KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

FUZZY MODÜL HOMOMORFİZMALARI

Ümit DENİZ

ŞUBAT 2008
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

FUZZY MODÜL HOMOMORFİZMALARI

Ümit DENİZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Doktor (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 31.12.2007
Tezin Savunma Tarihi : 06.02.2008

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Sultan YAMAK
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ali PANCAR
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Vasif V. NABİYEV
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Osman KAZANCI

Enstitü Müdürü V.: Doç.Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2008

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, fuzzy cebirsel yapı olarak TL-modül homomorfi kavramı ele alınmış ve TL-kongrüans bağıntıları yardımıyla TL-modül homomorfilerinin bir karakterizasyonu verilmiştir.

Öncelikle tez konusunu seçen ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Sultan YAMAK'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tez önerisi ve raporlar aşamasında bizi sabırla dinleyen, tavsiye ve eleştirileriyle tezin şekillenmesinde emeği geçen Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV ve Prof. Dr. Vasif V. NABİYEV'a şükranlarımı sunarım.

Ayrıca tüm akademik çalışma hayatım boyunca bana sonsuz desteği ve emeği olan Sayın Rektörüm Prof. Dr. Nazmi Turan OKUMUŞOĞLU'na, KTÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerine, Rize Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesindeki mesai arkadaşlarıma, canım aileme ve biricik eşim Coşkun DENİZ'e bana gösterdiği sevgi, saygı ve destek için sonsuz teşekkür ederim.

Ümit DENİZ
Trabzon 2008

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ……………………………………………………………………………………...II
İÇİNDEKİLER……………………………………………………………………………III
ÖZET………………………………………………………………………………………IV
SUMMARY………………………………………………………………………………...V
ŞEKİLLER DİZİNİ………………………………………………………………………..VI
TABLOLAR DİZİNİ……...……………………………………………………………....VII
SEMBOLLER DİZİNİ…………………………………………………………………...VIII
1. GENEL BİLGİLER…………………………………………………………………….1
1.1. Giriş……………………………………………………………………………………1
1.2. Tam Kafesler ve t-normlar…..……………………………………………………...3
1.3. Modüller……………………………………………………………………………..9
1.3.1 Homomorfizma Teoremi……………...……………………………………………11
1.4. L-Alt Kümeler ve ⊤L-Denklik Bağıntıları …………………..……………………..13
1.5. Fuzzy Bağıntılar ve Fuzzy Fonksiyonlar……………………………………………..22
1.6. Regüler ve İnvaryant ⊤L-Denklik Bağıntıları ……………………...……………..35
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR………………………………………….39
2.1. ⊤L-Alt Modüller…………………………………………………………………...39
2.2. ⊤L Modül Homomorfizmaları……………………………………………………….46
3. İRDELEME……………………………………………………………………...65
4. SONUÇLAR………………………………………………………………………….66
5. ÖNERİLER……………………………………………………………………...67
6. KAYNAKLAR…………………………………………………………………………68
ÖZGEÇMİŞ

ÖZET

Bu tezin amacı cebirsel yapılardaki modül homomorfizma tanımını fuzzy cebirsel yapılara taşımak ve modüller için mevcut olan bazı tanım ve teoremleri TL-modüllere aktarmaktır. Modüller için mevcut olan homomorfi teoremi fuzzy modüller için ifade edilmiştir. Ayrıca her modül homomorfisinden bir fuzzy modül homomorfisi elde edildiği gösterilmiş olup, bu ise fuzzy cebirsel yapıların, cebirsel yapıların bir genişlemesi olduğunu göstermiştir.

Bu tez iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ön bilgiler ile bu alanda yapılan çalışmalarla ilgili bazı önemli tanım ve teoremler sunulmaktadır. İkinci bölüm ise tezin özgün çalışmalarını kapsamaktadır.

Anahtar Kelimeler: t-norm, TL-denklik bağıntısı, TL-kongrüans bağıntısı, TL-modül homomorfizması, TL-Alt Modül, TL-bağıntı, TL-fonksiyon

SUMMARY

Fuzzy Module Homomorphisms

The aim of this thesis is to extend the definition of module homomorphism in algebraic structures to fuzzy algebraic structures and to carry some definitions and theorems existing for modules to ⊤L-modules. The homomorphism theorems for modules are expressed for fuzzy modules. Moreover, it is obtained a fuzzy module homomorphism from each module homomorphism and so it is seen that fuzzy algebraic structures are an extension of algebraic structures.

This thesis consists of two chapters. The first chapter contains preliminaries, some important definitions about researches done in this field. The second chapter, we establish the original studies of thesis.

Key Words: t-norm, ⊤L equation relation, ⊤L-congruence relation, ⊤L-module homomorphism, ⊤L-submodule, ⊤L-relation, ⊤L-function.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. T_M, T_P ve T_L temel t-normlarının üç boyutlu ve kontur grafikleri………..……....7

Şekil 2. Örnek 6. daki C fuzzy alt kümesinin grafiği ………….……………………………15

Şekil 3. Örnek 6. daki D fuzzy alt kümesinin grafiği ………………..………………...….15

Şekil 4. Örnek 6. daki A ve B fuzzy alt kümelerinin grafiği……………..………………..16

Şekil 5. Örnek 6. daki C∨D fuzzy alt kümesinin grafiği………………..………………...16

Şekil 6. Örnek 6. daki C∧D fuzzy alt kümesinin grafiği………………..…………………16

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. $L = \{0, a, 1\}$ kafesi üzerindeki bütün t-normlar tablosu…...……………………..…..8

Tablo 2. $L = \{0, a, b, 1\}$ kafesi üzerindeki bütün t-normlar tablosu………………………..8

Tablo 3. $E: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \to L = \{0, a, 1\}$ üzerindeki bütün T_1L-denklik bağıntıları tablosu…..18

Tablo 4. $E: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \to L = \{0, a, 1\}$ üzerindeki bütün T_2L-denklik bağıntıları tablosu…..19

Tablo 5. $F: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to L = \{0, a, 1\}$ üzerindeki bütün T_1L-denklik bağıntıları tablosu…..20

Tablo 6. $F: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to L = \{0, a, b, 1\}$ şeklindeki bütün T_4L-denklik bağıntısı tablosu…20

Tablo 7. $E: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \to L = \{0, a, b, 1\}$ şeklindeki bütün T_4L-denklik bağıntıları tablosu...20

Tablo 8. $f: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \to L$ şeklindeki T_1 için bütün E_3-F_1 genişletilmiş bağıntılar tablosu...24

Tablo 9..$f: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \to L$ şeklindeki T_2 için bütün E_3-F_1 genişletilmiş bağıntılar tablosu...25

Tablo 10. $f: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \to L$ şeklindeki T_1L-kısmi fonksiyonlar tablosu………..………….27

Tablo 11. $f: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \to L$ şeklindeki T_2L-kısmi fonksiyonlar tablosu…………………...28

SEMBOLLER DİZİNİ

$B \subseteq L$	B kümesi L kümesinin alt kümesidir
B_{-}	B kümesinin bütün alt sınırlarının kümesi
B_{+}	B kümesinin bütün üst sınırlarının kümesi
$\bigwedge_{b \in B} b$	B_{-} kümesinin en büyük alt sınırı
$\bigvee_{b \in B} b$	B_{+} kümesinin en küçük üst sınırı
$f(A)$	A kümesinin f fonksiyonu altında görüntüsü
$f^{-1}(B)$	B kümesinin f fonksiyonu altında ters görüntüsü
$\mathcal{F}(X,L)$	X den L ye bütün L-alt kümelerinin kümesi
$\mathcal{F}(X,E,L)$	E-genişletilmiş L-alt kümelerinin kümesi
$\mathcal{F}(X,Y,E,F)$	E-F genişletilmiş fonksiyonlar kümesi
$\mathcal{F}(XxY, L)$	Bütün X den Y ye L-bağıntılarının kümesi
$\mathcal{F}$ (XxY,E,L)	Bütün E-genişletilmiş L-bağıntılarının kümesi
$\mathcal{F}$ (XxY,F,L)	Bütün F-genişletilmiş L-bağıntılarının kümesi
$\mathcal{F}$ (XxY,E,F,L)	Bütün E-F genişletilmiş L-bağıntılarının kümesi
FS(M, L)	Bütün TL-alt modüllerin kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayıları kümesi
(X, E)	X kümesi üzerinde E TL-denklik bağıntısı

1. GENEL BİLGİLER

1.1.Giriş

Niteliği tam anlaşılamayan, iyi seçilmeyen, açık seçik görünmeyen, net olmayan şeklinde tanımlanan bulanıklık, dereceli üyelik kavramı yardımı ile teknik bilim dünyasına taşınmıştır. Bulanık (fuzzy) kümelerde dereceli üyelik kavramı ilk kez 1965 yılında Azeri kökenli Prof.Dr. Lütfü A. Zade (Lotfi Zadeh)[1] vermiştir.

Bulanık mantık (fuzzy logic) genelde, insan düşüncesine özdeş işlemlerin gerçekleşmesini sağlamakla, gerçek dünyada sık sık meydana gelen belirsiz ve kesin olmayan verileri modellemede yardımcı olur.

Gerçek dünyada karşılaşılan nesnelerin sınıflarının üyelik dereceleri tam olarak tanımlanamaz. Örneğin hayvanlar sınıfını ele alalım. Açıkça bu kümenin köpekleri, atları, kuşları vs. eleman olarak içerdiği, kayaları, sıvıları, bitkileri vs içermediği bellidir. Bununla beraber denizyıldızı, bakteri gibi nesnelerin hayvanlar sınıfına olan yakınlığı belirsiz bir durumdur.

Klasik mantıkta bir önerme “doğru” veya “yanlış” tır. Fakat gerçek dünyadaki olayların ne derecede doğru veya yanlış olmasının belirlenmesi gerekmektedir. Örneğin 100 C suyun sıcaklığı “sıcak” olarak ifade edilirse 95 C, 80 C lerdeki su için “sıcak değildir” ifadesi bu anlamda doğru olmadığı gibi yanlış da değildir. Bu nedenle önermelerin doğru (1) ve yanlış (0) değerleri arasındaki değerler (az sıcak, ılık, az soğuk, vs.) kullanılarak bulanık küme kavramı ortaya atılmıştır. Bulanık küme teorisi az, sık, orta, düşük, çok bir çok gibi dilbilimsel yapıları kullanarak dereceli veri modellemesini gerçekleştirmektedir.

Klasik küme, kümeye kesinlikle ait olma veya kesinlikle ait olmama biçiminde iki grubun oluşturulması ile anlamlıdır. Bulanık kavramı, kesin geçişleri elemine ederek belirsizlik kavramının tanımını yeniden verilebilir ve evrendeki bütün bireylere üyelik derecesi değerini atayarak matematiksel olarak tanımlanabilir. Bu derece, bulanık küme yardımıyla verilen kavram ile uyumludur ve benzer bir bireyin derecesine uyar. Böylece bireyler, bulanık küme içerisinde üyelik dereceleri tarafından gösterilen daha büyük ve daha küçük değerlere ait olabilirler. Bu üyelik dereceleri [0, 1] aralığında gerçel değerler ile ifade edilir.

Bulanık üyelik derecelerinin olasılık değerleri ile kıyaslamasını yaparsak aralarında farklar olduğunu görürüz. Sonlu bir evrensel kümede olasılıklar toplamı 1'e eşit olmakta, bulanık üyelik derecelerinde ise böyle bir durumun gerekliliği olmamaktadır. Olasılık, ayrık değerlere sahip olmakta, bulanık kümenin bireye ilişkin üyelik dereceleri süreklilik taşımaktadır. Örneğin, bulanık kümelerde 70 kg birisi %100 normal ağırlıkta ise 71 kg için de normalliğin derecesi kolayca belirlenmektedir. Klasik olasılık hesapları, bireylerin tamamının temeline dayalıdır. Bulanık küme teorisinde ise bireyin üyelik derecesi, diğer bireylerin tamamının temeline ilişkin olmamakta, üyelikler bakımından farklar görülmektedir. Zade'ye göre bir olayın bulanık kümede olasılığı, bu olayın üyelik fonksiyonun bir beklentisidir Nabiyev [2].

Fuzzy kümeler teorisi ilk olarak 1965 yılında Zadeh [1] tarafından kümeler teorisinin bir genişlemesi olarak ortaya çıktı. Burada üyelik (ait olma) derecesi 0 ile 1 arasındaki reel değerler olarak açıklandı. Daha sonra 1971 de Rosenfield [3] bu yapıyı Fuzzy gruplar teorisine genişletti. Negoita ve Ralescu [4] bu yapıyı geniş anlamda incelediler. Anthony ve Sherwood [5], Rosenfield'ın tanımlarını [0, 1] kafesi üzerindeki "min" ikili işleminden daha genel olan t-normlar için genişletti. Fuzzy modüllerin yapısı, L-fuzzy modüller, fuzzy alt uzaylar ve T-fuzzy lineer uzaylar sırasıyla Negoita ve Ralescu [4], Maschinchi ve Zahedi [6], Katsaras ve Liu [7], Yu[8,9] tarafından incelendi. Daha fazla olarak bu konular Abu Osman [10], Das [11], Golan [12], Gu ve Lu [13], Lowen [14], Lubczonok [15], Malik ve Mordeson [16], Mugandu [17], Pan [18-21], Yu [9], Zahedi [22,23] ve birçok diğer araştırmacılar tarafından incelendi. Bunlardan sonra L üzerinde tam Brauwerian kafes sonsuz $\vee$-dağılımlı T t-norm kullanılarak TL-alt cebirler [24,25], TL-altgruplar [26] ve TL-idealler [27,28] TL-alt modüller ve TL-lineer uzaylar [29] konuları incelendi.

Murali [30,31], Samhan [32] fuzzy alt cebirleri ve bir universal cebir için fuzzy kongrüans bağıntılarını inceledi. Samhan fuzzy bölüm cebirini ve bazı homomorfizm teoremlerinin fuzzy anlamda ispatlarını verdi.

Fuzzy bağıntıları kavramı Zadeh [33]'de başlayarak diğer araştırmacılar Rosenfield [34] Tamura [35], Yeh ve Bang [36] tarafından önemli derecede gelişmeler kaydetti. Bir grup üzerinde fuzzy kongrüans kavramı Kuroki [37] tarfından verildi. Bu anlamda universal cebirler üzerinde Fileo ve Maurer [38] ve Murali [31] araştırmacılar çalışmışlardır.

Dutta ve Biswas [39, 40] yarı halka ve bu halka üzerinde tanımlı modüller üzerinde fuzzy kongrüans bağıntılarını ve bir fuzzy alt modüle göre bölüm modülü yapılarını inceledi. Yine Kim ve Bae [41] gruplarda fuzzy kongrüans bağıntılarını inceledi.

