KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİR SINIF NORMAL DİFERENSİYEL OPERATÖRLER VE BAZI SPEKTRAL PROBLEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Meltem EROL

NİSAN 2011
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİR SINIF NORMAL DİFERENSİYEL OPERATÖRLER VE BAZI SPEKTRAL PROBLEMLERİ

Meltem EROL

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nce
"Doktora (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18.03.2011
Tezin Savunma Tarihi : 29.04.2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Zameddin İSMAYİLOV
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Haskız ÇOŞKUN
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Cihan ORHAN

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Trabzon 2011

ÖNSÖZ

Lisans, yüksek lisans ve doktora süresince gerek tez konumun belirlenmesinde gerekse çalışmalarımda bana yol gösteren, beni yüreklendiren, tezin bu aşamaya gelmesinde yardımını ve desteğini esirgemeyen hocam sayın Prof.Dr. Zameddin İSMAYİLOV' a ve eğitimim boyunca hiçbir zaman beni geri çevirmeyen ve üzerimde çok emeği olan Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümündeki bütün hocalarıma teşekkür eder, sonsuz saygılarımı sunarım.

Eğitim - öğretim hayatım süresince maddi - manevi desteklerini benden hiç esirgemeyen ve her zaman yanımda olan canım aileme, nişanlıma ve tez çalışmam süresince her konuda bana yardımcı olan, aynı kaderi paylaştığımız asistan arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Meltem EROL
Trabzon 2011

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bu çalışmada reel sayılar kümesinin sınırlı bir alt aralığı üzerinde tanımlı Hilbert uzay-değerli vektör-fonksiyonların Hilbert uzayı üzerinde üçüncü mertebeye kadar lineer selfadjoint operatör katsayılı iki terimli lineer diferensiyel ifadenin ürettiği formal normal olan minimal operatörün bütün normal genişlemelerinin sınır değerleri dilinde ifadesinin genel gösterimi bulunmuştur.

Daha sonra bu normal genişlemelerin bazı spektral özellikleri araştırılmıştır. Alınan sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Formal Normal ve Normal Operatör; Spektrum ve Rezolvent Küme; Rezolvent Operatör; Özdeğerlerin Asimptotik Davranışı.

SUMMARY

One Class of Normal Differential Operators and Some of Their Spectral Problems

In this study, firstly, the general representation of all normal extensions of formally normal minimal operator, generated by linear differential-operator expression of first, second and third-order with selfadjoint operator coefficients, is described in the Hilbert space of vector-functions in a finite interval in terms of boundary values in different versions.

Then, some of spectral properties of these normal extensions are investigated. Additionally, the obtained results are supported by applications.

Key Words: Formally Normal and Normal Operator; Spectrum and Resolvent Sets; Resolvent Operator; Asymptotical Behavior of Eigenvalues.

SEMBOLLER DİZİNİ

$C^{(n)}(I)$	I aralığı üzerinde n. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayı
$C_0^{(n)}(I)$	I aralığı içindeki, kompakt bir küme dışında sıfır olan $C^{(n)}(I)$' daki fonksiyonlar uzayı
$L_2(H,I)$	I aralığı üzerindeki fonksiyonların H Hilbert uzay-değerli fonksiyonların Hilbert uzayı
$W_2^l(H,I)$	$l \geq 1$ için l. mertebeye kadar türevleri $L_2(H,I)$ uzayında olan fonksiyonların Sobolev uzayı
$B(X)$	X Banach uzayından X Banach uzayına tanımlı lineer sınırlı operatörlerin kümesi
$D(A)$	A operatörünün tanım kümesi
$R(A)$	A operatörünün görüntü kümesi
E	Birim operatör
$H_\lambda(A)$	A operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen özvektörlerinin ürettiği alt uzay
$R_\lambda(A)$	A operatörünün rezolvent operatörü
$\rho(A)$	A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(A)$	A operatörünün spektrumu
$\sigma_p(A)$	A operatörünün ayrık spektrumu
$\sigma_c(A)$	A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(A)$	A operatörünün kalan spektrumu
$\mathfrak{S}_\infty(H)$	H Hilbert uzayında kompakt operatörler uzayı
$\diamond$	İspat sonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Diferensiyel denklemler teorisinde çözümlerin varlığı, tekliği, türevlenebilirliği ve bağımsızlığı gibi problemler, operatör teorisinde uygun fonksiyonlar uzayı üzerinde tanımlanan ilgili diferensiyel operatörün çekirdeği, tanım kümesi, resim kümesinin yapısı veya diferensiyel operatörün genişlemeleri, ters operatörlerinin sürekliliği gibi problemler olarak yorumlanabilir. Bu anlamda diferensiyel operatörler teorisi, diferensiyel denklemler teorisinde karşılaşılan birçok problemin çözülmesine katkı sağlamaktadır. Ayrıca diferensiyel operatörler teorisi, diferensiyel denklemler teorisindeki klasik problemlerden farklı birçok yeni problemin açık şekilde belirlenmesini ve çözümünü mümkün kılmaktadır.

Hilbert uzayında sınırsız formal normal operatörlerin normal genişlemeleri teorisinin ortaya çıkışı ve gelişimi B. Sz.-Nagy [52], Y. Kilpi [38, 39, 40], R.H. Davis [11], G. Biriuk ve E.A. Coddington [5], E.A. Coddington [9], J. Stochel ve F.H. Szafraniec [56, 57], vs. matematikçileri tarafından yapılmıştır.

E.A. Coddington [9] çalışmasında Hilbert uzayında verilen soyut formal normal sınırsız kapalı yoğun tanımlı bir lineer operatörün bütün normal genişlemelerini tanım kümeleri dilinde ifade etmiştir. E.A. Coddington bu çalışmasında 1929 yılında John von Neumann' ın bir Hilbert uzayında kapalı eşit defekt sayılara sahip simetrik operatörlerin selfadjoint genişlemeleri alanında yapmış olduğu meşhur [53] sonucunu genelleştirmiştir. Ayrıca G. Biriuk ve E.A. Coddington [5, 9] bu çalışmalarında lineer bağıntılar teorisinin sonuçlarından faydalanarak yoğun tanımlı olmayan kapalı formal normal operatörlerin normal genişlemelerini de tanım kümeleri dilinde ifade edebilmişlerdir.

John von Neumann teorisinde olduğu gibi E.A. Coddington' un bu buluşu da uzun yıllar, Hilbert uzayındaki diferensiyel operatörler teorisi diline dönüştürülememiştir. Nitekim bir diferensiyel operatörün herhangi genişlemeleri sınır değerleri dilinde daha kolay ifade edilebildiğinden John von Neumann teorisinden sonraki yıllarda olduğu gibi uzun yıllar bu yapılamamıştır. Bu alanda birkaç özel durum B.K. Kokebayev ve Kh. T. Otarov [41], B.N. Biyarov ve M. Otelbayev [7], vs. çalışmalarında incelenmiştir.

1950 yıllardan beri katsayıları bir Hilbert veya Banach uzayında operatör olan bir lineer diferensiyel ifadenin doğurduğu operatörlerin incelenmesi büyük bir ilgiyle devam etmektedir. Bu alanda ilk sonuçları E. Hille ve R.S. Phillps [19], J.L. Lions ve E. Magenes [46], S.G. Krein [44], M.L. Gorbachuk [17], V.M. Bruk [8], V.I. Gorbachuk ve M.L. Gorbachuk [18], F.S. Rofe-Beketov ve A.M. Kholkin [54] vs. tarafından bulunmuş ve bu bir teori olarak geliştirilmiştir.

John von Neumann' ın yoğun tanımlı kapalı simetrik operatörlerin selfadjoint genişlemeler teorisi, uygulama alanı olarak vektör-fonksiyonların Hilbert uzayında operatör katsayılı formal simetrik diferensiyel ifadelerin doğurduğu simetrik minimal operatörün selfadjoint genişlemeleri 1970 yılından itibaren incelenmeye başlanmıştır.

İlk olarak bu problem H keyfi bir ayrılabilir (separable) Hilbert uzayı olmak üzere $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında, selfadjoint operatör katsayılı Sturm-Liouville diferensiyel ifadesi için 1970 yılında Fransa'nın Nice kentinde düzenlenen uluslararası matematikçiler konferansında B.M. Levitan tarafından ortaya atılmış [45] ve M.L. Gorbachuk tarafından sınır değerler dilinde 1972 yılında sonuçlandırılmıştır (bak [18]).

Adi diferensiyel ifadeler için bu problemi M.G. Krein [43] ve F.S. Rofe-Beketov [54] son bir çözüme ulaştırmışlardır. Kısmi türevli diferensiyel ifadeler için bu problem R.A Aleksandryan, Yu. M. Berezanskii, V.A. Ilin ve A.G. Kostyuchenko tarafından [1] çözülmüştür. Sonlu bölgelerde ise bu problem M.İ. Vischik [58] tarafından sonuçlandırılmıştır. Operatör katsayılı herhangi mertebeden lineer diferensiyel simetrik ifadelerin doğurduğu minimal operatörün selfadjoint (maksimal akkümülatif, maksimal disipatif, maksimal simetrik vs.) genişlemelerinin sınır değerleri dilinde ifadesine ve spektral yapısının araştırılmasına V.I. Gorbachuk ve M.L. Gorbachuk [18] kitabında geniş yer vermiştir.

Sonlu aralıkta vektör-fonksiyonların Hilbert uzayında selfadjoint veya normal operatör katsayılı formal normal diferensiyel ifadelerin doğurduğu minimal operatörün bütün normal genişlemeleri ve bu genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifadesi Z. İsmailov [20-23, 26-31], F.G. Maksudov ve Z.I. Ismailov'un [47-51], Z.I. Ismailov ve H. Karatash'ın [24,25, 27, 37] bilimsel çalışmalarında verilmiştir. Ayrıca bu çalışmalarda bu genişlemelerin bazı spektral özellikleri incelenmiştir.

Bu alanda daha önceden yapılan çalışmaların kısa bir özetini verelim. $A:D(A)\subset H\to H$ bir normal operatör olmak üzere $l(u)=u'(t)+Au(t)$ diferensiyel ifadesinin $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında ürettiği minimal operatörün

$$A_R^{1/2}\left(D(L)\cap D(L^+)\right)\subset W_2^1\left(H,(a,b)\right)$$

şartı altında W ve $A_R^{1/2}WA_R^{-1/2}$ H Hilbert uzayı üzerinde üniter operatörler olmak üzere her L_n normal genişlemesi, sınır değerleri dilinde ifadesi

$$u(b)=U(a,b)Wu(a)$$

şeklinde olduğu gösterilmiştir. Ayrıca buradaki W üniter operatörü L_n normal operatörü tarafından tek türlü belirlenir, yani $L_n = L_W$. Tersine, aynı şart altında maksimal operatörün yukarıdaki sınır koşullarını sağlayan küme üzerine kısıtlanışı minimal operatörün bir normal genişlemesini tanımlar. Bu normal genişlemelerin spektrumunun

$$\sigma(L_W)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=\lambda_0+\frac{2k\pi i}{b-a},\ e^{-\lambda_0(b-a)}-\mu=0,\ \mu\in\sigma\left(W^*e^{-A_R(b-a)}\right),k\in\mathbb{Z}\right\}$$

yapısında olduğu ispatlanmıştır. H Hilbert uzayının boyutunun sonlu olması durumunda, her bir L_W normal genişlemesi ayrık spektruma sahip olup ve $L^{-1}{}_W$ operatörünün s-sayılarının asimptotik davranışı,

$$s_n\left(L^{-1}{}_W\right)\sim\frac{b-a}{2n\pi},\quad n\to+\infty$$

şeklindedir. Eğer A_R^{-1}, H Hilbert uzayında kompakt operatör ise, $L^{-1}{}_W$ kompakt operatördür ve L_W normal genişlemesinin spektrum yapısı

$$\sigma(L_W)=\left\{\lambda_n(A_R)+\frac{i}{a-b}\left(\arg\lambda_n\left(W^*e^{-A_R(b-a)}\right)+2k\pi\right),\ n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

formundadır. Ayrıca, eğer $\lambda_n(A_R)\sim cn^{\alpha}$, $0<c,\ \alpha<+\infty,\ n\to+\infty$ ise, $L^{-1}{}_W$ operatörünün s-sayılarının sonsuzdaki asimptotik davranışı

$$s_n\left(L^{-1}{}_W\right)\sim dn^{-\beta},\ 0<d<+\infty,\ \beta=\frac{\alpha}{1+\alpha},\ n\to+\infty$$

şeklinde olduğu gösterilmiştir [30].

Her $t\in[0,1]$ için $A(t):H\to H$ lineer sınırlı selfadjoint operatörlerin bir ailesi ve $\int_0^1\|A(t)\|_H^p\,dt<+\infty,\ 2\le p<+\infty$ olması durumunda $l(u)=u'(t)+A(t)u(t)$ diferensiyel ifadenin $L_2(H,(0,1))$ Hilbert uzayında ürettiği L_0 minimal operatör formal normal ise, Lebesgue ölçümüne göre hemen her yerde $A(t)=sabit$ olması gerektiği [28] çalışmasında verilmiştir. Ayrıca bu problem üç noktalı olması, yani

$A(t)=\begin{cases} A_1, \text{ eğer } t\in(0,h) & \text{ise,}\\ A_2, \text{ eğer } t\in(h,1) & \text{ise}\end{cases}, \ 0<h<1$ durumunda normal genişlemeleri ve genişlemelerin sınır değerleri dilinde ifadesi [22]' de bulunmaktadır. [25] çalışmasında ise, her $t\in[0,1]$ için $A(t):H\to H$ lineer sınırlı normal operatörler ve $A_R(t)\geq aE,\ a\in\mathbb{R}$ (E birim operatör) olmak üzere aynı problem, normal genişlemelerin $A_R(t)=sabit$ için varlığı ve her bir genişlemenin W, H Hilbert uzayında bir üniter operatör ve $W\left(A_R(0)-\gamma\right)^{-1}=\left(A_R(0)-\gamma\right)^{-1}W,\ \gamma<a$ eşitliği altında $u(1)=Wu(0)$ sınır değerleriyle belirlenebildiği ve tersinin de doğruluğu gösterilmiştir. Fakat Lebesgue ölçümüne göre hemen her yerde $A(t)=sabit$ olması durumunda normal genişlemelerin sınır değerleri dilinde ifadesi ve spektral teorisi çok önem taşımaktadır ve henüz bir sonuca rastlanılmamaktadır.

Sınırlı aralıkta $l(u)=-u''(t)+A(t)u(t)$ diferensiyel ifadesinin, her $t\in[a,b]$ için $A(t):H\to H$ bir lineer normal operatör olması durumunda normal genişlemeleri, genişlemelerin sınır değerleri dilinde ifadesi ve genişlemelerin spektral teorisinin bazı problemleri [21, 29, 47] çalışmalarında ele alınmıştır.

Her $t\in[0,1]$ için $A(t):H\to H$ lineer normal operatör için yüksek mertebeli $l(u)=u^{(n)}(t)+(-1)^{\left\{\frac{n+1}{2}\right\}}A(t)u(t),\ n\in\mathbb{N}$ ($\{.\}$ kesir fonksiyonu) diferensiyel ifadesinin ürettiği minimal operatörünün normal genişlemelerinin varlığı $w-A^{(n)}(t)=0,\ t\in[0,1]$ olması gerektiği ve tersinin de doğruluğu [27, 51] çalışmalarında gösterilmiştir.

Tezde üçüncü mertebeye kadar farklı durumlarda operatör katsayılı lineer diferensiyel ifadelerin, sonlu aralık üzerinde tanımlı Hilbert uzay-değerli vektör-fonksiyonların Hilbert uzayında, doğurduğu minimal operatörün bütün normal genişlemelerinin sınır değerleri dilinde ifadesi incelenmiş ve bu tip genişlemelerin bazı spektral problemleri (spektrumunun ayrıklığı, özdeğerlerinin yapısı, özdeğerlerin sonsuzdaki asimptotik davranışı, özvektörlerin tamlığı vs.) araştırılmıştır. Burada yapılan incelemeler her $t\in[a,b]$ için $A_0(t),\ A_1(t),\ A_2(t),\ A_3(t)$ bir Hilbert uzayında lineer kapalı operatörler olmak üzere,

$$l(.)=\sum_{k=0}^{3}A_k(t)\frac{d^k}{dt^k},$$

diferensiyel-operatör ifadesi göz önüne alınarak:

1. $A_2(t)=A_3(t)\overset{[a,b]}{=}0,\ A_1(t)\overset{[a,b]}{=}E,$

2. $A_1(t)=A_3(t)\overset{[a,b]}{=}0,\ A_0(t)\overset{[a,b]}{=}A,\ A_2(t)\overset{[a,b]}{=}-E,$

3. $A_0(t)=A_3(t)\overset{[a,b]}{=}0,\ A_1(t)\overset{[a,b]}{=}A,\ A_2(t)\overset{[a,b]}{=}-E,$

4. $A_1(t)=A_2(t)\overset{[a,b]}{=}0,\ A_0(t)\overset{[a,b]}{=}A,\ A_3(t)\overset{[a,b]}{=}E,$

durumlarında gerçekleştirilmiştir.

Tezde incelenmesi hedeflenen problemlerin olumlu sonuçlandırılması, Hilbert uzayında nonselfadjoint lineer operatörlerin genel teorisinin geliştirilmesine de bir katkı sağlayacaktır.

1.2. Metrik Uzaylar ve Lineer Uzaylar

Analizde yapılan en önemli işlemlerden birisi limite geçme işlemidir. Bu işlemin temeli $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{R}^n$ deki iki nokta arasında tanımlanabilen uzaklık fonksiyonuna dayanmaktadır. Bu düşünceyi genişleterek üzerinde uzaklık fonksiyonu tanımlanabilen somut bir X kümesinin, çağdaş matematiğin esas kavramlarından biri olan metrik uzaya dönüştürülmesi önem taşımaktadır.

Tanım (Metrik Uzay) 1: X boş olmayan bir küme ve

$$d: X \text{ x } X \to [0,+\infty),\ (x,y)\to d(x,y)$$

bir fonksiyon olsun. Eğer bu d fonksiyonu her $x,y,z\in X$ için

M₁) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ (özdeşlik aksiyomu);

M₂) $d(x,y)=d(y,x)$ (simetriklik aksiyomu);

M₃) $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği),

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde *uzaklık fonksiyonu* veya *metrik* adını alır ve (X,d) ikilisine bir *metrik uzay* denir. Burada M_1, M_2 ve M_3 özelliklerine *metrik aksiyomları* adı verilir.

Örnek 2: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere

$$d : \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R} \to [0,+\infty),\ (x,y) \to d(x,y) = |x-y|$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ üzerinde *mutlak değer metriği* denir. Gerçekten:

M1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x,y) = |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y,$$

M2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x,y) = |x-y| = |(-1)(y-x)| = |(-1)||y-x| = d(y,x),$$

M3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$|x-y| = |x-z+z-y| \le |x-z| + |z-y|$$

olduğundan

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$$

üçgen eşitsizliği sağlanır. O halde $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzaydır.

Örnek 3: X boştan farklı bir küme olsun. Bu küme üzerinde aşağıdaki gibi bir d fonksiyonunu tanımlayalım.

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \text{ ise} \\ 0, & x = y \text{ ise} \end{cases}$$

şekilde tanımlanan d fonksiyonu X kümesi üzerinde bir metriktir. Başka bir deyişle (X,d) ikilisi bir metrik uzaydır. Bu metriğe *ayrık metrik* veya *diskret metrik* denir.

Tanım (Ayrılabilir Uzay) 4: Bir (X,d) metrik uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa, bu uzaya *ayrılabilir uzay* denir.

Tanım (Vektör Uzayı) 5: X boş olmayan bir küme ve K ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun.

$$+ : X \text{ x } X \to X,\ (x,y) \to x+y,$$

$$\bullet : K \text{ x } X \to X,\ (a,x) \to ax,$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her $x, y, z \in X$ ve $a, b \in K$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. $x+y=y+x$;

2. $x+\left(y+z\right)=\left(x+y\right)+z$;

3. $\forall x\in X$ için $x+0=x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0\in X$ vardır;

4. $\forall x\in X$ için $x+\left(-x\right)=0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x\in X$ vardır;

5. $\forall x\in X$ için $1\cdot x=x$;

6. $a\left(x+y\right)=ax+ay$;

7. $\left(a+b\right)x=ax+bx$;

8. $\left(ab\right)x=a\left(bx\right)$.

Bu durumda X 'e K cismi üzerinde bir *vektör uzayı* (*lineer uzay*), elemanlarına da *vektör* veya *nokta* adı verilir. $K=\mathbb{R}$ alınırsa X 'e bir *reel vektör uzayı* ve $K=\mathbb{C}$ alınırsa X 'e bir *kompleks vektör uzayı* denir.

"0" sembolünün X uzayının bir vektörü için olduğu gibi, sıfır skaleri için de kullanılması genelde pek fazla yanılgıya neden olmaz. Ancak biraz daha açıklık getirmek gerekirse, sıfır vektörünü "θ" şeklinde gösterebiliriz.

Vektör uzayının tanımından aşağıdaki basit sonuçların elde edilebileceği kolayca gösterilebilir:

i) Her $x\in X$ için $0x=\theta$;

ii) Her $\alpha\in K$ için $\alpha\theta=\theta$;

iii) $\left(-1\right)x=-x$;

iv) $x\neq\theta$ olmak üzere $\alpha x=\beta x$ ise $\alpha=\beta$;

v) $\alpha\neq 0$ ve $\alpha x=\alpha y$ ise $x=y$;

vi) $y,z\in X$ vektörleri verildiğinde $x+y=z$ denkleminin tek bir $x\in X$ çözümü vardır.

Tanım (Lineer Manifold) 6: X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve Y, X ' in bir boş olmayan alt kümesi olsun. Y, X vektör uzayındaki cebirsel işlemlere göre kendi başına bir vektör uzayı oluşturuyorsa Y ' ye, X 'de bir *lineer manifold* (veya X 'in bir *lineer alt uzayı*) denir.

Tanım 7: X , bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in X$ olarak verilsin. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n \in K$ olmak üzere

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + ... + \alpha_n x_n$$

şeklindeki sonlu toplama $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in X$ elemanlarının bir *lineer kombinasyonu* denir. $\varnothing \neq M \subset X$ ise, M 'den alınan her sonlu sayıdaki vektörlerin lineer kombinasyonlarının tümünün kümesine M ' nin *gereni* (veya *lineer örtüsü*) denir ve $spanM$ olarak gösterilir. Başka bir deyişle,

$$spanM := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ : \ x_i \in M, \ \alpha_i \in K, \ i = 1, \ldots, n, \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $spanM$, X 'de bir lineer manifolddur ve M ' nin *ürettiği lineer manifold* adı verilir.

Tanım 8: X , bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve $M = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\} \subset X$ olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n \in K$ olmak üzere

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

eşitliği, ancak ve ancak,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0$$

olması halinde gerçekleşiyorsa $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in X$ vektörlerine *lineer bağımsız*, aksi halde *lineer bağımlı* denir.

Tanım 9: X , bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve M , X ' in boş olmayan bir alt kümesi olsun. M lineer bağımsız ve $X = spanM$ yani, her $x \in X$ için

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m, \ m \in \mathbb{N}$$

olacak şekilde $x_i \in M$ vektörleri ve $\alpha_i \in K, \ i = 1, \ldots, m,$ sayıları mevcut ise, M ' ye X ' in bir *Hamel tabanı* veya bir *Hamel bazı* denir. Bu yazılımdaki belirlenen baza göre $\alpha_i \in K$ sayılarına $x \in X$ vektörünün koordinatları olarak adlandırılır ve lineer bağımsızlıktan dolayı tek türlü belirlidirler. Bir vektör uzayının bütün bazları aynı sayıda eleman bulundurur. Bu eleman sayısı vektör uzayının boyutunu belirler ve bu sayı $\dim X$ ile gösterilir.

Tanım 10: Y_1 ve Y_2, X vektör uzayında iki lineer manifold olsun. Eğer her $x \in X$ için $y_1 \in Y_1$ ve $y_2 \in Y_2$ olmak üzere,

$$x = y_1 + y_2$$

şeklinde tek bir gösterime sahip ise, X vektör uzayı Y_1 ve Y_2 lineer manifoldlarının *direkt toplamıdır* denir ve $X = Y_1 \overset{\text{int}}{\oplus} Y_2$ olarak yazılır. Y_2' ye Y_1' in (ya da Y_1' e Y_2' nin) X' deki *cebirsel tümleyeni* denir.

1.3. Normlu Vektör Uzayları

Tanım (Normlu Vektör Uzayı) 11: X, K cismi üzerinde tanımlı bir lineer vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\| : X \to [0,\infty),\ x \to \|x\|$$

dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

N₁) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

N₂) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

N₃) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\| : X \to [0,\infty),\ x \to \|x\|$ dönüşümüne X üzerinde *norm* ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir *normlu vektör uzayı* adı verilir. Yukarıda verilen N_1, N_2 ve N_3 özelliklerine *norm aksiyomları* denir. Bu vektör uzayı üzerinde birden fazla norm tanımlanabilir. K cismine bağlı olarak, *reel normlu uzay* ve *kompleks normlu uzay* terimleri de kullanılır.

Örnek 12: $E = C([a,b], K)$ kümesi

$$\|x\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

fonksiyonu ile bir normlu uzaydır. Gerçekten: $x, y \in C[a,b]$ ve $\alpha \in K$ için,

N₁) $\|x\|_c = 0$ ise, $\|x\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a,b]$ için $x(t) = 0$;

N₂) $\|\alpha x\|_c = \max_{t\in[a,b]} |(\alpha x)(t)| = \max_{t\in[a,b]} |\alpha||x(t)|_c = |\alpha| \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = |\alpha| \|x\|_c$;

N₃) $\|x+y\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)+y(t)| \le \max_{t\in[a,b]} (|x(t)|+|y(t)|)$

$$\le \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |y(t)| = \|x\|_c + \|y\|_c \ .$$

Tanım 13: $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzay içinde bir dizi (x_n) ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

ise, (x_n) dizisi x_0 noktasına $\|\cdot\|$ *normuna göre yakınsıyor* denir ve $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\ \|_X} x_0$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ notasyonlarının biriyle gösterilir.

Tanım 14 : $(X,\|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ öyle ki } \forall m,n > n_\varepsilon \text{ için } \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

koşulu sağlanıyor ise (x_n) dizisine X içinde bir *Cauchy dizisi* denir.

Tanım (Banach Uzayı) 15: Bir $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir elemana yakınsıyorsa, bu $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* adı verilir.

Örnek 16: $X = \mathbb{R}^n$ (veya $X = \mathbb{C}^n$) vektör uzayı için

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1,2,3,\cdots,n\}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Gerçekten, bir $(x_m) \subset \mathbb{R}^n$ Cauchy dizisi alalım. Bu halde,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall m,k > m_0, m,k \in \mathbb{N} \text{ için } \|x_m - x_k\|_\infty < \varepsilon$$

olup, her $i = 1,2,...,n$ için

$$|x_i^m - x_i^k| \le \max\{|x_i^m - x_i^k| : i = 1,2,3,\cdots,n\} = \|x_m - x_k\|_\infty < \varepsilon \ .$$

Böylece $\left(x_i^m\right) \subset \mathbb{R}$, $i = 1,2,...,n$ dizileri $\mathbb{R}$'de (veya $\mathbb{C}$) bir Cauchy dizidir ve $\mathbb{R}$'de (veya $\mathbb{C}$'de) her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan her $i = 1,2,...,n$ için $x_i^m \xrightarrow[m\to\infty]{|\,|} x_i$ olacak şekilde $x_i \in \mathbb{R}$ (veya $x_i \in \mathbb{C}$) sayısı vardır. $x := \left(x_1, x_2, .., x_n\right)$ elemanı için

$$\left\|x_m - x\right\|_\infty = \max\left\{\left|x_i^m - x_i\right| : i = 1,2,3,\cdots,n\right\} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

olduğu açıktır.

Tanım (Alt Uzay) 17: Eğer $Y \neq \varnothing$, $\left(X, \|.\|\right)$ lineer normlu uzayında bir lineer manifold ve $\|.\|$ normuna göre kapalı ise, Y lineer manifolduna $\left(X, \|.\|\right)$ lineer normlu uzayının bir *alt uzayı* denir.

1.4. İç Çarpım ve Hilbert Uzayları

Hilbert uzayları sonsuz boyutlu normlu uzayların en basit tipi olmak üzere Fonksiyonel Analiz 'in teorik ve pratik uygulamalarında önemli rol oynamaktadır. Euclid uzayları ile büyük benzerliğe sahip olan Hilbert uzaylarının böyle kullanışlı olmasının nedeni, vektör cebirinde tanımlanan iç çarpım ve diklik kavramlarının bu uzaylar için genelleştirilebilmesidir.

Tanım (İç Çarpım Uzayı) 18: $K = \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere X bir vektör uzayı olsun.

$$(\cdot,\cdot)_X : X \text{ x } X \to K$$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(\cdot,\cdot)_X$ ' ye X üzerinde bir *iç çarpım*, $\left(X, (\cdot,\cdot)_X\right)$ ikilisine de *iç çarpım uzayı* (veya *ön Hilbert uzayı*) denir.

H$_1$) $\forall x \in X$ için $\left(x,x\right)_X \geq 0$ ve $\left(x,x\right)_X = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

H$_2$) $\forall x, y \in X$ için $\left(x,y\right)_X = \overline{\left(y,x\right)_X}$ (kompleks eşlenik);

H$_3$) $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için $\left(\alpha x, y\right)_X = \alpha\left(x,y\right)_X$;

H$_4$) $\forall x, y, z \in X$ için $\left(x+y, z\right)_X = \left(x,z\right)_X + \left(y,z\right)_X$.

$K = \mathbb{R}$ halinde $\left(x,y\right)_X = \left(y,x\right)_X$. H$_2$ ve H$_4$ ifadelerinden $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için

a) $(\alpha x+\beta y,z)_X=\alpha(x,z)_X+\beta(y,z)_X$;

b) $(x,\alpha y)_X=\overline{\alpha}(x,y)_X=\alpha(x,y)_X$;

c) $(x,\alpha y+\beta z)_X=\overline{\alpha}(x,y)_X+\overline{\beta}(x,z)_X$

formüllerinin doğruluğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 19: $f,g\in L_2(a,b)$ fonksiyonları için

$$(f,g)_{L_2(a,b)}=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm $L_2(a,b)$ bir iç çarpım uzayıdır. Gerçekten:

H₁) $\forall f\in L_2(a,b)$ için

$$(f,f)_{L_2(a,b)}=\int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt=\int_a^b|f(t)|^2dt\geq 0,$$

eğer $(f,f)_{L_2(a,b)}=\int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt=\int_a^b|f(t)|^2dt=0 \Leftrightarrow f=0$;

H₂) $\forall f,g\in L_2(a,b)$ için

$$(f,g)_{L_2(a,b)}=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt=\overline{\int_a^b \overline{f(t)}\overline{\overline{g(t)}}dt}=\overline{\int_a^b \overline{f(t)}g(t)dt}$$

$$=\overline{\int_a^b g(t)\overline{f(t)}dt}=\overline{(g,f)};$$

H₃) $\forall f\in L_2(a,b)$ ve $\alpha\in\mathbb{C}$ için

$$(\alpha f,g)_{L_2(a,b)}=\int_a^b \alpha f(t)\overline{g(t)}dt=\alpha\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt=\alpha(f,g);$$

H₄) $\forall f,g,h\in L_2(a,b)$ için

$$(f+h,g)_{L_2(a,b)}=\int_a^b (f(t)+h(t))\overline{g(t)}dt=\int_a^b \left(f(t)\overline{g(t)}+h(t)\overline{g(t)}\right)dt$$

$$=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt+\int_a^b h(t)\overline{g(t)}dt=(f,g)_{L_2(a,b)}+(h,g)_{L_2(a,b)}.$$

Tanım 20: $\left(X,(\cdot,\cdot)_X\right)$ bir iç çarpım uzayı ve $x\in X$ olsun.

$$\|x\|_X=(x,x)_X^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir norm olup ve bu norma *iç çarpımın ürettiği norm* denir.

Tanım (Hilbert uzayı) 21: Bir $\left(X,(.,.)_X\right)$ iç çarpım uzayı, iç çarpımın ürettiği norma göre tam ise, yani $\left(X,(\cdot,\cdot)_X\right)$ içindeki her Cauchy dizisi iç çarpımın ürettiği norma göre yakınsaksa, bu iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir.

Örnek 22: $(\cdot,\cdot)_{l_2} : l_2 \text{ x } l_2 \to K,\ (x,y)_{l_2} := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ dönüşümü $l_2(\mathbb{C})$ üzerinde bir iç çarpımdır ve bu iç çarpıma göre $l_2(\mathbb{C})$ bir Hilbert uzayıdır.

Tanım (Sobolev Uzayı) 23: $\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}$ sınırlı bir küme ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. $\Omega \cup \partial\Omega$ kümesi üzerinde tanımlı m defa sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonların $C^m\left[\Omega \cup \partial\Omega\right]$ kümesinin,

$$\|\varphi\|_{W_2^m(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

normuna göre tamlanışına bir *Sobolev uzayı* adı verilir ve $W_2^m(\Omega)$ şeklinde gösterilir. Burada $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial t_1^{\alpha_1} \cdots \partial t_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = \{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. $\overset{0}{W}{}_2^m(\Omega)$ ise, Ω içindeki kompakt bir küme dışında sıfır olan $W_2^m(\Omega)$ fonksiyonların uzayı olarak gösterilir. Ayrıca, $W_2^m(\Omega)$ uzayı

$$(\varphi,\psi)_{W_2^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le m} \left(D^\alpha \varphi, D^\alpha \psi\right)_{L^2(\Omega)}$$

iç çarpım altında bir Hilbert uzayıdır.

Tanım (Vektör-Fonksiyonlar) 24: B bir Banach uzayı ve $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olsun. $f : I \to B$, $f(t)$ fonksiyonlarına *vektör-fonksiyonlar* denir.

Tanım (Süreklilik) 25: Bir $f(t)$ vektör-fonksiyonu, $t_0 \in I$ noktasında, eğer

$$\lim_{t \to t_0} \left\| f(t) - f(t_0) \right\| = 0$$

ise, $f(t)$ vektör-fonksiyonuna $t_0 \in I$ noktasında *süreklidir* denir. Diğer taraftan, I aralığının her bir noktasında sürekli olan $f(t)$ vektör-fonksiyonuna I aralığı üzerinde *süreklidir* denir.

Tanım (Diferensiyellenebilirlik) 26: $f: I \to B$ bir vektör-fonksiyonu $t_0 \in I$ noktası için

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} - y \right\| = 0$$

olacak şeklinde bir $y \in B$ vektörü mevcutsa, $f(t)$ vektör-fonksiyonuna $t_0 \in I$ noktasında *diferensiyellenebilir* denir. Buradaki $y \in B$ vektörüne de $f(t)$ vektör-fonksiyonunun $t_0 \in I$ noktasındaki *türevi* adı verilir.

Eğer $f(t)$ vektör-fonksiyonu I aralığının her bir noktasında diferensiyellenebilir ise, o zaman bu $f(t)$'ye I aralığı üzerinde *diferensiyellenebilir* denir.

Tanım 27: H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun.

$$\int_a^b \left\| f(t) \right\|_H^2 dx < +\infty$$

koşulunu sağlayan $f: [a,b] \to H$, vektör-fonksiyonlarının lineer vektör uzayı $L_2(H,(a,b))$ ile gösterilir. Bu uzay

$$(f,g)_{L_2(H,(a,b))} := \int_a^b \left(f(t), g(t) \right)_H dt, \quad f,g \in L_2(H,(a,b))$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 28: H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında

$$\sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right\|_{L_2(H,(a,b))}^2 < +\infty, \quad f \in L_2(H,(a,b))$$

koşulunu sağlayan $f: [a,b] \to H$, vektör-fonksiyonlarının oluşturduğu küme $W_2^m(H,(a,b))$ ile gösterilir. $\overset{0}{W}{}_2^m(H,(a,b))$ ise, m yinci mertebeye kadar a ve b

noktalarında sıfır olan $W_2^m\left(H,(a,b)\right)$ fonksiyonların uzayı olarak gösterilir. $W_2^m\left(H,(a,b)\right)$ uzayı

$$(f,g)_{W_2^m(H,(a,b))}=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{d^k f(t)}{dt^k},\frac{d^k g(t)}{dt^k}\right)_{L^2(H,(a,b))}$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.

1.5. Lineer Operatörler ve Temel Spektral Özellikleri

Tanım 29: X ve Y iki normlu lineer uzay olsun. $A:D(A)\subset X\to Y$ olan her dönüşüme *operatör* adı verilir.

$D(A):=\{x\in X:\ Ax\ \ tanımlı\}\subset X$ kümesine A operatörünün *tanım kümesi* denir.

$R(A):=AD(A)=\{y=Ax:\ x\in D(A)\}\subset Y$ kümesine A operatörünün *değer kümesi* denir.

$Ker\,A:=\{\,x\in X:\ Ax=0\,\}\subset X$ kümesine A operatörünün *sıfır kümesi* veya *çekirdeği* denir.

Tanım 30: X , Y ve Z üç normlu lineer uzay, $A:D(A)\subset X\to Y$ ve $B:D(B)\subset Y\to Z$ iki operatör ve $R(A)\subset D(B)$ olsun. Her $x\in D(A)$ için

$$BA(x):=B(A(x))$$

şeklinde tanımlı $BA:D(A)\subset X\to Z$ operatörüne A ile B operatörünün bileşkesi denir.

Tanım (Lineer Operatör) 31: X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A:D(A)\subset X\to Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X' de bir lineer manifold ve her $x,y\in D(A)$ ve her $\alpha,\beta\in K$ için

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha A(x)+\beta A(y)$$

ise, A operatörüne X üzerinde bir *lineer operatör* denir.

Tanım 32: X ve Y iki normlu uzaylar, $A: X \to Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(A)$ olsun. Eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta > 0: \ \|x - x_0\| < \delta \text{ olan } \forall x \in D(A) \text{ için } \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$$

ise, A operatörü $x = x_0$ noktasında *süreklidir* denir. A operatörü her $x \in D(A)$ noktasında sürekli ise, operatöre *sürekli operatör* denir.

Tanım (Sınırlı Operatör) 33: X ve Y iki normlu uzaylar, $A: X \to Y$ tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir lineer operatör olsun. Her $x \in D(A)$ için

$$\|Ax\|_Y \le c\|x\|_X$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa A operatörüne $D(A)$ *üzerinde sınırlı operatör* denir. Eğer $D(A) = X$ ise A operatörüne *sınırlı operatör* adı verilir. Bu eşitsizliği sağlayan $c > 0$ sayısının en küçük alt sınırına (infimumuna) A operatörünün *normu* denir ve $\|A\| = c$ şeklinde yazılır. Ayrıca X den X ' e tanımlı bütün lineer sınırlı operatörlerin kümesi $B(X)$ biçiminde gösterilir.

