 3)$$

tür. Bu ise ancak $x+v$ nin tek, $u+y$ nin çift olmasıyla mümkündür. Yani $x+y+u+v$ tektir. Böylece

$$x+y+u+v \equiv 1 \ (mod\ 2) \tag{12}$$

elde edilir.

Şimdi Γ^3 tanımından, $T \in \Gamma^3 \Leftrightarrow ab+cd \equiv 0 \ (mod\ 3)$ olduğundan,

$$((-1)^x+3t)((-1)^y+3k)+((-1)^u+3l)((-1)^v+3m) \equiv 0 \ (mod\ 3)$$

olup buradan

$$(-1)^{x+y}+(-1)^{u+v} \equiv 0 \ (mod\ 3)$$

bulunur. Bu ise ancak $x+y$, $u+v$ sayılarının sadece birinin çift olmasıyla mümkündür. Yani $x+y+u+v$ tektir. Böylece

$$x+y+u+v \equiv 1 \ (mod\ 2)$$

dir. Bu ise (12)' den dolayı her zaman sağlanır. Böylece $T \in \Gamma^3$ olup $\Gamma \subset \Gamma^3$ tür.

Böylece Lemmanın ispatı tamamlanır.

Teorem 2.1 [14]. Γ^3 grubu 2. mertebeden 3 devirli grubun serbest çarpımıdır ve

$$|\Gamma:\Gamma^3| = 3, \Gamma = \Gamma^3 + y\Gamma^3 + y^2\Gamma^3, \Gamma^3 = \{x, yxy^2, y^2xy\}$$

dir. Burada $x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dir.

2.1.2. Γ^3 Grubunun $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \infty$ Üzerindeki Hareketi

Lemma 2.2. $\boldsymbol{i}$) Γ^3 grubu $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket eder.

$\boldsymbol{ii}$) Bir noktanın sabitleyeni sonsuz devirli bir gruptur.

İspat: $\boldsymbol{i}$) $\frac{a}{3b} \in \widehat{\mathbb{Q}}, (a,3b)=1$ alalım. Bu taktirde $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z}: ay_0 - 3bx_0 = 1$ dir. Buradan $T = \begin{pmatrix} a & x_0 \\ 3b & y_0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ dır. $ay_0 - 3bx_0 = 1$ denkleminin genel çözümü $n \in \mathbb{Z}$ için $x = x_0 + an, y = y_0 + 3bn$ dir. Burada $x_0 \equiv 0 \ (mod\ 3)$ ise problem yok. $x_0 \equiv$

$1\ (mod\ 3)$ veya $x_0 \equiv 2\ (mod\ 3)$ ise $a \equiv 1,2\ (mod\ 3)$ için $n \equiv 1,2\ (mod\ 3)$ den uygun olanı seçilirse $x \equiv 0\ (mod\ 3)$ olur. Bu taktirde $x_0 \equiv 0\ (mod\ 3)$ olarak seçilebilir. Böylece $T \in \Gamma^3$ olur.

$\frac{3a}{b} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ ve $(3a, b) = 1$ olsun. Bu taktirde $\exists x_1, y_1 \in \mathbb{Z}: 3ay_1 - bx_1 = 1$ dir. Buradan $T = \begin{pmatrix} 3a & x_1 \\ b & y_1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ dır. $3ay_1 - bx_1 = 1$ denkleminin genel çözümü $x = x_1 + 3an, y = y_1 + bn$ dir. Burada $y_1 \equiv 0\ (mod\ 3)$ ise problem yok. $y_1 \equiv 1,2\ (mod\ 3)$ ise $b \equiv 1,2\ (mod\ 3)$ için $n \equiv 1,2\ (mod\ 3)$ den uygun olanı seçilirse $x \equiv 0\ (mod\ 3)$ olur. Bu taktirde $x_1 \equiv 0\ (mod\ 3)$ olarak seçilebilir. Böylece $T \in \Gamma^3$ olup $T(\infty) = \frac{3a}{b}$ dir. Yani $\frac{3a}{b} \in \widehat{\mathbb{Q}}$, ∞' un yörüngesindedir.

$\frac{a}{b} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ ve $(a, b) = 1$ olsun. $(a, b \not\equiv 0\ (mod\ 3))$. Bu taktirde $\exists x_2, y_2 \in \mathbb{Z}: ay_2 - bx_2 = 1$ dir. Buradan $T = \begin{pmatrix} a & x_2 \\ b & y_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$ dır. Burada $x_2, y_2 \equiv 0\ (mod\ 3)$ olamaz. (Bu taktirde $T \notin \Gamma$ olur.) $x_2, y_2 \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ ise $T \in \Gamma^3$ olup problem yoktur. Varsayalım ki $x_2 = 3l$ ve $y_2 \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. $ay_2 - bx_2 = 1$ denkleminin genel çözümü $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = 3l + an, y = y_2 + (-b)n$ dir. $n = 3k$ alamıyoruz. Çünkü bu taktirde $x \equiv 0\ (mod\ 3)$ olduğundan $x_2 \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olacak şekilde bir $x_2 \in \mathbb{Z}$ seçemeyiz. Dolayısıyla $n = 3k + 1$ veya $n = 3k - 1$ dir. $n = 3k + 1$ ise $x = 3l + 3ak + a, a \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ ve $y = y_2 - 3bk - b$ dir. Burada $y_2 - b \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olmasını istiyoruz. Varsayalım $y_2 - b \equiv 0\ (mod\ 3)$ tür. Bu taktirde $n = 3k - 1$ alırsak $x = 3l + 3ak - a, a \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ ve $y = y_2 - 3bk + b$ elde edilir. Acaba $y_2 + b \equiv 0\ (mod\ 3)$ mü? $y_2 - b \equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow y_2 \equiv b\ (mod\ 3) \Longrightarrow y_2 + b \equiv 2b \not\equiv 0\ (mod\ 3)(b \not\equiv 0\ (mod\ 3))$. Yani $n = 3k + 1$ için $y \equiv 0\ (mod\ 3)$ ise $n = 3k - 1$ için $y \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ tür. $n = 3k \pm 1$ için $a \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olduğundan $x \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ tür. Böylece $x_0 \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olarak seçilebilir. Dolayısıyla $T(\infty) = \frac{a}{b}$ olacak şekilde $T \in \Gamma^3$ vardır.

ii) Γ^3 grubu $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $\widehat{\mathbb{Q}}$ daki herhangi iki noktanın sabitleyeni Γ^3 de eşleniktir. Bu yüzden ∞ un sabitleyeni olan Γ^3_∞ grubunu göz önüne almak yeterlidir. Buradan $\Gamma^3_\infty = \langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ olduğu açıktır. Gerçekten:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğinden $a = 1, c = 0, d = 1$ elde edilir. Ayrıca $ab + cd \equiv 0\ (mod\ 3)$ den $b \equiv 0\ (mod\ 3)$ dür. Bu ise $\Gamma_\infty^3 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla Γ_∞^3 grubu sonsuz devirli bir gruptur.■

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\Gamma_0^3(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^3 : c \equiv 0 (mod\ n) \right\}$ olsun. Bu taktirde $\Gamma_0^3(n)$, Γ^3' ün bir alt grubudur. Burada $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma_\infty^3 \leq \Gamma_0^3(n) \leq \Gamma^3$ olduğu açıktır. Ayrıca $n > 1$ ise $\Gamma_\infty^3 < \Gamma_0^3(n) < \Gamma^3$ tür. Gerçekten:

$n \equiv 0 (mod\ 3)$ ise $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n+1 & n+2 \end{pmatrix} \in \Gamma^3$ fakat $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n+1 & n+2 \end{pmatrix} \notin \Gamma_0^3(n)$

$n \equiv 1 (mod\ 3)$ ise $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ n+1 & -n \end{pmatrix} \in \Gamma^3$ fakat $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ n+1 & -n \end{pmatrix} \notin \Gamma_0^3(n)$

$n \equiv 2 (mod\ 3)$ ise $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma^3$ fakat $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix} \notin \Gamma_0^3(n)$

dir.

Lemma 2.3. $|\Gamma_0(n) : \Gamma_0^3(n)| = 3$ dür.

İspat: $\Gamma_0(n) = \Gamma_0^3(n) \cup \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0^3(n) \cup \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0^3(n)$ olduğunu gösterelim. Burada $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \Gamma^3, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \Gamma^3$ tür. Ayrıca $aH = bH \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ olduğundan

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0^3(n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0^3(n) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \in \Gamma_0^3(n) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \Gamma_0^3(n)$ dir. Yani $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0^3(n)$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0^3(n)$ ayrıktır.

Şimdi $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ ve $ab + cnd \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. Buradan $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \notin \Gamma_0^3(n)$ dir. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0^3(n)$ veya $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_0^3(n)$ dir. Bu taktirde $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^3(n)$ veya $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^3(n)$ dir. Böylece

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - cn & b - d \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^3(n)$$

veya

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2cn & b-2d \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^3(n)$$

dir. Buradan $(a-cn)(b-d)+cnd \equiv 0\ (mod\ 3)$ veya $(a-2cn)(b-2d)+cnd \equiv 0\ (mod\ 3)$ tür. Yani $ab-ad-bcn-cnd \equiv 0\ (mod\ 3)$ veya $ab+ad+bcn-dcn \equiv 0 (mod\ 3)$ tür.

Varsayalım ki $ab-ad-bcn-cnd \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. Bu taktirde $ab+ad+bcn-dcn \equiv 0 (mod\ 3)$ müdür? $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ fakat $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \notin \Gamma^3$ olduğundan a, b, c, d den sadece biri $\equiv 0\ (mod\ 3)$ tür.

i) $a \equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. Bu taktirde $ad - bcn \equiv 1\ (mod\ 3) \Longrightarrow bcn \equiv -1\ (mod\ 3)$ tür. $ab + dcn \not\equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow dcn \not\equiv 0 (mod\ 3) \Longrightarrow cn \not\equiv 0 (mod\ 3), d \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ tür.

$ab-ad-bcn-cnd \not\equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow -bcn-cnd \not\equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow 1-cnd \not\equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow cnd \not\equiv 1\ (mod\ 3)$. $cn, d \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olduğundan $cnd \equiv -1\ (mod\ 3)$ tür. Buna göre $ab+ad+bcn-dcn \equiv bcn-dcn \equiv -1-(-1) \equiv 0\ (mod\ 3)$ tür.

ii) $b \equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. Bu taktirde $ad - bcn \equiv 1\ (mod\ 3) \Longrightarrow ad \equiv 1\ (mod\ 3)$ tür. $ab + dcn \not\equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow dcn \not\equiv 0 (mod\ 3) \Longrightarrow cn \not\equiv 0 (mod\ 3), d \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ tür.

$ab-ad-bcn-cnd \not\equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow -ad-cnd \not\equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow -1-cnd \not\equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow cnd \not\equiv -1\ (mod\ 3)$. $d, cn \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olduğundan $cnd \equiv 1\ (mod\ 3)$ tür. Buna göre $ab+ad+bcn-dcn \equiv ad-dcn \equiv 1-1 \equiv 0\ (mod\ 3)$ tür.

iii) $cn \equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. Bu taktirde $ad - bcn \equiv 1\ (mod\ 3) \Longrightarrow ad \equiv 1\ (mod\ 3)$ tür. $ab + dcn \not\equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow ab \not\equiv 0 (mod\ 3) \Longrightarrow a \not\equiv 0 (mod\ 3), b \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ tür.

$ab-ad-bcn-cnd \not\equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow ab-ad \not\equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow ab \not\equiv 1\ (mod\ 3)$. $a, b \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olduğundan $ab \equiv -1\ (mod\ 3)$ tür. Buna göre $ab+ad+bcn-dcn \equiv ab+ad \equiv -1+1 \equiv 0\ (mod\ 3)$ tür.

iv) $d \equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. Bu taktirde $ad - bcn \equiv 1\ (mod\ 3) \Longrightarrow bcn \equiv -1\ (mod\ 3)$ tür. $ab + dcn \not\equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow ab \not\equiv 0 (mod\ 3) \Longrightarrow a \not\equiv 0 (mod\ 3), b \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ tür.

$ab-ad-bcn-cnd \not\equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow ab-bcn \not\equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow ab \not\equiv -1\ (mod\ 3)$. $a, b \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olduğundan $ab \equiv 1\ (mod\ 3)$ tür. Buna göre $ab+ad+bcn-dcn \equiv ab+bcn \equiv 1-1 \equiv 0\ (mod\ 3)$ tür.

Böylece $|\Gamma_0(n):\Gamma_0^3(n)| = 3$ tür.■

Teorem 1.5 den biliyoruz ki Γ^3 grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi imprimitiftir. Şimdi " $\approx$ " ile $\Gamma_0^3(n)$ grubuyla $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerine indirgenmiş olan Γ^3- invaryant denklik bağıntısını gösterelim:

$v = \frac{r}{s}$ ve $w = \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olsun. Γ^3 ün transitifliğinden $v = g(\infty)$ ve $w = g'(\infty)$ olacak şekilde $g, g' \in \Gamma^3$ vardır. Bu taktirde $g = \begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix}$ dir. Böylece Teorem 1.5' den

$$v \approx w \Leftrightarrow g^{-1}g' \in \Gamma_0^3(n)$$

olduğundan

$$v \approx w \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \ (mod\ n)$$

elde edilir.

Açıkça ∞ bloğunu $[\infty]$ ile gösterirsek

$$[\infty] \coloneqq \left\{ \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} \middle| y \equiv 0 \ (mod\ n) \right\}$$

dir. Bu durumda blokların sayısı $\psi(n) = |\Gamma^3: \Gamma_0^3(n)|$ dir.

2.1.3. Γ^3 Grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

Lemma 2.4. $G_{u,n} = G_{u',n'} \Leftrightarrow n = n'$ ve $u \equiv u' \ (mod\ 3n)$ dir.

İspat: $G_{u,n} = G_{u',n'} \Leftrightarrow O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) = O\left(\infty, \frac{u'}{n'}\right) \Leftrightarrow \exists T \in \Gamma^3 : T(\infty) = \infty$ ve $T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u'}{n'}$ tür. $T(\infty) = \infty$ olduğundan $T \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \Gamma_\infty^3$ tür. Buradan $T = \begin{pmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Ayrıca $T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u'}{n'}$ olduğundan $\begin{pmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ n' \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{u+3kn}{n} = \frac{u'}{n'}$ olup $(u', n') = 1$ olduğundan $n = n'$ ve $u' = u + 3kn \Rightarrow u' \equiv u \ (mod\ 3n)$ dir. Böylece $G_{u,n} = G_{u',n'} \Leftrightarrow n = n'$ ve $u \equiv u' \ (mod\ 3n)$ dir.

Sonuç 2.1. n keyfi sabit olmak üzere $3\phi(n)$ tane farklı $G_{u,n}$ alt yörüngesel grafı vardır.

Teorem 2.2. $\frac{r}{s} \longrightarrow \frac{x}{y} \in G_{u,n} \Leftrightarrow$

1) $r \equiv 0\ (mod\ 3)$ ise $x \equiv \pm ur\ (mod\ n), y \equiv \pm us\ (mod\ 3n)$ ve $ry - sx = \pm n$

2) $s \equiv 0\ (mod\ 3)$ ise $x \equiv \pm ur\ (mod\ 3n), y \equiv \pm us\ (mod\ n)$ ve $ry - sx = \pm n$

3) $r, s \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ ise $x \equiv \pm ur\ (mod\ n), x \not\equiv \pm ur\ (mod\ 3n)$, $y \equiv \pm us\ (mod\ n), y \not\equiv \pm us\ (mod\ 3n)$ ve $ry - sx = \pm n$ dir.

İspat: $\frac{r}{s} \longrightarrow \frac{x}{y} \in G_{u,n}$ olduğunu varsayalım.

1) $r \equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. Genellikten bir şey kaybetmeden $\frac{r}{s} < \frac{x}{y}$ olduğunu farzedebiliriz. Bu taktirde $ry - sx < 0$ dır. ($r, s, x, y > 0$ alınabilir.) $\frac{r}{s} \longrightarrow \frac{x}{y} \in G_{u,n}$ olduğundan $\exists T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^3 : T\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$ dir. Böylece $ry - sx < 0$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix} \text{ veya } \begin{pmatrix} r & -x \\ s & -y \end{pmatrix}$$

dir. Eğer $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ ise $a = -r,\ c = -s,\ au + bn = x$ ve $cu + dn = y$ dir. Buradan $a = -r$ ve $r \equiv 0\ (mod\ 3)$ olduğundan $a \equiv 0\ (mod\ 3)$ ve $T \in \Gamma^3$ olduğundan $d \equiv 0\ (mod\ 3)$ tür. Böylece $x \equiv -ur\ (mod\ n), y \equiv -us\ (mod\ 3n)$ ve $ry - sx = -n$ dir.

