KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

L-FUZZY REEL DOĞRU ÜZERİNDE METRİK

DOKTORA TEZİ

Kerim BEKAR

ARALIK 2009
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

L-FUZZY REEL DOĞRU ÜZERİNDE METRİK

Kerim BEKAR

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Doktor (Matematik)"
Unvanı Verilmek İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 17.11.2009
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 18.12.2009

Tez Danışmanı : Prof. Dr. İhsan ÜNVER
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
Jüri Üyesi : Doç. Dr. Osman KAZANCI
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Vasif V. NABİYEV
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Halis AYGÜN

Enstitü Müdürü: Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2009

ÖNSÖZ

Bu tezde, L tam kafes olmak üzere L-fuzzy reel doğrusu üzerinde bir metrik tanımlanmış ve L tam kafesi, zincir ve her elemanı kompakt olması durumunda, tanımlanan bu metriğe göre L-fuzzy reel doğrunun tamlığı gösterilmiştir.

Öncelikle, çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. İhsan ÜNVER'e ve Prof. Dr. Halis AYGÜN'e teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tez önerisi ve raporlar aşamasındaki tavsiyelerinden dolayı Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ'a ve Prof. Dr. Vasif V. NABİYEV'e şükranlarımı sunarım.

Kerim BEKAR
Trabzon 2009

İÇİNDEKİLER

<u>Sayfa No</u>

ÖZET

“L-Fuzzy Reel Doğru Üzerinde Metrik” adlı bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmamızda kullanılan temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, L’nin tam kafes olması durumunda, L-fuzzy reel doğrusu üzerinde bir metrik tanımlanmıştır.

Son olarak, L tam kafesi, zincir ve her elemanı kompakt olması durumunda, tanımlanan bu metriğe göre L-fuzzy reel doğrusunun tam olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: L-fuzzy reel doğru, metrik, kompakt, zincir, tamlık.

SUMMARY

Metric on L-Fuzzy Real Line

The study entitled "Metric on L-Fuzzy Real Line" consists of two chapters.

In the first chapter, fundamental concepts and theorems used in our study are explored.

In the second chapter, a metric is defined on L-fuzzy real line where L is a complete lattice.

Finally, according to this defined metric, the completeness of L-fuzzy real line, where L is a chain and its every element is compact, is proved.

Key Words: L-fuzzy real line, metric, compact, chain, completeness.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$a < b$	: a küçüktür b
$a > b$	: a büyüktür b
$a \leq b$	: a küçüktür veya eşittir b
$a \geq b$	: a büyüktür veya eşittir b
$a \in A$	: a, A'nın elemanıdır
$a \notin A$	: a, A'nın elemanı değildir
$a = b$	: a eşittir b
$a \neq b$	: a farklıdır b
$A = B$	: A, B'ye eşittir
$A \subset B$	: B, A'yı içerir
$A \cap B$	: A kesişim B
$A \cup B$	: A birleşim B
d	: Metrik
$f(A)$	: A'nın resmi
$f^{-1}(A)$	: A'nın ters resmi
I	: $[0,1]$ kapalı aralığı
$:=$	: Tanım olarak eşittir
$:\Leftrightarrow$	: Tanım olarak gerek ve yeter koşul
$\Rightarrow$	: Gerek koşul
$\Leftarrow$	: Yeter koşul
$\forall$	: Her
$\exists$	: Vardır, mevcuttur
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
maksA	: A kümesinin maksimumu
$\min A$	: A kümesinin minimumu
$K(x, \varepsilon)$	: x merkezli ve ε yarıçaplı açık top
$\vee A$	: A kümesinin supremumu

ΛA	: A kümesinin infimumu
τ_d	: X üzerinde d metriği ile üretilen metrik topoloji
(X, τ)	: Topolojik uzay

1. GENEL BİLGİLER

1. 1. Giriş

Fuzzy sayılar, istatistikte, bilgisayar programlamada, mühendislikte, özellikle de iletişimde ve birçok bilim dalında kullanılır. Fuzzy sayılar, fuzzy kümeler teorisinde geniş bir yer kaplar. 1975'de Hutton [24], $I=[0,1]$ aralığı üzerinde fuzzy reel doğru kavramını tanıtmıştır. Fuzzy reel doğru kavramı reel doğru kavramının bir genellemesidir ve fuzzy topolojide büyük öneme sahiptir. 1982'de Rodabaugh [24], $[0,1]$ aralığı yerine L tam kafesini alarak fuzzy reel doğru üzerinde fuzzy toplama işlemini tanımlamıştır.

Fuzzy reel doğru ve L-fuzzy reel doğru kavramları literatürde geniş uygulama alanı bulmuştur ([24], [31], [34], [38]). 1983'de R.Lowen [31], L-fuzzy reel doğrusunun cebirsel yapısını incelemiştir. Wang [38], fuzzy reel doğru üzerinde sonsuz toplam kavramlarını vererek sonsuz toplamların yakınsaklığı ile ilgili gerekli ve yeterli koşulu vermiştir. S. Göhler ve Werner Göhler [18], fuzzy reel doğru üzerinde iki özel fuzzy metrik tanımlayarak, fuzzy reel doğrusunun topolojik özelliklerini incelemiştir.

Han-Liang Huang ve Fu-Gui Shi [23], 2007 yılında L tam dağılmalı kafesi üzerinde L- fuzzy sayı ve L- fuzzy konveks küme kavramlarını vermiştir.

Fuzzy topoloji alanında fuzzy reel doğrusunun metrikleştirilmesi üzerine çok az sayıda çalışma yapılmıştır. Son zamanlarda Jian-zhong Xiao ve Xing-hua Zhu [40] tarafından L tam dağılmalı kafes olmak üzere fuzzy reel doğrusu üzerinde bir yarı-metrik kavramı vererek fuzzy reel doğrusunun metrik yapısını incelemiştir. Ayrıca bu çalışmada reel doğru üzerinde oluşturulan bu yarı-metrik topolojisinin bilinen anlamda metrik topolojisine özdeş olduğu gösterilmiştir.

Literatürde fuzzy metrik kavramı birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır ([10], [11], [12], [14], [15], [16], [19], [20], [25], [29], [32], [33], [45]).

Bu tezde, L tam kafes olmak üzere L- fuzzy reel doğrusu üzerinde bir metrik tanımlanmış (klasik anlamda) ve L tam kafesi, zincir ve her elemanı kompakt olması durumunda, oluşturulan bu metriğe göre L- fuzzy reel doğrusunun tamlığı araştırılmıştır.

1.2. Kafesler

Tanım 1.1. [9] X bir küme olmak üzere, her $R \subset X \times X$ altkümesine X kümesinde bir bağıntı denir. R ve S, X üzerinde iki bağıntı iseler,

$$S \circ R := \{(x, y) \in X \times X \mid \exists z \in X : (x, z) \in R \text{ ve } (z, y) \in S\}$$

$$R^n := R \circ R^{n-1}, \; (n \geq 2)$$

ve

$$R^{-1} := \{(x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in R\}$$

şeklinde tanımlanırlar.

$$\Delta := \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$$

kümesine $X \times X$'in köşegeni adı verilir. Bu küme, $R^{-1} \subset R$ özelliğini sağlayan bir bağıntıdır. Eğer $(x, y) \in R$ ise, bu durum bazen xRy şeklinde de yazılır.

Tanım 1.2. [9] X bir küme ve R, X üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer

i) $\Delta \subset R$ ise, bu bağıntıya, yansıma özelliğine sahip,

ii) $R^{-1} = R$ ise, bu bağıntıya, simetrik,

iii) $R \circ R \subset R$ ise, bu bağıntıya, geçişme özelliğine sahip,

iv) $R \cap R^{-1} = \Delta$ ise, bu bağıntıya, ters simetri (antisimetri) özelliğine sahip bağıntı denir.

Tanım 1.3. [9] Bir X kümesi üzerindeki bir R bağıntısı Tanım 1.2'de verilen i)-iii) özelliklerinin her üçüne de sahip ise, bu R bağıntısına bir denklik bağıntısı denir. R, X üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere

$$[x] := \{y \in X \mid (x, y) \in R\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye, $x \in X$ elemanının bu denklik bağıntısına göre denklik sınıfı denir. Bu şekildeki denklik sınıflarının kümesi

$$X / R := \{[x] \mid x \in X\}$$

ile gösterilir ve bu X / R kümesine, X'in R bağıntısına göre bölüm kümesi adı verilir.

Tanım 1.4. [7] $L \neq \varnothing$ olan bir küme ve "$\leq$" bu küme üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. L'ye kısmi sıralı küme denir :$\Leftrightarrow$

i) $\forall a \in L$ için $a \leq a$

ii) $\forall a, b \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$

iii) $\forall a, b, c \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$

Bu durum $(L, \leq)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 1.5. [7] $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $B \subseteq L$ olsun. Bu takdirde,

i) $\forall b \in B$ için $x \leq b$ olacak şekilde bir $x \in L$ mevcut ise bu x'e B'nin alt sınırı,

ii) $\forall b \in B$ için $b \leq y$ olacak şekilde bir $y \in L$ mevcut ise bu y'ye B'nin üst sınırı

denir.

Tanım 1.6. [7] $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme, $B \subseteq L$ ve $b_0 \in B$ olsun. Bu takdirde,

i) $\forall b \in B$ için $b_0 \leq b$ ise b_0 elemanına B'nin en küçük elemanı,

ii) $\forall b \in B$ için $b \leq b_0$ ise b_0 elemanına B'nin en büyük elemanı

denir.

Tanım 1.7. [7] $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $B \subseteq L$ olsun. B kümesinin tüm alt sınırlarının oluşturduğu küme B_- ve tüm üst sınırlarının oluşturduğu kümeyi B_+ ile gösterelim. Bu takdirde,

i) $B_- \neq \emptyset$ ve B_-'nin en büyük elemanı mevcut ise bu elemana B kümesinin en büyük alt sınırı (infimumu) denir ve $\inf B = \bigwedge B = \bigwedge_{b \in B} b$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

ii) $B_+ \neq \emptyset$ ve B_+'nın en küçük elemanı mevcut ise bu elemana B kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir ve $\sup B = \bigvee B = \bigvee_{b \in B} b$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

Tanım 1.8. [7] $(L,\leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Bu takdirde,

i) $\forall a,b\in L$ için $\sup\{a,b\}=a\vee b$ ve $\inf\{a,b\}=a\wedge b$ mevcut ise L kümesine bir kafes denir.

ii) $\forall a,b\in L$ için $a\leq b$ veya $b\leq a$ ise L kümesine bir zincir denir.

iii) $\forall T\subseteq L$ için supT ve inf T mevcut ise L kümesine bir tam kafes denir.

Genel olarak bir kafesin en küçük elemanı "0'' ve en büyük elemanı "1'' ile gösterilir.

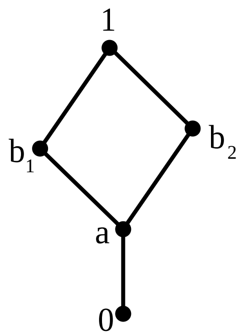
Teorem 1.1. [7] $(L,\leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. $(L,\leq)$ bir tam kafestir $\Leftrightarrow 1\in L$ ve her $\varnothing\neq T\subseteq L$ için infT mevcuttur.

Tanım 1.9. **[7]** $(L,\leq)$ bir kafes olsun. Bu takdirde,

i) $\forall a,b,c\in L, a\leq b$ için $a\vee(b\wedge c)=b\wedge(a\vee c)$ ise L'ye modüler kafes denir.

ii) $\forall a,b,c\in L$ için $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ ve $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ ise L'ye dağılımlı kafes denir.

Örnek 1.1. $L=\{0,a,b_1,b_2,1\}$ kümesi üzerinde $0<a<b_1<1$ ve $0<a<b_2<1$ için $(L,\leq)$ dağılımlı kafestir.



Şekil 1. Dağılmalı kafes

Tanım 1.10. [28] $(L,\leq)$ bir tam kafes olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa L'ye sonsuz dağılımlı kafes adı verilir:

i) $\forall a \in L$, $b \subset L$ için $a \wedge \bigvee B = \bigvee_{b\in B}(a \wedge b)$,

ii) $\forall a \in L$, $b \subset L$ için $a \vee \bigwedge B = \bigwedge_{b\in B}(a \vee b)$.

Örnek 1.2. X bir küme ve $P(X)$, X'in güç kümesi olmak üzere, içerme bağıntısına göre $(P(X),\subseteq)$ sonsuz dağılımlı kafestir.

Tanım 1.11. [7] $(L,\leq)$ bir kafes ve $\emptyset \neq T \subseteq L$ olsun. $\forall a,b \in T$ için $a \vee b, a \wedge b \in T$ ise T'ye alt kafes denir.

Tanım 1.12. [7] $(L,\leq)$ bir kafes, $0 \in L$ ve $\forall x \in L$ için $0 \leq x$ ise L'ye alttan sınırlı kafes denir ve $(L,\leq,0)$ ile gösterilir. $1 \in L$ ve $\forall x \in L$ için $x \leq 1$ ise L'ye üstten sınırlı kafes denir ve $(L,\leq,1)$ ile gösterilir.

L kafesi üstten ve alttan sınırlı ise L'ye sınırlı kafes denir ve $(L,\leq,0,1)$ ile gösterilir.

Tanım 1.13. [7] $(L,\leq)$ bir tam kafes ve $k \in L$ olsun. Bu takdirde, $k \in L$'ye kompakttır denir $:\Leftrightarrow k \leq \bigvee A$ koşulunu sağlayan $\forall A \subset L$ için $\exists A_1 \subset A$ sonlu öyle ki $k \leq \bigvee A_1$'dır.

Örnek. 1.3. $L = \{0,1,...,10\}$ olmak üzere $(L,\leq)$ her elemanı kompakt olan bir tam kafestir.

Tanım 1.13'den aşağıdaki sonuç kolaylıkla görülür.

Sonuç 1.1. $(L,\leq)$ tam, tam sıralı (zincir) kafes ve $k \in L$ kompakt eleman olsun. Bu takdirde, $\forall B \subset L$ ve $k \leq \bigvee B$ için $\exists b \in B$: $k \leq b$'dır.

