KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİMGE DEVİRLERİ VE GRAFLAR

DOKTORA TEZİ

Murat BEŞENK

MAYIS 2009
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİMGE DEVİRLERİ VE GRAFLAR

Murat BEŞENK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Doktor (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15.04.2009
Tezin Savunma Tarihi : 20.05.2009

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ekrem YANMAZ
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Zameddin İSMAYILOV
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Metin BAŞARIR

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2009

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, $\Gamma_0(N)$ grubunun $PSL(2,\mathbb{R})$'deki normalliyeninin alt yörüngesel grafları incelendi.

Konunun seçilmesinde ve çalışma süresince özendirici, yapıcı tutumu ile destek olan ayrıca çalışmanın planlanmasında ve değerlendirilmesinde yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ'a en içten duygularımla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tez önerisi ve raporlar aşamasında tavsiye ve eleştirileriyle tezin şekillenmesinde emeği geçen sayın hocam Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ ve Prof. Dr. Ekrem YANMAZ'a şükranlarımı sunarım.

Ayrıca yetişmemde emeği geçen KTÜ Matematik bölümünün değerli tüm hocalarına, çalışma süresi boyunca moral desteklerinden dolayı Yrd. Doç. Dr. Bahadır Özgür GÜLER, Yrd.Doç.Dr. Serkan Kader, Arş.Gör. Ali Hikmet DEĞER, Arş.Gör. Yavuz KESİCİOĞLU ile Arş.Gör. M.Nesibe KESİCİOĞLU'na ve KTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi'ndeki tüm asistan arkadaşlarıma ve hayatım boyunca desteklerini hiç esirgemeyen sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Murat BEŞENK
Trabzon 2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bu tezde, esas amaç alt yörüngesel graflar üzerinde yapılan çalışmalarla $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$ normalliyenin simgesindeki bazı invaryantları bulmaktır.

Birinci bölümde Öklid olmayan kristalize grupların yapısı irdelendi. $PSL(2,\mathbb{R})$, Γ Modüler grubu, kongrüans alt gruplarının bazı özellikleri, bu kongrüans alt gruplarının normalliyenleri ve ayrıca ayrık gruplar, Riemann yüzeyleri, temel bölgeler, graf teori, imprimitif hareket ile ilgili ihtiyaç duyduğumuz temel tanımlar verildi.

İkinci bölümde $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$ nin alt yörüngesel grafları ve $\Gamma_0(N)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ daki yörünge sayısı incelendi. $\Gamma_0(N)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketiyle oluşan grafta kenar ve devre şartları belirlendi. Ve tezin esasında $F_{u,N}$ alt yörüngesel grafın bir orman olabilmesi için gerekli ve yeterli şartlar bulundu. Yani $F_{u,N}$ grafının bir orman olabilmesi için n uzunluklu devreler, n-gen içermemesi durumunda gerekli ve yeterli şartlar verildi.

Anahtar Kelimeler: $PSL(2,\mathbb{R})$, Γ, $\Gamma_0(N)$, $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$, Transitif Permütasyon Grubu, Alt Yörüngesel Graf, Geodezik, İndeks

SUMMARY

Signature Cycles and Graphs

In this thesis, the main subject is to find some invariants of the signature of the normalizer $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$ by using suborbital graphs.

In Chapter 1, the structure of Non-Euclidean Crystalllographic groups is discussed and some properties of PSL(2, $\mathbb{R}$), Γ Modular group, congruence subgroups, normalizers of the congruence subgroups and also the preliminary definitions we require for discrete groups, Riemann surfaces, fundamental domains, graph theory and imprimitive action are given.

In Chapter 2, the suborbital graphs of $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$ and number of orbits of $\Gamma_0(N)$ in $\widehat{\mathbb{Q}}$ are examined. Edge and circuit conditions on graphs arising from the action of $\Gamma_0(N)$ on $\widehat{\mathbb{Q}}$ are determined. And , as the core of the thesis are found necessary and sufficient conditions for the suborbital graph $F_{u,N}$ to be a forest. That is, it is shown that $F_{u,N}$ is a forest if and only if it contains no n-gon , circuits of length n.

Key Words: PSL(2, $\mathbb{R}$), Γ , $\Gamma_0(N)$, $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$, Transitive Permutation Group, Suborbital Graph, Geodesic , Index

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_\infty$	: Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi
$\varphi(\mathrm{N})$	: Euler fonksiyonu
Γ	: Modüler grup
$\Gamma_0(\mathrm{N})$	: Γ grubunun $\mathrm{N} \mid c$ olan bir alt grubu
$\mathrm{N}_\mathrm{G}(\mathrm{H})$	: H'nın G'deki normalliyeni
$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$	: Gerçel katsayılı, lineer, kesir dönüşümlerinin grubu
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{R}}$	: Genişletilmiş reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{Q}}$	: Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	: Asal sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	: Hiperbolik doğrular
$\mathcal{O}(\alpha,\beta)$	: (α,β)'yı içeren alt yörüngeyi
$\mathcal{U}$	: $\mathbb{C}$ de üst yarı düzlem
U_N	: $(\mathrm{u},\mathrm{N})=1$ ve $\mathrm{u}<\mathrm{N}$
$\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$	: A kümesi B kümesinin alt kümesidir
$\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}$	: A kümesinin B kümesinden farkı
$\mathrm{A}\leq\mathrm{B}$	: A grubu B grubunun alt grubudur
$\mathrm{A}\lhd\mathrm{B}$	: A grubu B grubunun normal alt grubudur
$\lvert\mathrm{A}:\mathrm{B}\rvert$	: B alt grubunun A grubundaki indeksi
$a \mid b$	: *a* sayısı *b* sayısını böler
$a \nmid b$	: *a* sayısı *b* sayısını bölmez
$a \parallel b$	: *a* sayısı *b* sayısının bir tam bölenidir

$a \equiv b \bmod \mathrm{N}$	: N sayısı (a–b) sayısını böler
(a,b)	: a ile b sayısının en büyük ortak böleni
$\overset{\circ}{\mathrm{F}}$	: F kümesinin içi
$\mathrm{G}x$	: x noktasının G yörüngesi
G_x	: x noktasının G'deki sabitleyeni
$\mu(\mathrm{E})$	: E kümesinin hiperbolik alanı
$\ell(C)$	: Parçalı, sürekli, diferansiyellenebilir bir C eğrisinin hiperbolik uzunluğu
∞	: Sonsuz

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

19. yüzyılın sonlarına doğru ayrık gruplar teorisine temel teşkil edebilecek bazı önemli sonuçlar ilk defa Henry Poincare tarafından göz önüne getirilmiş ve eliptik fonksiyonlar teorisinin genelleştirilmesi için kullanılmıştır. Fuchsian grupları adı verilen ve sistematik çalışmasını Henry Poincare'nin geliştirdiği bu ayrık grupların invaryant bıraktığı fonksiyonlar üzerinde birçok bilim adamı çalışmalar yapmıştır. Lineer kesirli dönüşümler grubu özellikle 19. yüzyılda Öklid olmayan geometriler ve İnvaryant teorinin keşfiyle birlikte büyük önem kazanmış, topolojik grup yapısına uygun olması nedeniyle gerek analiz, gerekse cebirsel yöntemlerle derinlemesine incelenmiştir. Eliptik eğrilerin aritmetiği, integral kuadratik formlar ve eliptik modüler fonksiyonlar teorilerindeki önemi nedeniyle en çok Γ modüler grubunun kongrüans alt grupları olan $\Gamma(N)$, $\Gamma_0(N)$, $\Gamma^0(N)$, $\Gamma_1(N)$ grupları üzerinde çalışılmıştır. Son yıllarda sayılar teorisinde de Γ modüler grubunun kongrüans alt grupları Pierre de Fermat'ın 1637 yılında ifade ettiği son teoreminin ispatında oldukça önemli bir yer teşkil ettiği görülmektedir.

$\Gamma_0(N)$'nin $PSL(2,\mathbb{R})$'deki normalliyeni üzerinde ilk çalışma Felix Christian Klein ve Robert Fricke tarafından yapılmış, 1951'de Bruno Schoeneberg ve 1964'te J. Lehner ile Morris Newman tarafından $\Gamma_0(N)$'nin Weierstrass noktalarını bulma probleminin normalliyene bağlı olduğu ifade edilmiştir. Daha sonra 1970'te Arthur Oliver L. Atkin ile J. Lehner'in çalışmalarını yazdığı "Hecke Operators on $\Gamma_0(N)$" adlı makalede normalliyenin önemi vurgulanmış ancak normalliyenin elemanlarının net bir şekilde karakterize edilmesi John Horton Conway ve Simon Phillips Norton tarafından verilmiştir.

1973' te Bernd Fischer ve Bob Griess'in çalışmalarında bağımsız olarak, mertebesi

$$2^{46}.3^{20}.5^{9}.7^{6}.11^{2}.13^{3}.17.19.23.29.31.41.47.59.71$$

olan yeni bir basit M grubu için deliller üretmesi ve Robert L. Griess'in varlığını ispatlamasının ardından bu yeni basit grubun özellikle $\Gamma_0(N)$'nin $PSL(2,\mathbb{R})$'deki normalliyeni ile ilgili olması normalliyeni tekrar ön plana getirmiştir.1979'da John Horton Conway ve Simon Phillips Norton bu basit grubu Monster olarak adlandırarak "Monstrous

Moonshine" (Dev Ayışığı) adlı çalışmalarında normalliyenin elemanlarına son şeklini vermişlerdir. Sonraki dönemlerde Andrew P. Ogg $|M|$ yi bölen p asal sayıları için $PSL(2,\mathbb{R})$'deki normalliyeninin belirlediği fonksiyon cisminin sıfır cinsine sahip olduğunu gösterdi. A. Pizer, bu asalların 2-ağırlıklı modüler formlarla quaternion cebir teta-serisini ilişkilendiren Hecke konjektürünü sağlayan yegâne asallar olduğunu gösterdi. Heinz Helling 1970 yılında "On the commensurability class of the rational modular groups" adlı çalışmasında N karesiz (N karesiz $\Leftrightarrow$ p asal ve p|N ise $(N, N/p) = 1$) olduğunda normalliyen gruplarının maksimal ayrık grup olduğunu ve Γ modüler grubu ile orantılı olan her ayrık Δ grubunun bu gruplardan birine eşlenik olduğunu gösterdi. Ayrıca Δ ile belirlenen fonksiyon cisminin cinsi sıfır ise normalliyen ile belirli fonksiyon cisminin cinsi de sıfırdır ve eşlenik yapan her eleman

$$z \to \frac{pz+q}{r}\,; \qquad \text{p, q ve r ortak çarpanı olmayan tam sayılar}$$

biçimindedir.

Normalliyen, $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun ayrık bir alt grubu ve sonlu üretilmiş olduğundan, topolojik ve geometrik özelliklerini veren bir simgeye sahiptir. Bu simge problemi bir bakıma bir ayrık grubun kimliğidir. Simgedeki parametreler; grubun cinsi, üretici eliptik elemanların mertebeleri ve parabolik sınıf sayısıdır. Simge problemi ayrık gruplar üzerine çalışan bilim adamlarının bu yolda daha fazla çaba sarf etmelerini gerektirmektedir. NEC gruplarının yüzey sembolleri düzenli bir şekilde H.C. Wilkie tarafından incelenmiştir. Daha sonra A.M. Macbeath, NEC gruplarının simgelerine geniş bir açıklama getirmiştir. 1974'te David Singerman "On the structure of non-euclidean crystallographic groups" adlı makalesinde $PSL(2,\mathbb{R})$'nin herhangi bir ayrık Γ alt grubu verildiğinde simgesi verilen sonlu indeksli bir alt gruba sahip olur problemini çözmüştür. N sayısının karesiz olması durumunda simge problemini Colin Maclachlan 1981 yılındaki "Groups of units of zero ternary quadratic forms" adlı çalışmasında çözmüştür. Fakat N sayısının keyfi olması durumunda yukarıdaki problem oldukça zor bir hal almakta olup hâlâ açıktır. Şayet her N sayısı için simge bulunabilirse bunun M basit grubu ile nasıl bir bağlantısı olduğu da ayrı bir durumdur. Ancak 1992 yılında "The signature of the normalizer of $\Gamma_0(N)$" adlı çalışmada M. Akbaş ve D. Singerman normalliyenin parabolik sınıf sayısını verdiler ve 3, 4 ve 6 mertebeli eliptik üretici elemanları da tam olarak belirlediler. Dolayısı ile geriye 2 mertebeli üretici elemanların sayısını ve g cinsini bulma problemi kalmıştır.

1.2. Topolojik Gruplar

Tanım 1.1. $(G,\cdot)$ bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde

$$\textbf{i)}\ \begin{aligned} M : G\times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longrightarrow g\cdot h \end{aligned}$$

$$\textbf{ii)}\ \begin{aligned} m : G &\longrightarrow G \\ g &\longrightarrow g^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümleri sürekli ise G'ye bir topolojik grup denir.

Tanım 1.2. G bir topolojik grup ve X bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \wedge : G\times X &\longrightarrow X \\ (g,x) &\longrightarrow \wedge(g,x) =: g\wedge x \end{aligned}$$

sürekli bir dönüşüm ve

(i) $g\wedge(h\wedge x) = gh\wedge x$, $g,h\in G$, $x\in X$

(ii) $e\wedge x = x$, $e\in G$, $x\in X$

şartları sağlanıyorsa $[G,X,\wedge]$ üçlüsüne veya $[G,X]$ ikilisine bir topolojik dönüşüm grubu adı verilir. Bu durumda G'ye X üzerinde hareket eder veya G'ye X üzerinde bir hareket grubu denir.

Tanım 1.3. G bir grup ve $H\leq G$ olsun. H üzerindeki alt uzay topolojisi ayrık ise H alt grubuna G'nin ayrık bir alt grubu denir.

Önerme 1.1. $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x,y\in X$ olsun. Bu takdirde

$$x\approx y :\Leftrightarrow \exists g\in G :\ gx = y$$

şeklinde tanımlanan "$\approx$" bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.4. "$\approx$" bağıntısının denklik sınıflarına hareketin yörüngeleri denir. Ayrıca $x\in X$ noktasını içeren yörüngeye x-in yörüngesi denir ve bu $Gx := \{gx \mid g\in G\}$ kümesidir.

Tanım 1.5. G, X üzerinde hareket etsin ve $x,y\in X$ keyfi olsun. $gx = y$ olacak biçimde bir $g\in G$ elemanı varsa G'ye X üzerinde transitif olarak hareket ediyor denir. Bu tanıma göre hareket transitif ise $\forall x \in \mathrm{X}$ için $\mathrm{G}x = \mathrm{X}$ elde edilir. Yani bir tek yörünge vardır. Yörünge grubun transitif olarak hareket ettiği kümedir.

Önerme 1.2. $[\mathrm{G},\mathrm{X}]$ bir topolojik dönüşüm grubu olsun. $\begin{array}{l} p:\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}/\mathrm{G} \\ \quad x \longrightarrow \mathrm{G}x \end{array}$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\text{"} \mathrm{U} \subset \mathrm{X}/\mathrm{G} \text{ açıktır } :\Leftrightarrow p^{-1}(\mathrm{U}) \subset \mathrm{X} \text{ açıktır "}$$

tanımı ile verilen açık kümelerin topolojisi ile X/G ye bir yörünge uzayı denir. p dönüşümü açıkça süreklidir ve projeksiyon olarak adlandırılır.

Tanım 1.6. G bir grup ve $\mathrm{H} < \mathrm{G}$ olsun. H alt grubuna göre sağ ve sol denklik sınıflarının sayısı aynıdır. Bu sayıya H alt grubunun G içerisindeki indeksi denir ve $|\mathrm{G}:\mathrm{H}|$ ile gösterilir.

Tanım 1.7. G, X üzerinde hareket etsin ve $x \in \mathrm{X}$ olsun. $\mathrm{G}_x := \{g \in \mathrm{G} \mid gx = x\}$ kümesine x noktasının sabitleyeni denir.

Şimdi genel anlamda yörünge ile sabitleyen arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Önerme1.3. G, X üzerinde bir hareket grubu ve $x \in \mathrm{X}$ olsun. Bu durumda $|\mathrm{G}x| = |\mathrm{G}:\mathrm{G}_x|$ dir.

İspat: $\mathrm{G}x = \{gx : g \in \mathrm{G}\}$ ve $\mathrm{G}_x = \{g \in \mathrm{G} : \forall x \in \mathrm{X} \text{ için } gx = x\}$ olduğunu biliyoruz. $\mathrm{Y} := \{g\mathrm{G}_x : g \in \mathrm{G}\}$ için $\alpha : \mathrm{G}_x \to \mathrm{Y}$, $\alpha(gx) := g\mathrm{G}_x$ şeklinde tanımlansın.

i) $g_1, g_2 \in \mathrm{G}$ ve $x \in \mathrm{X}$ olsun. $g_1x = g_2x$ ise $\alpha(g_1x) = \alpha(g_2x)$ dir. Böylece $g_1\mathrm{G}_x = g_2\mathrm{G}_x$ elde edilir. Böylece α iyi tanımlıdır.

ii) $g_1, g_2 \in \mathrm{G}$ ve $x \in \mathrm{X}$ için $\alpha(g_1x) = \alpha(g_2x)$ olsun. Buradan $g_1\mathrm{G}_x = g_2\mathrm{G}_x$ olduğundan $g_2^{-1}g_1 \in \mathrm{G}_x$ bulunur. Dolayısıyla $g_1x = g_2x$ dir. Böylece α birebir dönüşümdür.

iii) $\mathrm{v} \in \mathrm{Y}$ olsun. Buna göre $\mathrm{v} = g\mathrm{G}_x$ olacak biçimde bir $g \in \mathrm{G}$ vardır. Buradan $\alpha(gx) = \mathrm{v}$ elde edilir. O halde α örtendir.

Dolayısıyla $|\mathrm{G}x| = |\mathrm{Y}| = |\mathrm{G}:\mathrm{G}_x|$ elde edilir.

Tanım 1.8. G bir grup olsun. $\mathrm{C} := \{g \in \mathrm{G} \mid \forall x \in \mathrm{G}$ için $gx = xg\}$ kümesine G'nin merkezi denir.

Tanım 1.9. G bir grup olsun. $\mathrm{G} = \langle a \rangle$ olacak şekilde bir $a \in \mathrm{G}$ varsa G'ye bir devirli grup denir.

Tanım 1.10. G bir grup ve $\mathrm{H} < \mathrm{G}$ olsun. $\mathrm{N_G(H)} := \left\{ g \in \mathrm{G} \mid g\mathrm{H}g^{-1} = \mathrm{H} \right\}$ kümesine H'nın G'deki normalliyeni denir. Normalliyen, H'yı normal alt grup olarak içeren en büyük kümedir.

Tanım 1.11. $\mathrm{N} \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\mathrm{p}^2 \mid \mathrm{N}$ olacak şekilde bir $\mathrm{p} \in \mathbb{P}$ yoksa N'ye karesiz denir.

Tanım 1.12. Geometride iki noktayı birleştiren minimal uzunluklu eğrilere geodezik adı verilir.

Tanım 1.13. Bir T dönüşümünün periyodu (veya mertebesi) $\mathrm{T}^{\mathrm{m}} = \mathrm{I}$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır. Böyle bir m sayısı yoksa T'ye sonsuz periyotludur denir.

Tanım 1.14. $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ için $1 \le a \le \mathrm{N}$ ve $(a, \mathrm{N}) = 1$ olan a tam sayılarının sayısı $\varphi(\mathrm{N})$ ile gösterilir. Bu fonksiyona Euler fonksiyonu denir.

$\mathrm{m} = \mathrm{p}_1^{\mathrm{r}_1}.\mathrm{p}_2^{\mathrm{r}_2}.\mathrm{p}_3^{\mathrm{r}_3}...\mathrm{p}_\mathrm{s}^{\mathrm{r}_\mathrm{s}}$ ise bu takdirde

$$\varphi(\mathrm{m}) = \mathrm{m}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{p}_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\mathrm{p}_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{\mathrm{p}_\mathrm{s}}\right).$$

1.3. Öklid Olmayan Kristalize Gruplar

1) $\mathcal{G}$ ile $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzlemin

(A) $\left\{ z \to \dfrac{az+b}{cz+d} \;\mid\; a,b,c,d \in \mathbb{R} \;\text{ ve }\; ad - bc = 1 \right\}$

(B) $\left\{ z \to \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \;\mid\; a,b,c,d \in \mathbb{R} \;\text{ ve }\; ad - bc = -1 \right\}$

biçimindeki dönüşümlerin grubunu gösterelim. $\mathcal{G}$ grubunun her bir elemanı $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ üst yarı düzlemin kendi üzerine bir konform veya ters konform homeomorfizmasıdır.

(A) biçimindeki dönüşümlerin grubu $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ ile gösterilir.Bu grup $\mathcal{G}$'de 2 indeksli bir alt gruptur. $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemin her konform homeomorfizmi $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$'dedir [16].

$\mathcal{G}$ üzerinde bir topolojik yapı aşağıdaki biçimde oluşturulabilir:

$\tau = \{(a,b,c,d) : ad - bc = \pm 1\} \subset \mathbb{R}^4$ alt kümesini alalım. τ kümesi $\mathbb{R}^4$ ten indirgenen Öklid metriği ile bir metrik uzaydır. Bu alt küme üzerinde $\mathbb{R}^4$ deki Öklid topolojisinin oluşturduğu alt uzay topolojisini göz önüne alalım. τ alt uzayında (a,b,c,d) ile $(-a,-b,-c,-d)$ noktalarını özdeşleştirelim. $\delta : \tau \to \tau$, $\delta(a,b,c,d) := (-a,-b,-c,-d)$ ile tanımlanırsa δ bir homeomorfizmdir ve özdeşlikle beraber δ, τ üzerinde 2.mertebeden bir devirli gruptur. Bu grup τ üzerinde hareket eder.

Şimdi $\tau/\langle\delta\rangle$ kümesi üzerine bölüm topolojisini koyalım. $\mathcal{G}$ ile $\tau/\langle\delta\rangle$ arasında birebir ve örten bir dönüşüm vardır. Dolayısıyla $\mathrm{p} : \tau \to \tau/\langle\delta\rangle$, $\mathrm{p}(a,b,c,d) := [(a,b,c,d)]$ ile tanımlanan projeksiyon sürekli bir dönüşümdür. $\mathcal{G}$ grubunun üzerindeki topolojiyi $\tau/\langle\delta\rangle$ üzerindeki topoloji olarak alabiliriz. Böylece $\mathcal{G}$ grubunun bir topolojik yapısı oluşturulur. Ayrıca $\mathcal{G}$, $\mathcal{U}$ üzerinde bir hareket grubu ve $\mathcal{G}$'nin de her dönüşümü $\mathcal{U}$ üzerinde sürekli olduğundan $[\mathcal{G},\mathcal{U}]$ bir topolojik dönüşüm grubudur. Üstelik $\mathcal{G}$, $\mathcal{U}$ üzerinde transitif olarak hareket eder.

$\mathcal{G}$ topolojik grubu $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ ve $\mathcal{G} \setminus \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ olmak üzere iki bileşene sahiptir.

$\mathcal{G}$ 'nin ayrık alt gruplarına Öklid olmayan kristalize gruplar, kısaca NEC grupları, adı verilir. $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$'deki bir NEC grubuna ise bir Fuchsian grup denir. Eğer bir NEC grubu (B) türündeki elemanları yani ters yönlendirilmiş elemanları içeriyorsa buna özel bir NEC grubu diyeceğiz. $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemi, Öklid olmayan (hiperbolik) düzlemin bir modeline aşağıdaki biçimde dönüştürülebilir:

Bir yay elemanının *ds* hiperbolik uzunluğu

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{|dz|^2}{y^2} \quad , \quad z = x + iy$$

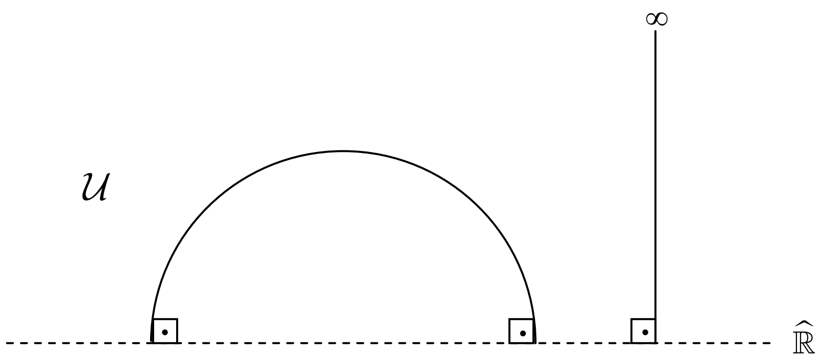
ile tanımlanır. Böylece parçalı, sürekli, diferansiyellenebilir bir C eğrisinin hiperbolik uzunluğu

$$\ell(C) := \int_C ds = \int_C \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

ve ölçülebilir bir E kümesinin hiperbolik alanı

$$\mu(\mathrm{E}) := \iint_{\mathrm{E}} \frac{dxdy}{y^2}$$

olarak tanımlanır. Yukarıdaki metriğin geodezikleri, reel eksene dik yarı çemberler ve yarı doğrulardır. Bunlar hiperbolik doğrular olarak adlandırılır.



Şekil 1.1. Hiperbolik doğrular

$\mathcal{U}$ üst yarı düzlemde iki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık, bu iki noktayı birleştiren bir tek hiperbolik doğru parçasının uzunluğudur. Bu metrikle tanımlanan topoloji, bilinen Öklid topolojisine eş değerdir. Yani bir topolojideki açık küme, diğer topolojide de açıktır. Hiperbolik uzaklık ve alan $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$'nin dönüşümleri altında invaryant kalır [16].

2) Şimdi $\mathcal{G}$ grubunun elemanlarını yön durumlarına ve sabit nokta kümelerine göre sınıflandıralım:

($\mathbf{A}^*$) $\mathrm{T} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \setminus \{\mathrm{I}\}$ dönüşümünün sabit noktalarını bulalım. Bunun için, $\dfrac{az+b}{cz+d} = z$ yazılırsa,

$$cz^2+\left(d-a\right)z-b=0 \tag{1}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri T'nin sabit noktalarıdır. T'nin en fazla iki sabit noktası vardır. (1) denkleminin kökleri ise,

$$z_{1,2}=\frac{-\left(d-a\right)\mp\sqrt{\left(a+d\right)^2-4}}{2c}$$

olarak bulunur. Burada üç durum söz konusudur;

1°) $|a+d|>2$ ise, iki farklı sabit nokta vardır ve bunlar $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ üzerindedirler. Bu durumda T 'ye bir hiperbolik dönüşüm adı verilir.

2°) $|a+d|=2$ ise, birbirine eşit iki sabit nokta vardır ve bunlar $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ üzerindedirler. Bu durumda T 'ye bir parabolik dönüşüm adı verilir.

3°) $|a+d|<2$ ise, birbirinin eşleniği olan iki kompleks sabit nokta vardır. Bu sabit noktalardan biri açıkça $\mathcal{U}$ kümesindedir. Bu durumda T'ye bir eliptik dönüşüm adı verilir.

($\mathbf{B}^*$) Şimdi de $\mathrm{T}\in\mathcal{G}\setminus\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $z=\dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$ yazılırsa

$$cz\overline{z}+dz-a\overline{z}-b=0 \tag{2}$$

denklemi elde edilir. (2) denkleminde $z=x+iy$ ve $\overline{z}=x-iy$ ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$c(x+iy)(x-iy)+d(x+iy)-a(x-iy)-b=0$$

$$c(x^2+y^2)+dx-ax+i(dy+ay)-b=0$$

$$\left.\begin{array}{c} c(x^2+y^2)+(d-a)x-b=0 \\ (d+a)y=0 \end{array}\right\}$$

biçiminde iki durum elde edilir. Bu iki durumu inceleyelim:

1°) $a+d\neq 0$ ise $y=0$ dır. Bu durumda $cx^2+(d-a)x-b=0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin diskriminantı

$$\Delta=(d-a)^2+4bc=d^2-2ad+a^2+4bc$$

dir. Buradan $ad-bc=-1$ eşitliği kullanılırsa $\Delta=(a+d)^2+4>0$ elde edilir. Dolayısıyla T nin iki farklı sabit noktası vardır ve bunlar $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ üzerindedirler. Bu durumda T 'ye bir kayan-yansıma denir.

2°) $a+d=0$ ise $(a+d).y=0$ eşitliği özdeş olarak gerçekleşeceğinden $c(x^2+y^2)+(d-a)x-b=0$ eşitliği gereği T'nin sabit noktaları kümesi $c\neq 0$ için bir çemberdir. $a+d=0$ ve $ad-bc=-1$ eşitlikleri yardımıyla bu çemberin merkezinin $\left(\frac{a}{c},0\right)$ ve yarıçapının $\frac{1}{|c|}$ olduğu görülür. Eğer $c=0$ ise $(d-a)x-b=0$ düşey doğrusu elde edilir. Bu durumda T dönüşümüne bir yansıma adı verilir.

Buna göre $\mathcal{G}$ grubunun hiperbolik, parabolik, eliptik, kayan-yansıma ve yansıma diye adlandırılan beş tip elemanı vardır.

Tanım 1.15. T_1 ve T_2 , $\mathcal{G}$ grubunun herhangi iki elemanı olsun. $\mathrm{T}_1=\mathrm{T}\mathrm{T}_2\mathrm{T}^{-1}$ olacak şekilde bir $\mathrm{T}\in\mathcal{G}$ elemanı varsa T_1 ve T_2 birbirinin eşleniğidir denir.

Önerme 1.4. T_1 ve T_2 birbirinin eşleniği iseler aynı tiptendirler.

$\mathcal{G}$ 'nin elemanlarını izleri (trace) denilen $a+d$ ve determinantlarına göre sınıflandırabiliriz. $\mathcal{G}$ 'nin eşlenik elemanlarının aynı tip olduğu gerçeği kullanıldığında, dönüşümlerin her biri bir doğal gösterime sahiptir. Doğal gösterimler aşağıdaki şekilde sınıflandırılır:

Eleman Türü	Doğal Gösterim
Hiperbolik	$z\to\lambda z \quad (\lambda>1)$
Eliptik	$z\to w, \quad \frac{w-i}{w+i}=e^{i\theta}\frac{z-i}{z+i}, \quad \theta\neq 2\mathrm{n}\pi$
Parabolik	$z\to z\pm 1$
Kayan-yansıma	$z\to\lambda\bar{z} \quad (\lambda<-1)$
Yansıma	$z\to-\bar{z}$

Tanım 1.16. Λ bir Fuchsian grubu olsun. Bu takdirde

(i) $\bigcup_{\mathrm{T}\in\Lambda}\mathrm{T}(\mathrm{F})=\mathcal{U}$ (ii) $\forall\mathrm{T}\in\Lambda\setminus\{\mathrm{I}\}$ için $\mathring{\mathrm{F}}\cap\mathrm{T}(\mathring{\mathrm{F}})=\varnothing$

şartlarını sağlayan F kapalı kümesine Λ için bir temel bölge adı verilir.

F kümesini iki şekilde elde edebiliriz:

Tanım 1.17. Λ bir NEC grup ve $\mathrm{p} \in \mathcal{U}$, $\forall \gamma \in \Lambda \setminus \{\mathrm{I}\}$ için $\gamma(\mathrm{p}) \neq \mathrm{p}$ koşulunu sağlayan bir nokta olsun. d hiperbolik metrik olmak üzere

$$\mathrm{F} = \{ z \in \mathcal{U} \mid \forall g \in \Lambda \text{ için } \mathrm{d}(z,\mathrm{p}) \leq \mathrm{d}(g(z),\mathrm{p}) \}$$

kümesine, Λ grubu için Dirichlet Bölgesi denir.

Tanım 1.18. $\Lambda \leq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, $\mathrm{T} \in \Lambda$ ve $\mathrm{T}(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$ olsun. $\mathrm{I(T)} : |cz+d|^2 = 1$ çemberi, T'nin izometrik çemberi olarak adlandırılır. $|\mathrm{T}'(z)| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathrm{I(T)}$ olduğundan izometrik çember, diferansiyel Öklid uzunluğunu değiştirmeden T ile dönüştürülen noktaların geometrik yeridir. F_∞ ; Λ'da sonsuzun Λ_∞ sabitleyeni için bir temel bölge ve K ; Λ'nın tüm izometrik çemberlerinin dışında kalan bölge ise $\mathrm{F} = \mathrm{F}_\infty \cap \mathrm{K}$, Λ için bir temel bölgedir ve Ford Bölgesi olarak adlandırılır.

Her sonlu üretilmiş Fuchsian grubu da aşağıdaki gibi bir gösterime sahiptir:

Üreticiler : $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ (hiperbolik)

$x_1, \ldots, x_\mathrm{r}$ (eliptik)

$p_1, \ldots, p_\mathrm{s}$ (parabolik)

Bağıntılar : $x_1^{\mathrm{m}_1} = \ldots = x_\mathrm{r}^{\mathrm{m}_\mathrm{r}} = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{g}} a_\mathrm{i} b_\mathrm{i} a_\mathrm{i}^{-1} b_\mathrm{i}^{-1} \prod_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{r}} x_\mathrm{j} \prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{s}} p_\mathrm{k} = 1$

Simge : $(g \,;\, \mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \ldots, \mathrm{m}_\mathrm{r} \,;\, \mathrm{s})$.

Burada g-grubun cinsini, m_i üretici eliptik elemanların mertebelerini ve s parabolik sınıf sayısını temsil etmektedir. Simge, üzerinde çalışılan grubun invaryantlarını ortaya koyması bakımından son derece önemlidir [6].

Tanım 1.19. X bir bağlantılı, Hausdorff topolojik uzayı olsun. Bir $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ ve $\mathrm{B} \subset \mathbb{C}$ açık alt kümeler olmak üzere $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ homoemorfizmasına X üzerinde bir kompleks kart ve (A, φ) çiftine X'in bir koordinat komşuluğu denir.

Tanım 1.20. Eğer $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(A_1 \cap A_2) \to \varphi_1(A_1 \cap A_2)$ fonksiyonu holomorf ise (A_1, φ_1) ve (A_2, φ_2) koordinat komşulukları uyumludur denir.

Tanım 1.21. Koordinat komşuluklarının bir $(A_i, \varphi_i)_{i \in I}$ ailesini alalım.

(1) $X = \bigcup_{i \in I} A_i$

(2) $\forall (i,j) \in I \times I$ için (A_i, φ_i) ile (A_i, φ_j) uyumludur,

koşullarının sağlanması halinde $(A_i, \varphi_i)_{i \in I}$ ailesine bir örtüm adı verilir. İki örtümün birleşimlerinin de bir örtüm meydana getirmesi halinde bu örtümler eşdeğerdir denir. Bu örtümlerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlanır ve denklik sınıfına da bir kompleks yapı adı verilir.

Tanım 1.22. Bir bağlantılı Hausdorff topolojik uzayına bir kompleks yapıyla birlikte bir Riemann yüzeyi adı verilir.

Her noktasının bir komşuluğu $\mathbb{R}^2$ nin bir açık alt kümesine homeomorf olan bir bağlantılı Hausdorff uzayına bir yüzey adı verilir. Eliptik eleman içermeyen keyfi bir Λ Fuchsian grubu da PSL($2, \mathbb{R}$)'nin bir alt grubu olarak $\mathcal{U}$ üzerinde hareket eder ve bölüm topolojisi ile meydana gelen bölüm uzayı bir yüzeydir. Diğer taraftan $\mathcal{U}$'daki kompleks yapı $\mathcal{U}/\Lambda$ yüzeyine transfer edildiğinde bir Riemann yüzeyi elde edilir. Eğer Λ eliptik eleman içeriyorsa sonuç yine bir Riemann yüzeyidir, ancak bu durumda $\mathcal{U} \to \mathcal{U}/\Lambda$ izdüşümü dallanmıştır. Ancak oluşan yüzey kompakt değildir, bunu sağlamak için $\mathcal{U}$ yerine $\mathcal{U} \cup \{\infty\}$ alınır [16].

Teorem 1.1 [16]. Her basit bağlantılı Riemann yüzeyi aşağıdakilerden birine konform eşdeğerdir:

(i) $\mathbb{C}_\infty$ Riemann Küresi

(ii) $\mathbb{C}$ Kompleks Düzlem

(iii) $\mathcal{U}$ Üst Yarı Düzlem.■

Bu Riemann yüzeylerinin otomorfizm grupları aşağıdaki gibidir;

Teorem 1.2 [16]. **(i)** $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$

(ii) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \to az+b : a,b \in \mathbb{C},\ a \neq 0\}$

(iii) $\mathrm{Aut}(\mathcal{U}) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.■

Teorem 1.3 [16]. $\mathcal{U}/\Lambda$ kompakt ise Λ parabolik eleman içermez.■

1.4. $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 'deki Parabolik ve Eliptik Alt Gruplar

Teorem 1.4 [8]. $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ grubundaki bir parabolik (eliptik, hiperbolik) elemanının $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$'deki merkezleyeni, aynı sabit nokta kümeli tüm parabolik (eliptik, hiperbolik) elemanlardan meydana gelir.■

Teorem 1.5 [16]. Her Abel, Fuchsian grup devirlidir.■

Tanım 1.23. Λ bir Fuchsian grup olsun. Λ'nın birim elemandan ve parabolik (eliptik) elemanlardan oluşan devirli bir maksimal alt grubuna Λ'nın bir parabolik (eliptik) alt grubu denir.

Tanım 1.24. Bir Λ Fuchsian grubunun parabolik (eliptik) alt gruplarının eşlenik sınıflarının sayısına Λ Fuchsian grubunun parabolik (eliptik) sınıf sayısı denir.

Tanım 1.25. Λ bir Fuchsian grup olsun. Bir $\mathrm{r} \in \widehat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ noktası keyfi verildiğinde $\gamma(\mathrm{r}) = \mathrm{r}$ olacak şekilde bir $\gamma \in \Lambda$ parabolik elemanı bulunabiliyorsa, bu noktaya Λ Fuchsian grubunun bir parabolik noktası veya cusp'ı denir.

Benzer şekilde $z \in \mathcal{U}$ noktası keyfi verildiğinde $\sigma(z) = z$ olacak şekilde bir $\sigma \in \Lambda$ eliptik elemanı bulunabiliyorsa bu noktaya , Λ'nın bir eliptik noktası adı verilir.

1.5. Modüler Grup

Tanım 1.26. $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ grubunun

$$\Gamma := \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \left\{ z \to \frac{az+b}{cz+d} \quad | \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z} \quad \text{ve} \quad ad-bc=1 \right\}$$

alt grubuna Modüler grup adı verilir. Bu grup aşağıdaki gibi 2x2 lik tam sayılar matrisiyle de temsil edilebilir:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad \det \mathrm{A} = 1 .$$

A ve $-\mathrm{A}$ aynı dönüşümü temsil ettiğinden söz konusu matrisi negatifi ile eş alınır. Böylece matris ve dönüşüm arasında bir ayrım yapılmayacaktır. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}, \quad k \neq 0$$

matrisleri yine aynı dönüşümü temsil ettiğinden, matris hesaplamalarında uygun olduğu yerde bu matrisleri eşit gibi yazılabilir (burada determinantın 1 olma şartı aranmayabilir).

Aşağıdaki teorem, Γ modüler grubunun $\mathrm{T}(z) = z+1$ ve $\mathrm{U}(z) = -\frac{1}{z}$ dönüşümleriyle üretildiğini göstermektedir.

Teorem 1.6. Γ modüler grubu T=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve U=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisleriyle üretilir.

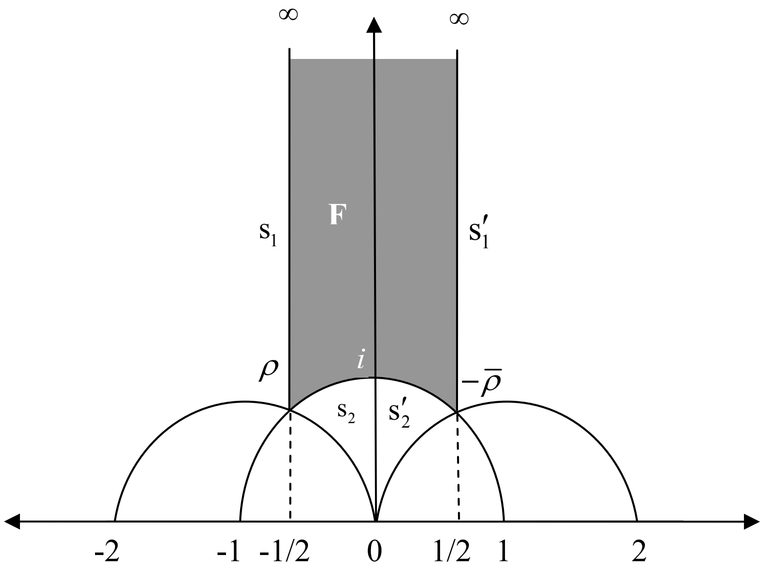
İspat . Önce Γ için Ford bölgesini bulalım. Γ'da ∞'un sabitleyeni Γ_∞ ile gösterilsin.