2) $s \equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. 1) deki gibi $T\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ olacak şekilde $T \in \Gamma^3$ vardır. Buradan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix} \Longrightarrow a = -r, c = -s, x = au + bn$ ve $y = cu + dn$ dir. $c = -s$ ve $s \equiv 0\ (mod\ 3)$ olduğundan $c \equiv 0\ (mod\ 3)$ ve $T \in \Gamma^3$ olduğundan $b \equiv 0\ (mod\ 3)$ tür. Böylece $x \equiv -ur\ (mod\ 3n), y \equiv -us\ (mod\ n)$ ve $ry - sx = -n$ dir.

3) $r, s \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. Bu taktirde $T\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ olacak şekilde $T \in \Gamma^3$ vardır. Buradan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix} \Longrightarrow a = -r, c = -s, x = au + bn$ ve $y = cu + dn$ dir. $r, s \not\equiv 0\ (mod\ 3), a = -r, c = -s$ ve $T \in \Gamma^3$ olduğundan $b, d \not\equiv 0\ (mod\ 3)$tür. Bu taktirde $x \equiv -ur\ (mod\ n), x \not\equiv -ur\ (mod\ 3n), y \equiv -us\ (mod\ n)$, $y \not\equiv -us\ (mod\ 3n)$ ve $ry - sx = -n$ dir.

Tersine,

1) $r \equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. $x \equiv -ur\ (mod\ n), y \equiv -us\ (mod\ 3n)$ ve $ry - sx = -n$ olsun. Bu taktirde $\exists k, t \in \mathbb{Z}: x = -ur + kn, y = -us + 3tn$ dir. Buradan $\begin{pmatrix} -r & k \\ -s & 3t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. $r \equiv 0\ (mod\ 3)$ ve $-3rt + ks = 1$ olduğundan $\begin{pmatrix} -r & k \\ -s & 3t \end{pmatrix} \in \Gamma^3$ tür. Böylece $\frac{r}{s} \longrightarrow \frac{x}{y} \in G_{u,n}$ dir.

2) $s \equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. $x \equiv -ur\ (mod\ 3n), y \equiv -us\ (mod\ n)$ ve $ry - sx = -n$ olsun. Bu taktirde $\exists k, t \in \mathbb{Z}: x = -ur + 3kn, y = -us + tn$ dir. Buradan $\begin{pmatrix} -r & 3k \\ -s & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. $s \equiv 0\ (mod\ 3)$ ve $-rt + 3ks = 1$ olduğundan $\begin{pmatrix} -r & 3k \\ -s & t \end{pmatrix} \in \Gamma^3$ tür.

3)$r, s \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. $x \equiv -ur\ (mod\ n), x \not\equiv -ur\ (mod\ 3n)$, $y \equiv -us\ (mod\ n)$, $y \not\equiv -us\ (mod\ 3n)$ ve $ry - sx = -n$ olsun. Bu taktirde $\exists k, t \in \mathbb{Z}: x = -ur + kn, y = -us + tn$ dir. Buradan $\begin{pmatrix} -r & k \\ -s & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dir. $x = -ur + kn, y = -us + tn$, $x \not\equiv -ur\ (mod\ 3n), y \not\equiv -us\ (mod\ 3n)$ olduğundan $k, t \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ tür. Ayrıca $r, s \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ ve $-rt + ks = 1$ olduğundan $\begin{pmatrix} -r & k \\ -s & t \end{pmatrix} \in \Gamma^3$ tür.

Teorem 2.3. $G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiştir ancak ve ancak $n \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ ve $u^2 \equiv -1\ (mod\ n)$ dir.

İspat: Farz edelim ki $G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiş olsun. Bu taktirde $\exists T \in \Gamma^3$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u & 1 \\ -n & 0 \end{pmatrix} \text{ veya } \begin{pmatrix} u & -1 \\ n & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Buna göre

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u & 1 \\ -n & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -u, c = -n, -u^2 + bn = 1, d = u$$

dur. Eğer $n \equiv 0\ (mod\ 3)$ ise $-u^2 + bn = 1$ den $-u^2 \equiv 1\ (mod\ n)$ olamaz. Yani kendisiyle eşleşmiş değildir. Bu taktirde $n \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ ve $u^2 \equiv -1\ (mod\ n)$ dir.

Tersine, $n \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ ve $u^2 \equiv -1\ (mod\ n)$ olsun. Bu taktirde $\exists k \in \mathbb{Z}: u^2 = -1 + kn$ dir. Buna göre $\begin{pmatrix} -u & k \\ -n & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u & 1 \\ -n & 0 \end{pmatrix}$ dır. $k = \frac{u^2+1}{n} \in \mathbb{Z}$ olduğundan eğer $3|k$ ise

$3|u^2+1$ olup $u^2+1\equiv 0\ (mod\ 3) \Longrightarrow u^2 \equiv -1\ (mod\ 3)$ çelişkisi bulunur. Böylece $k,n \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ tür. Buradan $\begin{pmatrix} -u & k \\ -n & u \end{pmatrix} \in \Gamma^3$ tür.

Teorem 2.4. $\Gamma_0^3(n)$ grubu $F_{u,n}$ grafının köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder.

İspat: $\boldsymbol{i})$ v,w $F_{u,n}$ nin köşeleri olsun. Γ^3 grubu $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olduğundan $\exists T \in \Gamma^3 : T(v) = w$ dir. $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olmak üzere $v = \frac{k}{ln}, w = \frac{t}{sn}$ alırsak $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ ln \end{pmatrix} = \frac{ak+bln}{ck+dln} = \frac{t}{sn}$ olup $n|ck$ dır. $(k,n) = 1$ olduğundan $c \equiv 0\ (mod\ n)$ dir. Bu ise $T \in \Gamma_0^3(n)$ olduğunu yani $\Gamma_0^3(n)$ nin $F_{u,n}$ nin köşeleri üzerinde transitif olduğunu gösterir. Böylece $\Gamma_0^3(n)$ $F_{u,n}$ nin köşelerini permüte eder.

$\boldsymbol{ii})$ $h_1 : \frac{r}{sn} \longrightarrow \frac{x}{yn} \in F_{u,n}$ ve $h_2 : \frac{a}{bn} \longrightarrow \frac{c}{dn} \in F_{u,n}$ iki kenar olsun. Bu taktirde $\exists T_1, T_2 \in \Gamma^3 : \left(\infty, \frac{u}{n}\right) \xrightarrow{T_1} \left(\frac{r}{sn}, \frac{x}{yn}\right), \left(\infty, \frac{u}{n}\right) \xrightarrow{T_2} \left(\frac{a}{bn}, \frac{c}{dn}\right)$ dir. $T_1\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{r}{sn}$ olduğundan $T_1 = \begin{pmatrix} r & k_1 \\ sn & l_1 \end{pmatrix}$ ve benzer şekilde $T_2 = \begin{pmatrix} a & k_2 \\ bn & l_2 \end{pmatrix}$ dir. Bu durumda $T_2 \circ T_1^{-1} = \begin{pmatrix} al_1 - k_2sn & -ak_1 + k_2r \\ bl_1n - l_2sn & -bk_1n + l_2r \end{pmatrix}$ olduğundan $T \coloneqq T_2 \circ T_1^{-1} \in \Gamma_0^3(n)$ dir. Açıkça $T\left(\frac{r}{sn}\right) = \frac{a}{bn}, T\left(\frac{x}{yn}\right) = \frac{c}{dn}$ dir. Böylece $T \in \Gamma_0^3(n)$ dönüşümü h_1 kenarını h_2 kenarına resmeder. Dolayısıyla $\Gamma_0^3(n)$ kenarları permüte eder.

$$\begin{tikzcd}
\left(\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{u}{n}\right) \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "T_1"'] & \left(\frac{a}{bn} \longrightarrow \frac{c}{dn}\right) \\
\left(\frac{r}{sn} \longrightarrow \frac{x}{yn}\right) \arrow[ur, "T_2 \circ T_1^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Şekil 5. $T_2 \circ T_1^{-1}$ Dönüşümü

Lemma 2.5. $v\, F_{u,n}$ de bir köşe olmak üzere $F_{u,n} \xrightarrow{h} F_{-u,n},\ v \longrightarrow -v$ dönüşümü bir izomorfizmadır.

İspat: h dönüşümünün $1-1$ ve örten olduğu açıktır. Şimdi h dönüşümünün yapı koruyan olduğunu yani $a \longrightarrow b \in F_{u,n}$ ise $-a \longrightarrow -b \in F_{-u,n}$ olduğunu gösterelim. $\frac{r}{s} \xrightarrow{<} \frac{x}{y} \in F_{u,n}$ olsun.

i) $r \equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. Bu taktirde $x \equiv -ur\ (mod\ n), y \equiv -us\ (mod\ 3n)$ ve $ry - sx = -n$ dir. $\frac{r}{s} < \frac{x}{y}$ olduğundan $-\frac{r}{s} > -\frac{x}{y}$ dir. Buradan $-\frac{r}{s} \xrightarrow{>} -\frac{x}{y} \in F_{-u,n}$ olması için $-x \equiv (-u)(-r)\ (mod\ n), y \equiv (-u)s\ (mod\ 3n)$ ve $-ry + sx = n$ olmalıdır.

ii) $s \equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. Bu taktirde $x \equiv -ur\ (mod\ 3n), y \equiv -us\ (mod\ n)$ ve $ry - sx = -n$ dir.$-\frac{r}{s} \xrightarrow{>} -\frac{x}{y} \in F_{-u,n}$ olması için $-x \equiv (-u)(-r)\ (mod\ 3n), y \equiv (-u)s\ (mod\ n)$ ve $-ry + sx = n$ olmalıdır.

iii) $r, s \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. Bu taktirde $x \equiv -ur\ (mod\ n), x \not\equiv -ur\ (mod\ 3n),\ y \equiv -us\ (mod\ n), y \not\equiv -us\ (mod\ 3n)$ ve $ry - sx = -n$ dir. $-\frac{r}{s} \xrightarrow{>} -\frac{x}{y} \in F_{-u,n}$ olması için $-x \equiv (-u)(-r)\ (mod\ n), x \not\equiv (-u)(-r)\ (mod\ 3n),\ y \equiv (-u)s\ (mod\ n), y \not\equiv (-u)s\ (mod\ 3n)$ ve $-ry + sx = n$ olmalıdır.

Lemma 2.6. $m|n$ olmak üzere $F_{u,n} \xrightarrow{h} F_{u,m}$ dönüşümü bir homomorfizmadır.

$$v \longrightarrow \frac{n}{m} v$$

İspat: $\frac{r}{sn} \xrightarrow{<} \frac{x}{yn} \in F_{u,n}$ olsun.

i) $r \equiv 0\ (mod\ 3)$ ise $x \equiv -ur\ (mod\ n), yn \equiv -usn\ (mod\ 3n)$ ve $ry - sx = -1$ dir. $m|n$ olduğundan $x \equiv -ur\ (mod\ m), ym \equiv -usm\ (mod\ 3m)$ ve $ry - sx = -1$ dir. Bu taktirde $\frac{r}{sm} \xrightarrow{<} \frac{x}{ym} \in F_{u,m}$ dir.

ii) $s \equiv 0\ (mod\ 3)$ ise $x \equiv -ur\ (mod\ 3n), yn \equiv -usn\ (mod\ n)$ ve $ry - sx = -1$ dir. $m|n$ olduğundan $x \equiv -ur\ (mod\ 3m), ym \equiv -usm\ (mod\ m)$ ve $ry - sx = -1$ dir. Bu taktirde $\frac{r}{sm} \xrightarrow{<} \frac{x}{ym} \in F_{u,m}$ dir.

$\boldsymbol{iii})r,s \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ ise $x \equiv -ur\ (mod\ n), x \not\equiv -ur\ (mod\ 3n),\ yn \equiv -usn(mod\ n),$ $yn \not\equiv -us\ n(mod\ 3n)$ ve $ry - sx = -1$ dir. $m|n$ olduğundan $x \equiv -ur\ (mod\ m), x \not\equiv -ur\ (mod\ 3m),\ ym \equiv -usm(mod\ m), ym \not\equiv -us\ m(mod\ 3m)$ ve $ry - sx = -1$ dir. Bu taktirde $\frac{r}{sm} \overset{<}{\rightarrow} \frac{x}{ym} \in F_{u,m}$ dir.

Ayrıca $h(v_1) = h(v_2) \Rightarrow \frac{n}{m}v_1 = \frac{n}{m}v_2 \Rightarrow v_1 = v_2$ olduğundan h dönüşümü $1 - 1$ dir.

Lemma 2.7. $m|n$ olmak üzere $F_{u,n} \overset{h}{\rightarrow} F_{u,m}$ dönüşümü bir izomorfizmadır ancak ve ancak $\forall p|n$ asalı için $p|m$ ise. $\quad v \longrightarrow \frac{n}{m}v$

İspat: h bir izomorfizma olsun. Aksini farzedelim. Yani $\exists p_0|n$ asal öyle ki $p_0 \nmid m$ olsun. Örtenlikten $\frac{p_0}{m} \in F_{u,m}$ için $\frac{nv}{m} = \frac{p_0}{m}$ olacak şekilde $v \in F_{u,n}$ vardır. Buradan $v = \frac{p_0}{n} = \frac{1}{\frac{n}{p_0}}, p_0 > 1$ olup $\frac{1}{\frac{n}{p_0}} \notin F_{u,n}$ dir. Böylece $p_0|m$ bulunur.

Tersine, bir önceki lemmadan h bir homomorfizmadır. Şimdi h nın örtenliğini gösterelim. $\frac{x}{ym} \in F_{u,m}$ keyfi olsun. Bu taktirde $\frac{nv}{m} = \frac{x}{ym}$ olan $v \in F_{u,n}$ var mı? Evet. $v = \frac{x}{yn} \in F_{u,n}$ dir. Çünkü $(x,m) = 1$ ise $(x,n) = 1$ dir. Gerçekten: $(x,n) = a > 1$ olsun. $\exists p$ asalı için $p|a$ dır. Buradan $p|x$ ve $p|n$ dir. $p|n$ için $p|m$ olduğundan $p|(x,m)$ çelişkisi elde edilir.

Teorem 2.5. $F_{u,n}$ yönlenmiş üçgen içermez.

İspat: Varsayalım ki $F_{u,n}$ yönlenmiş bir üçgen içersin. $\Gamma_0^3(n)$ $F_{u,n}$ nin köşelerini transitif olarak permüte ettiğinden bu üçgeni $\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{u}{n} \overset{<}{\rightarrow} \frac{r}{n} \longrightarrow \frac{1}{0}$ olarak alabiliriz.

$\boldsymbol{i})$ $u \equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. Bu taktirde $n \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ tür. $\frac{u}{n} \overset{<}{\rightarrow} \frac{r}{n}$ olduğundan $r \equiv -u^2\ (mod\ n),\ n \equiv -un\ (mod\ 3n)$ ve $u - r = -1$ dir. $n + un \equiv 0\ (mod\ 3n) \Rightarrow n \equiv 0(mod 3n) \Rightarrow 3n|n$ çelişkisi elde edilir.