Fuzzy fonksiyonlar ve homomorfi kavramı başlangıçta sadece kalsikte verilen haliyle alındı ve sonuçlar hep bu anlamda incelendi. Daha sonra Sasaki [42] ve Sidky [43] fuzzy fonksiyonları ilk olarak inceledi. Takip eden yıllarda Fang [44], Chakraborty ve Khare [45], Su-Yun, De-Gang, Wen-Xiang Gu, Wang [46], Sebastian ve Sander [47], Choudhury, Chakraborty ve Khare [48] fuzzy grup homomorfilerini ve gruplardaki bazı sonuçları elde ettiler. Ancak bu çalışmalarda ortak bir homomorfi tanımı olmadığı dikkate değerdir.

Halkalarda ve modüllerde fuzzy homomorfi kavramı Malik ve Mordeson [49], Yamak [50], Kazancı [51] ve Tang [52] tarafından çalışılmaktadır.

L-fuzzy fonksiyon kavramı, Höhle ve Porst [53], Sostak [54], Kim, Monk ve Neggers [55], Demirci [56-61] ve daha birçok araştırmacı tarafından fuzzy denklik bağıntısı yardımıyla incelenmektedir. Bu alanda faklı birçok tanım verilmiştir. Ayrıca Demirci fuzzy fonksiyon kavramıyla fuzzy ikili işlem tanımı ve fuzzy grup tanımı vermiştir.

Bu tezdeki ana amacımız klasikte mevcut modül homomorfi kavramını fuzzy modül homomorfi kavramına aktarmak ve homomorfizm ile ilgili birçok teoremin bu anlamda ispatını vermektir. Bunun için temel tanım ve teoremler genel bilgiler kısmında özetlendi.

Çalışmamızda t-normların ve TL-denklik bağıntılarının önemi büyüktür. Bu konularda çalışmalar Klement, Pap ve Mesiar [62-65] genişçe yer almaktadır. Çalışmanın özgün bölümünde TL-kongrüans bağıntıları geniş olarak incelenmiştir. TL-modül homomorfisinin klasikte mevcut homomorfi kavramının bir genişlemesi olduğu Teorem 48'de açıkça elde edilmiştir.

1.2.Tam Kafesler ve t-normlar

Bu bölümdeki kafeslerle ilgili tanım ve teoremler Birkhoff [66]'dan derlenmiştir.

Tanım 1. $L\neq\emptyset$ ve "$\leq$" L'de bir bağıntı olsun. Bu taktirde $(L,\leq)$ ikilisine sıralı küme denir $\Leftrightarrow$

i) $\forall a \in L$ için $a \leq a$

ii) $\forall a, b \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise a=b

iii) $\forall a, b, c \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$

Bu durumda $(L, \leq)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2. $(L, \leq)$ sıralı küme, $B \subseteq L$ olsun.

i) $\forall b \in B$ için $a \leq b$ ise $a \in L$ elemanına B'nin alt sınırı denir.

ii) $\forall b \in B$ için $b \leq d$ ise $d \in L$ elemanına B'nin üst sınırı denir.

Tanım 3. $(L, \leq)$ sıralı küme, $B \subseteq L$ $a_0 \in B$ olsun.

i) $\forall b \in B$ için $a_0 \leq b$ ise a_0 elemanına B'nin en küçük elemanı denir.

ii) $\forall b \in B$ için $b \leq a_0$ ise a_0 elemanına B'nin en büyük elemanı denir.

Tanım 4. B_- , B_+ sırasıyla B'nin bütün alt sınırlarının ve üst sınırlarının kümesini göstermek üzere

i) $B_- \neq \emptyset$ ve B_-'nin en büyük elemanı varsa buna B'nin en büyük alt sınırı denir ve infB= $\wedge$B= $\bigwedge\limits_{b \in B} b$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

ii) $B_+ \neq \emptyset$ ve B_+ nın en küçük elemanı varsa buna B'nin en küçük üst sınırı denir ve SupB=$\vee$B=$\bigvee\limits_{b \in B} b$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

Tanım 5. $(L, \leq)$ sıralı küme olsun.

i) $\forall a, b \in L$ için $Sup\{a,b\} = a \vee b$ ve $Inf\{a,b\} = a \wedge b$ mevcut ise L'ye kafes denir. Bu durumda $L, \vee, \wedge$ şeklinde gösterilir.

ii) $\forall a, b \in L$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ ise L'ye zincir denir.

Tanım 6. $(L, \leq)$ sıralı küme olsun.

$T \subseteq L$ için SupT ve İnf T mevcut ise L'ye tam kafes denir.

Tanım 7. L kafes ve $\forall a,b,c\in L$ olsun.

i) $a\leq b$ için

$a\vee(b\wedge c)=b\wedge(a\vee c)$ ise L'ye modüler kafes denir.

ii) L kafes ve $\forall a,b,c\in L$ için

$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ ve $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ ise L'ye dağılımlı kafes denir.

Teorem 1. [66] $(L,\leq)$ sıralı bir küme olsun.

a) $(L,\leq)$ tam kafestir $\Leftrightarrow$ Her $T\subseteq L$ için InfT mevcuttur ve $1\in L$ dir.

b) $(L,\leq)$ bir zincir ise $(L,\leq)$ bir kafestir. Tersi her zaman doğru değildir.

c) Her tam kafes bir kafestir. Tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 8. $(L,\vee,\wedge)$ tam kafes olsun. L'ye sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes denir $\Leftrightarrow$

$\forall a,b_i\in L, i\in T$ için $a\wedge(\bigvee_{i\in T} b_i)=\bigvee_{i\in T}(a\wedge b_i)$

dır.

Tanım 9. $(L,\leq)$ bir kafes ve $\emptyset\neq T\subseteq L$ olsun. $\forall a,b\in T$ için $a\vee b, a\wedge b\in T$ ise T'ye alt kafes denir.

Tanım 10. L kafes ve $\exists 0\in L$ öyleki $\forall x\in L$ için $0\leq x$ ise L'ye alttan sınırlı kafes denir ve $(L,\leq,0)$ ile gösterilir.

Tanım 11. L kafes ve $\exists 1\in L$ öyleki $\forall x\in L$ için $x\leq 1$ ise L ye üstten sınırlı kafes denir ve $(L,\leq,1)$ ile gösterilir.

Tanım 12. L kafesi üstten ve alttan sınırlı ise L'ye sınırlı kafes denir ve $(L,\leq,0,1)$ ile gösterilir. Aksi söylenmedikçe bütün kafesleri sınırlı kafes olarak alacağız.

Tanım 13. [62] $(L,\leq,0,1)$ bir kafes olsun. $\mathrm{T}:L^2\rightarrow L$ ikili işlemine t-norm denir. $\Leftrightarrow$

1. $\forall x\in L$ için $x\,\mathrm{T}\,1=x$
2. $\forall x,y\in L$ için $x\,\mathrm{T}\,y=y\,\mathrm{T}\,x$

3. $\forall x,y,z\in L$ için $(x\mathrm{T}y)\mathrm{T}z = x\mathrm{T}(y\mathrm{T}z)$

4. $\forall x,y,z\in L$ için $x\le y$ ise $x\mathrm{T}z\le y\mathrm{T}z$

$D_T = \{a\in L:\ a\mathrm{T}a=a\}$ olarak alınacaktır.

Fuzzy mantığındaki ilk çalışmalarda kafesteki işlemi infimum olarak alıyorlardı. Daha sonra infimum yerine t-normlar geçti.

Eğer L tam kafes ve $\left(\bigvee_{i\in I} a_i\right)\mathrm{T}b = \bigvee_{i\in I}(a_i\mathrm{T}b)$ ise T'ye sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm denir.

Aksi söylenmedikçe T ile açıklanan ikili işlemler t-norm olarak alınacaktır.

Tanım 14. [65] $(L,\le,0,1)$ sonsuz dağılımlı tam kafes 0, 1 sırasıyla L nin en küçük ve en büyük elemanları olsun. ve T ve T', L üzerinde t normlar olsun.

i) Eğer $\forall a,b\in L$ için $a\mathrm{T}b\le a\mathrm{T}'b$ oluyorsa $\mathrm{T}\le\mathrm{T}'$ diye gösterilir ve T' güçlüdür T diye adlandırılır.

ii) $\forall a,b,c\in L$ için $(a\mathrm{T}'c)\ \mathrm{T}\ (b\mathrm{T}'d) \le (a\mathrm{T}b)\ \mathrm{T}'\ (c\mathrm{T}d)$ oluyorsa $\mathrm{T}\ll\mathrm{T}'$ diye gösterilir ve T' baskındır T diye adlandırılır.

Örnek 1. [65] $(L,\le,0,1)$ kafes ve $x,y\in L$ olsun. Bu takdirde

a) $\mathrm{T}_M : L^2\to L$, $\quad x\ \mathrm{T}_M\ y = x\wedge y$

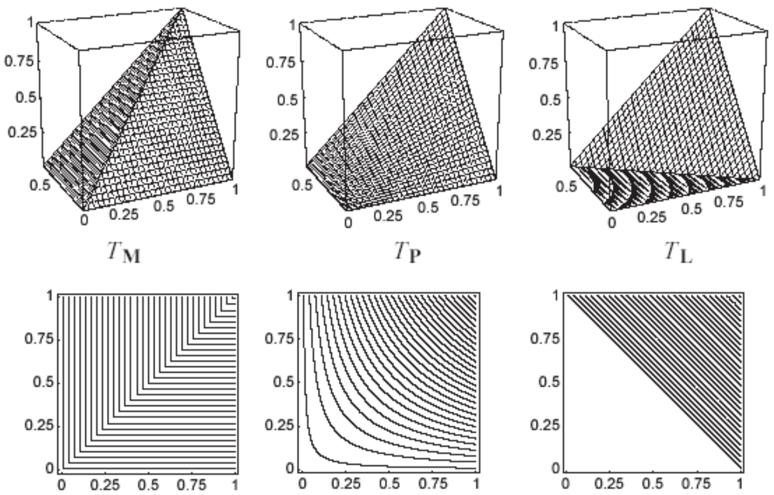
b) $\mathrm{T}_D : L^2\to L$, $\quad \mathrm{T}_D(x,y) = \begin{cases} y, & x=1 \\ x, & y=1 \\ 0, & x\ne 1 \text{ ve } y\ne 1 \end{cases}$

ikili işlemleri t- normdur.

Örnek 2. [65] $L=[0,1]$ üzerinde aşağıda tanımlanan ikili işlemler birer t-normdur.

$$\mathrm{T}_M(x,y) = \min(x,y)$$
$$\mathrm{T}_P(x,y) = x\cdot y$$
$$\mathrm{T}_L(x,y) = \max(x+y-1,0)$$

Bu t-normlar literatürde T_M(minimum), T_P(çarpım) ve T_L (Lukasiewicz) şeklinde adlandırılır. Bu t-normlara ait üç boyutlu ve kontur grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 1. $\top_M$, $\top_P$ ve $\top_L$ temel t-normlarının üç boyutlu ve kontur grafikleri

Teorem 2. [66] L_1, L_2 kafesler ve $L=L_1\times L_2$ olsun. Bu taktirde $\forall(x,y),(x',y')\in L$ için $\quad x,y \ \leq\ x',y' \ \Leftrightarrow x\leq x',\ \ y\leq y'$

olarak tanımlanırsa $(L,\leq)$ bir kafestir.

Teorem 3. [65] $\top_1$ ve $\top_2$ sırasıyla L_1 ve L_2 kafesleri üzerinde t-normlar ise

$$\top:\ L_1\times L_2\ \times\ L_1\times L_2\ \to L_1\times L_2$$
$$x,y\ \top\ x',y'\ =\ x\top_1 x', y\top_2 y'$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem $L_1\times L_2$ kafesi üzerinde t-normdur. Buradaki $\top$, t-normu $\top_1\times\top_2$ ile gösterilecektir.

Teorem 4. [65] $\top$, L üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

i) $\forall x,y\in L$ için $x\top y\ \leq\ x\wedge y$,

ii) $\forall x\in L$ için $0\top x=x\top 0=0$

iii) $a\leq b$ ve $x\leq y \Rightarrow a\top x\leq b\top y$

iv) $a,b\in D_\top$ ise $a\top b\in D_\top$

v) $\{a_i|i\in I\},\{b_i|i\in I\}\subset L$ ise $\left(\bigwedge_{i\in I}a_i\right)\top\left(\bigwedge_{i\in I}b_i\right)\leq\bigwedge_{i\in I}(a_i\top b_i)$

Örnek 3. L={ $\frac{1}{n}$: n=1,2,…}∪ {0}kafesi olsun. Bu taktirde

i) $\top_0$(a,b)= $\begin{cases} 0, & a.b=0 \\ a, & b=1 \\ b, & a=1 \\ \dfrac{1}{n+m}, & a=\dfrac{1}{m}, b=\dfrac{1}{n}, m>1, n>1 \end{cases}$

ii) $\top_1$ (a,b)= $\begin{cases} 0, & a.b=0 \\ \dfrac{1}{m+n-1}, & a=\dfrac{1}{m}, b=\dfrac{1}{n} \end{cases}$

ikili işlemleri t- norm dur

Örnek 4.

$i)$ $0 \to a \to 1$ sıralaması ile $L = \{0, a, 1\}$ kafesi üzerindeki bütün t-normlar aşağıda verilmiştir.

Tablo 1. $L = \{0, a, 1\}$ kafesi üzerindeki bütün t-normlar tablosu

T_1	0	a	1
0	0	0	0
a	0	0	a
1	0	a	1

T_2	0	a	1
0	0	0	0
a	0	a	a
1	0	a	1

$ii)$ $L = \{0, a, b, 1\}$ kümesi

$$\begin{tikzcd} & 1 & \\ a \arrow[ur] & & b \arrow[ul] \\ & 0 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

sıralaması ile kafes olduğu biliniyor.

Bu kafes üzerindeki bütün t-normlar aşağıda verilmiştir.

Tablo 2. $L = \{0, a, b, 1\}$ kafesi üzerindeki bütün t-normlar tablosu

T1	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	0	0	b
1	0	a	b	1

T2	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

T3	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	0	b
1	0	a	b	1

T4	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

Teorem 5. [62] L tam kafes, $\top$ L üzerinde sonsuz $\vee$ -dağılımlı t-norm ise

$\vee_{i\in I} \vee_{j\in I}(a_i T b_j) = (\vee_{i\in I} a_i) T (\vee_{j\in J} b_j)$ dır.

1.3.Modüller

Bu bölümdeki tanım ve teoremler Mordeson ve Malik [68]'den derlenmiştir.