$\mathrm{F}_\infty = \left\{ z \in \mathcal{U} \ : \ |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2} \right\}$ olsun. Bu F_∞ şeridi , Γ_∞ sabitleyeni için bir temel bölgedir. En geniş izometrik çemberler 1 yarıçaplıdır ve bu çemberlerin merkezleri reel eksen üzerindeki tam sayılardır. Sadece merkezleri $0,-1,1$ olan üç çember F_∞ ile kesişir. Burada $\rho = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $-\overline{\rho} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ olmak üzere 0 merkezli çember ρ ve $-\overline{\rho}$ noktalarında; 1 merkezli çember $-\overline{\rho}$ noktasında; -1 merkezli çember ρ noktasında

F_∞ ile kesişir. Diğer çemberlerin yarıçapı $\frac{1}{2}$ değerinden küçük veya eşittir. Bu nedenle şekilde görüldüğü gibi F bölgesi üzerinde bu çemberler önem taşımaz. Buna göre;

$$F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1,\ |x| \leq \frac{1}{2},\ \ y > 0 \right\}$$

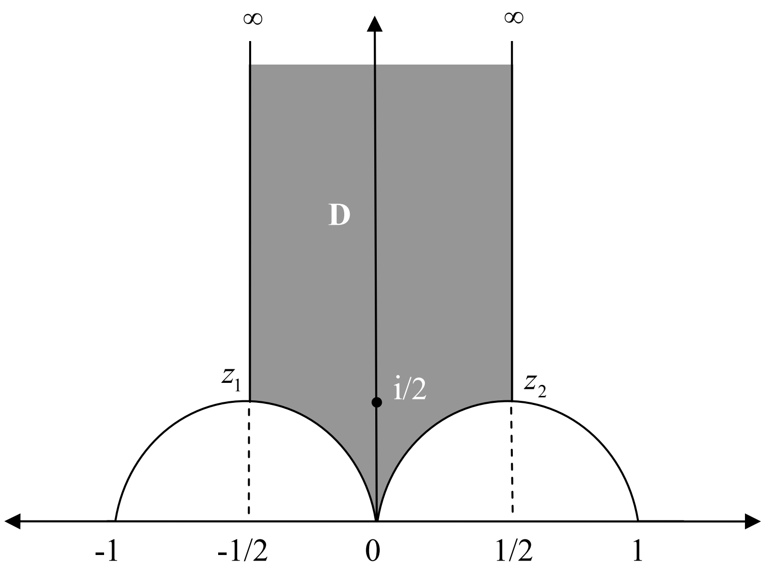
kümesi Γ modüler grubu için bir temel bölgedir.



Şekil 1.2. Γ modüler grubunun F temel bölgesi

$T(z) = z+1$ için $T(z) = s_1'$ ve $U(z) = -\frac{1}{z}$ için $U(s_2) = s_2'$ olduğundan (s_1, s_1') ve (s_2, s_2') eşlenik kenar çiftleridir. Bu nedenle T ve U dönüşümleri Γ modüler grubunu üretir. Burada T bir parabolik eleman ve U, 2. mertebeden bir eliptik elemandır. Buna göre; $TU = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3. mertebeden bir eliptik, $V := TU$ olmak üzere Γ, $U(z) = -\frac{1}{z}$ ve $V(z) = \frac{z-1}{z}$ elemanlarıyla da üretilir. Dolayısıyla da $U^2 = V^3 = I$ dır. Buradan Γ grubunun üreticileri U , V , T olduğundan Γ grubunun simgesi $(0;2,3,\infty)$ olur.■

$N = 2$ olmak üzere $\Gamma_0(2)$ grubu için bir D temel bölgesi aşağıdaki gibi teşkil edilebilir.



Şekil 1.3. $\Gamma_0(2)$ grubunun D temel bölgesi

Burada $T(z)=\dfrac{z}{2z+1}\in\Gamma_0(2)$ parabolik elemanı için $T(z_1)=z_2$ ve 2. mertebeden $S(z)=\dfrac{z-1}{2z-1}\in\Gamma_0(2)$ eliptik elemanı için $S(z_2)=z_2$ dir. Ayrıca 0 ve ∞ noktaları da birer parabolik eleman tarafından sabit bırakılır. Buna göre $\Gamma_0(2)$ grubunun simgesi $(0;2,\infty,\infty)$ dir.

Şimdi de Γ grubunun cusp kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}:=\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ üzerindeki hareketini inceleyelim. $\widehat{\mathbb{Q}}$ kümesinin elemanları $(x,y)=1$ olmak üzere $\dfrac{x}{y}$ olarak yazılabilir.

Burada $\infty=\dfrac{1}{0}=-\dfrac{1}{0}$ dır. $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-x}{-y}$ olduğundan bu gösterim tek türlü değildir. $T\in\Gamma$ ise

$$T\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{a\dfrac{x}{y}+b}{c\dfrac{x}{y}+d}=\frac{ax+by}{cx+dy}\quad \text{ve}\quad T\left(\frac{-x}{-y}\right)=\frac{-ax-by}{-cx-dy}=\frac{ax+by}{cx+dy}=T\left(\frac{x}{y}\right)$$

olduğundan Γ grubunun üzerindeki hareketi iyi tanımlıdır.

Eğer $(x,\ y)=1$ ve $ad-bc=1$ ise $\dfrac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiş formdadır.

Aksini varsayalım; $\dfrac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiş formda olmasın. Buna göre $n \mid ax+by$ ve $n \mid cx+dy$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ elemanı vardır. Bu durumda $k, \ell \in \mathbb{Z}$ için $ax + by = kn$ …(1) ve $cx + dy = \ell n$ … (2) dir.

(1) eşitliğinin her iki tarafı d ile (2) eşitliği ise $-b$ ile çarpıldığında

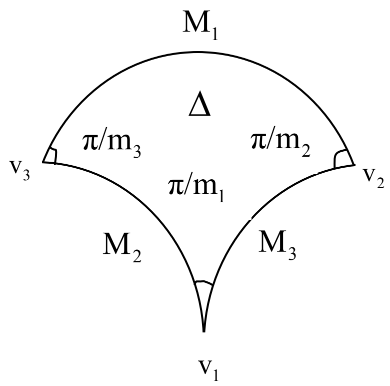
$$(ad-bc)x = (kd - b\ell)n \qquad \text{(I)}$$

ve benzer şekilde (1) eşitliği $-c$ ve (2) eşitliği a ile çarpıldığında

$$(ad-bc)y = (a\ell - ck)n \qquad \text{(II)}$$

elde edilir. (I) ve (II) den $n \mid x$, $n \mid y$ çelişkisi elde edilir.

$\mathcal{G}\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ grubunun elemanları $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemin ters konformal homeomorfizmleri olduğundan bu grubun her bir elemanına genellikle hiperbolik yansıma kısaca $\mathbb{H}$-yansıma adı verilir.

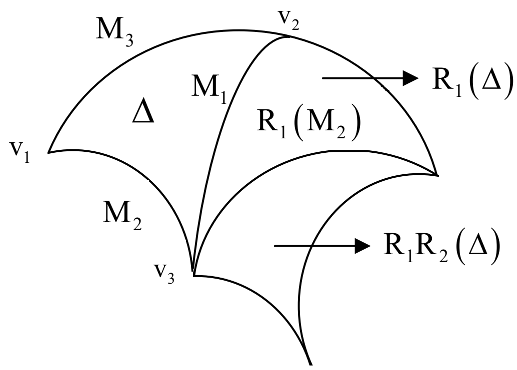


Şekil 1.4. Δ Hiperbolik üçgeni

Şimdi şekilde görüldüğü gibi Δ, köşeleri v_1, v_2, v_3 ve bu köşelerdeki açıları $\dfrac{\pi}{m_1}, \dfrac{\pi}{m_2}, \dfrac{\pi}{m_3}$ ve köşelerin karşısındaki kenarları M_1, M_2, M_3 olan bir $\mathbb{H}$-üçgen olsun.

R_i , M_i'yi $(i=1,2,3)$ içeren $\mathbb{H}$-doğrusundaki yansıma olsun. Γ^* da R_1, R_2, R_3 yansımaları tarafından üretilen grup olsun. $R_i \notin \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ olduğundan Γ^* bir Fuchsian grup değildir. Fakat $\Gamma=\Gamma^{*}\cap PSL(2,\mathbb{R})$ yi göz önüne alırsak Γ^{*} , Γ grubundaki yan sınıfın birleşimidir. O halde genellikten bir şey kaybetmeden bu ifadeyi $\Gamma^{*}\cup R_1\Gamma$ şeklinde alabiliriz. Eğer $S\in\Gamma^{*}\setminus\Gamma$ ise bu durumda R_1S , iki ters konformal homeomorfizmin bileşkesidir. Böylece R_1S konformdur ve $R_1S\in PSL(2,\mathbb{R})$ dir. Yine $R_1S\in\Gamma^{*}$ olup $R_1S\in\Gamma$ ve $S=R_1(R_1S)\in R_1\Gamma$ dır.

Δ üçgeninin R_1 $\mathbb{H}$-yansıması altındaki görüntüsü, kenarları $R_1(M_1)=M_1$, $R_1(M_2)$, $R_1(M_3)$ olan $R_1(\Delta)$ $\mathbb{H}$-üçgenidir. $R_1R_2R_1^{-1}$ noktasal olarak $R_1(M_2)$’yi sabit bıraktığından , $R_1(M_2)$ de bir $\mathbb{H}$-yansımasıdır. Bu yansımayla $R_1(\Delta)$ aşağıdaki şekilde olduğu gibi $R_1R_2R_1^{-1}(R_1(\Delta))=R_1R_2(\Delta)$’ ya dönüştürülür.



Şekil 1.5. $R_1(\Delta)$, $R_1R_2(\Delta)$ $\mathbb{H}$-üçgenleri

Aynı şekilde devam edildiğinde v_3 köşesi etrafında çevrilen hiperbolik üçgenlerin Δ , $R_1(\Delta)$, $R_1R_2(\Delta)$, $R_1R_2R_1(\Delta),\ldots,$ $(R_1R_2)^{m_3-1}(\Delta)$ olduğu görülür. v_3 köşesini sabit bırakan iki $\mathbb{H}$-yansımanın bir çarpımı olan R_1R_2 , v_3 etrafında bir $2\pi/m_3$ açısı kadar bir hiperbolik dönme olarak göz önüne alınabilir ve böylece $(R_1R_2)^{m_3}=I$ bulunur.

Burada $\{T(\Delta):T\in\Gamma^{*}\}$ kümesinin $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemin bir gösterimini oluşturduğu gösterilebilir. Yani Δ üçgeninin Γ^{*} görüntüleri birbirini örtmez ve $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemin her bir noktası Δ’nın bir Γ^{*} görüntüsüne aittir.

Şimdi p, Δ'nın herhangibir noktası olsun. Bu durumda p noktasının Γ^* görüntüleri, döşemenin diğer üçgenlerinin karşılık gelen noktalarıdır. O halde bunlar bir ayrık küme oluştururlar. Böylece $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemin her bir noktasının Γ yörüngesi bir ayrık kümedir. Dolayısıyla Γ bir Fuchsian gruptur. İşte bu yolla inşa edilen bir Fuchsian grubuna bir üçgen grup adı verilir. Açık olarak,

$$R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = \left(R_1R_2\right)^{m_3} = \left(R_2R_3\right)^{m_1} = \left(R_1R_3\right)^{m_2} = I$$

bağıntısı bulunur. Bu durumda Γ grubunda , $X = R_1R_2$ ve $Y = R_2R_3$ alınırsa

$$X^{m_3} = Y^{m_1} = \left(XY\right)^{m_2} = I$$

sonucu elde edilir ve buradan Γ grubundaki bütün bağıntılar bulunabilir. Grup teorisinde Γ grubunun gösterimi;

$$\Gamma = \left\langle X,Y \mid X^{m_3} = Y^{m_1} = \left(XY\right)^{m_2} = I\right\rangle$$

şeklindedir. Buna göre $\pi / m_1, \pi / m_2, \pi / m_3$ açılarına sahip Δ $\mathbb{H}$-üçgeninden elde edilen Γ üçgen grubu m_1, m_2, m_3 doğal periyotlarına sahiptir.

Bir üçgen grup (l, m, n) ile gösterilir, burada l, m, n $\in \mathbb{Z}^+$ veya ∞'dur ve

$$\left\{x, y, z \,:\, x^l = y^m = z^n = xyz = 1\right\}$$

bağıntısına sahiptir. Geometrik bir yorum için, bir X uzayında $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$ açılı bir Δ üçgeni göz önüne alındığında, burada X küre, Euclid düzlemi ya da hiperbolik düzlemdir. Bu durumda Δ nın kenarlarında X in yansımaları tarafından üretilen grup 2-indeksli bir alt gruba sahiptir ve (l, m, n)'ye izomorf konform dönüşümlerden meydana gelir. X uzayı l, m, n pozitif tam sayıları tarafından belirlenir ve

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1 \quad \text{ise Küre,}$$

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1 \quad \text{ise Euclid Düzlemi,}$$

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1 \quad \text{ise Hiperbolik Düzlemdir.}$$

Γ grubunu bir üçgen grup olarak ele alırsak, $\Gamma \cong (2, 3, \infty)$ izomorfizması elde edilir.

Teorem 1.7 [16]**.** Γ , $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket eder.

İspat. $\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in\widehat{\mathbb{Q}}$; $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$ ve $(a,b)=(c,d)=1$ olsun. Bu durumda $a\alpha-b\beta=1$ ve $c\delta-d\gamma=1$ olacak şekilde $\alpha,\beta,\delta,\gamma\in\mathbb{Z}$ tam sayıları vardır. Burada $\xi(z)=\dfrac{az+\beta}{bz+\alpha}$ ve $\eta(z)=\dfrac{cz+\gamma}{dz+\delta}$ şeklinde tanımlanırsa $\xi(\infty)=\frac{a}{b}$ ve $\eta(\infty)=\frac{c}{d}$ olacak şekilde bir $\varphi:=\eta\xi^{-1}\in\Gamma$ dönüşümü vardır. Dolayısıyla Γ, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket eder.■

Teorem 1.8. Γ grubunun ∞ noktasının sabitleyeni Γ_∞ sonsuz devirli bir gruptur.

İspat. $\mathrm{T}\in\Gamma$ ve $\mathrm{T}(\infty)=\infty$ olsun. $\mathrm{T}(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ise $\mathrm{T}(\infty)=\infty$ olduğundan $c=0$ ve $ad=1$ dir. Buradan $\mathrm{T}(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}=a^2z+m=z+m$ $(m=b$ veya $m=-b)$ bulunur. Dolayısıyla $\mathrm{W}(z)=z+1$ olmak üzere $\Gamma_\infty=\left\langle\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$ dir.■

1.6. Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları

Tanım 1.27. N pozitif tam sayı olmak üzere Γ grubunun temel kongrüans alt grubu

$$\Gamma(\mathrm{N}):=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma\ \middle|\ a\equiv d\equiv 1\left(\operatorname{mod}\mathrm{N}\right),\ b\equiv c\equiv 0\left(\operatorname{mod}\mathrm{N}\right)\right\}$$

ile tanımlanır. Γ grubunun $\Gamma(\mathrm{N})$ temel kongrüans alt gruplarını içeren herhangi bir alt kümesine kongrüans alt grubu denir. Üzerinde en çok çalışılan bazı kongrüans alt grupları;

$$\Gamma_1(\mathrm{N}):=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma\ \middle|\ a\equiv d\equiv 1\left(\operatorname{mod}\mathrm{N}\right),\ c\equiv 0\left(\operatorname{mod}\mathrm{N}\right)\right\}$$

$$\Gamma_0(\mathrm{N}):=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma\ \middle|\ c\equiv 0\ \left(\operatorname{mod}\mathrm{N}\right)\right\};\ \Gamma^0(\mathrm{N}):=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma\ \middle|\ b\equiv 0\left(\operatorname{mod}\mathrm{N}\right)\right\}$$

gruplarıdır. $N \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\Gamma(N) \leq \Gamma_1(N) \leq \Gamma_0(N) \leq \Gamma$ biçimindedir.

Ayrıca Γ(N), Γ grubunun normal bir alt grubudur, dolayısıyla Γ(N) grubu $\Gamma_0(N)$ ve $\Gamma_1(N)$ grubunun da normal alt grubudur. Diğer taraftan $\Gamma_1(N) \lhd \Gamma_0(N)$ dir. Buna göre indeksler $N > 2$ için

$$\mu_0(N) := |\Gamma : \Gamma_0(N)| = N\prod_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right) \quad , \quad |\Gamma : \Gamma_1(N)| = \frac{N^2}{2}\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^2}\right),$$

$$\frac{\mu(N)}{2} := |\Gamma : \Gamma(N)| = \frac{N^3}{2}\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$$

dir.

$N = 2$ durumunda $|\Gamma : \Gamma_0(2)| = 3$, $|\Gamma : \Gamma_1(2)| = 3$, $|\Gamma : \Gamma(2)| = 6$ biçimindedir. $N > 2$ için yukarıda verilen indekslerden aşağıdaki sonuçlar kolayca elde edilir;

$$|\Gamma_0(N) : \Gamma_1(N)| = \frac{|\Gamma : \Gamma_1(N)|}{|\Gamma : \Gamma_0(N)|} = \frac{N}{2}\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{\varphi(N)}{2} \;\; ; \;\; |\Gamma_1(N) : \Gamma(N)| = \frac{|\Gamma : \Gamma(N)|}{|\Gamma : \Gamma_1(N)|} = N.$$

$\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$ ve $\Gamma(N)$ gruplarının cusp kümesi de $\widehat{\mathbb{Q}}$'dır. Çünkü gruplar Γ grubunun sonlu indeksli alt gruplarıdır ve bir Λ Fuchsian grubunun sonlu indeksli herhangi bir alt grubu da Λ ile aynı cusp kümesine sahiptir [25].

Teorem 1.9. $N > 1$ olmak üzere $\Gamma_0(N)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif değildir.

İspat. Aksini varsayalım ve $0, \infty \in \widehat{\mathbb{Q}}$ seçelim. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde bir $\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ elemanı vardır. Bu eşitlikten $b = 1$ ve $d = 0$ elde edilir. Determinant göz önüne alındığında bunun $c = -1$ ve $N = 1$ olmasıyla, diğer bir ifadeyle ancak $\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ olması durumunda mümkün olduğu görülür.■

1.7. Temel Bölgenin Cinsi

Bir kompakt, yönlendirilebilir X Riemann yüzeyini göz önüne alalım. X'de reellerin kapalı birim aralığının bir homeomorf resmine X üzerinde bir basit yay adı verilir. Bir yayın bitim noktası ile bir sonrakinin başlangıç noktasının birleşimiyle oluşan yayların sonlu bir dizisine X üzerinde bir eğri denir.

Bir eğrinin başlangıç noktası ile bitim noktası çakışıyorsa bu eğriye bir kapalı eğri adı verilir. Öklid düzlemindeki bir kapalı dairenin X'deki bir homeomorf resmine X üzerinde bir poligon adı verilir.

Şimdi $\Im$, X üzerinde sonlu sayıdaki noktada kesişen sonlu sayıda eğrinin meydana getirdiği bir sistem olsun. Ayrıca $\Im$'nın bütünleyenlerinin bağlantılı bileşenlerinin kapanışları poligonlar olsun ve kesişimleri de ya tek bir nokta ya tek bir kenar ya da boş küme olsun. Eğrilerin böyle bir sistemine X'in bir poligonal ayrışması denir.

Bir poligonal ayrışmada meydana gelen köşe, kenar ve yüz anlamları açıktır. Bunların sayısını sırasıyla *v*, *e* ve *f* ile gösterilir.

Teorem 1.10 [29]. X'in her poligonal ayrışmasında $v-e+f$ sayısı invaryant kalır.■

Tanım 1.28. $g:=1-\dfrac{v-e+f}{2}$ kesişimleri boş olan ve X'i ayrıştırmayan kapalı eğrilerin maksimal sayısıdır. Bu önemli topolojik invaryanta X'in cinsi (genus) denir.

Teorem 1.11 [29]. $\Gamma_0(\mathrm{N})$ kongrüans alt grubunun temel bölgesinin cinsi

$$g=1+\frac{\mu_0(\mathrm{N})}{12}-\frac{\varepsilon_\rho}{3}-\frac{\varepsilon_i}{4}-\frac{\sigma_\infty}{2}$$

dir. Burada

$$\varepsilon_\rho=\begin{cases}0 & , \ 9\mid \mathrm{N}\\ \displaystyle\prod_{p\mid \mathrm{N}}\left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right) & , \ 9\nmid \mathrm{N}\end{cases} \quad , \quad \varepsilon_i=\begin{cases}0 & , \ 4\mid \mathrm{N}\\ \displaystyle\prod_{p\mid \mathrm{N}}\left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\right) & , \ 4\nmid \mathrm{N}\end{cases}$$

dir ve $\sigma_\infty=\sum\limits_{t\mid \mathrm{N}}\varphi\left(\left(t,{}^{\mathrm{N}}\!/_{t}\right)\right)$ biçimindedir . φ Euler fonksiyonu olmak üzere,

$$\left(\frac{-3}{p}\right):=\begin{cases}0 & , \quad p=3\\ 1 & , \quad p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, 3)\\ -1 & , \quad p\equiv 2\ (\mathrm{mod}\, 3)\end{cases} \quad , \quad \left(\frac{-1}{p}\right):=\begin{cases}0 & , \quad p=2\\ 1 & , \quad p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ -1 & , \quad p\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)\end{cases}$$

dir.■

N≤ 25 için elde edilen sonuçları verelim;

$\mathrm{N}=1, \ldots, 10, 12, 13, 16, 18, 25$ için; $g=0$

$\mathrm{N}=11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24$ için; $g=1$

$\mathrm{N}=22, 23$ için; $g=2$ dir.

1.8. Bazı Kongrüans Alt Gruplarının Normalliyenleri

Teorem 1.12 [12]. $\Gamma(\mathrm{N})$ grubunun $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$'deki normalliyeni Γ 'dır.■

Teorem 1.13 [12]. $\Gamma_1(\mathrm{N})$ grubunun Γ 'daki normalliyeni $\begin{cases}\Gamma_0(\mathrm{N}), & \mathrm{N}\neq 4\\ \Gamma_0(2), & \mathrm{N}=4\end{cases}$ dir.■

Teorem 1.14 [1]. $\Gamma_0(\mathrm{N})$ grubunun $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$'deki normalliyeni

$$\mathrm{N}_{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0(\mathrm{N})\right):=\left\{\begin{pmatrix} ae & b/h \\ c\mathrm{N}/h & de\end{pmatrix} : ade^2 - bc\mathrm{N}/h^2 = e > 0\right\}$$

dir. Buradaki bütün harfler tam sayı, $e \,\|\, \mathrm{N}/h^2$ ve h, $h^2 \mid \mathrm{N}$ şartını sağlayan 24'ün en büyük bölenidir. ($r \,\|\, s$ yani r , s'nin bir tam bölenidir $:\Leftrightarrow \left(r, s/r\right)=1$ dir).■

Teorem 1.15 [4]. N keyfi bir pozitif tam sayı olsun. Bu durumda $\mathrm{N}_{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0(\mathrm{N})\right)$ yalnızca 2, 3, 4 ve 6 mertebeli periyotlara sahip olabilir ve üstelik

(a) $\mathrm{N}_{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0(\mathrm{N})\right)$, 4. mertebeden en çok bir periyoda sahiptir. $\mathrm{N}_{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0(\mathrm{N})\right)$ nin 4. mertebeden bir periyoda sahip olması için gerek ve yeter şart,

$N/h^2 = 2p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$ ve $i=2,\dots,r$ olmak üzere, $2 \,||\, N/h^2$ ve $p_i \equiv 1 (\bmod 4)$ olmasıdır.

(b) $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$, 6. mertebeden en çok bir periyoda sahiptir. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$ nin 6. mertebeden bir periyoda sahip olması için gerek ve yeter şart,

$N/h^2 = 3p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$ ve $i=2,\dots,r$ olmak üzere, $3 \,||\, N/h^2$ ve $p_i \equiv 1 (\bmod 3)$ olmasıdır.

(c) $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$, 3. mertebeden en çok bir periyoda sahiptir. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$ nin 3. mertebeden bir periyoda sahip olması için gerek ve yeter şart,

$N/h^2 = p_3^{\alpha_3}...p_r^{\alpha_r}$ ve $i=3,\dots,r$ olmak üzere, $p_i \equiv 1 (\bmod 3)$ olmasıdır.■

Teorem 1.16 [4]. $N \in \mathbb{Z}$ keyfi ve $N = 2^{\alpha}3^{\beta}p_1^{\gamma_1}\dots p_n^{\gamma_n}$ asal çarpanlarına parçalanışı olsun. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$'nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket etmesi için gerek ve yeter şart

$$\alpha \leq 7,\ \beta \leq 3 \ \text{ ve } \ \gamma_i \leq 1 \quad : \quad i = 1,\dots,n$$

olmasıdır.■

Teorem 1.17 [26]. ρ, N/h^2 nin farklı asal çarpanlarının sayısı olsun ve

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 1 \ ; & 2^2, 2^4, 2^6 \,||\, N \\ 0 \ ; & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad , \quad \varepsilon_2 = \begin{cases} 1 \ ; & 9 \,||\, N \\ 0 \ ; & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere $\tau = \left(\frac{3}{2}\right)^{\varepsilon_1} . \left(\frac{4}{3}\right)^{\varepsilon_2}$ olsun. Bu takdirde $\Gamma_0(N)$'nin $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$'deki indeksi $\left| N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N)) : \Gamma_0(N) \right| = 2^{\rho}h^2\tau$ dur.■

Sonuç 1.1 [26]. $2^{\rho}h^2\tau = 2^{r}h^2 s$ eşitliği kolayca elde edilir, burada r N sayısının farklı asal çarpanlarının sayısı ve

$$s_2 = \begin{cases} 3/4 \ , & 2|\left(h(2^{\alpha})\right)^2 \,||\, N \\ 1 \ , & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad , \quad s_3 = \begin{cases} 2/3 \ , & \left(h(3^{\beta})\right)^2 = 9 \,||\, N \\ 1 \ , & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere $s = s_2.s_3$ şeklindedir.

Lemma 1.1. Bir $\frac{k}{s} \in \mathbb{Q}$ $(s \neq 0)$, $(k,s)=1$ rasyonel sayısı verildiğinde $\mathrm{A}\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ s_1 \end{pmatrix}$, $s_1 \,|\, \mathrm{N}$ koşulunu sağlayan bir $\mathrm{A} \in \Gamma_0(\mathrm{N})$ vardır.

İspat. $\begin{pmatrix} a & b \\ c\mathrm{N} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak+bs \\ \mathrm{N}ck+ds \end{pmatrix}$ dir. Buna göre

$$\mathrm{N}ck + ds = (\mathrm{N}, s) \tag{1*}$$

eşitliğini sağlayan $\{c,d\}$ çiftlerini buluruz, dolayısıyla $s_1 = (\mathrm{N}, s)$ isteneni sağlar. $\left(\frac{\mathrm{N}k}{(\mathrm{N},s)}, \frac{s}{(\mathrm{N},s)}\right) = 1$ olduğundan (1*) eşitliğini sağlayan bir $\{c_0, d_0\}$ çifti mevcuttur. Bu yüzden (1*) denkleminin genel çözümü;

$$\left.\begin{aligned} c &= c_0 + \frac{s}{(\mathrm{N},s)^{\mathrm{n}}} \\ d &= d_0 - \frac{\mathrm{N}k}{(\mathrm{N},k)^{\mathrm{n}}}, \ \mathrm{n} \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \tag{2*}$$

olarak elde edilir.

$\mathrm{N} = q_0^{\alpha_0} q_1^{\alpha_1} \ldots q_{k_0}^{\alpha_{k_0}}$, N'nin asal çarpanlara parçalanışı olsun. Hem (2*) denklemindeki koşulları sağlayan, hem de $(\mathrm{N}c_*, d_*) = 1$ şartını sağlayan bir $\{c_*, d_*\}$ çiftinin var olduğunu göstermek zorundayız. $(d_0, \mathrm{N}) = 1$ ise ispatlamaya değer bir şey yoktur. $(d_0, \mathrm{N}) > 1$ ise d_0, N ile ortak bölene sahiptir, buna q_0 diyelim.(1*) eşitliğinden dolayı $\left(q_0, \frac{\mathrm{N}k}{(\mathrm{N},s)}\right) = 1$ dir, bu yüzden (2*) denkleminde $\mathrm{n}=1$ alarak $q_0 \nmid d_1$ şartını sağlayan bir d_1 tam sayısı elde ederiz.

$(d_1, \mathrm{N}) > 1$ ise d_1, N ile bir ortak çarpana sahiptir, buna q_1 diyelim. $d_2 = d_1 - \frac{q_0 \mathrm{N}k}{(\mathrm{N},s)}$ olsun, bu durumda d_2'de q_0 ve q_1 çarpanları yoktur. $(d_2, \mathrm{N}) > 1$ ise d_2, N ile bir ortak çarpana sahiptir, buna q_2 diyelim. Bu işlem sürdürüldüğü takdirde şu sonuca ulaşılır;

$d_3 = d_2 - \frac{q_0 q_1 \mathrm{N}k}{(\mathrm{N},s)}$ (ve dolayısıyla d_3'de q_0, q_1, q_2 çarpanları yoktur)

$\vdots \qquad \vdots$

$d_{k_0+1} = d_{k_0} - \dfrac{q_0 q_1 \cdots q_{k_0-1} \mathrm{N}k}{(\mathrm{N}, s)}$ (ve dolayısıyla d_{k_0+1}'de, $q_0, q_1, \ldots, q_{k_0}$ çarpanları yoktur)

Böylece $(d_{k_0+1}, \mathrm{N}) = 1$ dir. $d_* = d_{k_0+1} + 1$ olsun ve c'ye de c_* diyelim, buna göre $(\mathrm{N}c_*, d_*) = 1$ dir. Buradan çıkan sonuç şudur; en az bir $\mathrm{A} \in \Gamma_0(\mathrm{N})$ elemanı mevcut (aslında sonsuz çoklukta) öyle ki $\mathrm{A}\left(\dfrac{k}{s}\right) = \left(\dfrac{k_1}{s_1}\right)$, $s_1 \mid \mathrm{N}$ dir.■

Lemma 1.2. $d_1 \mid \mathrm{N}$, $(a_1, d_1) = (a_2, d_1) = 1$ ve $\mathrm{A} \in \Gamma_0(\mathrm{N})$ için $\mathrm{A}\begin{pmatrix} a_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ d_1 \end{pmatrix}$ olsun. Bu takdirde $t = \left(d_1, \dfrac{\mathrm{N}}{d_1}\right)$ olmak üzere $a_1 \equiv a_2 \pmod{t}$ dir.

İspat. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c\mathrm{N} & d \end{pmatrix}$ alınırsa $\mathrm{A}\begin{pmatrix} a_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 + bd_1 \\ \mathrm{N}a_1c + dd_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ d_1 \end{pmatrix}$ dir. Bu yüzden

$$\mathrm{N}a_1c + dd_1 = d_1 \text{ veya } \frac{\mathrm{N}}{d_1}a_1c + d = 1$$

$$aa_1 - a_2 \equiv 0 \pmod{d_1} \Rightarrow aa_1 - a_2 \equiv 0 \pmod{t}$$

$\det \mathrm{A}$ ifadesinden $ad \equiv 1 \pmod{t}$ elde edilir ve yukarıdan $d \equiv 1 \pmod{t}$ dir.Bu yüzden $a \equiv 1 \pmod{t}$ dir. $aa_1 - a_2 \equiv 0 \pmod{t}$ olduğundan $a_1 \equiv a_2 \pmod{t}$ dir.■

Lemma 1.3 [1]. $d \mid \mathrm{N}$ ve $(a_1, d) = (a_2, d) = 1$ olsun. Bu durumda $t = \left(d, \dfrac{\mathrm{N}}{d}\right)$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a_1 \\ d \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a_2 \\ d \end{pmatrix}$ $\Gamma_0(\mathrm{N})$ altında eşleniktir $\Leftrightarrow a_1 \equiv a_2 \pmod{t}$.

İspat . Lemma 1.1. ve Lemma 1.2. den ispat aşikardır.■

Teorem 1.18 [4]. $d \mid \mathrm{N}$ olsun. $\dfrac{a}{d}$' nin $\Gamma_0(\mathrm{N})$ grubu ile hareketi sonucu oluşan yörünge

$$\binom{a}{d} = \left\{ \frac{x}{y} \in \hat{\mathbb{Q}} \ : \ (\mathrm{N}, y) = d, \ \ a \equiv x\frac{y}{d} \bmod\left(d, \frac{\mathrm{N}}{d} \right) \right\}$$

kümesidir. Üstelik $d \mid \mathrm{N}$ olmak üzere $\binom{a}{d}$ yörüngelerinin sayısı $\sum_{d|\mathrm{N}} \varphi\left(\left(d, \mathrm{N}/d\right)\right)$ dir, burada φ-Euler fonkiyonudur.■

1.9. İmprimitif Hareket

Tanım 1.29. (i) $\mathrm{X} \neq \varnothing$ bir küme olsun. ξ : X→X birebir ve örten ise ξ ye X'in bir permütasyonu denir. X'in tüm permütasyonlarının kümesi S^{X} ile gösterilir.

(ii) $\xi_1, \xi_2 \in \mathrm{S}^{\mathrm{X}}$ ise $\xi_1 o \xi_2 \in \mathrm{S}^{\mathrm{X}}$ olduğu açıktır. S^{X} grubuna X üzerinde simetrik grup denir. S^{X} grubunun alt gruplarına da X üzerinde permütasyon grupları denir.

Tanım 1.30. G, X üzerinde bir permütasyon grubu olsun. Bu takdirde G, X üzerinde hareket eder. Gerçekten $g \in \mathrm{G}$ ise g:G→G birebir ve örten bir dönüşümdür. Bu durumda $gx := g(x)$ olarak alınırsa $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ ve $1x = x$ olduğu açıktır. Bu harekete G grubunun X üzerindeki doğal hareketi denir ve "(G,X) permütasyon grubu" ifadesi kullanılır. Ayrıca G, X üzerinde transitif olarak hareket ediyorsa (G,X) ikilisine transitif permütasyon grubu adı verilir.

Tanım 1.31. (G,X) bir transitif permütasyon grubu ve "$\approx$" X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $x,y \in \mathrm{X}$ için $x \approx y$ olduğunda $\forall g \in \mathrm{G}$ için $g(x) \approx g(y)$ ise "$\approx$" bağıntısına bir G invaryant denklik bağıntısı denir.

Tanım 1.32. Bir G invaryant denklik bağıntısının denklik sınıflarına blok adı verilir. Bu tanıma göre;

i) Özdeşlik bağıntısı: $x \approx y \Leftrightarrow x = y$

ii) Evrensel bağıntı: $\forall x,y \in \mathrm{X}$ için $x \approx y$

bağıntılarının G invaryant denklik bağıntıları olduğu açıktır. Bu bağıntılara trivial bağıntılar adı verilir.

Tanım 1.33 [8]**.** X üzerinde yukarıdaki aşikâr bağıntıların dışında bir G invaryant denklik bağıntısı yoksa (G,X)'e primitif, aksi halde imprimitif denir.

Lemma 1.4 [8]**.** (G,X) bir transitif permütasyon grubu olmak üzere $\mathrm{H} \leq \mathrm{G}$ ve bir $\alpha \in \mathrm{X}$ için $\mathrm{G}_\alpha \leq \mathrm{H}$ olsun. Bu takdirde $g \in \mathrm{G}$, $h \in \mathrm{H}$ için

$$g(\alpha) \approx gh(\alpha)$$

bir G invaryant denklik bağıntısıdır. Ayrıca

$$"\approx" \text{ özdeşlik bağıntısıdır} \Leftrightarrow \mathrm{H} = \mathrm{G}_\alpha\,,\quad "\approx" \text{ evrensel bağıntıdır} \Leftrightarrow \mathrm{H} = \mathrm{G} \text{ dir.}\blacksquare$$

Lemma 1.5 [8]**.** (G,X) bir transitif permütasyon grubu olsun. (G,X) hareketi primitiftir $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathrm{X}$ için G_x, X'in maksimal bir alt grubudur.■

Teorem 1.19 [8]**.** (G,X) bir transitif permütasyon grubu olsun. $\mathrm{G}_\alpha \lneq \mathrm{H} \lneq \mathrm{G}$ ise

$$g(\alpha) \approx h(\alpha) \;\Leftrightarrow\; g^{-1}h \in \mathrm{H}$$

iyi tanımlı bir G invaryant denklik bağıntısıdır. Denklik sınıflarının sayısı da $|\mathrm{G}:\mathrm{H}|$ indeksidir.■

$\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}, \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olsun. Γ, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $\mathrm{T}(\infty) = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}$, $\mathrm{S}(\infty) = \frac{x}{y}$ olacak biçimde $\mathrm{T,S} \in \Gamma$ elemanları vardır. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\mathrm{r} & * \\ \varepsilon_1\mathrm{s} & * \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 x & * \\ \varepsilon_2 y & * \end{pmatrix}$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$ olmak üzere sırasıyla T ve S nin matris gösterimleri olsunlar. $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow \mathrm{T}^{-1}\mathrm{S} \in \Gamma_0(\mathrm{N})$ ve $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ -\varepsilon_1\mathrm{s} & -\varepsilon_1\mathrm{r} \end{pmatrix}$ olmak üzere $\begin{pmatrix} * & * \\ -\varepsilon_1\mathrm{s} & -\varepsilon_1\mathrm{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_2 x & * \\ \varepsilon_2 y & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \varepsilon_1\varepsilon_2(\mathrm{r}y - \mathrm{s}x) & * \end{pmatrix}$ ifadesi $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}$ dönüşümünün matris gösterimi olduğundan $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow \mathrm{r}y - \mathrm{s}x \equiv 0 \pmod{\mathrm{N}}$ elde edilir.

Lemma1.6. $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow \exists \mathrm{u} \in \mathrm{U}_{\mathrm{N}}$ birimler kümesi öyle ki $x \equiv \mathrm{ur} \pmod{\mathrm{N}}$, $y \equiv \mathrm{us} \pmod{\mathrm{N}}$.

İspat: "$\Leftarrow$": Açık.

"$\Rightarrow$": $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}} \approx \frac{x}{y}$ yani $\mathrm{r}y - \mathrm{s}x \equiv 0 \pmod{\mathrm{N}}$ olsun. Buradan $\mathrm{r}y \equiv \mathrm{s}x \pmod{\mathrm{N}}$ dir. İlk önce varsayalım ki $(\mathrm{r},\mathrm{N}) = 1$ ve $(\mathrm{s},\mathrm{N}) = 1$ olsun. $(\mathrm{s},\mathrm{N}) = 1$ ise $\exists \mathrm{u}_1 \in \mathrm{U}_{\mathrm{N}}$ öyle ki $\mathrm{u}_1\mathrm{s} \equiv 1 \pmod{\mathrm{N}}$ dir. Dolayısıyla $\mathrm{u}_1\mathrm{s}x \equiv \mathrm{u}_1\mathrm{r}y \pmod{\mathrm{N}}$ ve buradan $x \equiv \mathrm{u}_1\mathrm{r}y \pmod{\mathrm{N}}$ dir. Keza $(y,\mathrm{N}) = 1$ olduğundan $\exists \mathrm{u} \in \mathrm{U}_{\mathrm{N}}$ öyle ki $\mathrm{u}_1 y \equiv \mathrm{u} \pmod{\mathrm{N}}$ ve $x \equiv \mathrm{ur} \pmod{\mathrm{N}}$ dir. $\mathrm{r}y \equiv \mathrm{s}x \pmod{\mathrm{N}}$ ise $\mathrm{r}y \equiv \mathrm{su}_1\mathrm{r}y \pmod{\mathrm{N}}$ olduğundan dolayı $\mathrm{r}y \equiv \mathrm{usr} \pmod{\mathrm{N}}$ dir. Sonuç olarak $y \equiv \mathrm{us} \pmod{\mathrm{N}}$ elde edilir. ■

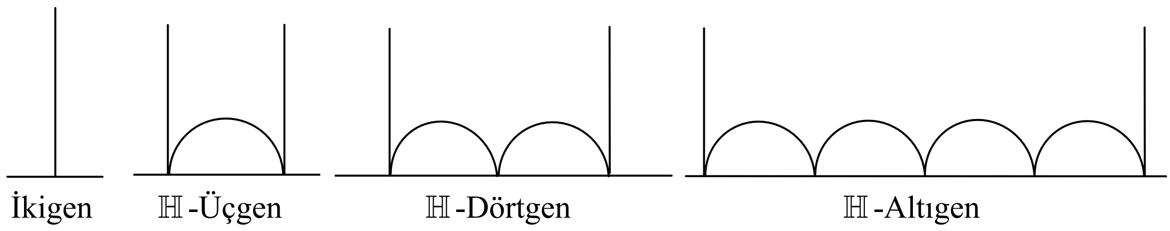
1.10. Graf Teori

Tanım 1.34. $\mathrm{X} \neq \varnothing$ bir küme, $\Delta \subset \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ bir bağıntı olsun. $\mathrm{G} = (\mathrm{X},\Delta)$ ikilisine bir graf (graph) denir. X'in elemanlarına grafın köşeleri ve Δ'nın elemanlarına grafın kenarları adı verilir. $(a,b) \in \Delta$ ise bu durum $a \to b$ ile gösterilir. Eğer $(a,b) \in \Delta$ veya $(b,a) \in \Delta$ ise a ile b bir kenar ile bağlanmıştır denir. Bu durumda a ve b ye komşu köşeler denir.