$\boldsymbol{ii})$ $n \equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. $\frac{u}{n} \overset{<}{\rightarrow} \frac{r}{n}$ olduğundan $r \equiv -u^2\ (mod\ 3n),$ ve $r = u + 1$ dir. $\Rightarrow u^2 + u + 1 \equiv 0\ (mod\ 3n)$ dir. Ayrıca $n \equiv 0\ (mod\ 3)$ olduğundan $u^2 + u + 1 \equiv 0\ (mod\ 9)$ dur. Fakat böyle bir $u \in \mathbb{Z}$ olmadığından bu bir çelişkidir.

iii) $u, n \not\equiv 0 \ (mod \ 3)$ olsun. Bu taktirde $(u,n) = (u,3) = (n,3) = 1$ dir. $\frac{u}{n} \overset{<}{\rightarrow} \frac{r}{n}$ olduğundan $r \equiv -u^2 \ (mod \ n), r \not\equiv -u^2 (mod \ 3n), n \equiv -un \ (mod \ n), n \not\equiv -un$ $(mod \ 3n)$ ve $u - r = 1$ dir. $n(u+1) \equiv 0(mod \ n)$ ve $n(u+1) \not\equiv 0 \ (mod \ 3n) \Longrightarrow$ $n(u+1) \not\equiv 0(mod \ 3)$ tür. Buradan $u + 1 \not\equiv 0 \ (mod \ 3) \Longrightarrow u \not\equiv -1 \ (mod \ 3)$ tür. Bu taktirde $u \equiv 0 \ (mod \ 3)$ veya $u \equiv 1 \ (mod \ 3)$ tür. $(u, 3) = 1$ olduğundan $u \equiv 0 \ (mod \ 3)$ olamaz. Böylece $u \equiv 1 \ (mod \ 3)$ olsun. Ayrıca $u^2 + u + 1 \equiv 0 \ (mod \ n)$ ve $u^2 + u + 1 \not\equiv$ $0 \ (mod \ 3n)$ olduğundan $u^2 + u + 1 \not\equiv 0 \ (mod \ 3)$ tür. Buradan $u \not\equiv 1 \ (mod \ 3)$ olup $u \equiv 1 \ (mod \ 3)$ ile çelişir.

Teorem 2.6. Γ^3 de 3. mertebeden eliptik eleman yoktur.

İspat: Varsayalım $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^3$ 3. mertebeden bir eliptik elemandır. Bu taktirde $a + d = 1$ veya $a + d = -1$ dir.

i) $a + d = 1$ olsun. $ad - bc = 1$ olduğundan $a(1-a) - bc = 1$ dir, ve dolayısı ile $b = \frac{-a^2+a-1}{c}$ dir. Böylece $T = \begin{pmatrix} a & \frac{-a^2+a-1}{c} \\ c & 1-a \end{pmatrix} \in \Gamma^3$ tür. Buradan $a\left(\frac{-a^2+a-1}{c}\right) +$ $c(1-a) \equiv 0 \ (mod \ 3)$. Ve dolayısı ile $-a^3 + a^2 - a + c^2 - ac^2 \equiv 0 \ (mod \ 3)$. Yani,

$$a^2(1-a) + c^2(1-a) - a \equiv 0 \ (mod \ 3) \qquad (***)$$

elde edilir. $T \in \Gamma^3$ olduğundan $a \equiv 0(mod \ 3)$ ise $1 - a \equiv 0 \ (mod \ 3)$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $a \not\equiv 0(mod \ 3)$ ve $1 - a \not\equiv 0 \ (mod \ 3)$ den $a \equiv 2(mod \ 3)$ elde edilir. Eğer $c \equiv 0(mod \ 3)$ ise $\frac{-a^2+a-1}{c} \equiv 0(mod \ 3)$ tür. Buradan $-a^2 + a - 1 \equiv 0(mod \ 9)$ çelişkisi elde edilir. Böylece $c \not\equiv 0(mod \ 3)$ olup $c \equiv 1(mod \ 3)$ veya $c \equiv 2(mod \ 3)$ tür.

Bu değerler (***) da yerine yazılırsa

a) $a \equiv 2(mod \ 3), c \equiv 1(mod \ 3)$ ise $5(-1) - 2 \equiv 0 \ (mod \ 3) \Longrightarrow -7 \equiv 0 \ (mod \ 3)$

çelişkisi bulunur.

b) $a \equiv 2(mod \ 3), c \equiv 2(mod \ 3)$ ise $8(-1) - 2 \equiv 0 \ (mod \ 3) \Longrightarrow -10 \equiv 0 \ (mod \ 3)$

çelişkisi bulunur.

ii) i) ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.7. $F_{u,n}$ iki gen içerir $\Leftrightarrow$ $n \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olmak üzere $u^2 \equiv -1\ (mod\ n)$ dir.

İspat: $F_{u,n}$ nin bir iki gen içerdiğini farzedelim. $\Gamma_0^3(n)$ $F_{u,n}$ nin köşelerini transitif olarak permüte ettiğinden bu iki geni $\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{u}{n} \longrightarrow \frac{1}{0}$ olarak alabiliriz.

i) $u \equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. Bu taktirde $n \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ tür. $\frac{u}{n} \overset{<}{\rightarrow} \frac{1}{0}$ olduğundan $1 \equiv -u^2 (mod\ n), 0 \equiv -un\ (mod\ 3n)$ dir. Buradan $u^2 \equiv -1\ (mod\ n)$ dir.

ii) $n \equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. $\frac{u}{n} \overset{<}{\rightarrow} \frac{1}{0}$ olduğundan $1 \equiv -u^2 (mod\ 3n)$ dir. $n \equiv 0\ (mod\ 3)$ olduğundan $u^2 \equiv -1\ (mod\ 9)$ çelişkisi elde edilir.

iii) $u, n \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olsun. $\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{u}{n} \Longrightarrow u \equiv u\ (mod\ 3n), n \equiv 0\ (mod\ n)$ olup sağlanır.

$\frac{u}{n} \longrightarrow \frac{1}{0}$ olduğundan $1 \equiv -u^2 (mod\ n), 1 \not\equiv -u^2 (mod\ 3n), 0 \equiv -un\ (mod\ n), 0 \not\equiv -un\ (mod\ 3n)$ olup sağlanır.

Dolayısıyla $\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{u}{n} \longrightarrow \frac{1}{0} \Longrightarrow n \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ ve $u^2 \equiv -1\ (mod\ n)$ dir.

Tersine, $n \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ ve $u^2 \equiv -1\ (mod\ n)$ olsun. Bu taktirde $\frac{u}{n} \overset{<}{\rightarrow} \frac{1}{0}$ dır. Böylece $\frac{1}{0} \longrightarrow \frac{u}{n} \longrightarrow \frac{1}{0}$ $F_{u,n}$ de bir iki gendir.

Teorem 2.8. $F_{u,n}$ iki gen içerir $\Leftrightarrow$ $\Gamma_0^3(n)$ 2. mertebeden bir eliptik eleman içerir.

İspat: $F_{u,n}$ bir iki gen içeriyor ise $n \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olmak üzere $u^2 \equiv -1\ (mod\ n)$ dir. Buradan $\varphi = \begin{pmatrix} -u & \frac{u^2+1}{n} \\ -n & u \end{pmatrix} \in \Gamma_0^3(n)$ olup 2. mertebeden bir eliptik elemandır. Gerçekten $\varphi \in \Gamma_0^3(n)$ dir. Çünkü $\frac{u^2+1}{n} \in \mathbb{Z}$ olup $3 | \frac{u^2+1}{n}$ ise $3 | u^2+1$ olup $u^2+1 \equiv 0\ (mod\ 3)$ çelişkisi elde edilir. Buradan $n \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ ve $\frac{u^2+1}{n} \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ tür.

Tersine, varsayalım ki $\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^3(n)$ 2. mertebeden bir eliptik elemandır. Bu taktirde $d = -a$ ve $ad - bcn = 1$ olduğundan $a^2 \equiv -1 (mod\ n)$ dir. $(a, n) = 1$ olduğundan $u \equiv a\ (mod\ n)$ olacak şekilde $u \in U_n$ vardır. Buradan $u^2 \equiv -1\ (mod\ n)$ dir.

$n \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ tür. Çünkü $3|n$ ise $u^2 \equiv -1\ (mod\ n)$ olduğundan $u^2 \equiv -1\ (mod\ 3)$ çelişkisi elde edilir.

Dolayısıyla $n \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ ve $u^2 \equiv -1\ (mod\ n)$ olduğundan $F_{u,n}$ iki gen içerir.

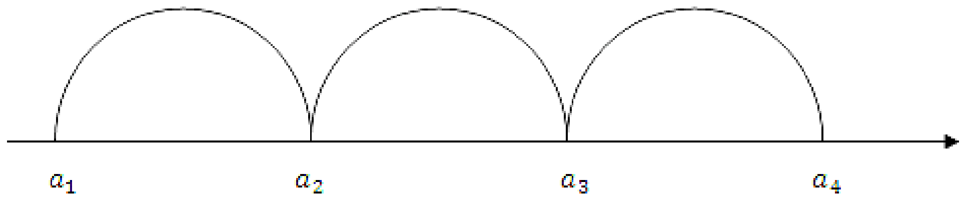
Teorem 2.9. $G_{u,n}$ ormandır.

İspat: Teorem 2.5. ve [2] den açıktır.

2.1.4. Γ^3 Grubunun Alt Yörüngesel Graflarında Bağlantılılık

Tanım 2.1. $G_{u,N}$ nin bir K alt grafına bağlantılıdır denir : ⇔ K daki herhangi iki köşe K da bir geodezik yolla birleştirilebilir.

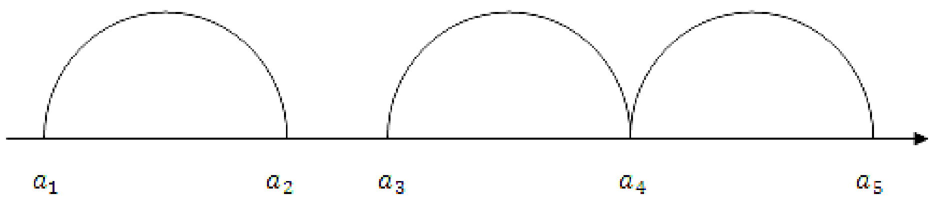
Örnek 2.1.



Şekil 6. Bağlantılı K grafı

$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ elemanlarını köşeler kabul eden K grafı bağlantılıdır.

Örnek 2.2.



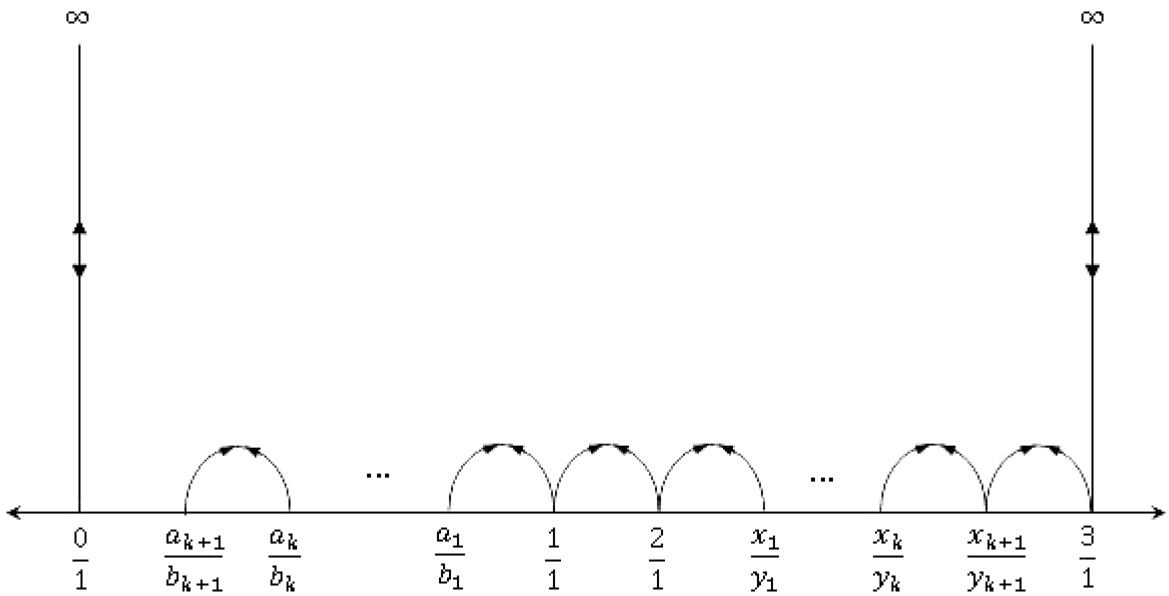
Şekil 7. Bağlantısız K grafı

$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ kümesinin elemanlarını köşe kabul eden K grafı bağlantılı değildir.

Teorem 2.10. $F_{0,1}$ grafı bağlantısızdır.

İspat: $\frac{1}{0} \leftrightarrows \frac{a}{1} \Leftrightarrow a \equiv 0\ (mod\ 3)$ olduğundan $[0,3]$ aralığında ∞ ile komşu köşeler sadece 0 ve 3 tür. Ayrıca $\frac{1}{1} \leftrightarrows \frac{2}{1} \in F_{0,1}$ dir. İlk önce $\frac{1}{1} \longrightarrow \frac{a_1}{b_1} \longrightarrow \frac{a_2}{b_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{a_k}{b_k} \longrightarrow \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \longrightarrow \frac{0}{1}$ şeklindeki bir yol ile ∞'a ulaştığımızı düşünelim. ($F_{0,1}$ kendisiyle eşleşmiş olduğundan bazı okların ters yönlü olması önemli değildir.) Burada $\frac{1}{1} \leftrightarrows \frac{a_1}{b_1} \Leftrightarrow a_1, b_1 \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ tür. Bu taktirde $\frac{a_1}{b_1} \leftrightarrows \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_2, b_2 \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ olup bu şekilde devam edilirse $\frac{a_k}{b_k} \leftrightarrows \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \Leftrightarrow a_{k+1}, b_{k+1} \not\equiv 0\ (mod\ 3)$ tür. Bu ise $\frac{0}{1} \leftrightarrows \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ ile çelişir. Dolayısıyla bu şekilde bir yol yoktur.

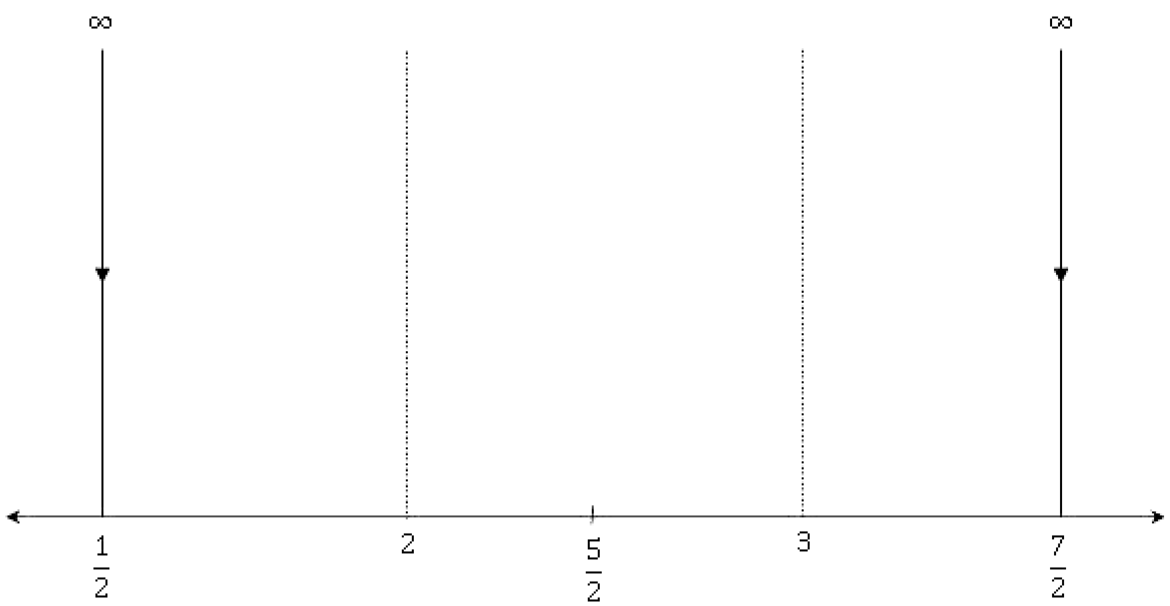
Benzer şekilde $\frac{2}{1} \leftrightarrows \frac{x_1}{y_1} \leftrightarrows \frac{x_2}{y_2} \leftrightarrows \cdots \frac{x_k}{y_k} \leftrightarrows \frac{x_{k+1}}{y_{k+1}} \leftrightarrows \frac{3}{1}$ olacak şekilde de bir yol yoktur. Böylece $F_{0,1}$ bağlantılı değildir. ■



Şekil 8. $F_{0,1}$ Alt yörüngesel grafı

Teorem 2.11. $F_{1,2}$, $F_{3,2}$ ve $F_{5,2}$ grafları bağlantısızdır.

