

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GINZBURG-LANDAU MODELİ VE VARYASYONLARI**

**DOKTORA TEZİ**

**Ahmet GÖKDOĞAN**

**ŞUBAT 2010**

**TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GINZBURG-LANDAU MODELİ VE VARYASYONLARI**

**Ahmet GÖKDOĞAN**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde  
“Doktor (Matematik)”  
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30.12.2009  
Tezin Savunma Tarihi : 19.02.2010**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erhan COŞKUN  
Jüri Üyesi : Prof. Dr. İhsan ÜNVER  
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ  
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ömer AKIN  
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Zafer ÇAKIR**

**Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU**

**Trabzon 2010**

## ÖNSÖZ

Bu çalışma, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora tez çalışması olarak yapılmıştır.

Çalışmada, süperiletkenliğin incelenmesinde önemli rol oynayan ve 20. yüzyılın ortalarında ortaya atılan Ginzburg-Landau modeli ve değişik varyasyonları kalitatif ve asimptotik olarak incelenmiştir.

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanmasına kadar olan süreçte emeğiyle, öneri ve yönlendirmeleriyle yetişmeme katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erhan COŞKUN'a en içten dileklerle saygı ve şükranlarımı sunuyorum. Aynı zamanda bu tez aşamasında değerli görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan tez izleme jüri üyesi hocalarım, Prof. Dr. İhsan ÜNVER ve Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ'a teşekkürü bir borç bilirim. Yine yetişmemde emeği geçen matematik bölümündeki tüm değerli hocalarıma çok teşekkür ediyorum.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen anne ve babama, gösterdikleri fedakârlık ve anlayıştan, verdikleri destek ve moralden dolayı eşim ve oğluma en içten dileklerle teşekkür ediyorum.

Ahmet GÖKDOĞAN  
Trabzon 2010

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ .....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET .....	VII
SUMMARY .....	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
TABLolar DİZİNİ.....	XVI
SEMBOLLER DİZİNİ .....	XVII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Literatür ve Çalışmanın Özeti .....	4
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME.....	8
2.1. Film Tabaka İçin GL Modelleri .....	8
2.2. Yardımcı Stasyoner GL Modeli ve Eğik Atış Yöntemi .....	10
2.2.1. Dallanma Eğrisinin Elde Ediliş Yöntemi .....	12
2.2.2. SGL Sisteminin Özellikleri .....	12
2.2.3. Sıcaklık Bağımlı SGL Sistem İçin Simetrik Çözümlerin Sayısı.....	20
2.2.4. Sıcaklık Bağımlı SGL Sisteminin Çözümlerinin Kararlılığı.....	27
2.2.4.1. Tek Çözüm Bölgesi ve Kararlılık.....	27
2.2.4.2. İki Çözüm Bölgesi ve Kararlılık .....	32

2.2.4.3. Üç Çözüm Bölgesi ve Kararlılık .....	37
2.2.5. YSGL Başlangıç Değer Problemi İçin Asimptotik Analiz .....	40
2.2.5.1. YSGL Sistemi İçin Adomian Yöntemi ile Analitik Yaklaşımlar.....	40
2.2.5.2. SGLBDP İçin Yaklaşık Analitik Çözümler .....	42
2.2.6. SGL Sisteminin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları.....	44
2.3. Normal Hale Yakın Komşulukta Çözümler .....	47
2.3.1. Regüler Sturm – Liouville Teorisinden Önemli Sonuçlar.....	50
2.3.2. SLEIGN2 ile Elde Edilen Sayısal Sonuçlar .....	52
2.3.3. Özdeğer ve Özfonksiyonlar İçin Asimptotik Yöntem.....	57
2.3.4. Galerkin Yöntemi ile Özdeğer ve Özfonksiyonlar.....	69
2.3.5. Picard Yöntemi ile Özdeğer ve Özfonksiyonlar.....	78
2.3.6. Pertürbasyon Problemi Olarak Ginzburg-Landau .....	81
2.3.7. Eğik Atış Yöntemiyle Ginzburg-Landau Denkleminin Çözümü .....	86
2.4. Süperiletken Silindir İçin Tek Boyutlu GL Modelleri .....	88
2.4.1. Modelin Geometrisi.....	88
2.4.2. Enerji Fonksiyoneli .....	89
2.4.3. Tek Boyutlu GL Denklemi.....	90
2.4.4. Sıcaklık ve Zaman Bağımlı GL Modeli .....	93
2.4.5. Teorik Sonuçlar .....	93
2.5. Süperiletken Silindir İçin Normal Hale Yakın Komşulukta Çözümler.....	98
2.5.1. SLEIGN2 ile Elde Edilen Sayısal Sonuçlar .....	101
2.5.2. Sabit $k$ ve Değişen $h$ İçin Analizler .....	102

2.5.3.	Sabit $h$ ve Değişen $k$ İçin Analizler .....	103
2.5.4.	Eğik Atış Yöntemiyle SGLC Sisteminin Özdeğer ve Özfonksiyonları .....	104
2.6.	TTDGLC İçin Sayısal Analiz.....	106
2.6.1.	Zamana Bağlı Değişim Analizleri.....	106
2.6.2.	Sıcaklığa Bağlı Değişim Analizleri.....	108
2.6.2.1.	Sıcaklığa Bağlı Yerel Davranışlar .....	108
2.6.2.2.	Meissner Olayı .....	110
2.6.2.3.	Uygulanan Manyetik Alan Şiddetinin Değişimine Bağlı Davranışlar .....	112
2.6.3.	Josephson Eklemleri.....	115
2.6.3.1.	Eklemlerin Kalınlığı ve Sayıları.....	117
2.6.4.	Histeritik Davranışlar .....	119
2.6.4.1.	Uygulanan Manyetik Alana Bağlı Histerisiz.....	119
2.6.4.2.	Josephson Eklemlerinin Uygulanan Manyetik Alana Bağlı Histerisize Etkisi ...	120
2.6.4.3.	Sıcaklığa Bağlı Histerisiz .....	122
2.6.4.4.	Josephson Eklemlerinin Sıcaklığa Bağlı Histerisize Etkisi.....	123
2.6.5.	İki Parametre Değişim Analizleri.....	124
2.6.5.1.	Ginzburg-Landau Parametresi ve Uygulanan Alan Değişimine Göre $\kappa$ -H Diyagramları.....	124
2.6.5.2.	Sıcaklık ve Uygulanan Alan Değişimine Göre $\tau$ -H Diyagramları.....	125
2.6.5.3.	Yarıçapa Bağlı Olarak Faz Geçiş Diyagramları.....	126
2.7.	Paralel Programlama Çalışmaları.....	126
2.7.1.	Temel MPI Komutları .....	128
2.7.2.	erfx Paralel Sayısal Programı .....	129

2.7.3.	Yarı-Sonsuz Bölgede Paralel TDGL.....	132
3.	SONUÇLAR .....	141
4.	ÖNERİLER .....	144
5.	KAYNAKLAR.....	145
6.	EKLER .....	149

ÖZGEÇMİŞ

## ÖZET

### Ginzburg-Landau Modeli ve Varyasyonları

Tek boyutlu Ginzburg-Landau(GL) modeli ve varyasyonları kapsamında modellenebilen homojen ve homojen olmayan süperiletkenler göz önüne alınarak dış manyetik alan etkisi altındaki elektromanyetik davranışları sabit ve değişen sıcaklıklarda incelenmiştir. Çalışmada esas itibariyle ilgili modellerin sayısal ve analitik yaklaşımları elde edilmekte ve elde edilen sonuçların fiziksel gözlemlerle uyumluluğu incelenmektedir.

Sayısal kısımda ilgili sınır değer problemlerinin sıcaklık parametresine bağlı tek, iki ve üç simetrik çözüme sahip olduğu bölgeler belirlenerek, ilgili çözümlerin başlangıç değer pertürbasyonuna göre kararlılığı incelenmiştir. Bu kapsamda elde edilen sonuçlar klasik sınır değer problemi için elde edilen ve Kwong(1995), Chapman vd.(1992), Aftalion(1999) da sunulan sonuçlardan daha geneldir.

Ayrıca yarı-sonsuz veya sonsuz bölgede çözüm gerektiren problemler için bölge-ayırışım(domain decomposition) tekniği ile problem paralelleştirilerek KTÜ- Fen Edebiyat Fakültesinde bulunan bilgisayar laboratuvarındaki 20 adet bilgisayar yardımıyla paralel sayısal çözüm elde edilmiştir. Simülasyonlarımızla ideale yakın performans sonuçları elde edilmiştir.

Analitik yaklaşım kısmında değişen parametre değerleri için uygun analitik yaklaşım yöntemleri yardımıyla ilgili sistemlerin özel alt durumları için yaklaşık çözümler elde edilmektedir. Bu bağlamda asimptotik yöntemler, parçalanış yöntemleri ve pertürbasyon yöntemleri kullanılmıştır. Son olarak ilgili modellerin tek parametre ve iki parametre değişimine göre analizleri gerçekleştirilmiş ve değişik konfigürasyonlar için histeritik davranışlar analiz edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Süperiletkenlik, Ginzburg-Landau Modeli, Asimptotik Analiz, Histerisiz, Paralel Hesaplama, Sturm-Liouville, Josephson Eklemleri



## SUMMARY

### Ginzburg-Landau Model and Its Variants

In this study we consider homogeneous and inhomogeneous superconductors that can be modelled with the one-dimensional Ginzburg-Landau model and its variants, and study their behaviour under uniform applied field at temperatures below the transition temperature. Basically, we investigate the relevant models using numerical and approximate analytical methods, and observe that the results conform to physical observations.

In the numerical part, we compute parameter regions where there is a unique solution, two or three different solutions depending on the reduced temperature parameter. Furthermore, we determine the stability of solutions with respect to perturbations of initial functions. In this sense, the results we obtained generalizes those reported in Kwong (1995), Chapman (1992), Aftalion (1999).

Observing that equilibrium solutions requires extensive computational time, we parallelized our code and ran in a cluster of personal computers in a computer laboratory located in Faculty of Science and Letters at Karadeniz Technical University. Simulation results indicate nearly perfect performance results.

On the analytical part, appropriate approximate analytical solution are obtained for several subclass of the original system. We used asymptotic, perturbation and decomposition methods to obtain approximate solutions.

Finally, we analyze the relevant models with respect to the variation of one and two parameters and investigated hysteretic behaviour.

**Key Words:** Superconductivity, Ginzburg-Landau Model, Asymptotic Analysis, Hysteresis, Parallel Computation, Sturm-Liouville, Josephson Junction

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa No

Şekil 1.	Meissner Olayı.....	2
Şekil 2.	Süperiletken dikdörtgenler prizmasının geometrisi.....	8
Şekil 3.	$\kappa = 0.2, L = 1$ için $\alpha(\beta): \beta \rightarrow \alpha$ fonksiyonu.....	19
Şekil 4.	$\kappa = 0.4, L = 0.5$ için $h(\beta, 0)$ eğrisi.....	21
Şekil 5.	$\kappa = 0.3, L = 3$ için $h(\beta, 0)$ eğrisi.....	21
Şekil 6.	(a) $\kappa = 0.9, L = 3$ için $h(\beta, 0)$ eğrisi (b) Uygulan manyetik alan(yatay eksen) şiddetinin artan değerleri için $\psi_{max}$ eğrisi .....	21
Şekil 7.	$\tau = 0$ için $S1, S2, S3$ bölgeleri.....	23
Şekil 8.	(a) $\tau = 0.2$ (b) $\tau = 0.4$ (c) $\tau = 0.6$ (d) $\tau = 0.8$ (e) için çözüm sayılarını gösteren bölgeler(kesikli çizgiler $\tau = 0$ için çözüm bölgeleri) .....	24
Şekil 9.	Artan sıcaklık değerleri için iki çözümlü bölgeden( $S2$ ) tek çözümlü bölgeye( $S1$ ) geçiş ( $\kappa = 0.5, L = 2$ ) .....	25
Şekil 10.	Artan sıcaklık değerleri için üç çözümlü bölgeden( $S3$ ) tek çözümlü bölgeye( $S1$ ) geçiş ( $\kappa = 1.2, L = 2.5$ ) .....	26
Şekil 11.	Artan sıcaklık değerleri için iki çözümlü bölgeden( $S2$ ) iki çözümlü bölgeye( $S2$ ) geçiş ( $\kappa = 0.9, L = 3$ ) .....	26
Şekil 12.	$\tau = 0$ için çözüm bölgeleri ve bu bölgelerde alınan noktalar.....	27
Şekil 13.	$\kappa = 0.2, L = 1$ için dallanma eğrisi.....	28
Şekil 14.	$\kappa = 0.2, H = 0.44, L = 1$ için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan eğrileri .....	28
Şekil 15.	$\kappa = 0.2, H = 0.44, L = 1$ çözümün kararlılığı.....	28
Şekil 16.	$\kappa = 0.8, L = 1.1$ için dallanma eğrisi.....	29

Şekil 17.	$\kappa = 0.8, H = 0.9, L = 1.1$ için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan eğrileri .....	29
Şekil 18.	$\kappa = 0.8, H = 0.9, L = 1.1$ için çözümün kararlılığı .....	30
Şekil 19.	$\kappa = 1.2, L = 0.2$ için dallanma eğrisi .....	30
Şekil 20.	$\kappa = 1.2, H = 4, L = 0.2$ için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan eğrileri .....	30
Şekil 21.	$\kappa = 1.2, H = 4, L = 0.2$ için çözümün kararlılığı .....	31
Şekil 22.	$\kappa = 1.2, L = 2$ için dallanma eğrisi .....	31
Şekil 23.	$\kappa = 1.2, H = 4, L = 0.2$ için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan eğrileri .....	31
Şekil 24.	$\kappa = 1.2, H = 1, L = 2$ için çözümün kararlılığı .....	32
Şekil 25.	$\kappa = 0.2, L = 1.2$ için dallanma eğrisi .....	33
Şekil 26.	$\kappa = 0.2, H = 1.34, L = 1.2$ için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan grafikleri .....	33
Şekil 27.	$\kappa = 0.2, H = 1.34, L = 1.2$ için çözümlerin kararlılığı .....	33
Şekil 28.	$\kappa = 0.2, L = 3.6$ için dallanma eğrisi .....	34
Şekil 29.	$\kappa = 0.2, H = 1.34, L = 3.6$ için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan grafikleri .....	34
Şekil 30.	$\kappa = 0.2, H = 1.34, L = 3.6$ için çözümlerin kararlılığı .....	35
Şekil 31.	$\kappa = 0.8, L = 3$ için dallanma eğrisi .....	35
Şekil 32.	$\kappa = 0.8, H = 0.9, L = 3$ için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan eğrileri .....	35
Şekil 33.	$\kappa = 0.8, H = 0.9, L = 3$ için çözümlerin kararlılığı .....	36
Şekil 34.	$\kappa = 0.6, L = 4$ için dallanma eğrisi .....	36

Şekil 35.	$\kappa = 0.6, H = 0.82, L = 4$ için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan grafikleri.....	36
Şekil 36.	$\kappa = 0.6, H = 0.82, L = 4$ için çözümlerin kararlılığı.....	37
Şekil 37.	$\kappa = 0.9, L = 3$ için dallanma eğrisi.....	37
Şekil 38.	$\kappa = 0.9, H = 0.9, L = 3$ için çözümlerin kararlılığı (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan .....	38
Şekil 39.	$\kappa = 1, L = 4$ için dallanma eğrisi .....	38
Şekil 40.	$\kappa = 1, H = 0.8, L = 4$ için çözümlerin kararlılığı.....	39
Şekil 41.	$\kappa = 0.5, \beta = 0.8, \tau = 0, L = 1$ için sayısal ve asimptotik olarak elde edilen $\psi$ ve $A$ grafikleri .....	44
Şekil 42.	$\kappa = 0.5, \beta = 0.8, \tau = 0.2, L = 1$ için sayısal ve asimptotik olarak elde edilen $\psi$ ve $A$ grafikleri .....	44
Şekil 43.	$\kappa = 0.5, \beta = 0.8, \tau = 0.4, L = 1$ için sayısal ve asimptotik olarak elde edilen $\psi$ ve $A$ grafikleri .....	44
Şekil 44.	$\kappa = 4, h = 1, L = 1$ için $\tau = 0.6701$ özdeğerine karşılık gelen $\psi$ ve $A$ özfonksiyonları .....	47
Şekil 45.	$\kappa = 0.5, h = 0.4, L = 1$ için $\tau = 0.6941$ özdeğerine karşılık gelen $\psi$ ve $A$ özfonksiyonları .....	47
Şekil 46.	$k = 0.5, h = 0.5$ için SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar.....	52
Şekil 47.	$k = 0.5, h = 1$ için SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar.....	53
Şekil 48.	$k = 0.5, h = 4$ için SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar.....	53
Şekil 49.	$k = 4, h = 0.5$ için SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar.....	53
Şekil 50.	$k = 4, h = 2$ için SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar.....	54
Şekil 51.	$k = 4, h = 4$ için SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar.....	54
Şekil 52.	(a) $k = 0.4$ (b) $k = 0.8$ (c) $k = 1.2$ (d) $k = 1.6$ (e) $k = 2$ (f) $k = 2.4$ (g) $k = 2.8$ (h) $k = 3.2$ (i) $k = 3.6$ (j) $k = 4$ ve $h = 0.4: 0.4: 4$ olmak üzere sabit $k$ için $\phi_0(h_i)$ fonksiyonları (siyahtan maviye).....	55

Şekil 53.	(a) $h = 0.4$ (b) $h = 0.8$ (c) $h = 1.2$ (d) $h = 1.6$ (e) $h = 2$ (f) $h = 2.4$ (g) $h = 2.8$ (h) $h = 3.2$ (i) $h = 3.6$ (j) $h = 4$ ve $k = 0.4: 0.4: 4$ olmak üzere sabit $k$ için $\phi_0(k_i)$ fonksiyonları (siyahtan maviye).....	55
Şekil 54.	$k = 1, h = 1$ için asimptotik yöntem ve SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar .....	68
Şekil 55.	$k=4, h=1$ için asimptotik yöntem ve SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar .....	69
Şekil 56.	$k=4, h=1$ için Galerkin ve SLEIGN2 ile elde edilen öz fonksiyonlar .....	77
Şekil 57.	$k=4, h=4$ için Galerkin ve SLEIGN2 ile elde edilen öz fonksiyonlar .....	77
Şekil 58.	$k = 4, h = 4$ için artan $N$ değerleri için Galerkin ile elde edilen ilk özfonksiyonlar .....	78
Şekil 59.	$k = 4, h = 1$ için SLEIGN2 ve Picard ile elde edilen özfonksiyonlar.....	80
Şekil 60.	$k = 1, h = 4$ için SLEIGN2 ve Picard ile elde edilen özfonksiyonlar.....	80
Şekil 61.	$k = 4, h = 1$ için SLEIGN2 ve pertürbasyon probleminden elde edilen ilk özfonksiyonlar .....	83
Şekil 62.	$k = 2, h = 0.5$ için SLEIGN2 ve pertürbasyon probleminden elde edilen ilk özfonksiyonlar .....	84
Şekil 63.	$k = 4, h = 1$ için SLEIGN2 ve pertürbasyon probleminden elde edilen ikinci ve üçüncü özfonksiyonlar.....	86
Şekil 64.	$k = 2, h = 0.5$ için SLEIGN2 ve pertürbasyon probleminden elde edilen ikinci ve üçüncü özfonksiyonlar.....	86
Şekil 65.	$k = 4, h = 1$ için eğik atış yöntemi ile ilk özfonksiyon.....	87
Şekil 66.	$k = 0.6, h = 0.7$ için eğik atış yöntemi ile ilk özfonksiyon.....	88
Şekil 67.	Süperiletken silindirin geometrisi.....	88
Şekil 68.	$k = 4, h = 1$ için SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar.....	101
Şekil 69.	$k = 1, h = 4$ için SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar.....	102
Şekil 70.	Artan $h$ değerleri için ilk özfonksiyonların davranışı.....	103

Şekil 71.	Artan $k$ değerleri için ilk özfonksiyonların davranışı.....	104
Şekil 72.	$k = 4, h = 1$ için eğik atış ve SLEIGN2 ile elde edilen ilk özfonksiyon .....	105
Şekil 73.	$k = 1, h = 4$ için eğik atış ve SLEIGN2 ile elde edilen ilk özfonksiyon .....	106
Şekil 74.	$\kappa = 4, H = 1, \tau = 0, R = 3$ için artan zaman değişkenine göre denge çözüme(kırmızı) yaklaşım .....	107
Şekil 75.	$\kappa = 4, H = 1, \tau = 0, R = 3$ için artan zaman değişkenine göre toplam enerji .....	107
Şekil 76.	$\kappa = 4, H = 1, \tau = 0, R = 3$ için Enerji( $G$ ), Süperelektron yoğunluğu( $\psi$ ), Manyetik Alan( $\langle B \rangle$ ) ve Süperakımın( $j_s$ ) radyal simetrik yansımaları .....	108
Şekil 77.	$R = 3$ yarıçaplı numune için $\kappa, h, \tau = 4, 1, \tau, \tau = 0, 0.2, 0.5, 0.8, 1$ üçlülerine karşılık elde edilen sonuçlar .....	109
Şekil 78.	(a) Enerji, (b) Nüfuz eden ortalama manyetik alan, (c) Manyetizasyon ve (d) Maksimum süperelektron yoğunluğunun $\tau$ nun fonksiyonu olarak grafikleri(siyah: $\kappa = 0.5$ , mavi: $\kappa = 1$ , kırmızı: $\kappa = 1.5$ , yeşil: $\kappa = 2$ ).....	110
Şekil 79.	Yatay eksen $1 - \tau$ olmak üzere $\kappa = 0.6, h = 0.4, R = 3$ için fiziksel gözlemlenebilirler .....	111
Şekil 80.	$\kappa = 0.6, h = 0.4, R = 3$ için yerel davranışlarda gözlemlenen Meissner olayı .....	112
Şekil 81.	(a) manyetizasyon, (b) enerji, (c) nüfuz eden ortalama manyetik alan ve (d) maksimum süperelektron yoğunluğunun $h$ nin fonksiyonu olarak değişimleri(mavi: $\kappa = 0.5$ , siyah: $\kappa = 1$ , kırmızı: $\kappa = 1.5$ , yeşil: $\kappa = 2$ ).....	113
Şekil 82.	I. tip süperiletkende $Hc$ ve $\tau$ ilişkisi( $\kappa = 0.5, R = 3$ ) .....	114
Şekil 83.	II. tip süperiletkende $Hc$ ve $\tau$ ilişkisi( $\kappa = 4, R = 3$ ).....	114
Şekil 84.	$\kappa = 4, h = 1, \tau = 0, R = 3$ için homojen(siyah) ve SNSNS şeklinde inhomojen(kırmızı) numune için zaman değişkeninin fonksiyonu olarak yerel davranışlar.....	116
Şekil 85.	Eklem gemişliğinin( $dn$ ) yerel davranış üzerindeki etkisi( $\kappa = 4, h = 1, R = 3$ ) (a) Homojen (b) SNS ve $dn=3$ birim (c) SNS ve $dn=6$ birim (d) SNS ve $dn=9$ birim.....	117

Şekil 86.	Eklem sayısının yerel davranışlar üzerindeki etkisi ( $\kappa = 4, h = 1, R = 3$ ) (a) Homojen (b) SNS ve $dn=3$ birim (c) SNSNS ve $dn=3$ birim (d) SNSNSNS ve $dn=3$ birim .....	118
Şekil 87.	$\kappa = 0.2 (I), \kappa = 0.5(II), \kappa = 0.8(III), \kappa = 1(IV), \kappa = 1.2(V)$ ve $\tau = 0, R = 3$ değerleri için (a)Enerji (b) Maksimum süperelektron yoğunluğu (c) Ortalama manyetik alan ve (d) Manyetizasyon eğrilerinde oluşan histeritik davranışlar .....	120
Şekil 88.	$\kappa = 0.2, \tau = 0, R = 3$ değerleri için (a)Enerji (b) Maksimum süperelektron yoğunluğu (c) Ortalama manyetik alan ve (d) Manyetizasyon eğrilerinde uygulananan manyetik alan şiddetine bağlı oluşan histeritik davranışlar(yatay eksen: $H$ ).....	121
Şekil 89.	$\kappa = 0.6, 0.8, 1, 1.4, 2$ ve $h = 0.7, R = 3$ değerleri için (a)enerji (b) manyetizasyon (c) manyetik alan ve (d) maksimum süperelektron yoğunluğunda sıcaklığa bağlı histerisiz eğrileri(yatay eksen: $1 - \tau$ ).....	122
Şekil 90.	Normal iletken kalınlığının soldan sağa sırasıyla $dn = 3, 6, 9, 12$ birim olduğu SNSNS Josephson eklemleri için (a) Enerji (b) Maksimum süperlektron yoğunluğu (c) Nüfuz eden ortalama manyetik alan (d) Manyetizasyon histerisiz eğrileri(yatay eksen: $1 - \tau$ ) .....	123
Şekil 91.	(a) $R=1$ (b) $R=2$ (c) $R=3$ (d) $R=4$ (e) $R=5$ (f) $R=6$ (g) $R=7$ (h) $R=8$ Yatay eksen $\kappa$ , düşey eksen $H$ olmak üzere maksimum süperelektron yoğunluğu için histeritik alanlar .....	124
Şekil 92.	$\kappa = 0.6, R = 3$ için (a) FC için $\tau - H$ faz diyagramı (b) ZFC için $\tau - H$ faz diyagramı .....	125
Şekil 93.	$\kappa = 4, R = 3$ için (a) FC için $\tau - H$ faz diyagramı (b) ZFC için $\tau - H$ faz diyagramı .....	125
Şekil 94.	$\kappa = 0.6$ ve (a) $R=1$ (b) $R=2$ (c) $R=3$ (d) $R=4$ için FC transition bölgeleri.....	126
Şekil 95.	$\kappa = 0.6$ ve (a) $R=1$ (b) $R=2$ (c) $R=3$ (d) $R=4$ için ZFC transition bölgeleri ..	126
Şekil 96.	MPIEXEC arayüzü(erf(1) değeri $2 P_c$ üzerinde hesaplanıyor.) .....	131
Şekil 97.	2 PC kullanılarak elde edilen erf(1) değeri ve hatayı gösteren Ms-Dos ekran görüntüsü .....	132
Şekil 98.	erf1 için hızlanma(speedup) eğrileri .....	132
Şekil 99.	erf1 için verimlilik(efficiency) eğrileri .....	132

Şekil 100. MPIEXEC arayüzü(TDGL problemi n=6400 nokta için 16 PC üzerinde hesaplanıyor).....	135
Şekil 101. MPIEXEC arayüzleri(PC Sayısı=2,4,6,8 için) .....	136
Şekil 102. Jumpshot etiket(legend) arayüzü .....	136
Şekil 103. TDGL probleminin 8 PC üzerinde çözümü için Jumpshot ile elde edilen ve haberleşmeyi gösteren arayüz(N=1600) .....	136
Şekil 104. İşlemciler arası haberleşmeyi gösteren Jumpshot arayüzüne yakından bakış	137
Şekil 105. TDGL probleminin N=1600 noktada 8 PC üzerinde çözümü için istatistikler.....	138
Şekil 106. TDGL probleminin N=6400 noktada 4 PC üzerinde çözümü için istatistikler.....	138
Şekil 107. İşlemciler arası haberleşmeyi gösteren Jumpshot arayüzüne yakından bakış	138
Şekil 108. $\kappa = 0.5, L = 6$ için paralel runtime(paralel hesaplama süresi) speedup(hızlanma) ve efficiency(verimlilik) eğrileri .....	140
Şekil 109. 8 PC ile elde edilen denge çözümler.....	140



## TABLULAR DİZİNİ

### Sayfa No

Tablo 1.	$\kappa = 0.5, \tau = 0, L = 0.5$ için $\alpha = \alpha\beta$ değerleri.....	19
Tablo 2.	Artan sıcaklık değerleri için $S1, S2, S3$ bölgeleri için alanlar .....	25
Tablo 3.	$\kappa = 0.5, \beta = 0.8, l = 1$ ve farklı $\tau$ değerleri için sayısal ve asimptotik olarak elde edilen $\alpha$ ve $H = A'(1)$ değerleri.....	43
Tablo 4.	$k = 0.5, h = 0.5, 1, 2, 3, 4$ için SLEIGN2 ile elde edilen özdeğerler.....	52
Tablo 5.	$k = 4, h = 0.5, 1, 2, 3, 4$ için SLEIGN2 ile elde edilen özdeğerler.....	53
Tablo 6.	Sabit $k$ için $\lambda_0(h_i)$ dizileri ve sabit $h$ değeri için $\lambda_0(k_i)$ dizileri.....	55
Tablo 7.	$k=0.5, h=0.5, 1, 2, 3, 4$ için enerji seviyeleri .....	56
Tablo 8.	$k=4, h=0.5, 1, 2, 3, 4$ için enerji seviyeleri .....	56
Tablo 9.	$k = 1, h = 1$ için asimptotik yöntem ile elde edilen özdeğerler .....	68
Tablo 10.	$k = 4, h = 1$ için asimptotik yöntem ile elde edilen özdeğerler .....	69
Tablo 11.	Farklı $k, h$ değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen özdeğerler .....	76
Tablo 12.	$k$ ve $h$ nın büyük değerleri için Galerkin ile elde edilen özdeğerler .....	77
Tablo 13.	$k = 4, h = 0.5, 1, 2, 3, 4$ için özdeğerler .....	103
Tablo 14.	$k = 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, h = 2$ için özdeğerler .....	104
Tablo 15.	Farklı sayıda PC için TDGL probleminin denge çözüme ulaşma süreleri(dakika).....	139
Tablo 16.	17 TDGL problemi için hızlanma ve verimlilik değerleri .....	139

## SEMBOLLER DİZİNİ

GL	: Ginzburg-Landau
SGL	: Stasyoner Ginzburg-Landau
SGLBDP	: Başlangıç Değer Problemi Olarak Stasyoner Ginzburg-Landau
SGLC	: Silindirik Stasyoner Ginzburg Landau (Stasyoner Ginzburg Landau for Cylinder)
SNS	: Süperiletken-Normal-Süperiletken(Josephson Ekleme)
SNSNS	: Süperiletken-Normal-Süperiletken-Normal-Süperiletken(Josephson Ekleme)
TTDGL	: Sıcaklık ve Zaman Bağımlı Ginzburg-Landau (Temperature and Time Dependent Ginzburg Landau)
TTDGLC	: Silindir için Sıcaklık ve Zaman Bağımlı Ginzburg-Landau (Temperature and Time Dependent Ginzburg-Landau for Cylinder)
YSGL	: Yardımcı Stasyoner Ginzburg-Landau
$A$	: Vektör potansiyel
$H$	: Uygulanan manyetik alan
$j_s$	: Süperakım yoğunluğu
$L$	: Dikdörtgen prizma biçimindeki süperiletken tabakanın kalınlığı
$R$	: Silindir biçimindeki süperiletken tabakanın yarıçapı
$\kappa$	: Ginzburg-Landau parametresi
$\tau$	: Boyutsuz sıcaklık parametresi
$\psi$	: Düzen parametresi
$\lambda_L$	: London nüfuz derinliği
$\xi$	: Uyum uzunluğu

$T_c$  : Kritik sıcaklık

■ : İspat sonu

# 1. GENEL BİLGİLER

## 1.1. Giriş

### Süperiletkenler

- *kritik sıcaklık* adı verilen ( $T_c$ ), materyale özgü sıcaklık değerinin aşağısına kadar soğutulduğunda elektrik akımına karşı direncini tamamen kaybeden,
- kritik sıcaklığın aşağısında iken yeteri derecede küçük şiddetli manyetik alanın numuneye girmesini engelleyen,
- başlangıçta mevcut yeteri derecede küçük şiddetli manyetik alanın, numunenin soğutulmasıyla dışlandığı

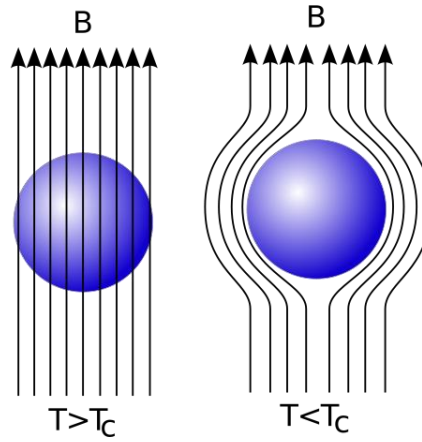
materyallerdir.

Süperiletkenlerin elektrik akımına karşı direncini kaybetmesi olayı *sıfır-direnç* özelliği olarak tanımlanır ve bu özellik deneysel olarak 1911 yılında Hollandalı fizikçi Heike Kammerlingh Onnes ve öğrencisi tarafından keşfedilmiştir. Onnes, Helyum gazını sıvılaştırmayı başardıktan sonra, yaklaşık sıfır Kelvin gibi çok düşük sıcaklıklardaki materyallerin özelliklerini incelerken, cıvanın 4.2 K' de elektrik akımına karşı olan direncini kaybettiğini gözlemlemiştir. Bu önemli buluşun ardından, başlangıçta sadece sıfır-direnç özelliği bilinen bu tür materyaller *süperiletken* olarak sınıflandırılmış ve konu ise düşük sıcaklık fiziğinin önemli bir araştırma alanı olarak *süperiletkenlik* adı altında incelenmeye başlanmıştır.

Onnes'in sıfır-direnç özelliğine göre bir süperiletken kritik sıcaklığın üzerinde iken elektrik akımına karşı Ohm yasası çerçevesinde direnç gösteren normal konumda (*normal faz*) bir materyal iken kritik sıcaklığın aşağısında süperiletken konuma (*süperiletken faz*) geçiş yapmaktadır. Bu durumda süperiletkenlik normal akım taşıyan elektronlardan (normal elektronlar) ziyade *süperelektron* adı verilen elektronların oluşmasıyla gelişen bir olay olarak yorumlandı.

1933 yılında iki Alman fizikçi Walter Meissner ve Robert Ochsenfeld süperiletkenlerin bilinen sıfır-direnç özelliğine ilaveten, ikinci bir önemli özellik olarak

mükemmel diyamagnetizma özelliğini keşfetmişlerdir. Buna göre kritik sıcaklığın aşağısında bulunan bir süperiletkene yeteri derecede düşük şiddetli dış manyetik alan nüfuz etmediği gibi, başlangıçta kritik sıcaklığın üzerinde ve küçük şiddetli bir manyetik alan etkisinde normal konumda olan bir süperiletken, kritik sıcaklığın aşağısına kadar soğutulduğunda mevcut manyetik alanın dışlandığı gözlemlenmiştir(Şekil 1). Bu gözlem süperiletkenlerin potansiyel ekonomik değerini daha da artırarak, konu üzerindeki ilgiyi daha da artırmıştır.



Şekil 1. Meissner Olayı

Bir taraftan süperiletkenliğin potansiyel ekonomik değerini realize etmeye yönelik yüksek kritik sıcaklığa sahip süperiletkenlerin varlığı ve oluşturulması yönündeki deneysel araştırmalar devam ederken, diğer taraftan da olayı izah edecek modeller geliştirilmeye çalışılmıştır. 1930'lu yıllarda Alman fizikçi kardeşler Fritz ve Heinz London, şimdilerde London modeli olarak bilinen model ile süperiletkenlik olayını izah etmeye yönelik başarılı adımlardan birisini atmışlardır.

1950 yılında London Modeli üzerinde çalışma yapan Sovyet fizikçiler Lev Landau(1908-1968, Nobel fizik ödülü 1962, süperakışkanlık) ve Vitaly Ginzburg(1916-2009, Nobel fizik ödülü(2003), süperiletkenlik ve süperakışkanlık ) Ginzburg-Landau(GL) modeli olarak bilinen matematiksel model ile süperiletkenlik olayını mezoskopik düzeyde incelemişlerdir.

1957 yılında Amerika Illinois üniversitesi(Urbana, Champaign) araştırmacıları John Bardeen, Leon Cooper ve John Schrieffer(Nobel fizik ödülü(1972), BCS teorisi) tarafından geliştirilen ve kısaca BCS modeli olarak bilinen mikroskobik model süperiletkenlik olayının anlaşılmasına önemli katkı sağlamıştır.

GL modeli üzerinde 1957 yılında A. Abrikosov ve 1959 yılında Gor'kov tarafından yapılan çalışmalar başlangıçta şüphe ile karşılanan modelin evrensel olarak kabul edilen mezokobik bir süperiletkenlik modeli olmasını sağlamıştır. Abrikosov, GL modeli üzerinde yaptığı çalışmada, o zamana kadar süperiletken veya normal olmak üzere iki halde olduğu bilinen süperiletkenlerin belirli bir kısmının ise karışık(mixed) hal adı verilen bir halde de bulunabileceğini tahmin etmiştir. Abrikosov'un tahmini yaklaşık on yıl sonra deneysel olarak keşfedilen süperiletkenler ile doğrulanmıştır. Böylece manyetik alan etkisi altında farklı karakteristik özellikler gösteren süperiletkenler, I. Tip ve II. Tip olarak sınıflandırılmışlardır. Gor'kov ise bazı kısıtlamalar altında GL modelinin BCS mikroskobik modelinden elde edilebileceğini ispatlamıştır. Bu iki önemli gelişme GL modelinin uluslar arası kabul gören düşük sıcaklık süperiletkenleri için mezokobik bir model olmasını sağlamıştır.

Abrikosov tarafından varlığı tahmin edilen ve bugün teknolojik açıdan çok daha önemli olan süperiletkenler II. Tip süperiletkenlerdir.  $H_c$  sıcaklığa bağımlı termodinamik kritik alan şiddeti ve  $H$  uygulanan manyetik alan şiddeti olmak üzere I. Tip süperiletkenler normal( $H > H_c$ ) ; süperiletken( $H < H_c$ ) veya normal ve süperiletken bölgelerin birlikte bulunduğu ara(intermediate) konumda bulunurlar. II. Tip süperiletkenler ise alt kritik alan şiddeti  $H_{c1}$  ve üst kritik alan şiddeti  $H_{c2}$  olmak üzere  $H < H_{c1}$  için süperiletken;  $H_{c1} < H < H_{c2}$  için karışık ve  $H > H_{c2}$  için normal halde bulunmaktadır. Karışık hal sonlu sayıda girdapların mevcut olduğu durumdur. Girdaplar, akışkanlar mekaniğindeki terminolojiyle uyumlu olarak, süperelektronların manyetik alanın tamamen nüfuz ettiği normal bir bölge etrafında dairesel hareket ettikleri elektromanyetik oluşumlardır.

Girdap merkezinde bulunan normal bölgenin yarıçapı uyum uzunluğu( $\xi$ ) kadardır. Diğer önemli parametre ise London nüfuz derinliği ( $\lambda_L$ ) dir.  $\lambda_L$  manyetik alan değişiminin bir ölçüsü iken  $\xi$ , süperlektron yoğunluğunun değişimini karakterize eden bir uzunluk skalasıdır ve her ikisi de süperiletkene özgü parametrelerdir.

$\lambda_L \ll \xi$  (*çok küçük*) ise süperiletken birinci tip (Tip I) süperiletken olarak adlandırılır. Bu tip süperiletkenler süperiletken ve normal bölge ara yüzündeki serbest enerjinin pozitif olduğu süperiletkenlerdir.  $\lambda_L \gg \xi$  ise süperiletken ikinci tip (Tip II) süperiletken olarak adlandırılır. Bu tip süperiletkenler ise serbest enerjinin negatif olduğu süperiletkenlerdir. Abrikosov, GL parametresi olarak bilinen  $\kappa = \lambda_L/\xi$  yardımıyla  $\kappa < 1/\sqrt{2}$  değerlerine karşılık gelen süperiletkenlerin birinci tip,  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  değerlerine karşılık gelen süperiletkenlerin ikinci tip olduğunu göstermiştir.

Diğer bir sınıf model ise kritik hal modeli adı verilen makroskobik modellerdir. Bean modeli, Kim-Anderson modeli sıkça kullanılan modellerdir. Bu modeller makroskobik ölçekte uygulanan manyetik alan ve süperakım arasındaki ilişkiyi sıcaklığa bağlı olarak verirler, bu nedenle makroskobik model olarak adlandırılırlar.

## 1.2. Literatür ve Çalışmanın Özeti

Bu çalışmada tek boyutlu sıcaklık bağımlı GL modelinin sayısal ve analitik yaklaşımları incelenmiş ve elde edilen sonuçların deneysel gözlemlerle uyumluluğu incelenmiştir. Bu bölümde, öncelikle tek boyutlu GL modeli için özellikle son yıllarda yapılan çalışmalar sunulmuş, daha sonra ise çalışmanın bir özeti verilmiştir.

Süperiletkenlerin temel özellikleri ve mevcut matematiksel modeller Kaper (1991), Du vd. (1992), Chapman vd. (1992)'de kısa ve öz matematiksel yaklaşım ile incelenmiştir.

Meissner(1965), yüzeye paralel manyetik alan etkisi altında ince film süperiletkeni inceleyerek,  $L$  film kalınlığı ve  $\lambda$  nüfuz derinliği olmak üzere film kritik alanını,  $\kappa$  GL parametresi ve  $L/\lambda$  nın fonksiyonu olarak hesaplamıştır.

Tholfsen ve Meissner (1967) tek bir akı kuantuma sahip izole manyetik akı tüpü için GL denklemlerini çözerek, akı tüpünün merkezindeki manyetik alan şiddeti ve maksimum akı yoğunluğu için yaklaşımlar vermişlerdir.

Brandt (1997) ve Brandt (1999)'da eksen yönünde uygulanan manyetik alan etkisinde süperiletken disk ve silindir için GL modeli ve makroskobik modeller yardımıyla homojen ve homojen olmayan süperiletkenlerin fiziksel karakteristiklerini incelemiştir.

Schmid (1966), zaman-bağımlı Ginzburg-Landau modelini geliştirerek süperiletkenlerin elektromanyetik özelliklerinin incelenmesini sağlamıştır.

Kwong(1995), tek boyutlu GL sistemi için simetrik problemin dallanma eğrilerini ve bu eğrilere bağlı olarak çözümlerin sayısı ile ilgili olarak teorik ve sayısal bazı özellikleri incelemiştir. Aftalion ve Troy (1999), çözümlerin sayısı ilgili analizleri geliştirmiş ve GL parametresi  $\kappa$  ve süperiletken materyal kalınlığı  $L$  parametrelerine bağlı olarak çözüm bölgeleri ve simetri özellikleri incelemiştir.

Aftalion (1997), tek boyutlu GL modelini  $\kappa$ 'nın büyük değerleri için inceleyerek çözümlerin varlığını ve GL fonksiyoneli minimize eden çözümlerin  $\kappa \rightarrow \infty$  için yakınsaklığını araştırmıştır.

Asimptotik açılım yardımıyla, normal çözümden çatallanan süperiletken çözüm varlığı ve bu çözümlerin  $\kappa$  GL parametresi ve  $L$  süperiletken materyal kalınlığına bağlı davranışları Aftalion ve Chapman (2000) tarafından çalışılmıştır.

Zharkov (2001),  $R$  yarıçaplı uzun silindirik bir süperiletken numune için GL sistemini  $R$ ,  $\kappa$ ,  $H$  ve sistemin toplam girdap sayısı  $m$  parametresine bağlı olarak analiz etmiş, faz geçişi ve histerisiz olayının söz konusu parametrelere bağımlılığını incelemiştir. Ayrıca Zharkov (2002),  $2L$  kalınlıklı süperiletken film için GL sistemini  $L, \kappa$  ve  $H$  parametrelerine bağlı olarak analiz etmiştir.

II. tip süperiletkenlerde girdap çivileme olayını modelleyen Bean ve Kim modeli başarılı sonuçlar vermiştir. Ayrıca manyetik zorlanım(magnetstriction) Bean ve Kim modeli kapsamında incelenmiştir(Johansen vd. 1998). Üstel model ise yüksek kritik sıcaklık süperiletkenlerinin özelliklerini incelemek için çalışılmaktadır(Karasik, Vasiliev 1970).

Süperiletkenler için Virial teoremi Doria (1989)'da elde edilmiş ve daha sonra Klein ve Pöttinger (1991)'de de analiz edilmiştir. Dolayısıyla Virial teoremi fiziksel anlamlı çözümü elde etme noktasında katkı sağlamaktadır.



Coskun (1994) tez çalışmasında ikinci tip süperiletkenler için iki boyutlu GL ve TDGL modellerini incelemiştir. Tezde teorik olarak çözümlerin özellikleri, kullanılan sayısal yöntemlerin kararlılığı ve yakınsaklığı incelenmiş, sayısal olarak ise çeşitli model ve algoritmalar geliştirilerek sayısal algoritmalar BLOCKCOMM ve CHAMELEON rutinleriyle paralelleştirilerek, paralel bilgisayarlarda çözülmüştür.

Buraya kadar bahsedilen bütün çalışmalar GL sistemlerini boyutsuzlaştırmak için standart boyutsuzlaştırma kümesini kullandıkları için asıl modelde var olan sıcaklık parametresi sistemde kaybolmaktadır. Dolayısıyla süperiletkenlerin elektromanyetik özellikleri üzerinde en önemli etken olan sıcaklık değişimine göre analiz yapmak mümkün olmamaktadır. Coskun vd.(2003) farklı bir boyutsuzlaştırma kümesi kullanarak asıl modelde var olan sıcaklık parametresini koruyan boyutsuz sıcaklık ve zaman bağımlı GL sistemini(TTDGL – Temperature and Time Dependent GL) elde etmiştir. Bu çalışmada TTDGL sisteminin sıcaklık bağımlı özellikleri, girdap dinamiği ve Meissner etkisi irdelenmiştir.

Çakır (2006) tez çalışmasında kartezyen koordinat sisteminde  $y - z$  düzlemine paralel olarak ve  $x -$  ekseninde  $-L \leq x \leq L$  bölgesine yerleştirilen ince film süperiletkenin pozitif  $z -$  ekseninde film yüzeyine paralel olarak uygulanan manyetik alan etkisi altındaki termal ve elektromanyetik özelliklerini GL modelleri yardımıyla analiz etmiştir.

Biz ise bu çalışmada öncelikle Kwong (1995), Aftalion ve Troy(1999) tarafından incelenen sıcaklık parametresini barındırmayan bir boyutlu GL sisteminin simetrik çözümlerinin sayısı için yaptığı analizleri sıcaklık parametresinin korunduğu GL sistemi için genişleterek, çözümlerin sayısının sıcaklık parametresi  $\tau$ 'ya göre değişimleri, çözüm bölgelerinin sıcaklığa bağlı değişimi ve çözümlerin başlangıç değerlerinin pertürbasyonuna göre kararlılığını inceliyoruz.

Daha sonra bir boyutlu GL sisteminin özdeğer ve özfonksiyonlarını, normal hale yakın komşuluktaki çözümlerin davranışlarını farklı yöntemlerle inceliyoruz.

Ayrıca, Çakır (2006)'ın tez çalışmasında dikdörtgen prizma biçimindeki süperiletkenler için yaptığı analizleri, silindir biçimindeki süperiletkenler için genişletiyoruz.

Çalışmada Kesim 2.1, Kesim 2.2 ve alt bölümlerinde bir boyutlu stasyoner GL(SGL) problemi için simetrik çözümlerin sayısı, çözümlerin sayısının sıcaklık parametresi  $\tau$ 'ya göre değişimleri, çözüm bölgelerinin sıcaklığa bağlı değişimi ve çözümlerin başlangıç değerlerinin pertürbasyonuna göre kararlılığını inceliyoruz.

Kesim 2.3'te normal hale yakın komşulukta bir regüler Sturm-Liouville problemine dönüşen GL problemini irdeliyoruz. Bu bölümün alt bölümlerinde regüler Sturm-Liouville teorisinden bilinen bazı önemli sonuçları, GL problemi için bu sonuçların doğruluğunu gösterdikten sonra, GL probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını sayısal ve yaklaşık analitik çözümler olarak elde ediyoruz. Ayrıca  $\kappa$  Ginzburg-Landau parametresinin büyük değerleri için pertürbasyon problemi olarak GL problemini ele alıyoruz.

Kesim 2.4'te süperiletken silindir için tek boyutlu GL modellerini ve bunlarla ilgili teorik sonuçları ifade ediyoruz.

Kesim 2.5'te süperiletken silindir için normal hale yakın komşuluktaki çözümleri Kesim 2.3'ün paralelinde inceliyoruz.

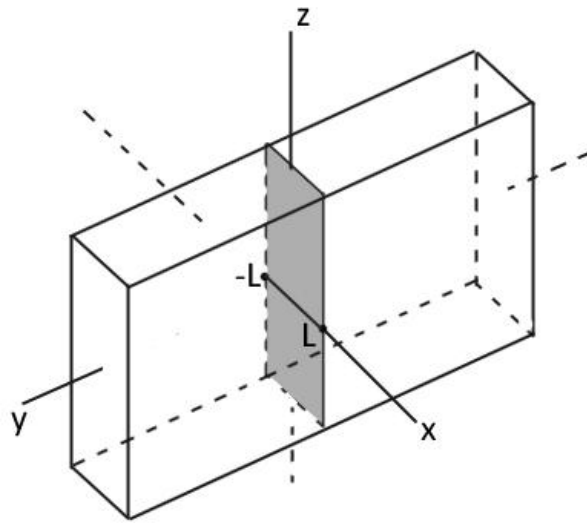
Kesim 2.6'da ise süperiletken silindir için sıcaklık ve zaman bağımlı GL probleminin zamana ve sıcaklığa bağlı değişimini inceliyoruz. Bu kapsamda histeritik davranışları, uygulanan manyetik alan şiddetinin ve sıcaklığın histeritik davranışa etkilerini, Josephson eklemlerini ve Josephson eklemlerinin histeritik davranışa etkilerini araştırıyoruz. Ayrıca farklı yarıçapa sahip süperiletkenler için histeritik bölgeleri ve faz geçiş bölgelerini iki parametre değişimine göre analiz ediyoruz.

Kesim 2.7'de ise analizi aşırı bilgisayar sistem kaynağı gerektiren ve yarı-sonsuz bölgede Meissner (1967)'de da incelenen problem, paralelleştirmek suretiyle Fakültemiz Bilgisayar laboratuvarında bulunan 20 adet bilgisayar üzerinde MPI sistemini kullanan ve Argonne National Laboratory'de geliştirilen MPICH2 ara yüzü kullanılmak suretiyle paralelleştirilen ilgili problemin simülasyon sonuçları kısa zaman diliminde elde edilmiştir.

## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

### 2.1. Film Tabaka İçin GL Modelleri

Bu bölümde dikdörtgen prizma biçiminde ince bir süperiletken film(tabaka) göz önüne alıyoruz. Şekil 2’de gösterildiği gibi süperiletkenin  $y$  ve  $z$  yönündeki boyutunun  $x$  yönündeki boyutuna oranla oldukça büyük olduğunu kabul ediyoruz.



Şekil 2. Süperiletken dikdörtgenler prizmasının geometrisi

Ayrıca süperiletkenin pozitif  $z$ -yönünde film yüzeyine paralel olarak  $\mathbf{H} = (0,0,H)$  manyetik alanı etkisinde olduğunu kabul ediyoruz.

Coskun(2003)’da kullanılan boyutsuz parametreler yardımıyla yukarıda belirtilen numune ve yüzeye paralel manyetik alan etkisi altında Gibbs enerji fonksiyoneli

$$G_{\tau}(\psi, A) = \int_{-L}^L \left[ \left( A^2 + \frac{1}{2} \psi^2 + \tau^2 - 1 \right) \psi^2 + \left( \frac{\psi'}{\kappa} \right)^2 + (A')^2 - 2A'H \right] dx \quad (1)$$

olarak elde edilebilir. Burada  $\psi$  söz konusu konfigürasyon için reel değerli olarak kabul edilebilen ve karesi süperelektron yoğunluğunu veren ve daha çok London modelinde düzen parametresi olarak bilinen tek değişkenli bir fonksiyon,  $\mathbf{A} = (0, A, 0)$  vektör potansiyel,  $\kappa = \frac{\kappa_0}{1+\tau^2}$  GL parametresi,  $T$  numunenin bulunduğu ortam sıcaklığı,  $T_c$

numuneye özgül kritik sıcaklık olmak üzere  $\tau = \frac{T}{T_c}$ ,  $[0,1]$  aralığında değer alan boyutsuz sıcaklık parametresi ve  $2L$  ise film kalınlığıdır. Enerji fonksiyoneline ait Euler-Lagrange denklemleri  $\frac{\delta G}{\delta A} = 0, \frac{\delta G}{\delta \psi} = 0$  veya açık olarak

$$\begin{aligned}\psi'' &= \kappa^2(A^2 + \psi^2 + \tau^2 - 1)\psi, & -L < x < L \\ A'' &= A\psi^2 \\ \psi'(-L) &= \psi'(L) = 0, A'(-L) = A'(L) = H\end{aligned}\quad (2)$$

ifade edilir. Bu çalışmada (2) sistemi kısaca SGL(Stasyoner GL) olarak adlandırılacaktır. Ayrıca (1) enerji fonksiyonelinesini minimize eden sıcaklık ve zaman bağımlı GL modeli ise Kaper(1991)'i takip ederek

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \psi'' + \kappa^2(1 - A^2 - \psi^2 - \tau^2)\psi, & -L < x < L \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= A'' - A\psi^2 \\ \psi'(-L) &= \psi'(L) = 0, A'(-L) = A'(L) = H \text{ (sınır şartları)} \\ \psi(x, 0) &= \psi_0(x); A(x, 0) = A_0(x) \text{ (başlangıç şartları)}\end{aligned}\quad (3)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu sistem ise kısaca TTDGL(sıcaklık ve zaman bağımlı GL modeli) olarak adlandırılacaktır.

Sırasıyla (1) ve (3) ile verilen SGL ve TTDGL modellerinin literatürde çalışılan klasik modellerden farkı boyutsuz sıcaklık parametresini içermeleridir. Süperiletken film ile ilgili GL modellerinin sayısal analizi ve çözümlerin bazı teorik özellikleri değişen  $\kappa, H, \tau$  ve  $L$  parametre değerleri için Çakır(2006)'da incelenmiştir.