Tanım 1.35. $\mathrm{G} = (\mathrm{X},\Delta)$ bir graf ve $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ olsun. $\mathrm{G}' = (\mathrm{A}, \Delta \cap \mathrm{A} \times \mathrm{A})$ grafına köşe kümesi A olan G'nin bir alt grafı adı verilir.

Tanım 1.36. $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ bir G grafının köşelerinin bir dizisi olsun. Eğer $1 \leq i \leq n$ için a_{i-1} ve a_i bir kenar ile bağlanmışlarsa a'dan b'ye n uzunluğunda bir yol vardır denir. Eğer $a = b$ ve $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ köşelerinin tümü farklı ise bu yola n kenarlı bir devre (circuit) denir. Ayrıca a_i, a_{i+1} ikilileri için $a_i \to a_{i+1}$ ise bu devreye yönlenmiş bir devre denir. Üç kenarlı bir devreye bir üçgen, dört kenarlı bir devreye bir dörtgen ve altı kenarlı bir devreye bir altıgen denir.

Tanım 1.37. $n \geq 3$ olmak üzere n kenarlı bir devre içermeyen grafa orman adı verilir. Graf hiperbolik doğruların bir birleşimidir.



Şekil 1.6. Devreler

Tanım 1.38. $G=(X,\Delta)$ bir graf olsun. X üzerinde bir "$\approx$" bağıntısını şöyle tanımlayalım:

"$a \approx b$:$\Leftrightarrow$ $a=b$ veya a'dan b'ye bir yol vardır ".

Açık olarak, "$\approx$" bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.39. (i) X'in kendisi bu "$\approx$" bağıntısı altında denklik sınıfı ise G grafına bağlantılıdır denir.

(ii) Eğer X_1 "$\approx$" bağıntısı altında bir denklik sınıfı ise $(X_1, \Delta \cap X_1 \times X_1)$ bağlantılı bir graftır ve bu grafa G grafının bağlantılı bileşeni denir.

İki grafın köşeleri arasında birebir ve örten bir dönüşüm mevcut ve bu dönüşüm komşu köşeleri, komşu köşelere gönderiyorsa bu iki grafa izomorf graflar denir [29].

1.11. Alt Yörüngesel Graflar

Tanım 1.40. (G,X) bir transitif permütasyon grubu olsun. G'nin X×X üzerindeki hareketini $g \in G$ olmak üzere

$$g:(\alpha,\beta) \rightarrow (\, g(\alpha),\; g(\beta)\,)\,,\; (\alpha,\beta) \in X \times X$$

ile tanımlayalım. Bu hareketin yörüngelerine G'nin alt yörüngeleri denir. (α,β)'yı içeren alt yörüngeyi $\mathcal{O}(\alpha,\beta)$ ile gösterelim.

$\mathcal{O}(\alpha,\beta)$'dan bir $G(\alpha,\beta)$ alt yörüngesel grafını aşağıdaki gibi elde edelim:

$G(\alpha,\beta)$'nın köşeleri X' in elemanlarıdır. Yukarıda da verildiği gibi $x, y \in X$ noktaları için $(x, y) \in \mathcal{O}(\alpha,\beta)$ ise x'den y'ye yönlenmiş bir kenar vardır ve bu durum $x \to y$ olarak gösterilir. Bu kenarı $\mathcal{U}$ üst yarı düzleminde bir hiperbolik geodezik olarak çizebiliriz.

Açık olarak $\mathcal{O}(\beta,\alpha)$'da alt yörüngedir. $\mathcal{O}(\alpha,\beta) = \mathcal{O}(\beta,\alpha)$ veya $\mathcal{O}(\alpha,\beta) \neq \mathcal{O}(\beta,\alpha)$'dır.

(i) $\mathcal{O}(\alpha,\beta) = \mathcal{O}(\beta,\alpha)$ ise $G(\alpha,\beta) = G(\beta,\alpha)$ dır ve bu graf karşılıklı yönlendirilmiş kenarlardan oluşur. Yani, $G(\alpha,\beta)$ grafında $x \to y$ ise yine $G(\alpha,\beta)$ grafında $y \to x$ dir. Bu durumda $G(\alpha,\beta)$ grafına kendisiyle eşleşmiş graf denir.

(ii) $\mathcal{O}(\alpha,\beta) \neq \mathcal{O}(\beta,\alpha)$ ise $G(\beta,\alpha)$, $G(\alpha,\beta)$'nın oklarının ters yönlendirilmişlerinden oluşur. Yani, $G(\alpha,\beta)$ grafında $x \to y$ ise $G(\beta,\alpha)$ grafında $y \to x$ dir. Bu durumda ise $G(\alpha,\beta)$ ve $G(\beta,\alpha)$ graflarına birbirleriyle eşleşmiş graflar denir.

$\mathcal{O}(\alpha,\alpha) = \{(x,x) : x \in X\}$, $X \times X$'in köşegenidir. $\mathcal{O}(\alpha,\alpha)$'ya uygun $G(\alpha,\alpha)$ alt yörüngesel grafına aşikâr alt yörüngesel graf denir. Bu graf her bir köşesi $\alpha \in X$ olan bir atlamadan ibarettir.

G, X üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden blokları transitif olarak permüte eder, dolayısıyla alt grafların hepsi izomorftur.

Önerme 1.5 [17]**.** G^*, (G,X) transitif permütasyon grubu için bir alt yörüngesel graf olsun. Bu takdirde

(i) G, G^* ın otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder.

(ii) G, G^* ın köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder.

(iii) Eğer G^* kendisiyle eşleşmiş ise bu takdirde G, G^* ın ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder.

(iv) Eğer G^* kendisiyle eşleşmiş değil ise bu takdirde G, G^*ın kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder.■

Şimdi $G := \Gamma$ ve $X := \widehat{\mathbb{Q}}$ alalım. Γ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif olduğundan her bir alt yörünge bir $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$ için (∞, v) ikilisini ihtiva eder öyle ki $N \geq 1$ ve

$(u,N)=1$ olmak üzere $v=\dfrac{u}{N}$ dir. Bu alt yörüngeyi $\mathcal{O}_{u,N}$ ile ve buna karşılık gelen $G(\infty,v)$ alt yörüngesel grafını da $G_{u,N}$ ile gösterilir.

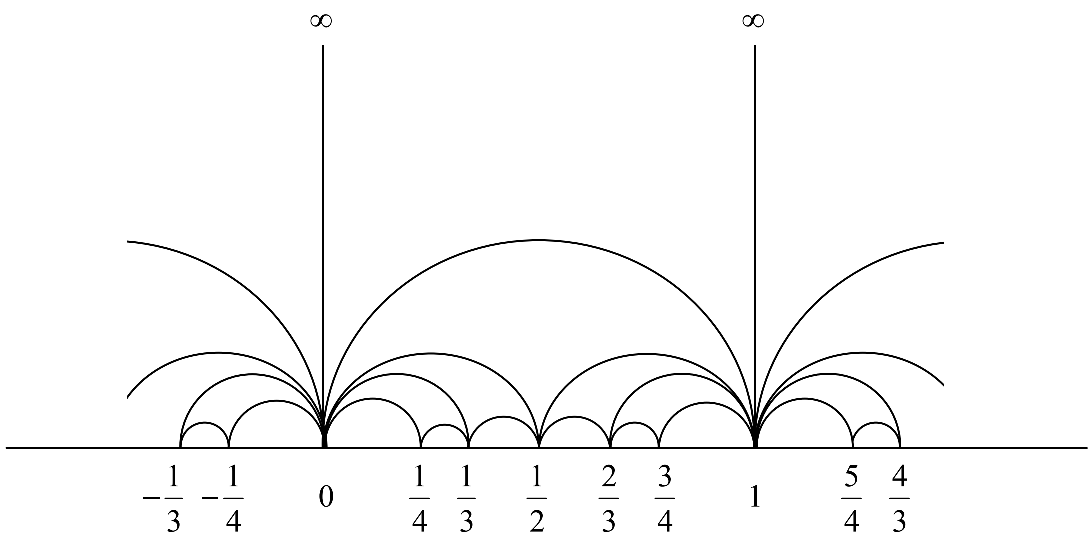
Eğer $v=\infty$ ise $G_{1,0}=G_{-1,0}$ aşikâr alt yörüngesel graftır. Böylece kabul edelim ki $v\in\mathbb{Q}$ dir. Eğer $v_1\in\mathbb{Q}$ ise bu takdirde $\mathcal{O}(\infty,v)=\mathcal{O}(\infty,v_1)\Leftrightarrow v$ ve v_1 Γ_∞'un aynı yörüngesindedir. Yani $\exists g\in\Gamma_\infty$ öyleki $g(v)=v_1$. Her bir $u\in U_N$ için $\varphi(N)$ tane farklı ayrık $G_{u,N}$ alt yörüngesel grafı vardır.

Teorem 1.20 [17]. $\dfrac{r}{s}\to\dfrac{x}{y}\in G_{u,N}$ $\Leftrightarrow$

(i) $x\equiv ur\ (\mathrm{mod}\ N)$, $y\equiv us\ (\mathrm{mod}\ N)$, $ry-sx=N$ veya

(ii) $x\equiv -ur\ (\mathrm{mod}\ N)$, $y\equiv -us\ (\mathrm{mod}\ N)$, $ry-sx=-N$

olmasıdır.■



Şekil 1.7. Farey grafı

$m\geq 1$ ve $m\in\mathbb{N}$ olsun. Bütün $\dfrac{x}{y}$, $|y|\leq m$ rasyonel sayılarından oluşan kesin monoton artan diziye m. mertebeden Farey dizisi denir. Farey dizisi F_m ile gösterilir, örneğin F_4 dizisi,

$$\ldots,-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},1,\frac{5}{4},\frac{4}{3},\ldots$$

biçimindedir. Açık olarak $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$ ve $\bigcup_{m\geq 1} F_m = \mathbb{Q}$'dur. $G_{1,1}$, Farey dizileriyle olan ilişkisinden dolayı Farey grafı olarak adlandırılır ve F ile gösterilir.

Farey grafı ile Farey dizileri arasındaki bağıntıyı veren aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 1.21. $\frac{r}{s},\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler eşdeğerdir;

(i) $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, F'de komşu köşelerdir.

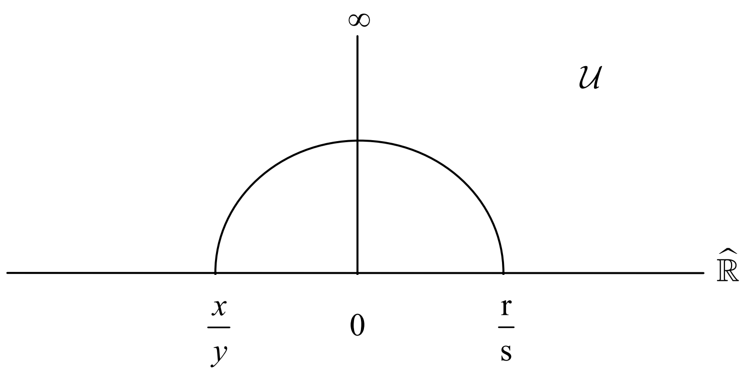
(ii) $ry - sx = \pm 1$

(iii) $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ bir m doğal sayısı için F_m'nin ardışık terimleridir. ■

F'nin komşu iki köşesini $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemde bulunan ve bu iki köşeden geçen merkezi reel eksende ve reel eksene dik yarı çemberlerle bağlayalım. Bu durumda F'nin kenarlarıyla ilgili aşağıdaki önemli sonucu verebiliriz:

Teorem 1.22[18]**.** F'nin kenarları $\mathcal{U}=\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ üst yarı düzlemde kesişmezler.

İspat. $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in F$ kenarını alalım. Burada $ry - sx = \pm 1$ dir. Kabul edelim ki 0 ile ∞'u birleştiren Re(z) = 0 doğrusu $\frac{r}{s}$'yi $\frac{x}{y}$' ye birleştiren doğruyu üst yarı düzlemde kessin.



Şekil 1.8. $\mathcal{U}$ üst yarı düzleminde kesişen doğrular

Bu takdirde $\frac{x}{y} < 0 < \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}$ alınabilir. Buna göre $\mathrm{r}y - \mathrm{s}x = 1$ olur. $x < 0$ ve $\mathrm{r}, \mathrm{s}, y > 0$ olduğundan $1 = \mathrm{r}y - \mathrm{s}x \geq 2$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişkiden F'nin kenarlarının $\mathcal{U}$ üst yarı düzleminde kesişmedikleri bulunur.■

Teorem 1.23. $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}} \to \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$ $\mathrm{G}_{\mathrm{u,N}}$ de bir kenardır ancak ve ancak $\mathrm{e} \| \mathrm{N}/\mathrm{h}^2$, $\mathrm{N}/(\mathrm{eh}) \mid \mathrm{s}$ olan bir $\mathrm{e} \in \mathbb{Z}$ vardır öyle ki ya

a) $\mathrm{ry} - \mathrm{sx} = \mathrm{N}/\mathrm{e}$ ve $\mathrm{x} \equiv \mathrm{ur}\left(\mathrm{mod}\, {}^{\mathrm{N}}\!/\!_{\mathrm{eh}}\right)$, $\mathrm{y} \equiv \mathrm{us}\left(\mathrm{mod}\, \mathrm{N}\right)$ veya

b) $\mathrm{ry} - \mathrm{sx} = -\mathrm{N}/\mathrm{e}$ ve $\mathrm{x} \equiv -\mathrm{ur}\left(\mathrm{mod}\, {}^{\mathrm{N}}\!/\!_{\mathrm{eh}}\right)$, $\mathrm{y} \equiv -\mathrm{us}\left(\mathrm{mod}\, \mathrm{N}\right)$ dir.

İspat: $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}} \to \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$ $\mathrm{G}_{\mathrm{u,N}}$ de bir kenar olsun. Bu takdirde normalliyende determinantı $\mathrm{e} \| \mathrm{N}/\mathrm{h}^2$ ve ∞'u ${}^{\mathrm{r}}\!/\!_{\mathrm{s}}$ ye ${}^{\mathrm{u}}\!/\!_{\mathrm{N}}$ yi ${}^{\mathrm{x}}\!/\!_{\mathrm{y}}$ ye resmeden bir $A = \begin{pmatrix} \mathrm{ae} & \mathrm{b}/\mathrm{h} \\ \mathrm{cN}/\mathrm{h} & \mathrm{de} \end{pmatrix}$ elemanı vardır. Böylece $\frac{\mathrm{ae}}{\mathrm{cN}/\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}$ ve $\frac{(\mathrm{aeu} + \mathrm{bN}/\mathrm{h})}{(\mathrm{cuN}/\mathrm{h} + \mathrm{deN})} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$ dir. $\mathrm{a} = \mathrm{r}$ ve $\mathrm{s} = \mathrm{cN}/\mathrm{eh}$ elde edilir. Böylece $\mathrm{N}/(\mathrm{eh}) \mid \mathrm{s}$ dir. Benzer şekilde $\mathrm{x} = \pm(\mathrm{au} + \mathrm{bN}/\mathrm{eh})$ ve $\mathrm{y} = \pm(\mathrm{cuN}/\mathrm{eh} + \mathrm{dN})$ dir.Bu durumda $\mathrm{i,j} = 0,1$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ae} & \mathrm{b}/\mathrm{h} \\ \mathrm{cN}/\mathrm{h} & \mathrm{de} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{u} \\ 0 & \mathrm{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ae} & \mathrm{aeu} + \mathrm{bN}/\mathrm{h} \\ \mathrm{cN}/\mathrm{h} & \mathrm{cuN}/\mathrm{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{\mathrm{i}}\mathrm{er} & (-1)^{\mathrm{j}}\mathrm{ex} \\ (-1)^{\mathrm{i}}\mathrm{es} & (-1)^{\mathrm{j}}\mathrm{ey} \end{pmatrix}$$

dir. $\mathrm{i} = \mathrm{j} = 0$ ise $\mathrm{x} \equiv \mathrm{ur}\ (\mathrm{mod}\, \mathrm{N}/\mathrm{eh})$, $\mathrm{y} \equiv \mathrm{us}\ (\mathrm{modN})$ ve determinanttan $\mathrm{ry} - \mathrm{sx} = \mathrm{N}/\mathrm{e}$ dir. $\mathrm{i} = 1, \mathrm{j} = 0$ (veya $\mathrm{i} = 0, \mathrm{j} = 1$) ise ikinci durum elde edilir.

Tersine a) sağlanıyorsa $\mathrm{x} = \mathrm{ur} + \mathrm{bN}/\mathrm{eh}$ ve $\mathrm{y} = \mathrm{us} + \mathrm{dN}$ olan $\mathrm{b,d} \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu durumda $\begin{pmatrix} \mathrm{re} & \mathrm{b}/\mathrm{h} \\ \mathrm{se} & \mathrm{de} \end{pmatrix}$ elemanı ∞'u ${}^{\mathrm{r}}\!/\!_{\mathrm{s}}$ ye ve ${}^{\mathrm{u}}\!/\!_{\mathrm{N}}$ yi de ${}^{\mathrm{x}}\!/\!_{\mathrm{y}}$ ye resmeder. Şayet diğer durum doğru ise işlemler benzer şekilde yapılır.

Sonuç 1.2 [17]**.** $\mathrm{u}v \equiv -1(\ \mathrm{mod}\ \mathrm{N})$ ise bu takdirde $\mathrm{G}_{\mathrm{u,N}}$ ile $\mathrm{G}_{v,\mathrm{N}}$ eşleşmiş alt yörüngesel graflardır.■

Sonuç 1.3 [17]. $G_{u,N}$ kendisiyle eşleşmiştir $\Leftrightarrow$ $u^2 \equiv -1 \pmod{N}$ dir.

İspat: $O\left(\infty, {}^{u}\!/\!_{N}\right) = O\left({}^{u}\!/\!_{N}, \infty\right)$ olsun. Bu takdirde ∞'u ${}^{u}\!/\!_{N}$ ye ve ${}^{u}\!/\!_{N}$ yi ∞'a resmeden normalliyende bir $\varphi = \begin{pmatrix} ae & {}^{b}\!/\!_{h} \\ {}^{cN}\!/\!_{h} & de \end{pmatrix}$ elemanı vardır. Bu durumda φ elemanı $\begin{pmatrix} -u & b \\ -N & u \end{pmatrix}$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $e = 1$ dir. Böylece $u^2 \equiv -1 \pmod{N}$ dir.

Tersine $u^2 \equiv -1 \pmod{N}$ olsun. Bu takdirde $u^2 = -1 + bN$ olan bir $b \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece $\begin{pmatrix} -u & b \\ -N & u \end{pmatrix}$ elemanı normalliyende olup istenilen özellikleri sağlar.■

Γ $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden blokları transitif olarak permüte eder. Dolayısıyla alt grafların hepsi birbirine izomorftur.

$F\left(\infty, \dfrac{u}{N}\right)$ ile köşeleri $[\infty] := \left\{ \dfrac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0 \pmod{N} \right\}$ bloğunun elemanları olan $G\left(\infty, \dfrac{u}{N}\right)$ alt yörüngesel grafının alt grafını göstereceğiz. Kısaca $F\left(\infty, \dfrac{u}{N}\right)$ yerine $F_{u,N}$ yazacağız.

Teorem 1.24 [17]. $\Gamma_0(N)$ $F_{u,N}$'nin köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder.■

Teorem 1.25 [17]. **(i)** $F_{u,N}$'nin her v köşesi için $v \to -v$ dönüşümü $F_{u,N}$'den $F_{-u,N}$ grafına bir izomorfizmadır.

(ii) $M|N$ ise $F_{u,N}$'nin her v köşesi için $v \to \dfrac{Nv}{M}$ dönüşümü $F_{u,N}$'den $F_{u,M}$ grafına bir izomorfizmadır.■

2.YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. N=2^3p^2 İçin $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right)$ nin Alt Yörüngesel Grafları

$p>3$ ve p asal bir sayı olmak üzere $N=2^3p^2$ için, $h=2$ olduğundan $T=\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}$ ve e||N/h^2 göz önüne alınırsa, $\det T=e=1,2,p^2,2p^2$ dir.

Yani; normalliyenin elemanları

$$T_1=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2^2p^2c & d \end{pmatrix},\ ad-2bp^2c=1 \quad ; \quad T_2=\begin{pmatrix} 2a & b/2 \\ 2^2p^2c & 2d \end{pmatrix},\ 2ad-bp^2c=1$$

$$T_3=\begin{pmatrix} ap^2 & b/2 \\ 2^2p^2c & dp^2 \end{pmatrix},\ adp^2-2bc=1 \quad ; \quad T_4=\begin{pmatrix} 2ap^2 & b/2 \\ 2^2p^2c & 2dp^2 \end{pmatrix},\ 2adp^2-bc=1$$

şeklindedir.

Lemma 2.1. $\Gamma_0(2^3p^2)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin yörüngeleri;

(i) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2^3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2^3p^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2p^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2^2p^2\end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix}1\\p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\p\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}p-1\\p\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}1\\2p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p+2\\2p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p+4\\2p\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}p+p-1\\2p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p-1\\2p\end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix}1\\2^2p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p+2\\2^2p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2^2p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p+4\\2^2p\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}p+p-1\\2^2p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p-1\\2^2p\end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix}1\\2^3p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p+2\\2^3p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2^3p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p+4\\2^3p\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}p+p-1\\2^3p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p-1\\2^3p\end{pmatrix}$

Burada toplam beş farklı türde yörünge vardır. Tüm yörüngelerinin sayısı: $\sum_{d|N}\varphi\left(\left(d\,,\,\frac{2^3p^2}{d}\right)\right)=4(p+1)$ dir.

İspat . Lemma1.1. ve Lemma 1.3. den ispat açıktır.■

Teorem 2.1. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiği maksimal alt kümelerden biri

$$\widehat{\mathbb{Q}}(2^3p^2) := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^2p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^3p^2\end{pmatrix} \text{ dir.}$$

İspat. Öncelikle $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ yörüngesinin $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right)$ ile hareketini inceleyelim.

$\begin{pmatrix}a & b/2\\ 2^2p^2c & d\end{pmatrix}$ $ad-2bp^2c=1$, elemanı göz önüne alındığında;

$\begin{pmatrix}a & b/2\\ 2^2p^2c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b/2\\ 2^2p^2c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+b\\ 2(2^2p^2c+d)\end{pmatrix}$ rasyonel sayısı elde edilir. Bu takdirde

(i) b tek olduğunda, açıkça $\dfrac{2a+b}{2(2^2p^2c+d)}\in\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

(ii) $2\|b$ olduğunda ise , $\dfrac{a+b_0}{2^2p^2c+d}\in\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2a & b/2\\ 2^2p^2c & 2d\end{pmatrix}$ $2ad-bp^2c=1$, elemanı göz önüne alındığında;

$\begin{pmatrix}2a & b/2\\ 2^2p^2c & 2d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+b/2\\ 2^2p^2c+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2a+b\\ 2^2(2p^2c+d)\end{pmatrix}$ rasyonel sayısı elde edilir. Buradan

(iii) d tek olduğunda, $\dfrac{2^2a+b}{2^2(2p^2c+d)}\in\begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix}$

(iv) $2\|d$ olduğunda, $\dfrac{2^2a+b}{2^3(p^2c+d_0)}\in\begin{pmatrix}1\\2^3\end{pmatrix}$

Böylece $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^3\end{pmatrix}$ elde edilir.

$\begin{pmatrix}ap^2 & b/2\\ 2^2p^2c & dp^2\end{pmatrix}$ $adp^2-2bc=1$, elemanı göz önüne alındığında;

$\begin{pmatrix}ap^2 & b/2\\ 2^2p^2c & dp^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2ap^2+b\\ 2p^2(2^2c+d)\end{pmatrix}$ rasyonel sayısını inceleyelim.

(v) b tek olduğunda, açıkça $\dfrac{2ap^2+b}{2p^2(2^2c+d)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2p^2 \end{pmatrix}$

(vi) $2\|b$ olduğunda ise , $\dfrac{ap^2+b_2}{p^2(2^2c+d)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ p^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2ap^2 & b/2 \\ 2^2p^2c & 2dp^2 \end{pmatrix}$ $2adp^2 - bc = 1$, elemanı göz önüne alındığında;

$\begin{pmatrix} 2ap^2 & b/2 \\ 2^2p^2c & 2dp^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ap^2+b/2 \\ 2^2p^2c+2dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2ap^2+b \\ 2^2p^2(2c+d) \end{pmatrix}$ sayısı elde edilir. Bu durumda

(vii) d tek olduğunda, $\dfrac{2^2ap^2+b}{2^2p^2(2c+d)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2^2p^2 \end{pmatrix}$

(viii) $2\|d$ olduğunda ise , $\dfrac{2^2ap^2+b}{2^3p^2(c+d_0)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2^3p^2 \end{pmatrix}$ dir.

Sonuç olarak $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiği maksimal alt kümelerden biri,

$$\widehat{\mathbb{Q}}(2^3p^2)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} 1 \\ 2^2 \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} 1 \\ 2^3 \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} 1 \\ p^2 \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} 1 \\ 2p^2 \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} 1 \\ 2^2p^2 \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} 1 \\ 2^3p^2 \end{pmatrix} \text{ dir.}\blacksquare$$

Şimdi imprimitif hareketi irdeleyelim;

$$G_\infty = N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right)_\infty = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{ve} \quad \Omega = \widehat{\mathbb{Q}}(2^3p^2)$$

$$H = N_0(2^3p^2) := \left\langle \Gamma_0(2^3p^2), \underbrace{\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2^2p^2c & d \end{pmatrix}}_{T_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2a & b/2 \\ 2^2p^2c & 2d \end{pmatrix}}_{T_2} \right\rangle$$

$$G = N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right)$$

olarak tanımlandığında,

$$N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right)_\infty \underset{\neq}{\leq} N_0(2^3p^2) \underset{\neq}{\leq} N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right) \text{ olduğu açıktır.}$$

$$T_1^2 = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2^2p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2^2p^2c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+2bp^2c & \frac{b}{2}(a+d) \\ 2^2p^2c(\underbrace{a+d}_{\text{çift}}) & 2^2bp^2c+d^2 \end{pmatrix} \in \Gamma_0\left(2^3p^2\right)$$

$$T_2^{\,2}=\begin{pmatrix}2a & b/2\\ 2^2p^2c & 2(1-a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a & b/2\\ 2^2p^2c & 2(1-a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2a^2+2bp^2c & b\\ 2^3p^2c & 2bp^2c+2^2(1-a)^2\end{pmatrix}\text{dir.}$$

$T_2^{\,2}$ elemanı normalleştirilirse; $T_2^{\,2}=\begin{pmatrix}2a^2+bp^2c & b\\ 2^2p^2c & bp^2c+2(1-a)^2\end{pmatrix}$, $\det T_2^{\,2}=1$ dir.

$$T_2^{\,3}=\begin{pmatrix}2a^2+bp^2c & b\\ 2^2p^2c & bp^2c+2(1-a)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a & b/2\\ 2^2p^2c & 2(1-a)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\left(2a^3+bp^2ca+bp^2c\right) & b\left(a^2+p^2c\,b/2+1-a\right)\\ 2^2p^2c\left(bp^2c-2a+2a^2+2\right) & 2\left(bp^2c+(1-a)\left(bp^2c+2(1-a)^2\right)\right)\end{pmatrix},\quad \det T_2^{\,3}=2$$

$$T_2^{\,4}=\begin{pmatrix}2\left(2a^3+bp^2ca+bp^2c\right) & b\left(a^2+p^2c\,b/2+1-a\right)\\ 2^2p^2c\left(bp^2c-2a+2a^2+2\right) & 2\left(bp^2c+(1-a)\left(bp^2c+2(1-a)^2\right)\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a & b/2\\ 2^2p^2c & 2(1-a)\end{pmatrix}$$

$T_2^{\,4}=\begin{pmatrix} * & *\\ 2^4p^2c\left(bp^2c+1-2a+2a^2\right) & *\end{pmatrix}$ dir. Normalleştirilirse;

$T_2^{\,4}=\begin{pmatrix} * & *\\ 2^3p^2c\left(bp^2c+1-2a+2a^2\right) & *\end{pmatrix}$, $\det T_2^{\,4}=1$ elde edilir. Böylece $T_2^{\,4}\in\Gamma_0\left(2^3p^2\right)$ dir.

Dolayısıyla $T_2^{\,4}=I \Leftrightarrow a+d=\mp1$ ve $T_1^{\,2}=I$ dır. Yan sınıf temsilcileri olarak $\{I,T_1\}\,x\,\{I,T_2,T_2^{\,2},T_2^{\,3}\}=\{I,T_1,T_2,T_2^{\,2},T_2^{\,3},T_1T_2,T_1T_2^{\,2},T_1T_2^{\,3}\}$ dir. Ayrıca burada $T_1^{-1}T_2\notin\Gamma_0\left(2^3p^2\right)$, $T_1T_2.\left(T_2^{\,2}\right)^{-1}\notin\Gamma_0\left(2^3p^2\right)$, $T_1T_2^{\,2}.\left(T_2^{\,3}\right)^{-1}\notin\Gamma_0\left(2^3p^2\right)$, $T_1T_2^{\,3}.\left(T_2^{\,2}\right)^{-1}\notin\Gamma_0\left(2^3p^2\right)$ şeklindedir.

Sonuç1.1. ifadesinden $\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}(N):\Gamma_0(N)\right|=2^rh^2s$ indeks hesabında $N=2^3p^2$ alındığında $r=2$, $h=2$ ve $s=1.1=1$ olduğu açıktır.

$\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right):\Gamma_0(2^3p^2)\right|=2^2.2^2.1=16$ ve $\left|N_0(2^3p^2):\Gamma_0(2^3p^2)\right|=8$ olduğundan $\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right):N_0(2^3p^2)\right|=2$ dir.

$$\underbrace{\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right):\Gamma_0(2^3p^2)\right|}_{16}=\underbrace{\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right):N_0(2^3p^2)\right|}_{2}.\underbrace{\left|N_0(2^3p^2):\Gamma_0(2^3p^2)\right|}_{8}$$

şeklindedir. Denklik sınıflarının sayısı (blok sayısı) 2 dir.

Açıkça $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right)= N_0(2^3p^2)\cup\begin{pmatrix} ap^2 & b/2 \\ 2^2p^2c & dp^2\end{pmatrix}N_0(2^3p^2)$ dir.

"$\approx$" ile $N_0(2^3p^2)$ tarafından $\widehat{\mathbb{Q}}(2^3p^2)$ üzerine indirgenen $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right)$ invaryant eşdeğerlik bağıntısını gösterelim. İmprimitif harekete bakalım:

Teorem1.19. dan $\alpha=\infty$, $G_\infty= N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right)_\infty$, $G= N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right)$ ve $H=N_0\left(2^3p^2\right)$ alınırsa $g(\infty)\approx h(\infty)\Leftrightarrow g^{-1}h\in H$ olduğundan;

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{g}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\approx\underbrace{\begin{pmatrix}2a&b/2\\2^2p^2c&2d\end{pmatrix}}_{h}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2p^2c\end{pmatrix}$$ a tek ise $\begin{pmatrix}1\\2p^2\end{pmatrix}$, a çift ise $\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}$ ye gider.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{g}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\approx\underbrace{\begin{pmatrix}a&b/2\\2^2p^2c&d\end{pmatrix}}_{h}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2^2p^2c\end{pmatrix}$$ ve $ad-2bpc=1$ olduğundan $\begin{pmatrix}1\\2^2p^2\end{pmatrix}$ ye gider.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{g}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\approx\underbrace{\begin{pmatrix}a&b\\2^3p^2c&d\end{pmatrix}}_{h}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2^3p^2c\end{pmatrix}$$ ve $ad-2^3bpc=1$ olduğundan $\begin{pmatrix}1\\2^3p^2\end{pmatrix}$ ye gider.

Acaba $\begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}$ olur mu? Bu sorunun yanıtı $\begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix}\not\approx\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}$ dir. Gerçekten,

$\begin{pmatrix}ae&b/2\\2^2p^2c&de\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix}$ ise $e=p^2$ dir. Böylece $\begin{pmatrix}ap^2&b/2\\2^2p^2c&dp^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix}$dir.

$\begin{pmatrix} ae & b/2 \\ 2^2p^2c & de \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ p^2 \end{pmatrix}$ ise $\begin{pmatrix} ae \\ 2^2p^2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ p^2 \end{pmatrix}$ elde edilir. Buradan $e=2$ ve $a=2a_0$ olmalıdır. Böylece $\begin{pmatrix} 2^2a & b/2 \\ 2^2p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ p^2 \end{pmatrix}$ olur. Şimdi Teorem1.19. daki şarta bakalım.

$$\begin{pmatrix} 2^2a & b/2 \\ 2^2p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b/2p^2 \\ -2^2c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2(2ad-bc) & -ab\left(2^2+p^2/2p^2\right) \\ 2^2cd\left(p^2-2\right) & 2(ad-bc) \end{pmatrix}\notin N_0\left(2^3p^2\right) \text{dir.}$$

Dolayısıyla $\begin{pmatrix} 1 \\ 2^2 \end{pmatrix}\not\approx\begin{pmatrix} 1 \\ p^2 \end{pmatrix}$ dir. Benzer şekilde işlemler yapıldığında $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 1 \\ 2^2 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 \\ 2^2 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 1 \\ 2^3 \end{pmatrix}$ sağlandığı görülür. İmprimitif hareketin neticesinde

$$[\infty]=\begin{pmatrix} 1 \\ p^2 \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} 1 \\ 2p^2 \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} 1 \\ 2^2p^2 \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} 1 \\ 2^3p^2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad [0]=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} 1 \\ 2^2 \end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix} 1 \\ 2^3 \end{pmatrix}$$

blokları elde edilir.

Köşeleri $[\infty]$ bloğunda olan alt yörüngesel grafı F_{u,p^2} ile gösterilir. Bu durumda:

Teorem 2.2. $\frac{r}{s},\frac{x}{y}\in[\infty]$ ve $\frac{r}{s}\rightarrow\frac{x}{y}\in F_{u,p^2}$ dir $\Leftrightarrow$

(i) $2^3p^2\|s$ ise $x\equiv\pm ur \pmod{p^2}$, $y\equiv\pm us \pmod{p^2}$ ve $ry-sx=\pm p^2$

(ii) $2^2p^2\|s$ ise $x\equiv\pm 2ur \pmod{p^2}$, $y\equiv\pm 2us \pmod{p^2}$ ve $ry-sx=\pm 2p^2$

(iii) $2p^2\|s$ ise $x\equiv\pm 4ur \pmod{p^2}$, $y\equiv\pm 4us \pmod{p^2}$ ve $ry-sx=\pm 2p^2$

(iv) $p^2\|s$ ise $x\equiv\pm 8ur \pmod{p^2}$, $y\equiv\pm 8us \pmod{p^2}$ ve $ry-sx=\pm p^2$ dir.

İspat. "$\Rightarrow$":

$\frac{r}{s}\rightarrow\frac{x}{y}\in F_{u,p^2}$ olduğundan $\exists T\in N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right)$ öyle ki $\left(\infty,\frac{u}{p^2}\right)\xrightarrow{T}\left(\frac{r}{s},\frac{x}{y}\right)$ ve $T(\infty)=\frac{r}{s}$, $T\left(\frac{u}{p^2}\right)=\frac{x}{y}$ dir.

(i) $2^3p^2\|s$ ise T=$\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2^2p^2c & d \end{pmatrix}$, det T=$ad-2bp^2c=1$ elemanını inceleyelim. a ve d tektir. Burada b sayısının durumunu da düşünelim. b çift olsun. T(∞)=$\dfrac{a}{2^2p^2c}=\dfrac{r}{s}$ ise $c=2c_0$ şeklinde olmalıdır. Yani c çifttir. Böylece $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2^3p^2c_0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\dfrac{a}{2^3p^2c_0}=\dfrac{r}{s}$ ise $r=a$ ve $s=2^3p^2c_0$ dir.

$$T\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2^3p^2c_0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix}=\frac{\overbrace{au}^{\text{tek}}+bp^2/2}{2^3p^2c_0u+dp^2}=\frac{2au+bp^2}{\underbrace{2.2^3p^2c_0u+2dp^2}_{\text{çift}}}=\frac{au+b_0p^2}{2^3p^2c_0u+dp^2}=\frac{x}{y}$$

şeklindedir. b çift olduğundan $x\equiv\pm ur\ (\text{mod}\,p^2)$, $y\equiv\pm us\ (\text{mod}\,p^2)$.

Ayrıca $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2^3p^2c_0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & au+\dfrac{b}{2}p^2 \\ 2^3p^2c_0 & 2^3p^2c_0u+dp^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$ matrisleri için

$ry-sx=adp^2-2^2p^2bc_0p^2=p^2\underbrace{\left(ad-2p^2bc\right)}_{1}=p^2$ dir. Buradan yukarıdaki eşitliklerle birlikte $ry–sx=\pm p^2$ olduğu açıktır.

(ii) $2^2p^2\|s$ ise T=$\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2^2p^2c & d \end{pmatrix}$ şeklinde olup $ad–2p^2bc=1$ dir. a ve d tektir.

Şimdi burada b sayısı tek olsun. T(∞)=$\dfrac{a}{2^2p^2c}=\dfrac{r}{s}$ $\Rightarrow$ $r=a$, $s=2^2p^2c$

$$T\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2^2p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix}=\frac{\overbrace{au}^{\text{tek}}+\frac{b}{2}p^2}{2^2p^2cu+dp^2}=\frac{2au+bp^2}{2.2^2p^2cu+2dp^2}=\frac{x}{y}$$

şeklindedir. Dolayısıyla b tek ise $x\equiv\pm 2ur\ (\text{mod}\,p^2)$, $y\equiv\pm 2us(\text{mod}\,p^2)$ dir.

Ayrıca $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2^2p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2au+bp^2 \\ 2^2p^2c & 2^3p^2cu+2dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$

$ry - sx = adp^2 - 2p^2bcp^2 = 2p^2\underbrace{(ad-2p^2bc)}_{1} = 2p^2$ dir. Böylece $ry - sx = \pm 2p^2$ dir.

(iii) $2p^2 \| s$ ise $T = \begin{pmatrix} 2a & b/2 \\ 2^2p^2c & 2d \end{pmatrix}$ olmak zorundadır. $2ad - p^2bc = 1$ ve b tektir. a tek olsun. $T(\infty) = \begin{pmatrix} 2a & b/2 \\ 2^2p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{2a}{2^2p^2c} = \dfrac{a}{2p^2c} = \dfrac{r}{s} \quad \Rightarrow \quad r = a \quad , \quad s = 2p^2c$ dir.

$$T\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b/2 \\ 2^2p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \frac{2au + \frac{b}{2}p^2}{2^2p^2cu + 2dp^2} = \frac{2^2au + bp^2}{2.2^2p^2cu + 2^2dp^2} = \frac{x}{y}$$

$x \equiv \pm 4ur \pmod{p^2}$, $y \equiv \pm 4us \pmod{p^2}$. Ayrıca

$\begin{pmatrix} 2a & b/2 \\ 2^2p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 4au+bp^2 \\ 2p^2c & 2^3p^2cu+2^2dp^2 \end{pmatrix} =: T_0$ ve $\det T_0 = 2p^2$ dir. Çünkü

$ry - sx = 2^2adp^2 - 2bcp^4 = 2p^2\underbrace{(2ad-bp^2c)}_{1} = 2p^2$ dir. Böylece $ry - sx = \pm 2p^2$ dir.

(iv) $p^2 \| s$ ise $T = \begin{pmatrix} 2a & b/2 \\ 2^2p^2c & 2d \end{pmatrix}$ olmak zorundadır. $2ad - bp^2c = 1$ ve b tektir. a çift olsun. $a = 2a_0$ ise, $T(\infty) = \dfrac{2a}{2^2p^2c} = \dfrac{a}{2p^2c} = \dfrac{2a_0}{2p^2c} = \dfrac{r}{s} \quad \Rightarrow \quad r = a_0 \quad , \quad s = p^2c$ dir.

$$T\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b/2 \\ 2^2p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \frac{2au + \frac{bp^2}{2}}{2^2p^2cu + 2dp^2} = \frac{2^2au + \overbrace{bp^2}^{tek}}{2^3p^2cu + 2^2dp^2} = \frac{x}{y}$$

$x \equiv \pm 8ur \pmod{p^2}$, $y \equiv \pm 8us \pmod{p^2}$. Ayrıca

$\begin{pmatrix} 2a & b/2 \\ 2^2p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2 & 4au+bp^2 \\ p^2c & 2^3p^2cu+2^2dp^2 \end{pmatrix} =: T_1$ ve $\det T_1 = p^2$ dir.

$ry - sx = 2adp^2 - bcp^4 = p^2$ dir. Buradan yukarıdaki eşitliklerle birlikte $ry - sx = \pm p^2$ olduğu açıktır.

