

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİMDALİ

GELİŞTİRİLMİŞ LAZER-MCKENNA ASMA KÖPRÜ SALINIM MODELLERİ

DOKTORA TEZİ

Mehmet MERDAN

**NİSAN 2009
TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİMDALİ

GELİŞTİRİLMİŞ LAZER-MCKENNA ASMA KÖPRÜ SALINIM MODELLERİ

Mehmet MERDAN

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
“Doktor (Matematik)”
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24-02-2009
Tezin Savunma Tarihi : 10-04-2009**

**Tez Danışmanı :Prof. Dr. Erhan COŞKUN
Juri Üyesi :Prof. Dr. İhsan ÜNVER
Juri Üyesi :Yrd. Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK
Juri Üyesi :Prof. Dr. Ümit UZMAN
Juri Üyesi :Prof. Dr. Mustafa BAYRAM**

Enstitü Müdürü :Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2009

ÖNSÖZ

7 Kasım 1940 tarihinde, Washington eyaletinde saatte 42 mil hız ile esen rüzgâr nedeniyle Tacoma Narrows köprüsünün çöküşünün ardından asma köprülerin matematiksel modelleri üzerinde yapılan çalışmalar ivme kazanmıştır.

Literatürde kullanılan, Lazer-McKenna(LM) ve merkezi açıklık Kesit(LMK) modelleri, sıkça kullanılan enerji prensibi minimizasyonuna alternatif olarak düşey ve burulma yönünde Newton kanunu çerçevesinde elde edilmektedir. LMK modellerine rüzgâr hızına bağlı olarak uygun aerodinamik kaldırma ve moment kuvvetlerini ilave etmek suretiyle Geliştirilmiş Lazer-Mckenna Kesit(GLMK) modelleri elde edilmekte ve elde edilen modeller analitik, sayısal ve anatitik yaklaşım yöntemleri yardımıyla analiz edilmektedir. Rüzgâr hızına bağlı olarak düşey ve burulma salınım karakterisitikleri (frekans, genlik, peryodiklik, lineer olmayan etkenler, vs) gerçek asma köprüleri için literatürde kullanılan fiziksel veriler kapsamında incelenmektedir. GLMK modelleri ile elde edilen sonuçların, Tacoma Narrows köprüsünde gözlemlenen salınım karakterisitikleri ile uyumlu olduğu gözlemlenmektedir.

Doktora sürecinin her aşamasında bilgi ve birikimiyle yardımını esirgemeyen, öneri ve yönlendirmeleriyle yetişmeme katkıda bulunan danışmam hocam sayın Prof. Dr. Erhan COŞKUN'a şükranlarımı arz ediyorum. Ayrıca bilgi ve becerilerini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Tahir KHANİYEV'e ve arkadaşlarım Öğr. Gör Ahmet GÖKDOĞAN, Yrd. Doç. Dr Zafer ÇAKIR'a teşekkür ediyorum. Doktora çalışmalarım sırasında bilgi ve birikimden yararlandığım Tez izleme jürimde bulunan hocalarıma çok teşekkür ediyorum.

Yine manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim anne ve babama, ayrıca çocuklarım Melih, Çağrı ve eşim Gülbahar'a gösterdikleri fedakârlık, anlayış ve moral destekten dolayı çok teşekkür ediyorum.

Mehmet MERDAN
Trabzon 2009

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	V
ABSTRACT	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ	VII
TABLolar DİZİNİ.....	IX
SEMBOLLER DİZİNİ	X
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.1.1. Asma Köprü ve Elemanları.....	1
1.1.2. Kuleler.....	2
1.1.3. Ankrajlar	2
1.1.4. Kablolar.....	2
1.1.5. Askılar.....	3
1.1.6. Tabliye	3
1.2. Asmalı Köprülerin Tarihsel Gelişimi.....	3
1.3. Literatür.....	7
1.4. Tez İçeriği	16
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	17
2.1. Enine Kesit Modelleri	17
2.1.1. Euler-Bernoulli Kiriş Modelinden Türetilen Merkezi Açıklık Kesit Modeli	17
2.1.2. Lazer-McKenna Enine Kesit Modelleri.....	21
2.1.2.1. Düşey Hareket İçin Newton Yasası.....	22
2.1.2.2. Dönme Hareketi İçin Newton Yasası	23
2.2. Tezin Amacı ve Kapsamı	27
3. BULGULAR VE İRDELEME	29
3.1. Boyutlu Geliştirilmiş Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli (G_LMK).....	29
3.1.1. (G_LMK) Modelinin Parametreleri ve Büyüklükleri	30
3.1.2. Boyutlu Geliştirilmiş Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli(G_LMK1).....	31

3.1.3.	Boyutlu Geliştirilmiş Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli(G_LMK2).....	32
3.1.4.	Boyutsuz Zaman Değişkeni ile Geliştirilmiş Lazer-Mckenna Enine Kesit Modeli	33
3.1.5.	Lineer Kaldırma ve Moment Terimli Geliştirilmiş Lazer-McKenna Modeli	36
3.2.	G_LMK Modelinin Parametreleri ve Büyüklükleri.....	37
3.3.	Geliştirilmiş Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli(G_LMK1).....	38
3.4.	Geliştirilmiş Lazer-McKenna Kesit Modeli(G_LMK2).....	39
3.5.	G_LMK2 Modelinin Analizi	40
3.5.1.	Sönümsüz Salınım.....	40
3.5.2.	Sönümlü Salınım (G_LMK2 Modeli).....	55
3.5.3.	Sönümsüz Salınım ile Sönümlü Salınımın Karşılaştırılması	74
3.5.4.	Hızın Düşey Salınım Üzerine Etkileri	75
3.5.5.	Hızın Burulma Salınımın Frekansı ve Periyodu Üzerine Etkileri.....	76
3.6.	Geliştirilmiş Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli(G_LMK1).....	77
3.6.1.	G_LMK1 Modeli ve Analizi.....	78
3.6.2.	Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi(DDY)	78
3.6.3.	Padé Yaklaşımı	81
3.6.4.	G_LMK1 Modeli İçin Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi.....	83
3.7.	Boyutlu Geliştirilmiş Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli (G_LMK).....	88
3.7.1.	Boyutlu (G_LMK) Modelinin Sayısal Çözümleri	89
3.7.2.	Boyutlu (G_LMK) Modelinde Rüzgâr Hızındaki Artışa Bağlı Olarak Ortaya Çıkan Nonlineer Etkiler	90
3.7.3.	Boyutlu (G_LMK) Modelinde Başlangıç Koşullarındaki Artışa Bağlı Olarak Ortaya Çıkan Nonlineer Etkiler.....	93
3.8.	Boyutlu (G_LMK), Boyutlu (G_LMK1) ve Boyutlu (G_LMK2) Modellerinin Sayısal Çözümlerinin Karşılaştırılması.....	96
4.	SONUÇLAR	103
5.	ÖNERİLER.....	105
6.	KAYNAKLAR	106
7.	EKLER.....	111
ÖZGEÇMİŞ		

ÖZET

Bu çalışmada, asma köprülerin düşey ve burulma salınımlarını modelleyen Lazer-McKenna kesit modelleri incelenmiş ve söz konusu modeller yatay düzleme paralel sabit rüzgâr hızına bağlı olarak değişen aerodinamik kuvvetleri dikkate alacak biçimde geliştirilerek incelenmiştir.

İlk bölümde, enerji minimizasyon prensibini esas alan Hamiltonian yaklaşımına alternatif olarak Newton hareket kanunu kapsamında Lazer-McKenna(LM) modeli düşey ve burulma yönünde elde edilmiştir. LM modelinden, bazı varsayımlar altında daha basit sistemler oluşturmak mümkündür. Öncelikle, askıların sürekli gergin kaldığı ve hiç gevşemedikleri durumlar için, Lazer-McKenna Kesit(LMK1) modeli türetilmiştir. Ayrıca $\sin \theta \cong \theta$ yaklaşımını geçerli kılacak küçük genlikli burulma salınımları için Lazer-McKenna Kesit(LMK2) modeli elde edilmiştir.

İkinci bölümde, köprüye etki eden rüzgâr kaynaklı dış kuvvetleri temsil eden uygun kaldırma ve moment kuvvetleri çerçevesinde LMK modeli geliştirilmekte ve geliştirilen bu model G_LMK kısaltması ile gösterilmektedir. Öte yandan LMK1 modeline karşılık gelen modeli G_LMK1 ve LMK2 modeline karşılık gelen modeli ise G_LMK2 kısaltması ile gösteriyoruz.

Üçüncü bölümde, uygun boyutsuzlaştırma parametresi yardımıyla, G_LMK modeli boyutsuzlaştırılmaktadır. Benzer biçimde G_LMK1 ve G_LMK2 modelleri boyutsuz olarak ifade edilmektedir. Ayrıca, G_LMK2 modelinin sönümsüz ve sönümlü durumları için analitik çözümleri bulunmuş, ayrıca literatürde kullanılan ortalama köprü fiziksel değerleri için rüzgâr hızına bağlı olarak düşey ve burulma salınımlarının frekans, periyot ve genlik gibi karakteristiklerinin değişimi ve birbirleri üzerindeki etkileri gözlemlenmiştir. Ayrıca, G_LMK1 modelinin diferensiyel dönüşüm yöntemi ile yaklaşık analitik çözümleri elde edilmiş ve elde edilen yaklaşımların yakınsama hızı Padé yaklaşımları yardımıyla artırılmıştır. G_LMK modelinin sayısal çözümleri incelenmiştir. Öte yandan başlangıç değerleri ve rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak ortaya çıkan nonlinear etkiler gözlenmiştir. Ayrıca, G_LMK, G_LMK1 ve G_LMK2 modelleri için elde edilen çözümler sayısal olarak karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lazer-McKenna modeli, kaldırma kuvveti ve burulma momenti, genlik, frekans, periyot, diferensiyel dönüşüm yöntemi.

SUMMARY

Oscillation Models of the Advanced Lazer-Mckenna Suspension Bridge

In this study, Lazer-McKenna(LM) suspension bridge cross section models representing vertical and torsional displacements from the loaded state at the center of the bridge are considered and revised to take into account the aerodynamic forces due to winds of constant speed in horizontal direction.

In the first Section, as an alternative to Hamiltonian approach that uses action principle, the Lazer-McKenna models are derived using Newton's second law of motion for both vertical and torsional motions. It is possible to obtain simple submodels out of LM models under suitable assumptions. Firstly, the model denoted by LMK1 is derived under the assumption that cable stays never loose their tension. Secondly, the model denoted by LMK2 is derived under the assumption that oscillations are small in magnitude to an extent that that will justify the approximation $\sin \theta \cong \theta$.

In Section 2, LMK model is revised to take into account the aerodynamic kaldırma and moment forces due to horizontal winds with constant velocity and the model so obtained is denoted by the abbreviation G_LMK. Furthermore we derive the models corresponding to LMK1 and LMK2 and denote them by the abbreviations G_LMK1 and G_LMK2, respectively.

In Section 3, the G_LMK model is nondimensionalized using commonly used appropriate scales. Likewise, nondimensionalized G_LMK1 and G_LMK2 models are presented. Also, G_LMK2 model analyzes in both damped and undamped cases, in particular, oscillation characteristics such as periodicity, amplitude, frequency are investigated for both vertical and torsional motions and their effect on each other with respect to variations in the speed of wind. Moreover, analytical approximations for the nonlinear G_LMK1 model are obtained and speed of convergence of such approximations are increased through Padé approximations. The G_LMK model is numerically solved and the behaviour of the solution with respect to initial conditions and wind speed are investigated. Furthermore, the models G_LMK, G_LMK1 and G_LMK2 are compared.

Key Words: Lazer-McKenna model, lift force and torsional moment, amplitude, frequency, period, differential transform method.

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1. Asma köprü elemanları ve koordinat sistemi	1
Şekil 1.2. Tacoma Narrow köprüsünün çöküşü(URL-1,2008)	5
Şekil 2.1. Askılarla tutturulmuş köprü merkezi açıklığından birim genişlikli bir kesit....	22
Şekil 2.2. x ekseninde etrafında dönme(burulma) hareketi	24
Şekil 3.1. Hummer köprüsünün statik katsayıları, Diana vd (2003).....	36
Şekil 3.2. Messina köprüsünün statik katsayıları, Diana vd (2003).....	36
Şekil 3.3. Burulma salınımı $\theta(t)$ 'nin yerel değişimleri.....	45
Şekil 3.4. $z(t)$ düşey salınımının yerel değişimleri.....	46
Şekil 3.5. $\theta(t) - \theta'(t)$ ve $z(t) - z'(t)$ faz diyagramı.....	47
Şekil 3.6. $\theta(t)$ ' burulma salınımının periyot değişimleri	48
Şekil 3.7. $\theta(t)$ 'burulma salınımının frekans değişimleri.....	49
Şekil 3.8. $U \in [0 : 3 : 30]$ değerlerine karşılık gelen $\max z $ ve $\max \theta $ 'nin davranışı....	50
Şekil 3.9. $z - z'$ faz düzleminde Poincaré kesitleri	51
Şekil 3.10. $\theta - \theta'$ faz düzleminde Poincaré kesitleri(sections).....	51
Şekil 3.11. $z(t)$ düşey salınımının yerel değişimleri.....	54
Şekil 3.12. Artan zaman değerlerine karşılık, $U = 0, 5, 10$ ve 20 değerleri için $\theta(t)$ ' burulma salınımının yerel değişimleri	61
Şekil 3.13. C_1 genliğinin dış frekans W_0 'e göre değişimi	62
Şekil 3.14. C_1 genliğinin dış frekans U 'ya göre değişimi	63
Şekil 3.15. Artan zaman değerlerine karşılık, $U = 0, 5, 10$ ve 20 değerleri için $z(t)$ ' düşey salınımının yerel değişimleri	64
Şekil 3.16. $\theta(t) - \theta'(t)$ ve $z(t) - z'(t)$ faz diyagramı.....	65
Şekil 3.17. $\theta(t)$ burulma salınımının periyot değişimleri.....	66
Şekil 3.18. $\theta(t)$ 'nin frekans değişimleri	67
Şekil 3.19. $U \in [0 : 3 : 30]$ değerlerine karşılık gelen $\max z $ ve $\max \theta $ 'nin davranışı....	68

Şekil 3.20. $z - z'$ faz düzleminde Poincaré kesitleri	69
Şekil 3.21. $\theta - \theta'$ faz düzleminde Poincaré kesitleri(sections).....	69
Şekil 3.22. $z(t)$ düşey salınımın yerel değişimleri.....	71
Şekil 3.23. $U = 10$ m/s ortalama rüzgâr hızı için, sönümlü ve sönümsüz düşey salınımın davranışı.....	74
Şekil 3.24. $U = 10$ m/s ortalama rüzgâr hızı için, sönümlü ve sönümsüz burulma salınımın davranışı.....	75
Şekil 3.25. Farklı U değerleri için düşey salınımının davranışı.....	76
Şekil 3.26. Farklı U değerleri için burulma salınımının davranışı.....	77
Şekil 3.27. $\theta(t)$ burulma salınımın yerel değişimleri	85
Şekil 3.28. $z(t)$ düşey salınımın yerel değişimleri	87
Şekil 3.29. $N = 1, 2, 3, 4$ değerleri için $z(t)$ 'nin yerel değişimleri	87
Şekil 3.30. $N = 1, 2, 3, 4$ değerleri için $\theta(t)$ 'nin yerel değişimleri	88
Şekil 3.31. $U = 0, 5, 10$ değerleri için $z(t)$ düşey salınımın değişimleri	89
Şekil 3.32. $U = 0, 5, 10$ değerleri için $\theta(t)$ burulma salınım değişimleri.....	90
Şekil 3.33. $U = 18.8$ m/s değeri için $z(t)$ düşey salınımın yerel değişimleri	91
Şekil 3.34. $U = 18.8$ m/s değeri için $\theta(t)$ burulma salınımın yerel değişimleri.....	91
Şekil 3.35. Kaldırma ve moment kuvvetlerinin değişimi	92
Şekil 3.36. Yaylardaki yer değiştirmeler	93
Şekil 3.37. $U = 5$ m/s değeri için $z(t)$ 'değişimleri	96
Şekil 3.38. $U = 5$ m/s değeri için $\theta(t)$ 'değişimleri.....	97
Şekil 3.39. $U = 10$ m/s değeri için $z(t)$ düşey salınımının yerel değişimleri.....	97
Şekil 3.40. $U = 10$ m/s değeri için $\theta(t)$ burulma salınımının yerel değişimleri	98
Şekil 3.41. $U = 18$ m/s değeri için $z(t)$ düşey salınımının yerel değişimleri.....	99
Şekil 3.42. $U = 18$ m/s değeri için $\theta(t)$ burulma salınımının yerel değişimleri	100
Şekil 3.43. $U = 23$ m/s değeri için $z(t)$ düşey salınımının yerel değişimleri.....	101
Şekil 3.44. $U = 23$ m/s değeri için $\theta(t)$ burulma salınımının yerel değişimleri	101
Şekil 3.45. $U = 26$ m/s değeri için $z(t)$ düşey salınımının yerel değişimleri.....	102

TABLolar DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1.1. Dünyadaki en uzun açıklı asma köprüler(URL-3 ve URL-4, 2009).....	6
Tablo 1.2. Asma köprü modellerinde yer alan parametreler ve boyutları	9
Tablo 3.1. G_LMK modelinde yer alan parametrelerin MKS sistemindeki büyüklükleri, (Defreitas vd.,2004)	31
Tablo 3.2. G_LMK modelinde yer alan parametrelerin MKS sistemindeki büyüklükleri, (Defreitas vd.,2004).....	38
Tablo 3.3. Sönümsüz boyutlu burulma salınımının frekans ve periyodun analitik ifadesi ve rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak değişimi	53
Tablo 3.4. Sönümsüz düşey salınımının frekans ve periyotun analitik ifadesi ve rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak değişimi	54
Tablo 3.5. Sönümlü burulma salınımının frekans ve periyodunun rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak değişimi	70
Tablo 3.6. Sönümlü düşey salınımının frekansının rüzgârın hızındaki artışa bağlı olarak değişimi.....	71
Tablo 3.7. Köprüler için ortalama rüzgâr yükü katsayıları(Larsen, 1998).....	72
Tablo 3.8. Bazı asma köprüler için fiziksel sabitlerin büyüklükleri ve Tablo 3.7.'deki katsayılar kullanılarak köprüleri rezonansa sokan kritik rüzgâr hızları.....	73
Tablo 3.9. Köprüler için ortalama rüzgâr yükü katsayıları(Scanlan vd.,1997).....	73
Tablo 3.10. Bazı asma köprüler için fiziksel sabitlerin büyüklükleri ve Tablo 3.9.'daki katsayılar kullanılarak köprüleri rezonansa sokan kritik rüzgâr hızları.....	73
Tablo 3.11. Diferensiyel dönüşüm yöntemi için temel işlemler	79
Tablo 3.12. Sabit U hızı için, $\theta(0)$ hariç diğer başlangıç koşullarının değiştirilmediği durumda nonlinear etkilerin görülmeye başlandığı başlangıç koşulları	94
Tablo 3.13. Sabit U hızı için, $z(0)$ hariç diğer başlangıç koşullarının değiştirilmediği durumda nonlinear etkilerin görülmeye başlandığı başlangıç koşulları	94
Tablo 3.14. Sabit U hızı için, $\theta'(0)$ hariç diğer başlangıç koşullarının değiştirilmediği durumda nonlinear etkilerin görülmeye başlandığı başlangıç koşulları	95
Tablo 3.15. Sabit U hızı için, $z'(0)$ hariç diğer başlangıç koşullarının değiştirilmediği durumda nonlinear etkilerin görülmeye başlandığı başlangıç koşulları	95

SEMBOLLER DİZİNİ

D_BS	Düşey ve Burulma Salınım Modeli
DDY	Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi
G_LMK	Geliştirilmiş Lazer-McKenna Lineer kaldırma ve Moment Terimli Enine Kesit Modeli
G_LMK1	Geliştirilmiş Lazer-McKenna Lineer Kaldırma ve Moment Terimli Enine Kesit Modeli(1)
G_LMK2	Geliştirilmiş Lazer-McKenna Lineer Kaldırma ve Moment Terimli Enine Kesit Modeli(2)
LMK	Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli
LMK1	Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli(1)
LMK2	Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli(2)
MDDY	Modified Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi
B	Köprü tabliyesinin eni
C_{L0}	Kaldırma katsayısı
C_{L1}	Kaldırma katsayısı
C_{M0}	Moment katsayısı
C_{M1}	Moment katsayısı
e	Şekil değiştirme
E	Young(Elastisite) modülü
F	Kuvvet
F_L	Kaldırma kuvveti
F_M	Burulma momenti
g	Yerçekimi ivmesi
I	Eylemsizlik momenti
l	Kesit merkezinin statik yer değiştirmesi
k	Yay sabiti
L	Uzunluk
L_B	Köprünün merkezi açıklığının uzunluğu
L_E	Köprü tabliyesinin yarı eni uzunluğu

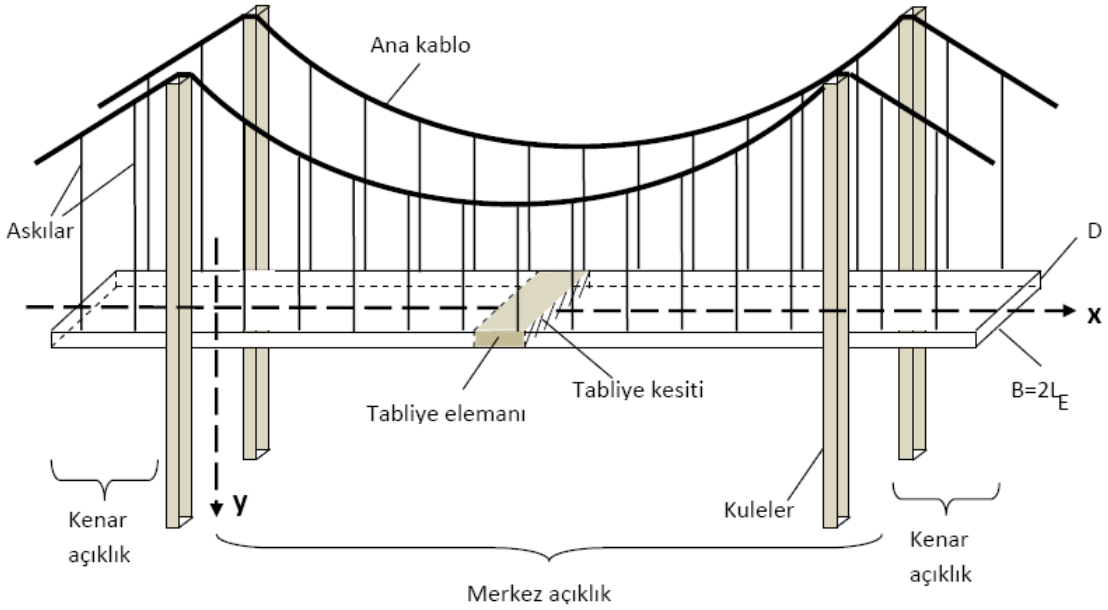
M	Kütle
m_k	Birim uzunluğunun kütlesi
δ_z	Sönüm katsayısı
δ_θ	Sönüm katsayısı
σ	Gerilme
ρ	Havanın yoğunluğu
S_I, S_{II}	Askılar
U	Ortalama rüzgâr hızı
U_∞	Kritik rüzgâr hızı
τ	Tork(Moment)
t'	Boyutsuz zaman değişkeni
T	Zaman
w_θ	Sönümsüz burulma salınımının doğal frekansı
W_θ	Sönümlü burulma salınımının doğal frekansı
w_z	Sönümsüz düşey salınımının doğal frekansı
W_z	Sönümlü düşey salınımının doğal frekansı
ϕ	Faz açısı
W	Kesit ırlığı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

1.1.1. Asma Köprü ve Elemanları

Tipik bir asmalı köprü ve elemanları Şekil 1.1’de basitçe görülmektedir. Asma köprülerde iki taşıyıcı kenar ayak, iki ana taşıyıcı kablo ve ana taşıyıcı kabloların bağlandığı ankraj kütleleri bulunmaktadır. Araçların geçtiği tabliye dediğimiz yol, askı çubukları adı verilen ve genelde düşey konumda olan kablolar yardımıyla iki ana taşıyıcı kabloya asılmıştır.



Şekil 1.1. Asma köprü elemanları ve koordinat sistemi

Asma köprü elemanları ve temel özelliklerini, modellerde kullanılan terminolojinin anlaşılması amacıyla aşağıda kısaca özetliyoruz. Özetimiz Pugsly, 1968; Celaun ,1981; Bulson vd., 1983 den derlenmiştir.

1.1.2. Kuleler

Asma köprü kuleleri, tabliye yüzeyinden daha yüksekte inşa edilen betonarme veya çelik yapılardır. Kuleler, tepelerindeki mesnet semerleri aracılığı ile ana kabloların orta ve kenar açıklıkta daima eşit olmayan çekme kuvvetleri etkisine maruz kalırlar. Kulelerin devrilmesinin önüne geçmek için, bu çekme kuvvetlerinin yatay bileşenlerinin eşit olmasına özen gösterilir. Kuleleri meydana getiren dikmeler kutu kesitli olup, genellikle içleri boştur. Dikmeler tepelerinden, tabliye altından ve eğer kuleler çok yüksek ise orta seviyeden kirişlerle birbirlerine bağlanırlar.

1.1.3. Ankrajlar

Ankrajlar, kablolardaki kuvvetleri zemine aktarırlar. Genellikle tünel ve ağırlık ankrajı olmak üzere iki tip ankraj kullanılır. Ankrajlar, kabloların çekme kuvvetlerini dengeleyip, yapının stabilitesini sağlarlar. Ankraj blokunun inşa edileceği yer sağlam zeminli ve yeterli mukavemeti sağlıyor ise bu blok inşa edilmekten vazgeçilebilir. Kabloların uzantısı üzerinde, içine kabloların ankraj uzantılarının gömüleceği bir beton kütleyle doldurulan galeriler açılır. Ankrajın emniyetini artırmak için, söz konusu galeriler, alt kısımlarında, betonarme bir kiriş ile birbirlerine bağlanırlar

1.1.4. Kablolar

Asma tabliyeden gelen yükleri kule ve ankraj yardımıyla zemine iletirler. Yapının ana taşıyıcı elamanları kablolardır. Kablolar kenarlarda, yapının iki ucundan kenarlara monte edilir ve mesnet semerleri aracılığı ile oturdukları kulelerin tepelerinden geçerler. Kablolar tel sarımlarından oluşurlar. Korozyona karşı korunmalarını sağlamak için teller bir tabaka saf çinko ile kaplanarak galvanize edilirler. Kablolar, ankraj kütlelerine gömülü montaj çubuklarına uçlarından bağlanmaktadır.

1.1.5. Askılar

Askılar çelik telli veya normal halatlı olup, ana kabloya bağlanarak tabliyenin taşınmasını sağlarlar. Dikey ve eğimli olmak üzere iki çeşit askı mevcuttur.

Askılar;

a) Askı-rijitlik kirişi(tabliye) bağlantısı,

b) Askı-kablo bağlantısı,

c) Askının kendisi,

olmak üzere üç elemandan oluşur.

1.1.6. Tabliye

Tabliye genellikle kafes kiriş şeklinde veya rüzgâr nedeniyle oluşan büyük genlikli salınımlara karşı koymak için kutu kesitli ve aerodinamik formda yapılmıştır. Köprü'nün üzerindeki trafik akışını sağlayacak olan yolu oluşturan, içleri boş ve her iki uçlarındaki dikey taşıyıcı halatlar kulelerdeki gerili çelik halatlara salıncak gibi asılan ve birbirlerine lego oyuncakları gibi bağlanan, rijitleştirilmiş taşıyıcı bloklardır.

1.2. Asmalı Köprülerin Tarihsel Gelişimi

Asma köprüler büyük açıklıkları geçmek için düşünülmüş en eski köprü türlerinden biridir. Söz konusu köprülerin tarihsel gelişimini (Pugsly, 1968; Celaun, 1981). referanslarından yararlanarak aşağıda kısaca özetliyoruz.

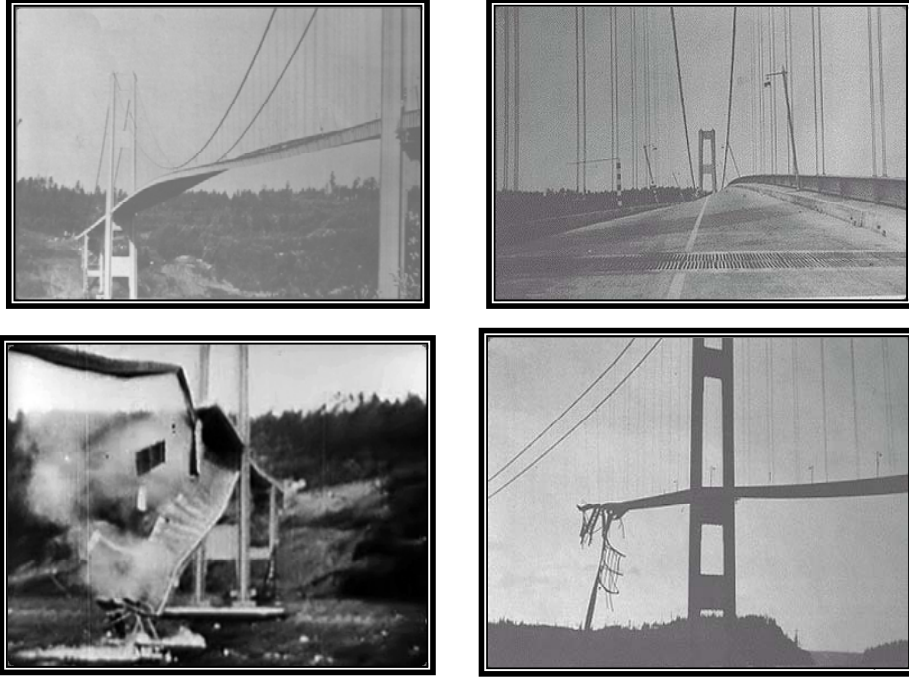
Doğu Asya, Güney Amerika ve Afrika başta olmak üzere Dünyanın pek çok bölgesinde ilkel olarak inşa edilmiş asma köprüler kullanılmıştır. Tropik bölgelerde ilk inşa edilen asma köprüler, asmaların nehirlerin her iki kıyısındaki ağaçlara bağlanması suretiyle, bambu ve ahşaptan yapılmış karşıdan karşıya geçmeyi sağlayan ilkel tipteki kablolu asma köprü sistemleri oluşturulmuştur. Güney Amerika'da inşa edilen asma köprüler de ise, kablolar öd ağacı ve burulmuş söğütten yapılmış, kuleler doğal kayalardan oluşturulmuş ve ankrajlar kayalara monte edilmiştir. Afrika yerlileri ise asma köprülerini ağaç tepeleri arasına kurarak, taşıyıcı halatlarını ise çeşitli sürüngen ve bitkilerden yapmışlardır.

Doğal inşa edilen asma köprüler yerine metal kablolar kullanılarak ilk inşa edilen köprü Çin'de yapılmıştır. Çeşitli tarihi kaynaklardan bu köprünün demir zincirli olduğundan bahsedilmektedir. Çin'de ve Tibet'te ilk inşa edilen köprülerde halatların yerine 25 mm çapında çubuklardan oluşan, halkaları bağlı demir çubuklar kullanılmıştır. Batıda asma köprüler dövme demirin kullanılmasıyla, zincirli olarak inşa edilmişlerdir. 1741 yılında inşa edilen ilk zincirli köprü Winch Köprüsü, 1802 yılında çökmüştür. İnşaa edilen ilk zincirli köprülerin çoğu şiddetli rüzgâr nedeniyle, büyük genlikli salınımlara maruz kalarak çökmüşlerdir(Pugsly, 1968; Celaun, 1981). Amerika'da inşa edilen ilk demir köprü 1796 yılında yapılan Jacobs Creek Köprüsüdür.

İngiliz mühendislerinden Samuel Brown levha demir elemanlar kullanarak bir asma köprü yapmıştır. Bu yöntemi geliştirerek, 1814 yılında 32m açıklığı olan Piyade köprüsünü, 1820 yılında açıklığı 110m olan Tweed köprüsünü ve 1821 yılında her bir açıklığı 78m olan dört gözlü Brighton köprüsünü inşa etmiştir(Fikri, 1937). Bu yöntemle Telford orta açıklığı 175m ve tüm açıklığı 354m olan Menai-Merengen köprüsünü inşa etmiştir(Justin, 2000).

Fransa'da 1824 yılında demir halat kullanılarak, Rhone üzerinde her bir açıklığı 89m olan, iki açıklıklı ve genişliği 4m olan asma köprü Seguin tarafından inşa edilmiştir. Fransa da araç trafiğine açılan ilk köprüdür(Fikri, 1937). 19. yüzyılın ikinci yarısında Amerika'da A. Roebling 250m açıklığındaki Niyagara Şelalesi köprüsünü inşa etmiştir. Bu inşa sırasında düşey askılarla normal kablo, kule tepesinden çıkan eğik kablo ve büyük yükseklikli ağırlık kirişleri olmak üzere üç yöntemden yararlanmıştır. Asma köprüler için tel kablolar imal edilmeye başladıktan sonra, 1883 yılında 487m açıklığındaki Brooklyn köprüsü inşa edilmiştir(Merritt,1983).

Asma köprüler tarih boyunca rüzgâr, deprem, trafik yükü gibi dış etkenlerle orta şiddetli ya da çok şiddetli bir şekilde karşılaşmalarının neticesi olarak büyük genlikli salınımlara hatta çökmelere bile maruz kalmışlardır. Buna tipik bir örnek olarak, Tacoma Narrows asma köprüsünün çöküşü verilebilir. 10 Haziran 1940 yılında tamamlanan Tacoma Narrow köprüsü 1 Temmuz da trafiğe açılmış ve ardından 7 Kasımda köprü çökmüştür(URL-1 ve URL-2, 2008).



Şekil 1.2. Tacoma Narrow köprüsünün çöküşü(URL-1,2008)

Tacoma Narrow köprüsünün çöküş nedenlerine ait çeşitli teoriler geliştirilmiştir:

1. Rüzgâr nedeniyle köprü tabliyesi civarında oluşan von Karman girdaplarının neden olduğu alterne yönlü kuvvet frekansının köprü doğal salınım frekansına çok yakın olması nedeniyle oluşan rezonans
2. Asma köprü tabliyesini ana kablolarla bağlayan askıların lineer olmayan yay etkisinden kaynaklanan asimetri
3. Köprü tabliyesinin rüzgâr etkisini minimize edecek geometriye sahip olmayıp, aksine tabliyenin (box girder) yapısı gereği rüzgâr akımına karşı direnç göstermesi
4. Tabliye enine kesitinin(2.4 metre yüksekliğinde ve 12 metre genişliğinde dikdörtgensel kesit) kesit merkezi etrafındaki eylemsizlik momentinin benzer köprülere kıyasla küçük olması

Söz konusu etkenlerden hangisinin baskın rol oynadığı veya birbirlerini tetikleme düzeyi konusunda henüz bir fikir birliği yoktur. Ayrıca olayla ilgili birçok soru işareti hala güncelliğini korumaktadır. Örneğin

1. 30-40 mil/sa rüzgâr hızında köprüde salınım gözlenmezken, 3-4 mil/sa gibi çok düşük hızlarda köprünün gözlemlenebilir salınımına girmiş olması

2. Düşey salınımların yanı sıra burulma salınımlarının da oluşması ve bu iki salınım türünden birinin diğeri üzerindeki etkisi
3. Köprü yıkılma sürecinde belirli bir frekansta girdap oluşumunun neden olabileceği periyodik dış kuvvet oluşturabilecek düzenli rüzgâr etkisinin olmadığı ve dolayısıyla Karman girdap teorisinin tatmin edici olmayışı
4. Köprü dinamiği ve dış etkenler arasındaki ilişkinin izah edilememiş olması

Ülkemizde ise Avrupa ve Asya kıtalarını birleştiren Boğaziçi ve Fatih Sultan Mehmet köprüleri dünyanın büyük açıklıklı köprüleri arasında yer almaktadırlar. 1988 yılında tamamlanan ve hizmete açılan Fatih Sultan Mehmet köprüsü 1090m açıklıkla, 1973 yılında tamamlanan ve hizmete açılan Boğaziçi köprüsü ise 1074m açıklıktadır

Boğaziçi köprüsü'nün ayaklarının yüksekliği 165m, denizden yüksekliği ise 64m dir. Yapımında 23 bin ton çelik, 71 m³ beton kullanılmıştır.

Fatih Sultan Mehmet köprüsü'nün denizden yüksekliği 64m dir. Ayakların yüksekliği 107.10m dir.

Tablo 1.1'de Dünyanın en uzun açıklığına sahip 17 asma köprüsü, ismi, açıklığı ve bulunduğu ülke ile hizmete açılma yılları itibariyle özetlenmiştir.

Tablo 1.1. Dünyadaki en uzun açıklıklı asma köprüler(URL-3 ve URL-4, 2009)

No	Köprü Adı	Açıklık(m)	Ülke	Yıl
1	Akashi-Kaikyo	1991	Japonya	1998
2	Great-Belt East	1624	Danimarka	1998
3	Runyang	1490	Çin	2005
4	Yangluo	1280	Çin	2007
5	Xihoumen	1650	Çin	2007
6	Humber	1410	İngiltere	1981
7	Jiangyin	1385	Çin	1999
8	Verrazano-Narrows	1298	ABD	1964
9	Golden-Gate	1280	ABD	1937
10	Höga Kusten	1210	İsveç	1997
11	Mackinac	1158	ABD	1957
12	Miami Bisan-seto	1100	Japonya	1988
13	Boğaziçi	1074	Türkiye	1973
14	Fatih Sultan Mehmet	1090	Türkiye	1988
15	George Washington	1067	ABD	1931
16	Krushima-3	1030	Japonya	1999
17	Tsing Ma	1377	Çin	1997

1.3. Literatür

Bu bölümde, yukarıda tarihi gelişiminden ve genel özelliklerinden bahsedilen asma köprülerin matematiksel modelleri ve bu modeller üzerinde yapılan çalışmaları ve tez çalışmamızı özetleyeceğiz. Asma köprülerin salınımı problemi üzerinde 1920 yılından beri çalışmalar yapılmaktadır. Birçok araştırmacı farklı matematik modeller ve bu modeller için çözüm önerileri ortaya koymuşlardır.