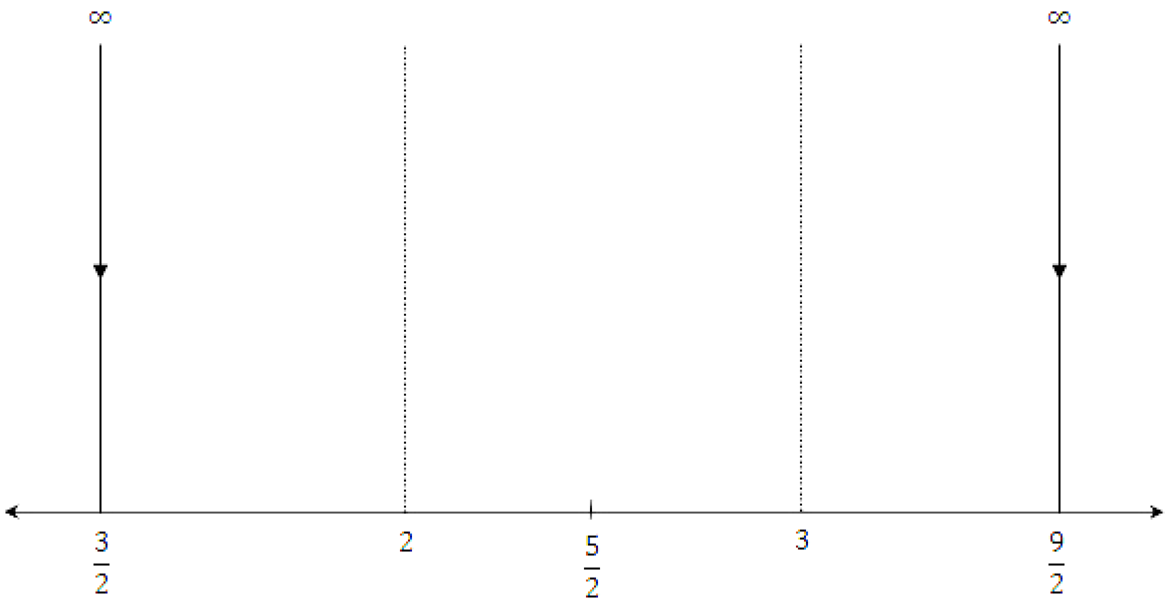
İspat: Burada sadece $F_{1,2}$ ve $F_{3,2}$ graflarının karakterlerini belirlemek yeterlidir. Çünkü Lemma 2.5'e göre $F_{1,2}$ ile $F_{-1,2}$ izomorf olduklarından aynıdır. Ayrıca Lemma 2.4 den $F_{-1,2} = F_{5,2}$ dir. Böylece $F_{1,2}$ grafının cinsi ile $F_{5,2}$ grafının cinsi aynıdır. Açıkça aşağıdaki durum söz konusudur:



Şekil 9. $F_{1,2}$ Alt yörüngesel grafı

Şayet $F_{1,2}$ bağlantılı ise her bir $v = \frac{a}{2b}$ köşesi ∞ ile birleştirilebilir. Şimdi gösterelim ki $2 < v < 3$ olan bir v köşesi ∞ ile birleştirilemez. Burada $[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$ aralığında ∞ ile komşu köşelerin sadece $\frac{1}{2}$ ve $\frac{7}{2}$ olduğuna dikkat edelim. Varsayalım ki $\frac{1}{2} \leq \frac{a}{2b} < 2 < \frac{c}{2d} < 3$ olsun. Buradan $\frac{a}{b} < 4 < \frac{c}{d}$ olup $ad - bc = -1$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Benzer şekilde $2 < \frac{x}{2y} < 3 < \frac{m}{2n} \leq \frac{7}{2}$ olsa $\frac{x}{y} < 6 < \frac{m}{n}$ ve $xn - my = -1$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Bu çelişki $2 \leq t \leq 3$ şeridinde hiçbir köşenin ∞ ile birleştirilemeyeceğini gösterir. Yani $F_{1,2}$ bağlantılı değildir. Benzer durum $F_{5,2}$ için de doğrudur.

Şimdi $F_{3,2}$ nin durumunu göz önüne alalım. Teorem 2.2' den aşağıdaki şekil söz konusudur:

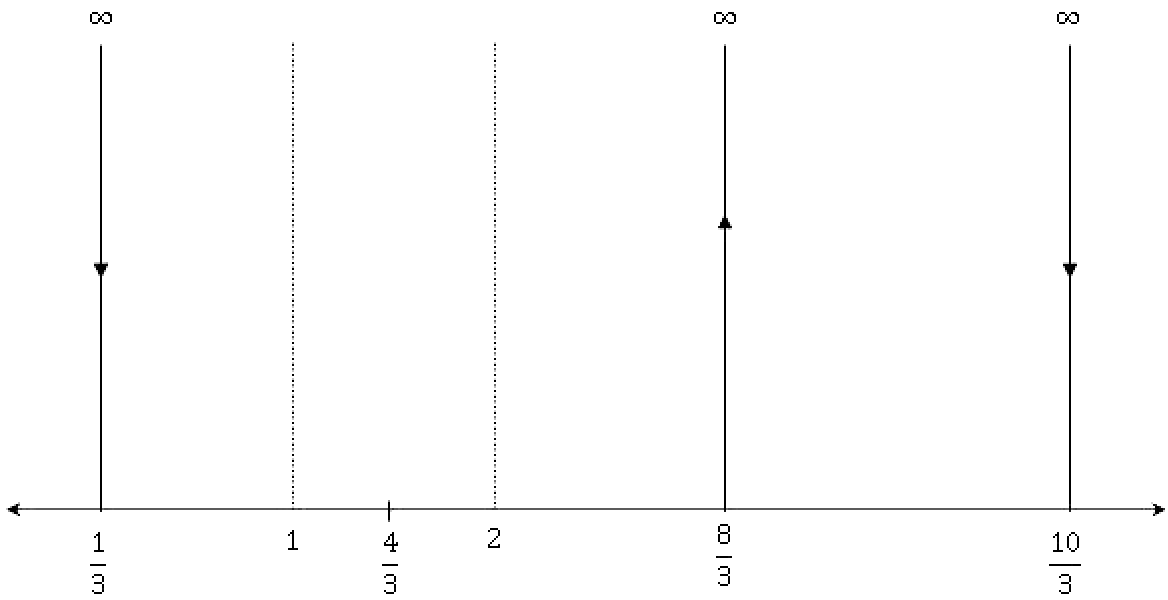


Şekil 10. $F_{3,2}$ Alt yörüngesel grafı

$F_{1,2}$ alt grafında yapıldığı gibi $(2,3)$ aralığında $F_{3,2}$ alt grafının hiçbir köşesinin bu aralığın dışında $F_{3,2}$ nin başka bir köşesine gitmediği görülür. Sonuç olarak $F_{3,2}$ bağlantılı değildir. ■

Teorem 2.12. $F_{1,3}, F_{2,3}, F_{4,3}, F_{5,3}, F_{7,3}$ ve $F_{8,3}$ grafları bağlantısızdır.

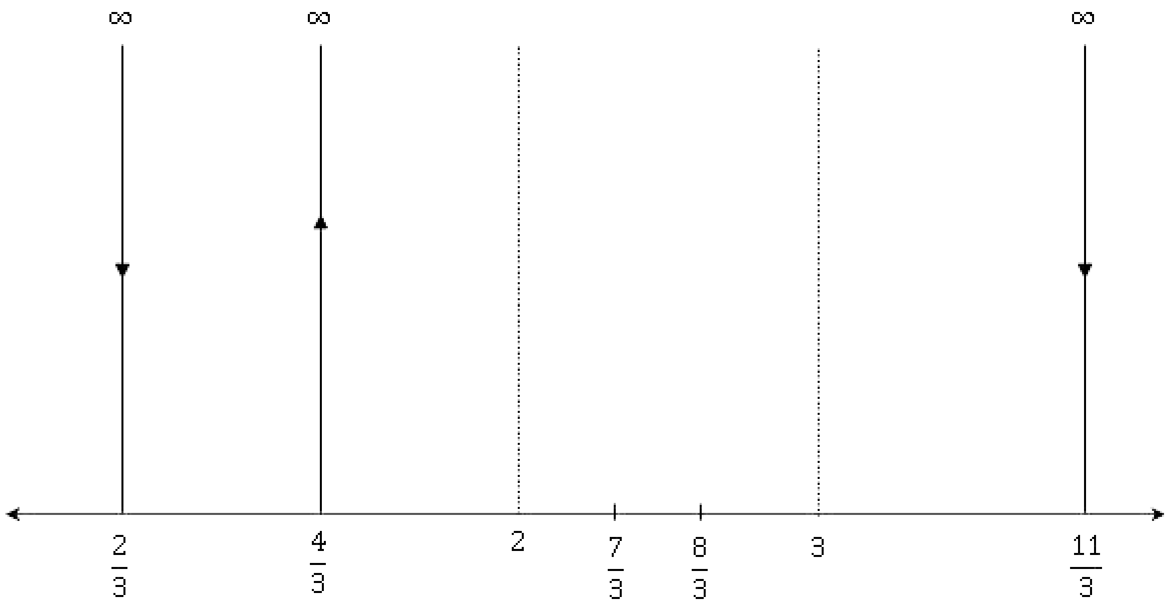
İspat: $F_{1,3}$ alt grafı $F_{-1,3} = F_{8,3}$ ile $F_{2,3}$ alt grafı $F_{-2,3} = F_{7,3}$ ile ve de $F_{4,3}$ alt grafı $F_{-4,3} = F_{5,3}$ ile izomorf olduklarından sadece $F_{1,3}, F_{2,3}$, $F_{4,3}$ alt graflarının durumlarını incelemek yeterlidir. Teorem 2.2' den aşağıdaki şekli kolaylıkla çizebiliriz:



Şekil 11. $F_{1,3}$ Alt yörüngesel grafı

Şayet $F_{1,3}$ bağlantılı ise her bir $v = \frac{a}{3b}$ köşesi ∞ ile birleştirilebilir. Şimdi gösterelim ki $1 < v < 2$ olan bir v köşesi ∞ ile birleştirilemez. Burada $[\frac{1}{3}, \frac{10}{3}]$ aralığında ∞ ile komşu köşelerin sadece $\frac{1}{3}, \frac{8}{3}$ ve $\frac{10}{3}$ olduğuna dikkat edelim. Varsayalım ki $\frac{1}{3} \leq \frac{a}{3b} < 1 < \frac{c}{3d} < 2$ olsun. Buradan $\frac{a}{b} < 3 < \frac{c}{d}$ olup $ad - bc = -1$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Benzer şekilde $1 < \frac{x}{3y} < 2 < \frac{m}{3n} \leq \frac{8}{3}$ olsa $\frac{x}{y} < 6 < \frac{m}{n}$ ve $xn - my = -1$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Bu çelişki $1 \leq t \leq 2$ şeridinde hiçbir köşenin ∞ ile birleştirilemeyeceğini gösterir. Yani $F_{1,3}$ bağlantılı değildir. Benzer durum $F_{8,3}$ için de doğrudur.

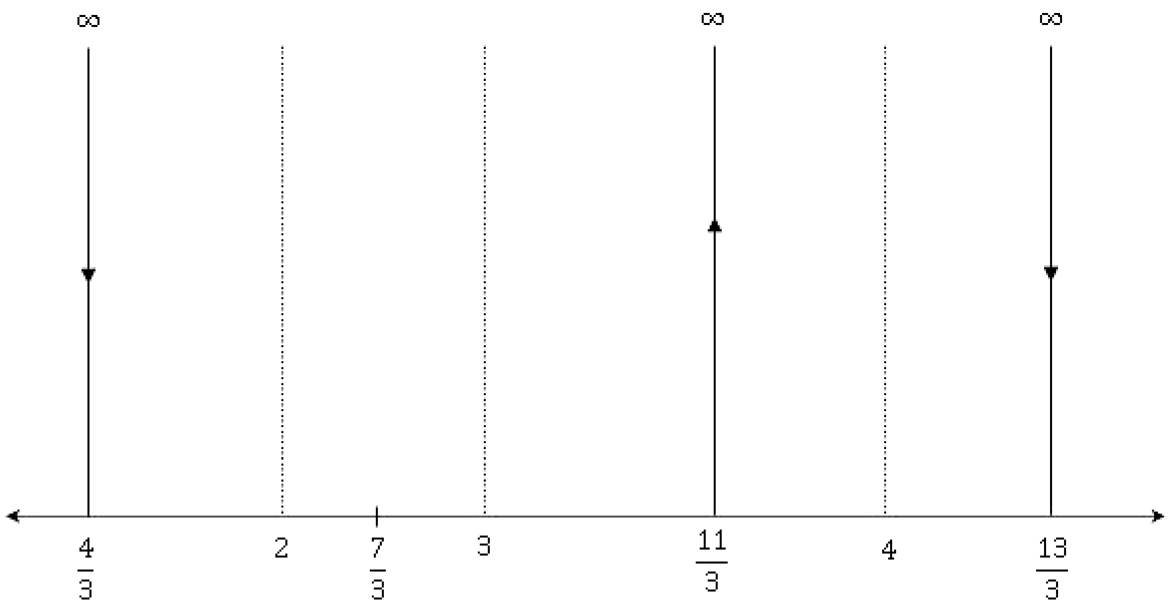
Şimdi $F_{2,3}$ nin durumunu göz önüne alalım. Teorem 2.2' den aşağıdaki şekil söz konusudur:



Şekil 12. $F_{2,3}$ Alt yörüngesel grafı

$F_{1,3}$ alt grafında yapıldığı gibi $(2,3)$ aralığında $F_{2,3}$ alt grafının hiçbir köşesinin bu aralığın dışında $F_{2,3}$ ün başka bir köşesine gitmediği görülür. Sonuç olarak $F_{2,3}$ bağlantılı değildir. Benzer durum $F_{7,3}$ için de doğrudur.

Son olarak $F_{4,3}$ ün durumunu göz önüne alalım. Teorem 2.2 den aşağıdaki şekil söz konusudur:

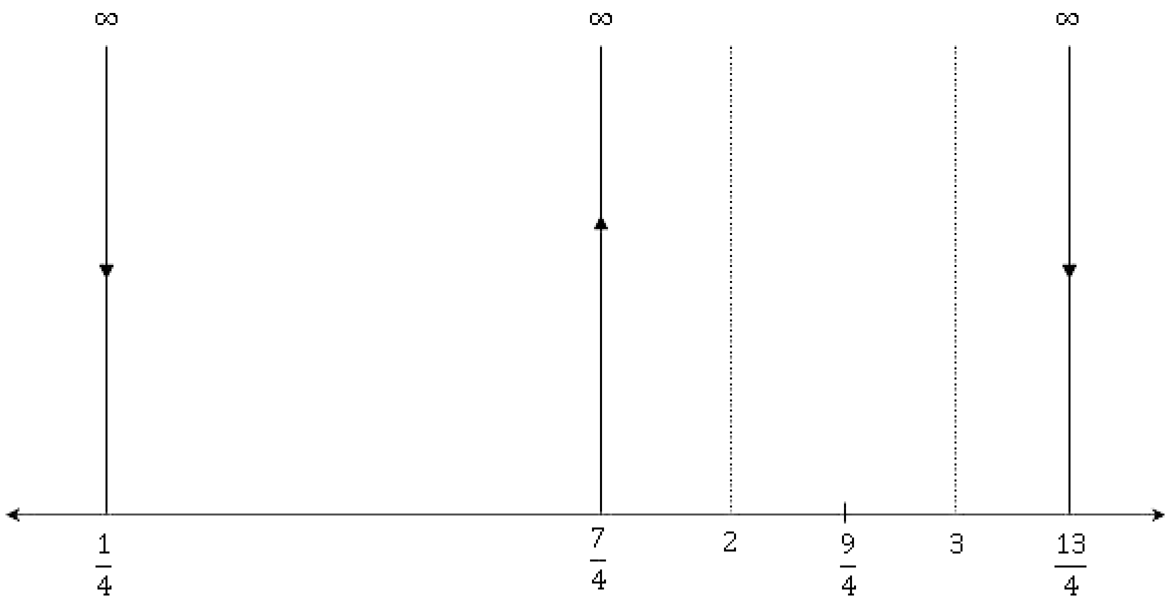


Şekil 13. $F_{4,3}$ Alt yörüngesel grafı

$F_{1,3}$ alt grafında yapıldığı gibi $(2,3)$ aralığında $F_{4,3}$ alt grafının hiçbir köşesinin bu aralığın dışında $F_{4,3}$ ün başka bir köşesine gitmediği görülür. Sonuç olarak $F_{4,3}$ bağlantılı değildir. Benzer durum $F_{5,3}$ için de doğrudur. ■

Teorem 2.13. $F_{1,4}, F_{3,4}, F_{5,4}, F_{7,4}, F_{9,4}$ ve $F_{11,4}$ grafları bağlantısızdır.