Bu çalışmada Çakır(2006)'da incelenmeyen SGL sistemin pozitif çözümlerinin sayısı ve kararlılığı detaylı olarak incelenmekte ve ayrıca özel ve fiziksel anlamlı bazı durumlarda çözümler asimptotik yaklaşım yöntemleri yardımıyla elde edilmektedir. Ayrıca en güncel bilgisayarlarda bile simülasyonu çok uzun zaman gerektiren problemler için paralel hesaplama yöntemleri kullanılmak suretiyle SGL ve TTDGL sistemi paralelleştirilerek KTÜ Fen Edebiyat Fakültesi, "Lab1" isimli bilgisayar laboratuvarı paralel hesaplama ortamına dönüştürülmek suretiyle başarılı paralel çözümler elde edilmiştir. Ayrıca homojen ve inhomojen silindirik numuneler için TTDGL modeli düzenlenerek

sıcaklık bağımlı histeritik davranışlar, Josephson eklemleri ve eklemlerin histerisiz üzerindeki etkileri incelenmiştir.

## 2.2. Yardımcı Stasyoner GL Modeli ve Eğik Atış Yöntemi

Verilen  $\kappa, H, L, \tau$  için SGL sistemini göz önüne alalım. SGL sisteminin simetrik ve asimetrik(simetrik olmayan) olarak adlandırılan iki çeşit çözümler sınıfı mevcuttur. Simetrik çözüm,  $A$ 'nın tek ve  $\psi$ 'nin çift olduğu ve SGL sistemini ilgili sınır şartları ile birlikte sağlayan çözümdür. Simetrik olmayan çözüm ise  $\psi'(0) \neq 0$  şartını sağlayan çözümdür. Ayrıca sistemin pozitif ve negatif olmayan çözümleri mevcuttur. Bu çalışmada  $\forall x \in (-L, L)$  için  $\psi \geq 0$  eşitsizliğini sağlayan simetrik çözümler, bu simetrik çözümlerin sayısı ve kararlılığı  $\tau$  sıcaklık parametresine bağlı olarak incelenmektedir.

Bir sınır değer problemi olarak SGL sisteminin aşikâr çözümleri, normal çözüm olarak adlandırılan

$$\psi(x) = 0, A(x) = Hx + c, c \text{ sabit}, \forall x \in (-L, L)$$

çözümü ile süperiletken çözüm olarak adlandırılan

$$\psi(x) = \sqrt{1 - \tau^2}, A(x) = 0, \forall x \in (-L, L)$$

çözümüdür. Ancak, ilginç olan problem, SGL sisteminin verilen parametre değerleri için aşikâr olmayan çözümlerinin sayısını ve fiziksel anlam ifade eden çözümün belirlenmesi ve kararlılığının araştırılmasıdır.

$\tau = 0$  durumu için Kwong(1995), SGL sisteminin simetrik çözümlerinin sayısını incelemiş olup, pozitif simetrik çözümlerin birden fazla olduğunu dallanma analizi yardımıyla göstermiştir. Aftalion ve Troy(1999) ise Ginzburg Landau parametresi  $\kappa$  ve süperiletken film kalınlığı  $L$  parametreleri için  $\kappa - L$  düzleminde çözümlerinin sayısını gösteren bölgeleri elde ederek ve bu çözümlerin uygulanan manyetik alan şiddetine göre kararlılığını incelemiştir.

$(-L, L)$  aralığında incelenen SGL problemi yerine, simetrik çözümlerle ilgilendiğimiz için  $(0, L)$  aralığında  $(\psi, A)$  bileşenlerini elde ederek,  $(-L, L)$  aralığında

simetrik çözümleri genişletebiliriz. Simetrik çözüm yukarıda belirtildiği üzere,  $\psi$ 'nin çift yani,

$$\psi(-x) = \psi(x), \quad x \in (0, L)$$

$A$ 'nın ise tek, yani

$$A(-x) = -A(x), \quad x \in (0, L)$$

olduğu çözüm olarak tanımlanmaktadır. Bu durumda doğal olarak  $A(0) = 0$  olmalıdır. O halde simetrik çözüm

$$\begin{aligned} \psi'' &= \kappa^2(A^2 + \psi^2 + \tau^2 - 1)\psi \\ A'' &= A\psi^2 \\ A(0) = \psi'(0) = \psi'(L) = 0, H &= A'(L) \end{aligned} \tag{4}$$

sistemini sağlayan çözümdür. (4) sistemini yardımcı stasyoner Ginzburg-Landau(YSGL) sistemi olarak adlandıralım.

YSGL sistemi SGL sisteminden önemli bir yönüyle farklıdır: SGL sisteminin çözümü verilen  $L, \kappa, \tau$  ve  $H$  için (2) sistemini ilgili sınır şartları ile sağlayan çözümdür. Bu durumda sistemin aşikâr çözümü dışında hiçbir çözümü olmayabilir. Oysa YSGL sisteminde ise verilen  $L, \kappa, \tau$  için (4) sistemi çözülmekte ve  $H$  uygulanan manyetik alan şiddeti  $A'(L)$  olarak kabul edilmektedir.

Verilen  $\kappa, L$  ve  $\tau$  parametreleri için YSGL sınır değer problemi eğik atış yöntemiyle çözülebilir. Bunun için  $\beta \in (0, \sqrt{1 - \tau^2})$ ,  $\alpha > 0$  olmak üzere

$$\psi'(0) = \psi'(L) = 0, A(0) = 0, H = A'(L) \tag{5}$$

sınır şartları yerine

$$\psi(0) = \beta, \psi'(0) = 0, A(0) = 0, A'(0) = \alpha \tag{6}$$

başlangıç şartlarını yazalım. Ayrıca (4) sistemini

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= \psi_2 \\
\psi_2' &= \kappa^2(A_1^2 + \psi_1^2 + \tau^2 - 1)\psi_1 \\
A_1' &= A_2 \\
A_2' &= A_1\psi_1^2 \\
\psi_1(0) &= \beta, \psi_2(0) = 0, A_1(0) = 0, A_2(0) = \alpha
\end{aligned}$$

şeklinde birinci mertebeden diferensiyel denklem sistemi olarak yazalım. Bu sistemi birinci mertebeden YSGL sistemi(BYSGL) olarak adlandıralım. YSGL sistemi için aşağıdaki teorem Kwong(1995) tarafından ifade ve ispat edilmiştir.

**Teorem 1** Verilen  $\beta > 0$  için  $(\psi(\alpha, \beta), A(\alpha, \beta))$  ikilisi YSGL sistemini sağlayacak biçimde tek bir  $\alpha = \alpha(\beta)$  mevcuttur.

### 2.2.1. Dallanma Eğrisinin Elde Ediliş Yöntemi

Verilen  $\kappa, L, \tau$  parametrelerine ait dallanma eğrisini elde etmek için  $\alpha$  parametresini eğik atış parametresi olarak kullanıyoruz. Diğer bir deyimle verilen her bir  $\beta$  için tahmini bir  $\alpha$  ile başlayarak  $\psi$  fonksiyonu  $\psi'(L) = 0$  şartını sağlayana kadar  $\alpha$  değerlerini değiştiriyoruz. Bulunan bu  $\alpha$  değerine karşılık elde ettiğimiz  $A$  fonksiyonu için  $A'(L)$ 'yi süperiletken filme dışarıdan uygulanan  $H$  manyetik alanı olarak kabul ediyoruz. Böylece verilen  $\beta$  değerlerine karşılık elde ettiğimiz  $H$  değerleri için  $\beta(H)$  dallanma eğrisini elde ediyoruz.

BYSGL sisteminin çözümlerini  $\psi(x; \beta, \alpha)$  ve  $A(x; \beta, \alpha)$  ile gösterelim. (5) sınır koşulları altında YSGL sisteminin çözümlerinin pozitif ve sonlu olduğunu biliyoruz. Ancak, (6) başlangıç koşulları altında  $\psi(x; \beta, \alpha)$  çözümlerinin pozitif ya da sonlu olduklarını artık garanti edemiyoruz. (Kwong, 1995,  $\tau = 0$ )

### 2.2.2. SGL Sisteminin Özellikleri

Bu bölümde ilk olarak SGL ve TTDGL sistemlerini çözmek için kullandığımız sayısal yöntemlerin doğruluğunu kontrol etmek için Virial teoremini ifade ederek bu teorem yardımıyla tek boyutlu model için elde ettiğimiz bazı teorik sonuçları ifade ediyoruz. İkinci olarak simetrik çözümlerin varlığı ve sayısı ile ilgili teorik sonuçları

veriyoruz. Ayrıca Sturm-Karşılaştırma teoremi yardımıyla çözümlerin sıcaklık bağımlı özelliklerini inceliyoruz.

Bu amaçla öncelikle süperiletkenler için Virial teoremini ifade edelim.

**Teorem 2 (Virial Teoremi)(Klein,1991)**

Denge konumunda kinetik enerji  $F_k = \frac{1}{L} \int_0^L \left( \left( \frac{\psi'}{\kappa} \right)^2 + A^2 \psi^2 \right) dx$ ,  $(0,0,H)$  uygulanan dış manyetik alan etkisi altında manyetik alan enerjisi  $F_h = \frac{1}{L} \int_0^L (A')^2 dx$  ve ortalama nüfuz eden manyetik alan  $\langle B \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L A' dx = \frac{1}{L} (A(L) - A(0))$  olmak üzere

$$H \langle B \rangle = \frac{1}{2} [F_k + 2F_h]$$

bağıntısı sağlanır.

Öncelikle süperiletken ve normal konumda bu bağıntının geçerli olduğu açıktır. Süperiletken konumda  $\psi = \sqrt{1 - \tau^2}$ ,  $A = 0$  olup  $B = \text{curl } A$  özdeş olarak sıfırdır ve bağıntı sağlanır. Normal konumda ise  $\psi = 0$ ,  $A = Hx + c$  olup bağıntının sağlandığı yine görülür.

İlk olarak Virial teoremi yardımıyla tek boyutlu model için elde ettiğimiz sonuçları ifade edelim.

**Önerme 1**  $G_{min}$  enerji fonksiyonelinin minimum değeri olmak üzere

$$G_{min} = \int_0^L \left[ -\frac{1}{2} \psi^4 + (A')^2 - 2A'H \right] dx$$

olarak elde edilir.

**İspat** (4) ile verilen YSGL sistemindeki

$$\frac{\psi''}{\kappa^2} = (A^2 + \psi^2 + \tau^2 - 1)\psi$$

denklemini  $\psi$  ile çarpılıp integrali alınmak suretiyle



$$\int_0^L \frac{\psi'' \psi}{k^2} dx = \int_0^L (A^2 + \psi^2 + \tau^2 - 1) \psi^2 dx$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafındaki integral için kısmi integrasyon sınır değerleri yardımıyla uygulanırsa

$$\frac{\psi' \psi}{\kappa^2} \Big|_0^L - \int_0^L \left( \frac{\psi'}{\kappa} \right)^2 dx = \int_0^L (A^2 + \psi^2 + \tau^2 - 1) \psi^2 dx$$

$$\int_0^L \left[ \left( \frac{\psi'}{\kappa} \right)^2 + A^2 \psi^2 \right] dx = \int_0^L [(1 - \tau^2) \psi^2 - \psi^4] dx \quad (7)$$

elde edilir. GL minimizer (7) denklemini sağlar. (7) eşitliği  $G(\psi, A)$  enerji fonksiyonelinde yerine yazılırsa, minimum enerjinin

$$\begin{aligned} G_{min} &= \int_0^L \left[ (\tau^2 - 1) \psi^2 + \frac{1}{2} \psi^4 + (1 - \tau^2) \psi^2 - \psi^4 + (A')^2 - 2A'H \right] dx \\ &= \int_0^L \left[ -\frac{1}{2} \psi^4 + (A')^2 - 2A'H \right] dx \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. ■

**Önerme 2** Verilen  $\tau$  için  $(\psi, A)$  SGL sisteminin çözümü olmak üzere

$$\frac{1}{L} \int_0^L [(A')^2 - 2A'H] dx \leq 0$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat** Virial teoreminden

$$\frac{H}{L} \int_0^L A' dx = \frac{1}{2L} \int_0^L \left[ \left( \frac{\psi'}{k} \right)^2 + A^2 \psi^2 + 2(A')^2 \right] dx$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_0^L [(A')^2 - 2A'H] dx &= \frac{1}{L} \left[ \int_0^L (A')^2 dx - \int_0^L \left[ \left( \frac{\psi'}{k} \right)^2 + A^2 \psi^2 + 2(A')^2 \right] dx \right] \\ &= -\frac{1}{L} \int_0^L \left[ \left( \frac{\psi'}{k} \right)^2 + A^2 \psi^2 + (A')^2 \right] dx \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. ■

**Sonuç 1**  $g_{sh}$  uygulanan alan etkisi toplam enerji,  $g_{n0}$  ise uygulanan alanın olmadığı normal durumdaki enerji olmak üzere denge konumunda

$$G_{min} = g_{sh} - g_{n0} < 0$$

dır.

**Sonuç 2** Virial teoreminden

$$\begin{aligned} \int_0^L [(A')^2 - 2A'H] dx &= - \int_0^L \left[ \left( \frac{\psi'}{k} \right)^2 + A^2 \psi^2 + (A')^2 \right] dx \\ \Rightarrow \int_0^L (A' - H)^2 dx &= H^2 L - \int_0^L \left[ \left( \frac{\psi'}{k} \right)^2 + A^2 \psi^2 + (A')^2 \right] dx \geq 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\int_0^L \left[ \left( \frac{\psi'}{k} \right)^2 + A^2 \psi^2 + (A')^2 \right] dx \leq H^2 L$$

dir.

**Sonuç 3** Sonuç 2'den

$$\int_0^L \left[ \left( \frac{\psi'}{k} \right)^2 + A^2 \psi^2 + (A')^2 \right] dx \leq H^2 L$$

olduğundan

$$0 \leq \int_0^L \left(\frac{\psi'}{k}\right)^2 dx \leq \int_0^L \left[ \left(\frac{\psi'}{k}\right)^2 + (A')^2 \right] dx \leq H^2 L - \int_0^L A^2 \psi^2 dx \leq H^2 L$$

olup

$$0 \leq \int_0^L (A')^2 dx \leq H^2 L \Rightarrow \|A'\|_2 \leq H\sqrt{L}$$

elde edilir.

**Sonuç 4** (4) ile verilen YSGL sistemindeki

$$A'' = A\psi^2$$

denkleminin integrali alınmak suretiyle

$$\int_0^x A'' dx = \int_0^x A\psi^2 dx$$

$$A'(x) = A(0) + \int_0^x A\psi^2 dx$$

elde edilir. YSGL için  $A, \psi \geq 0$  olduğunu ve Önerme 4'den  $A(0) \geq 0$  olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla  $A'(x) \geq 0$  elde edilir.

Buraya kadar Virial teoremi yardımıyla elde edilen teorik sonuçları verdik. Aşağıda simetrik çözümlerin varlığı ve sayısı için Kwong(1995), Aftalion ve Troy(1999) tarafından incelenen sıcaklık parametresini içermeyen SGL sistemi için elde edilen sonuçları sıcaklık parametresinin korunduğu sıcaklık bağımlı SGL sistem için genişletelim.

### **Teorem 3 (Sturm Karşılaştırma Teoremi)**

$y(x)$  ve  $Y(x)$  fonksiyonları sırasıyla

$$y'' = q(x)y, \quad Y'' = Q(x)Y, \quad x \in (c, d)$$

ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümleri ve

$$q(x) \leq Q(x), q(x) \neq Q(x), \frac{y'(c)}{y(c)} \leq \frac{Y'(c)}{Y(c)}$$

olsun. Bu takdirde

$$\frac{y'(d)}{y(d)} \leq \frac{Y'(d)}{Y(d)}$$

dir. Sonuç olarak  $(c, d)$  aralığında  $y, Y$  den daha hızlı salınım yapar(dolayısıyla aşağıya doğru daha hızlı eğilir). Üstelik eğer

$$y(c) \leq Y(c)$$

ise

$$y(d) < Y(d) \text{ ve } y'(d) < Y'(d)$$

dir.

**Önerme 3** Sabit  $x$  ve  $\tau$  için YSGL probleminde elde edilen  $\psi_\tau(x; \alpha, \beta), \psi'_\tau(x; \alpha, \beta), A_\tau(x; \alpha, \beta)$  ve  $A'_\tau(x; \alpha, \beta)$  değerler pozitif ve sonlu olduğu sürece  $\alpha$  ve  $\beta$ 'ya göre kesin artandır.

**İspat**  $\alpha < \bar{\alpha}, \beta < \bar{\beta}$  olduğunu kabul edelim. Kolaylık açısından  $\psi_\tau = \psi_\tau(x; \alpha, \beta), \bar{\psi}_\tau = \psi_\tau(x; \bar{\alpha}, \bar{\beta})$  ve  $A_\tau = A_\tau(x; \alpha, \beta), \bar{A}_\tau = A_\tau(x; \bar{\alpha}, \bar{\beta})$  olarak gösterilsin.

Bu takdirde  $x > 0$  ve  $x$  sifıra yeteri kadar yakın ise çözüm bileşenlerinin sürekliliğinden

$$\psi_\tau < \bar{\psi}_\tau \text{ ve } A_\tau < \bar{A}_\tau \tag{8}$$

dir. Eğer bu eşitsizlik tüm  $x$ 'ler için doğru ise ispat tamamlanmış olur. Aksine bir  $d < L$  olduğunu kabul edelim öyle ki tüm  $x \in (0, d)$  için (8) sağlansın fakat  $\bar{\psi}_\tau(d) = \psi_\tau(d)$  veya  $\bar{A}_\tau(d) = A_\tau(d)$  olsun.

$(0, d)$  aralığında (4) denklemlerinin sağ tarafları için  $\psi_\tau$  ve  $A_\tau$ 'nin katsayıları  $\bar{\psi}_\tau$  ve  $\bar{A}_\tau$ 'nin katsayılarından daha küçüktür. Sturm karşılaştırma teoremine göre  $\psi_\tau$  ve  $A_\tau$ ,  $\bar{\psi}_\tau$  ve  $\bar{A}_\tau$ 'ye göre daha hızlı salınım yapar. Dolayısıyla  $\psi_\tau(d) < \bar{\psi}_\tau(d)$  ve  $A_\tau(d) < \bar{A}_\tau(d)$  dir. Yani varsayım yanlıştır. ■

**Önerme 4** Herhangi  $\tau \in [0,1]$  ve  $\beta(\tau) \in (0, \sqrt{1-\tau^2})$  için tek bir  $\alpha = \alpha(\beta, \tau) > 0$  vardır öyle ki  $(\psi_\tau(x; \alpha(\beta), \beta), A_\tau(x; \alpha(\beta), \beta))$  çifti SGL sınır değer probleminin tek bir çözümüdür.

**İspat** Önerme 3'e göre  $\psi_\tau(x; \alpha, \beta), A_\tau(x; \alpha, \beta)$  fonksiyonları  $\alpha, \beta$ 'ya göre kesin artan olduğundan çözümün tekliği önerme 3'ün bir sonucudur. Varlık ise bir eğik atış argümanı ile gösterilebilir.

$\alpha = 0$  seçilirse  $\psi_\tau(x; 0, \beta)$  fonksiyonu  $x$ 'in azalan bir fonksiyonudur. Böylece  $\psi$  fonksiyonu  $L$  ye ulaşmadan önce  $x$  eksenini keser veya  $\psi'_\tau(L; 0, \beta) < 0$  olur.

Eğer  $\alpha$  yeteri kadar büyük seçilirse  $\psi_\tau(x; \alpha, \beta)$ 'ya başlangıçta sonlu bir noktada büyük bir sıçrama yapacak ya da  $\psi'_\tau(L; \alpha, \beta) > 0$  olacaktır.

Bu takdirde süreklilikten dolayı  $\psi'_\tau(L; \alpha, \beta) = 0$  sağlanacak şekilde bir  $\alpha$  değeri vardır.

Ayrıca  $\alpha > 0$  olması gerektiği de kolayca gösterilebilir: Aksine verilen  $\tau$  ve  $\beta$  için  $\alpha(\beta, \tau) < 0$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $x = 0$  noktasının küçük bir komşuluğunda süreklilikten dolayı  $A(x) < 0$  ve (4) denkleminde  $A'' < 0$  dir. Bu durumda pozitif bir  $H$  için  $H = A'(L)$  sağlanması için belirli bir  $x$  noktasından sonra  $A$ 'nın artmaya başlaması gerekir.  $A$ 'nın azalan olduğu en geniş alt aralığı  $[0, x^*], x^* < L$  ile gösterelim. Bu aralıkta  $A < 0, A' < 0$  ve (4)'den  $A'' < 0$  dir. Bu durumda  $x^*$  yerel minimum nokta olmalıdır. Bu ise  $A''(x^*) < 0$  olması ile çelişir. ■

**Önerme 5** Önerme 4'de belirtilen  $\alpha(\beta_\tau): \beta_\tau \rightarrow \alpha_\tau$  sürekli azalan bir fonksiyondur.

**İspat** Monotonluk Önerme 3'ün bir sonucudur. Süreklilik için fonksiyonunun görüntü kümesinin sonlu bir aralık üzerinde olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu

göstermek için görüntü kümesinden iki tane  $\alpha_1 = \alpha(\beta_1) < \alpha_2 = \alpha(\beta_2)$  elemanı ve  $\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$  elemanın alalım.  $\alpha(\beta_0) = \alpha_0$  bağıntısını sağlayan bir  $\beta_0$ 'ın var olduğunu göstermeliyiz.

Önerme 3'den

$$\psi'_\tau(L; \beta_1, \alpha_0) > \psi'_\tau(L; \beta_1, \alpha_1)$$

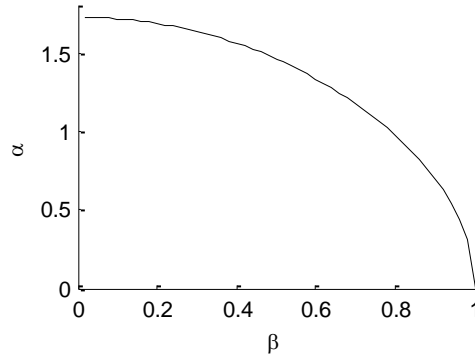
$$\psi'_\tau(L; \beta_2, \alpha_0) < \psi'_\tau(L; \beta_2, \alpha_1)$$

dir. Böylece bir  $\beta_0$  ara değeri vardır öyle ki  $\psi'(L; \beta_0, \alpha_0) = 0$  sağlanır. ■

Yukarıda verdiğimiz önermelerin doğruluğu  $\kappa = 0.5, L = 0.5, \tau = 0$  parametre değerleri için aşağıda Tablo 1 ve Şekil 3'de gösterilmiştir. Tablo 1'e bakıldığında seçilen her  $\beta$  değeri için bir  $\alpha$  değeri elde edildiği ve  $\alpha$  değerlerinin  $\beta$ 'nın azalan fonksiyonu olduğu görülmektedir. Ayrıca  $\alpha = \alpha(\beta)$  azalan fonksiyonunun grafiği Şekil 3'de gösterilmiştir.

Tablo 1.  $\kappa = 0.5, \tau = 0, L = 0.5$  için  $\alpha = \alpha(\beta)$  değerleri

$\beta$	$\alpha$
0.100000	3.453130
0.200000	3.398930
0.300000	3.306135
0.400000	3.172093
0.500000	2.992002
0.600000	2.757820
0.700000	2.455429
0.800000	2.056724
0.900000	1.488989
1.000000	0.005000



Şekil 3.  $\kappa = 0.2, L = 1$  için  $\alpha(\beta): \beta \rightarrow \alpha$  fonksiyonu

### 2.2.3. Sıcaklık Bağımlı SGL Sistem İçin Simetrik Çözümlerin Sayısı

Bu bölümde sıcaklık bağımlı SGL sistemin aşıkâr olmayan simetrik çözümlerinin sayısını  $L, \kappa$  ve  $\tau$  parametrelerine bağılı olarak belirliyoruz. Bunun için  $h(\beta, \tau)$  dallanma eğrisinin yatay ekseni kaç noktada kestiğini belirlemeye çalışacağız.

Eğer  $\beta - h$  düzleminde çizilen  $h(\beta, \tau)$  eğrileri için  $\beta$  eksenine paralel çizilen doğrular dallanma eğrisini tek bir noktada kesiyorsa SGL sisteminin aşıkâr çözümlerden başka bir çözümü, iki noktada kesiyorsa iki çözümü ve üç noktada kesiyorsa üç çözümünün olduğunu biliyoruz.

Sınır değer probleminin dallanma eğrisi pozitif  $h$  ekseni ve

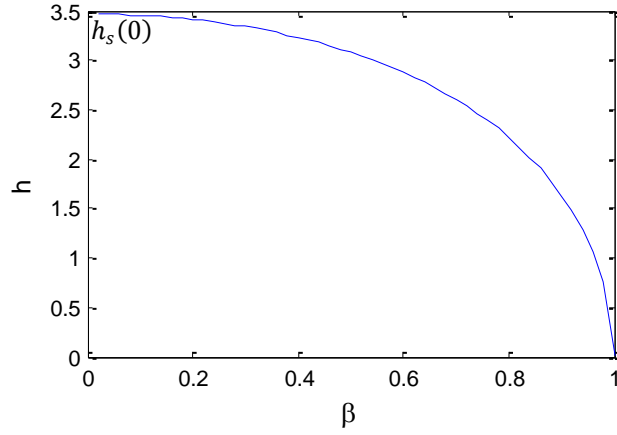
$$\beta \rightarrow \alpha(\beta, \tau) \rightarrow h(\beta, \tau) = A'(L; \alpha(\beta, \tau), \beta)$$

bileşke fonksiyonunun birleşimidir. SGL sistemi için  $h(\beta, \tau)$  için üç farklı davranış gözlemlemekteyiz.  $\tau = 0$  değerine karşılık gelen ve sıcaklık bağımsız SGL sisteminin dallanma eğrileri  $(L, \kappa)$  çiftleri için Aftalion ve Troy(1999) tarafından elde edilmiştir. Çalıştığımız sıcaklık bağımlı SGL sistemi için bahsedilen çalışmayı  $(L, \kappa, \tau)$  üçlülerine genelleştiriyoruz. Ayrıca Aftalion ve Troy(1999)'da incelenmeyen bir problem olarak çözümlerin başlangıç değerlerinin pertürbasyonuna göre kararlılığını inceliyoruz.

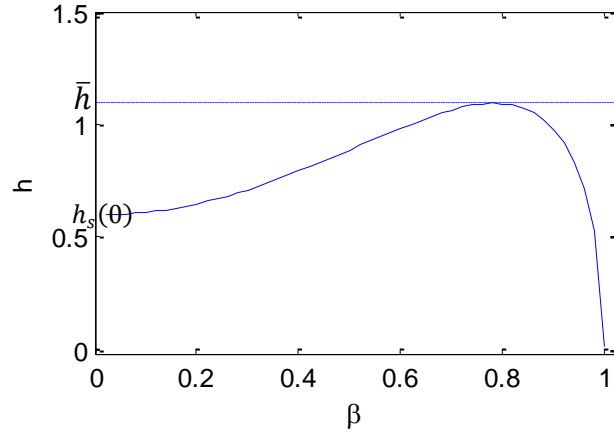
Yukarıda bahsedilen tek çözüm, iki çözüm ve üç çözüm bölgelerine ait tipik dallanma eğrileri sırasıyla Şekil 4, Şekil 5 ve Şekil 6'da gösterilmektedir.

Şekil 4'te  $(L, \kappa, \tau) = (0.5, 0.4, 0)$  üçlüsü için I. tip bir süperiletkene ait dallanma eğrisi görülmektedir. Burada  $h_s(\tau) = \lim_{\beta \rightarrow 0} h(\beta, \tau)$ 'dır. Bu dallanma eğrisine sahip sistemin tek bir çözüme sahip olduğu açıktır. Şekil 4'te görülen ve  $h_s(0)$  ile gösterilen dallanma eğrisinin maksimum değeri daha çok  $H_c$  notasyonu ile gösterilen kritik manyetik alan şiddetine karşılık gelmektedir.

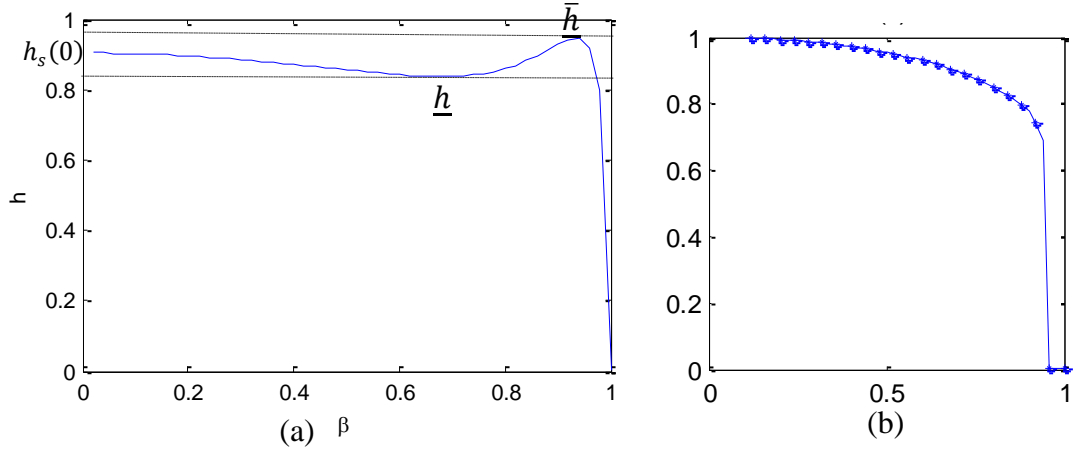
Şekil 5'te  $(L, \kappa, \tau) = (3, 0.3, 0)$  üçlüsü için I. tip bir süperiletkene ait dallanma eğrisi görülmektedir. Bu dallanma eğrisine sahip sistemin iki çözüme sahip olduğu açıktır. Şekil 5'te görülen ve  $\bar{h}$  ile gösterilen dallanma eğrisinin maksimum değeri  $H_c$  kritik manyetik alan şiddetine karşılık gelmektedir.



Şekil 4.  $\kappa = 0.4, L = 0.5$  için  $h(\beta, 0)$  eğrisi



Şekil 5.  $\kappa = 0.3, L = 3$  için  $h(\beta, 0)$  eğrisi



Şekil 6. (a)  $\kappa = 0.9, L = 3$  için  $h(\beta, 0)$  eğrisi (b) Uygulan manyetik alan (yatay eksen) şiddetinin artan değerleri için  $\psi_{max}$  eğrisi

Şekil 6 (a)'da  $(L, \kappa, \tau) = (3, 0.9, 0)$  üçlüsü için ikinci tip bir süperiletkene ait dallanma eğrisi görülmektedir. Bu dallanma eğrisine sahip sistemin iki çözüme sahip olduğu açıktır. Şekil 6 (a)'da  $\bar{h}$  ile gösterilen dallanma eğrisinin maksimum değeri daha



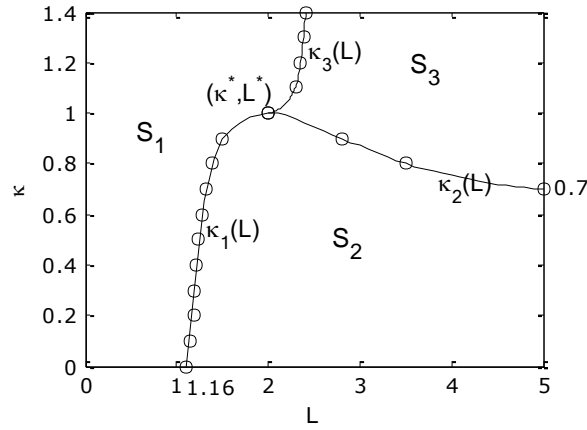
çok  $H_{c2}$  notasyonu ile gösterilen üst kritik manyetik alan şiddetine  $\underline{h}$  ile gösterilen dallanma eğrisinin yerel minimum değeri daha çok  $H_{c1}$  notasyonu ile gösterilen alt kritik manyetik alan şiddetine karşılık gelmektedir. Şekil 6 (b)'den de dallanma eğrisinden elde edilen değerlerin simülasyon sonucunda elde edilen değerlerle uyumlu olduğu görülmektedir.

Tipik sonuçların sunulduğu Şekil 4, Şekil 5 ve Şekil 6'ya göre aşağıdaki sonuçlar ifade edilebilir:

- Şekil 4'e göre  $\beta \in (0,1)$  için  $h(\beta, \tau)$ ,  $\beta$  nın azalan bir fonksiyonudur ve  $0 < H < h_s(\tau)$  ise sistemin bir tek simetrik çözümü vardır.  $H \geq h_s(\tau)$  ise sistemin simetrik çözümü yoktur.
- Şekil 5'e göre  $\beta \in (0,1)$  için  $h(\beta, \tau)$ , maksimum değer  $\bar{h}$  (ki burada  $\bar{h} \cong 1.1$ )'e kadar artan, daha sonra azalan bir fonksiyondur.  $H < h_s(\tau)$  ise tek simetrik çözüm,  $h_s(\tau) < H < \bar{h}$  ise iki simetrik çözüm vardır ve  $H > \bar{h}$  ise simetrik çözüm yoktur.
- Şekil 6'ya göre  $\beta \in (0,1)$  için  $h(\beta, \tau)$ , yerel minimum değer  $\underline{h}$  ye kadar artan, yerel maksimum  $\bar{h}$  ye kadar azalan ve daha sonra artan bir fonksiyondur.  $H < \underline{h}$  ise tek simetrik çözüm,  $\underline{h} < H < h_s(\tau)$  ise üç simetrik çözüm,  $h_s(\tau) < H < \bar{h}$  ise iki simetrik çözüm vardır ve  $H > \bar{h}$  ise çözüm yoktur.

Görüldüğü gibi  $\kappa$  ve  $L$ 'nin farklı değerleri için sistemin aşikâr çözümünden başka, bir, iki veya üç çözümü olabilmektedir. Bu çözüm davranışlarını  $(L, \kappa)$  düzleminde gösterebiliriz.  $(L, \kappa)$  düzleminde tek çözümün olduğu noktalar kümesini  $S_1$ , iki çözümün olduğu noktalar kümesini  $S_2$ , üç çözümün olduğu noktalar kümesini ise  $S_3$  bölgesi olarak gösterelim.  $\tau = 0$  için bu çözüm noktalarını gösteren bölgeler Şekil 7'de gösterilmiştir.

$(L, \kappa)$  düzlemini  $S_1, S_2, S_3$  şeklinde üç bölgeye bölen ve Şekil 7'de gösterilen  $\kappa_1(L), \kappa_2(L), \kappa_3(L)$  sürekli fonksiyonu vardır. Bu üç fonksiyonun kesiştiği tek bir  $(\kappa^*, L^*)$  noktası vardır. Şekil 7'ye göre aşağıdakileri sonuçları ifade edebiliriz.

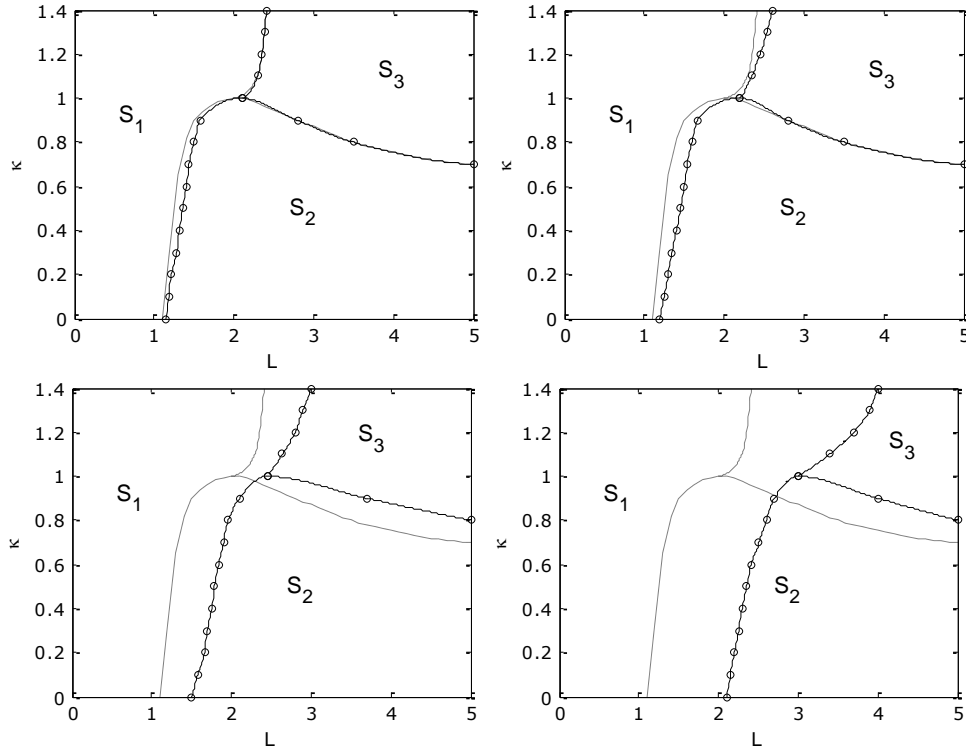


Şekil 7.  $\tau = 0$  için  $S_1, S_2, S_3$  bölgeleri

#### Bulgular I:

- $L^* \cong 1.9, \kappa_1(L^*) = \kappa_2(L^*) = \kappa_3(L^*) \cong 0.95 = \kappa^*$
- $\lim_{L \rightarrow 1.16} \kappa_1(L) = 0, \lim_{L \rightarrow \infty} \kappa_2(L) = 0.7 = \kappa_2^*, \lim_{L \rightarrow \infty} \kappa_3(L) = +\infty$
- $\kappa_1(L)$  fonksiyonu  $[\kappa_1^* = 1.16, L^*]$  aralığında tanımlıdır ve monoton artan bir fonksiyondur.
- $\kappa_2(L)$  fonksiyonu  $[L^*, \infty)$  aralığında tanımlıdır ve monoton azalan bir fonksiyondur.
- $\kappa_3(L)$  fonksiyonu  $[L^*, \infty)$  aralığında tanımlıdır ve monoton artan bir fonksiyondur.
- $S_1$  bölgesinde alınan  $(\kappa, L)$  noktaları için  $h(\beta, \tau)$  eğrileri Şekil 4'teki gibidir ve bir tek simetrik çözüm vardır.
- $S_2$  bölgesinde alınan  $(\kappa, L)$  noktaları için  $h(\beta, \tau)$  eğrileri Şekil 5'teki gibidir ve iki simetrik çözüm vardır.
- $S_3$  bölgesinde alınan  $(\kappa, L)$  noktaları için  $h(\beta, \tau)$  eğrileri 6'daki gibidir ve üç simetrik çözüm vardır.

Şimdi  $\tau = 0$  için elde edilen bu sonuçların  $\tau \neq 0$  durumunda nasıl değiştiğini inceleyelim. Şekil 8 (a)'da  $\tau = 0.2$ , (b)'de  $\tau = 0.4$  (c)'de  $\tau = 0.6$  ve (d)'de  $\tau = 0.8$  için  $S_1, S_2, S_3$  çözüm bölgeleri ve  $(L^*, \kappa^*)$  noktasının davranışı gösterilmiştir.  $\tau = 0$  için elde edilen sonuçlar  $\tau$ 'nın artan değerleri için incelendiğinde aşağıdaki bulgular elde edilmiştir.



Şekil 8. (a)  $\tau = 0.2$  (b)  $\tau = 0.4$  (c)  $\tau = 0.6$  (d)  $\tau = 0.8$  için çözüm sayılarını gösteren bölgeler(kesikli çizgiler  $\tau = 0$  için çözüm bölgeleri)

## Bulgular II

- $L^*(\tau)$ ,  $\tau$ 'nin artan fonksiyonu,  $\kappa^*$  ise  $\tau$ 'dan bağımsızdır.  

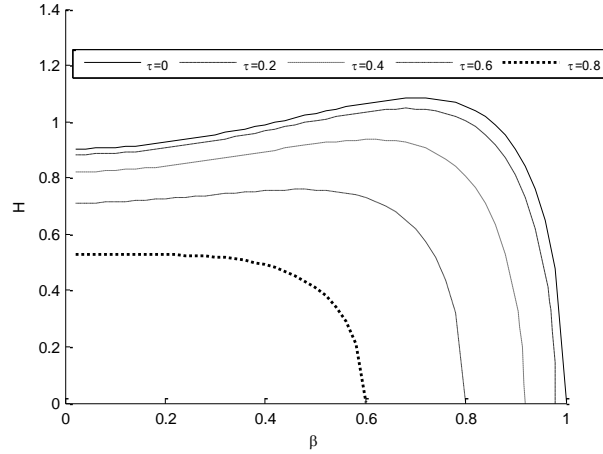
$$\lim_{\tau \rightarrow 1} L^* = 5, \lim_{\tau \rightarrow 1} \kappa^* = 0.95$$
- $\lim_{\tau \rightarrow 1} \kappa_1^* = 4.5, \lim_{\tau \rightarrow 1} \kappa_2^* = 0.95$
- $\kappa_1(L, \tau)$  fonksiyonu  $[1.2 + \tau, L^* + \tau]$  aralığında tanımlı ve monoton artandır.
- $\kappa_2(L, \tau)$  fonksiyonu  $[L^* + \tau, \infty)$  aralığında tanımlı ve monoton azalandır.
- $\kappa_3(L, \tau)$  fonksiyonu  $[[L^* + \tau, \infty)]$  aralığında tanımlı ve monoton artandır.
- $A_{S_1}$  ile  $S_1$  bölgesinin,  $A_{S_2}$  ile  $S_2$  bölgesinin ve  $A_{S_3}$  ile  $S_3$  bölgesinin alanını göstermek üzere  $A_{S_1}(\tau)$  artan,  $A_{S_2}(\tau)$  ve  $A_{S_3}(\tau)$  ise birer azalan fonksiyondur. Sayısal olarak sonuçlar Tablo 2'de gösterilmiştir.  $\tau$  sıcaklık değeri arttıkça aşağıda Şekil 8'de de gösterildiği gibi  $S_2$  bölgesi  $S_1$ 'e,  $S_3$  bölgesi ise hem  $S_1$ 'e hem de  $S_2$ 'ye doğru azalmaktadır. Bu bölgeler arasındaki geçişler Şekil 9, Şekil 10 ve Şekil 11'de bazı parametre değerleri için gösterilmiştir.
- Başlangıç değerlerine göre çözümlerin kararlılığı incelendiğinde  $S_1$  bölgesindeki tek çözümün kararlı çözüm olduğu,  $S_2$  bölgesindeki çözümlerden birinin kararlı, diğerinin kararsız olduğu ve  $S_3$  bölgesindeki üç çözümden biri

kararsız, diğer ikisinin kararlı olduğu görülmektedir. Kararlılıkla ilgili detaylı sonuçlar Kesim 3’de verilmektedir.

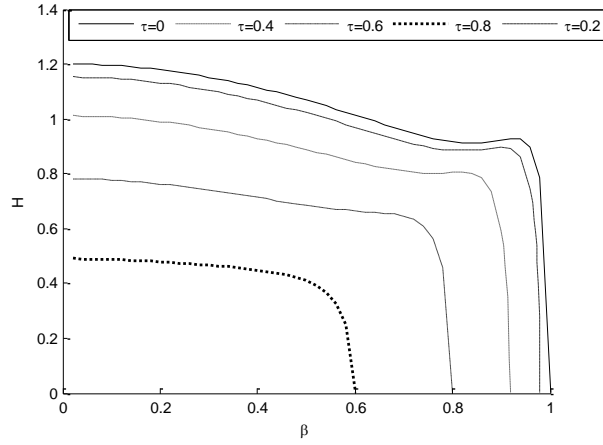
Tablo 2. Artan sıcaklık değerleri için  $S_1, S_2, S_3$  bölgeleri için alanlar

	$A_{S_1}$	$A_{S_2}$	$A_{S_3}$
$\tau = 0$	2.17	2.63	2.20
$\tau = 0.2$	2.22	2.62	2.16
$\tau = 0.4$	2.56	2.47	1.97
$\tau = 0.6$	3.22	2.23	1.52
$\tau = 0.8$	3.88	1.80	1.32

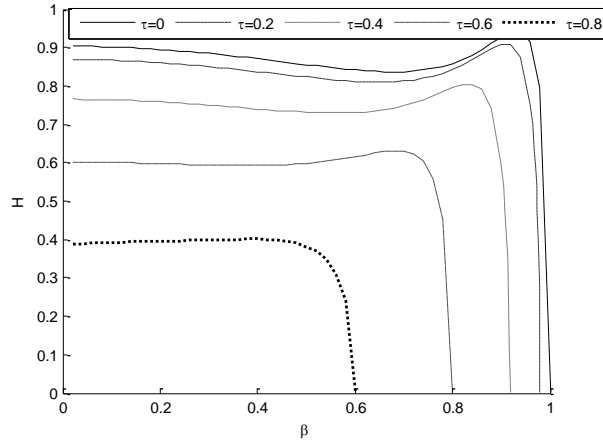
Ayrıca aşağıdaki şekillerde(Şekil 9, Şekil 10 ve Şekil 11) farklı  $\kappa$  ve  $L$  değerleri için artan sıcaklık değerlerine karşılık bölgeler arasındaki geçişler için  $h(\beta, \tau)$  dallanma eğrilerinin grafikleri verilmiştir. Şekil 9’da  $S_2$  bölgesinden seçilen  $\kappa = 0.9, L = 2$  parametre değerleri için  $S_2$  bölgesinden  $S_1$  bölgesine geçiş  $\tau = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  sıcaklık değerleri için gösterilmiştir. Benzer şekilde aynı sıcaklık değerleri için Şekil 10’da  $S_3$  bölgesinden seçilen  $\kappa = 1.2, L = 2.5$  için  $S_3$  bölgesinden  $S_1$  bölgesine geçiş ve Şekil 11’de  $S_3$  bölgesinden seçilen  $\kappa = 0.9, L = 3$  için  $S_3$  bölgesinden  $S_2$  bölgesine geçiş gösterilmiştir.



Şekil 9. Artan sıcaklık değerleri için iki çözümlü bölgeden( $S_2$ ) tek çözümlü bölgeye( $S_1$ ) geçiş ( $\kappa = 0.5, L = 2$ )



Şekil 10. Artan sıcaklık değerleri için üç çözümlü bölgeden( $S_3$ ) tek çözümlü bölgeye( $S_1$ ) geçiş ( $\kappa = 1.2, L = 2.5$ )



Şekil 11. Artan sıcaklık değerleri için iki çözümlü bölgeden( $S_2$ ) iki çözümlü bölgeye( $S_2$ ) geçiş ( $\kappa = 0.9, L = 3$ )

Şimdi  $\tau = 0$  için Şekil 12'de tek çözüm, iki çözüm ve üç çözümün olduğu bölgelerde alınan noktalar için çözümlerin karakterlerini inceleyelim. Burada başlangıç değeri pertürbasyonuna göre çözümlerin kararlılık durumları incelenmiştir. Bu çözümleri elde edebilmek için üç farklı yöntem kullanılmıştır.

(Y1) Eğik atış yöntemiyle SGL sistemi çözülmüştür.

(Y2) MATLAB de “ode15s” ile TTDGL sistemi çözülmüştür.<sup>1</sup>

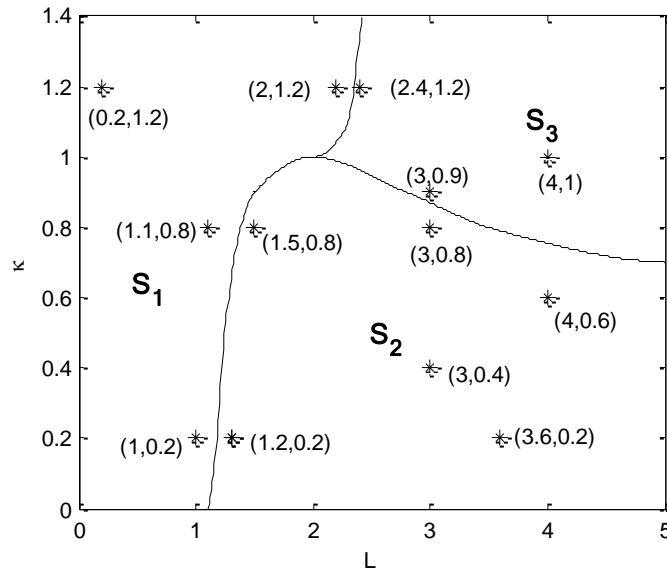
(Y3) Enerji fonksiyoneli

<sup>1</sup> 281169 nolu araştırma lisansı ile yapılmıştır.

$$\int_{-L}^L \left[ \left( A^2 + \frac{1}{2} \psi^2 - 1 \right) \psi^2 + \left( \frac{\psi'}{\kappa} \right)^2 + (A' - H)^2 \right] dx$$

$$= \int_{-L}^L \left[ (A\psi)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^2 - 1) \right)^2 + \left( \frac{\psi'}{\kappa} \right)^2 + (A' - H)^2 \right] dx$$

şeklinde yeniden yazılarak enerji fonksiyonelinin kendisi için MATLAB’de nonlinear least square (lsqnonlin) ile minimizasyon yapılarak çözümler elde edilmiştir.



Şekil 12.  $\tau = 0$  için çözüm bölgeleri ve bu bölgelerde alınan noktalar

## 2.2.4. Sıcaklık Bağımlı SGL Sisteminin Çözümlerinin Kararlılığı

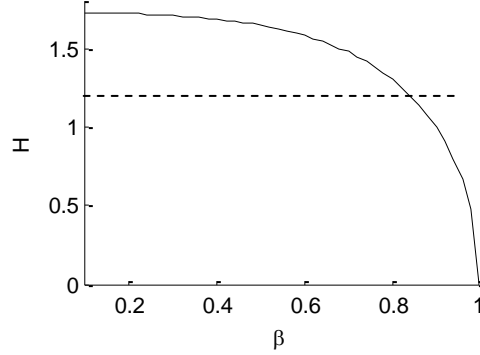
### 2.2.4.1. Tek Çözüm Bölgesi ve Kararlılık

Bu bölümde Şekil 12 ‘de  $S_1$  ile belirtilen tek çözüm bölgesine ait çözümün başlangıç değer fonksiyonunun pertürbasyonuna göre kararlılığı incelenmiştir.

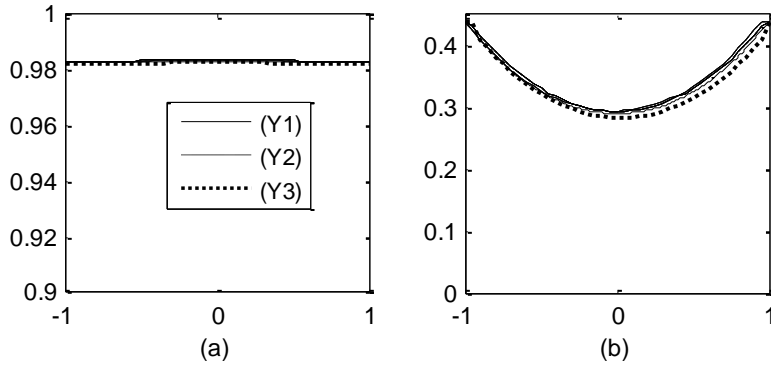
**Bulgu:**  $S_1$  bölgesinin herhangi  $(L, \kappa)$  parametre çiftine karşılık gelen çözüm için enerji global minimumdur ve bu çözüm başlangıç değer fonksiyonlarının pertürbasyonuna göre kararlıdır.

Aşağıda, yukarıda bahsedilen üç yöntemin de bu kararlı çözüme yakınsadığı gösterilmiştir.  $\tau = 0$  için Şekil 12’de gösterilen tek çözümün olduğu bölgedeki

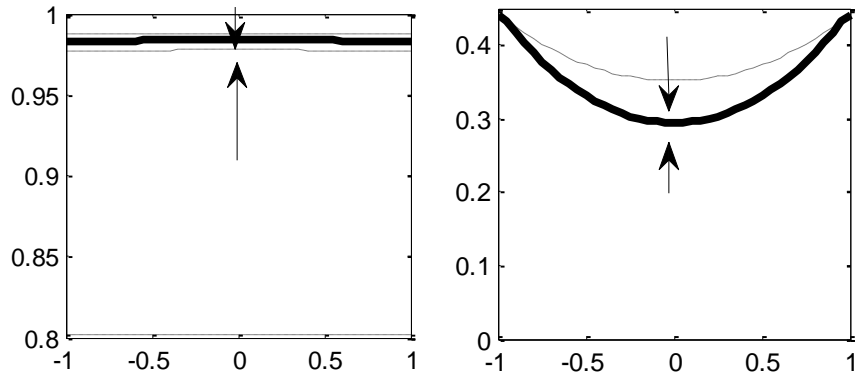
(1,0.2), (1.1,0.8), (0.2,1.2), (2,1.2) parametre çiftleri için dallanma eğrileri ve çözüm eğrileri aşağıdaki gibi olmaktadır.



Şekil 13.  $\kappa = 0.2, L = 1$  için dallanma eğrisi



Şekil 14.  $\kappa = 0.2, H = 0.44, L = 1$  için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan eğrileri



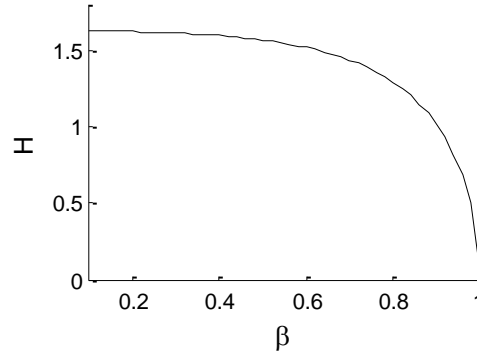
Şekil 15.  $\kappa = 0.2, H = 0.44, L = 1$  çözümünün kararlılığı

Şekil 13'te  $S_1$  bölgesinde alınan  $(\kappa, L) = (1, 0.2)$  parametre çifti için elde edilen dallanma eğrisi gösterilmiştir. Şekil üzerinde çizilen yatay doğrular dallanma eğrisini tek noktada kestiği için tek çözümün var olduğu görülmektedir.

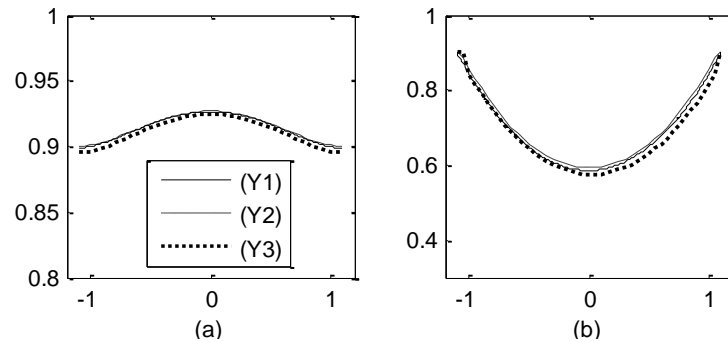
Şekil 14'te  $\kappa = 0.2, H = 0.44, L = 1$  parametre değerleri için (Y1), (Y2) ve (Y3) yöntemleriyle elde edilen çözümlere ait süperelektron yoğunluğu(a) ve nüfuz eden manyetik alan(b) eğrileri verilmiştir. Şekil 14 (a) ve (b)'de (Y1),(Y2),(Y3) yöntemleriyle elde edilen çözümlerin aynı denge çözüme yakınsadığı görülmektedir.