Tacoma Narrows köprüsünün çöküşünü müteakip asmalı köprülerin matematiksel modelleri üzerinde yapılan çalışmaların hız kazandığı görülmektedir. Esas itibariyle asma köprü modelleri üzerinde gerçekleştirilen matematiksel çalışmaları birkaç başlık altında toplamak mümkündür:

- Köprü enine kesitini inceleyen tek serbestlik dereceli modeller(Blanchard, vd, 1998)
- Enine kesit ile burulma salınımını birlikte veya ayrı ayrı inceleyen iki serbestlik dereceli modeller(Moore, 2001, McKenna, 1999)
- Köprüyü uçları uygun şekilde bağlanmış(basit destekli, sabitlenmiş,) kiriş olarak kabul eden tek serbestlik dereceli lineer modeller(Lazer ve McKenna, 1990)
- Kiriş modeline lineer olmayan askıların bağlanması ile elde edilen tek serbestlik dereceli modeller(McKenna, 1999)
- Kiriş modeline her iki kenardan bağlı askıların hareket etmeyen ana kabloları bağlı olduğunu kabul ederek burulma ve düşey salınımları inceleyen iki serbestlik dereceli tek veya iki boyutlu modeller(McKenna, 1999; Moore, 2001; Glover vd. (1989))
- Ana kabloları, askılar ve tabliyenin hareket halinde olduğunu kabul eden en genel beş serbestlik dereceli(sağ askı, sol askı, tabliye düşey yer değiştirmesi, tabliye burulması, ana kablolardaki yer değiştirme) kompleks modeller(Sepe ve Augusti, 2001;Sepe vd. 2003; Plaut ve Devis, 2007)

Asma köprü düşey salınımı için klasik modellerden birisi, fizik ders kitaplarında da yer aldığı üzere, salınım sistemini m kütleli köprü kesitine bağlı k sabitli lineer bir yay olarak düşünen ve rüzgâr veya dış etkenleri periyodik olarak kabul eden

$$my'' + \delta y' + ky = W + \alpha \sin(\mu t) \quad (1.1)$$

modelidir. Burada aşağı yön pozitif olmak üzere $y = y(t)$ kesitin t anında yüksüz denge konumuna olan düşey uzaklığı, $W = mg$ birim boy ağırlığı, δ ortam sönüm sabitidir. Ortam sönüm sabiti δ nın küçük değerleri için, μ nün k/m 'nin kareköküne çok yakın bir değer alması durumunda *rezonans* adı verilen ve genliği hızla büyüyen salımlar oluşmaktadır.

Fakat gerçek bir köprünün salınımı aşağıda belirtilen nedenlerden ötürü bu model ile izah edilebilecek kadar basit değildir:

1. Askıların lineer yay olarak kabul edilmesi, gerçeği yansıtmamaktadır. Çünkü gerçek askıların gerilmeye karşı direnç gösterdikleri ve fakat sıkışmaya karşı direnç göstermedikleri bilinmektedir. Bu durumda (1.1) modeli

$$my'' + \delta y' + ky^+ = W + \alpha \sin(\mu t) \quad (1.2)$$

ile değiştirilmelidir. Burada $y^+ = \begin{cases} y, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$ olup ky^+ tek taraflı yay rolü oynayan askı geri çekme kuvvetini temsil etmektedir.

2. Kesit, köprü tabliyesinin(kirişin) bir parçası olarak moment ve kayma gerilmesi etkisi altındadır.

Öte yandan basit mesnetli bir kiriş olarak düşünülen köprü tabliyesi üzerindeki bir x noktasının birim uzunluğa etki eden $w(x)$ yükü altında statik yer değiştirmesi, yine klasik fizik kitaplarında yer aldığı üzere

$$-EI y^{(4)} + w(x) = 0 \quad (1.3)$$

$$y(0) = y(L_B) = y''(0) = y''(L_B) = 0 \quad (1.4)$$

modeli ile ifade edilmektedir. Burada L_B kiriş uzunluğu, E Young sabiti, I ise kiriş kesitinin kesit merkezi etrafında eylemsizlik momentidir. L uzunluk, M kütle, T zaman boyutlarını göstermek üzere, burada $y = y(x)$ x noktasındaki statik yer değiştirme olup y

nin boyutu açıkça $[y]=L$ dir. Sıkça kullanacağımız diğer parametreler ve boyutları aşağıda verilmektedir:

Tablo 1.2. Asma köprü modellerinde yer alan parametreler ve boyutları

Miktar	Sembol	Tanımlayıcı Denklem	Boyut (İkincil)	Boyut (Temel)
Kuvvet	F	$F = ma$	N	MLT^{-2}
Tork(Moment)	τ	$\tau = Ia$	NL	ML^2T^{-2}
Zor(Gerilme)	σ		NL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
Zorlanma(Şekil değiştirme)	e		---	----
Young Sabiti (Elastisite Modülü)	E	$E = \sigma/e$	NL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
Kesit Eylemsizlik Momenti	I	$I = \frac{BD^3}{12}$ (dikdörtgen kesit) B: genişlik, D:yükseklik	L^4	L^4
Çubuğun Eksen Etrafındaki Kütle Eylemsizlik Momenti	I	$\left(I = \frac{mL_E^2}{3} \right)$		ML^2
Yay Sabiti	k	$F = -ky$ (Hook kanunu)	N/L	MT^{-2}
Sönüm Sabiti	δ	$F = \delta y$ (Stoke yasası)	$N/(L/T)$	MT^{-1}

(1.3) modeline kiriş kesitine etki eden askı geri çekme kuvvetini dahil ederek yerçekimi kuvveti etkisinde yer değiştirme yönü(aşağı yön) pozitif olmak üzere düşey yönde

$$F_s = \sum F_y = -EI y^{(4)} - ky' + w(x) = 0 \quad (1.5)$$

$$y(0) = y(L_B) = y''(0) = y''(L_B) = 0 \quad (1.6)$$

statik denge modelini elde ederiz. Bu model açıkça dinamik unsurları içermez.

Newton hareket kanunu gereği, bir yöndeki momentum değişimi o yönde sistemin maruz kaldığı bileşke kuvvete eşit olmalıdır. m kütleli ve L_B uzunluklu kirişin, dış faktörler etkisinde düşey yönde salınım gerçekleştirdiğini kabul ediyoruz ve yine

kesitin (x,t) noktasında statik denge konumuna olan uzaklığını $y(x,t)$ ile gösterelim. Ayrıca salınım sistemine salınım tersi yönünde ve salınım hızı ile orantılı ortam kuvveti(viscous drag) $-\delta y_t(x,t)$ ve $\varepsilon f(x,t)$ dış kuvvetinin etki ettiğini kabul edelim. O halde Newton kanunu gereği momentum değişimi dinamik ve statik kuvvetlerin toplamı olarak

$$my_{tt} = -\delta y_t + \varepsilon f(x,t) + F_s \quad (1.7)$$

veya

$$my_{tt} = -\delta y_t - EI y_{xxxx} - ky^+ + w(x) + \varepsilon f(x,t) \quad (1.8)$$

olarak ifade edilir. Kirişin her iki uçtan basit mesnetli olduğu ve $t=0$ başlangıç anında statik denge noktasına göre $y_0(x)$ konumuna sahip olduğunu ve yine hareket başlangıç hızının $y_1(x)$ ile verildiğini kabul edelim. Bu durumda,

$$my_{tt} + \delta y_t + EI y_{xxxx} + ky^+ = w(x) + \varepsilon f(x,t), x \in (0, L_B) \quad (1.9)$$

$$y(0,t) = y(L_B,t) = y_{xx}(0,t) = y_{xx}(L_B,t) = 0 \quad (1.10)$$

$$y(x,0) = y_0(x); y_t(x,0) = y_1(x) \quad (1.11)$$

başlangıç-sınır değer problemi elde edilir.

Asma köprü modellerinin çözümlerinin varlığı, tekliği ve bazen de çokluğu ve kararlılığı ağırlıklı olarak Lazer-McKenna olmak üzere, Fabrey(2001), McKenna ve O'Tuama (2001), Harbi(1996), Ahmed(2000) tarafından incelenmiştir. (1.9)-(1.11) modelini araştırma kapsamında incelemeye değer kılan şüphesiz ky^+ nonlineer askı geri çekme kuvvetidir. Örneğin Lazer ve McKenna (1990) uygun biçimde (1.9)-(1.11) modelinin boyutsuzlaştırılması ile elde edilen

$$y_{tt} + \delta y_t + y_{xxxx} + ky^+ = W_0 + \varepsilon f(x,t), x \in (0, L) \quad (1.12)$$

$$y(0,t) = y(L,t) = y_{xx}(0,t) = y_{xx}(L,t) = 0 \quad (1.13)$$

$$y(x,0) = y_0(x); y_t(x,0) = y_1(x) \quad (1.14)$$

modeli için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir:

Teorem 1.1. (1.12-14) modelinde $\delta = 0$, $L = \pi$ ve ayrıca $T = \pi$ olsun. $f(x,t)$ nin t ye göre çift ve T periyodik olduğunu; $x = \pi/2$ noktası komşuluğunda ise x e göre çift olduğunu kabul edelim. Bu taktirde eğer $0 < k < 3$ ise (1.12) denklemi denge noktası komşuluğunda küçük genlikli π periyotlu periyodik çözüme sahiptir. Eğer $3 < k < 15$ ise model, söz konusu çözüme ilaveten büyük genlikli diğer bir periyodik çözüme daha sahiptir.

Böylece askı kablolarının kuvvetlendirilmesinin (k ' nin büyük değerleri için), köprünün salınım dengesini olumlu yönde değil, olumsuz yönde etkileyeceği fiziksel sonucuna ulaşılmıştır. Lazer-McKenna, (1.12)-(1.14) modelini

$f(x,t) = \alpha \sin(\mu t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ kuvvet terimi ile büyük ve küçük genlikli başlangıç

koşulları etkisi altında farklı α ve μ parametreleri için inceleyerek, büyük zaman değerlerine karşılık gelen farklı periyodik çözümlerin varlığını tesbit etmişlerdir. Ayrıca, köprü uçlarından yansıtılan köprü boyunca tek boyutlu dalga hareketini andıran çözüme yakınsayan çözümler elde etmişlerdir. x ' e göre simetrik dış kuvvet etkisinde bile simetrik olmayan çözümlere rastlandığını da not etmişlerdir.

(1.9)-(1.11) modelinde dikkate alınmayan üç önemli faktör

1. Köprü sadece düşey salınım yapmayıp, aynı zamanda da burulma salınımı gerçekleştirdiği,
2. Askıların bağlı bulunduğu ana kabloların da birer sicim olarak salınım hareketi gerçekleştirdiği,
3. Düşey ve Burulma salınımının genlik ve frekansını kesite etki eden ve kesit uzunluğu ve rüzgâr hızına bağlı olarak kaldırma kuvveti ve burulma momentlerinin varlığıdır.

Yukarıda bahsedilen birinci faktör yine Lazer-McKenna ve Moore(1990) tarafından düşey ve burulma salınımlarını dikkate alan ve aşağıda sunulan uygun biçimde boyutsuzlaştırılmış Düşey ve Burulma Salınım (D_BS) modeli ile incelenmiştir:

$$\theta_{tt} - \theta_{xx} + \delta_1 \theta_t - b_1 \cos \theta \left[(y - l \sin \theta)^+ - (y + l \sin \theta)^+ \right] = \varepsilon_1 f_1(x, t) \quad (1.15)$$

$$y_{tt} + y_{xxxx} + \delta_2 y_t + b_2 \left[(y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+ \right] = 1 + \varepsilon f(x, t), \quad x \in (0, \pi) \quad (1.16)$$

$$\theta(0, t) = \theta(\pi, t) = y(0, t) = y(\pi, t) = y_{xx}(0, t) = y_{xx}(\pi, t) = 0 \quad (1.17)$$

$$y(x, 0) = y(x, 2\pi); \theta(x, 0) = \theta(x, 2\pi); y_t(x, 0) = y_t(x, 2\pi); \theta_t(x, 0) = \theta_t(x, 2\pi) \quad (1.18)$$

D_BS modeli sönüm terimleri ve $\delta_1 = \delta_2 = 0$ alınmak suretiyle elde edilen sönümsüz versiyonu ile birlikte incelenmiş ve herhangi b_1, b_2 için her iki problemin de periyodik zayıf çözümlere sahip olduğu gösterilmiş, zayıf çözümlerin sürekli ve sınırlı olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca küçük b_1, b_2 için sönümlü sistemin tek bir periyodik çözüme sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca sönümsüz model sayısal olarak da incelenerek, burulma denklemi için çok küçük dış kuvvet etkisi ve başlangıç değeri için küçük düşey dış kuvvet etkisi altında büyük genlikli burulma salınımı olabileceği gözlemlenmiştir.

Yukarıda bahsettiğimiz ikinci faktör de dikkate alınarak incelenen Kablo-Kiriş modeli oluşturulmuştur:

$$m_1 v_{tt} - T v_{xx} + \delta_1 v_t - k (y - v)^+ = \varepsilon f_1(x, t) \quad (1.19)$$

$$m_2 y_{tt} + \delta_2 y_t + EI y_{xxxx} + k (y - v)^+ = W_1 \quad (1.20)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = v(0, t) = v_{xx}(L, t) = y_{xx}(0, t) = y_{xx}(L, t) = 0 \quad (1.21)$$

$$y(x, 0) = y_0(x); y_t(x, 0) = y_1(x); v(x, 0) = v_0(x); v_t(x, 0) = v_1(x) \quad (1.22)$$

Burada $y(x, t)$ tabliyenin düşey yer değiştirmesi ve $v(x, t)$ ise bir tane olduğu kabul edilen ana bağlantı kablusunun düşey yer değiştirmesidir. $y - v$ farkının pozitif olması durumunda ana kabloya aşağı yönde kuvvet uygulanacaktır. Dolayısıyla birinci denklemde nonlinear terimin önünde eksi işareti olmalıdır. Öte yandan söz konusu farkın pozitif olması durumunda tabliye kablo tarafından yukarıya doğru (negatif yönde)

çekilecektir. Dolayısıyla ikinci terimde sol tarafa atılan bu terimin önündeki işareti olmalıdır.

Kablo-Kiriş modelinin $y(x,t) = y(t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, $v(x,t) = v(t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ biçimindeki

düğünsüz çözümleri yine Lazer-McKenna ve arkadaşları tarafından araştırılarak, birinci denklemdeki kuvvet teriminin zaman değişkenine göre periyodik olması durumunda bazen tabliyenin ana bağlantı kablosu hareketini taklit ettiği bazen ise tabliyenin ana kablo hareketine karşı duyarsız kaldığı gözlemlenmiştir.

Yukarıda bahsedilen modellerin çözümlerinin varlığı, tekliği, kararlılığı ve regülerliği konusunda en çok dikkat çeken çalışma Lazer ve McKenna (1990) grubu(arkadaşları ve öğrencileri) tarafından yapılan çalışmalardır.

Farklı dış etkenler doğrultusunda asma köprü sisteminde(tabliye, askı, kule, vs) oluşan kuvvetler ve bu kuvvetlerin neden olduğu yer değiştirmeler mühendislik yönüyle de detaylı olarak incelenmiş ve incelenmeye de devam edilmektedir. Gözlemleyebildiğimiz kadarıyla literatürde sıkça bahsedilen mühendislik çalışmalarının bazılarında aşağıda kısaca söz etmek istiyoruz. Özetle çalışma kapsamında incelenen problem, problemin incelenmesinde takip edilen yöntem ve elde edilen en önemli bulgudan bahsetmek istiyoruz. Detaylı literatür araştırması için bahsedilen kaynaklarda yer alan diğer referansların da dikkate alınması gerekmektedir.

Dumanoglu ve Adanur(2000), deprem gibi doğal dinamik etkilere maruz kalan asma köprülerde oluşan kuvvetleri incelemiş ve elde edilen önemli sonuçlara ilaveten doğal dalga hızının azalmasına paralel olarak oluşan yer değiştirmelerde artış gözlemlendiğini vurgulamıştır. Abdel-Ghaffar ve Rubin (1983a, 1983b), Brownjohn (1994); Adanur vd.(1997) Imai (1999), asma köprülerin geometrik olarak lineer olmayan analizi konusunda çalışmalar yapmışlardır.

Glover vd. (1989), nonlinear askı kesit modelini inceleyerek sabit yük ve küçük genlikli dış kuvvet etkisi altında büyük genlikli kararlı çözümlerin oluşabileceğini göstererek söz konusu çözümlerin sayıları ve periyotlarını incelemişlerdir. Lazer ve McKenna (1990), köprü tabliyesini nonlinear askılar ile bağlı kiriş olarak kabul etmek suretiyle oluşan dördüncü mertebeden tek boyutlu modelin, askı sabitinin aldığı değerlere göre periyodik çözümlerin varlığını ve sayısını belirlemişlerdir.

McKenna ve Walter (1990), ise Lazer ve McKenna (1990) de incelenen modelin sönümsüz versiyonu incelemişler ve söz konusu modelin hareket eden dalga çözümlerine

sahip olduğunu göstermişlerdir. Humphreys ve McKenna (1999), ise McKenna ve Walter (1990) de incelenen sönümsüz kiriş modelinde askı sabitinin $L_U = U_{tt} + U_{xxxx} = \lambda U$ probleminin en büyük özdeğerinden daha büyük olması durumunda büyük genlikli çözümlerin sayısının artmasına neden olduğunu göstermişlerdir. McKenna(1999), enine kesit modelini inceleyerek, kesitin özel başlangıç konumu ve hızına bağlı olarak, Runge Kutta sayısal yöntemini kullanmak suretiyle uzun zaman aralıkları için çözümlerin davranışlarını incelemiştir. Ayrıca başlangıç koşullarına bağlı bazı küçük periyodik kuvvet terimleri etkisi altında küçük yada büyük genlikli periyodik salınımların gerçekleştiğini göstermişlerdir.

McKenna ve O'Tuama (2001), McKenna(1999) de incelenen kesit modelinde, askı geri çekme kuvveti lineer Hook kanunu yerine, nonlinear bir bağıntı ile ifade ederek incelemiştir. Ayrıca incelenen nonlinear askı dengeleme kuvveti etkisi altında düşey salınımların burulma salınımını tetiklediğine ait simülasyonlar sunulmaktadır. McKenna ve Moore (2002), lineer ve nonlinear askı dengeleyici kuvvet etkisinde düşey ve burulma salınımlarını $\lambda_T \sin(\mu_T t)$ ve $\lambda_V \sin(\mu_V t)$ periyodik dış kuvvetler etkisi altında incelemiş ve söz konusu parametrelere bağlı olarak farklı genlikli periyodik çözümleri araştırmışlardır. McKenna(2006), yarı lineer eliptik problemlerin çözümleri hakkındaki gelişmeler inceleyerek, gerek tek boyutlu kiriş modeli ve gerekse enine kesit modeli ile elde edilen sonuçları özetlemiştir.

Robert(2006), yüksek lisans çalışmasında ana kablo ve köprü tabliyesindeki yer değiştirmeleri inceleyen Lazer-McKenna modelinin hareket eden dalga çözümlerini sayısal olarak araştırmıştır. Moore(2001), doktora tez çalışmasında periyodik çözümlerin araştırılmasına yönelik algoritmalar tanıtarak, özellikle dallanma(bifurcation) analizi için uygun algoritmalar geliştirmiş ve geliştirilen algoritmalar ile Lazer-McKenna kesit modellerinin tek boyutlu periyodik çözümleri ve bu çözümlerin parametreye bağlı dallanma analizini gerçekleştirmiştir. Moore(2002), Ben-Gal ve Moore (2005), aynı parametreler ile Moore(2001) de sunulan çalışmalar doğrultusunda çalışmalar yapmışlardır.

Jacover ve McKenna (1994), asma köprü matematiksel modellerini detaylı olarak sunmaktadırlar. Plaut ve Davis (2007), kesitin uçlarındaki askı ve sönüm sabitlerinin farklı kabul edildiği simetrik olmayan modelleri geliştirerek incelemiştir. Robertson vd. (2003), tabliye etrafındaki akışkan hız profillerini Navier-Stokes denklemiyle

hesaplayarak, aerodinamik kuvvetleri hız profilleri yardımıyla hesaplandıktan sonra düşey ve burulma salınımlarını lineer askılı sistemler için hesaplamışlardır. Doole ve Hogan (2000), köprü kesiti için Geliştirilmiş Lazer-McKenna modelini araştırmışlardır. Ma ve Zhong (2005), tabliye ve ana kabloların hareketini tabliye boyunca modelleyen nonlinear sistemin çekici çözüm kümesinin varlığını göstermişlerdir.

Fabrey(2001), büyük genlikli Lazer-McKenna kesit modelinin çözümlerinin varlığı incelemiştir. Humphreys(1997), asma köprü modeline ait enerji fonksiyonelinin direkt minimizasyonu yardımıyla Lazer-McKenna nonlinear askılı kiriş modelinin çözümünü elde etmiştir.

Harbi(1996), lineer ve nonlinear Lazer-McKenna modelinin Lyapunov kararlılığını incelemiştir. Ahmed(2000), Lazer-McKenna modelini stokastik kuvvetler etkisi altında incelemiştir. Freitas vd.(2003), köprü kesitinin orta noktasının hangi başlangıç şartları altında çözümlerin güvenli bölge(safe basin) olarak adlandırılan bölgede kaldığını belirlemişlerdir.

Abdel-Ghaffar vd.(1992), kesite etkiyen burulma faktörlerini ve etkilerini, dikey ve burulma titreşimi arasındaki bağı içeren sürekli yaklaşımdan yararlanarak, yatay tabliyeli asma köprülerin serbest titreşim analizi için yeni bir yöntem önermişlerdir. Kawada ve Hirai (1985), asma köprülerin onarımı için matematiksel analiz ve rüzgâr tüneli testleri ile asılı bir kütle ve uzun açıklık asma köprülerin sınırlı salınımları arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Lazer ve McKenna (1987), büyük genlikli periyodik çözümlerin varlığını kanıtladılar.

Bu çalışmada ise literatürde incelenmediğini gözlemlediğimiz ve yukarıda bahsettiğimiz 3 numaralı faktörü, yani

“Düşey ve Burulma salınımlarının genlik ve frekansını, kesite etki eden ve kesit uzunluğu ve rüzgâr hızına bağlı olarak değişen kaldırma kuvveti ve burulma momentlerinin varlığını” dikkate alarak, tez çalışmamızı bu ekseninde geliştiriyoruz. Yer ve zaman değişkenine göre çeşitli formlarda periyodik olduğu Lazer-McKenna tarafından kabul edilen dış kuvvet terimlerini geliştirerek, rüzgâr hızı, tabliyeye etki yönü ve tabliye kesit boyutunu esas alan aerodinamik kuvvetler ışığı altında yeniden inceliyoruz. Böylece geliştirdiğimiz Lazer-McKenna esaslı modellerin özellikle rüzgâr hızı başta olmak üzere lineer olduğunu kabul ettiğimiz kaldırma ve moment kuvvetlerindeki parametrelere bağlı olarak inceliyor ve askılarda gevşeme olmadığı durumdaki nonlinear model için analitik yaklaşımları belirliyoruz.

1.4. Tez İçeriği

Bölüm 2.1 de (Lazer-McKenna) LM modelini düşey ve burulma yönünde Newton kanunları çerçevesinde yeniden türetiyor ve bu modelin biri nonlinear ve diğeri lineer olan askılarda gevşeme olmaması kabulü ile elde edilen özel bir durumu(LMEK1) ile LMEK1 modelinin küçük genlikli burulma salınımlarına karşılık gelen diğeri bir özel durumunu(LMEK2) ifade ediyoruz.

Bölüm 3.1 de LM modellerine uygun biçimde formüle edilen aerodinamik kaldırma ve moment kuvvetlerini ilave etmek suretiyle sırasıyla LM ve LMK1 ve LMK2 modellerine karşılık gelen Geliştirilmiş Lazer-McKenna(G_LMK), G_LMK1 ve GL_MK2 modellerini elde ediyoruz. Ayrıca analitik yaklaşım için bu modelleri uygun boyutsuzlaştırma parametreleri yardımıyla boyutsuzlaştırıyoruz.

Bölüm 3.2 de Geliştirilmiş Lazer-McKenna modeli(G_LMK) ve modelde kullanılan parametreleri tanıttıktan sonra, Bölüm 3.3 de ise askılarda gevşeme olmadığı durumda Geliştirilmiş Lazer-McKenna modelini(G_LMK1) elde ediyoruz. Bölüm 3.4 de ise askılarda gevşeme olmadığını ve burulma salınım genliğinin $\sin\theta \approx \theta$ yaklaşımını makul kılacak düzeyde olması durumunda Geliştirilmiş Lazer-McKenna modelini(G_LMK2) elde ediyoruz. 3.5.1 ve 3.5.2 de sönümlü ve sönümsüz durumlarda G_LMK2 modelini analitik olarak inceliyor ve ortalama köprü fiziksel değerleri için rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak sönümlü ve sönümsüz salınımın frekansı, periyodu, genliği ve faz açısındaki değişimi gözlemliyoruz.

Bölüm 3.6 da G_LMK1 e yaklaşık analitik çözüm yöntemlerinden biri olan Diferensiyel Dönüşüm Yöntemini(DDY) uygulayarak nonlinear model için analitik yaklaşımları elde ediyoruz. Elde edilen yaklaşımların yakınsama hızını Pade yaklaşım yöntemini uygulayarak geliştiriyoruz.

Bölüm 3.7 de G_LMK modelinin sayısal çözümleri, başlangıç değerleri ve rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak nonlinear etkileri gözlemliyoruz. Ayrıca rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak G_LMK, G_LMK1 ve G_LMK2 modellerini karşılaştırıyoruz.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Enine Kesit Modelleri

2.1.1. Euler-Bernoulli Kiriş Modelinden Türetilen Merkezi Açıklık Kesit Modeli

Bir asma köprüde düşey destek birimlerine kule; iki kule arasındaki tabliye kesitine merkezi açıklık; tabliyenin merkezi açıklık kısmı dışındaki kısımlarına kenar açıklık; kuleler üzerinden açıklık boyunca uzanan kablolar ana kablo(iki adet); bu kablolar ile köprü tabliyesi arasındaki bağlantıyı sağlayan kablolar askı adı verildiğini hatırlayalım. Bir asma köprünün temel bileşenleri Şekil 1.1 de gösterilmektedir.

Belirli kuvvetlerin makul varsayımlar altında dikkate alınması veya ihmal edilmesi sonucunda oluşan asma köprü matematiksel modellerini incelemeye önce, analizimize merkezi açıklığın iki uçtan mesnetlenmiş tek boyutlu bir kiriş olarak kabul edildiği prototip model ile başlayalım. Söz konusu tabliyenin merkezi açıklığının uzunluğunu L_B ile gösterelim. Tabliyenin x ile göstereceğimiz uzun eksen boyunca sadece düşey yönde(aşağı yön pozitif olmak üzere y -ekseni boyunca) hareket ettiğini kabul ediyoruz. Ayrıca x noktasında ve t anında çeşitli kuvvetler etkisi altındaki düşey yer değiştirmeyi $y(x,t)$ ile gösterelim. Uçları birer mesnet üzerine oturtulan(simply supported) kiriş olarak kabul ettiğimiz tabliye salınımını etkileyen kuvvetler aşağıda listelenmektedir:

I) Tabliye ve üzerindeki yük dolayısıyla x noktasında etki eden yer çekimi kuvveti (F_1):

$$F_1 = W(x), \quad x \in [0, L_B] \quad (\text{aşağı yönde pozitif}) \quad (2.1)$$

II) Sürtünme kuvveti(viscous drag) (F_2);

Hareketini tersi yönünde ve düşük hızlarda hareket hızı ile orantılı olduğu kabul edilir:

$$F_2 = -\alpha y_t, \quad \alpha > 0 \quad (2.2)$$

III) Tabliye dengeleme kuvveti(restoring force) (F_3);

$$F_3 = -EIy_{xxxx} \quad (2.3)$$

Burada E , Young modülü ve I , enine kesitin, kesitin tarafsız eksenini etrafındaki eylemsizlik momentidir.

IV) Dış kuvvet (F_4);

$$F_4 = f(x,t) \quad (2.4)$$

olmak üzere, toplam kuvvet

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \quad (2.5)$$

olup, tabliye birim uzunluğunun kütlesi m olmak üzere, düşey yönde

$$my_{tt} = F \quad (2.6)$$

denge denkleminde (2.1), (2.2),(2.3) ve (2.4) ifadeleri (2.6) da yerine yazılarak, uygun başlangıç ve yukarıda belirtilen tabliye uçlarının basitçe mesnetlenmiş olması varsayımına karşılık gelen sınır şartları yardımıyla Euler-Bernoulli kiriş modeli olarak bilinen

$$my_{tt} + EIy_{xxxx} + \alpha y_t = W(x) + f(x,t) \quad (2.7)$$

$$y(0,t) = y(L_B,t) = 0, y_{xx}(0,t) = y_{xx}(L_B,t) = 0, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} y(x,0) &= y_0(x) \\ y_t(x,0) &= y_1(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

lineer Başlangıç-Sınır Değer problemi elde edilir. Sürtünme ve dış kuvvet olmaması durumunda (2.7) denklemi

$$my_{tt} + EIy_{xxxx} = 0 \quad (2.10)$$

denkleme indirgenir. Bu denklem kiriş hareketi ile oluşan kinetik ve potansiyel enerjilerin toplamı olarak ifade edilen

$$E(y_t, y_{xx}) = \frac{1}{2} \int_0^{L_B} (my_t^2 + EIy_{xx}^2) dx \quad (2.11)$$

enerjisine ait Euler-Lagrange denklemdir.

Burada $y_0(x)$, $t = 0$ anındaki başlangıç statik yer değiştirme ve $y_1(x)$ ise salınımın başlangıç hızıdır. (2.7) denkleminin homojen kısmına karşılık gelen

$$my_{tt} + EIy_{xxxx} + \alpha y_t = 0 \quad (2.12)$$

$$y(0, t) = y(L_B, t) = 0, y_{xx}(0, t) = y_{xx}(L_B, t) = 0. \quad (2.13)$$

sisteminin çözümü değişkenlere ayırma yöntemi yardımıyla elde edilebilir:

$y(x, t) = \varphi(x)z(t)$ alınarak (2.10) denkleminde yerine yazılırsa λ sabit olmak üzere

$$\varphi^{iv}(x) + \frac{\lambda}{EI} \varphi(x) = 0 \quad (2.14)$$

elde edilir. (2.14) e ait karakteristik denklem,

$$r^4 = -\frac{\lambda}{EI} = k^4 \quad (2.15)$$

olup, bu denklemin kökleri,

$$r_1 = k, r_2 = -k, r_3 = ik \text{ ve } r_4 = -ik \quad (2.16)$$

dır. O halde (2.10) denkleminin genel çözümü

$$\varphi(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx} + c_3 \cos(kx) + c_4 \sin(kx) \quad (2.17)$$

olarak elde edilir. İlgili sınır koşulları (2.17) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0, \\ c_1 e^{kL_B} + c_2 e^{-kL_B} + c_3 \cos(kL_B) + c_4 \sin(kL_B) &= 0, \\ c_1 + c_2 - c_3 &= 0, \\ c_1 e^{kL_B} + c_2 e^{-kL_B} - c_3 \cos(kL_B) - c_4 \sin(kL_B) &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

lineer cebirsel sistemi elde edilir. Bu homojen denklem sisteminin çözümünden,

$$c_1, c_2, c_3 = 0, c_4 \neq 0 \text{ ve } k = \frac{n\pi}{L_B} \text{ elde edilir. O halde (2.10) denkleminin öz}$$

fonksiyonları

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L_B}\right), n = 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla (2.10) homojen sistemin çözümü

$$y_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L_B}\right) z_n(t), n = 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

fonksiyonlarının lineer kombinasyonu(süperpozisyonu) olarak ifade edilebilir. Baskın mod, $n=1$ değerine karşılık gelmekte olup, söz konusu mod için elde edilen

$$y(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L_B}\right) z(t) \text{ ifadesi (2.7) denkleminde yerine yazılırsa,}$$

$$mz'''' \sin\left(\frac{\pi x}{L_B}\right) + EI \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^4 z \sin\left(\frac{\pi x}{L_B}\right) + \alpha z_t \sin\left(\frac{\pi x}{L_B}\right) = W(x) + f(x, t) \quad (2.21)$$

elde edilir. $W(x)$ ve $f(x, t)$ için benzer varsayımla

$$W(x) = W \sin\left(\frac{\pi x}{L_B}\right) \quad (2.22)$$

$$f(x, t) = f_0(x) \sin(\omega t) \quad (2.23)$$

$$f_0(x) = B \sin\left(\frac{\pi x}{L_B}\right) \quad (2.24)$$

ifadeleri (2.21) de yazılırsa, merkezi açıklığın tam orta noktasında, $x = \frac{L_B}{2}$, birim genişlikli enine kesit için

$$mz'''' + EI \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^4 z + \alpha z' = W + B \sin(\omega t) \quad (2.25)$$

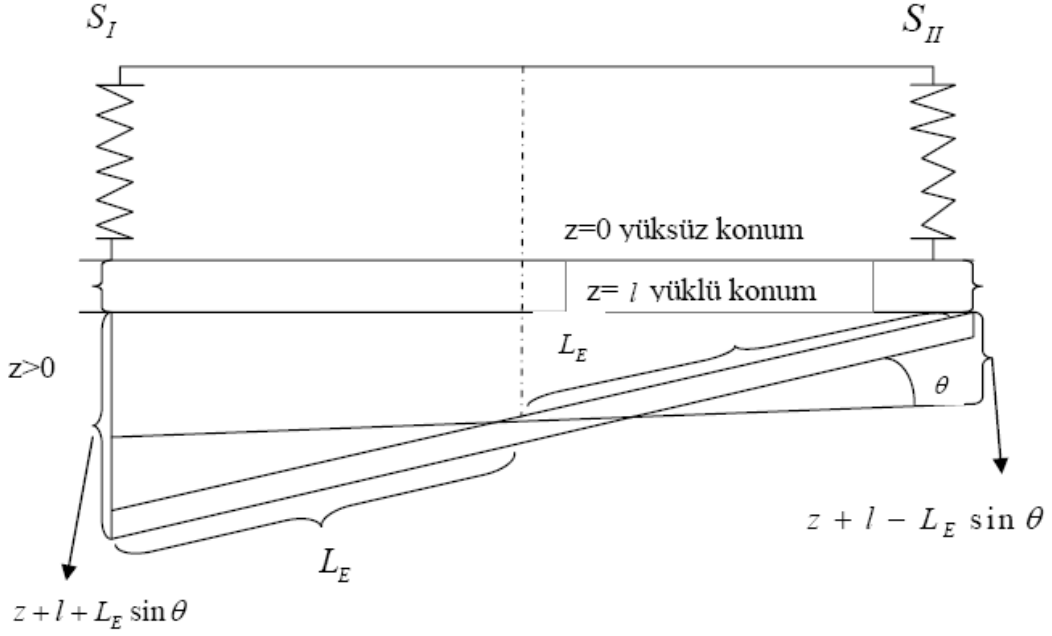
$$z(0) = z_0, z'(0) = z_1$$

ile verilen merkezi açıklık enine kesit modeli elde edilir.

2.1.2. Lazer-McKenna Enine Kesit Modelleri

Lazer-McKenna kesit modeli (2.25) denklemi ile verilen merkezi açıklığın orta noktasında birim genişlikli kesitin her iki ucundan birer askı ile tutturulmuş olduğu varsayımı altında düşey ve burulma hareketlerini, söz konusu hareketlerin birbirlerine olan etkisini de dikkate alarak inceler. Askıların gerilmeye karşı direnç gösterdikleri fakat sıkıştırmaya karşı direnç göstermedikleri kabul edilir. Dolayısıyla askılar tek yönlü(yarı lineer) yaylar olarak dikkate alınmaktadırlar. Bu durumda (2.25) ile verilen Kesit modeli,

yarı lineer askıların geri çekme kuvvetlerinin ilavesiyle genişletilmelidir. $t=0$ başlangıç anında yaylar tabliye ağırlığından dolayı l kadar uzamış durumadır. Bu anda köprü ağırlığını tamamen yaylar almakta olup köprü mesnetlerine yük vermemektedir. (2.9) sınır şartları bu konuma karşılık gelen sınır şartlarıdır. Hareket sırasında bu değerlerini korumaktadırlar. Bu çalışmada, (1.15) denkleminde yer alan $\varepsilon\theta_{,xx}$ etkisi dikkate alınmamıştır.



Şekil 2.1. Askılarla tutturulmuş köprü merkezi açıklığından birim genişlikli bir kesit

2.1.2.1. Düşey Hareket İçin Newton Yasası

Serbest cisim diyagramı Şekil 2.1.'de gösterilen $2L_E$ uzunluğundaki enine kesiti göz önüne alalım: Kesit merkezinin statik yer değiştirmesi l ; yatay ile yapmış olduğu açı θ ve t anında kesit merkezinin yerçekimi yönündeki düşey yer değiştirmesini pozitif $z = z(t)$ ile gösterelim. Şekil 2.1'den enine kesitin sol ucunda yer alan S_I askısının uzunluğu $z+l+L_E \sin \theta$ ve S_{II} askısının uzunluğu: $z+l-L_E \sin \theta$ dır. Sıkça kullanılan $z^+ = \max(z, 0)$ notasyonu ve k yay sabiti ile her bir askının dengeleyici kuvveti,

$$-k(z+l+L_E \sin \theta)^+ : S_I \text{ askısının dengeleyici kuvveti}$$

$-k(z+l-L_E \sin \theta)^+$: S_{II} askısının dengeleyici kuvveti

olarak ifade edilebilir. O halde yukarı yönde enine kesit merkezinde toplam askı dengeleyici kuvveti:

$$-k \left[(z+l+L_E \sin \theta)^+ + (z+l-L_E \sin \theta)^+ \right] \quad (2.26)$$

(2.25) ile verilen kesit modeline ilave edilirse

$$mz'' + \delta_z z' + k \left[(z+l+L_E \sin \theta)^+ + (z+l-L_E \sin \theta)^+ \right] + EI \left(\frac{\pi}{L_B} \right)^4 z = W + B \sin(\omega t)$$

$$z(0) = z_0, z'(0) = z_1 \quad (2.27)$$

düşey hareket denklemini elde edilmiş olur.