Örnek 34: $X = Y = L_2(a,b)$ ve $k(t,s)$ fonksiyonu $D = [a,b]$ x $[a,b]$, $(a,b \in \mathbb{R})$ karesel bölgesi üzerinde kompleks değerli sürekli bir fonksiyon ve olsun.

$$K: L_2(a,b) \to L_2(a,b),\ Kf(t) := \int_a^b k(t,s)x(s)ds$$

Operatörü lineer sınırlı bir operatördür. Gerçekten K operatörünün lineer olduğu açık olup sınırlı olduğunu gösterelim. Her $f \in L_2(a,b)$ için Cauchy Schwarz eşitsizliğinden

$$\int_a^b |k(t,s) f(s)| ds \le \left(\int_a^b |k(t,s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_a^b |f(s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

olup

$$\|Kf\|^2_{L_2(a,b)} = \int_a^b \left(\int_a^b |k(t,s) f(s)| ds \right)^2 dt \le \|f\|^2_{L_2(a,b)} \int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt$$

olduğu ve buradan $\|K\|^2 \le \int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt$ dolayısıyla $K: L_2(a,b) \to L_2(a,b)$ operatörünün sınırlı olduğu görülür.

Teorem 35: X ve Y iki normlu uzaylar, $A: X \to Y$ lineer operatörü sınırlıdır ancak ve ancak süreklidir [2].

Tanım (Grafik) 36: X ve Y iki Banach uzayı olmak üzere $Z := X \oplus Y$ olsun. $A: X \to Y$ lineer operatörü için,

$$Gr(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset Z = X \oplus Y$$

alt kümesine A operatörünün *grafiği* denir.

Tanım (Kapalı Operatör) 37: $A: X \to Y$ lineer operatörünün grafiği $Gr(A)$, $Z = X \oplus Y$ de kapalı ise A operatörüne *kapalı operatör* denir.

$A: X \to Y$ operatörünün grafiğinin kapalı olması

$$(x_n) \subset D(A), \quad \lim_{n\to\infty}\{x_n, Ax_n\} = \{x, y\}$$

koşullarından $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ denklemini sağlaması demektir.

$\{x, y\} \in X \oplus \mathrm{Y}$ için $\|\{x, y\}\|^2_{X\oplus Y} = \|x\|^2_X + \|y\|^2_Y$ şeklinde olduğundan $A: X \to Y$ lineer operatörü *kapalıdır* $\Leftrightarrow (x_n) \subset D(A)$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$ ise, $x \in D(A)$ ve $y = Ax$.

Örnek 38: $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Af = f'$,

$$D(A) = \{f \in L_2[0,1] : f' \in L_2[0,1], f(0) = 0\}$$

şeklinde tanımlanan operatör kapalıdır.

Gerçekten, $n = 1, 2, ...$ için $f_n(t) = t^n$ ise,

$$\|f_n\|^2_{L_2[0,1]} = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \leq 1 \text{ ve}$$

$$\|Af_n\|^2_{L_2[0,1]} = \int_0^1 n^2 t^{2n-2} dt = \frac{n^2}{2n-1} \to \infty$$

olup A operatörü sınırsızdır. Şimdi A operatörünün kapalı olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için, ilk önce $KerA = \{0\}$ ve $R(A) = L_2[0,1]$ olduğunu not edelim. $g \in L_2[0,1]$

için $f(t)=\int_0^t g(s)\,ds$ alalım. Buradan $f\in D(A)$ ve $Af=g$ 'dır. $g\in L_2[0,1]$ için $A^{-1}g=f$ şeklinde tanımlanır.

$$\left|\left(A^{-1}g\right)(t)\right|\le\int_0^1\left|g(s)\right|ds\le\left(\int_0^1\left|g(s)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}=\|g\|$$

olup A^{-1} sınırlı lineer operatördür. Buradan

$$\left\|A^{-1}g\right\|^2=\int_0^1\left|\left(A^{-1}g\right)(t)\right|^2 dt\le\int_0^1\|g\|^2\,dt=\|g\|^2$$

olup $\left\|A^{-1}\right\|\le 1$ 'dır.

$$f_n\in D(A),\ f_n\to f\ \text{ ve }\ Af_n\to h,\ h\in L_2[0,1]$$

için $f_n=A^{-1}$, $Af_n=A^{-1}h$ olarak alındığında $f=A^{-1}h\in D(A)$ ve $Af=h$ 'dır. Dolayısıyla A operatörü kapalıdır.

Tanım (Kapanabilir Operatör) 39: $A:X\to Y$ operatörünün $D(A)\subset D\left(\overline{A}\right)$ ve her $x\in D(A)$ için $Ax=\overline{A}x$ olacak şekilde bir kapalı $\overline{A}$ operatörü varsa, A 'ya *kapanabilir operatör* ve $\overline{A}$ operatörüne A 'nın *kapanışı* denir.

Tanım (Kompakt Operatör) 40: Bir H Hilbert uzayında sınırlı her kümeyi kompakt kümeye dönüştüren operatöre *kompakt operatör* denir. H üzerindeki lineer kompakt operatörlerin kümesi $\mathfrak{S}_\infty(H)$ notasyonu ile gösterilir.

Örnek 41: $K:L_2(a,b)\to L_2(a,b)$, $Kf(t):=\int_a^b k(t,s)x(s)\,ds$ ve ve $k(t,s)$ fonksiyonu $D=[a,b]$ x $[a,b]$, $(a,b\in\mathbb{R})$ karesel bölgesi üzerinde kompleks değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda K operatörünün kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için $L_2(a,b)$ Hilbert uzayının $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ şeklinde bir ortonormal tabanı olmak üzere

$$\phi_{i,j}(t,s)=\varphi_i(t)\times\varphi_j(s),\ i,j=1,2,\ldots$$

$L_2([a,b]\times[a,b])$ Hilber uzayı için bir taban oluşturur [16]. Bu durumda,

$$k=\sum_{i,j=1}^{+\infty}\left(k,\phi_{i,j}\right)_{L_2([a,b]\times[a,b])}\phi_{i,j}$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca

$$k_n=\sum_{i,j=1}^{n}\left(k,\phi_{i,j}\right)_{L_2([a,b]\times[a,b])}\phi_{i,j},\ n\in\mathbb{N}$$

şeklindeki fonksiyonlar için

$$\left\|k-k_n\right\|_{L_2([a,b]\times[a,b])}\to 0,\ n\to+\infty\ .$$

Buradan $K_n : L_2(a,b)\to L_2(a,b),\ K_n f(t):=\int_a^b k_n(t,s)\,x(s)\,ds$ şeklinde tanımlanan lineer operatörleri $\dim R(K_n)<+\infty$ olduğundan kompakt operatörlerdir. Ayrıca

$$\left\|K-K_n\right\|\le\left\|k-k_n\right\|_{L_2([a,b]\times[a,b])}\to 0,\ n\to+\infty$$

olduğundan K operatörünün kompakt olduğu elde edilir [16].

Tanım (Adjoint Operatör) 42: A, H Hilbert uzayında tanım kümesi yoğun olan bir lineer operatör olsun. Her $x\in D(A)$ ve her $y\in D(A^*)$ için

$$(Ax,y)_H=\left(x,A^*y\right)_H$$

eşitliğini sağlayan lineer A^* operatörüne A 'nın *adjointi* denir.

Örnek 43: $A:L_2(0,1)\to L_2(0,1),\ Af(t):=\int_0^t f(\tau)d\tau$ şeklinde tanımlanan lineer operatörünün adjointini bulalım. Bu durumda her $f,g\in L_2(0,1)$ için

$$\left(Af(t),g(t)\right)_{L_2(0,1)}=\int_0^1 Af(t)\overline{g(t)}dt=\int_0^1\int_0^t f(\tau)d\tau\overline{g(t)}dt$$

$$=\int_0^t f(\tau)d\tau\left.\overline{\left(-\int_t^1 g(\tau)d\tau\right)}\right|_{t=0}^{t=1}+\int_0^1 f(t)\overline{\left(-\int_t^1 g(\tau)d\tau\right)}dt$$

$$=\int_0^1 f(t)\overline{\left(-\int_t^1 g(\tau)d\tau\right)}dt=\left(f(t),-\int_t^1 g(\tau)d\tau\right)_{L_2(0,1)}$$

olup buradan

$$A^*g(t)=-\int_t^1 g(\tau)d\tau,$$

olduğu bulunur.

Tanım 44: A, H Hilbert uzayında bir lineer operatör ve A^*, A operatörünün adjoint operatörü olsun.

Eğer $D(A) \subset D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^* f$, yani

$\forall f, g \in D(A)$ için $(Af, g)_H = (f, Ag)_H$

ise, A operatörüne *simetrik operatör* denir ve $A \subset A^*$ sembolüyle gösterilir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^* f$ ise, A operatörüne *selfadjoint operatör* denir.

Eğer H Hilbert uzayında lineer kapalı bir A operatörü için

a) $D(A) \subset D(A^*)$ ve

b) Her $f \in D(A)$ için $\|Af\|_H = \|A^* f\|_H$

ise, A'ya H'da *formal normal operatör* adı verilir.

Eğer A, H Hilbert uzayında formal normal ve $D(A) = D(A^*)$ ise, A operatörüne H'da *normal operatör* denir.

Eğer her $f \in H$ için $AA^* f = A^* Af = f$ ise, A operatörüne *üniter operatör* denir.

Eğer her $f \in H$ için $A^* Af = f$ ise, A operatörüne *izometrik dönüşüm* denir.

Örnek 45: $H = L_2[0,+\infty)$, $A : D(A) \subset H \to H$, $Au := u'(t)$ ve

$$D(A) := \{u(t) \in L_2[0,+\infty) : u(0) = 0,\ u'(t) \in L_2[0,+\infty)\}$$

ise, A $L_2[0,+\infty)$ uzayında bir formal normal operatördür.

Gerçekten, bu durumda

$$A^* u = -u'(t),$$

$$D(A^*) = \{u(t) \in L_2[0,+\infty) : u'(t) \in L_2[0,+\infty)\}$$

olup $D(A) \subset D(A^*)$ ve her $u \in D(A)$ için

$$\|Au\|_{L_2[0,+\infty)} = \|u'(t)\|_{L_2[0,+\infty)} = \|-u'(t)\|_{L_2[0,+\infty)} = \|A^* u\|_{L_2[0,+\infty)}$$

olduğundan A bir formal normal operatördür.

Tanım (Akkretif Operatör) 46: H bir Hilbert uzay, A ise H üzerinde $\overline{D(A)}=H$ olan lineer bir operatör olsun. Eğer, $\forall x \in D(A)$ için

$$\operatorname{Re}(Ax, x)_H \geq 0$$

ise A operatörüne *akkretif operatör* denir.

Teorem 47: Her akkretif operatör kapanabilir operatördür [13].

Tanım (Pozitif Operatör) 48: A, H Hilbert uzayında bir lineer selfadjoint operatör olsun. Eğer her $f \in D(A)$ için

$$(Af, f)_H \geq 0$$

ise, A operatörüne *pozitif operatör* denir ve $A \geq 0$ sembolüyle gösterilir. Eğer A pozitif operatörü için $B^2 = A$ olacak şekilde bir B pozitif lineer operatörü varsa, B operatörüne A'nın *karekökü* denir ve $B = \sqrt{A}$ veya $B = A^{1/2}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 49: H Hilbert uzayında tanımlı her pozitif operatörün bir pozitif karekökü mevcut ve bu karekök operatörü bir tektir [2].

Tanım (Rezolvent Küme) 50: H bir Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in B(X)\right\}$$

kompleks sayılar kümesine A operatörünün *rezolvent kümesi* denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) := (A - \lambda E)^{-1}$ operatörüne A operatörünün *rezolventası* (veya *çözücü operatörü*) adı verilir.

Tanım (Spektrum) 51: H bir Hilbert uzayı olsun. $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$ kümesine A operatörünün *spektrumu* denir. A operatörünün spektrum kümesi $\sigma(A)$ ile gösterilir.

Tanım (Ayrık Spektrum) 52: $\sigma_p(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E) \text{ operatörü bire bir değil}\right\}$

kümesine A operatörünün *ayrık* veya *diskret spektrumu* denir. Eğer $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$ ise,

$$(A-\lambda_0 E)x_0 = 0$$

denkleminin $x_0 \neq 0$ çözümü vardır. Buradaki λ_0'a A operatörünün *özdeğeri*, x_0' a ise λ_0' a uygun bir *özvektörü* denir.

Tanım (Sürekli Spektrum) 53:

$$\sigma_c(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A-\lambda E) \text{ bire bir, } \overline{R(A-\lambda E)} = H, \text{ fakat } R(A-\lambda E) \neq H\right\}$$

kümesine A operatörünün *sürekli spektrumu* denir.

Tanım (Artık Spektrum) 54:

$$\sigma_r(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A-\lambda E) \text{ bire bir, } \overline{R(A-\lambda E)} \neq H\right\}$$

kümesine A operatörünün *artık spektrumu* denir.

$\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ ve $\sigma_r(A)$ kümeleri ayrıktır. Ayrıca spektrumun tanımından $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ olduğu kolayca görülür.

Örnek 55: $H = L_2(0,1)$ uzayında,

$$A : L_2(0,1) \to L_2(0,1), \; Af(x) = \int_0^1 \min(x,y) f(y)\,dy$$

şeklinde tanımlanan operatörün spektrumunu bulalım.

Her $f \in L_2(0,1)$ için A operatörü,

$$Af(x) = \int_0^1 \min(x,y) f(y)\,dy = \int_0^x y f(y)\,dy + x\int_x^1 f(y)\,dy$$

şeklinde yazabiliriz. İlk önce A operatörünün ayrık spektrumunu inceleyelim.

$\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$Af(x) = \lambda f(x), \; f \in L_2(0,1)$$

denkleminin çözümünü bulalım. Bu halde

$$\int_0^x y f(y)\,dy + x\int_x^1 f(y)\,dy = \lambda f(x)$$

denklemini çözmek için her iki tarafın türevini alırsak,

$$xf(x)+\int_x^1 f(y)\,dy - xf(x) = \lambda f'(x)$$

denklemini, yani

$$\int_x^1 f(y)\,dy = \lambda f'(x)$$

elde ederiz. Bulunan denklemin tekrar her iki tarafının türevi alınırsa,

$$-f(x) = \lambda f''(x).$$

Burada eğer $\lambda = 0$ ise, $f = 0$ bulunur. Yani

$$\lambda = 0 \notin \sigma_p(A).$$

Şimdi $\lambda \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{C}$ olduğunu kabul edelim. O halde yukarıdaki yapılan işlemlerden bakılan problem

$$\begin{cases} f''(x) = -\dfrac{1}{\lambda} f(x),\ f \in L_2(0,1),\ \lambda \in \mathbb{C} \\ f(0) = f'(1) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemine dönüşür. Bu denklemin çözümü

$$f(x) = c_1 e^{\frac{-i}{\sqrt{\lambda}}x} + c_2 e^{\frac{i}{\sqrt{\lambda}}x},\ x \in [0,1]$$

şeklindedir. $f(0) = 0$ ve $f'(1) = 0$ sınır değerleri kullanılırsa,

$$c_1 + c_2 = 0 \text{ ve } c_1 \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \left(e^{\frac{i}{\sqrt{\lambda}}} + e^{-\frac{i}{\sqrt{\lambda}}} \right) = 0$$

buradan da,

$$e^{\frac{2i}{\sqrt{\lambda}}} = -1$$

elde edilir. Son eşitlikten

$$\frac{2i}{\sqrt{\lambda}} = \ln 1 + i\arg(-1) + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$$

ve buradan da

$$\frac{2i}{\sqrt{\lambda}} = (2k+1)\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$$

olduğu görülür. Bu sonuncudan ise, A 'nın özdeğerlerinin

$$\lambda_k = \frac{4}{(2k+1)^2 \pi^2} = \left(k\pi + \frac{\pi}{2} \right)^{-2},\ k \in \mathbb{Z}$$

şeklinde olduğu bulunur, yani

$$\sigma_p(A)=\left\{\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{-2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$$

elde edilir.

$A:L_2(0,1)\to L_2(0,1)$, $A\in\mathfrak{S}_\infty(L_2(0,1))$ ve $\dim L_2(0,1)=+\infty$ olduğundan A^{-1} sınırlı olamaz. Ayrıca $0\notin\sigma_p(A)$ ve $\sigma_r(A)=\varnothing$ olduğundan $0\in\sigma_c(A)$.

Sonuç olarak A operatörünün spektrumu

$$\sigma(A)=\{0\}\cup\left\{\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{-2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$$

şeklinde olduğu bulunur.

Teorem 56: Eğer A lineer operatörü bir sonlu boyutlu X lineer uzayında tanımlı olsun. Bu takdirde $\sigma_c(A)=\varnothing$ ve $\sigma_r(A)=\varnothing$ [2].

Teorem 57: Eğer A lineer normal operatör ise, $\sigma_r(A)=\varnothing$ [2].

Tanım 58: A, bir H Hilbert uzayında lineer operatör ve $\lambda\in\sigma_p(A)$ olsun. Bu λ özdeğerine karşılık gelen özvektörlerinin ürettiği lineer alt uzay $H_\lambda(A)$ ile gösterilir.

Tanım (Defekt Sayıları) 59: A, bir H Hilbert uzayında lineer operatör ve $n_+=\dim H_{-i}(A^*)$, $\mathrm{n}_-=\dim H_i(A^*)$ olsun. (n_+,n_-) sayılarına A operatörünün *defekt sayıları* denir.

Tanım (Sınır Değerler Uzayı) 60: $A:D(A)\subset H\to H$, H Hilbert uzayında eşit defekt sayılı kapalı simetrik bir operatör olsun. $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı, $\gamma_1,\gamma_2:D(A^*)\to\mathcal{H}$ iki lineer dönüşüm olsun. Eğer:

i) Her $f,g\in D(A^*)$ için

$$(A^*f,g)_H-(f,A^*g)_H=(\gamma_1 f,\gamma_2 g)_{\mathcal{H}}-(\gamma_2 f,\gamma_1 g)_{\mathcal{H}};$$

ii) Her $x, y \in \mathcal{H}$ için $\gamma_1 f = x$ ve $\gamma_2 f = y$ koşulunu sağlayan bir $f \in D\left(A^*\right)$ elemanı mevcut;

ise, $\left(\mathcal{H}, \gamma_1, \gamma_2\right)$ üçlüsüne A operatörü için bir *sınır değerler uzayı* denir.

Teorem 61: Defekt sayıları eşit (n,n), $n \leq +\infty$ olan her simetrik operatör için bir $\left(\mathcal{H}, \gamma_1, \gamma_2\right)$ sınır değerler uzayı vardır ve $\dim \mathcal{H} = n$ dir [18].

Tanım (Pozitif ve Negatif Uzaylar) 62: $A = A^* \geq E$, A^j operatörü ile tanımlanan $H_j\left(A\right)$ $-\infty < j < +\infty$, Hilbert derecelendirme uzaylarını tanımlayalım.

$H = H_0$, kompleks sayılar cismi üzerinde $\left(\cdot,\cdot\right)_{H_0}$ iç çarpımı ve $f \in H_0$ için

$$\left\|f\right\|_{H_0} = \left(f, f\right)_{H_0}^{1/2}$$

normuyla tanımlı bir Hilbert uzayı olsun. Burada A , H Hilbert uzayı üzerinde bir lineer selfadjoint operatör ve

$$\left\|Af\right\|_{H_0} \geq \left\|f\right\|_{H_0} .$$

$D\left(A^j\right)$, $0 < j < +\infty$, kümesi

$$\left(f, g\right)_{H_{+j}} := \left(A^j f, A^j g\right)_{H_0} , \quad f, g \in D\left(A^j\right)$$

iç çarpımıyla bir Hilbert uzayıdır.

$H_{+j} := H_{+j}\left(A\right)$, $0 < j < +\infty,$ uzayına *pozitif uzay* denir. $H_{+j} := H_{+j}\left(A\right)$, $0 < j < +\infty,$ Hilbert uzayının H Hilbert uzayındaki iç çarpıma göre dual uzayı $H_{-j} := H_{-j}\left(T\right)$, $0 < j < +\infty,$ şeklinde gösterilir ve *negatif uzay* denir.

Tanım (s -sayıları) 63: A , H Hilbert uzayında bir kompakt lineer operatör olsun. $A^* A$ ve $\left|A\right| = \left(A^* A\right)^{1/2}$ operatörleri negatif olmayan kompakt operatörlerdir. Dolayısıyla $\left|A\right|$ ’ nın $\lambda_n\left(\left|A\right|\right)$ özdeğerleri negatif değildir ve $n \to \infty$ iken monoton olarak $\lambda_n\left(\left|A\right|\right) \to 0$. Bu sayılara A operatörünün *s -sayıları, karakteristik sayıları* veya *singüler sayıları* denir ve $s_n\left(A\right)$, $n \in \mathbb{N}$ ile gösterilir.

Tanım (Operatör Değerli Fonksiyonlar) 64: B bir Banach uzayı ve $\Omega \subset \mathbb{C}$ olsun. Ω üzerinde tanımlı, B Banach uzayından B Banach uzayına lineer sınırlı operatör değerleri alan fonksiyonlara *operatör değerli fonksiyonlar* denir.

Bir $A(t)$ operatör fonksiyonunun *düzgün sürekliliği* (düzgün türevlenebilirliği vb.) B Banach uzayında vektör-fonksiyonların sürekliliği (türevlenebilirliği vb.) şeklinde tanımlanır.

$A(t)$ operatör fonksiyonunun *güçlü sürekliliği* (güçlü türevlenebilirliği vb.) B Banach uzayında her $x \in B$ için $A(t)x$ vektör-fonksiyonlar ailesinin sürekliliği (türevlenebilirliği vb.) şeklinde tanımlanır.

$A(t)$ operatör fonksiyonunun *zayıf sürekliliği* (güçlü türevlenebilirliği vb.) B Banach uzayında her $x \in B$ için $A(t)x$ vektör-fonksiyonlar ailesinin zayıf sürekliliği (türevlenebilirliği vb.) şeklinde tanımlanır.

Tanım (Lineer Bağıntı) 65: H bir Hilbert uzayı ve $H^2 = H \oplus H$ olsun. H^2 Hilbert uzayında her lineer manifolda, H Hilbert uayında bir *lineer bağıntı* denir.

Not: θ, H Hilbert uzayında bir lineer bağıntı ve

$$\theta(x) := \{x' \in H : \{x, x'\} \in \theta,\ x \in H\}$$

olarak tanımlanır. Eğer $\theta(0) = \{0\}$ ise, θ bir lineer operatördür.

Tanım 66: θ, H Hilbert uzayında bir lineer bağıntı olsun.

$$\theta^* = \left\{\{y, y'\} \in H^2 : \forall \{x, x'\} \in \theta \text{ } \textit{için} \ (y, x')_H = (y', x)_H\right\}$$

şeklinde tanımlanan lineer bağıntısına θ lineer bağıntısının *adjointi* denir.

Eğer θ lineer bağıntısı için

$$\theta^* = \theta,$$

ise, θ lineer bağıntısına *selfadjointtir* denir.

Teorem 67: $\theta = \left\{ \left\{ x, x' \right\} \in H^2 : x, x' \in H \right\}$ şeklinde bir lineer bağıntı olsun. θ lineer bağıntısının selfadjoint olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\left(W - E \right) x' + i \left(W + E \right) x = 0 ,$$

eşitliğini sağlayan $W : H \rightarrow H$ bir tek üniter operatörünün mevcut olmasıdır [18].

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Birinci Mertebeden Düzgün Katsayılı Normal Diferensiyel Operatörler

2.1.1. Normal Genişlemerin Sınır Değerler Dilinde İfadesi

Bu bölümde $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında $A(t)$ her $t\in[a,b]$ için H Hilbert uzayında lineer sınırlı selfadjoint operatörler ve $A(t):[a,b]\to B(H)$ operatör fonksiyonu güçlü sürekli olmak üzere,

$$l(u)=u'(t)+A(t)u(t) \tag{1}$$

şeklinde göstereceğimiz birinci mertebeden lineer diferensiyel-operatör ifadesi ele alınacaktır.

Bu durumda $A(t)$, $t\in[a,b]$ operatör ailesi $[a,b]$ aralığı üzerinde düzgün sınırlıdır, yani bir $M>0$ sayısı mevcuttur öyle ki her $t\in[a,b]$ için $\|A(t)\|\leq M$ ve (1)' e uygun Cauchy problemi çözülebilirdir. Ayrıca verilen diferensiyel ifadesinin $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında formal eşlenik ifadesinin

$$l^+(u)=-u'(t)+A(t)u(t) \tag{2}$$

formunda olduğu açıktır.

Şimdi $l(\cdot)$ ve $l^+(\cdot)$ diferensiyel ifadelerinin ürettiği maksimal ve minimal operatörleri tanımlayalım.

Öncelikle, $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında yoğun tanımlı vektör-fonksiyonların lineer manifoldu üzerinde

$$D_0' := \left\{ u(t) \in L_2\left(H,(a,b)\right) : u(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) x_k,\ \varphi_k(t) \in C_0^\infty(a,b),\ x_k \in H,\ k=1,2,\dots,n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$L_0'u = l(u)$, $u \in D_0'$ operatörünü ele alalım.

$$m(u) = u'(t)$$

diferensiyel ifadesinin D_0' kümesi üzerinde $M_0'u := m(u)$ operatörü akkretif operatördür, yani $\overline{D_0'} = L_2(H,(a,b))$ ve her $u \in D_0'$ için

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\left(M_0'u,u\right)_{L_2(H,(a,b))}\right) &= \operatorname{Re}\left(\left(mu(t),u(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\left(u'(t),u(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}\right) = \operatorname{Re}\left(\int_a^b \left(u'(t),u(t)\right)_H dt\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\left(u(t),u(t)\right)_H\Big|_a^b - \int_a^b \left(u(t),u'(t)\right)_H dt\right) = \operatorname{Re}\left(-\left(u(t),u'(t)\right)_{L_2(H,(a,c))}\right) \\
&= -\operatorname{Re}\left(\left(u,M_0'u\right)_{L_2(H,(a,b))}\right) = -\operatorname{Re}\left(\left(M_0'u,u\right)_{L_2(H,(a,b))}\right)
\end{aligned}$$

buradan $\operatorname{Re}\left(\left(M_0'u,u\right)_{L_2(H,(a,b))}\right) = 0 \geq 0$. Böylece M_0' operatörünün kapanışı vardır [13]. Ayrıca $A(t):[a,b] \to B(H)$ operatör fonksiyonu güçlü sürekli olduğundan, $t \in [a,b]$ için $D\left(A(t)\right) = H$ olup kapalı operatörlerdir.

Böylece L_0' operatörünün kapanışına $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi tarafından üretilen *minimal operatör* denir ve L_0 sembolüyle gösterilir.

Benzer yolla $l^+(\cdot)$ diferensiyel ifadesinin $L_2\left(H,(a,b)\right)$ üzerinde ürettiği L_0^+ *minimal operatörünün* tanımı verilebilir. L_0^+ (L_0) operatörünün $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayındaki eşlenik operatörüne $l(\cdot)$ ($l^+(\cdot)$) ifadesinin ürettiği *maksimal operatör* denir ve L (L^+) şeklinde gösterilir. $L_0 \subset L$, $L_0^+ \subset L^+$, $D(L_0) = \overset{0}{W}{}_2^1\left(H,(a,b)\right)$ ve $D(L) = W_2^1\left(H,(a,b)\right)$ olduğu açıktır [3, 18].

Teorem 1: $A(t)$ operatör fonksiyonu, (a,b) aralığı üzerinde güçlü türevlenebilir ve $\|A'(t)\| \in L_2(a,b)$ ise, minimal operatörünün $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında formal normal operatör olması için gerek ve yeter koşul (a,b) üzerinde hemen her yerde $A'(t)=0$ olmasıdır.

İspat: L_0 minimal operatörü $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında formal normal operatör olsun. Bu takdirde her $u \in D(L_0) \subset D(L^+)$ için

$$
\begin{aligned}
\|L_0u(t)\|_{L^2}^2 - \|L^+u(t)\|_{L^2}^2 &= \\
&= \left(u'(t)+A(t)u(t),u'(t)+A(t)u(t)\right)_{L^2} - \left(-u'(t)+A(t)u(t),-u'(t)+A(t)u(t)\right)_{L^2} \\
&= 2\left[\left(u'(t),A(t)u(t)\right)_{L^2} + \left(A(t)u(t),u'(t)\right)_{L^2}\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

eşitliği doğrudur. Bu eşitlikte $u(t)=\varphi(t)x \in D(L_0)$, $\overline{\varphi}=\varphi$, $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ şeklinde verilen özel vektör-fonksiyonları yukarıdaki eşitlikte yerine konulursa,

$$
\begin{aligned}
&\left(u'(t),A(t)u(t)\right)_{L^2} + \left(A(t)u(t),u'(t)\right)_{L^2} = \left(\varphi'(t)x,A(t)\varphi(t)x\right)_{L^2} + \left(A(t)\varphi(t)x,\varphi'(t)x\right)_{L^2} \\
&= \int_a^b \varphi'(t)\overline{\varphi(t)}\left(x,A(t)x\right)_H dt + \int_a^b \varphi(t)\overline{\varphi'(t)}\left(A(t)x,x\right)_H dt \\
&= \int_a^b 2\varphi(t)\varphi'(t)\left(A(t)x,x\right)_H dt = \varphi^2(t)\left(x,A(t)x\right)_H\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \varphi(t)\varphi(t)\left(A(t)x,x\right)'_H dt \\
&= -\int_a^b |\varphi(t)|^2 \left(A(t)x,x\right)'_H dt = 0.
\end{aligned}
$$

Şimdi $\sigma_x(t) := \left(A(t)x,x\right)_H$, $a \le t \le b$ şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. Yukarıdaki eşitlik kullanılırsa,

$$
\int_a^b \sigma_x'(t)|\varphi(t)|^2 dt = 0
$$

olduğu elde edilir.

Bu bağıntı reel değerli her $\varphi \in \overset{0}{W_2^1}(a,b)$ fonksiyonları için doğru olduğunda bu şekildeki her $\varphi,\psi \in \overset{0}{W_2^1}(a,b)$ için

$$\int_a^b \sigma_x'(t)\left|\varphi(t)+\psi(t)\right|^2 dt = \int_a^b \sigma_x'(t)\left|\varphi(t)\right|^2 dt + 2\int_a^b \left[\sigma_x'(t)\varphi(t)\right]\psi(t)\,dt + \int_a^b \sigma_x'(t)\left|\psi(t)\right|^2 dt$$

$$= 2\int_a^b \left[\sigma_x'(t)\varphi(t)\right]\psi(t)\,dt = 0.$$

Böylece $\psi \in \overset{0}{W_2^1}(a,b)$ keyfi olduğundan, (a,b) üzerinde Lebesgue anlamında hemen her yerde

$$\sigma_x'(t)\varphi(t) = 0$$

olduğu sonucu elde edilir.

Ayrıca $\varphi \in \overset{0}{W_2^1}(a,b)$ keyfi bir fonksiyon olup bu son eşitlikten (a,b) üzerinde Lebesgue anlamında hemen her yerde $\sigma_x'(t) = 0$ eşitliği doğrudur. Bu ise her $x \in H$ doğru olup, her $x \in H$ için hemen her yerde $\left(A'(t)x,x\right)_H = 0$ bağıntısı sağlanır. Böylece hemen her yerde $A'(t) = 0$ olduğu bulunur.

Tersine, hemen her yerde $A'(t) = 0,\ a < t < b$ ise, L_0 minimal operatörünün $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında formal normal operatör olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

◇

Not: $A(t)$ operatör fonksiyonunun, (a,b) aralığı üzerinde zayıf türevlenebilir olması durumlarda da Teorem 1' in iddiası doğrudur.

Buradan aşağıdaki teoremlerin doğruluğu açıktır.

Teorem 2: $A(t)$ operatör fonksiyonu için $\|A(t)\| \in L_2(a,b)$ ise, minimal operatörünün $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında formal normal operatör olması için gerek ve yeter koşul (a,b) üzerinde hemen her yerde $A(t) = sabit$ olmasıdır.

Eğer hemen her yerde $A'(t) = 0,\ a < t < b$ ise, $A(t)$ operatör fonksiyonu için parçalı sabittir denilemez. Hatta $\dim H = 1$ olması durumunda bile bu iddia doğru değildir.

Şimdi bu duruma bir örnek verelim. Öncelikle bir küme dizisi tanımlayalım. $[0,1]$aralığını üç eşit parçaya bölelim ve ortadaki açık aralığa $I_{1,1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ diyelim. Diğer iki kapalı aralığı üç eşit parçaya bölüp bu parçaların ortalarındaki açık aralıkları $I_{2,1} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ ve $I_{2,2=}\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$olarak gösterelim. Bu işlemi art arda tekrarlayarak $n.$ adımda $I_{n,k}$, $k = 1,2,\ldots,2^{n-1}$ şeklinde açık aralıklar elde edilir. Bu kümelerin birleşimi yani, $G := \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}\right)$ açık kümesi üzerinde $\phi_0 : G \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$\phi_0(t) = \frac{2k-1}{2^n},\ \ t \in I_{n,k},\ n \in \mathbb{N},\ k = 1,2,\ldots,2^{n-1}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyon G kümesi üzerinde düzgün süreklidir. Gerçekten her $\varepsilon > 0$ için $\frac{1}{2^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mevcuttur. $\delta = \frac{1}{3^{n_\varepsilon}}$ olarak alınırsa $|t_1 - t_2| < \delta$ koşulunu gerçekleyen her $t_1, t_2 \in G$ için

$$|\phi_0(t_1) - \phi_0(t_2)| \le \frac{1}{2^{n_\varepsilon}} < \varepsilon\ .$$

Böylece $\phi_0 : G \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\overline{G} = [0,1]$ kümesi üzerinde

$$\lim_{n\to\infty} a_n = t,\ (a_n) \subset G \text{ ve } \phi(t) := \lim_{n\to\infty} \phi_0(a_n)$$

şeklinde tek türlü sürekli genişlemesi mevcuttur. Bu $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyona Cantor fonksiyonu denir. Şimdi $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde monoton artan

$\phi(0)=0$ ve $\phi(1)=1$ olduğunu gösterelim. $t_1,t_2\in[0,1]$ ve $t_1<t_2$ olsun. $\overline{G}=[0,1]$ eşitliği doğru olduğundan $a_n \searrow t_1$, $b_n \nearrow t_2$, $n\to+\infty$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $a_n<b_n$ olacak şekilde $(a_n),(b_n)\subset G$ dizileri seçilebilir. $\phi:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\lim_{n\to\infty}\phi(a_n)=\phi(t_1) \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\phi(b_n)=\phi(t_2).$$

Ayrıca her $n\in\mathbb{N}$ için $a_n<b_n$ olduğundan $\phi(a_n)\le\phi(b_n)$ olup

$$\lim_{n\to\infty}\phi(a_n)\le\lim_{n\to\infty}\phi(b_n)$$

yani, $\phi(t_1)\le\phi(t_2)$ dır. Böylece verilen fonksiyonun monoton artan olduğu elde edilir.

Şimdi $\left(\dfrac{1}{3^n}\right),\left(\dfrac{3^n-1}{3^n}\right)\subset G,\ n\in\mathbb{N}$ dizilerini alalım. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-1}{3^n}=1$ olduğu açıktır.

$$\lim_{n\to\infty}\phi\left(\frac{1}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\phi\left(\frac{3^n-1}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2*2^{n-1}-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1.$$

Buradan artan $\phi(0)=0$ ve $\phi(1)=1$ olduğu sonucuna ulaşılır.

Bu fonksiyon $C:=[0,1]\setminus G$ Cantor kümesinin Lebesgue ölçümü sıfır olduğundan hemen her yerde $\phi'(x)=0$ dır [14, 55].

Şimdi hemen her yerde $A'(t)=0,\ a<t<b$ olması durumunda L_0 minimal operatörünün $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında tüm normal genişlemelerini sınır değerleri dilinde ifadesini verelim.

Teorem 3: $A(t)$, her $t \in [a,b]$ için H Hilbert uzayında lineer sınırlı selfadjoint operatör, $A(a),\ A(b) \geq E$, $A(t):[a,b] \to B(H)$ operatör fonksiyonu güçlü türevlenebilir ve (a,b) aralığı üzerinde hemen her yerde $A'(t)=0$ olsun.

$L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında, (1) diferensiyel ifadenin ürettiği L_0 minimal operatörünün her bir L_n, $L_0 \subset L_n \subset L$, normal genişlemeleri, $W: H \to H$ üniter operatör ve $WA(a) = A(b)W$ koşulunu sağlamak üzere,

$$u(b) = Wu(a) \tag{3}$$

sınır koşuluyla ifade edilebilir. Buradaki $W: H \to H$ üniter operatörü L_n normal operatörü tarafından tektürlü belirlenir, yani $L_n = L_W$.

Tersine, L maksimal operatörünün keyfi bir $W: H \to H$, $WA(a) = A(b)W$ üniter operatör için (3) sınır koşullarını sağlayan $u(t) \in W_2^1(H,(a,b))$ vektör- fonksiyonlarının alt uzayı üzerine kısıtlanışı, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesidir.

İspat: L_n, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olsun. Bu durumda

$$\operatorname{Re}(L_n)u(t) = A(t)u(t),\ u(t) \in D(L_n),$$

$$\operatorname{Im}(L_n)u(t) = -i\frac{d}{dt}u(t),\ u(t) \in D(L_n)$$

operatörleri, $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında selfadjointtir.

$$\mathcal{H} := H,\ \gamma_1(u) := \frac{u(a)+u(b)}{\sqrt{2}},\ \gamma_2(u) := \frac{u(a)-u(b)}{i\sqrt{2}}$$

şeklinde tanımlanan $(\mathcal{H},\gamma_1,\gamma_2)$ üçlüsü $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında $\operatorname{Im}(L_0)$ minimal operatörü için bir sınır değerler uzayı olduğunu gösterelim.