Çözümlerin kararlılığı için  $\psi(x,0)$  ve  $A(x,0)$  başlangıç fonksiyonlarının pertürbasyonuna göre çözüm eğrilerinin davranışı incelenmiştir. Şekil 15'te  $\psi(x,0) = 1, A(x,0) = 0$  başlangıç değerleri veya bu değerler komşuluğundaki başlangıç değerleri için elde edilen tipik bir sonuçtur. Diğer bir deyimle süperiletken konumu temsil eden başlangıç değerlerin pertürbasyonu ile elde edilen her çözüm Şekil 15'te belirtilen denge çözüme yakınsamaktadır. Ayrıca süperiletkenin normal halini temsil eden  $\psi(x,0) = 0, A(x,0) = hx$  başlangıç değerleri veya bu başlangıç değerlerin pertürbasyonu ile elde edilen her çözüm Şekil 15 de belirtilen denge çözüme yakınsamaktadır.

Benzer sonuçlar  $S_1$  bölgesinde alınan  $(L, \kappa) = (1.1, 0.8), (L, \kappa) = (0.2, 1.2), (L, \kappa) = (2, 1.2)$  parametre çiftleri için de elde edilmiştir. Bu parametre çiftleri için elde edilen dallanma eğrileri (Şekil 16 - Şekil 24) gösterilmiştir.

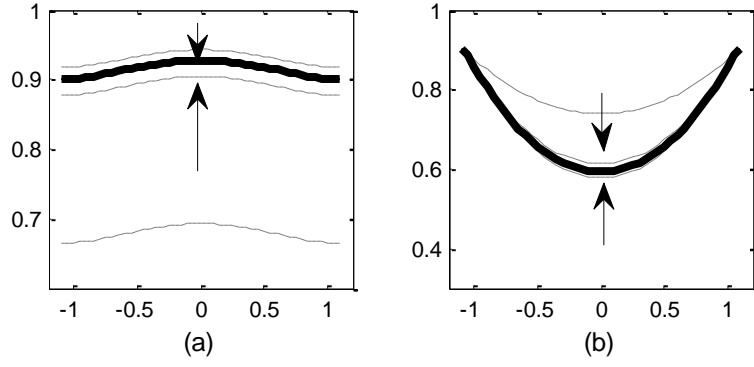


Şekil 16.  $\kappa = 0.8, L = 1.1$  için dallanma eğrisi



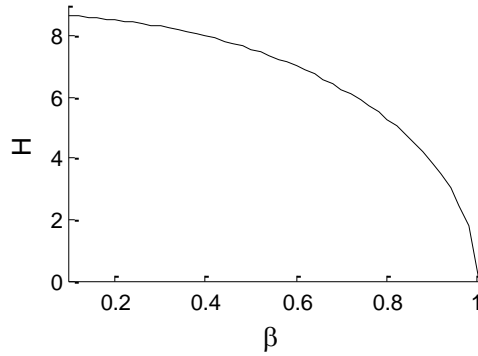
Şekil 17.  $\kappa = 0.8, H = 0.9, L = 1.1$  için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan eğrileri



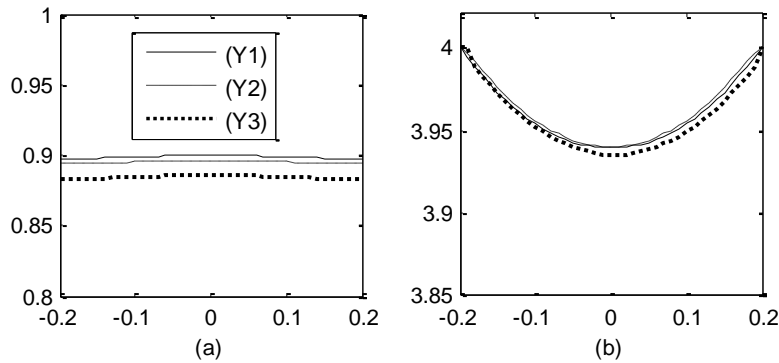


Şekil 18.  $\kappa = 0.8, H = 0.9, L = 1.1$  için çözümün kararlılığı

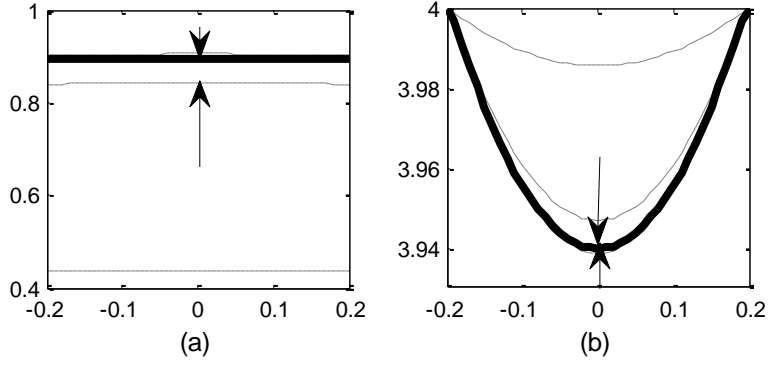
Şekil 16 – Şekil 18’de  $S_1$  bölgesinde alınan  $(L, \kappa) = (1.1, 0.8)$  parametre çifti için dallanma eğrisi (Şekil 16) ve bu bölgedeki çözümün başlangıç değerlerinin pertürbasyonuna göre kararlılığını gösteren sonuçlar grafiksel olarak sunulmuştur. (Şekil 17, Şekil 18)



Şekil 19.  $\kappa = 1.2, L = 0.2$  için dallanma eğrisi

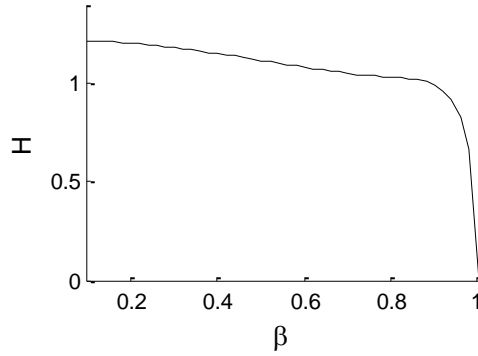


Şekil 20.  $\kappa = 1.2, H = 4, L = 0.2$  için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan eğrileri

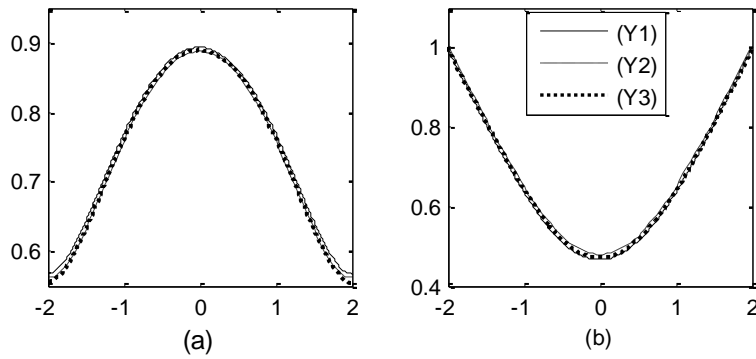


Şekil 21.  $\kappa = 1.2, H = 4, L = 0.2$  için çözümün kararlılığı

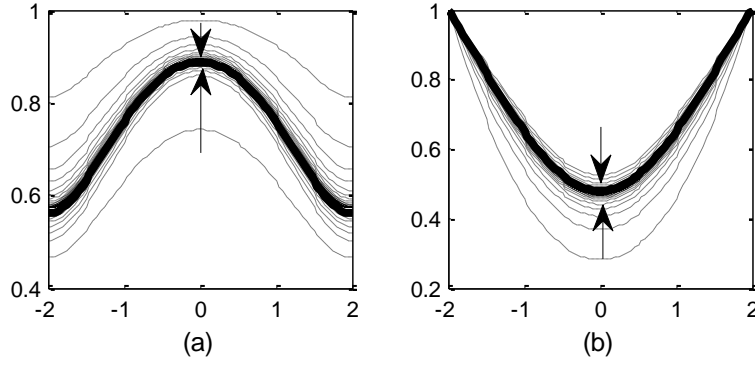
Şekil 19 - Şekil 21'de  $S_1$  bölgesinde alınan  $(L, \kappa) = (0.2, 1.2)$  parametre çifti için dallanma eğrisi (Şekil 19) ve bu bölgedeki çözümün başlangıç değerlerinin pertürbasyonuna göre kararlılığını gösteren sonuçlar grafiksel olarak sunulmuştur. (Şekil 20, Şekil 21)



Şekil 22.  $\kappa = 1.2, L = 2$  için dallanma eğrisi



Şekil 23.  $\kappa = 1.2, H = 4, L = 0.2$  için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan eğrileri



Şekil 24.  $\kappa = 1.2, H = 1, L = 2$  için çözümün kararlılığı

Şekil 22 - Şekil 24'te ise  $S_1$  bölgesinde alınan  $(L, \kappa) = (2, 1.2)$  parametre çifti için dallanma eğrisi (Şekil 22) ve bu bölgedeki çözümün başlangıç değerlerinin pertürbasyonuna göre kararlılığını gösteren sonuçlar grafiksel olarak sunulmuştur. (Şekil 23, Şekil 24)

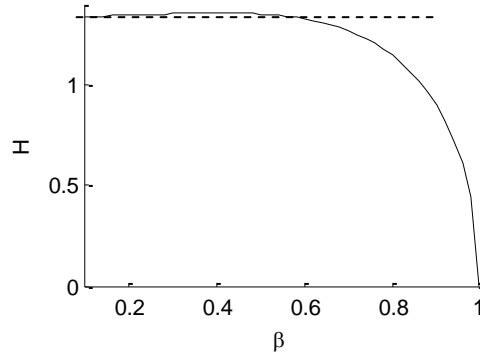
Özetle  $S_1$  bölgesindeki parametre değerleri için başlangıç değerden bağımsız olarak tek bir denge çözüm elde edilmektedir.

#### 2.2.4.2. İki Çözüm Bölgesi ve Kararlılık

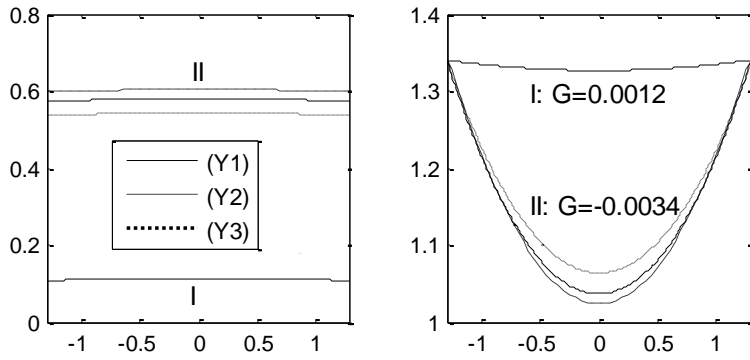
Bu bölümde Şekil 12'de  $S_2$  ile belirtilen iki çözüm bölgesine ait çözümün başlangıç değer fonksiyonunun pertürbasyonuna göre kararlılığı incelenmiştir.

**Bulgu:**  $S_2$  bölgesinin herhangi  $(L, \kappa)$  parametre çiftine karşılık elde edilen iki çözümden global minimum enerjiye karşılık gelen çözüm kararlı çözüm, diğer çözüm ise kararsız çözümdür.

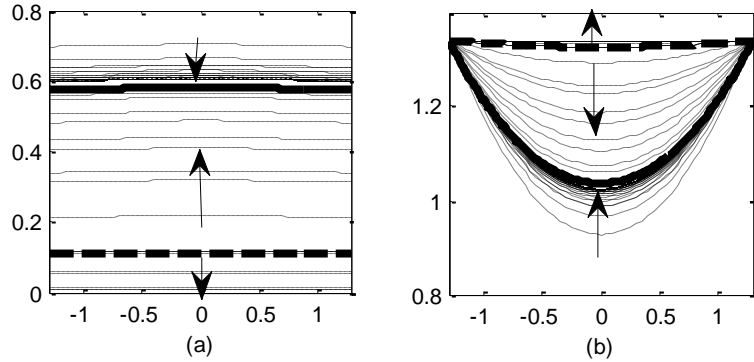
Aşağıda yukarıda bahsedilen üç yöntemin (Y1, Y2, Y3) de kararlı çözüme yakınsadığı gösterilmiştir.  $\tau = 0$  için Şekil 12'de gösterilen  $S_2$  bölgesinde alınan  $(1.2, 0.2), (3.6, 0.2), (3, 0.8), (4, 0.6)$  parametre çiftleri için dallanma eğrileri ve çözüm eğrileri aşağıdaki gibi olmaktadır.



Şekil 25.  $\kappa = 0.2, L = 1.2$  için dallanma eğrisi



Şekil 26.  $\kappa = 0.2, H = 1.34, L = 1.2$  için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan grafikleri



Şekil 27.  $\kappa = 0.2, H = 1.34, L = 1.2$  için çözümlerin kararlılığı

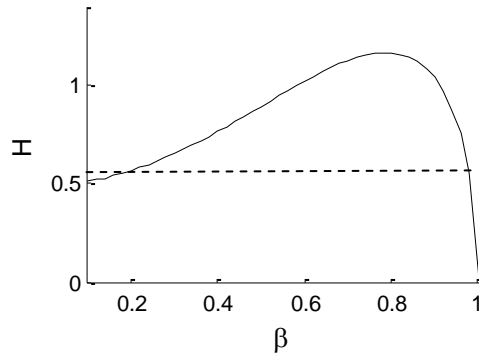
Şekil 25'te  $S_2$  bölgesinde alınan  $(\kappa, L) = (1.2, 0.2)$  parametre çifti için iki çözümün var olduğu gösterilmektedir. Şekil 25'te çizilen yatay doğrunun dallanma eğrisini iki noktada kestiği görülmektedir. Bu durumda iki farklı simetrik çözüm söz konusudur. Bu çözümlerden biri süperiletken konuma yakın çözüm, diğeri ise normal konuma yakın çözümdür.

Şekil 26'da  $\kappa = 0.2, H = 1.34, L = 1.2$  parametre değerleri için (Y1), (Y2) ve (Y3) yöntemleriyle elde edilen çözümlere ait süperelektron yoğunluğu(a) ve nüfuz eden manyetik alan(b) eğrileri verilmiştir.

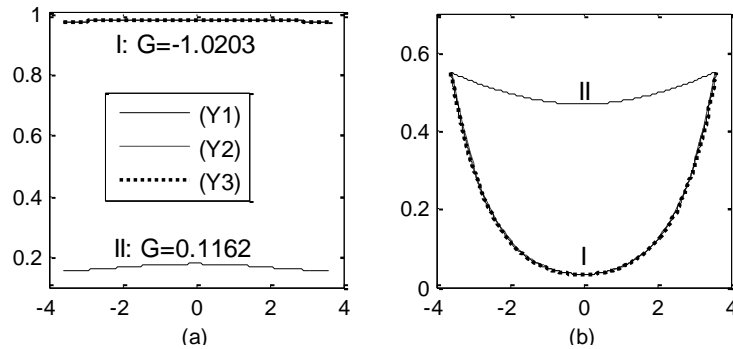
Şekil 27'de süperiletken konuma yakın çözümün(çözüm\_süper) kararlı, normal konuma yakın çözümün(çözüm\_normal) ise kararsız çözüm olduğu görülmektedir. Burada çözüm\_süper'in daha düşük GL enerji değerine sahip olduğu görülmektedir. Çözümlerin kararlılığı incelenirken çözüm\_süper'in komşuluğunda alınan başlangıç değerleri için denge çözümün çözüm\_süper'e yakınsadığı, çözüm\_normal'e yakın komşulukta alınan başlangıç değerleri için denge çözümün çözüm\_normal'den uzaklaştığı görülmektedir.

Şekil 26 (a) ve (b)'de her üç yöntemle(Y1,Y2,Y3) elde edilen çözümlerin başlangıç değer pertürbasyonuna göre kararlı olan çözüme yakınsadığı görülmektedir.

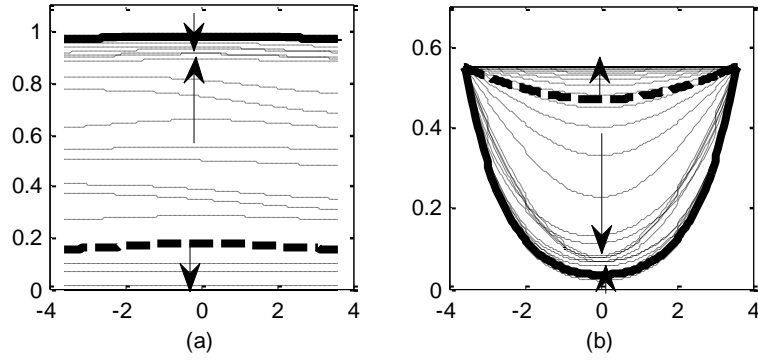
Benzer gözlemler  $S_2$  bölgesinde alınan  $(3.6,0.2), (3,0.8), (4,0.6)$ ,  $(L, \kappa)$  parametre çiftleri için de elde edilmiştir. Bunlara ait grafiksel veriler aşağıdaki şekillerde(Şekil 28-Şekil 36) gösterilmiştir.



Şekil 28.  $\kappa = 0.2, L = 3.6$  için dallanma eğrisi

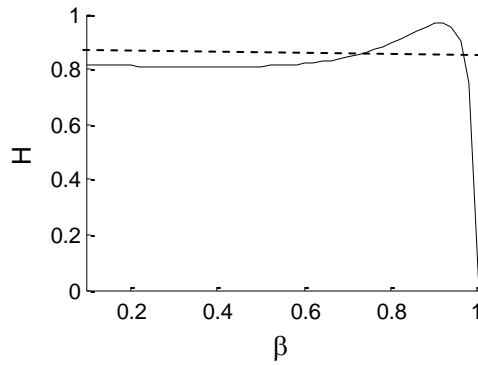


Şekil 29.  $\kappa = 0.2, H = 1.34, L = 3.6$  için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan grafikleri

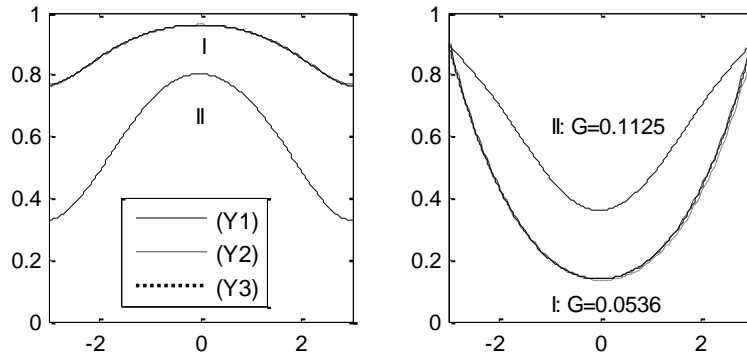


Şekil 30.  $\kappa = 0.2, H = 1.34, L = 3.6$  için çözümlerin kararlılığı

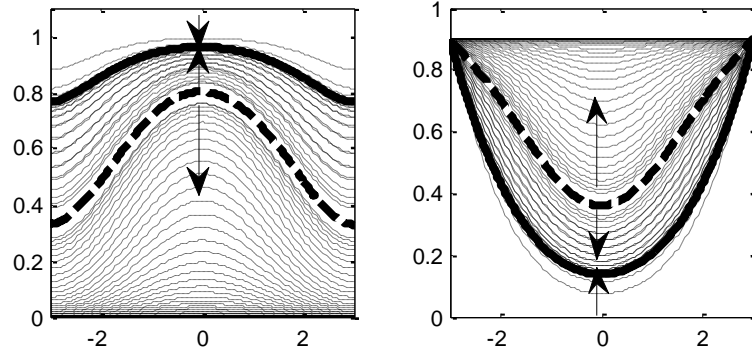
Şekil 28 – Şekil 30’da  $S_2$  bölgesinde alınan  $(L, \kappa) = (0.2, 3.6)$  parametre çifti için dallanma eğrisi (Şekil 28) ve bu bölgedeki çözümün başlangıç değerlerinin pertürbasyonuna göre kararlılığını gösteren sonuçlar grafiksel olarak sunulmuştur. (Şekil 29, Şekil 30)



Şekil 31.  $\kappa = 0.8, L = 3$  için dallanma eğrisi

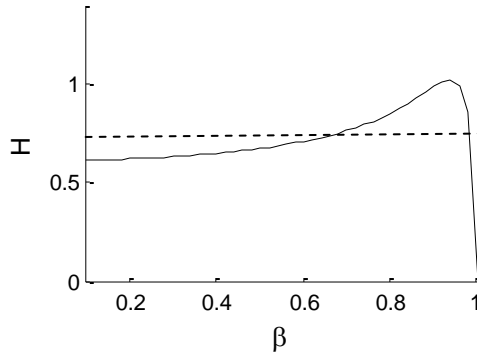


Şekil 32.  $\kappa = 0.8, H = 0.9, L = 3$  için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan eğrileri

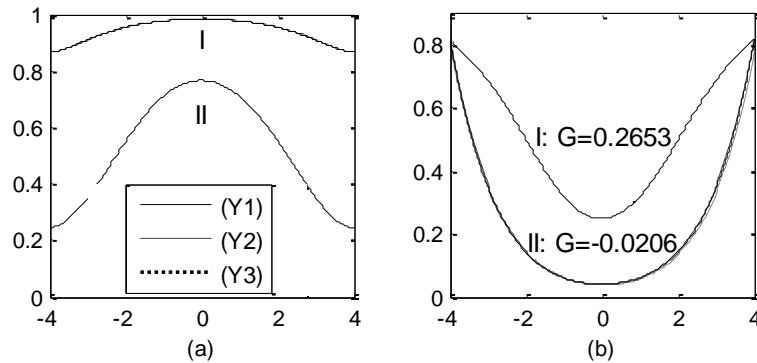


Şekil 33.  $\kappa = 0.8, H = 0.9, L = 3$  için çözümlerin kararlılığı

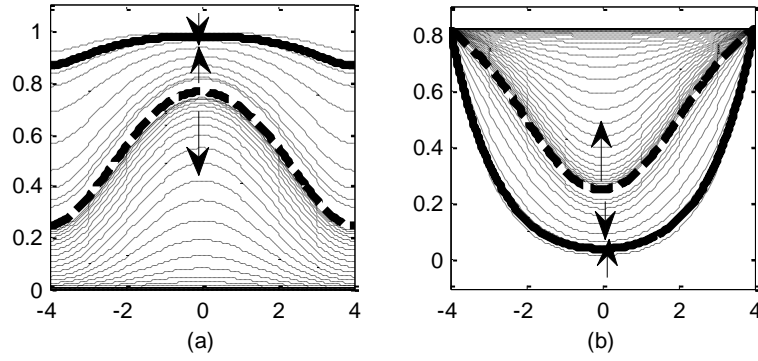
Şekil 31 – Şekil 33'te  $S_2$  bölgesinde alınan  $(L, \kappa) = (3.6, 0.8)$  parametre çifti için dallanma eğrisi (Şekil 31) ve bu bölgedeki çözümün başlangıç değerlerinin pertürbasyonuna göre kararlılığını gösteren sonuçlar grafiksel olarak sunulmuştur. (Şekil 32, Şekil 33)



Şekil 34.  $\kappa = 0.6, L = 4$  için dallanma eğrisi



Şekil 35.  $\kappa = 0.6, H = 0.82, L = 4$  için üç farklı yöntemle elde edilen (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan grafikleri



Şekil 36.  $\kappa = 0.6, H = 0.82, L = 4$  için çözümlerin kararlılığı

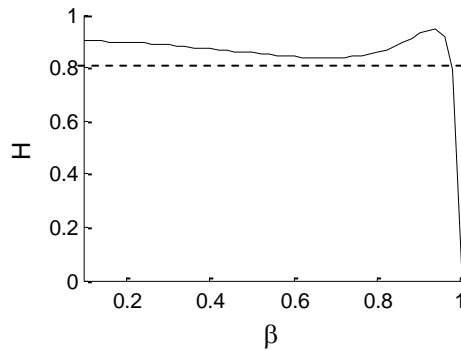
Şekil 34 – Şekil 36’da ise  $S_2$  bölgesinde alınan  $(L, \kappa) = (4, 0.6)$  parametre çifti için dallanma eğrisi(Şekil 34) ve bu bölgedeki çözümün başlangıç değerlerinin pertürbasyonuna göre kararlılığını gösteren sonuçlar grafiksel olarak sunulmuştur.(Şekil 35, Şekil 36)

### 2.2.4.3. Üç Çözüm Bölgesi ve Kararlılık

Bu bölümde Şekil 12’de  $S_3$  ile belirtilen üç çözüm bölgesine ait çözümün başlangıç değer fonksiyonunun pertürbasyonuna göre kararlılığı incelenmiştir.

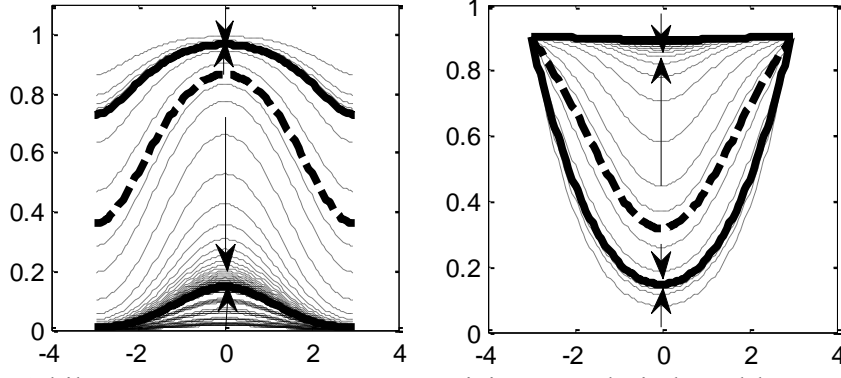
**Bulgu:** Bu durumda minimum enerjiye(süperiletken konum komşuluğundaki çözüm) ve maksimum enerjiye(normal durum komşuluğundaki çözüm) karşılık gelen çözümler kararlı çözüm, diğer çözüm(ara durum) ise kararsız çözümdür.

$\tau = 0$  için Şekil 12’de gösterilen üç çözümün olduğu bölgede alınan  $(3, 0.9), (4, 0.1)$  parametre çiftleri için dallanma eğrileri ve çözüm eğrileri aşağıdaki gibi olmaktadır.



Şekil 37.  $\kappa = 0.9, L = 3$  için dallanma eğrisi





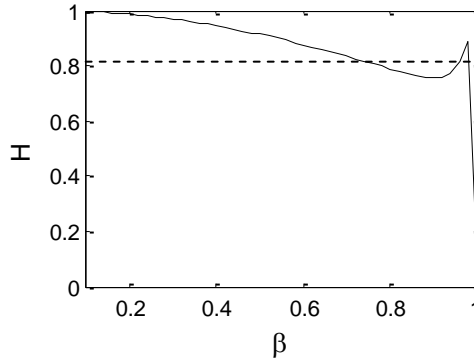
Şekil 38.  $\kappa = 0.9, H = 0.9, L = 3$  için çözümlerin kararlılığı (a) süperelektron yoğunluğu (b) nüfuz eden manyetik alan

Şekil 37’de  $\kappa = 0.9, L = 3$  için üç çözümün var olduğu gösterilmektedir. Şekilde çizilen yatay doğru dallanma eğrisini üç noktada kestiği görülmektedir. Bu durumda üç farklı simetrik çözüm söz konusudur. Bu çözümlerden biri süperiletken konuma yakın çözüm, diğeri normal konuma yakın çözüm ve üçüncüsü ise ara çözümdür.

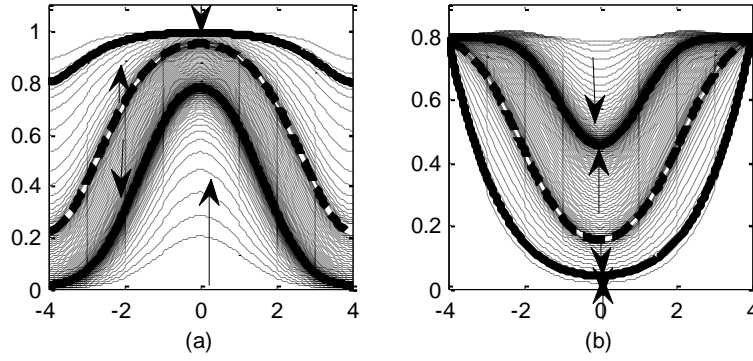
Şekil 38’de süperiletken konuma yakın çözüm(çözüm\_süper) ve normal konuma yakın çözüm(çözüm\_normal) kararlı, ara çözüm ise kararsız çözüm(çözüm\_ara) olduğu görülmektedir. Ayrıca

$$Enerji(\text{çözüm}_{süper}) < Enerji(\text{çözüm}_{ara}) < Enerji(\text{çözüm}_{normal})$$

olduğunu gözlemliyoruz. Çözümlerin kararlılığı incelenirken çözüm\_süper’in komşuluğunda alınan başlangıç değerleri için denge çözümün çözüm\_süper’e, çözüm\_normal’in komşuluğunda alınan başlangıç değerleri için denge çözümün çözüm\_normal’e yakınsadığı gözlemlenirken, çözüm\_ara’ya yakın komşulukta alınan başlangıç değerleri için denge çözümün çözüm\_ara’dan uzaklaştığı görülmektedir.



Şekil 39.  $\kappa = 1, L = 4$  için dallanma eğrisi



Şekil 40.  $\kappa = 1, H = 0.8, L = 4$  için çözümlerin kararlılığı

Şekil 39 ve Şekil 40'da benzer gözlemler  $\kappa = 1, L = 4$  için elde edilmektedir.

Şekil 39'da  $\kappa = 1, L = 4$  için üç çözümün var olduğu gösterilmektedir. Şekilde çizilen yatay doğru dallanma eğrisini üç noktada kestiği görülmektedir. Bu durumda üç farklı simetrik çözüm söz konusudur. Bu çözümlerden biri süperiletken konuma yakın çözüm, diğeri normal konuma yakın çözüm ve üçüncüsü ise ara çözümdür.

Şekil 40'da süperiletken konuma yakın çözüm(çözüm\_süper) ve normal konuma yakın çözüm(çözüm\_normal) kararlı, ara çözüm ise kararsız çözüm(çözüm\_ara) olduğu görülmektedir. Ayrıca

$$Enerji(\text{çözüm}_{süper}) < Enerji(\text{çözüm}_{ara}) < Enerji(\text{çözüm}_{normal})$$

olduğunu gözlemliyoruz. Çözümlerin kararlılığı incelenirken çözüm\_süper'in komşuluğunda alınan başlangıç değerleri için denge çözümün çözüm\_süper'e, çözüm\_normal'in komşuluğunda alınan başlangıç değerleri için denge çözümün çözüm\_normal'e yakınsadığı gözlemlenirken, çözüm\_ara'ya yakın komşulukta alınan başlangıç değerleri için denge çözümün çözüm\_ara'dan uzaklaştığı görülmektedir.

Özetle üç çözüm bölgesine karşılık gelen  $(L, \kappa)$  parametre çiftleri için dallanma eğrilerinin yatay eksenini üç farklı noktada kestiği görülmektedir. Ayrıca çözüm\_süper, çözüm\_ara ve çözüm\_normal adı verilen bu üç çözümden çözüm\_süper ve çözüm\_normal'in başlangıç değerleri pertürbasyonuna göre kararlı, çözüm\_ara'nın ise kararsız olduğu gözlemlenmektedir.

### 2.2.5. YSGL Başlangıç Değer Problemi İçin Asimptotik Analiz

Bu bölümde daha önce ele aldığımız

$$\psi'' = \kappa^2(A^2 + \psi^2 + \tau^2 - 1)\psi$$

$$A'' = A\psi^2$$

$$\psi(0) = \beta, \psi'(0) = 0, A(0) = 0, A'(0) = \alpha \geq 0$$

SGL başlangıç değer problemi(SGLBDP) için yaklaşık analitik çözümleri elde ediyoruz. Bunun için son zamanlarda literatürde sıkça kullanılan Adomian ayrışım yöntemini kullanıyoruz. Elde ettiğimiz analitik yaklaşımları kullanarak verilen  $\beta$  değerleri için  $\psi'(0) = 0$  şartını sağlayan  $\alpha$  değerini belirleyerek  $h = A'(L)$ 'yi hesaplayabiliyoruz.

#### 2.2.5.1. YSGL Sistemi İçin Adomian Yöntemi ile Analitik Yaklaşımlar

Adomian ayrışım yöntemi lineer veya nonlinear diferansiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözümünü belirlemek için son yıllarda sıkça kullanılan yöntemlerden biridir.

$F$  bir nonlinear diferansiyel operatör ve  $g$  bilinen bir fonksiyon olmak üzere

$$F(y(x)) = g(x) \quad (9)$$

denklemini ele alalım.  $F(y)$  deki lineer terimleri  $L(y) + R(y)$ , nonlinear terimleri  $N(y)$  olarak ayrıştıralım. Burada  $L$  en yüksek mertebeden ve kolayca tersi alınabilen lineer operatör,  $R$  ise geriye kalan lineer operatördür. Bu yüzden (9) denklemi

$$Ly = g - Ry - Ny \quad (10)$$

şeklinde yazılabilir. (10) denkleminin her iki tarafına  $L^{-1}$  ters operatörü uygulanırsa

$$L^{-1}Ly = L^{-1}g - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \quad (11)$$

ve özdeş olarak

$$y = \Theta + L^{-1}g - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \quad (12)$$

denklemini elde edilir. Burada  $L\theta = 0$  dır. Örneğin,  $L = \frac{d^2}{dx^2}$  ise  $L^{-1}$  çift katlı integraldir ve  $\theta = y(0) + xy'(0)$  dir.

Adomian ayrışım yöntemine göre,  $y$  çözümü

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \quad (13)$$

sonsuz seri toplamı olarak alınır ve  $Ny$  nonlineer terimi bir analitik fonksiyon olduğu varsayılırsa

$$Ny = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (14)$$

olarak ayrıştırılır. Burada

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} N \left( \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i \right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

şeklinde hesaplanan  $y_0, y_1, \dots, y_n$  fonksiyonlarının Adomian polinomlarıdır.

(14) ve (15) ifadeleri (12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \theta + L^{-1}g - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} y_n - L^{-1}N \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (16)$$

elde edilir. (16) serisindeki her bir terim

$$\begin{aligned} y_0 &= \theta + L^{-1}g \\ y_n &= L^{-1}Ry_{n-1} - L^{-1}A_{n-1}, n \geq 1 \end{aligned} \quad (17)$$

olarak verilir.

### 2.2.5.2. SGLBDP İçin Yaklaşık Analitik Çözümler

Bu bölümde yukarıda ifade edilen SGLBDP'nin Adomian ayrışım yöntemiyle yaklaşık analitik çözümleri elde edilmiştir. Bunun için SGLBDP sistemini  $x = \tilde{x}L$  dönüşümü altında  $\psi = y_1, \psi' = y_2, A = y_3, A' = y_4$  olmak üzere aşağıdaki şekilde birinci mertebeden lineer diferensiyel denklem sistemi olarak yeniden yazalım.

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \kappa^2 L^2 (y_1^2 + y_3^2 + \tau^2 - 1) y_1 \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= L^2 y_1^2 y_3 \\ y_1(0) &= \beta, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0, y_4(0) = \alpha \end{aligned}$$

Adomian ayrışım yöntemine göre  $L = \frac{d}{dx}$  ve  $L^{-1} = \int_0^x (\cdot) dx$  olmak üzere

$$\begin{aligned} y_{1,0} &= y_1(0), y_{1,n} = \int_0^x y_{2,n-1} dx \\ y_{2,0} &= y_2(0), y_{2,n} = -\kappa^2 L^2 \int_0^x y_{1,n-1} + \kappa^2 L^2 \int_0^x A_n dx \\ y_{3,0} &= y_3(0), y_{3,n} = \int_0^x y_{4,n-1} dx \\ y_{4,0} &= y_4(0), y_{4,n} = L^2 \int_0^x B_n dx \end{aligned} \tag{18}$$

olarak yazılır. Burada  $A_n$  ve  $B_n$  ler sırasıyla  $F(y_1, y_3) = \kappa^2 L^2 (y_1^2 + y_3^2 + \tau^2 - 1) y_1$  ve  $G(y_1, y_3) = L^2 y_1^2 y_3$  nonlineer fonksiyonellerine karşılık elde edilen Adomian polinomlarıdır. Bu yaklaşımlara göre  $n = 5$  için  $\psi$  ve  $A$  için yaklaşık çözümler aşağıdaki şekilde olmaktadır. Elde edilen  $\psi$  ve  $A$  fonksiyonları için literatürle uyumlu olarak  $\psi$ 'nin çift ve  $A$ 'nın ise tek fonksiyon olduğu görülmektedir.

$$\begin{aligned}\psi(x; \beta, \alpha, \tau) &= \beta + \frac{1}{2}\beta k^2(\beta^2 + \tau^2 - 1)x^2 \\ &+ \frac{1}{24}\beta k^2(k^2(\tau^2 - 1)^2 + 4k^2\beta^2(\tau^2 - 1) + 3k^2\beta^4 + 2\alpha^2)x^4\end{aligned}$$

veya  $C_i = C_i(\alpha, \beta)$  olmak üzere

$$\psi(x; \tau) = C_1 + (C_2 + C_3(\tau^2 - 1))x^2 + (C_4 + C_5(\tau^2 - 1) + C_6(\tau^2 - 1)^2)x^4$$

$$A(x; \beta, \alpha, \tau) = \alpha x + \frac{1}{6}\alpha\beta^2 x^3 + \frac{1}{120}\alpha\beta^2(\beta^2 + 6k^2(\beta^2 + \tau^2 - 1))x^5$$

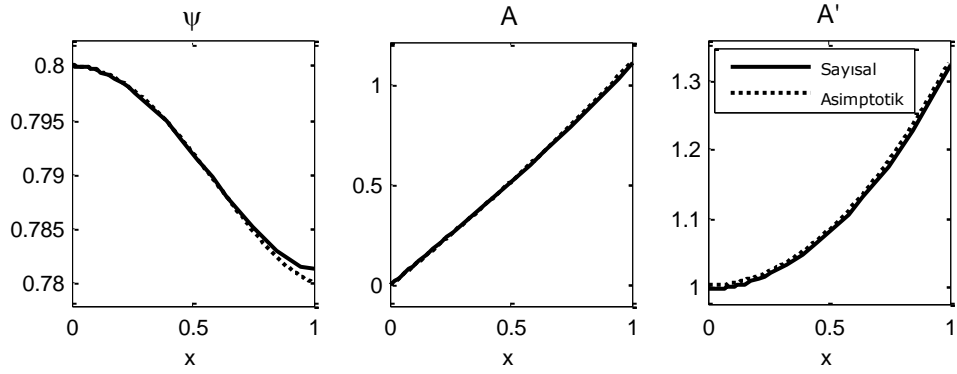
veya  $D_i = D_i(\alpha, \beta)$  olmak üzere

$$A(x; \tau) = D_1 x + D_2 x^3 + (D_3 + D_4(\tau^2 - 1))x^5$$

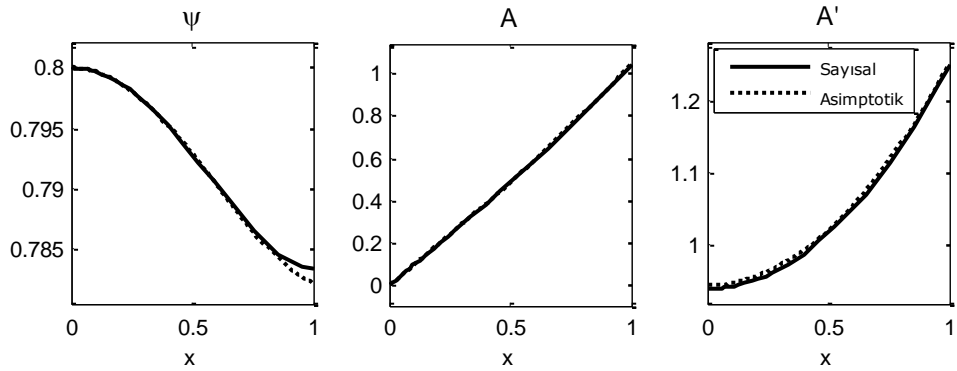
Şimdi verilen  $k, \beta, \tau$  ve  $L$  için  $\psi'(1) = 0$  şartını sağlayan  $\alpha$  değerini ve bu değerler için elde edilen  $H = A'(1)$  değerini bulalım.  $\kappa = 0.5, \beta = 0.8, L = 1$  ve farklı  $\tau$  parametre değerleri için sayısal ve asimptotik olarak elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir. Asimptotik değerler  $n = 5$  için elde edilmiştir. Hem Tablo 3'te verilen sayısal değerler hem de Şekil 41, Şekil 42, Şekil 43'te verilen  $\psi$  ve  $A$  fonksiyonları incelendiğinde asimptotik olarak elde edilen sonuçlar ile sayısal olarak elde edilen sonuçların uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 3.  $\kappa = 0.5, \beta = 0.8, l = 1$  ve farklı  $\tau$  değerleri için sayısal ve asimptotik olarak elde edilen  $\alpha$  ve  $H = A'(1)$  değerleri

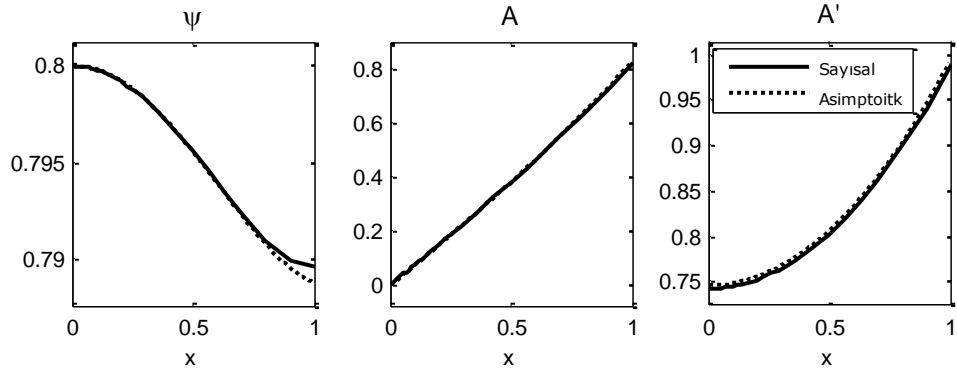
	Sayısal		Asimptotik	
	$\alpha$	$H$	$\alpha$	$H$
$\tau = 0.0$	0.9978	1.3240	1.0032	1.3268
$\tau = 0.1$	0.9837	1.3056	0.9890	1.3085
$\tau = 0.2$	0.9403	1.2488	0.9452	1.2517
$\tau = 0.3$	0.8632	1.1476	0.8675	1.1506
$\tau = 0.4$	0.7422	0.9884	0.7458	0.9913
$\tau = 0.5$	0.5598	0.7337	0.5524	0.7361



Şekil 41.  $\kappa = 0.5, \beta = 0.8, \tau = 0, L = 1$  için sayısal ve asimptotik olarak elde edilen  $\psi$  ve  $A$  grafikleri



Şekil 42.  $\kappa = 0.5, \beta = 0.8, \tau = 0.2, L = 1$  için sayısal ve asimptotik olarak elde edilen  $\psi$  ve  $A$  grafikleri



Şekil 43.  $\kappa = 0.5, \beta = 0.8, \tau = 0.4, L = 1$  için sayısal ve asimptotik olarak elde edilen  $\psi$  ve  $A$  grafikleri

## 2.2.6. SGL Sisteminin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları

Bu bölümde verilen  $\kappa, H$  ve  $L$  değerleri için çözümün var olduğu  $\tau$  özdeğerleri ve bu öz değerlere karşılık gelen  $(\psi_\tau, A_\tau)$  öz fonksiyonlarını elde ediyoruz. Yani problemi bir özdeğer-özfonksiyon problemi olarak ele alıyoruz. Problemin özdeğer ve

özfonksiyonlarını bulmak için eğik atış yöntemini kullanıyoruz. Bunun için Moore (2001) de bahsedilen yöntemi kullanıyoruz.

$$\begin{aligned}\psi'' &= k^2(A^2 + \psi^2 + \tau^2 - 1)\psi \\ A'' &= A\psi^2 \\ \psi'(0) = \psi'(L) &= 0, A(0) = 0, A'(L) = H\end{aligned}$$

sınır değer problemi

$$\begin{aligned}\psi'' &= k^2(A^2 + \psi^2 + \tau^2 - 1)\psi \\ A'' &= A\psi^2 \\ \psi(0) = \beta, \psi'(0) &= 0, A(0) = 0, A'(0) = \alpha\end{aligned}$$

başlangıç değer problemi olarak yazıldıktan sonra  $y_1 = \psi, y_3 = A$  denirse

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 & y_1(0) &= \tau \\ y_2' &= \kappa^2(y_1^2 + y_3^2 + \tau^2 - 1)y_1 & y_2(0) &= 0 \\ y_3 &= y_4 & y_3(0) &= 0 \\ y_4' &= y_3 y_1^2 & y_4(0) &= \alpha\end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Problemin özdeğerlerini bulmak için bir  $(\tau_0, \alpha_0)$  başlangıç değeri seçildikten sonra  $\psi'(L) = 0, A'(L) = H$  sınır şartlarını sağlayan  $(\tau, \alpha)$  değerlerini araştıralım. Bunun için

$$F(\tau, \alpha) = \begin{pmatrix} \psi'(L; \tau, \alpha) \\ A'(L; \tau, \alpha) - H \end{pmatrix}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.  $F = 0$  şartını sağlayan  $(\tau, \alpha)$  çiftlerini bulmak için Newton yöntemini kullanalım. Newton yöntemine göre

$$\begin{aligned}T^0 &= (\tau_0, \alpha_0)^t \\ F^n &= (\psi'(L; \tau^n, \alpha^n), A'(L; \tau^n, \alpha^n) - h)^t \\ T^{n+1} &= T^n - J^{-1}(\tau, \alpha)F^n\end{aligned}$$

yazılır. Burada



$$J(\tau, \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}(L; \tau, \alpha) & \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(L; \tau, \alpha) \\ \frac{\partial A}{\partial \tau}(L; \tau, \alpha) & \frac{\partial A}{\partial \alpha}(L; \tau, \alpha) \end{pmatrix}$$

dır.

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau}(L; \tau, \alpha), \frac{\partial A}{\partial \tau}(L; \tau, \alpha)$$

değerlerini bulmak için

$$\begin{aligned} y'_{1\tau} &= y_{2\tau} & y_{1\tau}(0) &= 1 \\ y'_{2\tau} &= \kappa^2(y_1^2 + y_3^2 + \tau^2 - 1)y_{1\tau} + \kappa^2(2y_{1\tau}y_1 + 2y_{3\tau}y_3 + 2\tau)y_1 & y_{2\tau}(0) &= 0 \\ y_{3\tau} &= y_{4\tau} & y_{3\tau}(0) &= 0 \\ y'_{4\tau} &= y_{3\tau}y_1^2 + 2y_3y_1y_{1\tau} & y_{4\tau}(0) &= 0 \end{aligned}$$

ve

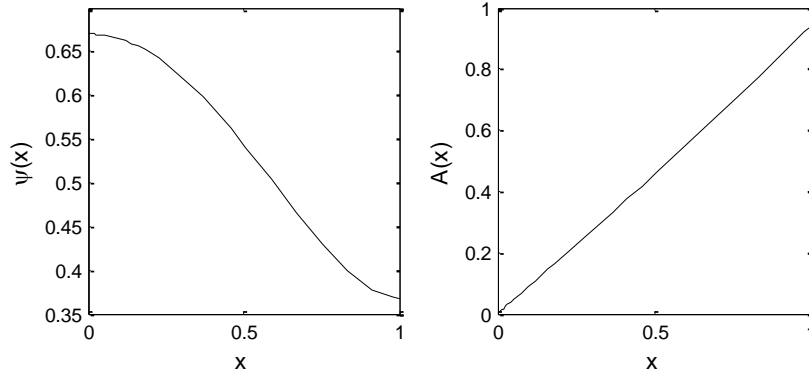
$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(L; \tau, \alpha), \frac{\partial A}{\partial \alpha}(L; \tau, \alpha)$$

değerlerini bulmak için ise

$$\begin{aligned} y'_{1\alpha} &= y_{2\alpha} & y_{1\alpha}(0) &= 0 \\ y'_{2\alpha} &= \kappa^2(y_1^2 + y_3^2 + \tau^2 - 1)y_{1\alpha} + \kappa^2(2y_{1\alpha}y_1 + 2y_{3\alpha}y_3)y_1 & y_{2\alpha}(0) &= 0 \\ y_{3\alpha} &= y_{4\alpha} & y_{3\alpha}(0) &= 0 \\ y'_{4\alpha} &= y_{3\alpha}y_1^2 + 2y_3y_1y_{1\alpha} & y_{4\alpha}(0) &= 1 \end{aligned}$$

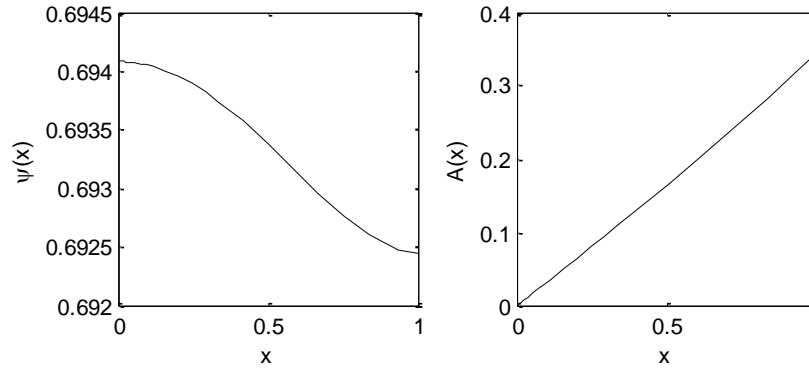
sisteminin çözülmesi gereklidir.

**Örnek**  $\kappa = 4, H = 1, L = 1$  için özdeğer  $\tau = 0.6701(\alpha = 0.8942)$  olarak bulunmuştur ve bu özdeğere karşılık gelen  $\psi$  ve  $A$  özfonksiyonları ise aşağıdaki şekildedir.



Şekil 44.  $\kappa = 4, h = 1, L = 1$  için  $\tau = 0.6701$  özdeğerine karşılık gelen  $\psi$  ve  $A$  özfonksiyonları

**Örnek**  $\kappa = 0.5, h = 0.4, L = 1$  için özdeğer  $\tau = 0.6941$  ( $\alpha = 0.3200$ ) olarak bulunmuştur ve bu özdeğere karşılık gelen  $\psi$  ve  $A$  özfonksiyonları ise aşağıdaki şekildedir.



Şekil 45.  $\kappa = 0.5, h = 0.4, L = 1$  için  $\tau = 0.6941$  özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlar

### 2.3. Normal Hale Yakın Komşulukta Çözümler

Bu bölümde süperiletken film için TTDGL sistemi için süperiletkenin normal hale yakın komşuluktaki çözümleri incelenmiştir. Normal hale yakın komşuluktaki çözümleri incelemek için  $A = Hx$  alınmış ve süperelektron yoğunluğunu gösteren  $\psi$  için  $\psi^3$  terimi ihmal edilmiştir. Bu durumda Ginzburg-Landau denklem sistemi regüler Sturm-Liouville problemine dönüşmüştür.

Bu bölümde amacımız elde edilen bu regüler Sturm-Liouville problemi için bilinen analitik yaklaşım yöntemlerini kullanarak yaklaşık özdeğer ve özfonksiyonları elde etmek ve daha sonra da fiziksel anlam ifade eden ilk öz değere karşılık gelen öz fonksiyonların kantitatif ve kalitatif davranışını incelemek suretiyle süperiletken numunenin normal durum

komşuluğundaki davranışı hakkında bilgi edinmektir. Dolayısıyla bu başlık altında aşağıdaki kesimler incelenmiştir.

Kesim 2.3.1’de regüler Sturm-Liouville teorisinden bilinen bazı önemli sonuçlar verilmiştir.

Kesim 2.3.2’de regüler ve singüler Sturm-Liouville probleminin sayısal çözümlerini elde etmek için literatürde kullanılan önemli araçlardan biri olan ve Fortran programlama dili ile yazılmış olan SLEIGN2 yazılımı ile elde edilen sayısal sonuçlar verilmiştir.

Kesim 2.3.3, 2.3.4 ve 2.3.5’te, elde ettiğimiz regüler Sturm-Liouville probleminin yaklaşık analitik çözümleri için üç farklı yöntem incelenmiştir. Kesim 2.3.3’te bir asimptotik yaklaşım yöntemi, Kesim 2.3.4’te Galerkin yöntemi ve Kesim 2.3.5’te Picard yöntemi kullanılmıştır.

Kesim 2.3.6’da ise  $\kappa$  parametresinin büyük değerleri için elde edilen regüler Sturm-Liouville problemi bir pertürbasyon problemi olarak ele alınarak yine yaklaşık analitik çözümler verilmiştir.

Son olarak Kesim 2.3.7’de regüler Sturm-Liouville problemi eğik atış yöntemiyle sayısal olarak çözülmüştür.