2.1.2.2. Dönme Hareketi İçin Newton Yasası

I , kesit merkezine göre, x-ekseni etrafında eylemsizlik momenti $\left(I = \int_{-L_E}^{L_E} \rho u^2 du = \int_{-L_E}^{L_E} \frac{2L_E}{m} u^2 du = \frac{mL_E^2}{3} \right)$; $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, açısal ivme; τ , tork olmak üzere

belirtilen rotasyon hareketi için Newton yasası

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum \tau \quad (2.28)$$

ile verilir. Şekil 2.3 de belirtilen saat tersi yönünü pozitif yön olarak kabul ediyoruz.

$$F_1 = k(z+l-L_E \sin \theta)^+ \quad (2.29)$$

pozitif yönde uygulanan kuvvet olmak üzere bu kuvvetten kaynaklanan döndürme kuvveti

$$\tau_1 = F_1 L_E \cos \theta \quad (2.30)$$

dır.

$$F_2 = -k(z + l + L_E \sin \theta)^+ \quad (2.31)$$

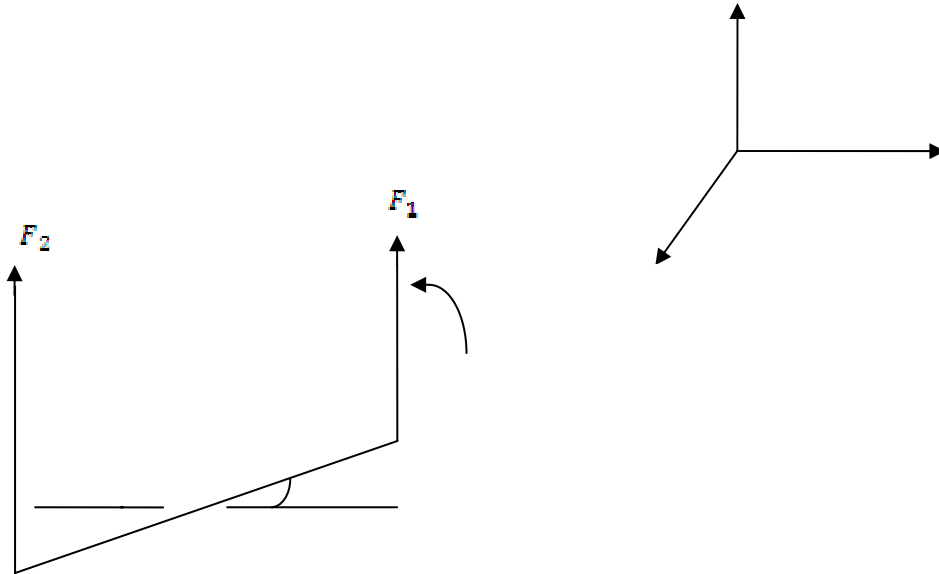
hareket tersi yönünde kesit ucu tarafından sol askıya uygulanan kuvvet olmak üzere, bu kuvvetten kaynaklanan tork,

$$\tau_2 = F_2 L_E \cos \theta \quad (2.32)$$

dır. Ayrıca kesit merkezinin hareketinin tersi yönünde ve düşük hızlar için açısal hız ile orantılı kesit boyunca etki eden vizkoz kuvvet(viscous drag)

$$\tau_3 = -\delta_0 \frac{d\theta}{dt}, \quad \delta_0 > 0 \quad (2.33)$$

dir. x ekseninde dönme(burulma) hareketi de şekil 2.2 de gösterilmektedir.



Şekil 2.2. x ekseninde dönme(burulma) hareketi

Buradan (2.30), (2.32) ve (2.33) ifadeleri (2.28) de yerlerine yazılır iseler

$$\frac{mL_E^2}{3}\theta'' = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \quad (2.34)$$

$$\frac{mL_E^2}{3}\theta'' = k\left[(z+l-L_E \sin \theta)^+ - (z+l+L_E \sin \theta)^+\right]L_E \cos \theta - \delta_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad (2.35)$$

veya

$$\begin{aligned} \theta'' + \frac{6}{mL_E}\delta_\theta\theta' + \frac{3k}{mL_E}\cos\theta\left[(z+l-L_E \sin \theta)^+ - (z+l+L_E \sin \theta)^+\right] &= 0 \\ \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta_1 \end{aligned} \quad (2.36)$$

elde edilir. (2.27),(2.36) sistemi Lazer-McKenna Kesit(LMK) modeli olarak bilinir.

LMK modelinden bazı varsayımlar altında daha basit sistemler elde edilebilir. Örneğin düşük genlikli salınımlar için askıların devamlı gergin olarak kaldığı ve hiç gevşemedikleri kabul edilebilir. Bu durumda tanımları gereği

$$(z+l+L_E \sin \theta)^+ = z+l+L_E \sin \theta \quad (2.37)$$

ve

$$(z+l-L_E \sin \theta)^+ = z+l-L_E \sin \theta \quad (2.38)$$

olup, belirtilen ifadeler LMEK de yerine yazılır ve $W = mg$ için statik yer değiştirmenin

$l = \frac{W}{2k}$ olduğuna dikkat edilerek gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, (2.27) denklemi

$$mz'' + \delta_z z' + 2kz + EI \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^4 z = B \sin(\omega t) \quad (2.39)$$

$$z(0) = z_0, z'(0) = z_1$$

denklemine dönüşür. Benzer olarak burulma salınımı için (2.36) denklemi

$$\begin{aligned} \theta'' + \frac{6}{mL_E} \delta_\theta \theta' + \frac{6k}{m} \cos \theta \sin \theta &= 0 \\ \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta_1 \end{aligned} \quad (2.40)$$

denklemine dönüşür. (2.39)-(2.40) sistemi, sırasıyla düşey ve burulma salınımlarını modelleyen ve birbiriyle ilişkili olmayan(decoupled) LMK1 sistemdir.

LMK1 modelini yakından inceleyelim: Model askılarda gevşeme olmaması durumunda düşey ve burulma salınımlarının birbiri üzerinde etkisi olmadığını veya ihmal edilebilir bir faktör olduğunu ifade etmektedir. Özellikle burulma salınımının düşey salınımına etkiyen önemli bir faktör olduğunu Tacoma Narrows köprüsünden biliyoruz. Köprünün burulma salınımına başladıktan sonra düşey salınım genliğinin gittikçe artarak yıkımına neden olduğunu biliyoruz. Çünkü benzeri düşey salınımların daha önce de gerçekleşmesine rağmen burulma salınımının olmadığı durumlarda köprü üzerinde bir zarar söz konusu olmamıştı. Bu noktadan da hareketle daha gerçekçi bir modelin kabolarda gevşeme olmaması durumunda da düşey ve burulma salınımlarını bağdaşık(coupled) bir sistemle ifade etmesi gerektiğini vurguluyoruz. Bu sorun önerdiğimiz model ile giderilmektedir.

Ayrıca, $2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$ trigonometrik bağıntısı ve yeterince küçük genlikli burulma salınımları, yani θ nın küçük değerleri için, $\sin \theta \cong \theta$ yaklaşımı dikkate alınarak (2.40) denklemi

$$\begin{aligned} \theta'' + \frac{6}{mL_E} \delta_\theta \theta' + \frac{6k}{m} \theta &= 0 \\ \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta_1 \end{aligned} \quad (2.41)$$

denklemine dönüşür.

$$\begin{aligned}
mz'' + \delta_z z' + 2kz + EI \left(\frac{\pi}{L_B} \right)^4 z &= B \sin(\omega t) \\
\theta'' + \frac{6}{mL_E} \delta_\theta \theta' + \frac{6k}{m} \theta &= 0 \\
z(0) = z_0, z'(0) = z_1 \\
\theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta_1
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Düşey ve burulma salınım modellerinin birlikte sunulduğu (2.42) sistemi düşey ve burulma salınımlarının birbirini etkilemediği lineer Lazer-McKenna modelidir(LMK2). Bu modelde düşey ve burulma salınım denklemleri sürtülmeli ortamda lineer harmonik salınım denklemdir.

2.2. Tezin Amacı ve Kapsamı

Bu bölümde yukarıda basitçe izah edilen ve bilinen Euler-Bernoulli kiriş modelinden elde edilen köprü enine kesit modeli, enine kesitin her bir ucunun germeye karşı lineer Hooke kuralı çerçevesinde yay tepkisi gösteren, fakat sıkıştırma durumunda tepki vermeyerek yarı lineer olarak adlandırılan askılarla bağlandığı varsayımı ile geliştirilen LMK modeli çerçevesinde incelenmektedir. Söz konusu model ile ilgili gözlemlerimiz aşağıda özetlenmektedir:

- LMK modeli rüzgâr etkisi ile köprünün üst ve alt kısımlarında oluştuğu varsayılan von Karman girdaplarını, alterne yönlü periyodik dış kuvvete neden olduğunu kabul edilmekte ve bu türden kuvvetler $f(t) = \alpha \sin(\beta t)$ tipindeki bir fonksiyonun genlik ve frekansını değiştirmek suretiyle modellenmektedir.
- Model bağlantı askılarını germeye karşı Hooke kuralı gereği lineer direnç gösteren fakat sıkıştırmaya karşı direnç göstermeyen yaylar olarak kabul etmektedir.
- Model düşey salınımlarda yüksüz konumdan itibaren oluşan yer değiştirmeyi incelemektedir. Bu durumda anlamlı sonuçlar için başlangıç şartları statik yer değiştirmeyi de dikkate alacak şekilde verilmelidir.

- LMK askılarda gevşeme olmaması durumunda LMK1 modeline indirgenmekte ve bu model ise düşey ve burulma hareketlerini birbirinden bağımsız olarak değerlendirmektedir. Bu durumda modelin uygulanabilirliği tartışılmalıdır.
- Askılarda gevşeme olmaması durumuna karşılık gelen başlangıç değerleri ve parametre değerleri için sayısal simülasyonlarda LMK kullanılsa bile, arka planda LMK1 modeli kullanılacaktır. Bu durumda yine sonuçların fiziksel anlamı dikkatle değerlendirilmelidir.
- LMK modeli rüzgâr nedeniyle oluşan kaldırma ve moment kuvvetlerini dikkate almamakta olup, sadece alterne girdap oluşumun neden olduğu dış kuvveti dikkate almaktadır.
- Tacoma Narrows köprüsünün çöküşüne, periyodik von Karman girdapların oluşturmuş olabileceği alterne düşey kuvvetlerin neden olup olamayacağı konu uzmanları tarafından uzun süre tartışılmış ve üzerinde uzlaşılan bir sonuca varılamamıştır. Dolayısıyla sadece belirtilen kuvvetlerin etkisinde olayı izah etmeye çalışmanın yetersiz olacağı kanısındayız. Öte yandan düşük rüzgâr hızlarına karşılık gelen Reynolds değerlerinde bahsedilen girdaplar oluşmadığı halde, düşük hızlarda Tacoma Narrows köprüsünün gözlenebilir genlik ve frekansta titreşimler yaptığı bilinmektedir.

Bütün bu gözlemler kapsamında bizim yaklaşımımız ise, bağlantı askılarının Lazer-McKenna uygulamasına paralel olarak tek yönlü lineer yay olarak kabul edilmeleri doğrultusunda olmakla beraber

- Girdapların ve dolayısıyla alterne girdap oluşumun neden olduğu dış kuvvetin sadece büyük Reynolds değerlerinde dikkate alınması
- Rüzgâr hızı, hava yoğunluğu, kesit alanı ile birlikte düşey ve burulma salınımı genliği ve hızına bağlı olan aerodinamik kaldırma ve moment kuvvetlerinin düşey ve burulma salınımlarında dikkate alınması yönündedir

Bu bağlamda mutlak değerce küçük rüzgâr geliş açıları için kaldırma ve moment kuvvetlerinin salınım hareketi üzerindeki etkisini araştıracağız.

3. BULGULAR VE İRDELEME

3.1. Boyutlu Geliştirilmiş Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli (G_LMK)

Yatay düzleme paralel rüzgâr etkisi altında, yatayla θ açısı yapan ve uzunluğu B olan tabliye kesitine uygulanan kaldırma kuvveti(Scanlan, 1993; Scanlan vd., 1971)

$$F_L = \frac{\rho U^2 B C_L(\theta)}{2}$$

ve burulma momenti ise

$$F_M = \frac{\rho U^2 B^2 C_M(\theta)}{2}$$

olarak verilir. Burada ρ akışkan(hava) yoğunluğudur. Kesit kütlesi m_k olmak üzere söz konusu kaldırma kuvvetini (2.27) düşey salınım modelinde yazarsak

$$\begin{aligned} m_k z'' + EI \left(\frac{\pi}{L_B} \right)^4 (z+l) + \delta_z z' &= m_k g \\ -k \left[(z+l - L_E \sin \theta)^+ + (z+l + L_E \sin \theta)^+ \right] &+ \frac{\rho U^2 B C_L(\theta)}{2} \\ z(0) = z_0, \quad z'(0) = z_1 & \end{aligned} \quad (3.1)$$

elde ederiz. Böylece Lazer-McKenna modelindeki $B \sin(\omega t)$ terimini kaldırma kuvveti ile yer değiştirdik. Öte yandan burulma hareketinin ise (2.36) ile belirtildiğinin aksine bir dış kuvvet etkisiyle başladığını kabul ediyoruz.

Kabulümüz Tacoma köprüsünün burulma hareketine köprü askılarından birisini tabliyeye bağlayan bağlantının kopmasıyla başladığı gözlemine dayanmaktadır. Esasen bu kuvvet belirli bir t anında başlayan ve belirli bir süre devam eden bir itme kuvvetidir,

ancak bu kuvveti küçük genlikli periyodik bir kuvvet olarak kabul ediyoruz. Burulma salınıminin rüzgâr hızının neden olduğu moment kuvvetinde etkisinde kalarak

$$\frac{1}{3}m_k L_E^2 \theta'' + \delta_\theta \theta' - k L_E \cos \theta \left[(z+l-L_E \sin \theta)^+ - (z+l+L_E \sin \theta)^+ \right] = \frac{\rho U^2 B^2 C_M(\theta)}{2} \quad (3.2)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta_1$$

ile ifade edilebileceğini kabul ediyoruz. Elde edilen bu modeli, boyutlu Geliştirilmiş Lazer-McKenna modeli veya kısaca G_LMK modeli olarak adlandırıyoruz.

3.1.1. (G_LMK) Modelinin Parametreleri ve Büyüklükleri

G_LMK modelinde yer alan parametrelerin tipik değerleri Tablo 3.1 de verilmektedir. [.] ile bir fiziksel niteliğin boyutunu gösteriyoruz. Buna göre [uzunluk] = L , [kütle] = M ve [zaman] = T olmak üzere, köşeli parantez içerisindeki ifadenin boyutsuz olması durumunda [.] = 1 gösterimini kullanıyoruz.

Tablo 3.1. G_LMK modelinde yer alan parametrelerin MKS sistemindeki büyüklükleri, (Defreitas vd.,2004)

Parametre	Boyutu	Farklı köprüler ve $U = 15 \text{ m/s}$ için elde edilen ortalama değerler	Büyüklik Mertebesi
k	$[k] = MT^{-2}L^{-1}$	$k = 1000$	$O(10^3)$
E	$[E] = MT^{-2}L^{-1}$	$E = 2 \times 10^{11}$	$O(10^{11})$
I	$[I] = L^4$	$I = 6.6$	$O(10^0)$
L_B	$[L_B] = L$	$L_B = 10^3$	$O(10^3)$
B	$[B] = L^2$	$B = 25$	$O(10^1)$
m_k	$[m_k] = ML^{-1}$	$m_k = 2924$	$O(10^3)$
ρ	$[\rho] = ML^{-3}$	$\rho = 1.245$	$O(10^0)$
δ_z	$[\delta_z] = MT^{-1}L^{-1}$	$\delta_z = 226$	$O(10^2)$
δ_θ	$[\delta_\theta] = MT^{-1}L^{-1}$	$\delta_\theta = 226$	$O(10^2)$
U	$[U] = LT^{-1}$	$U = 15$	$O(10^1)$
L_E	$[L_E] = L$	$L_E = 10$	$O(10^1)$
l	$[l] = L$	$l = 0.5$	$O(10^0)$
$\frac{1}{3}m_k L_E^2$	$[m_k L_E^2] = ML$	$\frac{1}{3}m_k L_E^2 = 97467$	$O(10^4)$
kL_E	$[kL_E] = MT^{-2}$	$[kL_E] = 10000$	$O(10^4)$
$\rho U^2 B^2$	$[\rho U^2 B^2] = ML^3 T^{-2}$	$\rho U^2 B^2 = 112050$	$O(10^5)$
$EI \left(\frac{\pi}{L_B} \right)^4$	$\left[EI \left(\frac{\pi}{L_B} \right)^4 \right] = MT^{-2}L^{-1}$	$EI \left(\frac{\pi}{L_B} \right)^4 = 112.05$	$O(10^2)$

3.1.2. Boyutlu Geliştirilmiş Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli(G_LMK1)

Askılarda gevşeme olmadığını kabul edelim. Bu durumda $(z + l \pm L_E \sin \theta)^+ > 0$ olur veya $(z + l \pm L_E \sin \theta)^+ = z + l \pm L_E \sin \theta$ elde edilir. Düşey ve burulma salınım denklemi,

$$m_k z'' + \left[EI \left(\frac{\pi}{L_B} \right)^4 + 2k \right] (z + l) + \delta_z z' = m_k g + \frac{\rho U^2 B C_L(\theta)}{2} \quad (3.3)$$

$$z(0) = z_0, \quad z'(0) = z_1$$

ve

$$\frac{1}{3} m_k L_E^2 \theta'' + 2L_E \delta_\theta \theta' + k L_E^2 \sin(2\theta) = \frac{\rho U^2 B^2 C_M(\theta)}{2} \quad (3.4)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \theta_1$$

elde edilir. Elde edilen bu model Lazer-McKenna modelinin aksine bir coupled(bağdaşık) sistemdir. Bu modele boyutlu Geliştirilmiş Lazer-McKenna modeli veya kısaca G_LMK1 modeli olarak adlandırıyoruz.

3.1.3. Boyutlu Geliştirilmiş Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli(G_LMK2)

Bu bölümde askılarda gevşeme olmadığını ve burulma salınım genliğinin $\sin \theta \approx \theta$ yaklaşımını makul kılacak düzeyde olduğunu kabul edelim. Bu durumda burulma ve düşey salınım denklemleri,

$$m_k z'' + \left[EI \left(\frac{\pi}{L_B} \right)^4 + 2k \right] (z + l) + \delta_z z' = m_k g + \frac{\rho U^2 B C_L(\theta)}{2} \quad (3.5)$$

$$z(0) = z_0, \quad z'(0) = z_1$$

ve

$$\frac{1}{3} m_k L_E^2 \theta'' + 2L_E \delta_\theta \theta' + 2k L_E^2 \theta = \frac{\rho U^2 B^2 C_M(\theta)}{2} \quad (3.6)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \theta_1$$

elde edilir. Elde edilen bu model, küçük genlikli burulma salınımları için boyutlu Geliştirilmiş Lazer-McKenna modeli veya kısaca G_LMK2 modeli olarak adlandırıyoruz.

3.1.4. Boyutsuz Zaman Değişkeni ile Geliştirilmiş Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli

(Freitas vd., 2003) yi takip ederek, zaman değişkenini

$t' = \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_k}} t$ ile tanımlanan boyutsuz zaman değişkeni ile yer değiştirelim Bu

durumda,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_k}} \dot{z} \quad (3.7)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\dot{z}) = \frac{d}{dt'}(\dot{z}) \frac{dt'}{dt} = \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^4 \frac{EI}{m_k} \ddot{z} \quad (3.8)$$

türevlerini elde ederiz. (3.7) ve (3.8) ifadeleri (3.1) de yerine yazılır ise, $z = z(t')$ için

$$\begin{aligned} m_k \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^4 \frac{EI}{m_k} \ddot{z} + \delta_z \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_k}} \dot{z} + k \left[(z+l-L_E \sin \theta)^+ + (z+l+L_E \sin \theta)^+ \right] \\ + EI \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^4 (z+l) = w + \frac{\rho U^2 BC_L(\theta)}{2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

denklemini elde edilir. (3.9) denkleminin her iki tarafını $\left(\frac{\pi}{L_B}\right)^4 EI$ ile bölerek,

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^2 \frac{\delta_z}{\sqrt{m_k EI}} \dot{z} + \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^4 \frac{k}{EI} \left[(z+l-L_E \sin \theta)^+ + (z+l+L_E \sin \theta)^+ \right] \\ + (z+l) = \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^4 \frac{m_k g}{EI} + \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^4 \frac{\rho U^2 BC_L(\theta)}{2EI} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$z(0) = z_0, \quad z'(0) = z_1 \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_k}}$$

elde ederiz. Aşağıda tanımlanan boyutsuz parametreleri tanımlayalım:

$$\begin{aligned}
k_1 &:= \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^4 \frac{k}{EI}, \quad \delta_{z_1} := \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^2 \frac{\delta_z}{2\sqrt{m_k EI}}, \quad A := \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^4 \frac{m_k g}{EI}, \\
l &:= \frac{A}{2k_1 + 1}, \quad D := \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^4 \frac{\rho U^2 B}{2EI}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Bu parametreler yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\ddot{z} + 2\delta_{z_1} \dot{z} + k_1 \left[(z+l-L_E \sin \theta)^+ + (z+l+L_E \sin \theta)^+ \right] \\
+ (z+l) = A + DC_L(\theta) \\
z(0) = z_0, \quad z'(0) = z_1 \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_k}}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

düşey salınım denklemini elde ederiz. $\hat{z}_1 = z_1 \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_k}}$ olarak tanımlamak suretiyle,

$$\begin{aligned}
\ddot{z} + 2\delta_{z_1} \dot{z} + k_1 \left[(z+l-L_E \sin \theta)^+ + (z+l+L_E \sin \theta)^+ \right] \\
+ (z+l) = A + DC_L(\theta) \\
z(0) = z_0, \quad z'(0) = \hat{z}_1
\end{aligned} \tag{3.13}$$

denklemini elde ederiz. Benzer şekilde (3.2) burulma salınım denklemini için

$t' = \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_k}} t$ zaman parametreleri yardımıyla,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_k}} \dot{\theta} \tag{3.14}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\dot{\theta}) = \frac{d}{dt'}(\dot{\theta}) \frac{dt'}{dt} = \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^4 \frac{EI}{m_k} \ddot{\theta} \tag{3.15}$$

elde ederiz. (3.14) ve (3.15) ifadelerini (3.13) de yerine yazarak, $\theta = \theta(t')$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}m_k L_E^2 \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^4 \frac{EI}{m_k} \ddot{\theta} &= -kL_E \cos \theta \left[(z+l-L_E \sin \theta)^+ - (z+l+L_E \sin \theta)^+ \right] \\
-2L_E \delta_\theta \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_k}} \dot{\theta} &+ \frac{\rho U^2 B^2 C_M(\theta)}{2} \\
\theta(0) = \theta_0, \theta'(0) &= \theta_1 \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_k}} = \hat{\theta}_1
\end{aligned} \tag{3.16}$$

elde ederiz. (3.16) denkleminin her iki tarafını $\left(\frac{\pi}{L_B}\right)^4 \frac{EI}{3L_E^2}$ ile bölerek,

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} - \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^4 \frac{3k}{EIL_E} \cos \theta \left[(z+l-L_E \sin \theta)^+ - (z+l+L_E \sin \theta)^+ \right] \\
+ \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^2 \frac{6\delta_\theta}{L_E \sqrt{EI} m_k} \dot{\theta} &= \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^4 \frac{6\rho U^2 C_M(\theta)}{EI} \\
\theta(0) = \theta_0, \theta'(0) &= \hat{\theta}_1
\end{aligned} \tag{3.17}$$

elde ederiz. Aşağıdaki boyutsuz parametreleri tanımlayalım

$$\delta_{\theta_1} := \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^2 \frac{3\delta_\theta}{L_E \sqrt{EI} m_k}, H := \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^4 \frac{6\rho U^2}{EI} \tag{3.18}$$

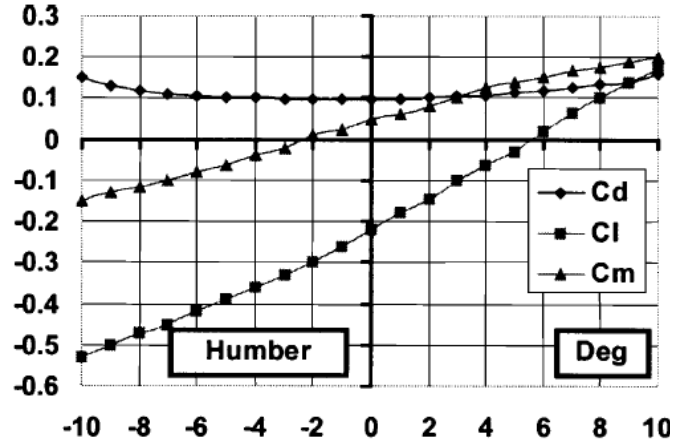
bu parametreleri (3.17) denkleminde yerine yazarsak ve t' yerine notasyonda kolaylık açısından t yazarsak

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} + 2\delta_{\theta_1} \dot{\theta} - \frac{3k_1}{L_e} \cos \theta \left[(z+l-L_E \sin \theta)^+ - (z+l+L_E \sin \theta)^+ \right] &= HC_M(\theta) \\
\theta(0) = \theta_0, \theta'(0) &= \hat{\theta}_1
\end{aligned} \tag{3.19}$$

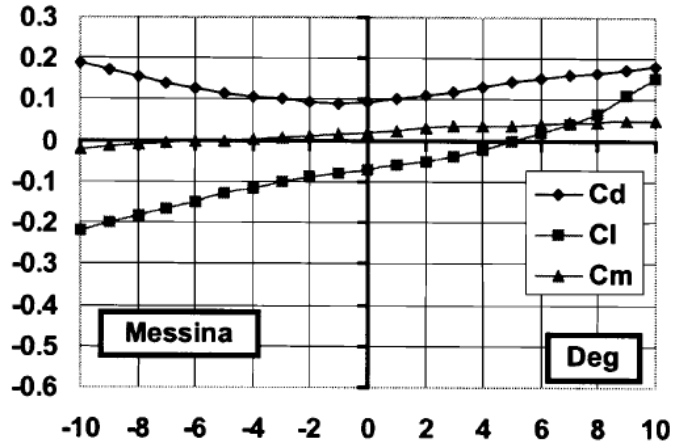
bulunma salınım denklemini elde ederiz.

3.1.5. Linear Kaldırma ve Moment Terimli Geliştirilmiş Lazer-McKenna Modeli

Deneysel çalışmalardan bazı köprüler için(örneğin Humber ve Messina) kaldırma ve moment kuvvetlerinin rüzgâr açısına göre değişimi Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 de verilmektedir.



Şekil 3.1. Humber köprüsünün statik katsayıları, Diana vd (2003)



Şekil 3.2. Messina köprüsünün statik katsayıları, Diana vd (2003)

Şekil 3.1 ve 3.2 den görüldüğü üzere küçük genlikli burulma salınımları için, kaldırma ve moment kuvvetleri rüzgâr geliş açısının lineer bir fonksiyonu olarak ifade edilmektedir. Buna göre çalışmamızda

$$C_L(\theta) = C_{L0} + C_{L1}\theta \quad \text{ve} \quad C_M(\theta) = C_{M0} + C_{M1}\theta$$

kabul ederek, (3.13) ve (3.19) denklemlerinde yerine yazmak suretiyle

$$\begin{aligned} \ddot{z} + 2\delta_{z_1} \dot{z} + k_1 \left[(z+l-L_E \sin \theta)^+ + (z+l+L_E \sin \theta)^+ \right] \\ + (z+l) = A + D(C_{L0} + C_{L1}\theta) \\ z(0) = z_0, \quad z'(0) = \hat{z}_1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

ve

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + 2\delta_{\theta_1} \dot{\theta} - \frac{3k_1}{L_E} \cos \theta \left[(z+l-L_E \sin \theta)^+ - (z+l+L_E \sin \theta)^+ \right] = H(C_{M0} + C_{M1}\theta) \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \hat{\theta}_1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde ederiz. Ayrıca notasyonel uygunluk için

$$DC_{L0} = \hat{C}_{L0}, \quad DC_{L1} = \hat{C}_{L1}, \quad HC_{M0} = \hat{C}_{M0} \quad \text{ve} \quad HC_{M1} = \hat{C}_{M1}$$

olarak tanımlamak suretiyle

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} + 2\delta_{z_1} \dot{z} + k_1 \left[(z+l-L_E \sin \theta)^+ + (z+l+L_E \sin \theta)^+ \right] \\ + (z+l) = A + \hat{C}_{L0} + \hat{C}_{L1}\theta \\ \ddot{\theta} + 2\delta_{\theta_1} \dot{\theta} - \frac{3k_1}{L_E} \cos \theta \left[(z+l-L_E \sin \theta)^+ - (z+l+L_E \sin \theta)^+ \right] = \hat{C}_{M0} + \hat{C}_{M1}\theta \\ z(0) = z_0, \quad z'(0) = \hat{z}_1 \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \hat{\theta}_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{G_LMK})$$

geliştirilmiş Lazer-McKenna modelini(G_LMK) elde ederiz.

3.2. G_LMK Modelinin Parametreleri ve Büyüklükleri

G_LMK modelinde yer alan parametrelerin tipik değerleri Tablo 3.2 de verilmektedir.

Tablo 3.2. G_LMK modelinde yer alan parametrelerin MKS sistemindeki büyüklükleri, (Defreitas vd.,2004).

Parametreler	Boyut	Farklı köprüler için $U = 15 \text{ m/s}$ olduğunda elde edilen ortalama değerler, (Defreitas vd., 2004).	Büyüklik mertebesi
$k_1 = \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^4 \frac{k}{EI}$,	$[k_1] = \frac{L^4 MT^{-2} L^{-1}}{ML^3 T^{-2}} = 1$	$k_1 = \left(\frac{10^3}{\pi}\right)^4 \frac{10^3}{2 \times 10^{11} \times 6.6} = 7.7$	$O(10^0)$
$\delta_{z_1} = \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^2 \frac{\delta_z}{2\sqrt{m_k EI}}$,	$[\delta_{z_1}] = \frac{L^2 MT^{-1} L^{-1}}{\sqrt{\frac{M}{L} ML^3 T^{-2}}} = 1$	$\delta_{z_1} = \left(\frac{10^3}{\pi}\right)^2 \frac{226}{2\sqrt{10^{11} \times 6.6 \times 2924}} = 0.19$	$O(10^{-1})$
$\delta_{\theta_1} = \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^2 \frac{3\delta_\theta}{\sqrt{m_k EIL_E}}$	$[\delta_{\theta_1}] = \frac{L^2 MT^{-1} L^{-1}}{\sqrt{\frac{M}{L} ML^3 T^{-2}}} = 1$	$\delta_{\theta_1} = \left(\frac{10^3}{\pi}\right)^2 \frac{3 \times 226}{10\sqrt{10^{11} \times 6.6 \times 2924}} = 0.11$	$O(10^{-1})$
$H = \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^4 \frac{6\rho U^2}{EI}$	$[H] = \frac{L^4 ML^{-3} T^{-2} L^2}{ML^3 T^{-2}} = 1$	$H = \left(\frac{10^3}{\pi}\right)^4 \frac{6 \times 1.245 \times 15^2}{2 \times 10^{11} \times 6.6} = 13$	$O(10^1)$
$D = \left(\frac{L_B}{\pi}\right)^4 \frac{\rho U^2 B}{2EI}$	$[D] = \frac{L^4 ML^{-3} T^{-2} L^2}{ML^3 T^{-2}} = 1$	$D = \left(\frac{10^3}{\pi}\right)^4 \frac{20 \times 1.245 \times 15^2}{4 \times 10^{11} \times 6.6} = 21$	$O(10^1)$
$\hat{C}_{L0} = DC_{L0}$	$[\hat{C}_{L0}] = 1$	$\hat{C}_{L0} = DC_{L0} = 21 \times (-0.12) = -2.5$	$O(10^0)$
$\hat{C}_{L1} = DC_{L1}$	$[\hat{C}_{L1}] = 1$	$\hat{C}_{L1} = DC_{L1} = 21 \times 0.43 = 9$	$O(10^0)$
$\hat{C}_{M0} = HC_{M0}$	$[\hat{C}_{M0}] = 1$	$\hat{C}_{M0} = HC_{M0} = 13 \times 0.023 = 0.29$	$O(10^{-1})$
$\hat{C}_{M1} = HC_{M1}$	$[\hat{C}_{M1}] = 1$	$\hat{C}_{M1} = HC_{M1} = 13 \times 0.57 = 7.4$	$O(10^0)$
$\hat{z}_1 = z_1 \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_k}}$	$[\hat{z}_1] = \frac{T}{L^2} \sqrt{\frac{ML^3 T^{-2}}{M}} = 1$	$\hat{z}_1 = z_1 \left(\frac{\pi}{10^3}\right)^2 \sqrt{\frac{2 \times 10^{11} \times 6.6}{2500}} = 0.2 \times z_1$ $z_1 = O(10^0)$	$O(10^{-1})$
$\hat{\theta}_1 = \theta_1 \left(\frac{\pi}{L_B}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_k}}$	$[\hat{\theta}_1] = \frac{T}{L^2} \sqrt{\frac{ML^3 T^{-2}}{M}} = 1$	$\hat{\theta}_1 = \theta_1 \left(\frac{\pi}{10^3}\right)^2 \sqrt{\frac{2 \times 10^{11} \times 6.6}{2500}} = 0.2 \times \theta_1$ $\theta_1 = O(10^0)$	$O(10^{-1})$

3.3. Geliştirilmiş Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli(G_LMK1)

G_LMK sisteminde askılarda gevşeme olmadığını kabul edelim. Bu durumda $(z + l \pm L_E \sin \theta)^+ > 0$ veya $(z + l \pm L_E \sin \theta)^+ = z + l \pm L_E \sin \theta$ elde edilir. Bunun sonucu olarak, düşey ve burulma salınım denklemi,

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} + 2\delta_{z_1} \dot{z} + (2k_1 + 1)z &= \hat{C}_{L0} + \hat{C}_{L1}\theta \\ \ddot{\theta} + 2\delta_{\theta_1} \dot{\theta} + 3k_1 \sin 2\theta &= \hat{C}_{M0} + \hat{C}_{M1}\theta \\ z(0) = z_0, \quad z'(0) &= \hat{z}_1 \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) &= \hat{\theta}_1 \end{aligned} \right\} \text{(G_LMK1)}$$

elde edilir. Elde edilen bu model, LMK1 modelinin aksine bir bağıdaşık(coupled) sistemdir. Bu modeli, askılarda gevşeme olmaması durumunda geçerli geliştirilmiş Lazer-McKenna modeli veya kısaca G_LMK1 modeli olarak adlandırıyoruz. Bu modele göre askılarda gevşeme olmaması durumunda dahi düşey ve burulma salınımlarının birbirleri üzerine etkileri mevcuttur.

3.4. Geliştirilmiş Lazer-McKenna Kesit Modeli(G_LMK2)

Bu bölümde askılarda gevşeme olmadığını ve burulma salınım genliğinin $\sin \theta \approx \theta$ yaklaşımını makul kılacak düzeyde olduğunu kabul edelim. Bu durumda burulma ve düşey salınım denklemleri, G_LMK1 modelinden $\sin 2\theta \approx 2\theta$ yaklaşımı ile

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + 2\delta_{\theta_1} \dot{\theta} + 6k_1\theta &= \hat{C}_{M0} + \hat{C}_{M1}\theta \\ \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) &= \hat{\theta}_1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

ve

$$\begin{aligned} \ddot{z} + 2\delta_{z_1} \dot{z} + (2k_1 + 1)z &= \hat{C}_{L0} + \hat{C}_{L1}\theta \\ z(0) = z_0, \quad z'(0) &= \hat{z}_1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir. Elde edilen bu modeli, küçük genlikli salınımlar için Geliştirilmiş Lazer-McKenna modeli veya kısaca G_LMK2 modeli olarak adlandırıyoruz. (3.22) ve (3.23) denklemlerinde $w_\theta^2(U) = 6k_1 - \hat{C}_{M1}(U)$ ve $w_z^2 = 2k_1 + 1$ olarak seçilir ise

$$\left. \begin{aligned} \theta + 2\delta_{\theta_1} \dot{\theta} + w_{\theta}^2 \theta &= \hat{C}_{M0} \\ \ddot{z} + 2\delta_{z_1} \dot{z} + w_z^2 z &= \hat{C}_{L0} + \hat{C}_{L1} \theta \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) &= \hat{\theta}_1 \\ z(0) = z_0, \quad z'(0) &= \hat{z}_1 \end{aligned} \right\} (\text{G_LMK2})$$

olarak yazılır.

3.5. G_LMK2 Modelinin Analizi

Öncelikle viskoz sönümün ihmal edildiği durumu gözönüne alalım.