"$\Leftarrow$":

(i) $2^3p^2\|s$ ve $x \equiv \pm\, ur \pmod{p^2}$, $y \equiv \pm\, us \pmod{p^2}$, $ry–sx = \pm p^2$ olsun. Bu durumda $\exists b,d \in \mathbb{Z}$ öyle ki $x = ur + bp^2$ ve $y = us + dp^2$ dir. Bu eşitlikler determinantta yerine yazıldığında $ry–sx = r(us + dp^2) - s(ur + bp^2) = rdp^2 - bsp^2 = p^2$ eşitliğinin her iki tarafı p^2 ile bölündüğünde $rd - bs = 1$ dir. Buna göre $T_0 := \begin{pmatrix} r & b \\ s & d \end{pmatrix}$, $\det T_0 = 1$ ve $2^3p^2\|s$ göz önüne alındığında $T_0 \in \Gamma_0(2^3p^2) \subset N_0(2^3p^2)$ dir.

(ii) $2^2p^2\|s$ ve $x \equiv \pm\, 2ur \pmod{p^2}$, $y \equiv \pm\, 2us \pmod{p^2}$, $ry–sx = \pm\, 2p^2$ olsun. Bu durumda $\exists b,d \in \mathbb{Z}$ öyle ki $x = 2ur + bp^2$ ve $y = 2us + dp^2$ dir. Bu eşitlikler determinantta yerine konulduğunda $ry–sx = r(2us + dp^2) - s(2ur + bp^2) = rdp^2 - bsp^2 = 2p^2$ elde edilir. Böylece $rd/2 - bs/2 = 1$ dir. Buna göre $T_0 := \begin{pmatrix} r & b/2 \\ s & d/2 \end{pmatrix}$, $\det T_0 = 1$ ve $2^2p^2\|s$ göz önüne alındığında $T_0 \in \Gamma_0(2^3p^2) \subset N_0(2^3p^2)$ dir.

(iii) $2p^2\|s$ ve $x \equiv \pm\, 4ur \pmod{p^2}$, $y \equiv \pm\, 4us \pmod{p^2}$, $ry–sx = \pm 2p^2$ olsun. Bu durumda $\exists b,d \in \mathbb{Z}$ öyle ki $x = 4ur + bp^2$ ve $y = 4us + dp^2$ dir. Bu eşitlikler determinantta yerine yazıldığında $ry–sx = r(4us + dp^2) - s(4ur + bp^2) = rdp^2 - bsp^2 = 2p^2$ eşitliğinin her iki tarafı $2p^2$ ile bölündüğünde $rd/2 - bs/2 = 1$. Buna göre $T_0 := \begin{pmatrix} r & b/2 \\ s & d/2 \end{pmatrix}$, $\det T_0 = 1$ ve $2p^2\|s$ olduğundan $T_0 \in N_0(2^3p^2)$ dir.

(iv) $p^2\|s$ ve $x \equiv \pm\, 4ur \pmod{p^2}$, $y \equiv \pm\, 4us \pmod{p^2}$, $ry–sx = \pm p^2$ olsun. Bu durumda $\exists\, b,d \in \mathbb{Z}$ öyle ki $x = 4ur + bp^2$ ve $y = 4us + dp^2$ dir. Bu eşitlikler determinantta yerine konulduğunda $ry–sx = r(4us + dp^2) - s(4ur + bp^2) = rdp^2 - bsp^2 = p^2$ eşitliğinin her iki tarafı p^2 ile bölündüğünde $rd - bs = 1$. Buna göre $T_0 := \begin{pmatrix} r & b \\ s & d \end{pmatrix}$, $\det T_0 = 1$ ve $p^2\|s$ olduğundan $T_0 \in N_0(2^3p^2)$ dir.■

Teorem 2.3. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right)$ nin F_{u,p^2} alt yörüngesel grafının dörtgen içermesi için gerek ve yeter koşul $8u^2 \pm 4u + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ olmasıdır.

İspat. F_{u,p^2} nin bir $\frac{k_0}{\ell_0} \to \frac{m_0}{n_0} \to \frac{s_0}{t_0} \to \frac{x_0}{y_0} \to \frac{k_0}{\ell_0}$ dörtgeni içerdiğini kabul edelim. N_0 F_{u,p^2} nin kenar ve köşelerini transitif olarak permüte ettiğinden, verilen dörtgeni N_0 altında $\frac{1}{0} \to \frac{m}{p^2} \to \frac{x}{2^2yp^2} \to \frac{k}{\ell} \to \frac{1}{0}$ dörtgenine resmedebiliriz. Üstelik genellikten bir şey kaybetmeden $\frac{m}{p^2} < \frac{x}{2^2yp^2} < \frac{k}{\ell}$ farzedebiliriz. Burada ispatı gerçekleştirirken sürekli olarak bir önceki teoremi kullanacağız. O halde $\frac{k}{\ell} \to \frac{1}{0}$ kenarından $\ell = 2p^2$ elde edilir. $\frac{1}{0} \to \frac{m}{p^2}$ kenarından $m \equiv u\left(\bmod p^2\right)$.Dolayısıyla $\frac{1}{0} \to \frac{u}{p^2} \to \frac{x}{2^2yp^2} \to \frac{k}{2p^2} \to \frac{1}{0}$ yazılabilir. Burada x tektir. $\frac{u}{p^2} \to \frac{x}{2^2yp^2}$ kenarından $x \equiv -8u^2 \pmod{p^2}$.

Üstelik, $2^2uyp^2 - xp^2 = -p^2$ eşitliğinden $x = 4uy+1$ elde edilir.

$\frac{x}{2^2yp^2} \to \frac{k}{2p^2}$ kenarından, $k \equiv -2ux \pmod{p^2}$ ve $2xp^2 - 2^2ykp^2 = -2p^2$ bağıntısı kullanılarak $x = 2yk - 1$ bulunur. Buradan $4uy+1 = 2yk-1 \Rightarrow y.(2u-k) = -1$ dir.

$y = 1$ olsun. $k = 2u+1$ olup $k \equiv -2ux \pmod{p^2}$ denkleminde yerine yazılırsa

$2u+1 = -2u(4u+1) \pmod{p^2}$ bulunur. Dolayısıyla $8u^2 + 4u + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ elde edilir.

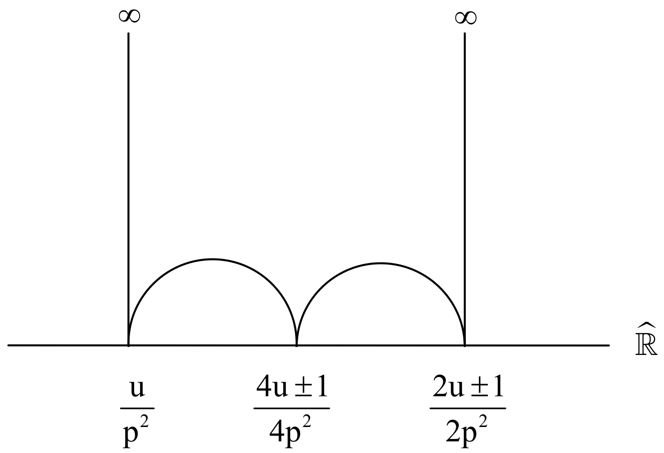
$y = -1$ ise $k = 2u-1$ olup $k \equiv -2ux \pmod{p^2}$ denkleminde yerine yazılırsa

$2u-1 = -2u(-4u+1) \pmod{p^2}$ bulunur. Böylece $8u^2 - 4u + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ elde edilir.

$\frac{m}{p^2} > \frac{x}{2^2yp^2} > \frac{k}{\ell}$ eşitsizliğinden yine $8u^2 \pm 4u + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ elde edilir.

Tersine $8u^2 \pm 4u + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ farzedelim.Bu durumda bir önceki teoremden,

$\frac{1}{0} \to \frac{u}{p^2} \to \frac{4u \pm 1}{4p^2} \to \frac{2u \pm 1}{2p^2} \to \frac{1}{0}$ devresinin F_{u,p^2} de bir dörtgen olduğu görülür.



Şekil 2.1. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right)$ deki $\mathbb{H}$-Dörtgen

$$T := \begin{pmatrix} -2^3u & \dfrac{8u^2+4u+1}{p^2} \\ -2^3p^2 & 2^3u+4 \end{pmatrix} \text{ ve } \det T = 8 \;,\; 8u^2+4u+1 \equiv 0\left(\text{mod}\, p^2\right) \;,\; p \equiv 1(\text{mod}\, 4)$$

olmak üzere T 4. mertebeden bir eliptik elemandır. Açıkça T elemanı ile köşeler birbirine resmedilir.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\p^2\end{pmatrix},\; T\begin{pmatrix}u\\p^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4u+1\\4p^2\end{pmatrix},\; T\begin{pmatrix}2u+1\\2p^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

olduğu görülür. ■

Benzer şekilde $N = 2^2p^2$ alındığında $T := \begin{pmatrix} -2^2u & \dfrac{4u^2+2u+1}{p^2} \\ -2^2p^2 & 2^2u+2 \end{pmatrix}$ ve $\det T = 4$

olmak üzere açıkça görülmektedir ki T burada 3. mertebeden bir eliptik elemandır. Bu eleman ile $\frac{1}{0} \to \frac{u}{p^2} \to \frac{2u+1}{2p^2} \to \frac{1}{0}$ köşeleri birbirine resmedilir.

Ancak burada dikkat edilmesi gereken $4u^2+2u+1 \equiv 0\left(\text{mod}\, p^2\right)$, $p \equiv 1(\text{mod}\, 3)$ olduğudur.

Sonuç 2.1. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^3p^2\right)\right)$ normalliyenin F_{u,p^2} alt yörüngesel grafında üçgen ve altıgen yoktur.

2.2. $N=2^{\alpha}p^{2}$ İçin $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^{\alpha}p^{2}\right)\right)$ nin Alt Yörüngesel Grafları

$\alpha \geq 8$ ve $p>3$ ve asal sayı olmak üzere $N=2^{\alpha}p^{2}$ için $h = 2^{\min\{3,[\![\alpha/2]\!]\}}=2^{3}$ dür.

$A=\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}$, $e\|N/h^{2}$ elemanı göz önüne alınırsa $\det A = e = 1, 2^{\alpha-6},\ p^{2}\ ,\ 2^{\alpha-6}p^{2}$

dir. Yani; normalliyenin elemanları

$$A_1=\begin{pmatrix} a & b/2^{3} \\ 2^{\alpha-3}p^{2}c & d \end{pmatrix},\ ad-2^{\alpha-6}bp^{2}c=1 \quad ; \quad A_2=\begin{pmatrix} 2^{\alpha-6}a & b/2^{3} \\ 2^{\alpha-3}p^{2}c & 2^{\alpha-6}d \end{pmatrix}\ ,\ 2^{\alpha-6}ad-bp^{2}c=1$$

$$A_3=\begin{pmatrix} ap^{2} & b/2^{3} \\ 2^{\alpha-3}p^{2}c & dp^{2} \end{pmatrix}, adp^{2}-2^{\alpha-6}bc=1 \quad ; \quad A_4=\begin{pmatrix} 2^{\alpha-6}ap^{2} & b/2^{3} \\ 2^{\alpha-3}p^{2}c & 2^{\alpha-6}dp^{2} \end{pmatrix}\ ,\ 2^{\alpha-6}adp^{2}-bc=1$$

şeklindedir.

Lemma 2.2 . $\Gamma_0(2^{\alpha}p^{2})$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin yörüngeleri;

(i) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\2^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2^{3}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\2^{3}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}5\\2^{3}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}7\\2^{3}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}5\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}7\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-2}\end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix}3\\2^{\alpha-2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-1}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\p^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2p^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2^{2}p^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\2^{2}p^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2^{3}p^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\2^{3}p^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}5\\2^{3}p^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}7\\2^{3}p^{2}\end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-3}p^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\2^{\alpha-3}p^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}5\\2^{\alpha-3}p^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}7\\2^{\alpha-3}p^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-2}p^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\2^{\alpha-2}p^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-1}p^{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha}p^{2}\end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix}1\\p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\p\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}p-1\\p\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}1\\2p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p+2\\2p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p+4\\2p\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}p+p-1\\2p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p-1\\2p\end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix}1\\2^{2}p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p+2\\2^{2}p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2^{2}p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p+4\\2^{2}p\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}p+p-1\\2^{2}p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p-1\\2^{2}p\end{pmatrix}$

....

$(\alpha+2)$ $\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha}p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p+2\\2^{\alpha}p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2^{\alpha}p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p+4\\2^{\alpha}p\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}p+p-1\\2^{\alpha}p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p-1\\2^{\alpha}p\end{pmatrix}$

İspat . Lemma 1.1. ve Lemma 1.3. den ispat açıktır.■

Buradaki tüm yörüngelerinin sayısı $\sum_{d|N}\varphi\left(\left(d\,,\,\frac{2^{\alpha}p^{2}}{d}\right)\right)$ dir. α sayısının tek veya çift olma durumuna göre yörünge sayısı kolaylıkla bulunabilir.

α tek olduğunda $N=2^{\alpha}p^{2}$ nin bölenleri;

I) $1,2,2^{2},2^{3},...,2^{\alpha}$ için $\sum_{d|2^{\alpha}}\varphi\left(\left(d,N/d\right)\right)=2^{\left[\!\left[\frac{\alpha}{2}\right]\!\right]+1}$

II) $p,2p,2^{2}p,2^{3}p,...,2^{\alpha}p$ için $\sum_{d|2^{\alpha}}\varphi\left(\left(d,N/d\right)\right)=2^{\left[\!\left[\frac{\alpha}{2}\right]\!\right]+1}\left(p-1\right)$

III) $p^{2},2p^{2},2^{2}p^{2},2^{3}p^{2},...,2^{\alpha}p^{2}$ için $\sum_{d|2^{\alpha}}\varphi\left(\left(d,N/d\right)\right)=2^{\left[\!\left[\frac{\alpha}{2}\right]\!\right]+1}$

Bu durumda toplam yörünge sayısı: $2^{\left[\!\left[\frac{\alpha}{2}\right]\!\right]+1}\left(p+1\right)$ dir.

α çift olduğunda $N=2^{\alpha}p^{2}$ nin bölenleri;

I) $1,2,2^{2},2^{3},...,2^{\alpha}$ için $\sum_{d|2^{\alpha}}\varphi\left(\left(d,N/d\right)\right)=2^{\frac{\alpha}{2}-1}.3$

II) $p,2p,2^{2}p,2^{3}p,...,2^{\alpha}p$ için $\sum_{d|2^{\alpha}}\varphi\left(\left(d,N/d\right)\right)=2^{\frac{\alpha}{2}-1}.3\left(p-1\right)$

III) $p^{2},2p^{2},2^{2}p^{2},2^{3}p^{2},...,2^{\alpha}p^{2}$ için $\sum_{d|2^{\alpha}}\varphi\left(\left(d,N/d\right)\right)=2^{\frac{\alpha}{2}-1}.3$

Bu durumda toplam yörünge sayısı: $2^{\frac{\alpha}{2}-1}.3\left(p+1\right)$ dir.

Teorem 2.4. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_{0}\left(2^{\alpha}p^{2}\right)\right)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiği maksimal alt kümelerden biri;

$$\widehat{\mathbb{Q}}(2^{\alpha}p^{2}):=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cup...\cup\begin{pmatrix}1\\2^{3}\end{pmatrix}\cup...\cup\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\p^{2}\end{pmatrix}\cup...\cup\begin{pmatrix}7\\2^{3}p^{2}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-3}p^{2}\end{pmatrix}\cup...\cup\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha}p^{2}\end{pmatrix}$$

dir. Bu küme $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_{0}\left(2^{\alpha}p^{2}\right)\right)$ için bir yörüngedir.

İspat. Yapılması gereken $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ yörüngesinin $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^{\alpha}p^2\right)\right)$ ile hareketini incelemektir. $\begin{pmatrix}a & b/2^3\\ 2^{\alpha-3}p^2c & d\end{pmatrix}$, $ad-2^{\alpha-6}bp^2c=1$ elemanı göz önüne alındığında;

$$\begin{pmatrix}a & b/2^3\\ 2^{\alpha-3}p^2c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b/2^3\\ 2^{\alpha-3}p^2c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3a+b\\ 2^3(2^{\alpha-3}p^2c+d)\end{pmatrix}$$ elemanını inceleyelim.

(I) $2\nmid b$ olduğunda, açıkça $\dfrac{2^3a+b}{2^3(2^{\alpha-3}p^2c+d)}\in\begin{pmatrix}1\\2^3\end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix}3\\2^3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\2^3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\2^3\end{pmatrix}$

(II) $2\|b$ olduğunda ise , $\dfrac{2^2a+b_0}{2^2(2^{\alpha-3}p^2c+d)}\in\begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix}3\\2^2\end{pmatrix}$

(III) $2^2\|b$ olduğunda ise , $\dfrac{2a+b_0}{2(2^{\alpha-3}p^2c+d)}\in\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

(IV) $2^3\|b$ olduğunda ise , $\dfrac{a+b_0}{(2^{\alpha-3}p^2c+d)}\in\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2^{\alpha-6}a & b/2^3\\ 2^{\alpha-3}p^2c & 2^{\alpha-6}d\end{pmatrix}$, $2^{\alpha-6}ad\text{-}bp^2c=1$ elemanı göz önüne alındığında;

$$\begin{pmatrix}2^{\alpha-6}a & b/2^3\\ 2^{\alpha-3}p^2c & 2^{\alpha-6}d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{\alpha-6}a+b/2^3\\ 2^{\alpha-3}p^2c+2^{\alpha-6}d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{\alpha-3}a+b\\ 2^3(2^{\alpha-3}p^2c+2^{\alpha-6}d)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{\alpha-3}a+b\\ 2^{\alpha-3}(2^3p^2c+d)\end{pmatrix}$$

elemanını inceleyelim.

(V) $2\nmid d$ olduğunda, $\dfrac{2^{\alpha-3}a+b}{2^{\alpha-3}(2^3p^2c+d)}\in\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix}3\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix}$

(VI) $2\|d$ olduğunda, $\dfrac{2^{\alpha-3}a+b}{2^{\alpha-2}(2^2p^2c+d_0)}\in\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-2}\end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix}3\\2^{\alpha-2}\end{pmatrix}$

(VII) $2^2\|d$ olduğunda, $\dfrac{2^{\alpha-3}a+b}{2^{\alpha-1}(2p^2c+d_0)}\in\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-1}\end{pmatrix}$

(VIII) $2^3\|d$ olduğunda, $\dfrac{2^{\alpha-3}a+b}{2^{\alpha}(p^2c+d_0)}\in\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha}\end{pmatrix}$ dır. Böylece,

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}3\\2^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}3\\2^3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}5\\2^3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}7\\2^3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}3\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}5\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}7\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix}\cup$$

$\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-2}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}3\\2^{\alpha-2}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-1}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha}\end{pmatrix}$ elde edilir. $\begin{pmatrix}ap^2 & b/2^3\\2^{\alpha-3}p^2c & dp^2\end{pmatrix}$, $adp^2-2^{\alpha-6}bc=1$ elemanı göz önüne alındığında, $\begin{pmatrix}ap^2 & b/2^3\\2^{\alpha-3}p^2c & dp^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3ap^2+b\\2^3p^2(2^{\alpha-3}c+d)\end{pmatrix}$ elemanını inceleyelim.

(IX) $2\nmid b$ olduğunda, açıkça $\dfrac{2^3ap^2+b}{2^3p^2(2^{\alpha-3}c+d)}\in\begin{pmatrix}1\\2^3p^2\end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix}3\\2^3p^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\2^3p^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\2^3p^2\end{pmatrix}$

(X) $2\,\|\,b$ olduğunda ise , $\dfrac{2^2ap^2+b_0}{2^2p^2(2^{\alpha-3}c+d)}\in\begin{pmatrix}1\\2^2p^2\end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix}3\\2^2p^2\end{pmatrix}$

(XI) $2^2\,\|\,b$ olduğunda ise , $\dfrac{2ap^2+b_0}{2p^2(2^{\alpha-3}c+d)}\in\begin{pmatrix}1\\2p^2\end{pmatrix}$

(XII) $2^3\,\|\,b$ olduğunda ise , $\dfrac{ap^2+b_0}{p^2(2^{\alpha-3}c+d)}\in\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}$ dir.

$\begin{pmatrix}2^{\alpha-6}ap^2 & b/2^3\\2^{\alpha-3}p^2c & 2^{\alpha-6}dp^2\end{pmatrix}$, $2^{\alpha-6}adp^2-bc=1$ elemanı göz önüne alındığında;

$\begin{pmatrix}2^{\alpha-6}ap^2 & b/2^3\\2^{\alpha-3}p^2c & 2^{\alpha-6}dp^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{\alpha-6}ap^2+b/2^3\\2^{\alpha-3}p^2c+2^{\alpha-6}dp^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{\alpha-3}ap^2+b\\2^{\alpha-3}p^2(2^3c+d)\end{pmatrix}$ elemanını inceleyelim.

(XIII) $2\nmid d$ ise, $\dfrac{2^{\alpha-3}ap^2+b}{2^{\alpha-3}p^2(2^3c+d)}\in\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-3}p^2\end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix}3\\2^{\alpha-3}p^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\2^{\alpha-3}p^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\2^{\alpha-3}p^2\end{pmatrix}$

(XIV) $2\,\|\,d$ olduğunda ise , $\dfrac{2^{\alpha-3}ap^2+b}{2^{\alpha-2}p^2(2^2c+d_0)}\in\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-2}p^2\end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix}3\\2^{\alpha-2}p^2\end{pmatrix}$

(XV) $2^2\,\|\,d$ olduğunda ise , $\dfrac{2^{\alpha-3}ap^2+b}{2^{\alpha-1}p^2(2c+d_0)}\in\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-1}p^2\end{pmatrix}$

(XVI) $2^3\,\|\,d$ olduğunda ise , $\dfrac{2^{\alpha-3}ap^2+b}{2^{\alpha}p^2(c+d_0)}\in\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha}p^2\end{pmatrix}$ dir.

Sonuç olarak , $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^{\alpha}p^2\right)\right)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiği maksimal alt kümelerden biri;

$$\widehat{\mathbb{Q}}(2^{\alpha}p^2):=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cup\ldots\cup\begin{pmatrix}1\\2^3\end{pmatrix}\cup\ldots\cup\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}\cup\ldots\cup\begin{pmatrix}7\\2^3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-3}p^2\end{pmatrix}\cup\ldots\cup\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha}p^2\end{pmatrix}\text{dir.}\blacksquare$$

Şimdi imprimitif hareketi irdeleyelim;

$$G_{\infty}=N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^{\alpha}p^2\right)\right)_{\infty}=\left\langle\begin{pmatrix}1 & 1/2^3\\0 & 1\end{pmatrix}\right\rangle \quad \text{ve} \quad \Omega=\hat{\mathbb{Q}}(2^{\alpha}p^2)$$

$$H=N_0(2^{\alpha}p^2):=\left\langle \Gamma_0(2^{\alpha}p^2),\underbrace{\begin{pmatrix}a & b/2^3\\2^{\alpha-3}p^2c & d\end{pmatrix}}_{A_1},\underbrace{\begin{pmatrix}2^{\alpha-6}a & b/2^3\\2^{\alpha-3}p^2c & 2^{\alpha-6}d\end{pmatrix}}_{A_2}\right\rangle$$

$$G=N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^{\alpha}p^2\right)\right)$$

olarak tanımlandığında,

$N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^{\alpha}p^2\right)\right)_{\infty}\underset{\neq}{<} N_0(2^{\alpha}p^2)\underset{\neq}{<} N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^{\alpha}p^2\right)\right)$ olduğu açıktır.

Şimdi burada $a+d=2$ olsun. $A_1=\begin{pmatrix}a & b/2^3\\2^{\alpha-3}p^2c & 2-a\end{pmatrix}$ elemanını inceleyelim.

$$\det A_1=ad-2^{\alpha-6}bp^2c=a(2-a)-2^{\alpha-6}bp^2c=2a-\left(a^2+2^{\alpha-6}bp^2c\right)=1$$

$$A_1^{\,2}=\begin{pmatrix}a & b/2^3\\2^{\alpha-3}p^2c & 2-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b/2^3\\2^{\alpha-3}p^2c & 2-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-1 & b/2^2\\2^{\alpha-2}p^2c & -2a+3\end{pmatrix}$$

$$A_1^{\,4}=\begin{pmatrix}2a-1 & b/2^2\\2^{\alpha-2}p^2c & -2a+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a-1 & b/2^2\\2^{\alpha-2}p^2c & -2a+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a-3 & b/2\\2^{\alpha-1}p^2c & -4a+5\end{pmatrix}$$

$$A_1^{\,8}=\begin{pmatrix}4a-3 & b/2\\2^{\alpha-1}p^2c & -4a+5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4a-3 & b/2\\2^{\alpha-1}p^2c & -4a+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8a-7 & b\\2^{\alpha}p^2c & -8a+9\end{pmatrix}$$ elde edilir. Dolayısıyla

$A_1^{\,8}\in\Gamma_0\left(2^{\alpha}p^2\right)$ dir.

Benzer şekilde $a+d=-2$ olduğunda yine $A_1^8 \in \Gamma_0\left(2^\alpha p^2\right)$ elde edilir. Böylece $A_1^8 \in \Gamma_0\left(2^\alpha p^2\right) \Leftrightarrow a+d=\pm 2$ şeklindedir. Acaba $A_1^8 = I \Leftrightarrow a+d=\pm 2$ için çözüm var mı? Çözüm gerçekten vardır. Basit bir örnekle gösterelim.

$A_1 = \begin{pmatrix} a & b/2^3 \\ 2^{\alpha-3}p^2c & d \end{pmatrix}$, $\det A_1 = ad - 2^{\alpha-6}bp^2c = 1$ buradan $2^{\alpha-6}bp^2c = ad-1$ ve

$2^{\alpha-6}bp^2c = -a^2+2a-1 = -(a-1)^2$ burada $\alpha=9$, $p=7$, $c=2$, $b=-1$, $a=2^2.7+1$

alınırsa, $A_1 = \begin{pmatrix} 2^2.7+1 & -1/2^3 \\ 2^6.7^2.2 & 1-2^2.7 \end{pmatrix}$, $\det = \det A_1 = 1-2^4.7^2+2^4.7^2 = 1$ çözüm vardır.

Benzer şekilde işlemler yapılırsa $A_2^{16} \in \Gamma_0\left(2^\alpha p^2\right) \Leftrightarrow a+d \neq 0 \pmod 2$ elde edilir. Yan sınıf temsilcileri olarak ; $\left\{I, A_1, A_1^2, A_1^3, A_1^4, A_1^5, A_1^6, A_1^7\right\} x \left\{I, A_2, A_2^2, A_2^3, A_2^4, \ldots, A_2^{15}\right\}$

$= \left\{I, A_2, A_2^2, A_2^3, A_2^4, \ldots, A_2^{15}, A_1, A_1A_2, A_1A_2^2, \ldots, A_1^2A_2, A_1^2A_2^2, \ldots, A_1^7, A_1^7A_2, \ldots, A_1^7A_2^{15}\right\}$

elde edilir.

Sonuç1.1. ifadesinden $\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0(N)\right) : \Gamma_0(N)\right| = 2^r h^2 s$ indeks hesabı kullanılırsa $N = 2^\alpha p^2$ alındığında $r=2$, $h=2^3$ ve $s=1.1=1$ olduğu açıktır.

$\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^\alpha p^2\right)\right) : \Gamma_0(2^\alpha p^2)\right| = 2^2.2^6.1 = 256$ ve $\left|N_0(2^\alpha p^2) : \Gamma_0(2^\alpha p^2)\right| = 128$

olduğundan $\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^\alpha p^2\right)\right) : N_0(2^\alpha p^2)\right| = 2$ olarak elde edilir. Çünkü

$$\underbrace{\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^\alpha p^2\right)\right) : \Gamma_0(2^\alpha p^2)\right|}_{256} = \underbrace{\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^\alpha p^2\right)\right) : N_0(2^\alpha p^2)\right|}_{2} . \underbrace{\left|N_0(2^\alpha p^2) : \Gamma_0(2^\alpha p^2)\right|}_{128}$$

şeklindedir. Denklik sınıflarının sayısı (blok sayısı) 2 dir.

Açıkça $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^\alpha p^2\right)\right) = N_0(2^\alpha p^2) \cup \begin{pmatrix} ap^2 & b/2^3 \\ 2^{\alpha-3}p^2c & dp^2 \end{pmatrix} N_0(2^\alpha p^2)$ biçimindedir.

Amaç , $N_0(2^\alpha p^2)$ grubunun elemanlarıyla normalliyene yaklaşarak normalliyenin yapısını incelemek ve $N_0(2^\alpha p^2)$ elemanlarını graflarla karakterize etmektir.

"$\approx$" ile $N_0(2^{\alpha}p^2)$ tarafından $\widehat{\mathbb{Q}}(2^{\alpha}p^2)$ üzerine indirgenen $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^{\alpha}p^2\right)\right)$ invaryant eşdeğerlik bağıntısını gösterelim.

İmprimitif hareketin neticesinde oluşan bloklar:

$$[\infty]=\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^2p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}3\\2^2p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}3\\2^3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}5\\2^3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}7\\2^3p^2\end{pmatrix}\cup$$

$$\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-3}p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}3\\2^{\alpha-3}p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}5\\2^{\alpha-3}p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}7\\2^{\alpha-3}p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-2}p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}3\\2^{\alpha-2}p^2\end{pmatrix}\cup$$

$$\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-1}p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha}p^2\end{pmatrix} \qquad \text{ve}$$

$$[0]=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}3\\2^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}3\\2^3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}5\\2^3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}7\\2^3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}3\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix}\cup$$

$$\begin{pmatrix}5\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}7\\2^{\alpha-3}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-2}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}3\\2^{\alpha-2}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha-1}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^{\alpha}\end{pmatrix}$$

biçimindedir.

$\left(N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^{\alpha}p^2\right)\right),\widehat{\mathbb{Q}}\left(2^{\alpha}p^2\right)\right)$ transitif permütasyon grubu olmak üzere $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ biçimindeki alt yörüngesel graf sayısı $\varphi\left(2^{\alpha}p^2\right)$ dir. Dolayısıyla köşeleri $[\infty]$ bloğunda olan alt yörüngesel graf $F_{u,2^{\lambda}p^2}$ biçimindedir.

$\lambda=0,1,2,3,\alpha-3,\alpha-2,\alpha-1,\alpha$ olmak üzere $[\infty]$ bloğundaki toplam graf sayısı $\varphi\left(p^2\right)+\varphi\left(2p^2\right)+\varphi\left(2^2p^2\right)+\varphi\left(2^3p^2\right)+\varphi\left(2^{\alpha-3}p^2\right)+\varphi\left(2^{\alpha-2}p^2\right)+\varphi\left(2^{\alpha-1}p^2\right)+\varphi\left(2^{\alpha}p^2\right)$ dir. Burada $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ alarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Teorem 2.5. $\frac{r}{s},\frac{x}{y}\in[\infty]$ ve $\frac{r}{s}\rightarrow\frac{x}{y}\in F_{u,2^{\alpha}p^2}$ dir $\Leftrightarrow$

(i) $0\le k\le 3$ ve $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $2^{\alpha-k}p^2\,\|\,s$ ise

$$x\equiv\pm ur\left(\operatorname{mod}2^{\alpha-3}p^2\right),\;\; y\equiv\pm us\left(\operatorname{mod}2^{\alpha}p^2\right)\text{ve }\; ry-sx=\pm\,2^{\alpha}p^2$$

(ii) $2^3p^2\|s$ ise $x\equiv \pm ur\left(\bmod 2^3p^2\right)$, $y\equiv \pm us\left(\bmod 2^{\alpha}p^2\right)$ ve $ry-sx=\pm\ 2^{2\alpha-6}p^2$

(iii) $2^2p^2\|s$ ise $x\equiv \pm 2ur\left(\bmod 2^3p^2\right)$, $y\equiv \pm 2us\left(\bmod 2^{\alpha}p^2\right)$ ve $ry-sx=\pm\ 2^{2\alpha-6}p^2$

(iv) $2p^2\|s$ ise $x\equiv \pm 4ur\left(\bmod 2^3p^2\right)$, $y\equiv \pm 4us\left(\bmod 2^{\alpha}p^2\right)$ ve $ry-sx=\pm\ 2^{2\alpha-6}p^2$

(v) $p^2\|s$ ise $x\equiv \pm 8ur\left(\bmod 2^3p^2\right)$, $y\equiv \pm 8us\left(\bmod 2^{\alpha}p^2\right)$ ve $ry-sx=\pm\ 2^{2\alpha-6}p^2$

İspat. "$\Rightarrow$":

$\frac{r}{s}\to\frac{x}{y}\in F_{u,2^{\alpha}p^2}$ olduğundan $\exists T\in N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^{\alpha}p^2\right)\right)$ öyle ki $\left(\infty,\frac{u}{2^{\alpha}p^2}\right)\xrightarrow{T}\left(\frac{r}{s},\frac{x}{y}\right)$

ve $T(\infty)=\frac{r}{s}$, $T\left(\frac{u}{2^{\alpha}p^2}\right)=\frac{x}{y}$ dir.

(i) $0\le k\le 3$ ve $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $2^{\alpha-k}p^2\|s$ ise $T=\begin{pmatrix} a & b/2^3 \\ 2^{\alpha-3}p^2c & d\end{pmatrix}$

det T= $ad-2^{\alpha-6}bp^2c=1$ elemanını inceleyelim. Burada a ve d tektir.

$$T(\infty)=\begin{pmatrix} a & b/2^3 \\ 2^{\alpha-3}p^2c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{a}{2^{\alpha-3}p^2c}=\frac{r}{s} \quad\Rightarrow\quad r=a \text{ ve } s=2^{\alpha-3}p^2c \text{ dir.}$$

$$T\left(\frac{u}{2^{\alpha}p^2}\right)=\begin{pmatrix} a & b/2^3 \\ 2^{\alpha-3}p^2c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\2^{\alpha}p^2\end{pmatrix}=\frac{\overbrace{au}^{tek}+2^{\alpha-3}bp^2}{2^{\alpha-3}p^2cu+2^{\alpha}dp^2}=\frac{x}{y} \text{ dir.}$$

Böylece $x\equiv \pm ur\ \left(\bmod 2^{\alpha-3}p^2\right)$, $y\equiv \pm us\left(\bmod 2^{\alpha}p^2\right)$ elde edilir.

Ayrıca $\begin{pmatrix} a & b/2^3 \\ 2^{\alpha-3}p^2c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\0 & 2^{\alpha}p^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & au+2^{\alpha-3}bp^2 \\ 2^{\alpha-3}p^2c & 2^{\alpha-3}p^2cu+2^{\alpha}dp^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r & x\\ s & y\end{pmatrix}$ matrisleri

için $ry-sx=2^{\alpha}adp^2-2^{2\alpha-6}p^2cbp^2=2^{\alpha}p^2\underbrace{\left(ad-2^{\alpha-6}p^2bc\right)}_{1}=2^{\alpha}p^2$ dir.

Buradan yukarıdaki eşitliklerle birlikte $ry-sx=\ \pm 2^{\alpha}\ p^2$ olduğu açıktır. Benzer şekilde $c=2c_0\ ,2^2c_0\ ,2^3c_0$ için diğer durumlarda gösterilebilir.

(ii) $2^3p^2\|s$ ise T=$\begin{pmatrix} 2^{\alpha-6}a & b/2^3 \\ 2^{\alpha-3}p^2c & 2^{\alpha-6}d \end{pmatrix}$ şeklinde olup $2^{\alpha-6}ad-bp^2c=1$ dir.Bu durumda b ve c tektir. $T(\infty)=\dfrac{a}{2^3p^2c}=\dfrac{r}{s} \Rightarrow r=a$, $s=2^3p^2c$ ve a tek olsun.

$$T\begin{pmatrix} u \\ 2^\alpha p^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{\alpha-6}a & b/2^3 \\ 2^{\alpha-3}p^2c & 2^{\alpha-6}d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ 2^\alpha p^2 \end{pmatrix}=\frac{2^{\alpha-6}au+2^{\alpha-3}bp^2}{2^{\alpha-3}p^2cu+2^{2\alpha-6}dp^2}=\frac{au+2^3bp^2}{\underbrace{2^3p^2c}_{s}u+2^\alpha dp^2}=\frac{x}{y}$$

Böylece $x\equiv\pm ur\left(\bmod 2^3p^2\right)$, $y\equiv\pm us\left(\bmod 2^\alpha p^2\right)$ dir.

Ayrıca $\begin{pmatrix} 2^{\alpha-6}a & b/2^3 \\ 2^{\alpha-3}p^2c & 2^{\alpha-6}d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 2^\alpha p^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{\alpha-6}a & 2^{\alpha-6}au+2^{\alpha-3}bp^2 \\ 2^{\alpha-3}p^2c & 2^{\alpha-3}p^2cu+2^{2\alpha-6}dp^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$

ry–sx$=2^{3\alpha-12}adp^2-2^{2\alpha-6}p^2bcp^2=2^{2\alpha-6}p^2\underbrace{(2^{\alpha-6}ad-bp^2c)}_{1}=2^{2\alpha-6}p^2$ ve $ry-sx=\pm 2^{2\alpha-6}p^2$ dir. Benzer şekilde işlemler yapıldığında $a=2a_0$, 2^2a_0 ve 2^3a_0 için (iii) , (iv) ve (v) durumları da gösterilebilir.

"$\Leftarrow$":

(i) $0\le k\le 3$ ve $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $2^{\alpha-k}p^2\|s$ ise $x\equiv\pm ur\left(\bmod 2^{\alpha-3}p^2\right)$, $y\equiv\pm us\left(\bmod 2^\alpha p^2\right)$ ve $ry-sx=\pm\, 2^\alpha p^2$ olsun. Bu durumda $\exists b,d\in\mathbb{Z}$ öyle ki $x=ur+2^{\alpha-3}bp^2$ ve $y=us+2^\alpha dp^2$ dir. Bu eşitlikler determinantta yerine yazıldığında $ry-sx=r(us+2^\alpha dp^2)-s(ur+2^{\alpha-3}bp^2)=2^\alpha rdp^2-2^{\alpha-3}bsp^2=2^\alpha p^2$ elde edilir. Dolayısıyla $2^\alpha p^2$ ile bölme yapıldığında $rd-\dfrac{b}{2^3}s=1$ dir. Buna göre $T_0:=\begin{pmatrix} r & b/2^3 \\ s & d \end{pmatrix}$, $\det T_0=1$ ve $0\le k\le 3$ için $2^{\alpha-k}p^2\|s$ göz önüne alındığında $T_0\in\Gamma_0(2^\alpha p^2)\subset N_0(2^\alpha p^2)$ dir.

(ii) $2^3p^2\|s$, $x\equiv\pm\, ur\,(\bmod 2^3\,p^2)$, $y\equiv\pm\, us(\bmod 2^\alpha\, p^2)$ ve ry–sx$=\pm 2^{2\alpha-6}\,p^2$ olsun.

Bu durumda $\exists b,d\in\mathbb{Z}$ öyle ki $x=ur+2^3bp^2$ ve $y=us+2^\alpha dp^2$ dir. Bu eşitlikler ile birlikte $ry-sx=r(us+2^\alpha dp^2)-s(ur+2^3bp^2)=2^\alpha rdp^2-2^3bsp^2=2^{2\alpha-6}\,p^2$ elde edilir ve eşitliğinin her iki tarafı $2^{2\alpha-6}p^2$ ile bölündüğünde $\frac{rd}{2^{\alpha-6}}-\frac{bs}{2^{2\alpha-3}}=1$ dir. Buna göre

$T_0 := \begin{pmatrix} r & \frac{b}{2^{2\alpha-3}} \\ s & \frac{d}{2^{\alpha-6}} \end{pmatrix}$, $\det T_0 = 1$ ve $2^3p^2 \| s$ için $T_0 \in \Gamma_0(2^\alpha p^2) \subset N_0(2^\alpha p^2)$ elde edilir.

(iii) $2^2p^2 \| s$, $x \equiv \pm 2ur \pmod{2^3p^2}$, $y \equiv \pm 2us \pmod{2^\alpha p^2}$ ve $ry-sx = \pm\, 2^{2\alpha-6}p^2$ olsun. Bu durumda $\exists b,d \in \mathbb{Z}$ öyle ki $x = 2ur + 2^3bp^2$ ve $y = 2us + 2^\alpha dp^2$ dir. Bu eşitlikler ile birlikte $ry-sx = r(2us+2^\alpha dp^2) - s(2ur+2^3bp^2) = 2^\alpha rdp^2 - 2^3bsp^2 = 2^{2\alpha-6}p^2$ elde edilir ve eşitliğinin her iki tarafı $2^{2\alpha-6}p^2$ ile bölündüğünde $\frac{rd}{2^{\alpha-6}}-\frac{bs}{2^{2\alpha-3}}=1$. Buna göre

$T_0 := \begin{pmatrix} r & \frac{b}{2^{2\alpha-3}} \\ s & \frac{d}{2^{\alpha-6}} \end{pmatrix}$, $\det T_0 = 1$ ve $2^2p^2 \| s$ olduğundan $T_0 \in N_0(2^\alpha p^2)$ dir.