Tanım 15. R boştan farklı bir küme, "+", "." R üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun. R'ye halka denir $\Leftrightarrow$

i) $\forall a,b,c \in R \ için \ a+ \ b+c \ = \ a+b \ +c$

ii) $\forall a,b \in R için \ a+b = b+a$

iii) $\exists 0 \in R, \forall a \in R \ için \ a+0 = a$

iv) $\forall a \in R için \exists b \in R \ öyleki \ a+b = 0$

v) $\forall a,b,c \in R için \ \ a.b \ \ c = a \ \ b.c$

vi) $\forall a,b,c \in R için \ a \ \ b+c \ = a.b + a.c, \quad b+c \ \ a = b.a + c.a$

Eğer $\forall a,b \in R \ için \ a.b = b.a$ sağlanırsa R'ye komutatif (değişmeli) halka denir. $a+b=0 \ \ ise \ \ b=-a$ ile gösterilir.

Eğer R halkasının "." işlemine göre birim elemanı varsa R'ye birim elemanlı halka denir ve birim eleman 1_R ile gösterilir.

Tanım 16. R birim elemanlı ve değişmeli bir halka olsun.
$\forall x \in R / \ \ 0 \ \ \ için \ \exists y \in R \ \ öyleki \ \ x.y = 1$ ise R'ye cisim denir.

Tanım 17. R bir halka ve $I \subseteq R$ olsun. I ya alt halka denir $\Leftrightarrow$

i) $0 \in I$

ii) $\forall a,b \in I \ \ için \ \ a-b \in I, \ a.b \in I$

Tanım 18. R bir halka $I \subseteq R$ olsun. I ya sol (sağ)ideal denir $\Leftrightarrow$

i) $0 \in I$

ii) $\forall a,b \in I \ \ için \ \ a-b \in I, \ r.a \in I \ \ \ a.r \in I$

I, sol ve sağ ideal ise I'ya ideal denir.

Tanım 19. R bir halka $M \neq \emptyset$ olan bir küme olsun.

$$+: M \times M \to M \qquad .: R \times M \to M$$
$$p,q \ \to p+q \qquad r,p \ \to r.p$$

fonksiyonları için M, aşağıdaki aksiyomları sağlarsa M'ye R -(sol) modül denir.

i) (M, +) değişmeli grup

ii) $\forall r, s \in R \ ve \forall p, q \in M \ için$

$$r. \ p+q \ = r.p + r.q$$

$$r+s \ .p = r.p + s.p$$

$$r.s \ .p = r. \ s.p$$

Eğer R birim elemanlı halka ve $\forall p \in M \ için 1.p = p$ ise M'ye üniter R-modül denir. Aksi söylenmedikçe bütün modüller üniter R-modül olarak alınacaktır.

Örnek 5.

i) R bir halka , $a \in R \ ve \ r \in R$,için ra=r.a ile tanımlanırsa R, R-modüldür.

ii) (M,+) değişmeli grup, $n \in \mathbb{Z}$, a∈M için

$$na = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\ tane} & \mathrm{n} > 0 \\ \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{n\ tane} & \mathrm{n} < 0 \end{cases}$$

ile tanımlı ise M, $\mathbb{Z}$-modüldür.

iii) (M,+) değişmeli grup, R bir halka ve r∈R, a∈M için ra=0 ile tanımlı M, R-modüldür.

Tanım 20. M R-modül, α, M üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. α ya kongrüans bağıntısı denir ⇔ ∀a, b, c, d∈M, r∈R için

∀(a,b), (c,d)∈α ise (a+c, b+d)∈α, (ra, rb)∈α

dır.

Tanım 21. M, R modül olsun. $A \subseteq M$ olsun. A'ya M nin alt modülü denir ⇔

i) $0 \in A$

ii) $\forall a, b \in A \ ve \ \forall r \in R \ için \quad a+b \in A \ ve \ r.a \in A$

Tanım 22. M ve N, R-modüller ve $f: M \to N$ bir fonksiyon olsun. f'ye modül homomorfisi denir$\Leftrightarrow \forall r_1, r_2 \in M$ ve $a \in R$ için

$f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2)$

$f(a.r_1) = a.f(r_1)$

Eğer f birebir ise *f*'ye momomorfizm denir.

Eğer f örten ise *f*'ye epimorfizm denir.

Eğer f birebir ve örten ise *f*'ye izomorfizm denir Bu durumda M,N'ye izomorftur denir ve $M \cong N$ ile gösterilir.

Tanım 23. $f: M \to N$ modül homomorfizması olsun.

i) $Çekf = \{x \in M: f(x) = 0\}$ kümesine *f*' nin çekirdeği denir.

ii) $Resf = \{f(x): x \in M\}$ kümesine *f*'nin resmi denir.

Tanım 24. M, R-modül ve A, M'nin bir alt modülü olsun. $M/A = \{a + A: a \in M\}$ için $(M/A, +)$ değişmeli grubunda dış işlem $\forall r \in R$ için $r(a + A) = r.a + A$ olarak tanımlanırsa $(M/A, +, .)$ R-modüldür. Bu modüle M'nin A alt modülüne göre bölüm modülü denir.

Teorem 6. α, M üzerinde bir kongrüans ise $A = \{a \in M | (a, 0) \in M\}$ M'nin alt modülüdür ve $M/A = M/\propto$ dır.

Teorem 7. A, M'nin alt modülü olsun. Her a, b $\in$M için aαb$\Leftrightarrow$a-b$\in$A ile tanımlı α bağıntısı M üzerinde kongrüans bağıntısıdır.

Teorem 8. M ve N R-modüller $f: M \to N$ modül homomorfizması ise Çek$f$ ve Res$f$ kümeleri sırasıyla M ve N'de alt modüldür.

1.3.1.Homomorfizma Teoremi M ve N, R-modüller olsun. $f: M \to N$ modül homomorfizması ise $M/_{Çekf} \cong Resf$ dir.

Teorem 9. M ve N, R-modüller $f:M\to N$ modül homomorfizması olsun. Bu takdirde

f birebirdir $\Leftrightarrow$ Çek$f=\{0\}$

dır.

Teorem 10. M ve N, R -modüller $f:M\to N$ modül homomorfizması olsun. Bu taktirde

f örtendir $\Leftrightarrow$ Res$f=$ N

dır.

Teorem 11. M, N, K R-modüller olsun. $f:M\to N$, $g:M\to N$, $h:N\to K$ R-modül homomorfileri ise $f+g:M\to N$, $h\circ f:M\to K$ R-modül homomorfileridir. Eğer R değişmeli halka ve $r\in R$ ise $rf:M\to N$ modül homomorfisidir.

Teorem 12. M_1, M_2, N_1, N_2 R-modüller**,** $f: M_1\to N_1\ ve\ f: M_2\to N_2$ modül homomorfileri olsun. Bu taktirde

$f\times g: M_1\times M_2\ \to N_1\ \times N_2, (f\times g)(x,y)=\big(f(x), g(y)\big)$

fonksiyonu modül homomorfisidir.

Teorem 13. $f:M\to N$ modül homomorfizması olsun. Bu taktirde

i) A, M'de alt modül ise $f(A)$, N'de alt modüldür.

ii) B, N'de alt modül ise $f^{-1}(B)$, M'de alt modüldür.

olur.

Teorem 14. $f:M\to N$ modül homomorfizması A, M'de alt modül B, N'de alt modül ise

$f^{-1}\ \ f\ \ A\ \ = A+Çekf,\ \ f\ \ f^{-1}\ \ B\ \ = B\cap \mathrm{Re}sf$

dir.

Teorem 15. M, R-modül A_1 ve A_2 M'nin alt modülleri ise $A_1+A_2=\ \ a_1+a_2 \,|\, a_1\in A_1, a_2\in A_2\ \ ,\ A_1\cap A_2$ kümeleri de M'nin alt modülleridir.

Teorem 16. $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\dots,\mathrm{M}_n$ $\mathrm{R}-$modüller ve $\mathrm{M}=\mathrm{M}_1\times\mathrm{M}_2\times\dots\times\mathrm{M}_n$, olsun. Burada M_i'lerin kartezyen çarpımı da yine R-modüldür. Burada

$\pi_i : M \to M_i \;\; ve \qquad i_k : M_k \to M \qquad 1 \le i,k \le n$

$\pi_i(x_1,\dots,x_n) = x_i \qquad i_k(x_k) = (0,\dots,x_k,\dots,0)$

fonksiyonları R-modül homomorfileridir ve

$\pi_i \circ i_i = I_{M_i}, \quad \pi_i \circ i_j = 0 \quad i \ne j \qquad 1 \le i \le n$

$i_1 \circ \pi_1 + \dots + i_n \circ \pi_n = I_M$

bağıntıları sağlanır.

Teorem 17. M, N, K R-modüller $f : M \to N,\; g : N \to K$ modül homomorfileri ise

$Çek(g \circ f) = f^{-1}(Çek g) \quad ve \quad Res(g \circ f) = g(Resf)$

dır.

Teorem 18. M, R-modül A, M'nin bir alt modülü ve $\pi : M \to M/A \;\; \pi(x) = x + A = \bar{x}$ olsun. Bu taktirde π, modül homomorfisidir ve $Çek\pi = A$

dır.

1.4.L-Alt Kümeler ve ⊤L-Denklik Bağıntıları

Bu bölümde aksi söylenmedikçe L bir tam kafes ve ⊤, L üzerinde bir t-norm olarak alınacaktır.

Tanım 25. [69] X bir küme ve A:X→L fonksiyonuna X' in bir L-alt kümesi denir. X' in bütün L-alt kümelerine X in L-güç kümesi denir ve L^X veya $\mathcal{F}$(X,L) ile gösterilir. L=[0,1] ise L-alt kümelere X' in fuzzy alt kümeleri denir. A∈ $\mathcal{F}$ (X, L) için

A(X)=ResA={A(x) | x∈X }

ye A nın resmi veya görüntüsü denir.

A*={x∈X | A(x)>0 }

kümesine de A nın desteği denir. Eğer 1∈A(X) ise A ya X in normal veya uniter L-alt kümesi denir. A* sonlu küme ise A ya sonlu L-alt küme denir. Diğer durumda A ya sonsuz

L-altküme denir. Eğer A(X) in her altkümesi maksimal elemana sahip ise A ya supremum özelliğini sağlıyor denir. $Y \subseteq X$ ve $a \in L$ için

$$a_Y(x) = \begin{cases} a & ,x \in Y \\ 0 & ,x \notin Y \end{cases}$$

Özel olarak Y={y} ise a_Y L-alt kümesi a_y olarak gösterilir ve buna L-noktası denir. Özel olarak 1_Y L-alt kümesine Y nin karakteristik fonksiyonu denir.

A, B∈ $\mathcal{F}$ (X, L) olsun. ∀ x∈X için

$$A(x) \leq B(x)$$

ise B ye A yı kapsar denir ve $A \leq B$ ile gösterilir. A, B∈ $\mathcal{F}$ (X, L) ve x∈X olsun.

$$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$$

$$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$$

ile tanımlanan L-alt kümelerine sırasıyla A ile B nin birleşimi ve kesişimi(arakesiti) denir.

$\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{F}(X, L)$ ve x∈X olsun.

$$\left(\bigvee_{i \in I} A_i\right)(x) = \bigvee_{i \in I} A_i(x)$$

$$\left(\bigwedge_{i \in I} A_i\right)(x) = \bigwedge_{i \in I} A_i(x)$$

ile tanımlanan L-alt kümelerine sırasıyla $\{A_i \mid i \in I\}$ L-alt kümeler ailesinin birleşimi ve kesişimi(arakesiti) denir. I= { 1,2, … , n} ise birleşim ve arakesit sırasıyla

$$\bigvee_{i \in I} A_i = \bigvee_{i=1}^{n} A_i = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n , \quad \bigwedge_{i \in I} A_i = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$$

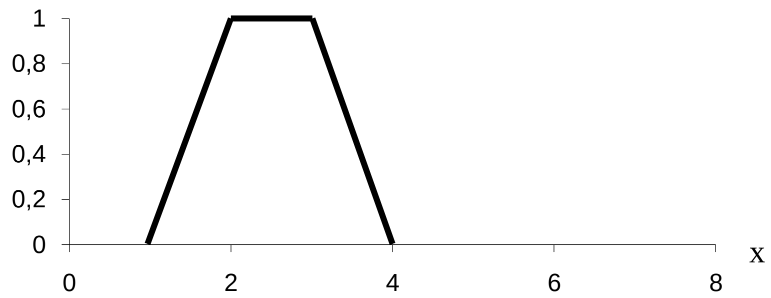
notasyonları ile gösterilir.

Örnek 6. C, D : $\mathbb{R} \to [0,1]$

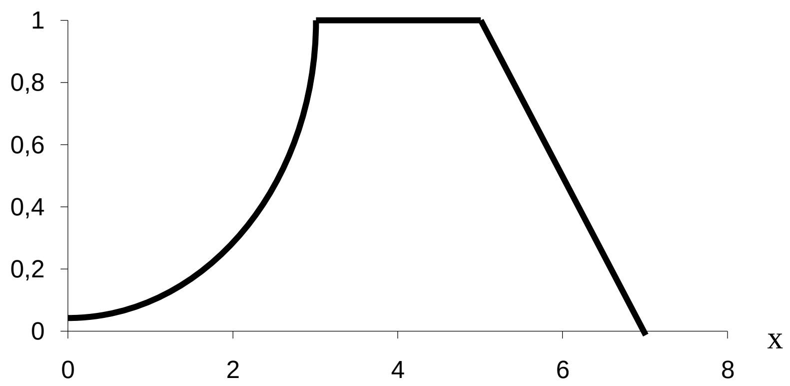
$$C(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x < 3 \\ 4-x, & 3 \leq x \leq 4 \\ 0, & 4 < x \end{cases}$$

$$D(x)=\begin{cases} e^{x-3}, & 0 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x < 5 \\ 1-\dfrac{x-5}{2}, & 5 \leq x \leq 7 \\ 0, & 7 < x \end{cases}$$

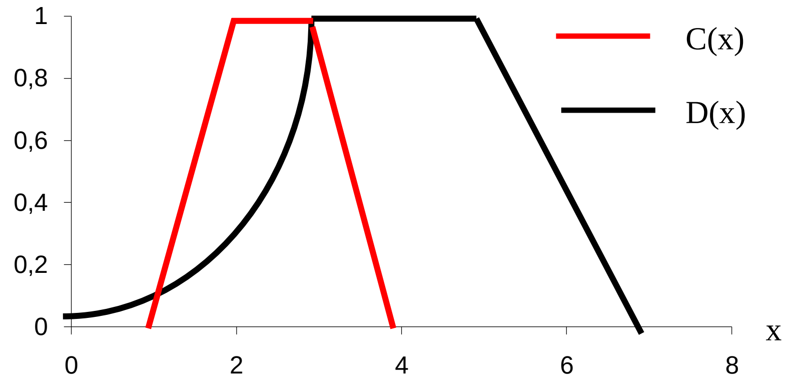
ise C, D, $C \vee D$, $C \wedge D$ fuzzy alt kümelerinin grafikleri aşağıdaki şekildedir.