3.5.1. Sönümsüz Salınım

(G_LMK2) modelinde $\delta_{\theta_1} = \delta_{z_1} = 0$ olsunlar. Bu durumda burulma ve düşey salınım denklemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + w_{\theta}^2 \theta &= \hat{C}_{M0} \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) &= \hat{\theta}_1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

ve

$$\begin{aligned} \ddot{z} + w_z^2 z &= \hat{C}_{L0} + \hat{C}_{L1} \theta \\ z(0) = z_0, \quad z'(0) &= \hat{z}_1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

olarak ifade edilir. Burulma salınıminin sönümsüz doğal frekansı U rüzgâr hızına bağlıdır: $w_{\theta} = w_{\theta}(U)$. Düşey salınım denkleminde sönümsüz salınıminin doğal frekansı $w_2 = \sqrt{w_z^2} = \sqrt{2k_1 + 1}$ dir. (3.24) denklemin analitik çözümlerini bulmaya çalışalım, öncelikle burulma salınım (3.24) denkleminin homojen kısmının çözümünü aşağıdaki gibi elde etmeye çalışalım, homojen denklem

$$\ddot{\theta} + w_{\theta}^2 \theta = 0 \quad (3.26)$$

olarak ifade edilebilir. (3.26) denkleminin çözümü,

$$\theta_h = c_1 \cos w_{\theta} t + c_2 \sin w_{\theta} t \quad (3.27)$$

olarak elde edilir. Burada w_{θ} doğal frekanstır. Özel çözüm

$$\ddot{\theta} + w_{\theta}^2 \theta = \hat{C}_{M0} \Rightarrow \theta_{1\theta} = \frac{\hat{C}_{M0}}{w_{\theta}^2} \quad (3.28)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla (3.24) denkleminin çözümü

$$\theta(t) = \theta_o(t) + \theta_h(t) = [c_1 \cos w_{\theta} t + c_2 \sin w_{\theta} t] + \frac{\hat{C}_{M0}}{w_{\theta}^2} \quad (3.29)$$

elde edilir. $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = \hat{\theta}_1$ başlangıç değerleri (3.29) ifadesinde yerine yazılır ise,

$$c_1 = \theta_0 - \frac{\hat{C}_{M0}}{w_{\theta}^2}, c_2 = \frac{1}{w_{\theta}} \hat{\theta}_1$$

olmak üzere, $C_{\theta} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\cos \phi = \frac{c_1}{C_{\theta}}$, $\sin \phi = \frac{c_2}{C_{\theta}}$ ifadelerinden burulma salınım

denkleminin çözümü

$$\theta(t) = C_{\theta}(U) \cos(w_{\theta} t - \phi) + \frac{\hat{C}_{M0}}{w_{\theta}^2} \quad (3.30)$$

elde edilir. (3.30) ifadesi (3.25) de yerine yazıldığında

$$\ddot{z} + w_z^2 z = \hat{C}_{L0} + \hat{C}_{L1} \left[C_\theta(U) \cos(w_\theta t - \phi) + \frac{\hat{C}_{M0}}{w_\theta^2} \right] \quad (3.31)$$

$$z(0) = z_0, \quad z'(0) = \hat{z}_1$$

denklemini elde edilir. (3.31) denkleminin homojen kısmın çözümünü aşağıdaki gibi elde etmeye çalışalım, homojen denklem

$$\ddot{z} + w_z^2 z = 0 \Rightarrow z_h = [c_{10} \cos w_z t + c_{20} \sin w_z t] \quad (3.32)$$

ifade edilebilir.

$$\ddot{z} + w_z^2 z = \hat{C}_{L0} + \hat{C}_{L1} \frac{\hat{C}_{M0}}{w_\theta^2} \quad (3.33)$$

(3.33) denkleminin karşılık gelen özel çözüm

$$z_{1\theta} = \frac{1}{w_z^2} \left[\hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{M0} \hat{C}_{L1}}{w_\theta^2} \right] \quad (3.34)$$

bulunur. $\ddot{z} + w_z^2 z = \hat{C}_{L1} [C_\theta(U) \cos(w_\theta t - \phi)]$ denkleminin karşılık gelen özel çözüm ise

$$z_{2\theta}(t) = A_2 \cos(w_\theta t - \phi) \quad (3.35)$$

bulunur. Burada $A_2 = \frac{C_\theta \hat{C}_{L1}}{[w_z^2 - w_\theta^2]}$ dir. Özel çözüm (3.34) ve (3.35) denkleminin,

$$z_\theta(t) = z_{1\theta}(t) + z_{2\theta}(t) = \frac{1}{w_z^2} \left[\hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{M0} \hat{C}_{L1}}{w_\theta^2} \right] + A_2 \cos(w_\theta t - \phi) \quad (3.36)$$

elde edilir. Burada (3.32) ve (3.36) ifadelerinden genel çözüm,

$$z(t) = z_h(t) + z_o(t) = [c_{10} \cos w_z t + c_{20} \sin w_z t] + \frac{1}{w_z^2} \left[\hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{M0} \hat{C}_{L1}}{w_\theta^2} \right] + A_2 \cos(w_\theta t - \phi) \quad (3.37)$$

bulunur. $z(0) = z_0$, $z'(0) = \hat{z}_1$ başlangıç değerleri (3.37) ifadesinde yerine yazılır ise,

$$c_{10} = z_0 - \frac{1}{w_z^2} \left[\hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{M0} \hat{C}_{L1}}{w_\theta^2} \right] - A_2 \cos(\phi),$$

$$c_{20} = \frac{1}{w_z} \left[\hat{z}_1 + \delta_{z_1} c_{10} - w_1 A_2 \sin(\phi) \right] \quad (3.38)$$

olmak üzere, $C_z(U) = \sqrt{c_{10}^2 + c_{20}^2}$, $\cos \phi_1 = \frac{c_{10}}{C_z(U)}$, $\sin \phi_1 = \frac{c_{20}}{C_z(U)}$ ifadelerinden çözüm

$$z(t) = C_z(U) \cos(w_z t - \phi_1) + \frac{1}{w_z^2} \left[\hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{M0} \hat{C}_{L1}}{w_\theta^2} \right] + A_2 \cos(w_\theta t - \phi) \quad (3.39)$$

elde edilir.

I) Tipik parametrelerle sönümsüz salınımın analitik çözüm ve analizi

Bu kısımda boyutlu GLMK2 modelinin sönümsüz durumunu analiz edilmektedir. Bu kapsamda analitik çözümleri verdikten sonra, faz değişimlerini, rüzgâr hızına bağlı olarak düşey ve burulma salınımının genliğinin ve periyodunun nasıl değiştiği incelenmektedir. Öncelikle burulma salınımının analitik çözümünü elde edelim.

Tablo 3.1. deki parametre değerleri, lineer kaldırma ve moment terimleri ve ortalama rüzgâr hızı $U = 5$ için (3.6) boyutlu sönümsüz denklemde yerine yazılır ise,

$$\ddot{\theta} + 2.016\theta = 0.0015$$

$$\theta(0) = 0.3, \quad \theta'(0) = 0.1 \quad (3.40)$$

denklemini elde edilir. Sönümsüz salınımın doğal frekansı $w_0 = 1.4199 \text{ rad/s}$ dir. (3.40)
denkleminin çözümü

$$\theta(t) = [0.2993 \cos(1.4199t) + 0.0704 \sin(1.4199t)] + 7.2857 \times 10^{-4} \quad (3.41)$$

bulunur. Sonuç olarak dairesel frekans $w_\theta = 1.4199 \text{ rad/s}$ olur. Bilindiği gibi periyot, bir tam titreşimi(salınımı) tamamlamak için geçen süre ve frekans ise bir saniyedeki salınımların(titreşimlerin) sayısıdır. Hareketin yaklaşık periyodu ve frekansı

$$T_1 = \frac{2\pi}{w_\theta} = \frac{2\pi}{1.4199} \approx 4.4251s \quad \text{ve} \quad \nu_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{w_\theta}{2\pi} \approx 0.226 \text{ Hz} \quad (3.42)$$

dir. Bu nedenle, $c_1 = 0.2993$, $c_2 = 0.0704$, olmak üzere salınımın genliği,

$$\zeta = \sqrt{(0.2993)^2 + (0.0704)^2} = 0.3075, \quad (3.43)$$

ve

$$\theta(t) = 0.3075 \cos(1.4199t - \phi_1) + 7.2857 \times 10^{-4} \quad (3.44)$$

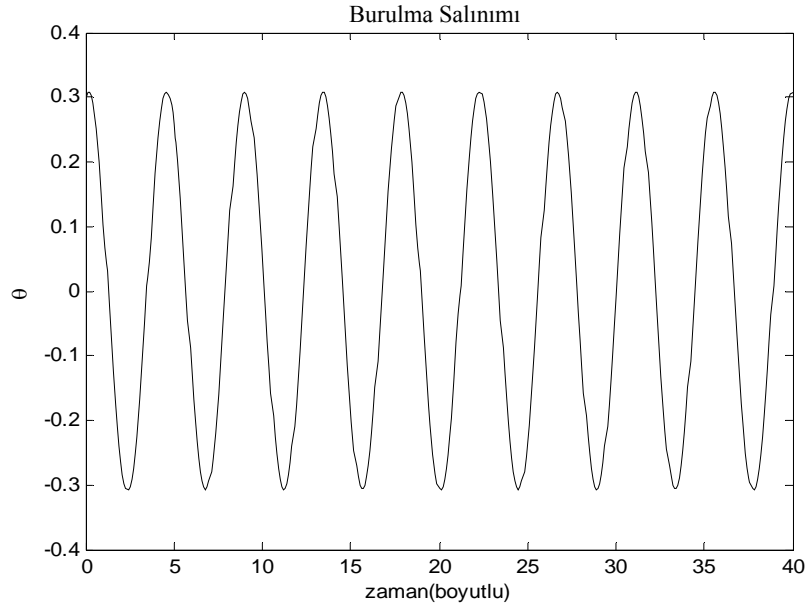
olarak elde edilir. Böylece faz açısı, ϕ_1

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{0.0704}{0.2993} \right) \approx 0.231 \quad (3.45)$$

olmak üzere

$$\theta(t) = 0.3075 \cos(1.4199t - 0.231) + 7.2857 \times 10^{-4} \quad (3.46)$$

olarak elde edilir. Elde edilen çözümün $[0, 40]$ boyutlu zaman aralığındaki grafiği Şekil 3.3 de gösterilmiştir.



Şekil 3.3. Burulma salınımları $\theta(t)$ 'nin yerel değişimleri

Şekil 3.3.'de, Tablo 3.1.'deki parametre değerleri ve $t \in [0, 40]$ için burulma salınımlarının, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için burulma salınımlarının belirli zaman aralıklarında kendisini tekrar etmektedir. Dolayısıyla burulma salınımlarının, sönümsüz salınımlar olduğu görülmektedir.

(3.46) denklemi, sönümsüz (3.5) de yerine yazılır ve Tablo 3.1 deki değerleri ve $U=5$ m/s için

$$\begin{aligned} \ddot{z} + 0.7222z &= -0.0127 + 41.15503125 \cos(1.4199t - 0.231) \\ z(0) &= 0.3, \quad z'(0) = 0.1 \end{aligned} \quad (3.47)$$

denklemi elde edilir. Düşey salınımlar denkleminde sönümsüz salınımların doğal frekansı $w_0 = \sqrt{0.7222} = 0.8498$ dir. (3.47) denkleminin çözümü

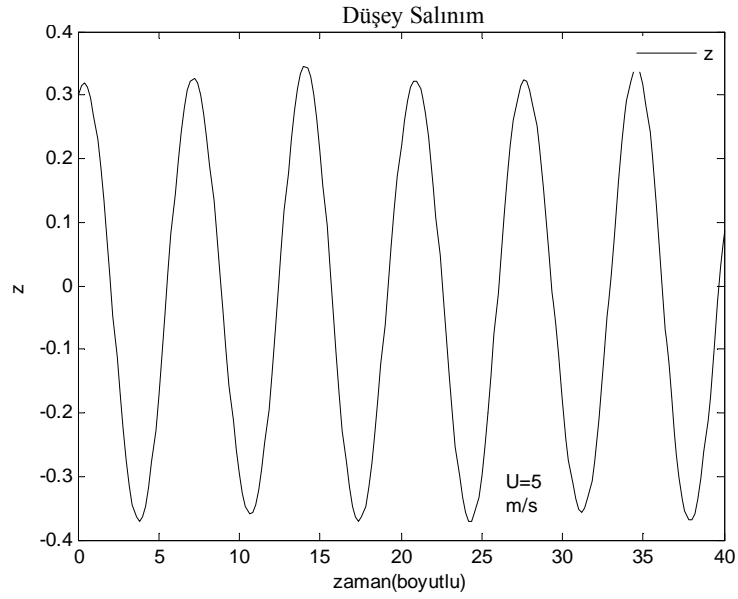
$$z_U(t) = \underline{C}(U) \cos(w_2 t - \phi) + \frac{1}{w_z^2} \left[\hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{M0} \hat{C}_{L1}}{w_\theta^2} \right] + A_2 \cos(w_1 t - \psi) \quad (3.48)$$

elde edilir. Burada

$$w_2 = 0.8498, w_1 = 1.4199, \underline{C} = 0.3501, \phi = 0.3556, \psi = 0.231,$$

$$A_2 = -0.0109, \frac{1}{w_z^2} \left[\hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{M0} \hat{C}_{L1}}{w_\theta^2} \right] = -0.0176$$

dir. Elde edilen çözümün $[0, 40]$ boyutlu zaman aralığındaki grafiği şekil 3.4 de gösterilmiştir.

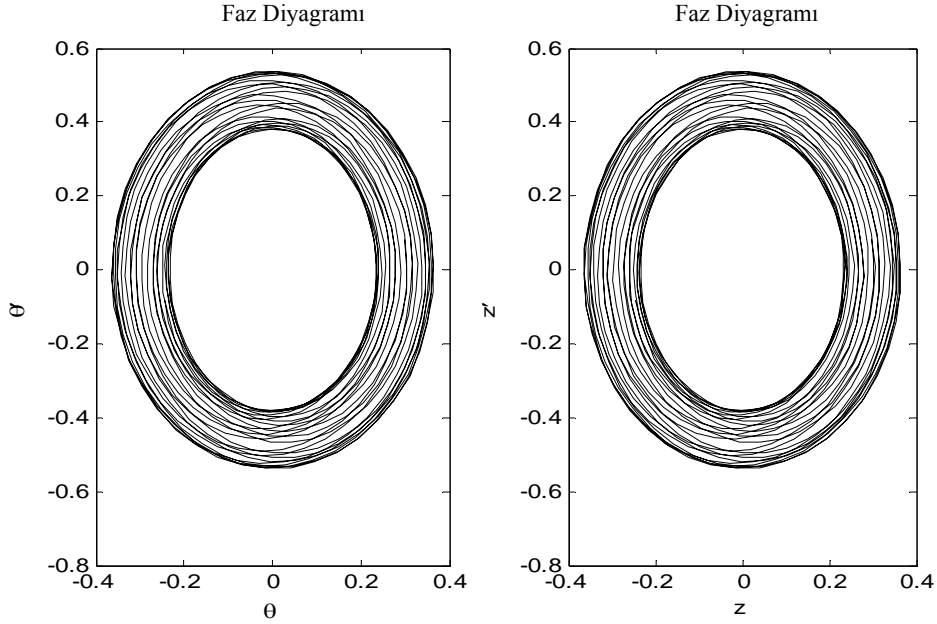


Şekil 3.4. $z(t)$ düşey salınımın yerel değişimleri

Şekil 3.4.'de düşey salınımın $t \in [0, 40]$ ve Tablo 3.1.'deki parametre değerleri için, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için düşey salınımın genliği azalmamaktadır. Bunun sonucu olarak sönüm gerçekleşmemektedir.

II) Faz değişimi

Bu kesimde sönümsüz G_LMK2 modeli ve Tablo 3.1.'deki parametreler kullanılarak elde edilen burulma ve düşey salınımın faz değişimleri, uzun zaman aralıkları için verilmektedir.

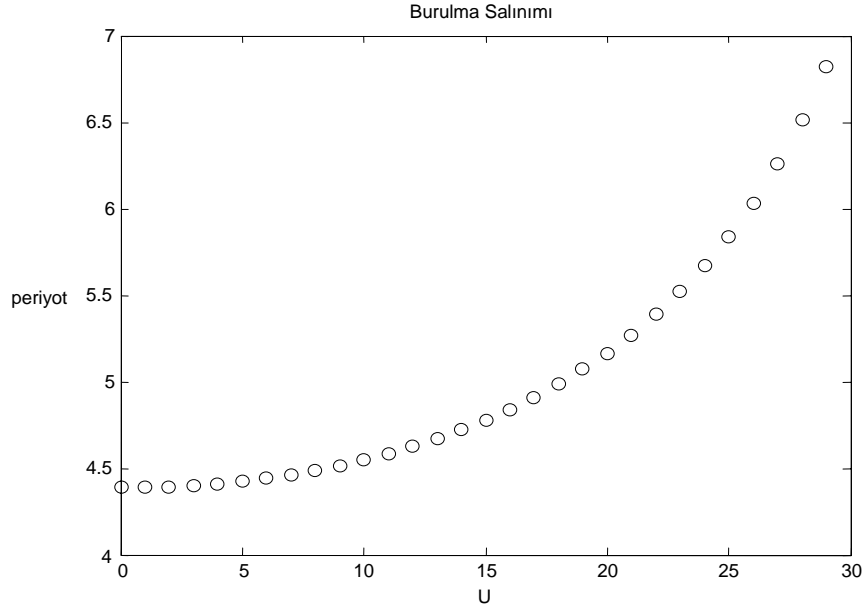


Şekil 3.5. $\theta(t) - \theta'(t)$ ve $z(t) - z'(t)$ faz diyagramı

Şekil 3.5.'de Tablo 3.1.'deki parametre değerleri ve $t \in [0:0.1:100]$ uzun zaman aralığı için $\theta(t) - \theta'(t)$ ve $z(t) - z'(t)$ faz diyagramı görülmektedir. Şekilden görüleceği üzere hareket periyodiktir.

III) Periyot hız değişimi

Bu kısımda sönümsüz G_LMK2 modeli ve Tablo 3.1.'deki parametreler kullanılarak elde edilen burulma salınımının periyodunun, rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak değişimi verilmektedir.

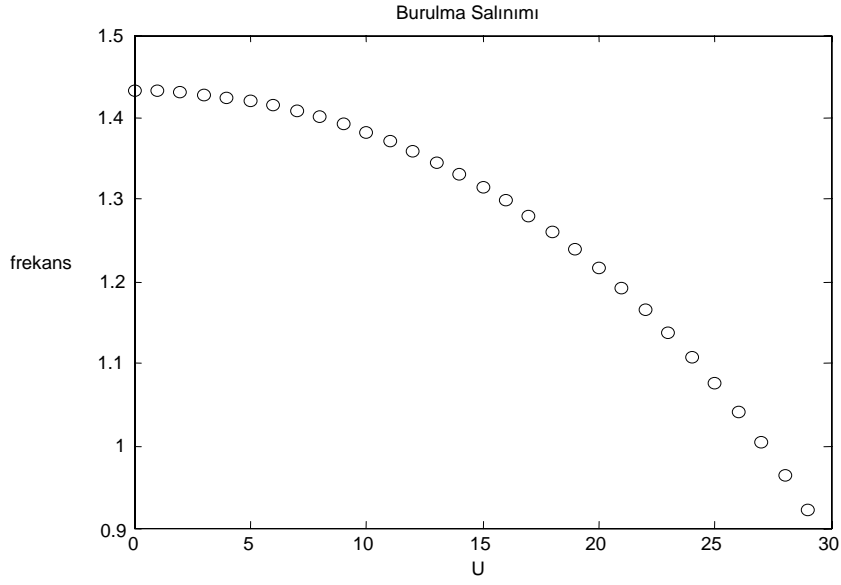


Şekil 3.6. $\theta(t)$ ' burulma salınınının periyot değişimleri

Şekil 3.6.'da $U \in [0:1:30]$ rüzgâr hızındaki artışın, sönümsüz boyutlu G_LMK2 modelindeki burulma salınının periyodu üzerine etkileri görülmektedir. Rüzgâr hızındaki artışın periyodu artırdığı gözlenmektedir.

IV) Frekans hız değişimi

Bu kısımda sönümsüz G_LMK2 modeli ve Tablo 3.1 deki parametreler kullanılarak elde edilen burulma salınının frekansının, rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak değişimi verilmektedir.

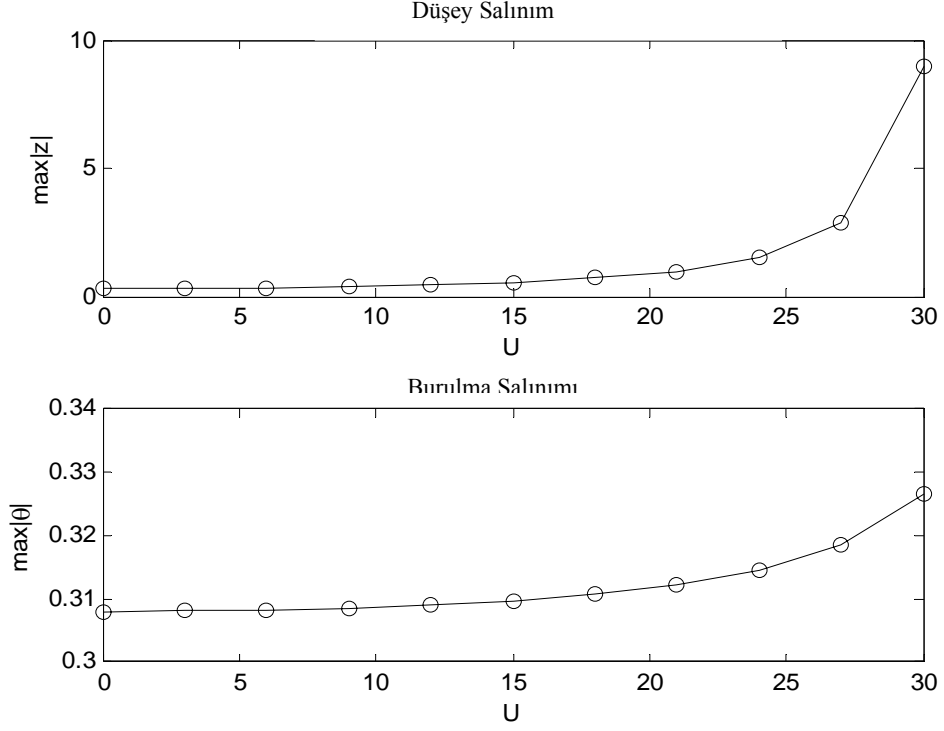


Şekil 3.7. $\theta(t)$ 'burulma salınımının frekans değişimleri

Şekil 3.7.'de $U \in [0:1:30]$ rüzgâr hızındaki artışın, sönümsüz boyutlu G_LMK2 modelindeki burulma salınımının frekansı üzerine etkileri görülmektedir. Rüzgâr hızındaki artışın frekansı azalttığı gözlenmektedir.

V) Genlik-hız değişimi

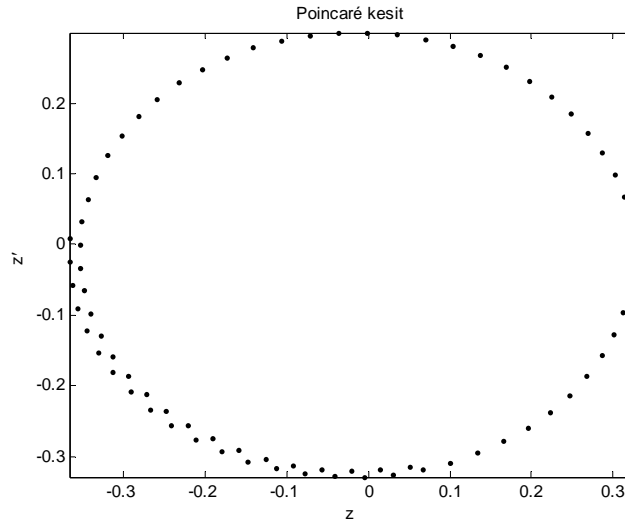
Bu kısımda sönümsüz G_LMK2 modeli ve Tablo 3.1.'deki parametreler kullanılarak burulma ve düşey maksimum salınımının genliklerinin değişimi, rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak verilmektedir.



Şekil 3.8. $U \in [0:3:30]$ değerlerine karşılık gelen $\max|z|$ ve $\max|\theta|$ 'nin davranışı

Şekil 3.8.'de $U \in [0:3:30]$ rüzgâr hızındaki artışın, sönümsüz boyutlu G_LMK2 modelindeki burulma ve düşey salınımın genliği üzerine etkileri görülmektedir. Rüzgâr hızındaki artışın burulma ve düşey salınımın genliğini artırdığı gözlenmektedir. Rüzgârın belirli bir değerinden sonra köprü rezonansa girerek çökmektedir. Köprüyü rezonansa sokan kritik rüzgâr hızı $U_{\infty} = 37 \text{ m/s} = 133.2 \text{ km/sa}$ dir.

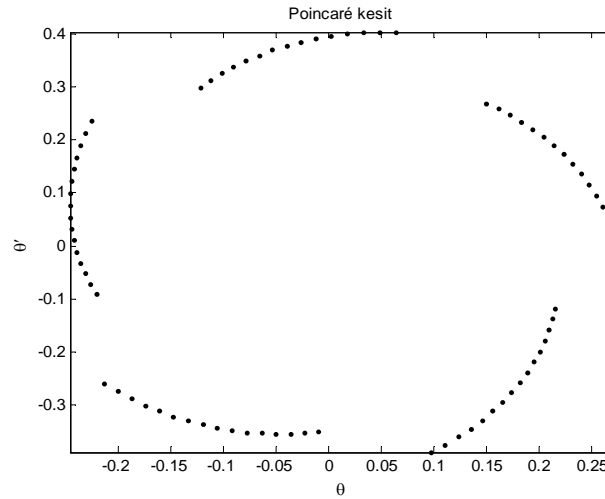
Tanım 3.1. (Poincaré section(kesit)): Faz uzayı içerisindeki takriben bütün yörüngelere karşılık gelen eğriler planına poincaré kesit denir. Dinamik bir sistemin faz uzayındaki davranışı, faz uzayı belirli bir düzlemle(veya doğruyla) kesilerek(poincaré kesit), yörüngelerin bu düzlemi(veya doğruyu) kestiği noktaların oluşturduğu geometrik yer yardımıyla belirlenebilir.



Şekil 3.9. $z - z'$ faz düzleminde Poincaré kesitleri

Şekil 3.9.'de $U = 5$ m/s rüzgâr hızı ve $\left[0; \frac{2\pi}{1.4199}; \frac{4000\pi}{1.4199}\right]$ zaman aralığı için (3.47)

denkleminin Poincaré kesitleri çizdirilmiştir. Şekil 3.9.'da görülen Poincaré kesitteki noktaların dağılımı küçük bir bölgede ve sonlu sayıda olduğundan hareket periyodiktir.



Şekil 3.10. $\theta - \theta'$ faz düzleminde Poincaré kesitleri (sections).

Şekil 3.10.'da $U = 5$ m/s rüzgâr hızı ve $\left[0; \frac{2\pi}{1.2}; \frac{4000\pi}{1.2}\right]$ zaman aralığı için (3.40)

denkleminin Poincare kesitleri çizdirilmiştir. Şekil 3.10.'da görülen Poincaré kesitteki noktaların dağılımı küçük bir bölgede ve sonlu sayıda olduğundan hareket periyodiktir.

Tanım 3.2. (Doğal frekans) Kendi haline bırakılan ve her hangi bir dış etkiye maruz kalmayan titreşimler sistemine serbest titreşimler denilmektedir. Bu duruma örnek olarak bir kere vurulan fakat sonra kendi haline bırakılan ağırlık sarkacının veya bir gitar telinin periyodik hareketleri verilebilir. Bu hareketin 1 saniyedeki tekrar sayısına frekans ve bu frekansada doğal frekans denir. Eğer sistemde sönüm var ise sönümlü doğal frekans olarak adlandırılmaktadır.

Tanım 3.3. (Sönüm) Hareket sırasında enerji kaybına neden olan malzeme özelliğidir.

Tanım 3.4. (Genlik) Cismin denge konumundan itibaren pozitif maksimum yer değiştirmesidir.

Tanım 3.5. (Rezonans) Periyodik bir dış kuvvet etkisi altındaki bir sistem, salınımlar sergiler ve eğer dış kuvvet frekansı sistemin doğal frekansına eşit ise, bu salınımların genlikleri artma eğilimine girer. Sonuç olarak sistem, belirli bir genlikten sonra bütünlüğünü ve bulunduğu konumu koruyamaz ve dağılır veya bozunur. Bu duruma rezonans adı verilir. Örnek olarak kesintili rüzgâr etkisi altındaki bir köprü rüzgârın ani ve değişken esmesinin neden olduğu titreşim ve salınımlar sonucunda köprünün doğal frekansı ile köprüye etkiyen rüzgâr frekansının eşit olması durumunda salınım genliği sonsuza gitmeye başlayacağından köprü rezonansa girerek bir süre sonra yıkılacaktır. Bu durum Tacoma Narrows köprüsünde yaşanmıştır.

VI) Burulma Frekansının (ve doğal olarak periyodun) rüzgâr hızına göre değişimi

Bu kesimde sönümsüz G_LMK2 modeli kullanılarak, burulma salınımindaki frekans ve periyodun analitik ifadesi ve rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak değişimi Tablo 3.3.'de verilmektedir. Kullanılan parametre değerleri Tablo 3.1.'den alınmıştır.

Tablo 3.3. Sönümsüz boyutlu burulma salınımının frekans ve periyodun analitik ifadesi ve rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak değişimi

Rüzgâr Hızı	Doğal frekans	Periyot
$U(m/s)$	$w_\theta = \sqrt{\frac{6k - 6\rho C_{M1} U^2}{m_k}} (s)$	$\frac{2\pi}{w_\theta} (Hz)$
1	1.4319	4.3880
5	1.4199	4.4252
10	1.3816	4.5479
15	1.3153	4.7771
20	1.2164	5.1655
20.68	1.2	5.2360
25	1.0760	5.8396
30	0.8743	7.1869
35	0.5472	11.4827

Sonuç olarak rüzgâr hızındaki artışın doğal frekansı azalttığı ve salınım periyodunu artırdığı gözlenmektedir.

VII) Düşey Frekansın(ve doğal olarak periyodun) rüzgâr hızına göre değişimi

Bu bölümde sönümsüz G_LMK2 modeli kullanılarak düşey salınımının frekans ve periyodunun analitik ifadesi ve rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak değişimi Tablo 3.4.' de

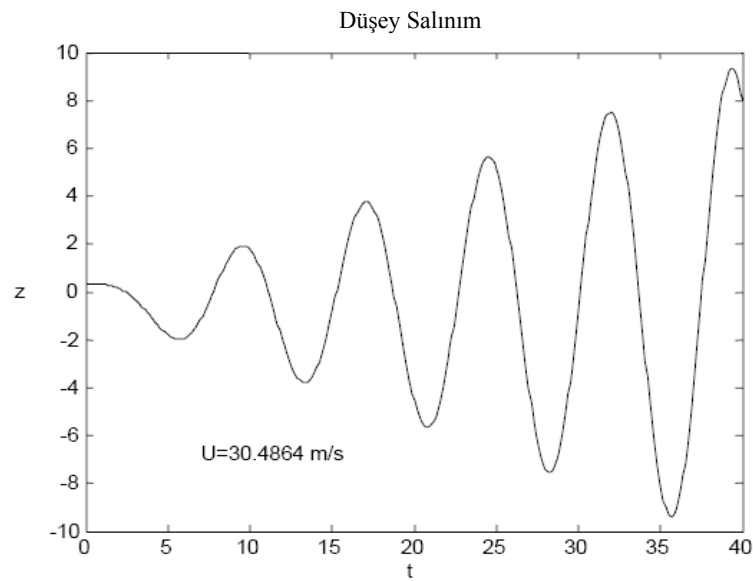
verilmektedir. Düşey salınımının doğal frekansı $w_z = \sqrt{\left(EI \left(\frac{\pi}{L_B} \right)^4 + 2k \right) / m_k} = 0.8498$,

periyot $\frac{2\pi}{w_z} = 7.3937$ dir. Kullanılan parametre değerleri Tablo 3.1.'den alınmıştır.

Tablo 3.4. Sönümsüz düşey salınımın frekans ve periyotun analitik ifadesi ve rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak değişimi

Rüzgâr Hızı	Dış frekans
$U(m/s)$	$w_{\theta} = \sqrt{\frac{6k - 6\rho C_{M1}U^2}{m_k}} \text{ (s)}$
1	1.4319
5	1.4199
10	1.3816
15	1.3153
20	1.2164
25	1.0760
30	0.8743
30.4864	<u>0.8498</u>
35	0.5918

Tablo 3.6.'da görüleceği üzere rüzgâr hızındaki artışın dış frekansı azalttığı gözlenmektedir. Belirli bir rüzgâr hızında dış frekans doğal frekansa eşit olmakta ve rezonans durumu ortaya çıkmaktadır.



Şekil 3.11. $z(t)$ düşey salınımın yerel değişimleri

Şekil 3.11.'de düşey salınımın $t \in [0, 40]$ ve Tablo 3.1.'deki parametre değerleri için, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. $U = 30.4864$ m/s rüzgâr değeri için düşey salınımın dış salınım frekansı($w_\theta = 0.8498$) doğal frekansına eşit olduğundan, salınım genliği hızla artmaya başlamaktadır.

Buna göre yukarıda belirtilen gözlemlere ilaveten;

- Düşey ve burulma salınım denklemlerinde sönüm terimi bulunmadığından, bu salınımlar için sönüm ortaya çıkmamakta,
- U rüzgâr hızının artan değerlerine karşılık burulma hareketinin periyodunun artmakta olduğu bunun sonucu olarak ta frekansının azaldığı, dolayısıyla G_LMK2 modeli bağdaşık(couple) olduğundan burulma salınımının frekansı, düşey salınımın dış frekansı olduğundan, düşey salınımında dış frekansının azalmakta olduğu,
- U rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak düşey ve burulma salınım genlikleri artmakta, belirli bir eşik değerinden sonra salınım genliği sonsuza gitmekte ve köprünün çökmekte olduğu,

gözlenmektedir.

3.5.2. Sönümlü Salınım(G_LMK2 Modeli)

Bu kısımda GLMK2 modelinin sönümlü durumunu analiz edilmektedir. Bu kapsamda analitik çözümleri verdikten sonra, tipik parametrelerle sönümlü salınımın zaman değişkeninin fonksiyonu olarak analitik çözümü ve davranışı, faz değişimlerini, rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak düşey ve burulma salınımının genliğinin ve periyodunun nasıl değiştiği ve buna ilaveten pratik rezonans incelenmektedir. Öncelikle burulma salınımının analitik çözümünü elde edelim.

Bu bölümde sönümlü G_LMK2 modeli gözönüne alınmaktadır. Burulma salınımın sönümsüz doğal frekansı w_θ olmak üzere sönümlü doğal frekansı da $W_\theta = w_\theta \sqrt{1 - \zeta_1^2}$ dir.

Burada sönüm oranı $\zeta_1 = \frac{\delta_\theta}{w_\theta}$ dir. Düşey salınım denkleminde sönümsüz salınımın doğal

frekansı $w_z = \sqrt{2k_1 + 1}$ ve sönüm faktörü $\zeta = \frac{2\delta_{z_1}}{2\sqrt{2k_1 + 1}}$ ve sönümlü salınımın doğal

frekansı $W_z = w_z \sqrt{1 - \zeta^2}$ dir. Sönümlü G_LMK2 denkleminin analitik çözümlerini bulmaya çalışalım, öncelikle burulma salınımının homojen kısmının çözümünü aşağıdaki gibi elde etmeye çalışalım, homojen denklem

$$\ddot{\theta} + 2\delta_{\theta_1} \dot{\theta} + w_{\theta}^2 \theta = 0 \quad (3.49)$$

ifade edilebilir. Buradan homojen kısmın çözümü,

$$\theta_h = c_1 e^{(-\delta_{\theta_1} + \sqrt{\delta_{\theta_1}^2 - w_{\theta}^2})t} + c_2 e^{(-\delta_{\theta_1} - \sqrt{\delta_{\theta_1}^2 - w_{\theta}^2})t} \quad (3.50)$$

elde edilir.

Amacımız Tablo 3.1 de verilen parametre değerleri için (G_LMK2) deki denklemlerin analitik çözümlerini elde etmektir.

Tablo 3.1 de verilen parametre değerleri için $\Delta = \delta_{\theta_1}^2 - w_{\theta}^2 < 0$ olur. Burulma salınımının yavaş sönümlü durumu söz konusu olur. Bu durumda biri diğerinin eşleniği olan iki karmaşık köke sahiptir. (3.49) ifadesinden karakteristik denklemin kökleri

$$r_{1,2} = -\delta_{\theta_1} \mp \sqrt{\delta_{\theta_1}^2 - w_{\theta}^2} = -\delta_{\theta_1} \mp i\sqrt{w_{\theta}^2 - \delta_{\theta_1}^2} = -\delta_{\theta_1} \mp iW_{\theta} \quad (3.51)$$

bulunur. (3.51) denkleminin çözümü,

$$\theta_h = e^{-\delta_{\theta_1} t} [c_1 \cos W_{\theta} t + c_2 \sin W_{\theta} t] \quad (3.52)$$

elde edilir. Özel çözüm

$$\ddot{\theta} + 2\delta_{\theta_1} \dot{\theta} + w_{\theta}^2 \theta = \hat{C}_{M0} \Rightarrow \theta_{i\ddot{\theta}} = \frac{\hat{C}_{M0}}{w_{\theta}^2} \quad (3.53)$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.52) ve (3.53) ifadelerinden, (3.22) denkleminin çözümü

$$\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_\delta(t) = e^{-\delta_{\theta_1} t} [c_1 \cos W_\theta t + c_2 \sin W_\theta t] + \frac{\hat{C}_{M0}}{w_\theta^2} \quad (3.54)$$

elde edilir. $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = \hat{\theta}_1$ başlangıç değerleri (3.54) ifadesinde yerine yazılır ise,

$$c_1 = \theta_0 - \frac{\hat{C}_{M0}}{w_\theta^2}, c_2 = \frac{1}{W_\theta} [\hat{\theta}_1 + \delta_{\theta_1} c_1]$$

olmak üzere, $C^* = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\cos \phi_1 = \frac{c_1}{C^*}$, $\sin \phi_1 = \frac{c_2}{C^*}$ ifadelerinden burulma salınım denkleminin çözümü

$$\theta(t) = e^{-\delta_{\theta_1} t} C^* (U) \cos(W_\theta t - \phi_1) + \frac{\hat{C}_{M0}}{w_\theta^2} \quad (3.55)$$

elde edilir. (3.55) ifadesi (3.23) de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \ddot{z} + 2\delta_{z_1} \dot{z} + w_z^2 z &= \hat{C}_{L0} + \hat{C}_{L1} \left[e^{-\delta_{\theta_1} t} C^* \cos(W_\theta t - \phi_1) + \frac{\hat{C}_{M0}}{w_\theta^2} \right] \\ z(0) &= z_0, \quad z'(0) = \hat{z}_1 \end{aligned} \quad (3.56)$$

denklemini elde edilir. (3.56) denkleminin homojen kısmı

$$\ddot{z} + 2\delta_{z_1} \dot{z} + w_z^2 z = 0 \quad (3.57)$$

olarak ifade edilebilir. Buradan homojen kısmın çözümü,

$$z_h = c_1 e^{[-\delta_{z_1} + \sqrt{\delta_{z_1}^2 - w_z^2}]t} + c_2 e^{[-\delta_{z_1} - \sqrt{\delta_{z_1}^2 - w_z^2}]t} \quad (3.58)$$

elde edilir. Tablo 3.2 deki parametre değerlerinden $\Delta = \delta_{z_1}^2 - w_z^2 < 0$ olur. Burulma salınımı yavaş sönümlü salınımdır. Bu durumda yardımcı denklem biri eşlenik iki karmaşık köke sahiptir. (3.57) ifadesinden karakteristik denklemin kökleri

$$r_{1,2} = -\delta_{z_1} \mp \sqrt{\delta_{z_1}^2 - w_z^2} = -\delta_{z_1} \mp i\sqrt{w_z^2 - \delta_{z_1}^2} = -\delta_{z_1} \mp iW_z \quad (3.59)$$

bulunur. Burada $W_z = \sqrt{w_z^2 - \delta_{z_1}^2}$ doğal frekanstır. Denklemin çözümü,

$$z_h = e^{-\delta_{z_1} t} [c_{10} \cos W_z t + c_{20} \sin W_z t] \quad (3.60)$$

bulunur. Bir özel çözüm,

$$\ddot{z} + 2\delta_{z_1} \dot{z} + w_z^2 z = \hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{L1} \hat{C}_{M0}}{w_\theta^2} \Rightarrow z_{1\bar{\theta}} = \frac{1}{w_z^2} \left[\hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{M0} \hat{C}_{L1}}{w_\theta^2} \right] \quad (3.61)$$

olup ve diğer özel çözüm ise

$$\begin{aligned} \ddot{z} + 2\delta_{z_1} \dot{z} + w_z^2 z &= \hat{C}_{L1} \left[e^{-\delta_{z_1} t} C^* \cos(W_\theta t - \phi_1) \right] \\ \Rightarrow z_{2\bar{\theta}}(t) &= e^{-\delta_{z_1} t} \left[A_2 \cos(W_\theta t - \phi_1) + B_2 \sin(W_\theta t - \phi_1) \right] \end{aligned} \quad (3.62)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{[\delta_{\theta_1}^2 - W_\theta^2 - 2\delta_{\theta_1} \delta_{z_1} + w_z^2] C^* \hat{C}_{L1}}{[\delta_{\theta_1}^2 - W_\theta^2 - 2\delta_{\theta_1} \delta_{z_1} + w_z^2]^2 + 4W_\theta^2 [\delta_{z_1} - \delta_{\theta_1}]^2} \\ B_2 &= \frac{2W_\theta [\delta_{z_1} - \delta_{\theta_1}] C^* \hat{C}_{L1}}{[\delta_{\theta_1}^2 - W_\theta^2 - 2\delta_{\theta_1} \delta_{z_1} + w_z^2]^2 + 4W_\theta^2 [\delta_{z_1} - \delta_{\theta_1}]^2} \end{aligned} \quad (3.63)$$

dir. Buradan

$$\tilde{C} = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}, \quad \cos \xi = \frac{A_2}{\tilde{C}}, \quad \sin \xi = \frac{B_2}{\tilde{C}}$$

$$\text{eşitliklerinden, } \tilde{C} = \frac{C^* \hat{C}_{L1}}{\sqrt{[\delta_{\theta_1}^2 - W_\theta^2 - 2\delta_{\theta_1} \delta_{z_1} + w_z^2]^2 + 4W_\theta^2 [\delta_{z_1} - \delta_{\theta_1}]^2}}$$

elde edilir. (3.61) ve (3.62) ifadelerinden özel çözüm

$$z_{\ddot{\theta}}(t) = z_{1\ddot{\theta}}(t) + z_{2\ddot{\theta}}(t) = \frac{1}{w_z^2} \left[\hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{M0}\hat{C}_{L1}}{w_\theta^2} \right] + e^{-\delta_{\theta_1}t} \tilde{C} \cos(W_\theta t - \phi_1 - \xi) \quad (3.64)$$

elde edilir. (3.60) ve (3.64) ifadelerinden düşey salınımın genel çözümü,

$$z = z_h + z_{\ddot{\theta}} = e^{-\delta_{z_1}t} [c_{10} \cos W_z t + c_{20} \sin W_z t] + \frac{1}{w_z^2} \left[\hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{M0}\hat{C}_{L1}}{w_\theta^2} \right] + e^{-\delta_{\theta_1}t} \tilde{C} \cos(W_\theta t - \phi_1 - \xi) \quad (3.65)$$

bulunur. $z(0) = z_0$, $z'(0) = \hat{z}_1$ başlangıç değerleri (3.65) ifadesinde yerine yazılır ise,

$$c_{10} = z_0 - \frac{1}{w_z^2} \left[\hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{M0}\hat{C}_{L1}}{w_\theta^2} \right] - \tilde{C} \cos(\phi_1 + \xi), \quad (3.66)$$

$$c_{20} = \frac{1}{W_z} \left[\hat{z}_1 + \delta_{z_1} c_{10} + \delta_{\theta_1} \tilde{C} \cos(\phi_1 + \xi) - W_\theta \tilde{C} \sin(\phi_1 + \xi) \right]$$

olmak üzere, $C^{**} = \sqrt{c_{10}^2 + c_{20}^2}$, $\cos \phi_2 = \frac{c_{10}}{C^{**}}$, $\sin \phi_2 = \frac{c_{20}}{C^{**}}$ ifadelerinden çözüm

$$z(t) = e^{-\delta_{z_1}t} C^{**}(U) \cos(W_z t - \phi_2) + e^{-\delta_{\theta_1}t} \tilde{C}(U) \cos(W_\theta t - \phi_1 - \xi) + \frac{1}{w_z^2} \left[\hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{M0}\hat{C}_{L1}}{w_\theta^2} \right] \quad (3.67)$$

elde edilir. Sönüm terimleri nedeniyle $t \rightarrow \infty$ ise $e^{-\delta_{z_1}t}, e^{-\delta_{\theta_1}t} \rightarrow 0$ olacağından,

$z \rightarrow \frac{1}{w_z^2} \left[\hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{M0}\hat{C}_{L1}}{w_\theta^2} \right]$, $t \rightarrow \infty$, Yukarıda ifade edilen model için bir adet fiziksel

uygulama aşağıdaki bölümde verilmektedir.