(iv) $2p^2 \| s$, $x \equiv \pm 4ur \pmod{2^3p^2}$, $y \equiv \pm 4us \pmod{2^\alpha p^2}$ ve $ry-sx = \pm\, 2^{2\alpha-6}p^2$ olsun. Bu durumda $\exists\, b,d \in \mathbb{Z}$ öyle ki $x = 4ur + 2^3bp^2$ ve $y = 4us + 2^\alpha dp^2$ dir. Bu eşitlikler ile birlikte $ry-sx = r(4us+2^\alpha dp^2) - s(4ur+2^3bp^2) = 2^\alpha rdp^2 - 2^3bsp^2 = 2^{2\alpha-6}p^2$ eşitliğinin her iki tarafı $2^{2\alpha-6}p^2$ ile bölündüğünde $\frac{rd}{2^{\alpha-6}}-\frac{bs}{2^{2\alpha-3}}=1$. Buna göre

$T_0 := \begin{pmatrix} r & \frac{b}{2^{2\alpha-3}} \\ s & \frac{d}{2^{\alpha-6}} \end{pmatrix}$, $\det T_0 = 1$ ve $2p^2 \| s$ olduğundan $T_0 \in N_0(2^\alpha p^2)$ dir.

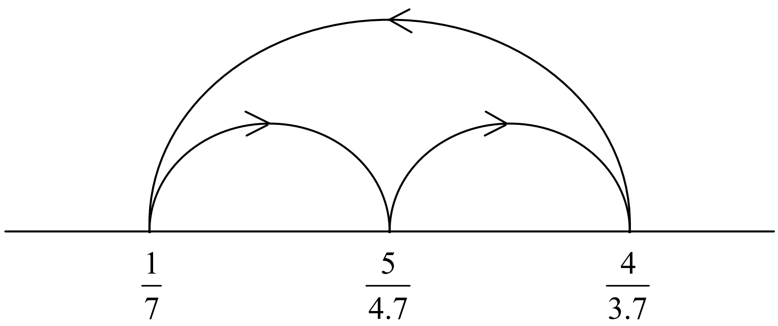
(v) $p^2 \| s$, $x \equiv \pm 8ur \pmod{2^3p^2}$, $y \equiv \pm 8us \pmod{2^\alpha p^2}$ ve $ry-sx = \pm\, 2^{2\alpha-6}p^2$ olsun. Bu durumda $\exists b,d \in \mathbb{Z}$ öyle ki $x = 8ur + 2^3bp^2$ ve $y = 8us + 2^\alpha dp^2$ dir. Bu eşitlikler ile birlikte $ry-sx = r(8us+2^\alpha dp^2) - s(8ur+2^3bp^2) = 2^\alpha rdp^2 - 2^3bsp^2 = 2^{2\alpha-6}p^2$ elde edilir ve eşitliğinin her iki tarafı $2^{2\alpha-6}p^2$ ile bölündüğünde $\frac{rd}{2^{\alpha-6}}-\frac{bs}{2^{2\alpha-3}}=1$. Buna göre

$T_0 := \begin{pmatrix} r & \frac{b}{2^{2\alpha-3}} \\ s & \frac{d}{2^{\alpha-6}} \end{pmatrix}$, $\det T_0 = 1$ ve $p^2 \| s$ olduğundan $T_0 \in N_0(2^\alpha p^2)$ dir.■

Lemma 2.3. $(u,N)=1$ ise $u^2+uk+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,N)$ olan bir $k\in\mathbb{Z}$ vardır.

İspat: $(u,N)=1$ olduğundan $ux+Ny=1$ olan $x,y\in\mathbb{Z}$ elemanları vardır. Bu durumda $ux\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,N)$ dir. Böylece $ux(-u^2-1)\equiv -u^2-1\ (\mathrm{mod}\,N)$ dir. $k:=x(-u^2-1)$ alırsak $u^2+uk+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,N)$ elde edilir.■

Sonuç 2.2. Lemma 2.3 den hareketle açıkça $\Psi:=\begin{pmatrix}-u & \dfrac{u^2+uk+1}{N}\\ -N & u+k\end{pmatrix}\ \Gamma_0(N)$ dedir ve ayrıca $k=1$ ise Ψ 3. mertebeden eliptik , $k=0$ ise Ψ 2. mertebeden eliptik ve $k=2$ ise Ψ paraboliktir. Eğer $k=1$ ise $F_{u,N}$ deki her devre minimal uzunlukta değildir. Örneğin, $u=2$, $N=7$ alınırsa $u^2+u+1=0\ (\mathrm{mod}\,N)$ ve $\Psi=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -7 & 3\end{pmatrix}$ dir. Ayrıca Teorem1.20. den kenar şartları dikkate alınırsa $\frac{1}{7}\to\frac{5}{4.7}\to\frac{4}{3.7}\to\frac{1}{7}$ hiperbolik üçgeni elde edilir.



Şekil 2.2. $F_{2,7}$ alt yörüngesel grafında $\mathbb{H}$-Üçgen

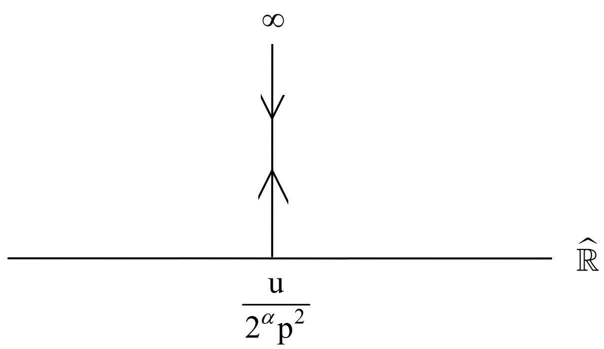
Böylece $\frac{1}{7}\to\frac{5}{4.7}\to\frac{4}{3.7}$ hiperbolik eğrisi $F_{2,7}$ de minimal uzunluklu bir eğri değildir. Çünkü $\frac{1}{7}\leftarrow\frac{4}{3.7}$ $F_{2,7}$ de hiperbolik eğridir. Diğer taraftan $\frac{2}{7}\to\frac{11}{6.7}\to\frac{64}{35.7}$

$F_{2,7}$ de minimal uzunlukludur. Çünkü kenar teoreminden, burada , $\frac{2}{7} \rightleftarrows \frac{64}{35.7}$ olamaz.

Teorem 2.6. $\alpha \geq 8$ ve $p > 3$, p asal sayı olmak üzere $N = 2^{\alpha} p^2$ ise $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ alt yörüngesel grafında üçgen yoktur.

İspat. Varsayalım ki , $\alpha \geq 8$ ve $p > 3$, p asal olmak üzere $N = 2^{\alpha} p^2$ için $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ bir üçgen devre içersin. Dolayısıyla üçgen devre $\infty \to v_1 \to v_2 \to \infty$ biçiminde olmalıdır. Buradan k, ℓ, m,n, x ,y pozitif tam sayıları için $\frac{1}{0} \to \frac{x}{2^m y.p^2} \to \frac{\ell}{2^n k.p^2} \to \frac{1}{0}$ yazılabilir. Açıktır ki x ve ℓ tektir. $\frac{1}{0} \to \frac{x}{2^m y.p^2}$ kenarından $x \equiv u \left(\bmod 2^{\alpha-3} p^2 \right)$ ve $2^m y.p^2 = 2^{\alpha} p^2 \Rightarrow 2^m y = 2^{\alpha}$ elde edilir. Eğer $y = 1$ ise $m = \alpha$ dır. Böylece $\frac{1}{0} \to \frac{u}{2^{\alpha} p^2} \to \frac{\ell}{2^n k.p^2} \to \frac{1}{0}$ elde edilir. Eğer $\frac{\ell}{2^n k.p^2} \to \frac{1}{0}$ kenarında $n = 3$ olsa $2^3 k.p^2 = 2^{2\alpha-6} p^2$ ise bu durumda $k = 2^{2\alpha-9}$ bulunur. Buradan $\frac{u}{2^{\alpha} p^2} \to \frac{\ell}{2^{2\alpha-6} p^2}$ ve $2^{2\alpha-6} p^2 u - \ell p^2 = 2^{\alpha-6} p^2$ olur ki bu ise ℓ nin tek olmasıyla çelişir. $n = 0,1,2$ durumları da benzer şekilde gösterilebilir. $n = \alpha$ olsa $2^{\alpha} k.p^2 = 2^{\alpha} p^2$ olduğundan $k = 1$ olur. $\frac{1}{0} \to \frac{u}{2^{\alpha} p^2} \to \frac{\ell}{2^{\alpha} p^2} \to \frac{1}{0}$ elde edilir. $\frac{u}{2^{\alpha} p^2} \to \frac{\ell}{2^{\alpha} p^2}$ kenarından $2^{\alpha} p^2 u - 2^{\alpha} \ell p^2 = 2^{\alpha} p^2$ dir. Bu ise $u - \ell = 1$ olduğunu söyler. u tek olduğundan ℓ çift olmak zorundadır ki bu durum bir çelişkidir. Benzer şekilde $n = \alpha - 1, \alpha - 2, \alpha - 3$ durumları da gösterilebilir. Eğer $y_0 \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $y = 2y_0$ şeklinde ise ispat yukarıdaki yapılan işlemlere benzerdir. Dolayısıyla $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ alt yörüngesel grafında üçgen için gerekli olan kenar şartları sağlanmadığından $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ de bir üçgen devre yoktur.■

Ancak $N = 2^{\alpha}p^2$ için $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ alt yörüngesel grafında $\frac{1}{0} \to \frac{u}{2^{\alpha}p^2} \to \frac{1}{0}$ olacak şekilde bir ikigen olduğu açıktır. Çünkü $\frac{u}{2^{\alpha}p^2} \to \frac{1}{0}$ kenarından $1 \equiv -u^2 \left(\mathrm{mod}\, 2^{\alpha-3}p^2\right)$ olup $u^2 + 1 \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, 2^{\alpha-3}p^2\right)$ elde edilir.

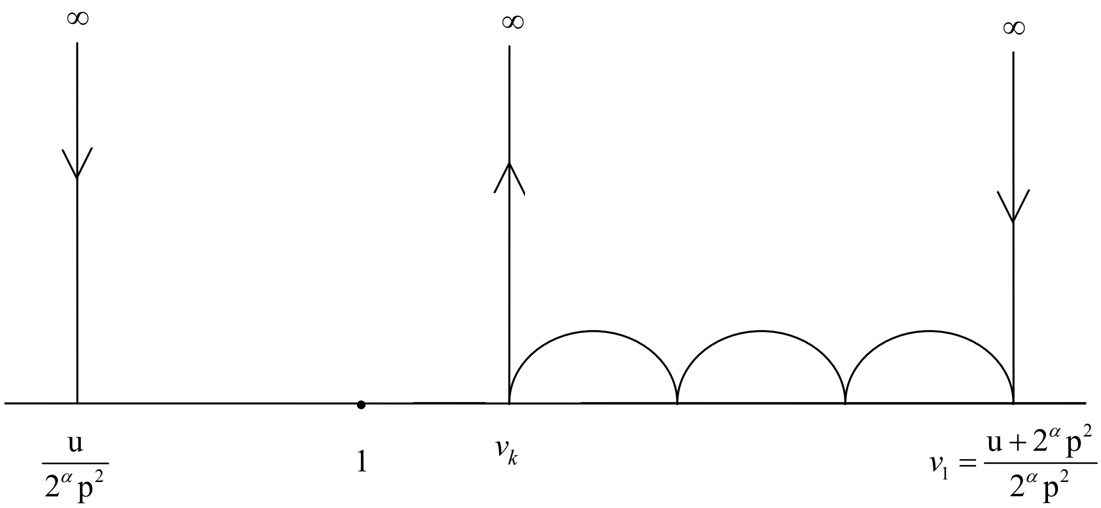


Şekil 2.3. $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ alt yörüngesel grafında ikigen

Teorem 2.7. $\alpha \geq 8$ ve $p > 3$, p asal sayı olmak üzere $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^{\alpha}p^2\right)\right)$ nin $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ alt yörüngesel grafı, $n \geq 4$ olmak üzere bir ormandır, yani hiçbir $n-$gen içermez.

İspat. Aksini varsayalım. D , $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ de minimal uzunlukta bir devre olsun. Ayrıca D devresinin yönlenmiş olduğunu kabul edelim.Bu durumda D devresini $\infty \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_k \to \infty$ biçiminde alabiliriz.Üstelik D devresinin ∞ dan farklı köşelerini $\left[\frac{u}{2^{\alpha}p^2}, \frac{u+2^{\alpha}p^2}{2^{\alpha}p^2}\right]$ aralığında $v_1 < v_2 < v_3 < \ldots < v_k$ olacak şekilde seçebiliriz .Çünkü burada alınan herhangi bir devrenin periyodu 1 dir. Teorem 2.5. den $v_1 = \frac{u}{2^{\alpha}p^2}$ veya $v_1 = \frac{u+2^{\alpha}p^2}{2^{\alpha}p^2}$ dir. Çünkü $\frac{1}{0} \to \frac{x}{y} \in F_{u,2^{\alpha}p^2}$ dir $\Leftrightarrow$ $p^2|0$, $2p^2|0$, $2^2p^2|0$, $2^3p^2|0$, $2^{\alpha-3}p^2|0$, …, $2^{\alpha}p^2|0$ olduğundan $y.1 = 2^{\alpha}p^2$ ve $x \equiv 1.u \left(\mathrm{mod}\, 2^{\alpha-3}p^2\right)$ koşullarını sağlayan $\frac{x}{y} = \frac{u}{2^{\alpha}p^2}$ veya $\frac{x}{y} = \frac{u+2^{\alpha}p^2}{2^{\alpha}p^2}$ olabilir.Eğer $v_1 = \frac{u+2^{\alpha}p^2}{2^{\alpha}p^2}$ ise v_k,

$\left[\frac{u}{2^{\alpha}p^{2}},\frac{u+2^{\alpha}p^{2}}{2^{\alpha}p^{2}}\right]$ de $v_k \to \infty$ olan tek köşelidir. Çünkü seçilen devre $\infty \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to ... \to v_k \to \infty$ biçimindedir. $v_k = \frac{r}{2^{\alpha}p^{2}}$ alalım. Bu durumda $\frac{r}{2^{\alpha}p^{2}} \to \frac{1}{0} \in F_{u,2^{\alpha}p^{2}}$ olduğundan Teorem2.5. den $1 \equiv -ur \pmod{2^{\alpha-3}p^{2}}$ dir.

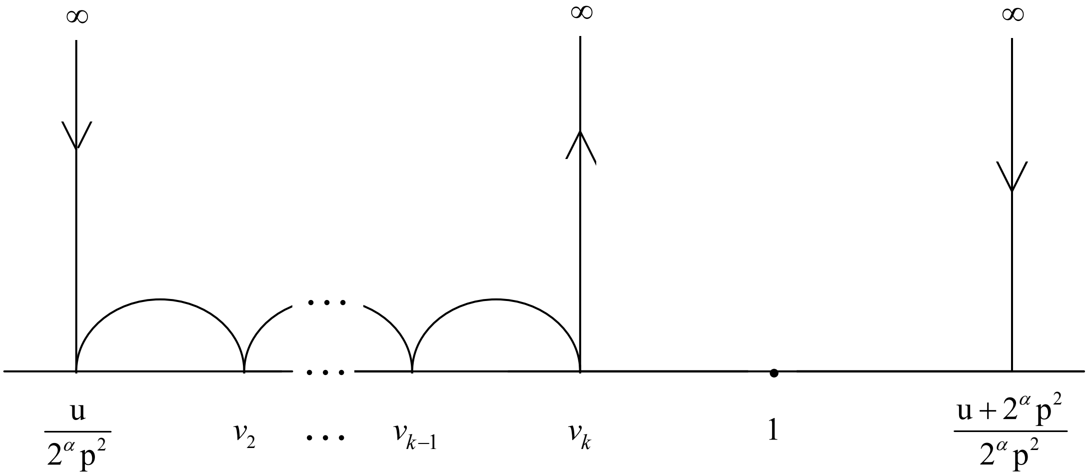


Şekil 2.4. $F_{u,2^{\alpha}p^{2}}$ alt yörüngesel grafı-I

Diğer yandan $F_{u,2^{\alpha}p^{2}}$ de komşu iki köşe arasında bir tam sayı bulunamayacağından devre 1 in sol tarafına geçmez. Yani $v_k = \frac{r}{2^{\alpha}p^{2}}$ ise $r > 2^{\alpha}p^{2}$ dir.

Bu durumda $\exists k > 0$ olmak üzere $r = 2^{\alpha}p^{2}+k$ biçimindedir. Ayrıca $r < 2^{\alpha}p^{2}+u$ olduğundan $k < u < 2^{\alpha}p^{2}$ elde edilir. $1 \equiv -ur \pmod{2^{\alpha-3}p^{2}}$ olduğundan dolayı $1 \equiv -u\left(2^{\alpha}p^{2}+k\right) \pmod{2^{\alpha-3}p^{2}}$ denklemi elde edilir.

Buradan $1 \equiv -uk \pmod{2^{\alpha-3}p^{2}} \Leftrightarrow \frac{k}{2^{\alpha}p^{2}} \to \frac{1}{0} \in F_{u,2^{\alpha}p^{2}}$ dir. Ancak $\frac{k}{2^{\alpha}p^{2}} < 1$ bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla böyle bir D devresi yoktur.



Şekil 2.5. $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ alt yörüngesel grafı-II

Böylece D devresi olarak $\infty \to \frac{u}{2^{\alpha}p^2} \to v_2 \to v_3 \to ... \to v_k \to \infty$ alabiliriz. $v_k > \frac{u+1}{2^{\alpha}p^2}$ dir. v , $v_1 \to v$ $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ de bir kenar olacak şekilde v_1 den daha büyük olma koşulunu sağlayan en büyük rasyonel sayı olsun. v_2 nin v ye eşit olma zorunluluğunu gösterelim. Farz edelim ki $v_2 < v$ olsun. Eğer v , D de bir köşe ise $v = v_3$ diyelim. Bu durumda daha kısa uzunluklu bir $\infty \to v_1 \to v_3 \to v_4 \to ... \to v_k \to \infty$ devresi elde edilir ki, bu D devresinin minimal uzunluklu bir devre olmasıyla çelişir.

Eğer v , D de bir köşe değilse D de $v_i < v < v_{i+1}$ olan v_i ve v_{i+1} köşeleri mevcuttur. Bu $v_1 \to v$ ve $v_i \to v_{i+1}$ kenarlarının $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ de kesiştiğini gösterir, bu ise bir çelişkidir. Çünkü $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ nin kenarları $\mathcal{U}$ da kesişmezler. Böylece $v_2 = v$ dir. $v_1 < v_2$ olduğundan m ve k_0 pozitif tam sayıları için $v_2 = \frac{u+\frac{m}{k_0}}{2^{\alpha}p^2}$ dır. $v_1 \to v_2$ $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ de bir kenar olduğundan $2^{\alpha}p^2v_1 \to 2^{\alpha}p^2v_2$ $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ de bir kenardır ve $m=1$ olmak zorundadır. Çünkü $\frac{u}{2^{\alpha}p^2} \to \frac{u+\frac{m}{k_0}}{2^{\alpha}p^2} = \frac{uk_0+m}{2^{\alpha}p^2k_0} \in F_{u,2^{\alpha}p^2}$ elde edilir. Buradan

$2^{\alpha}k_0p^2u - 2^{\alpha}k_0p^2u - 2^{\alpha}p^2m = -2^{\alpha}p^2 \quad \Rightarrow m = 1$ dir. Teorem 2.5. den,

$\frac{u}{2^{\alpha}p^2} \xrightarrow{<} \frac{uk_0+1}{2^{\alpha}p^2k_0}$ kenarından $uk_0+1 \equiv -u^2 \pmod{2^{\alpha-3}p^2}$ elde edilir. Dolayısıyla buradan $u^2+uk_0+1 \equiv 0 \pmod{2^{\alpha-3}p^2}$ olduğu görülür. Bu yüzden $v_2 = \dfrac{u+\frac{1}{k_0}}{2^{\alpha}p^2}$; burada k_0 , $u^2+uk_0+1 \equiv 0 \pmod{2^{\alpha-3}p^2}$ denklemini sağlayan minimal pozitif tam sayıdır. k_0 sıfır ise zaten ikigen olduğu açıktır.

Buradan $1 < k_0 < 2^{\alpha-3}p^2$ olduğu görülür. Çünkü $k_0 > 2^{\alpha-3}p^2$ olsa $\mod 2^{\alpha-3}p^2$ ile çelişir. Eğer $k_0 = 2^{\alpha-3}p^2$ olsa $u^2+2^{\alpha-3}up^2+1 \equiv 0 \pmod{2^{\alpha-3}p^2}$ denklemi elde edilir. Buradan $u^2+1 \equiv 0 \pmod{2^{\alpha-3}p^2}$ denkleminden söz konusu kenarın kendisiyle eşleşmiş olduğunu söyler.

$k_0 = 1$ olsa $u^2+u+1 \equiv 0 \pmod{2^{\alpha-3}p^2}$ ifadesinden $\left(\underbrace{u+1}_{\text{çift}}\right)^2 \equiv u \pmod{2^{\alpha-3}p^2}$ çelişkisi elde edilir. Açıkça görülmektedir ki $u^2+uk_0+1 \equiv 0 \pmod{2^{\alpha-3}p^2}$ ve $\left(u, 2^{\alpha-3}p^2\right) = 1$ olduğundan k_0 çift olmak zorundadır. $u^2+uk_0 \equiv -1 \pmod{2^{\alpha-3}p^2}$ ise $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$ öyle ki $u\underbrace{\left(u+k_0\right)}_{k_1} \equiv -1 \pmod{2^{\alpha-3}p^2}$ olup $uk_1 \equiv -1 \pmod{2^{\alpha-3}p^2}$ dir.

$N = p^2$ olduğunda $T := \begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^2+u+1}{p^2} \\ -p^2 & u+1 \end{pmatrix}$ det T =1 ve $u^2+u+1 \equiv 0 \pmod{p^2}$,

$p \equiv 1 \pmod 3$ olup $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^{\alpha}p^2\right)\right)$ 3. mertebeden en çok bir periyoda sahiptir.

N=$2^{\alpha}p^2$ ve $\alpha = 1,3,5,7$ olduğunda $T := \begin{pmatrix} -2^{\alpha}u & \dfrac{2^{\alpha}u^2+2^{\frac{\alpha+1}{2}}u+1}{p^2} \\ -2^{\alpha}p^2 & 2^{\frac{\alpha+1}{2}}\left(2^{\frac{\alpha-1}{2}}u+1\right) \end{pmatrix}$ $\det T = 2^{\alpha}$,

$a+d = 2^{\frac{\alpha+1}{2}}$ $2^{\alpha}u^2+2^{\frac{\alpha+1}{2}}u+1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ için $p \equiv 1 \pmod 4$ olup $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^{\alpha}p^2\right)\right)$ 4. mertebeden en çok bir periyoda sahiptir.

N$=2^{\alpha}p^2$ ve $\alpha=2,4,6$ olduğunda $T:=\begin{pmatrix} -2^{\alpha}u & \dfrac{2^{\alpha}u^2+2^{\frac{\alpha}{2}}u+1}{p^2} \\ -2^{\alpha}p^2 & 2^{\frac{\alpha}{2}}\left(2^{\frac{\alpha}{2}}u+1\right) \end{pmatrix}$ $\det T=2^{\alpha}$,

$a+d=2^{\frac{\alpha}{2}}$ $2^{\alpha}u^2+2^{\frac{\alpha}{2}}u+1\equiv 0\left(\operatorname{mod} p^2\right)$ için $p\equiv 1\left(\operatorname{mod} 3\right)$ olup $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^{\alpha}p^2\right)\right)$ 3. mertebeden en çok bir periyoda sahiptir.

Şimdi aşağıdaki dönüşümü tanımlayalım:

$\varphi:=\begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^2+uk_0+1}{2^{\alpha}p^2} \\ -2^{\alpha}p^2 & u+k_0 \end{pmatrix}$, $\det\varphi=1$ dir. Bu durumda $\varphi\in N_0\left(2^{\alpha}p^2\right)$ dır.

$\begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^2+uk_0+1}{2^{\alpha}p^2} \\ -2^{\alpha}p^2 & u+k_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-u\\-2^{\alpha}p^2\end{pmatrix}=\dfrac{u}{2^{\alpha}p^2}=v_1$ olduğundan $\varphi(\infty)=v_1$;

$\begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^2+uk_0+1}{2^{\alpha}p^2} \\ -2^{\alpha}p^2 & u+k_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\2^{\alpha}p^2\end{pmatrix}=\dfrac{uk_0+1}{2^{\alpha}p^2k_0}=\dfrac{u+\dfrac{1}{k_0}}{2^{\alpha}p^2}=v_2$ dir. $\varphi(v_1)=v_2$ ve genel olarak ;

$$\begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^2+uk_0+1}{2^{\alpha}p^2} \\ -2^{\alpha}p^2 & u+k_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}u+\dfrac{x}{y}\\2^{\alpha}p^2\end{pmatrix}=\frac{-\dfrac{ux}{y}+uk_0+1}{-2^{\alpha}p^2\dfrac{x}{y}+2^{\alpha}p^2k_0}=\frac{u\left(k_0-\dfrac{x}{y}\right)+1}{2^{\alpha}p^2\left(k_0-\dfrac{x}{y}\right)}=\frac{u+\dfrac{y}{k_0y-x}}{2^{\alpha}p^2}$$

olduğundan $\varphi\left(\dfrac{u+\dfrac{x}{y}}{2^{\alpha}p^2}\right)=\dfrac{u+\dfrac{y}{k_0y-x}}{2^{\alpha}p^2}$ dir. Üstelik $\varphi(z)=\dfrac{-uz+\dfrac{u^2+uk_0+1}{2^{\alpha}p^2}}{-2^{\alpha}p^2z+u+k_0}$,

$\left(-\infty,\dfrac{u+k_0}{2^{\alpha}p^2}\right)$ aralığı üzerinde kesin artandır. Bunun için $\varphi'(z)>0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir;

$$\varphi'(z)=\frac{-u\left(-2^{\alpha}p^2z+u+k_0\right)-\left(-2^{\alpha}p^2\right)\left(-uz+\dfrac{u^2+uk_0+1}{2^{\alpha}p^2}\right)}{\left(-2^{\alpha}p^2z+u+k_0\right)^2}=\frac{1}{\left(-2^{\alpha}p^2z+u+k_0\right)^2}>0 \text{ dır.}$$

Buradan,

$$\begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^2+uk_0+1}{2^\alpha p^2} \\ -2^\alpha p^2 & u+k_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{u}{2^\alpha p^2} \quad , \quad \begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^2+uk_0+1}{2^\alpha p^2} \\ -2^\alpha p^2 & u+k_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\2^\alpha p^2\end{pmatrix}=\frac{u+\dfrac{1}{k_0}}{2^\alpha p^2} \text{ ve}$$

$$\begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^2+uk_0+1}{2^\alpha p^2} \\ -2^\alpha p^2 & u+k_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}u+\dfrac{1}{k_0}\\2^\alpha p^2\end{pmatrix}=\frac{u+\dfrac{1}{k_0-\dfrac{1}{k_0}}}{2^\alpha p^2} \quad , \ldots \text{ şeklinde devam eder. Yani}$$

$$\frac{1}{0}\to\frac{u}{2^\alpha p^2}\to\frac{u+\dfrac{1}{k_0}}{2^\alpha p^2}\to\frac{u+\dfrac{1}{k_0-\dfrac{1}{k_0}}}{2^\alpha p^2}\to\frac{u+\dfrac{1}{k_0-\dfrac{1}{k_0-\dfrac{1}{k_0}}}}{2^\alpha p^2}\to\ldots$$

elde edilir. Dolayısıyla $\dfrac{1}{k_0-\dfrac{1}{k_0-\dfrac{1}{k_0}}} \atop \vdots$ kesrinin $k_0>2$ için bir irrasyonel sayı olduğu

açıktır. $\dfrac{1}{k_0-\dfrac{1}{k_0-\dfrac{1}{k_0 \atop {\vdots \atop k_0-\frac{1}{k_0}}}}}$ kesri sonlu adımda olması halinde $k_0 \geq 2$ için bir tam sayı

olamaz. Gerçekten tümevarımla göstermeye çalışalım. İlk adımda $\dfrac{1}{k_0}\notin\mathbb{Z}$ olduğu açıktır.

k.adımda doğru olsun. Yani $\dfrac{1}{k_0-\dfrac{1}{k_0-\dfrac{1}{k_0 \atop {\vdots \atop k_0-\frac{1}{k_0}}}}}\notin\mathbb{Z}$ olsun. k+1 . adımda da doğru olduğunu

gösterelim.

$$\cfrac{1}{k_0-\cfrac{1}{k_0-\cfrac{1}{k_0-\cfrac{\vdots}{k_0-\cfrac{1}{k_0}}}}}=\frac{m}{n}$$ olmak üzere k+1 . adım $\cfrac{1}{k_0-\cfrac{m}{n}}$ ve $(m,n)=1$ şeklindedir.

Varsayalım ki $\cfrac{1}{k_0-\cfrac{m}{n}}\in\mathbb{Z}$ olsun. $\frac{m}{n}<1$ dir. Gerçekten $\cfrac{1}{k_0-\cfrac{m}{n}}=\frac{n}{k_0n-m}\geq 1$ olsa $n+m\geq k_0n \Rightarrow \frac{m}{n}\geq k_0-1\geq 1$ olur ki bu ise $\frac{m}{n}<1$ ile çelişir. Dolayısıyla $\frac{n}{k_0n-m}<1$ dir. $k_0\geq 2$ için $\cfrac{1}{k_0-\cfrac{m}{n}}\notin\mathbb{Z}$ dir. $\frac{u}{2^\alpha p^2}$ köşenin gideceği en uzak köşe $\cfrac{u+\cfrac{1}{k_0}}{2^\alpha p^2}$ ve en yakın köşe ise yoktur. Benzer şekilde $\cfrac{u+\cfrac{1}{k_0}}{2^\alpha p^2}$ köşesinin gideceği en uzak köşe $\cfrac{u+\cfrac{1}{k_0-\cfrac{1}{k_0}}}{2^\alpha p^2}$ olmasına rağmen en yakın köşe yoktur. Gerçekten $\cfrac{u+\cfrac{1}{k_0}}{2^\alpha p^2}$, $u^2+uk_0+1\equiv 0 \left(\bmod 2^{\alpha-3}p^2\right)$ olduğundan $F_{u,2^\alpha p^2}$ de bir köşedir.

Şimdi $\cfrac{u+\cfrac{1}{k_0}}{2^\alpha p^2}\overset{<}{\to}\cfrac{u+\cfrac{t}{s}}{2^\alpha p^2}=\frac{us+t}{2^\alpha p^2}$ olsun. Bu takdirde $us+t\equiv -u\left(uk_0+1\right) \left(\bmod 2^{\alpha-3}p^2\right)$ ve $\left(uk_0+1\right)2^\alpha p^2s-2^\alpha p^2k_0\left(us+t\right)=-2^\alpha p^2$ ise $uk_0s+s-uk_0s-k_0t=-1 \Rightarrow s=k_0-1$ dir. Bir önceki denklemde yerine yazalım.

$u\left(k_0t-1\right)+t\equiv -u^2k_0-u \left(\bmod 2^{\alpha-3}p^2\right)$ ise $u^2k_0+t\left(uk_0+1\right)\equiv 0 \left(\bmod 2^{\alpha-3}p^2\right)$ ve $uk_0+1\equiv -u^2 \left(\bmod 2^{\alpha-3}p^2\right)$ buradan $u^2k_0-u^2t\equiv 0 \left(\bmod 2^{\alpha-3}p^2\right)$ ise $t\equiv k_0 \left(\bmod 2^{\alpha-3}p^2\right)$ dir. Bu durumda $t=k_0+2^{\alpha-3}p^2x$, $x\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ve böylece $\frac{t}{s}=\frac{k_0+2^{\alpha-3}p^2x}{k_0\left(k_0+2^{\alpha-3}p^2x\right)-1}$ dir.

$$f:\mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{R}\quad,\quad f(x)=\frac{k_0+2^{\alpha-3}p^2x}{k_0\left(k_0+2^{\alpha-3}p^2x\right)-1}=\frac{2^{\alpha-3}p^2x+k_0}{2^{\alpha-3}k_0p^2x+k_0^2-1}$$ fonksiyonu

kesin azalan bir fonksiyondur.

$$f'(x)=\frac{2^{\alpha-3}p^2\left(2^{\alpha-3}k_0p^2x+k_0^2-1\right)-2^{\alpha-3}k_0p^2\left(2^{\alpha-3}p^2x+k_0\right)}{\left(2^{\alpha-3}k_0p^2x+k_0^2-1\right)^2}$$
$$=\frac{-2^{\alpha-3}p^2}{\left(2^{\alpha-3}k_0p^2x+k_0^2-1\right)^2}<0$$

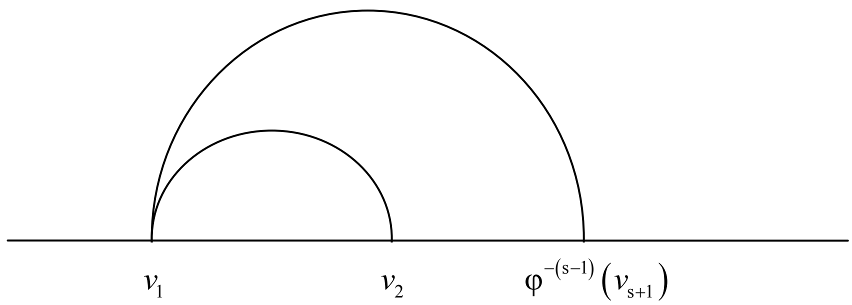
dır. Böylece f fonksiyonunun alabileceği en büyük değer $x=0$ daki değeridir ki bu değerde $\frac{k_0}{k_0^2-1}$ dir. Yani , $\frac{uk_0+1}{2^\alpha p^2k_0}\to\frac{u+\frac{k_0}{k_0^2-1}}{2^\alpha p^2}=\frac{\left(k_0^2-1\right)u+k_0}{2^\alpha p^2\left(k_0^2-1\right)}$ dir. Burada $\left(\left(k_0^2-1\right)u+k_0\,,2^\alpha p^2\left(k_0^2-1\right)\right)=1$ şeklindedir. Gerçekten, $\left(\left(k_0^2-1\right)u+k_0\,,\left(k_0^2-1\right)\right)=1$ olduğundan $\left(\left(k_0^2-1\right)u+k_0\,,2^\alpha p^2\right)=1$ olup olmadığını kontrol edelim. $1<\frac{n_0}{2^\alpha p^2}$ olmak üzere $\left(\left(k_0^2-1\right)u+k_0\,,2^\alpha p^2\right)=n_0$ olsa $\left(k_0^2-1\right)u+k_0=k_0\left(k_0u+1\right)-u\equiv 0\pmod{n_0}$ olurdu. $n_0\,|\,2^\alpha p^2$ ve k_0 çift olduğundan $2\nmid n_0$ dır. Buradan $p\,|\,n_0$ olur. $\left(k_0^2-1\right)u+k_0\equiv 0\pmod{p}$ ve $u^2+uk_0+1\equiv 0\pmod{p}$ denklemlerini kullanarak $k_0\left(k_0u+1\right)\equiv u\pmod{p}$ buradan $-k_0\left(u^2\right)\equiv u\pmod{p}$ elde edilir. Bu takdirde $uk_0\equiv -1\pmod{p}$ yani $uk_0+1\equiv 0\pmod{p}$ çelişkisi elde edilir.

Buradan $\left(\left(k_0^2-1\right)u+k_0\,,2^\alpha p^2\left(k_0^2-1\right)\right)=1$ olup $\frac{u+\frac{k_0}{k_0^2-1}}{2^\alpha p^2}$ $F_{u,2^\alpha p^2}$ de bir köşedir ve $\frac{uk_0+1}{2^\alpha p^2k_0}$ ' in gittiği en uzak köşedir.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{k_0+2^{\alpha-3}p^2x}{k_0\left(k_0+2^{\alpha-3}p^2x\right)-1}=\frac{1}{k_0}$ olduğundan $\frac{uk_0+1}{2^\alpha p^2k_0}$ ' ın gittiği en yakın köşe söz konusu olamaz. Çünkü $\frac{uk_0+1}{2^\alpha p^2k_0}$ ' ın gittiği köşeden daha küçük sonsuz tane köşe vardır.

Şimdi $\dfrac{x}{y}<\dfrac{z}{w}<\mathrm{k}_0$ için $\varphi\left(\dfrac{\mathrm{u}+\frac{x}{y}}{2^{\alpha}\mathrm{p}^2}\right)<\varphi\left(\dfrac{\mathrm{u}+\frac{z}{w}}{2^{\alpha}\mathrm{p}^2}\right)$ dir. Eğer x ve y pozitif tam sayılar $\dfrac{x}{y}<1$ ise $\dfrac{y}{\mathrm{k}_0 y-x}<1$ olduğunu belirtelim. Aslında $\mathrm{k}_0\geq 2$ ve $y>x$ olduğundan $\mathrm{k}_0 y-x>y$ olup $\dfrac{y}{\mathrm{k}_0 y-x}<1$ dir. Böylece i pozitif tam sayısı için $\varphi^i(v_1)<\dfrac{\mathrm{u}+1}{2^{\alpha}p^2}$ olduğunu kolayca görebiliriz. $\varphi\left(\dfrac{\mathrm{u}+\frac{x}{y}}{2^{\alpha}\mathrm{p}^2}\right)=\dfrac{\mathrm{u}+\frac{y}{\mathrm{k}_0 y-x}}{2^{\alpha}\mathrm{p}^2}$ ve $v_2=\dfrac{\mathrm{u}+\frac{1}{\mathrm{k}_0}}{2^{\alpha}\mathrm{p}^2}$ olduğundan $\varphi(v_1)=v_2 \Rightarrow \varphi(\varphi(v_1))=\varphi^2(v_1)=\varphi(v_2)=\dfrac{\mathrm{u}+\dfrac{1}{\mathrm{k}_0-\frac{1}{\mathrm{k}_0}}}{2^{\alpha}\mathrm{p}^2}<\dfrac{\mathrm{u}+1}{2^{\alpha}p^2}$ koşulunu sağlar. Dolayısıyla işlemlere devam edildiğinde $\forall i\in\mathbb{Z}$ için $\varphi^i(v_1)<\dfrac{\mathrm{u}+1}{2^{\alpha}\mathrm{p}^2}$ olduğu görülür.

Ayrıca $0\leq i\leq \mathrm{k}-1$ için $v_{i+1}=\varphi^i(v_1)=\varphi^{i+1}(\infty)$ olduğunu tümevarım ile gösterelim. $1\leq i\leq \mathrm{s}$ için $v_i=\varphi^{i-1}(v_1)$ olsun. Bu durumda $v_{\mathrm{s}+1}=\varphi^{\mathrm{s}}(v_1)$ dir. Gerçekten, eğer eşitlik söz konusu değilse önce $v_{\mathrm{s}+1}<\varphi^{\mathrm{s}}(v_1)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mathrm{N}_{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^{\alpha}\mathrm{p}^2\right)\right)$ $\mathrm{F}_{\mathrm{u},2^{\alpha}\mathrm{p}^2}$ nin kenar ve köşelerini transitif olarak permüte ettiğinden dolayı $\varphi^{\mathrm{s}-1}\in\Gamma_0\left(2^{\alpha}\mathrm{p}^2\right)$ olmak üzere $v_1\rightarrow v_2\in\mathrm{F}_{\mathrm{u},2^{\alpha}\mathrm{p}^2}$ ise $\varphi^{\mathrm{s}-1}(v_1)\rightarrow\varphi^{\mathrm{s}-1}(v_2)\in\mathrm{F}_{\mathrm{u},2^{\alpha}\mathrm{p}^2}$ ise $v_{\mathrm{s}}\rightarrow\varphi^{\mathrm{s}-1}(\varphi(v_1))=\varphi^{\mathrm{s}}(v_1)$, $\mathrm{F}_{\mathrm{u},2^{\alpha}\mathrm{p}^2}$ de bir kenardır. $\varphi^{\mathrm{s}}(v_1)$, $\mathrm{F}_{\mathrm{u},2^{\alpha}\mathrm{p}^2}$ de bir köşe olsa da D devresindeki köşelerden biri olup olmadığını bilmiyoruz. Eğer $\varphi^{\mathrm{s}}(v_1)$, D de bir köşe değilse $\varphi^{\mathrm{s}}(v_1)<v_{\mathrm{k}}$ ve $\forall i\in\mathbb{Z}$ için $\varphi^i(v_1)<\dfrac{\mathrm{u}+1}{2^{\alpha}\mathrm{p}^2}<v_{\mathrm{k}}$ olduğundan $v_t<\varphi^{\mathrm{s}}(v_1)<v_{\mathrm{t}+1}$ olacak şekilde köşeler mevcut ve bu durumda $v_{\mathrm{t}}\rightarrow v_{\mathrm{t}+1}$ ile $v_{\mathrm{s}}\rightarrow\varphi^{\mathrm{s}}(v_1)$ kenarları kesişir, bu ise bir çelişkidir. Eğer $\varphi^{\mathrm{s}}(v_1)$, D de bir köşe ise $v_{\mathrm{s}+1}<\varphi^{\mathrm{s}}(v_1)$ olduğundan $\mathrm{m}\geq\mathrm{s}+2$ için $\varphi^{\mathrm{s}}(v_1)=v_{\mathrm{m}}$ dir. Ancak bu durumda daha kısa uzunluklu bir $\infty \to v_1 \to \ldots \to v_s \to v_m \to v_k \to \infty$ devresi elde edilir ki bu da bir çelişkidir. Şimdi son olarak $v_{s+1} > \varphi^s(v_1)$ kabul edelim. Bu durumda $v_{s+1} > \varphi^s(v_1) > \varphi^{s-2}(v_1)$ dir. Çünkü $v_1 < v_2$ ve φ kesin artan olduğundan $\varphi(v_1) < \varphi(v_2)$ diğer taraftan $\varphi(\varphi(v_1)) = \varphi^2(v_1) = \varphi(v_2)$ olduğundan $\varphi(v_1) < \varphi^2(v_1)$ dir. Buradan $\varphi(v_1) < \varphi^2(v_1)$ ve φ kesin artan olduğundan $\varphi(\varphi(v_1)) < \varphi(\varphi^2(v_1)) \Rightarrow \varphi^2(v_1) < \varphi^3(v_1)$ bu şekilde işleme devam edildiğinde $\varphi^{s-2}(v_1) < \varphi^{s-1}(v_1) < \varphi^s(v_1)$ elde edilir. $\varphi^{s-2}(v_1) < \varphi^{s-1}(v_1) < \varphi^s(v_1)$ ve $\varphi^{-(s-1)}(\varphi^{s-2}(v_1)) = \infty$ $\left(\varphi(\infty) = v_1 \Rightarrow \varphi^{-1}(v_1) = \infty\right)$ olduğundan $\varphi^{-(s-1)}(v_{s+1}) > \varphi^{-(s-1)}(\varphi^s(v_1)) = \varphi(v_1) = v_2$ dir. Böylece $v_s \to v_{s+1} \in F_{u,2^\alpha p^2}$ ve $\varphi^{-(s-1)}(v_s) \to \varphi^{-(s-1)}(v_{s+1}) \in F_{u,2^\alpha p^2}$ dir, ki bu v_2 nin seçimiyle çelişir; çünkü $\varphi^{-(s-1)}(v_1) = v_s$ dir.