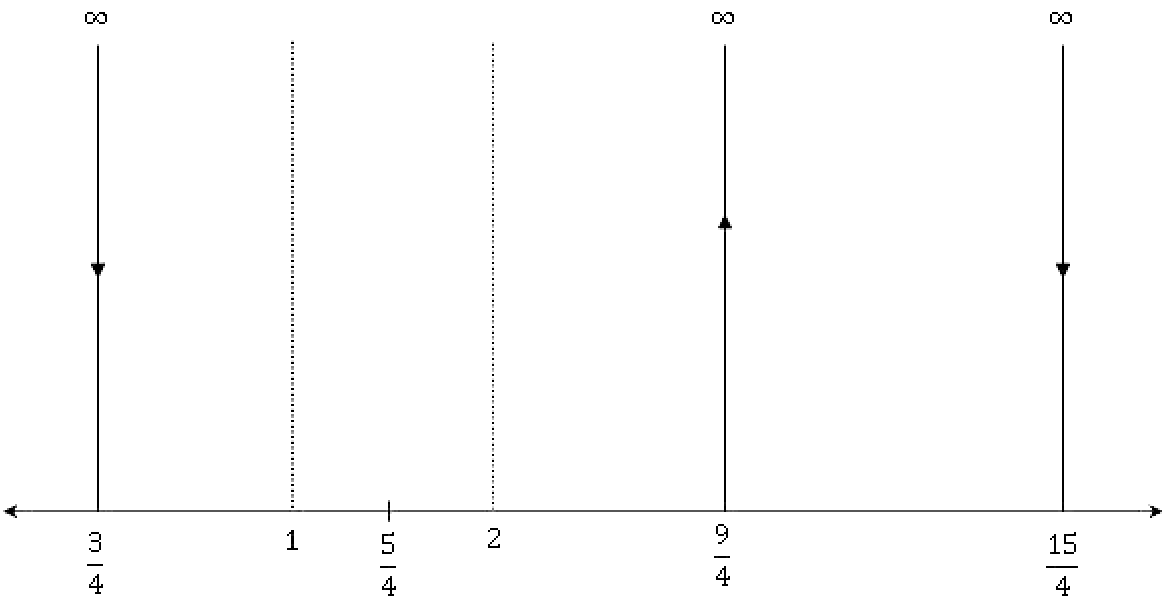
İspat: $F_{1,4}$ alt grafı $F_{-1,4} = F_{11,4}$ ile $F_{3,4}$ alt grafı $F_{-3,4} = F_{9,4}$ ile ve de $F_{5,4}$ alt grafı $F_{-5,4} = F_{7,4}$ ile izomorf olduklarından sadece $F_{1,4}, F_{3,4}, F_{5,4}$ alt graflarının durumlarını incelemek yeterlidir. Teorem 2.2' den aşağıdaki şekli kolaylıkla çizebiliriz:



Şekil 14. $F_{1,4}$ Alt yörüngesel grafı

Şayet $F_{1,4}$ bağlantılı ise her bir $v = \frac{a}{4b}$ köşesi ∞ ile birleştirilebilir. Şimdi gösterelim ki $2 < v < 3$ olan bir v köşesi ∞ ile birleştirilemez. Burada $[\frac{1}{4}, \frac{13}{4}]$ aralığında ∞ ile komşu köşelerin sadece $\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$ ve $\frac{13}{4}$ olduğuna dikkat edelim. Varsayalım ki $\frac{7}{4} \leq \frac{a}{4b} < 2 < \frac{c}{4d} < 3$ olsun. Buradan $\frac{a}{b} < 8 < \frac{c}{d}$ olup $ad - bc = -1$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Benzer şekilde $2 < \frac{x}{4y} < 3 < \frac{m}{4n} \leq \frac{13}{4}$ olsa $\frac{x}{y} < 12 < \frac{m}{n}$ ve $xn - my = -1$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Bu çelişki $2 \leq t \leq 3$ şeridinde hiçbir köşenin ∞ ile birleştirilemeyeceğini gösterir. Yani $F_{1,4}$ bağlantılı değildir. Benzer durum $F_{11,4}$ için de doğrudur.

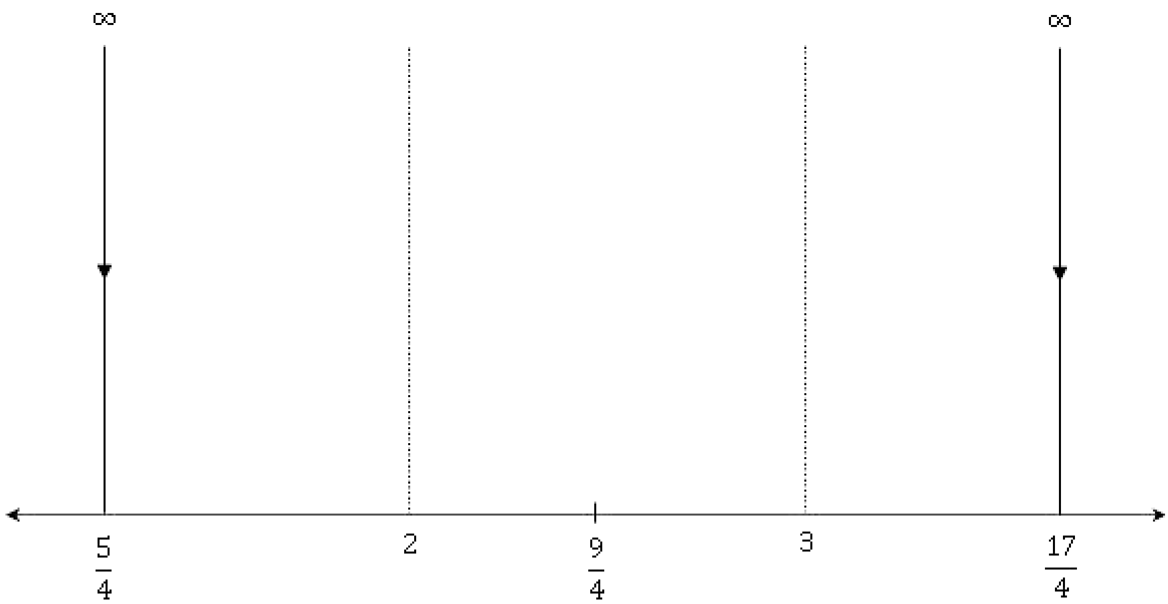
Şimdi $F_{3,4}$ nin durumunu göz önüne alalım. Teorem 2.2 den aşağıdaki şekil söz konusudur:



Şekil 15. $F_{3,4}$ Alt yörüngesel grafı

$F_{1,4}$ alt grafında yapıldığı gibi $(1,2)$ aralığında $F_{3,4}$ alt grafının hiçbir köşesinin bu aralığın dışında $F_{3,4}$ ün başka bir köşesine gitmediği görülür. Sonuç olarak $F_{3,4}$ bağlantılı değildir. Benzer durum $F_{9,4}$ için de doğrudur.

Son olarak $F_{5,4}$ ün durumunu göz önüne alalım. Teorem 2.2' den aşağıdaki şekil söz konusudur:



Şekil 16. $F_{5,4}$ Alt yörüngesel grafı

$F_{1,4}$ alt grafında yapıldığı gibi $(2,3)$ aralığında $F_{5,4}$ alt grafının hiçbir köşesinin bu aralığın dışında $F_{5,4}$ ün başka bir köşesine gitmediği görülür. Sonuç olarak $F_{5,4}$ bağlantılı değildir. Benzer durum $F_{7,4}$ için de doğrudur. ■

Burada, dikkat edilirse, $F_{1,1}$ in bağlantılı olup olmadığı problemi hala açıktır. Ancak hesaplamalar bizi aşağıdaki konjektüre getirmektedir.

Konjektür: $F_{1,1}$ alt grafı bağlantılıdır.

Teorem 2.14. $n \geq 5$ için $F_{u,n}$ bağlantısızdır.

İspat: $[10]$ dan açıktır. ■

2.2. G_5 Hecke Grubunun $\mathbb{Q}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

2.2.1. $PSL_2(\mathbb{Z}[\lambda])$' nın $\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda] = \mathbb{Q}[\lambda] \cup \{\infty\}$ Üzerindeki Hareketi

$\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda]$ nın her elemanı $x, y \in \mathbb{Z}[\lambda]$ ve $(x, y) = 1$ olmak üzere bir $\frac{x}{y}$ indirgenmiş kesri olarak gösterilebilir. Eğer $k \in \mathbb{Q}[\lambda]$ ise $m, n \in \mathbb{Z}[\lambda], n > 0$ olmak üzere $k = m/n$ dir. $x/y = (-x)/(-y)$ olduğundan bu gösterim tek değildir. Şimdi $PSL_2(\mathbb{Z}[\lambda])$' nın $\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda]$ üzerindeki hareketi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \longrightarrow \frac{ax+by}{cx+dy}$$

dir. Burada

$$c(ax + by) - a(cx + dy) = -y \text{ ve } d(ax + by) - b(cx + dy) = x \qquad (13)$$

olup $(ax + by, cx + dy) = 1$ dir. Gerçekten:

Varsayalım ki $(ax + by, cx + dy) = l, l \in \mathbb{Z}[\lambda]$ olsun. Bu taktirde (13)' den $l|x$ ve $l|y$ olup $l|(x, y) = 1$ dir. Böylece $\frac{ax+by}{cx+dy}$ bir indirgenmiş kesirdir.

$PSL_2(\mathbb{Z}[\lambda])$' nin $\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda]$ üzerindeki hareketi iyi tanımlıdır. Yani $T \in PSL_2(\mathbb{Z}[\lambda])$ olmak üzere $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ olmak üzere $T\left(\frac{x}{y}\right) = T\left(\frac{-x}{-y}\right)$ dir. Gerçekten:

$$T\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{-ax-by}{-cx-dy} = T\left(\frac{-x}{-y}\right)$$

dir.

Lemma 2.8. $PSL_2(\mathbb{Z}[\lambda])$' nın $\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda]$ üzerindeki hareketi transitiftir.

İspat: $\infty = \frac{1}{0}$'ı $\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda]$ ya resmeden bir $T \in PSL_2(\mathbb{Z}[\lambda])$ bulalım. Eğer $\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}[\lambda]$ ise bu taktirde $(x, y) = 1$ olduğundan $ux - vy = 1$ olmak üzere $u, v \in \mathbb{Z}[\lambda]$ vardır. Bu taktirde $PSL_2(\mathbb{Z}[\lambda])$ nın $\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ elemanı ∞'u $\frac{x}{y}$ ye götürür. ■

Bundan sonra G ile $PSL_2(\mathbb{Z}[\lambda])$' yı göstereceğiz.

$" \approx "$ ile $G_0(\beta)$ nın $\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda]$ üzerinde indirgenmiş $G - invaryant$ denklik bağıntısını gösterelim. Eğer $v = \frac{r}{s}$ ve $w = \frac{x}{y}$ $\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda]$ nın elemanları ise bu taktirde G' nin transitifliğinden $v = g(\infty)$ ve $w = g'(\infty)$ olacak şekilde $g, g' \in G$ vardır. Bu taktirde Teorem 1.5' den

$$v \approx w \Leftrightarrow g^{-1}g' \in G_0(\beta)$$

dır. Yani $g = \begin{pmatrix} r & k \\ s & l \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} x & m \\ y & t \end{pmatrix}$ için

$$\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} lx - ky & lm - kt \\ -sx + ry & -sm + rt \end{pmatrix} \in G_0(\beta) \Leftrightarrow ry - sx \in \beta$$

dir. $\mathbb{Z}[\lambda]$ bir esas ideal bölgesi olduğundan $\beta = \langle n \rangle$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}[\lambda]$ vardır. Buradan

$$\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 (mod\ n)$$

elde edilir.

Açıkça ∞ bloğunu $[\infty]$ ile gösterirsek

$$[\infty] := \left\{ \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}[\lambda] \middle| y \equiv 0\ (mod\ n) \right\}$$

dir.

Teorem 2.15. $G_{u,n}$ de $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ kenarı mevcuttur $\Leftrightarrow \varepsilon_2 x \equiv \varepsilon_1 ur \ (modn),\ \varepsilon_2\ y \equiv \varepsilon_1 us\ (modn)$ ve $\varepsilon_1\varepsilon_2(ry - sx) = n$ olacak şekilde $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[\lambda])$.

İspat: "$\Rightarrow$"$G_{u,n}$ de bir $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ kenarı mevcut olsun. Dolayısıyla $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \in O\left(\infty, \frac{u}{n}\right)$ dir. Bu taktirde $T(\infty) = \frac{r}{s}, T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{x}{y}$ olacak şekilde bir $T \in PSL_2(\mathbb{Z}[\lambda])$ vardır. Buradan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \mathrm{r} & \varepsilon_2 \mathrm{x} \\ \varepsilon_1 \mathrm{s} & \varepsilon_2 \mathrm{y} \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[\lambda])$ vardır. Buradan

$$\begin{pmatrix} a & au + bn \\ c & cu + dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \mathrm{r} & \varepsilon_2 \mathrm{x} \\ \varepsilon_1 \mathrm{s} & \varepsilon_2 \mathrm{y} \end{pmatrix}$$

olup $a = \varepsilon_1 \mathrm{r},\ \mathrm{c} = \varepsilon_1 \mathrm{s},\ \varepsilon_2 \mathrm{x} = au + bn, \varepsilon_2 \mathrm{y} = cu + dn, \varepsilon_1\varepsilon_2(ry - sx) = n$ dir. Böylece

$\varepsilon_2 x \equiv \varepsilon_1 ur\ (modn),\ \varepsilon_2\ y \equiv \varepsilon_1 us\ (modn)$ ve $\varepsilon_1\varepsilon_2(ry - sx) = n$ elde edilir.

"$\Leftarrow$"$\varepsilon_2 x \equiv \varepsilon_1 ur\ (modn),\ \varepsilon_2\ y \equiv \varepsilon_1 us\ (modn)$ ve $\varepsilon_1\varepsilon_2(ry - sx) = n$ olsun. Bu taktirde $\varepsilon_2 x \equiv \varepsilon_1 ur + bn,\ \varepsilon_2\ y \equiv \varepsilon_1 us + dn$ olacak şekilde $b, d \in \mathbb{Z}[\lambda]$ vardır. Buradan

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \mathrm{r} & b \\ \varepsilon_1 \mathrm{s} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \mathrm{r} & \varepsilon_2 \mathrm{x} \\ \varepsilon_1 \mathrm{s} & \varepsilon_2 \mathrm{y} \end{pmatrix}$$

olup $\varepsilon_1(\mathrm{rd} - \mathrm{bs}).\mathrm{n} = \mathrm{n}$ den $\varepsilon_1(\mathrm{rd} - \mathrm{bs}){=}1$ bulunur. Böylece $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \mathrm{r} & b \\ \varepsilon_1 \mathrm{s} & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z}[\lambda])$ olup $G_{u,n}$ de $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ dir.■

Teorem 2.16. $G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiştir $\Leftrightarrow u^2 \equiv -\varepsilon^2(modn)$ olacak şekilde $\exists \varepsilon \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[\lambda])$.

İspat: "$\Rightarrow$"$G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiş olsun. Bu taktirde $O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) = O\left(\frac{u}{n}, \infty\right)$ dur. Buradan $\exists T \in PSL_2(\mathbb{Z}[\lambda]): T(\infty) = \frac{u}{n}, T\left(\frac{u}{n}\right) = \infty$ dur. Bu taktirde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \mathrm{u} & 1 \\ \varepsilon_1 \mathrm{n} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & au + bn \\ c & cu + dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \mathrm{u} & 1 \\ \varepsilon_1 \mathrm{n} & 0 \end{pmatrix}$$

olup $a = \varepsilon_1 \mathrm{u},\ \mathrm{c} = \varepsilon_1 \mathrm{n},\ cu + dn = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 un + dn = 0 \Rightarrow d = -\varepsilon_1 u$ bulunur. Böylece

$$T=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 u & b\\ \varepsilon_1 n & -\varepsilon_1 u\end{pmatrix}\Rightarrow -\varepsilon_1^2u^2-b\varepsilon_1 n=1\Rightarrow u^2\equiv-\varepsilon^2(mod n)$$

dir.