D) Tipik parametrelerle sönümlü salınımın analitik çözümü ve davranışı

Bu kesimde sönümlü boyutlu G_LMK modelini Tablo 3.1.'deki parametre değerleri, lineer kaldırma ve moment terimleri ve ortalama rüzgâr hızı $U = 5$ için burulma ve düşey

salınım için analitik ifadeler elde edilmektedir. Öncelikle burulma salınımı için analitik çözüm elde edelim.

Tablo 3.1 deki parametre değerleri, lineer kaldırma ve moment terimleri ve ortalama rüzgâr hızı $U = 5$ için (3.6) boyutlu sönümlü denkleminde yerine yazılır ise,

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + 0.0464\dot{\theta} + 2.016\theta &= 0.0015 \\ \theta(0) &= 0.3, \quad \theta'(0) = 0.1 \end{aligned} \quad (3.68)$$

denkleminin analitik çözümü elde edilir. Sönümsüz salınımın doğal frekansı $w_\theta = 1.4199$ rad/s ve sönüm faktörü $\zeta = \frac{0.0464}{2\sqrt{2.016}} = 0.0163$ ve sönümlü salınımın doğal frekansı

$W_\theta = w_\theta \sqrt{1 - \zeta^2} = 1.4199 \sqrt{1 - 0.0163^2} = 1.4197$ dir. (3.68) denkleminin çözümü

$$\theta(t) = e^{-0.0232t} [0.2993 \cos(1.4197t) + 0.0753 \sin(1.4197t)] + 7.2857 \times 10^{-4} \quad (3.69)$$

bulunur. Sonuç olarak dairesel frekans $W_\theta = 1.4197$ rad/s olur. Hareketin yaklaşık periyodu ve frekansı

$$T_1 = \frac{2\pi}{W_\theta} = \frac{2\pi}{1.4197} \approx 4.4257s \quad \text{ve} \quad \nu_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{W_\theta}{2\pi} \approx 0.226 \text{ Hz} \quad (3.70)$$

dir. Bu nedenle hareketin zaman değişimli genliği, $A_1 = 0.2993$, $B_1 = 0.0753$ olmak üzere hareketin zaman değişimli genliği,

$$\tilde{C}e^{-0.0232t} = \sqrt{(0.2993)^2 + (0.0753)^2} e^{-0.0232t} = 0.3068e^{-0.0232t}, \quad (3.71)$$

buradan,

$$\theta(t) = 0.3086e^{-0.0232t} \cos(1.4197t - \alpha_1) + 7.2857 \times 10^{-4} \quad (3.72)$$

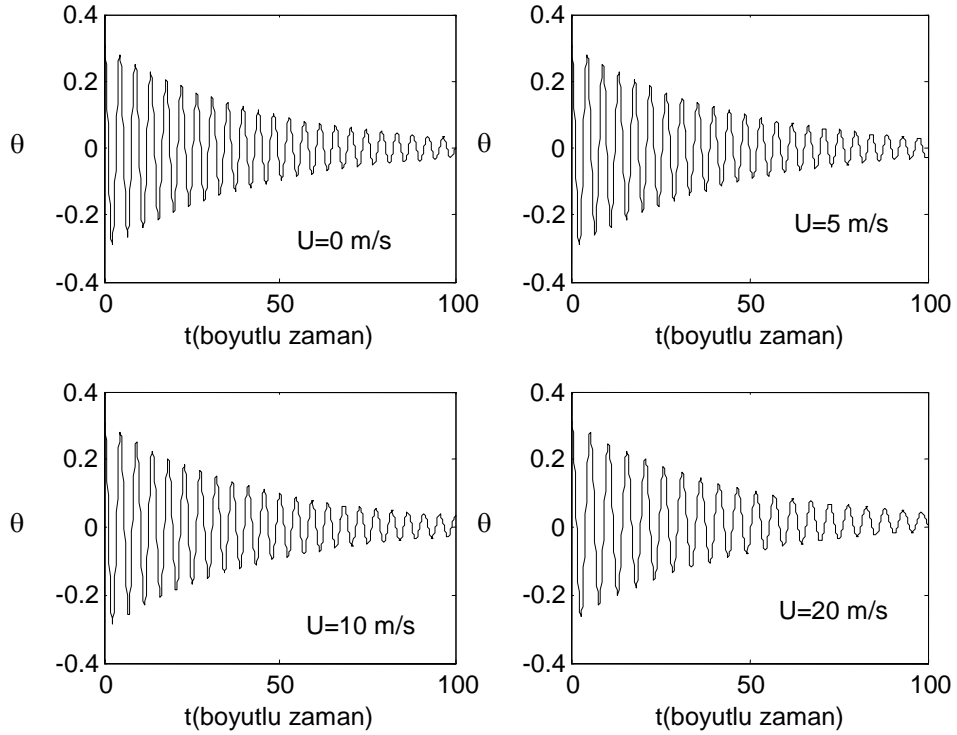
olur. Böylece faz açısı, α_1

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left(\frac{0.0753}{0.2993} \right) \approx 0.2465 \quad (3.73)$$

olup, birinci çeyrekte bir açıdır. Zaman değişimli genliği ve yaklaşık faz açısı ile burulma salınımı fonksiyonu

$$\theta(t) = 0.3086e^{-0.0232t} \cos(1.4197t - 0.2465) + 7.2857 \times 10^{-4} \quad (3.74)$$

formundadır. Elde edilen çözümün ve $U = 0, 10$ ve 20 değerleri için, burulma salınımının $[0, 100]$ boyutlu zaman aralığındaki grafiği Şekil 3.12 de gösterilmiştir.



Şekil 3.12. Artan zaman değerlerine karşılık, $U = 0, 5, 10$ ve 20 değerleri için $\theta(t)$ ' burulma salınımının yerel değişimleri

Şekil 3.12.'de Tablo 3.1.'deki parametre değerleri ve $t \in [0:0.1:100]$ için burulma salınımının, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için, rüzgâr hızındaki artışın burulma salınımının frekansını

azalttığı gözlenmektedir. Ayrıca sönüm gerçekleşmektedir. Öncelikle pratik rezonansı tanımlayalım.

Tanım 3.6. (Pratik Rezonans) Bir salınımlı sistemde dış frekansın zorlanmış genliğinin maksimum olduğu durumlarda oluşmaktadır.

G_LMK2 modelinde yer alan burulma salınımının çözümü (3.74) ifadesi, düşey salınım denkleminde yerine yazılır ise,

$$\ddot{z} + 0.0773\dot{\theta} + 0.7222z = -0.0127 + 0.0141e^{-0.0233t} \cos(1.4197t - 0.2465) \quad (3.75)$$

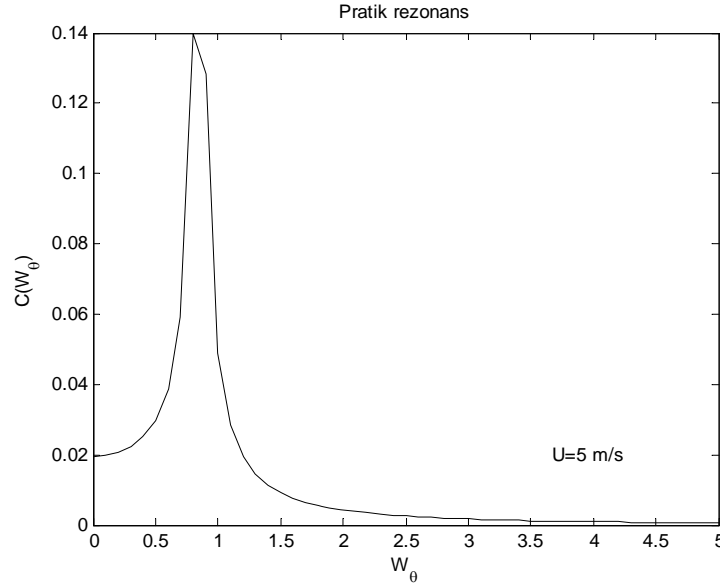
denklemini elde edilir. Düşey salınım denkleminde sönümsüz salınımın doğal frekansı

$$w_z = \sqrt{0.7222} = 0.8498 \text{ ve sönüm faktörü } \zeta = \frac{0.0773}{2\sqrt{0.7222}} = 0.0535 \text{ ve sönümlü salınımın}$$

doğal frekansı $W_z = w_z \sqrt{1 - \zeta^2} = 0.8498 \sqrt{1 - 0.0535^2} = 0.8486$ 'dir.

II) Düşey salınımda pratik rezonans:

Düşey salınım için pratik rezonansı araştırmak istersek, Tablo 3.1.'deki değerlere göre C_1 genliğinin dış frekans W_θ 'e göre değişimini gözlemlemek yeterli olur.

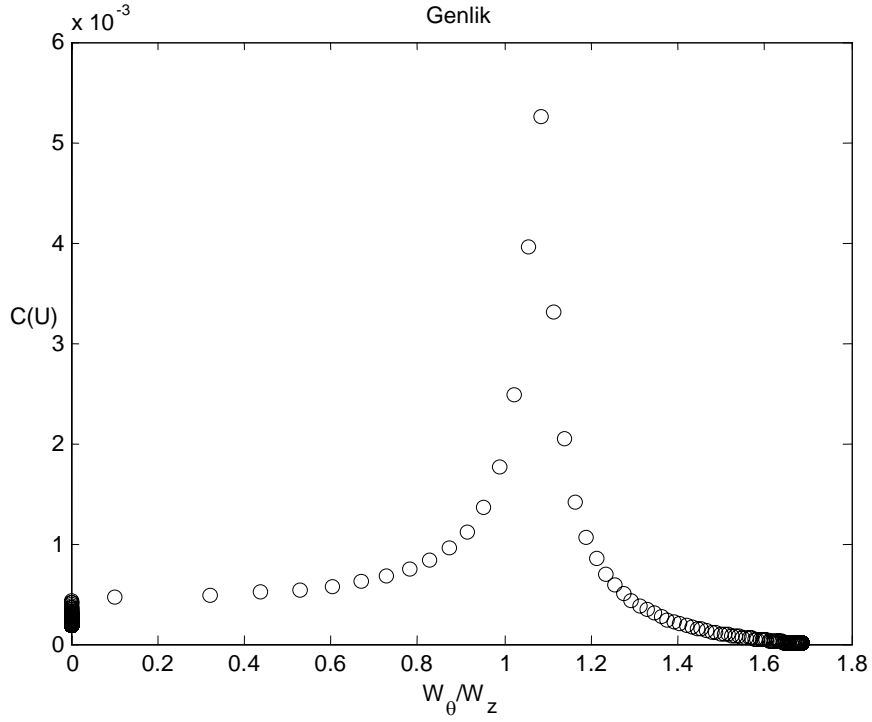


Şekil 3.13. C_1 genliğinin dış frekans W_θ 'e göre değişimi

Şekil 3.13.'de dış frekans $W_\theta \in [0:5]$ değerler aldığıında genliğin değişimi görülmektedir. Pratik rezonansı, W_θ frekansındaki zorlanmış $C(W_\theta)$ genliği olarak bilinmektedir. Sonuç olarak pratik rezonans dış frekans doğal frekansa eşit olduğunda oluşur. G_LMK2 modelinde dış salınım frekansı, W_θ ve W_z doğal frekanslara eşit olduğunda rezonans durumu ortaya çıkmaktadır. $W_\theta = 0.8486$ değeri için pratik rezonans oluşmaktadır.

Şekil 3.14.'de görüldüğü gibi burulma salınım frekansı, düşey salınım frekansına eşit olduğu durumda rezonans durumu ortaya çıkmaktadır.

III) Düşey ve burulma salınım frekanslarının oranı olarak pratik rezonans:



Şekil 3.14. C_1 genliğinin dış frekans U 'ya göre değişimi

Şekil 3.14.'de ortalama rüzgâr hızı $U \in [0:0.1:40]$ değerler aldığıında genliğin değişimi görülmektedir. Burulma salınım frekansı U rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak, düşey salınım frekansına eşit olur. Bu durumda köprü rezonansa girerek çökmektedir.

IV) Düşey salınımın için analitik çözüm

(3.75) denkleminin çözümü

$$z_U(t) = e^{-\delta_{z_1} t} C^{**}(U) \cos(W_z t - \phi) + e^{-\delta_{\theta_1} t} \tilde{C}(U) \sin(W_\theta t - \psi - \xi) + \frac{1}{w_z^2} \left[\hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{M0} \hat{C}_{L1}}{w_\theta^2} \right] \quad (3.76)$$

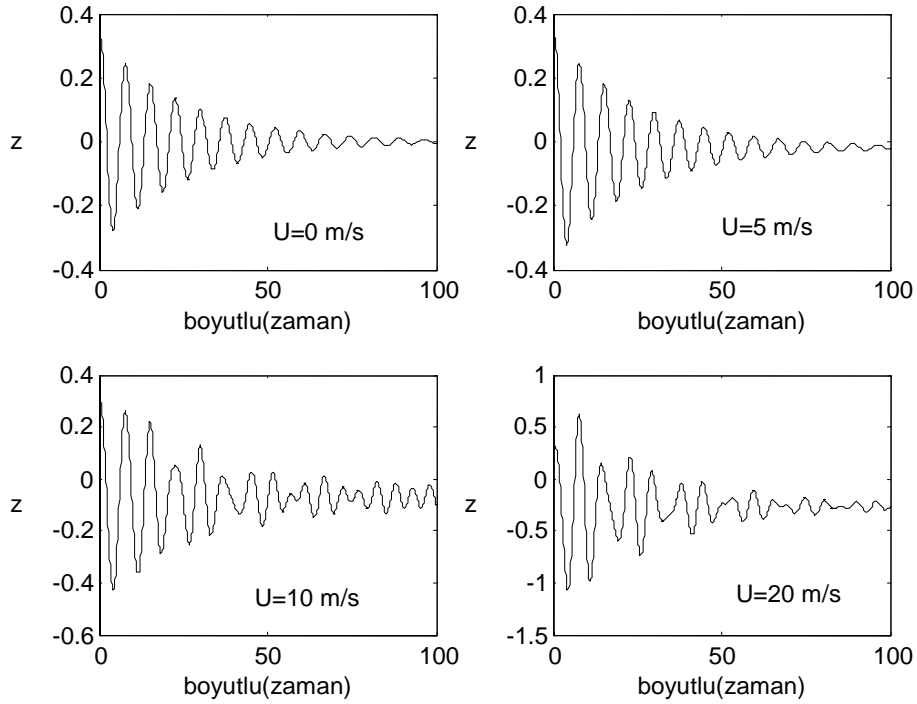
elde edilir. Burada

$$\delta_{z_1} = 0.0386, \delta_{\theta_1} = 0.0232, W_z = 0.849, W_\theta = 1.4197,$$

$$C^{**} = 0.3554, \tilde{C} = 0.0109, \phi = 0.3933, \psi = 0.2465, \xi = 1.5369,$$

$$\frac{1}{w_z^2} \left[\hat{C}_{L0} + \frac{\hat{C}_{M0} \hat{C}_{L1}}{w_\theta^2} \right] = -0.0176$$

dir. Eğer $t \rightarrow \infty$ ise $z \rightarrow -0.0176$ olur. Elde edilen çözümün ve $U = 0, 10$ ve 20 değerleri için, düşey salınımın $[0, 100]$ boyutlu zaman aralığındaki grafiği Şekil 3.15.'de gösterilmiştir.

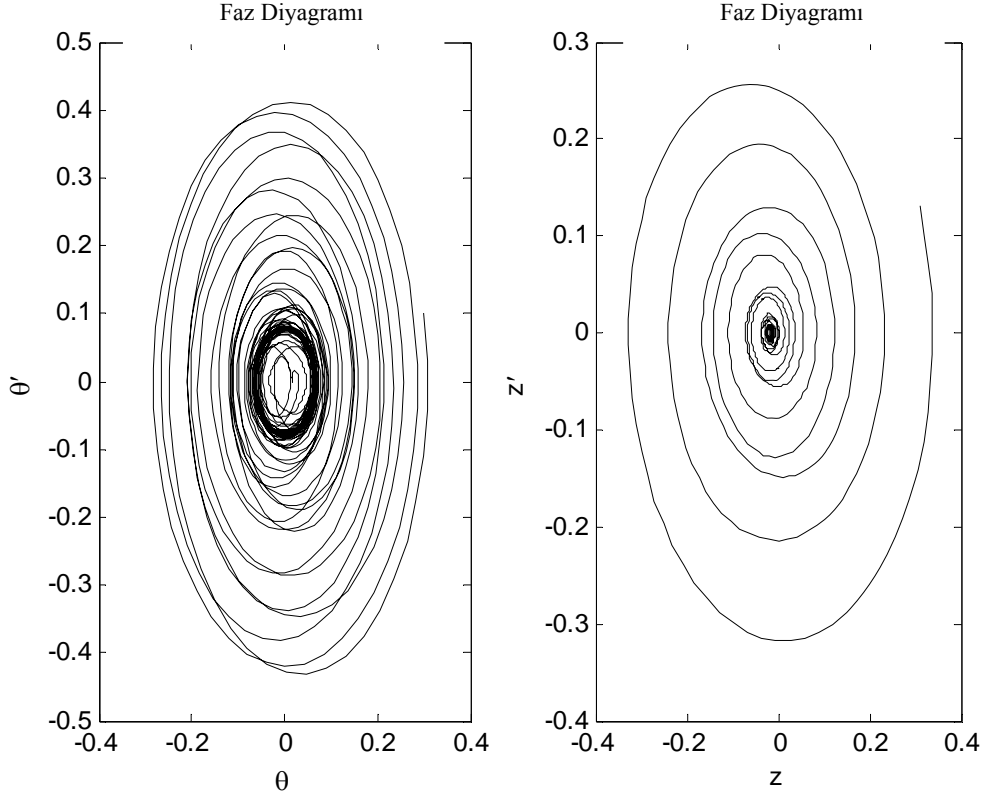


Şekil 3.15. Artan zaman değerlerine karşılık, $U = 0, 5, 10$ ve 20 değerleri için $z(t)$ ' düşey salınımın yerel değişimleri

Şekil 3.15.'de düşey salınımın $t \in [0:0.1:100]$ ve Tablo 3.1.'deki parametre değerleri için, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için, rüzgâr hızındaki atışın düşey salınımın genliğini artırdığı gözlenmektedir.

V) Faz diyagramı

Bu kısımda sönümlü G_LMK2 modeli ve Tablo 3.1.'deki parametreler kullanılarak elde edilen burulma ve düşey salınımın faz değişimleri, uzun zaman aralıkları için verilmektedir.

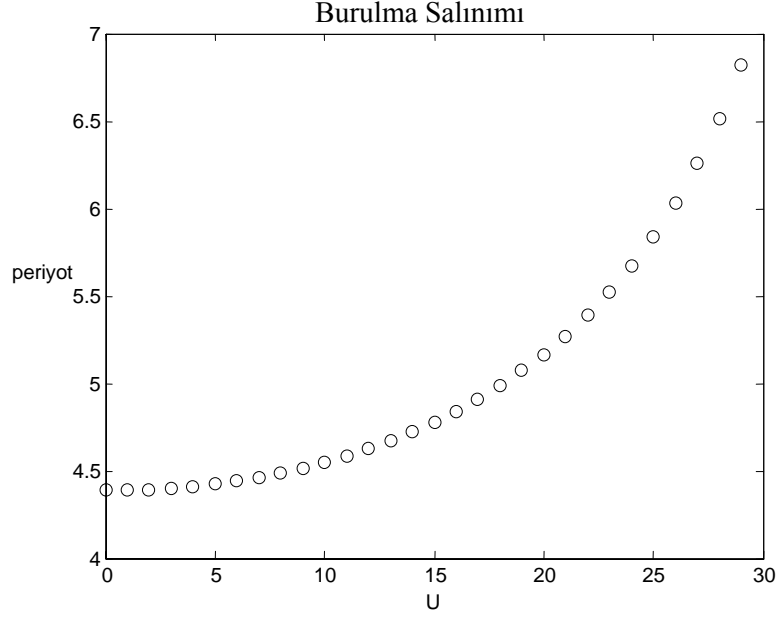


Şekil 3.16. $\theta(t) - \theta'(t)$ ve $z(t) - z'(t)$ faz diyagramı

Şekil 3.16.'da Tablo 3.1.'deki parametre değerleri ve $t \in [0:0.1:100]$ uzun zaman aralığı için $\theta(t) - \theta'(t)$ ve $z(t) - z'(t)$ faz diyagramı görülmektedir.

VI) Periyot hız değişimi

Bu kısımda sönümlü G_LMK2 modeli ve Tablo 3.1.'deki parametreler kullanılarak elde edilen burulma salınımlarının periyodunun, rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak değişimi verilmektedir.

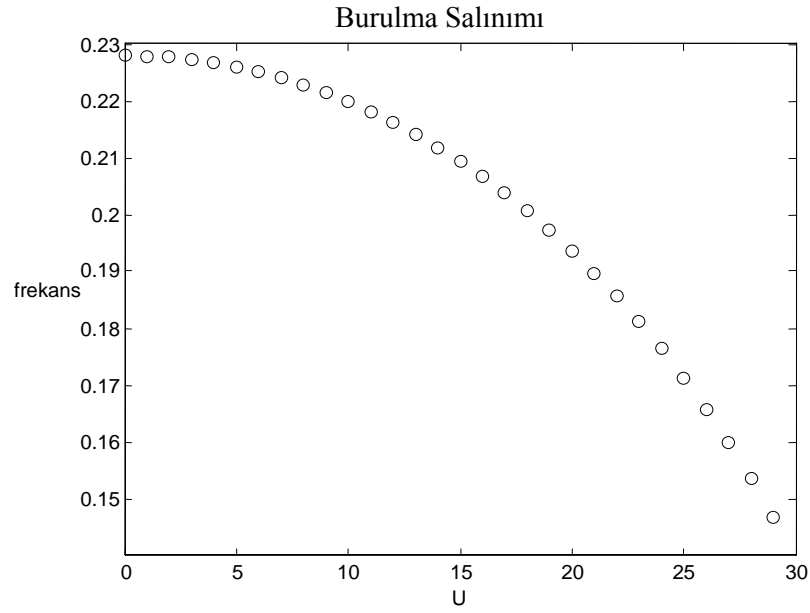


Şekil 3.17. $\theta(t)$ burulma salınımlarının periyot değişimleri

Şekil 3.17.'de $U \in [0:1:30]$ rüzgâr hızındaki artışın, sönümlü boyutlu G_LMK2 modelindeki burulma salınımlarının periyodu üzerine etkileri görülmektedir. Rüzgâr hızındaki artışın periyodu artırdığı gözlenmektedir.

VII) Frekans hız değişimi

Bu kısımda yine G_LMK2 modeli ve Tablo 3.1.'deki parametreler kullanılarak elde edilen burulma salınımlarının frekansının, rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak değişimi verilmektedir.

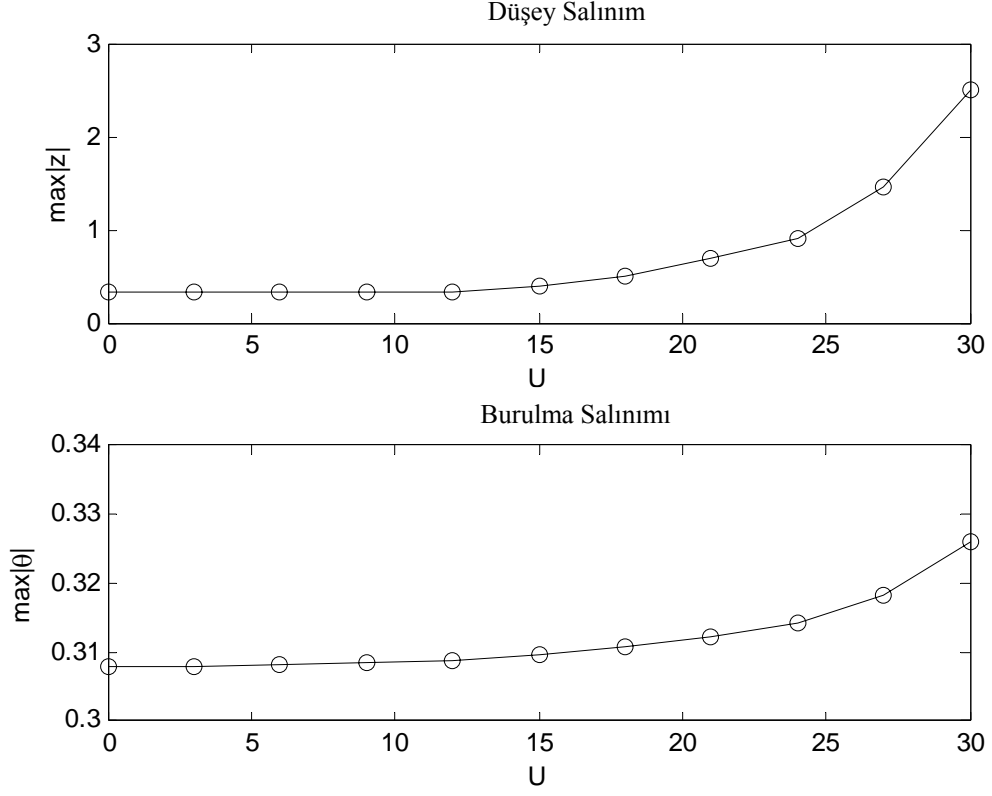


Şekil 3.18. $\theta(t)$ 'nin frekans değişimleri

Şekil 3.18.'de $U \in [0:1:30]$ rüzgâr hızındaki artışın, sönümlü boyutlu G_LMK2 modelindeki burulma salınımının frekansı üzerine etkileri görülmektedir. Rüzgâr hızındaki artışın frekansı azalttığı gözlenmektedir.

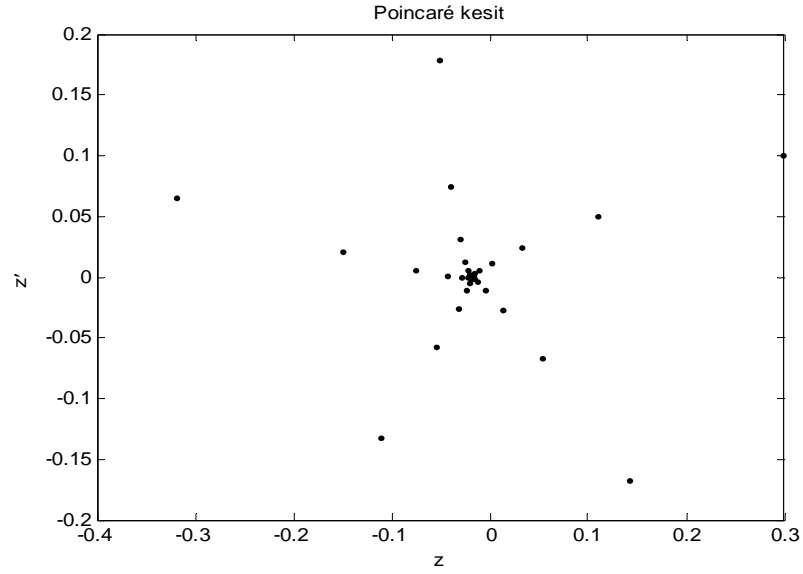
VIII) Genlik-hız değişimi

Bu kısımda sönümlü G_LMK2 modeli ve Tablo 3.1.'deki parametreler kullanılarak burulma ve düşey salınım maksimum genliklerinin, rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak değişimleri incelenmektedir.



Şekil 3.19. $U \in [0:3:30]$ değerlerine karşılık gelen $\max|z|$ ve $\max|\theta|$ 'nin davranışı

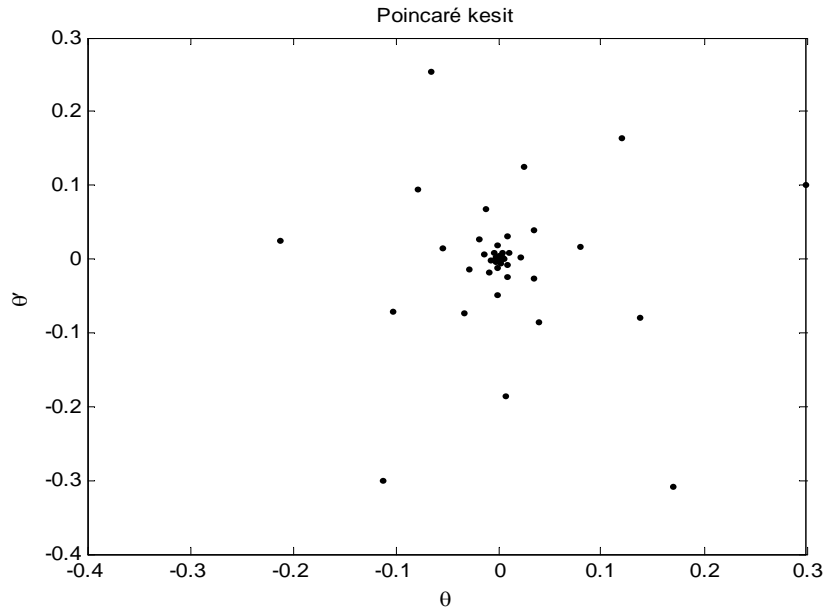
Şekil 3.19.'da $U \in [0:3:30]$ rüzgâr hızındaki artışın, sönümlü boyutlu G_LMK2 modelindeki burulma ve düşey salınımın genliği üzerine etkileri görülmektedir. Rüzgâr hızındaki artışın burulma ve düşey salınımın genliğini artırdığı gözlenmektedir. Rüzgârın belirli bir değerinden sonra köprü rezonansa girerek çökmektedir. Köprüyü rezonansa sokan kritik rüzgâr hızı $U_{\infty} = 38 \text{ m/s} = 136.8 \text{ km/sa}$ dir.



Şekil 3.20. $z - z'$ faz düzleminde Poincaré kesitleri

Şekil 3.20.'de $U = 5$ m/s rüzgâr hızı ve $\left[0; \frac{2\pi}{1.4197} : \frac{4000\pi}{1.4197} \right]$ zaman aralığı için

(3.75) denkleminin Poincaré kesitleri çizdirilmiştir. Şekil 3.20.'de görülen Poincaré kesitteki noktaların dağılımı küçük bir bölgede ve sonlu sayıda olduğundan hareket periyodiktir.



Şekil 3.21. $\theta - \theta'$ faz düzleminde Poincaré kesitleri(sections).

Şekil 3.21.'de $U = 5$ m/s rüzgâr hızı ve $\left[0; \frac{2\pi}{1.2}; \frac{4000\pi}{1.2}\right]$ zaman aralığı için (3.68)

denkleminin Poincare kesitleri çizdirilmiştir. Şekil 3.21.'de görülen Poincaré kesitteki noktaların dağılımı küçük bir bölgede ve sonlu sayıda olduğundan hareket periyodiktir.

IX) Burulma salınımının Frekans ve Peryodun hıza bağlı değişimi

Sönümlü G_LMK2 modeli kullanılarak burulma salınımındaki frekans ve periyodun analitik ifadesi ve rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak değişimi Tablo 3.5.' de verilmektedir. Kullanılan parametre değerleri Tablo 3.1.'den alınmıştır.

Tablo 3.5. Sönümlü burulma salınımının frekans ve periyodunun rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak değişimi

Rüzgâr Hızı	Doğal frekans	Periyot
U(m/s)	W_θ (s)	$\frac{2\pi}{W_\theta}$ (Hz)
1	1.4317	4.3886
5	1.4197	4.4258
10	1.3814	4.5485
15	1.3151	4.7779
20	1.2162	5.1664
25	1.0757	5.8409
30	0.8739	7.1894
35	0.5467	11.4931

Sonuç olarak rüzgâr hızındaki artışın doğal frekansı azalttığı ve salınım periyodunu artırdığı gözlenmektedir. Belirli bir rüzgâr hızında dış frekans doğal frekansa eşit olmaktadır.

X) Düşey salınımının Frekans ve Peryodun hıza bağlı değişimi

Bu kısımda sönümlü düşey salınımının frekans ve periyodunun analitik ifadesi ve rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak değişimini inceleyerek, elde ettiğimiz sonuçları Tablo

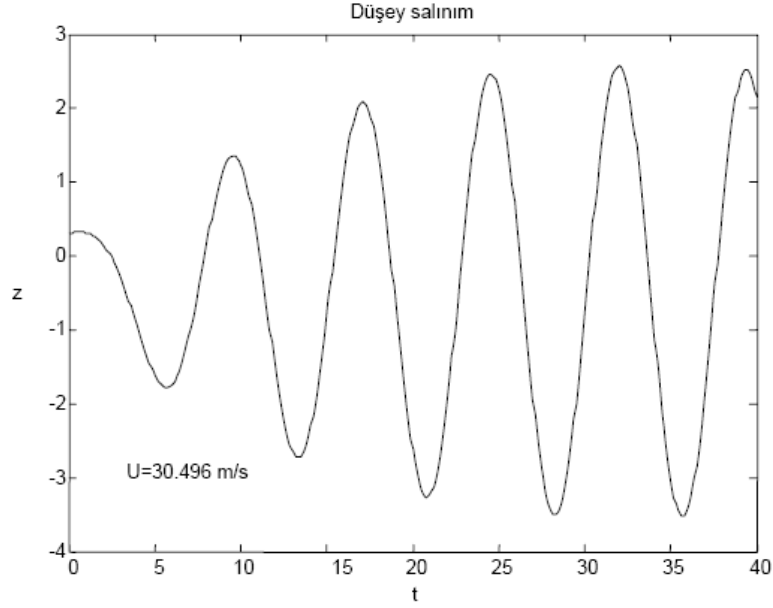
3.6.'da sunuyoruz. Düşey salınımın doğal frekansı $W_z = 0.849$, periyot $\frac{2\pi}{W_z} = 7.4007$ dir.

Kullanılan parametre değerleri Tablo 3.1.'den alınmıştır.

Tablo 3.6. Sönümlü düşey salınımın frekansının rüzgârın hızındaki artışa bağlı olarak değişimi

Rüzgâr Hızı	Dış frekans
U(m/s)	W_θ (s)
1	1.4317
5	1.4197
10	1.3814
15	1.3151
20	1.2162
25	1.0757
30	0.8739
<u>30.496</u>	<u>0.849</u>
35	0.5467

Tablo 3.6.'da görüleceği üzere rüzgâr hızındaki artışın dış frekansı azalttığı gözlenmektedir. Belirli bir rüzgâr hızında dış frekans doğal frekansa eşit olmakta ve rezonans durumu ortaya çıkmaktadır.