Şekil 2.6. $F_{u,2^\alpha p^2}$ alt yörüngesel grafı-III

Sonuç olarak $0 \le i \le k-1$ için $v_{i+1} = \varphi^i(v_1)$ dir. Böylece $v_k < \dfrac{u+1}{2^\alpha p^2}$ bir çelişkidir. Son olarak minimal uzunluklu bir ters yönlenmiş D devresinin mevcut olduğunu farz edelim ve $t \ge 1$ için $\infty \to v_1 = \dfrac{u}{2^\alpha p^2} \ldots \to v_t \leftarrow v_{t+i} \ldots v_k \to \infty$ biçiminde olduğunu kabul edelim. Yukarıdan $i \le t$ için $v_i = \varphi^i(\infty)$ olduğunu biliyoruz. v , $v_1 \leftarrow v$ $F_{u,2^\alpha p^2}$ de bir kenar olacak şekilde $\dfrac{u}{2^\alpha p^2}$ den daha büyük olma koşulunu sağlayan en büyük rasyonel sayı olsun. Buradan pozitif m tamsayısı için $v=\dfrac{u+\frac{1}{m}}{2^{\alpha}p^2}$ dir. Gerçekten de v , $v_1=\dfrac{u}{2^{\alpha}p^2}$ den daha büyük bir rasyonel sayı olduğundan $v=\dfrac{u+\frac{k}{m}}{2^{\alpha}p^2}$ alabiliriz. $v_1 \leftarrow v$ ve $2^{\alpha}p^2v_1 \leftarrow 2^{\alpha}p^2v$ $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ de bir kenardır. Buna göre $u \leftarrow u+\dfrac{k}{m}=\dfrac{um+k}{m}\in F_{u,2^{\alpha}p^2} \Leftrightarrow$ $um-um-k=-1 \Leftrightarrow k=1$ elde edilir. Bu yüzden $v_1=\dfrac{u}{2^{\alpha}p^2}\leftarrow v=\dfrac{u+\frac{1}{m}}{2^{\alpha}p^2}\in F_{u,2^{\alpha}p^2}$ buradan $\dfrac{u}{2^{\alpha}p^2}\leftarrow\dfrac{um+1}{2^{\alpha}mp^2}\in F_{u,2^{\alpha}p^2} \Leftrightarrow 2^{\alpha}p^2 \mid 2^{\alpha}mp^2$ olduğundan dolayı böylece $u\equiv(um+1)u \pmod{2^{\alpha-3}p^2} \Leftrightarrow -u^2m\equiv 0 \pmod{2^{\alpha-3}p^2}$ ifadesi ve $(u,2^{\alpha-3})=1$ olup $2^{\alpha-3}p^2 \mid m$ elde edilir. Ayrıca v en büyük olduğundan $2^{\alpha-3}p^2=m$ dir. Çünkü $\dfrac{u}{2^{\alpha}p^2}\leftarrow\dfrac{u+\frac{1}{m}}{2^{\alpha}mp^2}$ olması halinde $2^{\alpha-3}p^2 \mid m$ olduğunu gösterdik. Bu durumda $\exists k\in\mathbb{Z}$: $m=2^{\alpha-3}kp^2$, ancak m büyüdükçe v köşesi v_1 köşesine yaklaşır, bu ise v köşesinin en büyük olması ile çelişir, dolayısıyla $k=1$ almalıyız, böylece $2^{\alpha-3}p^2=m$ dir. Bu yüzden $v_2\le v=\dfrac{u+\frac{1}{m}}{2^{\alpha}p^2}$ elde edilir. Yönlenmiş devre için yapılan işlemlerden v_2 köşesinin de $\dfrac{u+\frac{1}{m}}{2^{\alpha}p^2}$ formunda olduğunu biliyoruz. Böylece $k_0<2^{\alpha-3}p^2$ olduğundan $v<\dfrac{u+\frac{1}{k_0}}{2^{\alpha}p^2}$ dir. Dolayısıyla t , 1 den daha büyük olmak zorunda, aksi halde $\infty\to v_1\leftarrow v...v_k\to\infty$ alınırsa $s\ge 3$ olmak üzere $v<v_s=\dfrac{u+\frac{1}{k_0}}{2^{\alpha}p^2}$ dir ve yönlenmiş devre için bu noktanın köşe olduğunu biliyoruz, bu durumda daha kısa uzunluklu bir $\infty\to v_1\to v_s\to...v_k\to\infty$ devresi elde edilir ki bu bir çelişkidir, çünkü ispat yapılırken önce D devresi minimal uzunlukta alındı, sonra ters yönlenmiş olduğu kabul edildi, şu halde yönlenmiş de olsa

daha kısa uzunluklu bir devre elde edilmektedir. Böylece $v_1 \to v_2 = \dfrac{u+\frac{1}{k_0}}{2^{\alpha}p^2}$ almak zorundayız.

$w = \varphi^{t+1}(\infty)$ olsun. $v_1 \to v_2 \in F_{u,2^{\alpha}p^2}$, buradan $\varphi^{t-1}(v_1) \to \varphi^{t-1}(v_2) \in F_{u,2^{\alpha}p^2}$ dir. $0 \le i \le k-1$ göz önüne alındığında buradan $v_{i+1} = \varphi^{i}(v_1) = \varphi^{i+1}(\infty)$ eşitliği kullanıldığında $v_t \to \varphi^{t}(v_1) = v_{t+1} \in F_{u,2^{\alpha}p^2}$ olduğundan $v_{t+1} \neq w$ olduğu görülür. Aksi halde kenar şartlarından seçilen devrede var olan $v_t \leftarrow v_{t+1}$ ile az önce elde edilen $v_t \to v_{t+1}$ durumları $u^2 \equiv -1 \left(\bmod 2^{\alpha-3}p^2\right)$ olduğunu söyler ki $k_0 < 2^{\alpha-3}p^2$ olduğundan bu ifade de $u^2 + uk_0 + 1 \equiv 0 \left(\bmod 2^{\alpha-3}p^2\right)$ ile çelişir. Bu yüzden $v_{t+1} < w$ eşitsizliği doğru olmak zorundadır. Çünkü $v_{t+1} > w$ ise $\varphi^{-(t-1)}\left(\varphi^{t-2}(v_1)\right) = \infty$, $\varphi^{t-2}(v_1) < \varphi^{t}(v_1)$ ve böylece $\varphi^{t-2}(v_1) < \varphi^{t}(v_1) = \varphi^{t}(\varphi(\infty)) = \varphi^{t+1}(\infty) = w < v_{t+1}$ olup $\varphi^{-(t-1)}(v_{t+1}) > \varphi^{-(t-1)}(w) = v_2$ ve $\varphi^{-(t-1)}(v_t) = v_1 \leftarrow \varphi^{-(t-1)}(v_{t+1}) > v_2$ $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ de bir kenardır ki bu v_2 köşesinin seçimiyle çelişir. Ancak $v_{t+1} < w$ ise $s \ge t+2$ için $w = v_s$ elde edilecekti ve bu yüzden daha kısa uzunluklu bir $\infty \to v_1 \to \ldots \to v_t \to v_s \to \ldots v_k \to \infty$ devresi elde edilir ki bu yine bir çelişkidir. Bu da D devresinin yönlenmiş olmak zorunda olduğunu söyler.■

2.3. N=3^2p^2 İçin $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)$ nin Alt Yörüngesel Grafları

p>3 ve p asal sayı olmak üzere $N = 3^2p^2$ için $h = 3$ tür. T=$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}$, e||N/$h^2$ elemanı göz önüne alınırsa $\det T = e = 1, p^2$ dir.

Buradan normalliyenin elemanları

$$T_1 = \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bp^2c = 1 \qquad \text{ve} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} ap^2 & b/3 \\ 3p^2c & dp^2 \end{pmatrix}, \quad adp^2 - bc = 1$$

şeklindedir.

Lemma 2.4 . $\Gamma_0\left(3^2p^2\right)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin yörüngeleri;

(i) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\3p^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3^2p^2\end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix}1\\p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\p\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}p-1\\p\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}a\\3p\end{pmatrix}$ şeklindeki yörüngelerin sayısı $\varphi(3p)=2(p-1)$ tanedir. Bu biçimdeki herhangi farklı iki yörünge $\begin{pmatrix}a_1\\3p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\3p\end{pmatrix}$ için $a_1\not\equiv a_2 \pmod{3p}$ dir.

(iv) $\begin{pmatrix}a\\3^2p\end{pmatrix}$ şeklindeki yörüngelerin sayısı $\varphi(p)=p-1$ tanedir. Bu biçimdeki herhangi farklı iki yörünge $\begin{pmatrix}b_1\\3^2p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_2\\3^2p\end{pmatrix}$ için $b_1\not\equiv b_2 \pmod{p}$ dir.

Toplam yörünge sayısı: $\sum_{d|N}\varphi\left(\left(d\,,\,\frac{3^2p^2}{d}\right)\right)=4(p+1)$ dir.

İspat . Lemma 1.1. ve Lemma 1.3. den ispat açıktır.■

Teorem 2.8. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiği maksimal alt kümelerden biri

$$\widehat{\mathbb{Q}}\,(3^2p^2):=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}2\\3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3^2p^2\end{pmatrix}\text{ dir.}$$

İspat. Yapılması gereken $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ yörüngesinin $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)$ ile hareketini incelemektir. $\begin{pmatrix}a & b/3\\3p^2c & d\end{pmatrix}$, $ad-bp^2c=1$ elemanı göz önüne alındığında;

$\begin{pmatrix}a & b/3\\3p^2c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b/3\\3p^2c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+b\\3(3p^2c+d)\end{pmatrix}$ rasyonel sayısı elde edilir. $ad-bp^2c=1$ için a,d tek ve b ile c den en az biri çift olsun. Bu durumda,

(i) $3 \nmid d$ olduğunda, açıkça $\dfrac{3a+b}{3(3p^2c+d)} \in \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

(ii) $3 \nmid d$ ve $3a+b$ çift ise $\dfrac{2a_0}{3(3p^2c+d)} \in \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

(iii) $3\|d$ olduğunda ise , $\dfrac{3a+b}{3^2\left(p^2c+d_0\right)} \in \begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix}$ dir.

$\begin{pmatrix} ap^2 & b/3 \\ 3p^2c & dp^2 \end{pmatrix}$, $adp^2 - bc = 1$ elemanı göz önüne alındığında;

$\begin{pmatrix} ap^2 & b/3 \\ 3p^2c & dp^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap^2 + b/3 \\ 3p^2c + dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3ap^2 + b \\ 3p^2(3c+d) \end{pmatrix}$ sayısı elde edilir. $adp^2 - bc = 1$ için a,d tek ve b ile c den en az biri çift olsun. Bu durumda,

(iv) $3 \nmid d$ olduğunda, $\dfrac{3ap^2+b}{3p^2(3c+d)} \in \begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix}$

(v) $3 \nmid d$ ve $3ap^2+b$ çift ise $\dfrac{2a_0}{3p^2(3c+d)} \in \begin{pmatrix}2\\3p^2\end{pmatrix}$

(vi) $3\|d$ olduğunda, $\dfrac{3ap^2+b}{3^2p^2(c+d_0)} \in \begin{pmatrix}1\\3^2p^2\end{pmatrix}$ dir.

a,d çift ve b ve c tek olsun.

(vii) $3\|b$ olduğunda, $\dfrac{ap^2+b_0}{p^2(3c+d)} \in \begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}$

Böylece $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}2\\3p^2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\3^2p^2\end{pmatrix}$ elde edilir.

Sonuç olarak $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiği maksimal alt kümelerden biri

$$\widehat{\mathbb{Q}}(3^2p^2) := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}2\\3p^2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\3^2p^2\end{pmatrix} \text{ dir.} \blacksquare$$

Şimdi imprimitif hareketi irdeleyelim:

$$G_\infty = N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)_\infty = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{ve } \Omega = \widehat{\mathbb{Q}}(3^2p^2)$$

$$H = N_0(3^2p^2) := \left\langle \Gamma_0(3^2p^2), \underbrace{\begin{pmatrix} ap & b/3p \\ 3pc & dp \end{pmatrix}}_{A}, \underbrace{\begin{pmatrix} ap & b/p \\ 3^2pc & dp \end{pmatrix}}_{B} \right\rangle$$

$G = N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)$ olarak tanımlandığında,

$N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)_\infty \underset{\neq}{<} N_0(3^2p^2) \underset{\neq}{<} N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla,

$p \equiv 1 \pmod 3$ olmak üzere $\begin{pmatrix} ap^2 & b/3 \\ 3p^2c & dp^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix} \in N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)$ için $a+d=1$ olan a ve d mevcuttur.

Buradan $A^6 \in \Gamma_0(3^2p^2) \Leftrightarrow a+d \neq 3k$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $B^2 \in \Gamma_0(3^2p^2)$ dır.

Yan sınıf temsilcileri olarak ; $\{I, A, A^2, A^3, A^4, A^5\} \times \{I, B\} = \{I, B, A, \ldots, A^5, AB, \ldots, A^5B\}$ dir.

$\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right) : \Gamma_0(3^2p^2)\right| = 2^2.3^2.\frac{2}{3} = 24$ ve $\left|N_0(3^2p^2) : \Gamma_0(3^2p^2)\right| = 12$ olduğundan

$\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right) : N_0(3^2p^2)\right| = 2$ olarak elde edilir. Çünkü,

$$\underbrace{\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right) : \Gamma_0(3^2p^2)\right|}_{24} = \underbrace{\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right) : N_0(3^2p^2)\right|}_{2} . \underbrace{\left|N_0(3^2p^2) : \Gamma_0(3^2p^2)\right|}_{12}$$

şeklindedir. Böylece denklik sınıflarının sayısı (blok sayısı) 2 dir.

Açıkça $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right) = N_0(3^2p^2) \cup \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix} N_0(3^2p^2)$ dir.

"$\approx$" ile $N_0(3^2p^2)$ tarafından $\widehat{\mathbb{Q}}(3^2p^2)$ üzerine indirgenen $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)$ invaryant eşdeğerlik bağıntısını gösterelim. İmprimitif harekete bakalım:

Teorem1.19. dan $\alpha = \infty$, $G_\infty = N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)_\infty$, $G = N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)$ ve $H = N_0\left(3^2p^2\right)$ alınırsa $g(\infty) \approx h(\infty) \Leftrightarrow g^{-1}h \in H$ olduğundan;

$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{g}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix}a & b/3\\ 3p^2c & d\end{pmatrix}}_{h}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\3p^2c\end{pmatrix}$ elemanı $ad-bp^2c=1$ olduğundan, $3 \nparallel a$ ise $\begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix}$, $3 \,\|\, a$ ise $\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}$ dir. Eğer $3 \nparallel a$ ve $3 \,\|\, c$ ise $\begin{pmatrix}1\\3^2p^2\end{pmatrix}$, $a=2k$ biçiminde ise $\begin{pmatrix}2\\3p^2\end{pmatrix}$ dir. $\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{g}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix}ap^2 & b\\ 3^2p^2c & dp^2\end{pmatrix}}_{h}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\3^2c\end{pmatrix}$ elemanı $adp^2-3^2bc=1$ olduğundan $3 \nparallel a$ ise $\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix}$, $3 \,\|\, a$ ise $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ ve $3^2 \,\|\, a$ ise $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ dir. Ayrıca $a=6k$ biçiminde ise $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ dir. Acaba $\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}$ olur mu? Bu sorunun yanıtı $\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix} \not\approx \begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}$ dir. Çünkü

$\begin{pmatrix}ae & b/3\\ 3p^2c & de\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix}$ ise $e=p^2$ dir.Böylece $\begin{pmatrix}ap^2 & b/3\\ 3p^2c & dp^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix}$ ve $c=3c_0$ dır.

$\begin{pmatrix}ae & b/3\\ 3p^2c & de\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}$ buradan $\begin{pmatrix}ae\\3p^2c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}$ ise $e=1$ ve $a=3a_0$ olmalıdır.

Böylece $\begin{pmatrix}3a_0 & b/3\\ 3p^2c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}$ olur. Şimdi Teorem1.19. daki koşulu sağlayalım.

$$\begin{pmatrix}3a & b/3\\ 3p^2c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d & -b/3p^2\\ -3c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3ad\text{-}bc & \dfrac{-ab}{p^2}+\dfrac{ab}{3}\\ 3cd\left(p^2-1\right) & ad-bc\end{pmatrix}\notin N_0\left(3^2p^2\right) \text{ dir.}$$

Dolayısıyla $\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix} \not\approx \begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}$ dir. Benzer şekilde işlemler yapıldığında $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix}$ olduğu görülür.

İmprimitif hareketin neticesinde oluşan bloklar aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$[\infty]=\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}2\\3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3^2p^2\end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad [0]=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix}$$

Köşeleri $[\infty]$ bloğunda olan alt yörüngesel grafı F_{u,p^2} ile gösterilir. Bu durumda;

Teorem 2.9. $\frac{r}{s},\frac{x}{y}\in[\infty]$ ve $\frac{r}{s}\rightarrow\frac{x}{y}\in F_{u,p^2}$ dir $\Leftrightarrow$

(i) $3^2p^2 \| s$ ise $x\equiv\pm ur\left(\bmod p^2\right)$, $y\equiv\pm us\left(\bmod p^2\right)$ ve $ry-sx=\pm p^2$

(ii) $3p^2 \| s$ ise $x\equiv\pm 3ur\left(\bmod p^2\right)$, $y\equiv\pm 3us\left(\bmod p^2\right)$ ve $ry-sx=\pm 3p^2$

(iii) $p^2 \| s$ ise $x\equiv\pm 3^2ur\left(\bmod p^2\right)$, $y\equiv\pm 3^2us\left(\bmod p^2\right)$ ve $ry-sx=\pm p^2$

İspat. "$\Rightarrow$":

$\frac{r}{s}\rightarrow\frac{x}{y}\in F_{u,p^2}$ olduğundan $\exists\ T\in N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)$ öyle ki $\left(\infty,\frac{u}{p^2}\right)\xrightarrow{T}\left(\frac{r}{s},\frac{x}{y}\right)$

ve $T(\infty)=\frac{r}{s}$, $T\left(\frac{u}{p^2}\right)=\frac{x}{y}$ dir.

(i) $3^2p^2\|\ s$ ise $T=\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}$, $\det T=ad-bp^2c=1$, elemanını göz önüne alalım.

Burada $3\nmid a$, $3\,\|\,b,c$ olsun. $T(\infty)=\frac{a}{3p^2c}=\frac{r}{s}$ şeklindedir.Böylece,

$$\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{a}{3^2p^2c_0}=\frac{r}{s} \quad \text{ise } r=a \text{ ve } s=3^2p^2c_0 \text{ dir.}$$

$$T\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix}=\frac{au+\frac{b}{3}p^2}{3^2p^2c_0u+dp^2}=\frac{au+b_0p^2}{3^2p^2c_0u+dp^2}=\frac{x}{y} \quad \text{eşitliğinden}$$

$x\equiv\pm ur\left(\bmod p^2\right)$ ve $y\equiv\pm us\left(\bmod p^2\right)$ elde edilir.

Ayrıca $\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & au+\frac{b}{3}p^2 \\ 3p^2c & 3p^2cu+dp^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$ matrisleri için

$ry-sx = adp^2 - p^2bcp^2 = p^2\underbrace{(ad-p^2bc)}_{1} = p^2$ dir. Buradan yukarıdaki eşitliklerle birlikte

$ry-sx = \pm p^2$ olduğu açıktır.

(ii) $3p^2 \| s$ ise $T=\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}$, $\det T = ad - bp^2c = 1$, elemanını inceleyelim. Burada

$3 \nmid a,b,c$ olsun. Bu durumda $T(\infty)=\dfrac{a}{3p^2c}=\dfrac{r}{s}$ dir. Böylece $\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{a}{3p^2c} = \dfrac{r}{s}$

ise $r=a$ ve $s=3p^2c$ dir.

$$T\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \frac{au+\frac{b}{3}p^2}{3p^2cu+dp^2} = \frac{3au+bp^2}{3^2p^2cu+3dp^2} = \frac{x}{y}$$ eşitliğinden

$x \equiv \pm 3ur \pmod{p^2}$ ve $y \equiv \pm 3us \pmod{p^2}$ elde edilir.

Ayrıca $\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & au+\frac{b}{3}p^2 \\ 3p^2c & 3p^2cu+dp^2 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3au+bp^2 \\ 3p^2c & 3^2p^2cu+3dp^2 \end{pmatrix}$

matrisi elde edilir. Bu matrisin determinantı yukarıdaki eşitliklerle birlikte $ry-sx = \pm 3p^2$ olduğu açıktır.

(iii) $p^2 \| s$ ise $T=\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}$, $\det T = ad - bp^2c = 1$, elemanını inceleyelim. Burada

$3 \| a$, $3 \nmid b,c$ olsun. $T(\infty)=\dfrac{a}{3p^2c}=\dfrac{r}{s}$ dir. Böylece $\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{a_0}{p^2c} = \dfrac{r}{s}$ ise $r=a_0$

ve $s=p^2c$ elde edilir. $T\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \dfrac{au+\frac{b}{3}p^2}{3p^2cu+dp^2} = \dfrac{3^2a_0u+bp^2}{3^2p^2cu+3dp^2} = \dfrac{x}{y}$

eşitliğinden $x \equiv \pm 3^2ur \pmod{p^2}$ ve $y \equiv \pm 3^2us \pmod{p^2}$ elde edilir.

Ayrıca $\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & au+\frac{b}{3}p^2 \\ 3p^2c & 3p^2cu+dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$ matrisleri için

$ry{-}sx = adp^2 - p^2bcp^2 = p^2\underbrace{\left(ad - p^2bc\right)}_{1} = p^2$ dir. Buradan yukarıdaki eşitliklerle birlikte

$ry - sx = \pm p^2$ olduğu açıktır.

$"\Leftarrow"$:

(i) $3^2p^2\|s$ ise $x \equiv \pm ur\left(\operatorname{mod} p^2\right)$, $y \equiv \pm us\left(\operatorname{mod} p^2\right)$ ve $ry - sx = \pm p^2$ olsun. Bu durumda $\exists b,d \in \mathbb{Z}$ öyle ki $x = ur + bp^2$ ve $y = us + dp^2$ dir. Bu eşitlikler determinantta yerine yazıldığında $ry{-}sx = r(us + dp^2) - s(ur + bp^2) = rdp^2 - bsp^2 = p^2$ eşitliğinden $rd - bs = 1$ elde edilir.

Buna göre $T_0 := \begin{pmatrix} r & b \\ s & d \end{pmatrix}$, $\det T_0 = 1$ ve $3^2p^2\|\ s$ göz önüne alındığında $T_0 \in \Gamma_0(3^2p^2) \subset N_0(3^2p^2)$ dir. Benzer şekilde işlem yapıldığında (ii) ve (iii) durumları da kolaylıkla gösterilebilir.■

Lemma 2.5. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)$ nin F_{u,p^2} alt yörüngesel grafının kenarları $\mathcal{U}$ da kesişmez.

İspat. Genellikten bir şey kaybetmeksizin, $\widehat{\mathbb{Q}}(3^2p^2)$ üzerindeki hareket transitif olduğundan $\infty \rightarrow \frac{u}{p^2}$, $\frac{x_1}{y_1p^2} \rightarrow \frac{x_2}{y_2p^2}$ ve $\frac{x_1}{y_1p^2} < \frac{u}{p^2} < \frac{x_2}{y_2p^2}$ alabiliriz. Bu durumda

$x_1y_2p^2 - x_2y_1p^2 = -p^2$ dir. Böylece, $x_1y_2 - x_2y_1 = -1$ ve $\frac{x_1}{y_1} < u < \frac{x_2}{y_2}$ elde edilir. Buradan $\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2} < u - \frac{x_2}{y_2} < 0$ ve $\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{y_1y_2} < \frac{uy_2 - x_2}{y_2} < 0$ dır.Dolayısıyla $\frac{-1}{y_1} < uy_2 - x_2 < 0$,bu ise bir çelişkidir.Benzer şekilde $x_1y_2p^2 - x_2y_1p^2 = -3\,p^2$ durumunda da çelişki elde edilir.■

Teorem 2.10. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)$ nin F_{u,p^2} alt yörüngesel grafının üçgen içermesi için gerek ve yeter koşul $3^2u^2 \pm 3u+1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ olmasıdır.

İspat. F_{u,p^2} nin bir $\frac{k_0}{l_0} \to \frac{m_0}{n_0} \to \frac{x_0}{y_0} \to \frac{k_0}{l_0}$ üçgeni içerdiğini kabul edelim. N_0 F_{u,p^2} nin kenar ve köşelerini transitif olarak permüte ettiğinden, verilen üçgeni N_0 altında $\frac{1}{0} \to \frac{u}{p^2} \to \frac{x}{yp^2} \to \frac{1}{0}$ üçgenine resmedelim.

$\frac{u}{p^2} \to \frac{x}{yp^2}$ kenarından $x \equiv -3^2u^2 \pmod{p^2}$ denklemi ve $uyp^2 - xp^2 = -p^2$ eşitliğinden $x = uy+1$ elde edilir. $y=1$ durumu için $\frac{u}{p^2} \to \frac{x}{p^2}$ ve $x = u+1$ olup $\frac{u}{p^2} \to \frac{u+1}{p^2}$ bulunur. Kenar şartlarından $u+1 \equiv -3^2u^2 \pmod{p^2}$ ise $3^2u^2+u+1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ [I]

$\frac{u+1}{p^2} \to \frac{1}{0}$ kenarından $1 \equiv -3^2u(u+1) \pmod{p^2} \Rightarrow 3^2u^2+3^2u+1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ [II]

[I] ve [II] ifadesinden $3^2u^2+3^2u+1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ ise $(\underbrace{3^2u^2+u+1}_{0})+8u \equiv 0 \pmod{p^2}$ ve $8u \equiv 0 \pmod{p^2}$ buradan $u \equiv 0 \pmod{p^2}$ elde edilir. Bu ise $\frac{u}{p^2}$ için $\left(u,p^2\right)=1$ olmasıyla çelişir.

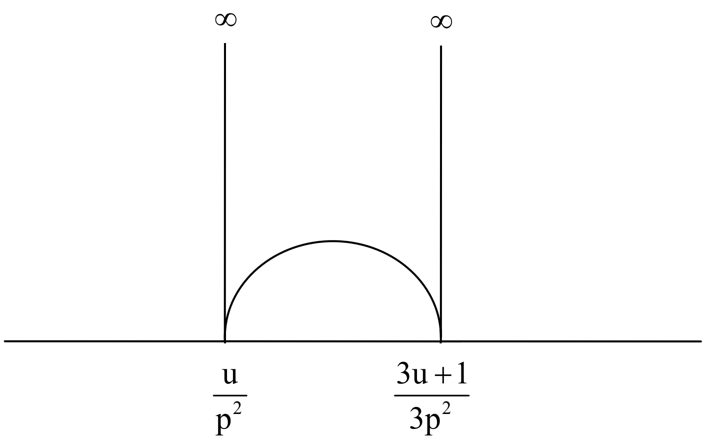
$y=2$ olamaz. Çünkü $\frac{x}{2p^2} \to \frac{1}{0}$ için $x.0-1.2p^2=-2p^2$ olan bir kenar şartı yoktur.

Dolayısıyla verilen üçgeni N_0 altında $\frac{1}{0} \to \frac{m}{p^2} \to \frac{x}{3yp^2} \to \frac{1}{0}$ üçgenine resmedebiliriz. Üstelik genellikten bir şey kaybetmeden $\frac{m}{p^2} < \frac{x}{3yp^2}$ farzedebiliriz. Burada sürekli olarak bir önceki teoremi kullanacağız. $\frac{1}{0} \to \frac{m}{p^2}$ kenarından $m \equiv u \pmod{p^2}$ dir. Dolayısıyla $\frac{1}{0} \to \frac{u}{p^2} \to \frac{x}{3yp^2} \to \frac{1}{0}$ yazılabilir. $\frac{u}{p^2} \to \frac{x}{3yp^2}$ kenarından $x \equiv -3^2u^2 \pmod{p^2}$ elde edilir. Üstelik, $3uyp^2 - xp^2 = -p^2$ eşitliğinden $x = 3uy+1$ dir.

$\frac{x}{3yp^2} \to \frac{1}{0}$ kenarından, $1 \equiv -3ux \pmod{p^2}$ ve $y=1$ dir. $y=2$ olamaz. Çünkü $\frac{x}{3.2p^2} \to \frac{1}{0}$ çelişkidir. $y=3$ durumu da mümkün değildir. Çünkü $\frac{x}{3^2p^2} \to \frac{1}{0}$ olur ki bu bir önceki teoremin kenar şartlarını sağlamaz. Dolayısıyla $y=1$ olmak zorundadır. Böylece $x = 3u+1$ olup $x \equiv -3^2u^2 \pmod{p^2}$ için $3^2u^2+3u+1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ denklemi elde edilir.

$\frac{m}{p^2} > \frac{x}{3yp^2}$ eşitsizliğinde de yine $3^2u^2-3u+1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ elde edilir.

Tersine olarak $3^2u^2+3u+1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ farzedelim. Bu durumda bir önceki teoremden $\frac{1}{0} \to \frac{u}{p^2} \to \frac{3u \pm 1}{3p^2} \to \frac{1}{0}$ devresinin F_{u,p^2} de bir üçgen olduğu görülür.■



Şekil 2.7. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^2p^2\right)\right)$ deki $\mathbb{H}$-Üçgen

$T := \begin{pmatrix} -3^2u & \frac{3^2u^2+3u+1}{p^2} \\ -3^2p^2 & 3^2u+3 \end{pmatrix}$ ve $\det T = 3^2$ olmak üzere T 3. mertebeden bir eliptik elemandır. Yani $T^3 = I$ dır. Açıkça T elemanı ile $\frac{1}{0} \to \frac{u}{p^2} \to \frac{3u \pm 1}{3p^2} \to \frac{1}{0}$ köşeleri birbirine resmedilir. $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\p^2\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}u\\p^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3u+1\\3p^2\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}3u+1\\3p^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ olduğu görülür.

Acaba $3^2u^2+3u+1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ ise $p \equiv 1 (\bmod 3)$ sağlanır mı?

$p \equiv 2(\bmod 3)$ olsun. Böylece $p = 2 + 3t$ olan bir $t \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $3^2u^2 + 3u + 1 = 2 + 3t$ yazılabilir. Yani $3\left(3u^2 + u\right) = 1 + 3t$ dir. Bu ise $3|1$ çelişkisini gösterir. $p \equiv 0(\bmod 3)$ ifadesi de bir çelişki olacağından $3^2u^2 + 3u + 1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ ise $p \equiv 1(\bmod 3)$ dür.

Tersine $p \equiv 1(\bmod 3)$ ise $3^2u^2 + 3u + 1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ olan bir u elemanı mevcut mu?

$p \equiv 1 \left(\bmod 3\right)$ ise $p = 1 + 3k$ şeklindedir. Buradan $3^2u^2 + 3u + 1 = \left(1 + 3k\right)^2$ yazılabilir. Böylece $3u + 1 = \left(1 + 3k\right)^2 - 3^2u^2$ buradan $3u + 1 = \left(1 + 3k - 3u\right)\left(1 + 3k + 3u\right)$ elde edilir. $3u + 1 = \left(1 + 3\underbrace{(k - u)}_{\ell}\right)\left(1 + 3\underbrace{(k + u)}_{m}\right)$ dolayısıyla $3u + 1 = \left(1 + 3\ell\right)\left(1 + 3m\right)$ ve böylece $3u + 1 = 1 + 3m + 3\ell + 9m\ell$ dir. $m, \ell \in \mathbb{Z}$ olmak üzere burada $u = m + \ell + 3m\ell$ şeklindedir. Örneğin $p = 7$ için $\left(u < N\right)$ $u = 6$ alınırsa $3^2.6^2 + 3.6 + 1 \equiv 0 \left(\bmod 7^2\right)$ denkleminden $7.49 \equiv 0 \left(\bmod 7^2\right)$ dir.

Benzer şekilde $N = 3p^2$ alındığında $T := \begin{pmatrix} -3u & \dfrac{3u^2 + 3u + 1}{p^2} \\ -3p^2 & 3u + 3 \end{pmatrix}$ ve $\det T = 3$ olmak üzere açıkça görülmektedir ki T burada 6. mertebeden bir eliptik elemandır. Bu T elemanı ile yardımıyla $\frac{1}{0} \to \frac{u}{p^2} \to \frac{3u + 1}{3p^2} \to \frac{2u + 1}{2p^2} \to \frac{3u + 2}{3p^2} \to \frac{u + 1}{p^2} \to \frac{1}{0}$ köşeler birbirine resmedilir. Ancak burada dikkat edilmesi gereken $p \equiv 1\left(\bmod 3\right)$ olduğudur.

Örneğin $p = 7$ için $3u^2 + 3u + 1 \equiv 0 \left(\bmod 7^2\right)$ denkleminin çözümü vardır. Denklem $3u^2 + 3u + 1 = 7k$, $k \in \mathbb{Z}$ şeklindedir.

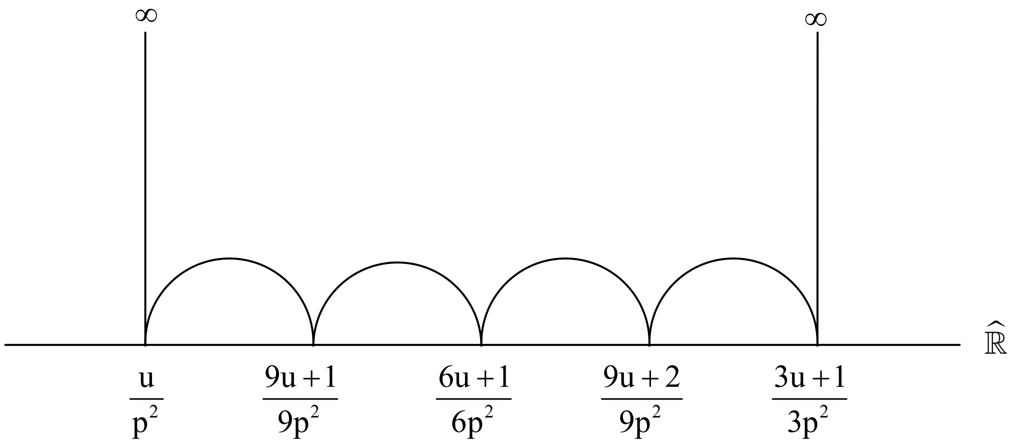
$p = 7$, $u = 1$ alınırsa $T := \begin{pmatrix} -3 & \dfrac{1}{7} \\ -3.49 & 6 \end{pmatrix}$ biçiminde olup oluşan devre

$$\frac{1}{0} \to \frac{1}{49} \to \frac{4}{3.49} \to \frac{3}{2.49} \to \frac{5}{3.49} \to \frac{2}{49} \to \frac{1}{0}$$

şeklindedir. Eğer $p = 5$ seçilirse acaba bu durumda bir u elemanı var mı? Şimdi $3u^2 + 3u + 1 \equiv 0 \left(\bmod 5^2\right)$ denkleminin çözümüne bakalım. $3u^2 + 3u + 1 = 5k$, $k \in \mathbb{Z}$

buradan $3u^2+3u+3=5k+2 \Rightarrow u^2+u+1=\dfrac{5k+2}{3} \Rightarrow u=\pm\sqrt{\dfrac{20k-1}{12}}-\dfrac{1}{2}\in\mathbb{Z}$ ve $(u,p)=1$ olmalıdır. Dolayısıyla $\dfrac{20k-1}{12}\notin\mathbb{N}$ olduğu açıktır. O halde $p\equiv 1(\operatorname{mod}3)$ olmak zorundadır.

Eğer $N=3^3p^2$ alınırsa bu durumda $T:=\begin{pmatrix} -3^3u & \dfrac{27u^2+9u+1}{p^2} \\ -3^3p^2 & 3^3u+9 \end{pmatrix}$, $\det T=3^3$ şeklindedir. Yine T normalleştirildiğinde 6. mertebeden bir eliptik eleman olduğu görülür. Bu durumda oluşan devrenin F_{u,p^2} de bir hiperbolik altıgen olduğu görülür. Bu hiperbolik altıgen aşağıdaki biçimdedir:



Şekil 2.8. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^3p^2\right)\right)$ deki $\mathbb{H}$-Altıgen

2.4. $N=3^{\beta}p^2$ İçin $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^{\beta}p^2\right)\right)$ nin Alt Yörüngesel Grafları

$\beta\geq 4$ ve $p>3$, p asal olmak üzere $N=3^{\beta}p^2$ için, $h=3^{\min\{1,[\beta/2]\}}=3$ olduğundan $A=\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}$ $e||N/h^2$, elemanı göz önüne alınırsa $\det A=1, 3^{\beta-2}, p^2, 3^{\beta-2}p^2$ dir. Yani; normalliyenin elemanları

$$A_1=\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & d \end{pmatrix},\ ad-3^{\beta-2}bp^2c=1 \quad ; \quad A_2=\begin{pmatrix} 3^{\beta-2}a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-2}d \end{pmatrix},\ 3^{\beta-2}ad-bp^2c=1$$

$$A_3=\begin{pmatrix} ap^2 & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & dp^2 \end{pmatrix},\ adp^2-3^{\beta-2}bc=1 \quad ; \quad A_4=\begin{pmatrix} 3^{\beta-2}ap^2 & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-2}dp^2 \end{pmatrix},\ 3^{\beta-2}adp^2-bc=1$$

şeklindedir.

Lemma 2.6. $\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin yörüngeleri türlerine göre ayrılarak aşağıda verilmiştir:

(i) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\3^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\3^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\3^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3p^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3^2p^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3^2p^2\end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix}4\\3^2p^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\3^2p^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\3^2p^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\3^2p^2\end{pmatrix}$ ve ayrıca ilave olarak $\forall k\in\{0,1,2,...,\beta-3\}$ için $a_1,a_2,a_3,...,a_{\varphi\left(3^{\beta-k},3^k\right)}$ sayılarının hiçbiri $\left(\bmod 3^{\beta-k}\right)$ ya göre eşlenik olmamak üzere;

$$\begin{pmatrix}a_1\\3^{\beta-k}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\3^{\beta-k}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3\\3^{\beta-k}\end{pmatrix},...,\begin{pmatrix}a_{\varphi\left(3^{\beta-k},3^k\right)}\\3^{\beta-k}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}a_1\\3^{\beta-k}p^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\3^{\beta-k}p^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3\\3^{\beta-k}p^2\end{pmatrix},...,\begin{pmatrix}a_{\varphi\left(3^{\beta-k},3^k\right)}\\3^{\beta-k}p^2\end{pmatrix}$$

(ii) $\begin{pmatrix}1\\p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\p\end{pmatrix},...,\begin{pmatrix}p-1\\p\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}a_1\\3p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\3p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3\\3p\end{pmatrix},...,\begin{pmatrix}a_{2(p-1)}\\3p\end{pmatrix}$ ve herhangi iki farklı $\begin{pmatrix}a_i\\3p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_j\\3p\end{pmatrix}$ yörüngeleri için $a_i\not\equiv a_j\ (\bmod 3p)$ dir.