Süperiletken film için TTDGL sisteminin

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{1}{\kappa^2}\psi_{xx} + (1 - \tau^2 - A^2 - \psi^2)\psi \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= A_{xx} - A\psi^2\end{aligned}\tag{19}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi Ginzburg-Landau problemi için normal hale yakın komşuluktaki çözümleri inceleyelim. Bu durumda denklemlerde  $A = Hx$  yazılır ve  $\psi^3$  terimini ihmal edilirse

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\kappa^2} \psi_{xx} + (1 - \tau^2 - H^2 x^2) \psi, \quad x \in (-L, L)$$

$$\psi'(-L) = \psi'(L) = 0$$
(20)

kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemi çözmek için

$$\psi(x, t) = f(t)\phi(x)$$

şeklinde bir çözüm arayalım. Bu durumda

$$f'(t)\phi(x) = \frac{1}{\kappa^2} \phi''(x)f(t) + (1 - \tau^2 - H^2 x^2)\phi(x)f(t)$$

olup

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dt} = \frac{1}{\phi(x)} \left[ \frac{1}{\kappa^2} \phi''(x) + (1 - \tau^2 - H^2 x^2)\phi(x) \right] = -\mu$$

elde edilir. O halde

$$f(t) = \exp(-\mu t)$$

ve

$$\frac{1}{\kappa^2} \phi''(x) + \lambda \phi(x) - H^2 x^2 \phi(x) = 0, \quad \lambda = 1 - \tau^2 + \mu$$
(21)

olacaktır. (22) denklemi

$$\phi'' + \kappa^2(\lambda - H^2 x^2)\phi = 0, \quad x \in (-L, L)$$
(22)

$$\phi'(-L) = \phi'(L) = 0$$
(23)

olarak yazılırsa bunun bir regüler Sturm-Liouville problemi olduğu görülür. (23) denkleminin simetrik çözümleri  $\phi(-x) = \phi(x)$  şeklinde olduğundan sınır şartları

$$\phi'(0) = \phi'(L) = 0$$
(24)

şeklinde alınarak  $x \in (0, L)$  aralığında çözümler incelenebilir. Ayrıca  $[0, L]$  aralığı yerine  $[0, 1]$  aralığı ile çalışmak için  $\tilde{x} = x/L$  dönüşümü yapar,  $\tilde{x}$  yerine tekrar  $x$  yazar ve

$$k = \kappa l, h = Hl \quad (25)$$

yeni sabitleri kullanılırsa (22)-(23) problemi yerine

$$\phi'' + k^2(\lambda - h^2 x^2)\phi = 0, x \in (0, 1) \quad (26)$$

$$\phi'(0) = \phi'(1) = 0 \quad (27)$$

problemi ile çalışabiliriz.

Şimdi regüler Sturm-Liouville teorisini ve bu teori için bilinen bazı önemli sonuçları aşağıda verelim.

### 2.3.1. Regüler Sturm – Liouville Teorisinden Önemli Sonuçlar

$p(x), p'(x), q(x)$  ve  $r(x)$  fonksiyonları  $[a, b]$  aralığı üzerinde sürekli reel değerli fonksiyonlar ve  $[a, b]$  aralığı üzerinde  $p(x) > 0, r(x) > 0$  olmak üzere

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}(x)\right) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), \quad a < x < b; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

şeklindeki problemlere regüler Sturm-Liouville problemi denir. Bu problemle ilgili bilinen bazı önemli sonuçlar şunlardır.

**Teorem 4** (28)-(29) regüler Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri reeldir ve reel değerli özfonksiyonlara sahiptir.

**Teorem 5** Eğer  $[a, b]$  aralığında üzerinde  $q(x) \geq 0, -a_1 a_2 \geq 0$  ve  $b_1 b_2 \geq 0$  ise (28)-(29) Sturm-Liouville probleminin bütün özdeğerleri pozitiftir.

**Teorem 6** (28)-(29) regüler Sturm-Liouville probleminin ayrık özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları  $[a, b]$  aralığı üzerinde  $r(x)$  ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır.

**Teorem 7** (28)-(29) regüler Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri sayılabilir ve  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$  şeklindedir.

**Teorem 8 (Öz değerlerin Monotonluğu)**

$p > 0$ ,  $-\infty < a < b < \infty$  ve  $\lambda_n$  (28)-(29) Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri olsun.

(1)  $p$  ve  $r$  sabit olsun. Varsayalım ki  $Q \in L^1((a, b), \mathbb{R})$  ve  $[a, b]$  aralığı üzerinde  $Q > q$  olsun. Bu takdirde her hangi bir  $n \in \mathbb{N}_0$  için  $\lambda_n(Q) \geq \lambda_n(q)$  dur.

(2)  $q$  ve  $r$  sabit olsun. Varsayalım ki  $\frac{1}{p} \in L^1((a, b), \mathbb{R})$  ve  $[a, b]$  aralığı üzerinde  $0 < P \leq p$  olsun. Bu takdirde her hangi bir  $n \in \mathbb{N}_0$  için  $\lambda_n\left(\frac{1}{P}\right) \geq \lambda_n\left(\frac{1}{p}\right)$  dir.

Yukarıda ifade edilen sonuçlara göre (26)-(27) sınır değer problemi için

$$p(x) = 1/k^2 > 0, r(x) = 1 > 0, q(x) = k^2 h^2 x^2 \geq 0$$

olup

$$-\frac{1}{k^2} \phi'' + h^2 x^2 \phi = \lambda \phi$$

şeklindedir.

Şimdi sabit  $p$  ve  $r$  için  $h_2 > h_1$  ise  $Q = h_2^2 x^2 > h_1^2 x^2 = q$  olup, Teorem 7 e göre  $\lambda_n(Q) > \lambda_n(q)$  dir. Yani  $\lambda = \lambda(h)$  fonksiyonu artan bir fonksiyondur.  $0 < k_1 < k_2$  ise  $0 < \frac{1}{k_2^2} = P < \frac{1}{k_1^2} = p$  olup, Teorem 7 ye göre  $\lambda_n\left(\frac{1}{P}\right) \geq \lambda_n\left(\frac{1}{p}\right)$  dir. Yani  $\lambda = \lambda(k)$  fonksiyonu azalan bir fonksiyondur.

Başka bir sonuç (26)-(27) sınır değer problemi için Teorem 1 ve Teorem 2 e göre bütün öz değerleri reel ve pozitif, Teorem 5 ve Teorem 6 ya göre ise problemin sayılabilir sayıda  $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$  öz değerleri mevcuttur ve bu öz değerlere karşılık gelen  $\phi_0, \phi_1, \dots$  öz fonksiyonları ortogonal bir küme oluşturur.

Ayrıca  $\forall x \in [0,1]$ , için  $\phi_0 > 0$ ,  $\phi_1$  bir sıfır yerine,  $\phi_2$  iki sıfır yerine,...  $\phi_n$  n sıfır yerine sahiptir. Fiziksel anlam ifade eden çözüm  $\lambda_0$  öz değerine karşılık gelen  $\phi_0$  öz fonksiyonudur.

Regüler ve singüler Sturm – Liouville probleminin öz değerlerini hesaplamak için geliştirilen en güvenilir yazılımlardan birisi Fortran dili ile yazılan SLEIGN2 yazılımıdır. Aşağıda önce bu yazılım ile elde edilen sonuçlar verilecek, daha sonra ise farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlar, bu yazılım ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

### 2.3.2. SLEIGN2 ile Elde Edilen Sayısal Sonuçlar

(26)-(27) regüler Sturm – Liouville problemi

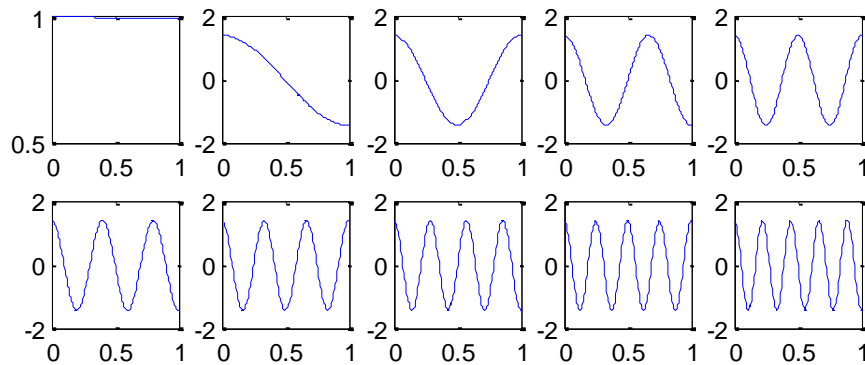
$$-(p(x)\phi'(x))' + q(x)\phi(x) = \lambda r(x)\phi(x)$$

$$p(x) = 1, q(x) = k^2 h^2 x^2, r(x) = k^2, \lambda = 1 - \tau^2 + \mu$$

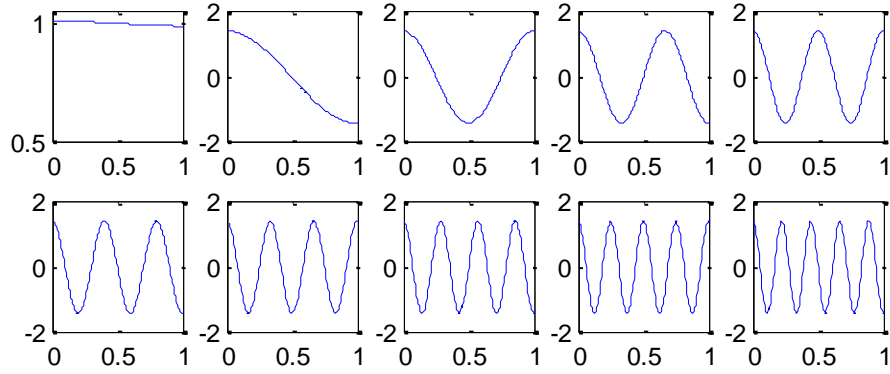
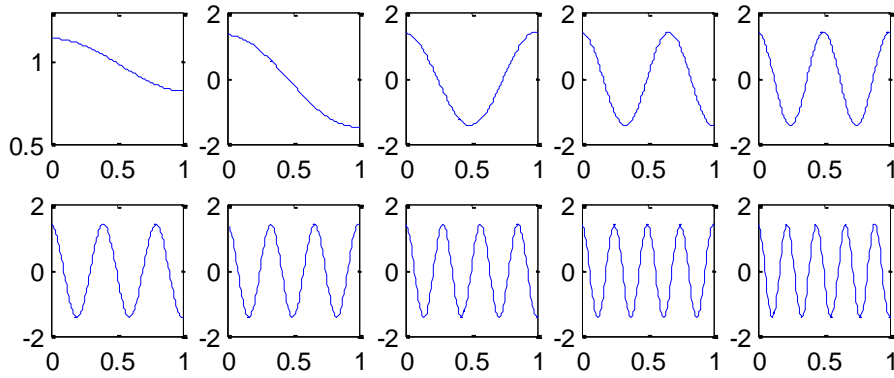
şeklinde yazılır ve SLEIGN2 ile çözülmüşse farklı  $k$  ve  $h$  değerleri için elde edilen özdeğer ve özfonksiyonlar aşağıdaki gibi olacaktır.

Tablo 4.  $k = 0.5, h = 0.5, 1, 2, 3, 4$  için SLEIGN2 ile elde edilen özdeğerler

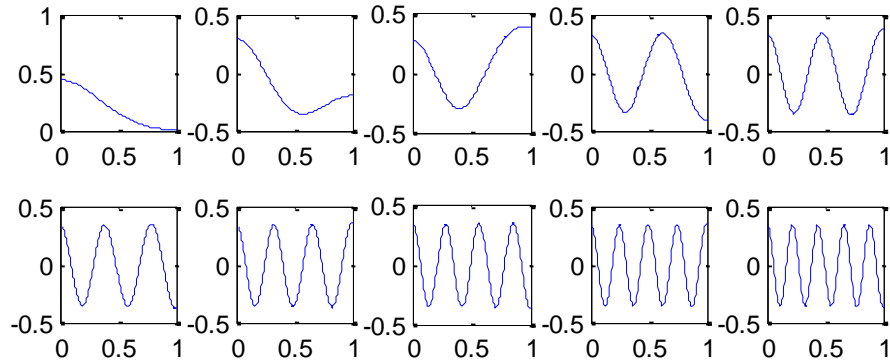
	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$
h=0.5	0.083	39.575	158.000	355.391	631.739	987.044	1421.307	1934.526	2526.702	3197.835
h=1	0.331	39.864	158.260	355.645	631.991	987.296	1421.558	1934.777	2526.953	3198.086
h=2	1.300	41.040	159.301	356.663	633.001	988.302	1422.562	1935.780	2527.955	3199.088
h=3	2.832	43.063	161.046	358.363	634.687	989.981	1424.237	1937.453	2529.627	3200.758
h=4	4.814	46.017	163.509	360.750	637.049	992.333	1426.583	1939.795	2531.967	3203.097



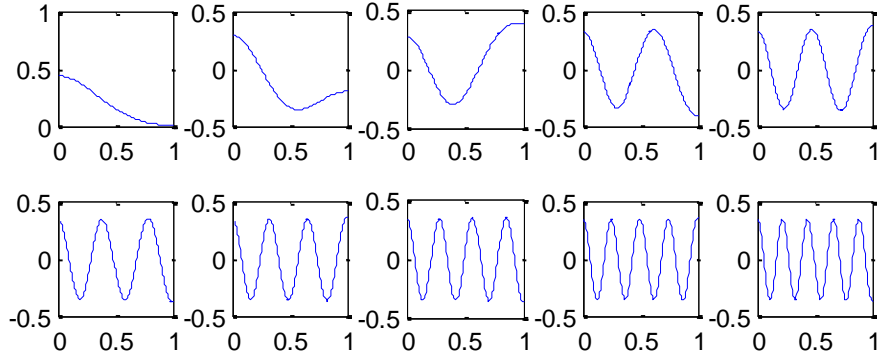
Şekil 46.  $k = 0.5, h = 0.5$  için SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar

Şekil 47.  $k = 0.5, h = 1$  için SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlarŞekil 48.  $k = 0.5, h = 4$  için sleign2 ile elde edilen özfonksiyonlarTablo 5.  $k = 4, h = 0.5, 1, 2, 3, 4$  için SLEIGN2 ile elde edilen özdeğerler

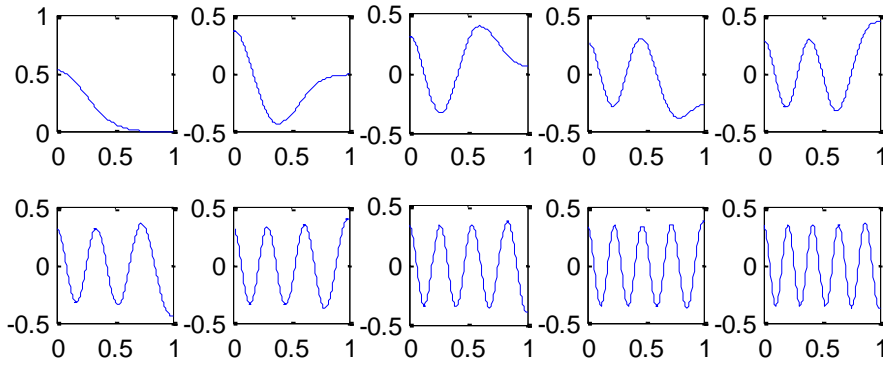
	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$
h=0.5	0.075	0.719	2.555	5.637	9.954	15.505	22.290	30.309	39.562	50.048
h=1	0.227	1.074	2.830	5.896	10.209	15.758	22.542	30.561	39.813	50.299
h=2	0.499	2.402	4.156	7.008	11.261	16.789	23.563	31.576	40.824	51.308
h=3	0.750	3.741	6.557	9.237	13.167	18.584	25.312	33.300	42.534	53.009
h=4	0.999	5.000	8.976	12.700	16.319	21.314	27.878	35.792	44.983	55.431

Şekil 49.  $k = 4, h = 0.5$  için sleign2 ile elde edilen özfonksiyonlar





Şekil 50.  $k = 4, h = 2$  için sleign2 ile elde edilen özfonksiyonlar



Şekil 51.  $k = 4, h = 4$  için sleign2 ile elde edilen özfonksiyonlar

Yukarıdaki verilere ve grafiklere bakıldığında farklı  $k$  ve  $h$  değerleri için tüm öz değerler teorik sonuçlarla uyumlu olarak reel ve

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$$

şeklindedir. Ayrıca  $q(x) = k^2 h^2 x^2 > 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$  olduğundan dolayı bütün özdeğerler pozitiftir.

Grafiklerden görülen diğer bir sonuç ise ilk özdeğere karşılık gelen özfonksiyonunun sıfır yeri yok iken, ikinci öz değere karşılık gelen özfonksiyonun bir sıfır yeri, üçüncünün iki sıfır yeri, ... olduğu görülmektedir. Bunlardan fiziksel olarak anlamlı olan ise ilk özdeğer ve ona karşılık gelen ilk özfonksiyondur.

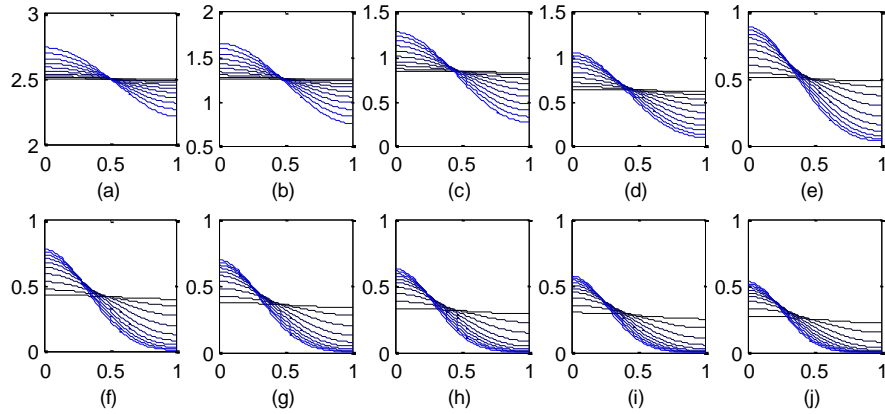
Şimdi  $h$  ve  $k$  nın fonksiyonu olarak  $\lambda_0$  özdeğerlerinin davranışını inceleyelim. Yani sabit bir  $k$  değeri için  $\lambda_0(h_i)$  değerlerine ve sabit bir  $h$  değeri için  $\lambda_0(k_i)$  değerlerine bakalım.

Tablo 6. Sabit  $k$  için  $\lambda_0(h_i)$  dizileri ve sabit  $h$  değeri için  $\lambda_0(k_i)$  dizileri

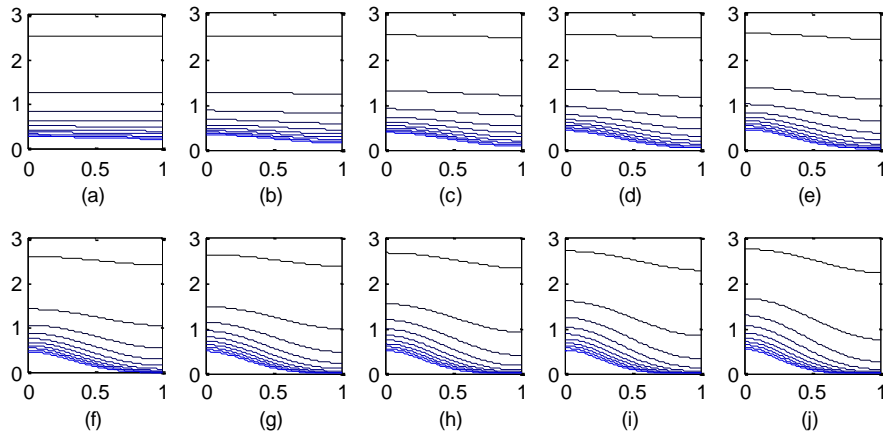
	$h = 0.5$	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$
$k = 0.5$	0.083	0.333	1.300	2.832	4.814
$k = 1$	0.083	0.325	1.204	2.391	3.634
$k = 2$	0.081	0.300	0.908	1.477	1.995
$k = 3$	0.078	0.265	0.656	0.999	1.333
$k = 4$	0.075	0.227	0.498	0.750	0.999

Tablo 6 ya göre sabit  $k$  değerleri için  $\lambda_0(h_i)$  dizileri monoton artan iken, sabit  $h$  değerleri için  $\lambda_0(k_i)$  dizileri monoton azalandır. Bu ise teorik sonuçlarla uyumludur.

Yine  $h$  ve  $k$  nın fonksiyonu olarak  $\psi_0$  öz fonksiyonlarının davranışı incelenirse aşağıdaki sonuçlar gözlemlenmektedir.



Şekil 52. (a)  $k = 0.4$  (b)  $k = 0.8$  (c)  $k = 1.2$  (d)  $k = 1.6$  (e)  $k = 2$  (f)  $k = 2.4$  (g)  $k = 2.8$  (h)  $k = 3.2$  (i)  $k = 3.6$  (j)  $k = 4$  ve  $h = 0.4: 0.4: 4$  olmak üzere sabit  $k$  için  $\phi_0(h_i)$  fonksiyonları (siyahtan maviye)



Şekil 53. (a)  $h = 0.4$  (b)  $h = 0.8$  (c)  $h = 1.2$  (d)  $h = 1.6$  (e)  $h = 2$  (f)  $h = 2.4$  (g)  $h = 2.8$  (h)  $h = 3.2$  (i)  $h = 3.6$  (j)  $h = 4$  ve  $k = 0.4: 0.4: 4$  olmak üzere sabit  $k$  için  $\phi_0(k_i)$  fonksiyonları (siyahtan maviye)

Şekil 52 ye göre sabit  $k$  değerleri için  $h$  azaldıkça çözümler sabit çözüme doğru yaklaşmakta ve yine Şekil 53 e göre sabit  $h$  değerleri için  $k$  azaldıkça çözümler sabit çözüme doğru yaklaşmaktadır.

Şimdi SLEIGN2 yazılımıyla elde edilen  $(\psi_i, \lambda_i), i = 0,1,2, \dots$  çiftleri için

$$E_i = E(\psi_i, \lambda_i) = \int_0^1 \left[ \left( \frac{\psi'}{k} \right)^2 - \lambda \psi^2 + h^2 x^2 \psi^2 \right] dx \cong \sum \left[ \left( \frac{\psi'}{k} \right)^2 - \lambda \psi^2 + h^2 x^2 \psi^2 \right] \Delta x$$

enerji düzeylerini karşılaştıralım.

Tablo 7.  $k=0.5, h=0.5,1,2,3,4$  için enerji seviyeleri

	$h = 0.5$	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$
$E_0$	0.0009	0.0036	0.0120	0.0189	0.0152
$E_1$	-1.7629	-1.7582	-1.7380	-1.6990	-1.6351
$E_2$	-7.0565	-7.0532	-7.0399	-7.0168	-6.9825
$E_3$	-15.8786	-15.8756	-15.8634	-15.8428	-15.8133
$E_4$	-28.2294	-28.2265	-28.2147	-28.1949	-28.1669
$E_5$	-44.1090	-44.1061	-44.0945	-44.0751	-44.0477
$E_6$	-63.5174	-63.5145	-63.5030	-63.4838	-63.4567
$E_7$	-86.4546	-86.4517	-86.4403	-86.4211	-86.3942
$E_8$	-112.9206	-112.9177	-112.9063	-112.8872	-112.8605
$E_9$	-142.9153	-142.9125	-142.9011	-142.8821	-142.8554

Tablo 8.  $k=4, h=0.5,1,2,3,4$  için enerji seviyeleri

	$h = 0.5$	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$
$E_0$	0.0000	-0.0001	-0.0003	-0.0005	-0.0008
$E_1$	-0.0004	-0.0003	-0.0004	-0.0012	-0.0020
$E_2$	-0.0017	-0.0016	-0.0010	-0.0011	-0.0025
$E_3$	-0.0039	-0.0038	-0.0035	-0.0022	-0.0031
$E_4$	-0.0069	-0.0068	-0.0066	-0.0058	-0.0039
$E_5$	-0.0108	-0.0107	-0.0105	-0.0100	-0.0088
$E_6$	-0.0155	-0.0154	-0.0152	-0.0148	-0.0140
$E_7$	-0.0211	-0.0210	-0.0209	-0.0205	-0.0198
$E_8$	-0.0276	-0.0275	-0.0273	-0.0270	-0.0264
$E_9$	-0.0349	-0.0348	-0.0346	-0.0343	-0.0338

Tablo 7 ve Tablo 8 e bakıldığında farklı  $k$  ve  $h$  değerleri için  $\lambda \rightarrow \infty$  iken  $E \rightarrow -\infty$  olduğu görülmektedir.

### 2.3.3. Özdeğer ve Özfonksiyonlar İçin Asimptotik Yöntem

Bu bölümde keyfi bir parametre içeren diferansiyel denklem sistemlerinin asimptotik çözümleri irdelenmiş ve bu yöntem elde ettiğimiz regüler Sturm-Liouville problemine uygulanmıştır. Burada uygulanan yöntem (Hochstadt, 1964) da detaylı olarak incelenmektedir.

$$X' = A(x, \mu)X \quad (30)$$

ile verilen bir denklem sistemi için  $x$  bağımsız değişken,  $\mu$  parametre ve  $A$  ise katsayılar matrisi olmak üzere çoğu durumda  $A$ ,  $\mu$  parametresine bağlı olarak

$$A(x, \mu) = \mu \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \mu^{-k} \quad (31)$$

asimptotik açılımına sahiptir. Şimdi en basit durum olan,  $A$  matrisinin, aşağıdaki şekilde bir köşegen matris olan  $A_0(x)$  için sadece  $\mu A_0(x)$  teriminden oluştuğu durumu inceleyelim.

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n(x) \end{pmatrix}$$

Bu durumda

$$X' = \mu A_0(x)X$$

sistemi  $n$  tane birinci mertebeden denklem sistemi olarak

$$x'_i = \mu a_i(x) x_i, i = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde yazılabilir. Bunlar özdeş olarak

$$x_i = c_i e^{\int \mu a_i(x) dx}$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada  $c_i$  integral sabitleridir.

Şimdi tekrar en genel duruma dönelim.  $A_0(x)$  matrisinin başlangıçta köşegen formda olması gerekmez, fakat  $x$  in fonksiyonu olarak farklı özdeğerlere sahip olduğunu varsayalım. Bu takdirde tekil olmayan bir  $T(x)$  matrisi bulunabilir öyle ki

$$T^{-1}(x)A_0(x)T(x)$$

köşegen bir matristir. Bu takdirde

$$X = TY$$

dönüşümü yaparak baskın terim köşegen formda olan denklemi elde edebiliriz.

$$T'Y + TY' = \mu \sum_{k=0}^{\infty} A_k \mu^{-k} TY = \mu A_0 TY + A_1 TY + \mu \sum_{k=2}^{\infty} A_k \mu^{-k} TY$$

$$Y' = \left[ \mu T^{-1} A_0 T + (T^{-1} A_1 T - T^{-1} T') + \mu \sum_{k=2}^{\infty} T^{-1} A_k T \mu^{-k} \right] Y$$

$A_0(x)$  matrisinin farklı elemanlara sahip köşegen matris olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$X' = \left( \mu \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \mu^{-k} \right) X$$

denkleminin,  $V_k(x)$  bilinmeyen katsayıların vektörel formu olmak üzere

$$X = e^{\mu \int a_1(x) dx} \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x) \mu^{-k}$$

şeklinde bir çözümünü araştıralım. Bu çözüm denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \mu a_1 e^{\mu \int a_1 dx} \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x) \mu^{-k} + e^{\mu \int a_1 dx} \sum_{k=0}^{\infty} V_k'(x) \mu^{-k} \\
&= \mu e^{\mu \int a_1 dx} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} \sum_{i=0}^k A_{k-i} V_i(x) \\
& \mu a_1 \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x) \mu^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} V_k'(x) \mu^{-k} = \mu \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k} \sum_{i=0}^k A_{k-i} V_i(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.  $\mu^{-k}$  nın katsayıları karşılıklı olarak eşleştirilirse  $V_k$  lar için

$$(A_0 - a_1 I)V_0 = 0$$

$$(A_0 - a_1 I)V_k = V_{k-1}' - \sum_{i=0}^{k-1} A_{k-i} V_i, k = 1, 2, \dots$$

elde edilir.  $\det(A_0 - a_1 I) = 0$  olduğundan denklemlerden ilkinin sıfırdan farklı bir çözümü vardır. İkinci denklem için de determinant sıfırdır, fakat  $V_0$  henüz tek türlü belirli olmadığından ikinci denklemi uyumlu yapacak şekilde seçilmelidir. Bu durumda  $V_1$  tanımlanacak ve benzer adımlar  $V_2, V_3, \dots$  için takip edilecektir. Burada özetlenen yöntem (Hochstadt, 1964) den derlenmiştir. Detaylar için ilgili referansa başvurulmalıdır.

Şimdi bir Sturm-Liouville problemi olarak göz önüne aldığımız GL denklemini yukarıda bahsettiğimiz asimptotik açılım yöntemiyle çözelim.

$$\phi'' + k^2(\lambda - h^2 x^2)\phi = 0$$

$$\phi'(0) = \phi'(1) = 0$$

Denklemi yukarıdaki şekilde diferansiyel denklem sistemi olarak yazmak için

$$\mu^2 = k^2 \lambda, q(x) = k^2 h^2 x^2$$

olmak üzere

$$\phi'' = -\mu^2\phi + q(x)\phi$$

için

$$x_1 = \phi, \quad \mu x_2 = \phi'$$

dönüşümü yapalım. Bu takdirde

$$x_1' = \mu x_2$$

$$x_2' = -\mu x_1 + \frac{1}{\mu} x_1 q(x)$$

olup

$$X' = \left[ \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q(x) & 0 \end{pmatrix} \right] X$$

sistemi elde edilir. Baskın matrisi köşegenleştirmek için

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} Y$$

dönüşümü yapılırsa

$$Y' = \left[ \mu A_0 + \frac{1}{\mu} A_2 \right] Y$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, A_1 = 0, A_2 = \begin{pmatrix} iq/2 & q/2 \\ q/2 & -iq/2 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$$Y = e^{-i\mu x} \sum_{k=0}^{\infty} V_k \mu^{-k}$$

şeklinde bir çözüm ararsak daha önce yukarıda elde ettiğimiz bağıntıya göre  $a_i = -i$  için

$$\begin{aligned}(A_0 + iI)V_0 &= 0 \\ (A_0 + iI)V_1 &= V_0' \\ (A_0 + iI)V_k &= V_{k-1}' - A_2V_{k-2}, k = 2, 3, \dots\end{aligned}$$

elde edilir.

$$(A_0 + iI)V_0 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} V_0 = 0$$

olduğundan  $P_0(x)$  keyfi olmak üzere

$$V_0(x) = \begin{pmatrix} P_0(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. İkinci denklemden

$$(A_0 + iI)V_1 = V_0' \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} V_1 = \begin{pmatrix} P_0'(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan  $P_1(x)$  keyfi olmak üzere

$$P_0'(x) = 0 \Rightarrow P_0(x) = a, V_0(x) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, V_1(x) = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$$(A_0 + iI)V_2 = V_1' - A_2V_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} V_2 = \begin{pmatrix} P_1'(x) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} iq/2 & q/2 \\ q/2 & -iq/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} V_2 = \begin{pmatrix} P_1'(x) - \frac{iaq}{2} \\ -\frac{aq}{2} \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$P_1'(x) = \frac{iaq}{2} \Rightarrow P_1(x) = \frac{ia}{2} \int q dx, V_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{ia}{2} \int q dx \\ 0 \end{pmatrix}, V_2(x) = \begin{pmatrix} P_2(x) \\ \frac{iaq}{4} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Üçüncü denklemini yazarsak



$$(A_0 + iI)V_3 = V_2' - A_2V_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} V_3 = \begin{pmatrix} P_2'(x) \\ \frac{iaq'}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} iq/2 & q/2 \\ q/2 & -iq/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ia}{2} \int_0^x q dx \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} V_3 = \begin{pmatrix} P_2'(x) + \frac{a}{4}q \int q dx \\ \frac{iaq'}{4} - \frac{iaq}{4} \int q dx \end{pmatrix}$$

olup

$$P_2'(x) = -\frac{a}{4}q \int q dx \Rightarrow P_2(x) = -\frac{a}{8} \left( \int q dx \right)^2$$

$$V_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{8} \left( \int q dx \right)^2 \\ \frac{iaq}{4} \end{pmatrix}, V_3(x) = \begin{pmatrix} P_3(x) \\ \frac{aq'}{8} - \frac{aq}{8} \int q dx \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Dördüncü denklemi de yazarsak

$$(A_0 + iI)V_4 = V_3' - A_2V_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} V_4$$

$$= \begin{pmatrix} P_3'(x) \\ \frac{aq''}{8} - \frac{aq'}{8} \int q dx - \frac{aq^2}{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} iq/2 & q/2 \\ q/2 & -iq/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{a}{8} \left( \int q dx \right)^2 \\ \frac{iaq}{4} \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$P_3'(x) = -\frac{ia}{16}q \left( \int q dx \right)^2 + \frac{ia}{8}q^2 \Rightarrow P_3(x) = -\frac{ia}{48} \left( \int q dx \right)^3 + \frac{ia}{8} \int q^2 dx$$

$$V_3(x) = \begin{pmatrix} -\frac{ia}{48} \left( \int q dx \right)^3 + \frac{ia}{8} \int q^2 dx \\ \frac{aq'}{8} - \frac{aq}{8} \int q dx \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. O halde

$$V_0(x) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, V_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{ia}{2} \int q dx \\ 0 \end{pmatrix}, V_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{8} \left( \int q dx \right)^2 \\ \frac{iaq}{4} \end{pmatrix}$$

$$V_3(x) = \begin{pmatrix} -\frac{ia}{48} \left( \int q dx \right)^3 + \frac{ia}{8} \int q^2 dx \\ \frac{aq'}{8} - \frac{aq}{8} \int q dx \end{pmatrix}, \dots$$

şeklinde olduğundan

$$Y = e^{-i\mu x} \sum_{k=0}^{\infty} V_k \mu^{-k}$$

$$= e^{-i\mu x} \left( \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu^{-1} \begin{pmatrix} \frac{ia}{2} \int q dx \\ 0 \end{pmatrix} + \mu^{-2} \begin{pmatrix} -\frac{a}{8} \left( \int q dx \right)^2 \\ \frac{iaq}{4} \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + \mu^{-3} \begin{pmatrix} -\frac{ia}{48} \left( \int q dx \right)^3 + \frac{ia}{8} \int q^2 dx \\ \frac{aq'}{8} - \frac{aq}{8} \int q dx \end{pmatrix} \dots \right)$$

elde edilir.

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ i & \frac{1}{2} \end{pmatrix} Y \text{ ve } x_1 = \phi$$

olduğundan  $\phi$  için lineer bağımsız çözümlerden biri

$$\psi_1 = a e^{-i\mu x} \left( \frac{1}{2} + \left( \frac{i}{4} \int q dx \right) \mu^{-1} + \left( -\frac{1}{16} \left( \int q dx \right)^2 + \frac{q}{8} \right) \mu^{-2} \right.$$

$$\left. + \left( -\frac{i}{96} \left( \int q dx \right)^3 + \frac{i}{16} \int q^2 dx + \frac{i}{16} q \int q dx - \frac{iq'}{16} \right) + \dots \right)$$

olarak elde edilir. Diğer lineer bağımsız çözümü elde etmek için

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \end{pmatrix} Y$$

dönüşümü yapılırsa

$$Y' = \left[ \mu A_0 + \frac{1}{\mu} A_2 \right] Y$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -iq/2 & q/2 \\ q/2 & iq/2 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$$Y = e^{i\mu x} \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x) \mu^{-k}$$

şeklinde bir çözüm aranırsa  $a = i$  için

$$(A_0 - iI)V_0 = 0$$

$$(A_0 - iI)V_1 = V_0'$$

$$(A_0 - iI)V_k = V_{k-1}' - A_2 V_{k-2}, k = 2, 3, \dots$$

olup

$$\begin{aligned} \phi_2 = be^{i\mu x} & \left( \frac{1}{2} + \left( -\frac{i}{4} \int q dx \right) \mu^{-1} + \left( -\frac{1}{16} \left( \int q dx \right)^2 + \frac{q}{8} \right) \mu^{-2} \right. \\ & \left. + \left( \frac{i}{96} \left( \int q dx \right)^3 - \frac{i}{16} \int q^2 dx - \frac{i}{16} q \int q dx + \frac{iq'}{16} \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

bulunur.  $\phi_1, \phi_2$  iki lineer bağımsız çözüm ise

$$\begin{aligned} V_1 = \phi_1 + \phi_2 & = \cos \mu x + \sin \mu x \left( \frac{1}{2} \int q dx \right) \mu^{-1} + \cos \mu x \left( -\frac{1}{8} \left( \int q dx \right)^2 + \frac{q}{4} \right) \mu^{-2} \\ & + \sin \mu x \left( -\frac{1}{48} \left( \int q dx \right)^3 + \frac{1}{8} \int q^2 dx + \frac{1}{8} q \int q dx - \frac{q'}{8} \right) \mu^{-3} \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2 &= i(\phi_1 - \phi_2) \\
&= \sin \mu x - \cos \mu x \left( \frac{1}{2} \int q dx \right) \mu^{-1} + \sin \mu x \left( -\frac{1}{8} \left( \int q dx \right)^2 + \frac{q}{4} \right) \mu^{-2} \\
&\quad - \cos \mu x \left( -\frac{1}{48} \left( \int q dx \right)^3 + \frac{1}{8} \int q^2 dx + \frac{1}{8} q \int q dx - \frac{q'}{8} \right) \mu^{-3} \dots
\end{aligned}$$

olup, genel çözüm

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= c_0 \left( \cos \mu x + \sin \mu x \left( \frac{1}{2} \int q dx \right) \mu^{-1} + \cos \mu x \left( -\frac{1}{8} \left( \int q dx \right)^2 + \frac{q}{4} \right) \mu^{-2} \right. \\
&\quad \left. + \sin \mu x \left( -\frac{1}{48} \left( \int q dx \right)^3 + \frac{1}{8} \int q^2 dx + \frac{1}{8} q \int q dx - \frac{q'}{8} \right) \mu^{-3} \dots \right) \\
&\quad + c_1 \left( \sin \mu x - \cos \mu x \left( \frac{1}{2} \int q dx \right) \mu^{-1} + \sin \mu x \left( -\frac{1}{8} \left( \int q dx \right)^2 + \frac{q}{4} \right) \mu^{-2} \right. \\
&\quad \left. - \cos \mu x \left( -\frac{1}{48} \left( \int q dx \right)^3 + \frac{1}{8} \int q^2 dx + \frac{1}{8} q \int q dx - \frac{q'}{8} \right) \mu^{-3} \dots \right)
\end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Burada  $\mu = \sqrt{k^2 \lambda}$ ,  $q(x) = k^2 h^2 x^2$  dir. Çözümün sınır şartlarını sağlaması için  $c_0$  ve  $c_1$  belirlemeye çalışalım.

i) Sadece ilk terimleri alalım.

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= c_0 \cos \mu x + c_1 \sin \mu x \\
\phi' &= -c_0 \mu \sin \mu x - c_1 \mu \cos \mu x \\
\phi'(0) &= 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\
\phi'(1) &= 0 \Rightarrow -c_0 \mu \sin \mu = 0 \Rightarrow \mu_n = n\pi, n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

özdeğerleri bulunur. Dolayısıyla

$$\mu_{1,n} = n\pi \Rightarrow \lambda_{1,n} = \frac{n^2 \pi^2}{k^2}$$

özdeğerlerine karşılık

$$\phi_{1,n} = \cos n\pi x$$

özfonksiyonları elde edilir.

ii) İlk iki terimi alalım. Bu durumda

$$\phi(x) = c_0 \left( \cos \mu x + \frac{1}{2\mu} \sin \mu x \left( \int q dx \right) \right) + c_1 \left( \sin \mu x - \frac{1}{2\mu} \cos \mu x \left( \int q dx \right) \right)$$

$$\phi(x) = c_0 \left( \cos \mu x + \frac{1}{2\mu} \sin \mu x \left( k^2 h^2 \int x^2 dx \right) \right) \\ + c_1 \left( \sin \mu x - \frac{1}{2\mu} \cos \mu x \left( k^2 h^2 \int x^2 dx \right) \right)$$

$$\phi(x) = c_0 \left( \cos \mu x + \frac{k^2 h^2}{6\mu} x^3 \sin \mu x \right) + c_1 \left( \sin \mu x - \frac{k^2 h^2}{6\mu} x^3 \cos \mu x \right)$$

elde edilir.  $c_0$  ve  $c_1$  katsayılarını belirlemek için sınır şartlarını uygulayalım.

$$\phi'(x) = c_0 \left( -\mu \sin \mu x + \frac{k^2 h^2}{2\mu} x^2 \left( \sin \mu x + \frac{\mu}{3} x \cos \mu x \right) \right) \\ + c_1 \left( \mu \cos \mu x - \frac{k^2 h^2}{2\mu} x^2 \left( \cos \mu x - \frac{\mu}{3} x \sin \mu x \right) \right)$$

$$\phi'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\phi'(1) = 0 \Rightarrow c_0 \left( -\mu \sin \mu + \frac{k^2 h^2}{2\mu} \left( \sin \mu + \frac{\mu}{3} \cos \mu \right) \right) = 0$$

$$\Rightarrow -\mu \sin \mu + \frac{k^2 h^2}{2\mu} \left( \sin \mu + \frac{\mu}{3} \cos \mu \right) = 0 \Rightarrow -\sin \mu \left( \mu - \frac{k^2 h^2}{2\mu} \right) + \frac{k^2 h^2}{6} \cos \mu = 0$$

$$\Rightarrow -\tan \mu + \frac{k^2 h^2 \mu}{6\mu^2 - 3k^2 h^2} = 0$$

$\mu_{2,n}$  ler son denklemin çözümünden elde edilen özdeğerler olmak üzere  $\lambda_{2,n} = \frac{\mu_{2,n}^2}{k^2}$  şeklindedir. Özfonksiyonlar ise

$$\phi_{2,n} = \cos(\mu_{2,n} x) + \frac{k^2 h^2}{6\mu_{2,n}} x^3 \sin(\mu_{2,n} x)$$

şeklindedir.

iii) İlk üç terimi alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\phi(x) &= c_0 \left( \cos \mu x + \sin \mu x \left( \frac{1}{2} \int q dx \right) \mu^{-1} + \cos \mu x \left( -\frac{1}{8} \left( \int q dx \right)^2 + \frac{q}{4} \right) \mu^{-2} \right) \\ &+ c_1 \left( \sin \mu x - \cos \mu x \left( \frac{1}{2} \int q dx \right) \mu^{-1} + \sin \mu x \left( -\frac{1}{8} \left( \int q dx \right)^2 + \frac{q}{4} \right) \mu^{-2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(x) &= c_0 \left( \cos \mu x + \frac{k^2 h^2}{6\mu} x^3 \sin \mu x + \frac{k^2 h^2}{4\mu^2} \left( x^2 - \frac{k^2 h^2 x^6}{18} \right) \cos \mu x \right) \\ &+ c_1 \left( \sin \mu x - \frac{k^2 h^2}{6\mu} x^3 \cos \mu x + \frac{k^2 h^2}{4\mu^2} \left( x^2 - \frac{k^2 h^2 x^6}{18} \right) \sin \mu x \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= c_0 \left( -\mu \sin \mu x + \frac{k^2 h^2}{2\mu} x^2 \left( \sin \mu x + \frac{\mu}{3} x \cos \mu x \right) \right. \\ &+ \left. \frac{k^2 h^2}{4\mu^2} \left[ \left( 2x - \frac{k^2 h^2 x^5}{3} \right) \cos \mu x - \left( x^2 - \frac{k^2 h^2 x^6}{18} \right) \mu \sin \mu x \right] \right) \\ &+ c_1 \left( \mu \cos \mu x - \frac{k^2 h^2}{2\mu} x^2 \left( \cos \mu x - \frac{\mu}{3} x \sin \mu x \right) \right. \\ &+ \left. \frac{k^2 h^2}{4\mu^2} \left[ \left( 2x - \frac{k^2 h^2 x^5}{3} \right) \sin \mu x + \left( x^2 - \frac{k^2 h^2 x^6}{18} \right) \mu \cos \mu x \right] \right)\end{aligned}$$

$$\phi'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\phi'(1) = 0$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow c_0 \left( -\mu \sin \mu + \frac{k^2 h^2}{2\mu} \left( \sin \mu + \frac{\mu}{3} \cos \mu \right) \right. \\ &+ \left. \frac{k^2 h^2}{4\mu^2} \left[ \left( 2 - \frac{k^2 h^2}{3} \right) \cos \mu - \left( 1 - \frac{k^2 h^2}{18} \right) \mu \sin \mu \right] \right) = 0 \\ &\Rightarrow -\tan \mu + \frac{6k^2 h^2 (2\mu^2 + 6 - k^2 h^2)}{(k^2 h^2 (18 + k^2 h^2) - 72\mu^2) \mu} = 0\end{aligned}$$

olarak bulunur.  $\mu_{3,n}$  ler son denklemin çözümünden elde edilen özdeğerler olmak üzere

$\lambda_{3,n} = \frac{\mu_{3,n}^2}{k^2}$  şeklindedir. Özfonksiyonlar ise

$$\phi_{3,n} = \cos(\mu_{3,n} x) + \frac{k^2 h^2}{6\mu_{3,n}} x^3 \sin(\mu_{3,n} x) + \frac{k^2 h^2}{4\mu_{3,n}^2} \left( x^2 - \frac{k^2 h^2 x^6}{18} \right) \cos(\mu_{3,n} x)$$

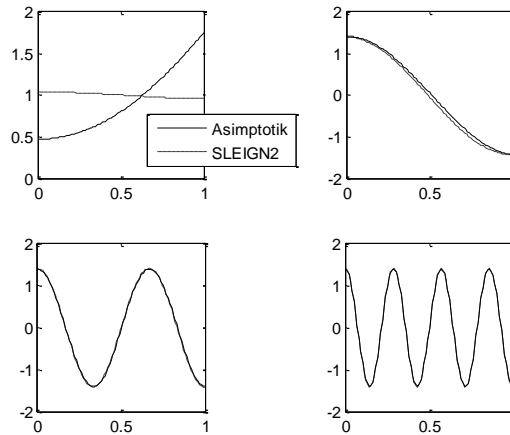
şeklindedir.

İlk iki terimden sonraki durumlarda öz değerleri veren denklemler lineer olmadığından öz değerleri bulmak için MATLAB de fsolve fonksiyonunu kullanıp, bulduğumuz sonuçları SLEIGN2 yazılımından elde edilen sonuçlarla karşılaştıralım. Bunun için farklı  $k$  ve  $h$  değerleri için elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Tablo 9 da  $k = 1, h = 1$  ve Tablo 10 da  $k = 4, h = 1$  değerleri için ilk terim ve ilk iki terim kullanılarak asimptotik olarak elde edilen özdeğerler SLEIGN2 ile elde edilen özdeğerlerle karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Yöntem bir asimptotik yöntem olduğundan  $\lambda \rightarrow \infty$  için iyi sonuçlar verirken  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  için sonuçların iyi olmadığı görülmektedir. Ayrıca Bölüm 2.3.1 de verilen sonuçlar doğrultusunda, elde edilen özdeğerlerin hepsinin reel ve pozitif sayılabilir sayıda olduğu görülmektedir. Ayrıca Şekil 54 ve Şekil 55 de bu değerler için elde edilen ilk dört özfonksiyonun grafikleri sunulmuştur. Bu grafiklerden de sonuçların  $\lambda \rightarrow \infty$  için oldukça iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 9.  $k = 1, h = 1$  için asimptotik yöntem ile elde edilen özdeğerler

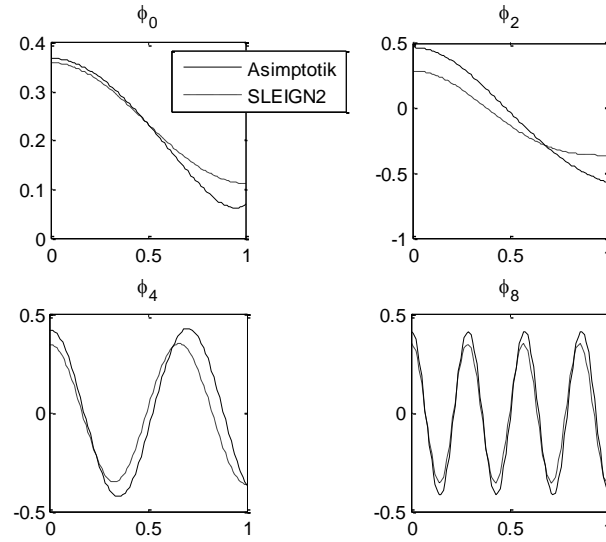
SLEIGN2		İlk terim		İlk iki terim	
$n$	$\lambda_n$	$n$	$\lambda_{1,n}$	$n$	$\lambda_{2,n}$
0	0.3249	0	0	0	0.6301
1	10.2600	1	9.8696	1	10.2167
2	39.8253	2	39.4784	2	39.8152
3	89.1657	3	88.8264	3	89.1613
4	158.2503	4	157.9137	4	158.2479
5	247.0755	5	246.7401	5	247.0740
6	355.6405	6	355.3058	6	355.6395
7	483.9450	7	483.6106	7	483.9442
8	631.9888	8	631.6547	8	631.9882
9	799.7719	9	799.4380	9	799.7715
10	987.2943	10	986.9604	10	987.2939



Şekil 54.  $k = 1, h = 1$  için asimptotik yöntem ve SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar

Tablo 10.  $k = 4, h = 1$  için asimptotik yöntem ile elde edilen özdeğerler

SLEIGN2		İlk terim		İlk iki terim	
$n$	$\lambda_n$	$n$	$\lambda_{1,n}$	$n$	$\lambda_{2,n}$
0	0.2271	0	0	0	0.2818
1	1.0744	1	0.6169	1	1.0256
2	2.8295	2	2.4674	2	2.8321
3	5.8959	3	5.5517	3	5.9002
4	10.2087	4	9.8696	4	10.2117
5	15.7582	5	15.4213	5	15.7603
6	22.5424	6	22.2066	6	22.5439
7	30.5608	7	30.2257	7	30.5619
8	39.8131	8	39.4784	8	39.8140
9	50.2992	9	49.9649	9	50.3000
10	62.0192	10	61.6850	10	62.0198

Şekil 55.  $k=4, h=1$  için asimptotik yöntem ve SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar

Şimdi ilk özdeğerler için daha iyi sonuçlar veren Galerkin yöntemini inceleyelim.

#### 2.3.4. Galerkin Yöntemi ile Özdeğer ve Özfonksiyonlar

2.3.3 de uygulanan yöntem ile elde edilen özdeğer ve özfonksiyonların SLEIGN2 ile elde edilen ilk özdeğer ve özfonksiyon dışında uyum içinde olduğu görülmektedir. Ancak ilk özdeğer ve özfonksiyon sayısal olarak hesaplamalardan farklıdır. Bunun için bu bölümde ilk özdeğer ve özfonksiyonu belirlemek amacıyla Galerkin Yöntemini kullanıyoruz.



$$\phi'' + k^2(\lambda - h^2 x^2)\phi = 0, \phi'(0) = \phi'(1) = 0 \quad (32)$$

sınır değer problemini ele alalım. (32) problemini çözmek için

$$\phi_k = \cos(k-1)\pi x, k = 1, 2, \dots$$

lineer bağımsız fonksiyonlar olmak üzere

$$\hat{\phi}(x) = \phi_0(x) + \sum_{k=1}^N c_k \phi_k(x)$$

şeklinde bir çözüm arayalım. Sınır şartları homojen olduğundan  $\phi_0(x) = 0$  olarak seçilir.  $c_k$  katsayılarını belirlemek için

$$E_N(x) = \hat{\phi}'' + k^2(\lambda - h^2 x^2)\hat{\phi}$$

rezidüsünü tanımlayarak

$$\int_0^1 E_N(x)\phi_k(x)dx = 0, k = 1, 2, \dots$$

integralleri sonucunda elde edilen ve bilinmeyenlerin  $c_k$  katsayıları olduğu lineer denklem sistemini çözelim.

İlk olarak  $N = 1$  olsun. Bu takdirde  $\phi_0(x) = 0, \phi_1(x) = 1$  ve  $\hat{\phi}(x) = c_1$  olup

$$E_1(x) = \hat{\phi}'' + k^2(\lambda - h^2 x^2)\hat{\phi} = k^2(\lambda - h^2 x^2)c_1$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} \int_0^1 E_1(x)\phi_1(x)dx &= 0 \Rightarrow \int_0^1 k^2(\lambda - h^2 x^2)c_1 dx = 0 \\ \Rightarrow c_1 \left( k^2 \lambda x - k^2 h^2 \frac{x^3}{3} \right)_0^1 &= 0 \Rightarrow c_1 \left( k^2 \lambda - \frac{k^2 h^2}{3} \right) = 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \frac{h^2}{3} \end{aligned}$$

özdeğeri ve ona karşılık

$$\phi_1(x) = c_1$$

özfonksiyonu elde edilir.

Şimdi  $N = 2$  alalım. Bu takdirde  $\phi_1(x) = 1, \phi_2(x) = \cos \pi x$  için

$$\hat{\phi}(x) = c_1 + c_2 \cos \pi x$$

olup

$$E_2(x) = \hat{\phi}'' + k^2(\lambda - h^2 x^2)\hat{\phi}$$

$$E_2(x) = -c_2 \pi^2 \cos \pi x + k^2(\lambda - h^2 x^2)(c_1 + c_2 \cos \pi x)$$

şeklindedir.  $\phi_1(x) = 1$  için

$$\begin{aligned} \int_0^1 E_2(x)\phi_1(x)dx &= 0 \Rightarrow \int_0^1 [-c_2 \pi^2 \cos \pi x + k^2(\lambda - h^2 x^2)(c_1 + c_2 \cos \pi x)]dx = 0 \\ -c_2 \pi^2 \int_0^1 \cos \pi x dx + k^2 \lambda \left( c_1 \int_0^1 dx + c_2 \int_0^1 \cos \pi x dx \right) \\ &\quad - k^2 h^2 \left( c_1 \int_0^1 x^2 dx + c_2 \int_0^1 x^2 \cos \pi x dx \right) = 0 \\ \Rightarrow \left( k^2 \lambda - \frac{k^2 h^2}{3} \right) c_1 + \frac{2k^2 h^2}{\pi^2} c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

elde edilir.  $\phi_2(x) = \cos \pi x$  için ise

$$\begin{aligned} \int_0^1 E_2(x)\phi_2(x)dx &= 0 \\ \int_0^1 [-c_2 \pi^2 \cos \pi x + k^2(\lambda - h^2 x^2)(c_1 + c_2 \cos \pi x)] \cos \pi x dx &= 0 \\ -c_2 \pi^2 \int_0^1 \cos^2 \pi x dx + k^2 \lambda \left( c_1 \int_0^1 \cos \pi x dx + c_2 \int_0^1 \cos^2 \pi x dx \right) \\ &\quad - k^2 h^2 \left( c_1 \int_0^1 x^2 \cos \pi x dx + c_2 \int_0^1 x^2 \cos^2 \pi x dx \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{2k^2h^2}{\pi^2}c_1 + \left( \frac{k^2\lambda}{2} - \frac{\pi^2}{2} - \frac{(2\pi^2+3)}{12\pi^2}k^2h^2 \right)c_2 = 0 \quad (34)$$

elde edilir. (33) ve (34) ifadelerinden

$$\begin{pmatrix} k^2\lambda - \frac{k^2h^2}{3} & \frac{2k^2h^2}{\pi^2} \\ \frac{2k^2h^2}{\pi^2} & \frac{k^2\lambda}{2} - \frac{\pi^2}{2} - \frac{(2\pi^2+3)}{12\pi^2}k^2h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Sıfırdan farklı  $c_1, c_2$  çözümünü elde edebilmek için

$$\begin{vmatrix} k^2\lambda - \frac{k^2h^2}{3} & \frac{2k^2h^2}{\pi^2} \\ \frac{2k^2h^2}{\pi^2} & \frac{k^2\lambda}{2} - \frac{\pi^2}{2} - \frac{(2\pi^2+3)}{12\pi^2}k^2h^2 \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} & \left( k^2\lambda - \frac{k^2h^2}{3} \right) \left( \frac{k^2\lambda}{2} - \frac{\pi^2}{2} - \frac{(2\pi^2+3)}{12\pi^2}k^2h^2 \right) - \frac{4k^4h^4}{\pi^4} = 0 \\ & \frac{k^4}{2}\lambda^2 - \left( \frac{k^4h^2}{6} + \frac{k^2\pi^2}{2} + \frac{k^4h^2(2\pi^2+3)}{12\pi^2} \right) \lambda + \frac{k^4h^4(2\pi^2+3)}{36\pi^2} + \frac{k^2h^2\pi^2}{6} - \frac{4k^4h^4}{\pi^4} \\ & = 0 \\ & a = \frac{k^4}{2}, \quad b = - \left( \frac{k^4h^2}{6} + \frac{k^2\pi^2}{2} + \frac{k^4h^2(2\pi^2+3)}{12\pi^2} \right) \\ & c = \frac{k^4h^4(2\pi^2+3)}{36\pi^2} + \frac{k^2h^2\pi^2}{6} - \frac{4k^4h^4}{\pi^4} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

olarak bulunur.