Tanım 1.14. [28] $(L, \leq)$ bir tam kafes olmak üzere, L üzerindeki bir $' : L \to L,\ a \mapsto a'$ dönüşümüne

i) üst alma operatörü (involution) denir $:\Leftrightarrow$ $\forall a \in L$ için $(a')' = a$,

ii) sırayı tersine koruyan operatör denir $:\Leftrightarrow \forall a, b \in L$ için $a \leq b \Rightarrow a' \geq b'$.

$' : I \to I,\ a \mapsto a' := 1 - a$ olarak tanımlanan dönüşüm I üzerinde sırayı-tersine koruyan bir üst alma operatörüdür.

1.3. Metrik ve Topolojik Uzaylar

Tanım 1.15. [9] X bir küme olsun. $\forall x, y, z \in X$ için

M1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

M2. $d(x, y) = d(y, x)$,

M3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerini sağlayan $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir.

Üzerinde bir d metriği tanımlanmış olan X kümesine bir metrik uzay denir ve (X, d) ile gösterilir.

Uyarı 1.1. [9] Tanım 1.15'de M1 koşulu yerine,

$M1^* :\ x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$

yazılarak elde edilen $M1^*$, M2, M3 koşullarını sağlayan d fonksiyonuna ise, X üzerinde bir yarı metrik denir.

Örnek 1.4. [9] $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde $e(x, y) = |x - y|$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu e metriğine, $\mathbb{R}$'nin doğal metriği denir.

Tanım 1.16. [9] (X,d) metrik uzay ve $(x_n)\subset X$ bir dizi olsun. Eğer,

$$\forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n,m\geq n_0 \text{ için } d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

ise (x_n) dizisine X 'de bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 1.17. [9] (X,d) metrik uzay ve $(x_n)\subset X$ bir Cauchy dizisi olsun. Eğer

$$\exists x_0\in X \ : \ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

ise (X,d) metrik uzayı tamdır denir.

Tanım 1.18. [9] (X,d) bir metrik uzay, $x\in X$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Bu durumda

$$K(x,\varepsilon):=\{y\in X \mid d(x,y)<\varepsilon\}$$

ile tanımlanan kümeye x merkezli ve ε yarıçaplı açık top adı verilir.

Tanım 1.19. [9] (X,d) bir metrik uzay ve $G\subset X$ olsun. Eğer

$$\forall x\in X \text{ için } \exists\varepsilon=\varepsilon(x)>0 \text{ öyle ki } K(x,\varepsilon)\subset G$$

koşulu sağlanıyorsa, G altkümesine bu metrik uzayda açık küme denir.

Eğer bir $F\subset X$ altkümesinin $X-F$ bütünleyeni açık ise, F kümesine kapalı küme adı verilir.

Tanım 1.20. [9] X bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan her $\tau\subset P(X)$ ailesine X üzerinde bir topoloji denir:

T1. $\varnothing, X\in\tau$,

T2. $\forall G_1,G_2\in\tau \Rightarrow G_1\cap G_2\in\tau$,

T3. $\forall (G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\subset\tau \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\in\tau$ (Burada Λ herhangi bir indis kümesidir).

Üzerinde bir topoloji tanımlanmış olan X kümesine bir topolojik uzay denir ve çoğu kez (X,τ) ile gösterilir. Bu durumda, X'in elemanlarına bu topolojik uzayın noktaları ve τ'nun elemanlarına da bu topolojik uzayın açık kümeleri adı verilir.

Örnek 1.5. [9] (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki açık kümelerin

$$\tau_d := \{G \subset X \mid \forall x \in G \text{ için } \exists \varepsilon_x > 0 \text{ öyle ki } K(x,\varepsilon_x) \subset G\}$$

ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye X üzerinde d metriği ile üretilen metrik topoloji denir. Açık olarak her metrik uzay, metrik topoloji ile bir topolojik uzaydır.

Tanım 1.21. [9] (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathsf{B} \subset \tau$ olsun. Eğer her açık küme, B'nin bazı elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa, diğer bir ifade ile

$$\forall G \in \tau \text{ için } \exists \mathsf{B}' \subset \mathsf{B} \text{ öyle ki } G = \bigcup_{B \in \mathsf{B}'} B$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa, bu B ailesine τ topolojisi için bir taban (veya baz) adı verilir.

Örneğin; $\mathsf{B} = \{K(x,\varepsilon) \mid x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ ailesi (X,d) metrik uzayında τ_d metrik topolojisi için bir tabandır.

Tanım 1.22. [9] (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathsf{S} \subset \tau$ olsun. Eğer S'nin elemanlarının bütün sonlu arakesitlerinden oluşan aile τ için bir taban oluşturuyorsa, bu S ailesine τ'nun (veya aynı anlamda olmak üzere (X,τ)'nun) bir alttabanı denir.

1.4. L-Fuzzy Alt Kümeler

L-fuzzy alt kümeler 1965 yılında Zadeh'in [46] 'de tanıttığı fuzzy alt kümelerin bir genellemesi olarak Goguen [17] tarafından 1967 yılında tanıtılmıştır. L-fuzzy küme kavramı günümüzde birçok topolojik yapılara uyarlanmıştır. Bu topolojik yapıların başında 1968 yılında Chang [10] tarafından ilk defa tanıtılan $[0,1]$-topoloji kavramı ve 1985 yılında Kubiak [27] ve Šostak [36] tarafından tanıtılan L-fuzzy topoloji kavramı yer alır. Literatürde L-fuzzy topoloji ile ilgili önemli çalışmalar yapılmıştır. Bu konuda bazı temel çalışmalar [1], [3] [4], [8], [10], [30], [43], [44], [47], [48] kaynaklarında verilmiştir.

Tanım 1.23. [28] $X \neq \varnothing$ bir küme ve $(L, \leq)$ bir kafes olsun. Her $\lambda : X \to L$ fonksiyonuna X'in bir L-fuzzy alt kümesi denir. X'in tüm L-fuzzy alt kümeleri L^X ile gösterilir. $L = [0,1]$ ise L-fuzzy alt kümelere X'in fuzzy alt kümeleri denir.

Tanım 1.24. [28] X bir küme olmak üzere, $(L, \leq)$ bir kafes, $Y \subseteq X$ ve $a \in L - \{0\}$ için $a_Y \in L^X$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$a_Y(x) = \begin{cases} a, & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{cases}.$$

Özel olarak $a = 1$ alınırsa, 1_Y L-fuzzy alt kümesine Y'nin karakteristik fonksiyonu denir. Bu durum χ_Y notasyonu ile gösterilir.

Tanım 1.25. [28] X bir küme, $(L, \leq)$ bir kafes ve $\lambda, \mu \in L^X$ olmak üzere, $\forall x \in X$ için $\lambda(x) \leq \mu(x)$ ise μ'ye λ'yı kapsar denir ve $\lambda \leq \mu$ ile gösterilir.

Tanım 1.26. [28] X bir küme, $(L, \leq)$ bir kafes, $\lambda, \mu \in L^X$ ve $x \in X$ olsun. Bu takdirde,

$$(\lambda \vee \mu)(x) = \lambda(x) \vee \mu(x), \quad (\lambda \wedge \mu)(x) = \lambda(x) \wedge \mu(x)$$

ile tanımlanan L-fuzzy alt kümeleri sırasıyla λ ile μ'nün birleşimi ve kesişimi (arakesiti) denir.

Tanım 1.27. [28] X bir küme, $(L, \leq)$ bir tam kafes, $\{\lambda_i : i \in I\} \subseteq L^X$ ve $x \in X$ olsun. Bu takdirde,

$$\left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i\right)(x) = \bigvee_{i \in I} \lambda_i(x), \quad \left(\bigwedge_{i \in I} \lambda_i\right)(x) = \bigwedge_{i \in I} \lambda_i(x)$$

ile tanımlanan L-fuzzy alt kümeleri sırasıyla $\{\lambda_i : i \in I\}$ ailesinin birleşimi ve kesişimi denir.

Tanım 1.28. [28]. X bir küme, $(L, \leq)$ bir kafes, $\lambda \in L^X$ ve $a \in L$ olsun. Bu takdirde,

$$\lambda_{[a]} = \{ x \in X : \lambda(x) \geq a \}$$

kümesine λ 'nın seviye alt kümesi denir.

Tanım 1.29. [28] $(L, \leq)$ bir kafes ve $\lambda \in L^{\mathbb{R}}$ olsun. Bu takdirde,

i) λ 'ya monoton azalan denir $:\Leftrightarrow$ $\forall s, t \in \mathbb{R}$ için $s \leq t$ ise $\lambda(t) \leq \lambda(s)$,

ii) λ 'ya monoton artan denir $:\Leftrightarrow$ $\forall s, t \in \mathbb{R}$ için $s \leq t$ ise $\lambda(s) \leq \lambda(t)$

dır.

Tanım 1.30. [10] X bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan her $\tau \subset I^X$ ailesine, X üzerinde Chang anlamında fuzzy topoloji denir:

T1. $0,1 \in \tau$,

T2. $\forall G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \wedge G_2 \in \tau$,

T3. $\forall (G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \tau \Rightarrow \bigvee_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \in \tau$.

Tanım 1.31. [36] X bir küme ve $(L, \leq)$ bir tam kafes olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\tau : L^X \to L$ dönüşümüne X üzerinde L-fuzzy topoloji denir:

i) $\tau(0_X) = \tau(1_X) = 1$,

ii) $\tau(\lambda \wedge \mu) \geq \tau(\lambda) \wedge \tau(\mu)$, $\forall \lambda, \mu \in L^X$,

iii) $\tau\left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i\right)(x) \geq \bigwedge_{i \in I} \tau(\lambda_i)$, $\forall \{\lambda_i : i \in I\} \subseteq L^X$.

Ayrıca, (X, τ) ikilisine L-fuzzy topolojik uzay denir.

Tanım 1.31'den $(L,\leq)$ bir tam kafes olmak üzere $\tau : L^X \to L$ L-fuzzy topolojisinde, $\tau : I^X \to \{0,1\}$ olarak alındığında bu τ Chang anlamında fuzzy topolojiye dönüşür. $\tau : \{0,1\}^X \to \{0,1\}$ olarak alındığında ise bu τ klasik anlamda topolojiye dönüşür.

1.5. L-Fuzzy Sayılar

L-fuzzy birim aralık ve L-fuzzy reel doğru kavramı L-fuzzy topolojik uzaylarda önemli bir yer tutar. İlk olarak L-fuzzy birim aralık kavramı 1975'de Hutton [24] tarafından verilmiştir. 1982'de Rodabaugh [24], $[0,1]$ yerine L tam kafesini alarak fuzzy reel doğru üzerinde fuzzy toplama işlemini tanımlamıştır.

1983'de R. Lowen [31], L-fuzzy reel doğrusunun cebirsel yapısını incelemiştir. Wang [38], fuzzy reel doğru üzerinde sonsuz toplam kavramlarını vererek sonsuz toplamların yakınsaklığı ile ilgili gerekli ve yeterli koşulu vermiştir. S. Göhler ve Werner Göhler [18], fuzzy reel doğru üzerinde iki özel fuzzy metrik tanımlayarak, fuzzy reel doğrusunun topolojik özelliklerini incelemiştir.

Han-Liang Huang ve Fu-Gui Shi [23], 2007 yılında L tam dağılmalı kafesi üzerinde L- fuzzy sayı ve L- fuzzy konveks küme kavramlarını vermiştir. Son zamanlarda Jian-zhong Xiao ve Xing-hua Zhu [40], L tam dağılmalı kafes olmak üzere fuzzy reel doğru üzerinde yarı-metrik kavramını vererek fuzzy reel doğrunun metrik yapısını incelemiştir.

Tanım 1.32. [34] $(L,\leq)$ bir tam kafes olsun. $\lambda \in L^{\mathbb{R}}$ 'ye L-fuzzy reel sayı denir :$\Leftrightarrow$

i) $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ öyleki $\lambda(x_0) = 1$,

ii) $\forall a \in L$ için $\lambda_{[a]}$ seviye alt kümesi kapalı aralıktır.

Tanım 1.33. [28] $(L,\leq)$ bir tam kafes ve

$$md_{\mathbb{R}}(L)_{sol} = \left\{ \lambda \in L^{\mathbb{R}} \;\middle|\; \bigvee_{t\in\mathbb{R}} \lambda(t) = 1,\ \bigwedge_{t\in\mathbb{R}} \lambda(t) = 0\ ,\ \lambda \text{ monoton azalan} \right\}$$

olsun. $\forall \lambda \in md_{\mathbb{R}}(L)_{sol}$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için,

$$\lambda(t-)=\bigwedge_{s<t}\lambda(s) \quad \text{ve} \quad \lambda(t+)=\bigvee_{s>t}\lambda(s)$$

olmak üzere $md_{\mathbb{R}}(L)_{sol}$ üzerinde “ $\sim$ ” denklik bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\lambda,\mu\in md_{\mathbb{R}}(L)_{sol} \text{ için } \lambda\sim\mu \;:\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R} \text{ için } \lambda(t-)=\mu(t-),\ \lambda(t+)=\mu(t+)$$

dır. λ ’yı içeren denklik sınıflarının kümesi

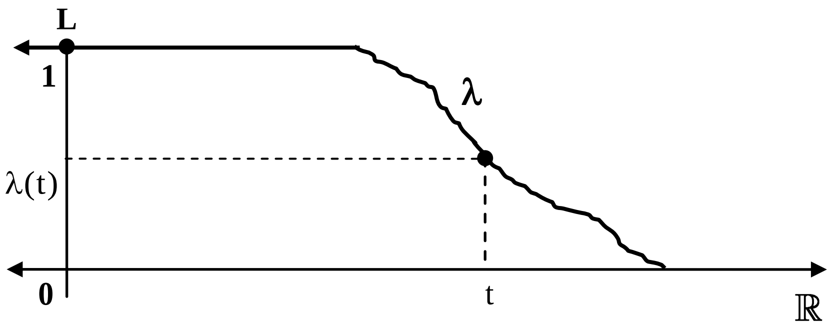
$$[\lambda]:=\{\mu\in md_{\mathbb{R}}(L)_{sol} \mid \mu\sim\lambda\}$$

ile gösterilir.

$md_{\mathbb{R}}(L)_{sol}$ üzerinde “ $\sim$ ” denklik bağıntısına göre tüm denklik sınıflarının kümesi

$$\mathbb{R}[L]_{sol}:=\{[\lambda] \mid \lambda\in md_{\mathbb{R}}(L)_{sol}\}$$

olsun. $\mathbb{R}[L]_{sol}$ ’ye L-fuzzy reel doğru denir.