Her $u,v \in W_2^1(H,(a,b))$ için

$$\left(\operatorname{Im}\left(L_0^*\right)u,v\right)_{L^2}-\left(u,\operatorname{Im}\left(L_0^*\right)v\right)_{L^2}=\left(-iu',v\right)_{L^2}-\left(u,-iv'\right)_{L^2}$$
$$=\int_a^b\left(-iu'(t),v(t)\right)_H dt-\int_a^b\left(u(t),-iv'(t)\right)_H dt$$
$$=-i\left(u(t),v(t)\right)_H\Big|_a^b+\int_a^b\left(u(t),-iv'(t)\right)_H dt-\int_a^b\left(u(t),-iv'(t)\right)_H dt$$
$$=i\left[\left(u(a),v(a)\right)_H-\left(u(b),v(b)\right)_H\right]$$

ve

$$\left(\gamma_1(u),\gamma_2(v)\right)_H-\left(\gamma_2(u),\gamma_1(v)\right)_H=\frac{i}{2}\left[\left(u(a)+u(b),v(a)-v(b)\right)_H+\left(u(a)-u(b),v(a)+v(b)\right)_H\right]$$
$$=\frac{i}{2}\Big[\left(u(a),v(a)\right)_H-\left(u(a),v(b)\right)_H+\left(u(b),v(a)\right)_H-\left(u(b),v(b)\right)_H$$
$$+\left(u(a),v(a)\right)_H+\left(u(a),v(b)\right)_H-\left(u(b),v(a)\right)_H-\left(u(b),v(b)\right)\Big]$$
$$=i\left[\left(u(a),v(a)\right)_H-\left(u(b),v(b)\right)_H\right]$$

yani, her $u,v\in W_2^1\left(H,(a,b)\right)$ için

$$\left(\operatorname{Im}\left(L_0^*\right)u,v\right)_{L^2}-\left(u,\operatorname{Im}\left(L_0^*\right)v\right)_{L^2}=\left(\gamma_1(u),\gamma_2(v)\right)_H-\left(\gamma_2(u),\gamma_1(v)\right)_H.$$

Her $x_1,x_2\in\mathcal{H}$ için $u(t)=\dfrac{x_1 i\sqrt{2}\,(a-t)}{b-a}+\dfrac{x_1+ix_2}{\sqrt{2}}\in W_2^1\left(H,(a,b)\right)$ olmak üzere $u(a)=\dfrac{x_1+ix_2}{\sqrt{2}}$ ve $u(b)=\dfrac{x_1-ix_2}{\sqrt{2}}$. Buradan $\gamma_1(u)=x_1$ ve $\gamma_2(u)=x_2$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Ayrıca $\operatorname{Im}(L_0)$ minimal operatörü simetrik bir operatördür, yani her $u(t),v(t)\in D\left(\operatorname{Im}(L_0)\right)$ için

$$\left(\operatorname{Im}(L_0)u(t),v(t)\right)_{L^2}=\left(-iu'(t),v(t)\right)_{L^2}=\int_a^b\left(-iu'(t),v(t)\right)_H dt$$
$$=\left(-iu(t),v(t)\right)_H\Big|_a^b-\int_a^b\left(-iu(t),v'(t)\right)_H dt$$
$$=-\int_a^b\left(-iu(t),v'(t)\right)_H dt=\int_a^b\left(u(t),-iv'(t)\right)_H dt$$
$$=\left(u(t),-iv'(t)\right)_{L^2}$$

yani, $\operatorname{Im}(L_0) \subset \operatorname{Im}(L_0)^*$. Böylece $\operatorname{Im}(L_0)$ minimal operatörünün $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında bir $\operatorname{Im}(L_n)$ selfadjoint genişlemesi vardır. Ayrıca bu genişleme tarafından tek türlü belirlenen bir $W : H \to H$ üniter operatör mevcuttur öyle ki $\operatorname{Im}(L_n)$ selfadjoint genişlemesi

$$(W-E)\gamma_1(u)+i(W+E)\gamma_2(u)=0$$

sınır koşullarıyla tanımlanır. Başka bir deyişle her bir $\operatorname{Im}(L_n)$ selfadjoint genişlemesi

$$u(b)=Wu(a),\ u \in D(L_n)$$

sınır değeriyle ifade edilir.

L_n, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olduğundan reel ve sanal kısımları değişmeli olup her $u(t) \in D(L_n)$ için

$$\left(\operatorname{Re}(L_n)u(t),\operatorname{Im}(L_n)u(t)\right)_{L^2} = \left(\operatorname{Im}(L_n)u(t),\operatorname{Re}(L_n)u(t)\right)_{L^2}$$

eşitliği sağlanır. Buradan her $u(t) \in D(L_n)$ için

$$\left(u'(t),A(t)u(t)\right)_{L^2} + \left(A(t)u(t),u'(t)\right)_{L^2} = 0$$

ve bu sonuçtan,

$$\begin{aligned} 0 = \left(u(t),A(t)u(t)\right)_{L^2}' &= \left(u(b),A(b)u(b)\right)_H - \left(u(a),A(a)u(a)\right)_H \\ &= \left\|A^{1/2}(b)u(b)\right\|_H^2 - \left\|A^{1/2}(a)u(a)\right\|_H^2 . \end{aligned}$$

Böylece her $u(t) \in D(L_n)$ için $\left\|A^{1/2}(b)u(b)\right\|_H = \left\|A^{1/2}(a)u(a)\right\|_H$ eşitliği doğrudur.

Ayrıca $V : H \to H,\ VA^{1/2}(a)u(a) = A^{1/2}(b)u(b)$ şeklinde tanımlı bir izometrik operatör mevcuttur. $U := A^{-1/2}(b)VA^{1/2}(a)$ şeklindeki operatörü ele alalım. Bu durumda

$$(U-E)\gamma_1(u)+i(U+E)\gamma_2(u)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(U-E)(U+E)u(a)+(U+E)(E-U)u(a)\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(U-E)(U+E)-(U+E)(U-E)\right]u(a)$$
$$=0$$

eşitliği elde edilir. W üniter operatörü, $\operatorname{Im}(L_n)$ operatörü tarafından tek türlü belirlendiği için U bir üniter operatördür ve $U=W$, yani

$$A^{-1/2}(b)VA^{1/2}(a)=W, \quad VA^{1/2}(a)=A^{1/2}(b)W .$$

Dolayısıyla V üniter operatördür ve $V=A^{1/2}(b)WA^{-1/2}(a)$. Ayrıca $WA(a)=A(b)W$ eşitliği doğrudur.

$W:H\to H$ $WA(a)=A(b)W$ koşulu sağlayan bir üniter operatör olmak üzere

$$L_W u=l(u),\ D(L_W)=\left\{u\in W_2^1\left(H,(a,b)\right):\ u(b)=Wu(a)\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $L_W^{\ *}$, $l^+(u)=-u'(t)+A(t)u(t)$ diferensiyel ifadenin ürettiği $v(a)=W^*v(b)$, $v(t)\in D\left(L_W^{\ *}\right)$ sınır koşullarını sağlayan adjoint operatördür. W üniter operatör olduğundan $D(L_W)=D\left(L_W^{\ *}\right)$ olup, L_W (1) ifadesinin ürettiği bir normal genişlemedir. ◇

Uyarı: Yukarıda verilen teoremin sonuçları her $t\in[a,b]$ için $A(t)$, H Hilbert uzayında bir lineer sınırlı normal operatör, $[a,b]$ aralığı üzerinde $A_R(t)$ güçlü türevlenebilir ve (a,b) açık aralığında hemen her yerde $A_R'(t)=0$ olması durumunda benzer şekilde verilebilir.

Uyarı: Teorem 2' de bir Dirichlet genişlemesinin ($W=E$) $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında normal bir genişleme olması için gerekli ve yeterli koşul $A^{1/2}(b)A^{-1/2}(a)$ operatörünün H' da üniter olmasıdır.

Uyarı: $A(t)=A=\text{sabit}$, $t\in[a,b]$ olması durumunda Teorem 2' deki sonuçlar [20] çalışmasında verilmiştir.

Örnek 4: ϕ **,** Cantor fonksiyonu olmak üzere $L_2\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ Hilbert uzayında

$$l(u)=u'(t)+\phi\left(\sin^2 t\right)u(t),\ t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

diferensiyel ifadesini ele alalım. Teorem 3'e göre, L_0 minimal operatörünün tüm L_φ normal genişlemeleri her $\varphi\in[0,2\pi)$ için

$$\phi\left(\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)e^{i\varphi}=e^{i\varphi}\phi\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

olduğundan

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{i\varphi}u\left(-\frac{\pi}{2}\right),\quad \varphi\in[0,2\pi)$$

şeklindeki sınır koşullarıyla ifade edilebilir.

Şimdi H Hilbert uzayının özel durumlarında L_W normal genişlemelerinin yapısını inceleyelim.

Örnek 5: Eğer $H=\mathbb{C}$ ise, $W:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ üniter operatörü için bir $\varphi\in[0,2\pi)$ sayısı mevcuttur öyle ki her $x\in\mathbb{C}$ için $W(x)=e^{i\varphi}x$ şeklinde tanımlanır. L_0 minimal operatörünün normal genişlemenin varlığı için $q:[a,b]\to\mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon $q(a)=q(b)\geq 1$ ve hemen her yerde $q'(t)=0$ olup herhangi bir normal genişlemesi

$$L_W u(t)=u'(t)+q(t)u(t),\quad u(t)\in L_2(a,b),\ u(b)=e^{i\varphi}u(a)$$

sınır değerleriyle ifade edilir.

$H=\mathbb{C}^2$ olması durumunda bir $W:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ üniter operatörü $\alpha,\beta,\lambda,\mu\in\mathbb{C},\ |\alpha\mu-\beta\lambda|=1,\ \dfrac{\mu}{\alpha\mu-\beta\lambda}=\overline{\alpha},\ \dfrac{\beta}{\alpha\mu-\beta\lambda}=\overline{\lambda}$ olmak üzere $W:=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \lambda & \mu\end{pmatrix}$ matrisiyle ifade edilir. $A(t):=\begin{pmatrix}q_1(t) & q_2(t)\\ q_3(t) & q_4(t)\end{pmatrix},\ t\in[a,b]$ şeklinde olup hemen her yerde

$$A'(t)=\begin{pmatrix}q_1'(t) & q_2'(t)\\ q_3'(t) & q_4'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad WA(a)=A(b)W \quad \text{ve ayrıca} \quad A(a),\ A(b)\geq E$$

koşulları altında normal genişlemeleri mevcuttur ve

$$L_W u(t)=u'(t)+q(t)u(t),\quad u(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix}\in L_2\left(\mathbb{C}^2,(a,b)\right),\ \begin{pmatrix}u_1(b)\\ u_2(b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha u_1(a)+\beta u_2(a)\\ \lambda u_1(a)+\mu u_2(a)\end{pmatrix}$$

sınır değerleriyle ifade edilir.

2.1.2. Normal Genişlemelerin Spektrumu

Bu bölümde (1) ifadesinin ürettiği L_0 minimal operatörün $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında , $W:H\to H$ üniter operatör ve $WA(a)=A(b)W$ koşulunun sağlanması durumunda (3) sınır değerleriyle verilen L_W normal genişlemesinin spektrumu incelenecektir.

$U(t,s)$, $t,s\in[a,b]$ lineer operatörlerin bir ailesi ve bu aile için

$$\begin{cases}U_t'(t,s)x+A(t)U(t,s)x=0, & t,s\in[a,b],\\ U(s,s)x=x, & x\in H\end{cases}$$

koşulları sağlansın [8, 44].

Teorem 6: L_W normal genişlemesinin spektrumu

$$\sigma(L_W)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=\lambda_0+\frac{2k\pi i}{b-a},\ \lambda_0\ \ e^{-\lambda_0(b-a)}-\mu=0\ \textit{denkleminin çözümü}\,,\right.$$
$$\left.\mu\in\sigma\left(W^*U(b,a)\right),k\in\mathbb{Z}\right\}$$

şeklindedir.

İspat: L_W normal genişlemesinin spektrumu için

$$L_Wu=u'(t)+A(t)u(t)=\lambda u(t)+f(t),\ \ u\in D(L_W),\ \ f\in L_2\left(H,(a,b)\right)$$

problemini ele alalım. $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında bu diferensiyel denkleminin çözümleri

$$u_\lambda(t)=e^{\lambda(t-a)}U(t,a)x+\int_a^t e^{\lambda(t-s)}U(t,s)f(s)ds,\qquad x\in H \tag{4}$$

formundadır. Bu durumda, $u(b)=Wu(a)$ sınır değeri sağlandığından,

$$e^{\lambda(b-a)}U(b,a)x+\int_a^b e^{\lambda(b-s)}U(b,s)f(s)ds=Wx$$

olup $W:H\to H$ üniter operatör olduğundan

$$\left(W^*U(b,a)-e^{-\lambda(b-a)}\right)x=-W^*\int_a^b e^{\lambda(a-s)}U(b,s)f(s)ds$$

eşitliği bulunur. $\lambda\in\mathbb{C}$ sayısı L_W normal operatörünün spektrumunda olması için

$$e^{-\lambda(b-a)}=\mu\in\sigma\left(W^*U(b,a)\right)$$

bağıntısının sağlanması gerekli ve yeterlidir.

Böylece $\lambda\in\sigma(L_W)$ için

$$\lambda=\lambda_0+\frac{2k\pi i}{b-a},\quad e^{-\lambda_0(b-a)}\in\sigma\left(W^*U(b,a)\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

şeklindeki genel yapı elde edilir. $\diamond$

Şimdi L_W normal genişlemesinin spektrumu ile $W^*U(b,a)$ lineer operatörünün spektrumu arasındaki ilişkinin daha genel ifadesini verelim.

Teorem 7: $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı L_W normal operatörünün m, $m \in \mathbb{N}$ katlı bir özdeğeri (sürekli spektrumunda, rezolvent kümesinde) olması için gerekli ve yeterli koşul $e^{-\lambda(b-a)} \in \mathbb{C}$ sayısı $W^*U(b,a)$ operatörünün m, $m \in \mathbb{N}$ katlı bir özdeğeridir (sürekli spektrumunda, rezolvent kümesinde).

İspat: İlk önce $\lambda \in \sigma_p(L_W)$ m, $m \in \mathbb{N}$ katlı bir özdeğeri olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$L_W u_{\lambda,i}(t) = \lambda u_{\lambda,i}(t),\ i = 1,2,\dots,m$$

olacak şekilde bir $u_{\lambda,i}(t) \in L_2(H,(a,b)), u_{\lambda,i}(t) \neq 0,\ i = 1,2,\dots,m$ mevcuttur. (4) ifadesinden $u_{\lambda,i}(t) = e^{\lambda(t-a)}U(t,a)x_i,\quad x_i \in H \setminus \{0\},\ i = 1,2,\dots m$ şeklindedir. Ayrıca her $i = 1,2,\dots m$ için $u_{\lambda,i}(b) = W u_{\lambda,i}(a)$ eşitliği sağlandığından

$$W^*U(b,a)x_i = e^{-\lambda(b-a)}x_i,\ i = 1,2,\dots,m\,.$$

Bu sonuçtan $e^{-\lambda(b-a)} \in \sigma_p\left(W^*U(b,a)\right)$ m katlı bir özdeğeri olduğu bulunur.

Şimdi $e^{-\lambda(b-a)} \in \sigma_p\left(W^*U(b,a)\right)$ m katlı bir özdeğeri olduğunu kabul edelim. O halde $W^*U(b,a)x_i = e^{-\lambda(b-a)}x_i,\ i = 1,2,\dots m$ olacak şekilde H Hilbert uzayında $x_i \neq 0$ elemanları mevcuttur. Bu durumda $u_{\lambda,i}(t) = e^{\lambda(t-a)}U(t,a)x_i \in D(L_W)\setminus\{0\}$ ve

$$\begin{aligned}
L_W u_{\lambda,i}(t) = u'_{\lambda,i}(t) + A(t)u_{\lambda,i}(t) &= \left(e^{\lambda(t-a)}U(t,a)x_i\right)' + A(t)e^{\lambda(t-a)}U(t,a)x_i \\
&= \lambda e^{\lambda(t-a)}U(t,a)x_i + e^{\lambda(t-a)}U'_t(t,a)x_i + A(t)e^{\lambda(t-a)}U(t,a)x_i \\
&= \lambda e^{\lambda(t-a)}U(t,a)x_i + e^{\lambda(t-a)}\left[U'_t(t,a)x_i + A(t)U(t,a)x_i\right] \\
&= \lambda e^{\lambda(t-a)}U(t,a)x_i = \lambda u_{\lambda,i}(t)
\end{aligned}$$

yani, $\lambda \in \sigma_p\left(L_W\right)$ m katlı bir özdeğeridir.

Şimdi $e^{-\lambda(b-a)} \in \rho\left(W^* U\left(b,a\right)\right)$ olduğunu varsayalım ve bu durumda $\lambda \in \rho\left(L_W\right)$ olduğunu gösterelim. O halde $W^* U\left(b,a\right) - e^{-\lambda(b-a)} E$ operatörünün H Hilbert uzayında tersi var ve sınırlıdır. $L_W - \lambda E$ operatörünün bire bir olduğunu göstermek için farklı iki tane $u_1\left(t\right), u_2\left(t\right) \in D\left(L_W\right)$ vektör-fonksiyonları için

$$\left(L_W - \lambda E\right) u_1\left(t\right) = \left(L_W - \lambda E\right) u_2\left(t\right)$$

eşitliği sağlansın. Buradan

$$\left(L_W - \lambda E\right)\left(u_1\left(t\right) - u_2\left(t\right)\right) = 0$$

olup (4) bağıntısı yardımıyla

$$u_1\left(t\right) - u_2\left(t\right) = e^{\lambda(t-a)} U\left(t,a\right) x, \quad x \in H.$$

$u_1\left(b\right) - u_2\left(b\right) = W\left(u_1\left(a\right) - u_2\left(a\right)\right)$ eşitliği ve $W^* U\left(b,a\right) - e^{-\lambda(b-a)} E$ operatörü birebir olduğundan $x = 0$, yani $u_1\left(t\right) = u_2\left(t\right)$. Dolayısıyla $L_W - \lambda$ operatörü birebirdir. Ayrıca her $f \in L_2\left(H, \left(a,b\right)\right)$ için

$$u_\lambda(t) = -e^{\lambda(t-a)} U\left(t,a\right)\left(W^* U\left(b,a\right) - e^{-\lambda(b-a)} E\right)^{-1} W^* \int_a^b e^{\lambda(a-s)} U\left(b,s\right) f\left(s\right) ds$$
$$+ \int_a^t e^{\lambda(t-s)} U\left(t,s\right) f\left(s\right) ds$$

$u_\lambda(t) \in D\left(L_W\right)$ ve $L_W u\left(t\right) - \lambda u\left(t\right) = f\left(t\right)$ eşitliği doğrudur. $\left(W^* U\left(b,a\right) - e^{-\lambda(b-a)} E\right)^{-1}$ operatörü sınırlı olup

$$\left(L_W - \lambda E\right)^{-1} f\left(t\right) = -e^{\lambda(t-a)} U\left(t,a\right)\left(W^* U\left(b,a\right) - e^{-\lambda(b-a)} E\right)^{-1} W^* \int_a^b e^{\lambda(a-s)} U\left(b,s\right) f\left(s\right) ds$$
$$+ \int_a^t e^{\lambda(t-s)} U\left(t,s\right) f\left(s\right) ds$$

operatörü de sınırlıdır. Sonuç olarak $\lambda \in \rho\left(L_W\right)$ olduğu elde edilir.

Tersini göstermek için $\lambda \in \rho(L_W)$ olsun fakat $e^{-\lambda(b-a)} \notin \rho\left(W^* U(b,a)\right)$ olduğunu kabul edelim. Yukarıda verilen sonuçtan $e^{-\lambda(b-a)} \notin \sigma_p\left(W^* U(b,a)\right)$. Bu durumda $e^{-\lambda(b-a)} \in \sigma_r\left(W^* U(b,a)\right)$ veya $e^{-\lambda(b-a)} \in \sigma_c\left(W^* U(b,a)\right)$ bağıntılarından biri sağlanmalıdır. Fakat $\lambda \in \rho(L_W)$ olduğundan her $f \in L_2\left(H,(a,b)\right)$ için

$$\left(W^* U(b,a) - e^{-\lambda(b-a)}\right) x = -W^* \int_a^b e^{\lambda(a-s)} U(b,s) f(s)\, ds$$

eşitliğini sağlayan bir $x \in H$ elemanı mevcuttur. $B: L_2\left(H,(a,b)\right) \to H,\ Bf(t) = \int_a^b e^{\lambda(a-s)} U(b,s) f(s)\, ds$ lineer dönüşümü örten ve $W^*: H \to H$ üniter operatör olduğundan $W^* B$ örten bir dönüşümdür, yani $R\left(W^* U(b,a) - e^{-\mu(b-a)}\right) = H$. Bu ise $e^{-\lambda(b-a)} \in \sigma_r\left(W^* U(b,a)\right)$ veya $e^{-\lambda(b-a)} \in \sigma_c\left(W^* U(b,a)\right)$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $e^{-\lambda(b-a)} \in \rho\left(W^* U(b,a)\right)$ olmalıdır.

Ayrıca L_W normal operatör olduğundan $\sigma_r(L_W) = \varnothing$ [2], yani her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\overline{R(L_W - \lambda)} = L_2\left(H,(a,b)\right)$. B lineer dönüşümü sınırlı olduğundan $\overline{B\left(R(L_W - \lambda)\right)} = H$ ve dolayısıyla $\overline{R\left(W^* U(b,a) - e^{-\lambda(b-a)}\right)} = \overline{W^* B\left(R(L_W - \lambda)\right)} = H$, yani $\sigma_r\left(W^* U(b,a)\right) = \varnothing$ bağıntısı elde edilir. Bu ve yukarıda verilen sonuçlardan $\lambda \in \sigma_c(L_W)$ bağıntısının sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $e^{-\lambda(b-a)} \in \sigma_c\left(W^* U(b,a)\right)$ dır. ◇

Sonuç 8: L_W normal genişlemesinin spektrumu

$$\sigma(L_W) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \frac{1}{b-a}\left(\ln|\mu| + i(\arg \mu + 2k\pi)\right),\ \mu \in \sigma\left(W^* U(b,a)\right), k \in \mathbb{Z} \right\}$$

formunda da ifade edilebilir.

Tanım 9: Eğer (a_n) ve (b_n) iki reel sayı dizisi ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$$

ise, bu durumda ‘ $a_n \sim b_n,\ n\to\infty$ ’ şeklinde göstereceğiz. Örneğin $n^2+n\sin n\sim n^2, n\to\infty$ veya $n^3+n^2\arctan n\sim n^3, n\to\infty$.

Sonuç 10: $\dim H<+\infty$ olması durumunda her bir L_W normal genişlemesinin sonsuzdaki asimptotik davranışı

$$\left|\lambda_k\left(L_W\right)\right|\sim\frac{2k\pi}{b-a},\ k\to\infty$$

şeklindedir.

Şimdi $\dim H=1$ durumunu açıklayalım.

$$l(u)=u'(t)+q(t)u(t),\ q(a)=q(b),\ q'(t)=0 \text{ h.h.y. } t\in[a,b]$$

için $W^*U(b,a)=e^{i\varphi}U(b,a),\ \varphi\in[0,2\pi)$ olup burada

$$\begin{aligned}&U_t'(t,a)+q(t)U(t,a)=0\\&U(a,a)=E\end{aligned}$$

denkleminin çözümü $U(t,a)=\exp\left(-\int_a^t q(s)\,ds\right)$. Ayrıca

$$U(b,a)=\exp\left(-\int_a^b q(s)\,ds\right)$$

eşitliği doğrudur. Buradan

$$W^*U(b,a)=\exp\left(-\int_a^b q(s)\,ds+i\varphi\right),\ \varphi\in[0,2\pi)$$

sonucu alınır. $e^{-\lambda(b-a)} - \exp\left(-\int_a^b q(s)\,ds + i\varphi\right) = 0,\ \lambda \in \mathbb{C}$ denkleminin çözümü, l_φ normal genişlemelerin ayrık spektrumunun noktaları olduğundan

$$\lambda_k(b-a) + \left(-\int_a^b q(s)\,ds + i\varphi\right) = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$$

yani,

$$\lambda_k = -\frac{1}{b-a}\int_a^b q(s)\,ds + \frac{2k\pi - \varphi}{b-a}i,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Teorem 11: $l(u) = u'(t) + q(t)u(t),\ q(a) = q(b),\ q'(t) = 0$ h.h.y. $t \in [a,b]$ diferensiyel ifadesinin $L_2(a,b)$ uzayında ürettiği minimal l_0 operatörünün $l_\varphi,\ \varphi \in [0,2\pi)$ genişlemesinin ayrık spektrumu

$$\lambda_k = -\frac{1}{b-a}\int_a^b q(s)\,ds + \frac{2k\pi - \varphi}{b-a}i,\ k \in \mathbb{Z}$$

şeklindedir.

Şimdi L_W normal genişlemelerinin ayrık spektrumunun yapısını ayrıca araştıralım. Bilindiği gibi $\lambda \in \sigma_p(L_W)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $e^{-\lambda(b-a)} \in \sigma_p\left(W^*U(b,a)\right)$. Bir $\mu \in \sigma_p\left(W^*U(b,a)\right)$ alalım. O halde

$$W^*U(b,a)x_\mu = \mu x_\mu$$

olacak şekilde bir $x_\mu \neq 0,\ \ x_\mu \in H$ vektörü mevcuttur. Buradan

$$U^*(b,a)WW^*U(b,a)x_\mu = \mu\left(W^*U(b,a)\right)^* x_\mu = \mu\bar{\mu}\, x_\mu$$

yani,

$$U^*(b,a)U(b,a)x_\mu = |\mu|^2 x_\mu.$$

Bu ise,

$$\left|\mu\left(W^{*}U\left(b,a\right)\right)\right|^{2}=\lambda\left(U^{*}\left(b,a\right)U\left(b,a\right)\right)$$

olduğu, yani

$$\left|\mu\left(W^{*}U\left(b,a\right)\right)\right|=\lambda^{1/2}\left(U^{*}\left(b,a\right)U\left(b,a\right)\right) \tag{5}$$

olduğuna denktir.

Öyleyse, $e^{-\lambda(b-a)}=\mu,\quad \mu\in\sigma\left(W^{*}U\left(b,a\right)\right)$ denkleminden

$$-\lambda_k(b-a)=\ln\left|\mu\right|+i\arg\mu+2k\pi i,\quad k\in\mathbb{Z}$$

bulunur ki bu sonuncu ve (5) eşitliklerinden

$$-\lambda_k(b-a)=\frac{1}{2}\ln\lambda\left(U^{*}\left(b,a\right)U\left(b,a\right)\right)+i\arg\mu+2k\pi i,\quad k\in\mathbb{Z}$$

elde edilir, yani

$$\lambda_k=\frac{1}{2(a-b)}\ln\lambda\left(U^{*}\left(b,a\right)U\left(b,a\right)\right)+\frac{i}{a-b}\left[\arg\mu\left(W^{*}U\left(b,a\right)\right)+2k\pi\right],\quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

Teorem 12: L_W normal genişlemelerinin ayrık spektrumu

$$\sigma_p(L_W)=\Big\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=\frac{1}{a-b}\left(\ln\left|\mu\right|+i(\arg\mu+2k\pi)\right),\ \mu\in\sigma_p\left(W^{*}U(b,a)\right),$$
$$\left|\mu\right|^{2}\in\sigma_p\left(U^{*}(b,a)U(b,a)\right),\ k\in\mathbb{Z}\Big\}$$

şeklindedir.

Teorem 13: L_W bir normal genişleme olsun. $\lambda=\lambda_r+i\lambda_i\in\sigma_p\left(L_W\right)$ ise, her $t\in\left[a,b\right]$ için $\lambda_r\in\sigma_p\left(A\left(t\right)\right)$ ve $\lambda_i=\dfrac{\arg\mu+2k\pi}{b-a}$, $\mu\in\sigma_p\left(W\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ şeklinde bir yazılıma sahiptir.

İspat: Eğer $\lambda \in \sigma_p\left(L_W\right)$ ise, L_W normal operatör olduğundan $Ker\left(L_W-\lambda\right)=Ker\left(L_W^*-\overline{\lambda}\right)$ ve böylece

$$\begin{aligned} &u_\lambda'(t)+\left(A(t)-\lambda\right)u_\lambda(t)=0,\\ &-u_\lambda'(t)+\left(A(t)-\overline{\lambda}\right)u_\lambda(t)=0 \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $u_\lambda \in D\left(L_W\right),\ u_\lambda \neq 0$ elemanı mevcuttur. Buradan $\lambda=\lambda_r+i\lambda_i$ için

$$\begin{aligned} &u_\lambda'(t)=i\lambda_i u_\lambda(t),\\ &A(t)u_\lambda(t)=\lambda_r u_\lambda(t), \end{aligned}$$

yani $q\ u_\lambda(t)=e^{i\lambda_i(t-a)}x_\lambda,\ \ A(t)x_\lambda=\lambda_r x_\lambda,\ Wx_\lambda=e^{i\lambda_i(b-a)}x_\lambda,\ \ x_\lambda \in H\setminus\{0\}$. Ayrıca (4) ifadesinden

$$u_\lambda(t)=e^{\lambda(t-a)}U(t,a)y,\ Wy=e^{\lambda(b-a)}U(b,a)y,\ \ y\in H$$

Dolayısıyla, her $t\in[a,b]$ için

$$e^{i\lambda_i(t-a)}x_\lambda=e^{\lambda(t-a)}U(t,a)y,\ \ Wx_\lambda=e^{i\lambda_i(b-a)}x_\lambda,\ Wy=e^{\lambda(b-a)}U(b,a)y\,.$$

$U(t,a):H\to H$ operatör fonksiyonun düzgün sürekli olduğundan her $t\in[a,b]$ için

$$e^{\lambda_r(t-a)}U(t,a)y=x_\lambda\,.$$

Bu sonuçtan, $y=x_\lambda$ olduğu yani, λ özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$u_\lambda(t)=e^{\lambda(t-a)}U(t,a)x_\lambda=e^{i\lambda_i(t-a)}x_\lambda,\ Wx=e^{i\lambda_i(b-a)}x_\lambda$$

şeklindeki ifadesi elde edilir. Buradan

$$U(t,a)x_\lambda=e^{-\lambda_r(t-a)}x_\lambda,\ Wx_\lambda=e^{i\lambda_i(b-a)}x_\lambda\,.$$

Sonuç olarak $\lambda=\lambda_r+i\lambda_r\in\sigma_p\left(L_W\right)$ ise, her $t\in[a,b]$ için $\lambda_r\in\sigma_p\left(A(t)\right)$ ve $\lambda_i=\dfrac{\arg\mu+2k\pi}{b-a}$, $\mu\in\sigma_p(W),\ k\in\mathbb{Z}$ olduğu bulunur. ◇

Sonuç 14: $H=\mathbb{C}$ olması durumunda Teorem 3'ün koşulları altında $l(u)=u'(t)+q(t)u(t)$ diferensiyel ifadesinin ürettiği minimal operatörün bir normal genişlemesi varsa, her $t\in[a,b]$ için $q(t)=sabit$ olmak zorundadır.

Sonuç 15: $l(u)=u'(t)+q\,u(t),\ q\geq 1\quad t\in[a,b]$ diferensiyel ifadesinin $L_2(a,b)$ uzayında ürettiği minimal l_0 operatörünün $l_\varphi,\ \varphi\in[0,2\pi)$ normal genişlemelerinin özvektörleri $e^{i(\varphi+2k\pi)\frac{t-a}{b-a}},\ k\in\mathbb{Z}$ şeklinde olup, bu özvektörler $L_2(a,b)$ Hilbert uzayında tamdır.

2.1.3. Normal Genişlemelerin Bazı Özellikleri

Teorem 16: $W_1,W_2:H\to H$ üniter operatörler, L_0 minimal operatörünün L_{W_1} ve L_{W_2} iki normal genişlemesi olsun. $D\left(L_{W_1}\right)\cap D\left(L_{W_2}\right)=D\left(L_0\right)$ eşitliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $0\notin\sigma_p\left(W_1-W_2\right)$ olmasıdır.

İspat: $0\notin\sigma_p\left(W_1-W_2\right)$ olduğunu kabul edelim. L_{W_1} ve L_{W_2} operatörleri L_0 minimal operatörünün iki genişlemesi olduğundan $D\left(L_0\right)\subset D\left(L_{W_1}\right)\cap D\left(L_{W_2}\right)$ bağıntısı doğrudur. $D\left(L_0\right)\neq D\left(L_{W_1}\right)\cap D\left(L_{W_2}\right)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda bir $u(t)\in D\left(L_{W_1}\right)\cap D\left(L_{W_2}\right)$ elemanı vardır öyle ki $u(t)\notin D\left(L_0\right)$. $u(t)\in D\left(L_{W_1}\right)\cap D\left(L_{W_2}\right)$ olduğundan,

$$u(b)=W_1u(a)$$
$$u(b)=W_2u(a)$$

ve buradan $\left(W_1-W_2\right)u(a)=0$. Ayrıca $u(t)\notin D\left(L_0\right)$ olduğundan $u(a)\neq 0$ veya $u(b)\neq 0$. Fakat W_1 ve W_2 lineer operatörler olduğundan $u(a)\neq 0$ ve $u(b)\neq 0$. Dolayısıyla

$0 \in \sigma_p(W_1 - W_2)$ çelişkisi elde edilir. Böylece $D(L_{W_1}) \cap D(L_{W_2}) = D(L_0)$ olmak zorundadır.

Şimdi, tersine $D(L_{W_1}) \cap D(L_{W_2}) = D(L_0)$ ve $0 \in \sigma_p(W_1 - W_2)$ olsun. Bu durumda bir $x \in H$, $x \neq 0$ elemanı vardır öyle ki $(W_1 - W_2)x = 0$ yani, $W_1 x = W_2 x$. Ayrıca sınır değerler uzayı tanımına bakıldığında $H(a) = \{u(a) : u(t) \in L_W\} = H$ olduğu görülür. Böylece,

$$u(t) = \frac{(W_1 - E)x}{b-a} t + \frac{bx - aW_1 x}{b-a} \in W_2^1(H,(a,b))$$

ve $u(t) \in D(L_{W_1}) \cap D(L_{W_2})$. Fakat $D(L_{W_1}) \cap D(L_{W_2}) = D(L_0)$ eşitliği sağlandığından $u(a) = x = 0$ olmak zorundadır. Böylece $0 \notin \sigma_p(W_1 - W_2)$ sonucu elde edilir. ◇

Teorem 17: L_0 minimal operatörünün $D(L_1) \cup D(L_2) = D(L)$ olacak şekilde iki tane L_1 ve L_2 normal genişlemesi olamaz.

İspat: L_0 minimal operatörünün $W_1, W_2 : H \to H$ üniter operatörleriyle ifade edilen L_{W_1} ve L_{W_2} iki normal genişlemesi için $D(L_{W_1}) \cup D(L_{W_2}) = D(L)$ eşitliği sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $u(t) = \frac{t-a}{b-a} x \in D(L) = W_2^1(H,(a,b))$, $x \in H$ $x \neq 0$ fonksiyonu için $u(t) \in D(L_{W_1})$ veya $u(t) \in D(L_{W_2})$ bağıntılarından en az biri doğru olmalıdır. Ayrıca $u(t)$ fonksiyonu için sınır değerleri $u(a) = 0$ ve $u(b) = x$. Fakat W_1 ve W_2 lineer operatörler olduğundan $x = 0$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla L_0 minimal operatörünün $D(L_1) \cup D(L_2) = D(L)$ özelliğini sağlaya iki normal genişlemesi mevcut değildir. ◇

Teorem 18: L_0 minimal operatörünün L_W bir normal genişlemesi olsun. Bu durumda L_W normal operatörün $R(L_W)$ görüntü kümesinin, $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul $E - W^* U(b,a)$ operatörünün görüntü kümesinin, yani $R\left(E - W^* U(b,a)\right)$ kümesinin H Hilbert uzayında kapalı olmasıdır.

İspat: L_W normal operatörünün görüntü kümesi $R(L_W)$, $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında kapalı olsun. $R\left(E - W^* U(b,a)\right)$, lineer manifoldunun H Hilbert uzayında kapalı olduğunu göstermek için bir $(y_n) \subset R\left(E - W^* U(b,a)\right)$ dizi alalım ve $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H} y$, $y \in H$ olsun. O halde bir $(x_n) \subset H$ dizisi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\left(E - W^* U(b,a)\right)x_n = y_n$ ve $\left(E - W^* U(b,a)\right)x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H} y$. $W^* : H \to H$ üniter operatör olduğundan bir $(\tilde{x}_n) \subset H$ dizi vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\left(E - W^* U(b,a)\right)x_n = W^* \tilde{x}_n$, yani

$$Wx_n = U(b,a)x_n + \tilde{x}_n . \tag{6}$$

Ayrıca $\left(E - W^* U(b,a)\right)x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H} y$, $y \in H$ ve $W^* : H \to H$ üniterliğinden,

$$\tilde{x}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H} Wy$$

olduğu elde edilir. Her $t \in [a,b]$ için $U(t,b) : H \to H$ lineer operatörü sınırlı olup,

$$U(t,b)\tilde{x}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H} U(t,b)Wy$$

bağıntısı doğrudur. Buradan

$$u_n(t) = U(t,a)x_n + \frac{t-a}{b-a}U(t,b)\tilde{x}_n \in L_2\left(H,(a,b)\right),\ x_n, \tilde{x}_n \in H,\ n \in \mathbb{N}$$

biçiminde tanımlanan vektör-fonksiyonları L_W normal genişlemesinin tanım kümesindedir. Gerçekten, her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n(a) = x_n$, $u_n(b) = U(b,a)x_n + x_n$ ve (6) eşitliğinden,

$$Wu_n(a) = Wx_n = U(b,a)x_n + \tilde{x}_n = u_n(b).$$

Ayrıca,

$$L_W u_n(t) = U_t'(t,a)x_n + \frac{1}{b-a}U(t,b)\tilde{x}_n + \frac{t-a}{b-a}U_t'(t,b)\tilde{x}_n + A(t)U(t,a)x_n + A(t)\frac{t-a}{b-a}U(t,b)\tilde{x}_n$$
$$= \frac{1}{b-a}U(t,b)\tilde{x}_n$$

bağıntıları doğrudur. $\tilde{x}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H} Wy$ olduğundan

$$L_W u_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} \frac{1}{b-a}U(t,b)Wy .$$

$R(L_W)$, $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında kapalı olduğundan bir $u(t)\in D(L_W)$ fonksiyonu mevcuttur öyle ki $L_W u(t) = \frac{1}{b-a}U(t,b)Wy$. (4) bağıntısı kullanılırsa, bir $x\in H$ vektörü vardır öyle ki

$$u(t) = U(t,a)x + \frac{1}{b-a}\int_a^t U(t,s)U(s,b)Wy\,ds = U(t,a)x + \frac{t-a}{b-a}U(t,b)Wy .$$

Bu sonuç ve sınır koşullarının sağlanacağından $Wx = U(b,a)x + Wy$, yani

$$\left(E - W^* U(b,a)\right)x = y .$$

Böylece $E - W^*U(b,a)$ lineer operatörünün görüntü kümesi H Hilbert uzayında kapalı olduğu elde edilir.