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{1}{12k^2\pi^2} \left( 4k^2h^2\pi^2 + 6\pi^4 + 3k^2h^2 - 3(4\pi^8 + 4k^2h^2\pi^4 + 129k^4h^4)^{\frac{1}{2}} \right)$$

özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon

$$\hat{\phi}_1(x) = c_1 + c_2 \cos \pi x$$

$$\hat{\phi}_1(x) = c_2 \left( \frac{\pi^4}{8k^2h^2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16k^4h^2} (4k^4\pi^8 + 4k^6h^2\pi^4 + 129k^8h^4)^{\frac{1}{2}} + \cos \pi x \right)$$

$$\hat{\phi}_1(x) = c_2 \left( \frac{\pi^4}{4k^2h^2} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{8} - \frac{\lambda_1}{4} + \cos \pi x \right)$$

ve

$$\lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{1}{12k^2\pi^2} \left( 4k^2h^2\pi^2 + 6\pi^4 + 3k^2h^2 + 3(4\pi^8 + 4k^2h^2\pi^4 + 129k^4h^4)^{\frac{1}{2}} \right)$$

özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon ise

$$\hat{\phi}_2(x) = c_2 \left( \frac{\pi^4}{8k^2h^2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16k^4h^2} (4k^4\pi^8 + 4k^6h^2\pi^4 + 129k^8h^4)^{\frac{1}{2}} + \cos \pi x \right)$$

$$\hat{\phi}_2(x) = c_2 \left( \frac{\pi^4}{4k^2h^2} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{8} + \frac{\lambda_2}{4} + \cos \pi x \right)$$

şeklindedir.

$N = 3$  alalım. Bu takdirde  $\phi_1(x) = 1, \phi_2(x) = \cos \pi x, \phi_3(x) = \cos 2\pi x$  için

$$\hat{\phi}(x) = c_1 + c_2 \cos \pi x + c_3 \cos 2\pi x$$

olup

$$E_3(x) = \hat{\phi}'' + k^2(\lambda - h^2x^2)\hat{\phi}$$

$$E_3(x) = -c_2\pi^2 \cos \pi x + k^2(\lambda - h^2x^2)(c_1 + c_2 \cos \pi x + c_3 \cos 2\pi x)$$

şeklindedir.  $\phi_1(x) = 1$  için

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 E_3(x)\phi_1(x)dx = 0 \\
& \Rightarrow \int_0^1 [-c_2\pi^2 \cos \pi x + k^2(\lambda - h^2x^2)(c_1 + c_2 \cos \pi x + c_3 \cos 2\pi x)]dx = 0 \\
& -c_2\pi^2 \int_0^1 \cos \pi x dx + k^2\lambda \left( c_1 \int_0^1 dx + c_2 \int_0^1 \cos \pi x dx + c_3 \int_0^1 \cos 2\pi x dx \right) \\
& \quad - k^2h^2 \left( c_1 \int_0^1 x^2 dx + c_2 \int_0^1 x^2 \cos \pi x dx + c_3 \int_0^1 x^2 \cos 2\pi x dx \right) = 0 \\
& \Rightarrow \left( k^2\lambda - \frac{k^2h^2}{3} \right) c_1 + \frac{2k^2h^2}{\pi^2} c_2 - \frac{k^2h^2}{2\pi^2} c_3 = 0 \tag{35}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $\phi_2(x) = \cos \pi x$  için

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 E_3(x)\phi_2(x)dx = 0 \\
& \int_0^1 [-c_2\pi^2 \cos \pi x + k^2(\lambda - h^2x^2)(c_1 + c_2 \cos \pi x + c_3 \cos 2\pi x)] \cos \pi x dx = 0 \\
& -c_2\pi^2 \int_0^1 \cos^2 \pi x dx \\
& \quad + k^2\lambda \left( c_1 \int_0^1 \cos \pi x dx + c_2 \int_0^1 \cos^2 \pi x dx + c_3 \int_0^1 \cos \pi x \cos 2\pi x dx \right) \\
& \quad - k^2h^2 \left( c_1 \int_0^1 x^2 \cos \pi x dx + c_2 \int_0^1 x^2 \cos^2 \pi x dx \right. \\
& \quad \left. + c_3 \int_0^1 x^2 \cos \pi x \cos 2\pi x dx \right) = 0 \\
& \Rightarrow \frac{2k^2h^2}{\pi^2} c_1 + \left( \frac{k^2\lambda}{2} - \frac{\pi^2}{2} - \frac{(2\pi^2 + 3)}{12\pi^2} k^2h^2 \right) c_2 + \frac{10k^2h^2}{9\pi^2} c_3 = 0 \tag{36}
\end{aligned}$$

bulunur.  $\phi_3(x) = \cos 2\pi x$  için

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 E_3(x)\phi_3(x)dx = 0 \\
& \int_0^1 [-c_2\pi^2 \cos \pi x + k^2(\lambda - h^2x^2)(c_1 + c_2 \cos \pi x + c_3 \cos 2\pi x)] \cos 2\pi x dx = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c_2\pi^2 \int_0^1 \cos \pi x \cos 2\pi x \, dx \\
& + k^2\lambda \left( c_1 \int_0^1 \cos 2\pi x \, dx + c_2 \int_0^1 \cos \pi x \cos 2\pi x \, dx + c_3 \int_0^1 \cos^2 2\pi x \, dx \right) \\
& - k^2h^2 \left( c_1 \int_0^1 x^2 \cos 2\pi x \, dx + c_2 \int_0^1 x^2 \cos \pi x \cos 2\pi x \, dx \right. \\
& \left. + c_3 \int_0^1 x^2 \cos^2 2\pi x \, dx \right) = 0 \\
\Rightarrow & -\frac{k^2h^2}{2\pi^2}c_1 + \frac{10k^2h^2}{9\pi^2}c_2 + \left( \frac{k^2\lambda}{2} - \frac{(8\pi^2 + 3)k^2h^2}{48\pi^2} \right) c_3 = 0 \tag{37}
\end{aligned}$$

(35), (36) ve (37) ifadelerinden

$$\begin{pmatrix} k^2\lambda - \frac{k^2h^2}{3} & \frac{2k^2h^2}{\pi^2} & -\frac{k^2h^2}{2\pi^2} \\ \frac{2k^2h^2}{\pi^2} & \frac{k^2\lambda}{2} - \frac{\pi^2}{2} - \frac{(2\pi^2 + 3)}{12\pi^2}k^2h^2 & \frac{10k^2h^2}{9\pi^2} \\ -\frac{k^2h^2}{2\pi^2} & \frac{10k^2h^2}{9\pi^2} & \frac{k^2\lambda}{2} - \frac{(8\pi^2 + 3)k^2h^2}{48\pi^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Sıfırdan farklı  $c_1, c_2, c_3$  çözümünü elde edebilmek için

$$\begin{vmatrix} k^2\lambda - \frac{k^2h^2}{3} & \frac{2k^2h^2}{\pi^2} & -\frac{k^2h^2}{2\pi^2} \\ \frac{2k^2h^2}{\pi^2} & \frac{k^2\lambda}{2} - \frac{\pi^2}{2} - \frac{(2\pi^2 + 3)}{12\pi^2}k^2h^2 & \frac{10k^2h^2}{9\pi^2} \\ -\frac{k^2h^2}{2\pi^2} & \frac{10k^2h^2}{9\pi^2} & \frac{k^2\lambda}{2} - \frac{(8\pi^2 + 3)k^2h^2}{48\pi^2} \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
a &= \frac{k^6}{4}, b = -\frac{h^2k^6}{4} - \frac{5\pi^2k^4}{4} - \frac{5h^2k^6}{32\pi^2} \\
c &= \frac{1}{12}h^4k^6 + \frac{5}{6}\pi^2h^2k^4 + \frac{5h^4k^6}{48\pi^2} + k^2\pi^4 + \frac{17}{32}h^2k^4 - \frac{3257h^4k^6}{974\pi^4} \\
d &= \frac{65h^4k^4}{8\pi^2} - \frac{155}{81\pi^6}h^6k^6 - \frac{1}{108}h^6k^6 - \frac{5}{36}\pi^2h^4k^4 - \frac{5h^6k^6}{288\pi^2} - \frac{1}{3}\pi^4h^2k^2 \\
&\quad - \frac{17}{96}h^4k^4 + \frac{3432h^6k^6}{3079\pi^4}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$$

denklemini elde edilir. Bu polinomun kökleri ise aradığımız özdeğerlerdir.

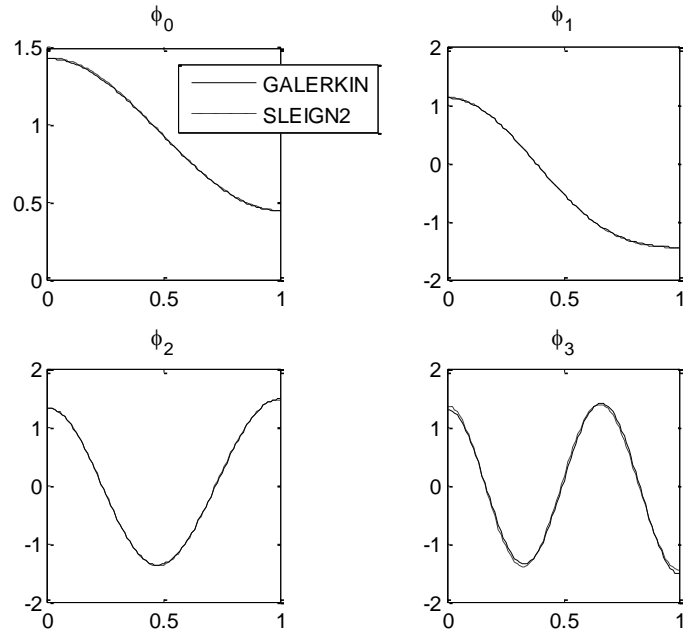
Galerkin yöntemi ile  $N = 1,2,3$  olarak elde edilen özdeğerler ile SLEIGN2 yazılımı ile elde edilen sonuçların karşılaştırması Tablo 11 de sunulmuştur.

Tablo 11. Farklı  $k, h$  değerleri için Galerkin yöntemi ile elde edilen özdeğerler

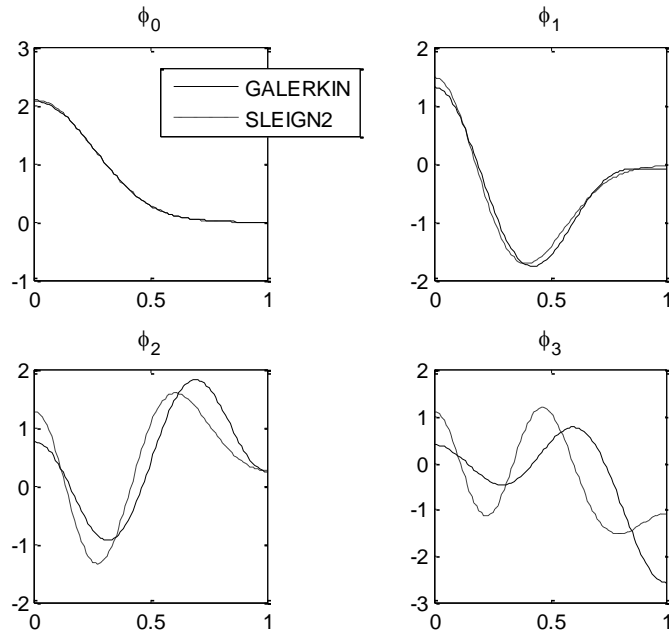
k	h	N=1			N=2			N=3			SLEIGN2		
		$\lambda_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$			
0.1	0.1	0.0033	0.0033	986.964	0.0033	986.96	3947.8	0.0033	986.964	3947.8			
0.1	0.5	0.0833	0.0833	987.056	0.0833	987.06	3947.9	0.0833	987.056	3947.9			
0.5	0.1	0.0033	0.0033	39.4823	0.0033	39.4823	157.917	0.0033	39.4822	157.917			
0.5	0.5	0.0833	0.0832	39.5745	0.0832	39.5745	158.000	0.0832	39.5745	158.000			
0.5	1	0.3333	0.3313	39.8645	0.3312	39.8641	158.260	0.3312	39.8640	158.259			
1	0.5	0.0833	0.0828	9.9661	0.0828	9.9660	39.5650	0.0828	9.9660	39.5649			
1	1	0.3333	0.3251	10.2619	0.3250	10.2601	39.8263	0.3249	10.2600	39.8253			
2	1	0.3333	0.3011	2.8836	0.3009	2.8763	10.2231	0.3008	2.8760	10.2193			
1	2	1.3333	1.2045	11.5344	1.2037	11.5051	40.8925	1.2035	11.5042	40.8773			
2	2	1.3333	0.9087	4.4280	0.9085	4.2998	11.3820	0.9085	4.2979	11.3183			
3	1	0.3333	0.2657	1.5482	0.2657	1.5309	4.7499	0.2656	1.5304	4.7411			
1	3	3	2.3916	13.9340	2.3909	13.7779	42.7491	2.3906	13.7743	42.6706			
4	1	0.3333	0.2272	1.1070	0.2271	1.0750	2.8455	0.2271	1.0744	2.8295			
1	4	5.3333	3.6349	17.7120	3.6341	17.1993	45.5278	3.6337	17.1919	45.2733			
4	2	1.3333	0.5257	2.9604	0.4990	2.4123	4.4263	0.4988	2.4022	4.1555			
2	4	5.3333	2.1029	11.8417	1.9959	9.6491	17.7053	1.9953	9.6090	16.6221			
4	4	5.3333	1.4066	10.6875	1.0275	5.9327	13.1372	0.9999	4.9995	8.9762			

Tablo 11 e göre SLEIGN2 ve Galerkin yöntemiyle elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında Galerkin yöntemi ilk özdeğerler için oldukça iyi sonuçlar vermektedir.  $k$  ve  $h$  nın büyük değerlerinde daha iyi sonuçlar elde edebilmek için  $N$  değerini büyütme gerekmektedir. Bu ise elde edilen polinomun derecesini yükseltecek ve köklerin bulunmasını zorlaştıracaktır. Bu durum yöntemin bir dezavantajıdır.

Yöntemin avantajı ise fiziksel olarak anlamlı olan ve pozitif özfonksiyonu veren ilk özdeğer için oldukça iyi sonuçlar vermesidir. Bu sonuç Şekil 56 da  $k = 4, h = 1$  ve Şekil 57 de  $k = 4, h = 4$  değerleri için verilen ilk dört özfonksiyonun grafiğine bakıldığında görülmektedir. Ayrıca  $k$  ve  $h$  nın büyük değerlerinde yöntemin  $N$  nin küçük değerleri iyi sonuçlar vermediği Tablo 12 de SLEIGN2 ile karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir.



Şekil 56.  $k=4$ ,  $h=1$  için Galerkin ve SLEIGN2 ile elde edilen öz fonksiyonlar



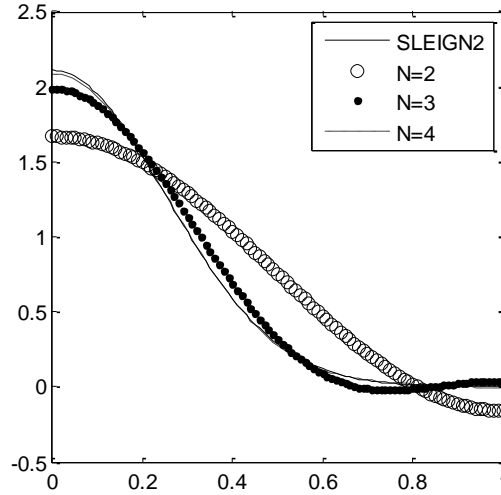
Şekil 57.  $k=4$ ,  $h=4$  için Galerkin ve SLEIGN2 ile elde edilen öz fonksiyonlar

Tablo 12.  $k$  ve  $h$  nın büyük değerleri için Galerkin ile elde edilen özdeğerler

k	h	N=3			SLEIGN2		
		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
2	4	1.9959	9.6491	17.7053	1.9953	9.6090	16.6221
4	4	1.0275	5.9327	13.1372	0.9999	4.9995	8.9762
4	8	2.5612	18.9950	49.5808	1.9999	9.9999	17.9999
8	4	0.6403	4.7488	12.3952	0.4999	2.4999	4.4999
8	8	2.0952	17.8061	48.9227	0.9999	5.0000	9.0000



Şekil 58 de  $k$  ve  $h$  nın büyük değerlerinde  $N$  değerlerini artırarak sonuçlar gözlemlendiğinde özfonksiyonların SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyona yakınsadığı görülmektedir.



Şekil 58.  $k = 4, h = 4$  için artan  $N$  değerleri için Galerkin ile elde edilen ilk özfonksiyonlar

### 2.3.5. Picard Yöntemi ile Özdeğer ve Özfonksiyonlar

$$\phi'' + k^2(\lambda - h^2 x^2)\phi = 0, \phi'(0) = \phi'(1) = 0 \quad (38)$$

problemini

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, y_1(0) = a \\ y_2' &= k^2(h^2 x^2 - \lambda)y_1, y_2(0) = 0 \end{aligned}$$

başlangıç değer problemi olarak ele alalım ve Picard yöntemiyle çözelim. Picard yöntemine göre

$$Y_{k+1} = Y_0 + \int_0^x F(t, Y_k) dt, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} y_2 \\ k^2(h^2 x^2 - \lambda)y_1 \end{bmatrix}, k = 0, 1, 2, \dots$$

son iterasyon adımıdaki çözümde  $\psi'(1) = 0$  yani  $y_2(1) = 0$  şartı yerine yazılırsa  $\lambda$  öz değerleri bulunabilir. Örneğin iki adım için problemi incelersek

$$\begin{aligned}
Y_1 &= Y_0 + \int_0^x \left[ k^2(h^2 t^2 - \lambda) a \right] dt = [a] + \left[ a \left( k^2 \left( \frac{h^2 x^3}{3} - \lambda x \right) \right) \right] = \left[ a \left( k^2 \left( \frac{h^2 x^3}{3} - \lambda x \right) \right) \right] \\
Y_2 &= Y_0 + \int_0^x \left[ \begin{array}{c} a \left( k^2 \left( \frac{h^2 t^3}{3} - \lambda t \right) \right) \\ k^2(h^2 t^2 - \lambda) a k^2 \left( \frac{1}{12} h^2 t^4 - \frac{1}{2} \lambda t^2 \right) \end{array} \right] dt \\
&= [a] + \left[ \begin{array}{c} a k^2 \left( \frac{1}{12} h^2 x^4 - \frac{1}{2} \lambda x^2 \right) \\ a k^2 \left( \frac{1}{84} k^2 h^4 x^7 - \frac{7}{60} k^2 \lambda h^2 x^5 + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} k^2 \lambda^2 + h^2 \right) x^3 - \lambda x \right) \end{array} \right] \\
&= \left[ \begin{array}{c} a + a k^2 \left( \frac{1}{12} h^2 x^4 - \frac{1}{2} \lambda x^2 \right) \\ a k^2 \left( \frac{1}{84} k^2 h^4 x^7 - \frac{7}{60} k^2 \lambda h^2 x^5 + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} k^2 \lambda^2 + h^2 \right) x^3 - \lambda x \right) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$y_2(x) = a k^2 \left( \frac{1}{84} k^2 h^4 x^7 - \frac{7}{60} k^2 \lambda h^2 x^5 + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} k^2 \lambda^2 + h^2 \right) x^3 - \lambda x \right)$$

olup  $y_2(1) = 0$  için

$$\begin{aligned}
a k^2 \left( \frac{1}{84} k^2 h^4 - \frac{7}{60} k^2 \lambda h^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} k^2 \lambda^2 + h^2 \right) - \lambda \right) &= 0 \\
\frac{1}{84} k^2 h^4 - \frac{7}{60} k^2 \lambda h^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} k^2 \lambda^2 + h^2 \right) - \lambda &= 0
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir.  $k = 4, h = 1$  için

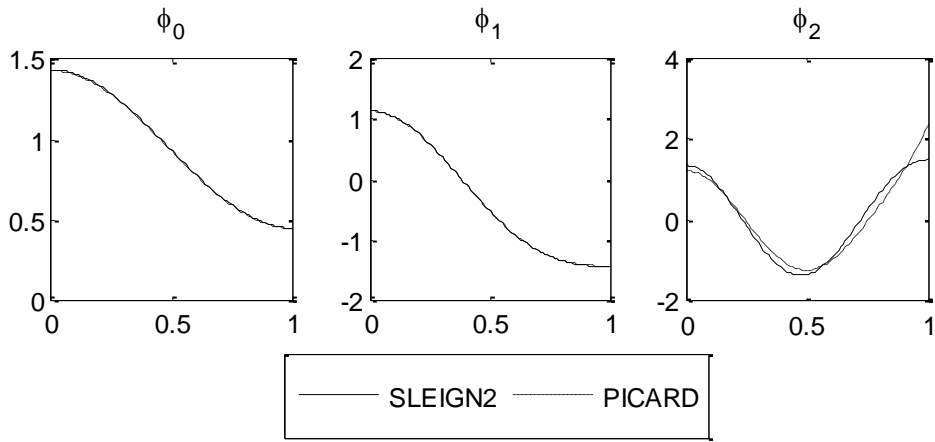
$$\frac{176}{21} - \frac{688}{15} \lambda + \frac{128}{3} \lambda^2 = 0$$

denkleminde  $\lambda$  değerleri belirlenir.

Picard yöntemiyle yapılan testler incelendiğinde özellikle pozitif  $\phi$  çözümünü veren ilk  $\lambda$  özdeğeri için iyi sonuçlar elde edilmektedir. Yöntemin dezavantajı ise  $\kappa$  ve  $h$  değeri büyüdükçe  $n$  değerini büyük seçmek gerekmektedir.

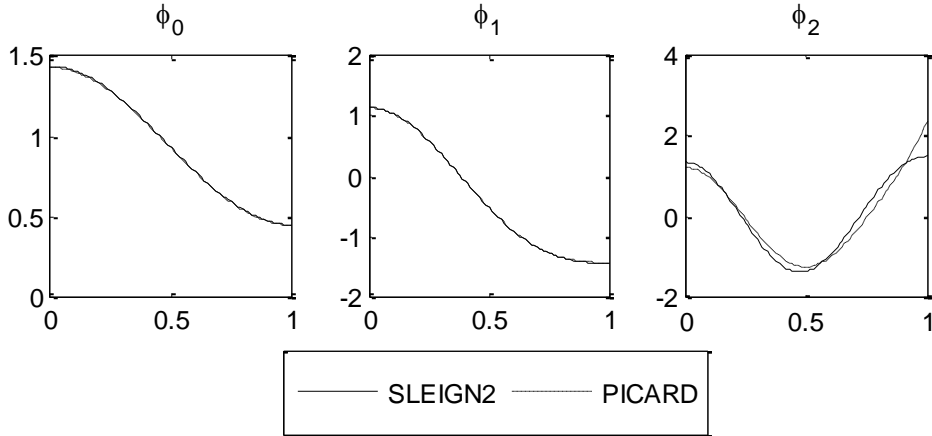
Picard yöntemiyle elde edilen çözümlerden bazıları aşağıda sunulmuştur. Örnekler incelendiğinde Picard yöntemiyle elde edilen sonuçların özellikle ilk özdeğerler için SLEIGN2 ile elde edilen sonuçlara yakınsadığı görülmektedir. Yine Şekil 59 ve Şekil 60 de Picard ve SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar incelendiğinde ilk özfonksiyonlar için Picard yönteminin iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

**Örnek**  $k = 4, h = 1$  olsun. Bu durumda SLEIGN2 için  $\lambda_0 = 0.2271, \lambda_1 = 1.0744, \lambda_2 = 2.8295$  Picard için  $\lambda_0 = 0.2271, \lambda_1 = 1.0745, \lambda_2 = 2.5898$  olup özfonksiyonlar ise aşağıdaki şekildedir.



Şekil 59.  $k = 4, h = 1$  için SLEIGN2 ve Picard ile elde edilen özfonksiyonlar

**Örnek**  $k = 1, h = 4$  olsun. Bu durumda SLEIGN2 için  $\lambda_0 = 3.6337, \lambda_1 = 17.1919, \lambda_2 = 45.2733$  Picard için  $\lambda_0 = 3.6338, \lambda_1 = 17.1922, \lambda_2 = 41.4363$  olup özfonksiyonlar ise aşağıdaki şekildedir.



Şekil 60.  $k = 1, h = 4$  için SLEIGN2 ve Picard ile elde edilen özfonksiyonlar

### 2.3.6. Pertürbasyon Problemi Olarak Ginzburg-Landau

Bu bölümde normal hale yakın komşulukta elde edilen Ginzburg-Landau denkleminin  $k$  nın büyük değerlerine karşılık gelen pertürbasyon problemini ele alacağız.

$$\frac{1}{k^2} \phi'' + (\lambda - h^2 x^2) \phi = 0, \phi'(0) = \phi'(1) = 0$$

denkleminde  $x = \frac{1}{k} X$  dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d\phi}{dx} = k \frac{d\phi}{dX} \text{ ve } \frac{d^2\phi}{dx^2} = k^2 \frac{d^2\phi}{dX^2}$$

olup

$$\phi'' + \left( \lambda - h^2 \frac{x^2}{k^2} \right) \phi = 0$$

$$\phi'' + (\lambda - \varepsilon x^2) \phi = 0, \phi'(0) = \phi'(k) = 0, k \gg h \text{ için } \varepsilon = \frac{h^2}{k^2}$$

pertürbasyon problemi elde edilir. Bu problemi çözmek için

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \dots$$

ve

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots$$

yaklaşımları yapılırsa

$$\phi_0'' + \varepsilon \phi_1'' + \varepsilon^2 \phi_2'' + \dots ((\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots) - \varepsilon t^2) (\phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \dots) = 0$$

elde edilir. Şimdi  $O(\varepsilon^0)$  için

$$\phi_0'' + \lambda_0 \phi_0 = 0, \phi_0'(0) = \phi_0'(k) = 0$$

denklemini elde edilir.

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= A \cos \sqrt{\lambda_0} x + B \sin \sqrt{\lambda_0} x \\ \phi_0'(x) &= -A \sqrt{\lambda_0} \sin \sqrt{\lambda_0} x + B \sqrt{\lambda_0} \cos \sqrt{\lambda_0} x \\ \phi_0'(0) &= 0 \Rightarrow B = 0 \\ \phi_0'(k) &= 0 \Rightarrow -A \sqrt{\lambda_0} \sin \sqrt{\lambda_0} k = 0 \\ \lambda_0 &= \frac{n^2 \pi^2}{k^2}, n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

özdeğerleri ve

$$\phi_0(x) = A \cos \frac{n\pi x}{k}, n = 0, 1, 2, \dots$$

özfonksiyonları elde edilir.

A) Bu durumda  $\lambda_0 = 0, \psi_0 = 1$  olsun.

$$\begin{aligned}\varepsilon^1: \phi_1'' + \lambda_0 \phi_1 + \lambda_1 \phi_0 - x^2 \phi_0 &= 0 \\ \phi_1'' = (x^2 - \lambda_1) \Rightarrow \phi_1' &= \left( \frac{x^3}{3} - \lambda_1 x \right) + B \Rightarrow \phi_1 = \left( \frac{x^4}{12} - \frac{\lambda_1 x^2}{2} \right) + Bx + C \\ \phi_1'(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ve } \phi_1'(k) = 0 \Rightarrow \lambda_1 &= \frac{k^2}{3}\end{aligned}$$

ve

$$\phi_1 = \left( \frac{x^4}{12} - \lambda_1 \frac{x^2}{2} \right)$$

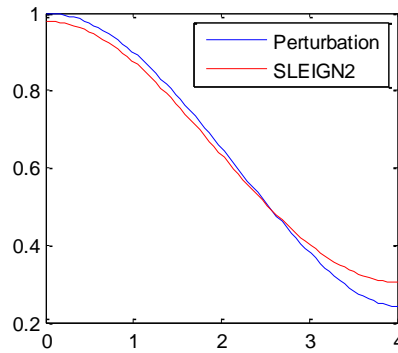
elde edilir.

$$\begin{aligned}\varepsilon^2: \phi_2'' + \lambda_0 \phi_2 + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_0 - x^2 \phi_1 &= 0 \\ \phi_2'' + \lambda_1 \left( \frac{x^4}{12} - \lambda_1 \frac{x^2}{2} \right) + \lambda_2 - x^2 \left( \frac{x^4}{12} - \lambda_1 \frac{x^2}{2} \right) &= 0 \\ \lambda_2 = \frac{k^6}{84} - 7\lambda_1 \frac{k^4}{60} + \frac{\lambda_1^2 k^2}{6} = -\frac{8}{945} k^6 = -\frac{8}{35} \lambda_1^3 \\ \phi_2 = \frac{x^8}{672} - 7\lambda_1 \frac{x^6}{360} + \frac{\lambda_1^2 x^4}{24} - \frac{\lambda_2 x^2}{2}\end{aligned}$$

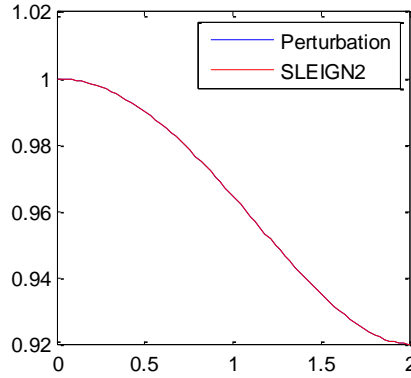
$$\begin{aligned} \varepsilon^3: \phi_3'' + \lambda_0 \phi_3 + \lambda_1 \phi_2 + \lambda_2 \phi_1 + \lambda_3 \phi_0 - x^2 \phi_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= \frac{k^{10}}{7392} - 7\lambda_1 \frac{k^8}{3240} + \lambda_1^2 \frac{k^6}{168} - \lambda_2 \frac{k^4}{10} - \lambda_1 \frac{k^8}{6048} + 7\lambda_1^2 \frac{k^6}{2520} - \lambda_1^3 \frac{k^4}{120} \\ &\quad + \lambda_2 \lambda_1 \frac{k^2}{3} - \lambda_2 \frac{k^4}{60} = \frac{32}{467775} k^{10} = \frac{32}{1925} \lambda_1^5 \\ \phi_3 &= \frac{x^{12}}{88704} - 7\lambda_1 \frac{x^{10}}{32400} + \lambda_1^2 \frac{x^8}{1344} - \lambda_2 \frac{x^6}{60} - \lambda_1 \frac{x^{10}}{60480} + 7\lambda_1^2 \frac{x^8}{20160} - \lambda_1^3 \frac{x^6}{720} \\ &\quad + \lambda_2 \lambda_1 \frac{x^4}{12} - \lambda_2 \frac{x^6}{360} - \lambda_3 \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla ilk üç yaklaşım sonunda ilk özdeğer ve ilk özfonksiyon için analitik bir yaklaşım elde etmiş olduk. Simdi bunu bazı değerler için SLEIGN2 ile karşılaştıralım.

$k = 4, h = 1$  için SLEIGN2 ile elde edilen ilk özdeğer  $\lambda = 0.2271$  iken pertürbasyon probleminde ilk üç yaklaşım sonucunda elde edilen ilk özdeğer ise  $\lambda = 0.2153$  şeklindedir. Bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar ise Şekil 61 verilmiştir.  $k = 2, h = 0.5$  için SLEIGN2 ile elde edilen ilk özdeğer  $\lambda = 0.0812$  iken pertürbasyon probleminde ilk üç yaklaşım sonucunda elde edilen ilk özdeğer de  $\lambda = 0.0812$  dir ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar Şekil 62 de verilmiştir. Her iki örnekten de  $k$  nın büyük değerleri için pertürbasyon probleminin iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.



Şekil 61.  $k = 4, h = 1$  için SLEIGN2 ve pertürbasyon probleminde elde edilen ilk özfonksiyonlar



Şekil 62.  $k = 2, h = 0.5$  için SLEIGN2 ve pertürbasyon probleminde elde edilen ilk özfonksiyonlar

B)  $n \geq 1$  olsun.

$$\varepsilon^1: \phi_1'' + \lambda_0 \phi_1 + \lambda_1 \phi_0 - x^2 \phi_0 = 0$$

$$\phi_1'' + \lambda_0 \phi_1 + (\lambda_1 - x^2) \cos \sqrt{\lambda_0} x = 0$$

$$\phi_1'' + \lambda_0 \phi_1 = (x^2 - \lambda_1) \cos \sqrt{\lambda_0} x$$

olup bu ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan bir lineer diferensiyel denklemdir. Bu denklemin homojen kısmının çözümü

$$\phi_{1h}(x) = A \cos \sqrt{\lambda_0} x + B \sin \sqrt{\lambda_0} x$$

dir. Belirsiz katsayılar yöntemiyle

$$\phi_{1p}(x) = x(A_2 x^2 + A_1 x + A_0) \cos \sqrt{\lambda_0} x + x(B_2 x^2 + B_1 x + B_0) \sin \sqrt{\lambda_0} x$$

şeklinde bir özel çözüm olarak aranırsa  $\phi_1$  için özel çözüm

$$\phi_{1p}(x) = \frac{1}{4\lambda_0} x^2 \cos \sqrt{\lambda_0} x + \left( \frac{1}{6\sqrt{\lambda_0}} x^3 - \frac{1}{4\lambda_0^{3/2}} x - \frac{\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_0}} x \right) \sin \sqrt{\lambda_0} x$$

olarak bulunur. Dolayısıyla genel çözüm

$$\phi_1(t) = A \cos \sqrt{\lambda_0} x + B \sin \sqrt{\lambda_0} x + \frac{1}{4\lambda_0} x^2 \cos \sqrt{\lambda_0} x + \left( \frac{1}{6\sqrt{\lambda_0}} x^3 - \frac{1}{4\lambda_0^{3/2}} x - \frac{\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_0}} x \right) \sin \sqrt{\lambda_0} x$$

olarak elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\phi_1' &= -A\sqrt{\lambda_0} \sin \sqrt{\lambda_0} x + B\sqrt{\lambda_0} \cos \sqrt{\lambda_0} x + \frac{1}{2\lambda_0} x \cos \sqrt{\lambda_0} x - \frac{1}{4\sqrt{\lambda_0}} x^2 \sin \sqrt{\lambda_0} x \\ &\quad + \left( \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}} x^2 - \frac{1}{4\lambda_0^{\frac{3}{2}}} - \frac{\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_0}} \right) \sin \sqrt{\lambda_0} x + \left( \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4\lambda_0} x - \frac{\lambda_1}{2} x \right) \cos \sqrt{\lambda_0} x \\ \phi_1'(0) &= 0 \Rightarrow B = 0 \\ \phi_1'(k) &= 0 \\ \Rightarrow -A\sqrt{\lambda_0} \sin \sqrt{\lambda_0} k + \frac{1}{2\lambda_0} k \cos \sqrt{\lambda_0} k - \frac{1}{4\sqrt{\lambda_0}} k^2 \sin \sqrt{\lambda_0} k \\ &\quad + \left( \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}} k^2 - \frac{1}{4\lambda_0^{\frac{3}{2}}} - \frac{\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_0}} \right) \sin \sqrt{\lambda_0} k + \left( \frac{1}{6} k^3 - \frac{1}{4\lambda_0} k - \frac{\lambda_1}{2} k \right) \cos \sqrt{\lambda_0} k = 0 \\ \left( \frac{1}{2\lambda_0} k + \frac{1}{6} k^3 - \frac{1}{4\lambda_0} k - \frac{\lambda_1}{2} k \right) \cos \sqrt{\lambda_0} k &= 0 \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2\lambda_0} + \frac{k^2}{3}\end{aligned}$$

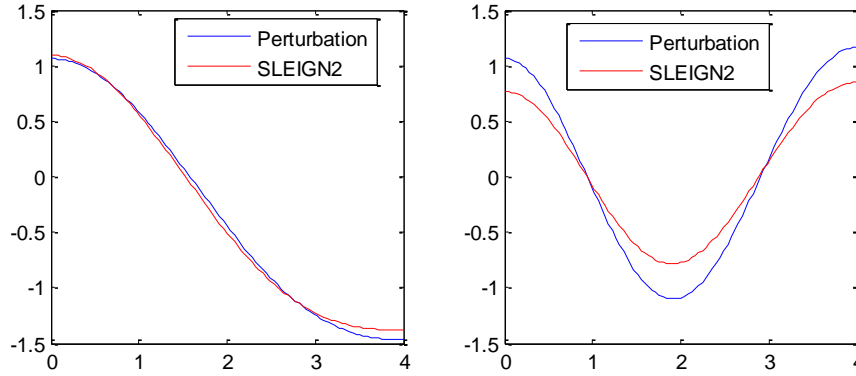
ve

$$\phi_1(x) = \cos \sqrt{\lambda_0} x + \frac{1}{4\lambda_0} x^2 \cos \sqrt{\lambda_0} x + \left( \frac{1}{6\sqrt{\lambda_0}} x^3 - \frac{1}{4\lambda_0^{3/2}} x - \frac{\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_0}} x \right) \sin \sqrt{\lambda_0} x$$

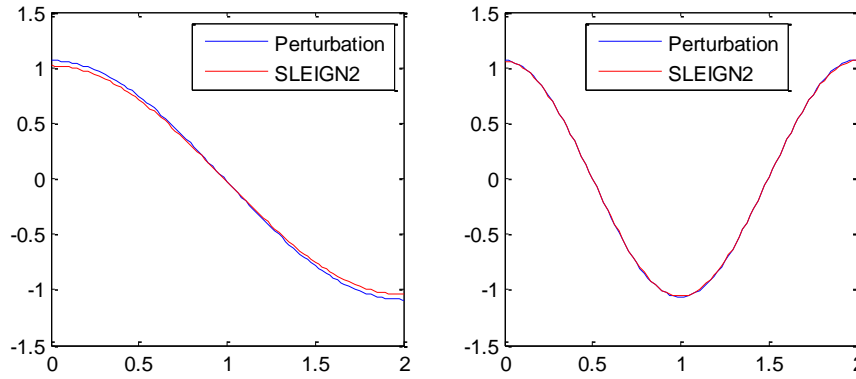
elde edilir.

$k = 4, h = 1$  için SLEIGN2 ile elde edilen ikinci ve üçüncü özdeğer  $\lambda_1 = 1.0744, \lambda_2 = 2.8295$  iken pertürbasyon probleminde ilk üç yaklaşım sonucunda elde edilen ikinci ve üçüncü özdeğer ise  $\lambda_1 = 1.0008, \lambda_2 = 2.8134$  şeklinde ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar ise Şekil 63 da verilmiştir.  $k = 2, h = 0.5$  için SLEIGN2 ile elde edilen ikinci ve üçüncü özdeğer  $\lambda_2 = 2.5650, \lambda_3 = 9.5563$  iken pertürbasyon probleminde ilk üç yaklaşım sonucunda elde edilen ikinci ve üçüncü de  $\lambda_1 = 2.5634, \lambda_2 = 9.5552$  dir ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar Şekil 64 de verilmiştir. Her iki örnekten de  $k$  nın büyük değerleri için pertürbasyon probleminin ilk özdeğer ve özfonksiyonda olduğu gibi iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.





Şekil 63.  $k = 4, h = 1$  için SLEIGN2 ve pertürbasyon probleminden elde edilen ikinci ve üçüncü özfonksiyonlar



Şekil 64.  $k = 2, h = 0.5$  için SLEIGN2 ve pertürbasyon probleminden elde edilen ikinci ve üçüncü özfonksiyonlar

### 2.3.7. Eğik Atış Yöntemiyle Ginzburg-Landau Denkleminin Çözümü

$$\frac{1}{k^2} \phi'' + (\lambda - h^2 x^2) \phi = 0, \phi'(0) = \phi'(1) = 0$$

Sturm – Liouville problemini eğik atış yöntemiyle çözmek için denklemi aşağıdaki şekilde denklem sistemi olarak yeniden yazalım.

$$\begin{aligned} \phi_1' &= \phi_2, & \phi_1(0) &= \lambda \\ \phi_2' &= k^2(h^2 x^2 - \lambda)\phi_1, & \phi_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

Problemi bir  $\lambda_0$  başlangıç değeri olarak bir başlangıç değer problemi olarak çözelim. Çözüm  $\phi'(1) = 0$  şartını sağlaması gerektiğinden

$$F(\lambda) = \phi_2(\lambda, 1) = 0$$

olmalıdır. Yeni  $\lambda_i$  yaklaşımlarını elde etmek için Newton yöntemi kullanarak

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i - \frac{F(\lambda_i)}{F'(\lambda_i)}$$

yaklaşımını kullanabiliriz.

$$F'(\lambda) = \frac{d\phi_2}{d\lambda}(\lambda, 1)$$

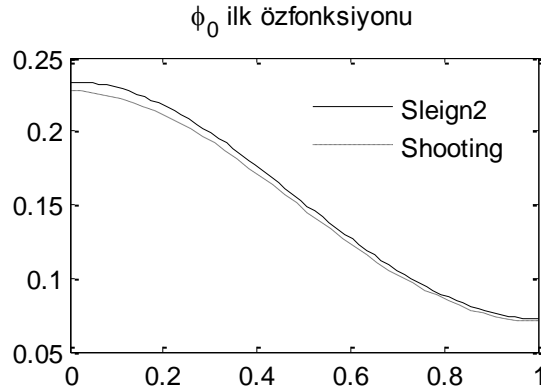
türevini bulmak için

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{d\phi_1}{dx} \right) &= \frac{d\phi_2}{d\lambda}, & \frac{d\phi_1}{d\lambda}(0) &= \frac{d}{d\lambda}(\lambda) \\ \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{d\phi_2}{dx} \right) &= k^2 \frac{d}{d\lambda} ((h^2 x^2 - \lambda)\phi_1), & \frac{d\phi_2}{d\lambda}(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\phi_1}{d\lambda} \right) &= \frac{d\phi_2}{d\lambda}, & \frac{d\phi_1}{d\lambda}(0) &= 1 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{d\phi_2}{d\lambda} \right) &= k^2 (h^2 x^2 - \lambda) \frac{d\phi_1}{d\lambda} - k^2 \phi_1, & \frac{d\phi_2}{d\lambda}(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

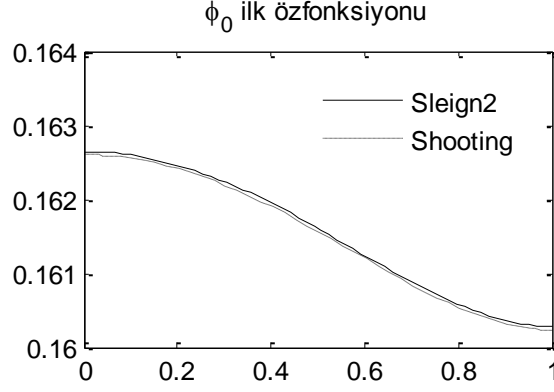
sistemini çözebiliriz.

**Örnek**  $k = 4, h = 1$  için eğik atış yöntemiyle elde edilen ilk özdeğer  $\lambda_0 = 0.2271$  olup ilk özfonksiyonun grafiği ise aşağıdaki gibidir.



Şekil 65.  $k = 4, h = 1$  için eğik atış yöntemi ile ilk özfonksiyon

**Örnek**  $k = 0.6, h = 0.7$  için shooting yöntemiyle elde edilen ilk özdeğer  $\lambda_0 = 0.1626$  olup ilk özfonksiyonun grafiği ise aşağıdaki gibidir.



Şekil 66.  $k = 0.6, h = 0.7$  için eğik atış yöntemi ile ilk özfonksiyon

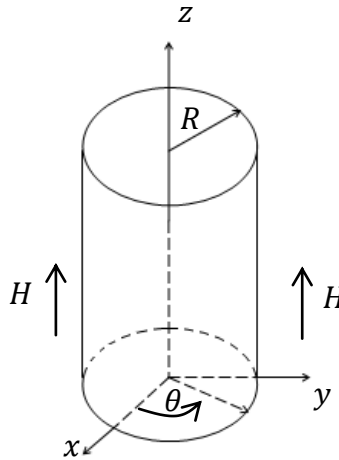
Yukarıdaki örneklerden görüldüğü gibi eğik atış yöntemi ilk özfonksiyonlar için oldukça iyi sonuçlar vermektedir.

## 2.4. Süperiletken Silindir İçin Tek Boyutlu GL Modelleri

Bu bölümde tek boyutlu silindirik bir süperiletken göz önüne alınacaktır.

### 2.4.1. Modelin Geometrisi

Göz önüne alınan süperiletken üç boyutlu olup  $z$  yönünde sonsuz boyutlu,  $\theta$  yönünde değişimin ihmal edildiği  $R$  yarıçaplı bir süperiletken silindiridir.



Şekil 67. Süperiletken silindirin geometrisi

Numune pozitif  $z$  – yönünde  $\vec{H} = (0,0,H)$  dış manyetik alan etkisi altındadır. Bu durumda GL düzen parametresi

$$\psi(r, \theta) = \psi(r), r \in (0, R) \quad (39)$$

ve vektör potansiyeli

$$\mathbf{A}(r, \theta) = \mathbf{A}(r) = (0, A(r), 0) \quad (40)$$

olarak kabul ediyoruz ve bunun sonucu olarak

$$\text{div}\mathbf{A} = 0 \text{ ve } \text{curl}\mathbf{A} = \left(0, 0, \frac{1}{r}(rA)'\right) \quad (41)$$

dir. Burada  $A' = \frac{dA}{dr}$  dir.

#### 2.4.2. Enerji Fonksiyoneli

Yukarıda bahsedilen silindirik geometriye sahip süperiletken için boyutsuz yerel enerji yoğunluğu ve boyutsuz enerji fonksiyoneli Coskun vd., (2003) de sunulan boyutsuzlaştırma kümesi yardımıyla

$$g_\tau(\psi, A) = \left[ \left( A^2 - 1 + \tau^2 + \frac{1}{2}\psi^2 \right) \psi^2 + \left( \frac{\psi'}{\kappa} \right)^2 + \left( \frac{1}{r}(rA)' - H \right)^2 \right] \quad (42)$$

$$G_\tau(\psi, A) = \int_0^R \left[ \left( A^2 - 1 + \tau^2 + \frac{1}{2}\psi^2 \right) \psi^2 + \left( \frac{\psi'}{\kappa} \right)^2 + \left( \frac{1}{r}(rA)' - H \right)^2 \right] r dr \quad (43)$$

olarak ifade edebilir. Burada  $\psi$ , numunenin normal veya süperiletken durumda olup olmadığını ifade eden, en genel anlamda karmaşık değerli olan, ancak tek boyutlu problemde reel değerli kabul edilen ve düzen parametresi olarak bilinen fonksiyondür.  $A$  vektör potansiyelin  $\theta$  – yönündeki bileşenidir.  $\tau = T/T_c$  boyutsuz sıcaklık parametresi ve  $\kappa$  ise Ginzburg-Landau parametresidir ve  $\kappa(\tau) = \frac{\kappa(0)}{1+\tau^2}$  olup sıcaklık bağımlıdır..

Ginzburg ve Landau, süperiletken elektromanyetik konumun Gibbs enerji fonksiyonelinin minimumuna karşılık geldiğini ifade etmektedir. Bu enerji fonksiyonelinin minimize eden  $\psi$  ve  $A$  fonksiyonlarının sağlaması gereken diferansiyel denklemler ve ilgili doğal sınır şartları, enerji fonksiyonelinin  $\psi$  ve  $A$  ya göre I.Varyasyonlar ( $\frac{\delta G}{\delta \psi} = 0, \frac{\delta G}{\delta A} = 0$ ) alınarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

### 2.4.3. Tek Boyutlu GL Denklemleri

$\psi + v, \psi$  ile aynı özelliklere sahip olacak biçimde seçilen  $v$  test fonksiyonu için,

$$G(\psi + v, A) = \int_0^R \left[ \left( A^2 - 1 + \tau^2 + \frac{1}{2}(\psi + v)^2 \right) (\psi + v)^2 + \left( \frac{(\psi + v)'}{\kappa} \right)^2 + \left( \frac{1}{r}(rA)' - H \right)^2 \right] r dr \quad (44)$$

dir.  $\psi$  a göre I. Varyasyon,  $v$  ye göre lineer terimler alınarak,

$$\frac{\delta G}{\delta \psi} = \int_0^R \left[ 2A^2 \psi v + 2(\tau^2 - 1)\psi v + 2\psi^3 v + \frac{2}{\kappa^2} \psi' v' \right] r dr \quad (45)$$

şeklinde oluşturulur. Burada kısmi integrasyon ve  $\psi'(0) = 0, \psi'(R) = 0$  doğal sınır şartları kullanılarak,

$$\frac{\delta G}{\delta \psi} = 2 \int_0^R [A^2 \psi v + (\tau^2 - 1)\psi v + \psi^3 v] r dr + \int_0^R \frac{2}{\kappa^2} \psi' v' r dr, U = \psi' r, dV = v' dr \quad (46)$$

$$\frac{\delta G}{\delta \psi} = 2 \int_0^R [A^2 \psi v + (\tau^2 - 1)\psi v + \psi^3 v] r dr + \frac{2}{\kappa^2} \left[ \frac{(rv\psi')|_0^R}{0} - \int_0^R v(r\psi')' dr \right] \quad (47)$$

$$\frac{\delta G}{\delta \psi} = 2 \int_0^R [A^2 \psi v + (\tau^2 - 1)\psi v + \psi^3 v] r dr - \frac{2}{\kappa^2} \int_0^R v(r\psi')' dr \quad (48)$$

elde edilir.

$(rv\psi')|_0^R$  ifadesini sıfır yapan sınır şartlarına doğal sınır şartları adı verilmektedir.  $(rv\psi')|_0^R = 0$  olması için  $\psi'(R) = 0$  olmalıdır.  $r = 0$  için ise  $\psi'(0)$  sonlu olması yeterlidir. Ancak biz radyal simetrik çözümleri araştırmak istiyoruz. Bunun için  $\psi'(0) = 0$  şartını kabul ediyoruz.

Varyasyon analizinin temel prensibi gereği  $\frac{\delta G}{\delta \psi} = 0$  eşitliği sürekli  $\forall v$  için sağlanıyorsa,

$$\frac{\delta G}{\delta \psi} = 2[A^2 - 1 + \tau^2 + \psi^2]\psi r - \frac{2}{\kappa^2}(r\psi)' = 0 \quad (49)$$

olmak zorundadır. Buradan (49) u  $2r(r \neq 0)$  ile bölerek,

$$\frac{1}{\kappa^2 r}(r\psi)' - [A^2 + \psi^2 + \tau^2 - 1]\psi = 0, r \in (0, R), \psi'(0) = \psi'(R) = 0 \quad (50)$$

elde edilir.

Enerji fonksiyonelinin  $A$  ya göre I. Varyasyonu ise  $A + v, A$  ile aynı özelliklere sahip olacak biçimde seçilen  $v$  test fonksiyonu için

$$(A + v)(0) = A(0) + v(0) = 0 \Rightarrow v(0) = 0, \frac{1}{R}(rA)'(R) = H$$

doğal sınır şartları kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} G(\psi, A + v) &= \int_0^R \left[ \left( (A + v)^2 - 1 + \tau^2 + \frac{1}{2}\psi^2 \right) \psi^2 + \left( \frac{\psi'}{\kappa} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{r}(r(A + v))' - H \right)^2 \right] r dr \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
G(\psi, A + v) &= \int_0^R \left[ A^2 \psi^2 + v^2 \psi^2 + 2Av\psi^2 + (\tau^2 - 1)\psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 + \left(\frac{\psi'}{\kappa}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{r}(rA)' - H\right)^2 + \left(\frac{1}{r}(rv)'\right)^2 + \frac{2}{r}(rv)'\left(\frac{1}{r}(rA)' - H\right) \right] r dr
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\frac{\delta G}{\delta A} = \int_0^R 2Av\psi^2 r dr + \int_0^R 2(rv)'\left(\frac{1}{r}(rA)' - H\right) dr, \tag{53}$$

$$U = \left(\frac{1}{r}(rA)' - H\right), dV = (rv)' dr$$

$$\frac{\delta G}{\delta A} = \int_0^R 2Av\psi^2 r dr + \underbrace{\left(rv\left(\frac{1}{r}(rA)' - H\right)\right)}_0 \Big|_0^R - \int_0^R 2rv\left(\frac{1}{r}(rA)'\right)' dr \tag{54}$$

$$\frac{\delta G}{\delta A} = 2A\psi^2 r - 2r\left(\frac{1}{r}(rA)'\right)' = 0 \tag{55}$$

veya

$$r\left(\frac{1}{r}(rA)'\right)' - A\psi^2 r = 0 \tag{56}$$

elde edilir. Buradan SGL modelini oluşturan denklem sistemi ve ilgili sınır şartları  $r \in (0, R)$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\kappa^2}(r\psi')' &= [A^2 + \psi^2 + \tau^2 - 1]\psi r \\
\left(\frac{1}{r}(rA)'\right)' &= A\psi^2 r, \quad 0 < r < R \\
\psi'(0) &= 0, \psi'(R) = 0 \\
A(0) &= 0, \frac{1}{R}(rA)'(R) = H
\end{aligned} \tag{57}$$

zaman bağımsız klasik SGL modeli elde edilir. Bu model silindirik süperiletken stasyoner model olup, kısaca SGLC(Ginzburg-Landau for Cylinder) olarak adlandırılacaktır.