Şekil 2. $[\lambda]\in\mathbb{R}[L]_{sol}$

$L_t, R_t : \mathbb{R}[L]_{sol}\to L$ dönüşümleri $L_t(\lambda):=(\lambda(t-))'$, $R_t(\lambda):=\lambda(t+)$ olarak tanımlansın. Açık olarak, $L_t, R_t\in L^{\mathbb{R}[L]_{sol}}$ ‘dır. B kümesi L_t ve R_s fuzzy kümelerinin tüm sonlu arakesitinden oluşan bir aile olsun. O halde bu aile $L^{\mathbb{R}[L]_{sol}}$ üzerinde bir L-topoloji için bir taban olur. $(L,\leq)$ bir tam kafes olsun ve $\mathbb{R}[L]_{sol}$ üzerinde tanımlanan L_t ve R_t için

$$S_L^{\mathbb{R}}=\{L_t, R_t\in L^{\mathbb{R}[L]_{sol}} : t\in\mathbb{R}\},\quad B_L^{\mathbb{R}}=\left\{\bigwedge F : F\in\left[S_L^{\mathbb{R}}\right]^{<W}\setminus\{\varnothing\}\right\}$$

olmak üzere

$$T_L^{\mathbb{R}} = \left\{ \bigvee A : A \subset B_L^{\mathbb{R}} \right\}$$

şeklinde oluşturulan $T_L^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}[L]_{sol}$ üzerinde $S_L^{\mathbb{R}}$ alttabanı ile üretilen topolojidir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. L-Fuzzy Reel Doğru Üzerinde Metrik

Bu kısımda, Tanım 1.33'da verilen kavramlara paralel olarak bazı yeni kavramlar ve bu kavramlarla ilgili bazı teorem ve sonuçlar verilmiştir. Ayrıca bu teorem ve sonuçlar kullanılarak bu kısımda $(L,\leq)$ tam kafes olmak üzere, L- fuzzy reel doğru üzerinde bir metrik oluşturulmuştur.

Teorem 2.1.1. $(L,\leq)$ bir tam kafes, $\lambda,\mu\in md_{\mathbb{R}}(L)_{sol}$ ve $t_0\in\mathbb{R}$ için $\lambda(t_0-)\neq\mu(t_0-)$ olsun. Bu takdirde,

i) $\forall\varepsilon>0$ için $\exists s_0\in(t_0-\varepsilon,t_0)$: $\lambda(t_0-)\not\leq\mu(s_0)$ veya $\mu(t_0-)\not\leq\lambda(s_0)$,

ii) $\forall\varepsilon>0$ için $\exists s_0\in(t_0-\varepsilon,t_0)$: $\lambda(s_0+)\neq\mu(s_0+)$

dır.

İspat.

i) $t_0\in\mathbb{R}$ için $\lambda(t_0-)\neq\mu(t_0-)$ olsun. Varsayım:

$\exists\,\varepsilon>0:\ \forall s\in(t_0-\varepsilon,t_0)$ için $\lambda(t_0-)\leq\mu(s)$ ve $\mu(t_0-)\leq\lambda(s)$

olsun. O halde,

$$\lambda(t_0-)\leq\bigwedge_{t_0-\varepsilon<s<t_0}\mu(s)\quad\text{ve}\quad\mu(t_0-)\leq\bigwedge_{t_0-\varepsilon<s<t_0}\lambda(s)$$

dır. λ ve μ azalan olduğundan,

$$\lambda(t_0-)\leq\bigwedge_{t_0-\varepsilon<s<t_0}\mu(s)=\bigwedge_{s<t_0}\mu(s)=\mu(t_0-)\ \Rightarrow\ \lambda(t_0-)\leq\mu(t_0-)\tag{1}$$

ve

$$\mu(t_0-)\leq\bigwedge_{t_0-\varepsilon<s<t_0}\lambda(s)=\bigwedge_{s<t_0}\lambda(s)=\lambda(t_0-)\ \Rightarrow\ \mu(t_0-)\leq\lambda(t_0-)\tag{2}$$

dır. (1) ve (2)'den $\lambda(t_0-)=\mu(t_0-)$ olur ki bu hipotez ile çelişir. O halde

$$\forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists s_0\in(t_0-\varepsilon,t_0): \ \lambda(t_0-)\not\leq\mu(s_0) \text{ veya } \mu(t_0-)\not\leq\lambda(s_0)$$

dır.

ii) $t_0\in\mathbb{R}$ için $\lambda(t_0-)\neq\mu(t_0-)$ ve $\varepsilon>0$ olsun. i)'den

$$\exists s_0\in(t_0-\varepsilon,t_0): \ \lambda(t_0-)\not\leq\mu(s_0) \text{ veya } \mu(t_0-)\not\leq\lambda(s_0)$$

dır. Genelliği bozmadan $\lambda(t_0-)\not\leq\mu(s_0)$ olsun. μ azalan olduğundan $\mu(s_0+)\leq\mu(s_0)$ 'dır. Buradan

$$\lambda(t_0-)\not\leq\mu(s_0+) \tag{3}$$

dır. Diğer taraftan

$$\{\lambda(s): s_0<s<t_0\}\subset\{\lambda(s): s<t_0\}$$

dır. Buradan

$$\bigvee_{s_0<s<t_0}\lambda(s)\geq\bigwedge_{s<t_0}\lambda(s)=\lambda(t_0-)$$

elde edilir. O halde

$$\lambda(t_0-)\leq\bigvee_{s_0<s<t_0}\lambda(s)$$

dır. λ azalan olduğundan

$$\lambda(t_0-)\leq\bigvee_{s_0<s<t_0}\lambda(s)=\bigvee_{s_0<s}\lambda(s)=\lambda(s_0+)$$

dır. (3)'den $\lambda(t_0-)\not\leq\mu(s_0+)$ olduğundan $\lambda(s_0+)\not\leq\mu(s_0+)$'dır. Dolayısıyla $\lambda(s_0+)\neq\mu(s_0+)$ elde edilir. ■

Teorem 2.1.2. $(L,\leq)$ bir tam kafes, $\lambda,\mu\in md_{\mathbb{R}}(L)_{sol}$ ve $t_0\in\mathbb{R}$ için $\lambda(t_0+)\neq\mu(t_0+)$ olsun. Bu takdirde,

i) $\forall\varepsilon>0$ için $\exists s_0\in(t_0,t_0+\varepsilon): \ \mu(s_0)\not\leq\lambda(t_0+)$ veya $\lambda(s_0)\not\leq\mu(t_0+)$,

ii) $\forall\varepsilon>0$ için $\exists s_0\in(t_0,t_0+\varepsilon): \ \lambda(s_0-)\neq\mu(s_0-)$

dır.

İspat.

i) $t_0 \in \mathbb{R}$ için $\lambda(t_0+) \neq \mu(t_0+)$ olsun. Varsayım:

$\exists\, \varepsilon > 0: \forall s \in (t_0, t_0+\varepsilon)$ için $\mu(s) \leq \lambda(t_0+)$ ve $\lambda(s) \leq \mu(t_0+)$

olsun. Buradan

$$\bigvee_{t_0<s<t_0+\varepsilon} \mu(s) \leq \lambda(t_0+) \quad \text{ve} \quad \bigvee_{t_0<s<t_0+\varepsilon} \lambda(s) \leq \mu(t_0+)$$

dır. λ ve μ azalan olduğundan,

$$\lambda(t_0+) = \bigvee_{t_0<s} \lambda(s) = \bigvee_{t_0<s<t_0+\varepsilon} \lambda(s) \leq \mu(t_0+) \Rightarrow \lambda(t_0+) \leq \mu(t_0+) \tag{4}$$

ve

$$\mu(t_0+) = \bigvee_{t_0<s} \mu(s) = \bigvee_{t_0<s<t_0+\varepsilon} \mu(s) \leq \lambda(t_0+) \Rightarrow \mu(t_0+) \leq \lambda(t_0+) \tag{5}$$

dır. (4) ve (5)'den $\lambda(t_0+) = \mu(t_0+)$ elde edilir ki bu hipotez ile çelişir. O halde

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists\, s_0 \in (t_0, t_0+\varepsilon): \ \mu(s_0) \not\leq \lambda(t_0+)$ veya $\lambda(s_0) \not\leq \mu(t_0+)$

dır.

ii) $t_0 \in \mathbb{R}$ için $\lambda(t_0+) \neq \mu(t_0+)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. i)'den

$\exists s_0 \in (t_0, t_0+\varepsilon)$: $\mu(s_0) \not\leq \lambda(t_0+)$ veya $\lambda(s_0) \not\leq \mu(t_0+)$

dır. Genelliği bozmadan, $\lambda(s_0) \not\leq \mu(t_0+)$ olduğunu kabul edebiliriz. λ azalan olduğundan $\lambda(s_0) \leq \lambda(s_0-)$ 'dır. Buradan

$$\lambda(s_0-) \not\leq \mu(t_0+) \tag{6}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\{\mu(s): t_0 < s < s_0\} \subset \{\mu(s): t_0 < s\}$$

dır. Buradan $\bigwedge_{t_0<s<s_0} \mu(s) \leq \bigvee_{t_0<s} \mu(s) = \mu(t_0+)$ 'dır. O halde $\bigwedge_{t_0<s<s_0} \mu(s) \leq \mu(t_0+)$ 'dır. μ azalan olduğundan

$$\mu(s_0-) = \bigwedge_{s<s_0} \mu(s) = \bigwedge_{t_0<s<s_0} \mu(s) \leq \mu(t_0+)$$

dır. Buradan $\mu(s_0-)\le\mu(t_0+)$ ‘dır. (6)’dan $\lambda(s_0-)\not\le\mu(t_0+)$ olduğundan $\lambda(s_0-)\not\le\mu(s_0-)$ ‘dır. Dolayısıyla $\lambda(s_0-)\ne\mu(s_0-)$ elde edilir. ■

Teorem 2.1.1.ii) ve Teorem 2.1.2.ii)’den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.1. $(L,\le)$ bir tam kafes $\lambda,\mu\in md_{\mathbb{R}}(L)_{sol}$ olsun. Bu takdirde,

Bir $t_0\in\mathbb{R}$ için $\lambda(t_0-)\ne\mu(t_0-)\Leftrightarrow$ Bir $s_0\in\mathbb{R}$ için $\lambda(s_0+)\ne\mu(s_0+)$

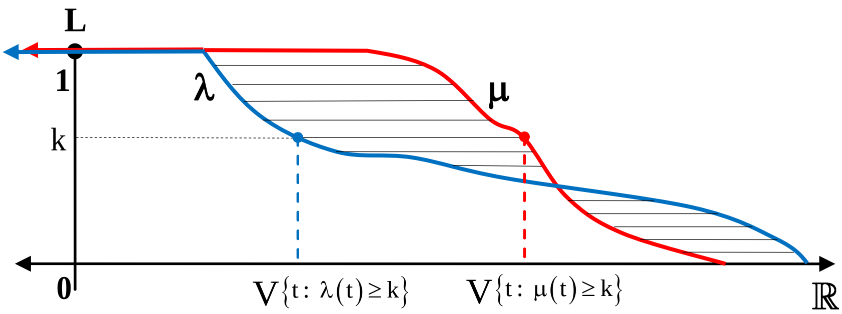
dır.

Teorem 2.1.3. Aşağıda tanımlanan

$$d_{sol}:\mathbb{R}[L]_{sol}\, x\mathbb{R}[L]_{sol}\to[0,+\infty)$$

dönüşümü $\mathbb{R}[L]_{sol}$ kümesi üzerinde bir (klasik) metriktir:

$$d_{sol}([\lambda],[\mu]):=\sup\left\{\left|\bigvee\{t:\ \lambda(t)\ge k\}-\bigvee\{t:\ \mu(t)\ge k\}\right|:\ k\in L\setminus\{0\}\right\}.$$



Şekil 3. $(\mathbb{R}[L]_{sol},d_{sol})$

İspat.

i) $[\lambda]=[\mu]\Rightarrow d_{sol}([\lambda],[\mu])=0$ olduğunu gösterelim:

$k\in L\setminus\{0\}$ keyfi ve sabit olsun,

$$t_1:=\bigvee_{\lambda(t)\ge k} t,\qquad t_2:=\bigvee_{\mu(t)\ge k} t$$

ve

$$A := \{t : \lambda(t) \geq k\}, \quad B := \{t : \mu(t) \geq k\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\varepsilon > 0$ keyfi ve sabit için $\exists\, t' \in B\ :\ t_2 - \varepsilon < t'$ ‘dır. Dolayısıyla $\mu(t') \geq k$ ve $t_2 - \varepsilon < t'$ ‘dır. $[\lambda] = [\mu]$ olduğundan $\lambda(t'-) = \mu(t'-)$ ‘dır. Diğer yandan μ azalan olduğundan $\mu(t') \leq \mu(t'-)$ ‘dır. Dolayısıyla

$$k \leq \mu(t') \leq \mu(t'-) = \lambda(t'-)$$

dır. Yani $k \leq \lambda(t'-)$ ‘dır. Diğer yandan

$$\varepsilon > 0 \text{ için } \exists t^* \in \mathbb{R}:\ t_2 - \varepsilon < t^* < t'$$

dır. $k \leq \lambda(t'-)$ ve λ azalan olduğundan

$$k \leq \lambda(t'-) = \bigwedge_{s<t'} \lambda(s) \leq \lambda(t^*)$$

dır. Dolayısıyla $t_2 - \varepsilon < t^*$ ve $t^* \in A$ elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $t_2 \leq \bigvee A = t_1$ ‘dır. Buradan

$$t_2 \leq t_1 \tag{7}$$

elde edilir.