Şimdi $\overline{R\left(E - W^*U(b,a)\right)} = R\left(E - W^*U(b,a)\right)$ eşitliği sağlansın. $R(L_W)$, $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında kapalı olduğunu göstermek için keyfi $f_n(t)\in R(L_W)$ dizi alalım ve bu dizi için $f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} f(t)$, $f(t)\in L_2(H,(a,b))$ koşulunu gerçeklesin. Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için $L_W u_n(t) = f_n(t)$ denklemini sağlayan bir $u_n(t)\in D(L_W)$ çözümü vardır ve bu çözüm (4) eşitliğinden

$$u_n(t) = U(t,a)x_n + \int_a^t U(t,s)f_n(s)\,ds, \quad x_n \in H$$

$\left(E-W^{*}U\left(t,a\right)\right)x_{n}=W^{*}\int_{a}^{b}U\left(b,s\right)f_{n}\left(s\right)ds$ şeklinde ifade edilir. $f_{n}\left(t\right)\xrightarrow[n\to\infty]{L_2}f\left(t\right)$ ve $W^{*}:H\to H$ sınırlı operatör olduğundan

$$\left(E-W^{*}U\left(t,a\right)\right)x_{n}\xrightarrow[n\to\infty]{H}W^{*}\int_{a}^{b}U\left(b,s\right)f\left(s\right)ds .$$

Ayrıca $E-W^{*}U\left(b,a\right)$ lineer operatörünün görüntü kümesinin H Hilbert uzayında kapalı olduğundan bir $x\in H$ elemanı vardır öyle ki

$$\left(E-W^{*}U\left(t,a\right)\right)x=W^{*}\int_{a}^{b}U\left(b,s\right)f\left(s\right)ds$$

eşitliği sağlanır. Buradan $u(t)=U\left(t,a\right)x+\int_{a}^{t}U\left(t,s\right)f\left(s\right)ds\in D\left(L_{W}\right)$ ve

$$L_{W}u(t)=f\left(t\right).$$

Dolayısıyla bu sonuçla teoremin iddiasının doğruluğu elde edilir. ◇

Teorem 19: L_0 minimal operatörünün her L_W normal genişlemesi için

$$\dim Ker\, L_{W}=\dim Ker\left(E-W^{*}U\left(b,a\right)\right)$$

eşitliği doğrudur.

İspat: Lineer bağımsız olan $x_1,x_2,\ldots,x_n\in Ker\left(E-W^{*}U\left(b,a\right)\right)\backslash\{0\}$ keyfi elemanlar için (4) bağıntısından $U\left(t,a\right)x_1,U\left(t,a\right)x_2,\ldots,U\left(t,a\right)x_n\in Ker\left(L_W\right)$. Ayrıca her $t\in\left[a,b\right]$ için $U\left(t,a\right):H\to H$ lineer operatörlerinin sınırlı tersleri var olduğundan $U\left(t,a\right)x_1,U\left(t,a\right)x_2,\ldots,U\left(t,a\right)x_n$ fonksiyonları da $L_2\left(H,\left(a,b\right)\right)$ Hilbert uzayında lineer bağımsızdırlar. Dolayısıyla,

$$\dim Ker\left(E-W^{*}U\left(b,a\right)\right)=\dim Ker\, L_{W}$$

eşitliği doğrudur. ◇

Sonuç 20: Her L_W normal genişlemesi için

$$\dim\left(L_2\left(H,(a,b)\right)\overset{\text{int}}{\ominus} R\left(L_W\right)\right) = \dim Ker\left(E - W^*U\left(b,a\right)\right)$$

eşitliği doğrudur.

Teorem 21: Her L_W normal genişlemesi için

$$\dim Ker\, L_W = \dim Ker\, L_W^* = 0$$

eşitliği doğrudur.

İspat: $u(t) \in Ker\, L_W$ keyfi olsun. Bu halde Teorem 7' nin ispatından her $u(t) \in Ker\, L_W$ fonksiyonunun

$$u(t) = U(t,a)x, \quad x \in Ker\left(E - W^*U(b,a)\right)$$

formuna sahip olduğu açıktır. Ayrıca L_W normal operatör olduğundan her $u(t) \in Ker\, L_W$ için $u(t) \in Ker\, L_W^*$ olmak zorundadır. Buradan, $x \in Ker\left(E - W^*U(b,a)\right)$ için

$$\begin{aligned} U'(t,a)x + A(t)U(t,a)x &= 0 \\ -U'(t,a)x + A(t)U(t,a)x &= 0 \end{aligned}$$

yani, hemen her yerde $A(t)U(t,a)x = 0$. Fakat $A(t)U(t,a)x$ fonksiyonu sürekli olduğundan her $t \in [a,b]$ için $A(t)U(t,a)x = 0$. Dolayısıyla $A(a)x = 0$ eşitliği elde edilir. Teorem 3'ün koşullarından $A(a) \geq E$ olup buradan $x = 0$ olduğu bulunur. Sonuç olarak

$$\dim Ker\, L_W = \dim Ker\, L_W^* = 0$$

bulunur. ◇

2.2. İkinci Mertebeden Operatör Katsayılı Normal Diferensiyel Operatörler

$L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında, $A(t)$ her $t\in[a,b]$ için H Hilbert uzayında lineer selfadjoint operatörler, her $t\in[a,b]$ için $A(t)\geq E$ ve her $t\in[a,b]$ için $D(A(t))=D$ olmak üzere,

$$l(u)=-u''(t)+iA(t)u(t) \tag{7}$$

ikinci mertebeden lineer diferensiyel operatör ifadesini ele alalım.

Ayrıca verilen diferensiyel ifadesinin $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında formal eşlenik ifadesi

$$l^+(u)=-u''(t)-iA(t)u(t) \tag{8}$$

şeklindedir.

Şimdi $l(\cdot)$ ve $l^+(\cdot)$ diferensiyel ifadelerinin ürettiği maksimal ve minimal operatörleri tanımlayalım.

İlk önce $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında yoğun tanımlı vektör-fonksiyonların lineer manifoldu üzerinde

$$D_0':=\left\{u(t)\in L_2(H,(a,b)):u(t)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)x_k,\varphi_k(t)\in C_0^\infty(a,b),x_k\in D,k=1,2,\ldots,n,n\in\mathbb{N}\right\}$$

$L_0'u=l(u)$, $u\in D_0'$ operatörünü ele alalım. L_0' lineer operatörünün $L_2(H,(a,b))$ uzayındaki kapanış operatörü mevcuttur. Gerçekten $\overline{D_0'}=L_2(H,(a,b))$ ve her $u\in D_0'$ için

$$\operatorname{Im}\left(L_0'u(t),u(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}=\left(A(t)u(t),u(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}\geq\left\|u(t)\right\|^2_{L_2(H,(a,b))}\geq 0$$

olduğundan L_0' operatörü disipatif olup kapanışı vardır [18].

Böylece L_0' operatörünün kapanışına $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi tarafından üretilen *minimal operatör* denir ve L_0 sembolüyle gösterilir.

Benzer yolla $l^+(\cdot)$ diferensiyel ifadesinin $L_2\left(H,(a,b)\right)$ üzerinde ürettiği L_0^+ *minimal operatörünün* tanımı verilebilir. L_0^+ (L_0) operatörünün $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayındaki eşlenik operatörüne $l(\cdot)$ ($l^+(\cdot)$) ifadesinin ürettiği *maksimal operatör* denir ve L (L^+) şeklinde gösterilir. $L_0 \subset L$ ve $L_0^+ \subset L^+$ olduğu açıktır [3, 18].

Şimdi L_0 minimal operatörünün formal normalliğini inceleyelim.

Lemma 1: $f \in L_2(a,b)$ olsun. Eğer her reel değerli $\varphi,\psi \in C_0^\infty(a,b)$ için

$$\int_a^b f(t)\left(\varphi(t)\psi(t)\right)' dt = 0$$

ise, f fonksiyonu hemen her yerde sabittir.

İspat: $f \in L_2(a,b)$ ve her reel değerli $\varphi,\psi \in C_0^\infty(a,b)$ için $\int_a^b f(t)\left(\varphi(t)\psi(t)\right)' dt = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\left(\varphi(t)\psi(t)\right)' dt &= \int_a^b f(t)\varphi'(t)\psi(t)dt + \int_a^b f(t)\varphi(t)\psi'(t)dt \\ &= \int_a^t f(s)\varphi'(s)ds\,\psi(t)\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b\int_a^t f(s)\varphi'(s)ds\,\psi'(t)dt + \int_a^b f(t)\varphi(t)\psi'(t)dt \\ &= \int_a^b\left(f(t)\varphi(t) - \int_a^t f(s)\varphi'(s)ds\right)\psi'(t)\,dt = 0\end{aligned}$$

Buradan hemen her yerde $f(t)\varphi(t)-\int_a^t f(s)\varphi'(s)ds$ fonksiyonunun sabit olduğu elde edilir [15]. O halde hemen her yerde $\int_a^t f(s)\varphi'(s)ds = f(t)\varphi(t)+c$ olacak şekilde bir $c\in\mathbb{R}$ sayısı mevcuttur.

Şimdi $\varphi(t)\neq 0,\ t\in(a,b)$ için $f^*(t):=\dfrac{\int_a^t f(s)\varphi'(s)ds-c}{\varphi(t)}$, $a<t<b$ fonksiyonunu ele alalım. Hemen her yerde $f^*=f$ olduğundan hemen her yerde

$$\int_a^t f^*(s)\varphi'(s)ds = f^*(t)\varphi(t)+c$$

olduğu bulunur. Fakat bu iki fonksiyon (a,b)aralığı üzerinde sürekli olup eşitlik sağlanır [60], yani her $t\in(a,b)$ için

$$\int_a^t f^*(s)\varphi'(s)ds = f^*(t)\varphi(t)+c\,.$$

Ayrıca $\int_a^t f^*(s)\varphi'(s)ds$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde türevlenebilir olduğundan yukarıda eşitlikten $t\in(a,b)$ için $f^{*\prime}(t)=0$ olduğu elde edilir. (a,b) aralığı üzerinde f^* fonksiyonu sürekli olduğundan sabit fonksiyondur. Böylece f fonksiyonunun hemen her yerde sabit olduğu elde edilir. ◇

Teorem 2: Her $x\in D$ için $\sigma_x(t):=(A(t)x,x)\in L_2(a,b)$ olsun. L_0 minimal operatörünün $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında formal normal ise, (a,b) üzerinde hemen her yerde $\sigma_x(t)=sabit, x\in D$ olmalıdır.

İspat: L_0 minimal operatörü ve L^+ maksimal operatörleri için $D(L_0)\subset D(L^+)$ bağıntısı doğru olup L_0 minimal operatörünün formal normal olduğunu varsayalım. Bu durumda her $u(t)\in D(L_0)$ şeklindeki vektör-fonksiyonlar için

$$
\begin{aligned}
&\left\|L_0u(t)\right\|_{L^2}^2-\left\|L^+u(t)\right\|_{L^2}^2\\
&=\left(-u''(t)+iA(t)u(t),-u''(t)+iA(t)u(t)\right)_{L^2}-\left(-u''(t)-iA(t)u(t),-u''(t)-iA(t)u(t)\right)_{L^2}\\
&=2i\left[\left(u''(t),A(t)u(t)\right)_{L^2}-\left(A(t)u(t),u''(t)\right)_{L^2}\right]\\
&=0
\end{aligned}
$$

eşitliği doğrudur. Bu eşitlikte $u(t)=\varphi(t)x\in D_0'$ şeklindeki özel vektör-fonksiyonu yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left(u''(t),A(t)u(t)\right)_{L^2}-\left(A(t)u(t),u''(t)\right)_{L^2}=\left(\varphi''(t)x,A(t)\varphi(t)x\right)_{L^2}-\left(A(t)\varphi(t)x,\varphi''(t)x\right)_{L^2}\\
&=\int_a^b\varphi''(t)\overline{\varphi(t)}\left(x,A(t)x\right)_H dt-\int_a^b\varphi(t)\overline{\varphi''(t)}\left(A(t)x,x\right)_H dt=0.
\end{aligned}
$$

Ayrıca $\varphi(t)=\tau(t)+i\mu(t),\ \overline{\tau}=\tau,\overline{\mu}=\mu,\ \tau,\mu\in C_0^\infty(a,b)$ şeklinde yazılabildiğinden yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa, reel değerli her $\tau,\mu\in C_0^\infty(a,b)$ fonksiyonları için

$$
\int_a^b\sigma_x(t)\tau''(t)\mu(t)dt-\int_a^b\sigma_x(t)\tau(t)\mu''(t)dt=0.
$$

Buradan her $\tau(t),\mu(t)\in C_0^\infty(a,b)$ için $t\tau(t),t\mu(t)\in C_0^\infty(a,b)$ olup yukarıdaki eşitlik kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b\sigma_x(t)\left(t\tau(t)\right)''\mu(t)dt-\int_a^b\sigma_x(t)t\tau(t)\mu''(t)dt\\
&=\int_a^b\sigma_x(t)\left(2\tau'(t)+t\tau''(t)\right)\mu(t)dt-\int_a^b\sigma_x(t)t\tau(t)\mu''(t)dt\\
&=2\int_a^b\sigma_x(t)\tau'(t)\mu(t)dt+\int_a^b\sigma_x(t)t\tau''(t)\mu(t)dt-\int_a^b\sigma_x(t)t\tau(t)\mu''(t)dt
\end{aligned}
$$

$$= 2\int_a^b \sigma_x(t)\tau'(t)\mu(t)dt + \int_a^b \sigma_x(t)\tau(t)\left(t\mu(t)\right)'' dt - \int_a^b \sigma_x(t)t\tau(t)\mu''(t)\,dt$$
$$= 2\int_a^b \sigma_x(t)\tau'(t)\mu(t)dt + \int_a^b \sigma_x(t)\tau(t)\left(2\mu'(t) + t\mu''(t)\right)dt - \int_a^b \sigma_x(t)t\tau(t)\mu''(t)\,dt$$
$$= 2\int_a^b \sigma_x(t)\tau'(t)\mu(t)dt + 2\int_a^b \sigma_x(t)\tau(t)\mu'(t)dt = 0,$$

yani reel değerli her $\tau, \mu \in C_0^\infty(a,b)$ fonksiyonları için

$$\int_a^b \sigma_x(t)\tau'(t)\mu(t)dt + \int_a^b \sigma_x(t)\tau(t)\mu'(t)dt = 0.$$

Dolayısıyla Lemma 1' den hemen her yerde $\sigma_x(t) = sabit$ olduğu bulunur. $\diamond$

Sonuç 3: Eğer $A(t) = \alpha(t)A,\ A \geq E$ ise, L_0 minimal operatörünün $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında formal normal olması için gerekli ve yeterli koşul (a,b) üzerinde hemen her yerde $\alpha(t) = sabit$ olmasıdır.

Sonuç 4: Eğer $\dim(H) < +\infty$ ise, L_0 minimal operatörünün $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında formal normal olması için gerekli ve yeterli koşul (a,b) üzerinde hemen her yerde $A(t) = sabit$ olmasıdır.

Şimdi H Hilbert uzayında $A : D(A) \subset H \to H$ lineer selfadjoint operatör ve $A \geq E$ olmak üzere,

$$l(u) = -u''(t) + iAu(t) \tag{9}$$

ikinci mertebeden lineer diferensiyel-operatörün ürettiği L_0 minimal operatörünün normal genişlemelerini sınır değerleri dilinde ifadesini verelim. Burada $(\mathcal{H}, \gamma_1, \gamma_2)$ üçlüsü

$L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında $\overline{\mathrm{Re}(L_0)}$ minimal operatörü için bir sınır değerleri uzayı ve $\hat{A}: D(A)\oplus D(A)\subset H\oplus H\to H\oplus H$, $\hat{A}:=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A\end{pmatrix}$ olarak tanımlansın.

Teorem 5: $A: D(A)\subset H\to H$ lineer selfadjoint operatör $A\geq E$ ve $AW_2^2\left(D(A),(a,b)\right)\subset W_2^2\left(H,(a,b)\right)$ olsun. L_0 minimal operatörünün her L_n, $L_0\subset L_n\subset L$ normal genişlemesi $W: H\oplus H\to H\oplus H$ ve $\hat{A}^{1/2}W\hat{A}^{-1/2}$ üniter operatörler olmak üzere, $L_2\left(H,\,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında (9) diferensiyel ifadesinin

$$(W-E)\gamma_1(u)+i(W+E)\gamma_2(u)=\ 0 \qquad (10)$$

sınır koşulları tarafından üretilir. Buradaki W üniter operatörü, L_n normal genişlemesine bağlı olarak tek türlü belirlenir, yani $L_n=L_W$.

Tersine, $\hat{A}^{1/2}W\hat{A}^{-1/2}$ üniter operatör olan keyfi bir $W: H\oplus H\to H\oplus H$ üniter operatörü için L maksimal operatörünün (10) sınır koşulunu sağlayan $u(t)\in W_2^2\left(H,\,(a,b)\right)$ vektör-fonksiyonlarının alt lineer manifolduna kısıtlanışı, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesidir.

İspat: L_n, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olsun. Bu durumda

$$\overline{\mathrm{Re}(L_n)}u(t)=-\frac{d^2}{dt^2}u(t),\ u(t)\in D(L_n),$$

$$\overline{\mathrm{Im}(L_n)}u(t)=Au(t),\ u(t)\in D(L_n)$$

operatörleri, sırasıyla $\overline{\mathrm{Re}(L_0)}$ ve $\overline{\mathrm{Im}(L_0)}$ operatörlerinin selfadjoint genişlemeleridir.

$$\mathcal{H}:=H\oplus H,\ \gamma_1(u):=\{-u(a),u(b)\},\ \gamma_2(u):=\{u'(a),u'(b)\}$$

şeklinde tanımlanan $(\mathcal{H},\gamma_1,\gamma_2)$ üçlüsü $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında $\overline{\mathrm{Re}(L_0)}$ minimal operatörü için bir sınır değerleri uzayıdır [18].

$\overline{\operatorname{Re}(L_n)}$, $\overline{\operatorname{Re}(L_0)}$ minimal operatörünün $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında bir selfadjoint genişlemesi olduğundan, bu genişleme (9) diferensiyel ifadesi ve $W: H\oplus H \to H\oplus H$ bir üniter operatör olmak üzere,

$$(W-E)\gamma_1(u)+i(W+E)\gamma_2(u)=0$$

sınır koşulu tarafından doğrulur. Burada $\overline{\operatorname{Re}(L_n)}$ 'e karşılık gelen W üniter operatörü bir tektir [18].

L_n, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olduğundan reel ve sanal kısımları değişmeli olup her $u(t)\in D(L_n)$ için

$$\begin{aligned}
&\left(\operatorname{Re}(L_n)u(t),\operatorname{Im}(L_n)u(t)\right)_{L^2}-\left(\operatorname{Im}(L_n)u(t),\operatorname{Re}(L_n)u(t)\right)_{L^2}\\
&=\left(-u''(t),Au(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}-\left(Au(t),-u''(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}\\
&=\left(-u'(t),Au(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}+\left(u(t),Au'(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}\\
&=0
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Buradan her $u(t)\in D(L_n)$ için

$$\begin{aligned}
&\left(-u'(t),Au(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}+\left(u(t),Au'(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}\\
&=\left(-u'(b),Au(b)\right)_H+\left(u(b),Au'(b)\right)_H-\left(-u'(a),Au(a)\right)_H-\left(u(a),Au'(a)\right)_H\\
&=\left(A^{1/2}(-u'(b)),A^{1/2}u(b)\right)_H+\left(A^{1/2}u(b),A^{1/2}u'(b)\right)_H\\
&\quad-\left(A^{1/2}(-u'(a)),A^{1/2}u(a)\right)_H-\left(A^{1/2}u(a),A^{1/2}u'(a)\right)_H\\
&=\left(\left\{-A^{1/2}u(a),A^{1/2}u(b)\right\},\left\{A^{1/2}u'(a),A^{1/2}u'(b)\right\}\right)_{H\oplus H}\\
&\quad-\left(\left\{A^{1/2}u'(a),A^{1/2}u'(b)\right\},\left\{-A^{1/2}u(a),A^{1/2}u(b)\right\}\right)_{H\oplus H}\\
&=\left(\gamma_1\left(A^{1/2}u\right),\gamma_2\left(A^{1/2}u\right)\right)_{H\oplus H}-\left(\gamma_2\left(A^{1/2}u\right),\gamma_1\left(A^{1/2}u\right)\right)_{H\oplus H}=0
\end{aligned}$$

yani, $\hat{\theta}=\left\{\left\{\gamma_1\left(A^{1/2}u\right),\gamma_2\left(A^{1/2}u\right)\right\}: u\in D(L_n)\right\}$ lineer bağıntısı simetriktir. Ayrıca, $T: D\left(\hat{A}^{1/2}\right)\oplus D\left(\hat{A}^{1/2}\right)\subset \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\to\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, $T:=\begin{pmatrix}\hat{A}^{1/2} & 0\\ 0 & \hat{A}^{1/2}\end{pmatrix}$ şeklinde tanımlı lineer dönüşümü $\hat{A}^{1/2}: D\left(\hat{A}^{1/2}\right)\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ operatörü birebir, örten ve selfadjoint olduğundan T

lineer operatörü $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ Hilbert uzayında birebir, örten ve selfadjointtir. Buradan L_n normal operatör olduğundan $\theta=\{\{\gamma_1(u),\gamma_2(u)\}:\ u\in D(L_n)\}$ selfadjoint olan lineer bağıntısı için $T(\theta)=\hat{\theta}$. Öte yandan $\hat{\theta}$ lineer bağıntısının adjointi

$$\hat{\theta}^*=\left\{\{x,x'\}\in\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}:\ her\ u\in D(L_n)\ için\ \left(\gamma_2\left(A^{1/2}u\right),x\right)_{\mathcal{H}}=\left(\gamma_1\left(A^{1/2}u\right),x'\right)_{\mathcal{H}}\right\}$$

şeklindedir. θ lineer bağıntısı ve $\hat{A}^{1/2}$ lineer operatörü selfadjoint olduklarından, her $\{\gamma_1(u),\gamma_2(u)\},\{\gamma_1(v),\gamma_2(v)\}\in\theta,\ u,v\in D(L_n)$ için

$$\begin{aligned}\left(\left(\gamma_2\left(A^{1/2}u\right)\right),\hat{A}^{-1/2}(\gamma_1(v))\right)_{\mathcal{H}}&=\left(\hat{A}^{1/2}(\gamma_2(u)),\hat{A}^{-1/2}(\gamma_1(v))\right)_{\mathcal{H}}=(\gamma_2(u),\gamma_1(v))_{\mathcal{H}}\\&=(\gamma_1(u),\gamma_2(v))_{\mathcal{H}}=\left(\hat{A}^{1/2}(\gamma_1(u)),\hat{A}^{-1/2}(\gamma_2(v))\right)_{\mathcal{H}}=\left(\gamma_1\left(A^{1/2}u\right),\hat{A}^{-1/2}(\gamma_2(v))\right)_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

yani, $T^{-1}(\theta)\subset\hat{\theta}^*$. Tersine, her $\{x,x'\}\in\hat{\theta}^*$ ve $\{\gamma_1(u),\gamma_2(u)\}\in\theta,\ u\in D(L_n)$ için $\hat{\theta}^*$ tanımından,

$$\left(\{x,x'\},T\left(\{\gamma_2(u),-\gamma_1(u)\}\right)\right)_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}=0$$

olup θ lineer bağıntısı ve T lineer operatörü selfadjoint olduklarından $T\left(\{x,x'\}\right)\in\theta$ olmak zorundadır. Böylece $T^{-1}(\theta)=\hat{\theta}^*$ eşitliği elde edilir. Buradan $M_\lambda\left(\hat{\theta}\right):=\left\{\{x,x'\}\in\hat{\theta}^*:x'=\lambda x\right\}$, $\lambda\in\mathbb{C}$ olmak üzere $T^{-1}(M_\lambda(\theta))=M_\lambda\left(\hat{\theta}\right)$. Ayrıca

$$\hat{\theta}^*=\hat{\theta}\overset{\text{int}}{\oplus}M_i\left(\hat{\theta}\right)\overset{\text{int}}{\oplus}M_{-i}\left(\hat{\theta}\right)$$

eşitliği her simetrik lineer bağıntılar için doğru olduğundan [9] ve θ lineer bağıntısının selfadjoint olduğundan $\hat{\theta}=\hat{\theta}^*$, yani $\hat{\theta}$ lineer bağıntısının selfadjoint olduğu elde edilir. Bu halde

$$(V-E)\gamma_1\left(A^{1/2}u\right)+i(V+E)\gamma_2\left(A^{1/2}u\right)=0$$

şeklinde $V:H\oplus H\to H\oplus H$ bir üniter operatör mevcuttur [18]. Bu sonuncudan

$$\left(\hat{A}^{-1/2}V\hat{A}^{1/2}-E\right)\gamma_1(u)+i\left(\hat{A}^{-1/2}V\hat{A}^{1/2}+E\right)\gamma_2(u)=0$$

eşitliği elde edilir. W üniter operatörü, $\overline{\operatorname{Re}(L_n)}$ operatörü tarafından tek türlü belirlendiğinden $\hat{A}^{-1/2}V\hat{A}^{1/2}=W$, yani $\hat{A}^{1/2}W\hat{A}^{-1/2}$ operatörü üniterdir. Böylece L_n, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi

$$(W-E)\gamma_1(u)+i(W+E)\gamma_2(u)=0$$

sınır değeriyle ifade edilir.

$W: H\oplus H\to H\oplus H$ ve $\hat{A}^{1/2}W\hat{A}^{-1/2}$ üniter operatörler, $L_W u=l(u)$ ve

$$D(L_W)=\left\{u\in W_2^2\left(H,(a,b)\right):\ (W-E)\gamma_1(u)+i(W+E)\gamma_2(u)=0\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $u\in D(L_W)$ ve her $v\in D\left(L_W^{\ *}\right)$ için

$$\begin{aligned}
&(L_W u,v)_{L_2(H,(a,b))}-\left(u,L_W^{\ *}v\right)_{L_2(H,(a,b))}\\
&=\left(-u''(t)+iAu(t),v(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}-\left(u(t),-v''(t)-iAv(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}\\
&=\left(-u'(t),v(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}-\left(-u(t),v'(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}\\
&=\left(-u'(b),v(b)\right)_H-\left(-u(b),v'(b)\right)_H-\left(-u'(a),v(a)\right)_H+\left(-u(a),v'(a)\right)_H\\
&=\left(\gamma_1(u),\gamma_2(v)\right)_{H\oplus H}-\left(\gamma_2(u),\gamma_1(v)\right)_{H\oplus H}=0
\end{aligned}$$

eşitliği doğrudur. Bu halde,

$$\begin{aligned}
&2i\left[\left(\gamma_1(u),\gamma_2(v)\right)_{H\oplus H}-\left(\gamma_2(u),\gamma_1(v)\right)_{H\oplus H}\right]\\
&=\left(\gamma_1(u),\gamma_1(v)\right)_{H\oplus H}-\left(\gamma_1(u),i\gamma_2(v)\right)_{H\oplus H}-\left(i\gamma_2(u),\gamma_1(v)\right)_{H\oplus H}+\left(i\gamma_2(u),i\gamma_2(v)\right)_{H\oplus H}\\
&-\left(\gamma_1(u),\gamma_1(v)\right)_{H\oplus H}-\left(\gamma_1(u),i\gamma_2(v)\right)_{H\oplus H}-\left(i\gamma_2(u),\gamma_1(v)\right)_{H\oplus H}-\left(i\gamma_2(u),i\gamma_2(v)\right)_{H\oplus H}\\
&=\left(\gamma_1(u)-i\gamma_2(u),\gamma_1(v)-i\gamma_2(v)\right)_{H\oplus H}-\left(\gamma_1(u)+i\gamma_2(u),\gamma_1(v)+i\gamma_2(v)\right)_{H\oplus H}\\
&=\left(W\left(\gamma_1(u)+i\gamma_2(u)\right),\gamma_1(v)-i\gamma_2(v)\right)_{H\oplus H}-\left(\gamma_1(u)+i\gamma_2(u),\gamma_1(v)+i\gamma_2(v)\right)_{H\oplus H}\\
&=\left(\gamma_1(u)+i\gamma_2(u),W^*\left(\gamma_1(v)-i\gamma_2(v)\right)\right)_{H\oplus H}-\left(\gamma_1(u)+i\gamma_2(u),\gamma_1(v)+i\gamma_2(v)\right)_{H\oplus H}\\
&=\left(\gamma_1(u)+i\gamma_2(u),W^*\left(\gamma_1(v)-i\gamma_2(v)\right)-\left(\gamma_1(v)+i\gamma_2(v)\right)\right)_{H\oplus H}=0
\end{aligned}$$

olup, $\{\gamma_1(u) - i\gamma_2(u) : u \in D(L_W)\}$ kümesi $H \oplus H$ Hilbert uzayında yoğun olduğundan her $v \in D(L_W^{\ *})$ için

$$\left(W^* - E\right)\gamma_1(v) - i\left(W^* + E\right)\gamma_2(v) = 0$$

eşitliği bulunur. Sonuç olarak $L_W^{\ *}$ adjoint operatörü, $l^+(v) = -v''(t) - iAv(t)$ diferensiyel ifadesinin $\left(W^* - E\right)\gamma_1(v) - i\left(W^* + E\right)\gamma_2(v) = 0,\ v(t) \in D(L_W^{\ *})$ sınır koşulu tarafından üretilir. W üniter operatör olduğundan $D(L_W) = D(L_W^{\ *})$ olup, L_W bir normal genişlemedir. ◇

Şimdi ikinci mertebeden (9) lineer diferensiyel-operatörün ürettiği L_0 minimal operatörünün normal genişlemelerini ayrık spektrumunu inceleyelim.

Teorem 6: $W : H \oplus H \to H \oplus H$ bir üniter operatör olmak üzere L_W, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olsun. Bu durumda $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \sigma_p(L_W), \lambda_r, \lambda_i \in \mathbb{R}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda_i \in \sigma_p(A \otimes E)$

$$0 \in \sigma_p\left(\left(W - E\right)\begin{pmatrix} -1 & -e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} \\ e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{\lambda_r}\left(W + E\right)\begin{pmatrix} -1 & e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} \\ -e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} & 1 \end{pmatrix} \right)$$ ve

$H_{\lambda_r}(\operatorname{Re} L_W) \cap H_{\lambda_i}(A \otimes E) \neq \{0\}$ olmasıdır.

İspat: $\lambda \in \sigma_p(L_W)$ olsun. Bu durumda, $\bar{\lambda} \in \sigma_p(L_W^*)$ olacağından,

$$\begin{aligned} -u_\lambda''(t) + iAu_\lambda(t) &= \lambda u_\lambda(t), \\ -u_\lambda''(t) - iAu_\lambda(t) &= \bar{\lambda} u_\lambda(t) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $u_\lambda(t) \in D(L_W)$ vektör-fonksiyonu mevcuttur. Buradan,

$$\begin{aligned} -u_\lambda''(t) &= \lambda_r u_\lambda(t), \\ Au_\lambda(t) &= \lambda_i u_\lambda(t) \end{aligned}$$

olup, $u_\lambda(t) \in H_{\lambda_r}(\operatorname{Re} L_W) \cap H_{\lambda_i}(A \otimes E)$ ve $u_\lambda(t) = e^{i\sqrt{\lambda_r}(t-a)}x_1 + e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-t)}x_2$, $x_1, x_2 \in H$ şeklinde olduğu bulunur. Ayrıca $u_\lambda(t) \in D(L_W)$ olduğundan,

$$(W-E)\gamma_1(u_\lambda) + i(W+E)\gamma_2(u_\lambda) = 0$$

yani,

$$\left[(W-E)\begin{pmatrix} -1 & -e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} \\ e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{\lambda_r}(W+E)\begin{pmatrix} -1 & e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} \\ -e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Böylece

$$0 \in \sigma_p\left((W-E)\begin{pmatrix} -1 & -e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} \\ e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{\lambda_r}(W+E)\begin{pmatrix} -1 & e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} \\ -e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} & 1 \end{pmatrix}\right)$$

olduğu bulunur.

Tersine, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \mathbb{C}$ sayısı için $\lambda_i \in \sigma_p(A \otimes E)$,

$$0 \in \sigma_p\left((W-E)\begin{pmatrix} -1 & -e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} \\ e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{\lambda_r}(W+E)\begin{pmatrix} -1 & e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} \\ -e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} & 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{ve}$$

$H_{\lambda_r}(\operatorname{Re} L_W) \cap H_{\lambda_i}(A \otimes E) \neq \{0\}$ ise, $x_1, x_2 \in H$ olmak üzere bir $u_\lambda(t) = e^{i\sqrt{\lambda_r}(t-a)}x_1 + e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-t)}x_2 \in H_{\lambda_r}(\operatorname{Re} L_W) \cap H_{\lambda_i}(A \otimes E)$ vektör-fonksiyonu mevcuttur. Buradan $u_\lambda(t) \in D(L_W), u_\lambda(t) \neq 0$ ve $L_W u_\lambda(t) = \lambda u_\lambda(t)$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla $\lambda \in \sigma_p(L_W)$ olduğu elde edilir. ◇

Sonuç 7: $W = E$ yani, L_E Dirichlet genişlemesi olsun. Bu durumda,

$$\sigma_p(L_E) = \left\{ \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2} + i\lambda_i : \ \lambda_i \in \sigma_p(A \otimes E),\ H_{\frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}}(\operatorname{Re} L_E) \cap H_{\lambda_i}(A \otimes E) \neq \{0\} \ ve \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 6'da $W=E$ yazılırsa, $\lambda=\lambda_r+i\lambda_i\in\sigma_p\left(L_W\right),\lambda_r,\lambda_i\in\mathbb{R}$ için

$$0\in\sigma_p\left(\begin{pmatrix} -1 & e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} \\ -e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} & 1 \end{pmatrix}\right)$$ olup, bu ise ancak

$$\begin{vmatrix} -1 & e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} \\ -e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)} & 1 \end{vmatrix}=0$$

olması ile mümkündür. Dolaysıyla, $e^{2i\sqrt{\lambda_r}(b-a)}=1$ eşitliği ancak $\lambda_r=\dfrac{k^2\pi^2}{(b-a)^2},k\in\mathbb{Z}$ değerleri için doğrudur. Böylece

$$\sigma_p\left(L_E\right)=\left\{\frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}+i\lambda_i:\ \lambda_i\in\sigma_p\left(A\otimes E\right),\ H_{\frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}}\left(\operatorname{Re}L_E\right)\cap H_{\lambda_i}\left(A\otimes E\right)\neq\{0\}\ \ ve\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

olduğu elde edilir. ◇

Benzer şekilde aşağıdaki sonucun doğruluğu gösterilebilir.

Sonuç 8: $W=-E$ yani, L_{-E} Neumann genişlemesi olsun. Bu durumda da

$$\sigma_p\left(L_{-E}\right)=\left\{\frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}+i\lambda_i:\ \lambda_i\in\sigma_p\left(A\otimes E\right),\ H_{\frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}}\left(\operatorname{Re}L_{-E}\right)\cap H_{\lambda_i}\left(A\otimes E\right)\neq\{0\}\ \ ve\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

şeklindedir.

Şimdi $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında,

i) Her $t\in[a,b]$ için $D\left(A(t)\right)=D$ ve $A^*(t)=A(t)\geq E$,

ii) Her $x\in D$ için $A(t)x:[a,b]\to H$ güçlü sürekli türevlenebilir,

koşullarını sağlamak üzere,

$$l(u) = -u''(t) + A(t)u'(t) \tag{11}$$

ikinci mertebeden lineer diferensiyel operatör ifadesini ele alalım.

Verilen bu diferensiyel ifadenin $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında formal eşlenik ifadesinin

$$l^{+}(u) = -u''(t) - \left(A(t)u(t)\right)' \tag{12}$$

şeklindedir.

$l(\cdot)$ ve $l^{+}(\cdot)$ diferensiyel ifadelerinin ürettiği maksimal ve minimal operatörleri tanımlayalım.

İlk önce $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında yoğun tanımlı vektör-fonksiyonların lineer manifoldu üzerinde

$$D_0' := \left\{ u(t) \in L_2(H,(a,b)) : u(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) x_k, \varphi_k(t) \in C_0^{\infty}(a,b), x_k \in D, k = 1,2,\ldots,n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$L_0'u = l(u)$, $u \in D_0'$ ve $L_0^{+\prime} v := l^{+}(v)$, $v \in D_0'$ operatörlerini ele alalım. L_0' ve $L_0^{+\prime}$ lineer operatörlerinin $\overline{D_0'} = L_2(H,(a,b))$ olduğundan adjoint mevcuttur. Buradan $L_0' \subset L_0^{+\prime *}$ ve $L_0^{+\prime} \subset L_0'^{*}$ olduğundan L_0' ve $L_0^{+\prime}$ operatörlerinin kapanışının varlığı elde edilir.

Böylece L_0' operatörünün kapanışına $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi tarafından üretilen *minimal operatör* denir ve L_0 sembolüyle gösterilir.

Benzer şekilde $l^{+}(\cdot)$ diferensiyel ifadesinin $L_2(H,(a,b))$ üzerinde ürettiği L_0^{+} *minimal operatörünün* tanımı verilebilir. L_0^{+} (L_0) operatörünün $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayındaki eşlenik operatörüne $l(\cdot)$ ($l^{+}(\cdot)$) ifadesinin ürettiği *maksimal operatör* denir ve L (L^{+}) şeklinde gösterilir. $L_0 \subset L$ ve $L_0^{+} \subset L^{+}$ olduğu açıktır [3, 18].

Şimdi L_0 minimal operatörünün formal normalliğini inceleyelim.

Teorem 9: L_0 minimal operatörünün $L_2\left(H,\left(a,b\right)\right)$ Hilbert uzayında formal normal olması için gerekli ve yeterli koşul $\left[a,b\right]$ üzerinde $A\left(t\right)=A=sabit$ olmasıdır.