Şekil 3.22. $z(t)$ düşey salınımının yerel değişimleri

Şekil 3.22.'de düşey salınımın $t \in [0, 40]$ ve Tablo 3.1.'deki parametre değerleri için, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. $U = 30.496$ m/s rüzgâr değeri için düşey salınımın dış salınım frekansı ($W_\theta = 0.849$) doğal frekansına eşit olduğundan, salınım genliği hızla artmaya başlamaktadır.

Buna göre yukarıda belirtilen gözlemlere ilaveten;

- Düşey ve burulma salınım denklemlerinde sönüm terimi bulunduğundan, zamanın artan değerleri için sönüm gerçekleşmekte,
- U rüzgâr hızının artan değerlerine karşılık burulma hareketinin periyodunun artmakta olduğu bunun sonucu olarak ta frekansının azaldığı, dolayısıyla G_LMK2 modeli bağdaşık(couple) olduğundan burulma salınımının frekansı, düşey salınımın dış frekansı olduğundan, düşey salınımında dış frekansının azalmakta olduğu,
- U rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak düşey ve burulma salınım genlikleri artmakta, belirli bir eşik değerinden sonra salınım genliği sonsuza gitmekte ve köprünün çökmekte olduğu
- Pratik rezonans, Sönümlü G_LMK2 modelinde düşey ve burulma salınım frekanslarının oranı olarak ifade edildiği gözlenmektedir.

Aşağıda bazı köprüler için fiziksel büyüklükler ve boyutlu G_LMK2 modelinde Tablo 3.7, Tablo 3.9 daki parametre değerleri kullanılarak elde edilen kritik rüzgâr hızları verilmektedir.

Tablo 3.7. Köprüler için ortalama rüzgâr yükü katsayıları(Larsen, 1998).

Katsayılar	C_{L0}	C_{L1}	C_{M0}	C_{M1}
FDM (Kurada,1996)	-0.100	6.48	0.025	1.15
DVM (Walter,1994)	0.000	4.13	0.027	1.15
Deney (Larsen,199)	0.067	4.37	0.028	1.17

Tablo 3.8. Bazı asma köprüler için fiziksel sabitlerin büyüklükleri ve Tablo 3.7.'deki katsayılar kullanılarak bulunan, köprüleri rezonansa sokan kritik rüzgâr hızları.

Köprü	$W' KN/m$	$I(m^4)$	$L_B(m)$	δ_θ, δ_z	k	$L_E(m)$	m_k	$U_\infty(m/s)$
Golden Gate	333	5.28	1280	391.5455	4799.3	12.5	2963.7	58
George Washington	584	3.96	1007	416.0493	3889.1	18	5197.6	52
Forth	153	4.73	1006	173.2081	2714.2	16.5	1361.7	43
San Francisco-Oakland	272	8.34	704	85.1734	959.87	10	2420.8	25
Verrazona Narrows	535	10.8	1298	356.8384	3074.9	12.65	4761.5	46
Tacoma Narrows	83	0.15	853	515.0491	68043	6	738.7	26
Ortalama Değerler	327	6.6	1035	226.9027	2428.5	12.6	2910	41

Tablo 3.9. Köprüler için ortalama rüzgâr yükü katsayıları(Scanlan vd.,1997).

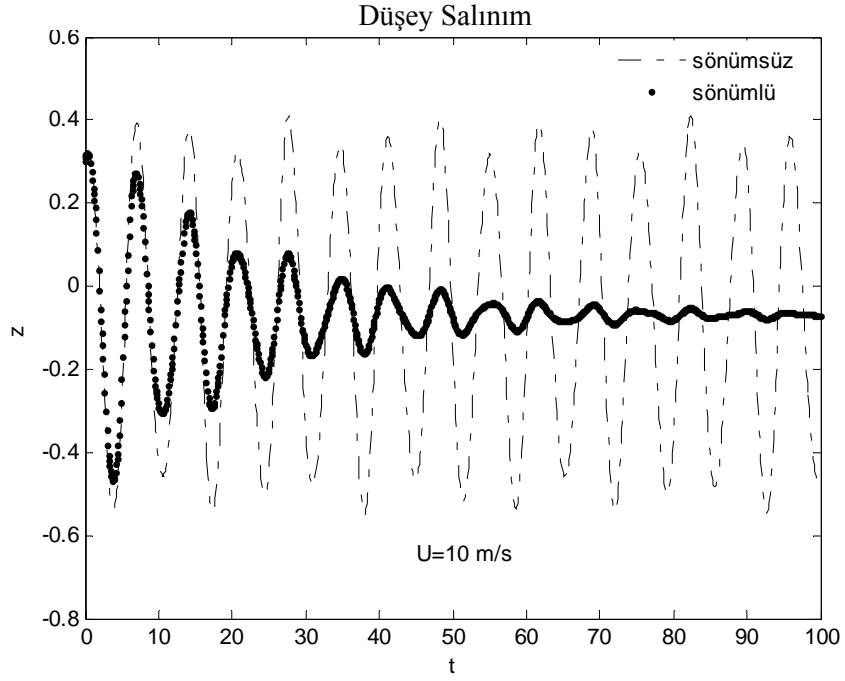
Katsayılar	C_{L0}	C_{L1}	C_{M0}	C_{M1}
Değer	-0.12	0.43	0.023	0.56

Tablo 3.10. Bazı asma köprüler için fiziksel sabitlerin büyüklükleri ve Tablo 3.9.'daki katsayılar kullanılarak elde edilen kritik rüzgâr hızları

Köprü	$W' \text{ KN/m}$	$I(m^4)$	$L_B(m)$	δ_θ, δ_z	k	$L_E(m)$	m_k	$U_\infty(m/s)$
Golden Gate	333	5.28	1280	391.5455	4799.3	12.5	2963.7	83
George Washington	584	3.96	1007	416.0493	3889.1	18	5197.6	75
Forth	153	4.73	1006	173.2081	2714.2	16.5	1361.7	62
San Francisco-Oakland	272	8.34	704	85.1734	959.87	10	2420.8	37
Verrazona Narrows	535	10.8	1298	356.8384	3074.9	12.65	4761.5	67
Tacoma Narrows	83	0.15	853	515.0491	68043	6	738.7	37
Ortalama Değerler	327	6.6	1035	226.9027	2428.5	12.6	2910	59

3.5.3. Sönümsüz Salınım ile Sönümlü Salınımın Karşılaştırılması

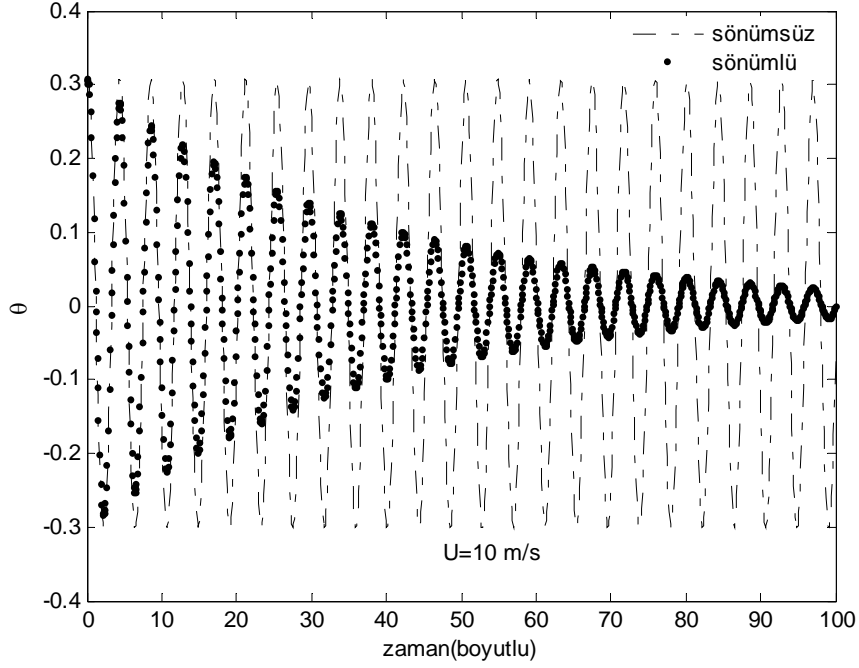
Bu bölümde G_LMK2 modelindeki sönümlü ve sönümsüz düşey ve burulma salınımının davranışının, $U = 10 \text{ m/s}$ ortalama rüzgâr hızı için karşılaştırıyoruz.



Ŗekil 3.23. $U=10 \text{ m/s}$ ortalama rüzgâr hızı için, sönümlü ve sönümsüz düŖey salınımın davranıŖı

Ŗekil 3.23.'de $U=10 \text{ m/s}$ ortalama rüzgâr hızı, Tablo 3.1. ve Tablo 3.9.'daki parametre değerleri için, sönümlü ve sönümsüz düŖey salınımın davranıŖı gözlenmektedir. Ŗekil 3.23.'de zaman ilerledikçe sönümlü düŖey salınım genliğinin, sönümsüz modele göre azaldığı gözlenmektedir.

Burulma Salınımı

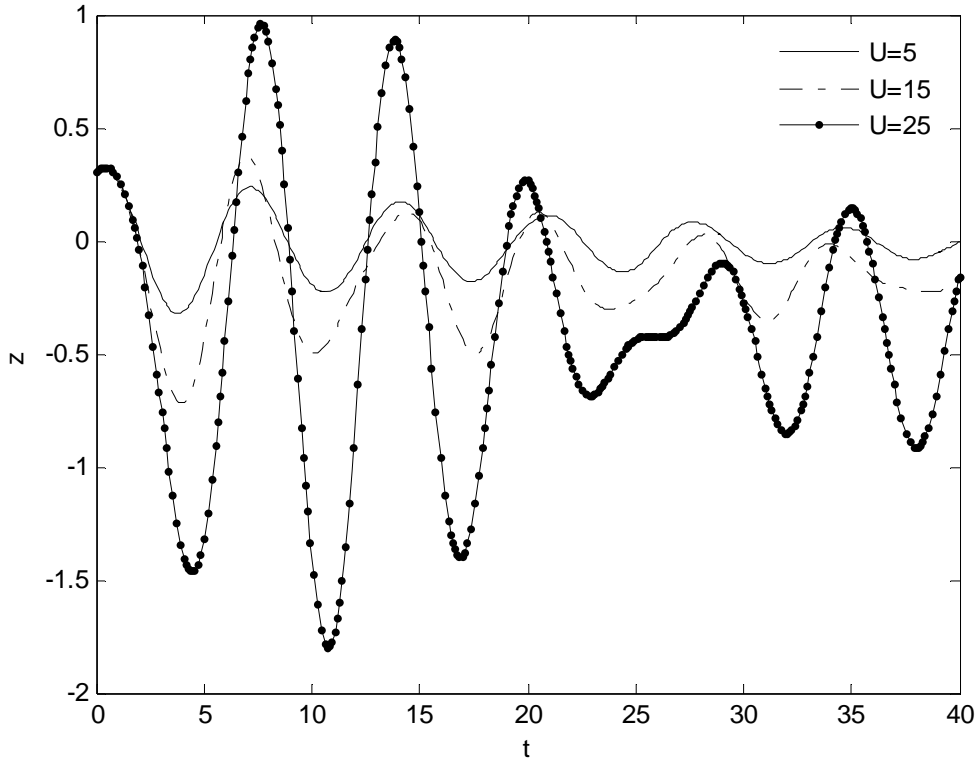


Şekil 3.24. $U = 10$ m/s ortalama rüzgâr hızı için, sönümlü ve sönümsüz burulma salınımının davranışı

Şekil 3.24.'de $U = 10$ m/s ortalama rüzgâr hızı için, sönümlü ve sönümsüz burulma salınımının davranışı gözlenmektedir. Şekil 3.24.'de zaman ilerledikçe sönümlü burulma salınım genliğinin, sönümsüz modele göre azaldığı gözlenmektedir.

3.5.4. Hızın Düşey Salınım Üzerine Etkileri

Bu bölümde ortalama rüzgâr hızındaki değişim, G_LMK2 modelindeki düşey salınımın davranışı üzerine etkilerini inceleyeceğiz. Burada kullanılan parametre değerleri Tablo 3.1. ve Tablo 3.9.'dan alınmıştır

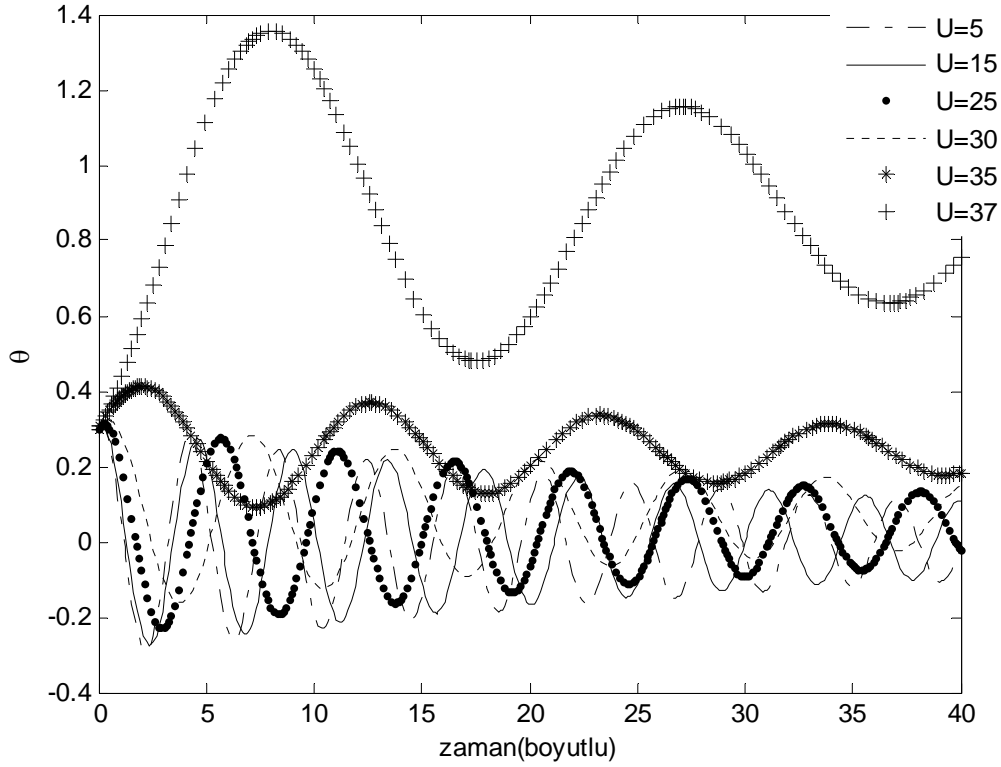


Şekil 3.25. Farklı U değerleri için düşey salınımının davranışı

Şekil 3.25.'de rüzgâr hızı arttığında düşey salınımın genliğinin arttığı fakat buna karşı salınımın periyodunun ve frekansının değişmediği gözlenmektedir.

3.5.5. Hızın Burulma Salınımının Frekansı ve Periyodu Üzerine Etkileri

Bu bölümde ortalama rüzgâr hızındaki değişim, G_LMK2 modelindeki burulma salınımının davranışı üzerine etkilerini inceleyeceğiz. Burada kullanılan parametre değerleri Tablo 3.1. ve Tablo 3.9.'dan alınmıştır



Şekil 3.26. Farklı U değerleri için burulma salınımlarının davranışını

Şekil 3.26.'da rüzgâr hızı arttığında burulma salınımlarının genliğinin arttığı, bununla birlikte salınımların periyodunun da arttığı, bunun sonucu olarak salınımların frekansının azaldığı görülmektedir.

3.6. Geliştirilmiş Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli(G_LMK1)

Askılarda gevşeme olmadığını kabul edelim. Bu durumda $(z + l \pm L_E \sin \theta)^+ > 0$ veya $(z + l \pm L_E \sin \theta)^+ = z + l \pm L_E \sin \theta$ elde edilir. Bunun sonucu olarak, düşey ve burulma salınımlarının denklemleri,

$$\begin{aligned} \ddot{z} + 2\delta_{z_1} \dot{z} + (2k_1 + 1)z &= \hat{C}_{L0} + \hat{C}_{L1}\theta \\ z(0) &= z_0, \quad z'(0) = \hat{z}_1 \end{aligned} \quad (3.77)$$

ve

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + 2\delta_{\theta_1}\dot{\theta} + 3k_1 \sin 2\theta &= \hat{C}_{M0} + \hat{C}_{M1}\theta \\ \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) &= \hat{\theta}_1 \end{aligned} \quad (3.78)$$

elde edilir. Elde edilen bu model, L-M modelinin aksine bir bağıdaşık(couple) sistemdir. Bu modeli, Geliştirilmiş Lazer-McKenna modeli veya kısaca G_LMK1 modeli olarak adlandırıyoruz. Bu modele göre askılarda gevşeme olmaması durumunda da düşey ve burulma salınımlarının birbirleri üzerine etkileri mevcuttur. Aşağıdaki kesimde adi diferensiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözüm yöntemlerinden çok sık kullanılan diferensiyel dönüşüm yöntemi(DDY)'inden bahsedilmektedir.

3.6.1. G_LMK1 Modeli ve Analizi

Bu bölümde, G_LMK1 modelinin yaklaşık analitik çözümü diferensiyel dönüşüm yöntemi(DDY) ile elde edilmektedir.

3.6.2. Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi(DDY)

Hassan(2002), Chen vd. (1996, 1998) ve Jang vd. (1997, 2000, 2001) de ifade edildiği gibi diferensiyel dönüşümün temel tanımı aşağıdaki gibi verilebilir. $z(t)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü aşağıdaki gibi anımlanabilir:

$$Z(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k z(t)}{dt^k} \right]_{t=0} . \quad (3.79)$$

(3.79) da $z(t)$ orjinal fonksiyon ve $Z(k)$ dönüşüm fonksiyonudur. $Z(k)$ 'nın diferensiyel ters dönüşümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k Z(k) . \quad (3.80)$$

burada, (3.79) ve (3.80) ifadelerinden

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left[\frac{d^k z(t)}{dt^k} \right]_{t=0} \quad (3.81)$$

elde edilir. (3.81) denklemi Taylor serisi açılımından elde edilen diferensiyel dönüşüm konseptini ifade eder. Gerçek uygulamalarda $z(t)$ fonksiyonu sonlu bir seri ile ifade edilebilir ve (3.80) denklemi,

$$z(t) = \sum_{k=0}^N t^k Z(k) \quad . \quad (3.82)$$

yazılabilir. (3.80) denkleminde $\sum_{k=N+1}^{\infty} t^k Z(k)$ küçük terimler için ihmal edilebilir.

Tablo 3.11. Diferensiyel dönüşüm yöntemi için temel işlemler

Orjinal Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu
$z(t) = u(t) \mp v(t)$	$Z(k) = U(k) \mp V(k)$
$z(t) = cw(t)$	$Z(k) = cW(k)$
$z(t) = \frac{dw(t)}{dt}$	$Z(k) = (k+1)W(k+1)$
$z(t) = \frac{d^i w(t)}{dt^i}$	$Z(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+i)W(k+i)$
$z(t) = u(t)v(t)$	$Z(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$
$z(t) = u(t)v(t)w(t)$	$Z(k) = \sum_{s=0}^k \sum_{m=0}^{k-s} U(s)V(m)W(k-s-m)$
$z(t) = e^{at}$	$Z(k) = \frac{a^k}{k!}$
$z(t) = \sin(wt + \phi)$	$Z(k) = \frac{w^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2} + \phi\right)$
$z(t) = \cos(wt + \phi)$	$Z(k) = \frac{w^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2} + \phi\right)$
$z(t) = Ce^{at} \sin(wt + \phi)$	$Z(k) = C \sum_{l=0}^k \frac{a^l}{l!} \sin\left(\frac{\pi(k-l)}{2} + \phi\right) \frac{w^{(k-l)}}{(k-l)!}$
$z(t) = t^m$	$Z(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$

Tablo 3.14.'deki temel işlemlerin yanı sıra Trigonometrik nonlineeriteyi verelim,

Tanım 3.7

$z(x) = \sin(\alpha x)$, $w(x) = \cos(\alpha x)$ Trigonometrik ifadeleri verilmiş olsun.

Diferensiyel dönüşüm tanımından,

$$\begin{aligned} Z(0) &= \left[\sin(\alpha x(t)) \right]_{t=0} = \sin(\alpha x(0)) = \sin(\alpha X(0)) \\ W(0) &= \left[\cos(\alpha x(t)) \right]_{t=0} = \cos(\alpha x(0)) = \cos(\alpha X(0)) \end{aligned} \quad (3.83)$$

bulunur. Diğer dönüşüm fonksiyonlarını bulmak için $z(x) = \sin(\alpha x)$, $w(x) = \cos(\alpha x)$ fonksiyonlarının türevlerini kullanalım,

$$\begin{aligned} \frac{dz(x)}{dt} &= \alpha \cos(\alpha x) \frac{dx(t)}{dt} = \alpha w(x) \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dw(x)}{dt} &= -\alpha \sin(\alpha x) \frac{dx(t)}{dt} = -\alpha z(x) \frac{dx(t)}{dt} \end{aligned} \quad (3.84)$$

(3.84) denkleminde diferensiyel dönüşüm yöntemi(DDY) uygulanır ise,

$$\begin{aligned} (k+1)Z(k+1) &= \alpha \sum_{r=0}^k (k+1-r)W(r)X(k+1-r) \\ (k+1)W(k+1) &= -\alpha \sum_{r=0}^k (k+1-r)Z(r)X(k+1-r) \end{aligned} \quad (3.85)$$

elde edilir. (3.85) ifadesinde k yerine $k-1$ yazılır ise,

$$\begin{aligned} Z(k) &= \alpha \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-r}{k} W(r)X(k-r), \quad k \geq 1 \\ W(k) &= -\alpha \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-r}{k} Z(r)X(k-r), \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (3.86)$$

elde edilir. (3.83) ve (3.86) ifadelerinden,

$$Z(k) = \begin{cases} \sin(\alpha X(0)), & k = 0, \\ \alpha \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-r}{k} W(r)X(k-r), & k \geq 1. \end{cases} \quad (3.87)$$

ve

$$W(k) = \begin{cases} \cos(\alpha X(0)), & k = 0, \\ -\alpha \sum_{r=0}^{k-1} \left(\frac{k-r}{k} \right) Z(r) X(k-r), & k \geq 1. \end{cases} \quad (3.88)$$

elde edilir (Chang vd. 2008).

3.6.3. Padé Yaklaşımı

Bir Padé yaklaşımı, $y(x)$ fonksiyonunun Taylor serisi açılımındaki katsayılarından oluşturulan iki polinomun oranıdır. Bir $y(x)$ fonksiyonunun $[L/M]$ Padé yaklaşımı, Baker(1975) de verilmiştir.

$$\left[\frac{L}{M} \right] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)}, \quad (3.89)$$

burada $P_L(x) = \sum_{j=0}^L p_j x^j$ derecesi en çok L ve $Q_M(x) = \sum_{i=0}^M q_i x^i$ derecesi en çok M olan polinomlardır. Bir $y(x)$ fonksiyonunun Taylor serisi açılımı,

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i, \quad (3.90)$$

$$y(x) - \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = O(x^{L+M+1}), \quad (3.91)$$

denklemler ile $P_L(x)$ ve $Q_M(x)$ polinomlarının katsayıları belirlenir. (3.91) denkleminde x 'in eşit kuvvetlerinin katsayıları eşitlendiğinde, $Q_M(0) = q_0 = 1$, $q_{M+1} = q_{M+2} = \dots = q_N = 0$;

$p_{L+1} = p_{L+2} = \dots = p_N = 0$ olmak şartı ile,

$$\begin{aligned}
a_{L+1} + a_L q_1 + \dots + a_{L-M+1} q_M &= 0, \\
a_{L+2} + a_{L+1} q_1 + \dots + a_{L-M+2} q_M &= 0, \\
. & \\
. & \\
. & \\
a_{L+M} + a_{L+M-1} q_1 + \dots + a_L q_M &= 0,
\end{aligned} \tag{3.92}$$

ve

$$\begin{aligned}
a_0 &= p_0, \\
a_1 + a_0 q_1 &= p_1, \\
a_2 + a_1 q_1 + a_0 q_2 &= p_2, \\
. & \\
. & \\
. & \\
a_L + a_{L-1} q_1 + \dots + a_0 q_L &= p_L,
\end{aligned} \tag{3.93}$$

bulunur. Baker(1975), (3.92) ifadesinden $q_i, i = 1 \dots M$ bilinmeyenleri bulunur, bulunan bu değerler (3.93) de yerine yazılarak $p_j, j = 0 \dots L$ bilinmeyenleri bulunur.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} &= \frac{\begin{bmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \dots & a_{L+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_L & a_{L+1} & \dots & a_{L+M} \\ \sum_{j=M}^L a_{j-M} x^j & \sum_{j=M-1}^L a_{j-M+1} x^j & \dots & \sum_{j=0}^L a_j x^j \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \dots & a_{L+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_L & a_{L+1} & \dots & a_{L+M} \\ x^M & x^{M-1} & \dots & 1 \end{bmatrix}}
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Eğer (3.92) ve (3.93) tekil olmayan(non singular) iseler, (3.98) denkleminde çözüm elde edilir.

Aşağıdaki bölümde, G_LMK1 modelindeki (3.77) ve (3.78)' denklemlerine diferensiyel dönüşüm yöntemini uygulanmaktadır.

3.6.4. G_LMK1 Modeli İçin Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

Temel diferensiyel dönüşüm operatörleri kullanılarak (3.78) denkleminin diferensiyel dönüşümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$(k+1)(k+2)\Theta(k+2) + 2\delta_{\theta_1}(k+1)\Theta(k+1) + 3k_1F(k) = \hat{C}_{M0}\delta(k) + \hat{C}_{M1}\Theta(k) \quad (3.95)$$

$$\Theta(0) = \theta_0, \Theta(1) = \hat{\theta}_1$$

burada, (3.87) ve (3.88) ifadelerinden

$$F(k) = \begin{cases} \sin(2\Theta(0)), & k = 0, \\ 2 \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-r}{k} G(r)\Theta(k-r), & k \geq 1. \end{cases} \quad (3.96)$$

ve

$$G(k) = \begin{cases} \cos(2\Theta(0)), & k = 0, \\ -2 \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-r}{k} F(r)\Theta(k-r), & k \geq 1. \end{cases} \quad (3.97)$$

elde edilir. Tablo 3.1.'deki parametre değerleri, lineer kaldırma ve moment terimleri ve ortalama rüzgâr hızı $U = 5$ için (3.81) denkleminde yerine yazılır ve diferensiyel dönüşüm alınır ise,

$$\Theta(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[-0.02(k+1)\Theta(k+1) - 26.7F(k) + .03340527293\delta(k) + .8133457753\Theta(k) \right] \quad (3.98)$$

$$\Theta(0) = 0.3, \Theta(1) = 0.1$$

elde edilir. $N = 6$ için (3.98) ifadesi ve (3.80) deki ters dönüşüm kullanılır ise aşağıdaki seri çözüm

$$\theta(t) = 0.3 + 0.1t - 7.417t^2 - .672t^3 + 26.828t^4 - .889t^5 + 16.291t^6 + O(t^7) \quad (3.99)$$

elde edilir. Diferensiyel dönüşüm çözümünün(3.99) doğruluk değerini artırmak için, aşağıda gösterilen modified diferensiyel dönüşüm yöntemi(MDDY) uygulanmaktadır(Jiao, vd, 2002).

Bu bölümde (3.99) denkleminde Laplace dönüşümü uygularsak

$$L(\theta(s)) = \frac{0.3}{s} + \frac{0.1}{s^2} - \frac{14.834}{s^3} - \frac{4.0361}{s^4} + \frac{643.885}{s^5} - \frac{106.769}{s^6} + \frac{11730.15}{s^7} \quad (3.100)$$

elde edilir. Basitleştirmek için $s = \frac{1}{t}$; alınırsa bunun sonucunda o zaman

$$L(\theta(t)) = 0.3t + 0.1t^2 - 14.834t^3 - 4.0361t^4 + 643.885t^5 - 106.769t^6 + 11730.158t^7 \quad (3.101)$$

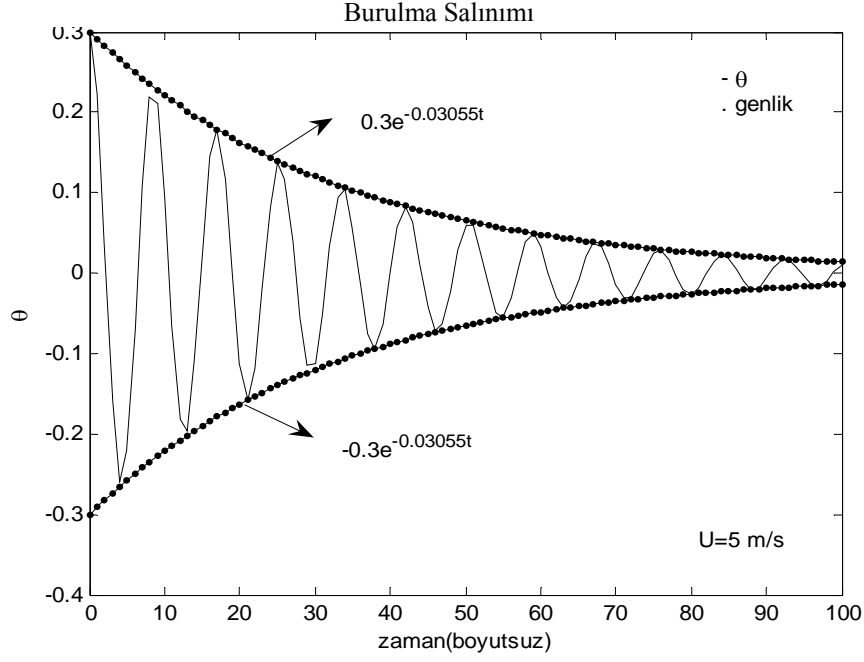
denklemleri elde edilir. (3.101) ifadesinin $[2/2]$ Padé yaklaşımı alınıp ve $t = \frac{1}{s}$ yazılırsa s ye bağlı elde edilen ifadenin ters Laplace dönüşümü alınır ise

$$\theta(t) = e^{-0.03055t} [0.3 \cos(7.0304t) + 0.0155 \sin(7.0304t)] \quad (3.102)$$

veya

$$\theta(t) = 0.3e^{-0.03055t} \sin(7.0304t + 1.5192) \quad (3.103)$$

bulunur. $\theta(t)$ için Padé yaklaşımından elde edilen bu sonuçların zamana bağlı değişimi Şekil 3.27.'de sunulmuştur.



Şekil 3.27. $\theta(t)$ burulma salınımının yerel değişimleri

Şekil 3.27.'de Tablo 3.2.'deki parametre değerleri ve $t \in [0:100]$ için burulma salınımının, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için burulma salınımının genliği azalmaktadır. Dolayısıyla burulma salınımının, yavaş sönümlü salınım olduğu görülmektedir.

Benzer şekilde yukarıda yaptığımız işlemleri düşey salınım denkleminde de uygulayalım. Temel diferensiyel dönüşüm operatörleri kullanılarak (3.77) denkleminin diferensiyel dönüşümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$(k+1)(k+2)Z(k+2) + 2\delta_{z_1}(k+1)Z(k+1) + (2k_1+1)Z(k) = \hat{C}_{L0}\delta(k) + \hat{C}_{L1}H(k) \quad (3.104)$$

$$Z(0) = z_0, Z(1) = \hat{z}_1$$

Burada, Tablo 3.14 deki dönüşümler yardımı ile

$$H(k) = C \sum_{l=0}^k \frac{a^l}{l!} \sin\left(\frac{\pi(k-l)}{2} + \phi\right) \frac{w^{(k-l)}}{(k-l)!} \quad (3.105)$$

elde edilir. Tablo 3.1. deki parametre değerleri, lineer kaldırma ve moment terimleri ve ortalama rüzgâr hızı $U = 5$ için (3.77) denkleminde yerine yazılır ve DDY uygulanır ise,

$$Z(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[\begin{array}{l} -0.02(k+1)Z(k+1) - 18.84Z(k) - 2904\delta(k) + \\ 0.3123 \sum_{l=0}^k \frac{(-0.03055)^l}{l!} \sin\left(\frac{\pi}{2}(k-l) + 1.5192\right) \frac{7.0304^{(k-l)}}{(k-l)!} \end{array} \right] \quad (3.106)$$

elde edilir. (3.106) ifadesi ve (3.80) deki ters dönüşüm kullanılır ise

$$z(t) = 0.3 + 0.1t - 2.452t^2 - 2.24004t^3 + 1.7098t^4 + 1.10307t^5 + 2.4556t^6 + O(t^7) \quad (3.107)$$

elde edilir. Bu bölümde (3.107) denkleminde Laplace dönüşümü uygularsak

$$L(z(s)) = \frac{0.3}{s} + \frac{0.1}{s^2} - \frac{4.9049}{s^3} - \frac{1.4402}{s^4} + \frac{41.0374}{s^5} + \frac{12.3695}{s^6} + \frac{1768.08}{s^7} \quad (3.108)$$

elde edilir. Basitleştirmek için $s = \frac{1}{t}$; alınırsa bunun sonucunda o zaman

$$L(z(t)) = 0.3t + 0.1t^2 - 4.90497t^3 - 1.4402t^4 + 41.03742t^5 + 12.3695t^6 + 1768.0874t^7 \quad (3.109)$$

denklemleri elde edilir. (3.109) ifadesinin $[2/2]$ Padé yaklaşımı alınıp ve $t = \frac{1}{s}$ yazılırsa s

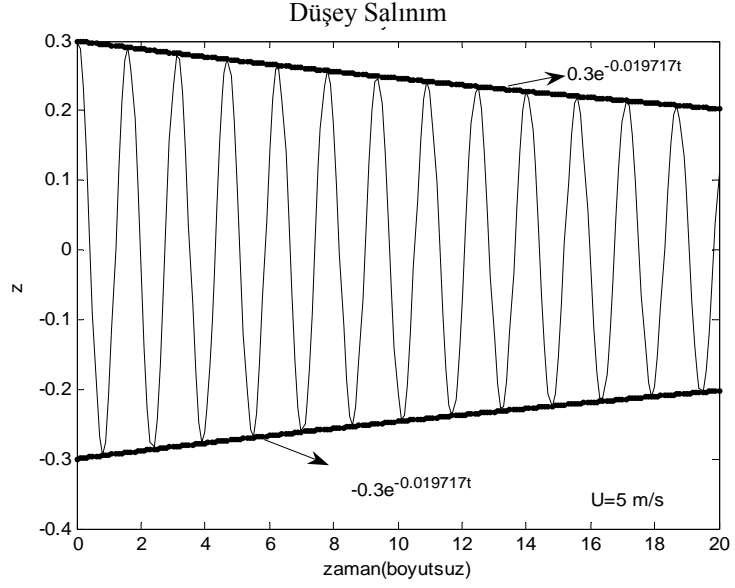
ye bağlı elde edilen ifadenin ters Laplace dönüşümü alınır ise

$$z(t) = e^{-0.019717t} [0.3 \cos(4.04182t) + 0.0262 \sin(4.04182t)] \quad (3.110)$$

veya

$$z(t) = 0.3e^{-0.019717t} \sin(4.04182t + 1.4837) \quad (3.111)$$

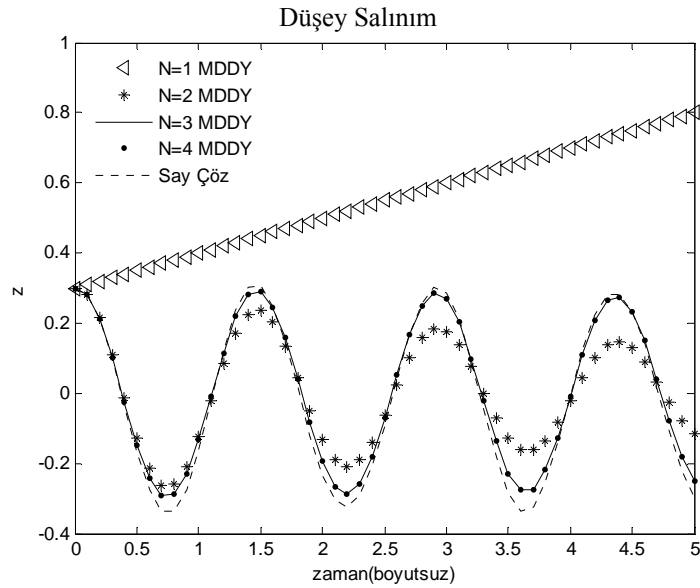
bulunur. $z(t)$ için Padé yaklaşımından elde edilen bu sonuçların zamana bağlı değişimi şekil 3.29 da sunulmuştur.



Şekil 3.28. $z(t)$ düşey salınımın yerel değişimleri

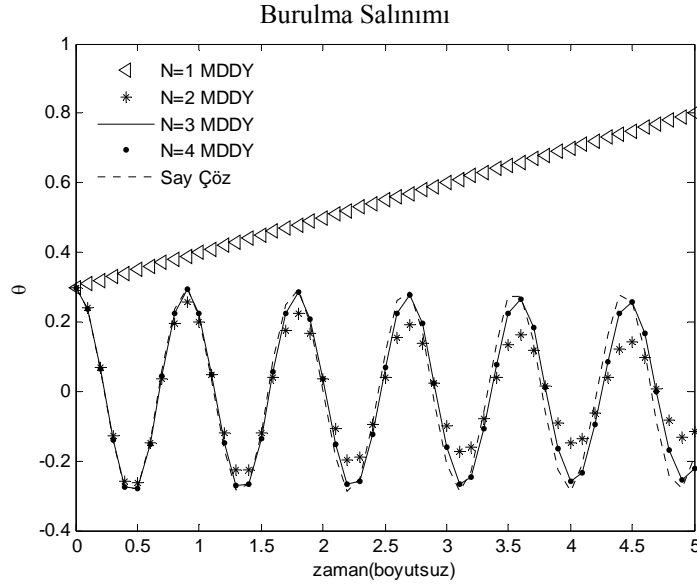
Şekil 3.28.'de, Tablo 3.2 deki parametre değerleri ve $t \in [0:0.1:20]$ için burulma salınımının, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için burulma salınımının genliği azalmaktadır. Dolayısıyla burulma salınımının, yavaş sönümlü salınım olduğu görülmektedir.

Şimdide, yukarıda $N=6$ için yapılan işlemler, $N \geq 1$ birkaç tane farklı değeri için tekrarlanır ve çözümleri karşılaştırılır ise aşağıdaki sonuçlar elde edilir.



Şekil 3.29. $N = 1, 2, 3, 4$ değerleri için $z(t)$ 'nin yerel değişimleri

Şekil 3.29.'da Tablo 3.2.'deki parametre değerleri ve $t \in [0:0.1:5]$ için düşey salınımın, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık davranışı gözlenmektedir. Burada farklı N değerleri için DDY' den elde edilen sonuçlara, MDDY (Modife Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi) uygulandıktan sonra, N değerlerindeki artışa bağlı olarak yüksek doğruluğa ve hızlı yakınsaklık oranına sahip yaklaşık analitik çözümler elde edildiği ve bu çözümlerin gerçek çözüme yaklaştığı görülmektedir.