Şimdi $t_1 \leq t_2$ olduğunu gösterelim:

$\varepsilon > 0$ keyfi ve sabit için $\exists\, t' \in A\ :\ t_1 - \varepsilon < t'$ ‘dır. Dolayısıyla $\lambda(t') \geq k$ ve $t_1 - \varepsilon < t'$ ‘dır. $[\lambda] = [\mu]$ olduğundan $\lambda(t'-) = \mu(t'-)$ ‘dır. Diğer yandan λ azalan olduğundan $\lambda(t') \leq \lambda(t'-)$ ‘dır. Dolayısıyla $k \leq \lambda(t') \leq \lambda(t'-) = \mu(t'-)$ ‘dır. O halde $k \leq \mu(t'-)$ ‘dır. Diğer yandan

$$\varepsilon > 0 \text{ için } \exists t^* \in \mathbb{R}:\ t_1 - \varepsilon < t^* < t'$$

dır. $k \leq \mu(t'-)$ ve μ azalan olduğundan $k \leq \mu(t'-) = \bigwedge_{s<t'} \mu(s) \leq \mu(t^*)$ elde edilir. Dolayısıyla $t_1 - \varepsilon < t^*$ ve $t^* \in B$ elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $t_1 \leq \bigvee B = t_2$ ‘dır. O halde

$$t_1 \leq t_2 \tag{8}$$

olup (7) ve (8)’den $t_1 = t_2$ elde edilir. O halde $k \in L \setminus \{0\}$ keyfi olduğundan $d_{sol}([\lambda], [\mu]) = 0$ ‘dır.

Tersine olarak $d_{sol}([\lambda],[\mu])=0 \Rightarrow [\lambda]=[\mu]$ olduğunu gösterelim:

Varsayım: $[\lambda]\neq[\mu]$ olsun. Bu takdirde,

$$\exists t_0 \in \mathbb{R}:\ \lambda(t_0-)\neq\mu(t_0-) \text{ veya } \lambda(t_0+)\neq\mu(t_0+)$$

dır. Sonuç 2.1.1 'den, $\lambda(t_0-)\neq\mu(t_0-)$ 'dır. O halde,

$$a:=\mu(t_0-)=\bigwedge_{s<t_0}\mu(s)$$

olmak üzere,

$$a\not\leq\bigwedge_{s<t_0}\lambda(s) \text{ veya } a\not\geq\bigwedge_{s<t_0}\lambda(s)$$

dır. Genelliği bozmadan $a\not\leq\bigwedge_{s<t_0}\lambda(s)$ olduğu kabul edilebilir. O halde,

$$\exists s_0\in\mathbb{R}:\ s_0<t_0 \text{ ve } a\not\leq\lambda(s_0) \tag{9}$$

dır.

$$A:=\{t:\lambda(t)\geq a\} \quad \text{ve} \quad B:=\{t:\mu(t)\geq a\}$$

olsun.

<u>İddia</u>: $\bigvee B\geq t_0$ 'dır.

Gerçekten,

$$\forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists s'\in\mathbb{R}:\ t_0-\varepsilon<s'<t_0$$

olduğundan $\mu(s')\geq\bigwedge_{s<t_0}\mu(s)=a$, buradan $\mu(s')\geq a$ 'dır. O halde $s'\in B$ 'dır. $\varepsilon>0$ keyfi olduğundan $t_0\leq\bigvee B$ 'dır.

Hipoteze göre,

$$d_{sol}([\lambda],[\mu])=\sup\left\{\left|\bigvee\{t:\ \lambda(t)\geq k\}-\bigvee\{t:\ \mu(t)\geq k\}\right|:\ k\in L\setminus\{0\}\right\}=0$$

olduğundan $\bigvee_{\mu(t)\geq a}t=\bigvee_{\lambda(t)\geq a}t$ 'dır. Buradan

$$t_0\leq\bigvee B=\bigvee_{\mu(t)\geq a}t=\bigvee A \quad\Rightarrow\quad t_0\leq\bigvee A$$

dır. O halde $\varepsilon:=t_0-s_0>0$ için $\exists t'\in A:\ t_0-\varepsilon<t'$ 'dır. Buradan $a\leq\lambda(t')$ ve $s_0<t'$ 'dır. λ azalan olduğundan $a\leq\lambda(t')$ ve $\lambda(t')\leq\lambda(s_0)$ 'dır. Buradan $a\leq\lambda(s_0)$ 'dır. Bu ise (9) ile çelişir. Buradan $[\lambda]=[\mu]$ elde edilir.

ii) $d_{sol}([\lambda],[\mu]) = d_{sol}([\mu],[\lambda])$ olduğu açıktır.

iii) $d_{sol}([\lambda],[\eta]) \le d_{sol}([\lambda],[\mu]) + d_{sol}([\mu],[\eta])$ olduğunu gösterelim:

$k_0 \in L \ (k_0 \neq 0)$ keyfi verilsin.

$$t_1(k_0) := \bigvee_{\lambda(t)\ge k_0} t, \quad t_2(k_0) := \bigvee_{\mu(t)\ge k_0} t, \quad t_3(k_0) := \bigvee_{\eta(t)\ge k_0} t$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$|t_1(k_0) - t_3(k_0)| \le |t_1(k_0) - t_2(k_0)| + |t_2(k_0) - t_3(k_0)|$$

dır. Buradan

$$\sup_{\substack{k\in L,\\ k>0}} |t_1(k) - t_3(k)| \le \sup_{\substack{k\in L,\\ k>0}} |t_1(k) - t_2(k)| + \sup_{\substack{k\in L,\\ k>0}} |t_2(k) - t_3(k)|$$

dır. Sonuç olarak

$$d_{sol}([\lambda],[\eta]) \le d_{sol}([\lambda],[\mu]) + d_{sol}([\mu],[\eta])$$

elde edilir. ■

Tanım 2.1.1. $(L,\le)$ bir tam kafes, $\lambda \in L^{\mathbb{R}}$ ve

$$mi_{\mathbb{R}}(L)_{sağ} := \left\{ \lambda \in L^{\mathbb{R}} \ \middle| \ \bigvee_{t\in\mathbb{R}} \lambda(t) = 1, \ \bigwedge_{t\in\mathbb{R}} \lambda(t) = 0, \ \lambda \text{ monoton artan} \right\}$$

olsun. $\forall \lambda \in mi_{\mathbb{R}}(L)_{sağ}$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için ,

$$\lambda(t-) := \bigvee_{s<t} \lambda(s) \quad \text{ve} \quad \lambda(t+) := \bigwedge_{s>t} \lambda(s)$$

olmak üzere $mi_{\mathbb{R}}(L)_{sağ}$ üzerinde "$\sim$" denklik bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\lambda,\mu \in mi_{\mathbb{R}}(L)_{sağ} \text{ için } \lambda \sim \mu \ :\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \ \text{ için } \ \lambda(t-) = \mu(t-), \ \lambda(t+) = \mu(t+)$$

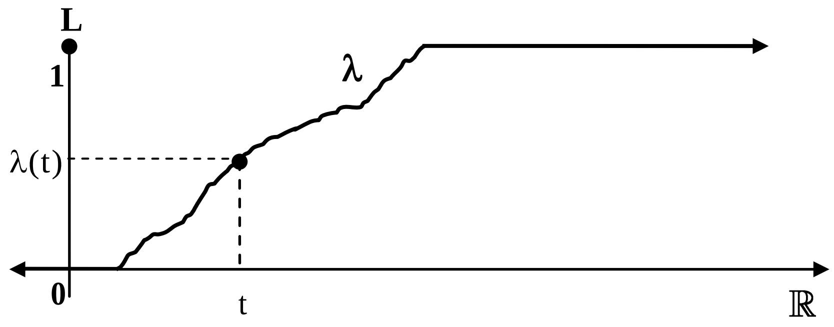
dır. λ'yı içeren denklik sınıflarının kümesi

$$[\lambda] := \{ \mu \in mi_{\mathbb{R}}(L)_{sağ} \ | \ \mu \sim \lambda \}$$

olarak tanımlanır. $mi_{\mathbb{R}}(L)_{sağ}$ üzerinde "$\sim$" denklik bağıntısına göre tüm denklik sınıflarının kümesi

$$\mathbb{R}[L]_{sağ} := \{ [\lambda] \ | \ \lambda \in mi_{\mathbb{R}}(L)_{sağ} \}$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 4. $[\lambda] \in \mathbb{R}[L]_{\text{sağ}}$

Teorem 2.1.4. $(L,\leq)$ bir tam kafes, $\lambda,\mu \in mi_{\mathbb{R}}(L)_{\text{sağ}}$ ve $t_0 \in \mathbb{R}$ için $\lambda(t_0+) \neq \mu(t_0+)$ olsun. Bu takdirde,

i) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists s_0 \in (t_0, t_0+\varepsilon)$: $\lambda(t_0+) \not\leq \mu(s_0)$ veya $\mu(t_0+) \not\leq \lambda(s_0)$,

ii) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists s_0 \in (t_0, t_0+\varepsilon)$: $\lambda(s_0-) \neq \mu(s_0-)$

dır.

İspat.

i) $t_0 \in \mathbb{R}$ için $\lambda(t_0+) \neq \mu(t_0+)$ olsun. Varsayım:

$\exists\, \varepsilon > 0$: $\forall s \in (t_0, t_0+\varepsilon)$ için $\lambda(t_0+) \leq \mu(s)$ ve $\mu(t_0+) \leq \lambda(s)$

olsun. O halde,

$$\lambda(t_0+) \leq \bigwedge_{t_0<s<t_0+\varepsilon} \mu(s) \quad \text{ve} \quad \mu(t_0+) \leq \bigwedge_{t_0<s<t_0+\varepsilon} \lambda(s)$$

dır. λ ve μ artan olduğundan,

$$\lambda(t_0+) \leq \bigwedge_{t_0<s<t_0+\varepsilon} \mu(s) = \bigwedge_{t_0<s} \mu(s) = \mu(t_0+) \;\Rightarrow\; \lambda(t_0+) \leq \mu(t_0+) \tag{10}$$

ve

$$\mu(t_0+) \leq \bigwedge_{t_0<s<t_0+\varepsilon} \lambda(s) = \bigwedge_{t_0<s} \lambda(s) = \lambda(t_0+) \;\Rightarrow\; \mu(t_0+) \leq \lambda(t_0+) \tag{11}$$

dır. (10) ve (11)'den $\mu(t_0+) = \lambda(t_0+)$ elde edilir ki bu hipotez ile çelişir. O halde

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists s_0 \in (t_0, t_0+\varepsilon)$: $\lambda(t_0+) \not\leq \mu(s_0)$ veya $\mu(t_0+) \not\leq \lambda(s_0)$

dır.

ii) $t_0 \in \mathbb{R}$ için $\lambda(t_0+) \neq \mu(t_0+)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. i)'den

$$\exists s_0 \in (t_0, t_0+\varepsilon):\ \lambda(t_0+) \not\leq \mu(s_0) \text{ veya } \mu(t_0+) \not\leq \lambda(s_0)$$

dır. Genelliği bozmadan, $\lambda(t_0+) \not\leq \mu(s_0)$ olduğunu kabul edebiliriz. μ artan olduğundan $\mu(s_0-) \leq \mu(s_0)$ 'dır. Buradan

$$\lambda(t_0+) \not\leq \mu(s_0-) \tag{12}$$

dır. Diğer taraftan

$$\{\lambda(s) : t_0 < s < s_0\} \subset \{\lambda(s) : t_0 < s\}$$

dır. Buradan

$$\bigvee_{t_0<s<s_0} \lambda(s) \geq \bigwedge_{t_0<s} \lambda(s) = \lambda(t_0+)$$

elde edilir. Bu ise $\lambda(t_0+) \leq \bigvee_{t_0<s<s_0} \lambda(s)$ olduğunu gösterir. λ artan olduğundan

$$\lambda(t_0+) \leq \bigwedge_{t_0<s<s_0} \lambda(s) = \bigwedge_{s<s_0} \lambda(s) = \lambda(s_0-)$$

dır. Buradan $\lambda(t_0+) \leq \lambda(s_0-)$ 'dır. (12)'den $\lambda(t_0+) \not\leq \mu(s_0-)$ olduğundan $\lambda(s_0-) \not\leq \mu(s_0-)$ 'dır. Buradan $\lambda(s_0-) \neq \mu(s_0-)$ elde edilir. ■

Teorem 2.1.5. $(L, \leq)$ bir tam kafes, $\lambda, \mu \in mi_{\mathbb{R}}(L)_{sağ}$ ve $t_0 \in \mathbb{R}$ için $\lambda(t_0-) \neq \mu(t_0-)$ olsun. Bu takdirde,

i) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists s_0 \in (t_0-\varepsilon, t_0)$: $\mu(s_0) \not\leq \lambda(t_0-)$ veya $\lambda(s_0) \not\leq \mu(t_0-)$,

ii) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists s_0 \in (t_0-\varepsilon, t_0)$: $\mu(s_0+) \neq \lambda(s_0+)$

dır.