"⇐" $u^2\equiv-\varepsilon^2(mod n)\Rightarrow -u^2+bn=\varepsilon^2\Rightarrow \frac{-u^2}{\varepsilon^2}+\frac{bn}{\varepsilon^2}=1$ dir. Buradan

$$T=\begin{pmatrix}-\frac{u}{\varepsilon} & \frac{b}{\varepsilon}\\ -\frac{n}{\varepsilon} & \frac{u}{\varepsilon}\end{pmatrix}\binom{u}{n}=\begin{pmatrix}\frac{-u^2+bn}{\varepsilon}\\ \frac{-un+nu}{\varepsilon}\end{pmatrix}=\binom{\varepsilon}{0}=\binom{1}{0}\Rightarrow T\binom{u}{n}=\binom{1}{0}$$

$$T=\begin{pmatrix}-\frac{u}{\varepsilon} & \frac{b}{\varepsilon}\\ -\frac{n}{\varepsilon} & \frac{u}{\epsilon}\end{pmatrix}\binom{1}{0}=\begin{pmatrix}-\frac{u}{\varepsilon}\\ -\frac{n}{\varepsilon}\end{pmatrix}=\binom{u}{n}\Rightarrow T\binom{1}{0}=\binom{u}{n}$$

dir. Böylece $O\left(\infty,\frac{u}{n}\right)=O\left(\frac{u}{n},\infty\right)$ olup $G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiştir. ■

$G_{u,n}$ bir alt yörüngesel graf olsun. $F_{u,n}$ ile köşeleri $[\infty]=[1/0]=\{x\,/\,y\in\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda]: y\equiv 0\ (mod\beta)\}$ bloğunu oluşturan $G_{u,n}$ nin bir alt grafını gösterelim.

Teorem 2.17. $F_{u,n}$ de $\frac{r}{s}\rightarrow\frac{x}{y}$ kenarı mevcuttur ⇔ $\varepsilon_2 x\equiv\varepsilon_1 ur\ (mod n)$ ve $\varepsilon_1\varepsilon_2(ry-sx)=n$ olacak şekilde $\exists\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\lambda])$.■

$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ de $\frac{1}{0}\rightarrow\frac{u}{n}\rightarrow\frac{r}{n}\rightarrow\frac{1}{0}$ bir üçgen olsun. Bu taktirde Teorem 2.17' den

i) $\frac{1}{0}\rightarrow\frac{u}{n}\Longrightarrow\varepsilon_6 u\equiv\varepsilon_5 u\ (mod n)$ ve $\varepsilon_5\varepsilon_6=1$
ii) $\frac{u}{n}\rightarrow\frac{r}{n}\Longrightarrow\varepsilon_2 r\equiv\varepsilon_1 u^2\ (mod n)$ ve $\varepsilon_1\varepsilon_2(u-r)=1$
iii) $\frac{r}{n}\rightarrow\frac{1}{0}\Longrightarrow\varepsilon_4\equiv\varepsilon_3 ur(mod n)$ ve $\varepsilon_3\varepsilon_4=-1$

dir. Burada $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6\in\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\lambda])$ dır.

Şimdi bu durumla ilgili çeşitli örnekler verelim.

Örnek 2.3. $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ de $\frac{1}{0}\rightarrow\frac{u+v\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}\rightarrow\frac{r+s\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}\rightarrow\frac{1}{0}$ olacak şekilde bir üçgen yoktur.

Çözüm: İlk önce $\frac{r+s\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \to \frac{1}{0}$ kenarını göz önüne alalım. $\varepsilon_3 = x + y\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ olsun. Bu taktirde $\varepsilon_3\varepsilon_4 = -1$ olduğundan $\varepsilon_4 = x + y\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ veya $-x - y\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ dir.

$\varepsilon_4 = x + y\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ olsun. Böylece $\varepsilon_4 \equiv \varepsilon_3 ur(mod\ \sqrt{5})$ den

$$x + y\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \equiv \left[x + y\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]\left[u + v\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]\left[r + s\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] mod\ \sqrt{5}$$

$$8x + 4y - 4y\sqrt{5} \equiv \left[2x + y + y\sqrt{5}\right]\left[2u + v + v\sqrt{5}\right]\left[2r + s + s\sqrt{5}\right] mod\ \sqrt{5}$$

$$4(2x + y) \equiv (2x + y)(2u + v)(2r + s)\ mod\ \sqrt{5} \tag{14}$$

bulunur. Şimdi $\left(2x + y, \sqrt{5}\right) = 1$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $\left(2x + y, \sqrt{5}\right) = c$ olsun. Bu taktirde $c|2x + y, c|\sqrt{5}$ dir. $\varepsilon_3 = x + y\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow 2\varepsilon_3 = (2x + y) + y\sqrt{5}$. $c|2x + y, c|\sqrt{5}$ olduğundan $c|2\varepsilon_3$ olup $c|2$ veya $c|\varepsilon_3$ tür. $c|\varepsilon_3$ ise c birimdir. $c|2$ ise $c|\left(2, \sqrt{5}\right) = 1$ olduğundan c birim olup $\left(2x + y, \sqrt{5}\right) = 1$ dir. Böylece (14) den

$$4 \equiv (2u + v)(2r + s)\ mod\ \sqrt{5} \tag{15}$$

dir. (15) de $(2u + v)$ ve $(2r + s)$ nin alabileceği değerler 0,1,2,3,4 tür. Buradan $(2u + v, 2r + s) = (1,4), (2,2), (3,3), (4,1)$ dir

$$\frac{1}{0} \to \frac{\frac{(2u+v)+v\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} \to \frac{\frac{(2r+s)+s\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} \to \frac{1}{0}$$

üçgeninde

$$\frac{\frac{(2u+v)+v\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} \to \frac{\frac{(2r+s)+s\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} \tag{16}$$

kenarını göz önüne alalım.

i) (2,2) için (16)' dan

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\underbrace{\frac{2+v\sqrt{5}}{2} - \frac{2+s\sqrt{5}}{2}}_{birim}\right) = 1 \Rightarrow 5\frac{(v-s)^2}{4} = \pm 1 \Rightarrow 5(v-s)^2 = \pm 4$$

çelişkisi elde edilir. Benzer şekilde (3,3) içinde çelişki elde edilir.

ii) (1,4) için (16)' dan

$$\frac{1}{0} \to \frac{\frac{1+v\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} \to \frac{\frac{4+s\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} \to \frac{1}{0}$$

bulunur. Buradan

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\underbrace{\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{5}(v-s)}{2}}_{birim}\right)=1 \tag{17}$$

$\Rightarrow \frac{9}{4}-5\frac{(v-s)^2}{4}=\pm1 \Rightarrow 9-5(v-s)^2=\pm4$ bulunur. Buna göre

$9-5(v-s)^2=-4 \Rightarrow -5(v-s)^2=-13$ çelişkisi elde edilir.

$9-5(v-s)^2=4 \Rightarrow -5(v-s)^2=-5 \Rightarrow v-s=\pm1 \Rightarrow v=s+1,\ s-1$ dir.

$v=s+1$ olsun. (17)' den

$\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{5}(s+1-s)}{2}\right)=1 \Rightarrow \varepsilon_1\varepsilon_2\left(\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=1.\ \varepsilon_1=x+y\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ olsun. Bu taktirde

$$\varepsilon_1\varepsilon_2=\frac{1}{\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\pm1} \Rightarrow \varepsilon_2=\frac{\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\pm\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)+\frac{y\sqrt{5}}{2}\right]}=\frac{\left[\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{y\sqrt{5}}{2}\right]}{\pm1}$$

$\Rightarrow \varepsilon_2=\left[\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{y\sqrt{5}}{2}\right]$ veya $\left[\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{y\sqrt{5}}{2}\right]$ dir.

$\varepsilon_2=\left[\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{y\sqrt{5}}{2}\right]$ olsun. (16)' dan $\varepsilon_2 r\equiv\varepsilon_1 u^2\ mod\ \sqrt{5}$ dir. Buradan

$$\left[\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[\frac{2x+y}{2}-\frac{y\sqrt{5}}{2}\right]\left[\frac{4}{2}+\frac{s\sqrt{5}}{2}\right]\equiv\left[\frac{2x+y}{2}+\frac{y\sqrt{5}}{2}\right]\left[\frac{1}{2}+\frac{v\sqrt{5}}{2}\right]^2\ mod\ \sqrt{5}$$

olup her iki tarafın 8 ile çarparsak

$$\left[-3-\sqrt{5}\right]\left[2x+y-y\sqrt{5}\right]\left[4+s\sqrt{5}\right]\equiv\left[2x+y+y\sqrt{5}\right]\left[1+v\sqrt{5}\right]^2\ mod\ \sqrt{5}$$

$$-3(2x+y)4\equiv(2x+y)\ mod\ \sqrt{5} \Rightarrow -12\equiv1\ mod\ \sqrt{5} \Rightarrow -11\equiv0\ mod\ \sqrt{5}$$

çelişkisi elde edilir.

$\varepsilon_2=\left[\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{y\sqrt{5}}{2}\right]$ olsun. (16)' dan

$$\left[3+\sqrt{5}\right]\left[2x+y-y\sqrt{5}\right]\left[4+s\sqrt{5}\right] \equiv \left[2x+y+y\sqrt{5}\right]\left[1+v\sqrt{5}\right]^2 \; mod\; \sqrt{5}$$

$$3(2x+y)4 \equiv (2x+y)\; mod\; \sqrt{5} \Rightarrow 12 \equiv 1\; mod\; \sqrt{5} \Rightarrow 11 \equiv 0\; mod\; \sqrt{5}$$

çelişkisi elde edilir.

$v = s-1$ olsun.

$\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{5}(s-1-s)}{2}\right)=1 \Rightarrow \varepsilon_1\varepsilon_2\left(\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=1.\ \varepsilon_1 = x+y\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ olsun. Bu taktirde

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = \frac{1}{\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{\pm 1} \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}{\pm\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)+\frac{y\sqrt{5}}{2}\right]} = \frac{\left[\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{y\sqrt{5}}{2}\right]}{\pm 1}$$

olup yukarıdakine benzer şekilde yapılır.

iii) (4,1) için (16) dan

$$\frac{1}{0} \to \frac{\frac{4+v\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} \to \frac{\frac{1+s\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} \to \frac{1}{0}$$

bulunur. Buradan

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\underbrace{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}(v-s)}{2}}_{birim}\right)=1 \tag{18}$$

$\Rightarrow \frac{9}{4}-5\frac{(v-s)^2}{4} = \pm 1 \Rightarrow 9-5(v-s)^2 = \pm 4$ bulunur.

$9-5(v-s)^2=-4 \Rightarrow -5(v-s)^2=-13$ çelişkisi elde edilir.

$9-5(v-s)^2=4 \Rightarrow -5(v-s)^2=-5 \Rightarrow v-s=\pm 1 \Rightarrow v=s+1,\ s-1$ dir.

$v=s+1$ olsun. (18)' den

$\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}(s+1-s)}{2}\right)=1 \Rightarrow \varepsilon_1\varepsilon_2\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=1.\ \varepsilon_1 = x+y\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ olsun. Bu taktirde

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = \frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\pm 1} \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\pm\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)+\frac{y\sqrt{5}}{2}\right]} = \frac{\left[\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{y\sqrt{5}}{2}\right]}{\pm 1}$$

$\Rightarrow \varepsilon_2 = \left[\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{y\sqrt{5}}{2}\right]$ veya $\left[-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)-\frac{y\sqrt{5}}{2}\right]$ dir.

$\varepsilon_2 = \left[\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[\left(x + \frac{y}{2}\right) - \frac{y\sqrt{5}}{2}\right]$ olsun. (16)' dan $\varepsilon_2 r \equiv \varepsilon_1 u^2 \; mod \sqrt{5}$ dir. Buradan

$$\left[\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[\frac{2x+y}{2} - \frac{y\sqrt{5}}{2}\right]\left[\frac{1}{2} + \frac{s\sqrt{5}}{2}\right] \equiv \left[\frac{2x+y}{2} + \frac{y\sqrt{5}}{2}\right]\left[\frac{4}{2} + \frac{v\sqrt{5}}{2}\right]^2 \; mod \sqrt{5}$$

olup her iki tarafı 8 ile çarparsak

$$\left[3 - \sqrt{5}\right]\left[2x + y - y\sqrt{5}\right]\left[1 + s\sqrt{5}\right] \equiv \left[2x + y + y\sqrt{5}\right]\left[4 + v\sqrt{5}\right]^2 \; mod \sqrt{5}$$

$3(2x + y) \equiv (2x + y)16 \; mod \sqrt{5} \Longrightarrow 13 \equiv 0 \; mod \sqrt{5}$ çelişkisi elde edilir.

$\varepsilon_2 = \left[-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[\left(x + \frac{y}{2}\right) - \frac{y\sqrt{5}}{2}\right]$ ise $-3(2x + y) \equiv (2x + y)16 \; mod \sqrt{5}$ olup $19 \equiv 0 \; mod \sqrt{5}$ çelişkisi elde edilir.

$\varepsilon_4 = -x - y\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ durumu önceki duruma benzer şekilde yapılır.

Örnek 2.4. $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ de $\frac{1}{0} \to \frac{u+v\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{2} \to \frac{r+s\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{2} \to \frac{1}{0}$ olacak şekilde bir üçgen yoktur.

Çözüm: $\frac{u+v\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{2} \to \frac{r+s\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{2}$ kenarını göz önüne alalım. Buradan $\varepsilon_2\left(r + s\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) \equiv \varepsilon_1\left(u + v\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2 \; mod \; 2$ dir. Her iki tarafı da 4 ile çarparsak

$$2\varepsilon_2\left(2r + s\left(1 + \sqrt{5}\right)\right) \equiv \varepsilon_1\left(u + v\left(1 + \sqrt{5}\right)\right)^2 \; mod \; 2 \Longrightarrow$$

$$\varepsilon_1\left(u + v\left(1 + \sqrt{5}\right)\right)^2 \equiv 0 \; mod \; 2 \tag{21}$$

elde edilir. $(2, \varepsilon_1) = 1,\; 2|1 + \sqrt{5}$ olduğundan (21)' den

$$\left(u + v\left(1 + \sqrt{5}\right)\right)^2 \equiv 0 \; mod \; 2 \Longrightarrow u^2 \equiv 0 \; mod \; 2 \Longrightarrow u \equiv 0 \; mod \; 2, u \in \mathbb{Z} \tag{22}$$

elde edilir.

$\frac{r+s\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{2} \to \frac{1}{0}$ kenarından $\varepsilon_4 \equiv \varepsilon_3 ur \; mod \; 2$ dir. (22)' den $\varepsilon_4 \equiv 0 \; mod \; 2$ elde edilir. $(2, \varepsilon_4\ ) = 1$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Örnek 2.5. $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ de $\frac{1}{0} \to \frac{u+v\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{7} \to \frac{1}{0}$ olacak şekilde bir iki gen vardır.

Çözüm: $\frac{1}{0} \to \frac{u+v\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{7} \to \frac{1}{0} \Leftrightarrow \left(u + v\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2 \equiv -\varepsilon^2 \; mod \; 7$ dir.

$\left(u + v\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2 \equiv -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} \; mod \; 7$ olduğundan

$$u^2 + 2uv\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + v^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \equiv -\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}}_{a+b\lambda} \; mod \; 7$$

$$(u^2 + v^2) + (2uv + v^2)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \equiv -a - b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \; mod \; 7$$

$$u^2 + v^2 + a \equiv 0 \; mod \; 7, 2uv + v^2 + b \equiv 0 \; mod \; 7 \qquad (23)$$

bulunur. $a + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ birim olduğundan normu $a^2 + ab - b^2 = \pm 1$ dir. $a = 1, b = 0$ için (23)' den $u = 2, v = 3$ olsun. $u = 2, v = 3, \varepsilon = 1$ için $\left(2 + 3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2 \equiv -1 \; mod \; 7$ dir.