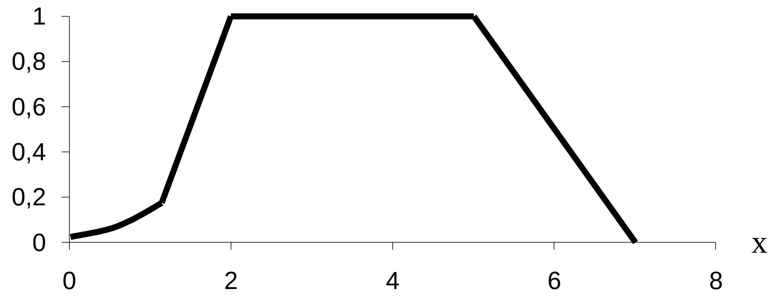
Şekil 2.Örnek 6. daki C fuzzy alt kümesinin grafiği



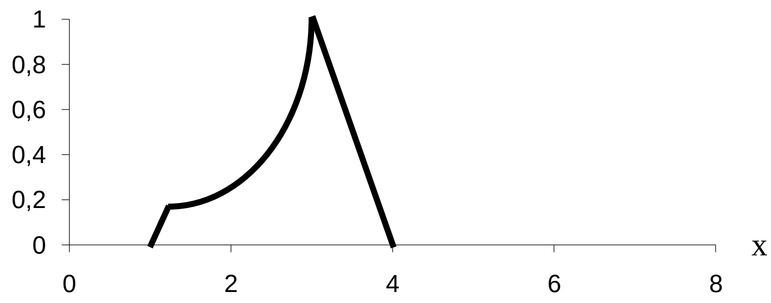
Şekil 3.Örnek 6. daki D fuzzy alt kümesinin grafiği



Şekil 4.Örnek 6. daki C ve D fuzzy alt kümelerinin grafiği



Şekil 5.Örnek 6. daki C∨D fuzzy alt kümesinin grafiği



Şekil 6.Örnek 6. daki C∧D fuzzy alt kümesinin grafiği

Teorem 19. [66] X≠∅ bir küme ve L tamkafes olsun.

i) $(\mathcal{F}(X,L),\leq)$ tam kafestir.

ii) L sonsuz ∨-dağılımlı kafes ise $(\mathcal{F}(X,L),\leq)$ sonsuz ∨-dağılımlı kafesdir.

iii) L modüler (dağılımlı) kafes ise $(\mathcal{F}(X,L),\leq)$ modüler (dağılımlı) kafesdir.

Tanım 26. [69] A∈ $\mathcal{F}$(X, L) ve a∈L ise {x∈X | a≤A(x)} kümesine A nın a-seviye altkümesi denir ve A_a ile gösterilir.

Tanım 27. [60] X bir küme ve $\top$, X üzerinde bir t-norm olsun. E : XxX→L L-alt kümesine $\top$L-denklik bağıntısı denir ⇔

i) E(x,x)=1

ii) E(x,y)=E(y,x)

iii) E(x,y) $\top$ E(y,z)≤E(x,z)

E ye X üzerinde bir $\top$L denklik bağıntısı ise (X,E) ile gösterilir. Özel olarak L=[0,1] alınırsa E'ye $\top$-fuzzy eşitlik denir.

Örnek 7. X boştan farklı bir küme ve α∈L olsun. Bu takdirde

i) $EX_M(x,y)=1$

ii) $EX_L(x,y)= \begin{cases} 1 & ,x=y \\ 0 & ,x \neq y \end{cases}$

iii) $EX_\alpha(x,y)= \begin{cases} 1 & ,x=y \\ \alpha & ,x \neq y \end{cases}$

L-alt kümeleri X üzerinde $\top$L-denklik bağıntılarıdır.

Örnek 8. $\top$, t-norm ise $E:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\ 0,1$

$$E\ \ x,y\ \ = \begin{cases} 1 & x=y \\ \dfrac{1}{2} & 2|x-y,\ x\neq y \\ 0 & 2\nmid x-y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $\top$-fuzzy denklik bağıntısıdır.

Örnek 9. $\mathrm{X} = \{\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}\}$ kümesi için $(\mathrm{i} = 1,2,3,4)$ $\mathrm{E_i}: \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0,1]$ aşağıdaki tablolardaki gibi tanımlansın.

E_1	x	y	z	t
x	1	0,9	0,8	1
y	0,9	1	0,8	0,9
z	0,8	0,8	1	0,8
t	1	0,9	0,8	1

E_2	x	y	z	t
x	1	0,9	0,8	1
y	0,9	1	0,75	0,9
z	0,8	0,75	1	0,8
t	1	0,9	0,8	1

E_3	x	y	z	t
x	1	0,9	0,8	1
y	0,9	1	0,7	0,9
z	0,8	0,7	1	0,8
t	1	0,9	0,8	1

E_4	x	y	z	t
x	1	0,9	0,8	1
y	0,9	1	0,6	0,9
z	0,8	0,6	1	0,8
t	1	0,9	0,8	1

i) E_1, X üzerinde $\top_L$, $\top_M$ ve $\top_P$ fuzzy denklik bağıntılarıdır.

ii) E_2, X üzerinde $\top_L$ ve $\top_P$ fuzzy denklik bağıntısıdır ancak $\top_P$ fuzzy denklik bağıntısı değildir.

iii) E_3, $\top_L$-fuzzy denklik bağıntısıdır ancak $\top_M$ ve $\top_P$ fuzzy denklik bağıntısı değildir.

iv) E_4, $\top_L$, $\top_M$ ve $\top_P$ fuzzy denklik bağıntısı değildir.

Teorem 20. [57] (X,E),(Y,F) olsun. $x, x' \in X$ $y, y' \in Y$ için

$E \times F\left((x,y),(x',y')\right) = E(x,x') \top F(y,y')$ şeklinde tanımlanan L-alt kümesi XxY üzerinde $\top$L-denklik bağıntısıdır.

E×F $\top$L-denklik bağıntısına E ile F $\top$L-denklik bağıntılarının (kartezyen) çarpımı denir.

Örnek 10. $L = \{0, a, 1\}$ kafesi ve $0 \to a \to 1$ sıralaması ile verilsin. Bu takdirde

i) t-norm olarak Örnek 4. (i) deki $\top_1$ alınırsa $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki tüm $\top$L-denklik bağıntıları aşağıda verilmiştir.

Tablo 3. $E: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \to L = \{0, a, 1\}$ üzerindeki bütün T_1L-denklik bağıntıları tablosu

E_1	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	0
$\bar{1}$	0	1	0
$\bar{2}$	0	0	1

E_2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	0
$\bar{1}$	0	1	1
$\bar{2}$	0	1	1

E_3	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	0
$\bar{1}$	0	1	a
$\bar{2}$	0	a	1

E_4	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	1
$\bar{1}$	0	1	0
$\bar{2}$	1	0	1

Tablo 3.'ün devamı

E_5	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	a
$\bar{1}$	0	1	0
$\bar{2}$	a	0	1

E_6	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	a
$\bar{1}$	0	1	a
$\bar{2}$	a	a	1

E_7	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	1	0
$\bar{1}$	1	1	0
$\bar{2}$	0	0	1

E_8	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	1	1
$\bar{1}$	1	1	1
$\bar{2}$	1	1	1

E_9	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	1	a
$\bar{1}$	1	1	a
$\bar{2}$	a	a	1

E_{10}	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	0
$\bar{1}$	a	1	0
$\bar{2}$	0	0	1

E_{11}	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	0
$\bar{1}$	a	1	a
$\bar{2}$	0	a	1

E_{12}	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	1
$\bar{1}$	a	1	a
$\bar{2}$	1	a	1

E_{13}	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	a
$\bar{1}$	a	1	0
$\bar{2}$	a	0	1

E_{14}	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	a
$\bar{1}$	a	1	1
$\bar{2}$	a	1	1

E_{15}	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	a
$\bar{1}$	a	1	a
$\bar{2}$	a	a	1

ii) t-norm olarak Örnek 4. (i) deki T_2 alınırsa $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki tüm TL-denklik bağıntıları aşağıda verilmiştir.

Tablo 4. $E: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \to L = \{0, a, 1\}$ üzerindeki bütün T_2L-denklik bağıntıları tablosu

E_1	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	0
$\bar{1}$	0	1	0
$\bar{2}$	0	0	1

E_2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	0
$\bar{1}$	0	1	1
$\bar{2}$	0	1	1

E_3	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	0
$\bar{1}$	0	1	a
$\bar{2}$	0	a	1

E_4	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	1
$\bar{1}$	0	1	0
$\bar{2}$	1	0	1

E_5	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	a
$\bar{1}$	0	1	0
$\bar{2}$	a	0	1

E_6	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	1	0
$\bar{1}$	1	1	0
$\bar{2}$	0	0	1

E_7	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	1	1
$\bar{1}$	1	1	1
$\bar{2}$	1	1	1

E_8	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	1	a
$\bar{1}$	1	1	a
$\bar{2}$	a	a	1

E_9	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	0
$\bar{1}$	a	1	0
$\bar{2}$	0	0	1

E_{10}	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	1
$\bar{1}$	a	1	a
$\bar{2}$	1	a	1

E_{11}	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	a
$\bar{1}$	a	1	1
$\bar{2}$	a	1	1

E_{12}	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	a
$\bar{1}$	a	1	a
$\bar{2}$	a	a	1

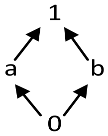
iii) t-norm olarak Örnek 4. (i) deki T_1 i alınırsa $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki bütün TL-denklik bağıntıları aşağıda verilmiştir.

Tablo 5. $F: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to L = \{0, a, 1\}$ üzerindeki bütün T_1L-denklik bağıntıları tablosu

F_1	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	1	0
$\bar{1}$	0	1

F_2	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	1	a
$\bar{1}$	a	1

F_3	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	1	1
$\bar{1}$	1	1

Örnek 10. $L = \{0, a, b, 1\}$ kümesi 

sıralaması ile kafes olarak verilsin. Bu taktirde

i) t-norm olarak Örnek 4. (ii) deki T_4 alınırsa $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki bütün TL-denklik bağıntıları aşağıda verilmiştir.

Tablo 6. $F: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to L = \{0, a, b, 1\}$ şeklindeki bütün T_4L-denklik bağıntısı tablosu

F	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	1	0
$\bar{1}$	0	1

F	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	1	a
$\bar{1}$	a	1

F	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	1	b
$\bar{1}$	b	1

F	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	1	1
$\bar{1}$	1	1

ii) t-norm olarak Örnek 4. (ii) deki T_4 i alınırsa $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki tüm TL-denklik bağıntıları aşağıda verilmiştir.

Tablo 7. $E: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \to L = \{0, a, b, 1\}$ şeklindeki bütün T_4L-denklik bağıntıları tablosu

E1	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	0
$\bar{1}$	0	1	0
$\bar{2}$	0	0	1

E2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	0
$\bar{1}$	0	1	1
$\bar{2}$	0	1	1

E3	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	0
$\bar{1}$	0	1	a
$\bar{2}$	0	a	1

E4	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	0
$\bar{1}$	0	1	b
$\bar{2}$	0	b	1

E5	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	1
$\bar{1}$	0	1	0
$\bar{2}$	1	0	1

E6	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	a
$\bar{1}$	0	1	0
$\bar{2}$	a	0	1

E7	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	a
$\bar{1}$	0	1	b
$\bar{2}$	a	b	1

E8	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	b
$\bar{1}$	0	1	0
$\bar{2}$	b	0	1

E9	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	b
$\bar{1}$	0	1	a
$\bar{2}$	b	a	1

E10	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	1	0
$\bar{1}$	1	1	0
$\bar{2}$	0	0	1

E11	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	1	1
$\bar{1}$	1	1	1
$\bar{2}$	1	1	1

E12	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	1	a
$\bar{1}$	1	1	a
$\bar{2}$	a	a	1

E13	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	1	b
$\bar{1}$	1	1	b
$\bar{2}$	b	b	1

E14	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	0
$\bar{1}$	a	1	0
$\bar{2}$	0	0	1

E15	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	0
$\bar{1}$	a	1	b
$\bar{2}$	0	b	1

E16	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	1
$\bar{1}$	a	1	a
$\bar{2}$	1	a	1

E17	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	a
$\bar{1}$	a	1	1
$\bar{2}$	a	1	1

E18	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	a
$\bar{1}$	a	1	a
$\bar{2}$	a	a	1

E19	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	b
$\bar{1}$	a	1	0
$\bar{2}$	b	0	1

E20	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	b	0
$\bar{1}$	b	1	0
$\bar{2}$	0	0	1

Tablo 7.'nin devamı

E21	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	b	0
$\bar{1}$	b	1	a
$\bar{2}$	0	a	1

E22	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	b	1
$\bar{1}$	b	1	b
$\bar{2}$	1	b	1

E23	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	b	a
$\bar{1}$	b	1	0
$\bar{2}$	a	0	1

E24	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	b	a
$\bar{1}$	b	1	a
$\bar{2}$	a	a	1

E25	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	b	b
$\bar{1}$	b	1	1
$\bar{2}$	b	1	1

E26	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	b	b
$\bar{1}$	b	1	b
$\bar{2}$	b	b	1

Örnek 12. d:X→[0, 1] bir metrik olsun. Bu taktirde
$d: X \times X \to [0,1]$ $\quad E(x,y) = 1 - d(x,y)$ fonksiyonu $\top_L$-fuzzy denklik bağıntısıdır.

Tanım 28. [57] (X,E), (Y,F), A∈$\mathcal{F}$(X,L) ve $f: X \to Y$ olsun.

i) A'ya E-genişletilmiş L-alt kümesi denir ⇔ ∀x, x'∈X için

$A(x) \top E(x,x') \leq A(x')$

Bütün E-genişletilmiş L-alt kümeleri $\mathcal{F}$(X,E,L) ile göstereceğiz.

ii) f'ye E-F-genişletilmiş denir

⇔ ∀x, x'∈X için $E(x,x') \leq F(f(x),(f((x'))$

Bütün E-F-genişletilmiş fonksiyonları kümesini $\mathcal{F}$(X,Y,E,F) ile göstereceğiz.