İspat.

i) $t_0 \in \mathbb{R}$ için $\lambda(t_0-) \neq \mu(t_0-)$ olsun. Varsayım:

$$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall s \in (t_0-\varepsilon, t_0) \text{ için } \mu(s) \leq \lambda(t_0-) \text{ ve } \lambda(s) \leq \mu(t_0-)$$

olsun. O halde,

$$\bigvee_{t_0-\varepsilon<s<t_0} \mu(s) \leq \lambda(t_0-) \quad \text{ve} \quad \bigvee_{t_0-\varepsilon<s<t_0} \lambda(s) \leq \mu(t_0-)$$

dır. λ ve μ artan olduğundan,

$$\mu(t_0-) = \bigvee_{s<t_0} \mu(s) = \bigvee_{t_0-\varepsilon<s<t_0} \mu(s) \leq \lambda(t_0-) \Rightarrow \mu(t_0-) \leq \lambda(t_0-) \tag{13}$$

ve

$$\lambda(t_0-) = \bigvee_{s<t_0} \lambda(s) = \bigvee_{t_0-\varepsilon<s<t_0} \lambda(s) \leq \mu(t_0-) \Rightarrow \lambda(t_0-) \leq \mu(t_0-) \tag{14}$$

dır. (13) ve (14)'den $\lambda(t_0-) = \mu(t_0-)$ elde edilir ki bu hipotez ile çelişir. O halde

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists s_0 \in (t_0-\varepsilon, t_0): \ \mu(s_0) \not\leq \lambda(t_0-) \text{ veya } \lambda(s_0) \not\leq \mu(t_0-)$$

dır.

ii) $t_0 \in \mathbb{R}$ için $\lambda(t_0-) \neq \mu(t_0-)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. i)'den

$$\exists s_0 \in (t_0-\varepsilon, t_0): \ \mu(s_0) \not\leq \lambda(t_0-) \text{ veya } \lambda(s_0) \not\leq \mu(t_0-)$$

dır. Genelliği bozmayacağı için, $\mu(s_0) \not\leq \lambda(t_0-)$ olduğunu kabul edebiliriz. μ artan olduğundan $\mu(s_0) \leq \mu(s_0+)$ 'dır. Buradan

$$\mu(s_0+) \not\leq \lambda(t_0-) \tag{15}$$

dır. Diğer taraftan $\{\lambda(s): s_0 < s < t_0\} \subset \{\lambda(s): s < t_0\}$ 'dır. Buradan

$$\bigwedge_{s_0<s<t_0} \lambda(s) \leq \bigvee_{s<t_0} \lambda(s) = \lambda(t_0-)$$

dır. O halde

$$\bigwedge_{s_0<s<t_0} \lambda(s) \leq \lambda(t_0-)$$

dır. λ artan olduğundan

$$\lambda(s_0+) = \bigwedge_{s_0<s} \lambda(s) = \bigwedge_{s_0<s<t_0} \lambda(s) \leq \lambda(t_0-)$$

dır. Buradan $\lambda(s_0+) \leq \lambda(t_0-)$ 'dır. (15)'den $\mu(s_0+) \not\leq \lambda(t_0-)$ olduğundan $\mu(s_0+) \not\leq \lambda(s_0+)$ 'dır. Buradan $\mu(s_0+) \neq \lambda(s_0+)$ elde edilir. ■

Teorem 2.1.4. ii) ve Teorem 2.1.5. ii)'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.2. $(L,\leq)$ bir tam kafes $\lambda,\mu \in mi_{\mathbb{R}}(L)_{sağ}$ olsun. Bu takdirde,

$$\text{Bir } t_0 \in \mathbb{R} \text{ için } \lambda(t_0-) \neq \mu(t_0-) \Leftrightarrow \text{Bir } s_0 \in \mathbb{R} \text{ için } \lambda(s_0+) \neq \mu(s_0+)$$

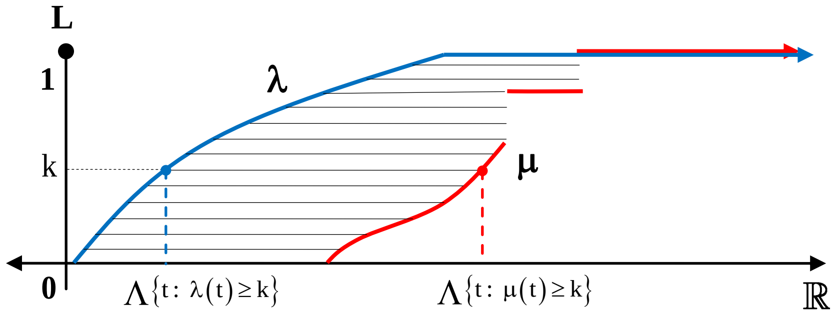
dır.

Teorem 2.1.6. Aşağıda tanımlanan

$$d_{sağ} : \mathbb{R}[L]_{sağ} \, x \mathbb{R}[L]_{sağ} \to [0,+\infty)$$

dönüşümü $\mathbb{R}[L]_{sağ}$ kümesi üzerinde bir (klasik) metriktir:

$$d_{sağ}([\lambda],[\mu]) := \sup\left\{\left|\bigwedge\{t:\ \lambda(t)\geq k\} - \bigwedge\{t:\ \mu(t)\geq k\}\right| : k \in L\setminus\{0\}\right\}.$$



Şekil 5. $\left(\mathbb{R}[L]_{sağ}, d_{sağ}\right)$

İspat.

i) $[\lambda]=[\mu] \Rightarrow d_{sağ}([\lambda],[\mu])=0$ olduğunu gösterelim:

$k \in L\setminus\{0\}$ keyfi ve sabit olsun,

$$t_1 := \bigwedge_{\lambda(t)\geq k} t, \qquad t_2 := \bigwedge_{\mu(t)\geq k} t$$

ve

$$A := \{t : \lambda(t) \geq k\}, \qquad B := \{t : \mu(t) \geq k\},$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\varepsilon > 0$ keyfi ve sabit için $\exists t' \in B \ : t' < t_2 + \varepsilon$ ‘dır. Dolayısıyla

$$\mu(t') \geq k \text{ ve } t' < t_2 + \varepsilon$$

dır. $[\lambda]=[\mu]$ olduğundan $\lambda(t'+) = \mu(t'+)$ ‘dır. μ artan olduğundan $\mu(t') \leq \mu(t'+)$ olup

$$k \le \mu(t') \le \mu(t'+) = \lambda(t'+)$$

dır. Yani $k \le \lambda(t'+)$ ‘dır. Diğer yandan

$$\varepsilon > 0 \text{ için } \exists t^* \in \mathbb{R} : t' < t^* < t_2 + \varepsilon$$

dır. $k \le \lambda(t'+)$ ve λ artan olduğundan

$$k \le \lambda(t'+) = \bigwedge_{s>t'} \lambda(s) \le \lambda(t^*)$$

elde edilir. Dolayısıyla $t^* < t_2 + \varepsilon$ ve $t^* \in A$ elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $t_1 = \bigwedge A \le t_2$ ‘dır. O halde

$$t_1 \le t_2 \tag{16}$$

dır.

Şimdi $t_2 \le t_1$ olduğunu gösterelim:

$\varepsilon > 0$ keyfi ve sabit için $\exists\, t' \in A \;: t' < t_1 + \varepsilon$ ‘dır. Dolayısıyla $\lambda(t') \ge k$ ve $t' < t_1 + \varepsilon$ ‘dır. $[\lambda] = [\mu]$ olduğundan $\lambda(t'+) = \mu(t'+)$ ‘dır. λ artan olduğundan $\lambda(t') \le \lambda(t'+)$ ‘dır. Dolayısıyla

$$k \le \lambda(t') \le \lambda(t'+) = \mu(t'+)$$

dır. Yani $k \le \mu(t'+)$ ‘dır. Diğer yandan

$$\varepsilon > 0 \text{ için } \exists t^* \in \mathbb{R} : t' < t^* < t_1 + \varepsilon$$

dır. $k \le \mu(t'+)$ ve μ artan olduğundan

$$k \le \mu(t'+) = \bigwedge_{s>t'} \mu(s) \le \mu(t^*)$$

elde edilir. Dolayısıyla $t^* < t_1 + \varepsilon$ ve $t^* \in B$ elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $t_2 = \bigwedge B \le t_1$ ‘dır. Yani

$$t_2 \le t_1 \tag{17}$$

dır.

Sonuç olarak (16) ve (17)’den $t_1 = t_2$ ‘dır. $k \in L \setminus \{0\}$ keyfi olduğundan $d_{sağ}([\lambda],[\mu]) = 0$ ‘dır.

Tersine,

$d_{\text{sağ}}\left([\lambda],[\mu]\right)=0 \Rightarrow [\lambda]=[\mu]$ olduğunu gösterelim:

$[\lambda]\neq[\mu]$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\exists t_0 \in \mathbb{R}:\ \lambda(t_0-)\neq\mu(t_0-) \text{ veya } \lambda(t_0+)\neq\mu(t_0+)$$

dır. Sonuç 2.1.2'ye göre,

$$\lambda(t_0+)\neq\mu(t_0+)$$

olduğu kabul edilebilir. O halde

$$a:=\mu(t_0+)=\bigwedge_{s>t_0}\mu(s)$$

olmak üzere

$$a\not\leq\bigwedge_{s>t_0}\lambda(s) \text{ veya } a\not\geq\bigwedge_{s>t_0}\lambda(s)$$

dır. Genelliği bozmadan $a\not\leq\bigwedge_{s>t_0}\lambda(s)$ olduğu kabul edilebilir. O halde,

$$\exists s_0\in\mathbb{R}:\ t_0<s_0 \text{ ve } a\not\leq\lambda(s_0) \tag{18}$$

dır.

$$A:=\{t:\lambda(t)\geq a\} \quad \text{ve} \quad B:=\{t:\mu(t)\geq a\}$$

olsun.

<u>İddia</u>: $\bigwedge B\leq t_0$ 'dır.

Gerçekten,

$$\forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists s'\in\mathbb{R}:\ t_0<s'<t_0+\varepsilon$$

dır. Buradan ve μ artan olduğundan $\mu(s')\geq\bigwedge_{t_0<s}\mu(s)=a$ 'dır. Yani $\mu(s')\geq a$ 'dır. Buradan $s'\in B$ 'dır. $\varepsilon>0$ keyfi olduğundan $\bigwedge B\leq t_0$ 'dır. Hipoteze göre,

$$d_{\text{sağ}}\left([\lambda],[\mu]\right)=\sup\left\{\left|\bigwedge\{t:\ \lambda(t)\geq k\}-\bigwedge\{t:\ \mu(t)\geq k\}\right| : k\in L\setminus\{0\}\right\}=0$$

olduğundan $\bigwedge_{\lambda(t)\geq a} t=\bigwedge_{\mu(t)\geq a} t$ 'dır. Buradan

$$\bigwedge A=\bigwedge B\leq t_0 \quad\Rightarrow\quad \bigwedge A\leq t_0$$

dır. O halde

$$\varepsilon:=s_0-t_0>0 \text{ için } \exists t'\in A:\ t'<t_0+\varepsilon$$

dır. Yani $\lambda(t') \geq a$ ve $t' < s_0$ ‘dır. λ artan olduğundan $a \leq \lambda(t')$ ve $\lambda(t') \leq \lambda(s_0)$ elde edilir. Yani $a \leq \lambda(s_0)$ ‘dır. Bu ise (18) ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır. Buradan $[\lambda] = [\mu]$ elde edilir.

ii) $d_{sağ}([\lambda], [\mu]) = d_{sağ}([\mu], [\lambda])$ olduğu açıktır.

iii) $d_{sağ}([\lambda], [\eta]) \leq d_{sağ}([\lambda], [\mu]) + d_{sağ}([\mu], [\eta])$ olduğunu gösterelim:

$k_0 \in L\ (k_0 \neq 0)$ keyfi verilsin.

$$t_1(k_0) := \bigwedge_{\lambda(t) \geq k_0} t,\quad t_2(k_0) := \bigwedge_{\mu(t) \geq k_0} t,\quad t_3(k_0) := \bigwedge_{\eta(t) \geq k_0} t$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$|t_1(k_0) - t_3(k_0)| \leq |t_1(k_0) - t_2(k_0)| + |t_2(k_0) - t_3(k_0)|$$

dır. Buradan

$$\sup_{\substack{k \in L,\\ k > 0}} |t_1(k) - t_3(k)| \leq \sup_{\substack{k \in L,\\ k > 0}} |t_1(k) - t_2(k)| + \sup_{\substack{k \in L,\\ k > 0}} |t_2(k) - t_3(k)|$$

dır. Sonuç olarak

$$d_{sağ}([\lambda], [\eta]) \leq d_{sağ}([\lambda], [\mu]) + d_{sağ}([\mu], [\eta])$$

elde edilir. ■

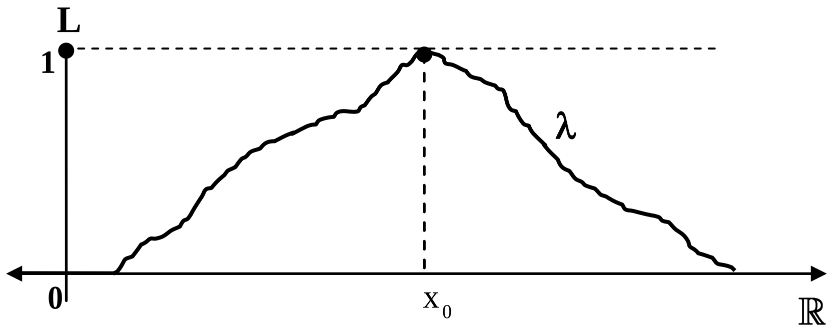
Tanım 2.1.2. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\lambda \in L^{\mathbb{R}}$ ’ye L-fuzzy sayı denir:

1) $\exists x_0 \in \mathbb{R} :\ \lambda(x_0) = 1$,

2) $\forall\, s \leq t \leq x_0$ için $\lambda(s) \leq \lambda(t)$ ve $\bigwedge_{t \leq x_0} \lambda(t) = 0$,

3) $\forall x_0 \leq s \leq t$ için $\lambda(s) \leq \lambda(t)$ ve $\bigwedge_{x_0 \leq t} \lambda(t) = 0$.

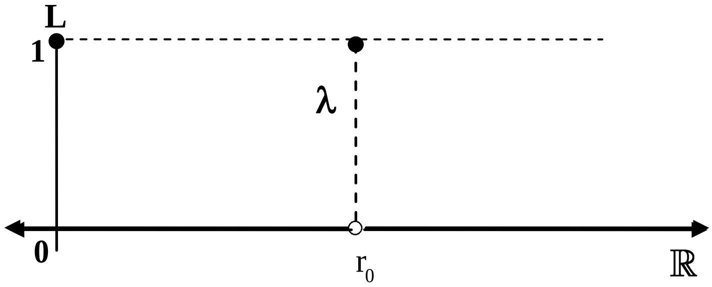
Bu tanımda verilen L-fuzzy sayılar kümesi $F\mathbb{R}[L]$ ile gösterilir.



Şekil 6. $[\lambda] \in F\mathbb{R}[L]$

Örnek 2.1.1. Klasik anlamda verilen bir $r_0 \in \mathbb{R}$ reel sayısı, $F\mathbb{R}[L]$ kümesinde aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1, & x = r_0 \\ 0, & x \neq r_0 \end{cases}.$$



Şekil 7. $r_0 \in F\mathbb{R}[L]$

Bundan sonraki kısımda yazım kolaylığı için $[\lambda]$ yerine λ kullanılacaktır.

Tanım 2.1.3. $\lambda \in F\mathbb{R}[L]$ olsun. Bu takdirde, $\lambda_{-}, \lambda^{-} : \mathbb{R} \to L$ dönüşümleri ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\lambda_{-}(x) := \begin{cases} 1, & x < x_0 \\ \lambda(x), & x_0 \leq x \end{cases}, \qquad \lambda^{-}(x) := \begin{cases} \lambda(x), & x \leq x_0 \\ 1, & x_0 < x \end{cases}.$$

Teorem 2.1.7. $\lambda, \mu \in F\mathbb{R}[L]$ olsun. Bu takdirde

$$\lambda = \mu \Leftrightarrow \lambda_- = \mu_- \text{ ve } \lambda^- = \mu^-$$

dır.