$4 + 12\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 9\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \equiv -1 \; mod \; 7 \Longrightarrow 4 + 9 + (12 + 9)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \equiv -1 \; mod \; 7$

$\Longrightarrow 4 + 9 + 1 + (12 + 9)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \equiv 0 \; mod \; 7 \Longrightarrow 14 + 21\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \equiv 0 \; mod \; 7$

Bu denklem $a = 1, b = 0$ $u = -2, v = -3$ içinde sağlanır.

Not: $x + y\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \equiv 0 \; mod \; 7 \Leftrightarrow 7|x, 7|y$.

2.2.2. G_5 Hecke Grubunun Alt Yörüngesel Grafları

Şimdi $PSL_2(\mathbb{Z}[\lambda])$ nın $\langle\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & \lambda\\0 & 1\end{pmatrix}\rangle$ ile üretilen G_5 alt grubunu ele alalım. $G_\infty < G_0(\beta) < G_5$ dir. Burada $G_\infty = \left\{\begin{pmatrix}1 & m\lambda\\0 & 1\end{pmatrix}: m \in \mathbb{Z}\right\}$ ve β , $\mathbb{Z}[\lambda]$ nın bir ideali olmak üzere $G_0(\beta) = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in G_5: c \in \beta \text{ ve } a,b,c,d \in \mathbb{Z}[\lambda]\right\}$ dır.

Lemma 2.9 [7]. G_5' in $\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda]$ üzerindeki hareketi transitiftir.■

Tanım 2.1. $u,n \in \mathbb{Z}[\lambda]$ ve $(u,n) = 1$ olsun. $x_i, x_j \in \mathbb{Q}[\lambda] \cup \{\infty\}$ olmak üzere, (x_i, x_j) ikilisine bir n-doğru denir $:\Leftrightarrow \exists T \in G_5: T\left(\infty, \frac{u}{n}\right) = (x_i, x_j)$ dir.

Bu tanım yardımıyla aşağıdaki teoremleri kolaylıkla verebiliriz:

Teorem 2.18. $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right)$ bir n-doğru olmak üzere $G_{u,n}$ de $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ bir kenardır ancak ve ancak

$\varepsilon_2 x \equiv \varepsilon_1 ur \ (mod n)$, $\varepsilon_2\, y \equiv \varepsilon_1 us \ (mod n)$ ve $\varepsilon_1\varepsilon_2(ry - sx) = n$ olacak şekilde $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[\lambda])$.

İspat: $G_{u,n}$ de bir $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ kenarı mevcut olsun. Dolayısıyla $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \in O\left(\infty, \frac{u}{n}\right)$ dir. Bu taktirde $T(\infty) = \frac{r}{s}, T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{x}{y}$ olacak şekilde bir $T = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in G_5$ vardır. Buradan

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\0 & n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon_1 \mathrm{r} & \varepsilon_2 \mathrm{x}\\ \varepsilon_1 \mathrm{s} & \varepsilon_2 \mathrm{y}\end{pmatrix}$$

olacak şekilde $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[\lambda])$ vardır. Buradan

$$\begin{pmatrix}a & au + bn\\c & cu + dn\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon_1 \mathrm{r} & \varepsilon_2 \mathrm{x}\\ \varepsilon_1 \mathrm{s} & \varepsilon_2 \mathrm{y}\end{pmatrix}$$

olup $a = \varepsilon_1 \mathrm{r}$, $\mathrm{c} = \varepsilon_1 \mathrm{s}$, $\varepsilon_2 \mathrm{x} = au + bn, \varepsilon_2 \mathrm{y} = cu + dn, \varepsilon_1\varepsilon_2(ry - sx) = n$ dir. Böylece

$\varepsilon_2 x \equiv \varepsilon_1 ur \ (mod n)$, $\varepsilon_2\, y \equiv \varepsilon_1 us \ (mod n)$ ve $\varepsilon_1\varepsilon_2(ry - sx) = n$ elde edilir.

Tersine, $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right)$ bir n-doğru olduğundan $\exists T \in G_5: T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}u\\n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dir. Böylece $G_{u,n}$ de $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ dir. ■

Teorem 2.19. $r, s, x, y \in \mathbb{Z}[\lambda], T \in G_5$ ve $\frac{x}{y}$ bir indirgenmiş form olmak üzere $T\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{r}{s}$ olsun. Bu taktirde $\frac{r}{s}$ veya $\frac{-r}{-s}$ indirgenmiş formdur.

İspat: $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_5$ olsun. $\frac{x}{y}$ bir indirgenmiş form olduğundan $\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \in G_5$ olacak şekilde $z, t \in \mathbb{Z}[\lambda]$ vardır. Buradan

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by & az + bt \\ cx + dy & cy + dt \end{pmatrix} \in G_5$$

dir. Eğer $cx + dy > 0$ ise $\frac{ax+by}{cx+dy}$ bir indirgenmiş formdur. Eğer $cx + dy < 0$ ise $\begin{pmatrix} -ax - by & -az - bt \\ -cx - dy & -cy - dt \end{pmatrix} \in G_5$ olduğundan $\frac{-ax-by}{-cx-dy}$ bir indirgenmiş formdur. Böylece

$$\frac{ax+by}{cx+dy} \text{ veya } \frac{-ax-by}{-cx-dy}$$

indirgenmiş formdur.

Teorem 2.20. $\frac{r}{s}, \frac{x}{y}, \frac{u}{n}$ indirgenmiş form, $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right)$ bir n - doğru olmak üzere $G_{u,n}$ de $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ bir kenardır ancak ve ancak

i) $x \equiv ur\ (modn), y \equiv us\ (modn)$ ve $ry - sx = n$ veya
ii) $x \equiv -ur\ (modn), y \equiv -us\ (modn)$ ve $ry - sx = -n$ dir.

İspat: Farzedelim ki $G_{u,n}$ de bir $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ kenarı vardır. Dolayısıyla $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \in O\left(\infty, \frac{u}{n}\right)$ dir. Bu taktirde $T(\infty) = \frac{r}{s}$, $T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{au+bn}{cu+dn} = \frac{x}{y}$ olacak şekilde bir $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_5$ vardır. $T \in G_5$, $\frac{1}{0}$ ve $\frac{u}{n}$ indirgenmiş form olduğundan Teorem 2.19. a göre $\frac{a}{c}$ veya $\frac{-a}{-c}$ ve $\frac{au+bn}{cu+dn}$ veya $\frac{-au-bn}{-cu-dn}$ indirgenmiş formdur.

İlk olarak farzedelim ki $\frac{a}{c}$ ve $\frac{au+bn}{cu+dn}$ indirgenmiş form olsun. Bu taktirde

$$T(\infty) = \frac{a}{c} = \frac{r}{s},\ T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{au+bn}{cu+dn} = \frac{x}{y}$$

olup Lemma 1.5. den $a = r,\ c = s,\ x = au + bn,\ y = cu + dn$ bulunur. Buradan

$$x \equiv ur\ (modn), y \equiv us\ (modn) \text{ ve } ry - sx = n$$

dir.

İkinci olarak farzedelim ki $\frac{a}{c}$ ve $\frac{-au-bn}{-cu-dn}$ indirgenmiş form olsun. Bu taktirde

$$T(\infty) = \frac{a}{c} = \frac{r}{s},\ T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{-au-bn}{-cu-dn} = \frac{x}{y}$$

olup Lemma 1.5. den $a = r,\ c = s,\ x =- au - bn,\ y = -cu - dn$ bulunur. Buradan

$$x \equiv -ur\ (modn), y \equiv -us\ (modn) \text{ ve } ry - sx = -n$$

dir.

Benzer şekilde $\frac{-a}{-c}$ ve $\frac{-au-bn}{-cu-dn}$ indirgenmiş form ise birinci durum, $\frac{-a}{-c}$ ve $\frac{au+bn}{cu+dn}$ indirgenmiş form ise ikinci durum elde edilir.

Tersine, $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right)$ bir n-doğru olduğundan $T\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{r}{s}, T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{x}{y}$ olacak şekilde bir $T \in G_5$ vardır. Böylece $G_{u,n}$ de $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ bir kenardır. ■

Teorem 2.21. $u, n, r, s \in \mathbb{Z}[\lambda]$ ve $\frac{r}{s}, \frac{x}{y}, \frac{u}{n}$ indirgenmiş form olmak üzere $F_{u,n}$ de $\frac{1}{0} \to \frac{u}{n} \to \frac{r}{s} \to \frac{1}{0}$ olacak şekilde bir üçgen yoktur.

İspat. Varsayalım ki böyle bir üçgen vardır. Bu taktirde

$$\left(\frac{1}{0}, \frac{u}{n}\right) \xrightarrow{I} \left(\frac{1}{0}, \frac{u}{n}\right), \left(\frac{1}{0}, \frac{u}{n}\right) \xrightarrow{T} \left(\frac{u}{n}, \frac{r}{s}\right),\ \left(\frac{1}{0}, \frac{u}{n}\right) \xrightarrow{S} \left(\frac{r}{s}, \frac{1}{0}\right)$$

olacak şekilde I(birim)$, T, S \in G_5$ matrisleri vardır. Bu taktirde $S = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ için

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -1 \\ s & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow s = n$$

dir. Böylece $\frac{1}{0} \to \frac{u}{n} \to \frac{r}{n} \to \frac{1}{0}$ üçgeni elde edilir.

Şimdi $\frac{u}{n} \overset{>}{\to} \frac{r}{n}$ kenarını göz önüne alalım. Buna göre $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_5$ için

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & r \\ n & n \end{pmatrix} \Longrightarrow n(u - r) = n \Longrightarrow r = u - 1$$

bulunur. Bu taktirde $\frac{1}{0} \rightarrow \frac{u}{n} \overset{>}{\rightarrow} \frac{u-1}{n} \rightarrow \frac{1}{0}, n \in \mathbb{Z}[\lambda]$ üçgeni elde edilir. Böylece

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & u-1 \\ n & n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & au+bn \\ c & cu+dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & u-1 \\ n & n \end{pmatrix}$$

dir. Buradan $a = u,\ c = n,\ au + bn = u - 1,\ cu + dn = n$ bulunur.

$$un + dn = n \Rightarrow u + d = 1 \Rightarrow d = 1 - u$$

$$u^2 + bn = u - 1 \Rightarrow b = -\frac{u^2-u+1}{n}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} u & -\frac{u^2-u+1}{n} \\ n & 1-u \end{pmatrix},\ detT = 1$$

dir.

$$G_5, W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (2.\ \text{mertebeden}) \text{ ve } UW = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(5.\ \text{mertebeden})$ elemanları ile üretildiğinden G_5 de herhangi bir eliptik eleman ya W nun bir kuvvetine yada UW nun bir kuvvetine eşleniktir. Oysa elde edilen $T = \begin{pmatrix} u & -\frac{u^2-u+1}{n} \\ n & 1-u \end{pmatrix}$ elemanı 3. mertebeden bir eliptik eleman olup hiçbirinin kuvvetine eşlenik değildir. Böylece $T = \begin{pmatrix} u & -\frac{u^2-u+1}{n} \\ n & 1-u \end{pmatrix} \notin G_5$ dir.■

Teorem 2.22. $G_{u,n}$ de üçgen yoktur.

Teorem 2.23. $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_5$ ise $a + d \neq \pm 1$ dir.

İspat: G_5 de her eliptik eleman ya $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ın veya $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G_5$ in bir kuvvetine eşlenik olduğundan G_5 deki eliptik elemanlar 2. veya 5. mertebedendir. Böylece $a + d = \pm 1$ ise T 3. mertebeden bir eliptik elemandır. Bu ise bir çelişkidir.

Teorem 2.24 $u, n, r, s, k \in \mathbb{Z}[\lambda]$ ve $\frac{u}{n}, \frac{r}{s}, \frac{k}{n}$ indirgenmiş form olmak üzere $F_{u,n}$ de $\frac{1}{0} \rightarrow \frac{u}{n} \rightarrow \frac{r}{s} \rightarrow \frac{k}{n} \rightarrow \frac{1}{0}$ olacak şekilde bir dörtgen yoktur.

İspat: $\frac{u}{n} \overset{<}{\rightarrow} \frac{r}{s}$ kenarını göz önüne alalım. Bu taktirde

$$\begin{pmatrix} a & x \\ c & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -r \\ n & -s \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $\begin{pmatrix} a & x \\ c & y \end{pmatrix} \in G_5$ vardır. Buradan $a = u,\ c = n$ dir. Böylece

$$\begin{pmatrix} u & x \\ n & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -r \\ n & -s \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u & u^2 + xn \\ n & un + yn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -r \\ n & -s \end{pmatrix}$$

den $u^2 + xn = -r, un + yn = -s$ bulunur. $uy - nx = 1$ olduğundan

$$uy \equiv 1\ (mod\ n) \tag{24}$$

dir. Böylece

$$\frac{1}{0} \to \frac{u}{n} \to \frac{-u^2-xn}{-un-yn} = \frac{u^2+xn}{un+yn} \to \frac{k}{n} \to \frac{1}{0}$$

bulunur.

$$\frac{u}{n} \overset{<}{\to} \frac{u^2+xn}{un+yn}$$

kenarından

$$u^2 + uy - u^2 - xn = -1 \Rightarrow xn = uy + 1 \Rightarrow uy \equiv -1\ (mod\ n) \tag{25}$$

elde edilir. (24) ve (25)' den $-1 \equiv 1\ (mod\ n) \Longrightarrow 2 \equiv 0\ (mod\ n)$ elde edilir. $xn = uy + 1$ olduğundan dörtgenimiz

$$\frac{1}{0} \to \frac{u}{n} \to \frac{u^2+xn}{un+yn} = \frac{u^2+uy+1}{n(u+y)} \to \frac{k}{n} \to \frac{1}{0}$$

dir. Şimdi $\frac{u^2+uy+1}{n(u+y)} \overset{<}{\to} \frac{k}{n}$ kenarını ele alalım. Buradan

$$u^2 + uy + 1 - ku - ky = -1 \Longrightarrow u(u + y) - k(u + y) = -2 \Longrightarrow u + y|2$$

dir. $2, \mathbb{Z}[\lambda]$ da asal olduğundan $u + y = 2\lambda^k$ veya λ^m dir. Burada $k, m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere λ^k ve λ^m birimdir. Ayrıca $u(u + y) - k(u + y) = -2 \Longrightarrow k = \frac{u^2+uy+2}{u+y}$ dir. Buradan dörtgenimiz

$$\frac{1}{0} \to \frac{u}{n} \to \frac{u^2+uy+1}{n(u+y)} \to \frac{\frac{u^2+uy+2}{u+y}}{n} \to \frac{1}{0}$$

şeklindedir.

i) Eğer $u+y=2\lambda^k$ ise $2\equiv 0\ (mod\ n)$ olduğundan

$u+y\equiv 0\ (mod\ n)\Longrightarrow y\equiv -u(\ mod\ n\ )$

dir. Ayrıca $uy\equiv \pm 1\ (mod\ n)\Longrightarrow u^2\equiv \pm 1(mod\ n)$ dir. Buradan

$$\frac{1}{0}\to\frac{u}{n}\to\frac{2\lambda^k u+1}{2\lambda^k n}\to\frac{\frac{2\lambda^k u+2}{2\lambda^k}}{n}\to\frac{1}{0}$$

elde edilir. Bu taktirde

$$\begin{pmatrix} a_0 & c_0\\ b_0 & d_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u\\ 0 & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2\lambda^k u+2}{2\lambda^k} & -1\\ n & 0\end{pmatrix}$$

olacak şekilde $\begin{pmatrix} a_0 & c_0\\ b_0 & d_0\end{pmatrix}\in G_5$ vardır. Buradan $a_0=\frac{2\lambda^k u+2}{2\lambda^k}$ ve $b_0=n$ dir. Böylece

$$\begin{pmatrix} \frac{2\lambda^k u+2}{2\lambda^k} & c_0\\ n & d_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u\\ 0 & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2\lambda^k u+2}{2\lambda^k} & -1\\ n & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\frac{\frac{2\lambda^k u^2+2u}{2\lambda^k}+c_0\,n}{un+d_0 n}=\frac{-1}{0}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{2\lambda^k u^2+2u}{2\lambda^k}+c_0\,n=-1\ \Longrightarrow\frac{2\lambda^k u^2+2u}{2\lambda^k}=-1\ (mod\ n)$$

dir. $\frac{2\lambda^k u^2}{2\lambda^k}+\frac{2u}{2\lambda^k}\equiv -1\ (mod\ n)\Longrightarrow u^2+u\lambda^{-k}\equiv -1\ (mod\ n)$ dir. $u^2\equiv \pm 1(mod\ n)$ olduğundan $u\lambda^{-k}\equiv 0\ (mod\ n)$ veya $u\lambda^{-k}\equiv -2\ (mod\ n)$ elde edilir. $u\lambda^{-k}\equiv -2\ (mod\ n)$ ise $n|2$ olduğundan $u\lambda^{-k}\equiv 0\ (mod\ n)$ dır. $(u,n)=(\lambda^{-k},n)=1$ olduğundan bu imkansızdır. Dolayısıyla $u+y=2\lambda^k$ olamaz.