#### 2.4.4. Sıcaklık ve Zaman Bağımlı GL Modeli

Bir fonksiyonun en hızlı azaldığı yön, gradyan vektörünün tersi yönü olduğu bilgisinden hareketle, enerji fonksiyonelinin zamana göre azalması için  $(\psi, A)$  ikilisinin zamana göre değişimi, söz konusu fonksiyonelin birinci varyasyonunun tersi yönünde olmalıdır. Buna göre zaman bağımlı model

$$\begin{aligned}\frac{\delta\psi}{\delta t} &= -\frac{1}{2} \frac{\delta G}{\delta\psi} \\ \frac{\delta A}{\delta t} &= -\frac{1}{2} \frac{\delta G}{\delta A}\end{aligned}\quad (58)$$

ile verilir. Burada  $\frac{1}{2}$  sabiti varyasyon işleminde elde edilen çarpanı yok etmek için kullanılmaktadır. Daha açık olarak  $r \in (0, R)$  olmak üzere

$$G_\tau(\psi, A) = \int_0^R \left[ \left( A^2 - 1 + \tau^2 + \frac{1}{2} \psi^2 \right) \psi^2 + \left( \frac{\psi'}{\kappa} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} (rA)' - H \right)^2 \right] r dr \quad (59)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + (1 - \tau^2 - A^2 - \psi^2) \psi r \quad (60)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right) - A \psi^2 r \quad (61)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}(0) = 0, \frac{\partial\psi}{\partial r}(R) = 0, A(0) = 0, \frac{1}{R} \frac{\partial(rA)}{\partial r}(R) = H \quad (62)$$

$$\psi(r, 0) = \psi_0(r), A(r, 0) = A_0(r)$$

şeklinde elde edilir. Bu modeli TTDGLC(Temperature and Time Dependent Ginzburg Landau for Cylinder) olarak ifade edeceğiz.

#### 2.4.5. Teorik Sonuçlar

**Teorem 9**  $\psi(r, t)$  ve  $A(r, t)$  TTDGLC sisteminin çözümü olmak üzere (59) ile verilen enerji fonksiyoneli  $t$  nin fonksiyonu olarak azalandır.



### İspat

$$G(\psi, A) = \int_0^R \left[ \left( A^2 + \frac{1}{2} \psi^2 + \tau^2 - 1 \right) \psi^2 + \left( \frac{\psi'}{\kappa} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} (rA)' - H \right)^2 \right] r dr \quad (63)$$

enerji fonksiyonelinin zaman değişkenine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} = \int_0^R \left( 2A \frac{\partial A}{\partial t} \psi^2 + 2A^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} + 2\tau^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} - 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial t} + 2\psi^3 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right. \\ \left. + \frac{2}{\kappa^2} \psi' \frac{\partial \psi'}{\partial t} + 2 \left( \frac{1}{r} (rA)' - H \right) \frac{1}{r} \left( \frac{\partial A}{\partial t} + r \frac{\partial A'}{\partial t} \right) \right) r dr \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} = 2 \int_0^R \left( A \psi^2 \frac{\partial A}{\partial t} + (A^2 + \tau^2 - 1 + \psi^2) \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{2}{\kappa^2} \int_0^R \psi' \frac{\partial \psi'}{\partial t} r dr \\ + \int_0^R \left( 2 \left( \frac{1}{r} (rA)' - H \right) \frac{1}{r} \left( \frac{\partial A}{\partial t} + r \frac{\partial A'}{\partial t} \right) \right) r dr \end{aligned} \quad (65)$$

Eşitliğin sağ tarafındaki son iki integral doğal sınır şartları altında kısmi integrasyon ile çözümlürse

$$I_1 = \int_0^R \psi' \frac{\partial \psi'}{\partial t} r dr = \left( r \psi' \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_0^R - \int_0^R (\psi'' + r \psi') \frac{\partial \psi}{\partial t} dr = \int_0^R (r \psi')' \frac{\partial \psi}{\partial t} dr \quad (66)$$

elde edilir. Bu değerler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} = 2 \int_0^R \left( r(A^2 + \tau^2 - 1 + \psi^2) \psi - \frac{1}{\kappa^2} (r \psi')' \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} dr \\ + 2 \int_0^R \left( r A \psi^2 - \int_0^R r \left( \frac{1}{r} (rA)' \right)' \right) \frac{\partial A}{\partial t} dr \end{aligned} \quad (67)$$

olup

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{1}{\kappa^2} (r\psi')' + (1 - A^2 - \psi^2 - \tau^2)\psi r \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= r \left( \frac{1}{r} (rA)' \right)' - A\psi^2 r\end{aligned}\tag{68}$$

olduğundan

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -2 \int_0^R \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 dr - 2 \int_0^R \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)^2 dr \leq 0\tag{69}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $G(\psi, A)$  enerji fonksiyoneli zamana göre azalır. ■

**Önerme 6**  $0 \leq \tau \leq 1$  için, eğer  $H = 0$  ise uygun her  $(\psi, A)$  için  $G_\tau(\sqrt{1 - \tau^2}, 0) \leq G_\tau(\psi, A)$ dır. Yani sistem minimumuna kesinlikle süperiletken durumda ulaşır

**İspat** Enerji fonksiyonelinin  $\psi = \sqrt{1 - \tau^2}$  ve  $A = 0$  değerleri için süperiletken duruma karşılık gelen çözümü  $G_{s\tau}$  ile gösterilmek üzere,

$$G_\tau(\psi, A) = \int_0^R \left[ \left( A^2 + \frac{1}{2} \psi^2 + \tau^2 - 1 \right) \psi^2 + \left( \frac{\psi'}{\kappa} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} (rA)' - H \right)^2 \right] r dr\tag{70}$$

ifadesinden

$$\begin{aligned}G_{s\tau} &= G_\tau(\sqrt{1 - \tau^2}, 0) = \int_0^R \left( \left( \tau^2 - 1 + \frac{1}{2} (1 - \tau^2) \right) (1 - \tau^2) + H^2 \right) r dr \\ &= \int_0^R \left[ -\frac{1}{2} (1 - \tau^2)^2 + H^2 \right] r dr = -\frac{R^2}{4} (1 - \tau^2)^2 + \frac{R^2}{2} H^2\end{aligned}\tag{71}$$

elde edilir. Diğer taraftan, enerji fonksiyonelinin  $\psi = 0$  ve  $A = H \frac{r}{2}$  ( $\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left( 0, \frac{Hr}{2}, 0 \right) = (0, 0, H)$ ) değerleri için normal duruma karşılık gelen çözümü  $G_{nr}$  ile gösterilmek üzere

$$G_{n\tau} = G_{\tau} \left(0, H \frac{r}{2}\right) = \int_0^R [0] r dr = 0 \quad (72)$$

bulunur.

Eğer  $0 \leq \tau \leq 1$  ve  $H = 0$  ise  $G_{s\tau} = -\frac{R^2}{4}(1 - \tau^2)^2 \leq G_{n\tau} = 0$  elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Eğer  $H^2 = \frac{1}{2}(1 - \tau^2)^2$  veya  $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \tau^2)$  ise  $G_{s\tau} = G_{n\tau}$  dir.  $H = H_c(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \tau^2)$  termodinamik kritik alandır.

Eğer  $H < \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \tau^2)$  ise  $0 \leq \tau < 1$  için  $(\psi, A) = \left(0, H \frac{r}{2}\right)$  global minimum olamaz. Çünkü

$$G_{s\tau} = G_{\tau} \left(\sqrt{1 - \tau^2}, 0\right) = -\frac{R^2}{4}(1 - \tau^2)^2 + \frac{R^2}{2}H^2 < G_{n\tau} = G_{\tau} \left(0, H \frac{r}{2}\right) = 0$$

dir.

Eğer  $H > \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \tau^2)$  ise  $0 \leq \tau < 1$  için  $(\sqrt{1 - \tau^2}, 0)$  global minimum çözüm olamaz. Çünkü

$$G_{n\tau} = G_{\tau} \left(0, H \frac{r}{2}\right) = 0 < G_{s\tau} = G_{\tau} \left(\sqrt{1 - \tau^2}, 0\right) = -\frac{R^2}{4}(1 - \tau^2)^2 + \frac{R^2}{2}H^2$$

dir.

**Önerme 7** Eğer  $H \neq 0$  ve  $\bar{A} = H \frac{r}{2}$  ise  $(\psi, A) = (0, \bar{A})$ ,  $G_1(\psi, A)$  nın global minimumudur. Yani sistem minimumuna normal halde ulaşır.

**İspat**  $H \neq 0$  ve  $\bar{A} = H \frac{r}{2}$  olmak üzere  $(\psi, \tau, A) = (0, 1, \bar{A})$  ye karşılık gelen enerji fonksiyoneli

$$G_1(0, \bar{A}) = \int_0^R [0]rdr = 0 \quad (73)$$

şeklinde yazılır. Fakat  $G_1(0, \bar{A}) = 0$  olması  $(\psi, \tau, A) = (0, 1, \bar{A})$  noktasının minimum olmasını gerektirmez. Dolayısıyla, eğer  $(\psi, A) \neq (0, \bar{A})$  için

$$G_1(0, \bar{A}) < G_1(\psi, A) \quad (74)$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Buna göre,

$$\begin{aligned} G_1(\psi, A) &= \int_0^R \left[ \left( A^2 + \frac{1}{2}\psi^2 + 1 - 1 \right) \psi^2 + \left( \frac{\psi'}{\kappa} \right)^2 + \left( \frac{1}{r}(rA)' - H \right)^2 \right] r dr \\ &= \int_0^R \left[ \left( A^2 + \frac{1}{2}\psi^2 \right) \psi^2 + \left( \frac{\psi'}{\kappa} \right)^2 + \left( \frac{1}{r}(rA)' - H \right)^2 \right] r dr > 0 \end{aligned} \quad (75)$$

olur. Dolayısıyla  $\forall (\psi, A) \neq (0, \bar{A})$  için,

$$0 = G_1(0, \bar{A}) < G_1(\psi, A) \quad (76)$$

elde edilir ki bu da,  $(0, \bar{A})$  noktasının,  $G_1(\psi, A)$  nin global minimumu olduğunu ifade eder. ■

**Teorem 10** Eğer  $(\psi(t), A(t))$  TTDGLC sisteminin sabit bir  $t \in (0, 1)$  için çözümü ve  $|\psi_0(r)| \leq \sqrt{1 - \tau^2}$  ise  $\forall t > 0$  için  $|\psi(r, t)| \leq \sqrt{1 - \tau^2}$  olur.

**İspat** Herhangi bir  $t_0 \in [0, T_s]$  ve  $r_0 \in (0, R)$  için  $\psi(r_0, t_0) > \sqrt{1 - \tau^2}$  olduğunu kabul edelim.  $t_0$  eşitsizliğin sağlandığı ilk  $t$  anı ve bu  $t_0$  karşılık gelen  $r$  bileşeni de  $r_0$  olsun. Bu takdirde  $(r_0, t_0)$  noktasında  $\psi(t)$  fonksiyonu  $t$  bileşenine göre bir yerel maksimuma sahip olduğundan  $\psi(r, t)$  fonksiyonu zamana göre artandır. Dolayısıyla

$$0 < \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{(r_0, t_0)} \quad (77)$$

yazılabilir. Diğer taraftan aynı noktada  $r$  bileşenine göre bir yerel maksimuma sahip olduğundan

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right|_{(r_0, t_0)} < 0 \quad (78)$$

olur. Ayrıca  $(r_0, t_0)$  noktasında

$$\psi > \sqrt{1 - \tau^2} \Rightarrow \psi^2 > 1 - \tau^2 \Rightarrow 1 - \tau^2 - \psi^2 < 0 \Rightarrow 1 - \tau^2 - A^2 - \psi^2 < 0 \quad (79)$$

yazılabilir. Böylece üstteki ifadeler birlikte düşünüldüğünde

$$0 < \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 1 - \tau^2 - A^2 - \psi^2 < 0 \quad (80)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Çelişki  $\psi > \sqrt{1 - \tau^2}$  kabulünden kaynaklanmıştır. Dolayısıyla  $\forall t > 0$  için  $|\psi(r, t)| \leq \sqrt{1 - \tau^2}$  olmalıdır. ■

## 2.5. Süperiletken Silindir İçin Normal Hale Yakın Komşulukta Çözümler

Süperiletken silindir için sıcaklık ve zaman bağımlı Ginzburg-Landau denkleminin

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + (1 - A^2 - \psi^2 - \tau^2) \psi r$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right) - A \psi^2 r$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(0) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial r}(R) = 0, A(0) = 0, \frac{1}{R} \frac{\partial (rA)}{\partial r}(R) = H$$

olduğunu biliyoruz. Normal hale yakın komşulukta çözümleri incelemek için denklemlerde  $A = \frac{Hr}{2}$  yazılır ve  $\psi^3$  terimini ihmal edilirse

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\kappa^2} (r\psi')' + \left(1 - \tau^2 - \frac{H^2 r^2}{4}\right) \psi, r \in (0, R) \quad (81)$$

$$\psi'(0) = \psi'(R) = 0$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilir.

$$\psi(r, t) = f(t)\phi(r)$$

şeklinde bir çözüm arayalım. Bu durumda

$$f'(t)\phi(r) = \frac{1}{\kappa^2} (r\phi')' f(t) + r \left(1 - \tau^2 - \frac{H^2 r^2}{4}\right) \phi(r) f(t)$$

olup

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dt} = \frac{1}{\phi(r)} \left[ \frac{1}{\kappa^2} (r\phi')' + r \left(1 - \tau^2 - \frac{H^2 r^2}{4}\right) \phi(r) \right] = -\mu$$

elde edilir. O halde

$$f(t) = \exp(-\mu t)$$

ve

$$\frac{1}{\kappa^2} (r\phi')' + r(1 - \tau^2 + \mu)\phi - \frac{H^2 r^3}{4}\phi = 0, \quad (82)$$

olacaktır. (82) denklemi

$$-\left(\frac{r}{\kappa^2} \phi'\right)' + q(r)\phi = \lambda r\phi, \quad \lambda = 1 - \tau^2 + \mu, q(r) = \frac{H^2 r^3}{4} \quad (83)$$

$$\phi'(0) = \phi'(R) = 0 \quad (84)$$

olarak yazılırsa bu bir regüler Sturm-Liouville problemidir. Dolayısıyla Kesim 2.3.1 de verilen teorik sonuçlar bu problem için de uygulanabilir.

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, k = \kappa R, h = HR$$

dönüşümü altında

$$-\left(\frac{r}{k^2}\phi'\right)' + q(r)\phi = \lambda r\phi, q(r) = \frac{h^2 r^3}{4} \quad (85)$$

$$\phi'(0) = \phi'(1) = 0 \quad (86)$$

elde edilir.

Kesim 2.3.1 de ifade edilen sonuçlara göre (85)-(86) Sturm-Liouville problemi için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1) Teorem 3 e göre (85)-(86) probleminin bütün özdeğerleri reeldir ve özfonksiyonlar ise reel değerlidir.

2)  $[0,1]$  aralığı üzerinde  $a_1 = 0, a_2 = 1, b_1 = 0, b_2 = 1$  olup  $-a_1 a_2 \geq 0$  ve  $b_1 b_2 \geq 0$  ve  $q(r) = \frac{h^2 r^3}{4} \geq 0$  olduğundan bütün özdeğerler pozitiftir.

3) (85)-(86) probleminin özdeğerleri sayılabilir ve  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$  şeklindedir.

4) (85)-(86) probleminin ayırık özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları  $[0,1]$  aralığı üzerinde  $w(r) = r$  ağırlık fonksiyonuna göre ortogondur.

5) a)  $p = \frac{r}{k^2}$  ve  $w = r$  sabit kalmak üzere  $h_2 > h_1$  ise  $Q = \frac{h_2^2 r^3}{4} > \frac{h_1^2 r^3}{4} = q$  olup  $\lambda_n(Q) > \lambda_n(q)$  dir. Yani  $\lambda = \lambda(h)$  fonksiyonu artan bir fonksiyondur.

b)  $q = \frac{h^2 r^3}{4}$  ve  $w = r$  sabit kalmak üzere  $0 < k_1 < k_2$  ise  $0 < \frac{r}{k_2^2} = P < \frac{r}{k_1^2} = p$  olup  $\lambda_n\left(\frac{1}{p}\right) \geq \lambda_n\left(\frac{1}{P}\right)$  dir. Yani  $\lambda = \lambda(k)$  fonksiyonu azalan bir fonksiyondur.

### 2.5.1. SLEIGN2 ile Elde Edilen Sayısal Sonuçlar

$$-\left(\frac{r}{k^2}\phi'\right)' + q(r)\phi = \lambda r\phi, q(r) = \frac{h^2 r^3}{4}$$

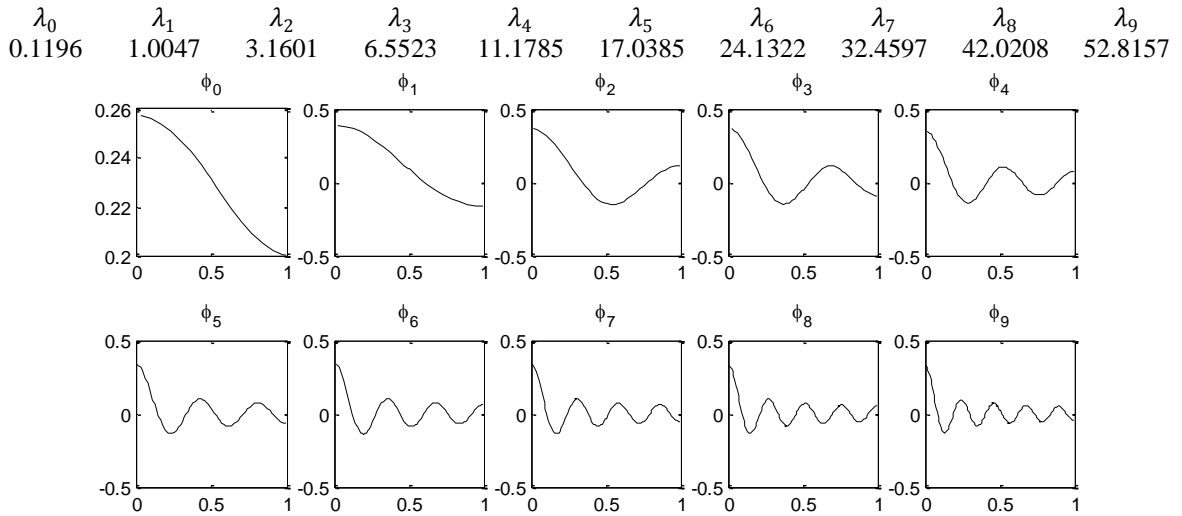
$$\phi'(0) = \phi'(1) = 0$$

probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını SLEIGN2 yazılımıyla hesaplayalım. Burada

$$p(r) = \frac{r}{k^2}, q(r) = \frac{h^2 r^3}{4}, w(r) = r$$

olduğu görülmektedir. Buna göre bazı parametre değerleri için elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

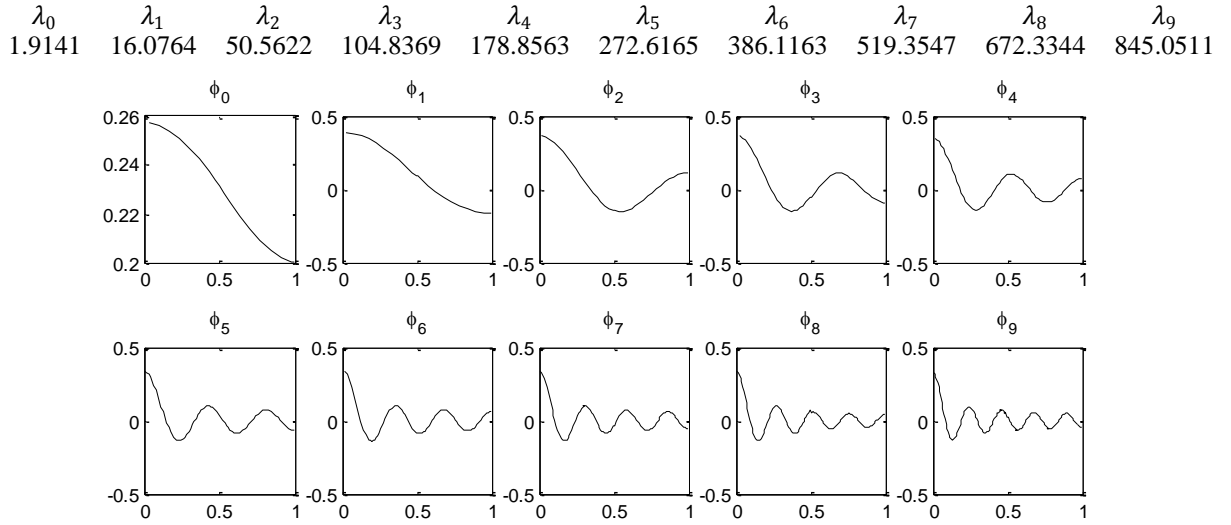
**Örnek**  $k = 4, h = 1$  için  $p(r) = \frac{r}{16}, q(r) = \frac{r^3}{4}, w(r) = r$  olup özdeğer ve özfonksiyonlar aşağıda elde edildiği gibidir.



Şekil 68.  $k = 4, h = 1$  için SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar

**Örnek**  $k = 1, h = 4$  için  $p(r) = r, q(r) = 4r^3, w(r) = r$  olup özdeğer ve özfonksiyonlar aşağıda elde edildiği gibidir.





Şekil 69.  $k = 1, h = 4$  için SLEIGN2 ile elde edilen özfonksiyonlar

Yukarıdaki verilere ve grafiklere bakıldığında farklı  $k$  ve  $h$  değerleri için tüm öz değerler teorik sonuçlarla uyumlu olarak reel ve

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$$

şeklinde. Ayrıca  $q(x) = \frac{h^2 r^3}{4} > 0, 0 \leq r \leq 1$  olduğundan bütün özdeğerler pozitiftir.

Grafiklerden görülen diğer bir sonuç ise ilk özdeğere karşılık gelen özfonksiyonun sıfır yeri yok iken, ikinci özdeğere karşılık gelen özfonksiyonun bir sıfır yeri, üçüncünün iki sıfır yeri olduğu görülmektedir. Bunlardan fiziksel olarak anlamlı olan ise ilk özdeğer ve ona karşılık gelen ilk özfonksiyondur.

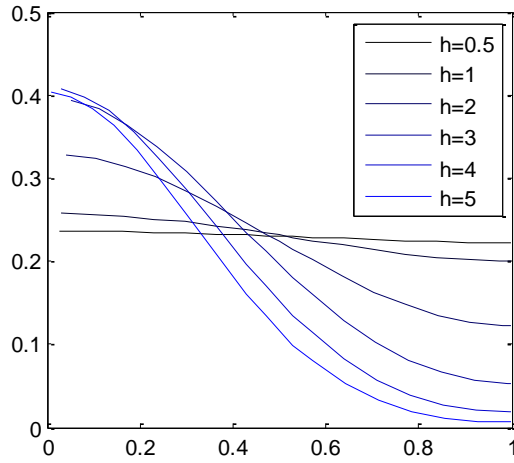
### 2.5.2. Sabit $k$ ve Değişen $h$ İçin Analizler

Bu bölümde sabit bir  $\kappa$  değerine karşılık  $h$  nın değişen değerleri için özdeğer ve özfonksiyonların davranışı incelenmiştir. Aşağıdaki örnekte verilen Tablo 13 deki değerler incelendiğinde teorik sonuçlarla uyumlu olarak özdeğerler  $h$  nın artan fonksiyonudur. Yani,  $\lambda_k(h)$  artan bir fonksiyondur. Ayrıca Şekil 70 de ilk özfonksiyonların  $h$  nın azalan değerleri için sabit çözüme yakınsadığı görülmektedir.

**Örnek**  $k = 4, h = 0.5, 1, 2, 3, 4$  için ilk özdeğer ve özfonksiyonlar aşağıdaki gibi olmaktadır.

Tablo 13.  $k = 4, h = 0.5, 1, 2, 3, 4$  için özdeğerler

$\lambda$	$h=0.5$	$h=1$	$h=2$	$h=3$	$h=4$	$h=5$
0	0.0309	0.1196	0.4114	0.7217	0.9935	1.2486
1	0.9386	1.0047	1.3138	1.9326	2.7831	3.6617
2	3.0970	3.1601	3.4207	3.8901	4.6417	5.7539
3	6.4895	6.5523	6.8063	7.2413	7.8792	8.7631
4	11.1158	11.1785	11.4306	11.8568	12.4667	13.2768
5	16.9759	17.0385	17.2898	17.7123	18.3118	19.0971
6	24.0696	24.1322	24.3831	24.8038	25.3981	26.1717
7	32.3971	32.4597	32.7103	33.1299	33.7212	34.4882
8	41.9583	42.0208	42.2713	42.6902	43.2796	44.0425
9	52.7532	52.8157	53.0661	53.4886	54.0727	54.8328

Şekil 70. Artan  $h$  değerleri için ilk özfonksiyonların davranışı

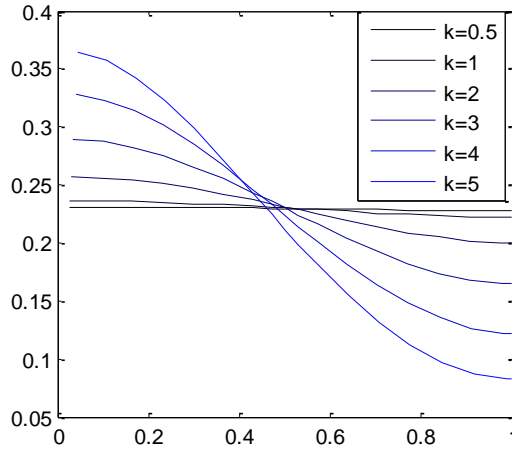
### 2.5.3. Sabit $h$ ve Değişen $k$ İçin Analizler

Bu bölümde sabit bir  $h$  değerine karşılık  $\kappa$  nın değişen değerleri için özdeğer ve özfonksiyonların davranışı incelenmiştir. Aşağıdaki örnekte verilen Tablo 14 deki değerler incelendiğinde teorik sonuçlarla uyumlu olarak özdeğerler  $\kappa$  nın azalan fonksiyonudur. Yani,  $\lambda_h(\kappa)$  azalan bir fonksiyondur. Ayrıca Şekil 71 de ilk özfonksiyonların  $\kappa$  nın azalan değerleri için sabit çözüme yakınsadığı görülmektedir.

**Örnek**  $k = 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, h = 2$  için ilk özdeğer ve özfonksiyonlar aşağıdaki gibi olmaktadır.

Tablo 14.  $k = 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, h = 2$  için özdeğerler

$\lambda$	k=0.5	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
0	0.4986	0.4947	0.4785	0.4505	0.4114	0.3658
1	59.0621	15.0189	4.0190	1.9999	1.3138	1.0136
2	197.2073	49.5524	12.6405	5.8081	3.4207	2.3205
3	414.3314	103.8330	26.2092	11.8356	6.8063	4.4801
4	710.4154	177.8542	44.7140	20.0591	11.4306	7.4377
5	1085.4605	271.6152	68.1541	30.4765	17.2898	11.1868
6	1539.4631	385.1153	96.5290	43.0874	24.3531	15.7261
7	2072.4260	518.3545	129.8384	57.8916	32.7103	21.0553
8	2684.3405	671.3339	168.0835	74.8892	42.2713	27.1742
9	3375.1887	844.0488	211.2629	94.0800	53.0661	34.0827

Şekil 71. Artan  $k$  değerleri için ilk özfonksiyonların davranışı

#### 2.5.4. Eğik Atış Yöntemiyle SGLC Sisteminin Özdeğer ve Özfonksiyonları

$$(r\phi')' + k^2(\lambda r - q(r))\phi = 0, \phi'(0) = \phi'(1) = 0$$

problemini eğik atış yöntemiyle çözmek için denklemini aşağıdaki şekilde denklemler sistemi olarak yeniden yazalım.

$$\begin{aligned} \phi_1' &= \phi_2, & \phi_1(0) &= \lambda \\ \phi_2' &= k^2(q(r) - \lambda r)\phi_1 - \frac{1}{r}\phi_2, & \phi_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

problemini çözmek için bir  $\lambda_0$  başlangıç değeri alarak başlangıç değer problemi olarak çözelim. Çözüm  $\phi'(1) = 0$  şartını sağlaması gerektiğinden  $F(\lambda) = \phi_2(\lambda, 1) = 0$  olmalıdır. Yeni  $\lambda_i$  yaklaşımlarını elde etmek için Newton yöntemi kullanarak

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i - \frac{F(\lambda_i)}{F'(\lambda_i)}$$

yaklaşımını kullanabiliriz.

$$F'(\lambda) = \frac{d\phi_2}{d\lambda}(\lambda, 1)$$

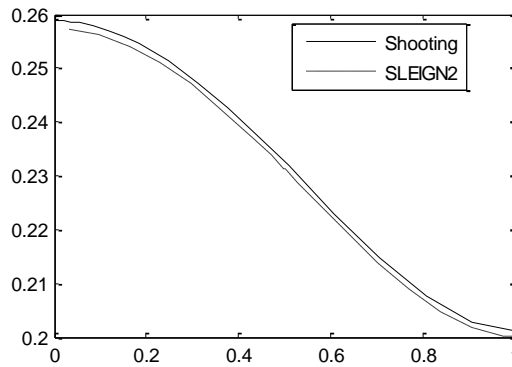
türevini bulmak için

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{d\phi_1}{dr} \right) &= \frac{d\phi_2}{d\lambda}, & \frac{d\phi_1}{d\lambda}(0) &= \frac{d}{d\lambda}(\lambda) \\ \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{d\phi_2}{dr} \right) &= k^2 \frac{d}{d\lambda} ((q(r) - \lambda r)\phi_1) - \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{r} \phi_2 \right) - k^2 r \phi_1, & \frac{d\phi_2}{d\lambda}(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( \frac{d\phi_1}{d\lambda} \right) &= \frac{d\phi_2}{d\lambda}, & \frac{d\phi_1}{d\lambda}(0) &= 1 \\ \frac{d}{dr} \left( \frac{d\phi_2}{d\lambda} \right) &= k^2 (h^2 r^2 - \lambda r) \frac{d\phi_1}{d\lambda} - k^2 r \phi_1 - \frac{1}{r} \frac{d\phi_1}{d\lambda}, & \frac{d\phi_2}{d\lambda}(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

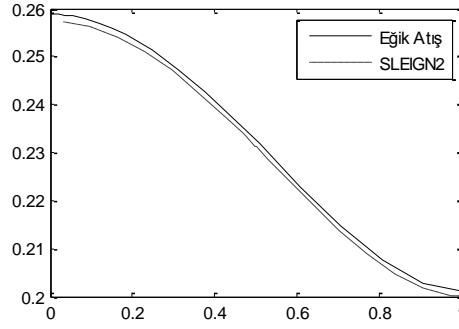
sistemini çözebiliriz.

**Örnek**  $k = 4, h = 1$  için SLEIGN2 ve eğik atış yöntemleri ile elde edilen ilk özdeğer  $\lambda_0 = 0.1196$  ve ilk özfonksiyon ise aşağıdaki gibidir.



Şekil 72.  $k = 4, h = 1$  için eğik atış ve SLEIGN2 ile elde edilen ilk özfonksiyon

**Örnek**  $k = 1, h = 4$  için SLEIGN2 ile elde edilen ilk özdeğer  $\lambda_0 = 1.9141$ , eğik atış yöntemi ile elde edilen ilk özdeğer ise  $\lambda_0 = 1.9137$  dir. Bu özdeğerler karşılık gelen ilk özfonksiyon ise aşağıdaki gibidir.



Şekil 73.  $k = 1, h = 4$  için eğik atış ve SLEIGN2 ile elde edilen ilk özfonksiyon

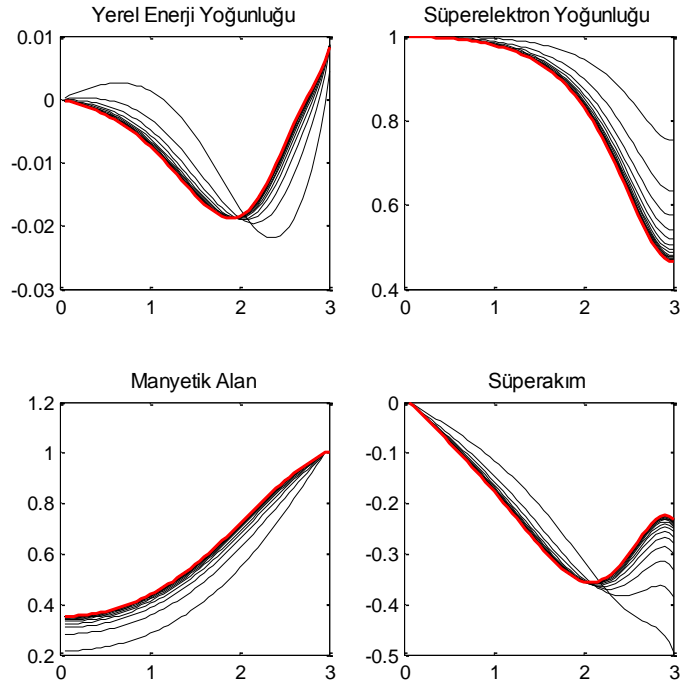
Yukarıdaki örneklerden görüldüğü gibi eğik atış yöntemi ilk özdeğer ve ilk özfonksiyon için oldukça iyi sonuçlar vermektedir.

## 2.6. TTDGLC İçin Sayısal Analiz

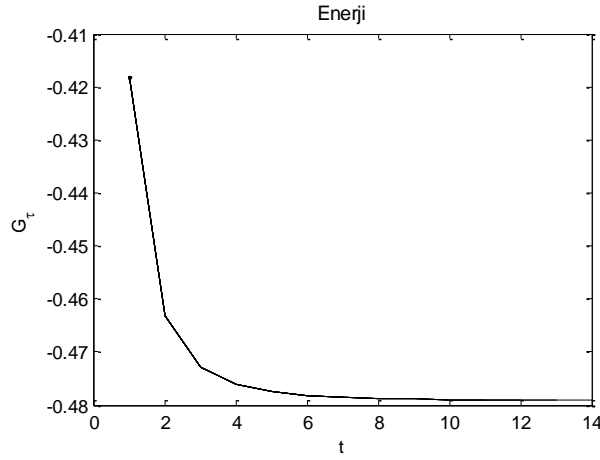
### 2.6.1. Zamana Bağlı Değişim Analizleri

Bu bölümde artan zaman değişkeni değerlerinde, farklı  $\kappa, h$  ve  $\tau$  değerleri için silindirik süperiletkende  $g_\tau(\psi, A)$  yerel enerji yoğunluğu,  $\psi^2$  süperiletken yoğunluğu,  $curl \mathbf{A} = \left(0, 0, \frac{1}{r}(rA)'\right)$  nüfuz eden manyetik alan ve  $J_s = (0, -A\psi^2, 0)$  süper akımın zamanla nasıl değiştiği incelenerek ve elde edilen sayısal sonuçların teorik sonuçlarla da uyumlu olduğu gözlemlenmiştir. Bunun için farklı parametre değerlerine karşılık zamana bağlı değişimler aşağıda verilmiştir. Şekil 74 de  $t$  zaman değişkeninin artan değerlerinde incelenen davranışların kırmızı ile gösterilen denge çözüm değerlerine yakınsadığı görülmektedir.

Şekil 75 de  $\kappa = 4, H = 1, \tau = 0, R = 3$  parametre değerleri için  $G_\tau(\psi, A)$  toplam enerji fonksiyonelinin zamanla değişim grafiği incelenmiştir. Şekil incelendiğinde teorik sonuçlarla uyumlu olarak  $G_\tau(\psi, A)$  (Teorem 8) toplam enerji fonksiyonelinin  $t$  zaman değişkeninin artan değerleri için azalan olduğu ve denge çözümde enerjinin negatif olduğu görülmektedir.



Şekil 74.  $\kappa = 4, H = 1, \tau = 0, R = 3$  için artan zaman değişkenine göre denge çözümü(kırmızı) yaklaşım

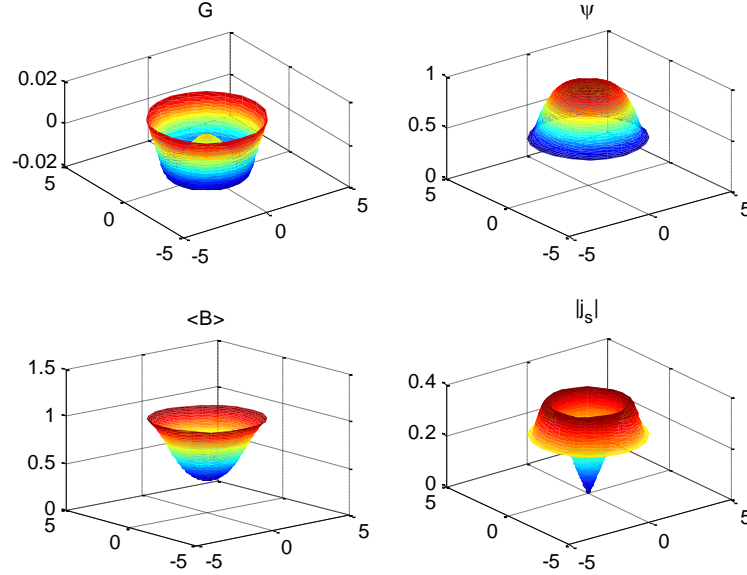


Şekil 75.  $\kappa = 4, H = 1, \tau = 0, R = 3$  için artan zaman değişkenine göre toplam enerji

Şekil 74 de elde edilen sonuçların radyal simetrik yansımaları alınarak Şekil 76 da sunulan grafikler elde edilmiştir. Dolayısıyla Şekil 76 da ara durum adı verilen manyetik alanın kısmen nüfuz ettiği silindirik materyaldeki fiziksel gözlemler, süperiletkenin gerçek geometrisi içerisinde yansıtılmaktadır.

Dış manyetik alanın numune içerisine doğru sürekli ve azalan bir profil ile nüfuz etmesine paralel olarak süperelektron yoğunluğunun numune merkezine doğru yaklaştıkça

arttığı görülmektedir. Bu sonuç fiziksel deneylerle gözlemlenen klasik sonuçlarla uyumludur.



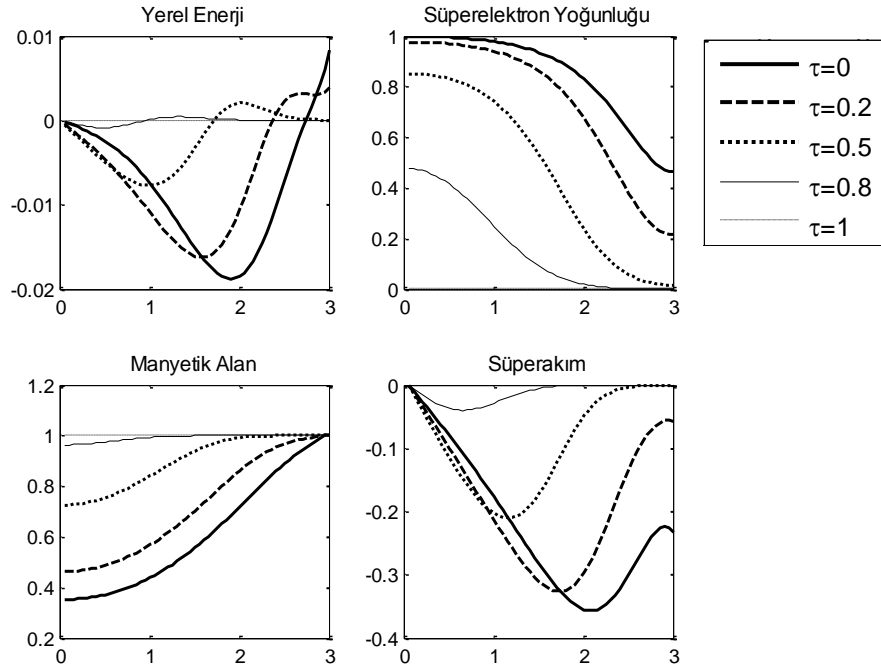
Şekil 76.  $\kappa = 4, H = 1, \tau = 0, R = 3$  için Enerji( $G$ ), Süperelektron yoğunluğu( $\psi$ ), Manyetik Alan( $\langle B \rangle$ ) ve Süperakımın( $|j_s|$ ) radyal simetrik yansımaları

## 2.6.2. Sıcaklığa Bağlı Değişim Analizleri

Literatürde sıcaklık parametresi içermeyen silindirik süperiletken için SGLC modelinin  $\kappa, H, R$  parametrelerine göre değişik analizlerinin yapıldığı özellikle Zharkov(2002) ve Aftalion (1999) in çalışmalarında görülmektedir. Sıcaklık parametresini de koruyacak şekilde düzenlediğimiz TTDGLC sisteminin bu üç parametreye ek olarak sıcaklık parametresi  $\tau$  ya göre de çözümün özelliklerini incelemek mümkündür.

### 2.6.2.1. Sıcaklığa Bağlı Yerel Davranışlar

Bu bölümde ilk olarak TTDGLC sisteminde mevcut üç parametreden( $\kappa, h, \tau$ ) biri olan sıcaklık parametresi  $\tau$  nun artan değerleri için enerji fonksiyonelinin, süperelektron yoğunluğunun, nüfuz eden manyetik alanın ve süperakımın yerel davranışları ele alınmıştır. İkinci olarak ise sıcaklık değeri arttıkça enerji, manyetizasyon, nüfuz eden manyetik alan ve maksimum süperelektron yoğunluğunun sıcaklığın fonksiyonu olarak değişimleri ve bunlara bağlı olarak da kritik sıcaklık değerleri belirlenmiştir. Bunun için  $\kappa, h$  ve  $R$  sabit tutularak,  $\tau$  nın artan değerleri için değişimler incelenmiştir.



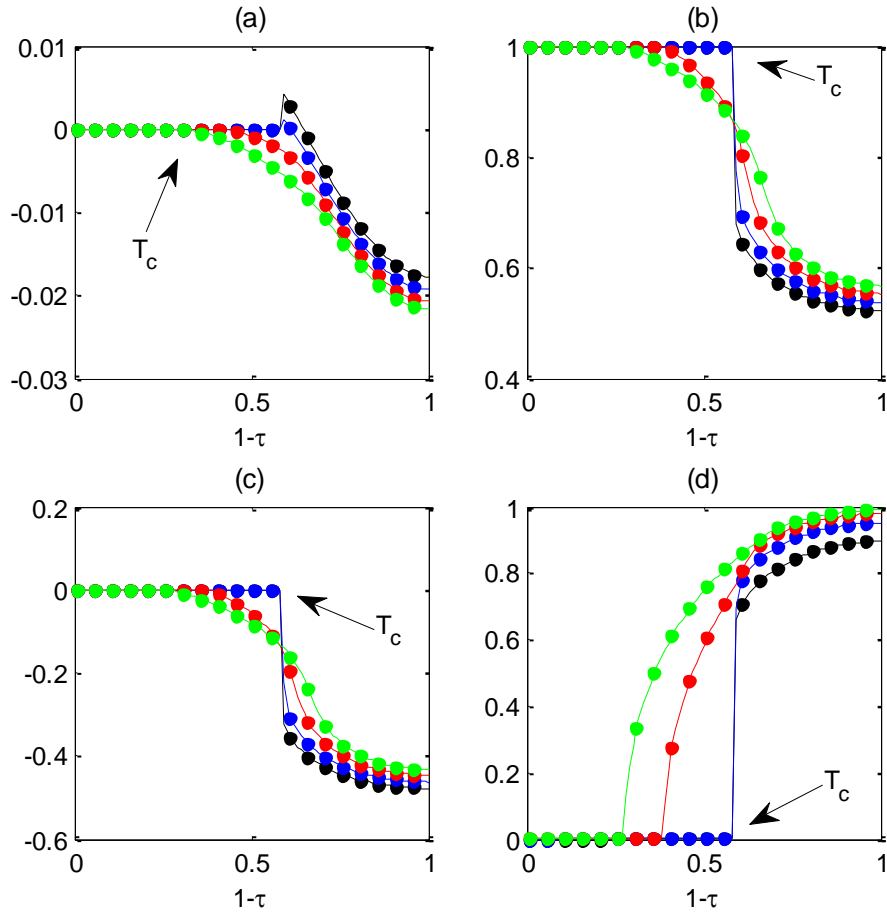
Şekil 77.  $R = 3$  yarıçaplı numune için  $(\kappa, h, \tau) = (4, 1, \tau)$ ,  $\tau = 0, 0.2, 0.5, 0.8, 1$  uçlularına karşılık elde edilen sonuçlar

Şekil 77 de  $R = 3$  yarıçaplı süperiletken için  $\kappa = 4, h = 1$  alınarak  $\tau$  nun  $0, 0.2, 0.5, 0.8, 1$  değerlerine karşılık gözlemlenebilir yerel davranışların grafikleri çizilmiştir. Şekil 77 incelendiğinde artan sıcaklık değerleri için manyetik alanın kenarlardan numuneye nüfuz ettiği, süperelektron yoğunluğunu azaldığı ve süperakımın daha çok kenarlarda sirkülasyon yaptığı gözlemlenmektedir.

Şekil 78 de  $H = 1, R = 2$  ve  $\kappa = 0.5, 1, 1.5, 2$  parametre değerleri için  $\tau = 0$  dan  $0.01$  birimlik değişimlerle  $\tau = 1$  e kadar artırıldığında toplam enerji, manyetizasyon, nüfuz eden ortalama manyetik alan ve maksimum süperelektron yoğunluğunun  $1 - \tau$  nun fonksiyonu olarak grafikleri elde edilmiştir. Bu grafiklere bakarak  $T_c$  nükleasyon kritik sıcaklık değerleri kolayca görülebilmektedir.

Şekil 78 den sıcaklık artırıldığında I. Tip süperiletkenlerde normal halde süperiletken hale geçişte süreksizlik olduğu ve dolayısıyla 1-inci mertebeden geçiş(first order transition) gözlemlenmektedir. II. Tip süperiletkenlerde ise belirtilen geçişin  $\kappa$  nun artan değerleriyle daha düzgün olduğu ve dolayısıyla 2-inci mertebeden geçiş(second order transition) gözlemlenmektedir.

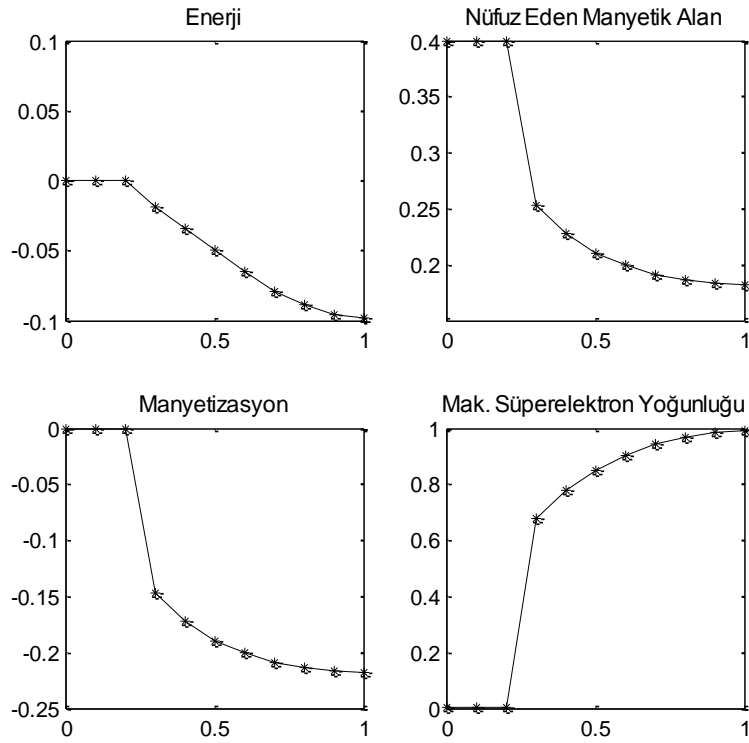




Şekil 78. (a) Enerji, (b) Nüfuz eden ortalama manyetik alan, (c) Manyetizasyon ve (d) Maksimum süperelektron yoğunluğunun  $\tau$  nun fonksiyonu olarak grafikleri (siyah:  $\kappa = 0.5$ , mavi:  $\kappa = 1$ , kırmızı:  $\kappa = 1.5$ , yeşil:  $\kappa = 2$ )

### 2.6.2.2. Meissner Olayı

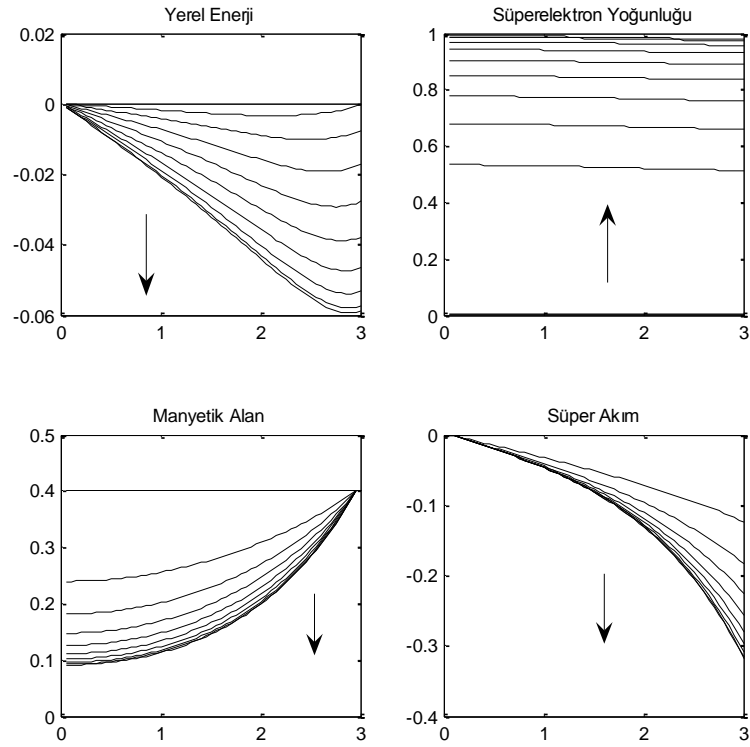
Bu bölümde Meissner etkisi olarak bilinen, süperiletkenin kritik sıcaklıktan aşağıya doğru soğutulduğunda nüfuz eden manyetik alanın dışlanması olayı gözlemlenmiştir. Bunun için  $\kappa = 0.6$ ,  $h = 0.4$ ,  $R = 3$  değerlerine sahip I. tip bir süperiletken için  $\tau = 1$  den 0.1 birimlik değişimlerle  $\tau = 0$  a kadar azaltılmıştır. Meissner olayı ve bu bölümde sıcaklık değişimine bağlı olarak gerçekleştirilen analizler, sıcaklık parametresinin boyutsuzlaştırma sürecinde yok edilerek elde edilen ve literatürde çalışılan klasik GL modeli ile gözlemlenmesi mümkün değildir.



Şekil 79. Yatay eksen  $1 - \tau$  olmak üzere  $\kappa = 0.6, h = 0.4, R = 3$  için fiziksel gözlemlenebilirler

Şekil 79 da  $\kappa = 0.6, h = 0.4, R = 3$  parametre değerlerine sahip süperiletken için  $\tau$  sıcaklık parametresi  $\tau = 1$  den  $\tau = 0$  a kadar azaltıldığında elde edilen toplam enerji, nüfuz eden ortalama manyetik alan, manyetizasyon ve maksimum süperelektron yoğunluğuna ait eğriler görülmektedir. Şekle göre enerji, nüfuz eden ortalama manyetik alan ve manyetizasyon eğrilerinin  $1 - \tau$  nun fonksiyonu olarak azalan olduğu, maksimum süperelektron yoğunluğunun ise artan olduğu görülmektedir. Ayrıca nüfuz eden ortalama manyetik alan, manyetizasyon ve maksimum süperelektron yoğunluğunda bir sıçrama süreksizliğinin olduğu görülmektedir.

Şekil 80 de ise aynı parametre değerleri için yerel enerji, süperelektron yoğunluğu, manyetik alan ve süperakıma ait çözüm eğrileri verilmiştir. Şekilde oklar azalan sıcaklık değerine karşılık yerel davranışların yönünü göstermektedir. Şekil incelendiğinde enerji fonksiyonelinin azalan olduğu, normal konumda olan numunenin süperelektron yoğunluğunda ani bir artışla süperiletken konuma geçtiği, manyetik alanın iç kısımlarda aniden dışlandığını ve kenarlarda kısmen de olsa nüfuz ettiği, Messiner akımının ise kenarlarda sirkülasyon ettiğini gözlemlenmektedir.