Şekil 3.30. $N = 1, 2, 3, 4$ değerleri için $\theta(t)$ 'nin yerel değişimleri

Şekil 3.30.'da, Tablo 3.2.'deki parametre değerleri ve $t \in [0:0.1:5]$ için burulma salınımının, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık davranışı gözlenmektedir. Burada farklı N değerleri için DDY' den elde edilen sonuçlara, MDDY uygulandıktan sonra, N değerlerindeki artışa bağlı olarak yüksek doğruluğa ve hızlı yakınsaklık oranına sahip yaklaşık analitik çözümler elde edildiği ve bu çözümlerin gerçek çözüme yaklaştığı görülmektedir.

3.7. Boyutlu Geliştirilmiş Lazer-McKenna Enine Kesit Modeli (G_LMK)

Bu bölümde de aşağıda ifade edilen boyutlu Geliştirilmiş Lazer-McKenna enine kesit modeli (G_LMK) indeki düşey ve burulma salınım denklemleri

$$\begin{aligned}
m_k z'' + EI \left(\frac{\pi}{L_B} \right)^4 (z+l) + \delta_z z' &= m_k g \\
-k \left[(z+l - L_E \sin \theta)^+ + (z+l + L_E \sin \theta)^+ \right] &+ \frac{\rho U^2 B C_L(\theta)}{2} \\
z(0) = z_0, \quad z'(0) = z_1 &
\end{aligned} \tag{3.112}$$

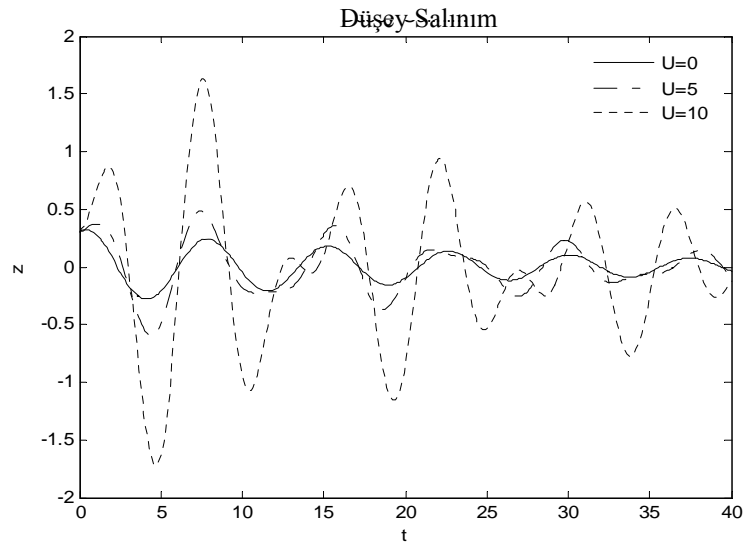
ve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} m_k L_E^2 \theta'' + 2L_E \delta_\theta \theta' - kL_E \cos \theta \left[(z+l - L_E \sin \theta)^+ - (z+l + L_E \sin \theta)^+ \right] &= \\
+ \frac{\rho U^2 B^2 C_M(\theta)}{2} & \\
\theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \theta_1 &
\end{aligned} \tag{3.113}$$

dir. Aşağıda boyutlu G_LMK modelinin sayısal çözümleri hesaplanmaktadır.

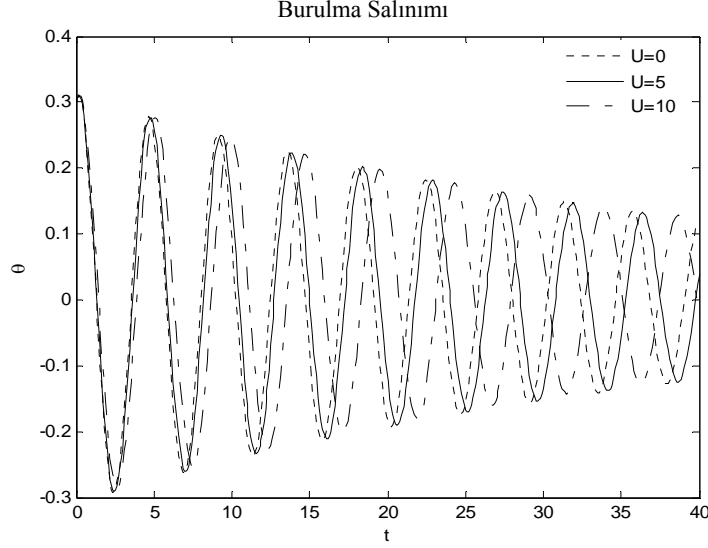
3.7.1. Boyutlu (G_LMK) Modelinin Sayısal Çözümleri

Bu bölümde sönümlü boyutlu G_LMK modeli ve Tablo 3.1. ve 3.7.'de ki parametreler kullanılarak burulma ve düşey salınımın, rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak zamanla değişimi verilmektedir.



Şekil 3.31. $U = 0, 5, 10$ değerleri için $z(t)$ düşey salınımın değişimleri

Şekil 3.31.'de düşey salınımın $t \in [0, 40]$ ve Tablo 3.1. ve Tablo 3.7.'deki parametre değerleri için, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için rüzgâr hızındaki artışın düşey salınımın genliğini artırdığı gözlenmektedir. Bu da beklenen bir sonuçtur.



Şekil 3.32. $U = 0, 5, 10$ değerleri için $\theta(t)$ burulma salınım değişimleri

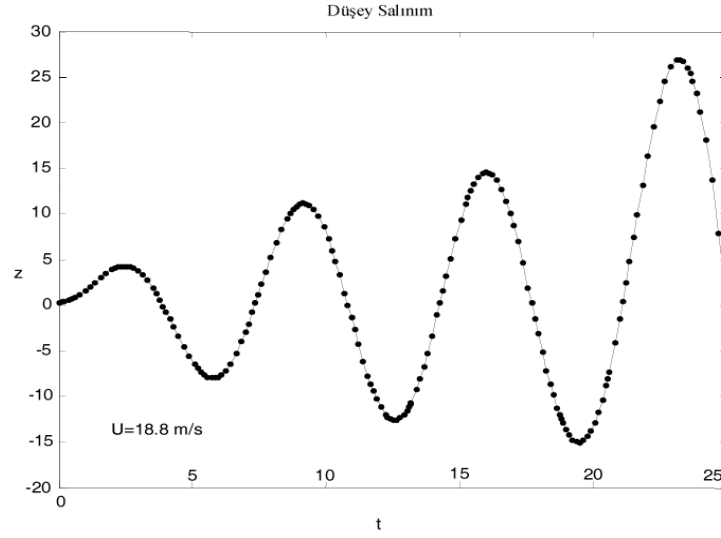
Şekil 3.32.'de burulma salınımının $t \in [0, 40]$ ve Tablo 3.1. ve Tablo 3.7.'deki parametre değerleri için, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için rüzgâr hızındaki artışın burulma salınımın periyodunu artırdığı ve frekansı azalttığı gözlenmektedir.

3.7.2. Boyutlu (G_LMK) Modelinde Rüzgâr Hızındaki Artışa Bağlı Olarak Ortaya Çıkan Nonlinear Etkiler

Bu bölümde sönümlü boyutlu G_LMK modelini ve Tablo 3.1. ve Tablo 3.7.'deki parametreler ve (3.114) deki başlangıç koşulları kullanılarak burulma ve düşey salınımın rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak zamanla değişimleri verilmektedir. Bu modelde kullanılan başlangıç değerleri

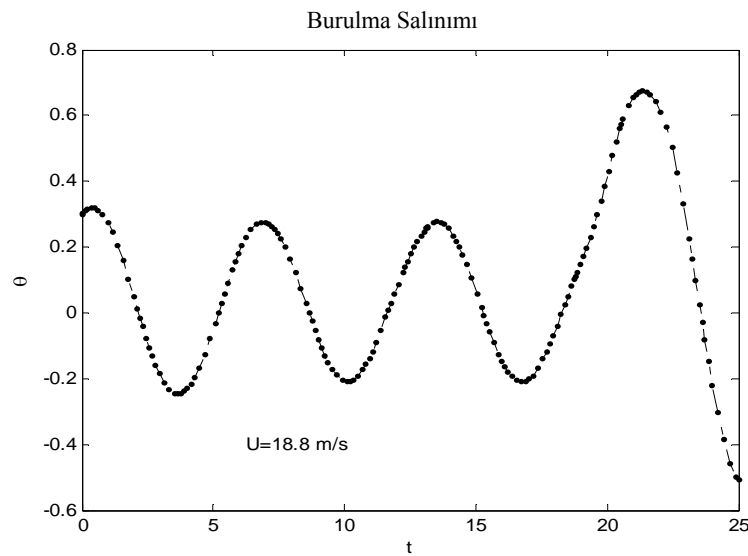
$$\theta(0) = 0.3, \quad \theta'(0) = 0.1, \quad z(0) = 0.3, \quad z'(0) = 0.1 \quad (3.114)$$

olarak alınabilir.



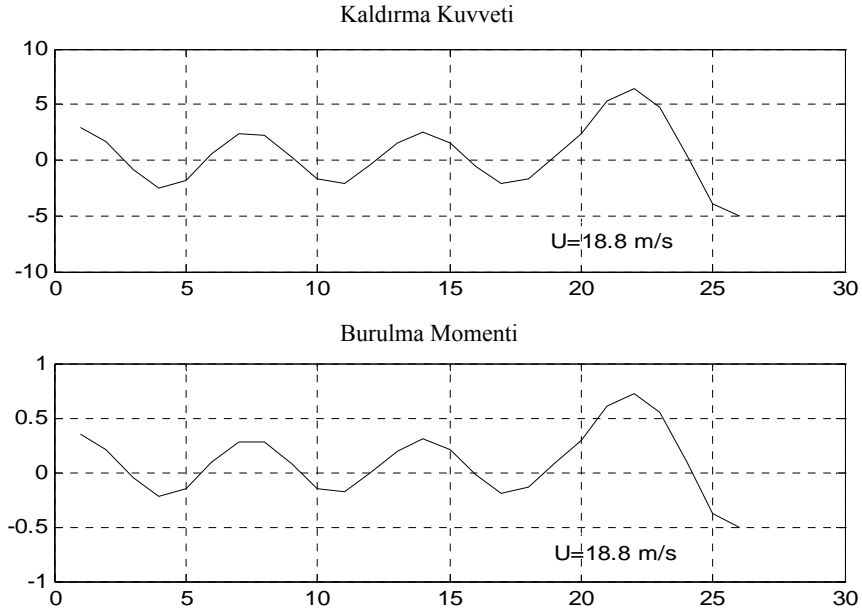
Şekil 3.33. $U = 18.8 \text{ m/s}$ değeri için $z(t)$ düşey salınının yerel değişimleri

Şekil 3.33.' de boyutlu G_LMK modelinin düşey salınının $t \in [0, 25]$ ve Tablo 3.1. ve Tablo 3.7.'deki parametre değerleri için, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için düşey salınının genliğinin hızla artma eğilimine girdiği gözlenmektedir.



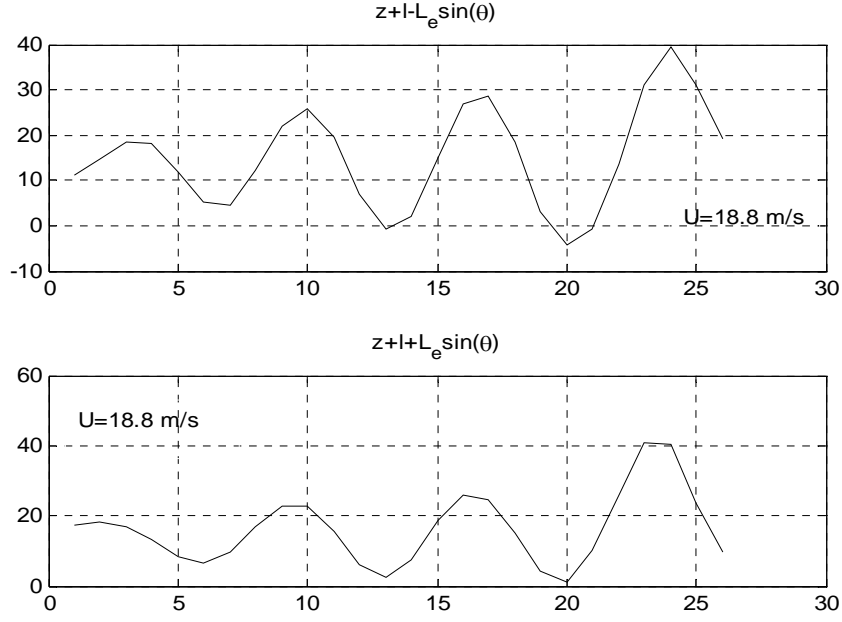
Şekil 3.34. $U = 18.8 \text{ m/s}$ değeri için $\theta(t)$ burulma salınının yerel değişimleri

Şekil 3.34.'de boyutlu G_LMK modelinin burulma salınımlarının $t \in [0, 25]$ ve Tablo 3.1. ve Tablo 3.7.'deki parametre değerleri için, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için burulma salınımlarının genliğinin arttığı gözlenmektedir.



Şekil 3.35. Kaldırma kuvveti ve burulma momentlerinin değişimi

Şekil 3.35.'de BG_LMK modelinde $t \in [0, 25]$ ve Tablo 3.1. ve Tablo 3.7.'deki parametre değerleri için, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen kaldırma kuvveti ve burulma momentlerinin değişimi gözlenmektedir. $U = 18.8 \text{ m/s}$ değeri için kaldırma kuvveti ve burulma momentlerinin negatif değerler aldığı yani nonlineer etkilerin ortaya çıktığı gözlenmektedir.



Şekil 3.36. Yaylardaki yer değiştirmeler

Şekil 3.36.'da $t \in [0, 25]$ ve Tablo 3.1. ve Tablo 3.7.'deki parametre değerleri için, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık yaylarda meydana gelen yer değiştirmeler gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için yaylarda gevşeme olduğu yani nonlinear etkilerin ortaya çıktığı gözlenmektedir.

3.7.3. Boyutlu (G_LMK) Modelinde Başlangıç Koşullarındaki Artışa Bağlı Olarak Ortaya Çıkan Nonlinear Etkiler

Bu bölümde sönümlü boyutlu G_LMK modeli ve Tablo 3.1. ve Tablo 3.7.'deki parametre değerleri için kullanılarak, U rüzgâr hızı sabit tutularak başlangıç koşullarındaki değişime bağlı olarak, nonlinear etkilerin ortaya çıktığı başlangıç koşulları Tablo 3.12, 3.13, 3.14 ve 3.15 de verilmektedir.

Tablo 3.12. Sabit U hızı için, $\theta(0)$ hariç diğer başlangıç koşullarının değiştirilmediği durumda nonlinear etkilerin görülmeye başlandığı başlangıç koşulları

$U (m/s)$ ortalama hız	Başlangıç değerleri ($z(0), z'(0), \theta(0), \theta'(0)$) $\theta(0) \downarrow$	Başlangıç değerleri ($z(0), z'(0), \theta(0), \theta'(0)$) $\theta(0) \downarrow$
5	(0.3, 0.1, 1.4, 0.1), $\theta(0) > 1.4$	(0.3, 0.1, -1.5, 0.1), $\theta(0) < -1.5$
10	(0.3, 0.1, 0.9, 0.1), $\theta(0) > 0.9$	(0.3, 0.1, -1, 0.1), $\theta(0) < -1$
15	(0.3, 0.1, 0.5, 0.1), $\theta(0) > 0.5$	(0.3, 0.1, -0.5, 0.1), $\theta(0) < -0.5$
20	(0.3, 0.1, 0.1, 0.1), $\theta(0) > 0.1$	(0.3, 0.1, 0.1, 0.1), $\theta(0) > 0.1$

Sonuç olarak rüzgâr hızı ve diğer başlangıç koşulları(başlangıç burulma yer değiştirmesi hariç) sabit tutulduğunda nonlinear etkilerin ortaya çıktığı başlangıç koşulları verilmektedir. Rüzgâr hızı arttıkça daha düşük başlangıç değerleri için nonliner etkiler ortaya çıkmaktadır.

Tablo 3.13. Sabit U hızı için, $z(0)$ hariç diğer başlangıç koşullarının değiştirilmediği durumda nonlinear etkilerin görülmeye başlandığı başlangıç koşulları

$U (m/s)$	Başlangıç değerleri ($z(0), z'(0), \theta(0), \theta'(0)$) $z(0) \uparrow$	Başlangıç değerleri ($z(0), z'(0), \theta(0), \theta'(0)$) $z(0) \downarrow$
5	(36.6, 0.1, 0.3, 0.1), $z(0) > 36.6$	(-40.6, 0.1, 0.3, 0.1), $z(0) < -40.6$
10	(27.4, 0.1, 0.3, 0.1), $z(0) > 27.4$	(-23.3, 0.1, 0.3, 0.1), $z(0) < -23.3$
15	(17.6, 0.1, 0.3, 0.1), $z(0) > 17.6$	(-15.4, 0.1, 0.3, 0.1), $z(0) < -15.4$
18	(5, 0.1, 0.3, 0.1), $z(0) > 5$	(-11.9, 0.1, 0.3, 0.1), $z(0) < -11.9$

Sonuç olarak rüzgâr hızı ve diğer başlangıç koşulları(başlangıç düşey yer değiştirmesi hariç) sabit tutulduğunda nonlinear etkilerin ortaya çıktığı başlangıç koşulları verilmektedir. Rüzgâr hızı arttıkça daha düşük başlangıç değerleri için nonliner etkiler ortaya çıkmaktadır.

Tablo 3.14. Sabit U hızı için, $\theta'(0)$ hariç diğer başlangıç koşullarının değiştirilmediği durumda nonlinear etkilerin görülmeye başlandığı başlangıç koşulları

$U (m/s)$ ortalama hız	Başlangıç değerleri ($z(0), z'(0), \theta(0), \theta'(0)$) $\theta'(0) \downarrow$	Başlangıç değerleri ($z(0), z'(0), \theta(0), \theta'(0)$) $\theta'(0) \uparrow$
5	(0.3, 0.1, 0.3, 1.3), $\theta'(0) > 1.3$	(0.3, 0.1, 0.3, -1.3), $\theta'(0) < -1.3$
10	(0.3, 0.1, 0.3, 1), $\theta'(0) > 1$	(0.3, 0.1, 0.3, -1), $\theta'(0) < -1$
15	(0.3, 0.1, 0.3, 0.5), $\theta'(0) > 0.5$	(0.3, 0.1, 0.3, -0.5), $\theta'(0) < -0.5$
18	(0.3, 0.1, 0.3, 0.1), $\theta'(0) > 0.1$	(0.3, 0.1, 0.3, 0.1), $\theta'(0) > 0.1$

Sonuç olarak rüzgâr hızı ve diğer başlangıç koşulları(başlangıç burulma hızı hariç) sabit tutulduğunda nonlinear etkilerin ortaya çıktığı başlangıç koşulları verilmektedir. Rüzgâr hızı arttıkça daha düşük başlangıç değerleri için nonliner etkiler ortaya çıkmaktadır.

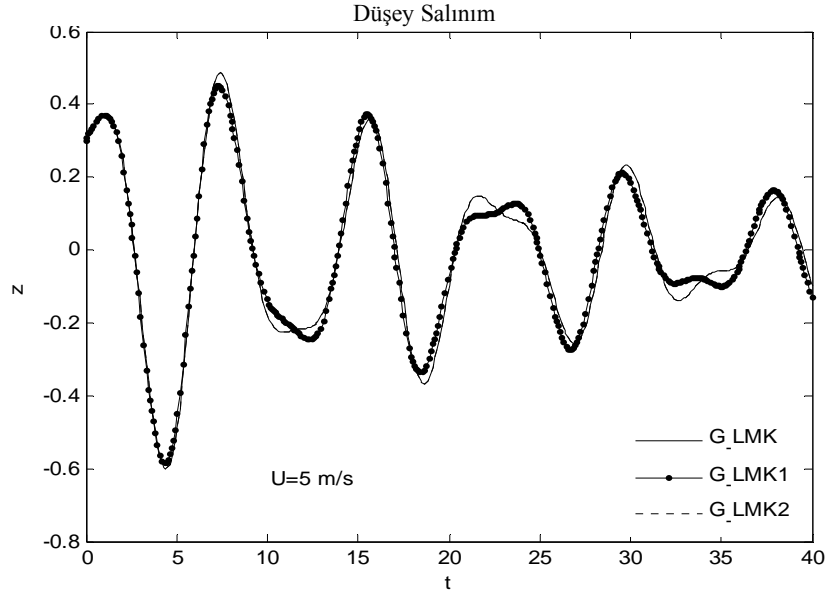
Tablo 3.15. Sabit U hızı için, $z'(0)$ hariç diğer başlangıç koşullarının değiştirilmediği durumda nonlinear etkilerin görülmeye başlandığı başlangıç koşulları

$U (m/s)$	Başlangıç değerleri ($z(0), z'(0), \theta(0), \theta'(0)$) $z'(0) \uparrow$	Başlangıç değerleri ($z(0), z'(0), \theta(0), \theta'(0)$) $z'(0) \downarrow$
5	(0.3, 24, 0.3, 0.1), $z'(0) > 24$	(0.3, -45.5, 0.3, 0.1), $z'(0) < -45.5$
10	(0.3, 17.1, 0.3, 0.1), $z'(0) > 17.1$	(0.3, -28.1, 0.3, 0.1), $z'(0) < -28.1$
15	(0.3, 10.4, 0.3, 0.1), $z'(0) > 10.4$	(0.3, -19.5, 0.3, 0.1), $z'(0) < -19.5$
18	(0.3, 3.7, 0.3, 0.1), $z'(0) > 3.7$	(0.3, -16.9, 0.3, 0.1), $z'(0) < -16.9$

Sonuç olarak rüzgâr hızı ve diğer başlangıç koşulları(başlangıç düşey hız hariç) sabit tutulduğunda nonlinear etkilerin ortaya çıktığı başlangıç koşulları verilmektedir. Rüzgâr hızı arttıkça daha düşük başlangıç değerleri için nonliner etkiler ortaya çıkmaktadır.

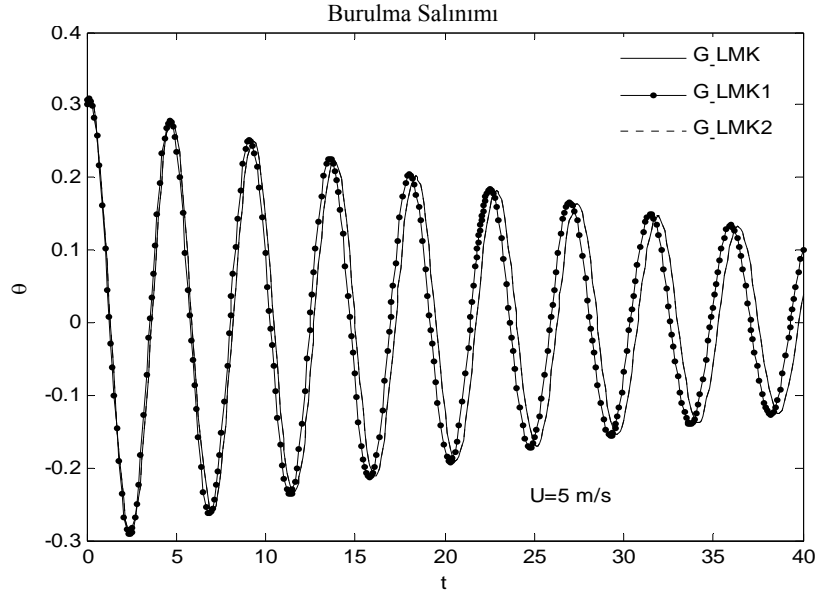
3.8. Boyutlu (G_LMK), Boyutlu (G_LMK1) ve Boyutlu (G_LMK2) Modellerinin Sayısal Çözümlerinin Karşılaştırılması

Bu bölümde sönümlü boyutlu G_LMK, G_LMK1 ve G_LMK2 modelleri ve Tablo 3.1 ve 3.7 deki parametreler ve (3.114) deki başlangıç koşulları kullanılarak burulma ve düşey salınımın rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak zamanla değişimleri verilmektedir.



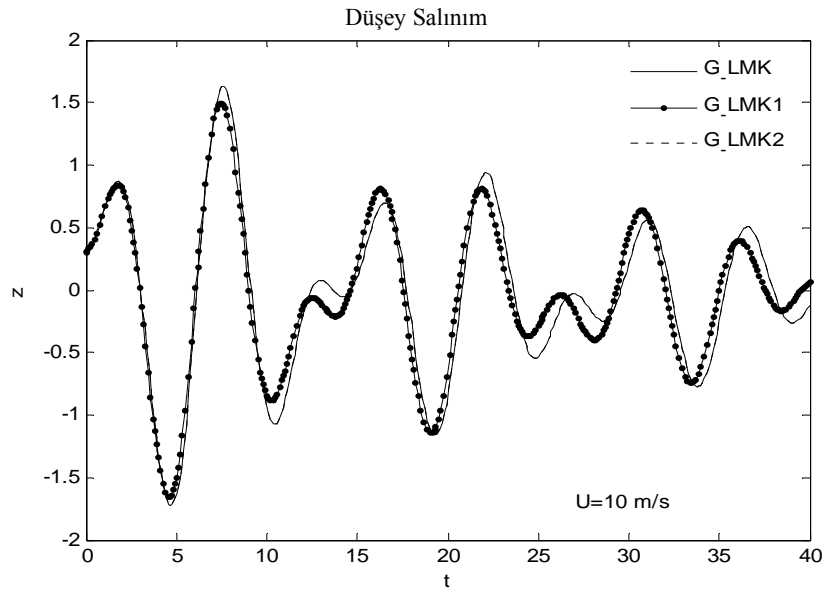
Şekil 3.37. $U = 5$ m/s değeri için $z(t)$ değişimleri

Şekil 3.37.'de boyutlu G_LMK, G_LMK1 ve G_LMK2 modellerinin düşey salınımın için $t \in [0, 40]$ ve Tablo 3.1. ve Tablo 3.7.' deki parametre değerleri, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için $U = 5$ m/s rüzgâr hızında boyutlu G_LMK ve G_LMK2 modelleri tek bir model gibi salınım yaparken, boyutlu G_LMK1 modelinin düşey salınımın genliğinde küçük değişikliklerin meydana geldiği gözlenmektedir. Nonlineer etkiler ortaya çıkmamaktadır.



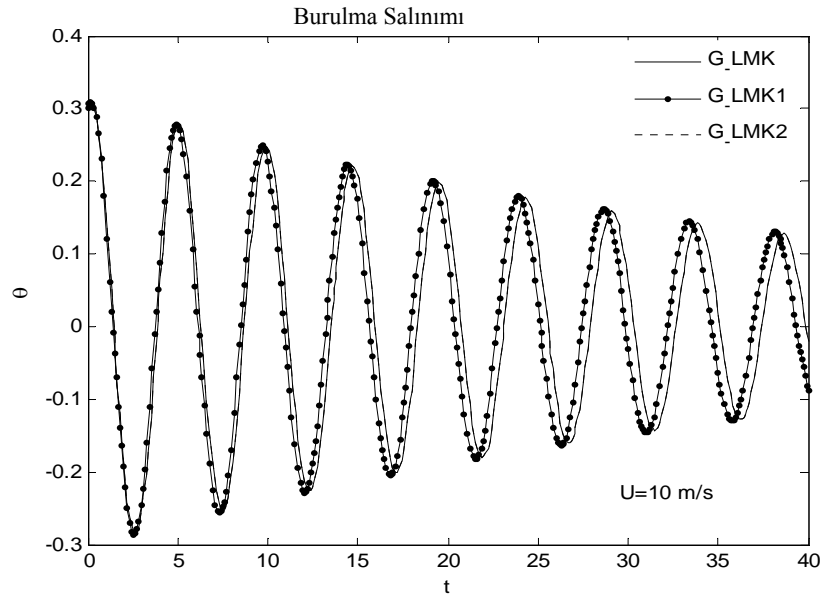
Şekil 3.38. $U = 5 \text{ m/s}$ değeri için $\theta(t)$ 'değişimleri

Şekil 3.38.'de burulma salınımının $t \in [0 \ 40]$ ve Tablo 3.1 ve Tablo 3.7 daki parametre değerleri için, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için rüzgâr hızındaki artış boyutlu G_LMK1 modeline göre, boyutlu G_LMK ve G_LMK2 modellerinin düşey salınımının periyotlarını artırdığı ve frekanslarını azalttığı gözlenmektedir.



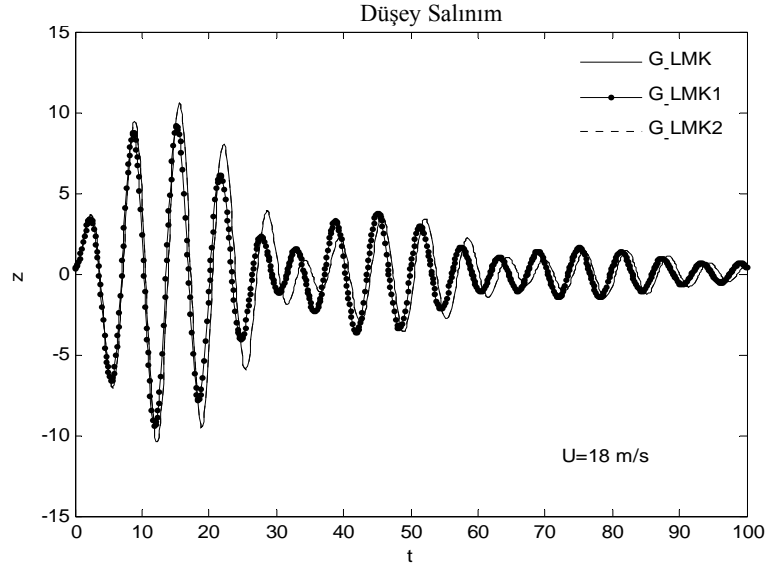
Şekil 3.39. $U = 10 \text{ m/s}$ değeri için $z(t)$ düşey salınımının yerel değişimleri

Şekil 3.39.'da boyutlu G_LMK, G_LMK1 ve G_LMK2 modellerinin düşey salınımının için $t \in [0 40]$ ve Tablo 3.1. ve Tablo 3.7.'deki parametre değerleri, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için $U = 10$ m/s rüzgâr hızında boyutlu G_LMK ve G_LMK2 modelleri tek bir model gibi salınım yaparken, bunlara göre boyutlu G_LMK1 modelinin düşey salınımının genliğinde küçük değişikliklerin meydana geldiği gözlenmektedir.



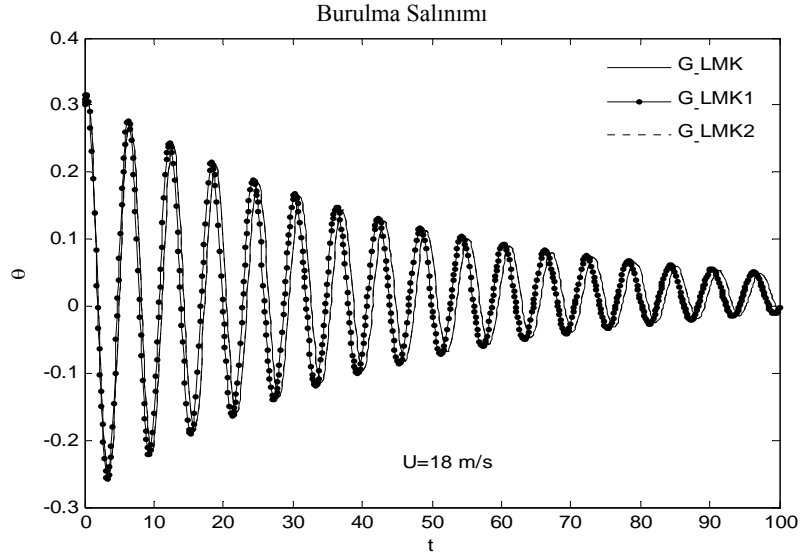
Şekil 3.40. $U = 10$ m/s değeri için $\theta(t)$ burulma salınımının yerel değişimleri

Şekil 3.40.'da burulma salınımının $t \in [0 40]$ ve Tablo 3.1 ve Tablo 3.7 daki parametre değerleri için, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için rüzgâr hızındaki artışın artış boyutlu G_LMK1 modeline göre, boyutlu G_LMK ve G_LMK2 modellerinin düşey salınımının periyotlarını artırdığı ve frekanslarını azalttığı gözlenmektedir.



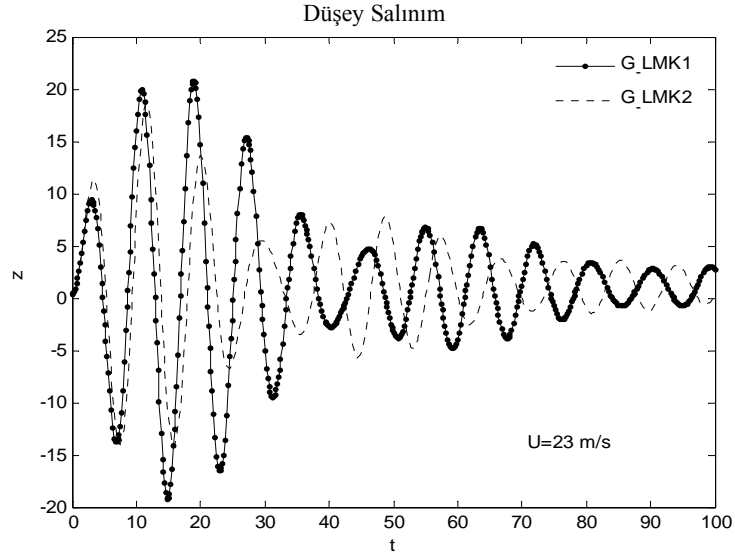
Şekil 3.41. $U=18$ m/s değeri için $z(t)$ düşey salınımının yerel değişimleri

Şekil 3.41.'de boyutlu G_LMK, G_LMK1 ve G_LMK2 modellerinin düşey salınımın için $t \in [0, 100]$ ve Tablo 3.1. ve Tablo 3.7.'deki parametre değerleri, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için $U = 18$ m/s rüzgâr hızında, boyutlu G_LMK ve G_LMK2 modelleri tek bir model gibi salınım yaparken, boyutlu G_LMK1 modelinde ise düşey salınımın genliğinde diğer modellere göre küçük değişikliklerin meydana geldiği gözlenmektedir. $U > 18$ m/s boyutlu G_LMK modelinde düşey salınım için rezonans durumu ortaya çıkmaktadır. Nonlineer etkiler görülmektedir.



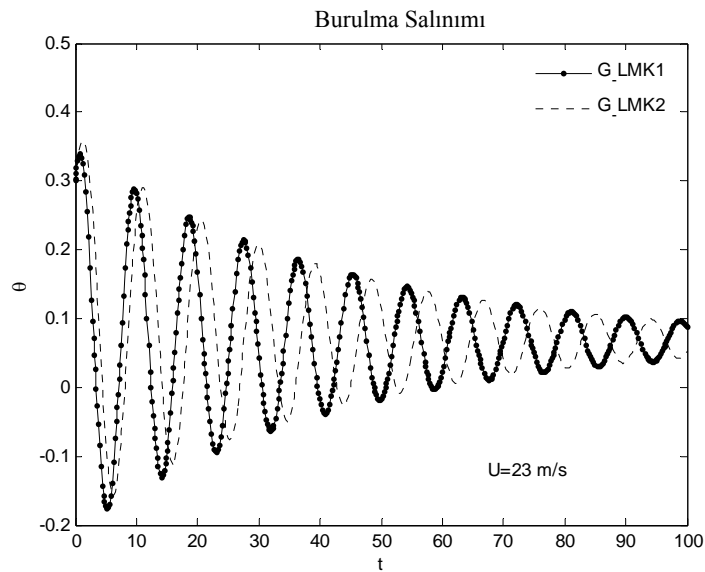
Şekil 3.42. $U = 18 \text{ m/s}$ değeri için $\theta(t)$ burulma salınıminin yerel değişimleri

Şekil 3.42.'de burulma salınıminin $t \in [0, 100]$ ve Tablo 3.1 ve Tablo 3.7.'deki parametre değerleri için, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için rüzgâr hızındaki artışın sonucunda, boyutlu G_LMK ve G_LMK2 modelleri tek bir model gibi salınım yaparken, boyutlu G_LMK1 modelinin burulma salınıminin genliğinde küçük değişikliklerin meydana geldiği gözlenmektedir. Boyutlu G_LMK1 modelinin düşey salınıminin periyodunu artırdığı ve frekansı azalttığı gözlenmektedir. $U > 18 \text{ m/s}$ boyutlu G_LMK modelinde burulma salınıminin rezonans durumu ortaya çıkmaktadır. Nonlineer etkiler görülmektedir.



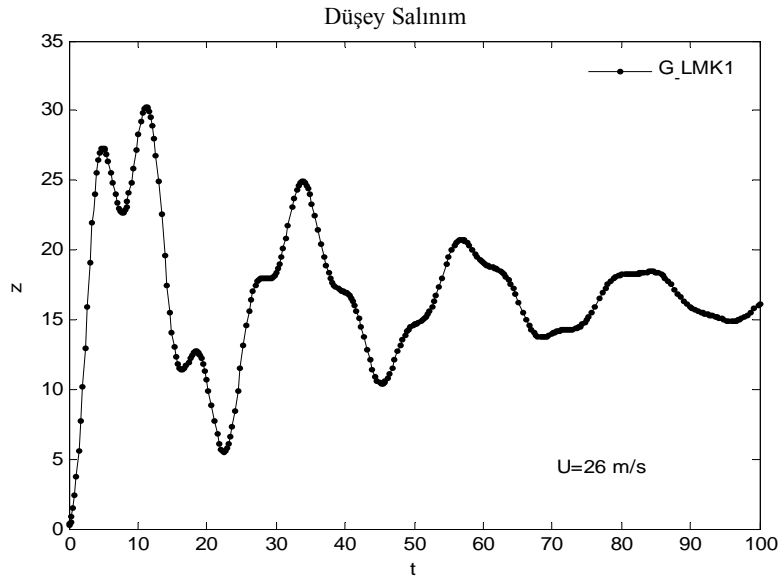
Şekil 3.43. $U = 23$ m/s değeri için $z(t)$ düşey salınımının yerel değişimleri

Şekil 3.43.'de düşey salınımın boyutlu G_LMK1 ve G_LMK2 modelleri için $t \in [0, 100]$ ve Tablo 3.1. ve Tablo 3.7.'deki parametre değerleri, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için $U = 23$ m/s rüzgâr hızında, boyutlu G_LMK2 modelinin düşey salınımın genliğinde oldukça büyük değişiklikler meydana geldiği gözlenmektedir. $U > 23$ m/s boyutlu G_LMK2 modelinde düşey salınım için rezonans durumu ortaya çıkmaktadır.