ii) $u+y=\lambda^m$ ise $y=\lambda^m-u.\ uy\equiv \pm 1\ (mod\ n)\Longrightarrow u(\lambda^m-u)\equiv \pm 1\ (mod\ n)\Longrightarrow$ $u^2\equiv u\lambda^m\pm 1\ (mod\ n)$ dir. $u+y=\lambda^m$ olduğundan dörtgenimiz

$$\frac{1}{0}\to\frac{u}{n}\to\frac{\lambda^m u+1}{\lambda^m n}\to\frac{\frac{\lambda^m u+2}{\lambda^m}}{n}\to\frac{1}{0}$$

şeklindedir. Bu taktirde

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda^m u+2}{\lambda^m} & c_0\\ n & d_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u\\ 0 & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\lambda^m u+2}{\lambda^m} & -1\\ n & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\frac{\frac{\lambda^m u^2+2u}{\lambda^m}+c_0\,n}{un+d_0 n}=\frac{-1}{0}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\lambda^m u^2+2u}{\lambda^m}+c_0\,n=-1 \Longrightarrow \frac{\lambda^m u^2+2u}{\lambda^m} \equiv -1(mod n\,) \Longrightarrow \lambda^m u^2+2u \equiv -\lambda^m\;(mod\;n)$$

dir. $n|2$ olduğundan $\lambda^m u^2 \equiv -\lambda^m\;(mod\;n) \Longrightarrow \lambda^m(u^2+1) \equiv 0\;(mod\;n)$. $(\lambda^m,1)=1$ olduğundan $u^2 \equiv -1(mod\;n)$ elde edilir. $u^2 \equiv u\lambda^m \pm 1\;(mod\;n)$ den $u\lambda^m \pm 1 \equiv -1(mod\;n) \Longrightarrow u\lambda^m \equiv 0,-2(mod\;n)$. $n|2$ den $u\lambda^m \equiv 0(mod\;n)$ olup $(u,n)=(\lambda^m,n)=1$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Teorem 2.25. $\left(\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{n}},\frac{1}{0}\right)$ bir n-doğru olsun. Bu taktirde $G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiştir $\Leftrightarrow u^2 \equiv -\varepsilon^2(modn)$ olacak şekilde $\exists\varepsilon \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[\lambda])$.

İspat: Farz edelim ki $G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiş olsun. Bu taktirde $O\left(\infty,\frac{u}{n}\right)=O\left(\frac{u}{n},\infty\right)$ dur. Buradan $\exists T \in G_5{:}\,T(\infty)=\frac{u}{n},T\left(\frac{u}{n}\right)=\infty$ dur. Bu taktirde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1\mathrm{u} & 1 \\ \varepsilon_1\mathrm{n} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & au+bn \\ c & cu+dn \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1\mathrm{u} & 1 \\ \varepsilon_1\mathrm{n} & 0 \end{pmatrix}$$

olup $a=\varepsilon_1\mathrm{u}$, $\mathrm{c}=\varepsilon_1\mathrm{n}$, $cu+dn=0 \Rightarrow \varepsilon_1 un+dn=0 \Rightarrow d=-\varepsilon_1 u$ bulunur. Böylece

$$T=\begin{pmatrix} \varepsilon_1\mathrm{u} & \mathrm{b} \\ \varepsilon_1\mathrm{n} & -\varepsilon_1\mathrm{u} \end{pmatrix} \Rightarrow -\varepsilon_1^2 u^2-b\varepsilon_1 n=1 \Rightarrow u^2 \equiv -\varepsilon^2(modn)$$

dir.

Tersine, $\left(\frac{r}{s},\frac{x}{y}\right)$ bir n-doğru olduğundan $\exists T \in G_5{:}\,T\left(\frac{1}{0}\right)=\left(\frac{r}{s}\right),T\left(\frac{u}{n}\right)=\left(\frac{x}{y}\right)$ dir. Böylece $G_{u,n}$ de $\frac{r}{s}\rightarrow\frac{x}{y}$ dir. ■

Teorem 2.26. $\varphi=\begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{cn} & \mathrm{d} \end{pmatrix}$, G_5 de 5. mertebeden bir eliptik eleman olsun. Bu taktirde $\varphi(k)=l,\varphi(l)=m,\varphi(m)=n,\varphi(n)=v,\varphi(v)=k$ olacak şekilde $F_{a,cn}$ de bir $k\rightarrow l\rightarrow m\rightarrow n\rightarrow v\rightarrow k$ beşgeni vardır.

İspat: φ, G_5 de 5. mertebeden bir eliptik eleman olduğundan $|a+d|<2$ dir. Varsayalım ki $\mu \in \mathbb{Z}[\lambda]$ olmak üzere $a+d=\mu$ dır. Bu taktirde

$$\varphi=\begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{cn} & \mu-\mathrm{a} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\mathrm{a} & \frac{\mathrm{a}^2-\mathrm{a}\mu+1}{\mathrm{cn}} \\ -\mathrm{cn} & \mathrm{a}-\mu \end{pmatrix}$$

dır. Böylece $F_{a,cn}$ de $\infty \to \frac{a}{cn} \to \frac{-1+a\mu}{cn\mu} \to \frac{\mu(-1+a)}{cn\mu} \to \frac{a-\mu}{cn} \to \infty$ bir beşgen ve

$$\varphi(\infty) = \frac{a}{cn}\ , \varphi\left(\frac{a}{cn}\right) = \frac{-1+a\mu}{cn\mu}, \varphi\left(\frac{-1+a\mu}{cn\mu}\right) = \frac{\mu(-1+a)}{cn\mu}, \varphi\left(\frac{\mu(-1+a)}{cn\mu}\right) = \frac{a-\mu}{cn}, \varphi\left(\frac{a-\mu}{cn}\right) = \infty$$

dur.■

Örnek 2.6. $\varphi = \begin{pmatrix} 9\lambda + 4 & -22\lambda - 15 \\ 2\lambda + 3 & -8\lambda - 4 \end{pmatrix} \in G_5$, 5. mertebeden bir eliptik elemandır ve

$$\frac{1}{0} \to \frac{9\lambda+4}{2\lambda+3} \to \frac{13\lambda+8}{5\lambda+2} \to \frac{12\lambda+9}{5\lambda+2} \to \frac{8\lambda+4}{2\lambda+3} \to \frac{1}{0}$$

beşgeni için

$$\varphi\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{9\lambda+4}{2\lambda+3}, \varphi\left(\frac{9\lambda+4}{2\lambda+3}\right) = \frac{13\lambda+8}{5\lambda+2}, \varphi\left(\frac{13\lambda+8}{5\lambda+2}\right) = \frac{12\lambda+9}{5\lambda+2}, \varphi\left(\frac{12\lambda+9}{5\lambda+2}\right) = \frac{8\lambda+4}{2\lambda+3}, \varphi\left(\frac{8\lambda+4}{2\lambda+3}\right) = \frac{1}{0}$$

dır.

3. İRDELEME

Charles C. Sims tarafından 1967 yılında yayınlanan “Graphs and Finite Permutation Groups” adlı makalede ve Gareth A. Jones, David Singerman ve K. Wicks’ in, 1991 yılında yayınlanan “The Modular Group and Generalized Farey Graphs” adlı çalışmasında altyörüngesel graflar ve bu graflardaki devre uzunlukları incelenmiştir. S.P. Chan, M.L. Lang, C.H. Lim 1994 yılında “The invariants of the Congruence Subgroups $G_0(\beta)$ of the Hecke Group G_5” adlı çalışmada $\beta \subset \mathbb{Z}[\lambda]$ sıfırdan farklı bir ideal olmak üzere $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda_5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanları tarafından üretilen G_5 Hecke grubunda Γ modular grubunun $\Gamma_0(n)$ alt grubuna karşılık gelen $G_0(\beta)$ kongrüans alt grubun simgesindeki invaryantlar bulunmuş ve $G_0(\beta)$ grubunun üretici eliptik elemanlarının mertebelerinin 2 veya 5 olduğu gösterilmiştir. M. Akbaş’ ın 2001 yılındaki “On Suborbital Graphs For The Modular Group” adlı çalışmasında devre uzunlukları ile ayrık grupların üretici eliptik elemanlarının mertebeleri arasındaki ilişki ortaya konmuştur.

Bu tez çalışmasında iki problem ele alınmıştır. Birinci problemde Γ modular grubunun $\Gamma^3 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : ab + cd \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 3) \right\}$ alt grubunun $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki altyörüngesel grafları, bu grafların bağlantılılığı ve bunların sonucu olarakta bu grafların orman olma durumları ele alınmıştır. İkinci problemde ise G_5 Hecke grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda] = \mathbb{Q}[\lambda] \cup \{\infty\}$ üzerindeki altyörüngesel grafları incelenmiş ve alt yörüngesel graflardaki devre uzunluklarının 2 veya 5 olup olmayacağı sorusuna cevap aranmıştır. Burada problem tam olarak çözümlenememesine rağmen, belli şartlarda graflarda 3 ve 4 uzunluklu devrelerin olamayacağı gösterildi.

4. SONUÇLAR

Yaptığımız çalışmada elde edilen başlıca sonuçlar şunlardır:

1. Γ^3 grubunun $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketi incelendi ve transitif olarak hareket ettiği gösterildi (Lemma 2.2).

2. Γ^3 grubunun $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketinden oluşan alt yörüngesel graflardaki kenar şartı elde edilmiştir (Teorem 2.2).

3. Γ^3 grubunun $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketinden oluşan alt yörüngesel graflardaki devrelerle ilgili sonuçlar bulunmuştur (Teorem 2.5, Teorem 2.7 ve Teorem 2.8).

4. Γ^3 grubunun $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketinden oluşan alt yörüngesel graflarındaki bağlantılılık incelenmiş ve $F_{1,1}$ hariç tüm alt yörüngesel yörüngesel grafların bağlantısız olduğu gösterilmiştir. $F_{1,1}$ inde bağlantısız olduğu tahmin edilmektedir.

5. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\lambda])$ nın $\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda] = \mathbb{Q}[\lambda] \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketi transitiftir (Lemma 2.8).

6. $PSL_2(\mathbb{Z}[\lambda])$ nın $\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda] = \mathbb{Q}[\lambda] \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketinden oluşan alt yörüngesel graflardaki kenar şartı elde edilmiştir (Teorem 2.15).

7. Bazı özel durumlar için G_5 Hecke grubunun $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[\lambda] \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketinden oluşan alt yörüngesel graflardaki kenar şartı elde edilmiştir (Teorem 2.20).

8. G_5 Hecke grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda] = \mathbb{Q}[\lambda] \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketinden oluşan alt yörüngesel graflardaki devrelerle ilgili sonuçlar bulunmuştur (Teorem 2.21 ve Teorem 2.24).

5. ÖNERİLER

1. $F_{1,1}$ alt yörüngesel grafının bağlantısız olduğu tahmin edilmekte olup henüz çözülememiştir. Yapılan çalışmalar sırasında buradan elde edilecek sonuçların sayılar teorisi açısından önemli sonuçlar vereceği görülmüştür.

2. G_5 Hecke grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda] = \mathbb{Q}[\lambda] \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketinden oluşan alt yörüngesel graflarda ki devrelerin üçgen ve dörtgen içermediği gösterilmiş fakat orman olma durumu sonuçlandırılamamıştır. Bu açık problemle de uğraşılabilir.

3. G_5 Hecke grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}[\lambda] = \mathbb{Q}[\lambda] \cup \{\infty\}$ üzerindeki alt yörüngesel graflarının devrelerle olan ilişkisi tam olarak çözümlenememiştir. Bu nedenle bu alt yörüngesel graflardaki devre uzunluklarının 2 veya 5 olup olmayacağı sorusu araştırılabilir.

Bu 3 problemde oldukça düşündürücü problemler olup çözülmeleri halinde literatüre önemli katkıları olacaktır.

6. KAYNAKLAR

1. Akbaş, M., The Normalizer of Modular Subgroups, Ph.D. thesis, University of Southampton,1989.

2. Akbaş, M., On Suborbital Graphs for The Modular Group, Bull. London Math. Soc., 33 (2001) 647-652.

3. Alaca, Ş. and Williams, K.S., Introductory Algebraic Number Theory, Cambridge University Press,2004.

4. Başkan, T., Ayrık Gruplar, Hacettepe Üniveristesi Fen Fakültesi Yayınları, Beytepe, Ankara, 1980.

5. Beşenk, M.,Simge Devirleri ve Graflar, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2009.

6. Biggs, N.L. ve White, A.T., Permutation groups and combinatorial structures, London Math. Soc. Lecture Notes 33, Cambridge University Pres, Cambridge,1979.

7. Chan, S.P., Lang, M.L., Lim, C.H. and Tan, S.P., The invariants of the Congruence Subgroups $G_0(\beta)$ of the Hecke Group G_5, Illinois Journal Of Mathematics, 38, 4 (1994) 636-652.

8. Hecke, E., Über die Bestimmung Dirichletcher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen, Math. Ann., 112 (1936) 664-699.

9. Jones, G.A. ve Singerman, D., Complex Functions : An Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

10. Jones , G.A., Singerman, D. ve Wicks, K., The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Notes, CUP, Cambridge, 160 (1991) 316–338.

11. Lang, M.L. and Tan, S.P., Normalizers of The Congruence Subgroups of The Hecke Groups G_5 II, Proceedings of The American Mathematical Society, 128, 8 (2000) 2271-2280.

12. Lang, M.L., Lim, C.H. and Tan, S.P., Independent Generators For Congruence Subgroups of Hecke Groups, Mathematische Zeitschrift, 220 (1995) 569-594.

13. Neumann, P.M., Finite Permutation groups, Edge-Coloured Graphs and Matrices, Topics in Group Theory and Computation, Ed. M. P. J. Curran, Academic Press, London, Newyork, San Fransisco, 1977.

14. Newman, M., The Structure of Some Subgroups of the Modular Group, Illinois Journal Of Mathematics , 6 (1962) 480-487.

15. Newman, M., Free Subgroups and Normal Subgroups of The Modular Group, Illinois Journal Of Mathematics, 8 (1964) 262-265.

16. Ogg, A.P., Automorphismes des Courbes Modulaires, Seminaire Delange-Pisot, Poitou, 7, 1974.

17. Rankin, R.A., Modular Forms and Functions, Cambridge University Press, 1977.

18. Rose, J.S., A Course on Group Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.

19. Rosen, D., The Diaphantine Equation $ax + by = c$ In $\mathbb{Q}\sqrt{5}$ and Other Number Fields, Pacific Journal of Mathematics, 119, 2 (1985) 465-472.

20. Rosen, D., The substitutions of the Hecke group $\Gamma\left(2\cos\frac{\pi}{5}\right)$, Arch. Math., 46 (1986) 533-538.

21. Schmidt, T. A., Rosen Fractions and Veech Groups, An Overly Brief Introduction, Numeration: Mathematics and Computer Science, 1 (2009) 61-67.

22. Schoeneberg, B., Elliptic Modular Functions, Springer Verlag, Berlin, 1974.

23. Sims, C.C., Graphs and Finite Permutation Groups, Mathematische Zeitschrift, 95 (1967) 76-86.

24. Tsuzuku, T., Finite Groups and Finite Geometries, Cambridge University Press, Cambridge,1982.

ÖZGEÇMİŞ

Yavuz Kesicioğlu 1980 yılında Giresun’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Giresun’ da tamamladı. 2002 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2005 yılında K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü’nden Yüksek Lisans derecesini aldı ve aynı Enstitüde Doktora eğitimine başladı. 2002 yılında K.T.Ü Rize Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 17 Mart 2006 tarihi itibariyle Rize Üniversitesi’nde Araştırma Görevlisi olarak görevine devam etmektedir. Evli ve bir çocuk sahibi olup, iyi derecede İngilizce bilmektedir.