Şekil 80.  $\kappa = 0.6, h = 0.4, R = 3$  için yerel davranışlarda gözlemlenen Meissner olayı

### 2.6.2.3. Uygulanan Manyetik Alan Şiddetinin Değişimine Bağlı Davranışlar

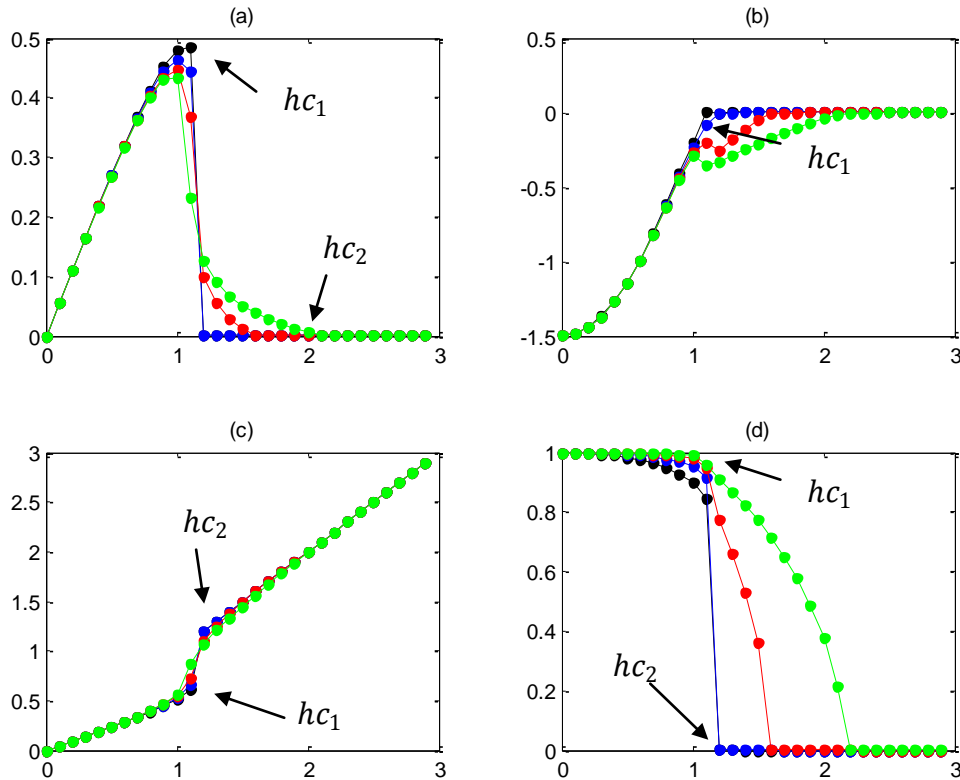
Literatürden biliyoruz ki I. tip süperiletkenlerde maksimum süperelektron yoğunluğunun sıfıra çok yaklaştığı duruma karşılık gelen ve  $H_c$  ile gösterilen termodinamik kritik alan, II. tip süperiletkenlerde ise süperelektron yoğunluğunda görülen ilk belirgin düşüğe karşılık gelen  $H_{c1}$  alt kiritik alanı ve dışardan uygulanan manyetik alan şiddetinin, nüfuz eden manyetik alan şiddetine eşit olduğu  $H_{c2}$  üst kritik alanı mevcuttur.

Zharkov vd. (1999) tarafından uygulanan manyetik alan şiddetinin artan değerleri için enerji, manyetizasyon, silindir merkezindeki manyetik alan, silindir merkezindeki süperelektron yoğunluğu ve silindire nüfuz eden manyetik alan gibi bazı niteliklerin değişimini  $h$  nın fonksiyonu olarak incelemiş ve bunlara bağlı olarak  $H_{c1}$  ve  $H_{c2}$  değerlerini belirlemişlerdir. Biz de benzer bulguları gözlemleyip sıcaklık parametresine bağlı olarak faz geçiş bölgelerini bularak sonuçları genişletiyoruz.

Bunun için ilk olarak  $\tau$  ve  $R$  yi sabit tutarak farklı  $\kappa$  değerleri için  $h$  yi artırarak değişimleri inceleyelim.  $\kappa = 0.5; 1; 1.5; 2, \tau = 0, R = 3$  alınarak ve  $h = 0$  dan 0.1 birimlik değişimlerle  $h = 3$  e kadar artırıldığında elde edilen sonuçlar Şekil 81 de gösterilmiştir.

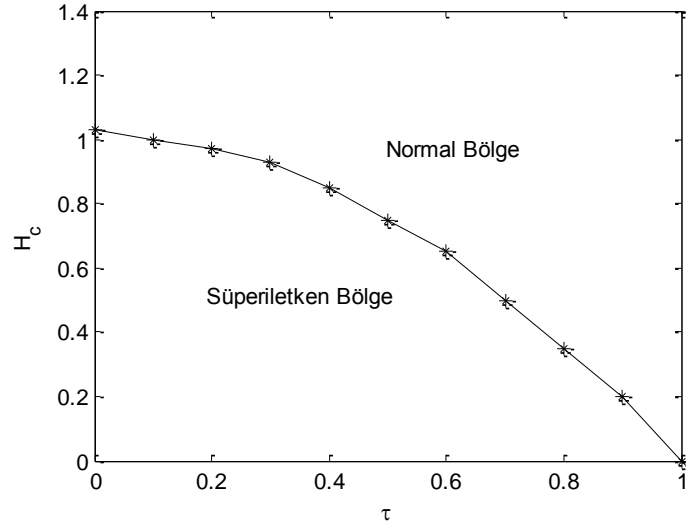
Şekil 81 de uygulanan manyetik alan şiddetinin fonksiyonu olarak, I. Tip süperiletkenin süperiletken konumdan normal konuma geçişinde gözlenebilirlerde süreksizliğin olduğu(I. Tip faz geçişi), II. Tip süperiletkenlerde ise belirtilen geçişin sürekli olduğu(II. Tip faz geçişi) gözlemlenmektedir.

Şekil 82 de I. Tip süperiletken numunenin termodinamik kritik alanının  $\tau$  ya bağlı değişimi sunulmaktadır.  $\tau = 0:0.1:1$  değerleri için süperiletken konumdan normal konuma geçişi sağlayan en küçük uygulanan manyetik alan şiddeti  $H_c(\tau)$  olarak alınmıştır. Şekil 83 de ise II. Tip süperiletken silindirik numuneye ait  $H_{c_1}(\tau), H_{c_2}(\tau)$  değişimleri  $\tau$  nun fonksiyonu olarak  $\kappa = 4, R = 3$  için elde edilmiştir.

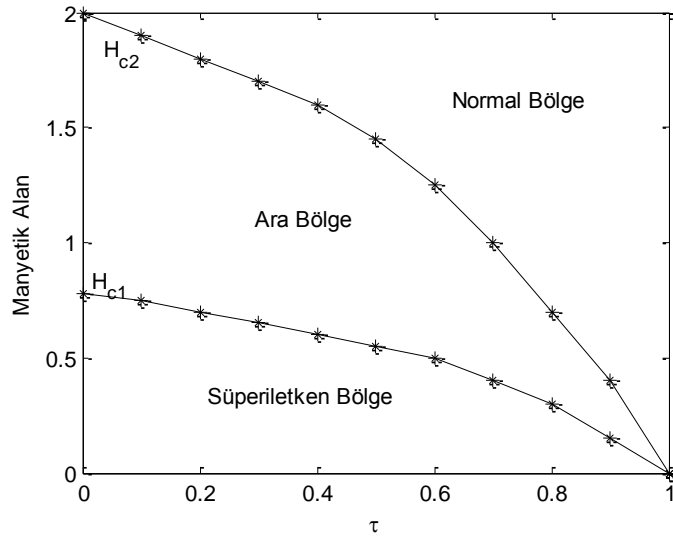


Şekil 81. (a) manyetizasyon, (b) enerji, (c) nüfuz eden ortalama manyetik alan ve (d) maksimum süperelektron yoğunluğunun  $h$  nın fonksiyonu olarak değişimleri(mavi: $\kappa = 0.5$ , siyah: $\kappa = 1$ , kırmızı: $\kappa = 1.5$ , yeşil: $\kappa = 2$ )

Başlangıçta süperiletken konumda bulunan numuneler için manyetik alan şiddeti küçük adımlarla artırılarak, süperelektron yoğunluğunda oluşan ilk gözlemlenebilir düşüşe karşılık gelen alan şiddeti  $H_{c_1}(\tau)$ ; numuneyi normal konuma dönüştüren ilk alan şiddeti ise  $H_{c_2}(\tau)$  olarak alınmıştır. Gözlemlenen  $H_{c_1}(\tau)$  ve  $H_{c_2}(\tau)$  eğrileri II. Tip süperiletkenler için fiziksel deneyler sonucu elde edilen değişimlerle aynıdır.



Şekil 82. I. tip süperiletkende  $H_c$  ve  $\tau$  ilişkisi ( $\kappa = 0.5, R = 3$ )



Şekil 83. II. tip süperiletkende  $H_c$  ve  $\tau$  ilişkisi ( $\kappa = 4, R = 3$ )

### 2.6.3. Josephson Eklemleri

Bu bölümde süperiletken arasına yerleştirilen normal iletkenlerle oluşturulan Josephson eklemlerinin numunenin elektromanyetik davranışları üzerindeki etkilerini araştırıyoruz. Özellikle eklemlerin kalınlıklarının ve sayılarının uygulanan manyetik alan şiddetine ve sıcaklığa göre etkilerini inceliyoruz.

$\Omega_N$  normal iletkenin,  $\Omega_S$  ise süperiletkenin  $r$  –ekseni yönündeki bileşenleri olmak üzere normal-süperiletken materyalin  $\tau$  bağımsız toplam enerjisi Yu (2003) da verilmiştir. Belirlenen model  $\tau$  bağımlı model için aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\begin{aligned} G(\psi, A) &= G_N(\psi, A) + G_S(\psi, A) \\ &= \int_{\Omega_N} \left[ (A^2 + 1)\psi^2 + \frac{1}{\kappa^2}(\psi')^2 + \left( \frac{1}{r}(rA)' - H \right)^2 \right] r dr \\ &+ \int_{\Omega_S} \left[ \left( A^2 + \tau^2 - 1 + \frac{1}{2}\psi^2 \right) \psi^2 + \frac{1}{\kappa^2}(\psi')^2 + \left( \frac{1}{r}(rA)' - H \right)^2 \right] r dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(\psi, A) &= \int_{\Omega_N} \psi^2 dr + \int_{\Omega_S} \left( \tau^2 - \psi^2 + \frac{1}{2}\psi^4 \right) dr \\ &+ \int_{\Omega_N \cup \Omega_S} \left[ \psi^2 A^2 + \frac{1}{\kappa^2}(\psi')^2 + \left( \frac{1}{r}(rA)' - H \right)^2 \right] r dr \end{aligned}$$

ile ve buna bağlı olarak GL sistemi

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + r(1 - A^2 - \psi^2)\psi, \quad r \in \Omega_S$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - r(1 + A^2)\psi, \quad r \in \Omega_N$$

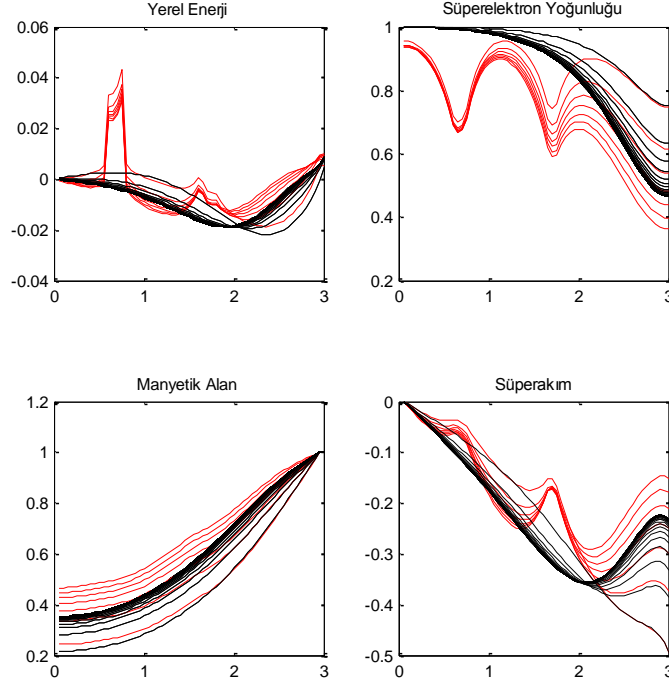
$$\frac{\partial A}{\partial t} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \right) - rA\psi^2, \quad r \in \Omega_N \cup \Omega_S$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(0) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial r}(R) = 0, A(0) = 0, \frac{1}{R} \frac{\partial (rA)}{\partial r}(R) = H$$

$$\psi(r, 0) = \psi_0(r), A(r, 0) = A_0(r)$$

ile verilir.

Şekil 84 de Süperiletken-Normal-Süperiletken-Normal-Süperiletken(SNSNS) şeklinde araya iki adet normal iletkenin yerleştirildiği inhomojen materyal için yerel enerji, süperelektron yoğunluğu, manyetik alan ve süperakımdaki yerel davranışlar gözlemlenmiştir.



Şekil 84.  $\kappa = 4, h = 1, \tau = 0, R = 3$  için homojen(siyah) ve SNSNS şeklinde inhomojen(kırmızı) numune için zaman değişkeninin fonksiyonu olarak yerel davranışlar

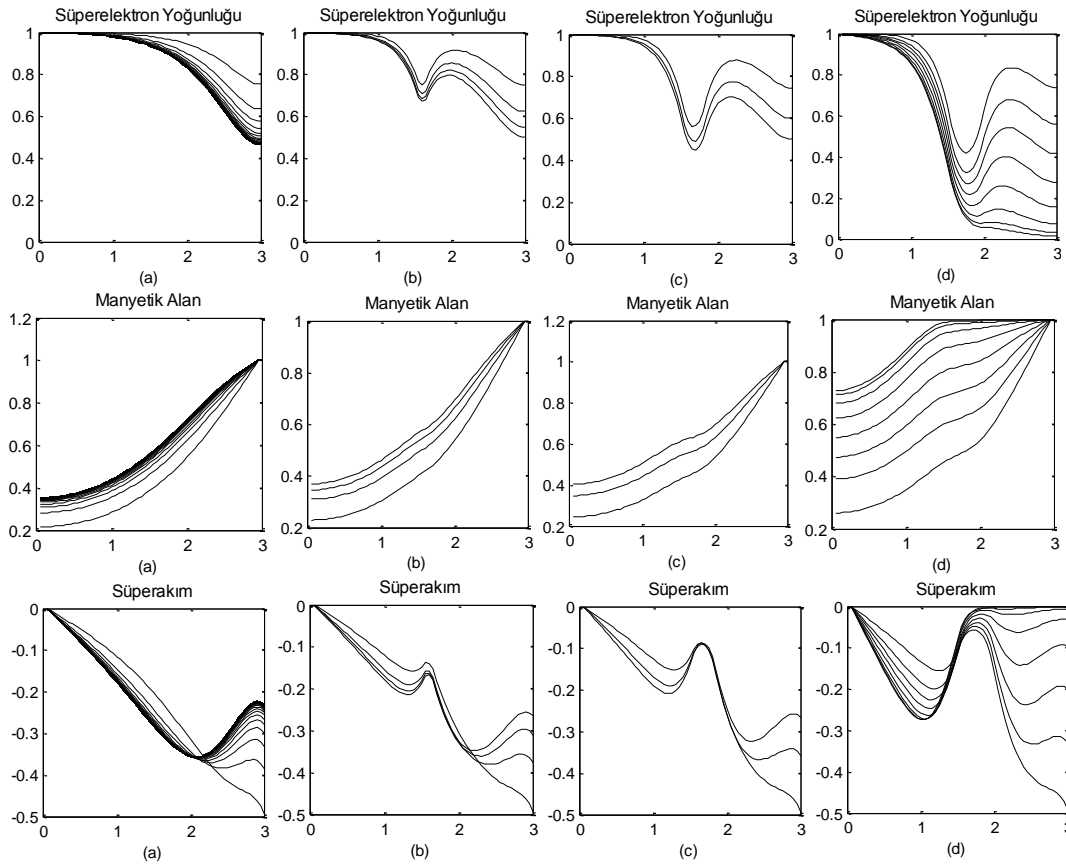
Şekil 84 de  $[0,3]$  radyal ekseninin  $[0.8,0.95]$  ve  $[1.8,1.95]$  kısımları normal iletken ve diğer kısımları süperiletken olarak alınmıştır. Eklemlerdeki süperelektron yoğunluğunun komşu süperiletken bölgeye kıyasla daha az olduğu görülmektedir. Bu durum fiziksel olarak beklenen bir sonuçtur. Eklem bölgelerindeki süperakım yoğunluğunun ise sıfır olmayıp, komşu süperiletken bölgelere kıyasla daha düşük olduğu görülmektedir. Diğer bir deyişle materyalin normal kısımları olan eklemler de süperakım taşımaktadır. İlk kez Josephson(1962) de gözlemlenen bu olay GL modeli kapsamında da modellenenmektedir.

Homojen numunelerde fiziksel gözlenebilirler yerel eksen boyunca düzgün bir dağılım sergilerken, iki eklem sahip süperiletken numunede eklem bölgelerinde de numunenin zayıf süperiletkenlik özelliği gösterdiği görülmektedir.

### 2.6.3.1. Eklemlerin Kalınlığı ve Sayıları

Bu bölümde aralara normal iletkenler yerleştirilerek oluşturulan inhomojen materyaller için normal iletkenlerin kalınlığı ve normal iletkenlerin sayısının sistem üzerindeki etkisini araştırılmıştır.

Josephson eklemlerinde normal bölge kalınlığı,  $M$  sayısal çözümde kullanılan alt aralık sayısı olmak üzere  $d_n = l_n * \frac{R}{M}$ , ( $l_n = 3,6,9,12$ ) birim olarak alınmaktadır. Şekil 85 de farklı kalınlıklara sahip tek bir normal iletkenin olduğu SNS şeklinde oluşturulan inhomojen materyal ele alınmıştır. Şekil 86 da ise yine farklı kalınlıklara sahip fakat birden fazla normal iletkenin olduğu homojen olmayan(inhomojen) materyal ele alınmıştır. Her iki şekilde incelendiğinde tek bir normal bölge yerine daha küçük kalınlıklarda birden fazla normal bölge seçildiğinde manyetik alanının numuneye kenarlardan daha az nüfuz ettiği görülmektedir.



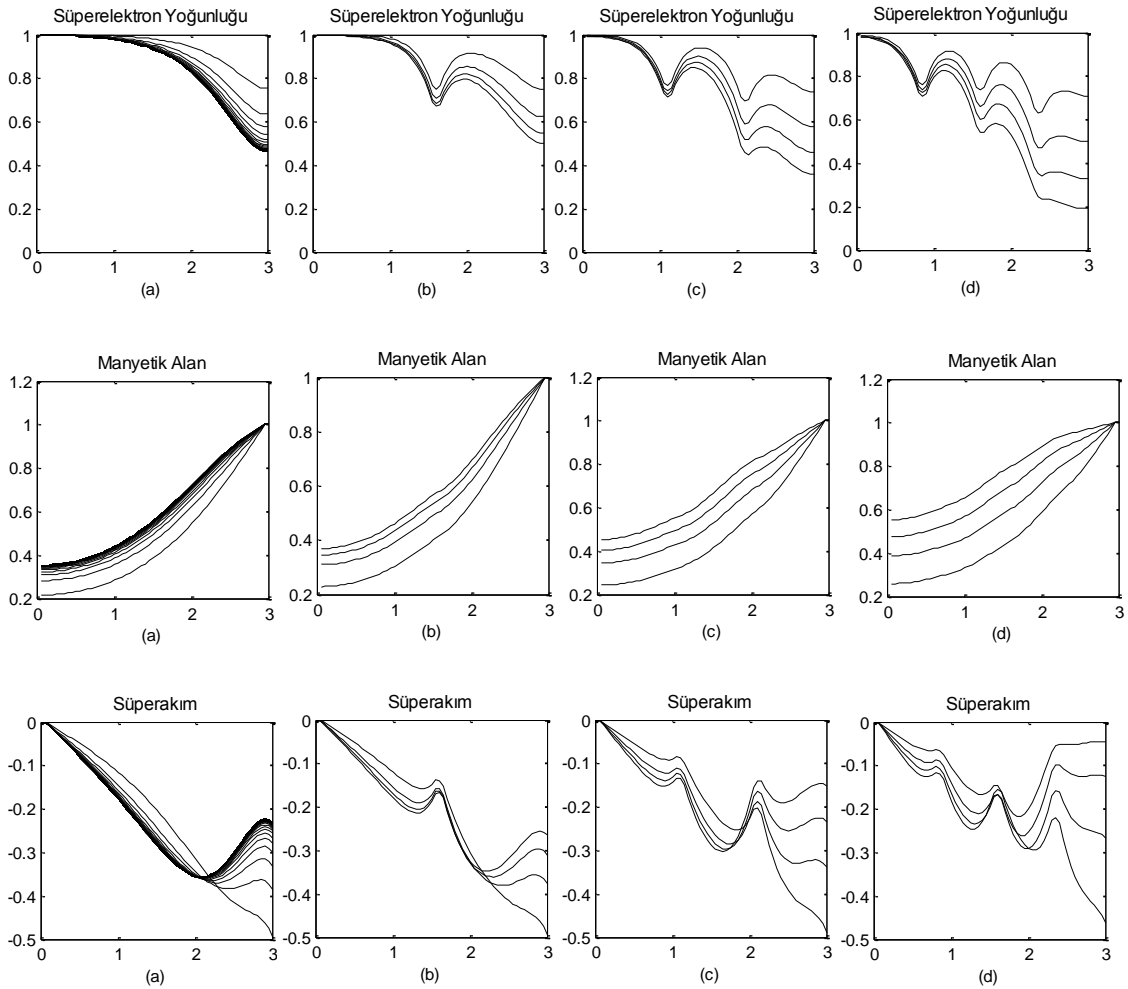
Şekil 85. Eklem genişliğinin( $d_n$ ) yerel davranış üzerindeki etkisi( $\kappa = 4, h = 1, R = 3$ )  
 (a) Homojen (b) SNS ve  $d_n=3$  birim (c) SNS ve  $d_n=6$  birim (d) SNS ve  $d_n=9$  birim



Şekil 85 de SNS(Süperiletken-Normal-Süperiletken) eklemde, eklem kalınlığının fiziksel gözlemlerinin yerel davranışını nasıl etkilediği gözlemlenmektedir. Eklem kalınlığı arttıkça, eklemlerin süperiletkenlik özellikleri zayıflattığı gözlemlenmektedir. Doğal olarak nüfuz eden manyetik alanın arttığı, belirli bir eklem kalınlığı üzerinde ise eklemin artık süperakım taşımaya engel olduğu görülmektedir.(Şekil 85-d)

Şekil 86 da ise  $d_n = 3$  birim kalınlıklı eklem sayılarının artması durumunda numunenin elektromanyetik özellikleri gözlemlenmektedir. Eklem sayılarının artışına paralel olarak, nüfuz eden manyetik alanın arttığı görülmektedir.(Şekil 86 (b)-(d)).

Yine eklem sayısı kadar süperakım eğrisinde yerel maksimumların oluştuğu, diğer bir ifadeyle zayıf süperakım bölgeleri oluştuğu görülmektedir.



Şekil 86. Eklem sayısının yerel davranışlar üzerindeki etkisi ( $\kappa = 4, h = 1, R = 3$ ) (a) Homojen (b) SNS ve  $d_n=3$  birim (c) SNSNS ve  $d_n=3$  birim (d) SNSNSNS ve  $d_n=3$  birim

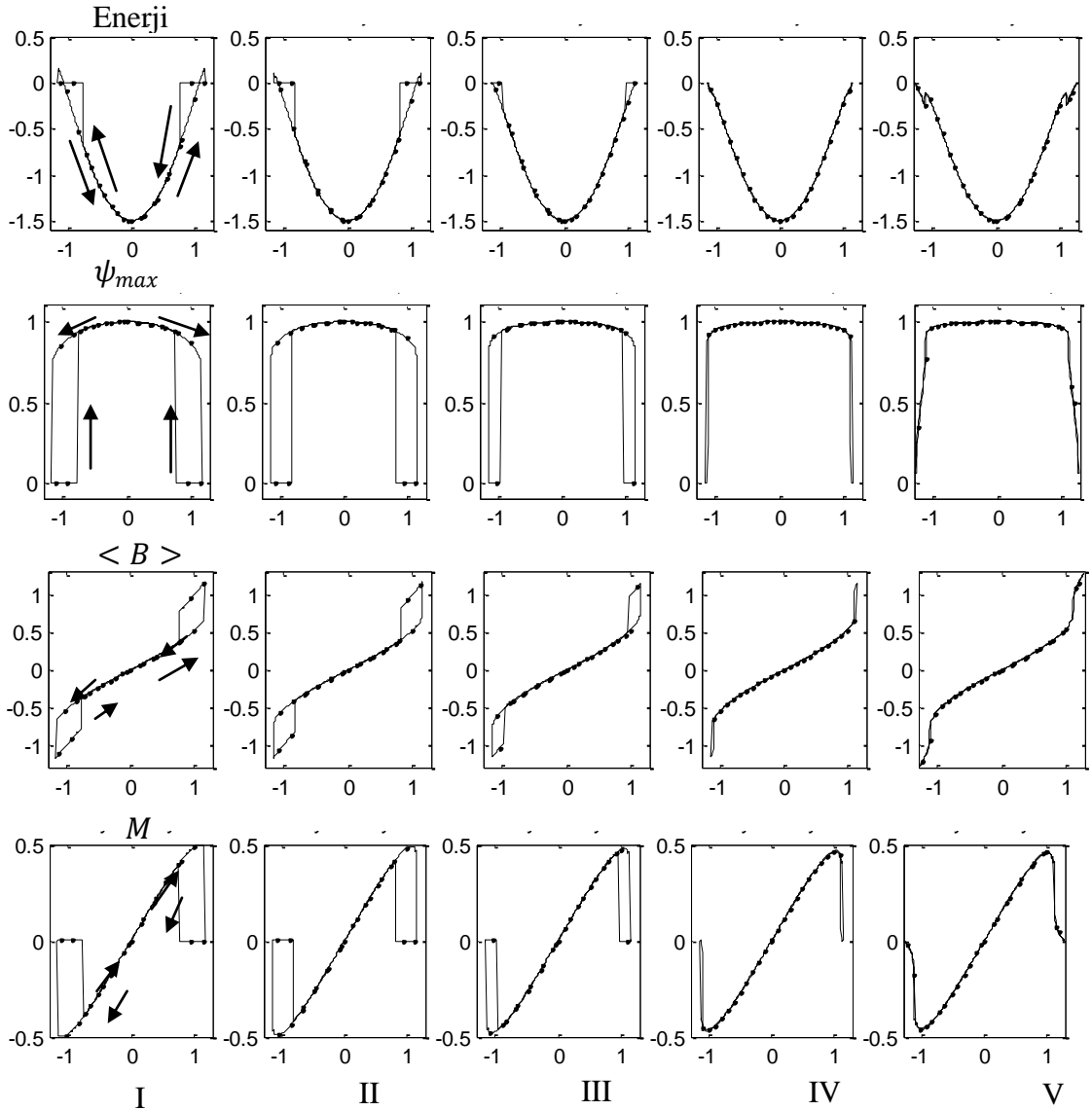
#### 2.6.4. Histeritik Davranışlar

Histerisiz, bağımlı iki nicelikten birisi bir periyodu tamamlayacak şekilde artırılıp-azaltıldığında, bağımlı diğer niceliğin artırılırken farklı, azaltılırken farklı davranışlar göstermesi olarak ifade edilebilir. Bu bağlamda silindirik geometriye sahip numuneler için sıcaklığı artırıp-azalttığımızda enerji, manyetizasyon, manyetik alan ve maksimum süperelektron yoğunluğu, dikdörtgen film tabakada(slab) gözlemlendiği üzere(Cakir, 2006) histeritik davranış gözlemlenmektedir.

##### 2.6.4.1. Uygulanan Manyetik Alana Bağlı Histerisiz

Bu bölümde verilen  $\kappa, \tau, R$  parametreleri için önce  $h = 0$  dan  $0.1$  birimlik değişimlerle  $h = a = 1 = \sqrt{2}H_c$  ye kadar artırılıp, sonra  $h = -a$  ya kadar azaltılıp, daha sonra  $h = 0$  a kadar artırılarak oluşturulan döngüde manyetik alana bağlı histerisiz eğrileri sunulmaktadır. Sırasıyla  $\kappa = 0.2, \kappa = 0.5, \kappa = 0.8, \kappa = 1, \kappa = 1.2$  ve  $\tau = 0, R = 3$  değerleri için enerji( $G$ ), ortalama manyetik alan( $\langle B \rangle$ ), manyetizasyon( $M = \langle B \rangle - H$ ), ve maksimum süperelektron yoğunluğunda( $\psi_{max} = \max_{x \in R}(\psi^2)$ ) oluşan histerisiz eğrileri Şekil 87 de sunulmuştur.

Şekil 87 de görüldüğü üzere manyetik alana bağlı histerisiz özellikle I. tip numunelerde oluşmaktadır. Oluşan histerisizin büyüklüğünü belirlemek amacıyla Şekil 87 de gösterilen histerisiz eğrileri arasında kalan bölgenin alanını hesaplıyoruz. Elde edilen değere histeritik alan adını veriyoruz. Buna göre maksimum histeritik alan  $\kappa = 0.8$  değeri için gözlemlenmektedir.  $\kappa$  nın artan değerleri için(II. tip süperiletkene yakın numuneler için) histeritik alanların azaldığı görülmektedir. II. tip süperiletken olmasına rağmen  $\left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right]$  aralığında da gözlemlenebilir büyüklükte histeritik alanlar oluşmaktadır.

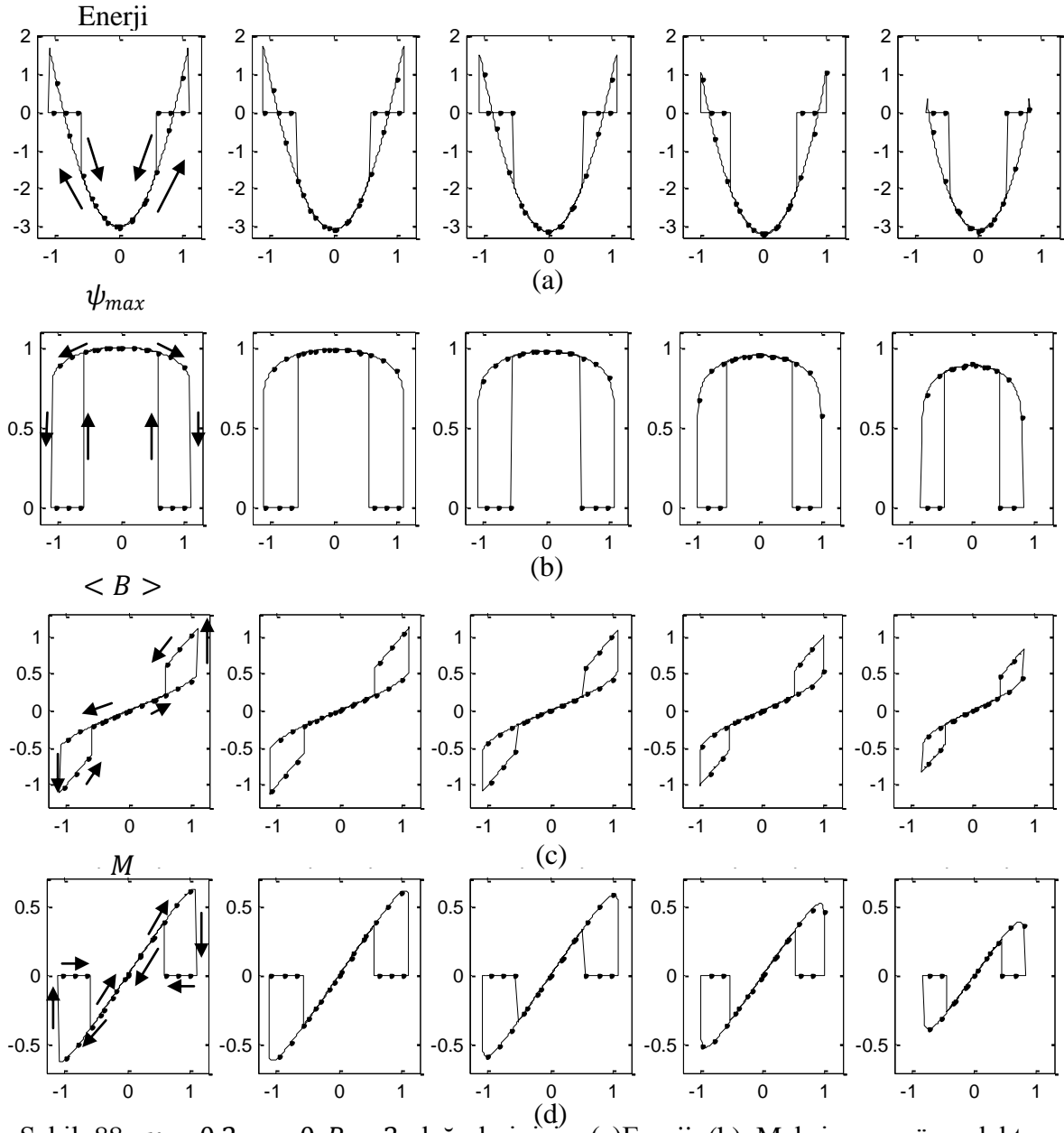


Şekil 87.  $\kappa = 0.2$  (I),  $\kappa = 0.5$  (II),  $\kappa = 0.8$  (III),  $\kappa = 1$  (IV),  $\kappa = 1.2$  (V) ve  $\tau = 0, R = 3$  değerleri için (a) Enerji (b) Maksimum süperelektron yoğunluğu (c) Ortalama manyetik alan ve (d) Manyetizasyon eğrilerinde oluşan histeritik davranışlar

#### 2.6.4.2. Josephson Eklemlerinin Uygulanan Manyetik Alana Bağlı Histerisize Etkisi

Bir önceki bölümde homojen materyaller için uygulanan manyetik alana bağlı histeritik davranışlar incelenmişti. Bu bölümde ise süperiletken materyal arasına yerleştirilen iki adet normal materyal ile oluşturulan SNSNS şeklindeki Josephson eklemının histeritik davranışlar üzerindeki etkisini incelenmektedir.

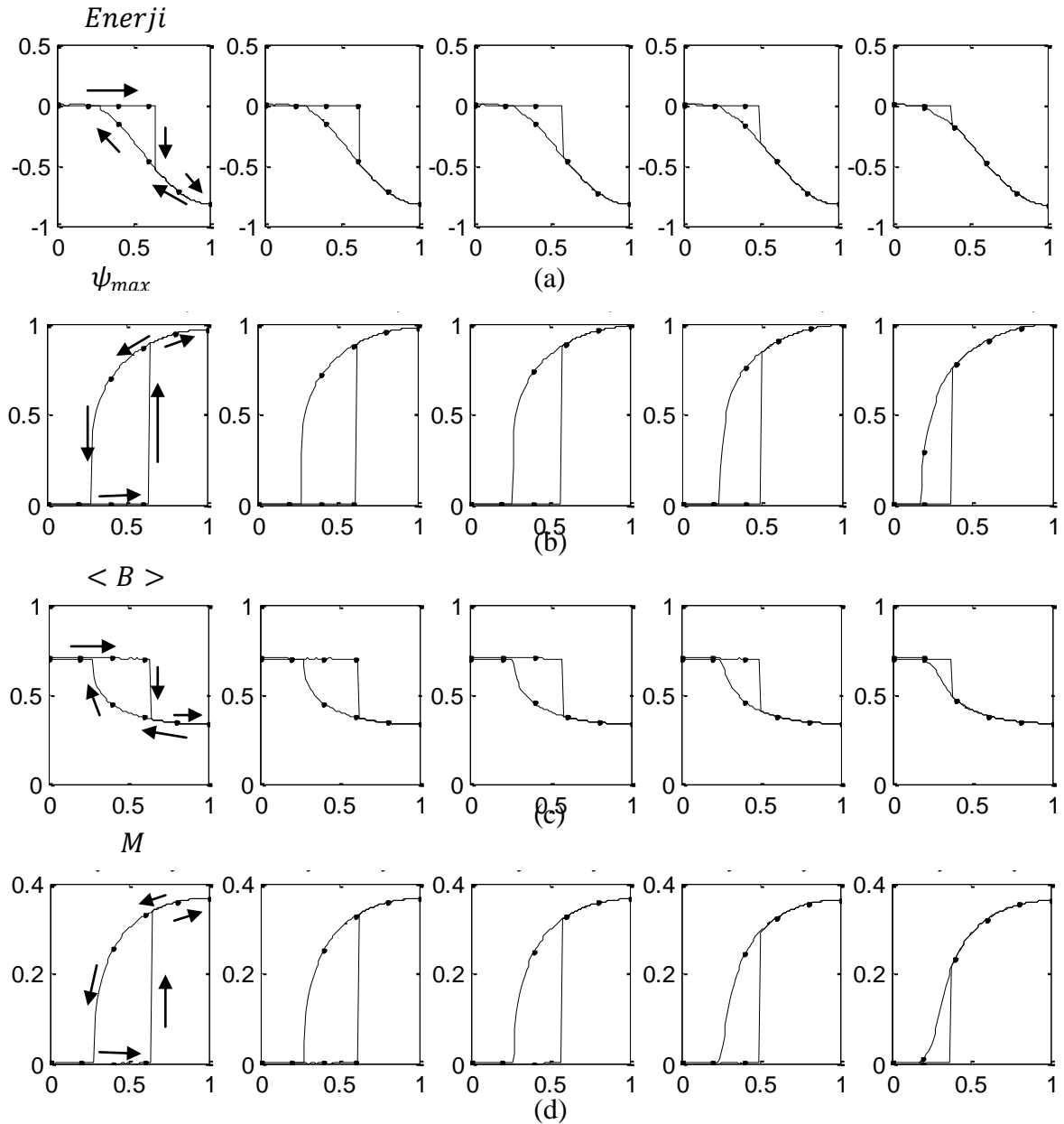
$\kappa = 0.2, \tau = 0, R = 3$  olmak üzere I. tip bir süperiletken materyali göz önüne alalım. Aşağıdaki grafiklerde sırasıyla SNSNS konfigürasyonunda normal bölge kalınlığının  $M$  sayısal çözümde kullanılan alt aralık sayısı olmak üzere  $d_n = l_n * \frac{R}{M}$ , ( $l_n = 3, 6, 9, 12$ ) birim olduğu materyaller içeren inhomojen materyaller için enerji, manyetizasyon, manyetik alan ve maksimum süperelektron yoğunluğu için histerisiz eğrileri elde edilmiştir. Bu örnek için  $M = 60$  alınmıştır. Şekil 88 den normal bölge kalınlığı artırıldıkça oluşan histerik bölge alanının gittikçe azaldığı gözlemlenmektedir.



Şekil 88.  $\kappa = 0.2, \tau = 0, R = 3$  değerleri için (a)Enerji (b) Maksimum süperelektron yoğunluğu (c) Ortalama manyetik alan ve (d) Manyetizasyon eğrilerinde uygulanan manyetik alan şiddetine bağlı oluşan histeritik davranışlar(yatay eksen:  $H$ )

### 2.6.4.3. Sıcaklığa Bağlı Histerisiz

Bu bölümde verilen  $\kappa, h, L$  veya  $R$  parametreleri için  $\tau = 1$  den 0.01 birimlik değişimlerle  $\tau = 0$  a kadar azaltılıp tekrar 0.01 birimlik değişimlerle  $\tau = 1$  kadar artırılıp periyot tamamlandığında enerji, manyetizasyon, manyetik alan ve maksimum süperelektron yoğunluğu için histerisiz eğrileri elde edilmiştir.

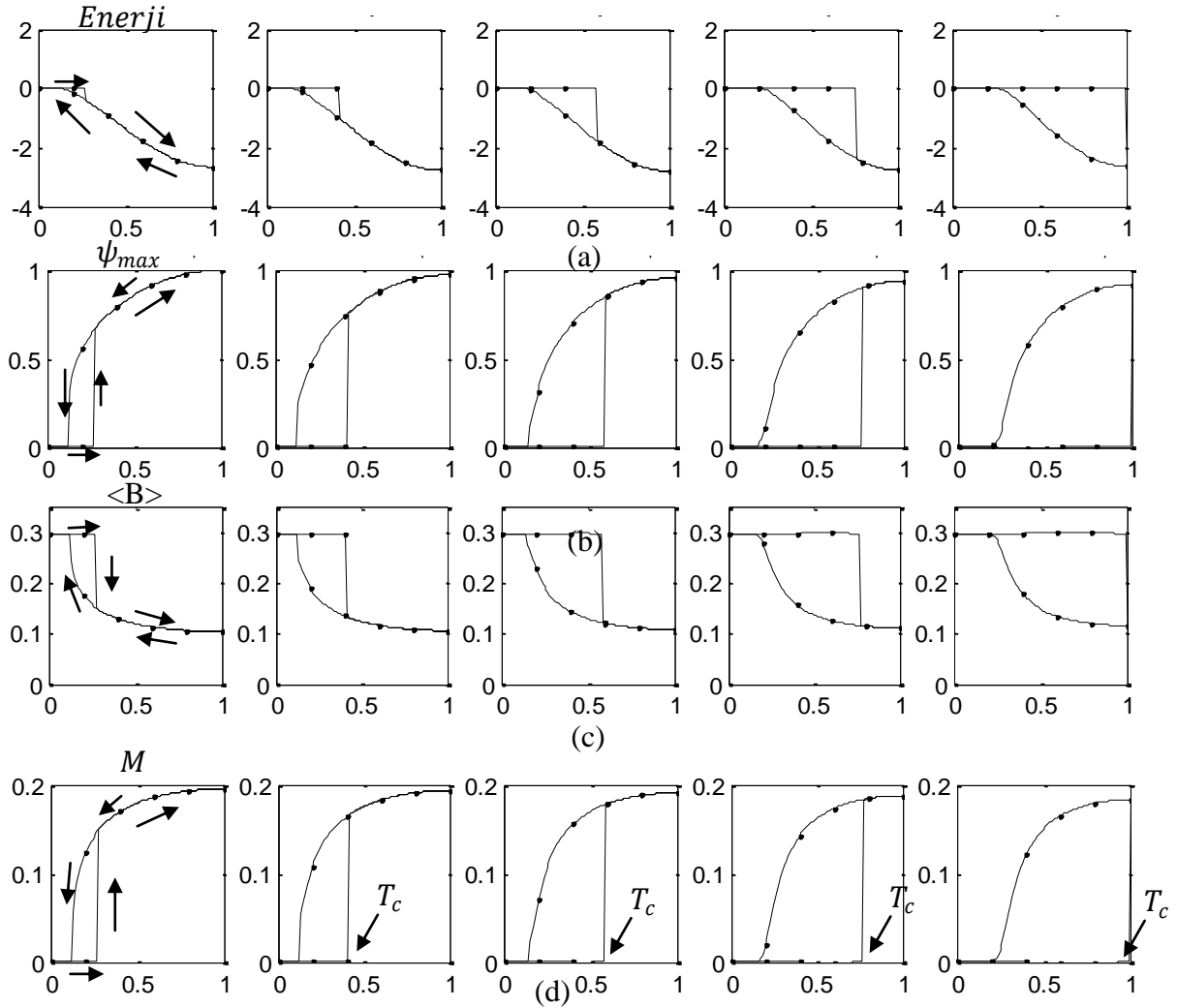


Şekil 89.  $\kappa = 0.6, 0.8, 1, 1.4, 2$  ve  $h = 0.7, R = 3$  değerleri için (a)enerji (b) manyetizasyon (c) manyetik alan ve (d) maksimum süperelektron yoğunluğunda sıcaklığa bağlı histerisiz eğrileri(yatay eksen:  $1 - \tau$ )

Soldan sağı sırasıyla  $\kappa = 0.6, 0.8, 1, 1.4, 2$  ve  $h = 0.7, R = 3$  değerleri için enerji, manyetizasyon, manyetik alan ve maksimum süperelektron yoğunluğunda sıcaklığa bağlı oluşan histerisiz eğrileri aşağıdaki gibi olacaktır. şekil 89 dan da görüldüğü üzere  $\kappa$  değerleri arttıķca histerisiz alanları azalmaktadır.

#### 2.6.4.4. Josephson Eklemlerinin Sıcaklığa Bağlı Histerisize Etkisi

Bir önceki bölümde homojen materyaller için sıcaklığa bağlı histeritik davranışlar incelenmişti. Bu bölümde ise süperiletken arasına yerleştirilen iki adet normal iletken ile oluşturulan SNSNS şeklindeki Josephson eklemi için sıcaklığa bağlı histeritik davranışlar üzerindeki etkisini incelenmektedir.



şekil 90. Normal iletken kalınlığının soldan sağı sırasıyla  $d_n = 3, 6, 9, 12$  birim olduğu SNSNS Josephson eklemleri için (a) Enerji (b) Maksimum süperelektron yoğunluğu (c) Nüfuz eden ortalama manyetik alan (d) Manyetizasyon histerisiz eğrileri (yatay eksen:  $1 - \tau$ )

$\kappa = 0.6, h = 0.3, R = 3$  olmak üzere I. tip bir süperiletken materyali göz önüne alalım. Şekil 90 da sırasıyla homojen,  $d_n = 3,6,9,12$  birim kalınlıklı normal iletkenler içeren inhomojen materyaller için enerji, manyetizasyon, manyetik alan ve maksimum süperelektron yoğunluğu için histerisiz eğrileri Şekil 90 da gösterilmiştir.

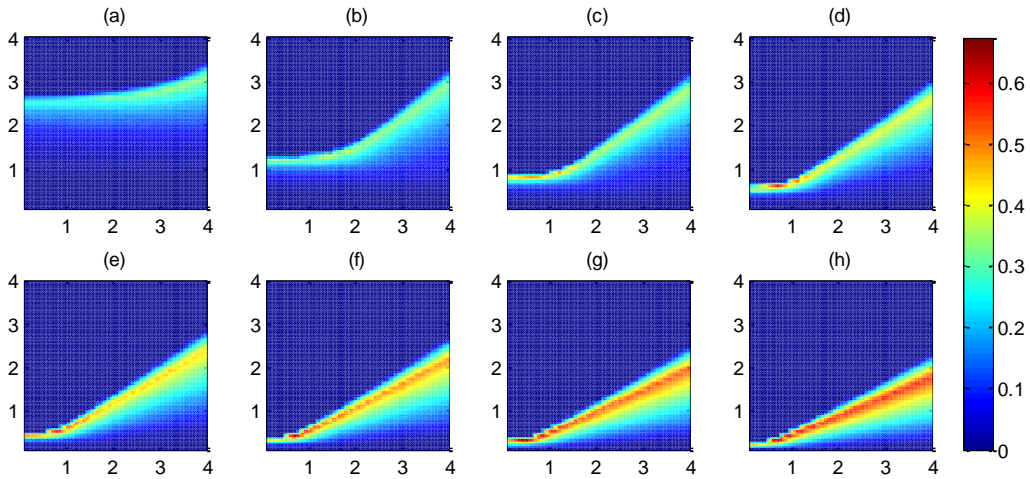
Şekil 90 dan normal iletken kalınlığı arttıkça histerisiz alanı arttığı görülmektedir. Ayrıca eklemlerde bulunan normal iletken kalınlığının artışına paralel olarak  $T_c$  kritik sıcaklık değerinin azaldığı görülmektedir.

## 2.6.5. İki Parametre Değişim Analizleri

### 2.6.5.1. Ginzburg-Landau Parametresi ve Uygulanan Alan Değişimine Göre $\kappa$ -H Diyagramları

Bu bölümde farklı kalınlıklı numuneler için sıcaklığa bağlı  $\kappa - H$  histeritik bölgelerini belirlemek istiyoruz.  $\kappa$  ve  $H$  nın farklı değerleri için  $\tau$  ya göre histeritik alanlar hesaplanarak, bulunan değerlerin  $\kappa$  ve  $H$  ya göre renk grafikleri Şekil 91 de gösterilmektedir.

Bunun için MATLAB notasyonu ile  $\kappa = 0.1:0.1:4$  ve  $H = 0.1:0.1:\kappa\sqrt{2}$  vektörlerinin her bir bileşeni için,  $\tau = 1:-0.01:0 \ 0.01:0.01:1$  döngüsü oluşturularak elde edilen histeritik alanlar hesaplanmıştır.



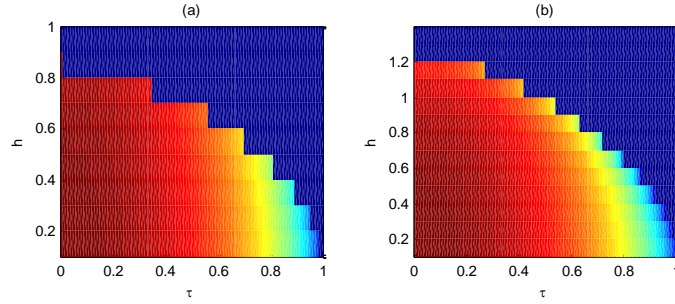
Şekil 91. (a) R=1 (b) R=2 (c) R=3 (d) R=4 (e) R=5 (f) R=6 (g) R=7 (h) R=8 Yatay eksen  $\kappa$ , düşey eksen  $H$  olmak üzere maksimum süperelektron yoğunluğu için histeritik alanlar

Şekil 91 e göre artan  $R$  değerlerine karşılık oluşan histeritik alanların arttığı görülmektedir. Ayrıca  $\kappa - H$  faz düzleminde histerisiz oluştuğu ilk  $\kappa$  değerine karşılık gelen  $H$  değerlerinin  $R$  nin artan değerlerine göre azaldığı görülmektedir.

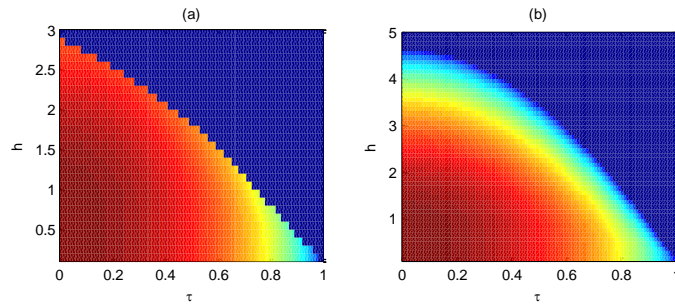
### 2.6.5.2. Sıcaklık ve Uygulanan Alan Değişimine Göre $\tau$ - $H$ Diyagramları

Bu bölümde silindirik geometriye sahip süperiletken materyaller için manyetik alan altında soğutma FC(Field Cooled) ve manyetik alan olmaksızın ZFC(Zero Field Cooled) soğutma durumlarına karşılık gelen normal, süperiletken ve normal-süperiletken geçiş bölgeleri  $\tau - H$  faz düzleminde hesaplanmaktadır. Sabit  $R$  yarıçaplı I. ve II. tip numune için uygulanan manyetik alan şiddeti  $H = 0.1:0.1:\sqrt{2}$  ve  $\tau = 1:-0.01:0$  sıcaklık değerleri için  $\max \psi$  değerleri Şekil 92 ve Şekil 93 de görülmektedir. Grafiklerde yatay eksen sıcaklığı ( $\tau$ ), dikey eksen uygulanan manyetik alan şiddetini göstermektedir. Elde edilen sonuçlar Cakir(2006) da film tabaka için elde edilen sonuçlarla kalitatif açıdan uyumludur.

I. tip numune için  $\kappa = 0.6, R = 3$ , II. tip numune için  $\kappa = 4, R = 3$  parametre değerleri kullanılmaktadır.



Şekil 92.  $\kappa = 0.6, R = 3$  için (a) FC için  $\tau - H$  faz diyagramı (b) ZFC için  $\tau - H$  faz diyagramı



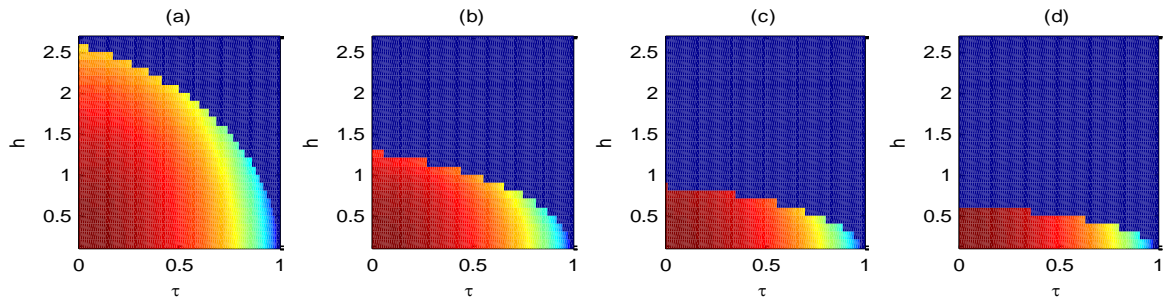
Şekil 93.  $\kappa = 4, R = 3$  için (a) FC için  $\tau - H$  faz diyagramı (b) ZFC için  $\tau - H$  faz diyagramı



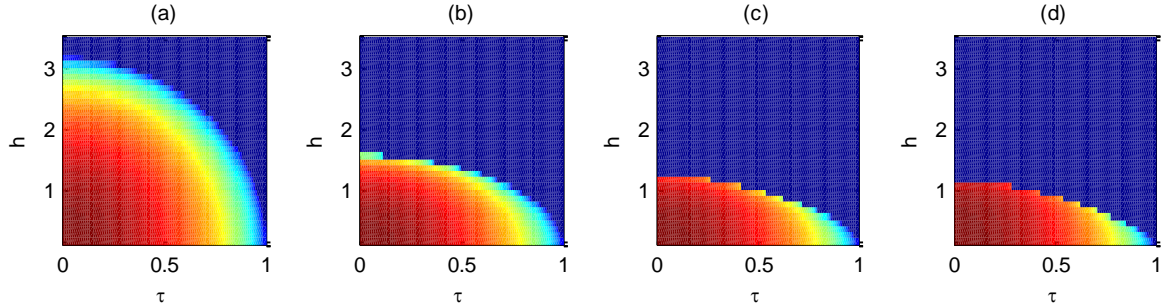
### 2.6.5.3. Yarıçapa Bağlı Olarak Faz Geçiş Diyagramları

Bu bölümde ise önceki bölümde sabit  $R(R = 3)$  için elde edilen faz geçiş diyagramlarının yarıçapa bağlı olarak değişimini inceliyoruz. Farklı yarıçapa sahip numuneler için uygulanan manyetik alan şiddeti artırılarak, sıcaklığın değişimine göre  $\tau - H$  faz diyagramları incelenmektedir.

$\kappa = 0.6$  için  $R = 1; 2; 3; 4$  yarıçapları incelenmiştir. Burada  $\tau = 1: -0.01: 0$  değerleri kullanılmaktadır.



Şekil 94.  $\kappa = 0.6$  ve (a)  $R=1$  (b)  $R=2$  (c)  $R=3$  (d)  $R=4$  için FC transition bölgeleri



Şekil 95.  $\kappa = 0.6$  ve (a)  $R=1$  (b)  $R=2$  (c)  $R=3$  (d)  $R=4$  için ZFC transition bölgeleri

Şekil 94 ve Şekil 95 den numunenin yarıçapı arttıkça süperiletken bölgenin azaldığı ve buna paralel olarak normal bölge alanının arttığı görülmektedir. Ayrıca artan yarıçap değerleri için normal-süperiletken geçiş bölgesinde düzen parametresinin süreksiz davranışı dikkat çekmektedir. Bu ise I. Tip süperiletkenler için beklenen bir sonuçtur.