İspat: L_0 minimal operatörü ve L^+ maksimal operatörleri için $D\left(L_0\right)\subset D\left(L^+\right)$ bağıntısı doğru olup L_0 minimal operatörünün formal normal olduğunu varsayalım. Bu durumda her $u\left(t\right)=\varphi\left(t\right)x\in D_0'$ şeklindeki özel vektör-fonksiyonları için

$$
\begin{aligned}
&\left\|L_0u\left(t\right)\right\|_{L^2}^2-\left\|L^+u\left(t\right)\right\|_{L^2}^2\\
&=\left(-u''\left(t\right)+A\left(t\right)u'\left(t\right),-u''\left(t\right)+A\left(t\right)u'\left(t\right)\right)_{L^2}\\
&-\left(-u''\left(t\right)-\left(A\left(t\right)u\left(t\right)\right)',-u''\left(t\right)-\left(A\left(t\right)u\left(t\right)\right)'\right)_{L^2}\\
&=2\left[\left(u''\left(t\right),A\left(t\right)u'\left(t\right)\right)_{L^2}+\left(A\left(t\right)u'\left(t\right),u''\left(t\right)\right)_{L^2}\right]+\left(u''\left(t\right),A'\left(t\right)u\left(t\right)\right)_{L^2}\\
&+\left(A'\left(t\right)u\left(t\right),u''\left(t\right)\right)_{L^2}+\left(A'\left(t\right)u\left(t\right),A\left(t\right)u'\left(t\right)\right)_{L^2}\\
&+\left(A\left(t\right)u'\left(t\right),A'\left(t\right)u\left(t\right)\right)_{L^2}+\left(A'\left(t\right)u\left(t\right),A'\left(t\right)u\left(t\right)\right)_{L^2}\\
&=-2\left(\varphi'\left(t\right)x,A'\left(t\right)\varphi'\left(t\right)x\right)_{L^2}+\left(\varphi''\left(t\right)x,A'\left(t\right)\varphi\left(t\right)x\right)_{L^2}\\
&+\left(A'\left(t\right)\varphi\left(t\right)x,\varphi''\left(t\right)x\right)_{L^2}+\left(A'\left(t\right)\varphi\left(t\right)x,A\left(t\right)\varphi'\left(t\right)x\right)_{L^2}\\
&+\left(A\left(t\right)\varphi'\left(t\right)x,A'\left(t\right)\varphi\left(t\right)x\right)_{L^2}+\left(A'\left(t\right)\varphi\left(t\right)x,A'\left(t\right)\varphi\left(t\right)x\right)_{L^2}\\
&=-2\int_a^b\varphi'\left(t\right)\overline{\varphi'\left(t\right)}\left(x,A'\left(t\right)x\right)_H dt+\int_a^b\varphi''\left(t\right)\overline{\varphi\left(t\right)}\left(x,A'\left(t\right)x\right)_H dt\\
&+\int_a^b\varphi\left(t\right)\overline{\varphi''\left(t\right)}\left(A'\left(t\right)x,x\right)_H dt+\int_a^b\varphi\left(t\right)\overline{\varphi'\left(t\right)}\left(A'\left(t\right)x,A\left(t\right)x\right)_H dt\\
&+\int_a^b\varphi'\left(t\right)\overline{\varphi\left(t\right)}\left(A\left(t\right)x,A'\left(t\right)x\right)_H dt+\int_a^b\varphi\left(t\right)\overline{\varphi\left(t\right)}\left(A'\left(t\right)x,A'\left(t\right)x\right)_H dt\\
&=0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

eşitliği doğrudur. Buradan reel değerli her $\varphi\in C_0^\infty\left(a,b\right)$ fonksiyonları için

$$
\begin{aligned}
&-2\int_a^b \left(\varphi'(t)\right)^2 \left(x, A'(t)x\right)_H dt + \int_a^b \varphi''(t)\varphi(t)\left(x, A'(t)x\right)_H dt \\
&+\int_a^b \varphi(t)\varphi''(t)\left(A'(t)x, x\right)_H dt + \int_a^b \varphi(t)\varphi'(t)\left(A'(t)x, A(t)x\right)_H dt \\
&+\int_a^b \varphi'(t)\varphi(t)\left(A(t)x, A'(t)x\right)_H dt + \int_a^b \varphi(t)\varphi(t)\left(A'(t)x, A'(t)x\right)_H dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ve $\varphi, \psi \in C_0^\infty(a,b)$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere $\varphi + i\psi \in C_0^\infty(a,b)$ olup,

$$
\begin{aligned}
&-2\int_a^b \left(\varphi'(t)+i\psi'(t)\right)\overline{\left(\varphi'(t)+i\psi'(t)\right)}\left(x, A'(t)x\right)_H dt \\
&+\int_a^b \left(\varphi''(t)+i\psi''(t)\right)\overline{\left(\varphi(t)+i\psi(t)\right)}\left(x, A'(t)x\right)_H dt \\
&+\int_a^b \left(\varphi(t)+i\psi(t)\right)\overline{\left(\varphi''(t)+i\psi''(t)\right)}\left(A'(t)x, x\right)_H dt \\
&+\int_a^b \left(\varphi(t)+i\psi(t)\right)\overline{\left(\varphi'(t)+i\psi'(t)\right)}\left(A'(t)x, A(t)x\right)_H dt \\
&+\int_a^b \left(\varphi'(t)+i\psi'(t)\right)\overline{\left(\varphi(t)+i\psi(t)\right)}\left(A(t)x, A'(t)x\right)_H dt \\
&+\int_a^b \left(\varphi(t)+i\psi(t)\right)\overline{\left(\varphi(t)+i\psi(t)\right)}\left(A'(t)x, A'(t)x\right)_H dt \\
&= i\int_a^b \left(\varphi'(t)\psi(t)-\varphi(t)\psi'(t)\right)\left[\left(A'(t)x, A(t)x\right)_H - \left(A(t)x, A'(t)x\right)_H\right]dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

eşitliği sağlanır. Buradan $\varphi,\ \psi \in C_0^\infty(a,b)$ için $t\varphi,\ t\psi \in C_0^\infty(a,b)$ olup

$$\int_a^b \left(\left(\varphi(t) + t\varphi'(t) \right)\psi(t) - t\varphi(t)\psi'(t) \right) \left[\left(A'(t)x, A(t)x \right)_H - \left(A(t)x, A'(t)x \right)_H \right] dt$$
$$= \int_a^b \left(\varphi(t)\psi(t) + t\varphi'(t)\psi(t) - t\varphi(t)\psi'(t) \right) \left[\left(A'(t)x, A(t)x \right)_H - \left(A(t)x, A'(t)x \right)_H \right] dt$$
$$= \int_a^b \left(2\varphi(t)\psi(t) + t\varphi(t)\psi'(t) - t\varphi(t)\psi'(t) \right) \left[\left(A'(t)x, A(t)x \right)_H - \left(A(t)x, A'(t)x \right)_H \right] dt$$
$$= 2\int_a^b \varphi(t)\psi(t) \left[\left(A'(t)x, A(t)x \right)_H - \left(A(t)x, A'(t)x \right)_H \right] dt$$
$$= 0.$$

Böylece $A(t)$ güçlü sürekli türevlenebilir olduğundan her $t \in [a,b]$ için

$$\left(A'(t)x, A(t)x \right)_H = \left(A(t)x, A'(t)x \right)_H$$

olduğu elde edilir.

(13) bağıntısında reel değerli $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ yerine $e^{it}\varphi(t)$ yazılırsa,

$$-2\int_a^b \left(ie^{it}\varphi(t) + e^{it}\varphi'(t) \right) \overline{\left(ie^{it}\varphi(t) + e^{it}\varphi'(t) \right)} \left(A'(t)x, x \right)_H dt$$
$$+ \int_a^b \left(-e^{it}\varphi(t) + 2ie^{it}\varphi'(t) + e^{it}\varphi''(t) \right) \overline{e^{it}\varphi(t)} \left(A'(t)x, x \right)_H dt$$
$$+ \int_a^b e^{it}\varphi(t) \overline{\left(-e^{it}\varphi(t) + 2ie^{it}\varphi'(t) + e^{it}\varphi''(t) \right)} \left(A'(t)x, x \right)_H dt$$
$$+ \int_a^b e^{it}\varphi(t) \overline{\left(ie^{it}\varphi(t) + e^{it}\varphi'(t) \right)} \left(A'(t)x, A(t)x \right)_H dt$$
$$+ \int_a^b \left(ie^{it}\varphi(t) + e^{it}\varphi'(t) \right) \overline{e^{it}\varphi(t)} \left(A'(t)x, A(t)x \right)_H dt$$
$$+ \int_a^b e^{it}\varphi(t) \overline{e^{it}\varphi(t)} \left(A'(t)x, A'(t)x \right)_H dt$$
$$= -4\int_a^b \varphi^2(t) \left(A'(t)x, x \right)_H dt$$
$$= 0.$$

Buradan reel değerli her $\varphi, \psi \in C_0^\infty(a,b)$ için $\varphi + \psi \in C_0^\infty(a,b)$ olup yukarıdaki eşitlikten,

$$\int_a^b \left(\varphi(t)+\psi(t)\right)^2 \left(A'(t)x,x\right)dt$$
$$=2\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\left(A'(t)x,x\right)dt$$
$$=0$$

yani, $A'(t)=0$. Dolayısıyla $A(t)$ güçlü sürekli olduğundan her $t\in[a,b]$

$$A(t)=A=sabit$$

olduğu elde edilir. ◇

Bu durumda her $t\in[a,b]$ için $A(t)=A$ şeklinde alarak (11) diferensiyel ifadenin ürettiği minimal operatörün normal genişlemelerinin sınır değerleri dilinde ifadesini verelim.

Teorem 10: $A:D(A)\subset H\to H$ lineer selfadjoint operatör $A\geq E$ ve $AW_2^1\left(H,(a,b)\right)\subset W_2^1\left(H,(a,b)\right)$ olsun. L_0 minimal operatörünün her bir L_n, $L_0\subset L_n\subset L$ normal genişlemesi $W,V:H\to H$ üniter operatörler ve $W^*A^{-1}=A^{-1}V^*$ eşitliğini sağlamak üzere, $L_2\left(H,\,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında (11) diferensiyel ifadesinin

$$\begin{aligned} u(b)&=A^{-1/2}WA^{1/2}u(a)\\ u'(b)&=A^{-1/2}VA^{1/2}u'(a)\end{aligned} \tag{14}$$

sınır koşulları tarafından üretilir. Buradaki W üniter operatörü, L_n normal genişlemesine bağlı olarak tektürlü belirlenir, yani $L_n=L_{W,V}$.

Tersine, $W^*A^{-1}=A^{-1}V^*$ olan keyfi $W,V:H\to H$ üniter operatörleri için L maksimal operatörünün (14) sınır koşullarını sağlayan $u(t)\in W_2^2\left(H,\,(a,b)\right)$ vektör-fonksiyonlarının alt lineer manifolduna kısıtlanışı, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesidir.

İspat: L_n, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olsun. Bu durumda

$$\overline{\operatorname{Re}(L_n)}u(t)=-\frac{d^2}{dt^2}u(t),\ u(t)\in D(L_n),$$

$$\overline{\operatorname{Im}(L_n)}u(t)=-iAu'(t),\ u(t)\in D(L_n)$$

operatörleri, sırasıyla $\overline{\operatorname{Re}(L_0)}$ ve $\overline{\operatorname{Im}(L_0)}$ operatörlerinin selfadjoint genişlemeleridir.

$$\mathcal{H}:=H,\ \gamma_1(u):=\frac{A^{1/2}u(a)+A^{1/2}u(b)}{\sqrt{2}},\ \gamma_2(u):=\frac{A^{1/2}u(a)-A^{1/2}u(b)}{i\sqrt{2}}$$

şeklinde tanımlanan $(\mathcal{H},\gamma_1,\gamma_2)$ üçlüsü $A^{1/2}:D\left(A^{1/2}\right)\subset H\to H$ lineer operatörünün sınırlı tersi olduğundan $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında $\overline{\operatorname{Im}(L_0)}$ minimal operatörü için bir sınır değerleri uzayıdır.

$\overline{\operatorname{Im}(L_n)}$, $\overline{\operatorname{Im}(L_0)}$ minimal operatörünün $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında bir selfadjoint genişlemesi olduğundan, bu genişleme $W:H\to H$ bir tek üniter operatör olmak üzere,

$$(W-E)\gamma_1(u)+i(W+E)\gamma_2(u)=0$$

sınır koşuluyla tanımlanır [18]. Başka bir deyişle $\overline{\operatorname{Im}(L_n)}$ selfadjoint genişlemesi $l_i(u)=-iAu'$ diferensiyel ifadesi ve

$$A^{-1/2}WA^{1/2}u(a)=u(b),\ u\in D(L_n)$$

şeklinde olan sınır değer koşulu ile ifade edilir.

L_n, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olduğundan reel ve sanal kısımları değişmeli olup her $u(t)\in D(L_n)$ için

$$
\begin{aligned}
&\left(\operatorname{Re}(L_n)u(t),\operatorname{Im}(L_n)u(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}-\left(\operatorname{Im}(L_n)u(t),\operatorname{Re}(L_n)u(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}\\
&=\left(-u''(t),-iAu'(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}-\left(-iAu'(t),-u''(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}\\
&=i\left[\left(-u''(t),Au'(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}-\left(Au'(t),-u''(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}\right]\\
&=i\left(-u'(t),Au'(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}\\
&=-i\left[\left(u'(b),Au'(b)\right)_H-\left(u'(a),Au'(a)\right)_H\right]\\
&=i\left[\left\|A^{1/2}u'(b)\right\|_H^2-\left\|A^{1/2}u'(a)\right\|_H^2\right]=0
\end{aligned}
$$

olup her $u(t)\in D(L_n)$ için $\left\|A^{1/2}u'(a)\right\|=\left\|A^{1/2}u'(b)\right\|$ olduğu bulunur. Buradan $V:H\to H$, $VA^{1/2}u'(a)=A^{1/2}u'(b)$ olacak şekilde bir izometrik dönüşüm mevcuttur. Böylece, her $u(t)\in D(L_n)$ için

$$A^{-1/2}VA^{1/2}u'(a)=u'(b)$$

olduğu elde edilir.

Şimdi $\varphi_i\in W_2^2(a,b),\ i=1,2$,

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1'(a)=\varphi_2'(b)=1,\\
&\varphi_1(a)=\varphi_1(b)=\varphi_1'(b)=\varphi_2(a)=\varphi_2(b)=\varphi_2'(a)=0
\end{aligned}
$$

olmak üzere her $x\in D(A)$ için

$$u_x(t)=\varphi_1(t)x+\varphi_2(t)A^{1/2}WA^{-1/2}x$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonların $u_x\in D(L_n)$ olduğunu gösterelim. Bir $x\in D(A)$ için $u_x\notin D(L_n)$ olduğunu varsayalım. Bu halde $D(\tilde{L}_n)=span\{D(L_n)\cup\{u_x\}\}$ olan bir $L_n\subset\tilde{L}_n$ genişlemesini ele alalım. Bu durumda $\tilde{L}_n^*\subset L_n^*$ olup $D(\tilde{L}_n^*)\subset D(L_n)$ bağıntısı doğrudur. Buradan her $v\in D(L_n)$ için

$$\left(\tilde{L}_n u_x(t), v(t)\right)_{L_2(H,(a,b))} = \left(-u_x''(t) + Au_x'(t), v(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}$$
$$= \left(-u_x''(t), v(t)\right)_{L_2(H,(a,b))} + \left(Au_x'(t), v(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}$$
$$= \left(-u_x'(t), v(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))} + \left(u_x(t), v'(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))} + \left(Au_x(t), v(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))} + \left(u_x(t), -v''(t) - Av'(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}$$
$$= -\left(u_x'(b), v(b)\right)_H + \left(u_x'(a), v(a)\right)_H + \left(u_x(b), v'(b)\right)_H - \left(u_x(a), v'(a)\right)_H + \left(Au_x(b), v(b)\right)_H$$
$$-\left(Au_x(a), v(a)\right)_H + \left(u_x(t), -v''(t) - Av'(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}$$
$$= -\left(A^{1/2}WA^{-1/2}x, A^{-1/2}WA^{1/2}v(a)\right)_H + \left(x, v(a)\right)_H + \left(u_x(t), -v''(t) - Av'(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}$$
$$= -\left(x, v(a)\right)_H + \left(x, v(a)\right)_H + \left(u_x(t), -v''(t) - Av'(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}$$
$$= \left(u_x(t), -v''(t) - Av'(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}$$

bağıntısından $D(L_n) \subset D(\tilde{L}_n^*)$, yani $L_n^* = \tilde{L}_n^*$ eşitliği ve dolayısıyla $L_n = \tilde{L}_n$ olduğu bulunur. Sonuncudan her $x \in D(A)$ için $u_x \in D(L_n)$ olup $A^{-1/2}VA^{1/2}u_x'(a) = u_x'(b)$ eşitliğinden

$$A^{1/2}WA^{-1/2}x = A^{-1/2}VA^{1/2}x$$

olup $W^*A^{-1} = A^{-1}V^*$ sonucu doğrudur ve bu koşulu sağlayan $V : H \to H$ izometrik dönüşümü bir tektir. Eğer bu koşulu sağlayan iki $V_1, V_2 : H \to H$ izometrik dönüşüm ise,

$$W = A^{-1}V_1A = A^{-1}V_2A$$

olup

$$A^{-1}V_1A - A^{-1}V_2A = A^{-1}\left(V_1 - V_2\right)A = 0$$

eşitliğinden $V_1 = V_2$ olduğu bulunur. Ayrıca $V : H \to H$ izometrik dönüşüm olduğundan

$$V^*V = A^{-1}W^*AAWA^{-1} = E$$

eşitliği doğru olup, $A^2W = WA^2$ ve $W : H \to H$ üniter operatör olduğundan $W^*A^{-2} = A^{-2}W^*$ eşitliği doğrudur. Buradan

$$\begin{aligned} VV^* &= AWA^{-1}A^{-1}W^*A = AWA^{-2}W^*A \\ &= AWW^*A^{-2}A = AA^{-1} = E \end{aligned}$$

yani $V : H \to H$ üniter operatördür.

$W,V:H\to H$ üniter operatörler ve $W^*A^{-1}=A^{-1}V^*$ koşulunu sağlamak üzere, $L_{W,V}u=l(u)$

$$D\left(L_W\right)=\left\{u\in W_2^2\left(H,\left(a,b\right)\right):u(b)=A^{-1/2}WA^{1/2}u(a),\ u'(b)=A^{-1/2}VA^{1/2}u'(a)\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $u\in D\left(L_W\right)$ ve her $v\in D\left(L_W{}^*\right)$ için

$$\begin{aligned}
&\left(L_Wu,v\right)_{L_2(H,(a,b))}-\left(u,L_W{}^*v\right)_{L_2(H,(a,b))}\\
&=\left(-u''(t)+Au'(t),v(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}-\left(u(t),-v''(t)-Av'(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}\\
&=\left(-u'(t),v(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}-\left(-u(t),v'(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}+\left(Au(t),v(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}\\
&=\left(-u'(b),v(b)\right)_H-\left(-u'(a),v(a)\right)_H-\left(-u(b),v'(b)\right)_H+\left(-u(a),v'(a)\right)_H\\
&+\left(Au(b),v(b)\right)_H-\left(Au(a),v(a)\right)_H\\
&=-\left(A^{-1/2}VA^{1/2}u'(a),v(b)\right)_H+\left(u'(a),v(a)\right)_H+\left(A^{-1/2}WA^{1/2}u(a),v'(b)\right)_H-\left(u(a),v'(a)\right)_H\\
&+\left(A^{-1/2}WA^{1/2}u(a),Av(b)\right)_H-\left(u(a),Av(a)\right)_H\\
&=-\left(u'(a),A^{1/2}V^*A^{-1/2}v(b)-v(a)\right)_H+\left(u(a),A^{1/2}W^*A^{-1/2}v'(b)-v'(a)\right)_H\\
&+\left(u(a),A^{1/2}W^*A^{1/2}v(b)-Av(a)\right)_H\\
&=\left(\left\{u(a),-u'(a)\right\},\left\{A^{1/2}W^*A^{1/2}v(b)+A^{1/2}W^*A^{-1/2}v'(b)-Av(a)-v'(a),A^{1/2}V^*A^{-1/2}v(b)-v(a)\right\}\right)_{H\oplus H}\\
&=0
\end{aligned}$$

eşitliği doğrudur. Bu halde, $\left\{\left\{u(a),-u'(a)\right\}:u\in D\left(L_{W,V}\right)\right\}$ kümesi $H\oplus H$ Hilbert uzayında yoğun olduğundan her $v\in D\left(L_{W,V}{}^*\right)$ için

$$v(a)=A^{1/2}V^*A^{-1/2}v(b),$$

$$Av(a)+v'(a)=A^{1/2}W^*A^{1/2}v(b)+A^{1/2}W^*A^{-1/2}v'(b)$$

eşitlikleri bulunur. Sonuç olarak $L_{W,V}{}^*$ adjoint operatörü, $l^+(v)=-v''(t)-Av'(t)$ diferensiyel ifadesinin $v(t)\in D\left(L_{W,V}{}^*\right)$ olmak üzere,

$$v(a)=A^{1/2}V^*A^{-1/2}v(b),$$

$$Av(a)+v'(a)=A^{1/2}W^{*}A^{-1/2}\left(Av(b)+v'(b)\right)$$

sınır koşulu tarafından üretilir. $W,V:H\to H$ üniter operatörler ve $W^{*}A^{-1}=A^{-1}V^{*}$ olduğundan $D\left(L_{W,V}\right)=D\left(L_{W,V}{}^{*}\right)$ olup, $L_{W,V}$ bir normal genişlemedir. ◇

Teorem 11: $W,V:H\to H$, $W^{*}A^{-1}=A^{-1}V^{*}$ koşulunu sağlayan üniter operatörler ve $1\in\sigma_p(W)$ olmak üzere $L_{W,V}$, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olsun. Bu durumda

$$\sigma_p\left(L_{W,V}\right)=\left\{\lambda_r+i\lambda_i:\ \sqrt{\frac{\lambda_i^2}{-\lambda_r}}\in\sigma_p(A),\ e^{i\sqrt{\lambda_r}(b-a)}\in\sigma_p(W),\ H_{\sqrt{\frac{\lambda_i^2}{-\lambda_r}}}(A)\cap H_{e^{i\sqrt{-\lambda_r}(b-a)}}(W)\neq\{0\}\right\}\cup\{0\}$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: $\lambda\in\sigma_p\left(L_{W,V}\right)$ olsun. Bu durumda, $\bar{\lambda}\in\sigma_p\left(L_W^{*}\right)$ olacağından,

$$\begin{aligned}&-u_\lambda''(t)+Au_\lambda'(t)=\lambda u_\lambda(t),\\&-u_\lambda''(t)-Au_\lambda'(t)=\bar{\lambda}u_\lambda(t)\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $u_\lambda(t)\in D\left(L_{W,V}\right)$ vektör-fonksiyonu mevcuttur. Buradan,

$$\begin{aligned}&-u_\lambda''(t)=\lambda_r u_\lambda(t),\\&Au_\lambda'(t)=i\lambda_i u_\lambda(t)\end{aligned}$$

olup, $u_\lambda(t)=e^{i\lambda_i A^{-1}(t-a)}x$, $x\in H\setminus\{0\}$ şeklinde olduğu bulunur. Buradan

$$-\lambda_i^2A^{-2}e^{i\lambda_i A^{-1}(t-a)}x=\lambda_r e^{i\lambda_i A^{-1}(t-a)}x,\ \ x\in H\setminus\{0\}$$

yani,

$$-\lambda_i^2A^{-2}x=\lambda_r x,\ x\in H\setminus\{0\} \tag{15}$$

bağıntısı doğrudur. Bu sonuçtan $\lambda_i = 0$ olması için gerekli ve yeter koşul $\lambda_r = 0$ olmasıdır. Eğer $\lambda_i = 0$ ise, $1 \in \sigma_p(W)$ ve $A^{1/2*} = A^{1/2} \geq E$ olduğundan

$$WA^{1/2}x = A^{1/2}x,$$

olacak şekilde $x \in H \setminus \{0\}$ elemanı mevcut

$$u_0(t) = x\,,\; x \in H \setminus \{0\}$$

vektör-fonksiyonu için sınır değer koşulları sağlanır. Dolayısıyla

$$0 \in \sigma_p(L_{W,V})$$

olduğu elde edilir.

Şimdi $\lambda_i \neq 0$ ve $\lambda_r \neq 0$ olduğunu kabul edelim. (15) bağıntısından

$$\sqrt{\frac{\lambda_i^2}{-\lambda_r}} \in \sigma_p(A)$$

dır. Buradan

$$u_\lambda(t) = e^{i\lambda_i A^{-1}(t-a)}x = e^{i\lambda_i\sqrt{\frac{-\lambda_r}{\lambda_i^2}}(t-a)}x = e^{i\sqrt{-\lambda_r}(t-a)}x,\; x \in H \setminus \{0\}$$

şeklindedir. Ayrıca $u_\lambda(b) = A^{-1/2}WA^{1/2}u_\lambda(a)$ sınır koşulu sağlandığından

$$Wx = e^{i\sqrt{-\lambda_r}(b-a)}x,\; x \in H \setminus \{0\}$$

yani, $e^{i\sqrt{-\lambda_r}(b-a)} \in \sigma_p(W)$. Buradan $x \in H_{\sqrt{\frac{\lambda_i^2}{-\lambda_r}}}(A) \cap H_{e^{i\sqrt{-\lambda_r}(b-a)}}(W)$ olduğu elde edilir. Bu sonuncu ve $W^*A^{-1} = A^{-1}V^*$ olduğundan $Wx = Vx = e^{i\sqrt{-\lambda_r}}x$ olup

$$u_\lambda'(b) = A^{-1/2}VA^{1/2}u_\lambda'(a)$$

sınır koşulu da sağlanır. ◇

Sonuç 13: $W = E$ ve $V = E$ olmak üzere $L_{E,E}$, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olsun. Bu durumda

$$\sigma_p\left(L_{E,E}\right) = \left\{ -\frac{4k^2\pi^2}{\left(b-a\right)^2} + i\lambda_i : \frac{\lambda_i\left(b-a\right)}{2k\pi} \in \sigma_p\left(A\right),\, k \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

bağıntısı doğrudur.

Sonuç 14: $W = -E$ ve $V = -E$ olmak üzere $L_{-E,-E}$, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olsun. Bu durumda

$$\sigma_p\left(L_{-E,-E}\right) = \left\{ -\frac{\left(2k-1\right)^2\pi^2}{\left(b-a\right)^2} + i\lambda_i : \frac{\lambda_i\left(b-a\right)}{\left(2k-1\right)\pi} \in \sigma_p\left(A\right),\, k \in \mathbb{N} \right\}$$

bağıntısı doğrudur.

2.3. Üçüncü Mertebeden Operatör Katsayılı Normal Diferensiyel Operatörler

2.3.1. Normal Genişlemer Hakkında

Bu bölümde $L_2\left(H,\left(a,b\right)\right)$ Hilbert uzayında $A\left(t\right)$ her $t \in \left[a,b\right]$ için H Hilbert uzayında lineer selfadjoint operatörler, her $t \in \left[a,b\right]$ için $A\left(t\right) \geq E$ ve her $t \in \left[a,b\right]$ için $D\left(A\left(t\right)\right) = D$ olmak üzere,

$$l\left(u\right) = u'''\left(t\right) + A\left(t\right)u\left(t\right) \tag{16}$$

üçüncü mertebeden lineer diferensiyel operatör ifadesi ele alınacaktır.

Verilen bu diferensiyel ifadesinin $L_2\left(H,\left(a,b\right)\right)$ Hilbert uzayında formal eşlenik ifadesi

$$l^{+}(u) = -u'''(t) + A(t)u(t) \tag{17}$$

şeklindedir.

Şimdi $l(\cdot)$ ve $l^{+}(\cdot)$ diferensiyel ifadelerinin ürettiği maksimal ve minimal operatörleri tanımlayalım.

Öncelikle $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında yoğun tanımlı vektör-fonksiyonların lineer manifoldu üzerinde

$$D_0' := \left\{ u(t) \in L_2(H,(a,b)) : u(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) x_k,\ \varphi_k(t) \in C_0^{\infty}(a,b),\ x_k \in D,\ k = 1,2,\ldots,n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$L_0'u = l(u)$, $u \in D_0'$ operatörünü inceleyelim. $\overline{D_0'} = L_2(H,(a,b))$ ve her $u \in D_0'$ için

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(\left(L_0' u, u \right)_{L_2(H,(a,b))} \right) = \operatorname{Re}\left(\left(lu(t), u(t) \right)_{L_2(H,(a,b))} \right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\left(u'''(t), u(t) \right)_{L_2(H,(a,b))} \right) + \operatorname{Re}\left(\left(A(t)u(t), u(t) \right)_{L_2(H,(a,b))} \right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\left(\left(u''(t), u(t) \right)_H - \left(u'(t), u'(t) \right)_H - \left(u(t), u''(t) \right)_H \right) \Big|_a^b + \left(u(t), -u''(t) \right)_{L_2(H,(a,b))} \right) \\
&+ \operatorname{Re}\left(\left(A(t)u(t), u(t) \right)_{L_2(H,(a,b))} \right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\left(A(t)u(t), u(t) \right)_{L_2(H,(a,b))} \right) \geq \left\| u(t) \right\|^2_{L_2(H,(a,b))} \geq 0
\end{aligned}$$

buradan $\operatorname{Re}\left(\left(L_0' u, u \right)_{L_2(H,(a,b))} \right) \geq 0$, yani D_0' kümesi üzerinde $L_0'u := l(u)$ operatörü akkretif operatördür. Böylece L_0' operatörünün kapanışı vardır [13].

Böylece L_0' operatörünün kapanışına $l(\cdot)$ diferensiyel ifadesi tarafından üretilen *minimal operatör* denir ve L_0 sembolüyle gösterilir.

Benzer yolla $l^{+}(\cdot)$ diferensiyel ifadesinin $L_2(H,(a,b))$ üzerinde ürettiği L_0^{+} *minimal operatörünün* tanımı verilebilir. L_0^{+} (L_0) operatörünün $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayındaki eşlenik operatörüne $l(\cdot)$ $(l^{+}(\cdot))$ ifadesinin ürettiği *maksimal operatör* denir ve L (L^{+}) şeklinde gösterilir. $L_0 \subset L$ ve $L_0^{+} \subset L^{+}$ olduğu açıktır [3, 18].

Teorem 1: Her $x \in D$ için $\sigma_x(t) := \left(A(t)x, x\right) \in L_2(a,b)$ olsun. L_0 minimal operatörü $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında formal normal ise (a,b) üzerinde hemen her yerde $\sigma_x(t) = sabit, x \in D$ olmalıdır.

İspat: L_0 minimal operatörü ve L^{+} maksimal operatörleri için $D(L_0) \subset D(L^{+})$ bağıntısı doğru olup L_0 minimal operatörünün formal normal olduğunu varsayalım. Bu durumda her $u(t) \in D(L_0)$ için

$$\begin{aligned}
&\left\|L_0 u(t)\right\|_{L^2}^2 - \left\|L^{+} u(t)\right\|_{L^2}^2 \\
&= \left(u'''(t) + A(t)u(t), u'''(t) + A(t)u(t)\right)_{L^2} - \left(-u'''(t) + A(t)u(t), -u'''(t) + A(t)u(t)\right)_{L^2} \\
&= 2\left[\left(u'''(t), A(t)u(t)\right)_{L^2} + \left(A(t)u(t), u'''(t)\right)_{L^2}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

eşitliği doğrudur. Bu eşitlikte $u(t) = \varphi(t)x \in D_0'$ şeklindeki özel vektör-fonksiyonlar yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\left(u'''(t), A(t)u(t)\right)_{L^2} + \left(A(t)u(t), u'''(t)\right)_{L^2} \\
&= \left(\varphi'''(t)x, A(t)\varphi(t)x\right)_{L^2} + \left(A(t)\varphi(t)x, \varphi'''(t)x\right)_{L^2} \\
&= \int_a^b \sigma_x(t)\left(\varphi'''(t)\overline{\varphi(t)} + \varphi(t)\overline{\varphi'''(t)}\right)dt = 0.
\end{aligned}$$

Burada $\varphi \in C_0^{\infty}(a,b)$ reel değerli alınırsa,

$$\int_a^b \sigma_x(t)\varphi'''(t)\varphi(t)dt = 0$$

eşitliği doğru olduğundan ve reel değerli her $\varphi \in C_0^{\infty}(a,b)$ için $e^{it}\varphi(t) \in D_0'$ olup yukarıdaki bağıntıdan

$$\int_a^b \sigma_x(t)\left(\left(e^{it}\varphi(t)\right)''' e^{-it}\varphi(t)+e^{it}\varphi(t)\overline{\left(e^{it}\varphi(t)\right)'''}\right)dt$$

$$=\int_a^b \sigma_x(t)\Big(\big(-i\varphi(t)-3\varphi'(t)+3i\varphi''(t)+\varphi'''(t)\big)\varphi(t)+\varphi(t)\big(i\varphi(t)-3\varphi'(t)-3i\varphi''(t)+\varphi'''(t)\big)\Big)dt$$

$$=\int_a^b \sigma_x(t)\big(2\varphi(t)\varphi'''(t)-6\varphi(t)\varphi'(t)\big)dt$$

$$=-6\int_a^b \sigma_x(t)\varphi(t)\varphi'(t)dt=-3\int_a^b \sigma_x(t)\left(\left(\varphi(t)\right)^2\right)'dt=0$$

yani, reel değerli her $\varphi\in C_0^{\infty}(a,b)$ için

$$\int_a^b \sigma_x(t)\left(\left(\varphi(t)\right)^2\right)'dt=0$$

eşitliği doğrudur. Buradan reel değerli her $\varphi,\psi\in C_0^{\infty}(a,b)$ için $\varphi+\psi\in C_0^{\infty}(a,b)$ olduğunda,

$$\int_a^b \sigma_x(t)\left(\left(\varphi(t)+\psi(t)\right)^2\right)'dt=\int_a^b \sigma_x(t)\left(\left(\varphi(t)\right)^2\right)'dt+2\int_a^b \sigma_x(t)\left(\varphi(t)\psi(t)\right)'dt+\int_a^b \sigma_x(t)\left(\left(\psi(t)\right)^2\right)'dt$$

$$=2\int_a^b \sigma_x(t)\left(\varphi(t)\psi(t)\right)'dt=0.$$

Böylece bölüm 2.2 Lemma 1’ den hemen her yerde $\sigma_x(t)=sabit, x\in D$ olduğu bulunur. ◇

Sonuç 2: Eğer $\overline{\alpha(t)}=\alpha(t)\in L_2(a,b),\ A(t)=\alpha(t)A,\ A\geq E$ ise, L_0 minimal operatörünün $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında formal normal olması için gerekli ve yeterli koşul (a,b) üzerinde hemen her yerde $\alpha(t)=sabit$ olmasıdır.

Sonu 3: Eğer $\dim(H)<+\infty$ ise, L_0 minimal operatörünün $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında formal normal olması için gerekli ve yeterli koşul (a,b) üzerinde hemen her yerde $A(t)=sabit$ olmasıdır.

2.3.2. Minimal ve Maksimal Operatörlerin Tanım Kümeleri

$A : D(A) \subset H \to H$, $A^* = A \geq E$ her $x, y \in D(A)$ için

$$(x,y)_{+1/6} := \left(A^{1/6}x, A^{1/6}y\right)_H$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir iç çarpım olup, bu iç çarpım tarafından tanımlanan Hilbert uzayını $H_{1/6}(A)$ ve $H_{1/6}(A)$ Hilbert uzayının H daki iç çarpımına göre dual uzayını $H_{-1/6}(A)$ şeklinde gösterelim. Bu durumda A operatörü $H_{1/6}(A)$'dan H'ya bir sürekli lineer operatör gibi bakılabilir. Dolayısıyla A operatörünün eşleniği $\tilde{A}$ ile gösterilirse, $\tilde{A}$ operatörü H'dan $H_{-1/6}(A)$'ya bir operatördür [18]. Bu operatör A'nın bir genişletimi olup $\tilde{A}^* = \tilde{A} \geq E$ [18]. Bundan sonra $\tilde{l}(.)$ ile

$$\tilde{l}u(t) = u'''(t) + \tilde{A}u(t)$$

diferensiyel ifadesini ele alınacaktır.

Not: Bu son lemmaya göre $u \in D(\tilde{L})$ ise, $u'''(t) \in L_2(H,(a,b))$ olduğundan, $D(L) \subset W_2^3(H,(a,b))$. Bu sonuç ve gömme teoremine [4] göre $u''(t) \in C(H,[a,b])$ olup, $u(a)$, $u(b)$, $u'(a)$, $u'(b)$, $u''(a)$, $u''(b) \in H$ dır.

Lemma 4: $x \to e^{\tilde{A}^{1/3}(a-t)}x$, $x \to e^{\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\tilde{A}^{1/3}(a-t)}x$ lineer operatörleri $H_{-1/6}(A)$ 'den $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayına sürekli operatörlerdir.

İspat: $e^{\tilde{A}^{1/3}(a-t)}x$, $e^{\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\tilde{A}^{1/3}(a-t)}x$, $x \in H_{-1/6}(A)$, $t \in (a,b)$ vektör-fonksiyonları H'da sonsuz türeve sahip ve $\tilde{A}^{1/6}y = x$ olacak şekilde bir $y \in H$ elemanı mevcut olduğundan [18],

$$\left\| e^{\tilde{A}^{1/3}(a-t)} x \right\|^2_{L_2(H,(a,b))} = \int_a^b \left(e^{\tilde{A}^{1/3}(a-t)} x, e^{\tilde{A}^{1/3}(a-t)} x \right)_H dt = \int_a^b \left(\int_1^{+\infty} \lambda^{1/3} e^{2\lambda^{1/3}(a-t)} d\left(\tilde{E}_\lambda y, y\right)_H \right) dt$$

$$= \int_1^{+\infty} \left(\int_a^b \lambda^{1/3} e^{2\lambda^{1/3}(a-t)} dt \right) d\left(\tilde{E}_\lambda y, y\right)_H = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left(1 - e^{2\lambda^{1/3}(a-b)} \right) d\left(\tilde{E}_\lambda y, y\right)_H$$

$$\leq \|y\|_H^2 = \|x\|^2_{-1/6}$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca $x \to e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\tilde{A}^{1/3}(a-t)} x$ lineer operatörü için

$$\left\| e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\tilde{A}^{1/3}(a-t)} x \right\|^2_{L_2(H,(a,b))} = \int_a^b \left(e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\tilde{A}^{1/3}(a-t)} x, e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\tilde{A}^{1/3}(a-t)} x \right)_H dt = \int_a^b \left(\int_1^{+\infty} \lambda^{1/3} e^{\lambda^{1/3}(a-t)} d\left(\tilde{E}_\lambda y, y\right)_H \right) dt$$

$$= \int_1^{+\infty} \left(\int_a^b \lambda^{1/3} e^{\lambda^{1/3}(a-t)} dt \right) d\left(\tilde{E}_\lambda y, y\right)_H = \int_1^{+\infty} \left(1 - e^{\lambda^{1/3}(a-b)} \right) d\left(\tilde{E}_\lambda y, y\right)_H$$

$$\leq \|y\|_H^2 = \|x\|^2_{-1/6}$$

olduğu elde edilir. Benzer şekilde $x \to e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\tilde{A}^{1/3}(a-t)} x$ operatörünün sınırlı olduğu gösterilebilir. ◇

Lemma 5: $f(t) \to \int_a^b e^{\tilde{A}^{1/3}(a-t)} f(t) dt,\ f(t) \to \int_a^b e^{\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\tilde{A}^{1/3}(a-t)} f(t) dt$ lineer operatörleri $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayından $H_{+1/6}(A)$ Hilbert uzayına sınırlı operatörlerdir.