İspat. $"\Rightarrow"$ Aşikardır.

$"\Leftarrow"$ $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ öyle ki $\lambda(x_1) = 1$ ve $\mu(x_2) = 1$ 'dır.

$$\lambda_-(x) := \begin{cases} 1, & x < x_1 \\ \lambda(x), & x_1 \le x \end{cases}, \qquad \lambda^-(x) := \begin{cases} \lambda(x), & x \le x_1 \\ 1, & x_1 < x \end{cases},$$

$$\mu_-(x) := \begin{cases} 1, & x < x_2 \\ \mu(x), & x_2 \le x \end{cases}, \qquad \mu^-(x) := \begin{cases} \mu(x), & x \le x_2 \\ 1, & x_2 < x \end{cases}$$

olmak üzere

$$\lambda_-(x) = \mu_-(x) \Rightarrow x_1 \le x \text{ olan her } x \in \mathbb{R} \text{ için } \lambda(x) = \mu(x), \tag{19}$$

$$\lambda^-(x) = \mu^-(x) \Rightarrow x \le x_1 \text{ olan her } x \in \mathbb{R} \text{ için } \lambda(x) = \mu(x) \tag{20}$$

dır. (19) ve (20)'den $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\lambda(x) = \mu(x)$ 'dır. Buradan $\lambda = \mu$ elde edilir. ■

Teorem 2.1.8. $\lambda, \mu \in F\mathbb{R}[L]$ olsun.

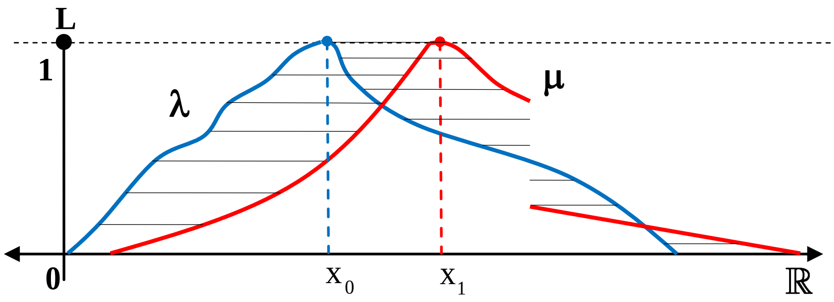
$$d_{sol}(\lambda_-, \mu_-) = \sup\left\{\left|\bigvee\{t : \lambda_-(t) \ge k\} - \bigvee\{t : \mu_-(t) \ge k\}\right| : k \in L \setminus \{0\}\right\}$$

$$d_{sağ}(\lambda^-, \mu^-) = \sup\left\{\left|\bigwedge\{t : \lambda^-(t) \ge k\} - \bigwedge\{t : \mu^-(t) \ge k\}\right| : k \in L \setminus \{0\}\right\}$$

olmak üzere (d_{sol} ve $d_{sağ}$ sırasıyla $\mathbb{R}[L]_{sol}$ ve $\mathbb{R}[L]_{sağ}$ kümeleri üzerinde birer metriktir)

$$d(\lambda, \mu) := \text{maks}\left\{d_{sol}(\lambda_-, \mu_-), d_{sağ}(\lambda^-, \mu^-)\right\}$$

ile tanımlanan d, $F\mathbb{R}[L]$ üzerinde bir metriktir.



Şekil 8. $\left(F\mathbb{R}[L],d\right)$

İspat.

i) $d(\lambda,\mu)=0 \Leftrightarrow \lambda=\mu$ olduğunu gösterelim:

"$\Rightarrow$" $d(\lambda,\mu)=0$ olsun. Tanımdan dolayı

$$d_{sol}(\lambda_-,\mu_-)=0 \text{ ve } d_{sağ}(\lambda^-,\mu^-)=0$$

dır. d_{sol} ve $d_{sağ}$ birer metrik olduğundan $\lambda_-=\mu_-$ ve $\lambda^-=\mu^-$'dir. Teorem 2.1.7'den $\lambda=\mu$'dir.

"$\Leftarrow$" $\lambda=\mu$ olsun. Teorem 2.1.7'den $\lambda_-=\mu_-$ ve $\lambda^-=\mu^-$'dir. d_{sol} ve $d_{sağ}$ birer metrik olduğundan

$$d_{sol}(\lambda_-,\mu_-)=0 \text{ ve } d_{sağ}(\lambda^-,\mu^-)=0$$

dır. Buradan

$$d(\lambda,\mu)=\text{maks}\left\{d_{sol}(\lambda_-,\mu_-),d_{sağ}(\lambda^-,\mu^-)\right\}=0$$

yani $d(\lambda,\mu)=0$'dır.

ii) $d(\lambda,\mu)=d(\mu,\lambda)$'dır.

iii) $d(\lambda,\eta)\le d(\lambda,\mu)+d(\mu,\eta)$ olduğunu gösterelim:

$$d(\lambda,\eta)=\text{maks}\left\{d_{sol}(\lambda_-,\eta_-),d_{sağ}(\lambda^-,\eta^-)\right\}$$

olmak üzere genelliği bozmadan

$$d_{sol}(\lambda_-,\eta_-)>d_{sağ}(\lambda^-,\eta^-)$$

alınabilir ve d_{sol} 'un metrik olduğu göz önüne alınırsa,

$$d(\lambda,\eta)=d_{sol}(\lambda_-,\eta_-)\le d_{sol}(\lambda_-,\mu_-)+d_{sol}(\mu_-,\eta_-)\le d(\lambda,\mu)+d(\mu,\eta)$$

olduğundan $d(\lambda,\eta)\le d(\lambda,\mu)+d(\mu,\eta)$ 'dır.

Sonuç olarak, ($F\mathbb{R}[L]$,d) bir metrik uzaydır. Bu d metriğinin $F\mathbb{R}[L]$ kümesi üzerinde ürettiği topoloji

$$\tau_d=\{G\subset F\mathbb{R}[L] : \forall x\in G \text{ için } \exists\varepsilon>0 \text{ öyle ki } K(x,\varepsilon)\subset G\}$$

dır. ■

Özel olarak, $I=[0,1]$ tam olduğundan L tam kafesi yerine $I=[0,1]$ alınabilir. Bu durumda Teorem 2.1.3'de tanımlanan d_{sol}, Teorem 2.1.6'de tanımlanan $d_{sağ}$ ve Teorem 2.1.8'de tanımlanan d, metrik koşullarını sağlar.

2.2. L-Fuzzy Reel Doğru Üzerinde Tamlık

Bu kısımda, kısım 2.1'de $F\mathbb{R}[L]$ üzerinde oluşturulan d metriğine göre, $(L,\le)$ tam kafesi, zincir ve her elemanı kompakt olması durumunda, $(F\mathbb{R}[L],d)$ metrik uzayının tam olduğu gösterilmiştir.

Teorem 2.2.1. $(L,\le)$ tam kafesi, zincir ve her elemanı kompakt olsun. Bu takdirde, $(F\mathbb{R}[L],d)$ metrik uzayı tamdır.

İspat. $(F\mathbb{R}[L],d)$ metrik uzayında $(\lambda_n)\subset F\mathbb{R}[L]$ bir Cauchy dizisi olsun.

$$\exists(\lambda_0)\in F\mathbb{R}[L] : [\,\forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists n_0\in\mathbb{N} : \forall n\ge n_0 \text{ için } d(\lambda_n,\lambda_0)<\varepsilon\,]$$

olduğunu gösterelim:

Burada

$$d(\lambda_n,\ \lambda_0)=\text{maks}\left\{d_{sol}\left((\lambda_n)_-,(\lambda_0)_-\right),d_{sağ}\left((\lambda_n)^-,(\lambda_0)^-\right)\right\}$$

olduğu Teorem 2.1.8'den bilinmektedir. Bu durumda

$$d_{sol}\left((\lambda_n)_-,(\lambda_0)_-\right)<\varepsilon \text{ ve } d_{sağ}\left((\lambda_n)^-,(\lambda_0)^-\right)<\varepsilon$$

olduğunu göstermek yeterlidir:

Öncelikle $d_{sol}\left((\lambda_n)_-,(\lambda_0)_-\right)<\varepsilon$ olduğunu gösterelim:

$k\in L\setminus\{0\}$ ve $n\in\mathbb{N}$ için

$$\left(t_n^k\right)_- := \bigvee\left\{t:\ (\lambda_n)_-(t)\geq k\right\},\ \left(t_n^k\right)^- := \bigwedge\left\{t:\ (\lambda_n)^-(t)\geq k\right\}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\forall k\in L\setminus\{0\} \text{ için } \left(t_n^k\right)_- \subset\mathbb{R} \text{ ve } \left(t_n^k\right)^- \subset\mathbb{R}$$

de Cauchy dizileridir.

Gerçekten $k_0\in L\setminus\{0\}$ ve $\varepsilon>0$ keyfi olsun. $(\lambda_n)\subset F\mathbb{R}[L]$ bir Cauchy dizisi olduğundan $\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n,m\geq n_0$ için $d(\lambda_n,\lambda_m)<\varepsilon$ dır. Yani

$$d(\lambda_n,\lambda_m)=\text{maks}\left\{d_{sol}\left((\lambda_n)_-,(\lambda_m)_-\right),d_{sağ}\left((\lambda_n)^-,(\lambda_m)^-\right)\right\}<\varepsilon$$

dır. Buradan

$$d_{sol}\left((\lambda_n)_-,(\lambda_0)_-\right)<\varepsilon \text{ ve } d_{sağ}\left((\lambda_n)^-,(\lambda_0)^-\right)<\varepsilon$$

dır. O halde

$$d_{sol}\left((\lambda_n)_-,(\lambda_m)_-\right):=\sup\left\{\left|\bigvee\left\{t:(\lambda_n)_-(t)\geq k\right\}-\bigvee\left\{t:(\lambda_m)_-(t)\geq k\right\}\right|:k\in L\setminus\{0\}\right\}<\varepsilon$$

olduğundan her hangi bir $k_0\in L\setminus\{0\}$ sabit için

$$\left|\bigvee\left\{t:(\lambda_n)_-(t)\geq k_0\right\}-\bigvee\left\{t:(\lambda_m)_-(t)\geq k_0\right\}\right|<\varepsilon$$

dır. Yani

$$\forall n,m\geq n_0 \text{ için } \left|\left(t_n^{k_0}\right)_- - \left(t_m^{k_0}\right)_-\right|<\varepsilon$$

dır. Buradan $\left(t_n^{k_0}\right)_- \subset\mathbb{R}$ bir Cauchy dizisidir.

Diğer yandan

$$d_{sağ}\left((\lambda_n)^-,(\lambda_m)^-\right):=\sup\left\{\left|\bigwedge\left\{t:(\lambda_n)^-(t)\geq k\right\}-\bigwedge\left\{t:(\lambda_m)^-(t)\geq k\right\}\right|:k\in L\setminus\{0\}\right\}<\varepsilon$$

olduğundan her hangi bir $k_0\in L\setminus\{0\}$ sabit için

$$\left|\bigwedge\left\{t:(\lambda_n)^-(t)\geq k_0\right\}-\bigwedge\left\{t:(\lambda_m)^-(t)\geq k_0\right\}\right|<\varepsilon$$

dır. Buradan

$$\forall n,m\geq n_0 \text{ için } \left|\left(t_n^{k_0}\right)^- -\left(t_m^{k_0}\right)^-\right|<\varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $\left(t_n^{k_0}\right)^-\subset\mathbb{R}$ 'nin bir Cauchy dizisi oluğunu gösterir.

$\mathbb{R}$ tam olduğundan,

$$\exists\left(t_0^{k_0}\right)_-\in\mathbb{R} \text{ ve } \left(t_0^{k_0}\right)^-\in\mathbb{R} : \lim_{n\to\infty}\left(t_n^{k_0}\right)_-=\left(t_0^{k_0}\right)_- \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\left(t_n^{k_0}\right)^-=\left(t_0^{k_0}\right)^-$$

dır. Yani $k_0\in L\setminus\{0\}$ keyfi olduğundan

$$\text{her } k_0\in L\setminus\{0\} \text{ için } \left(t_0^{k_0}\right)_-\in\mathbb{R} \text{ ve } \left(t_0^{k_0}\right)^-\in\mathbb{R}$$

mevcuttur.

$$(\lambda_0)_-(t):=\bigvee\left\{k:\ t\leq\left(t_0^k\right)_-,\ k\in L\setminus\{0\}\right\},$$

$$(\lambda_0)^-(t):=\bigvee\left\{k:\ \left(t_0^k\right)^-\leq t,\ k\in L\setminus\{0\}\right\}$$

ve

$$\lambda_0(t):=(\lambda_0)_-(t)\wedge(\lambda_0)^-(t)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

<u>İddia</u>:

i) $\lambda_0(t)\in F\mathbb{R}[L]$,

ii) $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda_0$,

iii) λ_0 tek türlüdür.

Gerçekten,

i) a) $\exists x_0\in\mathbb{R} : \lambda_0(x_0)=1$'dır.

b) $(\lambda_0)_-$ azalan ve $\bigwedge_{t\in R}(\lambda_0)_-(t)=0$,

$$\left(\lambda_0\right)^- \text{ artan ve } \bigwedge_{t\in R}\left(\lambda_0\right)^-(t)=0$$

olduğunu gösterelim:

İddia'nın ispatını yapmak için aşağıdaki teoremlere ihtiyaç vardır:

Teorem 2.2.2. $(L,\le)$ bir tam kafes k', $k_1, k_2 \in L\setminus\{0\}$ ve $k_1 \le k_2$ olsun. Bu takdirde,

a) $\left(\lambda_0\right)_-\left(\left(t_0^{k'}\right)_-\right)\ge k'$,

b) $\left(\lambda_0\right)^-\left(\left(t_0^{k'}\right)^-\right)\ge k'$,

c) $\left(t_0^{k_2}\right)_- \le \left(t_0^{k_1}\right)_-$,

d) $\left(t_0^{k_1}\right)^- \le \left(t_0^{k_2}\right)^-$

dır.