Örnek 13. $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki ⊤L-denklik bağıntısı E_3, Örnek 10. (i) den $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki ⊤L-denklik bağıntısı F_1 de Örnek 10. (iii) den alınmak üzere bütün genişletilmiş fonksiyonlar aşağıda verilmiştir.

$$g_1(x) = \bar{0}$$
$$g_2(x) = \bar{1}$$
$$g_3(x) = \begin{cases} \bar{0} & x = \bar{0} \\ \bar{1} & x = \bar{1}, \bar{2} \end{cases}$$
$$g_4(x) = \begin{cases} \bar{1} & x = \bar{0} \\ \bar{0} & x = \bar{1}, \bar{2} \end{cases}$$

Örnek 14. $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki ⊤L-denklik bağıntısı E_5, Örnek 10. (ii) den, $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki ⊤L-denklik bağıntısı F_1 de Örnek 10. (iii) den alınmak üzere bütün E_5-F_1 genişletilmiş fonksiyonlar aşağıda verilmiştir.

$g_1(x) = \bar{0}$
$g_2(x) = \bar{1}$
$$g_3(x) = \begin{cases} \bar{0} & x = \bar{1} \\ \bar{1} & x = \bar{0}, \bar{2} \end{cases}$$
$$g_4(x) = \begin{cases} \bar{1} & x = \bar{1} \\ \bar{0} & x = \bar{0}, \bar{2} \end{cases}$$

Örnek 15. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$, $f(3k+n) = \bar{n}$ $\mathbb{Z}$-modül homomorfisi olsun. E ve F sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanırsa

F	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	a
$\bar{1}$	a	1	a
$\bar{2}$	a	a	1

$$E(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ a & 2 \mid x - y, x \neq y \\ 0 & 2 \nmid x - y \end{cases}$$

f, E-F genişletilmiştir.

1.5.Fuzzy Bağıntılar ve Fuzzy Fonksiyonlar

Tanım 29. [57] X,Y kümeler ise $f: X \times Y \to L$ ye X den Y 'ye L- bağıntısı denir. Bütün L-bağıntılarının kümesini $\mathcal{F}$(XxY, L) ile ifade edilecektir.

Tanım 30. [54] X, Y ve Z'ler küme, f∈ $\mathcal{F}$ (XxY, L) ve g∈ $\mathcal{F}$ (YxZ, L) olsun. (x,z)∈XxZ için

$g \circ_{\top} f: X \times Z \to L$ $\;g \circ_{\top} f$ (x,z) = $\bigvee_{y \in Y}$ f(x,y)⊤g(y,z),

ile tanımlanan L-bağıntısına g ile f bağıntılarının bileşkesi denir. Eğer ⊤=∧ olarak alınırsa g∘f ile gösterilir.

Örnek 16. $X = \{a, b, c\}, Y = \{a, b\}\ ve\ Z = \{0,1\}$ olarak alınsın.
$f: X \times Y \to [0,1]\ ve\ g: Y \times Z \to [0,1]$ fuzzy bağıntıları aşağıdaki tablolarda tanımlansın.

f	a	b
a	1	½
b	½	1
c	1/3	1

g	0	1
a	½	¼
b	¼	½

Bu taktirde $g \circ f$ fuzzy bağıntısı aşağıdaki tablodaki gibidir.

$g \circ f$	0	1
a	½	½
b	½	½
c	1/3	½

Tanım 31. [57] $f: X \times Y \to L$ L-bağıntısı olsun. Bu taktirde

$f^{-1}: Y \times X \to L$ $f^{-1}(y,x)=f(x,y)$ ile tanımlanan f^{-1} bağıntısına f L-bağıntısının tersi denir.

Tanım 32. [57] $f: X \times Y \to L$ L-bağıntısı ve A$\in \mathcal{F}$ (X,L), B$\in \mathcal{F}$ (Y,L) olsun.

x$\in$X ve y$\in$Y için

$f(A)(y)=\bigvee_{x\in X} A(x)\mathrm{T}f(x,y)$, $f^{-1}(B)(x)=\bigvee_{y\in Y} B(y)\mathrm{T}f(x,y)$

ile tanımlanan f(A) ve f^{-1}(B) L-alt kümelerine sırasıyla A nın görüntüsü ve B nin ters-görüntüsü denir.

Tanım 33. [60] (X,E) (Y,F) ve f$\in \mathcal{F}$ (XxY,L) olsun.

i) f'ye E-genişletilmiş denir

$\Leftrightarrow \forall x, x'\in X$ ve $y\in Y$ için $f(x,y)\,\mathrm{T}\,E(x,x')\leq f(x',y)$

Bütün E-genişletilmiş L-bağıntılarının kümesi $\mathcal{F}$ (XxY,E,L) ile gösterilecektir.

ii) f'ye F-genişletilmiş denir

$\Leftrightarrow \forall x\in X$ ve $y, y'\in Y$ için $f(x,y)\,\mathrm{T}\,F(y,y')\leq f(x,y')$

Bütün F-genişletilmiş L-bağıntılarının kümesi $\mathcal{F}$ (XxY,F,L) ile gösterilecektir.

iii) E-genişletilmiş ve F-genişletilmiş L-bağıntılarına E-F-genişletilmiş L-bağıntı denir. Bütün E-F-genişletilmiş L bağıntılarının kümesi $\mathcal{F}$ (XxY,E,F,L) ile gösterilecektir. Açık olarak $\mathcal{F}$ (XxY,E,F,L)= $\mathcal{F}$ (XxY,E,L)$\cap$ $\mathcal{F}$ (XxY,F,L) dır.

Örnek 17. $L=\{0,a,1\}$ kafesi ve t-norm olarak Örnek 4. (i) deki T_1 i $\mathbb{Z}_3$üzerindeki TL-denklik bağıntısı Örnek 10. (i) deki E_3 ve $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki TL-denklik bağıntısı Örnek 10. (iii) deki F_1 olarak alınırsa $f: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \to L$ şeklindeki L-bağıntıları içinden bütün E_3-F_1 genişletilmiş olanları aşağıda verilmiştir.

Tablo 8. $f: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \to L$ şeklindeki T_1 için bütün E_3-F_1 genişletilmiş bağıntılar tablosu

fon	A	B	C	D	E	F
1	0	a	1	a	1	1
2	0	a	1	a	a	0
3	0	a	1	a	1	a
4	0	a	1	0	a	0
5	0	a	1	a	1	0
6	0	a	1	0	1	0
7	0	a	1	1	a	a
8	0	a	1	a	a	1
9	0	a	1	0	1	a
10	0	a	1	1	1	1
11	0	a	1	1	a	1
12	0	a	1	1	1	a
13	0	a	1	a	a	a
14	0	1	0	a	0	1
15	0	1	0	1	0	a
16	0	1	0	0	a	a
17	0	1	0	a	a	0
18	0	1	0	0	a	0
19	0	1	0	a	0	a
20	0	1	0	a	0	0
21	0	1	0	1	a	a
22	0	1	0	0	0	a
23	0	1	0	a	a	1
24	0	1	0	1	a	1
25	0	1	0	1	0	1
26	0	1	0	a	a	a
27	0	1	0	0	0	0
28	0	0	1	a	1	1
29	0	0	1	0	a	a
30	0	0	1	a	a	0
31	0	0	1	a	1	a
32	0	0	1	0	a	0
33	0	0	1	a	1	0
34	0	0	1	0	1	0
35	0	0	1	1	a	a
36	0	0	1	a	a	1
37	0	0	1	0	1	a
38	0	0	1	1	1	1
39	0	0	1	1	a	1
40	0	0	1	1	1	a
41	0	0	1	a	a	a
42	0	0	a	a	1	1
43	0	0	a	a	0	1
44	0	0	a	1	0	a
45	0	0	a	0	a	a
46	0	0	a	a	a	0
47	0	0	a	a	1	a
48	0	0	a	0	a	0
49	0	0	a	a	1	0
50	0	0	a	a	0	a
51	0	0	a	a	0	0
52	0	0	a	0	1	0
53	0	0	a	1	a	a
54	0	0	a	0	0	a
55	0	0	a	a	a	1
56	0	0	a	0	1	a
57	0	0	a	1	1	1
58	0	0	a	1	a	1
59	0	0	a	1	1	a
60	0	0	a	a	a	a
61	0	0	a	0	0	0
62	0	1	a	a	1	1
63	0	1	a	a	0	1
64	0	1	a	1	0	a
65	0	1	a	0	a	a
66	0	1	a	a	a	0
67	0	1	a	a	1	a
68	0	1	a	0	a	0
69	0	1	a	a	1	0
70	0	1	a	a	0	a
71	0	1	a	a	0	0
72	0	1	a	0	1	0
73	0	1	a	1	a	a
74	0	1	a	0	0	a
75	0	1	a	a	a	1
76	0	1	a	0	1	a
77	0	1	a	1	1	1
78	0	1	a	1	a	1
79	0	1	a	1	1	a
80	0	1	a	1	0	1
81	0	1	a	a	a	a
82	0	1	a	0	0	0
83	0	1	1	a	1	1
84	0	1	1	0	a	a
85	0	1	1	a	a	0
86	0	1	1	a	1	a
87	0	1	1	0	a	0
88	0	1	1	a	1	0
89	0	1	1	0	1	0
90	0	1	1	1	a	a
91	0	1	1	a	a	1
92	0	1	1	0	1	a
93	0	1	1	1	1	1
94	0	1	1	1	a	1
95	0	1	1	1	1	a
96	0	1	1	a	a	a
97	0	0	0	a	0	1
98	0	0	0	1	0	a
99	0	0	0	0	a	a
100	0	0	0	a	a	0
101	0	0	0	0	a	0
102	0	0	0	a	0	a
103	0	0	0	a	0	0
104	0	0	0	1	a	a
105	0	0	0	0	0	a
106	0	0	0	a	a	1
107	0	0	0	1	a	1
108	0	0	0	1	0	1
109	0	0	0	a	a	a
110	0	0	0	0	0	0
111	1	1	0	a	0	1
112	1	1	0	1	0	a
113	1	1	0	0	a	a
114	1	1	0	a	a	0
115	1	1	0	0	a	0
116	1	1	0	a	0	a
117	1	1	0	a	0	0
141	1	0	a	1	a	1
142	1	0	a	1	1	a
143	1	0	a	1	0	1
144	1	0	a	a	a	a
145	1	0	a	0	0	0
146	1	0	0	a	0	1
147	1	0	0	1	0	a
148	1	0	0	0	a	a
149	1	0	0	a	a	0
150	1	0	0	0	a	0
151	1	0	0	a	0	a
152	1	0	0	a	0	0
153	1	0	0	1	a	a
154	1	0	0	0	0	a
155	1	0	0	a	a	1
156	1	0	0	1	a	1
157	1	0	0	1	0	1
158	1	0	0	a	a	a
159	1	0	0	0	0	0
160	1	a	a	a	1	1
161	1	a	a	a	0	1
162	1	a	a	1	0	a
163	1	a	a	0	a	a
164	1	a	a	a	a	0
165	1	a	a	a	1	a
186	1	a	0	a	0	a
187	1	a	0	a	0	0
188	1	a	0	1	a	a
189	1	a	0	0	0	a
190	1	a	0	a	a	1
191	1	a	0	1	a	1
192	1	a	0	1	0	1
193	1	a	0	a	a	a
194	1	a	0	0	0	0
195	1	1	1	a	1	1
196	1	1	1	0	a	a
197	1	1	1	a	a	0
198	1	1	1	a	1	a
199	1	1	1	0	a	0
200	1	1	1	a	1	0
201	1	1	1	0	1	0
202	1	1	1	1	a	a
226	1	1	a	0	a	a
227	1	1	a	a	a	0
228	1	1	a	a	1	a
229	1	1	a	0	a	0
230	1	1	a	a	1	0
231	1	1	a	a	0	a
232	1	1	a	a	0	0
233	1	1	a	0	1	0
234	1	1	a	1	a	a
235	1	1	a	0	0	a
236	1	1	a	a	a	1
237	1	1	a	0	1	a
238	1	1	a	1	1	1
239	1	1	a	1	a	1
240	1	1	a	1	1	a
241	1	1	a	1	0	1
242	1	1	a	a	a	a
243	1	1	a	0	0	0
244	1	0	1	a	1	1
245	1	0	1	0	a	a
246	1	0	1	a	a	0
247	1	0	1	a	1	a
248	1	0	1	0	a	0
249	1	0	1	a	1	0
250	1	0	1	0	1	0
271	0	a	a	a	a	1
272	0	a	a	0	1	a
273	0	a	a	1	1	1
274	0	a	a	1	a	1
275	0	a	a	1	1	a
276	0	a	a	1	0	1
277	0	a	a	a	a	a
278	0	a	a	0	0	0
279	0	a	0	a	0	1
280	0	a	0	1	0	a
281	0	a	0	0	a	a
282	0	a	0	a	a	0
283	0	a	0	0	a	0
284	0	a	0	a	0	a
285	0	a	0	a	0	0
286	0	a	0	1	a	a
287	0	a	0	0	0	a
311	a	0	1	a	1	0
312	a	0	1	0	1	0
313	a	0	1	1	a	a
314	a	0	1	a	a	1
315	a	0	1	0	1	a
316	a	0	1	1	1	1
317	a	0	1	1	a	1
318	a	0	1	1	1	a
319	a	0	1	a	a	a
320	a	a	0	a	0	1
321	a	a	0	1	0	a
322	a	a	0	0	a	a
323	a	a	0	a	a	0
324	a	a	0	0	a	0
325	a	a	0	a	0	a
326	a	a	0	a	0	0
327	a	a	0	1	a	a
328	a	a	0	0	0	a
329	a	a	0	a	a	1
330	a	a	0	1	a	1
331	a	a	0	1	0	1
332	a	a	0	a	a	a
333	a	a	0	0	0	0
334	a	1	a	a	1	1
335	a	1	a	a	0	1
356	a	1	0	1	0	a
357	a	1	0	0	a	a
358	a	1	0	a	a	0
359	a	1	0	0	a	0
360	a	1	0	a	0	a
361	a	1	0	a	0	0
362	a	1	0	1	a	a
363	a	1	0	0	0	a
364	a	1	0	a	a	1
365	a	1	0	1	a	1
366	a	1	0	1	0	1
367	a	1	0	a	a	a
368	a	1	0	0	0	0
369	a	0	a	a	1	1
370	a	0	a	a	0	1
371	a	0	a	1	0	a
372	a	0	a	0	a	a
396	a	0	0	a	0	0
397	a	0	0	1	a	a
398	a	0	0	0	0	a
399	a	0	0	a	a	1
400	a	0	0	1	a	1
401	a	0	0	1	0	1
402	a	0	0	a	a	a
403	a	0	0	0	0	0
404	a	a	1	a	1	1
405	a	a	1	0	a	a
406	a	a	1	a	a	0
407	a	a	1	a	1	a
408	a	a	1	0	a	0
409	a	a	1	a	1	0
410	a	a	1	0	1	0
411	a	a	1	1	a	a
412	a	a	1	a	a	1
413	a	a	1	0	1	a
414	a	a	1	1	1	1
415	a	a	1	1	a	1
416	a	a	1	1	1	a
417	a	a	1	a	a	a
418	a	a	a	a	1	1
419	a	a	a	a	0	1
420	a	a	a	1	0	a