İspat: Bu operatörler Lemma 4 deki operatörlerin adjoint operatörleri olduğundan sonuç açıktır. ◇

Teorem 6: L maksimal operatörünün tanım kümesi $Lu(t) = f(t),\ f \in L_2(H,(a,b))$ olmak üzere,

$$u(t) = e^{(a-t)\tilde{A}^{1/3}} x_1 + e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-b)\tilde{A}^{1/3}} x_2 + e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-b)\tilde{A}^{1/3}} x_3 + \frac{1}{3} A^{-2/3} \int_a^t e^{(s-t)A^{1/3}} f(s) ds$$

$$+ \frac{1-i\sqrt{3}}{6} A^{-2/3} \int_t^b e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-s)A^{1/3}} f(s) ds + \frac{1+i\sqrt{3}}{6} A^{-2/3} \int_t^b e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-s)A^{1/3}} f(s) ds,\quad x_i \in H_{-1/6},\ i = 1,2,3$$

şeklinde yazılıma sahip vektör-fonksiyonlardan oluşur ve L_0 minimal operatörü için

$$D(L_0)=\{u\in L_2(H,(a,b)): u(a)=u(b)=u'(a)=u'(b)=u''(a)=u''(b)=0\}$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: Her $u\in D(L)$ fonksiyonu $u'''(t)+\tilde{A}u(t)=f(t),\ f\in L_2(H,(a,b))$ olmak üzere,

$$u(t)=e^{(a-t)\tilde{A}^{1/3}}x_1+e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-b)\tilde{A}^{1/3}}x_2+e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-b)\tilde{A}^{1/3}}x_3+\frac{1}{3}A^{-2/3}\int_a^t e^{(s-t)A^{1/3}}f(s)ds$$
$$+\frac{1-i\sqrt{3}}{6}A^{-2/3}\int_t^b e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-s)A^{1/3}}f(s)ds+\frac{1+i\sqrt{3}}{6}A^{-2/3}\int_t^b e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-s)A^{1/3}}f(s)ds,\quad x_i\in H_{-1/6},\ i=1,2,3$$

şeklindedir [59] ve Lemma 4 ve Lemma 5'den $u(t)\in L_2(H,(a,b))$ olduğu bulunur. Ayrıca her $u\in D(L)$ için $u(a),\ u(b),\ u'(a),\ u'(b),\ u''(a)$ ve $u''(b)$ değerleri H Hilbert uzayında yoğun olduğundan

$$D(L_0)=\{u\in L_2(H,(a,b)): u(a)=u(b)=u'(a)=u'(b)=u''(a)=u''(b)=0\}$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. ◇

Sonuç 7: Eğer $\tilde{L},\ L_0\subset\tilde{L}\subset L$ bir normal operatör ise, $\tilde{L}$ operatörünün tanım kümesi $\tilde{L}u(t)=f(t),\ f\in L_2(H,(a,b))$ olmak üzere,

$$u(t)=e^{(a-t)\tilde{A}^{1/3}}x_1+e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-b)\tilde{A}^{1/3}}x_2+e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-b)\tilde{A}^{1/3}}x_3+\frac{1}{3}A^{-2/3}\int_a^t e^{(s-t)A^{1/3}}f(s)ds$$
$$+\frac{1-i\sqrt{3}}{6}A^{-2/3}\int_t^b e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-s)A^{1/3}}f(s)ds+\frac{1+i\sqrt{3}}{6}A^{-2/3}\int_t^b e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-s)A^{1/3}}f(s)ds,\quad x_i\in H_{+1/6},\ i=1,2,3$$

şeklinde yazılıma sahip vektör-fonksiyonlardan oluşur.

İspat: Her $u\in D(\tilde{L})$ fonksiyonu $u'''(t)+\tilde{A}u(t)=f(t),\ f\in L_2(H,(a,b))$ olmak üzere, Teorem 6'ya göre

$$u(t)=e^{(a-t)\tilde{A}^{1/3}}x_1+e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-b)\tilde{A}^{1/3}}x_2+e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-b)\tilde{A}^{1/3}}x_3+\frac{1}{3}A^{-2/3}\int_a^t e^{(s-t)A^{1/3}}f(s)ds$$
$$+\frac{1-i\sqrt{3}}{6}A^{-2/3}\int_t^b e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-s)A^{1/3}}f(s)ds+\frac{1+i\sqrt{3}}{6}A^{-2/3}\int_t^b e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-s)A^{1/3}}f(s)ds,\quad x_i\in H_{-1/6},\ i=1,2,3$$

şeklindedir. Öte yandan Lemma 4'e göre her $u\in D(\tilde{L})$ için $\tilde{A}u(t)\in L_2(H,(a,b))$ olup,

$$\tilde{A}u(t)=e^{(a-t)\tilde{A}^{1/3}}\tilde{A}x_1+e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-b)\tilde{A}^{1/3}}\tilde{A}x_2+e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-b)\tilde{A}^{1/3}}\tilde{A}x_3+\frac{1}{3}A^{1/3}\int_a^t e^{(s-t)A^{1/3}}f(s)ds$$
$$+\frac{1-i\sqrt{3}}{6}A^{1/3}\int_t^b e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-s)A^{1/3}}f(s)ds+\frac{1+i\sqrt{3}}{6}A^{1/3}\int_t^b e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-s)A^{1/3}}f(s)ds\in L_2(H,(a,b))$$

şeklinde olduğundan,

$$\tilde{A}x_i\in H_{-1/6},\ i=1,2,3$$

olup, Lemma 5'e göre $x_i\in H_{+1/6},\ i=1,2,3$ olmak zorundadır [18]. ◇

2.3.3. Normal Genişlemelerin İfadesi

Şimdi H Hilbert uzayında $A:D(A)\subset H\to H$ lineer selfadjoint operatör ve $A\geq E$ olmak üzere,

$$\tilde{l}(u)=u'''(t)+\tilde{A}u(t) \tag{18}$$

üçüncü mertebeden lineer diferensiyel-operatörün ürettiği L_0 minimal operatörünün bütün normal genişlemelerini sınır değerleri dilinde ifadesini verelim. Öncelikle $\overline{\operatorname{Im}(L_0)}$ minimal operatörünün indeks sayılarını bulalım.

$$-iu'''(t)=-iu(t),\ u\in D\left(\overline{\operatorname{Im}L}\right)$$

denkleminin çözümü $\alpha_{k+1}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi i}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi i}{3}\right),\ k=0,1,2,$ olmak üzere $u(t)=e^{\alpha_1(t-a)}x_1+e^{\alpha_2(t-a)}x_2+e^{\alpha_3(t-a)}x_3,\ x_i\in H,\ i=1,2,3$ şeklindedir. Ayrıca

$$-iu'''(t)=iu(t),\ u\in D\left(\overline{\operatorname{Im} L}\right)$$

denkleminin çözümü $\alpha_{k+1}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi i}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi i}{3}\right),\ k=0,1,2,$ olmak üzere $u(t)=e^{\alpha_1(t-a)}x_1+e^{\alpha_2(t-a)}x_2+e^{\alpha_3(t-a)}x_3,\quad x_i\in H,\ i=1,2,3$ şeklinde olup buradan, $\overline{\operatorname{Im}(L_0)}$ minimal operatörünün $H^3=H\oplus H\oplus H$ olmak üzere indeks sayıları $\left(\dim H^3,\dim H^3\right)$ olduğu bulunur. Böylece $\overline{\operatorname{Im}(L_0)}$ minimal operatörünün bir sınır değerler uzayı mevcuttur [18]. $(\mathcal{H},\gamma_1,\gamma_2)$ üçlüsü $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında $\overline{\operatorname{Im}(L_0)}$ minimal operatörü için bir sınır değerleri uzayı ve $\hat{A}:D(\tilde{A})\oplus D(\tilde{A})\oplus D(\tilde{A})\subset H^3\to H^3,$, $\hat{A}:=\begin{pmatrix}\tilde{A}&0&0\\0&\tilde{A}&0\\0&0&\tilde{A}\end{pmatrix}$ olarak tanımlansın.

Teorem 8: $A:D(A)\subset H\to H$ lineer selfadjoint operatör $A\geq E$ ve $\tilde{A}W_2^3(H,(a,b))\subset W_2^3(H,(a,b))$ olsun. L_0 minimal operatörünün her bir $L_n,\ L_0\subset L_n\subset L$ normal genişlemesi $W:H^3\to H^3$ ve $\hat{A}^{1/2}W\hat{A}^{-1/2}$ üniter operatörler olmak üzere, $L_2(H,\ (a,b))$ Hilbert uzayında (16) diferensiyel ifadesi ve

$$(W-E)\gamma_1(u)+i(W+E)\gamma_2(u)=0 \tag{19}$$

sınır değer koşulları tarafından üretilir. Buradaki W üniter operatörü, L_n normal genişlemesine bağlı olarak tektürlü belirlenir, yani $L_n=L_W$.

Tersine, $\hat{A}^{1/2}W\hat{A}^{-1/2}$ üniter operatör olan keyfi bir $W:H^3\to H^3$ üniter operatörü için L maksimal operatörünün (19) sınır değer koşullarını sağlayan $u(t)\in W_2^3(H,\ (a,b))$ vektör-fonksiyonlarının alt lineer manifolduna kısıtlanışı, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesidir.

İspat: L_n, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olsun. Bu durumda

$$\overline{\operatorname{Re}(L_n)}u(t)=\tilde{A}u(t),\ u(t)\in D(L_n),$$

$$\overline{\operatorname{Im}(L_n)}u(t)=-iu'''(t),\ u(t)\in D(L_n)$$

operatörleri, sırasıyla $\overline{\operatorname{Re}(L_0)}$ ve $\overline{\operatorname{Im}(L_0)}$ operatörlerinin selfadjoint genişlemeleridir. Şimdi

$$\mathcal{H}:=H^3,$$

$$\gamma_1(u):=\left\{-iu''(b),\frac{i}{2}\left(u'(b)-u'(a)\right),iu''(a)\right\},\ \gamma_2(u):=\left\{u(b),u'(b)+u'(a),u(a)\right\}$$

şeklinde tanımlanan $(\mathcal{H},\gamma_1,\gamma_2)$ üçlüsü $L_2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında $\overline{\operatorname{Im}(L_0)}$ minimal operatörü için bir sınır değerleri uzayı olduğunu gösterelim.

Her $u,v\in W_2^3\left(H,(a,b)\right)$ için

$$\begin{aligned}
&\left(\operatorname{Im}(L_0^*)u,v\right)_{L^2}-\left(u,\operatorname{Im}(L_0^*)v\right)_{L^2}=\left(-iu''',v\right)_{L^2}-\left(u,-iv'''\right)_{L^2}\\
&=\int_a^b\left(-iu'''(t),v(t)\right)_H dt-\int_a^b\left(u(t),-iv'''(t)\right)_H dt\\
&=\left.\left(\left(-iu''(t),v(t)\right)_H+\left(iu'(t),v'(t)\right)_H-\left(u(t),iv''(t)\right)_H\right)\right|_a^b\\
&=\left(-iu''(b),v(b)\right)_H+i\left(u'(b),v'(b)\right)_H-\left(u(b),iv''(b)\right)_H\\
&-\left(-iu''(a),v(a)\right)_H-i\left(u'(a),v'(a)\right)_H+\left(u(a),iv''(a)\right)_H\\
&=\left(-iu''(b),v(b)\right)_H+\tfrac{i}{2}\left[\left(u'(b),v(b)\right)_H+\left(u'(b),v'(a)\right)_H-\left(u'(a),v(b)\right)_H-\left(u'(b),v'(a)\right)_H\right]\\
&+\left(iu''(a),v(a)\right)_H-\left(u(b),-iv''(b)\right)_H\\
&+\tfrac{i}{2}\left[\left(u'(b),v(b)\right)_H+\left(u'(b),v'(a)\right)_H-\left(u'(a),v(b)\right)_H-\left(u'(b),v'(a)\right)_H\right]-\left(u(a),iv''(a)\right)_H\\
&=\left(\left\{-iu''(b),\tfrac{i}{2}\left(u'(b)-u'(a)\right),iu''(a)\right\},\left\{v(b),v'(b)+v'(a),v(a)\right\}\right)_{\mathcal{H}}\\
&-\left(\left\{u(b),u'(b)+u'(a),u(a)\right\},\left\{-iv''(b),\tfrac{i}{2}\left(v'(b)-v'(a)\right),iv''(a)\right\}\right)_{\mathcal{H}}\\
&=\left(\gamma_1(u),\gamma_2(v)\right)_{\mathcal{H}}-\left(\gamma_2(u),\gamma_1(v)\right)_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

eşitliği doğrudur, yani her $u,v\in W_2^3\left(H,(a,b)\right)$ için

$$\left(\operatorname{Im}\left(L_0^*\right)u,v\right)_{L^2}-\left(u,\operatorname{Im}\left(L_0^*\right)v\right)_{L^2}=\left(\gamma_1(u),\gamma_2(v)\right)_{\mathcal{H}}-\left(\gamma_2(u),\gamma_1(v)\right)_{\mathcal{H}}.$$

olduğu elde edilir.

Şimdi $\{x_1,x_2,x_3\},\{y_1,y_2,y_3\}\in\mathcal{H}$ keyfi olsun. Bu durumda,

$$\alpha_1(a)=1,\ \alpha_1'(a)=\alpha_1''(a)=\alpha_1(b)=\alpha_1'(b)=\alpha_1''(b)=0,$$
$$\alpha_2'(a)=1,\ \alpha_2(a)=\alpha_2''(a)=\alpha_2(b)=\alpha_2'(b)=\alpha_2''(b)=0,$$
$$\alpha_3''(a)=1,\ \alpha_3(a)=\alpha_3'(a)=\alpha_3(b)=\alpha_3'(b)=\alpha_3''(b)=0,$$
$$\beta_1(b)=1,\ \beta_1(a)=\beta_1'(a)=\beta_1''(a)=\beta_1'(b)=\beta_1''(b)=0,$$
$$\beta_2'(b)=1,\ \beta_2(a)=\beta_2'(a)=\beta_2''(a)=\beta_2(b)=\beta_1''(b)=0,$$
$$\beta_3''(b)=1,\ \beta_3(a)=\beta_3'(a)=\beta_3''(a)=\beta_1'(b)=\beta_1''(b)=0$$

koşullarını sağlayan $\alpha_i,\ \beta_i\in W_2^3(a,b),\ i=1,2,3$ fonksiyonları mevcuttur. Buradan,

$$u(t):=\alpha_1(t)y_3+\tfrac{1}{2}\alpha_2(t)(-2ix_2+y_2)+i\alpha_3(t)y_3+\beta_1(t)y_1+\tfrac{1}{2}\beta_2(t)(y_2+ix_2)+i\beta_3(t)x_3$$

şeklinde tanımlanan $u(t)\in W_2^3(H,(a,b))$ fonksiyonu için $\gamma_1(u)=\{x_1,x_2,x_3\}$ ve $\gamma_2(u)=\{y_1,y_2,y_3\}$ eşitlikleri elde edilir. Böylece $(\mathcal{H},\gamma_1,\gamma_2)$ üçlüsü $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında $\overline{\operatorname{Im}(L_0)}$ minimal operatörü için bir sınır değerleri uzayı olduğu gösterilmiş olur.

Ayrıca $\overline{\operatorname{Im}(L_n)}$, $\overline{\operatorname{Im}(L_0)}$ minimal operatörünün $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında bir selfadjoint genişlemesi olduğundan, bu genişleme (18) diferensiyel ifadesi ve $W:H\oplus H\oplus H\to H\oplus H\oplus H$ bir üniter operatör olmak üzere,

$$(W-E)\gamma_1(u)+i(W+E)\gamma_2(u)=0$$

sınır değer koşulları tarafından doğrulur. Burada $\overline{\operatorname{Im}(L_n)}$ ‘e karşılık gelen W üniter operatörü bir tektir [18].

L_n, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olduğundan reel ve sanal kısımları değişmeli olup her $u(t)\in D(L_n)$ için

$$\begin{aligned}
&\left(\operatorname{Re}(L_n)u(t),\operatorname{Im}(L_n)u(t)\right)_{L^2}-\left(\operatorname{Im}(L_n)u(t),\operatorname{Re}(L_n)u(t)\right)_{L^2}\\
&=\left(\tilde{A}u(t),-iu'''(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}-\left(-u'''(t),\tilde{A}u(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}\\
&=\left(\tilde{A}u(t),-iu''(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}+\left(\tilde{A}u'(t),iu'(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}-\left(\tilde{A}u(t),iu''(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}\\
&=0
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Buradan her $u(t)\in D(L_n)$ için

$$\begin{aligned}
&\left(\tilde{A}^{1/2}u(t),-i\tilde{A}^{1/2}u''(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}+\left(\tilde{A}^{1/2}u'(t),i\tilde{A}^{1/2}u'(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}-\left(\tilde{A}^{1/2}u(t),i\tilde{A}^{1/2}u''(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}\\
&=\left(\tilde{A}^{1/2}u(b),-i\tilde{A}^{1/2}u''(b)\right)_{L_2(H,(a,b))}+\left(\tilde{A}^{1/2}u'(b),i\tilde{A}^{1/2}u'(b)\right)_{L_2(H,(a,b))}-\left(\tilde{A}^{1/2}u(b),i\tilde{A}^{1/2}u''(b)\right)_{L_2(H,(a,b))}\\
&-\left(\tilde{A}^{1/2}u(a),-i\tilde{A}^{1/2}u''(a)\right)_{L_2(H,(a,b))}-\left(\tilde{A}^{1/2}u'(a),i\tilde{A}^{1/2}u'(a)\right)_{L_2(H,(a,b))}+\left(\tilde{A}^{1/2}u(a),i\tilde{A}^{1/2}u''(a)\right)_{L_2(H,(a,b))}\\
&=\left(\gamma_1\left(\tilde{A}^{1/2}u\right),\gamma_2\left(\tilde{A}^{1/2}u\right)\right)_{H^3}-\left(\gamma_2\left(\tilde{A}^{1/2}u\right),\gamma_1\left(\tilde{A}^{1/2}u\right)\right)_{H^3}=0
\end{aligned}$$

yani, $\hat{\theta}=\left\{\left\{\gamma_1\left(\tilde{A}^{1/2}u\right),\gamma_2\left(\tilde{A}^{1/2}u\right)\right\}:\ u\in D(L_n)\right\}$ lineer bağıntısı simetriktir. Ayrıca, $T:D\left(\hat{A}^{1/2}\right)\oplus D\left(\hat{A}^{1/2}\right)\subset\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\to\mathcal{H}\oplus\mathcal{H},\ T:=\begin{pmatrix}\hat{A}^{1/2} & 0\\ 0 & \hat{A}^{1/2}\end{pmatrix}$ şeklinde tanımlı lineer dönüşümü $\hat{A}^{1/2}:D\left(\hat{A}^{1/2}\right)\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ operatörü birebir, örten ve selfadjoint olduğundan T lineer operatörü $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ Hilbert uzayında birebir, örten ve selfadjointtir. Buradan bölüm 2.2 Teorem 5'in ispatından $\hat{\theta}$ lineer bağıntısı selfadjointtir. Bu halde

$$(V-E)\gamma_1\left(\tilde{A}^{1/2}u\right)+i(V+E)\gamma_2\left(\tilde{A}^{1/2}u\right)=0$$

şeklinde $V:H^3\to H^3$ bir üniter operatör mevcuttur [18]. Bu sonuncudan

$$\left(\hat{A}^{-1/2}V\hat{A}^{1/2}-E\right)\gamma_1(u)+i\left(\hat{A}^{-1/2}V\hat{A}^{1/2}+E\right)\gamma_2(u)=0$$

eşitliği elde edilir. W üniter operatörü, $\overline{\operatorname{Re}(L_n)}$ operatörü tarafından tek türlü belirlendiğinden $\hat{A}^{-1/2}V\hat{A}^{1/2}=W$, yani $\hat{A}^{1/2}W\hat{A}^{-1/2}$ operatörü üniterdir. Böylece L_n, L_0 minimal operatörünün normal genişlemesi ise, bu genişleme (16) diferensiyel ifadesi ve

$$(W-E)\gamma_1(u)+i(W+E)\gamma_2(u)=0$$

sınır değer koşulları ile üretilir.

Tersine $W : H^3 \to H^3$ ve $\hat{A}^{1/2} W \hat{A}^{-1/2}$ üniter operatörler ve

$$L_W u = l(u),\ D(L_W) = \{u \in W_2^2(H,(a,b)) :\ (W-E)\gamma_1(u) + i(W+E)\gamma_2(u) = 0\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $u \in D(L_W)$ ve her $v \in D(L_W^*)$ için

$$\begin{aligned}
&(L_W u, v)_{L_2(H,(a,b))} - (u, L_W^* v)_{L_2(H,(a,b))} \\
&= \left(u'''(t) + \tilde{A}u(t), v(t)\right)_{L_2(H,(a,b))} - \left(u(t), -v'''(t) + \tilde{A}v(t)\right)_{L_2(H,(a,b))} \\
&= i\left[\left(-iu''(t), v(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))} + \left(iu'(t), v'(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))} + \left(u(t), iu''(t)\right)'_{L_2(H,(a,b))}\right] \\
&= i\left[\left(\gamma_1(u), \gamma_2(v)\right)_{H^3} - \left(\gamma_2(u), \gamma_1(v)\right)_{H^3}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

eşitliği doğrudur. Bu halde,

$$\begin{aligned}
&2i\left[\left(\gamma_1(u), \gamma_2(v)\right)_{H^3} - \left(\gamma_2(u), \gamma_1(v)\right)_{H^3}\right] \\
&= \left(\gamma_1(u), \gamma_1(v)\right)_{H^3} - \left(\gamma_1(u), i\gamma_2(v)\right)_{H^3} - \left(i\gamma_2(u), \gamma_1(v)\right)_{H^3} + \left(i\gamma_2(u), i\gamma_2(v)\right)_{H^3} \\
&- \left(\gamma_1(u), \gamma_1(v)\right)_{H^3} - \left(\gamma_1(u), i\gamma_2(v)\right)_{H^3} - \left(i\gamma_2(u), \gamma_1(v)\right)_{H^3} - \left(i\gamma_2(u), i\gamma_2(v)\right)_{H^3} \\
&= \left(\gamma_1(u) - i\gamma_2(u), \gamma_1(v) - i\gamma_2(v)\right)_{H^3} - \left(\gamma_1(u) + i\gamma_2(u), \gamma_1(v) + i\gamma_2(v)\right)_{H^3} \\
&= \left(W\left(\gamma_1(u) + i\gamma_2(u)\right), \gamma_1(v) - i\gamma_2(v)\right)_{H^3} - \left(\gamma_1(u) + i\gamma_2(u), \gamma_1(v) + i\gamma_2(v)\right)_{H^3} \\
&= \left(\gamma_1(u) + i\gamma_2(u), W^*\left(\gamma_1(v) - i\gamma_2(v)\right)\right)_{H^3} - \left(\gamma_1(u) + i\gamma_2(u), \gamma_1(v) + i\gamma_2(v)\right)_{H^3} \\
&= \left(\gamma_1(u) + i\gamma_2(u), W^*\left(\gamma_1(v) - i\gamma_2(v)\right) - \left(\gamma_1(v) + i\gamma_2(v)\right)\right)_{H^3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olup, $\{\gamma_1(u) + i\gamma_2(u) : u \in D(L_W)\}$ kümesi H^3 Hilbert uzayında yoğun olduğundan her $v \in D(L_W^*)$ için

$$\left(W^* - E\right)\gamma_1(v) - i\left(W^* + E\right)\gamma_2(v) = 0$$

eşitliği bulunur. Sonuç olarak L_W^* adjoint operatörü, $l^+(v) = -v'''(t) + \tilde{A}v(t)$ diferensiyel ifadesinin $\left(W^* - E\right)\gamma_1(v) - i\left(W^* + E\right)\gamma_2(v) = 0,\ v(t) \in D(L_W^*)$ sınır değer koşulları tarafından üretilir. W üniter operatör olduğundan $D(L_W)=D(L_W^{\ *})$ eşitliği doğrudur. Ayrıca her $u\in D(L_W)$ için

$$
\begin{aligned}
\|L_W u\|^2_{L_2(H,(a,b))} &= \|u'''(t)+\tilde{A}u(t)\|^2_{L_2(H,(a,b))} = \left(u'''(t)+\tilde{A}u(t),u'''(t)+\tilde{A}u(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}\\
&= \|u'''(t)\|^2_{L_2(H,(a,b))} + \|\tilde{A}u(t)\|^2_{L_2(H,(a,b))} + \left(u'''(t),\tilde{A}u(t)\right)_{L_2(H,(a,b))} + \left(\tilde{A}u(t),u'''(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}\\
&= \|-u'''(t)\|^2_{L_2(H,(a,b))} + \|\tilde{A}u(t)\|^2_{L_2(H,(a,b))} + \left(-u'''(t),\tilde{A}u(t)\right)_{L_2(H,(a,b))} + \left(\tilde{A}u(t),-u'''(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}\\
&\quad + \left(\gamma_1(u),\gamma_2(v)\right)_{H^3} - \left(\gamma_2(u),\gamma_1(v)\right)_{H^3}\\
&= \|-u'''(t)\|^2_{L_2(H,(a,b))} + \|\tilde{A}u(t)\|^2_{L_2(H,(a,b))} + \left(-u'''(t),\tilde{A}u(t)\right)_{L_2(H,(a,b))} + \left(\tilde{A}u(t),-u'''(t)\right)_{L_2(H,(a,b))}\\
&= \left(-u'''(t)+\tilde{A}u(t),-u'''(t)+\tilde{A}u(t)\right)_{L_2(H,(a,b))} = \|-u'''(t)+\tilde{A}u(t)\|^2_{L_2(H,(a,b))}\\
&= \|L_W^* u\|^2_{L_2(H,(a,b))}
\end{aligned}
$$

eşitliği doğrudur. Böylece L_W bir normal genişleme olduğu elde edilir. ◇

2.3.4. Normal Genişlemelerin Spektrumu ve Özdeğerlerin Asimptotiği

Bu bölümde (18) ifadesinin ürettiği L_0 minimal operatörün $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında , $W:H^3\to H^3$ ve $\hat{A}^{-1/2}W\hat{A}^{1/2}$ üniter operatörler olması durumunda (19) sınır değerler koşullarıyla verilen L_W normal genişlemesinin spektrumu incelenecektir.

Teorem 9: $A^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(H)$ ve $\dim H<+\infty$ olsun. Bu durumda L_W normal genişlemesinin sınırlı tersi L_W^{-1} mevcuttur $\sigma(L_W)=\sigma_p(L_W)$ ve $\sigma(L_W)=\sigma(\operatorname{Re}L_W)+i\sigma(\operatorname{Im}L_W)$ eşitlikleri doğrudur.

İspat: L_W normal genişlemesi için $\operatorname{Im}(L_W)=-i\dfrac{d_W^3}{dt^3}$ olup,

$$\begin{aligned} L_W &= \tilde{A} \otimes E_{L_2(a,b)} + i \operatorname{Im}(L_W) \\ &= \tilde{A} \otimes E_{L_2(a,b)} \left(E + i\tilde{A}^{-1} \otimes E_{L_2(a,b)} \operatorname{Im}(L_W) \right) \\ &= i\tilde{A} \otimes E_{L_2(a,b)} \left(\tilde{A}^{-1} \otimes E_{L_2(a,b)} \operatorname{Im}(L_W) - iE \right) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $\tilde{A}^{-1} \operatorname{Im}(L_W)$ operatörü selfadjoint olduğundan $i \in \rho\left(\tilde{A}^{-1} \operatorname{Im}(L_W)\right)$, yani $\tilde{A}^{-1} \operatorname{Im}(L_W) - iE$ operatörünün sınırlı tersi mevcuttur. Bu durumda, L_W normal genişlemesi sınırlı tersi L_W^{-1} mevcuttur ve $L_W^{-1} = -i\tilde{A}^{-1}\left(\tilde{A}^{-1} \operatorname{Im}(L_W) - iE\right)^{-1}$. Buradan $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ ve $\left(\tilde{A}^{-1} \operatorname{Im}(L_W) - iE\right)^{-1}$ operatörü sınırlı olduğundan $L_W^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$. Böylece $\sigma(L_W) = \sigma_p(L_W)$ bağıntısı elde edilir [2].

Ayrıca L_W normal operatörü için $\sigma(L_W) \subset \sigma(\tilde{A}) + i\sigma(\operatorname{Im}(L_W))$ bağıntısı doğrudur [33]. Bu bağıntının tersinin göstermek için $\rho(L_W) \subset \rho(\operatorname{Re} L_W) + i\rho(\operatorname{Im}(L_W))$ bağıntısı ispatlamak yeterli olacaktır. Bunun için $\lambda \in \rho(L_W)$ keyfi alalım. Bu durumda $Ker(L_W - \lambda E) = \{0\}$ olduğundan

$$\left\| (L_W - \lambda E)u \right\|^2_{L_2(H,(a,b))} = \left\| (\tilde{A} - \lambda_r E)u \right\|^2_{L_2(H,(a,b))} + \left\| (\operatorname{Im}(L_W) - \lambda_i E)u \right\|^2_{L_2(H,(a,b))} = 0,$$

eşitliği için gerekli ve yeterli koşul $u(t) = 0,\ t \in [a,b]$ olmasıdır. Dolayısıyla $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ ve $\sigma(\operatorname{Im}(L_W)) = \sigma_p(\operatorname{Im}(L_W))$ olduğundan $\tilde{A} - \lambda_r E$ ve $\operatorname{Im}(L_W) - \lambda_i E$ operatörlerinin sınırlı tersleri vardır, yani

$$\rho(L_W) \subset \rho(\operatorname{Re} L_W) + i\rho(\operatorname{Im}(L_W))$$

olduğu bulunur. Öte yandan $C, D \subset \mathbb{R}$ için $(C + iD)^c = (C^c + i\mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} + iD^c)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \rho(L_W) &\subset (\sigma(\operatorname{Re} L_W))^c + i(\sigma(\operatorname{Im}(L_W)))^c \\ &\subset \left((\sigma(\operatorname{Re} L_W))^c + i\mathbb{R}\right) \cap \left(\mathbb{R} + i(\sigma(\operatorname{Im}(L_W)))^c\right) \\ &= \left(\sigma(\operatorname{Re} L_W) + i\sigma(\operatorname{Im}(L_W))\right)^c \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Böylece $\sigma\left(L_W\right)=\sigma\left(\operatorname{Re}L_W\right)+i\sigma\left(\operatorname{Im}\left(L_W\right)\right)$ eşitliği bulunur. $\diamond$

Şimdi $A^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty\left(H\right)$ ve $\sigma\left(\operatorname{Im}\left(L_W\right)\right)=\sigma_p\left(\operatorname{Im}\left(L_W\right)\right)$ olması durumunda $\sigma\left(\operatorname{Im}L_W\right)\subset\mathbb{C}$ kümesini belirleyelim. Bunun için

$$\operatorname{Im}L_W u=\lambda u,\ \ \lambda\in\mathbb{C},\ u\in L_2\left(H,(a,b)\right),$$
$$\left(W-E\right)\gamma_1\left(u\right)+i\left(W+E\right)\gamma_2\left(u\right)=0$$

spektrum problemini çözelim. Öncelikle $u\in L_2\left(H,(a,b)\right)$

$$u'''\left(t\right)=i\lambda u\left(t\right),\ \lambda\in\mathbb{C} \tag{20}$$

denkleminin genel çözümünü bulalım. O halde

$$\alpha^3=i\lambda \tag{21}$$

denklemi için $\left(\operatorname{Im}L_W\right)^*=\operatorname{Im}L_W$ olduğundan $\sigma\left(\operatorname{Im}L_W\right)\subset\left(-\infty,+\infty\right)$ olup (5) eşitliğinde $\lambda\in\mathbb{R}$ olarak alınabilir. Böylece, (21) denkleminin kökleri

$$\alpha_{k+1}=\left(i\lambda\right)^{1/3}=\lambda^{1/3}\exp\left\{\frac{\frac{\pi i}{2}+2k\pi i}{3}\right\}$$
$$=\lambda^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right),\ \ k=0,1,2$$

şeklindedir. Dolayısıyla, (20) denkleminin genel çözümü

$$u_\lambda\left(t\right)=e^{\alpha_1(t-a)}x_1+e^{\alpha_2(t-a)}x_2+e^{\alpha_3(t-a)}x_3,\ \ x_i\in H, i=1,2,3$$

şeklindedir. Ayrıca bu çözüm $\left(W-E\right)\gamma_1\left(u\right)+i\left(W+E\right)\gamma_2\left(u\right)=0$ sınır değer koşullarını sağlayacağından,

$$i\left(W-E\right)\begin{pmatrix} -\alpha_1^2 e^{\alpha_1(b-a)}x_1-\alpha_2^2 e^{\alpha_2(b-a)}x_2-\alpha_3^2 e^{\alpha_3(b-a)}x_3 \\ \frac{1}{2}\left(\alpha_1 e^{\alpha_1(b-a)}x_1+\alpha_2 e^{\alpha_2(b-a)}x_2+\alpha_3 e^{\alpha_3(b-a)}x_3-\alpha_1x_1-\alpha_2x_2-\alpha_3x_3\right) \\ \alpha_1^2x_1+\alpha_2^2x_2+\alpha_3^2x_3 \end{pmatrix}$$

$$+i\left(W+E\right)\begin{pmatrix} e^{\alpha_1(b-a)}x_1+e^{\alpha_2(b-a)}x_2+e^{\alpha_3(b-a)}x_3 \\ \alpha_1 e^{\alpha_1(b-a)}x_1+\alpha_2 e^{\alpha_2(b-a)}x_2+\alpha_3 e^{\alpha_3(b-a)}x_3+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix}=0.$$

Buradan,

$$\left(W-E\right)\begin{pmatrix} -\alpha_1^2 e^{\alpha_1(b-a)} & -\alpha_2^2 e^{\alpha_2(b-a)} & -\alpha_3^2 e^{\alpha_3(b-a)} \\ \frac{\alpha_1 e^{\alpha_1(b-a)}-\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2 e^{\alpha_2(b-a)}-\alpha_2}{2} & \frac{\alpha_3 e^{\alpha_1(b-a)}-\alpha_3}{2} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$+\left(W+E\right)\begin{pmatrix} e^{\alpha_1(b-a)} & e^{\alpha_2(b-a)} & e^{\alpha_3(b-a)} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1(b-a)}+\alpha_1 & \alpha_2 e^{\alpha_2(b-a)}+\alpha_2 & \alpha_3 e^{\alpha_1(b-a)}+\alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0.$$

Bu sonuncudan

$$\Delta_1\left(\lambda\right):=\begin{pmatrix} \left(1-\lambda^{2/3}\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)e^{\lambda^{1/3}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)(b-a)} & \left(1-\lambda^{2/3}\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)e^{\lambda^{1/3}\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)(b-a)} & \left(1+\lambda^{2/3}\right)e^{-\lambda^{1/3}i(b-a)} \\ \frac{\lambda^{1/3}\left(\sqrt{3}+i\right)\left(3e^{\lambda^{1/3}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)(b-a)}+1\right)}{4} & \frac{\lambda^{1/3}\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(3e^{\lambda^{1/3}\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)(b-a)}+1\right)}{4} & \frac{-\lambda^{1/3}i\left(3e^{-\lambda^{1/3}i(b-a)}+1\right)}{2} \\ 1+\lambda^{2/3}\frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 1+\lambda^{2/3}\frac{1-\sqrt{3}i}{2} & 1-\lambda^{2/3} \end{pmatrix}$$

ve

$$\Delta_2(\lambda):=\begin{pmatrix} \left(1+\lambda^{2/3}\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)e^{\lambda^{1/3}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)(b-a)} & \left(1+\lambda^{2/3}\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)e^{\lambda^{1/3}\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)(b-a)} & \left(1-\lambda^{2/3}\right)e^{-\lambda^{1/3}i(b-a)} \\ \frac{\lambda^{1/3}\left(\sqrt{3}+i\right)\left(e^{\lambda^{1/3}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)(b-a)}+3\right)}{4} & \frac{\lambda^{1/3}\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(e^{\lambda^{1/3}\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)(b-a)}+3\right)}{4} & \frac{-\lambda^{1/3}i\left(e^{-\lambda^{1/3}i(b-a)}+3\right)}{2} \\ 1-\lambda^{2/3}\frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 1-\lambda^{2/3}\frac{1-\sqrt{3}i}{2} & 1+\lambda^{2/3} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanmak üzere,

$$\left(W\Delta_1(\lambda)-\Delta_2(\lambda)\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

olduğu elde edilir. Buradan aşağıdaki teoremin doğruluğu açıktır.

Teorem 10: $\tilde{A}W_2^3\left(H,(a,b)\right)\subset W_2^3\left(H,(a,b)\right)$, $W:H^3\to H^3$ ve $\hat{A}^{-1/2}W\hat{A}^{1/2}$ üniter operatörler olmak üzere L_W, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olsun. Bu durumda $\lambda=\lambda_r+i\lambda_i\in\sigma_p\left(L_W\right),\lambda_r,\lambda_i\in\mathbb{R}$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda_r\in\sigma_p\left(\tilde{A}\otimes E\right),0\in\sigma_p\left(W\Delta_1(\lambda_i)-\Delta_2(\lambda_i)\right)$ ve $H_{\lambda_r}\left(\tilde{A}\otimes E\right)\cap H_{\lambda_i}\left(\operatorname{Im}L_W\right)\neq\{0\}$ olmasıdır.

Şimdi $W=\pm E$ şeklindeki özel durumları inceleyelim. Bunun için öncelikle aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 11: $f(\lambda):=-\sin(2\lambda)-\sin\lambda\cosh\left(\sqrt{3}\lambda\right)+\sqrt{3}\cos\lambda\sinh\left(\sqrt{3}\lambda\right)=0,\ \ \lambda\in\mathbb{R}$

denkleminin her $n\in\mathbb{Z}$, $\left(\frac{2n-1}{2}\pi,\frac{2n+1}{2}\pi\right)$ açık aralığında bir tek çözümü vardır.

İspat: Bu durumda $f(-\lambda)=-f(\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}$ olduğundan bu denklemin çözümünü $\lambda\geq 0$ aralığında incelemek yeterlidir. Görüldüğü gibi $f(.)\in C^{\infty}(\mathbb{R})$,

$$f\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)=0-(-1)^n\cosh\left(\sqrt{3}\,\frac{2n-1}{2}\pi\right)+0=(-1)^{n+1}\cosh\left(\sqrt{3}\,\frac{2n-1}{2}\pi\right)=\begin{cases}>0, & n \ \mathit{tek\,ise}\\ <0, & n \ \mathit{çift\,ise}\end{cases}$$

.