## 2.7. Paralel Programlama Çalışmaları

Üzerinde çalıştığımız GL modellerinde ve birçok araştırma problemlerinin gerçek fiziksel boyutlardaki sayısal simülasyonu mevcut tek işlemci bilgisayarlar ile mümkün olmamaktadır. Bu nedenle değişik alternatifler kullanılmaktadır. Bu alternatifler arasında

süper bilgisayarlar, paralel bilgisayarlar, farklı fiziksel mekânlarda bulunan bilgisayarlar kümesinin problemi çözmek için konfigüre edilmesi suretiyle elde edilen paralel hesaplama ağları(grid) mevcuttur. Ülkemizde süper bilgisayar veya paralel bilgisayar kullanımı yüksek maliyetleri nedeniyle yaygınlaşmamıştır. Bunun yerine farklı araştırma grupları oluşturulan kişisel bilgisayarların koleksiyonu ile oluşturulan paralel hesaplama ortamları kullanılmaktadır. Bu amaçla üniversitemiz Fen edebiyat Fakültesi bilgisayar laboratuvarında bulunan “Pentium 4 3.20 Ghz, 512 MB RAM” özelliklere sahip 20 adet bilgisayarı Argonne Araştırma merkezinde üretilen ve MPI paralel hesaplama ara yüzünü etkin kullanımını sağlayan MPICH2 aracılığıyla paralel hesaplama platformuna dönüştürdük. Bilgisayarlar arasındaki iletişim anahtarlı yerel ağ(switched Local Area Network) ile sağlanmakta, ancak bağlantı için kullanılan anahtar(switch) 1000 Mbps hızını desteklemesi gerektiği performans sonuçlarımız ile görülmüş ve bu bağlantı hızını destekleyen bir anahtar ile değiştirilmiştir.

MPI(<http://www.mpi-forum.org/docs/docs.html>), paralel süreçlerin haberleşmesi için geliştirilmiş bir kütüphanedir. C, C++, Fortran gibi programlama dilleri ile hazırlanan programlar içerisine uygun MPI rutinleri yerleştirmek suretiyle paralel programlar oluşturulur. Farklı kuruluşlar tarafından geliştirilen ve MPI’ın kullanımını kolaylaştıran ara yüzler mevcuttur. Bunlardan bir tanesi Argonne National Lab. / Mississippi State University tarafından geliştirilen MPICH2(<http://www-unix.mcs.anl.gov/mpi/mpich2/>)’dir. Linux ve Windows platformu için iki ayrı sürümü mevcuttur. Laboratuvarımız MPICH2 için gerekli fiziksel alt yapı ve yazılım desteğine sahiptir.

Elde edilen paralel sonuçların değerlendirilmesi için sıkça kullanılan ve aşağıda tanımlanan hızlanma(speedup) ve verimlilik(eficiency) kavramları kullanılmıştır.

Paralel çalışma süresi(parallel run time), bir paralel hesaplamının başladığı zaman ile en son sürecin çalışmasını tamamladığı zaman arasındaki fark olmak üzere

- Hızlanma( $S_p$ )

$$S_p = \frac{\text{en iyi sıralı algoritmanın tek süreçte çalışma süresi}}{p \text{ sürecin paralel platformda çalışma süresi}}$$

- Verimlilik( $E_p$ )

$$E_p = \frac{S_p}{p}$$

olarak tanımlanır. İdeal durumda  $E_p = 1$  ve  $S_p = p$  dir.

Kesim 2.7.1 de öncelikle kullandığımız temel MPI komutları verilmektedir. Kesim 2.7.2. de PC kümeleri(clusters) arasında iletişim gerektirmeyen bir sayısal integrasyon problemi için paralel kod geliştirilerek paralel platformumuzun performansı ölçülmektedir. Elde edilen sonuçlar ortamın uygun bir paralel hesaplama platformu olduğunu göstermektedir. Kesim 2.7.3 de yarı-sonsuz bölgede TDGL modeli için paralel algoritma geliştirilmiş, belirtilen hesaplama platformu üzerinde elde edilen sonuçlar paralel hesaplama performansını değerlendiren “jumpshot” verileri yardımıyla sunulmuştur.

### 2.7.1. Temel MPI Komutları

**MPI\_Init:** Paralel çalışma sürecini başlatır.

**MPI\_Comm\_size:** Programın kaç PC üzerinde çalışacağı bilgisini kullanıcıdan alır.

**MPI\_Comm\_rank:** n paralel süreçte kullanılmak istenen PC sayısı olmak üzere 0 ile n-1 arasında bir kimlik numarası verir.

Paralel programlamada en önemli unsurlardan biri süreçler arası haberleşmedir. Yapılmak istenen hesaplara göre farklı haberleşme fonksiyonu kullanılması gerekebilir. Bu yüzden MPI kütüphanesinde de farklı haberleşme fonksiyonları mevcuttur. Bunlarda en çok kullanılan ve bilinen iki fonksiyon MPI\_Send ve MPI\_Recv fonksiyonlarıdır. MPI\_Send fonksiyonu bir PC den diğerine verileri göndermek için kullanılırken, MPI\_Recv ise gönderilen bir veriyi almak için kullanılır. Bu haberleşme esnasında veri alış verişi tamamlanana kadar her iki PC de başka bir işlem gerçekleştirmez(bloklanır). Bloklama olmadan haberleşmeyi sağlayan diğer iki fonksiyon ise MPI\_Isend ve MPI\_Irecv fonksiyonlarıdır.

**MPI\_Bcast:** Bir toplu haberleşme fonksiyonudur. Ana PC nin belleğindeki bir verinin diğer PC lere gönderilmesi için kullanılır.

MPI\_Reduce: Bir toplu haberleşme fonksiyonudur. Her bir PC deki bir veriyi bir işlem operatörüne (toplam, maksimum gibi) bağlı olarak ana PC deki tek bir değere dönüştürür.

MPI\_Gather: Bir toplu haberleşme fonksiyonudur. Bütün PC lerdeki bazı verileri ana PC de birleştirmek için kullanılır.

MPICH2 ise MPI rutinlerinin yer aldığı paralel programımızın çalıştırılması ve sonuçların değerlendirilmesi için uygun kullanıcı ara yüzleri sağlar.

### 2.7.2. erf(x) Paralel Sayısal Programı

Bu bölümde KTÜ Fen Edebiyat Fakültesi bünyesinde bulunan bilgisayar laboratuvarında 20 bilgisayar ile oluşturduğumuz paralel platformda haberleşmenin olmadığı

$$\text{erf}(x) = \int_0^x e^{-s^2} ds$$

integralinin herhangi bir  $x$  noktasındaki değerinin sayısal olarak hesaplanması problemini inceliyoruz.  $x = 1$  tipik değerini kullanıyoruz. Bu amaçla gerçekleştirilen temel adımlar aşağıda verilmektedir.

- 1) MPI\_Init ile paralel hesaplamayı başlat.
- 2) Ana PC de  $[0,1]$  aralığının bölündüğü alt aralık sayısını kullanıcıdan al(N).
- 3) MPI\_Bcast ile N değerini tüm işlemcilerle gönder.
- 4) h adım uzunluğunu belirle
- 5) Her bir PC de  $x_i = (i - 1)h + (N \bmod PC_{id}), i = 1, \dots, \frac{N}{PC_{id}}$  noktalarındaki fonksiyon değerlerini topla.
- 6) MPI\_Reduce ile her PC deki yerel değerleri ana işlemcide topla
- 7) Ana işlemcide sonucu ve işlem zamanını ekrana yazdır
- 8) MPI\_Finalize ile paralel hesaplamayı bitir.

Tipik olarak  $\pi$  değerini paralel olarak hesaplayan koddan(Argonne) uyarladığımız bu algoritmaya ait paralel kod aşağıda verilmektedir.

```

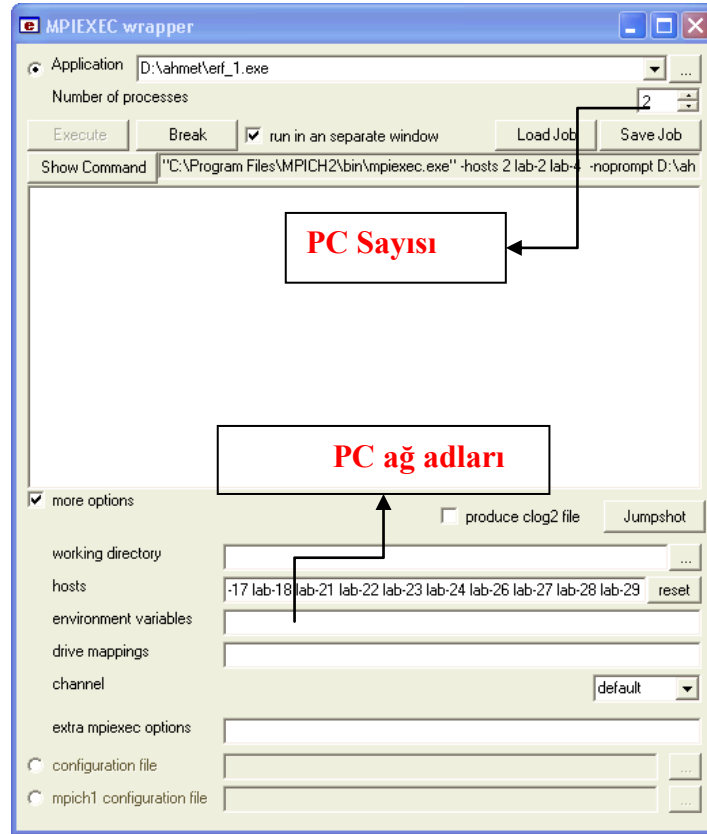
#include "mpi.h"
#include <stdio.h>
#include <math.h>
double f(double);
double f(double t)
{
    return exp(-t*t);
}
int main(int argc, char *argv[])
{
    int bitir = 0, n, id, surecSayisi, i;
    double erf1 = 0.842700792949715;
    double yerelToplam, tumToplam, h, toplam, x;
    double baslamaZamani = 0.0, bitisZamani;
    int namelen;
    char islemciAdi[MPI_MAX_PROCESSOR_NAME];
    MPI_Init(&argc, &argv);
    MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &surecSayisi);
    MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD, &id);
    MPI_Get_processor_name(islemciAdi, &namelen);
    while (!bitir) {
        if (id == 0) {
            fprintf(stdout, "Adim sayisini giriniz: (0 cikis) ");
            fflush(stdout);
            if (scanf("%d", &n) != 1) {
                fprintf(stdout, "Sayi girilmedi; cikiyor\n");
                n = 0;
            }
            baslamaZamani = MPI_Wtime();
        }
        MPI_Bcast(&n, 1, MPI_INT, 0, MPI_COMM_WORLD);
        if (n == 0)
            bitir = 1;
        else {
            h = 1.0 / (double) n; toplam = 0.0;
            for (i = id + 1; i <= n; i += surecSayisi) {
                x = h * ((double)i - 0.5);
                toplam += f(x);
            }
            yerelToplam = (h * toplam)*2/sqrt(pi);
            MPI_Reduce(&yerelToplam, &tumToplam, 1, MPI_DOUBLE, MPI_SUM,
0, MPI_COMM_WORLD);

            if (id == 0) {
                printf("erf(1) in yaklasik degeri: %.16f, Hata:
%.16f\n",
                    tumToplam, fabs(tumToplam - erf1));
                bitisZamani = MPI_Wtime();
                printf("Gecen Sure: %f\n", bitisZamani-baslamaZamani);
                fflush(stdout);
            }
        }
    }
    MPI_Finalize();
    return 0;
}

```

Yukarıda verilen MPI kodu C++ programlama dili ile yazılmış ve derlemek için “Microsoft Visual C++ 2005 Express Edition” derleyicisi kullanılmıştır.

Şekil 96 da MPICH2 yazılımına ait MPIEXEC ara yüzü gösterilmektedir. Bu ara yüzde “Application” bölümünde çalıştırılacak olan dosya belirtilmelidir. Bu dosya tüm bilgisayarlarda aynı sürücü ve adreste yer almalıdır. “Number of processes” ile kaç adet bilgisayar kullanılacağını belirliyoruz. “more options” bölümündeki “hosts” kısmına ise ağdaki bilgisayar adlarını veya “ip” numaralarını yazıyoruz. “execute” komutuyla programı çalıştırdıktan sonra Şekil 97 daki MS-Dos ekran görüntüsünde sonuçları görebiliyoruz.



Şekil 96. MPIEXEC ara yüzü(erf(1) değeri 2 Pc üzerinde hesaplanıyor.)

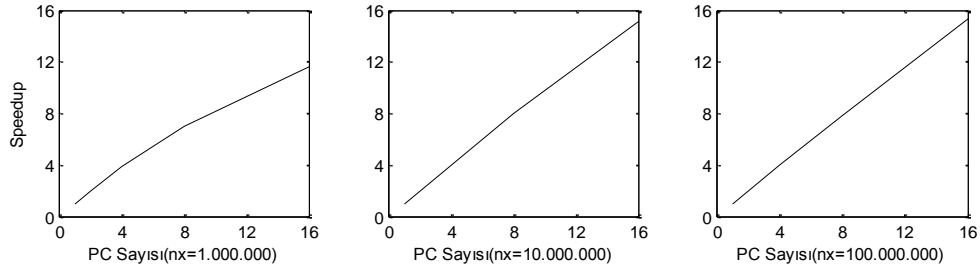
```

C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
Adim sayisini giriniz: <0 cikis> 1000000
erf(1) in yaklasik degeri: 0.8427007929497394, Hata: 0.0000000000000244
Gecen Sure: 0.018965
Adim sayisini giriniz: <0 cikis>

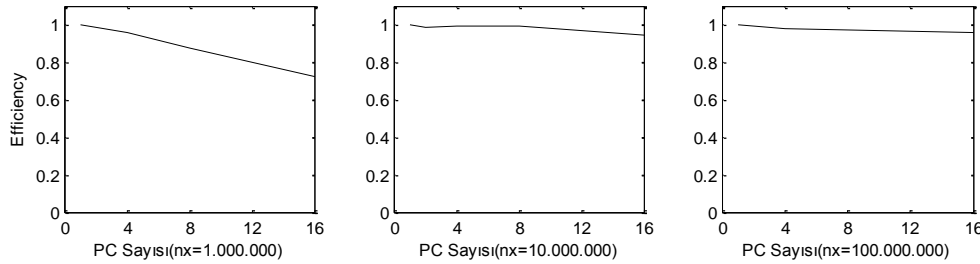
```

Şekil 97. 2 PC kullanılarak elde edilen erf(1) değeri ve hatayı gösteren Ms-Dos ekran görüntüsü

Yukarıda bahsettiğimiz paralel platformunda erf(1) değerini hesaplamak için 20 adet bilgisayar kullanılarak elde edilen hızlanma ve verimlilik sonuçları Şekil 98 ve Şekil 99 da gösterilmiştir. Şekil 98 ve Şekil 99 dan görüldüğü üzere paralel platform bu problem için hızlanma ve verimlilik için ideale yakın sonuçlar vermektedir.



Şekil 98. erf(1) için hızlanma(speedup) eğrileri



Şekil 99. erf(1) için verimlilik(efficiency) eğrileri

### 2.7.3. Yarı-Sonsuz Bölgede Paralel TDGL

Bu bölümde bir tek akı kuantumunu çevreleyen yalıtılmış manyetik akı çizgisi için TDGL modelinin çözümü incelenmektedir. Akı tüpünün(flux tube) yapısı ilk olarak Abrikosov(1957) tarafından incelenmiştir. Abrikosov, yalıtılmış akı tüpüne karşılık gelen Ginzburg-Landau denklemlerini silindirik süperiletkenler için düzenlemiştir. Daha sonra Ginzburg-Landau parametresi  $\kappa \gg 1$  için analitik çözümler elde edilmiştir. Bu koşulun

olmaması durumunda ise sayısal analizlerin yapılması gerekmektedir. İlgili model  $Q = rA$  olmak üzere silindirik koordinat sisteminde aşağıda verilmektedir.( Tholfsen P. ve Meissner H., 1967)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + r \left( 1 - \left( \frac{Q}{r} \right)^2 - \psi^2 \right) \psi$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Q) \right) - Q\psi^2$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} (0) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial r} (r \rightarrow \infty) = 1, Q(r \rightarrow 0) = 1/k, \frac{\partial Q}{\partial r} (r \rightarrow \infty) = 0$$

Verilen problemi paralelleştirmek için  $(0, R)$  aralığını PC sayısı kadar bölgeye ayırıyoruz.  $(t_k, r_i)$  ayrık noktalarında  $\psi(t_k, r_i)$  ve  $Q(t_k, r_i)$  yaklaşık çözümlerini bulmak istiyoruz. O halde  $\Delta r = \frac{1}{n+1}$  olmak üzere  $(0, R)$  aralığı için

$$r_i = i \cdot \Delta r, i = 0, 1, 2, \dots, n + 1$$

ayrık noktalarını ve

$$t_k = k \cdot \Delta t, k = 0, 1, 2, \dots$$

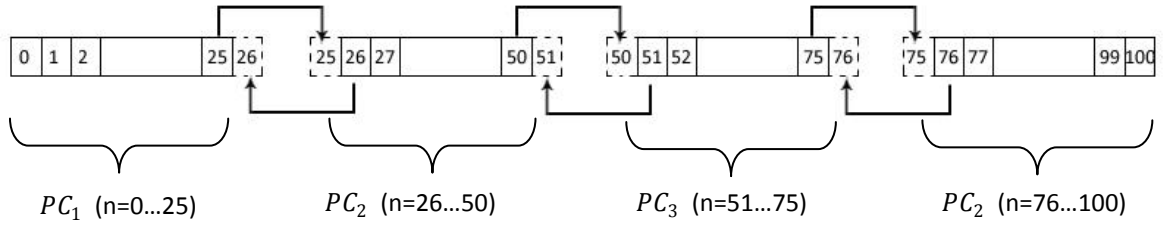
ayrık zaman noktalarını tanımlayalım. Bu durumda ayrık GL sistemini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{\vec{r}\vec{\psi} - 2r\psi + \vec{r}\vec{\psi}}{(\Delta r)^2} \right) + r \left( 1 - \left( \frac{Q}{r} \right)^2 - \psi^2 - \tau^2 \right) \psi$$

$$\frac{dQ}{dt} = r \left( \frac{\frac{1}{\vec{r}} \vec{Q} - Q - \frac{1}{r} Q - \vec{Q}}{\Delta r} \right) - rA\psi^2$$

Problemi çözmek için dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi kullanıyoruz. Sistemi paralelleştirirken  $[0, r]$  aralığı için aşağıdaki şekilde bölge ayrışımı (domain decomposition) yapıyoruz.  $[0, r]$  aralığı  $n = 100$  olacak şekilde parçalandığında 4 işlemci için bölge ayrışımı aşağıdaki şekilde olacaktır. Her bir işlemci, ilgili işlemciye her bir zaman diliminde sınır değerlerini göndermelidir.





$r$  pozisyon vektörü,  $u$  sayısal  $\psi$  yaklaşımlarını temsil eden vektör,  $a$  ise sayısal  $A$  yaklaşımlarını temsil eden vektörler olsunlar. Alt bölgelerin sınır noktalarındaki verilerin etkin iletişimini sağlamak amacıyla güncel  $u$  ve  $a$  değerlerini temsil eden vektörler  $uu$  ve  $aa$  olsun. Bu durumda problemi paralelleştirmek için gerçekleştirilen temel adımlar aşağıda verilmektedir.

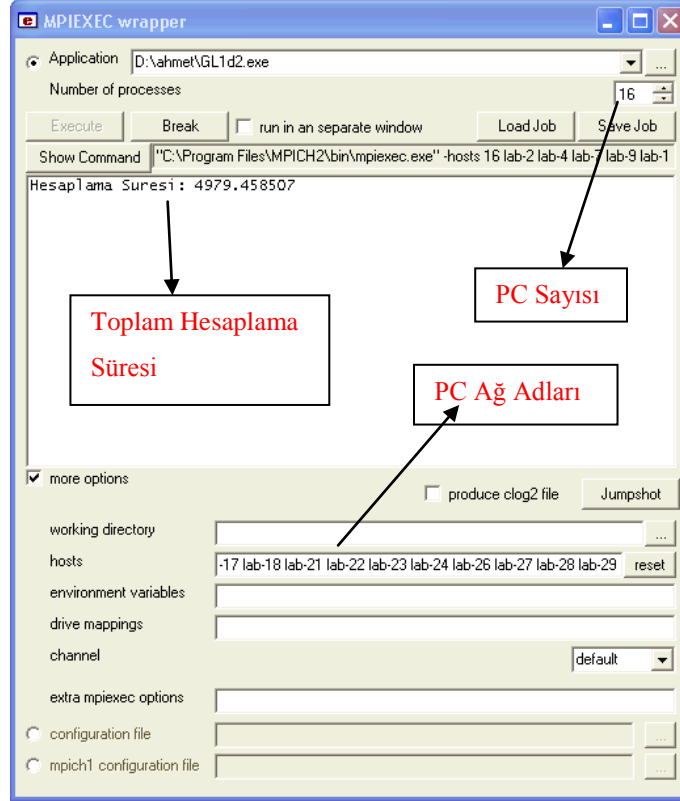
- 1) MPI\_Init ile paralel hesaplamayı başlat.
- 2)  $u, uu, a, aa, r$  şeklinde vektörlerini tanımla.
- 3)  $u, a, uu, aa, x$  için başlangıç değerlerini belirle.

Denge Çözümüne Ulaşana kadar aşağıdaki 4-9 ncu adımları tekrarla

- 4) MPI\_Sendrecv ile  $u$  ve  $a$  vektörlerinde ilgili işlemciler için sınır değerlerini birbirine gönder.
- 5) Ana işlemci ve son işlemcide  $u$  ve  $a$  vektörlerinde problemin sınır değerlerini yerine yaz
- 6)  $u$  ve  $a$  yı kullanarak  $uu, aa$  yı hesapla
- 7) MPI\_Sendrecv ile  $uu$  ve  $aa$  vektörlerinde ilgili işlemciler için sınır değerlerini birbirine gönder
- 8) Ana işlemci ve son işlemcide  $uu$  ve  $aa$  vektörlerinde problemin sınır değerlerini yerine yaz
- 9)  $uu$  ve  $aa$  yı kullanarak  $u, a$  yı hesapla
- 10) MPI\_Gather ile her bir işlemcideki  $u$  ve  $a$  ya ait ayrışım bölgesini ana işlemcide birleştir
- 11) Ana işlemcide sonucu uygun bir ortama ve işlem zamanını ise ekrana yazdır.
- 12) MPI\_Finalize ile paralel hesaplamayı bitir.

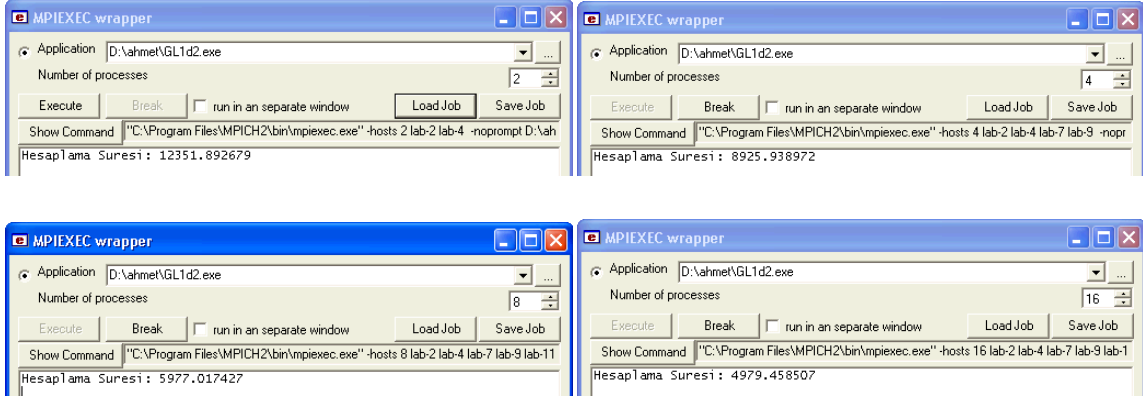
Problemin çözümü aşamasında kullanıcı ara yüzü ve elde edilen sonuçları gösteren ara yüzler Şekil 100 ve Şekil 101 de gösterilmiştir. Şekil 100 de TDGL problemini için

n=6400 nokta için MPIEXEC ara yüzü gösterilmektedir. Bu arayüz üzerinde uygulama dosyasının adını, PC sayısını, PC ağ adlarını belirledikten sonra sonuçları aynı arayüz üzerinden veya ayrı bir MS-Dos penceresinden görebiliyoruz. Farklı sayıda PC ler için elde edilen sonuçları gösteren ara yüzler Şekil 101 de gösterilmiştir.



Şekil 100. MPIEXEC ara yüzü(TDGL problemi n=6400 nokta için 16 PC üzerinde hesaplanıyor)

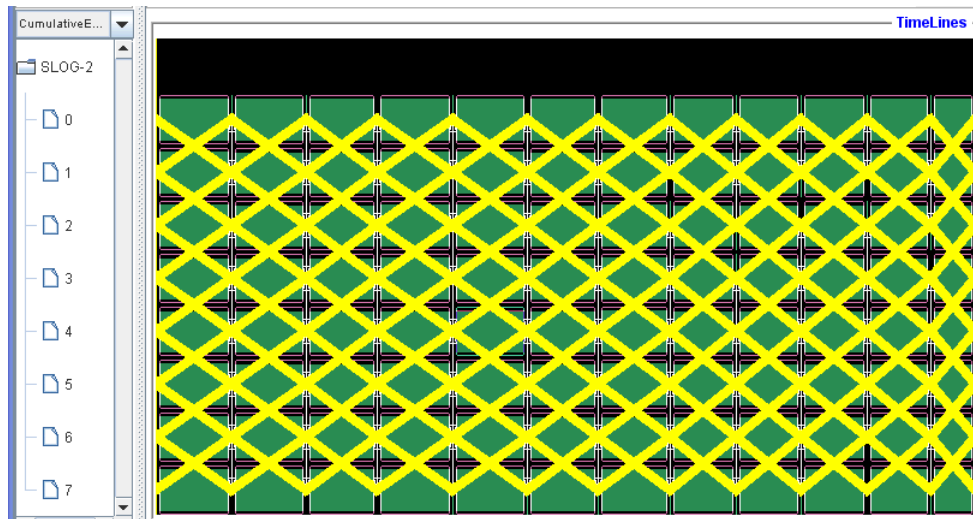
GL problemi için hesaplama performanslarını gösteren grafikler Şekil 102–Şekil 104 de gösterilmektedir. Şekil 103 de MPICH2 Jumpshot ara yüzü ile elde edilen ve işlemciler arası haberleşmeyi gösteren arayüz görülmektedir. Şekil 102 de ise Şekil 103 deki renklerin anlamları ve MPI komutlarının kullanılma sayılarını gösteren Jumpshot etiket(legend) ara yüzü görülmektedir.



Şekil 101. MPIEXEC ara yüzleri(PC Sayısı=2,4,6,8 için)

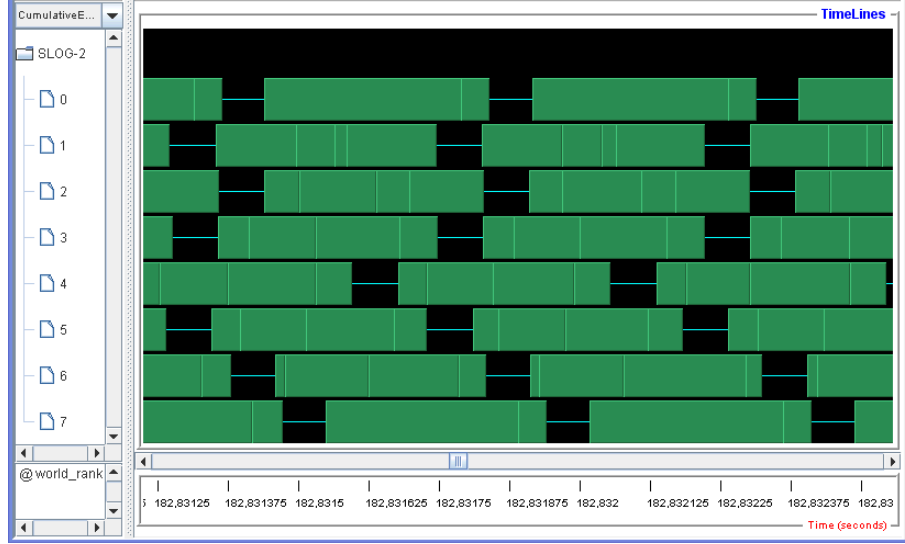
Topo	Name	v	S	count	incl	excl
	Preview_Arrow	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	0	0	0
	message	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	22400056	81,9...	0
	Preview_State	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	0	0	0
	CLOG_Buffer_write2disk	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	426	0,049	0,049
	MPI_Comm_rank	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	8	0	0
	MPI_Comm_size	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	8	0	0
	MPI_Gather	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	16	0	0
	MPI_Sendrecv	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	22400056	6,769	6,72
	Preview_Event	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	0	0	0
	MPE_Comm_finalize	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	0

Şekil 102. Jumpshot etiket(legend) ara yüzü



Şekil 103. TDGL probleminin 8 PC üzerinde çözümü için Jumpshot ile elde edilen ve haberleşmeyi gösteren arayüz(N=1600)

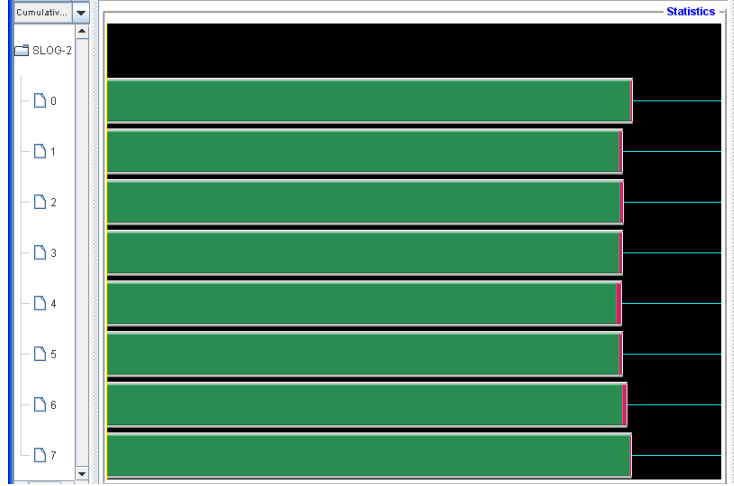
Şekil 103 e bütüçeç aracı ile yakından bakıldığında Şekil 104 elde edilmiştir. Şekil 104 de yeşil renk MPI\_Sendrecv komutunun aldığı süre, iki yeşil renk arasındaki zaman diliminde ise hesaplama işlemlerinin yapıldığı süre görülmektedir.



Şekil 104. İşlemciler arası haberleşmeyi gösteren Jumpshot ara yüzüne yakından bakış

Şekil 104 de  $N=1600$  noktada TDGL sisteminin 8 PC üzerindeki hesaplama sürecinde haberleşme ve hesaplama işlemlerinin ne kadar zaman aldığı her bir işlemci için görülmektedir. Şekilde görüldüğü üzere her bir işlemci toplam sürenin yaklaşık %80 nini haberleşme için harcamaktadır. Bu her bir işlemci başına düşen hesaplama yükünün az olmasından kaynaklanmaktadır. Bu ise Tablo 16 ve Şekil 105 den görüldüğü üzere hızlanma ve verimlilik değerinin düşük olmasına sebep olmaktadır.

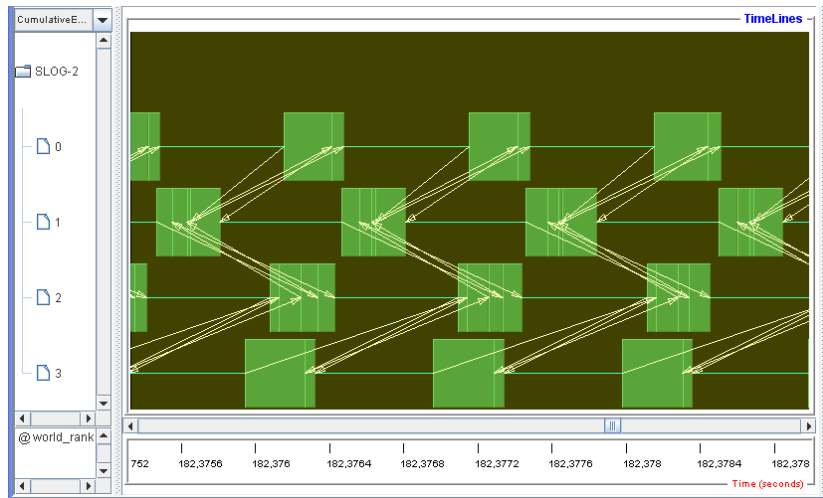
Şekil 106 ve Şekil 107 de ise  $N=6400$  noktada TDGL sisteminin 4 PC üzerindeki hesaplama sürecinde haberleşme ve hesaplama işlemlerinin ne kadar zaman aldığı her bir işlemci için görülmektedir. Şekilde görüldüğü üzere her bir işlemci toplam sürenin yaklaşık %40 – 45 ini haberleşme için harcamaktadır. Herbir işlemci başına düşen hesaplama yükü  $N=1600$  nokta için düşen hesaplama yükünden daha fazla olduğundan Tablo 16 dan görüldüğü üzere hızlanma ve verimlilik değerinin ideale yakın olduğu görülmektedir.



Şekil 105. TDGL probleminin  $N=1600$  noktada 8 PC üzerinde çözümü için istatistikler



Şekil 106. TDGL probleminin  $N=6400$  noktada 4 PC üzerinde çözümü için istatistikler



Şekil 107. İşlemciler arası haberleşmeyi gösteren Jumpshot ara yüzüne yakından bakış

$\kappa = 0.5, R = 6$  için paralel hesaplamalar sonucunda elde edilen paralel hesaplama süreleri Tablo 15 de, hızlanma ve verimlilik değerleri ise Tablo 16 da verilmektedir. Bu verilere ait paralel hesaplama süresi, hızlanma ve verimlilik eğrileri ise Şekil 108 de gösterilmiştir. Şekil 109 da ise 8 PC ile elde edilen denge çözüme ait grafikler görülebilir.

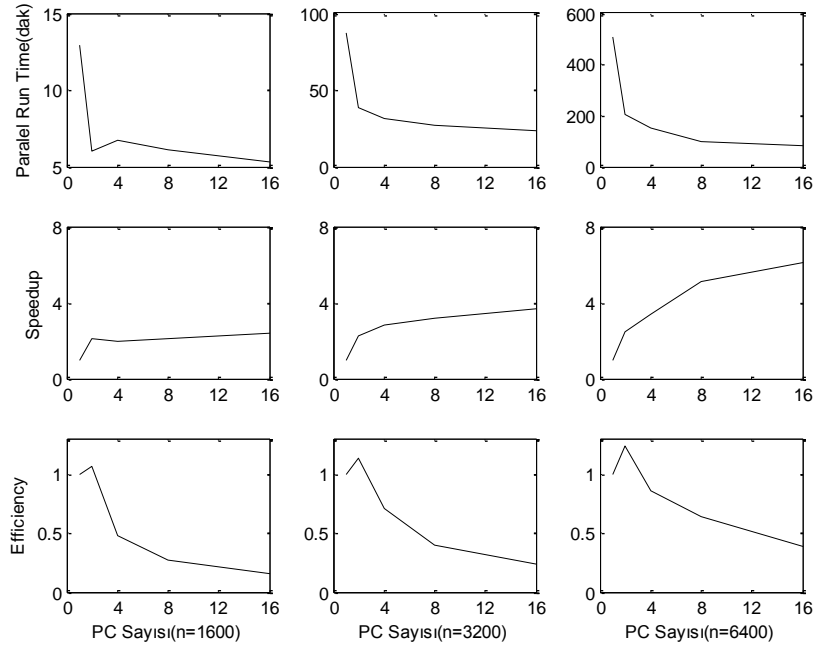
Tablo 15. Farklı sayıda PC için TDGL probleminin denge çözüme ulaşma süreleri(dakika)

	1 PC	2 PC	4 PC	8 PC	16 PC
N=1600	774	362	401	364	319
N=3200	5244	2305	1864	1634	1422
N=6400	30433	12351	8925	5977	4979

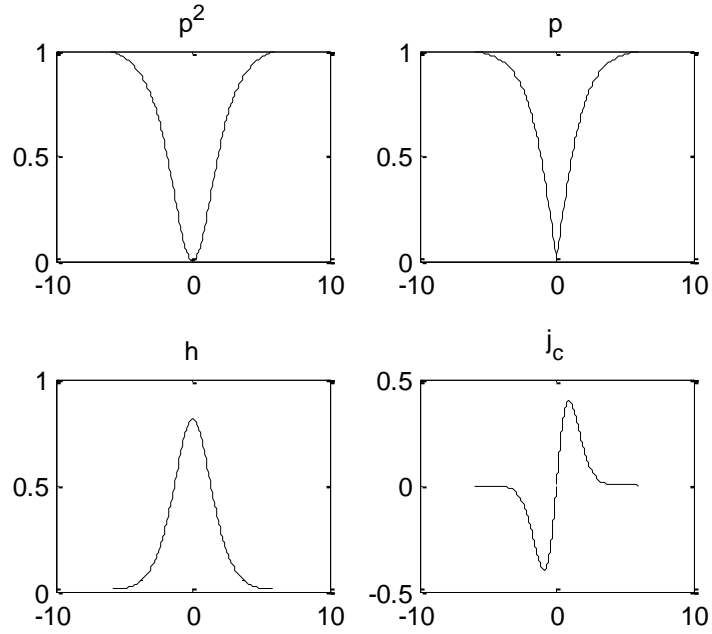
Tablo 16. TDGL problemi için hızlanma ve verimlilik değerleri

		1 PC	2 PC	4 PC	8 PC	16 PC
N=1600	Hızlanma	1	2.13	1.93	2.12	2.42
	Verimlilik	1	1.06	0.48	0.26	0.15
N=3200	Hızlanma	1	2.27	2.81	3.20	3.68
	Verimlilik	1	1.14	0.70	0.40	0.23
N=6400	Hızlanma	1	2.46	3.40	5.09	6.11
	Verimlilik	1	1.23	0.85	0.63	0.38

Tablo 16 da iki PC için elde edilen sonuçlarda hızlanmanın iki kattan daha fazla olduğu görülmektedir. Bu olaya paralel programlama literatüründe süper lineer hızlanma adı verilir. Bunun nedeni tek bir PC için yapılan hesaplamada ön bellek boyutu veriler tarafından aşırı düzeyde kullanılmakta olup, hesaplama için gerekli veri erişim süresinin artmasına neden olmaktadır. İki PC kullanımında ise veri erişim süresinden kaynaklanan gecikme ortadan kaldırılmış gözükmemektedir. Bu nedenle iki PC ile elde edilen hızlanma sonucu, tek bir PC ile elde edilen hızlanma sonucunun iki katından daha fazladır.



Şekil 108.  $\kappa = 0.5, L = 6$  için paralel runtime(paralel hesaplama süresi) speedup(hızlanma) ve efficiency(verimlilik) eğrileri



Şekil 109. 8 PC ile elde edilen denge çözümler

### 3. SONUÇLAR

Bu bölümde tez çalışması kapsamında incelediğimiz tek boyutlu GL modelleri elde ettiğimiz sonuçların bir özeti verilmektedir.

Kesim 2.1 ve Kesim 2.2 de süperiletken film için tek boyutlu SGL modelinin çözümlerinin sayısı ve kararlılığı incelenerek aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- ✓  $\tau = 0$  olması durumunda literatürde bilinen klasik GL sisteminde,  $L - \kappa$  faz diyagramında bir, iki veya üç çözümün olabileceği sonucu doğrulanmış ve bu sonuçlar  $\tau \neq 0$  durumu için genelleştirilmiştir.
- ✓ Artan sıcaklık değerleri için  $L - \kappa$  faz diyagramında tek çözüm ve iki çözüm bölgelerinin alanlarının arttığı, bununla birlikte üç çözüm bölgesinin alanının azaldığı gözlemlenmiştir.
- ✓ SGLBDP için Adomian ayrışım yöntemiyle yaklaşık analitik çözümler asimptotik olarak elde edilmiştir.
- ✓ SGL sistemi  $\tau$  parametresine bağlı olarak özdeğer problemi olarak ele alınmış ve SGL nonlinear sisteminin özdeğer ve özfonksiyonları elde edilmiştir. İlk özdeğere karşılık gelen özfonksiyonu fiziksel sonuçlarla uyumlu olduğu görülmüştür.

Kesim 2.3 de normal hale yakın komşulukta SGL sistemi için çözümlerin davranışları incelenmiştir. Bu durumda SGL modeli bir regüler Sturm-Liouville problemine dönüşmüş ve bu problem için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- ✓ SGL için elde edilen regüler Sturm-Liouville probleminin bilinen teorik sonuçlarla uyumlu olduğu gösterilmiştir.
- ✓ Problemin sayısal ve yaklaşık analitik çözümleri bulunarak yöntemlerin avantaj ve dezavantajları çıkarılmıştır.
- ✓  $\kappa$  Ginzburg-Landau parametresinin büyük değerleri için probleme bir pertürbasyon problemi olarak bakılmış ve  $\kappa$  nın büyük değerleri için yaklaşık analitik sonuçlar elde edilmiştir.



Kesim 2.4 de süperiletken silindir için tek boyutlu GL modelleri ve bu modellerle ilgili teorik sonuçlar elde edilmiştir.

Kesim 2.5 de süperiletken silindir için normal hale yakın komşuluktaki çözümler, Kesim 2.3 nin paralelinde incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- ✓ Silindirik SGL için elde edilen regüler Sturm-Liouville probleminin bilinen teorik sonuçlarla uyumlu olduğu gösterilmiştir.
- ✓ Silindirik SGL probleminin farklı sayısal yöntemler ile yaklaşık çözümleri bulunmuştur.

Kesim 2.6 da süperiletken silindir için sayısal analizler yapılmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- ✓ Sıcaklık bağımlı GL yardımıyla klasik GL modeli ile gözlemlenmesi mümkün olmayan Meissner olayı süperiletken silindirler için gözlemlenmiştir. Ayrıca sıcaklığa bağlı manyetik alan şiddetlerinin değişim eğrileri elde edilmiştir.
- ✓ Uygulanan manyetik alan şiddetine ve sıcaklığa bağlı histerisiz eğrileri elde edilmiştir.
- ✓ Josephson eklemleri ve Josephson eklemlerinin histerisiz üzerine etkileri elde edilmiştir.
- ✓  $\kappa - H$  düzleminde sıcaklığa bağlı histerisiz bölgeleri belirlenmiştir.
- ✓  $\tau - H$  faz geçiş diyagramları elde edilmiştir.

Kesim 2.7 de üniversitemiz Fen Edebiyat Fakültesi Lab-1 isimli laboratuvar ortamında oluşturduğumuz paralel platformda gerçekleştirdiğimiz paralel programlama çalışmaları ve yarı sonsuz bölgede TDGL probleminin paralelleştirilmesi incelenerek aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- ✓ Oluşturduğumuz platformun haberleşme gerektirmeyen problemler için ideale yakın sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

- ✓ TDGL problemi gibi her bir zaman diliminde PC ler arası haberleşmenin olması gereken problemlerde ise uygun fiziksel boyut ve PC sayısı için makul sonuçlar elde edilmiştir.

#### 4. ÖNERİLER

- ✓ Süperiletken filme karşılık gelen SGL modeli için incelenen çözümlerin sayısı ve çözümlerin kararlılığı analizi süperiletken silindir için de incelenebilir.
- ✓ İki ve üç boyutta Josephson eklemlerinin süperiletkenin elektromanyetik davranışını nasıl etkilediği incelenebilir.
- ✓ Paralel ve adaptif sayısal bir yöntem ile denge çözümü daha etkin bir biçimde elde edilebilir.
- ✓ Tek boyutlu TDGL modeli için gerçekleştirilen paralel hesaplamalar PC başına iş yükünün daha fazla olacağı iki ve üç boyutlu GL modelleri için geliştirilebilir.

## 5. KAYNAKLAR

- Abrikosov, A.A., 1998. Fundamentals of the Theory of Metals, Elsevier Science, Publishers B.V., Nort-Holland.
- Aftalion A., 1997. On the Minimizers of the Ginzburg-Landau Energy for High Kappa: The One-Dimensional Case, European J. Appl. Math., 8, 331-345.
- Aftalion, A. ve Troy, W.C., 1999. On the Solutions of the One-Dimensional Ginzburg–Landau Equations for Superconductivity, Physica D, 132, 214-232.
- Aftalion A. 1999. On the Minimizer of the Ginzburg – Landau energy for high kappa: The Axially Symmetric Case, Analyse Non Lineaire, 16, 747-772.
- Aftalion A. ve Chapman S.J., 2000, Asymptotic Analysis of a Secondary Bifurcation of the one-Dimensional Ginzburg–Landau Equations of Superconductivity, SIAM J. Appl. Math, 60, 1157-1176.
- Arp, V.D., Collier R.S., Kamper R.A. ve Meissner H., 1965. One Dimensional Solutions of the Ginzburg-Landau Equations for Thin Superconducting Films, Physical Review, 145-1, 231-236.
- Brandt E. H., 1997. Superconductor Disk and Cylinders in an Axial Magnetic Field: I Flux Penetration and Magnetization Curves, Physical Review B, 58-10, 6506-6522.
- Brandt E. H., 1997. Superconductor disk and cylinders in an axial magnetic field: II Nonlinear and Linear ac Susceptibilities, Physical Review B, 58-10, 6523-6533.
- Brandt E. H., 1999. Irreversible Magnetization of Pin-Free Type-II Superconductors, Pyhsical Review B, 60-17, 11939-11942
- Chapman S.J., Howison S.D. ve Ockendon J.R., 1992. Macroscopic Models for Superconductivity, Soc. for Industrial and App. Math., 34, 529-560.
- Coskun E., 1994. Numerical Analysis of GL Models for Superconductivity, Ph.d Dissertation, Nothern Illinois University, Il, Dekalb.
- Coskun E. ve Kwong, M.K., 1997. Simulating Vortex Motion in Superconducting Films with the Time-Dependent Ginzburg-Landau Equations, Nonlinearity, 10, 579-593.
- Coskun E., 1999. Computational Simulation of Flux Trapping and Vortex Pinning in Type-II Superconductors, Applied Math. and Comp., 106, 31-49.

- Coskun, E., Cakir, Z. ve Takac, P., 2003. Nucleation of Vortices with a Temperature and Time-Dependent GL Model of Superconductivity, European Journals of Applied Mathematics, 14, 111-127.
- Coskun E. ve Kwong, M.K., 1995. Parallel Solution of the Time-dependent Ginzburg-Landau Equations and Other Experiences Using BlockComm-Chameleon and PCN on the IBM SP, Intel iPSC/860, and Clusters of Workstations, Argonne National Lab., University of Chicago.
- Çakır Z., 2006. Zaman ve Sıcaklık Bağımlı Ginzburg – Landau Modeli, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Danold A. J., 1965. Ginzburg-Landau Equations and Josephson Effect, Physical Review, 138, 1066-1070.
- Dancer E.N. ve Hasting S.P., 2000. On The Global Bifurcation Diagram for the One Dimensional Ginzburg-Landau Model of Superconductivity, European Journal of Applied Mathematics, 11, 271-291.
- Doria M.M., Gubernatis J.E. ve Rainer D., 1989. Virial Theorem for Ginzburg-Landau Theories with Potential Applications to Numerical Studies of Type-II Superconductors, Physical Review B, 39, 9573-9575.
- Du, Q., Ginzburger, M.D. ve Peterson, J.S., 1992. Analysis and Approximations of GL Models for Superconductivity, SIAM Rev., 34, 1, 54-81.
- Du, Q., 1994. Global Existence and Uniqueness of Solution of the Time Dependent GL Models for superconductivity, Applicable Analysis, 53, 1-17.
- Du, Q., 1996. Computational Methods for the Time-Dependent GL Model of Superconductivity, Numerical Methods for Applied Sciences, New York, Science press, 51-65
- Eastham M.S.P., 1970. Theory of Ordinary Differential Equations, Van Nostrand Reinhold Company, London
- Galbreath H., Gropp W., Gunter D., Leaf G. ve Levine D., 1993. Parallel Solution of the Three-dimensional TDGL Equation, Proc. SIAM Conf. On Parallel Processing for Sci. Comp.
- Ginzburg V.L. ve Landau L.D., 1950. On the Theory of Superconductivity, Sov. Phys. JETP, 20, 1064-1082
- Johansen T.H., 2000. Flux-pinning-induced stress and magnetostriction in bulk superconductors, Supercond. Sci. Tech., 13, 121-137.

- Johansen T.H., Bratsberg H. ve Lothe J., 1998. Flux – pinning – induced magnetostriction in cylindrical superconductors, Supercond. Sci. Tech., 11, 1186-1189.
- Hill, E.F., 2001. A GL Model for Josephson Junctions in a Ring, Ph.D Dissertation, Department of Mathematics, Indiana University.
- Hochstadt, H., 1964. Differential Equations, Dover Publications, New York.
- Ikuta H., Kishio K. ve Kitazawa K., 1994. Critical State Models for Flux-Pinning-Induced Magnetostriction in Type-II Superconductors., J. Appl. Phys., 76, 4776-4786.
- Kaper H.G., 1991, Mathematical Models of Superconductivity, Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Lab.
- Klein U. ve Pöttinger B., 1991. Virial Theorem and Abrikosov's Solution of Ginzburg-Landau Equations, Physical Review B, 44-14, 7704-7707
- Kwong M.K., 1995. On the One-Dimensional Ginzburg-Landau BVPs, Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Lab.
- Kwong M.K., 2006. The Shooting Method and Multiple Solutions of Two/Multi-Point BVPs of Second-Order ODE, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 6,1-14.
- Mathews, J.H. ve Fink, K.D., 1999. Numerical Methods Using MATLAB, 3. Edition, USA.
- Moore K. S., 2001. Large Amplitude Torsional Oscillations in a Nonlinearly Suspended Beam, Ph.D Dissertation, University of Connecticut, USA.
- Remski, J.C., 1997. Models of Superconductivity: A Josephson Junction with Thin Normal Layer, Ph.D Dissertation, Department of Mathematics, Michigan State University, Michigan.
- Schmid, A., 1966. A Time-Dependent GL Equation and its Application to the Problem of Resistivity in the Mixed State, Phys. Kondens. Mater., 5 302-317.
- Serway, R.A., 1990. Physics for Scientist and Engineers with Modern Physics, Third Edition, Updated Version, Saunders College Publishing, Chicago, USA.
- Tinkham, M., 1975. Introduction to Superconductivity, Krieger Publ. Co., Florida.
- Tholfsen P. ve Meissner H., 1967. Cylindrically Symmetric Solutions of Ginzburg-Landau Equations, Physical Review, 169-2, 413-416.
- Yu, W., 2001. Asymptotics of Minimizers for the One-Dimensional GL Model of Superconductivity, Pergamon, Nonlinear Analysis, 45, 295-308.

- Yu, W., 2003. One-Dimensional Ginzburg-Landau Model of Superconductivity with Pinning Effects, Nonlinear Analysis, 52,6,1675-1693.
- Zettl A., 2005. Sturm-Liouville Theory, American Mathematical Society, USA.
- Zharkov G.F., Zharkov V.G. and Zvetkov A. Yu., 1999, Ginzburg-Landau calculations for a superconducting cylinder in a magnetic field, Physical Review B, 61,18, 12293-12301.
- Zharkov G.F., 2001. On the Emergence of Superconductivity and Hysteresis in a Cylindrical Type I Superconductor, Journal of Experimental and Theoretical Physics, 95, 517-525.
- Zharkov G.F., 2002. First and Second Order Phase Transitions and Magnetic Hysteresis in a Superconducting Plate, Journal of Low Temperature Physics, 130, 1-2,45-67.

## 6. EKLER

### Ek-1. Dikdörtgen, silindirik ve küresel koordinat sistemlerinde vektörel işlemler

#### A) Skaler(nokta) Çarpım

$$\text{Dikdörtgen koordinatlar} \quad : \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\text{Silindirik koordinatlar} \quad : \vec{A} \cdot \vec{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_z B_z$$

$$\text{Küresel koordinatlar} \quad : \vec{A} \cdot \vec{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi$$

#### B) Vektörel Çarpım

$$\text{Dikdörtgen koordinatlar} \quad : \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\text{Silindirik koordinatlar} \quad : \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}_r & \vec{a}_\theta & \vec{a}_z \\ A_r & A_\theta & A_z \\ B_r & B_\theta & B_z \end{vmatrix}$$

$$\text{Küresel koordinatlar} \quad : \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}_r & \vec{a}_\theta & \vec{a}_\phi \\ A_r & A_\theta & A_\phi \\ B_r & B_\theta & B_\phi \end{vmatrix}$$

#### C) Bir skaler fonksiyonun gradyanı:

$$\text{Dikdörtgen koordinatlar} \quad : \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{a}_z$$

$$\text{Silindirik koordinatlar} \quad : \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{a}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{a}_z$$

$$\text{Küresel koordinatlar} \quad : \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{a}_\phi$$

#### D) Bir vektör alanının diverjansı:

$$\text{Dikdörtgen koordinatlar} \quad : \nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{Silindirik koordinatlar} \quad : \nabla \cdot A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{Küresel koordinatlar} \quad : \nabla \cdot A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$



**E)** Bir vektör alanının curl'ü:

$$\text{Dikdörtgen koordinatlar} \quad : \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\text{Silindirik koordinatlar} \quad : \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\theta & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\theta & A_z \end{vmatrix}$$

$$\text{Küresel koordinatlar} \quad : \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\theta & \vec{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

## ÖZGEÇMİŞ

Ahmet GÖKDOĞAN 1978 yılında Afşin - Kahramanmaraş'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini 1995 yılında Karabük'de tamamladı. 1996 yılında başladığı Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünden 2000 yılında bölüm dördüncüsü olarak mezun oldu.

2000 – 2004 yılları arasında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansını tamamladı.

2000 yılında itibaren 4 ay Araklı-Trabzon'da öğretmenlik, 6 yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Enformatik Bölümünde öğretim görevliliği yaptıktan sonra 2006 yılından itibaren K.T.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır.

Ahmet GÖKDOĞAN evli ve bir çocuk babasıdır. İyi derecede İngilizce bilmektedir.