Şekil 3.44. $U = 23$ m/s değeri için $\theta(t)$ burulma salınımının yerel değişimleri

Şekil 3.44.'de burulma salınının $t \in [0, 100]$ ve Tablo 3.1. ve Tablo 3.7.'deki parametre değerleri için, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için $U = 23$ m/s olduğunda boyutlu G_LMK2 modelinde burulma salınının periyodunun arttığı ve frekansın azaldığı gözlenmektedir. $U > 23$ m/s boyutlu G_LMK2 modelinde burulma salınım için rezonans durumu ortaya çıkmaktadır.



Şekil 3.45. $U = 26$ m/s değeri için $z(t)$ düşey salınının yerel değişimleri

Şekil 3.45.'de düşey salınının boyutlu G_LMK1 modelleri için $t \in [0, 100]$ ve Tablo 3.1., Tablo 3.7.'deki parametre değerleri, zaman değişkeninin artan değerlerine karşılık gelen davranışı gözlenmektedir. İlerleyen zaman değerleri için $U = 26$ m/s rüzgâr hızında düşey salınının genliğinde çok büyük artışlar meydana geldiği gözlenmektedir. $U > 26$ m/s olduğunda boyutlu G_LMK1 modelinde düşey salınım için rezonans durumu ortaya çıkmaktadır.

Sonuç olarak boyutlu G_LMK, G_LMK1 ve G_LMK2 bu üç model birlikte değerlendirildiğinde, boyutlu G_LMK modelinde $U > 18$ m/s olduğunda, boyutlu G_LMK2 modelinde $U > 23$ m/s olduğunda ve boyutlu G_LMK1 modelinde ise $U > 26$ m/s olduğunda rezonans durumu ortaya çıkmaktadır.

4. SONUÇLAR

Bu kesimde, tez içerisinde ayrıntılarıyla ifade ettiğimiz sonuçları, özet olarak ifade ediyoruz.

4.1. LMK, LMK1 ve LMK2 Modelleri

- LMK sistemi Newton kanunları yardımıyla düşey ve burulma yönünde elde edilmiştir.
- LMK modelinden bazı varsayımlar altında daha basit sistemler elde edilebilmektedir. Düşük genlikli salınımlar için askıların devamlı gergin olarak kaldığı ve hiç gevşemedikleri kabulü altında, Lazer-McKenna Enine Kesit(LMK1) modeli elde edilmiştir.
- Ayrıca yeterince küçük genlikli burulma salınımları, yani θ nın küçük değerleri için, $\sin \theta \cong \theta$ yaklaşımı dikkate alınarak, Lazer-McKenna Enine Kesit(LMK2) modeli elde edilmiştir.

4.2. Boyutlu G_LMK, G_LMK1 ve G_LMK2 Modelleri

- LMK modellerine, köprüye etki eden rüzgâr gibi dış kuvvetler etkisini ifade eden uygun kaldırma ve moment kuvvetlerini ilave etmek suretiyle, boyutlu G_LMK modeli ve bu modelde yer alan parametrelerin tipik değerleri elde edilmektedir.
- İlk bölümde bahsedilen varsayımlar için, boyutlu G_LMK1 ve G_LMK2 modelleri elde edilmiştir.

4.3. G_LMK, G_LMK1 ve G_LMK2 Modelleri

- Uygun boyutsuzlaştırma parametresi yardımıyla boyutlu G_LMK modeli boyutsuzlaştırılarak, G_LMK modeli elde edilmiştir. Bu model içinde ilk bölümdeki varsayımlar için, G_LMK1 ve G_LMK2 modelleri elde edilmiştir.

- G_LMK2 modeli sönümlü ve sönümsüz durum için analitik çözüm elde edilmiş ve rüzgâr değişiminin genlik, frekans, periyot gibi çözüm bileşenleri üzerindeki etkisi gözlenmiştir.
- G_LMK1 modelinin diferensiyel dönüşüm yöntemi ile yaklaşık analitik çözümü elde edilmektedir. Pade yaklaşım yöntemini uygulanarak, elde edilen yaklaşımların yakınsama hızının arttığı gözlenmiştir.
- G_LMK modelinin sayısal çözümleri elde edilmektedir. Ayrıca başlangıç değerleri ve rüzgâr hızındaki artışa bağlı olarak ortaya çıkan nonlineer etkiler gözlenmektedir. Buna ilaveten, G_LMK, G_LMK1 ve G_LMK2 modelleri sayısal olarak karşılaştırılmaktadır.

5. ÖNERİLER

- Merkezi açıklığın tamamı boyunca düşey ve burulma hareketi için model ortaya konularak bu çalışmada yaptıklarımız tekrarlanarak daha kapsamlı bir analiz yapılabilir.
- Ana kabloları, askılar ve tabliyenin hareket halinde olduğunu kabul eden en genel beş serbestlik dereceli(sağ askı, sol askı, tabliye düşey yer değiştirmesi, tabliye burulması, ana kablolardaki yer değiştirme) kompleks modellerine Kaldırma, Moment ve Drag kuvvetlerinin ilave edilmesiyle daha gerçekçi bir model ortaya konabilir.
- Rüzgâr tüneli deneylerinden elde edilen deneysel veriler yardımıyla fiziksel olarak daha gerçekçi matematik modeller ortaya konabilir.

6. KAYNAKLAR

- Abdel-Ghaffar, A.M. and Rubin, L.I., 1983a. Nonlinear Free Vibrations of Suspension Bridges: Theory, Journal of Engineering Mechanics, 109, 313-329.
- Abdel-Ghaffar, A.M. and Rubin, L.I., 1983b. Nonlinear Free Vibrations of Suspension Bridges: Application, Journal of Engineering Mechanics, 109, 330-345.
- Abdel-Ghaffar, A.M. ve Rubin, L.I., 1982. Suspension Bridge Response to Multiple Support Excitations, Journal of The Engineering Mechanics Division, ASCE 108(EM2), 419-435.
- Abdel-Ghaffar, A.M., Masri, S.F. ve Niazy, A.S.M., 1992. Seismic Performance Evaluation of Suspension Bridges, Proceedings of The Tenth World Conference on Earthquake Engineering, 4845-4850.
- Adanur, S., Dumanoğlu, A.A. ve Bayraktar, A., 1997. Asma Köprülerin Lineer Olmayan Dinamik Davranışının İncelenmesi, 4. Ulusal Deprem Mühendisliği Konferansı, ODTÜ, 269-276.
- Adomian, G., Rach, R. ve Eloed, M., 1988. The Decomposition Method Applied to Stiff System, Math Comp Simul, 30, 271-6.
- Adomian, G., 1994. Solution of Physical Problems by Decomposition, Computers Math. Applic. 27, 9-10, 145-154.
- Ahmed, N.U., 2000. A General Mathematical Framework for Stochastic Analysis of Suspension Bridge, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 1, 457-483.
- Ahmed, N.U. and Harbi, H., 1998. Torsional and Longitudinal Vibration of Suspension Bridge Subject to Aerodynamic Forces, Mathematical Problems in Engineering, 4, 393-421.
- Baker, G.A., 1975. Essentials of Padé Approximants, Academic Press, London.
- Baker, G.A. and Graves-Morris, P., 1981. Padé Approximants, Part I: Basic Theory, Addison-Wesley.
- Ben-Gal, N. and Moore, K.S., 2005. Bifurcation and Stability Properties of Periodic Solutions to Two Nonlinear Spring-Mass Systems, Nonlinear Analysis, 61, 1015-1030.
- Blanchard, Devaney and Hall, 1998. Differential Equations, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove.

- Brownjohn, J.M.W., 1994. Observations on Non-Linear Dynamic Characteristics of Suspension Bridges, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 23, 1351-1367.
- Celasun, H.S., 1981. Asma Köprüler, İ.D.M.M. Akademisi Yayın Müd. Basımevi, İstanbul.
- Chang, S.H. ve Chang, I.L., 2008. A New Algorithm for Calculating One-Dimensional Differential Transform of Nonlinear Functions, Applied Mathematics and Computation, 195, 2 799-808.
- Chen, C.K. ve Ho, S.H., 1996. Application of Differential Transformation to Eigenvalue Problems, Appl Math Comput, 79, 173-188.
- Chen, C.L. ve Liu, Y.C., 1998. Solution of Two Point Boundary Value Problems Using The Differential Transformation Method, J Opt Theory Appl, 99, 23–35.
- Defreitas, M.S.T, Viana, R.L. and C Grebogi., 2004. Basins of Attraction of Periodic Oscillations in Suspension Bridges, Nonlinear Dynamics, 37, 207–226.
- Diana, G., Falco, M., Cheli, F. and Cigada, A., 2003. The Aerolastic Study of The Messina Straits Bridge, Natural Hazards, 30, 79-106.
- Doole, S.H. and Hogan, S.J., 2000. Non-Linear Dynamics of The Extended Lazer-Mckenna Bridge Oscillation Model, Dyn. Stab. Syst, 15, 143-58.
- Dumanoğlu, A.A. ve Adanur, S., 2000. Asma Köprülerin Antisinkronize Dinamik Analizi, TMMOB İnşaat Mühendisleri Odası Teknik Dergi, 11, 1179-1197.
- Fabry, C., 2001. Large-Amplitude Oscillations of A Nonlinear Asymmetric Oscillator With Damping, Nonlinear Analysis, 44, 613-626.
- Fikri, S., 1937. Asma Köprüler. Yüksek Mühendislik Mektebi Matbaası.
- Freitas, M. S. T. De, Viana, R. L. and Grebogi, C., 2003. Erosion of The Safe Basin for The Transversal Oscillations of A Suspension Bridge, Chaos, Solitons and Fractals 18, 829–841.
- Glover, J., Lazer, A.C. and Mckenna, P.J., 1989. Existence And Stability of Large Scale Nonlinear Oscillations in Suspension Bridges, Z. Angew. Math. Phys, 40, 172–200.
- Harbi, H., 1996. Dynamic Models of Suspension Bridges and Their Stabilities., Master of Thesis, University of Ottawa, Canada.
- Hassan, A.H., 2002. On Solving Some Eigenvalue Problems by Using A Differential Transformation, Appl Math Comput, 127, 1–22.
- Humphreys, L.D., 1997. Numerical Mountain Pass Solutions of A Suspension Bridge Equation, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 28, 1811-1826.

- Humphreys, L.D. and Mckenna, P.J., 1999. Multiple Periodic Solutions for A Nonlinear Suspension Bridge Equation, IMA J. Appl. Math, 63, 37–49.
- Imai, K., 1999. Reliability Analysis of Geometrically Nonlinear Structures With Application to Suspension Bridges, Ph.D. Thesis, University of Colorado, USA.
- Jacover, D. and Mckenna, P.J., 1994. Nonlinear Torsional Flexings in A Periodically Forced Suspended Beam, Journal of Computational And Applied Mathematics, 52, 241–265.
- Jang, M.J., Chen, C.L. ve Liu, Y.C., 2001. Two-Dimensional Differential Transform for Partial Differential Equations, Appl Math Comput, 121, 261–270.
- Jang, M.J., Chen, C.L. ve Liu, Y.C., 2000. On Solving The Initial Value Problems Using The Differential Transformation Method, Appl Math Comput, 115, 145–160.
- Jang, M.J., Chen, C.L. ve Liu, Y.C., 1997. Analysis of The Response of A Strongly Nonlinear Damped System Using A Differential Transformation Technique, Appl Math Comput, 88, 137–151.
- Jiao, Y.C., Yamamoto, Y., Dang, C. ve Hao, Y., 2002. An Aftertreatment Technique for Improving The Accuracy of Adornian's Decomposition Method, Computers and Mathematics with Applications, 43, 783-798.
- Justin, S., 2000. Engineering Methods in Historical Research. CRM.
- Kawada, T. and Hirai, A., 1985. Additional Mass Method-A New Approach to Suspension Bridge Rehabilitation, Official Proceedings, 2nd Annual International Bridge Conference, Engineers Society of Western Pennsylvania, Pittsburgh.
- Kuroda, S. 1996. Numerical Simulation of Flow Around Bridge. Reprint IHI Eng. Rev. 29 2.
- Lazer, A.C. and Mckenna, P.J., 1987. Large Scale Oscillation Behavior in Loaded Asymmetric Systems, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire, 4, 243–274.
- Ma, Q. and Zhong, C., 2005. Existence of Global Attractors Fort He Coupled System of Suspension Bridege Equations, J. Math. Anal. Appl, 308, 365-379.
- Mckenna, P.J. and Walter, W., 1990. Traveling Waves in A Suspension Bridge, SIAM J.Appl. Math, 50, 703-715.
- Mckenna, P.J., 1999. Large Torsional Oscillations in Suspension Bridges Revisited: Fixing An Old Approximation, The American Mathematical Monthly, 106, 1-18.
- Mckenna, P.J. and Cilliam, O'Tuama., 2001. Large Torsional Oscillations in Suspension Bridges Visited Again: Vertical Forcing Creates Torsional Response, Amer. Math. Monthly, 108, 8, 738-745.

- Mckenna, P.J. and Moore, K.S., 2002. The Global Structure of Periodic Solutions to A Suspension Bridge Mechanical Model, IMA Journal of Applied Mathematics, 67, 459–478.
- Mckenna, P.J., 2006. Large-Amplitude Periodic Oscillations in Simple and Complex Mechanical Systems: Outgrowths From Nonlinear Analysis, Milan J Math, 74, 79–115.
- Merritt, F.S., 1983, Standart Handbook For Civil Engineers, Third Edition, Mcgraw-Hill, New York.
- Moore, K.S., 2001. Large Amplitude Torsional Oscillations in A Nonlinearly Suspended Beam: A Theoretical and Numerical Investigation. Dissertation, University of Connecticut.
- Moore, K.S., 2002. Large Torsional Oscillations in A Suspension Bridge: Multiple Periodic Solutions to A Nonlinear Wave Equation, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 33, 1411–1429.
- Larsen, A., 1998. Advances in Aeroelastic Analyses of Suspension and Cable-Stayed Bridges, J.Wind Eng. Ind. Aerodyn. 74,76, 73-90.
- Lazer, A.C. and Mckenna, P.J., 1990. Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges: Some New Connections With Nonlinear Analysis, SIAM Rev., 32, 537–578.
- Plaut, R.H. and Davis, F.M., 2007. Sudden Lateral Asymmetry and Torsional Oscillations of Section Models of Suspension Bridges, Journal of Sound and Vibration, 307, 894–905.
- Pugsley, S.A., 1968. The Theory of Suspension Bidges, Second Edition, Edward Arnold, London.
- Robert, A.A., 2006. Travelling Waves Suspension Bridge System,. Master of Thesis, University of Vevada, Las Vegas.
- Robertson, I. Sherwin, S.J. and Bearman, P.W., 2003. Flutter Instability Prediction Techniques for Bridge Deck Sections, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 43, 1239-1256.
- Scanlan, R.H., 1993. Problems in Formulation of Wind-Force Models for Bridge Decks, Journal of Engineering Mechanics, 119, 1353-1365.
- Scanlan, R.H. and Tomko, J.J., 1971. Airfol and Bridge Flutter Derivatives, Journal of Engineering Mechanics, 97, 1717-1737.
- Scanlan,R.H., Jones, N.P. and Lorendeaux,O., 1997. Comparison of Taut-Strip and Section-Model-Based Approaches in Long-Span Bridge Aerodynamics, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 72, 275-287.

- Sepe, V. and Augusti, G., 2001. A Deformable Section Model for The Dynamics of Suspension Bridges, Part I: Model and Linear Response, Wind and Structures, 4, 1–18.
- Sepe, V., Diaferio, M. and Augusti, G., 2003. A Deformable Section Model for The Dynamics of Suspension Bridges, Part II: Nonlinear Analysis and Large Amplitude Oscillations, Wind and Structures, 6, 451–470.
- URL-1, Www.Vibrationdata.Com/Tacoma.Htm, Tacoma Narrows Köprüsü, 13 Aralık 2008.
- URL-2, Www.Ketchum.Org, Tacoma Narrows Köprüsü. 14 Aralık 2008.
- URL-3, www.Wikipedia.Org, Dünyadaki En Uzun Orta Açıklı Asma Köprüler, 31 Ocak 2009.
- URL-4, www.Uydutvhaber.Net, Dünyadaki En Uzun Orta Açıklı Asma Köprüler, 31 Ocak 2009.
- Walter, J.H., 1994. Discrete Vortex Method for Two-Dimensional Flow Past Bodies of Arbitrary Shape Undergoing Prescribed Rotary and Translatory Motion, AFM-94-11, Ph.D. Thesis, Dept. of Fluid Mechanics, Technical University of Denmark.
- Wu, XY. ve Xia, J.L., 2001. Two Low Accuracy Methods for Stiff Systems, Appl Math Comput, 123,141–53.

7. EKLER

Ek.1 Padé Yaklaşımı

Padé yaklaşımında yaklaşım fonksiyonu olarak rasyonel fonksiyonu seçilir. Derecesi $N = n + m$ olan rasyonel fonksiyonda bulunan $N + 1$ parametre $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) şartında bulunur. Görüldüğü gibi Padé yaklaşımı bir interpolasyon yaklaşımı olmayıp bir fonksiyonel yaklaşımdır. Bu yaklaşım, Taylor yaklaşımının genişletilmesidir. Rasyonel fonksiyonun payının derecesi $n = N$ ve paydanın derecesi $m = 0$ alındığında Padé yaklaşımı Taylor yaklaşımına dönüşür. Bir $f(x)$ fonksiyonunun

Taylor açılımı $f(x) = \sum_{i=0}^N c_i x^i$ şeklinde yazıldığında

$$f(x) = \sum_{i=0}^N c_i x^i = g(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{j=0}^n b_j x^j} \text{ ve } P_m(x) = g(x) Q_n(x). \quad (\text{E.1})$$

bağıntısı elde edilir. Burada $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ dir. Bu bağıntıda toplam terimleri açıldığında

$$(c_0 + c_1 x + \dots + c_N x^N)(b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n) = (a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m) \quad (\text{E.2})$$

elde edilir. (E.1) de verilen rasyonel fonksiyonun derecesi $N = n + m$ ve $N + 2$ tane parametre bulunmaktadır. Pay ve payda b_0 'a bölüldüğünde payda 1 ile başlar; bu yüzden $b_0 = 1$ alınmak suretiyle parametre sayısı $N + 1$ 'e düşer. Bu parametrelerin belirlenebilmesi için $N + 1$ noktada fonksiyon değerlerinin bilinmesi gerekir. Bu değerler verildiğinde

$$P_m(x_i) = g(x_i) Q_n(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (\text{E.3})$$

eşitliği yardımı ile parametreler çözülür. $P_m(0) = g(0)Q_n(0)$ gerektirmesinden

$$c_0 b_0 = a_0 \quad (\text{E.4})$$

elde edilir. $b_0 = 1$ olduğundan $c_0 = a_0$ olur. (E.2) ifadesinin her iki tarafının türevi alınır

$$\begin{aligned} & (c_1 + 2c_2x + \dots + Nc_Nx^{N-1})(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) \\ & + (c_0 + c_1x + \dots + c_Nx^N)(b_1 + 2b_2x + \dots + nb_nx^{n-1}) = (a_1 + 2a_2x + \dots + ma_mx^{m-1}) \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

ve $x=0$ yerine yazılır ise $c_1b_0 + c_0b_1 = a_1$ ve $c_1 = a_1 - c_0b_1$ elde edilir. $h(x) = g(x)Q(x)$ çarpımının yüksek mertebeden türevlerini hesaplamak için aşağıdaki türevler için çarpım kuralı tekrarlanır ise

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)Q(x) + g(x)Q'(x), \\ h''(x) &= g''(x)Q(x) + 2g'(x)Q'(x) + g(x)Q''(x), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

$$h^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} g^{(j)}(x) Q^{(n-j)}(x).$$

elde edilir. $x=0$ da türev değerleri yerlerine yazılır ise

$$h^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} g^{(j)}(0) Q^{(n-j)}(0). \quad (\text{E.7})$$

bulunur. $x=0$ da (E.2) ifadesinin ikinci türevi hesaplanırsa

$$h''(0) = g''(0)Q(0) + 2g'(0)Q'(0) + g(0)Q''(0) \quad (\text{E.8})$$

bulunur. Türev değerleri yerlerine yazılır ise

$$2b_0c_2 + 2b_1c_1 + 2b_2c_0 = 2a_2 \quad \text{veya} \quad c_2 = a_2 - b_1c_1 - b_2c_0. \quad (\text{E.9})$$

bulunur. Bu işlemler tüm gerekli denklemlere kadar (P_m ve Q_n polinomlarının derecesine bağlı olarak) devam ettirilir. Eğer $j > m$ için $a_j = 0$ ve $j > n$ için $b_j = 0$ olarak tanımlanırsa, o zaman

$$a_N - \sum_{j=0}^{N-1} c_j b_{N-j} = c_N, \quad N = 0, 1, 2, \dots, m+n. \quad (\text{E.10})$$

denklemden bilinmeyen a_N ve b_N katsayıları bulunabilir.

Ek.2 Modified Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi

$x_0 = 0$ noktasında Taylor serisinden elde edilen çözüm,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (\text{E.11})$$

olsun. (E.11) e Laplace dönüşümü uygulanır ise

$$L[f(x)] = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{k!}{s^{k+1}} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \frac{(n+1)!}{s^{n+2}} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{s^{n+2}} \quad (\text{E.12})$$

elde edilir. Basitleştirmek için $s = \frac{1}{t}$, yazılır ise

$$h(t) = L[f(t)] = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) t^{k+1} + f^{(n+1)}(\xi) t^{n+2} = \quad (\text{E.13})$$

$$f(0)t + f'(0)t^2 + f''(0)t^3 + \dots + f^{(n)}(0)t^{n+1} + f^{(n+1)}(\xi)t^{n+2}$$

veya

$$h(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(0) t^i = \sum_{i=0}^{n+1} f^{(i)}(0) t^i + \sum_{i=n+2}^{\infty} f^{(i)}(0) t^i \quad (\text{E.14})$$

$$= F_{n+1}(t) + O(t^{n+2})$$

elde edilir. Padé yaklaşımı, bir fonksiyonun Taylor serisine açılımındaki katsayılarından oluşturulan iki polinomun oranı olduğundan, (E.13) ifadesinin Padé yaklaşımı alınır ise,

$$h(t) = \left[\frac{L}{M} \right] = \frac{P_L(t)}{Q_M(t)} = \frac{\sum_{i=0}^L a_i t^i}{\sum_{i=0}^M b_i t^i}, \quad (\text{E.15})$$

bulunur(Chen vd., 1996, 1998). (E.14) de verilen rasyonel fonksiyonun derecesi $n+2=L+M$ ve $n+4$ tane parametre bulunmaktadır. Pay ve payda b_0 'a bölüldüğünde payda 1 ile başlar; bu yüzden $b_0 = 1$ alınmak suretiyle parametre sayısı $n+3=L+M+1$ 'e düşer. $h(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ dikkate alınır ise

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = F_{n+1}(t) + O(t^{n+2}); \quad (\text{E.16})$$

ve

$$F_{n+1}(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} + O(t^{n+2}) \quad (\text{E.17})$$

bulunur(Jiao vd., 2002). Eğer $n+3 \geq L+M+1$ ise $n+2 \geq L+M$ olur. (E.17), $h(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$, $F_{n+1}(t)$ 'nin Padé yaklaşımını tanımlar. $Q(0) = 1 \neq 0$ olduğu için Padé yaklaşımını verilen L ve M için tektir.

Bu yüzden (E.17), $n+2 \geq L+M$ olduğunda $\frac{P(t)}{Q(t)}$ orijinal fonksiyonla verilen ve seçilen L ve M için bir tek olarak belirlenen kesme Taylor serisinin $F_{n+1}(t)$ 'nin Padé yaklaşımı, $h(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ gibi iki polinomun oranına eşit bir fonksiyon anlamına gelir.

Kabul edelim ki DDY(Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi), yeterince terimli gerçek çözümün kesme Taylor serisini versin ve çözüm ortak çarpanı olmayan iki polinomun oranı şeklinde yazılabilir. O zaman yukarıda verilen argümanlardan kesme serisinin Padé yaklaşımı gerçek çözümü sağlar.

Çözüm iki polinomun oranı olarak ifade edilemediğinde bile, DDY' den elde edilen kesme serinin Padé yaklaşımı, genellikle kesme serisinin yakınsaklık oranını ve doğruluğunu iyileştiren, gerçek çözüme iyi bir yaklaşım verir.

DDY'inden elde edilen çözüm, gerçek çözümün Taylor serisinin kısmi toplamı olarak ifade edilemeyen kesme Maclaurin serisi olarak verildiğinde dahi Padé yaklaşımı kullanılabilir. Padé yaklaşımı genellikle gerçek çözüme kesme serilerden daha hızlı yakınsaklık oranı ve yüksek doğrulukla yakınsar. Örnek olarak aşağıdaki salınımlı sistemler seçilir ise

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + w^2 y = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (\text{E.18})$$

burada w sabit ve f lineer veya nonlineer fonksiyondur. Çözümleri genellikle $\sin(x), \cos(x), e^x, P_n(x)$ ve diğer fonksiyonların lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir. Bir $f(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $L[f(x)] = F(s)$ dir. (Baker vd., 1981) da gösterildiği gibi $\sin(x), \cos(x), e^x, P_n(x)$ ve α ve β sabitler olmak üzere, $x^n, x^n e^{ax}, \sin(\alpha x), \cos(\alpha x), e^{ax} \sin(\beta x)$ ve $e^{ax} \cos(\beta x)$ gibi diğer fonksiyonların lineer kombinasyonlarının Laplace dönüşümü, s 'ye bağlı iki polinomun oranı şeklinde yazılabilir. Bu yüzden birçok salınımlı sistem için, DDY ile elde edilen kesme seriye Laplace dönüşümü uygulanırsa, o zaman seri Padé yaklaşımı formülü ile bir meromorfik fonksiyonun dönüşüm serisi elde edilir ve yukarıda tanımlandığı gibi Padé yaklaşımın avantajları nedeniyle gerçek çözüme DDY'nin kesme seri çözümünden daha iyi bir yaklaşık çözüm olan analitik çözüm elde etmek için ters Laplace dönüşümü uygulanır. Elde edilen çözüm periyodik olabilir; fakat DDY'inden elde edilen kesme seri periyodiklik göstermez. Bazı salınımlı sistemler için DDY'nin kesme serisi $x_0 = 0$ noktasında gerçek çözümün Taylor serisinin kısmi toplamı olarak ifade edilemez ve meromorfik fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü hesaplamak çok zordur. Bu durumda genellikle DDY'nin kesme serisi gerçek çözümün Taylor serisinin kısmi toplamıdır ve DDY'nin doğruluğunu artıran daha düşük mertebeden Padé yaklaşımı kullanılarak, gerçek çözüm yada yaklaşık analitik çözüm elde edilebilir.

Ek.3 Diferensiye Dönüşüm Yöntemi ile ilgili örnekler

Örnek 1

Bu örnekte ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen denklemin DDY'ine göre çözümü verilmektedir. ADD(adi diferensiyel denklem)

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y &= 8e^t, \\ y(0) &= 1, y'(0) = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

verilmiş olsun. Bu denklemin analitik çözümü, $y^* = \left(-4t - \frac{1}{2}\right)e^t + \frac{3}{2}e^{3t}$ dir. Bu denkleme

Tablo 3.14 de temel işlemleri ile verilen DDY'i uygulanırsa,

$$Y(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[-3Y(k) + 4(k+1)Y(k+1) + \frac{8}{k!} \right] \quad (\text{E.20})$$

$$Y(0) = 1, \quad Y(1) = 0 \quad (\text{E.21})$$

elde edilir. $k = 0$ için (E.21) ifadeleri (E.20) de yerlerine yazılır ise $Y(2) = \frac{5}{2}$ bulunur ve

$k = 1, 2, \dots, 7$ için aynı işlemler tekrarlanır ve (3.101) deki ters dönüşüm kullanılır ise aşağıdaki seri çözüm

$$y(t) = 1 + \frac{5}{2}t^2 + \frac{14}{3}t^3 + \frac{35}{8}t^4 + \frac{43}{15}t^5 + \frac{1069}{720}t^6 + \frac{271}{420}t^7 + O(t^8) \quad (\text{E.22})$$

elde edilir. Diferensiyel dönüşüm çözümünün(E.22) doğruluk değerini artırmak için, aşağıda gösterilen modified diferensiyel dönüşüm yöntemi(MDDY) uygulanmaktadır. Bu bölümde (E.22) denklemin Laplace dönüşümü uygularsak

$$L(y(s)) = \frac{1}{s} + \frac{5}{s^3} + \frac{28}{s^4} + \frac{105}{s^5} + \frac{344}{s^6} + \frac{1069}{s^7} + \frac{3252}{s^8} \quad (\text{E.23})$$

elde edilir. Basitleştirmek için $s = \frac{1}{t}$; alınırsa bunun sonucunda o zaman

$$L(y(t)) = t + 5t^3 + 28t^4 + 105t^5 + 344t^6 + 1069t^7 + 3252t^8 \quad (\text{E.24})$$

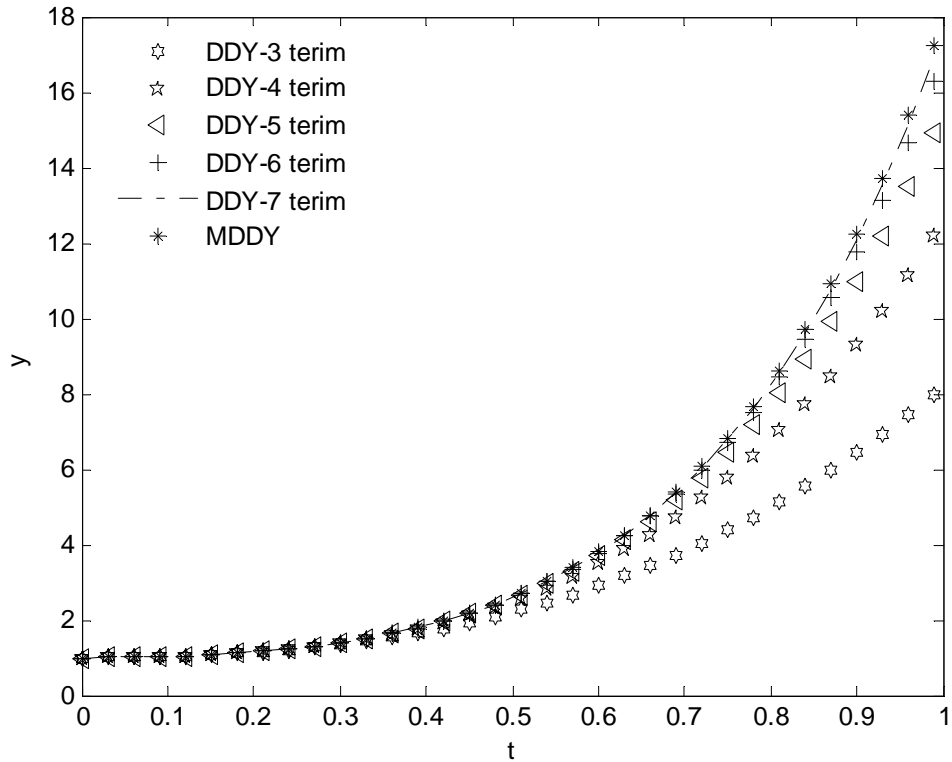
denklemleri elde edilir. (E.24) ifadesinin $[2/2]$ Padé yaklaşımı alınıp ve $t = \frac{1}{s}$ yazılırsa s

ye bağlı elde edilen ifadenin ters Laplace dönüşümü alınır ise

$$y(t) = \left(-4t - \frac{1}{2}\right)e^t + \frac{3}{2}e^{3t} \quad (\text{E.25})$$

elde edilir. Sonuç olarak MDDY'den elde edilen çözümün tam çözüme eşit olduğu görülmektedir.

Aşağıda DDY'nin ilk birkaç terimi ile MDDY'nin karşılaştırılması verilmektedir.



Ek Şekil 1. $N = 3, 4, 5, 6, 7$ terimli DDY çözümü ile MDDY'nin karşılaştırılması

Ek Şekil 1.'den görüleceği üzere N değerleri artırıldığında DDY'den elde edilen seri çözüm tam çözüme daha iyi yakınsamaktadır. Ayrıca MDDY' den tam çözüm elde edilmektedir. DDY' den elde edilen seri çözüm $N \rightarrow \infty$ için tam çözümün seri açılımına yakınsar.

Örnek 2 (Duffing Denklemi)(Adomian, 1994)

Bu örnekte Duffing denklemi olarak bilinen denklemin DDY'ine göre çözümü verilmektedir. Duffing denklemi,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3y - 2y^3 = \cos(t)\sin(2t) \quad (\text{E.26})$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

başlangıç değerleri ile verilmiş olsun. Bu denklemin analitik çözümü(Adomian, 1994), $y^* = \sin(t)$ dir. Bu denkleme Tablo 3.14 de temel işlemleri ile verilen DDY'i uygulanırsa,

$$Y(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[-3Y(k) + 2 \sum_{s=0}^k \sum_{m=0}^{k-s} Y(s)Y(m)Y(k-s-m) + \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \cos\left(\frac{\pi l}{2}\right) \frac{2^{(k-l)}}{(k-l)!} \sin\left(\frac{(k-l)\pi}{2}\right) \right] \quad (\text{E.27})$$

$$Y(0) = 0, \quad Y(1) = 1 \quad (\text{E.28})$$

elde edilir. $k = 0$ için (E.28) ifadeleri (E.27) de yerlerine yazılırsa $Y(2) = 0$ ve $k = 1, 2, \dots, 7$ için aynı işlemler tekrarlanır ve (3.101) deki ters dönüşüm kullanılır ise aşağıdaki seri çözüm

$$y(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} + O(t^{10}) \quad (\text{E.29})$$

elde edilir. Diferensiyel dönüşüm yönteminden elde edilen çözümünün(E.29) doğruluk değerini artırmak için, aşağıda belirtilen modified diferensiyel dönüşüm yöntemi(MDDY) uygulanmaktadır. Bu bölümde (E.29) denkleminde Laplace dönüşümü uygularsak

$$L(y(s)) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^4} + \frac{1.000000002}{s^6} - \frac{.9999999596}{s^8} + \frac{1.000000512}{s^{10}} \quad (\text{E.30})$$

elde edilir. Basitleştirmek için $s = \frac{1}{t}$; alınırsa bunun sonucunda o zaman

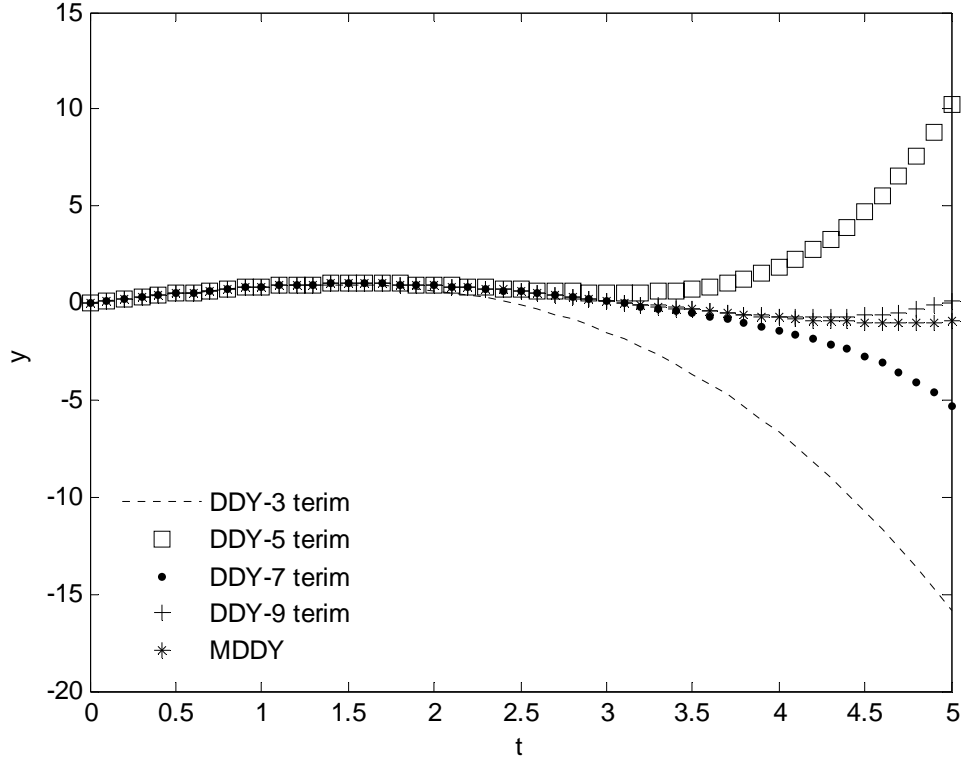
$$L(y(t)) = t^2 - t^4 + 1.000000002t^6 - .9999999596t^8 + 1.000000512t^{10} \quad (\text{E.31})$$

denklemleri elde edilir. (E.31) ifadesinin $[2/2]$ Padé yaklaşımı alınıp ve $t = \frac{1}{s}$ yazılırsa s ye bağlı elde edilen ifadenin ters Laplace dönüşümü alınır ise

$$y(t) = \sin(t) \quad (\text{E.32})$$

elde edilir. Sonuç olarak MDDY'den elde edilen çözümün tam çözüme eşit olduğu görülmektedir.

Aşağıda DDY'nin ilk birkaç terimi ile MDDY'nin karşılaştırılması verilmektedir.



Ek Şekil 2. $N = 3, 5, 7, 9$ terimli DDY çözümü ile MDDY' nin karşılaştırılması

Ek Şekil 2.'den görüleceği üzere N değerleri artırıldığında DDY'den elde edilen seri çözüm tam çözüme daha iyi yakınsamaktadır. DDY' den elde edilen seri çözüm $N \rightarrow \infty$ için tam çözümün seri açılımına yakınsar.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet MERDAN, 1977 yılında Gümüşhane’de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini aynı ilde tamamladı. 1993 yılında girdiği 19 Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 1997 yılında mezun oldu. 2000 yılında K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2003 yılında Yüksek Lisans Eğitimini tamamlayıp aynı yıl K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Doktora eğitime başladı. 1999-2008 yılları arasında K.T.Ü Gümüşhane Mühendislik Fakültesinde Öğretim Görevlisi olarak çalışmıştır. 2008 yılından itibaren Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik Fakültesinde görevine devam etmekte olup, iyi derecede İngilizce bilmektedir. Evli ve iki çocuk babasıdır.