Her $n\in\mathbb{N}$ için $f\in C\left(\frac{2n-1}{2}\pi,\frac{2n+1}{2}\pi\right)$, $f\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)f\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)<0$ olduğundan her böyle aralıkta $f(\lambda)=0$ denkleminin en az bir çözümü vardır.

Şimdi bu denklemin her böyle aralıkta bir tek olduğunu gösterelim. Bu halde

$$f''(\lambda)=4\sin 2\lambda-8\sin\lambda\cosh\left(\sqrt{3}\lambda\right)=8\sin\lambda\left(\cos\lambda-\cosh\left(\sqrt{3}\lambda\right)\right)$$

olup her $\frac{2n-1}{2}\pi<\lambda<n\pi$ için $f''(\lambda)<0$ olduğundan konveks ve $n\pi<\lambda<\frac{2n+1}{2}\pi$ için $f''(\lambda)>0$ olduğundan konkavdır. Böylece $f(\lambda)=0$, denkleminin $\lambda\in\left(\frac{2n-1}{2}\pi,\frac{2n+1}{2}\pi\right)$, $n\in\mathbb{Z}$ aralığında bir tek çözümü vardır. ◇

Sonuç 12: $W=E$ olsun. Bu durumda,

$$\sigma_p(L_E)=\Big\{\lambda_r+i\lambda_i:\ \lambda_r\in\sigma_p\left(\tilde{A}\otimes E\right),H_{\lambda_r}\left(\tilde{A}\otimes E\right)\cap H_{\lambda_i}\left(\operatorname{Im}L_E\right)\neq\{0\},\ \lambda_i\ f(\lambda)=0\text{denkleminin}$$
$$\left(\left(\frac{2n-1}{b-a}\pi\right)^3,\left(\frac{2n+1}{b-a}\pi\right)^3\right),n\in\mathbb{Z}\text{ aralığı üzerindeki tek çözümü}\Big\}$$

şeklindedir.

İspat: $\lambda\in\sigma_p(L_E)$ keyfi olsun. Bu durumda $\alpha_{k+1}=\lambda_i^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi i}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi i}{3}\right)\right)$, $k=0,1,2$ olmak üzere $\lambda\in\mathbb{C}$ özdeğerine karşılık gelen özvektör $x_i\in H, i=1,2,3$ vektörlerinin en az bir tanesi sıfırdan faklı olmak üzere $u_\lambda(t)=e^{\alpha_1(t-a)}x_1+e^{\alpha_2(t-a)}x_2+e^{\alpha_3(t-a)}x_3$ şeklindedir ve

$$\left(W-E\right)\begin{pmatrix} -\alpha_1^2 e^{\alpha_1(b-a)} & -\alpha_2^2 e^{\alpha_2(b-a)} & -\alpha_3^2 e^{\alpha_3(b-a)} \\ \dfrac{\alpha_1 e^{\alpha_1(b-a)}-\alpha_1}{2} & \dfrac{\alpha_2 e^{\alpha_2(b-a)}-\alpha_2}{2} & \dfrac{\alpha_3 e^{\alpha_1(b-a)}-\alpha_3}{2} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$+\left(W+E\right)\begin{pmatrix} e^{\alpha_1(b-a)} & e^{\alpha_2(b-a)} & e^{\alpha_3(b-a)} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1(b-a)}+\alpha_1 & \alpha_2 e^{\alpha_2(b-a)}+\alpha_2 & \alpha_3 e^{\alpha_1(b-a)}+\alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

sınır değer koşullarını sağlar. Burada $W=E$ yazılırsa

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha_1(b-a)} & e^{\alpha_2(b-a)} & e^{\alpha_3(b-a)} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1(b-a)}+\alpha_1 & \alpha_2 e^{\alpha_2(b-a)}+\alpha_2 & \alpha_3 e^{\alpha_1(b-a)}+\alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

olduğu bulunur. Bu halde $0\in\sigma_p\left(\begin{pmatrix} e^{\alpha_1(b-a)} & e^{\alpha_2(b-a)} & e^{\alpha_3(b-a)} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1(b-a)}+\alpha_1 & \alpha_2 e^{\alpha_2(b-a)}+\alpha_2 & \alpha_3 e^{\alpha_1(b-a)}+\alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ olup, bu ise ancak

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha_1(b-a)} & e^{\alpha_2(b-a)} & e^{\alpha_3(b-a)} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1(b-a)}+\alpha_1 & \alpha_2 e^{\alpha_2(b-a)}+\alpha_2 & \alpha_3 e^{\alpha_1(b-a)}+\alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

olması ile mümkündür. O halde,

$$\begin{aligned} & e^{\alpha_1(b-a)}\left(\alpha_2\left(e^{\alpha_2(b-a)}+1\right)-\alpha_3\left(e^{\alpha_3(b-a)}+1\right)\right)-e^{\alpha_2(b-a)}\left(\alpha_1\left(e^{\alpha_1(b-a)}+1\right)-\alpha_3\left(e^{\alpha_3(b-a)}+1\right)\right)+ \\ & e^{\alpha_3(b-a)}\left(\alpha_1\left(e^{\alpha_1(b-a)}+1\right)-\alpha_2\left(e^{\alpha_2(b-a)}+1\right)\right) \\ & =\left(\alpha_2-\alpha_1\right)e^{(\alpha_1+\alpha_2)(b-a)}+\left(\alpha_1-\alpha_3\right)e^{(\alpha_1+\alpha_3)(b-a)}+\left(\alpha_3-\alpha_2\right)e^{(\alpha_2+\alpha_3)(b-a)}+\left(\alpha_2-\alpha_3\right)e^{\alpha_1(b-a)} \\ & +\left(\alpha_3-\alpha_1\right)e^{\alpha_2(b-a)}+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)e^{\alpha_3(b-a)}=0. \end{aligned}$$

Bu eşitlikte $\alpha_i,\ i=1,2,3$ değerleri yerine yazılırsa $\lambda_i=0\in\mathbb{R}$ reel sayısı denklemin bir çözümüdür ve

$$-\sqrt{3}e^{i\lambda_i^{1/3}(b-a)}+\frac{\sqrt{3}+3i}{2}e^{\lambda_i^{1/3}\frac{\sqrt{3}-i}{2}(b-a)}+\frac{\sqrt{3}-3i}{2}e^{\lambda_i^{1/3}\frac{-\sqrt{3}-i}{2}(b-a)}+\frac{-\sqrt{3}-3i}{2}e^{\lambda_i^{1/3}\frac{-\sqrt{3}+i}{2}(b-a)}$$

$$\frac{-\sqrt{3}-3i}{2}e^{\lambda_i^{1/3}\frac{-\sqrt{3}+i}{2}(b-a)}+\sqrt{3}e^{-i\lambda_i^{1/3}(b-a)}$$

$$=-2\sqrt{3}i\sin\left(\lambda_i^{1/3}(b-a)\right)+6i\cos\left(\frac{1}{2}\lambda_i^{1/3}(b-a)\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_i^{1/3}(b-a)\right)$$

$$-2\sqrt{3}i\sin\left(\frac{1}{2}\lambda_i^{1/3}(b-a)\right)\cosh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_i^{1/3}(b-a)\right)$$

$$=0$$

Dolayısıyla Lemma 11' e göre bu denklemi sağlayan her $n\in\mathbb{Z}$ için $\lambda_i\in\left(\left(\frac{2n-1}{b-a}\pi\right)^3,\left(\frac{2n+1}{b-a}\pi\right)^3\right)$ aralığında bir tek çözümü mevcuttur. ◇

Lemma 13: $g(\lambda):=\cos(2\lambda)-\cos\lambda\cosh\left(\sqrt{3}\lambda\right)+\sqrt{3}\sin\lambda\sinh\left(\sqrt{3}\lambda\right)=0,\ \ \lambda\in\mathbb{R}$

denkleminin her $n\in\mathbb{Z}$, $\left(\frac{2n-1}{2}\pi,\frac{2n+1}{2}\pi\right)$ açık aralığında bir tek çözümü vardır.

İspat: Bu durumda $g(-\lambda)=g(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ olduğundan bu denklemin çözümünü $\lambda\geq 0$ aralığında incelemek yeterlidir. Görüldüğü gibi $g\in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$g\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)=-1+(-1)^n\sqrt{3}\sinh\left(\sqrt{3}\,\frac{2n-1}{2}\pi\right)=\begin{cases}<0, & n\ \ tek\,ise\\ >0, & n\ \ çift\,ise\end{cases}.$$

Her $n\in\mathbb{N}$ için $g\in C\left(\frac{2n-1}{2}\pi,\frac{2n+1}{2}\pi\right)$, $g\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)g\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)<0$ olduğundan her böyle aralıkta $g(\lambda)=0$ denkleminin en az bir çözümü vardır.

Şimdi bu denklemin her böyle aralıkta bir tek olduğunu gösterelim. Bu halde

$$g'(\lambda)=-4\sin\lambda\cos\lambda+4\sin\lambda\cosh\left(\sqrt{3}\lambda\right)=4\sin\lambda\left(\cosh\left(\sqrt{3}\lambda\right)-\cos\lambda\right)$$

olup her $n\in\mathbb{N}$ için $g'(n\pi)=0$. Buradan $n\in\mathbb{N}$ tek doğal sayısı için $n\pi$ noktası yerel maksimum ve $g(n\pi)>0$ olup $n\in\mathbb{N}$ tek doğal sayısı için $g(\lambda)=0$ denkleminin $\lambda\in\left(\frac{2n-1}{2}\pi,\frac{2n+1}{2}\pi\right)$, $n\in\mathbb{N}$ aralığında bir tek çözümü vardır. Benzer şekilde $n\in\mathbb{N}$ çift doğal sayısı $\left(\frac{2n-1}{2}\pi,\frac{2n+1}{2}\pi\right)$, $n\in\mathbb{N}$ aralığında bir tek çözümü vardır. ◇

Sonuç 14: $W=-E$ olsun. Bu durumda,

$$\sigma_p(L_E)=\Big\{\lambda_r+i\lambda_i:\ \lambda_r\in\sigma_p\big(\tilde{A}\otimes E\big),H_{\lambda_r}\big(\tilde{A}\otimes E\big)\cap H_{\lambda_i}\left(\operatorname{Im}L_{-E}\right)\neq\{0\},\ \lambda_i\ g(\lambda)=0\text{ denkleminin } \left(\left(\frac{2n-1}{b-a}\pi\right)^3,\left(\frac{2n+1}{b-a}\pi\right)^3\right),n\in\mathbb{Z}\text{ aralığı üzerindeki tek çözümü}\Big\}$$

şeklindedir.

İspat: $\lambda\in\sigma_p(L_E)$ keyfi olsun. $\alpha_{k+1}=\lambda_i^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi i}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi i}{3}\right)\right)$, $k=0,1,2$

olmak üzere $\lambda\in\mathbb{C}$ özdeğerine karşılık gelen özvektör $x_i\in H, i=1,2,3$ vektörlerinin en az bir tanesi sıfırdan faklı olmak üzere $u_\lambda(t)=e^{\alpha_1(t-a)}x_1+e^{\alpha_2(t-a)}x_2+e^{\alpha_3(t-a)}x_3$ şeklindedir ve

$$\left(W-E\right)\begin{pmatrix}-\alpha_1^2e^{\alpha_1(b-a)} & -\alpha_2^2e^{\alpha_2(b-a)} & -\alpha_3^2e^{\alpha_3(b-a)}\\ \frac{\alpha_1e^{\alpha_1(b-a)}-\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2e^{\alpha_2(b-a)}-\alpha_2}{2} & \frac{\alpha_3e^{\alpha_1(b-a)}-\alpha_3}{2}\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$+\left(W+E\right)\begin{pmatrix}e^{\alpha_1(b-a)} & e^{\alpha_2(b-a)} & e^{\alpha_3(b-a)}\\ \alpha_1e^{\alpha_1(b-a)}+\alpha_1 & \alpha_2e^{\alpha_2(b-a)}+\alpha_2 & \alpha_3e^{\alpha_1(b-a)}+\alpha_3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

sınır değer koşullarını sağlar. Burada $W=-E$ yazılırsa

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1^2 e^{\alpha_1(b-a)} & -\alpha_2^2 e^{\alpha_2(b-a)} & -\alpha_3^2 e^{\alpha_3(b-a)} \\ \dfrac{\alpha_1 e^{\alpha_1(b-a)} - \alpha_1}{2} & \dfrac{\alpha_2 e^{\alpha_2(b-a)} - \alpha_2}{2} & \dfrac{\alpha_3 e^{\alpha_1(b-a)} - \alpha_3}{2} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

olduğu bulunur. Bu halde $0 \in \sigma_p\left(\begin{pmatrix} -\alpha_1^2 e^{\alpha_1(b-a)} & -\alpha_2^2 e^{\alpha_2(b-a)} & -\alpha_3^2 e^{\alpha_3(b-a)} \\ \dfrac{\alpha_1 e^{\alpha_1(b-a)} - \alpha_1}{2} & \dfrac{\alpha_2 e^{\alpha_2(b-a)} - \alpha_2}{2} & \dfrac{\alpha_3 e^{\alpha_1(b-a)} - \alpha_3}{2} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{pmatrix}\right)$ olup,

bu ise ancak

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1^2 e^{\alpha_1(b-a)} & -\alpha_2^2 e^{\alpha_2(b-a)} & -\alpha_3^2 e^{\alpha_3(b-a)} \\ \dfrac{\alpha_1 e^{\alpha_1(b-a)} - \alpha_1}{2} & \dfrac{\alpha_2 e^{\alpha_2(b-a)} - \alpha_2}{2} & \dfrac{\alpha_3 e^{\alpha_1(b-a)} - \alpha_3}{2} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

olması ile mümkündür. O halde,

$$-\alpha_1^2 e^{\alpha_1(b-a)}\left(\alpha_2\alpha_3^2\left(e^{\alpha_2(b-a)}-1\right)-\alpha_2^2\alpha_3\left(e^{\alpha_3(b-a)}-1\right)\right)+\alpha_2^2 e^{\alpha_2(b-a)}\left(\alpha_1\alpha_3^2\left(e^{\alpha_1(b-a)}-1\right)-\alpha_1^2\alpha_3\left(e^{\alpha_3(b-a)}-1\right)\right)$$
$$-\alpha_3^2 e^{\alpha_3(b-a)}\left(\alpha_1\alpha_2^2\left(e^{\alpha_1(b-a)}-1\right)-\alpha_1^2\alpha_2\left(e^{\alpha_2(b-a)}-1\right)\right)$$
$$=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\Big[\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\alpha_3 e^{(\alpha_1+\alpha_2)(b-a)}+\left(\alpha_1-\alpha_3\right)\alpha_2 e^{(\alpha_1+\alpha_3)(b-a)}+\left(\alpha_3-\alpha_2\right)\alpha_1 e^{(\alpha_2+\alpha_3)(b-a)}$$
$$+\left(\alpha_3-\alpha_2\right)\alpha_1 e^{\alpha_1(b-a)}+\left(\alpha_1-\alpha_3\right)\alpha_2 e^{\alpha_2(b-a)}+\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\alpha_3 e^{\alpha_3(b-a)}\Big]=0.$$

Bu eşitlikte $\alpha_i,\ i=1,2,3$ değerleri yerine yazılırsa $\lambda_i = 0 \in \mathbb{R}$ reel sayısı denklemin bir çözümüdür ve

$$
\begin{aligned}
& i\sqrt{3}e^{i\lambda_i^{1/3}(b-a)}+\frac{-3-\sqrt{3}i}{2}e^{\lambda_i^{1/3}\frac{\sqrt{3}-i}{2}(b-a)}+\frac{3-i\sqrt{3}}{2}e^{\lambda_i^{1/3}\frac{-\sqrt{3}-i}{2}(b-a)}+\frac{3-i\sqrt{3}}{2}e^{\lambda_i^{1/3}\frac{-\sqrt{3}+i}{2}(b-a)} \\
& \frac{-3-\sqrt{3}i}{2}e^{\lambda_i^{1/3}\frac{-\sqrt{3}+i}{2}(b-a)}+i\sqrt{3}e^{-i\lambda_i^{1/3}(b-a)} \\
& =2\sqrt{3}i\cos\left(\lambda_i^{1/3}(b-a)\right)-2\sqrt{3}i\cos\left(\frac{1}{2}\lambda_i^{1/3}(b-a)\right)\cosh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_i^{1/3}(b-a)\right) \\
& +6i\sin\left(\frac{1}{2}\lambda_i^{1/3}(b-a)\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_i^{1/3}(b-a)\right) \\
& =0.
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla Lemma 13’ e göre bu denklemi sağlayan her $n\in\mathbb{Z}$ için $\lambda_i\in\left(\left(\frac{2n-1}{b-a}\pi\right)^3,\left(\frac{2n+1}{b-a}\pi\right)^3\right)$ aralığında bir tek çözümü mevcuttur. ◇

Teorem 15: $W:H^3\to H^3$ ve $\hat{A}^{-1/2}W\hat{A}^{1/2}$ üniter operatörler olmak üzere $\operatorname{Im}L_W$, $\operatorname{Im}L_0$ minimal operatörünün bir normal genişlemesi ve $\dim H=m<\infty$ olsun. Bu durumda,

$$
\lambda_n\left(\operatorname{Im}L_W\right)\sim\left(\frac{2n+1}{m(b-a)}\pi\right)^3,\ n\to\infty
$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: Bu durumda

$$
\operatorname{Im}L_E\ u_{\lambda_n}(t)=\lambda_n u_{\lambda_n}(t)
$$

olacak şekilde $\alpha_{k+1}=\lambda_n^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi i}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi i}{3}\right)\right)$, $k=0,1,2$ olmak üzere $u_{\lambda_n}(t)=e^{\alpha_1(t-a)}x_1+e^{\alpha_2(t-a)}x_2+e^{\alpha_3(t-a)}x_3$, $x_i\in H, i=1,2,3$ özvektörü (19) sınır koşullarını sağladığından

$$
\begin{pmatrix}
-\alpha_1^2e^{\alpha_1(b-a)} & -\alpha_2^2e^{\alpha_2(b-a)} & -\alpha_3^2e^{\alpha_3(b-a)} \\
\frac{\alpha_1e^{\alpha_1(b-a)}-\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2e^{\alpha_2(b-a)}-\alpha_2}{2} & \frac{\alpha_3e^{\alpha_1(b-a)}-\alpha_3}{2} \\
\alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0,\ x_i\in H, i=1,2,3
$$

matrisi, yani $\left(\frac{2n-1}{b-a}\pi\right)^3 < \lambda_n < \left(\frac{2n+1}{b-a}\pi\right)^3$, $n \in \mathbb{Z}$ olduğu elde edilmişti. Burada $x_i \in H, i = 1,2,3$ vektörleri keyfi ve $\dim H = m < \infty$ olduğundan,

$$\lambda_n\left(\operatorname{Im} L_E\right) \sim \left(\frac{2n+1}{m(b-a)}\pi\right)^3, \ n \to \infty$$

bağıntısı doğrudur. Ayrıca bilinen bir sonuçtan $\dim H = m < \infty$ olup keyfi bir $W : H^3 \to H^3$ üniter operatör için [18]

$$\lambda_n\left(\operatorname{Im} L_W\right) \sim \left(\frac{2n+1}{m(b-a)}\pi\right)^3, \ n \to \infty$$

olduğu bulunur. ◇

Şimdi $\hat{A}_1$ ve $\hat{A}_2$ lineer operatörleri H^3 Hilbert uzayında,

$$\hat{A}_1 := \begin{pmatrix} \left(-i\tilde{A}^{2/3} + iE\right)e^{(a-b)\tilde{A}^{1/3}} & -\frac{\sqrt{3}-i}{2}\tilde{A}^{2/3} + iE & \frac{\sqrt{3}+i}{2}\tilde{A}^{2/3} + iE \\ -\frac{i}{2}\tilde{A}^{1/3}\left(3e^{(a-b)\tilde{A}^{1/3}} + E\right) & \frac{\sqrt{3}+i}{4}\tilde{A}^{1/3}\left(e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(a-b)\tilde{A}^{1/3}} + 3E\right) & \frac{-\sqrt{3}+i}{4}\tilde{A}^{1/3}\left(e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(a-b)\tilde{A}^{1/3}} + 3E\right) \\ \left(i\tilde{A}^{2/3} + iE\right) & \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\tilde{A}^{2/3} + iE\right)e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(a-b)\tilde{A}^{1/3}} & \left(-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\tilde{A}^{2/3} + iE\right)e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(a-b)\tilde{A}^{1/3}} \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_2 := \begin{pmatrix} \left(i\tilde{A}^{2/3} + iE\right)e^{(a-b)\tilde{A}^{1/3}} & \frac{\sqrt{3}-i}{2}\tilde{A}^{2/3} + iE & -\frac{\sqrt{3}+i}{2}\tilde{A}^{2/3} + iE \\ -\frac{i}{2}\tilde{A}^{1/3}\left(e^{(a-b)\tilde{A}^{1/3}} + 3E\right) & \frac{\sqrt{3}-i}{4}\tilde{A}^{1/3}\left(e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(a-b)\tilde{A}^{1/3}} - E\right) & \frac{\sqrt{3}-i}{4}\tilde{A}^{1/3}\left(e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(a-b)\tilde{A}^{1/3}} + E\right) \\ \left(-i\tilde{A}^{2/3} + iE\right) & \left(-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\tilde{A}^{2/3} + iE\right)e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(a-b)\tilde{A}^{1/3}} & \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\tilde{A}^{2/3} + iE\right)e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(a-b)\tilde{A}^{1/3}} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 16: $A:D(A)\subset H\to H$, $A\geq E, A^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(H)$, W, $\hat{A}^{-1/2}W\hat{A}^{1/2}:H^3\to H^3$ üniter operatörler ve $0\in\rho\left(W\hat{A}_1+\hat{A}_2\right)$ olsun. O halde (18) diferensiyel ifadesinin (19) sınır değer koşulları ile üretilen L_W normal operatörü için $L_W^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty\left(L_2\left(H,(a,b)\right)\right)$ bağıntısı doğrudur.

İspat: Bu durumda

$$L_W=\tilde{A}\otimes E_{L_2(a,b)}+iE_H\otimes\left(-i\frac{d_W^3}{dt^3}\right)=\tilde{A}\otimes E_{L_2(a,b)}\left(E+i\tilde{A}^{-1}\otimes E_{L_2(a,b)}E_H\otimes\left(-i\frac{d_W^3}{dt^3}\right)\right)$$

eşitliği doğrudur. L_W normal operatör ve $A^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(H)$ olduğundan

$$L_W^{-1}=\tilde{A}^{-1}\otimes E_{L_2(a,b)}\left(E+i\tilde{A}^{-1}\otimes E_{L_2(a,b)}E_H\otimes\left(-i\frac{d_W^3}{dt^3}\right)\right)^{-1}$$

ve L_W^{-1} operatörünün sınırlı olduğu elde edilir. Ayrıca Teorem 6'ya göre

$$u'''(t)+\tilde{A}u(t)=f(t),\ f\in L_2\left(H,(a,b)\right)$$

denkleminin çözümü

$$u(t)=e^{(a-t)A^{1/3}}x_1+e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-b)A^{1/3}}x_2+e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-b)A^{1/3}}x_3+\frac{1}{3}A^{-2/3}\int_a^t e^{(s-t)A^{1/3}}f(s)ds+\frac{1-i\sqrt{3}}{6}A^{-2/3}\int_t^b e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-s)A^{1/3}}f(s)ds$$
$$+\frac{1+i\sqrt{3}}{6}A^{-2/3}\int_t^b e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-s)A^{1/3}}f(s)ds,\quad x_i\in H_{+1/6},\ i=1,2,3$$

şeklinde olup, her $u\in D(L_W)$ fonksiyonu (19) sınır değer koşullunu sağlandığından

$$\hat{A}_3 := \begin{pmatrix} \frac{i}{3}\left(A^{-2/3}-E\right) & 0 & 0 \\ \frac{i}{3}A^{-1/3} & \frac{-\sqrt{3}+i}{12}A^{-1/3} & \frac{\sqrt{3}+i}{12}A^{-1/3} \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}+i}{6}A^{-2/3}+\frac{i}{3}E & \frac{\sqrt{3}-i}{6}A^{-2/3}+\frac{i}{3}E \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_4 := \begin{pmatrix} -\frac{i}{3}\left(A^{-2/3}+E\right) & 0 & 0 \\ \frac{i}{6}A^{-1/3} & -\frac{\sqrt{3}+i}{4}A^{-1/3} & \frac{\sqrt{3}+i}{4}A^{-1/3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}+i}{6}A^{-2/3}+\frac{i}{3}E & \frac{\sqrt{3}-i}{6}A^{-2/3}-\frac{i}{3}E \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$\left(W\hat{A}_1+\hat{A}_2\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left(W\hat{A}_3+\hat{A}_4\right)\begin{pmatrix} \int_a^b e^{(s-b)A^{1/3}} f(s)\,ds \\ \int_a^b e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(a-s)A^{1/3}} f(s)\,ds \\ \int_a^b e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(a-s)A^{1/3}} f(s)\,ds \end{pmatrix},$$

$f \in L_2\left(H,(a,b)\right)$, $x_i \in H_{+1/6}$, $i=1,2,3$ koşulu bulunur. Dolayısıyla L_W^{-1} operatörü mevcut olduğundan her $f \in L_2\left(H,(a,b)\right)$ için yukarıdaki koşulu sağlayan $x_i \in H_{+1/6}$, $i=1,2,3$ vektörleri mevcuttur. $0 \in \rho\left(W\hat{A}_1+\hat{A}_2\right)$ olduğundan $W\hat{A}_1+\hat{A}_2$ operatörünün H^3 Hilbert uzayında tersi var ve sınırlıdır. Ayrıca her $x_i \in H$, $i=1,2,3$ için,

$$\left\|\hat{A}_3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right\|_{H^3}^2 = \left\|\begin{pmatrix} \frac{i}{3}\left(A^{-2/3}-E\right)x_1 \\ -\frac{1}{3}A^{-1/3}x_1+\frac{\sqrt{3}+i}{4}A^{-1/3}x_2+\frac{-3\sqrt{3}+i}{12}A^{-1/3}x_3 \\ \left(\frac{\sqrt{3}+i}{6}A^{-2/3}-\frac{i}{3}E\right)x_2+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{6}A^{-2/3}-\frac{1}{3}E\right)x_3 \end{pmatrix}\right\|_{H^3}^2$$

$$\leq \left\| \tfrac{i}{3}\left(A^{-2/3} - E \right) \right\|^2 \|x_1\|_H^2 + \left\| \tfrac{1}{3} A^{-1/3} \right\|^2 \|x_1\|_H^2 + \left\| \tfrac{\sqrt{3}+i}{4} A^{-1/3} \right\|^2 \|x_2\|_H^2 + \left\| \tfrac{-3\sqrt{3}+i}{12} A^{-1/3} \right\|^2 \|x_3\|_H^2 + \left\| \tfrac{\sqrt{3}+i}{6} A^{-2/3} - \tfrac{i}{3} E \right\|^2 \|x_2\|_H^2$$
$$+ \left\| \tfrac{\sqrt{3}+i}{6} A^{-2/3} - \tfrac{1}{3} E \right\|^2 \|x_3\|_H^2$$
$$\leq \left\| \tfrac{1}{3}\left(\left\| A^{-2/3} \right\| + \|E\| \right) \right\|^2 \|x_1\|_H^2 + \left\| \tfrac{1}{3} A^{-1/3} \right\|^2 \|x_1\|_H^2 + \left\| \tfrac{\sqrt{3}+i}{4} A^{-1/3} \right\|^2 \|x_2\|_H^2 + \left\| \tfrac{-3\sqrt{3}+i}{12} A^{-1/3} \right\|^2 \|x_3\|_H^2 + \left\| \tfrac{2}{6} \left\| A^{-2/3} \right\| + \tfrac{1}{3} \|E\| \right\|^2 \|x_2\|_H^2$$
$$+ \left\| \tfrac{2}{6} \left\| A^{-2/3} \right\| + \tfrac{1}{3} \|E\| \right\|^2 \|x_3\|_H^2$$
$$\leq \tfrac{4}{9} \|x_1\|_H^2 + \tfrac{1}{9} \|x_1\|_H^2 + \tfrac{1}{4} \|x_2\|_H^2 + \tfrac{7}{36} \|x_3\|_H^2 + \tfrac{4}{9} \|x_2\|_H^2 + \tfrac{4}{9} \|x_1\|_H^2$$
$$\leq \|x_1\|_H^2 + \|x_2\|_H^2 + \|x_3\|_H^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\|_{H^3}^2$$

ve benzer şekilde

$$\left\| \hat{A}_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\|_{H^3}^2 = \left\| \begin{pmatrix} \tfrac{i}{3}\left(A^{-2/3} + E \right) x_1 \\ -\tfrac{1}{6} A^{-1/3} x_1 + \tfrac{\sqrt{3}-i}{4} A^{-1/3} x_2 + \tfrac{-\sqrt{3}-3i}{12} A^{-1/3} x_3 \\ \left(\tfrac{\sqrt{3}+i}{6} A^{-2/3} - \tfrac{i}{3} E \right) x_2 + \left(\tfrac{-\sqrt{3}+i}{6} A^{-2/3} + \tfrac{i}{3} E \right) x_3 \end{pmatrix} \right\|_{H^3}^2$$
$$= \left\| \tfrac{i}{3}\left(A^{-2/3} + E \right) x_1 \right\|_H^2 + \left\| -\tfrac{1}{6} A^{-1/3} x_1 + \tfrac{\sqrt{3}-i}{4} A^{-1/3} x_2 + \tfrac{-\sqrt{3}-3i}{12} A^{-1/3} x_3 \right\|_H^2 + \left\| \left(\tfrac{\sqrt{3}+i}{6} A^{-2/3} - \tfrac{i}{3} E \right) x_2 + \left(\tfrac{-\sqrt{3}+i}{6} A^{-2/3} + \tfrac{i}{3} E \right) x_3 \right\|_H^2$$
$$\leq \left\| \tfrac{i}{3}\left(A^{-2/3} + E \right) \right\|^2 \|x_1\|_H^2 + \left\| \tfrac{1}{6} A^{-1/3} \right\|^2 \|x_1\|_H^2 + \left\| \tfrac{\sqrt{3}-i}{4} A^{-1/3} \right\|^2 \|x_2\|_H^2 + \left\| \tfrac{-\sqrt{3}-3i}{12} A^{-1/3} \right\|^2 \|x_3\|_H^2 + \left\| \tfrac{\sqrt{3}+i}{6} A^{-2/3} - \tfrac{i}{3} E \right\|^2 \|x_2\|_H^2$$
$$+ \left\| \tfrac{-\sqrt{3}+i}{6} A^{-2/3} + \tfrac{i}{3} E \right\|^2 \|x_3\|_H^2$$
$$\leq \left\| \tfrac{1}{3}\left(\left\| A^{-2/3} \right\| + \|E\| \right) \right\|^2 \|x_1\|_H^2 + \left\| \tfrac{1}{6} A^{-1/3} \right\|^2 \|x_1\|_H^2 + \left\| \tfrac{\sqrt{3}-i}{4} A^{-1/3} \right\|^2 \|x_2\|_H^2 + \left\| \tfrac{-\sqrt{3}-3i}{12} A^{-1/3} \right\|^2 \|x_3\|_H^2$$
$$+ \left\| \tfrac{\sqrt{3}+i}{6} A^{-2/3} - \tfrac{i}{3} E \right\|^2 \|x_2\|_H^2 + \left\| \tfrac{2}{6} \left\| A^{-2/3} \right\| + \tfrac{1}{3} \|E\| \right\|^2 \|x_3\|_H^2$$
$$\leq \tfrac{4}{9} \|x_1\|_H^2 + \tfrac{1}{36} \|x_1\|_H^2 + \tfrac{1}{4} \|x_2\|_H^2 + \tfrac{1}{12} \|x_3\|_H^2 + \tfrac{5}{6} \|x_2\|_H^2 + \tfrac{4}{9} \|x_3\|_H^2$$
$$\leq 2\left(\|x_1\|_H^2 + \|x_2\|_H^2 + \|x_3\|_H^2 \right) = 2 \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\|_{H^3}^2$$

olduğundan, $\hat{A}_3$ ve $\hat{A}_4$ lineer operatörleri H^3 Hilbert uzayında sınırlıdır. Böylece $\hat{B}_W := \left(W\hat{A}_1 + \hat{A}_2\right)^{-1}\left(W\hat{A}_3 + \hat{A}_4\right)$ operatörü sınırlı olup $B_{W,i} \in B(H), i = \overline{1,9}$ olmak üzere

$\hat{B}_W = \begin{pmatrix} B_{W,1} & B_{W,4} & B_{W,7} \\ B_{W,2} & B_{W,5} & B_{W,8} \\ B_{W,3} & B_{W,6} & B_{W,9} \end{pmatrix}$ şeklindedir. Ayrıca $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ olduğundan

$$\int_a^t e^{(s-t)\tilde{A}^{1/3}} f(s)ds, \quad \int_t^b e^{\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}(t-s)\tilde{A}^{1/3}} f(s)ds \in \mathfrak{S}_\infty\left(L_2\left(H,(a,b)\right)\right)$$

[30] . Böylece

$$\begin{aligned} L_W^{-1} f(t) = & \left(e^{(a-t)A^{1/3}} B_{W,1} + e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-b)A^{1/3}} B_{W,2} + e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-b)A^{1/3}} B_{W,3} \right) \int_a^b e^{(s-b)A^{1/3}} f(s)\,ds \\ & + \left(e^{(a-t)A^{1/3}} B_{W,4} + e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-b)A^{1/3}} B_{W,5} + e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-b)A^{1/3}} B_{W,6} \right) \int_a^b e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(a-s)A^{1/3}} f(s)\,ds \\ & + \left(e^{(a-t)A^{1/3}} B_{W,7} + e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-b)A^{1/3}} B_{W,8} + e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-b)A^{1/3}} B_{W,9} \right) \int_a^b e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(a-s)A^{1/3}} f(s)\,ds \\ & + \frac{1}{3} A^{-2/3} \int_a^t e^{(s-t)A^{1/3}} f(s)ds + \frac{1-i\sqrt{3}}{6} A^{-2/3} \int_t^b e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-s)A^{1/3}} f(s)ds + \frac{1+i\sqrt{3}}{6} A^{-2/3} \int_t^b e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-s)A^{1/3}} f(s)ds \end{aligned}$$

olup $L_W^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty\left(L_2\left(H,(a,b)\right)\right)$ olduğu elde edilir. ◇

Sonuç 17: Eğer $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$, $0 \in \rho\left(W\hat{A}_1 + \hat{A}_2\right)$, L_W normal operatör ve $\lambda \in \rho(L_W)$ ise, $R_\lambda(L_W) \in \mathfrak{S}_\infty\left(L_2\left(H,(a,b)\right)\right)$.

İspat: Bu durumda bilinen Hilbert eşleniğinden [12]

$$R_\lambda(L_W) - L_W^{-1} = \lambda R_\lambda(L_W) L_W^{-1}$$

eşitliğinden $R_\lambda(L_W)$ çekilirse, Teorem 16 ve [12]

$$R_\lambda(L_W) = L_W^{-1} + \lambda R_\lambda(L_W) L_W^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty\left(L_2\left(H,(a,b)\right)\right)$$

olduğu elde edilir. ◇

Sonuç 18: $A:D(A)\subset H\to H$, $AW_2^3(H,(a,b))\subset W_2^3(H,(a,b))$, $A^*=A\geq E$, $A^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(H)$, $\left(W\hat{A}_1+\hat{A}_2\right)^{-1}\in B\left(H^3\right)$ ve L_W, L_0 minimal operatörünün herhangi bir normal genişlemesi ise, L_W normal operatörünün özvektörlerinin ailesi $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında tamdır.

Teorem 19: $A:D(A)\subset H\to H$, $AW_2^3(H,(a,b))\subset W_2^3(H,(a,b))$ $A^*=A\geq E$, $A^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(H)$ ve $W=\pm E$ olmak üzere $\left(W\hat{A}_1+\hat{A}_2\right)^{-1}\in B\left(H^3\right)$ olsun. Bu durumda

$$\sigma(L_{\pm E})=\sigma_p(\operatorname{Re}L_{\pm E})+i\sigma_p(\operatorname{Im}(L_{\pm E}))$$

eşitliği doğrudur.