Tablo 8'in devamı

166	1	a	a	0	a	0
167	1	a	a	a	1	0
168	1	a	a	a	0	a
169	1	a	a	a	0	0
170	1	a	a	0	1	0
171	1	a	a	1	a	a
172	1	a	a	0	0	a
173	1	a	a	a	a	1
174	1	a	a	0	1	a
251	1	0	1	1	a	a
252	1	0	1	a	a	1
253	1	0	1	0	1	a
254	1	0	1	1	1	1
255	1	0	1	1	a	1
256	1	0	1	1	1	a
257	1	0	1	a	a	a
258	0	a	a	a	1	1
259	0	a	a	a	0	1
336	a	1	a	1	0	a
337	a	1	a	0	a	a
338	a	1	a	a	a	0
339	a	1	a	a	1	a
340	a	1	a	0	a	0
341	a	1	a	a	1	0
342	a	1	a	a	0	a
343	a	1	a	a	0	0
344	a	1	a	0	1	0
421	a	a	a	0	a	a
422	a	a	a	a	a	0
423	a	a	a	a	1	a
424	a	a	a	0	a	0
425	a	a	a	a	1	0
426	a	a	a	a	0	a
427	a	a	a	a	0	0
428	a	a	a	0	1	0
429	a	a	a	1	a	a

Örnek 18. $L = \{0, a, 1\}$ kafesi ve t-norm olarak Örnek 4. (i) deki T_2 i $\mathbb{Z}_3$üzerindeki TL-denklik bağıntısı Örnek 10. (ii) E_5 ve $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki TL-denklik bağıntısı Örnek 10. (iii) deki F_1 olarak alınırsa $f: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \to L$ şeklindeki L-bağıntıları içinden bütün E_3-F_1 genişletilmiş olanları aşağıda verilmiştir.

Tablo 9..$f: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \to L$ şeklindeki T_2 için bütün E_3-F_1 genişletilmiş bağıntılar tablosu

	A	B	C	D	E	F
1	a	1	1	a	1	1
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	a	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	1	0	0
6	0	0	a	1	0	0
7	0	0	0	1	0	0
8	0	0	1	a	0	0
9	0	0	a	a	0	0
10	0	0	0	a	0	0
11	0	1	0	0	0	1
12	0	1	0	0	0	a
13	0	1	a	0	0	1
14	0	1	a	0	0	a
15	0	1	1	0	0	1
16	0	1	1	0	0	a
17	0	1	0	1	0	a
18	0	1	0	1	0	1
19	0	1	a	1	0	a
20	0	1	a	1	0	1
21	0	1	1	1	0	a
22	0	1	1	1	0	1
23	0	1	0	a	0	1
24	0	1	0	a	0	a
25	0	1	a	a	0	1
26	0	1	a	a	0	a
27	0	1	1	a	0	1
28	0	1	1	a	0	a
29	0	a	a	0	0	1
30	0	a	a	0	0	a
31	0	a	1	0	0	1
32	0	a	1	0	0	a
33	0	a	a	1	0	1
34	0	a	1	1	0	a
35	0	a	1	1	0	1
36	0	a	a	a	0	a
37	0	a	0	a	0	1
38	0	a	1	a	0	1
39	0	a	1	a	0	a
40	1	0	a	0	a	0
41	1	0	a	0	1	0
42	1	0	0	0	a	0
43	1	0	0	0	1	0
44	1	0	1	0	a	0
45	1	0	1	0	1	0
46	1	0	a	1	1	0
47	1	0	a	1	a	0
48	1	0	0	1	1	0
49	1	0	0	1	a	0
50	1	0	1	1	1	0
51	1	0	1	1	a	0
52	1	0	a	a	a	0
53	1	0	a	a	1	0
54	1	0	0	a	a	0
55	1	0	0	a	1	0
56	1	0	1	a	a	0
57	1	0	1	a	1	0
58	1	1	0	0	a	a
59	1	1	0	0	a	1
60	1	1	0	0	1	a
61	1	1	0	0	1	1
62	1	1	1	0	a	a
63	1	1	1	0	a	1
64	1	1	1	0	1	a
65	1	1	1	0	1	1
66	1	1	a	0	a	a
67	1	1	a	0	a	1
68	1	1	a	0	1	a
69	1	1	a	0	1	1
70	1	1	0	1	a	a
71	1	1	0	1	1	1
72	1	1	0	1	a	1
73	1	1	0	1	1	a
74	1	1	1	1	a	a
75	1	1	1	1	1	1
76	1	1	1	1	a	1
77	1	1	1	1	1	a
78	1	1	a	1	a	a
79	1	1	a	1	1	1
80	1	1	a	1	a	1
81	1	1	a	1	1	a
82	1	1	0	a	1	1
83	1	1	0	a	1	a
84	1	1	0	a	a	1
85	1	1	0	a	a	a
86	1	1	1	a	1	1
87	1	1	1	a	1	a
88	1	1	1	a	a	1
89	1	1	1	a	a	a
90	1	1	a	a	1	1
91	1	1	a	a	1	a
92	1	1	a	a	a	1
93	1	1	a	a	a	a
94	1	a	a	0	a	a
95	1	a	a	0	a	1
96	1	a	a	0	1	a
97	1	a	a	0	1	1
98	1	a	0	0	a	a
99	1	a	0	0	a	1
100	1	a	0	0	1	a
101	1	a	0	0	1	1
102	1	a	1	0	a	a
103	1	a	1	0	a	1
104	1	a	1	0	1	a
105	1	a	1	0	1	1
106	1	a	a	1	a	a
107	1	a	a	1	1	1
108	1	a	a	1	a	1
109	1	a	a	1	1	a
110	1	a	0	1	a	a
111	1	a	0	1	1	1
112	1	a	0	1	a	1
113	1	a	0	1	1	a
114	1	a	1	1	a	a
115	1	a	1	1	1	1
116	1	a	1	1	a	1
117	1	a	1	1	1	a
118	1	a	a	a	1	1
119	1	a	a	a	1	a
120	1	a	a	a	a	1
121	1	a	a	a	a	a
122	1	a	0	a	1	1
123	1	a	0	a	1	a
124	1	a	0	a	a	1
125	1	a	0	a	a	a
126	1	a	1	a	1	1
127	1	a	1	a	1	a
128	1	a	1	a	a	1
129	1	a	1	a	a	a
130	0	a	a	0	a	a
131	a	0	1	0	a	0
132	a	0	1	0	1	0
133	a	0	a	0	a	0
134	a	0	a	0	1	0
135	a	0	0	0	a	0
136	a	0	0	0	1	0
137	a	0	1	1	1	0
138	a	0	1	1	a	0
139	a	0	a	1	1	0
140	a	0	a	1	a	0
141	a	0	0	1	1	0
142	a	0	0	1	a	0
143	a	0	1	a	a	0
144	a	0	1	a	1	0
145	a	0	a	a	a	0
146	a	0	a	a	1	0
147	a	0	0	a	a	0
148	a	0	0	a	1	0
149	a	1	1	0	a	a
150	a	1	1	0	a	1
151	a	1	1	0	1	a
152	a	1	1	0	1	1
153	a	1	0	0	a	a
154	a	1	0	0	a	1
155	a	1	0	0	1	a
156	a	1	0	0	1	1
157	a	1	1	1	a	a
158	a	1	1	1	1	1
159	a	1	1	1	a	1
160	a	1	1	1	1	a
161	a	1	0	1	a	a
162	a	1	0	1	1	1
163	a	1	0	1	a	1
164	a	1	0	1	1	a
165	a	1	1	a	1	a
166	a	1	1	a	a	1
167	a	1	1	a	a	a
168	a	1	a	a	1	1
169	a	1	0	a	1	1
170	a	1	0	a	1	a
171	a	1	0	a	a	1
172	a	1	0	a	a	a
173	a	a	1	0	a	a
174	a	a	1	0	a	1
175	a	a	1	0	1	a
176	a	a	1	0	1	1
177	a	a	a	0	a	a
178	a	a	a	0	a	1
179	a	a	a	0	1	a
180	a	a	a	0	1	1
181	a	a	1	1	a	a
182	a	a	1	1	1	1
183	a	a	1	1	a	1
184	a	a	1	1	1	a
185	a	a	a	1	a	a
186	a	a	a	1	1	1
187	a	a	a	1	a	1
188	a	a	a	1	1	a
189	a	a	0	a	1	1
190	a	a	1	a	1	1
191	a	a	1	a	1	a
192	a	a	1	a	a	1
193	a	a	1	a	a	a
194	a	a	a	a	1	1
195	a	a	a	a	1	a
196	a	a	a	a	a	1
197	a	a	a	a	a	a

Tanım 34. [60] (X,E), (Y,F) ve $f: X \times Y \to L$ E-F genişletilmiş L-bağıntı olsun.

i) f, TL-kısmi fonksiyondur $\Leftrightarrow \forall x \in X, y, y' \in Y$ için

$f(x,y) \top f(x,y') \le F(y,y')$

ii) f, $\top$L-fonksiyondur $\Leftrightarrow \forall x \in X$ ve $y, y' \in Y$ için

$f(x,y) \top f(x,y') \le F(y,y')$ ve $\bigvee_{z \in Y} f(x,z)=1$

iii) f, $\top$L-mükemmel fonksiyondur $\Leftrightarrow \forall x \in X$ ve $y, y' \in Y$ için

$f(x,y) \top f(x,y') \le F(y,y')$ ve $\exists z \in Y,\ f(x,z)=1$

v) f, $\top$L-fonksiyonuna birebir denir $\Leftrightarrow \forall x, x' \in X$ ve $y \in Y$ için

$f(x,y) \top f(x',y) \le E(x,x')$

vi) f, $\top$L-fonksiyonuna örten denir $\Leftrightarrow \forall y \in Y$ için $\bigvee_{x \in M} f(x, y) = 1$

vii) f, birebir ve örten $\top$L-fonksiyonsa izomorftur denir.

Tanım 35. [60] (X,E), (Y,F) ve $f: X \times Y \to L$ L-bağıntı olsun.

f, güçlü $\top$L-fonksiyondur $\Leftrightarrow \forall x \in X$ ve $y, y' \in Y$ için

$f(x,y) \top f(x',y') \top E(x,x') \le F(y,y')$ ve $\exists z \in Y,\ f(x,z)=1$.

Örnek 19. $M = \mathbb{Z}_5$ $E: M \times M \to [0,1]$ $E(\bar{x},\bar{y}) = 1 - \frac{2}{10}|x-y|$ T_L-denklik bağıntısı olarak alınsın. Bu taktirde

$$f(\bar{x},\bar{y}) = \begin{cases} 0 & x = y, x = 5 \\ \frac{10-2x}{10} & x = y, x \neq 5 \\ \frac{2x}{10} & y = x-1, x \neq 0 \\ 0 & x < y \; veya \; x-1 > y \end{cases}$$

T_L-kısmi fonksiyondur. Ancak T_L-fonksiyon değildir. Yani $\forall x \in M$ için $\bigvee_{z \in Y} f(x,z)=1$değildir. Örnek verilirse $\bar{x} = 5$ için incelensin.

$f(\bar{5},\bar{0}) \vee f(\bar{5},\bar{1}) \vee f(\bar{5},\bar{2}) \vee f(\bar{5},\bar{3}) \vee f(\bar{5},\bar{4}) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee \frac{8}{10} = 8/10 \neq 1$ dir.

Örnek 20. $L = \{0, a, 1\}$ kafesi ve t-norm olarak Örnek 4. (i) deki T_1 i $\mathbb{Z}_3$üzerindeki TL-denklik bağıntısı Örnek 10. (i) deki E_3 ve $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki TL-denklik bağıntısı Örnek 10. (iii) deki F_1 olarak alınırsa $f: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \to L$ şeklindeki L-bağıntıları içinden bütün TL-kısmi fonksiyonlar aşağıda verilmiştir.

f	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	A	B
$\bar{1}$	C	D
$\bar{2}$	E	F