İspat.

a) $\left(\lambda_0\right)_-(t) := \bigvee\left\{k:\ t\le\left(t_0^{k}\right)_-,\ k\in L\setminus\{0\}\right\}$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$k'\in\left\{k:\ \left(t_0^{k'}\right)_- \le \left(t_0^{k}\right)_-,\ k\in L\setminus\{0\}\right\}$$

olduğundan

$$\left(\lambda_0\right)_-\left(\left(t_0^{k'}\right)_-\right) := \bigvee\left\{k:\ \left(t_0^{k'}\right)_- \le \left(t_0^{k}\right)_-,\ k\in L\setminus\{0\}\right\}\ge k'$$

dır. Buradan $\left(\lambda_0\right)_-\left(\left(t_0^{k'}\right)_-\right)\ge k'$ elde edilir.

b) $\left(\lambda_0\right)^-(t) := \bigvee\left\{k:\ \left(t_0^{k}\right)^- \le t,\ k\in L\setminus\{0\}\right\}$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$k'\in\left\{k:\ \left(t_0^{k}\right)^- \le \left(t_0^{k'}\right)^-,\ k\in L\setminus\{0\}\right\}$$

olduğundan

$$\left(\lambda_0\right)^-\left(\left(t_0^{k'}\right)^-\right) := \bigvee\left\{k:\ \left(t_0^{k}\right)^- \le \left(t_0^{k'}\right)^-,\ k\in L\setminus\{0\}\right\}\ge k'$$

dır. Buradan

$$(\lambda_0)^-\left(\left(t_0^{k'}\right)^-\right) \geq k'$$

elde edilir.

c) $k_1, k_2 \in L \setminus \{0\}$ ve $k_1 \leq k_2$ olsun. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(t_n^{k_2}\right)_- \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left(t_n^{k_1}\right)_-$ olduğunu gösterelim:

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left\{t : (\lambda_n)_-(t) \geq k_2\right\} \subset \left\{t : (\lambda_n)_-(t) \geq k_1\right\}$

dır. Buradan

$$\left(t_n^{k_2}\right)_- = \bigvee\left\{t : (\lambda_n)_-(t) \geq k_2\right\} \leq \bigvee\left\{t : (\lambda_n)_-(t) \geq k_1\right\} = \left(t_n^{k_1}\right)_-$$

dır. Dolayısıyla $\left(t_n^{k_2}\right)_- \leq \left(t_n^{k_1}\right)_-$ elde edilir. Buradan $\lim\limits_{n\to\infty}\left(t_n^{k_2}\right)_- \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left(t_n^{k_1}\right)_-$ dır. Sonuç olarak $\left(t_0^{k_2}\right)_- \leq \left(t_0^{k_1}\right)_-$ 'dır.

d) $k_1, k_2 \in L \setminus \{0\}$ ve $k_1 \leq k_2$ olsun. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(t_n^{k_1}\right)^- \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left(t_n^{k_2}\right)^-$ olduğunu gösterelim:

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left\{t : (\lambda_n)^-(t) \geq k_1\right\} \supset \left\{t : (\lambda_n)^-(t) \geq k_2\right\}$

olduğu açıktır. Buradan

$$\left(t_n^{k_1}\right)^- = \bigwedge\left\{t : (\lambda_n)^-(t) \geq k_1\right\} \leq \bigwedge\left\{t : (\lambda_n)^-(t) \geq k_2\right\} = \left(t_n^{k_2}\right)^-$$

dır. Dolayısıyla $\left(t_n^{k_1}\right)^- \leq \left(t_n^{k_2}\right)^-$ elde edilir. Buradan $\lim\limits_{n\to\infty}\left(t_n^{k_1}\right)^- \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left(t_n^{k_2}\right)^-$ 'dır. Sonuç olarak $\left(t_0^{k_1}\right)^- \leq \left(t_0^{k_2}\right)^-$ elde edilir. ■

Teorem 2.2.3. $(L, \leq)$ bir tam kafes, $k' \in L \setminus \{0\}$ olsun. Bu takdirde

a) $\bigvee\left\{t : (\lambda_0)_-(t) \geq k'\right\} = \left(t_0^{k'}\right)_-$,

b) $\bigwedge\left\{t : (\lambda_0)^-(t) \geq k'\right\} = \left(t_0^{k'}\right)^-$

dır.

İspat.

a) $\bigvee\left\{t:\ (\lambda_0)_-(t)\geq k'\right\}=\left(t_0^{k'}\right)_-$ olduğunu gösterelim:

$k'\in L\setminus\{0\}$ keyfi için Teorem 2.2.2'den $(\lambda_0)_-\left(\left(t_0^{k'}\right)_-\right)\geq k'$ olduğundan

$$\left(t_0^{k'}\right)_-\in\left\{t:\ (\lambda_0)_-(t)\geq k'\right\}$$

dır. Buradan

$$\bigvee\left\{t:\ (\lambda_0)_-(t)\geq k'\right\}\geq\left(t_0^{k'}\right)_- \tag{21}$$

elde edilir.

Tersine olarak, $(\lambda_0)_-(t)\geq k'$ koşulunu sağlayan her $t\in\mathbb{R}$ için $t\leq\left(t_0^{k'}\right)_-$ olduğunu gösterelim:

$$(\lambda_0)_-(t):=\bigvee\left\{k:\ t\leq\left(t_0^{k}\right)_-,\ k\in L\setminus\{0\}\right\}\geq k'\ \Rightarrow\ \exists k_1\in L\setminus\{0\}\ :\ t\leq\left(t_0^{k_1}\right)_-\ \text{ve}\ k_1\geq k'$$

dır. Teorem 2.2.2'den

$$t\leq\left(t_0^{k_1}\right)_-\ \text{ve}\ \left(t_0^{k_1}\right)_-\leq\left(t_0^{k'}\right)_-\Rightarrow t\leq\left(t_0^{k'}\right)_- \tag{22}$$

dır. (21) ve (22)'den $\bigvee\left\{t:\ (\lambda_0)_-(t)\geq k'\right\}=\left(t_0^{k'}\right)_-$ 'dır.

b) $\bigwedge\left\{t:\ (\lambda_0)^-(t)\geq k'\right\}=\left(t_0^{k'}\right)^-$ olduğunu gösterelim:

$k'\in L\setminus\{0\}$ keyfi için ve Teorem 2.2.2'den $(\lambda_0)^-\left(\left(t_0^{k'}\right)^-\right)\geq k'$ olduğundan $\left(t_0^{k'}\right)^-\in\left\{t:\ (\lambda_0)^-(t)\geq k'\right\}$ 'dır. Buradan

$$\bigwedge\left\{t:\ (\lambda_0)^-(t)\geq k'\right\}\leq\left(t_0^{k'}\right)^- \tag{23}$$

elde edilir.

Tersine olarak, $(\lambda_0)^-(t)\geq k'$ koşulunu sağlayan her $t\in\mathbb{R}$ için $t\geq\left(t_0^{k'}\right)^-$ olduğunu gösterelim:

$$(\lambda_0)^-(t):=\bigvee\left\{k:\ \left(t_0^{k}\right)^-\leq t,\ k\in L\setminus\{0\}\right\}\geq k'\ \Rightarrow\ \exists k_1\in L\setminus\{0\}\ :\ \left(t_0^{k_1}\right)^-\leq t\ \text{ve}\ k'\leq k_1$$

dır. Teorem 2.2.2'den

$$\left(t_0^{k'}\right)^-\leq\left(t_0^{k_1}\right)^-\ \text{ve}\ \left(t_0^{k_1}\right)^-\leq t\ \Rightarrow\left(t_0^{k'}\right)^-\leq t \tag{24}$$

dır. (23) ve (24)'den

$$\bigwedge\left\{t:\ (\lambda_0)^-(t)\geq k'\right\}=\left(t_0^{k'}\right)^-$$

elde edilir. ■

Şimdi İddia'nın ispatını yapalım:

i) a) $(\lambda_n)\subset F\mathbb{R}[L]$ olduğundan $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\exists x_n\in\mathbb{R}\ :\ \lambda_n(x_n)=1$'dır. Bu durumda

$$\lambda_n(x_n)=(\lambda_n)_-(x_n)\wedge(\lambda_n)^-(x_n)=1\ \Rightarrow\ (\lambda_n)_-(x_n)=1 \text{ ve } (\lambda_n)^-(x_n)=1$$

$$\Rightarrow\ \forall n\in\mathbb{N}\ \text{için}\ \left(t_n^1\right)^-\leq x_n\leq\left(t_n^1\right)_-\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left(t_n^1\right)^-\leq\lim_{n\to\infty}\left(t_n^1\right)_-\ \Rightarrow\ \left(t_0^1\right)^-\leq\left(t_0^1\right)_-$$

elde edilir. Teorem 2.2.2'den, $\left(t_0^1\right)^-\leq x_0\leq\left(t_0^1\right)_-$ olan her $x_0\in\mathbb{R}$ için (Böyle bir x_0 mevcuttur. Çünkü $x_0=\left(t_0^1\right)_-$ alınabilir.) ve $(\lambda_0)^-$ artan olduğundan,

$$1\leq(\lambda_0)^-\left(\left(t_0^1\right)^-\right)\leq(\lambda_0)^-(x_0)\ \Rightarrow\ (\lambda_0)^-(x_0)=1$$

dır. $(\lambda_0)_-$ azalan olduğundan

$$1\leq(\lambda_0)_-\left(\left(t_0^1\right)_-\right)\leq(\lambda_0)_-(x_0)\ \Rightarrow\ (\lambda_0)_-(x_0)=1$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda_0(x_0)=(\lambda_0)_-(x_0)\wedge(\lambda_0)^-(x_0)=1\wedge1=1$$

dır. Yani, $\lambda_0(x_0)=1$ elde edilir.

b) $(\lambda_0)_-$ azalan ve $(\lambda_0)^-$ artan olduğu aşikârdır.

$\bigwedge_{t\in\mathbb{R}}(\lambda_0)_-(t)=0$ ve $\bigwedge_{t\in\mathbb{R}}(\lambda_0)^-(t)=0$ olduğunu gösterelim:

Varsayalım ki $\bigwedge_{t\in\mathbb{R}}(\lambda_0)_-(t):=c>0$ olsun.

$c\in L\setminus\{0\}$ olduğundan $\left(t_0^c\right)_-\in\mathbb{R}$'dır. $\left(t_0^c\right)_-<t^*$ olsun.

$$(\lambda_0)_-(t^*)=\bigvee\left\{k:\ t^*\leq\left(t_0^k\right)_-,\ k\in L\setminus\{0\}\right\}\geq c\ \Rightarrow\ \exists k'\in L\setminus\{0\}\ :\ t^*\leq\left(t_0^{k'}\right)_-\ \text{ve}\ k'\geq c$$

dır. Bu durumda Teorem 2.2.2'den $\left(t_0^{k'}\right)_-\leq\left(t_0^c\right)_-$'dır. Buradan,

$$t^* \le \left(t_0^{k'}\right)_- \text{ ve } \left(t_0^{k'}\right)_- \le \left(t_0^{c}\right)_- \Rightarrow t^* \le \left(t_0^{c}\right)_-$$

elde edilir ki bu t^*'ın seçimiyle çelişir. O halde varsayım yanlıştır. Bunun sonucu olarak

$$\bigwedge_{t\in\mathbb{R}} \left(\lambda_0\right)_- (t) = 0$$

olmalıdır.

Varsayalım ki $\bigwedge_{t\in\mathbb{R}} \left(\lambda_0\right)^- (t) := c > 0$ olsun.

$t^* < \left(t_0^{c}\right)^-$ olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\left(\lambda_0\right)^- (t^*) = \bigvee\left\{k : \left(t_0^{k}\right)^- \le t^*,\ k \in L\setminus\{0\}\right\} \ge c$$

dır. Buradan $\exists k' \in L\setminus\{0\}$: $\left(t_0^{k'}\right)^- \le t^*$ ve $c \le k'$ 'dır. Bu durumda Teorem 2.2.2'den $\left(t_0^{c}\right)^- \le \left(t_0^{k'}\right)^-$'dır. Buradan

$$\left(t_0^{k'}\right)^- \le t^* \text{ ve } \left(t_0^{c}\right)^- \le \left(t_0^{k'}\right)^- \Rightarrow \left(t_0^{c}\right)^- \le t^*$$

elde edilir ki bu t^*'ın seçimiyle çelişir. O halde varsayım yanlıştır. Bunun sonucu olarak,

$$\bigwedge_{t\in\mathbb{R}} \left(\lambda_0\right)^- (t) = 0$$

elde edilir.