$(\beta+2)$ $\begin{pmatrix}a_1\\3^\beta p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\3^\beta p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_3\\3^\beta p\end{pmatrix},...,\begin{pmatrix}a_{p-1}\\3^\beta p\end{pmatrix}$ ve herhangi iki farklı $\begin{pmatrix}a_i\\3^\beta p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_j\\3^\beta p\end{pmatrix}$ yörüngeleri için $a_i\not\equiv a_j\ (\bmod p)$ dir.

İspat . Lemma 1.1. ve Lemma 1.3. den ispat açıktır.■

Buradaki tüm yörüngelerinin sayısı , φ Euler fonksiyonu olmak üzere $\sum_{d|N}\varphi\left(\left(d\,,\,\frac{3^{\beta}p^{2}}{d}\right)\right)$ dir. β sayısının tek veya çift olma durumuna göre yörünge sayısını kolaylıkla bulunabilir.

β tek olduğunda $N=3^{\beta}p^{2}$ nin bölenleri;

I) $1,3,3^2,3^3,...,3^{\beta}$ için $\sum_{d|3^{\beta}}\varphi\left(\left(d,N/d\right)\right)=2^{\left[\!\left[\frac{\beta}{2}\right]\!\right]+2}-2$

II) $p,3p,3^2p,3^3p,...,3^{\beta}p$ için $\sum_{d|3^{\beta}p}\varphi\left(\left(d,N/d\right)\right)=\left(2^{\left[\!\left[\frac{\beta}{2}\right]\!\right]+2}-2\right)(p-1)$

III) $p^2,3p^2,3^2p^2,3^3p^2,...,3^{\beta}p^2$ için $\sum_{d|3^{\beta}p^2}\varphi\left(\left(d,N/d\right)\right)=2^{\left[\!\left[\frac{\beta}{2}\right]\!\right]+2}-2$

Bu durumda toplam yörünge sayısı: $\left(2^{\left[\!\left[\frac{\beta}{2}\right]\!\right]+2}-2\right)(p+1)$ dir.

β çift olduğunda $N=3^{\beta}p^{2}$ nin bölenleri;

I) $1,3,3^2,3^3,...,3^{\beta}$ için $\sum_{d|3^{\beta}}\varphi\left(\left(d,N/d\right)\right)=3.2^{\frac{\beta}{2}}-2$

II) $p,3p,3^2p,3^3p,...,3^{\beta}p$ için $\sum_{d|3^{\beta}p}\varphi\left(\left(d,N/d\right)\right)=\left(3.2^{\frac{\beta}{2}}-2\right)(p-1)$

III) $p^2,3p^2,3^2p^2,3^3p^2,...,3^{\beta}p^2$ için $\sum_{d|3^{\beta}p^2}\varphi\left(\left(d,N/d\right)\right)=3.2^{\frac{\beta}{2}}-2$

Bu durumda toplam yörünge sayısı: $\left(3.2^{\frac{\beta}{2}}-2\right)(p+1)$ dir. Dolayısıyla toplam yörünge sayısı β tek ise $\left(2^{\left[\!\left[\frac{\beta}{2}\right]\!\right]+2}-2\right)(p+1)$; β çift ise $\left(3.2^{\frac{\beta}{2}}-2\right)(p+1)$ dir.

Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.11. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^{\beta}p^{2}\right)\right)$ grubunun $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiği maksimal alt kümelerden biri , $\forall k\in\{0,1,2,...,\beta-3\}$ olmak üzere,

$$\hat{\mathbb{Q}}(3^{\beta}p^2):=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix}\cup\ldots\cup\begin{pmatrix}8\\3^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}a_1\\3^{\beta-k}\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}a_2\\3^{\beta-k}\end{pmatrix}\cup\ldots\cup\begin{pmatrix}a_{\varphi\left(3^{\beta-k},3^k\right)}\\3^{\beta-k}\end{pmatrix}\cup$$

$$\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}2\\3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3^2p^2\end{pmatrix}\cup\ldots\cup\begin{pmatrix}8\\3^2p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}a_1\\3^{\beta-k}p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}a_2\\3^{\beta-k}p^2\end{pmatrix}\cup\ldots\cup\begin{pmatrix}a_{\varphi\left(3^{\beta-k},3^k\right)}\\3^{\beta-k}p^2\end{pmatrix}$$

dir.

İspat: Burada öncelikle yapılması gereken $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ yörüngesinin $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^{\beta}p^2\right)\right)$ altında hareketini incelemektir. $\begin{pmatrix}a & b/3\\3^{\beta-1}p^2c & d\end{pmatrix}$, $ad-3^{\beta-2}bp^2c=1$ elemanı göz önüne alalım.

$$\begin{pmatrix}a & b/3\\3^{\beta-1}p^2c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b/3\\3^{\beta-1}p^2c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+b\\3(3^{\beta-1}p^2c+d)\end{pmatrix}$$ rasyonel sayısını inceleyelim.

(i) $3\nmid d$ olduğunda, açıkça $\dfrac{3a+b}{3(3^{\beta-1}p^2c+d)}\in\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

(ii) $3\|d$ olduğunda ise , $\dfrac{3a+b}{3^2(3^{\beta-2}p^2c+d_0)}\in\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3^2\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}8\\3^2\end{pmatrix}$

(iii) $3^2\|d$ olduğunda ise , $\dfrac{3a+b}{3^3(3^{\beta-3}p^2c+d_1)}\in\begin{pmatrix}1\\3^3\end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix}a_\ell\\3^3\end{pmatrix}$ ve $\left(a_\ell,3^3\right)=1$

Şimdi $\begin{pmatrix}3^{\beta-2}a & b/3\\3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-2}d\end{pmatrix}$, $3^{\beta-2}ad\text{-}bp^2c=1$ elemanı göz önüne alalım.

$$\begin{pmatrix}3^{\beta-2}a & b/3\\3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-2}d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{\beta-2}a+b/3\\3^{\beta-1}p^2c+3^{\beta-2}d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{\beta-1}a+b\\3^{\beta-1}(3p^2c+d)\end{pmatrix}$$ rasyonel sayısını inceleyelim.

(iv) $3\,\|\,d$ olduğunda, $\dfrac{3^{\beta-1}a+b}{3^{\beta}(3p^2c+d_0)}\in\begin{pmatrix}1\\3^{\beta}\end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix}a_\ell\\3^{\beta}\end{pmatrix}$, $\left(a_\ell,3^{\beta}\right)$

(v) $3\nmid d$ olduğunda, $\dfrac{3^{\beta-1}a+b}{3^{\beta-1}(3p^2c+d)}\in\begin{pmatrix}1\\3^{\beta-1}\end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix}a_\ell\\3^{\beta-1}\end{pmatrix}$,$\left(a_\ell,3^{\beta-1}\right)$

(vi) $3 \nmid d$ ve $3 \| b$ olduğunda, $\dfrac{3^{\beta-2}a+b_0}{3^{\beta-2}(3p^2c+d)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 3^{\beta-2} \end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix} a_\ell \\ 3^{\beta-2} \end{pmatrix}$, $\left(a_\ell, 3^{\beta-2}\right)$

Böylece , $\forall k \in \{0,1,2,...,\beta-3\}$ için

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 3^2 \end{pmatrix} \cup ... \cup \begin{pmatrix} 8 \\ 3^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} a_1 \\ 3^{\beta-k} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} a_2 \\ 3^{\beta-k} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} a_3 \\ 3^{\beta-k} \end{pmatrix} \cup ... \cup \begin{pmatrix} a_{\varphi\left(3^{\beta-k},3^k\right)} \\ 3^{\beta-k} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer durumlarda incelenir. Sonuç olarak,

$$\widehat{\mathbb{Q}}(3^\beta p^2) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 3^2 \end{pmatrix} \cup ... \cup \begin{pmatrix} 8 \\ 3^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} a_1 \\ 3^{\beta-k} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} a_2 \\ 3^{\beta-k} \end{pmatrix} \cup ... \cup \begin{pmatrix} a_{\varphi\left(3^{\beta-k},3^k\right)} \\ 3^{\beta-k} \end{pmatrix} \cup$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 3p^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 2 \\ 3p^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ 3^2p^2 \end{pmatrix} \cup ... \cup \begin{pmatrix} 8 \\ 3^2p^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} a_1 \\ 3^{\beta-k}p^2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} a_2 \\ 3^{\beta-k}p^2 \end{pmatrix} \cup ... \cup \begin{pmatrix} a_{\varphi\left(3^{\beta-k},3^k\right)} \\ 3^{\beta-k}p^2 \end{pmatrix}$$

kümesi istenilen şartta bir kümedir.■

Şimdi imprimitif hareketi irdeleyelim;

$$G_\infty = N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right)_\infty = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{ve} \quad \Omega = \hat{\mathbb{Q}}(3^\beta p^2)$$

$$H = N_0(3^\beta p^2) := \left\langle \Gamma_0(3^\beta p^2), \underbrace{\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & d \end{pmatrix}}_{A_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3^{\beta-2}a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-2}d \end{pmatrix}}_{A_2} \right\rangle$$

$$G = N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right)$$

olarak tanımlandığında $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right)_\infty \lneq N_0(3^\beta p^2) \lneq N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right)$

olduğu açıktır.

$A_1 = \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & d \end{pmatrix}$, $ad - 3^{\beta-2}bp^2c = 1$ ve $a + d = 1$ olsun.

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & -a \end{pmatrix}$$

$$A_1^{\,3}=\begin{pmatrix} a-1 & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ elde edilir.}$$

$$A_2^{\,2}=\begin{pmatrix} 3^{\beta-2}a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-2}d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^{\beta-2}a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-2}d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3^{\beta-2}a-1 & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-2}d-1 \end{pmatrix}$$

$$A_2^{\,4}=\begin{pmatrix} 3^{\beta-2}a-1 & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-2}d-1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 3^{\beta-2}\left(3^{\beta-2}a-2a-1\right)+1 & \frac{b}{3}\left(3^{\beta-2}-2\right) \\ 3^{\beta-1}p^2c\left(3^{\beta-2}-2\right) & 3^{\beta-2}\left(3^{\beta-2}d-2d-1\right)+1 \end{pmatrix}$$

$$A_2^{\,6}=\begin{pmatrix} 3^{\beta-2}a-1 & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-2}d-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^{\beta-2}\left(3^{\beta-2}a-2a-1\right)+1 & \frac{b}{3}\left(3^{\beta-2}-2\right) \\ 3^{\beta-1}p^2c\left(3^{\beta-2}-2\right) & 3^{\beta-2}\left(3^{\beta-2}d-2d-1\right)+1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} * & * \\ 3^{\beta-1}p^2c\left(3^{2\beta-4}-2.3^{\beta-2}+3\right) & * \end{pmatrix}\in\Gamma_0(3^\beta p^2)$$

Benzer şekilde $a-d=1$ olması halinde de aynı sonuçlar elde edilir.

Dolayısıyla $A_1^{\,3}=I$ ve $A_2^{\,6}\in\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right) \Leftrightarrow a+d=\pm 1$ dir.

Yan sınıf temsilcileri olarak ; $\left\{I,A_1,A_1^{\,2}\right\}x\left\{I,A_2,A_2^{\,2},A_2^{\,3},A_2^{\,4},A_2^{\,5}\right\}$

$=\left\{I,A_2,A_2^{\,2},A_2^{\,3},A_2^{\,4},A_2^{\,5},A_1,A_1^{\,2},A_1A_2,A_1A_2^{\,2},...,A_1^{\,2}A_2^{\,5}\right\}$ bulunur.

$\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right):\Gamma_0(3^\beta p^2)\right|=2^2.3^2.1=36$ ve $\left|N_0(3^\beta p^2):\Gamma_0(3^\beta p^2)\right|=18$ olduğundan

$\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right):N_0(3^\beta p^2)\right|=2$ dir.Çünkü,

$$\underbrace{\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right):\Gamma_0(3^\beta p^2)\right|}_{36}=\underbrace{\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right):N_0(3^\beta p^2)\right|}_{2}.\underbrace{\left|N_0(3^\beta p^2):\Gamma_0(3^\beta p^2)\right|}_{18}$$

dir. Denklik sınıflarının sayısı (blok sayısı) 2 dir.

Açıkça $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right)=N_0(3^\beta p^2)\cup\begin{pmatrix} ap^2 & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & dp^2 \end{pmatrix}N_0(3^\beta p^2)$ biçimindedir.

"$\approx$" ile $N_0(3^\beta p^2)$ tarafından $\widehat{\mathbb{Q}}(3^\beta p^2)$ üzerine indirgenen $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right)$ invaryant eşdeğerlik bağıntısını gösterelim. Böylece imprimitif hareketin sonucunda oluşan elde edilen bloklar , $\forall k \in \{0,1,2,...,\beta-3\}$, olmak üzere aşağıdaki biçimdedir:

$$[\infty]=\left(\frac{1}{p^2}\right)\cup\left(\frac{1}{3p^2}\right)\cup\left(\frac{2}{3p^2}\right)\cup\left(\frac{1}{3^2p^2}\right)\cup\left(\frac{2}{3^2p^2}\right)\cup\left(\frac{4}{3^2p^2}\right)\cup\left(\frac{5}{3^2p^2}\right)\cup\left(\frac{7}{3^2p^2}\right)\cup\left(\frac{8}{3^2p^2}\right)\cup$$

$$\left(\frac{a_1}{3^{\beta-k}p^2}\right)\cup\left(\frac{a_2}{3^{\beta-k}p^2}\right)\cup\left(\frac{a_2}{3^{\beta-k}p^2}\right)\cup...\cup\left(\frac{a_{\varphi\left(3^{\beta-k},3^k\right)}}{3^{\beta-k}p^2}\right)$$

$$[0]=\left(\frac{1}{1}\right)\cup\left(\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3^2}\right)\cup\left(\frac{2}{3^2}\right)\cup\left(\frac{4}{3^2}\right)\cup\left(\frac{5}{3^2}\right)\cup\left(\frac{7}{3^2}\right)\cup\left(\frac{8}{3^2}\right)\cup\left(\frac{a_1}{3^{\beta-k}}\right)\cup\left(\frac{a_2}{3^{\beta-k}}\right)\cup$$

$$\left(\frac{a_3}{3^{\beta-k}}\right)\cup\left(\frac{a_4}{3^{\beta-k}}\right)\cup...\cup\left(\frac{a_{\varphi\left(3^{\beta-k},3^k\right)}}{3^{\beta-k}}\right)$$

$\left(N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right),\widehat{\mathbb{Q}}\left(3^\beta p^2\right)\right)$ transitif permütasyon grubunu göz önüne alırsak $F_{u,3^\beta p^2}$ biçimindeki alt yörüngesel graf sayısı $\varphi\left(3^\beta p^2\right)$ dir. Dolayısıyla köşeleri $[\infty]$ bloğunda olan alt yörüngesel graf $F_{u,3^\lambda p^2}$ biçimindedir.

$\lambda = 0,1,2,3,...,\beta-1,\beta$ olmak üzere $[\infty]$ bloğundaki toplam graf sayısı $\varphi\left(p^2\right)+\varphi\left(3p^2\right)+\varphi\left(3^2p^2\right)+...+\varphi\left(3^{\beta-1}p^2\right)+\varphi\left(3^\beta p^2\right)$ dir.

Teorem 2.12. $\frac{r}{s},\frac{x}{y}\in[\infty]$ ve $\frac{r}{s}\to\frac{x}{y}\in F_{u,3^\beta p^2}$ dir $\Leftrightarrow$

(i) $3^\beta p^2 \,\|\, s$ ise $x \equiv \pm ur\left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$, $y \equiv \pm us\left(\bmod 3^\beta p^2\right)$ ve $ry - sx = \pm 3^\beta p^2$

(ii) $3^{\beta-1} p^2 \,\|\, s$ ise $x \equiv \pm ur\left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$, $y \equiv \pm us\left(\bmod 3^\beta p^2\right)$ ve $ry - sx = \pm 3^\beta p^2$

(iii) $2 \le k \le \beta-1$ ve $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $3^{\beta-k}p^2 \,\|\, s$ ise

$x \equiv \pm ur\left(\bmod 3p^2\right)$, $y \equiv \pm us\left(\bmod 3^\beta p^2\right)$ ve $ry - sx = \pm 3^{2\beta-2}p^2$

(iv) $p^2 \,\|\, s$ ise $x \equiv \pm 3ur\left(\bmod 3p^2\right)$, $y \equiv \pm 3us\left(\bmod 3^\beta p^2\right)$ ve $ry - sx = \pm 3^{2\beta-2}p^2$

İspat. "$\Rightarrow$":

$\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in F_{u,3^\beta p^2}$ ise $\exists T \in N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right)$ öyle ki $\left(\infty, \frac{u}{3^\beta p^2}\right) \xrightarrow{T} \left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right)$ ve

T(∞)=$\frac{r}{s}$, $T\left(\frac{u}{3^\beta p^2}\right) = \frac{x}{y}$ dir.

(i) $3^\beta p^2 \,\|\, s$ ise T=$\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & d \end{pmatrix}$, det T= $ad - 3^{\beta-2}bp^2c = 1$, elemanını inceleyelim.

$$T(\infty) = \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{3^{\beta-1}p^2c} = \frac{r}{s} \;\Rightarrow\; r = a \quad \text{ve} \quad s = 3^{\beta-1}p^2c \;\text{ dir.}$$

Burada $c = 3c_0$ şeklindedir. $3 \nmid a$ ise

$$T\left(\frac{u}{3^\beta p^2}\right) = \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & d \end{pmatrix}\left(\frac{u}{3^\beta p^2}\right) = \frac{au + 3^{\beta-1}bp^2}{3^{\beta-1}p^2cu + 3^\beta dp^2} = \frac{x}{y} \;\text{ dir. Böylece}$$

$x \equiv \pm ur\left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ ve $y \equiv \pm us\left(\bmod 3^\beta p^2\right)$ elde edilir.

Ayrıca $\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 3^\beta p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & au + 3^{\beta-1}bp^2 \\ 3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-1}p^2cu + 3^\beta dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$ matrisleri

için ry–sx$= 3^\beta adp^2 - 3^{2\beta-2}p^2cbp^2 = 3^\beta p^2 \underbrace{\left(ad - 3^{\beta-2}p^2bc\right)}_{1} = 3^\beta p^2$ dir. Buradan yukarıdaki

eşitliklerle birlikte $ry - sx = \pm 3^\beta p^2$ olduğu açıktır. Benzer şekilde (ii) durumu gösterilir.

(iii) $2 \le k \le \beta - 1$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $3^{\beta-k}p^2 \,\|\, s$ ise T=$\begin{pmatrix} 3^{\beta-2}a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-2}d \end{pmatrix}$

det T=$3^{\beta-2}ad - bp^2c = 1$, elemanını inceleyelim:

T(∞)=$\begin{pmatrix} 3^{\beta-2}a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-2}d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{3p^2c} = \frac{r}{s} \;\Rightarrow\; r = a$ ve $s = 3p^2c$ dir. $3 \nmid a$ olsun. Bu

durumda

$$T\left(\frac{u}{3^\beta p^2}\right) = \begin{pmatrix} 3^{\beta-2}a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-2}d \end{pmatrix}\left(\frac{u}{3^\beta p^2}\right) = \frac{au + 3bp^2}{3p^2cu + 3^\beta dp^2} = \frac{x}{y} \;\text{ dir.}$$

Böylece $x \equiv \pm ur \left(\bmod 3p^2 \right)$ ve $y \equiv \pm us \left(\bmod 3^{\beta} p^2 \right)$ olduğu elde edilir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 3^{\beta-2}a & b/3 \\ 3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-2}d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 3^{\beta}p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{\beta-2}a & 3^{\beta-2}au + 3^{\beta-1}bp^2 \\ 3^{\beta-1}p^2c & 3^{\beta-1}p^2cu + 3^{2\beta-2}dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$$ matrisleri için

$$ry - sx = 3^{3\beta-4}adp^2 - 3^{2\beta-2}p^2cbp^2 = 3^{2\beta-2}p^2 \underbrace{\left(3^{\beta-2}ad - p^2bc\right)}_{1} = 3^{2\beta-2}p^2 \text{ dir.}$$

Buradan yukarıdaki eşitliklerle birlikte $ry - sx = \pm 3^{2\beta-2}p^2$ olduğu açıktır. Benzer şekilde $a = 3a_0$ alınırsa (iv) durumu da gösterilir.

"$\Leftarrow$":

(i) $3^{\beta}p^2 \,||\, s$ ise $x \equiv \pm ur \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2 \right)$, $y \equiv \pm us \left(\bmod 3^{\beta}p^2 \right)$ ve $ry - sx = \pm 3^{\beta}p^2$ olsun.

Bu durumda $\exists b,d \in \mathbb{Z}$ öyle ki $x = ur + 3^{\beta-1}bp^2$ ve $y = us + 3^{\beta}dp^2$ dir. Bu eşitlikler ile birlikte $ry - sx = r(us + 3^{\beta}dp^2) - s(ur + 3^{\beta-1}bp^2) = 3^{\beta}rdp^2 - 3^{\beta-1}bsp^2 = 3^{\beta}p^2$ elde edilir. Eşitliğinin her iki tarafı $3^{\beta}p^2$ ile bölündüğünde $rd - bs/3 = 1$ elde edilir. Buna göre

$$T_0 := \begin{pmatrix} r & b/3 \\ s & d \end{pmatrix}$$, $\det T_0 = 1$ ve $3^{\beta}p^2 \,||\, s$ göz önüne alındığında $T_0 \in \Gamma_0(3^{\beta}p^2) \subset N_0(3^{\beta}p^2)$

dir. Benzer şekilde (ii) durumu da gösterilebilir.

(iii) $2 \le k \le \beta - 1$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $3^{\beta-k}p^2 \,||\, s$ ise $x \equiv \pm ur \left(\bmod 3p^2 \right)$, $y \equiv \pm us \left(\bmod 3^{\beta}p^2 \right)$ ve $ry - sx = \pm 3^{2\beta-2}p^2$ olsun. Buradan $\exists b,d \in \mathbb{Z}$ öyle ki $x = ur + 3bp^2$ ve $y = us + 3^{\beta}dp^2$ dir. Bu eşitlikler determinanttaki denklemde yerine yazıldığı takdirde $ry - sx = r(us + 3^{\beta}dp^2) - s(ur + 3bp^2) = 3^{\beta}rdp^2 - 3bsp^2 = 3^{2\beta-2}p^2$ elde edilir. Eşitliğinin her iki tarafı $3^{2\beta-2}p^2$ ile bölündüğünde $rd/3^{\beta-2} - bs/3^{2\beta-3} = 1$ elde edilir. Buna göre

$$T_0 := \begin{pmatrix} r & b/3^{2\beta-3} \\ s & d/3^{\beta-2} \end{pmatrix}$$, $\det T_0 = 1$ ile $2 \le k \le \beta - 1$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $3^{\beta-k}p^2 \,||\, s$ göz önüne alındığında $T_0 \in \Gamma_0(3^{\beta}p^2) \subset N_0(3^{\beta}p^2)$ dir. Benzer şekilde (iv) durumu da gösterilebilir.■

Teorem 2.13. $\beta \geq 4$, p asal sayı ve $p > 3$ için $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right)$ nin $F_{u,3^\beta p^2}$ alt yörüngesel grafı , $n \geq 3$ olmak üzere bir ormandır, yani hiçbir $n-$gen içermez.

İspat. İlk önce $\beta \geq 4$ ve $p > 3$, p asal olmak üzere $N = 3^\beta p^2$ için $F_{u,3^\beta p^2}$ de bir üçgen devre olup olmadığını gösterelim. Farzedelim ki $\infty \to v_1 \to v_2 \to \infty$ biçiminde bir üçgen devre olsun. Bu takdirde x ,m,n,ℓ pozitif tam sayıları olmak üzere $\frac{1}{0} \to \frac{x}{3^m p^2} \overset{<}{\to} \frac{\ell}{3^n p^2} \to \frac{1}{0}$ yazılabilir. Açıktır ki $3 \nmid x, \ell$ dir. $\frac{1}{0} \to \frac{x}{3^m p^2}$ kenarından $x \equiv u \left(\bmod 3^{\beta-1} p^2\right)$ ve $3^m p^2 = 3^\beta p^2$ olup buradan $m = \beta$ elde edilir. Böylece $\frac{1}{0} \to \frac{u}{3^\beta p^2} \to \frac{\ell}{3^n p^2} \to \frac{1}{0}$ bulunur.

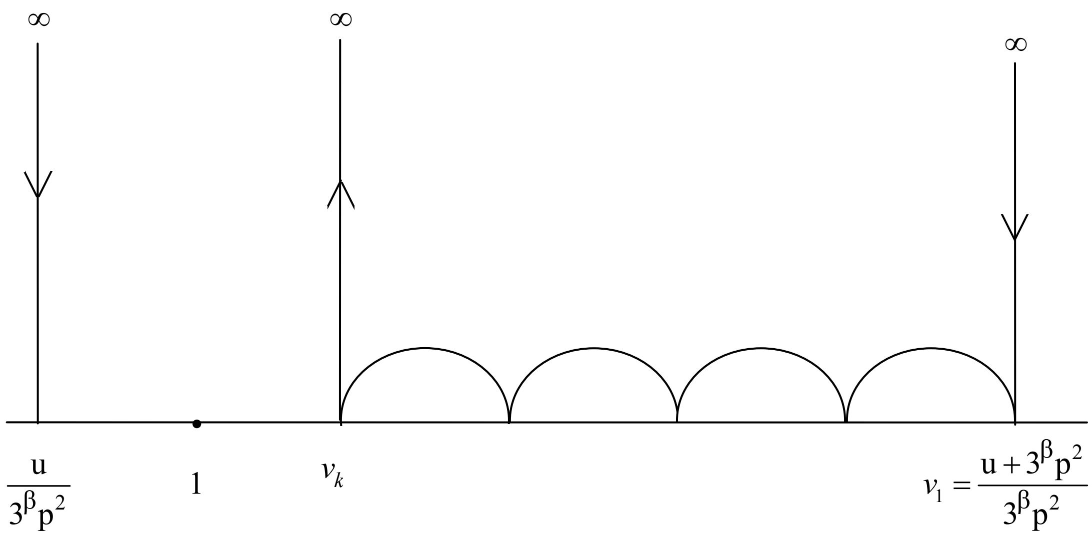
$n = 0,1,2,...,\beta-1$ olması durumunda bir önceki teoremin şartları sağlanmadığı açıktır. $n = \beta$ olması halinde $\frac{1}{0} \to \frac{u}{3^\beta p^2} \to \frac{\ell}{3^\beta p^2} \to \frac{1}{0}$ yazılabilir. $\frac{u}{3^\beta p^2} \overset{<}{\to} \frac{\ell}{3^\beta p^2}$ kenarından $\ell \equiv -u^2 \left(\bmod 3^{\beta-1} p^2\right)$ ve $u - \ell = 1$ dir. Buradan $u^2 + u - 1 \equiv 0 \left(\bmod 3^{\beta-1} p^2\right)$ elde edilir. $\frac{\ell}{3^\beta p^2} \to \frac{1}{0}$ kenarından $1 \equiv -u\ell \left(\bmod 3^{\beta-1} p^2\right)$ olup $u^2 - u + 1 \equiv 0 \left(\bmod 3^{\beta-1} p^2\right)$ elde edilir. Dolayısıyla $u^2 \equiv u - 1 \left(\bmod 3^{\beta-1} p^2\right)$ ve $u^2 + \underbrace{u-1}_{u^2} \equiv 0 \left(\bmod 3^{\beta-1} p^2\right)$ olup buradan $2u^2 \equiv 0 \left(\bmod 3^{\beta-1} p^2\right)$ elde edilir. Bu ise $\left(u, 3^\beta p^2\right) = 1$ olmasıyla çelişir. Böylece $F_{u,3^\beta p^2}$ alt yörüngesel grafında üçgen için gerekli olan kenar şartları sağlanmadığından $F_{u,3^\beta p^2}$ de bir üçgen devre yoktur. Ancak $N = 3^\beta p^2$ için $F_{u,3^\beta p^2}$ alt yörüngesel grafında $\frac{1}{0} \to \frac{u}{3^\beta p^2} \to \frac{1}{0}$ olacak şekilde bir ikigen olduğu açıktır. Çünkü , $\frac{u}{3^\beta p^2} \to \frac{1}{0}$ kenarından $1 \equiv -u^2 \left(\bmod 3^{\beta-3} p^2\right)$ olup $u^2 + 1 \equiv 0 \left(\bmod 3^{\beta-3} p^2\right)$ elde edilir.

Şimdi $\beta \geq 4$, p asal sayı ve $p > 3$ için $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right)$ nin $F_{u,3^\beta p^2}$ alt yörüngesel grafı $n > 3$ olmak üzere hiçbir $n-$gen içermediğini gösterelim.Varsayalım ki D , $F_{u,3^\beta p^2}$ de minimal uzunlukta bir devre olsun.Ayrıca

D devresinin yönlenmiş olduğunu kabul edelim.Bu durumda D devresini $\infty \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_k \to \infty$ biçiminde alabiliriz.Üstelik D devresinin ∞ dan farklı köşelerini $\left[\dfrac{u}{3^\beta p^2}, \dfrac{u+3^\beta p^2}{3^\beta p^2}\right]$ aralığında $v_1 < v_2 < v_3 < \ldots < v_k$ olacak şekilde seçebiliriz . Çünkü burada alınan herhangi bir devrenin periyodu 1 dir. Teorem 2.12. den $v_1 = \dfrac{u}{3^\beta p^2}$ veya $v_1 = \dfrac{u+3^\beta p^2}{3^\beta p^2}$ dir. Çünkü, $\dfrac{1}{0} \to \dfrac{x}{y} \in F_{u,3^\beta p^2}$ ancak ve ancak $p^2|0$, $3p^2|0$, $3^2p^2|0$, $3^3p^2|0$, …, $3^\beta p^2|0$ olduğundan $y.1 = 3^\beta p^2$ ve $x \equiv 1.u \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ koşullarını sağlayan $\dfrac{x}{y} = \dfrac{u}{3^\beta p^2}$ veya $\dfrac{x}{y} = \dfrac{u+3^\beta p^2}{3^\beta p^2}$ olabilir.

Eğer $v_1 = \dfrac{u+3^\beta p^2}{3^\beta p^2}$ ise v_k , $\left[\dfrac{u}{3^\beta p^2}, \dfrac{u+3^\beta p^2}{3^\beta p^2}\right]$ de $v_k \to \infty$ olan tek köşedir. Çünkü seçilen devre $\infty \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_k \to \infty$ biçimindedir.

$v_k = \dfrac{r}{3^\beta p^2}$ alalım. $\dfrac{r}{3^\beta p^2} \to \dfrac{1}{0} \in F_{u,3^\beta p^2}$ ve Teorem 2.12 den $1 \equiv -ur \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ elde edilir. Diğer yandan $F_{u,3^\beta p^2}$ de komşu iki köşe arasında bir tam sayı bulunamayacağından devre 1 in sol tarafına geçmez. Yani $v_k = \dfrac{r}{3^\beta p^2}$ ise $r > 3^\beta p^2$ dir.



Şekil 2.9. $F_{u,3^\beta p^2}$ alt yörüngesel grafı

Bu durumda $r = 3^{\beta}p^2+k$ biçiminde bir k doğal sayısı vardır. Ayrıca $r < 3^{\beta}p^2+u$ olduğundan $k<u<3^{\beta}p^2$ ve böylece $1\equiv -ur \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ denkleminden $1\equiv -u\left(3^{\beta}p^2+k\right) \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$dir. Buradan $1\equiv -uk \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right) \Leftrightarrow \frac{k}{3^{\beta}p^2}\to\frac{1}{0}\in F_{u,3^{\beta}p^2}$ dir. Ancak $\frac{k}{3^{\beta}p^2}<1$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla böyle bir D devresi yoktur.

Böylece D devresi olarak $\infty\to\frac{u}{3^{\beta}p^2}\to v_2\to v_3\to\ldots\to v_k\to\infty$ alabiliriz. Yukarıda belirtildiği gibi bir üçgen devre olmadığından $u^2+u+1\not\equiv 0 \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ ve $v_k\to\infty$ olduğundan $v_k>\frac{u+1}{3^{\beta}p^2}$ dir. Burada $\left(u+1, 3^{\beta-1}p^2\right)=1$ olması söz konusu değildir. Şimdi $v_k=\frac{u+1}{3^{\beta}p^2}$ olsaydı $\frac{u+1}{3^{\beta}p^2}\to\infty=\frac{1}{0}\in F_{u,3^{\beta}p^2}$ olduğundan dolayı kenar şartlarından $1\equiv -u(u+1) \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ ve böylece $u^2+u+1\equiv 0 \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ elde edilir ki bu kabulümüzle çelişir; eğer $v_k<\frac{u+1}{3^{\beta}p^2}$ olsa $v_1=\frac{u}{3^{\beta}p^2}<v_k=\frac{x}{3^{\beta}p^2}<\frac{u+1}{3^{\beta}p^2}$ ve $u, u+1\in\mathbb{Z}$ olduğundan $x\notin\mathbb{Z}$ çelişkisi elde edilir. Böylece $v_k>\frac{u+1}{3^{\beta}p^2}$ dir.

v , $v_1\to v$ $F_{u,3^{\beta}p^2}$ de bir kenar olacak şekilde v_1 den daha büyük olma koşulunu sağlayan en büyük rasyonel sayı olsun. v_2 nin v ye eşit olma zorunluluğunu gösterelim. Farz edelim ki $v_2<v$ olsun. Eğer v , D de bir köşe ise $v=v_3$ diyelim. Bu durumda daha kısa uzunluklu bir $\infty\to v_1\to v_3\to v_4\to\ldots\to v_k\to\infty$ devresi elde edilir ki, bu D devresinin minimal uzunluklu bir devre olmasıyla çelişir.

Eğer v , D de bir köşe değilse D de $v_i<v<v_{i+1}$ olan v_i ve v_{i+1} köşeleri mevcuttur. Bu $v_1\to v$ ve $v_i\to v_{i+1}$ kenarlarının $F_{u,3^{\beta}p^2}$ de kesiştiğini gösterir, bu ise bir çelişkidir. Çünkü $F_{u,3^{\beta}p^2}$ nin kenarları $\mathcal{U}$ da kesişmezler. Böylece $v_2=v$ dir. $v_1<v_2$

olduğundan m ve k_0 pozitif tam sayıları için $v_2 = \dfrac{u+\frac{m}{k_0}}{3^\beta p^2}$ dır. $v_1 \to v_2$ $F_{u,3^\beta p^2}$ de bir kenar olduğundan $3^\beta p^2 v_1 \to 3^\beta p^2 v_2$ $F_{u,3^\beta p^2}$ de bir kenardır ve $m=1$ olmak zorundadır. Çünkü $\dfrac{u}{3^\beta p^2} \to \dfrac{u+\frac{m}{k_0}}{3^\beta p^2} = \dfrac{uk_0+m}{3^\beta p^2 k_0} \in F_{u,3^\beta p^2}$ elde edilir. Bu durumda $3^\beta k_0 p^2 u - 3^\beta k_0 p^2 u - 3^\beta p^2 m = -3^\beta p^2 \Rightarrow m=1$ dir. Bir önceki teoremden;

$\dfrac{u}{3^\beta p^2} \overset{<}{\to} \dfrac{uk_0+1}{3^\beta p^2 k_0}$ kenarından $uk_0+1 \equiv -u^2 \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ dir.

Dolayısıyla denklemi düzenlersek $u^2+uk_0+1 \equiv 0 \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ olduğu görülür. Bu yüzden, k_0 $u^2+uk_0+1 \equiv 0 \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ denklemini sağlayan minimal pozitif tam sayı olmak üzere $v_2 = \dfrac{u+1/k_0}{3^\beta p^2}$ dir. k_0 sıfır ise zaten ikigen olduğu açıktır. Buradan $1 < k_0 < 3^{\beta-1}p^2$ olduğu görülür. Çünkü $k_0 > 3^{\beta-1}p^2$ olsa $\bmod 3^{\beta-1}p^2$ ile çelişir. $k_0 = 3^{\beta-1}p^2$ olsa $u^2+3^{\beta-1}p^2u+1 \equiv 0 \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ denklemi elde edilir. Dolayısıyla $u^2+1 \equiv 0 \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ denkleminden söz konusu kenarın kendisiyle eşleşmiş olduğu ortaya çıkar. $k_0=1$ olsa $u^2+u+1 \equiv 0 \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ şartı bir üçgen devre vereceğinden bir çelişkidir.

Açıkça görülmektedir ki $u^2+uk_0+1 \equiv 0 \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ ise $\left(u,3^{\beta-1}p^2\right)=1$ olduğundan $3 \,||\, k_0$ olmak zorundadır.

$N=3p^2$ olduğunda $T := \begin{pmatrix} -3u & \dfrac{3u^2+3u+1}{p^2} \\ -3p^2 & 3u+3 \end{pmatrix}$ $\det T = 3$ ve $3u^2+3u+1 \equiv 0\left(\bmod p^2\right)$,

$p \equiv 1 \left(\bmod 3\right)$ için $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right)$ 6. mertebeden en çok bir periyoda sahiptir.

N$=3^2p^2$ olduğunda $T:=\begin{pmatrix} -3^2u & \dfrac{3^2u^2+3u+1}{p^2} \\ -3^2p^2 & 3^2u+3 \end{pmatrix}$ $\det T=3^2$ ve $3^2u^2+3u+1\equiv 0\left(\bmod p^2\right)$,

$p\equiv 1\ (\bmod 3)$ için $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right)$ 3. mertebeden en çok bir periyoda sahiptir.

N$=3^3p^2$ olduğunda $T:=\begin{pmatrix} -3^3u & \dfrac{3^3u^2+3^2u+1}{p^2} \\ -3^3p^2 & 3^3u+3^2 \end{pmatrix}$ $\det T=3^3$ ve $3^3u^2+3^2u+1\equiv 0\left(\bmod p^2\right)$,

$p\equiv 1\ (\bmod 3)$ için $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^\beta p^2\right)\right)$ 6. mertebeden en çok bir periyoda sahiptir.

Şimdi aşağıdaki dönüşümü tanımlayalım:

$$\Psi:=\begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^2+uk_0+1}{3^\beta p^2} \\ -3^\beta p^2 & u+k_0 \end{pmatrix}$$, $\det\Psi=1$ dir. Bu durumda $\Psi\in N_0\left(3^\beta p^2\right)$ dir.

$$\begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^2+uk_0+1}{3^\beta p^2} \\ -3^\beta p^2 & u+k_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-u\\-3^\beta p^2\end{pmatrix}=\frac{u}{3^\beta p^2}=v_1$$ olduğundan $\Psi(\infty)=v_1$;

$$\begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^2+uk_0+1}{3^\beta p^2} \\ -3^\beta p^2 & u+k_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\3^\beta p^2\end{pmatrix}=\frac{uk_0+1}{3^\beta p^2k_0}=\frac{u+\dfrac{1}{k_0}}{3^\beta p^2}=v_2$$ ise $\Psi(v_1)=v_2$ ve genel olarak,

$$\begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^2+uk_0+1}{3^\beta p^2} \\ -3^\beta p^2 & u+k_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}u+\dfrac{x}{y}\\3^\beta p^2\end{pmatrix}=\frac{-\dfrac{ux}{y}+uk_0+1}{-3^\beta p^2\dfrac{x}{y}+3^\beta p^2k_0}=\frac{u\left(k_0-\dfrac{x}{y}\right)+1}{3^\beta p^2\left(k_0-\dfrac{x}{y}\right)}=\frac{u+\dfrac{y}{k_0y-x}}{3^\beta p^2}$$

olduğundan, $\Psi\left(\dfrac{u+\dfrac{x}{y}}{3^\beta p^2}\right)=\dfrac{u+\dfrac{y}{k_0y-x}}{3^\beta p^2}$ dir. Üstelik $\Psi(z)=\dfrac{-uz+\dfrac{u^2+uk_0+1}{3^\beta p^2}}{-3^\beta p^2z+u+k_0}$ fonksiyonu

$\left(-\infty,\dfrac{u+k_0}{3^\beta p^2}\right)$ aralığı üzerinde kesin artandır. Bunun için $\Psi'(z)>0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir;

$$\Psi'(z)=\frac{-u\left(-3^{\beta}p^{2}z+u+k_0\right)-\left(-3^{\beta}p^{2}\right)\left(-uz+\dfrac{u^{2}+uk_0+1}{3^{\beta}p^{2}}\right)}{\left(-3^{\beta}p^{2}z+u+k_0\right)^{2}}$$

$=\dfrac{1}{\left(-3^{\beta}p^{2}z+u+k_0\right)^{2}}>0$ dır. Buradan işlemleri göz önüne aldığımızda,

$$\begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^{2}+uk_0+1}{3^{\beta}p^{2}} \\ -3^{\beta}p^{2} & u+k_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{u}{3^{\beta}p^{2}} \quad , \quad \begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^{2}+uk_0+1}{3^{\beta}p^{2}} \\ -3^{\beta}p^{2} & u+k_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\3^{\beta}p^{2}\end{pmatrix}=\frac{u+\dfrac{1}{k_0}}{3^{\beta}p^{2}}$$

$$\begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^{2}+uk_0+1}{3^{\beta}p^{2}} \\ -3^{\beta}p^{2} & u+k_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}u+\dfrac{1}{k_0}\\3^{\beta}p^{2}\end{pmatrix}=\frac{u+\dfrac{1}{k_0-\dfrac{1}{k_0}}}{3^{\beta}p^{2}}$$

$, \ldots$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{1}{0}\to\frac{u}{3^{\beta}p^{2}}\to\frac{u+\dfrac{1}{k_0}}{3^{\beta}p^{2}}\to\frac{u+\dfrac{1}{k_0-\dfrac{1}{k_0}}}{3^{\beta}p^{2}}\to\frac{u+\dfrac{1}{k_0-\dfrac{1}{k_0-\dfrac{1}{k_0}}}}{3^{\beta}p^{2}}\to\ldots$$

dir. $\dfrac{u}{3^{\beta}p^{2}}$ köşenin gideceği en uzak köşe $\dfrac{u+\frac{1}{k_0}}{3^{\beta}p^{2}}$ ve en yakın köşe ise yoktur. Benzer şekilde $\dfrac{u+\frac{1}{k_0}}{3^{\beta}p^{2}}$ köşesinin gideceği en uzak köşe $\dfrac{u+\dfrac{1}{k_0-\frac{1}{k_0}}}{3^{\beta}p^{2}}$ olmasına rağmen en yakın köşe yoktur.