Tablo 10. $f\colon \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \to L$ şeklindeki T_1L-kısmi fonksiyonlar tablosu

fonk	A	B	C	D	E	F
1	0	a	1	0	a	0
2	0	a	1	0	1	0
3	0	1	0	a	0	1
4	0	1	0	1	0	a
5	0	1	0	0	a	a
6	0	1	0	a	a	0
7	0	1	0	0	a	0
8	0	1	0	a	0	a
9	0	1	0	a	0	0
10	0	1	0	1	a	a
11	0	1	0	0	0	a
12	0	1	0	1	0	1
13	0	1	0	a	a	a
14	0	1	0	0	0	0
15	0	0	1	0	a	a
16	0	0	1	0	a	0
17	0	0	1	0	1	0
18	0	0	a	a	0	1
19	0	0	a	0	a	a
20	0	0	a	a	a	0
21	0	0	a	0	a	0
22	0	0	a	a	1	0
23	0	0	a	a	0	a
24	0	0	a	a	0	0
25	0	0	a	0	1	0
26	0	0	a	0	0	a
27	0	0	a	a	a	a
28	0	0	a	0	0	0
29	0	1	a	a	0	1
30	0	1	a	0	a	a
31	0	1	a	a	a	0
32	0	1	a	0	a	0
33	0	1	a	a	1	0
34	0	1	a	a	0	a
35	0	1	a	a	0	0
36	0	1	a	0	1	0
37	0	1	a	0	0	a
38	0	1	a	a	a	a
39	0	1	a	0	0	0
40	0	1	1	0	a	a

fonk	A	B	C	D	E	F
41	0	1	1	0	a	0
42	0	1	1	0	1	0
43	0	0	0	a	0	1
44	0	0	0	1	0	a
45	0	0	0	0	a	a
46	0	0	0	a	a	0
47	0	0	0	0	a	0
48	0	0	0	a	0	a
49	0	0	0	a	0	0
50	0	0	0	1	a	a
51	0	0	0	0	0	a
52	0	0	0	1	0	1
53	0	0	0	a	a	a
54	0	0	0	0	0	0
55	1	0	a	a	0	1
56	1	0	a	0	a	a
57	1	0	a	a	a	0
58	1	0	a	0	a	0
59	1	0	a	a	1	0
60	1	0	a	a	0	a
61	1	0	a	a	0	0
62	1	0	a	0	1	0
63	1	0	a	0	0	a
64	1	0	a	a	a	a
65	1	0	a	0	0	0
66	1	0	0	a	0	1
67	1	0	0	1	0	a
68	1	0	0	0	a	a
69	1	0	0	a	a	0
70	1	0	0	0	a	0
71	1	0	0	a	0	a
72	1	0	0	a	0	0
73	1	0	0	1	a	a
74	1	0	0	0	0	a
75	1	0	0	1	0	1
76	1	0	0	a	a	a
77	1	0	0	0	0	0
78	1	0	1	0	a	a
79	1	0	1	0	a	0
80	1	0	1	0	1	0

fonk	A	B	C	D	E	F
81	0	a	a	a	0	1
82	0	a	a	0	a	a
83	0	a	a	a	a	0
84	0	a	a	0	a	0
85	0	a	a	a	1	0
86	0	a	a	a	0	a
87	0	a	a	a	0	0
88	0	a	a	0	1	0
89	0	a	a	0	0	a
90	0	a	a	a	a	a
91	0	a	a	0	0	0
92	0	a	0	a	0	1
93	0	a	0	1	0	a
94	0	a	0	0	a	a
95	0	a	0	a	a	0
96	0	a	0	0	a	0
97	0	a	0	a	0	a
98	0	a	0	a	0	0
99	0	a	0	1	a	a
100	0	a	0	0	0	a
101	0	a	0	1	0	1
102	0	a	0	0	0	0
103	a	0	1	0	a	a
104	a	0	1	0	a	0
105	a	0	1	0	1	0
106	a	a	0	a	0	1
107	a	a	0	1	0	a
108	a	a	0	0	a	a
109	a	a	0	a	a	0
110	a	a	0	0	a	0
111	a	a	0	a	0	a
112	a	a	0	a	0	0
113	a	a	0	1	a	a
114	a	a	0	0	0	a
115	a	a	0	1	0	1
116	a	a	0	a	a	a
117	a	a	0	0	0	0
118	a	0	a	a	0	1
119	a	0	a	0	a	a
120	a	0	a	a	a	0

fonk	A	B	C	D	E	F
121	a	0	a	0	a	0
122	a	0	a	a	1	0
123	a	0	a	a	0	a
124	a	0	a	a	0	0
125	a	0	a	0	1	0
126	a	0	a	0	0	a
127	a	0	a	a	a	a
128	a	0	a	0	0	0
129	a	0	0	a	0	1
130	a	0	0	1	0	a
131	a	0	0	0	a	a
132	a	0	0	a	a	0
133	a	0	0	0	a	0
134	a	0	0	a	0	a
135	a	0	0	a	0	0
136	a	0	0	1	a	a
137	a	0	0	0	0	a
138	a	0	0	1	0	1
139	a	0	0	a	a	a
140	a	0	0	0	0	0
141	a	a	1	0	a	a
142	a	a	1	0	a	0
143	a	a	1	0	1	0
144	a	a	a	a	0	1
145	a	a	a	0	a	a
146	a	a	a	a	a	0
147	a	a	a	0	a	0
148	a	a	a	a	1	0
149	a	a	a	a	0	a
150	a	a	a	a	0	0
151	a	a	a	0	1	0
152	a	a	a	0	0	a
153	a	a	a	a	a	a
154	a	a	a	0	0	0

Örnek 21. $L = \{0, a, 1\}$ kafesi ve t-norm olarak Örnek 4. (i) deki T_2 i $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki TL-denklik bağıntısı Örnek 10. (ii) deki E_5 ve $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki TL-denklik bağıntısı Örnek 10. (iii) deki F_1 olarak alınırsa $f\colon \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \to L$ şeklindeki L-bağıntılarının içinden bütün TL-kısmi fonksiyonlar aşağıda verilmiştir.

f	0	1
0	A	B
1	C	D
2	E	F

Tablo 11. $f : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow L$ şeklindeki T_2L-kısmi fonksiyonlar tablosu

	A	B	C	D	E	F
1	0	0	1	0	0	0
2	0	0	a	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	1	0	a	0	a	0
5	1	0	a	0	1	0
6	1	0	0	0	a	0
7	1	0	0	0	1	0
8	1	0	1	0	a	0

	A	B	C	D	E	F
9	1	0	1	0	1	0
10	a	0	1	0	a	0
11	a	0	1	0	1	0
12	a	0	a	0	a	0
13	a	0	a	0	1	0
14	a	0	0	0	a	0
15	a	0	0	0	1	0

Örnek 22. E, F sırasıyla X ve Y üzerinde TL-denklik bağıntıları olsun.

$\forall x, z \in X \; ve \; y \in Y \; için$

p_1 :(XxY)xX→L, p_1((x,y),z)))=E(x,z)

p_2 : (XxY)xY→L, p_2((x,y),z)))=F(y,z)

e_1 : Xx(XxY)→L, e_1((x,(y,z))=E(x,y)$\top$F(y,0)

e_2 : Yx(XxY)→L, e_2((x,(y,z))=E(x,z)$\top$E(y,0)

L-bağıntıları sırasıyla ExF-E, ExF-F, E-ExF ve F-ExF genişletilmiş $\top$L-fonksiyonlardır.

p_1, p_2 $\top$L-fonksiyonlara izdüşüm ve e_1, e_2 $\top$L-fonksiyonlara injeksiyonlar denir.

Teorem 21. [60] E ve F sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde $\top$L-denklik bağıntıları olsun. Bu taktirde

i) f, $\top$L-mükemmel fonksiyon ise f $\top$L-güçlü fonksiyondur.

ii) f, $\top$L-mükemmel fonksiyon ise f, $\top$L-fonksiyondur.

iii) f :X→Y E-F genişletilmiş ise f*(x,y)=F(f(x),y), f* :XxY→L $\top$L-mükemmel fonksiyondur.

iv) g, $\top$L-mükemmel fonksiyon ise ∃f :X→Y E-F genişletilmiş öyle ki f*=g .

v) f :X→Y E-F genişletilmiş, g∈ $\mathcal{F}$(XxY,L) ve ∀x∈X,y∈Y için

g(x,f(x))=1, g(x,y)≤F(f(x),y) (1)

ise g $\top$L-güçlü fonksiyondur.

Tersine olarak g :XxY→L $\top$L-güçlü fonksiyon ise ∃f : X→Y E-Fgenişletilmiş öyle ki (1) bağıntısını sağlar.

Örnek 23. $L=\{0,a,1\}$ kafesi ve t-norm olarak Örnek 4. (i) deki T_1 i $\mathbb{Z}_3$üzerindeki ⊤L-denklik bağıntısı Örnek 10. (i) deki E_3 ve $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki ⊤L-denklik bağıntısı Örnek 10. (iii) deki F_1 olarak alınırsa $f:\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2\to L$ şeklindeki L-bağıntıları içinden bütün ⊤L-fonksiyonlar aşağıda verilmiştir. Aynı zamanda bu fonksiyonlar TL-güçlü ve mükemmel fonksiyonlardır.

f_1	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	0	1
$\bar{1}$	0	1
$\bar{2}$	0	1

f_2	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	0	1
$\bar{1}$	1	0
$\bar{2}$	1	0

f_3	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	1	0
$\bar{1}$	0	1
$\bar{2}$	0	1

f_4	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	1	0
$\bar{1}$	1	0
$\bar{2}$	1	0

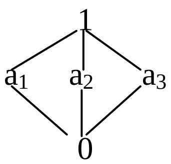
Örnek 24. $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to[0,1]$, $E:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to[0,1]$ fuzzy alt kümeleri

$$E(x,y)=\frac{1}{|x-y|+1}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{|y|+1} & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa E, $\top_D$- fuzzy denklik bağıntısı ve f, $\top_D$-kısmi fuzzy fonksiyondur ancak $\top_D$-fuzzy fonksiyon değildir.

Örnek 25. $L=\{0,1,a_1,a_2,a_3\}$



sıralamasıyla kafes olsun.

$E\mathbb{Z}a_1$ *ve* $E\mathbb{Z}_3a_2$ sırasıyla $\mathbb{Z}$ *ve* $\mathbb{Z}_3$ üzerinde $\top_D$-denklik bağıntıları olsun. Bu taktirde

$f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_3\to L$, $f(n,\bar{k})=a_{k+1}$ L-bağıntısı $\top_D$L-fonksiyondur.

Ayrıca $f(x,y)=g^*(x,y)$ olacak şekilde bir $g:X\to Y$ E-F genişletilmiş fonksiyonu yoktur.

Teorem 22. (X,E), (Y,F), $f:X\times Y\to L$ ⊤L-fonksiyon ve $A\in\mathcal{F}(X,L)$olsun. ⊤, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm ise f(A) F'ye genişletilmiştir.

İspat: $x, x' \in X$ $y, y' \in Y$ olsun. $A(x) \top E(x,x') \leq A(x')$ dır

$$f(A)(y) \top E(y,y') = \left(\bigvee_{x\in X} A(x) \top f(x,y) \right) \top E(y,y')$$

$$= \bigvee_{x\in X} A(x) \top f(x,y) \top E(y,y')$$

$$\leq \bigvee_{x\in X} A(x) \top f(x,y') = f(A)(y')$$

elde edilir. Böylece f(A) Tanım 33'den F-genişletilmiştir.

Teorem 23. (X,E), (Y,F), $f : X \times Y \rightarrow L$ $\top$ L-fonksiyon ve B$\in\mathcal{F}(Y, L)$olsun. $\top$, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm ise $f^{-1}(B)$, E ye genişletilmiştir.

İspat: $x, x' \in X$ $y, y' \in Y$ olsun.

$$f^{-1}(B)(x) \top E(x,x') = \left(\bigvee_{y\in Y} B(y) \top f(x,y) \right) \top E(x,x')$$

$$= \bigvee_{y\in Y} B(y) \top f(x,y) \top E(x,x')$$

$$= \bigvee_{y\in Y} B(y) \top f(x',y) = f^{-1}(B)(x')$$

elde edilir. Böylece f^{1}(B) Tanım 33'den E-genişletilmiştir.

Teorem 24. (X,E), (Y,F) (Z,G) ve $\top$, sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm olsun. Bu taktirde

i) $\mathcal{F}$(X, L) nin E-genişetilmiş elemanlar kümesi "$\leq$" bağıntısı ile tam kafestir.

ii) $\mathcal{F}$(XxY, L) nin E-genişletilmiş elemanlar kümesi kam kafestir.

iii) $\mathcal{F}$(XxY, L) nin F-genişletilmiş elemanlar kümesi kam kafestir.

iv) $\mathcal{F}$(XxY, L) nin E-F genişletilmiş elemanlar kümesi kam kafestir.

v) $\mathcal{F}$(XxY, L) nin E-F genişletilmiş ile E$\times$F-genişletilmiş elemanlar kümesi kam kafestir

vi) f: X$\rightarrow$Y ve g:Y$\rightarrow$Z sırasıyla E-F ve F-G genişletilmiş ise $g \circ f$:X$\rightarrow$Z E-G genişletilmiş fonksiyondur.

vii) Özel olarak E, EX_L alınırsa E-genişletilmiş L-alt kümeleri $\mathcal{F}(X, L)$dir.

viii) f :X$\rightarrow$Y E-F genişletilmiş ve g : Z$\rightarrow$P G-H genişletilmiş fonksiyonlar ise

fxg :XxZ$\rightarrow$YxP fxg(x,z)=(f(x),g(z)) şeklinde tanımlanan fonksiyon

ExG-FxH genişletilmiş fonksiyondur.

ix) f∈ $\mathcal{F}$(XxY,E,F,L) ve g∈ $\mathcal{F}$(YxZ,F,G,L) $\top$ L-fonksiyonlar ise $g \circ_T f \in \mathcal{F}$(XxZ,E,G,L) dır.Ayrıca f,g mükemmel(güçlü) L fonksiyonlar ise $g \circ_T f$ mükemmel (güçlü) L fonksiyondur.

İspat:

i)

$A \in \mathcal{F}(X,E,L)$ keyfi olsun. $A \le A$ olduğu açıktır.

$A, B \in \mathcal{F}(X,E,L)$ keyfi olsun.

$\forall x \in X$ için $A(x) \le B(x)$, $B(x) \le A(x) \Rightarrow$ (L sıralı küme olduğundan) $A(x) = B(x) \Rightarrow A = B$

$A, B, C \in \mathcal{F}(X,E,L)$ keyfi olsun. $A \le B, B \le C$ ise

$\forall x \in X$ için $A(x) \le B(x)$ ve $B(x) \le C(x)$ L sıralı küme olduğundan

$\Rightarrow A(x) \le C(x)$, $A \le C$ dır. Böylece Tanım 1'den

$(\mathcal{F}(X,E,L), \le)$ sıralı kümedir.

$\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{F}(X,E,L)$ keyfi olmak üzere $A = \bigwedge_{i\in I} A_i$

$$A(x) \top E(x,x') = \left[\bigwedge_{i\in I} A_i(x)\right] \top E(x,x') \le \bigwedge_{i\in I} \left(A_i(x) \top E(x,x')\right) \le \bigwedge_{i\in I} A_i(x') = A(x')$$

dır. Böylece A E-genişletilmiş L-alt kümedir.

$1_X : X \to L$, $1_X(x) = 1$ olarak tanımlanırsa $1_X \in \mathcal{F}(X,E,L)$

$(\mathcal{F}(X,E,L), \le)$ tam kafestir.

ii)Şimdi

$(\mathcal{F}(X \times Y), L)$ nin tam kafes olduğunu gösterelim.

$\forall f \in (\mathcal{F}(X \times Y), L)$ için $f \le f$ olduğu açıktır.

$\forall f, g \in (\mathcal{F}(X \times Y), L)$ $f \le g$, $g \le f$ için

$f(x,y) \le g(x,y)$, $g(x,y) \le f(x,y)$ L tam kafes olduğundan

$f(x,y) = g(x,y) \Rightarrow f = g$

$\forall f, g, h \in (\mathcal{F}(X \times Y), L)$ $f \le g$, $g \le h$ için

$f(x,y) \le g(x,y)$, $g(x,y) \le h(x,y) \Rightarrow f(x,y) \le h(x,y) \Rightarrow f \le h$

Böylece Tanım 1'den

$((\mathcal{F}(X \times Y), L), \le)$ sıralı kümedir.