Sonuç olarak a) ve b)'den $\lambda_0 \in F\mathbb{R}\left[L\right]$'dır.

ii) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$ olduğunu gösterelim:

Şimdi $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0$ için $d\left(\lambda_n, \lambda_0\right) < \varepsilon$ olduğunu gösterelim:

Varsayalım ki

$$\exists\varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \exists n' \ge n : d\left(\lambda_{n'}, \lambda_0\right) \ge \varepsilon_0$$

olsun. Buradan

$$d\left(\lambda_{n'},\lambda_0\right) = \text{maks}\left\{d_{sol}\left(\left(\lambda_{n'}\right)_-, \left(\lambda_0\right)_-\right), d_{sağ}\left(\left(\lambda_{n'}\right)^-, \left(\lambda_0\right)^-\right)\right\} \ge \varepsilon_0$$

dır. Bu durumda

$$d_{sol}\left(\left(\lambda_{n'}\right)_-, \left(\lambda_0\right)_-\right) \ge \varepsilon_0 \text{ veya } d_{sağ}\left(\left(\lambda_{n'}\right)^-, \left(\lambda_0\right)^-\right) \ge \varepsilon_0$$

dır. Eğer $d_{sol}\left(\left(\lambda_{n'}\right)_-, \left(\lambda_0\right)_-\right) \ge \varepsilon_0$ ise

$$d_{sol}\left((\lambda_{n'})_-,(\lambda_0)_-\right)=\sup\left\{\left|\bigvee\{t:(\lambda_{n'})_-(t)\geq k\}-\bigvee\{t:(\lambda_0)_-(t)\geq k\}\right|:k\in L\setminus\{0\}\right\}\geq\varepsilon_0$$

dır. O halde $0<\varepsilon'<\varepsilon_0$ keyfi ve sabit için

$$\exists k'\in L\setminus\{0\}\ :\ \left|\bigvee\{t:(\lambda_{n'})_-(t)\geq k'\}-\bigvee\{t:(\lambda_0)_-(t)\geq k'\}\right|>\varepsilon_0-\varepsilon'>0$$

dır. $r_0:=\varepsilon_0-\varepsilon'>0$ olarak tanımlansın. Bu durumda Teorem 2.2.3'den

$$\left|\left(t_{n'}^{k'}\right)_- - \left(t_0^{k'}\right)_-\right|>r_0 \tag{25}$$

dır. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(t_n^{k'}\right)_-=\left(t_0^{k'}\right)_-$ olduğundan $r_0>0$ için $\exists n_1\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_1$ için $\left|\left(t_n^{k'}\right)_- - \left(t_0^{k'}\right)_-\right|<r_0$

olur ki bu (25) ile çelişir. Eğer $d_{sağ}\left((\lambda_{n'})^-,(\lambda_0)^-\right)\geq\varepsilon_0$ ise

$$d_{sağ}\left((\lambda_{n'})^-,(\lambda_0)^-\right)=\sup\left\{\left|\bigwedge\{t:(\lambda_{n'})^-(t)\geq k\}-\bigwedge\{t:(\lambda_0)^-(t)\geq k\}\right|:k\in L\setminus\{0\}\right\}\geq\varepsilon_0$$

dır. O halde $0<\varepsilon'<\varepsilon_0$ keyfi ve sabit için

$$\exists k'\in L\setminus\{0\}\ :\ \left|\bigwedge\{t:(\lambda_{n'})^-(t)\geq k'\}-\bigwedge\{t:(\lambda_0)^-(t)\geq k'\}\right|>\varepsilon_0-\varepsilon'>0$$

dır. $r_0:=\varepsilon_0-\varepsilon'>0$ olarak tanımlansın. Bu durumda Teorem 2.2.3'den

$$\left|\left(t_{n'}^{k'}\right)^- - \left(t_0^{k'}\right)^-\right|>r_0 \tag{26}$$

dır.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(t_n^{k'}\right)^-=\left(t_0^{k'}\right)^-$ olduğundan $r_0>0$ için, $\exists n_1\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_1$ için $\left|\left(t_n^{k'}\right)^- - \left(t_0^{k'}\right)^-\right|<r_0$

olur ki bu (26) ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır. Buradan, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda_0$ elde edilir.

iii) $(F\mathbb{R}[L],d)$ metrik uzay olduğundan $\lambda_0\in F\mathbb{R}[L]$ tek türlü belirlidir.

Sonuç olarak i), ii) ve iii)'den, L tam kafesi, zincir ve her elemanı kompakt olması durumunda, $(F\mathbb{R}[L],d)$ tam metrik uzaydır. ■

Uyarı 2.2.1. Teorem 2.2.1'de L yerine $I=[0,1]$ alınamaz. Çünkü $I=[0,1]$ aralığının her elemanı kompakt değildir.

3. İRDELEME

Bu çalışmada amacımız, $(L,\leq)$ tam kafes olmak üzere, L-fuzzy reel doğrusu üzerinde bir metrik tanımlamak ve bu metriğe göre tamlığı incelemektir.

$(L,\leq)$ tam kafes olmak üzere [28]'de tanımlanan $\mathbb{R}[L]_{sol}$ fuzzy reel sayılar üzerinde d_{sol} metriği oluşturulmuştur. Buna paralel olarak $\mathbb{R}[L]_{sağ}$ fuzzy reel sayılar tanımlanarak bu küme üzerinde $d_{sağ}$ metriği oluşturulmuş ve bunlar kullanılarak L-fuzzy reel doğru üzerinde bir d metriği tanımlanmıştır.

Ayrıca $(L,\leq)$ tam kafesi, zincir ve her elemanı kompakt olması durumunda, tanımladığımız metriğe göre L- fuzzy reel doğrunun tam olduğu gösterilmiştir.

4. SONUÇLAR

Yaptığımız çalışmada elde edilen başlıca sonuçlar şunlardır:

1) $(L,\leq)$ bir tam kafes $\lambda,\mu\in md_{\mathbb{R}}(L)_{sol}$ olsun. Bu takdirde,

Bir $t_0\in\mathbb{R}$ için $\lambda(t_0-)\neq\mu(t_0-)\Leftrightarrow$ Bir $s_0\in\mathbb{R}$ için $\lambda(s_0+)\neq\mu(s_0+)$

olduğu gösterilmiştir.

2) $(L,\leq)$ bir tam kafes $\lambda,\mu\in mi_{\mathbb{R}}(L)_{sağ}$ olsun. Bu takdirde,

Bir $t_0\in\mathbb{R}$ için $\lambda(t_0-)\neq\mu(t_0-)\Leftrightarrow$ Bir $s_0\in\mathbb{R}$ için $\lambda(s_0+)\neq\mu(s_0+)$

olduğu gösterilmiştir.

3) $d_{sol}([\lambda],[\mu])=\sup\left\{\left|\bigvee\{t:\ \lambda(t)\geq k\}-\bigvee\{t:\ \mu(t)\geq k\}\right|\ :\ k\in L\setminus\{0\}\right\}$ 'un $\mathbb{R}[L]_{sol}$ kümesi üzerinde bir metrik olduğu gösterilmiştir.

4) $d_{sağ}([\lambda],[\mu])=\sup\left\{\left|\bigwedge\{t:\ \lambda(t)\geq k\}-\bigwedge\{t:\ \mu(t)\geq k\}\right|\ :\ k\in L\setminus\{0\}\right\}$ 'ın $\mathbb{R}[L]_{sağ}$ kümesi üzerinde bir metrik olduğu gösterilmiştir.

5) $d(\lambda,\mu)=\text{maks}\left\{d_{sol}(\lambda_-,\mu_-),d_{sağ}(\lambda^-,\mu^-)\right\}$ 'nin L-fuzzy reel doğru üzerinde bir metrik olduğu gösterilmiştir.

6) $(L,\leq)$ bir tam kafes k', $k_1,k_2\in L\setminus\{0\}$ ve $k_1\leq k_2$ olsun. Bu takdirde

a) $(\lambda_0)_-\left(\left(t_0^{k'}\right)_-\right)\geq k'$,

b) $(\lambda_0)^-\left(\left(t_0^{k'}\right)^-\right)\geq k'$,

c) $\left(t_0^{k_2}\right)_-\leq\left(t_0^{k_1}\right)_-$,

d) $\left(t_0^{k_1}\right)^- \le \left(t_0^{k_2}\right)^-$

olduğu gösterilmiştir.

7) $k' \in L \setminus \{0\}$ keyfi için

a) $\bigvee\left\{t : (\lambda_0)_-(t) \ge k'\right\} = \left(t_0^{k'}\right)_-$,

b) $\bigwedge\left\{t : (\lambda_0)^-(t) \ge k'\right\} = \left(t_0^{k'}\right)^-$

olduğu gösterilmiştir.

8) $(L, \le)$ tam kafesi, zincir ve her elemanı kompakt olmak üzere, $(F\mathbb{R}[L], d)$ metrik uzayının tam olduğu gösterilmiştir.

5. ÖNERİLER

1. $(L, \leq)$'nin tam kafes olması durumunda $(F\mathbb{R}[L], d)$ metrik uzayının tamlığı araştırılabilir.
2. $F\mathbb{R}[L]$ üzerinde oluşturulan d metriğinin ürettiği τ_d topolojisi, [28]'de verilen topoloji ile karşılaştırılabilir.
3. $L = [0,1]$ olması durumunda d_{sol} ve $d_{sağ}$ metrikleri $\mathbb{R}$ üzerinde bilinen hangi topolojilerle özdeş olduğu araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Abbas, S.E. ve Aygün, H., Intuitionistic Fuzzy Semiregularization Spaces, Information Sciences, 176, 6 (2006) 745-757.

2. Adibi, H., Cho, Y.J., O'Regan, D. ve Saadati, R., Common Fixed Point Theorems in L-Fuzzy Metric Spaces, Applied Mathematics and Computation, 182 (2006) 820–828.

3. Aygün H., Warner M.W. ve Kudri S.R.T., Completely Induced *L*-Fuzzy Topological Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 103, 3 (1999) 513-523.

4. Aygün H., A-Compactness in L-Fuzzy Topological Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 116, 3, (2000), 317-324.

5. Aygün, H., Bural, A.A. ve Kudri, S.R.T., Fuzzy Inverse Compactness, Hindawi Publishing Corporation, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Accepted 14 January 2008.

6. Badard, R., Comparison Of Topological And Uniform Structures For Fuzzy Numbers and the Fixed Point Problem, Fuzzy Sets and Systems, 21 (1987) 211–220.

7. Birkhoff, G., Lattice Theory, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1940.

8. Brown, L.M., Ertürk, R. ve Dost, Ş., Ditopological Texture Spaces and Fuzzy Topology, II.Topological Considerations, Fuzzy Sets and Systems, 147 (2004) 201–231

9. Bülbül, A., Genel Topoloji, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, 2004.

10. Chang, C.L., Fuzzy Topological Spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 24 (1968) 182-190.

11. Cho, Y.J., Pathak, H.K., Kang, S.M. ve Jung, J.S., Common Fixed Points Of Compatible Maps Of Type (B) On Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 93 (1998) 99–111.

12. Deng, Z., Fuzzy Pseudo-Metric Spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 86 (1982) 74–95.

13. Erceg, M.A., Metric Spaces in Fuzzy Set Theory, Journal **o**f Mathematical Analysis and Applications, 69 (1979) 205–230.

14. Fang, J.X., On Fixed Point Theorems in Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 46 (1992) 107–113.

15. George, A. ve Veeramani, P., On Some Results in Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 64 (1994) 395–399.

16. George, A. ve Veeramani, P., On Some Results of Analysis for Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 90 (1997) 365–368.

17. Goguen, J., L-Fuzzy Sets, Journal of Mathematical Analysis And Applications, 18 (1967) 145–174.

18. Göhler, S. ve Göhler, W., Fuzzy Reel Numbers, Fuzzy Sets and Systems, 3 (1994) 137–158.

19. Grabiec, M., Fixed Points in Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 27 (1988) 385–389.

20. Gregori, V. ve Romaguera, S., Some Properties of Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 115 (2000) 485–489.

21. Gregori, V. ve Sapena, A., On Fixed-Point Theorems in Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 125 (2002) 245–252.

22. Guangquan, Z., Some Theorems on Limit of Fuzzy Numbers, Busefal, 34 (1988) 54–62.

23. Huong, H.-L. ve Shi, F.-G., L-Fuzzy Numbers and Their Properties, Information Sciences, 178 (2008) 1141-1151.

24. Hutton, B., Normality in Fuzzy Topological Spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 50 (1975) 74–79.

25. Kaleva, O. ve Seikkala, S., On Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 12 (1984) 215–229.

26. Kim, D.S. ve Kim, Y.K., Some Properties of a New Metric on the Space of Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets and Systems, 145 (2004) 395–410.

27. T. Kubiak, On Fuzzy Topologies, Ph.D. Thesis, A. Mickiewicz, Poznan, 1985.

28. Liu, Y.-M. ve Luo, M.-K., Advances In Fuzzy Systems, Applications And Theory, Fuzzy Topology, Vol. 9, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore, 1997.

29. Liu, Y. ve Li, Z., Coincidence Point Theorems in Probabilistic and Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 158 (2007) 58–70.

30. Lowen, R., Fuzzy Set Theory, Kluwer, Dordrecht, 1996.

31. Lowen, R., On $(\mathbb{R}(L),\oplus)$, Fuzzy Sets and Systems, 10 (1983) 203–209.

32. Mihet, D., Fuzzy ψ-Contractive Mappings in Non-Archimedean Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 159 (2008) 739 – 744.

33. Mihet, D., A Class of Contractions in Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy Sets and Systems, Accepted 21 September 2009.

34. Rodabaugh, S.E., Fuzzy Addition in the L-Fuzzy Real Line, Fuzzy Sets and Systems, 8 (1982) 39–52.

35. Rodabaugh, S.E., Separation Axioms and the Fuzzy Real Lines, Fuzzy Sets and Systems, 11 (1983) 163–183.

36. Šostak, A. P., On A Fuzzy Topological Structure, Suppl. Rend. Circ. Matem. Palermo Ser. II, 11 (1985) 89-103.

37. Wang, G., Induced I(L)-Fuzzy Topological Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 43 (1991) 69–80.

38. Wang, G., Infinite Sum on the Fuzzy Real Line, Fuzzy Sets and Systems, 98 (1998) 241–248.

39. Wang, G. ve Xi, X., Convergence of Sequences on the Fuzzy Real Line, Fuzzy Sets and Systems, 127 (2002) 323–331.

40. Xiao, J.-Z. ve Zhu, X.-H., Metric Topology on the L-Fuzzy Real Line, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 1267-1276.

41. Xi, X., Convergence Of Sequences on the Fuzzy Real Line, Fuzzy Sets and Systems, 127 (2002) 323–331.

42. Xi, X. ve Liang, J., Convergence in the I-Fuzzy Real Line, Fuzzy Sets and Systems, 158 (2007) 2386–2393.

43. Yang, Z. ve Zhang, L., The Topological Structure of Fuzzy Sets with Endographmetric, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 2937–2946.

44. Yao W. ve Shi F., A Note On Specialization L-Preorder of L-Topological Spaces, L-Fuzzifying Topological Spaces, and L-Fuzzy Topological Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 159 (2008) 2586 – 2595.

45. Yun, G., Hwang, S. ve Chang, J., Fuzzy Lipschitz Maps and Fixed Point Theorems in Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy Sets and Systems, Accepted 20 May 2009.

46. Zadeh, L.A., Fuzzy Sets, Inform. and Control, 8 (1965) 338–353.

47. Zhang, D., L-Fuzzifying Topologies as L-Topologies, Fuzzy Sets and Systems, 125 (2002) 135–144.

48. Zhang, J., Shi, F.-G. ve Zheng, C.-Y., On L-Fuzzy Topological Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 149 (2005) 473–484.

ÖZGEÇMİŞ

Kerim BEKAR, 13.11.1972 tarihinde Bielefeld'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Giresun'da tamamladı. 1991 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 1995 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Topoloji bilim dalı yüksek lisans programına başladı ve 09.02.1999 tarihinde mezun oldu. Aynı yıl doktora programına başladı.

Şu an evli olup 2007 yılından itibaren Giresun Üniversitesi, Tirebolu Meslek Yüksekokulunda öğretim görevlisi olarak görev yapmaktadır. İyi derecede İngilizce bilmektedir.