İspat: Bu koşullar altında $L_{\pm E}$, L_0 minimal operatörünün bir normal genişletimi ve ayrıca $L_{\pm E}^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty\left(L_2(H,(a,b))\right)$ şeklindedir. Bilindiği gibi Teorem 5'den

$$\sigma(L_{\pm E})\subset\sigma_p(\operatorname{Re}L_{\pm E})+i\sigma_p(\operatorname{Im}(L_{\pm E})).$$

Diğer yandan, eğer $\lambda_r\in\sigma_p(\operatorname{Re}L_{\pm E})$ için

$$\operatorname{Re}L_{\pm E}u=\tilde{A}u_r=\lambda_r u_r,\;\; u_r\in H\setminus\{0\}$$

Aynı sebepten, eğer $\lambda_i\in\sigma_p\left(E_H\otimes\left(-i\dfrac{d_{\pm E}^3}{dt^3}\right)\right)$ ise,

$$\operatorname{Im}L_{\pm E}u=-i\frac{d_{\pm E}^3u_i(t)}{dt^3}=\lambda_i^{\pm}u_i^{\pm}(t),\;\; u_i^{\pm}(t)\in L_2(a,b)\setminus\{0\}$$

ise, $L_{\pm E}=\left(\tilde{A}\otimes E_{L_2(a,b)}\right)+i\left(E_H\otimes -i\dfrac{d_{\pm E}^3}{dt^3}\right)$ şeklinde yazılabildiğinden

$$
\begin{aligned}
L_{\pm E}\left(u_r \otimes u_i^{\pm}(t)\right) &= \left(\tilde{A}\otimes E_{L_2(a,b)}\right)\left(u_r \otimes u_i^{\pm}(t)\right) + i\left(E_H \otimes -i\frac{d_{\pm E}^3}{dt^3}\right)\left(u_r \otimes u_i^{\pm}(t)\right) \\
&= \left(\tilde{A}u_r \otimes u_i^{\pm}(t)\right) + i\left(u_r \otimes -i\frac{d_{\pm E}^3 u_i^{\pm}(t)}{dt^3}\right) \\
&= \left(\lambda_r u_r \otimes u_i^{\pm}(t)\right) + i\left(u_r \otimes \lambda_i^{\pm} u_i^{\pm}(t)\right) \\
&= \lambda_r\left(u_r \otimes u_i^{\pm}(t)\right) + i\lambda_i^{\pm}\left(u_r \otimes u_i^{\pm}(t)\right) \\
&= \left(\lambda_r + i\lambda_i^{\pm}\right)\left(u_r \otimes u_i^{\pm}(t)\right)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\lambda_r + i\lambda_i^{\pm} \in \sigma_p\left(L_{\pm E}\right)$ olduğu görülür. Ayrıca $\sigma_p\left(\operatorname{Re} L_{\pm E}\right)$ ve $\sigma_p\left(\operatorname{Im} L_{\pm E}\right)$ kümelerinin yığılma noktaları olmadığından

$$
\sigma\left(L_{\pm E}\right) = \sigma_p\left(\operatorname{Re} L_{\pm E}\right) + i\sigma_p\left(\operatorname{Im}\left(L_{\pm E}\right)\right)
$$

eşitliği doğrudur. ◇

Teorem 20: $A: D(A) \subset H \to H$, $A^* = A \geq E$, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$, $W, \hat{A}^{-1/2} W \hat{A}^{1/2} : H^3 \to H^3$ üniter operatörler ve $\lambda_n(A) \sim cn^{\alpha}$, $n \to +\infty$, $0 < c, \alpha < +\infty$ olsun. O halde

$$
\left|\lambda_n\left(L_{\pm E}\right)\right| \sim \beta n^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}, \ \beta > 0, \ n \to +\infty
$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: İlk önce L_E normal genişlemesini ele alalım. Bu durumda Sonuç 12'den

$$
\sigma_p\left(L_E\right) = \left\{\lambda_r + i\lambda_i : \ \lambda_r \in \sigma_p\left(\tilde{A}\right), \ \lambda_i \quad f(\lambda) = 0 \text{ denkleminin } \left(\left(\frac{2n-1}{b-a}\pi\right)^3, \left(\frac{2n+1}{b-a}\pi\right)^3\right), n \in \mathbb{Z} \text{ aralığı üzerindeki tek çözümü}\right\}
$$

ve $m \to +\infty$ iken $\lambda_m(A) \sim cm^{\alpha}$, $0 < c, \alpha < +\infty$ olduğundan m 'nin yeteri kadar büyük değerlerinde

$$\left(c^2m^{2\alpha}+\left(\frac{2n-1}{b-a}\pi\right)^6\right)^{1/2}\le\left|\lambda\left(L_E\right)\right|\le\left(c^2m^{2\alpha}+\left(\frac{2n+1}{b-a}\pi\right)^6\right)^{1/2},\ n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N}.$$

Böylece m ‘nin yeteri kadar büyük değerlerinde

$$\left|\lambda\left(L_E\right)\right|\sim\left(c^2m^{2\alpha}+d^6\left(2n+1\right)^6\right)^{1/2},\ n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N},\ d=\frac{\pi}{b-a}$$

bağıntısı doğrudur.

Şimdi H Hilbert uzayındaki herhangi bir S lineer kapalı sınırsız operatörü için

$$N\left(\lambda,S\right):=\sum_{\left|\lambda_m(L)\right|\le\lambda}1,\ \ \lambda>0$$

yani, $N\left(\lambda,S\right)=card\left\{m:\left|\lambda_m\left(S\right)\right|\le\lambda,\ \ \lambda>0\right\}$ fonksiyonunu tanımlayalım. $N:\left[0,+\infty\right)\to\left[0,+\infty\right)$ monoton artan bir fonksiyon olup $N\left(\lambda,S\right)\to+\infty,\ \ \lambda\to+\infty$. Bu halde, $N_+\left(\lambda,L_E\right):=\sum_{\substack{\left|\lambda(L_E)\right|\le\lambda\\ \operatorname{Im}\lambda(L_E)\ge0}}1,\ \ \lambda>0$ olmak üzere

$$N\left(\lambda,L_E\right)=2N_+\left(\lambda,L_E\right)-N\left(\lambda,A\right)$$

eşitliği doğrudur. $\lambda\to+\infty$ iken $N_+\left(\lambda,L_E\right)$ fonksiyonunun asimptotik davranışını incelemek için ilk önce $\lambda_m\left(A\right)=cm^\alpha$, $m\in\mathbb{N}$ ve $\lambda_n\left(\operatorname{Im}L_E\right)=d^3\left(2n+1\right)^3$, $n\in\mathbb{Z}$ olduğunu kabul edelim. O halde L_E operatörü için $N_+\left(\lambda,L_E\right)$ fonksiyonunun değeri

$$c^2m^{2\alpha}+d^6\left(2n+1\right)^6\le\lambda^2$$

koşulunu sağlayan kapalı birinci bölgede $\left(m,n\right)$ tam koordinatlı noktalarının sayısı kadardır. Her böyle tam koordinatlı $\left(m,n\right)$noktalarına sağ üst köşe noktası $\left(m,n\right)$ olan ve alanı 1’e eşit olan kareleri karşılık getirelim. Bütün böyle kareler $c^2x^{2\alpha}+d^6\left(2y+1\right)^6=\lambda^2,\ x\ge0,\ y\ge0$ kapalı eğrinin içindedir. Öyleyse,

$$N_+(\lambda,L_E)\le \frac{1}{2d}\int_0^{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[6]{\lambda^2-c^2x^{2\alpha}}\,dx-\frac{\lambda^{1/\alpha}}{2c^{1/\alpha}}=\frac{\lambda^{1/3}}{d}\int_0^{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[6]{1-\frac{c^2x^{2\alpha}}{\lambda^2}}\,dx-\frac{\lambda^{1/\alpha}}{2c^{1/\alpha}}$$

$$=\frac{\lambda^{1/3}\lambda^{1/\alpha}}{2c^{1/\alpha}d\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{4}{3}}x\sin^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}x\,dx-\frac{\lambda^{1/\alpha}}{2c^{1/\alpha}}=\frac{\gamma}{2c^{1/\alpha}d\alpha}\lambda^{\frac{3+\alpha}{3\alpha}}-\frac{\lambda^{1/\alpha}}{2c^{1/\alpha}},\ \gamma:=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{4}{3}}x\sin^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}x\,dx$$

eşitsizliği doğrudur. Diğer taraftan bu kareler birinci bölgede $c^2(x+1)^{2\alpha}+d^6(2y+3)^6=\lambda^2$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin tamamını kapatır. Bu durumda,

$$N_+(\lambda,L_E)\ge \frac{1}{d}\int_0^{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[6]{\lambda^2-c^2(x+1)^{2\alpha}}\,dx-\frac{3\lambda^{1/\alpha}}{2c^{1/\alpha}}=\frac{\lambda^{1/3}}{d}\int_0^{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^{1/\alpha}} \sqrt[6]{1-\frac{c^2(x+1)^{2\alpha}}{\lambda^2}}\,dx-\frac{3\lambda^{1/\alpha}}{2c^{1/\alpha}}$$

$$=\frac{\lambda^{1/3}\lambda^{1/\alpha}}{2c^{1/\alpha}d\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{4}{3}}x\sin^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}x\,dx-\frac{3\lambda^{1/\alpha}}{2c^{1/\alpha}}=\frac{\gamma}{2c^{1/\alpha}d\alpha}\lambda^{\frac{3+\alpha}{3\alpha}}-\frac{3\lambda^{1/\alpha}}{2c^{1/\alpha}},\ \gamma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{4}{3}}x\sin^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}x\,dx$$

olup,

$$\left(\frac{2d\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}(c-\varepsilon)^{\frac{3}{3+\alpha}}\lambda^{\frac{3+\alpha}{3\alpha}}\le N_+(\lambda,L_E)\le\frac{\gamma}{2c^{1/\alpha}d\alpha}\lambda^{\frac{3+\alpha}{3\alpha}}-\frac{\lambda^{1/\alpha}}{2c^{1/\alpha}}$$

yani,

$$N_+(\lambda,L_E)\to\frac{\gamma}{2c^{1/\alpha}d\alpha}\lambda^{\frac{3+\alpha}{3\alpha}}$$

olduğu bulunur. Ayrıca $\lambda_m(A)=cm^\alpha$ olduğundan $\lambda\to+\infty$ iken $N(\lambda,A)\sim\delta\lambda^{\frac{1}{\alpha}},\ \delta>0$ ve $N(\lambda,L_E)=2N_+(\lambda,L_E)-N(\lambda,A)$ eşitliğinden $\lambda\to+\infty$ iken

$$N(\lambda,L_E)\sim\frac{\gamma}{d\alpha c^{1/\alpha}}\lambda^{\frac{3+\alpha}{3\alpha}}$$

bağıntısı doğrudur.

Şimdi $m \to +\infty$ iken $\lambda_m(A) \sim cm^{\alpha}$, $c > 0$ ve $\lambda_n(\operatorname{Im} L_E) = d^3(2n+1)^3$, $n \in \mathbb{Z}$ olduğu durumu inceleyelim. Bu durumda,

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\lambda_m(A)}{m^{\alpha}} = c$$

olduğundan küçük $\varepsilon > 0$ sayısı ve m ‘nin yeteri kadar büyük değerlerinde

$$(c-\varepsilon)m^{\alpha} \le \lambda_m(A) \le (c+\varepsilon)m^{\alpha}.$$

Bu durumda

$$\left(\frac{d\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}} (c-\varepsilon)^{\frac{3}{3+\alpha}} \lambda^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}} \le \left|\lambda_n(L_E)\right| \le \left(\frac{d\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}} (c+\varepsilon)^{\frac{3}{3+\alpha}} \lambda^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}$$

yani, $n \to +\infty$ iken

$$\left|\lambda_n(L_E)\right| \sim \beta n^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}, \ \beta = \left(\frac{d\alpha c}{\gamma}\right)^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}$$

olduğu elde edilir. Benzer şekilde $\lambda_m(A) \sim cm^{\alpha}$, $c > 0$, $m \to +\infty$ ve $\lambda_n(\operatorname{Im} L_E) \sim d^3(2n+1)^3$, $d > 0$, $n \to +\infty$ durumda da

$$\left|\lambda_n(L_E)\right| \sim \beta n^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}, \ \beta = \left(\frac{d\alpha c}{\gamma}\right)^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}, \ n \to +\infty$$

olduğu gösterilebilir.

L_{-E} normal genişlemesi için teoremin ispatı benzerdir. $\diamond$

Şimdi bir $W : H^3 \to H^3$ üniter operatörü için $\left(\hat{A}_1 + \hat{A}_2\right)^{-1}, \left(W\hat{A}_1 + \hat{A}_2\right)^{-1} \in B\left(H^3\right)$ olduğunu kabul edelim. $\Delta(W) : H^3 \to H^3$ operatörü

$$\Delta(W) := \left(W\hat{A}_1 + \hat{A}_2\right)^{-1}\left(W\hat{A}_3 + \hat{A}_4\right) - \left(\hat{A}_1 + \hat{A}_2\right)^{-1}\left(\hat{A}_3 + \hat{A}_4\right)$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 21: $A:D(A)\subset H\to H$, $A^*=A\geq E,\;\; A^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(H),\quad W,\; \hat{A}^{-1/2}W\hat{A}^{1/2}:H^3\to H^3$ üniter operatörler, $\lambda_n(A)\sim cn^\alpha,\; n\to+\infty,\; 0<c,\alpha<+\infty$, $\Delta(W)\in\mathfrak{S}_\infty(H^3)$ ve $s_n(\Delta(W))=O\left(n^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}\right),\; n\to+\infty$ olsun. Bu durumda L_W^{-1} operatörünün özdeğerleri için

$$\left|\lambda_n\left(L_W^{-1}\right)\right|=O\left(n^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}\right),\; n\to+\infty$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: Her $f\in L_2(H,(a,b))$ için Teorem 16' dan

$$\left(L_W^{-1}-L_E^{-1}\right)f(t)=\left(e^{(a-t)A^{1/3}},\; e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(t-b)A^{1/3}},\; e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(t-b)A^{1/3}}\right)\Delta(W)\begin{pmatrix}\int_a^b e^{(s-b)A^{1/3}}f(s)\,ds\\ \int_a^b e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(a-s)A^{1/3}}f(s)\,ds\\ \int_a^b e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(a-s)A^{1/3}}f(s)\,ds\end{pmatrix}$$

eşitliği doğrudur. Bu eşitlikten her $n\in\mathbb{N}$ için

$$s_n\left(L_W^{-1}-L_E^{-1}\right)\leq d\, s_n(\Delta(W)),\; d>0$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik ve s-sayıları için bilinen bir sonuçtan [12]

$$s_{2n-1}\left(L_W^{-1}\right)=s_{2n-1}\left(L_W^{-1}-L_E^{-1}+L_E^{-1}\right)\leq s_n\left(L_W^{-1}-L_E^{-1}\right)+s_n\left(L_E^{-1}\right)\leq d\, s_n(\Delta(W))+s_n\left(L_E^{-1}\right),\; n\geq 1$$

bulunur. $A^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(H)$ ve $\lambda_n(A)\sim cn^\alpha,\; n\to+\infty,\; 0<c,\alpha<+\infty$ olup Teorem 19' dan $s_n\left(L_E^{-1}\right)\sim\beta n^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}},\quad n\to+\infty,\quad \beta>0$ şeklinde olup $s_n(\Delta(W))=O\left(n^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}\right),\; n\to+\infty$ olduğundan,

$$0\leq\frac{s_{2n-1}\left(L_W^{-1}\right)}{n^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}}\leq d\,\frac{s_n(\Delta(W))}{n^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}}+\frac{s_n\left(L_E^{-1}\right)}{n^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}}\leq h,\; h>0,\; n\to+\infty$$

yani,

$$s_{2n-1}\left(L_W^{-1}\right)=O\left(n^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}\right),\ n\to+\infty$$

olduğu bulunur. Aynı sebepten

$$s_{2n}\left(L_W^{-1}\right)=s_{2n}\left(L_W^{-1}-L_E^{-1}+L_E^{-1}\right)\le s_{n+1}\left(L_W^{-1}-L_E^{-1}\right)+s_n\left(L_E^{-1}\right)\le d\, s_{n+1}\left(\Delta\left(W\right)\right)+s_n\left(L_E^{-1}\right),\ n\ge 1$$

olup

$$\frac{s_{n+1}\left(\Delta\left(W\right)\right)}{n^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}}=\frac{s_{n+1}\left(\Delta\left(W\right)\right)}{\left(n+1\right)^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}\to 0,\ n\to+\infty,$$

olduğundan benzer şekilde

$$s_{2n}\left(L_W^{-1}\right)=O\left(n^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}\right),\ n\to+\infty$$

bağıntısı bulunur. Öte yandan

$$\frac{s_{2n-1}\left(L_W^{-1}\right)}{\left(2n-1\right)^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}}=\frac{s_{2n-1}\left(L_W^{-1}\right)}{n^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}}\left(\frac{2n-1}{n}\right)^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}},$$

$$\frac{s_{2n}\left(L_W^{-1}\right)}{\left(2n\right)^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}}=\frac{s_{2n}\left(L_W^{-1}\right)}{n^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}}\left(\frac{2n}{n}\right)^{\frac{3\alpha}{3+\alpha}}$$

eşitliklerinden

$$s_{2n-1}\left(L_W^{-1}\right)=O\left(\left(2n-1\right)^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}\right),\ n\to+\infty$$

ve

$$s_{2n}\left(L_W^{-1}\right)=O\left(\left(2n\right)^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}\right),\ n\to+\infty$$

bağıntıları elde edilir. Böylece her $n\in\mathbb{N}$ için

$$s_n\left(L_W^{-1}\right)=O\left(n^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}\right),\ n\to+\infty$$

sonucu doğrudur. L_W^{-1} normal operatör olduğundan

$$\left|\lambda_n\left(L_W^{-1}\right)\right|=s_n\left(L_W^{-1}\right)=O\left(n^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}}\right),\ n\to+\infty$$

bağıntısı sağlanır [12]. ◇

Örnek 22:
$$\left.\begin{array}{l} L_E u(t,x):=\dfrac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3}-\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+u(t,x)\\ u(0,x)=u(1,x)=0,\\ \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t}+\dfrac{\partial u(1,x)}{\partial t}=0,\\ u(t,0)=u(t,1)=0,\ 0\le t,x\le 1\end{array}\right\}$$
diferensiyel operatörünün $L_2\left((0,1)\times(0,1)\right)$ Hilbert uzayında özdeğerlerini ve özdeğerlerin asimptotunu inceleyelim.

$$\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3}-\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+u(t,x)=\lambda u(t,x),\ \lambda\in\mathbb{C}$$

denkleminin $u(t,x)=\varphi(t)\phi(x)$ şeklindeki çözümlerini arayalım. Bu durumda,

$$\varphi'''(t)\phi(x)-\varphi(t)\phi''(x)+\varphi(t)\phi(x)=\lambda\varphi(t)\phi(x)$$

olup bu eşitlikten

$$\varphi'''(t)\phi(x)-\varphi(t)\left(\phi''(x)+(1-\lambda)\phi(x)\right)=0$$

şeklinde yazılabildiğinden $\alpha\in\mathbb{R}$ sabiti için,

$$\frac{\varphi'''(t)}{\varphi(t)}=\frac{\phi''(x)+(1-\lambda)\phi(x)}{\phi(x)}=\alpha$$

yani,

$$\varphi'''(t)=\alpha\varphi(t),\varphi(0)=\varphi(1)=0,\ \varphi'(0)=\varphi'(1)$$
$$\phi''(x)+(1-\lambda)\phi(x)=\alpha\phi(x),\ \phi(0)=\phi(1)=0$$

diferensiyel denklemleri bulunur. Buradan $\mu:=-i\alpha$ olarak tanırsa, $\alpha=i\mu$ olup

$$\varphi(t)=c_1e^{\frac{\sqrt{3}+i}{2}\sqrt[3]{\mu t}}+c_2e^{\frac{\sqrt{3}-i}{2}\sqrt[3]{\mu t}}+c_1e^{-i\sqrt[3]{\mu t}},$$
$$\varphi(0)=\varphi(1)=0,\ \varphi'(0)=\varphi'(1),c_1,c_2,c_3\in\mathbb{C}$$

şeklindedir. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{\sqrt{3}+i}{2}\sqrt[3]{\mu}} & e^{\frac{\sqrt{3}-i}{2}\sqrt[3]{\mu}} & e^{-i\sqrt[3]{\mu}} \\ \frac{\sqrt{3}+i}{2}\sqrt[3]{\mu}e^{\frac{\sqrt{3}+i}{2}\sqrt[3]{\mu}}+\frac{\sqrt{3}+i}{2}\sqrt[3]{\mu} & \frac{\sqrt{3}-i}{2}\sqrt[3]{\mu}e^{\frac{\sqrt{3}-i}{2}\sqrt[3]{\mu}}+\frac{\sqrt{3}-i}{2}\sqrt[3]{\mu} & -i\sqrt[3]{\mu}e^{-i\sqrt[3]{\mu}}+-i\sqrt[3]{\mu} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=0$$

lineer denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözümü olması

$$\begin{vmatrix} e^{\frac{\sqrt{3}+i}{2}\sqrt[3]{\mu}} & e^{\frac{\sqrt{3}-i}{2}\sqrt[3]{\mu}} & e^{-i\sqrt[3]{\mu}} \\ \frac{\sqrt{3}+i}{2}\sqrt[3]{\mu}e^{\frac{\sqrt{3}+i}{2}\sqrt[3]{\mu}}+\frac{\sqrt{3}+i}{2}\sqrt[3]{\mu} & \frac{\sqrt{3}-i}{2}\sqrt[3]{\mu}e^{\frac{\sqrt{3}-i}{2}\sqrt[3]{\mu}}+\frac{\sqrt{3}-i}{2}\sqrt[3]{\mu} & -i\sqrt[3]{\mu}e^{-i\sqrt[3]{\mu}}+-i\sqrt[3]{\mu} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

ile mümkündür. Bu determinant hesaplanırsa

$$-2\sqrt{3}i\sin\left(\mu^{1/3}\right)+6i\cos\left(\frac{\mu^{1/3}}{2}\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{3}\mu^{1/3}}{2}\right)-2\sqrt{3}i\sin\left(\frac{\mu^{1/3}}{2}\right)\cosh\left(\frac{\sqrt{3}\mu^{1/3}}{2}\right)=0,$$

Lemma 11'e göre bu denklem her $n\in\mathbb{Z}$ için $\left((2n-1)^3\pi^3,(2n-1)^3\pi^3\right)$ aralığında bir tek μ_n çözümü mevcuttur. Ayrıca

$$\phi(x)=c_3e^{\sqrt{\lambda+\alpha-1}x}+c_4e^{-\sqrt{\lambda+\alpha-1}x},\ \phi(0)=\phi(1)=0,\ c_3,c_4\in\mathbb{C},$$

şeklinde olup sıfırdan farklı çözümün olması için

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda+\alpha-1}} & e^{-\sqrt{\lambda+\alpha-1}} \end{vmatrix} = 0$$

olup buradan,

$$\lambda_k = k^2\pi^2 + 1 - \alpha,\ k \in \mathbb{Z}$$

eşitliği doğrudur. Bu halde verilen diferensiyel operatörün özdeğerleri

$$\lambda_{k,n} = k^2\pi^2 + 1 - i\mu_n,\ \mu_n \in \left((2n-1)^3\pi^3, (2n-1)^3\pi^3\right),\ n,k \in \mathbb{Z}$$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler

$$u_\lambda(t,x) = \left(c_4 e^{\sqrt{\lambda+i\mu-1}x} + c_5 e^{-\sqrt{\lambda+i\mu-1}x}\right)\left(c_1 e^{\frac{\sqrt{3}+i}{2}\sqrt[3]{\mu t}} + c_2 e^{\frac{\sqrt{3}-i}{2}\sqrt[3]{\mu t}} + c_3 e^{-i\sqrt[3]{\mu t}}\right),\ c_j \in \mathbb{C},\ j = \overline{1,5}$$

şeklindedir. $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + E$, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty\left(L_1(0,1)\right)$ ve $\lambda_m(A) \sim \pi^2 m^2,\ m \to +\infty$ olup Teorem 20' den

$$\left|\lambda_n(L_E)\right| \sim \beta n^{\frac{6}{5}},\ \beta > 0,\ m \to +\infty$$

olduğu elde edilir.

Örnek 23: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge ve A, $L_2(\Omega)$ uzayında

$$-\Delta_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^{\ 2}}$$

diferensiyel ifadesinin $C_0^\infty(\Omega \cup \partial\Omega) \subset L_2(\Omega)$ lineer manifoldunda kapanışı olsun. Bu operatör $A = A^* \geq 0$, ayrık spektrumlu ve

$$\lambda_k(A) \sim ck^{\frac{2}{n}},\ 0 < c < +\infty,\ k \to \infty$$

şeklindedir. Şimdi L_{-E}, $L_2(\Omega \times (a,b))$ uzayında

$$l\left(u\left(t,x\right)\right) := \frac{\partial^3 u\left(t,x\right)}{\partial t^3} + Au\left(t,x\right) + u\left(t,x\right)$$

diferensiyel ifadesinin

$$\frac{\partial^2 u\left(a,x\right)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u\left(b,x\right)}{\partial t^2} = 0,$$
$$\frac{\partial u\left(0,x\right)}{\partial t} - \frac{\partial u\left(1,x\right)}{\partial t} = 0,$$

sınır koşulları ile ürettiği normal genişlemesi olsun. Bu durumda Teorem 20' den

$$\left|\lambda_m\left(L_E\right)\right| \sim \beta m^{\frac{6}{3n+2}},\ 0<\beta<+\infty,\ m\to+\infty$$

olduğu elde edilir.

3. BULGULAR VE iRDELEMELER

Her ne kadar J. von Neumann ve H. Weyl' in selfadjoint genişlemeler teorisi hakkındaki meşhur çalışmaları 20. asrın başlangıcında yapılmış olsa da bu teorinin gelişmesi ve kompleks katsayılı adi diferensiyel operatörlere uyarlaması uzun yıllar devam etmiş ve hâla da gelişmektedir. Bu teorinin operatör katsayılı iki noktalı lineer diferensiyel ifadelerin doğurduğu selfadjoint genişlemelere uygulanışı A.G. Kostyuchenko ve B.M. Levitan'ın 1967 yılındaki meşhur çalışmasında [42] ilk olarak ele alınmıştır. 1970 yılından sonra matematikte bu alan hızla gelişmeye başlamıştır. Bu alanda temel sonuçlar Yu. M. Berezansky, M.L. Gorbachuk, V.I. Gorbachuk, M.G. Krein, Yu. L. Daleskii vs. elde edilmiş ve geniş uygulama alanları bulmuştur. Bu çalışmaların geniş özeti F.S. Rofe-Beketov ve A.M. Kholkin'in [54] kitabında verilmiştir.

Formal normal operatörün normal genişlemelerinin genel teorisi 1970'li yıllarda temeli E.A. Conddington tarafından atılmasına rağmen bu teorinin iki noktalı diferensiyel operatörlere uygulanması 1990'lı yıllardan sonra başlamıştır. Bu alanda ilk sonuçlar [7, 41, 20-23] çalışmalarında alınmıştır. J. von Neumann'ın genel teorisinin regüler ve singüler durumda çok noktalı kompleks katsayılı lineer diferensiyel operatörlere genişletimi esasen 1990'lı yıllardan sonra başlamış ve bugünde de devam etmektedir. Bu çalışmaların geniş özeti A. Zettl'in ‘‘Sturm-Liouville Theory’’ [61] kitabında verilmiştir.

Tezin esas amacı sonlu bir aralık üzerinde tanımlı Hilbert uzay-değerli vektör-fonksiyonların Hilbert uzayında üçüncü mertebeye kadar olan iki terimli operatör katsayılı lineer diferensiyel ifadelerin ürettiği minimal operatörlerin normal genişlemelerinin sınır değerleri dilinde ifadesinin bulunması ve bu tip genişlemelerin bazı spektral problemlerinin araştırılmasına yoğunlaştırılmıştır.

Burada alınan esas sonuçlar fonksiyonlar teorisi, lineer diferensiyel-operatörler teorisi, operatör ve operatörlerin spektral teorisinin temel metotlarından kullanılarak elde edilmiştir. Bu sonuçlar kendilerinde pratik anlam taşımaktadır. Şöyle ki bu sonuçlar matematiksel problemler, fiziksel ve tekniksel modellere geniş uygulama alanlarına sahiptir.

4. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

1. İlk olarak bir sınıf düzgün operatör katsayılı birinci mertebeden bir lineer diferensiyel ifadenin doğurduğu minimal operatörün bütün normal genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilmiş, genişlemelerin spektrum yapısı araştırılmış ve bazı spektral özellikleri incelenmiştir.

2. İkinci olarak iki farklı durumda ikinci mertebeden sabit selfadjoint operatör katsayılı iki terimli lineer diferensiyel ifadenin sonlu bir aralık üzerinde tanımlı Hilbert-değerli fonksiyonların Hilbert uzayında doğurduğu minimal operatörün tüm normal genişlemelerini sınır değerleri dilinde ifadesi verilmiş ve bazı spektral problemleri araştırılmıştır.

3. Son olarak sabit lineer selfadjoint operatör katsayılı üçüncü mertebeden lineer diferensiyel ifadenin Hilbert-değerli fonksiyonların Hilbert uzayında ürettiği minimal operatörün bütün normal genişlemeleri lineer bağıntılar teorisinin sonuçlarından kullanarak sınır değerleri dilinde ifade edilmiş ve bu tip genişlemelerin bazı spektral özellikleri detaylı şekilde incelenmiştir.

Alınan bu sonuçlar örneklerle desteklenmiştir. Bu bulgular iki ulusal sempozyumda [35, 36] ve bir uluslararası konferansta sözlü olarak sunulmuş ve tam metni basılmıştır [32].Ayrıca bir makale basılmış [33] ve bir makale de Rocky Mountain Journal of Mathematics dergisinde kabul edilmiş ve 2011 yıl içinde basılacaktır [34].

5. ÖNERİLER

1. Tezde alınan sonuçlar diferensiyel denklemler ve diferensiyel denklem sistemleri için sınır değer problemleri teorisindeki bazı problemlerin çözümlerinin araştırılmasında kolaylık sağlayabilir.

2. Katsayıların özdeğerlerinin sonsuza farklı yaklaşım durumlarında (logaritmik, üstel, polinomiyal vs.) bakılan normal genişlemelerin özdeğerlerinin sonsuzdaki asimptotik davranışı problemi ayrıca bir inceleme konusu olabilir.

3. Katsayıların özdeğerlerinin sonsuza yaklaşımında birinci, ikinci, üçüncü vs. (daha küçük mertebeden terimler) dereceden terimler verildiğinde bakılan normal genişlemelerin özdeğerlerinin sonsuza asimptotik davranışındaki daha küçük terimleri bulundurması problemi ayrı bir inceleme konusu olabilir.

4. Bakılan bu problemler singüler durumlarda çözümü daha zor olan problemler serisinden olup kendi başına serbest bir inceleme alanı olarak araştırılabilir.

5. Üçüncü mertebede her normal genişlemenin özdeğerlerinin sonsuzdaki asimptotik davranış formülü daha kesinleştirilmesi yeni bir problem gibi bakılabilir.

6. Fiziksel ve tekniksel modellere yeni uygulama alanları aranabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Aleksandryan, R.A., Berezanskii, Yu.M., Ilin, V.A. ve Kostyuchenko, A.G., Some questions of spectral theory for equations with partial derivative, "Diff. Equ. with Partial Derivative", Moscow, Nauka, 1970.

2. Bachman, G. ve Narici, L., Functional Analysis, Academic Press, Inc. London, 1966.

3. Berezansky, Yu. M., Expansions in eigenfunctions of self-adjoint operators, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1968.

4. Berezansky, Yu. M. ve Sheftel, Z.G., Functional Analysis, Birkhauser Verlang, Berlin 1996.

5. Biriuk, G. ve Coddington, E.A., Normal extensions of unbounded formally normal operators, J. Math. And Mech., 13 (1964) 617-638.

6. Birman, M.S. ve Solomjak, M. Z., Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space, D. Reidel Publishing Company, Holland, 1986.

7. Biyarov, B.N. ve Otelbaev, M.M, Description of normal extensions, Mat. Zametki, 53, 5 (1993) 21-28 .

8. Bruk, V.M., Some problems of the Spectral theory of the linear differential equations for first order with unbounded operator coefficient, Functional Analysis and its applications (Moscow), 1 (1973) 15-25.

9. Coddington, E.A., Extension theory of formally normal and symmetric subspaces, Mem. Amer. Math. Soc., 134 (1973) 1-80.

10. Daleckii, J.U. ve Krein, M.G. , Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1974.

11. Davis, R.H., Singular normal differential operators, Tech. Rep., Dep. Math., California Univ., 10, 1955.

12. Dunford, N. ve Schwartz, J.T., Linear operators, I, II, Interscience publishers, New York, London, 1958, 1963.

13. Edmunds, D.E. ve Evans, W.D., Spectral Theory and Differential Operators, Clarendon Press Oxford, 1990.

14. Gelbaum, B.R. ve Olmsted John, M.H., Counterexample in analysis, Amsterdam, 1964.

15. Giaquinta, M. ve Hildebrand, S., Calculus of Variations I, Springer-Verlang Berlin Heidelberg, Germany, 2004.

16. Gohberg, I., Goldberg, S. ve Kaashoek, M.A., Basic Classes of Linear Operators, Birkhauser Verlang, Berlin, 2003.

17. Gorbachuk, M.L., Self-adjoint boundary value problems for the differential equations for second order with the unbounded operator coefficient, Functional Analysis and its applications (Moscow), 5, 1 (1971) 10-21.

18. Gorbachuk, V.I. ve Gorbachuk, M.L., Boundary value problems for operator-differential equations, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1991.

19. Hille, E. ve Phillips**,** R.S., Functional Analysis and Semi-Groups, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 31, 1957.

20. Ismailov, Z.I., Formally-normal extensions of an operator, Differential Equation, Minsk, 28, 5 (1992) 905-907.

21. Ismailov, Z.I., Normal boundary problems for a second-order equation with a bounded operator potential, Differential Equation, Norwell, USA, 30, 11 (1994) 1861-1862.

22. Ismailov, Z.I., A three-point normal boundary value problem for an operator, Differential Equation, Siberian Mathematical Journal, Norwell, USA, 35, 5 (1994) 941-944.

23. Ismailov, Z.I., Discreteness of the spectrum of the first order normal differential operators, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 57, 1 (1998) 32-33.

24. Ismailov, Z.I. ve Karatash, H., On the normality problem for the first order differential operators, Proc. Inst. Math and Mech. AS of Azer., 10 (1999) 61-66.

25. Ismailov, Z.I. ve Karatash, H., On the theory of normal extensions of differential operators of the first order, Proc. Inst. Math and Mech. AS of Azer., 11 (1999) 86-88.

26. Ismailov, Z.I., On the normal solvability and the index of differential operators, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 62, 3 (2000) 357-358.

27. Ismailov, Z.I. ve Karatash, H., Some necessary condition for the normality of differential operators, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 62, 2 (2000) 277-279.

28. Ismailov, Z.I., On the normality of first order differential operators, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, 51, 2 (2003) 139-145.

29. Ismailov, Z.I., On the discreteness of the spectrum of normal differential operators for second order, Doklady NAS of Belarus, 49, 3 (2005) 5-7.

30. Ismailov, Z.I., Compact inverses of first-order normal differential operators, J. Math. Anal. And App., USA, 320, 1 (2006) 266-278.

31. Ismailov, Z.I., On the coefficient of normal differential operators of higher order, Transactions of the Azerbaijan National Academy of Sciences, series of physical-technical and mathematical sciences, 25, 4 (2005) 55-62 .

32. Ismailov, Z. ve Erol, M., The structure of the spectrum for normal operators, Proceedings of the Fourteenth International Conference on Difference Equations and Applications, Istanbul, Turkey, 21-25 July 2008 211-217.

33. Ismailov, Z. ve Erol, M., The structure of the spectrum for normal operators, Trans.Natl.Acad.Sci.Azer., 30, 4 (2010) 89-96.

34. Ismailov, Z. ve Erol, M., Normal Differential operators of First-Order with Smooth Coefficients, Rocky Mountain Journal of Mathematics (2011 yılı içinde basılacak).

35. İsmayilov, Z. ve Erol, M., Birinci Mertebeden Düzgün Operatör Katsayılı Diferansiyel Operatörler, 4. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu, ODTÜ, Ankara, 4-5 Haziran 2009.

36. İsmayilov, Z. ve Erol, M., Bir Sınıf İkinci Mertebeden Normal Diferensiyel Operatörler, 9. Matematik Sempozyumu, Trabzon, Karadeniz Teknik Üniversitesi, 20-22 Ekim 2010.

37. Karatash, H. ve Ismailov, Z.I., On a class of first order normal differential operators, Transactions of Academy of Sciences of Azerbaican, series of physical-technical and mathematical sciences, 20, 4 (2000) 115-122.

38. Kilpi, Y., Über lineare normale Transformationen in Hilbertschen Raumes, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. AI 154 (1953).

39. Kilpi, Y., Über das komplexe Momenten Problem, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. AI 236 (1957).

40. Kilpi, Y., Über die Anzahl der hypermaximalen normalen fort setzungen normalen Transformationen, Ann. Univ. Turkuensis. Ser. AI 65 (1963).

41. Kokebaev, B.K. ve Otarov, Kh.T., Some properties of well-posed restrictions of the differentiation operator, Izv. Acad. Nauk Kaz. (SSR), 5 (1985) 38-42.

42. Kostyuchenko, A.G. ve Levitan, B.M., Asymptotic Behaviour of Eigen Values of the Sturm-Liouville Operator Problem, Funct. Anal. Appl., 1, 1 (1965) 75-84.

43. Krein, M.G., Theory of self-adjoint extensions of lower bounded operators and its applications II, Matem. Sb., 21, 63 (1947) 365-404.

44. Krein, S.G., Linear Differential Equations in Banach Space, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1971.

45. Levitan, B.M., Some problems of spectral theory of differential operators, International congress of mathematician in Nice, Moscow, Nauka, 1972.

46. Lions, J.L. ve Magenes, E., Problémes aux Limites non Homogené et Applications, DUNOD, Paris, 1968.

47. Maksudov, F.G. ve Ismailov, Z.I., Normal extensions of second-order differential-operator, Differential Equation, Norwell, USA, 30, 10 (1994) 1687-1689.

48. Maksudov, F.G. ve Ismailov, Z.I., Normal boundary problems for higher-order, Turkish Journal of Mathematics, 20, 2 (1996) 141-151.

49. Maksudov, F.G. ve Ismailov, Z.I., Boundary problems for the first-order differential-equations, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 54, 2 (1996) 659-661.

50. Maksudov, F.G. ve Ismailov, Z.I., Normal boundary value problems for the first-order differential equations, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 54, 2 (1996) 659-661.

51. Maksudov, F.G. ve Ismailov, Z.I., One necessary condition for normality of differential operators, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 59, 3 (1999) 422–424.

52. Nagy, B.Sz, Spectraldarstellung linearen Transformationen des Hilbertschen Raumes, Ergeb. Math., 5 (1942) 33.

53. Von Neumann, J., Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Ann., 102 (1929-1930) 49-131.

54. Rofe-Beketov, F.S. ve Kholkin, A.M., Spectral theory of differential operators , World Scientific Monograph Series in Matmetics, 7, New York, 2005.

55. Steinitz, E., Conterexample in analysis, Amer. Math. Monthly, 70, 6 (1963) 674.

56. Stochel, J. ve Szafraniec, F.H., On normal extensions of unbounded operators, I, Oper. Theory 14 (1985) 31-55.

57. Stochel, J. ve Szafraniec, F.H., On normal part of an unbounded operators, Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A 92 (1989) 459-503.

58. Vischik, M.I., On the general boundary problems for elliptic differential equations, Trans. of Moscow Math. Soc., 1 (1952) 187-246.

59. Yakubov, S. ve Yakubov, Y., Diffrential Operator Equations Ordinary and Partial Differential Equations, Chapman&Hall/CRC, USA, 1999.

60. Yeh, J., Real Analysis, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., USA, 2006.

61. Zettl, A., Sturm-Liouville Theory, Amer. Math. Soc., Mathematical Survey and Monograps, 121, Rhode Island, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

Meltem EROL, 01.04.1982 tarihinde Uşak'ta doğdu. İlköğrenimini Uşak' ta ve ortaöğretimini Aydın'da tamamladı. 2000–2001 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'ne girdi. 2003-2004 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde Matematik Bölümü'nü ikincilikle bitirdi. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi'nin yüksek lisans programına kabul edildi. 2004-2005 öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitenin yüksek lisans İngilizce hazırlık programını tamamladı. 2005–2006 öğretim yılında Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı yüksek lisans öğrenimine başladı. 19.10.2005 tarihinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2007 de yüksek lisans eğitimini tamamladı ve 2007-2008 öğretim yılı sonbahar yarıyılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı doktora programına kabul edildi. 29.12.2010 tarihinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne Öğretim Görevlisi olarak atandı ve hala bu göreve devam etmektedir.