Gerçekten $\dfrac{u+\frac{1}{k_0}}{3^{\beta}p^{2}}$, $u^{2}+uk_0+1\equiv 0 \pmod{3^{\beta-1}p^{2}}$ olduğundan $F_{u,3^{\beta}p^{2}}$ de bir köşedir.

$\dfrac{u+\frac{1}{k_0}}{3^{\beta}p^{2}}\xrightarrow{<}\dfrac{u+\frac{t}{s}}{3^{\beta}p^{2}}=\dfrac{us+t}{3^{\beta}p^{2}}$ olsun. Bu durumda $us+t\equiv -u\left(uk_0+1\right) \pmod{3^{\beta-1}p^{2}}$ ve $\left(uk_0+1\right)3^{\beta}p^{2}s-3^{\beta}p^{2}k_0\left(us+t\right)=-3^{\beta}p^{2}$ ve $uk_0s+s-uk_0s-k_0t=-1 \Rightarrow s=k_0-1$ dir. Bir önceki denklemde yerine yazalım. $u\left(k_0t-1\right)+t\equiv -u^{2}k_0-u \pmod{3^{\beta-1}p^{2}}$ ise $u^{2}k_0+t\left(uk_0+1\right)\equiv 0 \pmod{3^{\beta-1}p^{2}}$ ve $uk_0+1\equiv -u^{2} \pmod{3^{\beta-1}p^{2}}$ olduğundan dolayı

$u^2k_0 - u^2t \equiv 0 \pmod{3^{\beta-1}p^2}$ ise $t \equiv k_0 \pmod{3^{\beta-1}p^2}$ elde edilir. Dolayısıyla $t = k_0 + 3^{\beta-1}p^2x$, $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dır. Buradan $\dfrac{t}{s} = \dfrac{k_0 + 3^{\beta-1}p^2x}{k_0\left(k_0 + 3^{\beta-1}p^2x\right) - 1}$ dir.

$f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{k_0 + 3^{\beta-1}p^2x}{k_0\left(k_0 + 3^{\beta-1}p^2x\right) - 1} = \dfrac{3^{\beta-1}p^2x + k_0}{3^{\beta-1}p^2k_0x + k_0^2 - 1}$ fonksiyonu kesin azalan bir fonksiyondur. Çünkü,

$$f'(x) = \frac{3^{\beta-1}p^2\left(3^{\beta-1}p^2k_0x + k_0^2 - 1\right) - 3^{\beta-1}p^2k_0\left(3^{\beta-1}p^2x + k_0\right)}{\left(3^{\beta-1}p^2k_0x + k_0^2 - 1\right)^2} = \frac{-3^{\beta-1}p^2}{\left(3^{\beta-1}p^2k_0x + k_0^2 - 1\right)^2} < 0 \text{ dır.}$$

Böylece f nin alabileceği en büyük değer $x = 0$ daki değeridir ki bu değerde $\dfrac{k_0}{k_0^2 - 1}$ dir. Yani , $\dfrac{uk_0 + 1}{3^{\beta}p^2k_0} \to \dfrac{u + \dfrac{k_0}{k_0^2 - 1}}{3^{\beta}p^2} = \dfrac{\left(k_0^2 - 1\right)u + k_0}{3^{\beta}p^2\left(k_0^2 - 1\right)}$ biçimindedir. Ancak burada dikkat edilmelidir ki $\left(\left(k_0^2 - 1\right)u + k_0, 3^{\beta}p^2\left(k_0^2 - 1\right)\right) = 1$ dir.

Buradan $\dfrac{u + \dfrac{k_0}{k_0^2 - 1}}{3^{\beta}p^2}$ $F_{u,3^{\beta}p^2}$ de bir köşedir ve $\dfrac{uk_0 + 1}{3^{\beta}p^2k_0}$ ' in gittiği en uzak köşedir.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{k_0 + 3^{\beta-1}p^2x}{k_0\left(k_0 + 3^{\beta-1}p^2x\right) - 1} = \dfrac{1}{k_0}$ olduğundan $\dfrac{uk_0 + 1}{3^{\beta}p^2k_0}$ ' ın gittiği en yakın köşe söz konusu olamaz. Çünkü $\dfrac{uk_0 + 1}{3^{\beta}p^2k_0}$ ' ın gittiği köşeden daha küçük sonsuz tane köşe vardır.

Şimdi $\dfrac{x}{y} < \dfrac{z}{w} < k_0$ için $\Psi\left(\dfrac{u + \dfrac{x}{y}}{3^{\beta}p^2}\right) < \Psi\left(\dfrac{u + \dfrac{z}{w}}{3^{\beta}p^2}\right)$ dir. Eğer x ve y pozitif tam sayılar $\dfrac{x}{y} < 1$ ise $\dfrac{y}{k_0y - x} < 1$ olduğunu belirtelim. Aslında $k_0 \geq 2$ ve $y > x$ olduğundan $k_0y - x > y$ olup $\dfrac{y}{k_0y - x} < 1$ dir. Böylece i pozitif tam sayısı için

$\Psi^{i}\left(v_1\right)<\dfrac{\mathrm{u}+1}{3^{\beta}\mathrm{p}^{2}}$ olduğunu kolayca görebiliriz. $\Psi\left(\dfrac{\mathrm{u}+\dfrac{x}{y}}{3^{\beta}\mathrm{p}^{2}}\right)=\dfrac{\mathrm{u}+\dfrac{y}{\mathrm{k}_0 y-x}}{3^{\beta}\mathrm{p}^{2}}$ ve $v_2=\dfrac{\mathrm{u}+\dfrac{1}{\mathrm{k}_0}}{3^{\beta}\mathrm{p}^{2}}$

olduğundan dolayı $\Psi\left(v_1\right)=v_2$ olup $\Psi\left(\Psi\left(v_1\right)\right)=\Psi^{2}\left(v_1\right)=\Psi\left(v_2\right)=\dfrac{\mathrm{u}+\dfrac{1}{\mathrm{k}_0-\dfrac{1}{\mathrm{k}_0}}}{3^{\beta}\mathrm{p}^{2}}<\dfrac{\mathrm{u}+1}{3^{\beta}\mathrm{p}^{2}}$

koşulunu sağlar. Dolayısıyla işlemlere devam edildiğinde $\forall i\in\mathbb{Z}$ için $\Psi^{i}\left(v_1\right)<\dfrac{\mathrm{u}+1}{3^{\beta}\mathrm{p}^{2}}$ olduğu görülür.

Ayrıca $0\le i\le \mathrm{k}-1$ için $v_{i+1}=\Psi^{i}\left(v_1\right)=\Psi^{i+1}\left(\infty\right)$ olduğunu tümevarım ile gösterelim. $1\le i\le \mathrm{s}$ için $v_i=\Psi^{i-1}\left(v_1\right)$ olsun. Bu durumda $v_{\mathrm{s}+1}=\Psi^{\mathrm{s}}\left(v_1\right)$ dir. Gerçekten, eğer eşitlik söz konusu değilse önce $v_{\mathrm{s}+1}<\Psi^{\mathrm{s}}\left(v_1\right)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(3^{\beta}\mathrm{p}^{2}\right)\right)$ $F_{\mathrm{u},3^{\beta}\mathrm{p}^{2}}$ nin, kenar ve köşelerini transitif olarak permüte ettiğinden dolayı, $\Psi^{\mathrm{s}-1}\in\Gamma_0\left(3^{\beta}\mathrm{p}^{2}\right)$ olmak üzere $v_1\rightarrow v_2\in F_{\mathrm{u},3^{\beta}\mathrm{p}^{2}}$ dir. Buradan $\Psi^{\mathrm{s}-1}\left(v_1\right)\rightarrow\Psi^{\mathrm{s}-1}\left(v_2\right)\in F_{\mathrm{u},3^{\beta}\mathrm{p}^{2}}$ elde edilir ve böylece $v_{\mathrm{s}}\rightarrow\Psi^{\mathrm{s}-1}\left(\Psi\left(v_1\right)\right)=\Psi^{\mathrm{s}}\left(v_1\right)$, $F_{\mathrm{u},3^{\beta}\mathrm{p}^{2}}$ de bir kenardır. $\Psi^{\mathrm{s}}\left(v_1\right)$, $F_{\mathrm{u},3^{\beta}\mathrm{p}^{2}}$ de bir köşe olsa da D devresindeki köşelerden biri olup olmadığını bilmiyoruz. Eğer $\Psi^{\mathrm{s}}\left(v_1\right)$, D de bir köşe değilse $\Psi^{\mathrm{s}}\left(v_1\right)<v_{\mathrm{k}}$ ve $\forall i\in\mathbb{Z}$ için $\Psi^{i}\left(v_1\right)<\dfrac{\mathrm{u}+1}{3^{\beta}\mathrm{p}^{2}}<v_{\mathrm{k}}$ olduğundan $v_{\mathrm{t}}<\Psi^{\mathrm{s}}\left(v_1\right)<v_{\mathrm{t}+1}$ olacak şekilde köşeler mevcut ve bu durumda $v_{\mathrm{t}}\rightarrow v_{\mathrm{t}+1}$ ile $v_{\mathrm{s}}\rightarrow\Psi^{\mathrm{s}}\left(v_1\right)$ kenarları kesişir, bu ise bir çelişkidir. Eğer $\Psi^{\mathrm{s}}\left(v_1\right)$, D de bir köşe ise $v_{\mathrm{s}+1}<\Psi^{\mathrm{s}}\left(v_1\right)$ olduğundan $\mathrm{m}\ge\mathrm{s}+2$ için $\Psi^{\mathrm{s}}\left(v_1\right)=v_{\mathrm{m}}$ dir. Ancak bu durumda daha kısa uzunluklu bir $\infty\rightarrow v_1\rightarrow\ldots\rightarrow v_{\mathrm{s}}\rightarrow v_{\mathrm{m}}\rightarrow v_{\mathrm{k}}\rightarrow\infty$ devresi elde edilir ki bu da bir çelişkidir. Şimdi son olarak $v_{\mathrm{s}+1}>\Psi^{\mathrm{s}}\left(v_1\right)$ kabul edelim. Bu durumda $v_{\mathrm{s}+1}>\Psi^{\mathrm{s}}\left(v_1\right)>\Psi^{\mathrm{s}-2}\left(v_1\right)$ dir. Çünkü $v_1<v_2$ v_1 ve Ψ kesin artan olduğundan $\Psi\left(v_1\right)<\Psi\left(v_2\right)$ dir. Diğer taraftan $\Psi\left(\Psi\left(v_1\right)\right)=\Psi^{2}\left(v_1\right)=\Psi\left(v_2\right)$ olduğundan $\Psi\left(v_1\right)<\Psi^{2}\left(v_1\right)$ dir. Buradan $\Psi\left(v_1\right)<\Psi^{2}\left(v_1\right)$ ve Ψ kesin artan olduğundan

$\Psi(\Psi(v_1)) < \Psi(\Psi^2(v_1)) \Rightarrow \Psi^2(v_1) < \Psi^3(v_1)$; bu şekilde işleme devam edildiğinde $\Psi^{s-2}(v_1) < \Psi^{s-1}(v_1) < \Psi^s(v_1)$ elde edilir. $\Psi^{s-2}(v_1) < \Psi^{s-1}(v_1) < \Psi^s(v_1)$ ve $\Psi^{-(s-1)}(\Psi^{s-2}(v_1)) = \infty$ olduğundan $\Psi^{-(s-1)}(v_{s+1}) > \Psi^{-(s-1)}(\Psi^s(v_1)) = \Psi(v_1) = v_2$ dir. Böylece $v_s \to v_{s+1} \in F_{u,3^\beta p^2}$ ve $\Psi^{-(s-1)}(v_s) \to \Psi^{-(s-1)}(v_{s+1}) \in F_{u,3^\beta p^2}$ dir, ki bu v_2 nin seçimiyle çelişir; çünkü $\Psi^{-(s-1)}(v_1) = v_s$ dir.

Sonuç olarak $0 \le i \le k-1$ için $v_{i+1} = \Psi^i(v_1)$ dir. Böylece $v_k < \frac{u+1}{3^\beta p^2}$ bir çelişkidir. Son olarak minimal uzunluklu bir ters yönlenmiş D devresinin mevcut olduğunu farz edelim ve $t \ge 1$ için $\infty \to v_1 = \frac{u}{3^\beta p^2} \ldots \to v_t \leftarrow v_{t+i} \ldots v_k \to \infty$ biçiminde olduğunu kabul edelim. Yukarıdan $i \le t$ için $v_i = \Psi^i(\infty)$ olduğunu biliyoruz. v , $v_1 \leftarrow v$ $F_{u,3^\beta p^2}$ de bir kenar olacak şekilde $\frac{u}{3^\beta p^2}$ den daha büyük olma koşulunu sağlayan en büyük rasyonel sayı olsun. Buradan pozitif m tamsayısı için $v = \frac{u + \frac{1}{m}}{3^\beta p^2}$ dir. Gerçekten de v, $v_1 = \frac{u}{3^\beta p^2}$ den daha büyük bir rasyonel sayı olduğundan $v = \frac{u + \frac{k}{m}}{3^\beta p^2}$ alabiliriz. $v_1 \leftarrow v$ ve $3^\beta p^2 v_1 \leftarrow 3^\beta p^2 v$ $F_{u,3^\beta p^2}$ de kenarlardır. Buna göre $u \leftarrow u + \frac{k}{m} = \frac{um+k}{m} \in F_{u,3^\beta p^2}$ $\Leftrightarrow um - um - k = -1 \Leftrightarrow k = 1$ dir. Dolayısıyla $v_1 = \frac{u}{3^\beta p^2} \leftarrow v = \frac{u + \frac{1}{m}}{3^\beta p^2} \in F_{u,3^\beta p^2}$ ve ayrıca $\frac{u}{3^\beta p^2} \leftarrow \frac{um+1}{3^\beta p^2 m} \in F_{u,3^\beta p^2} \Leftrightarrow 3^\beta p^2 \mid 3^\beta p^2 m$ olduğundan $u \equiv (um+1)u \pmod{3^{\beta-1} p^2} \Leftrightarrow$ $-u^2 m \equiv 0 \pmod{3^{\beta-1} p^2}$ ve $(u, 3^{\beta-1}) = 1$ olup $3^{\beta-1} p^2 \mid m$ elde edilir. Ayrıca v en büyük olduğundan $3^{\beta-1} p^2 = m$ dir. Çünkü $\frac{u}{3^\beta p^2} \leftarrow \frac{u + \frac{1}{m}}{3^\beta p^2 m}$ olması halinde $3^{\beta-1} p^2 \mid m$ olduğunu gösterdik. Bu durumda $\exists k \in \mathbb{Z}$: $m = 3^{\beta-1} p^2 k$, ancak m büyüdükçe v köşesi

v_1 köşesine yaklaşır, bu ise v köşesinin en büyük olması ile çelişir, dolayısıyla $k=1$ almalıyız, yani $3^{\beta-1}p^2 = m$ dir. Bu yüzden $v_2 \le v = \dfrac{u+\frac{1}{m}}{3^{\beta}p^2}$ elde edilir. Yönlenmiş devre için yapılan işlemlerden v_2 köşesinin de $\dfrac{u+\frac{1}{m}}{3^{\beta}p^2}$ formunda olduğunu biliyoruz. Böylece $k_0 < 3^{\beta-1}p^2$ olduğundan $v < \dfrac{u+\frac{1}{k_0}}{3^{\beta}p^2}$ dir. Dolayısıyla t , 1 den daha büyük olmak zorunda, aksi halde $\infty \to v_1 \leftarrow v \ldots v_k \to \infty$ alınırsa $s \ge 3$ olmak üzere $v < v_s = \dfrac{u+\frac{1}{k_0}}{3^{\beta}p^2}$ dir ve yönlenmiş devre için bu noktanın köşe olduğunu biliyoruz, bu durumda daha kısa uzunluklu bir $\infty \to v_1 \to v_s \to \ldots v_k \to \infty$ devresi elde edilir ki bu bir çelişkidir, çünkü ispat yapılırken önce D devresi minimal uzunlukta alındı, sonra ters yönlenmiş olduğu kabul edildi, şu halde yönlenmiş de olsa daha kısa uzunluklu bir devre elde edilmektedir. Böylece $v_1 \to v_2 = \dfrac{u+\frac{1}{k_0}}{3^{\beta}p^2}$ almak zorundayız.

Şimdi $w = \Psi^{t+1}(\infty)$ olsun. $v_1 \to v_2 \in F_{u,3^{\beta}p^2}$, buradan $\Psi^{t-1}(v_1) \to \Psi^{t-1}(v_2) \in F_{u,3^{\beta}p^2}$ dir. $0 \le i \le k-1$ için $v_{i+1} = \Psi^{i}(v_1) = \Psi^{i+1}(\infty)$ eşitliği göz önüne alındığı takdirde $v_t \to \Psi^{t}(v_1) = v_{t+1} \in F_{u,3^{\beta}p^2}$ olduğundan $v_{t+1} \ne w$ olduğu görülür. Aksi halde kenar şartlarından seçilen devrede var olan $v_t \leftarrow v_{t+1}$ ile az önce elde edilen $v_t \to v_{t+1}$ durumları $u^2 \equiv -1 \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ olduğunu söyler ki, $k_0 < 3^{\beta-1}p^2$ olduğundan, bu ifade de $u^2 + uk_0 + 1 \equiv 0 \left(\bmod 3^{\beta-1}p^2\right)$ ile çelişir. Bu yüzden $v_{t+1} < w$ eşitsizliği doğru olmak zorundadır. Çünkü $v_{t+1} > w$ ise $\Psi^{-(t-1)}\left(\Psi^{t-2}(v_1)\right) = \infty$ ve $\Psi^{t-2}(v_1) < \Psi^{t}(v_1)$ dir. Dolayısıyla bu durumda $\Psi^{t-2}(v_1) < \Psi^{t}(v_1) = \Psi^{t}\left(\Psi(\infty)\right) = \Psi^{t+1}(\infty) = w < v_{t+1}$ olduğundan $\Psi^{-(t-1)}(v_{t+1}) > \Psi^{-(t-1)}(w) = v_2$ ve $\Psi^{-(t-1)}(v_t) = v_1 \leftarrow \Psi^{-(t-1)}(v_{t+1}) > v_2$ $F_{u,3^{\beta}p^2}$ de bir kenardır ki bu v_2 köşesinin seçimiyle çelişir. Ancak $v_{t+1} < w$ ise $s \ge t+2$ için

$w = v_s$ elde edilecekti ve bu yüzden daha kısa uzunluklu bir $\infty \to v_1 \to \ldots \to v_t \to v_s \to \ldots v_k \to \infty$ devresi elde edilir ki bu yine bir çelişkidir. Bu ifade D devresinin yönlenmiş olmak zorunda olduğunu belirtir.■

Örnek 2.1. $N = 3^4 p^2$ olsun. Normalleştirilmiş olarak $T := \begin{pmatrix} -u & \dfrac{u^2+uk+1}{3^4p^2} \\ -3^4p^2 & u+k \end{pmatrix}$,

$\det T = 1$ elemanını seçtiğimizde , $1 < k < 3^3$ olmak üzere k pozitif tam sayısı için

$$\frac{1}{0} \to \frac{u}{3^4p^2} \to \frac{u+\frac{1}{k}}{3^4p^2} \to \frac{u+\frac{1}{k-\frac{1}{k}}}{3^4p^2} \to \frac{u+\frac{1}{k-\frac{1}{k-\frac{1}{k}}}}{3^4p^2} \to \ldots$$

elde edilir. Dolayısıyla $\dfrac{u}{3^4p^2}$ köşenin gideceği en uzak köşe $\dfrac{u+\frac{1}{k}}{3^4p^2}$ ve en yakın köşe ise yoktur.

Örnek 2.2. $N = 2^6.3^2p^2$ için $T := \begin{pmatrix} -2^6.3^2u & \dfrac{2^6.3^2u^2+2^3.3u+1}{p^2} \\ -2^6.3^2p^2 & 2^6.3^2u+2^3.3 \end{pmatrix}$ $\det T = 2^6.3^2$ ve

$2^6.3^2u^2 + 2^3.3u + 1 \equiv 0\left(\bmod p^2\right)$ ayrıca $p \equiv 1\left(\bmod 3\right)$ dür. T elemanı normalleştirilirse

$T := \begin{pmatrix} -2^3.3u & \dfrac{2^6.3^2u^2+2^3.3u+1}{2^3.3p^2} \\ -2^3.3p^2 & 2^3.3u+1 \end{pmatrix}$ det T =1 ve $a+d=1$ olup T eliptik bir elemandır.

Bu durumda $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0\left(2^6.3^2p^2\right)\right)$ 3. mertebeden en çok bir periyoda sahiptir.

Dolayısıyla T elemanı ile $\dfrac{1}{0} \to \dfrac{u}{p^2} \to \dfrac{2^3.3u+1}{2^3.3p^2} \to \dfrac{1}{0}$ köşeleri birbirine resmedilir.

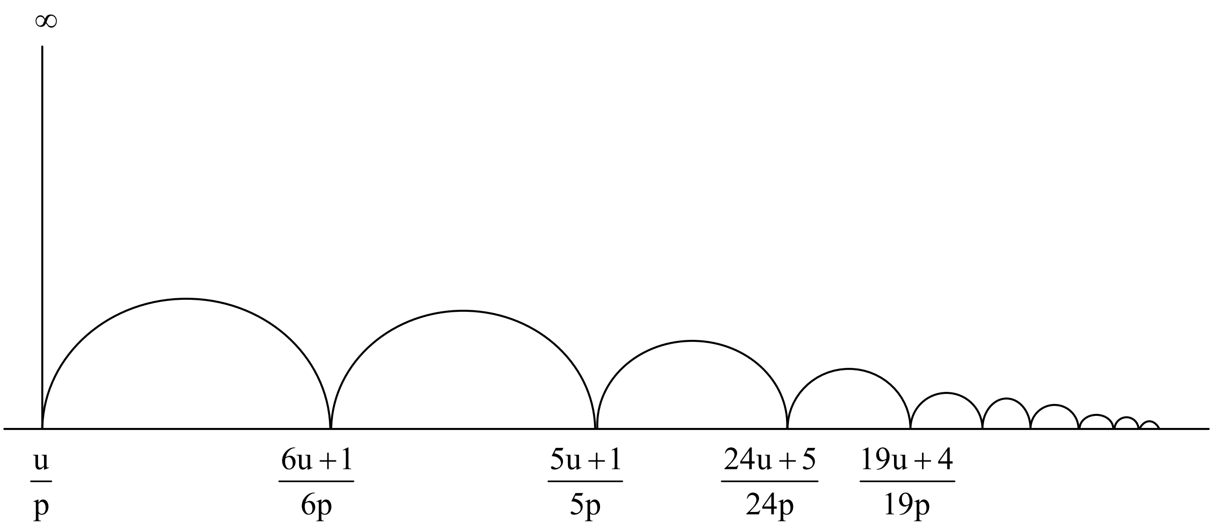
Örnek 2.3. $N=2^5.3^2p^2$ için $T:=\begin{pmatrix} -2^5.3^2u & \dfrac{2^5.3^2u^2+2^3.3u+1}{p^2} \\ -2^5.3^2p^2 & 2^5.3^2u+2^3.3 \end{pmatrix}$ det T = $2^5.3^2$,

$2^5.3^2u^2+2^3.3u+1\equiv 0\left(\bmod p^2\right)$ ve $p\equiv 1\left(\bmod 4\right)$ dir. T elemanı normalleştirilirse eliptik olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla $N_{PSL\left(2,\mathbb{R}\right)}\left(\Gamma_0\left(2^5.3^2p^2\right)\right)$ 4. mertebeden en çok bir periyoda sahiptir. T elemanı ile $\dfrac{1}{0}\to\dfrac{u}{p^2}\to\dfrac{2^3.3u+1}{2^3.3p^2}\to\dfrac{2^4.3u+1}{2^2.3p^2}\to\dfrac{1}{0}$ köşeleri birbirine resmedilir. Yani $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\p^2\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}u\\p^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3.3u+1\\2^3.3p^2\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}2^3.3u+1\\2^3.3p^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ olduğu görülür.

Örnek 2.4. $p>3$ ve asal olmak üzere $N=2.3p$ için $T=\begin{pmatrix} -u & \dfrac{2.3.u^2+2.3.u+1}{2.3p} \\ -p & u+1 \end{pmatrix}$

elemanını göz önüne alalım. $\det T=\dfrac{1}{2.3}$ olup T normalleştirilirse eliptik olmadığı görülür. T elemanı ile sonsuz köşesinden başlamak üzere bir yol elde edilir.

$$\frac{1}{0}\to\frac{u}{p}\to\frac{6u+1}{6p}\to\frac{5u+1}{5p}\to\frac{24u+5}{24p}\to\frac{19u+4}{19p}\to\frac{90u+19}{90p}\to\frac{71u+15}{71p}\to\frac{336u+71}{336p}\to\ldots$$



Şekil 2.10. $N=2.3p$ için bir yol grafı

3. İRDELEME

Bu tez çalışmasında esas amaç özellikle 1970'li yıllardan bu yana üzerinde çok fazla çalışma yapılan ve giderek önemi artan $\Gamma_0(N)$ kongrüans alt grubunun $PSL(2,\mathbb{R})$'deki normalliyeninin kimliğini belirlemede yardımcı olabilecek yeni bir yöntemin temelini oluşturmak ve bu yöntemle normalliyenin üretici elemanlarına nasıl yaklaşılabileceğini ortaya koymaktır. Graf yöntemi olarak adlandırdığımız bu yaklaşım ile oluşturulan bazı kapalı devrelerin uzunlukları ve normalliyende bulunan eliptik elemanların mertebeleri arasındaki ilişkiler araştırıldı. Alt yörüngesel grafta kapalı devre olmaması halinde normalliyende de eliptik elemanların olmadığı belirlendi.

Birçok bilim adamının bu alanda yapmış olduğu çalışmalarda temel amaç aslında $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$ grubunun simgesini tam olarak elde etmek, diğer bir ifadeyle eksik parametre olan g-cinsini hesaplamaktır. Bizde bunun için bu çalışmada normalliyenin bir alt grubu olan $N_0(N)$ olarak tanımladığımız grubun elemanlarıyla normalliyene yaklaşarak normalliyenin yapısını daha iyi incelemeye ve $N_0(N)$ grubunun elemanlarını graflarla karakterize etmeye çalıştık. Dolayısıyla simgeyi bulabilmek için alt yörüngesel graflar yardımıyla yeni bir yaklaşım elde edilmeye çalışıldı. Bu yaklaşım ile birlikte normalliyenin simgesindeki bazı invaryantlar bulundu. Bununla birlikte $F_{u,N}$ grafının herhangi iki kenarının üst yarı düzlemde kesişmediği ve $G_{u,N}$ grafının $F_{u,N}$ grafının ayrık izomorfik kopyalarının birleşiminden oluştuğunu görmek bize birçok kolaylık sağlamıştır. Her zaman bir NEC grubunun temel bölgesini bulmak kolay değildir. Ancak Γ modüler grubu için temel bölge bilindiğinden Γ grubunun simgesinin belirlenmesi zor olmamıştır. Ayrıca Γ modüler grubunun kongrüans alt grupları 1995 yılında Andrew Wiles tarafından yapılan Fermat'ın son teoreminin ispatında oldukça önemli bir yer teşkil ettiği de görülmektedir.

Charles C. Sims tarafından 1967 yılında "Graphs and Finite Permutation Groups" adlı makalesinde ve Gareth A. Jones - David Singerman - K. Wicks, 1991 yılında "The Modular Group and Generalized Farey Graphs" adlı çalışmada altyörüngesel graflar ve bu graflardaki devre uzunluklarını incelediler. Mehmet Akbaş tarafından 2001 yılında "On Suborbital Graphs For The Modular Group" adlı çalışmasında devre uzunlukları ile ayrık grupların üretici eliptik elemanlarının mertebeleri arasındaki ilişki ortaya konmuştur. Böylece simge problemi alt yörüngesel graflara taşınmış ve yeni bir yaklaşım elde edilmeye çalışılmıştır.

Literatürde mevcut olan iki yaklaşım

(1) Hurwitz : $\mu\left(N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0(N)\right)\right)=2\pi\left\{2(g-1)+\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)+s\right\}$

(2) Shimura : $g_0-1=\frac{1}{2}W(N)+\left|N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0(N)\right):\Gamma_0(N)\right|(g-1)$

eşitlikleridir. Bu konuda çok sayıda çalışma söz konusudur [9],[14], [25], [29], [30].

(1) ve (2) de g-cinsinin dışında bilinmeyen birer parametre bulunmaktadır; (1) de $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0(N)\right)$ grubunun hiperbolik ölçümü yani temel bölgenin hiperbolik alanı, (2) de ise $W(N)$ yani $\Gamma_0(N)$ grubunun $N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0(N)\right)$ üzerindeki toplam ramifikasyon mertebesidir. Çalışmamızda (1) yaklaşımını kullanmaya karar verdik.

Bu noktada temel bölge ile alt yörüngesel graf arasındaki ilişkiyi özetlemek gerekirse, kısaca döşemelerden (tessellations) bahsetmemiz gerekir. Şimdiye kadar değindiğimiz dönüşüm gruplarının $\mathcal{U}$ üst yarı düzleme göre bölüm gruplarının bir Riemann yüzeyi meydana getirdiğini gördük. Buna göre $\mathcal{U}/N_{PSL(2,\mathbb{R})}\left(\Gamma_0(N)\right)$ bir Riemann yüzeyidir ve bir yüzey sembolüne yani döşemeye sahiptir. Bu döşeme cebirsel ve aritmetik metodlarla alt yörüngesel graflardan elde edilebileceği gibi temel bölgenin dönüşüm grubu altındaki resimlerinden elde etmekte mümkündür. Bu ilişkiden yararlanarak alt yörüngesel grafların ortaya konmasının hiperbolik ölçümün hesaplanmasına yardımcı olacağı fikrinden hareketle bu çalışma yapıldı.

Ayrıca burada kullanılan hiperbolik geometri Euclid olmayan geometri için bir modeldir. Hiperbolik geometri bir eğri (curved) uzayıdır ve Albert Einstein'nın genel izafiyet teorisi için önemli bir rol oynar. Hiperbolik geometri, Euclid geometrisinden çok farklıdır. Topoloji alanında da birçok uygulaması vardır.

4. SONUÇLAR

Yaptığımız çalışmada elde edilen başlıca sonuçlar şunlardır:

1. Şimdiye kadar $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$ ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, elde edilen sonuçların, N-karesiz şartıyla ortaya koyulduğu görülmektedir. Bu koşulun sağladığı en büyük avantaj transitifliktir. Bu çalışmada ise $N \in \mathbb{Z}$ keyfi olmak üzere $i = 3, \ldots, n$ için $N = 2^{\alpha} 3^{\beta} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n}$ genel durumda sonuçlar elde edilmiştir.

2. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(2^3 p^2))$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinden oluşan alt yörüngesel graflar verildi. Daha sonra F_{u,p^2} grafındaki kenarlar üzerinde teoremler tartışıldı (Teorem 2.2, Teorem 2.3).

3. N=$2^{\alpha} p^2$ ve $\alpha \geq 8$ olmak üzere $\Gamma_0(2^{\alpha} p^2)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki tüm yörüngelerinin sayısı hesaplandı (Lemma 2.2).

4. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(2^{\alpha} p^2))$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinden dolayı $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ alt yörüngesel grafındaki kenar şartı elde edildi (Teorem 2.5).

5. $\alpha \geq 8$ olmak üzere $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(2^{\alpha} p^2))$ nin $F_{u,2^{\alpha}p^2}$ alt yörüngesel grafının devre içermediği gösterildi (Teorem 2.7).

6. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(3^2 p^2))$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinden oluşan alt yörüngesel graflar bulundu. F_{u,p^2} grafındaki kenarlar üzerindeki şartlar verildi (Teorem 2.9, Teorem 2.10).

7. N=$3^{\beta} p^2$ ve $\beta \geq 4$ olmak üzere $\Gamma_0(3^{\beta} p^2)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki tüm yörüngelerinin sayısı hesaplandı (Lemma 2.6).

8. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(3^{\beta} p^2))$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinden dolayı $F_{u,3^{\beta}p^2}$ alt yörüngesel grafındaki kenar şartı elde edildi (Teorem 2.12).

9. $\beta \geq 4$ olmak üzere $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(3^{\beta} p^2))$ nin $F_{u,3^{\beta}p^2}$ alt yörüngesel grafının devre içermediği gösterildi (Teorem 2.13).

5. ÖNERİLER

Bu çalışmada $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$ grubunun alt yörüngesel grafları elde edilmesine karşın, bunların yüzey sembolleri ile birlikte yorumu yapılmamıştır. Bu problemin aşılması durumunda simgenin tam olarak elde edileceği muhakkaktır. $\Gamma_0^+(N)$, $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun bir alt grubudur. Bu grup $\Gamma_0(N)$ ve $\Gamma_0(N)$ grubunun bütün Atkin-Lehner involusyonları tarafından üretilir. 2000 yılında Mong Lung Lang tarafından e sayısının karesiz olması ve belirli şartlar altında $\Gamma_0^+(eN^2)$ grubunun simgesi bulundu. Sonuç olarak keyfi N sayısı için simge problemi açıktır.

Alt yörüngesel graflardaki kenar şartı elde edilirken ortaya çıkan kongrüans denklemlerinin sayılar teorisiyle birlikte yorumu yapılmamıştır, araştırılabilir. Buradan özellikle eliptik eğriler ve onların rasyonel noktaları ile ilgili önemli sonuçlar alınabilir. Hatta hiperbolik eğriler ve hiperbolik poligonların $\widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayı köşeli minimal uzunluklu eğriler olup olmadığı problemi araştırılabilir.

Graflarla $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$ nin eliptik üreticileri arasındaki ilişki araştırılabilir. Normalliyenin yapısını belirlemede bazı yeni yaklaşımlar geliştirilebilir. $N_{PSL(2,\mathbb{R})}(\Gamma_0(N))$ elemanları Graf teoride kullanılabilir.

Bilgisayar teknolojisindeki kodlama tekniğinin gelişiminde kullanılabilir. Ayrıca bulunan sonuçlar için kullanımdaki pratiklik açısından HTML tabanlı, PHP ve ASP script dilleri kullanarak bir ara yüz hazırlanabilir.

Γ Modüler grubu için $F_{u,N}$ grafının bağlantılılık durumu incelenerek hangi şartlar altında bağlantılı olduğu araştırılabilir.

Yapılan çalışmalar $\Gamma_1(N)$, $\Gamma^0(N)$ ve $PSL(2,\mathbb{Z}[i])$ Picard Modüler grubu içinde detaylı bir şekilde genişletilebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Akbaş, M., The Normalizer of Modular Subgroups, Ph.D. thesis, University of Southampton,1989.

2. Akbaş, M., On Suborbital Graphs for The Modular Group, Bull. London Math. Soc., 33 (2001) 647-652.

3. Akbaş, M. ve Başkan, T., Suborbital Graphs for The Normalizer of $\Gamma_0(N)$, Tr. J. Of Math., Tübitak, 20 (1996) 379-387.

4. Akbaş, M. ve Singerman, D., The Signature of The Normalizer of $\Gamma_0(N)$, London Math. Soc. Lecture Notes, CUP, Cambridge, 165 (1992) 77–86.

5. Anderson, J.W., Hyperbolic Geometry, Second Edition , Springer Verlag, London, 2005.

6. Beardon, A.F., The Geometry of Discrete Groups, Springer Verlag, New York, 1983.

7. Beşenk, M., $PSL(2,\mathbb{R})$'deki $\Gamma_0(N)$'nin $\Gamma_B(N)$ Normalliyenin Parabolik Sınıf Sayısı, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2004.

8. Biggs, N.L. ve White, A.T., Permutation groups and combinatorial structures, London Math. Soc. Lecture Notes 33, Cambridge University Pres, Cambridge,1979.

9. Conway, J.H. ve Norton, S.P., Montrous Moonshine, Bull. London Math. Soc., 11 (1979) 308-339.

10. Değer, A.H., ve Güler, B.Ö., Modüler Grubun alt yörüngesel grafındaki genişletilmiş rasyonel sayı köşeli minimal uzunluklu eğriler, XX. Ulusal Matematik Sempozyumu, Eylül 2007, Erzurum, Bildiriler Kitabı,14.

11. Griess, R.L., The Friendly Giant, Invent. Math. 69 (1982) 1–102.

12. Güler, B.Ö., $\Gamma_0(N)$ Kongrüans Alt Grubunun $PSL_2(\mathbb{R})$'deki Normalliyeninin Alt yörüngesel Grafları, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2006.

13. Hardy, G.H. ve Wright, E.M., An Introduction to The Theory of Numbers, Oxford University Press, Oxford, 1979.

14. Helling, H., On the commensurability class of rational modular group, London Math. Soc., 2 (1970) 67-72.

15. Hoare, A.H.M., Subgroups of NEC Groups and Finite Permutation Groups, Quart.J.Math.Oxford, 2(1990) 45-49.

16. Jones, G.A. ve Singerman, D., Complex Functions : An Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

17. Jones , G.A., Singerman, D. ve Wicks, K., The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Notes, CUP, Cambridge, 160 (1991) 316–338.

18. Kader, S., Nec Grupların Simgeleri ve Graflar , Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2008.

19. Kulkarni, R.S., An Arithmetic-Geometric Method in The Study of The Subgroups of The Modular Group, American Journal of Mathematics, 113 (1991) 1053-1133.

20. Lehner, J. ve Newman, M., Weierstrass points of $\Gamma_0(N)$, Annals of Mathematics 79, No.2, March, (1964) 360–368.

21. Leveque, W.J., Fundamentals of Number Theory , Addison-Wesley Reading, Mass, 1977.

22. Maclachlan, C., Groups of Units of Zero Ternary Quadratic Forms, Proceedings of the Royal Society of Edinburg, 88 (1981) 141-157.

23. Macbeat, A.M., The Classification of Non-Euclidean Crystallographic Groups, Can. J. Math, 19(1967) 1192-1205.

24. Newman, M., The Normalizer of Certain Modular Subgroups, Can. J. Math, 8 (1956) 29-31.

25. Ogg, A.P., Automorphismes des Courbes Modulaires, Seminaire Delange-Pisot, Poitou, 7, 1974.

26. Ogg, A.P., Modular functions, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 37, 1980.

27. Pizer, A., A Note on a Conjecture of Hecke, Pasific J. Math. 79, 2 (1978) 541–548.

28. Rose, H.E., A Course in Number Theory, Oxford University Press, Oxford, 1988.

29. Schoeneberg, B., Elliptic Modular Functions, Springer Verlag, Berlin, 1974.

30. Shimura, G., Inroduction to The Arithmetic Theory of Automorphic Functions. Princeton Univ. Press, 1971.

31. Sims, C.C., Graphs and Finite Permutation Groups, Mathematische. Zeitschrift., 95 (1967) 76-86.

32. Singerman, D., Subgroups of Fuchsian Groups and Finite Permutation Groups, Bull. London Math. Soc. 2 (1970) 319–323.

33. Singerman, D., Universal tessellations, Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid, 1 (1988) 111-123.

34. Tsuzuku, T., Finite Groups and Finite Geometries, Cambridge University Pres, Cambridge,1982.

35. Wilkie, H.C., On Non-Euclidean Crystallographic Groups, Math. Zeitschr, 91 (1966).

ÖZGEÇMİŞ

Murat BEŞENK, 1980 yılında Denizli'nin Güney ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Güney Üç Eylül İlköğretim Okulu, orta ve lise öğrenimini Denizli Güney Lisesi'nde tamamladı. 1997–1998 Eğitim-Öğretim yılında K.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimine başladı.2001 yılında bu bölümden matematikçi unvanıyla mezun oldu.

2001–2004 yılları arasında K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında tezli yüksek lisans programını tamamladı. 2004 yılında K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında doktora programına başladı. 2001–2009 yılları arasında Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı liselerde Matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2009 yılından itibaren K.T.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde öğretim görevlisi olarak görev yapmaktadır. İyi derecede İngilizce bilmektedir.