$\{f_i \mid i \in I\} \subseteq (\mathcal{F}(X \times Y), L)$ için $f = \bigwedge_{i\in I} f_i(x, y)$

$$f(x, y)\, TE(x, x') = \left[\bigwedge_{i\in I} f_i(x, y)\right] TE(x, x')$$
$$\leq \bigwedge_{i\in I} f_i(x, y)\, TE(x, x')$$
$$\leq \bigwedge_{i\in I} f_i(x', y) = f(x', y)$$

elde edilir. Böylece f Tanım 33’den E-genişletilmiştir.

$1_{X\times Y} : X\times Y \to L$ $1_{X\times Y}(x) = 1$ olarak tanımlanırsa $1_{X\times Y} \in (\mathcal{F}(X \times Y), L)$ E-genişletilmiştir.

Sonuç olarak $(\mathcal{F}(X \times Y), L)$ E-genişletilmiş elemanları kümesi bir tam kafestir.

iii) $$f(x, y)\, TF(y, y') = \left[\bigwedge_{i\in I} f_i(x, y)\right] TF(y, y')$$
$$\leq \bigwedge_{i\in I} f_i(x, y)\, TF(y, y')$$
$$\leq \bigwedge_{i\in I} f_i(x, y') = f(x, y')$$

elde edilir. Böylece f Tanım 33’den F-genişletilmiştir.

$1_{X\times Y} : X\times Y \to L$ $1_{X\times Y}(x) = 1$ olarak tanımlanırsa $1_{X\times Y} \in (\mathcal{F}(X \times Y), L)$ F-genişletilmiştir.

Sonuç olarak $(\mathcal{F}(X \times Y), L)$ F-genişletilmiş elemanları kümesi bir tam kafestir.

iv) f, E ve F genişletilmiş olduğundan E-F genişletilmiştir.

$1_{X\times Y} : X\times Y \to L$ $1_{X\times Y}(x) = 1$ olarak tanımlanırsa $1_{X\times Y} \in (\mathcal{F}(X \times Y), L)$E-F genişletilmiştir.

Sonuç olarak $(\mathcal{F}(X \times Y), L)$ E-F genişletilmiş elemanları kümesi bir tam kafestir.

v) $f \in (\mathcal{F}(X \times Y), E, F, L)$ olsun. f’nin $E\times F$ genişletilmiş olduğunu gösterelim.

$$f(x, y)\, T E\times F((x, y), (x', y')) = f(x, y)\, TE(x, x')\, TF(y, y')$$
$$\leq f(x', y)\, TF(y, y') \leq f(x', y')$$

elde edilir. Böylece f, Tanım 33’den $E\times F$ genişletilmiştir.

$\mathcal{F}(X\times Y, E, F, L) \subseteq \mathcal{F}(X\times Y, E\times F, L)$ dır.

$f \in \mathcal{F}(X \times Y, E, F, L)$ keyfi olsun.

$f(x, y)\, T E\times F((x, y), (x, y')) \leq f(x, y')$ dır.

$f(x,y)\,T\,E(x,x)\,T\,F(y,y') \leq f(x,y')$ dır. Böylece Tanım 33'den f F-genişletilmiştir.

$f(x,y)\,T\,E\times F((x,y),(x',y)) \leq f(x',y)$ dır.

$f(x,y)\,T\,E(x,x')\,T\,F(y,y) \leq f(x',y)$ dır. Böylece Tanım 33'den f E-genişletilmiştir.

$\mathcal{F}(X\times Y, E\times F, L) \subseteq \mathcal{F}(X\times Y, E, F, L)$ dır. Böylece

$\mathcal{F}(X\times Y, E\times F, L) = \mathcal{F}(X\times Y, E, F, L)$

vi) $E(x,x') \leq F(f(x), f(x')) \leq G(g(f(x)), g(f(x')))$

$$= G(g\circ f(x), g\circ f(x'))$$

elde edilir. Böylece $g \circ f$ Tanım 33'den E-G genişletilmiştir.

vii)

$A \in \mathcal{F}(X, EX_L, L)$ keyfi olsun.

$A(x)\,T\,EX_L(x,y) \leq A(y)$ dir.

$A \in \mathcal{F}(X, L)$ keyfi olsun. Bu taktirde

$A(x)\,T\,EX_L(x,y) \leq A(y)$ olduğunu gösterelim.

$x = y$ ve $x \neq y$ için iddia doğrudur.

Buradan $A \in \mathcal{F}(X, EX_L, L)$dir. Yani $\mathcal{F}(X, EX_L, L) = \mathcal{F}(X, L)$ dir.

viii) $x, x' \in X$ için $E(x,x') \leq F(f(x), f(x'))$ dır.

$u, u' \in Z$ için $G(u,u') \leq H(g(u), g(u'))$ dır.

$$\begin{aligned} E\times G((x,u),(x',u')) &= E(x,x')\,T\,G(u,u') \\ &\leq F(f(x),f(x'))\,T\,H(g(u),g(u')) \\ &= F\times H((f(x),g(u)),(f(x'),g(u'))) \\ &= F\times H((f\times g)(x,u),(f\times g)(x',u')) \end{aligned}$$

ix) $$\begin{aligned} (g\circ_T f)(x,z)\,T\,E(x,x') &= \left(\bigvee_{y\in Y} f(x,y)\,T\,g(y,z)\right) T\,E(x,x') \\ &\leq \bigvee_{y\in Y} f(x,y)\,T\,E(x,x')\,T\,g(y,z) \\ &\leq \bigvee_{y\in Y} f(x',y)\,T\,g(y,z) \\ &= (g\circ_T f)(x',z) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Tanım 33’den $g \circ_T f$ E genişletilmiştir.

$$g \circ_T f(x,z)\, T G(z,z') = \left(\bigvee_{y \in Y} f(x,y)\, T g(y,z) \right) T G(z,z')$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} f(x,y)\, T g(y,z)\, T G(z,z')$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} f(x,y)\, T g(y,z') = g \circ_T f(x,z') \text{ dır.}$$

elde edilir. Böylece Tanım 33’den $g \circ_T f$ G genişletilmiştir.

$$g \circ_T f(x,z)\, T\, g \circ_T f(x,z') = \left(\bigvee_{y \in Y} f(x,y)\, T g(y,z) \right) T \left(\bigvee_{y' \in Y} f(x,y')\, T g(y',z') \right)$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} \bigvee_{y' \in Y} f(x,y)\, T f(x,y')\, T g(y,z)\, T g(y',z')$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} \bigvee_{y' \in Y} F(y,y')\, T g(y,z)\, T g(y',z')$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} \bigvee_{y' \in Y} g(y',z)\, T g(y',z')$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} \bigvee_{y' \in Y} G(z,z') = G(z,z')$$

$$\bigvee_{z \in Y} g \circ_T f(x,z) = \bigvee_{z \in Y} \bigvee_{y \in Y} f(x,y)\, T g(y,z)$$

$$= \bigvee_{y \in Y} \left(\bigvee_{z \in Y} f(x,z) \right) T g(y,z)$$

$$= \bigvee_{y \in Y} g(y,z) = 1$$

elde edilir. Böylece Tanım 34’den $g \circ_T f$ TL-fonksiyondur. Şimdi f ve g TL-mükemmel fonksiyon ise $g \circ_T f$ de TL-mükemmel fonksiyon olduğunu gösterelim. F ve g TL-mükemmel fonksiyon olduğundan

$\exists y \in Y$ için $f(x,y) = 1$ ve $\exists z \in Z$ için $g(y,z) = 1$ dır. O halde

$\exists z \in Z$ öyleki $g \circ_T f(x,z) = \bigvee_{y \in Y} f(x,y)\, T g(y,z) = 1$ dir. Böylece Tanım 34'den $g \circ_T f$

mükemmel TL-fonksiyondur. Şimdi f ve g TL-güçlü fonksiyon ise $g \circ_T f$ de TL-güçlü fonksiyon olduğunu gösterelim.

$$g\circ_{T}f(x,z)\,\mathrm{T}\,g\circ_{T}f(x',z')\,\mathrm{T}E(x,x')$$

$$=\left(\bigvee_{y\in Y}f(x,y)\,\mathrm{T}g(y,z)\right)\mathrm{T}\left(\bigvee_{y'\in Y}f(x',y)\,\mathrm{T}g(y,z')\right)\mathrm{T}E(x,x')$$

$$\leq\bigvee_{y\in Y}\bigvee_{y'\in Y}f(x,y)\,\mathrm{T}f(x',y)\,\mathrm{T}E(x,x')\,\mathrm{T}g(y,z)\,\mathrm{T}g(y,z')$$

$$\leq\bigvee_{y\in Y}\bigvee_{y'\in Y}F(y,y)\,\mathrm{T}G(z,z')=G(z,z')$$

elde edilir. Böylece Tanım 34'den $g \circ_{T} f$ güçlü TL-fonksiyondur.

1.6.Regüler ve İnvaryant TL-Denklik Bağıntıları

Tanım 36. [60] (X,o) grupoid ve E X üzerinde TL-denklik bağıntısı olsun. E ye regüler denir :⇔ Her x,y,z∈X için

E(x,y)≤E(xoz,yoz) ve E(x,y)≤E(zox,zoy)

Tanım 37. [60] (X,o) grupoid ve E X üzerinde TL-denklik bağıntısı olsun. E ye invaryant denir :⇔ Her x,y,z∈X için

E(x,y)=E(xoz,yoz)=E(zox,zoy) dır.

Teorem 25. [60] (X,o) grupoid ve E X üzerinde TL-denklik bağıntısı olsun.

i) E invaryant ise E regülerdir,

ii) X grup ve E regüler ise E invaryanttır.

Teorem 26. [60] (X,o) grupoid ve E X üzerinde TL-denklik bağıntısı olsun. o:XxX→X ExE-E ye genişletilmiş ⇔ E regülerdir.

Tanım 38. [26] (X,o) grup ve A:X→L ye X in TL-altgrubu denir ⇔

i) Her x∈X için $A(x)=A(x^{-1})$,

ii) Her x,y∈X için A(x)TA(y)≤A(xoy) dır.

Teorem 27. [26] (X,o) grup, A∈F(X,L) TL-altgrup ve A(e)=1 ise $E_A(x,y)=A(xoy^{-1})$ invaryant TL-denklik bağıntısıdır.

Teorem 28. $(X,\circ)$ değişmeli grup $A\in F(X,L)$ ⊤L-alt grup ve

$$E_A^*(x,y)=\begin{cases}1 & x=y\\ A(x\circ y^{-1}) & x\neq y\end{cases}$$

olarak tanımlanırsa E_A^* invariant ⊤L-denklik bağıntısıdır.

İspat:

E_A^*(x,y)= E_A^*(xoz,yoz)= E_A^*(zox,zoy) olduğunu gösterelim.

x=y için iddia doğrudur. x≠y için gösterelim.

$$\begin{aligned} E_A^*(\mathrm{x},\mathrm{y}) &= \mathrm{A}(\mathrm{x}\circ \mathrm{y}^{-1}) = \mathrm{A}(\mathrm{x}\circ \mathrm{y}^{-1}\circ \mathrm{z}\circ \mathrm{z}^{-1})\\ &= \mathrm{A}\big((\mathrm{x}\circ \mathrm{z})\circ(\mathrm{y}\circ \mathrm{z})^{-1}\big)\\ &= E_A^*(\mathrm{x}\circ \mathrm{z},\mathrm{y}\circ \mathrm{z})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_A^*(\mathrm{x},\mathrm{y}) &= A(x\circ y^{-1}) = A(z\circ z^{-1}\circ x\circ y^{-1})\\ &= A((z\circ x)\circ(z\circ y)^{-1})\\ &= E_A^*(\mathrm{z}\circ \mathrm{x},\mathrm{z}\circ \mathrm{y})\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece E_A^* Tanım 37'den invariant ⊤L-denklik bağıntısıdır.

Teorem 29. [26] (X,o) grup, E, X üzerinde ⊤L-invaryant denklik bağıntısı ise ∀a,b∈X için $E_e(x)=E(x,e)$ X in ⊤L-altgrubu ve $E_e(e)=1$ dir.

Örnek 26. [60]

1) ⊤: [0,1]x[0,1]→[0,1], x⊤y=Mak{x+y-1,0}

E: ℝxℝ→[0,1] F: $\mathbb{R}^2$x$\mathbb{R}^2$→[0,1]

E(x,y)=1-Min{|x-y|,1} F(x,y),(a,b)=E(x+y,a+b)

ise E ve F ''+'' işlemine göre ⊤L-regüler denklik bağıntısıdır.

2) ⊤: [0,1]x[0,1]→[0,1], x⊤y=x.y

E: ℝxℝ→[0,1]

$$\mathrm{E(x,y)}=\begin{cases} Min\{|\frac{x}{y}|,|\frac{y}{x}|\}, & \mathrm{x.y}\neq 0\\ 0 & ,\mathrm{x.y=0,x}\neq \mathrm{y}\\ 1 & ,\ \mathrm{x=y=0}\end{cases}$$

F: $\mathbb{R}^2 x \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, F((x,y),(a,b))=E(x.y,a.b)

ise E ve F ‘’.’’ işlemine göre ⊤L-regüler denklik bağıntısıdır.

3) ⊤: $[0,1]x[0,1] \to [0,1]$, $x \top y = x \wedge y$, $a,b,c \in [0,1]$, $a<b<c$,

E: $\mathbb{R} x \mathbb{R} \to [0,1]$, $E(x,y)=\begin{cases} 1 & , x=y \\ b & , x \in Q, x \neq 0 \\ a & , x-y \notin Q \end{cases}$

F: $\mathbb{R} x \mathbb{R} \to [0,1]$, $F(x,y)= \begin{cases} 1 & , x=y \\ c & , \frac{y}{x} \in Q/\{0,1\} \\ b & , \frac{y}{x} \notin Q \\ a & , x.y=0, x \neq y \end{cases}$ ise E ‘’+’’ işlemine göre ve F ‘’.’’ işlemine göre ⊤L-regüler denklik bağıntısıdır.

Örnek 27.

1) $X=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sonlu kümesi için

$$E(a_i, a_j)=\begin{cases} 1 & , i=j \\ \frac{1}{i.j} & , i \neq j \end{cases}$$

$E:XxX \to [0,1]$, $\top_P$-fuzzy denklik bağıntısıdır.

2) $G : (XxY)x(XxY) \to L$ ⊤L- denklik bağıntısıdır., $a \in X$, $b \in Y$

$$E_b(x,y)=G((x,b),(y,b)) \text{ ve } F_a(z,t)=G((a,z),(a,t))$$

fonksiyonları sırasıyla X ve Y üzerinde ⊤L- denklik bağıntısıdır. X, Y monoid ve G regüler(invaryant) ⊤L- denklik bağıntısıdır ise E_e ,F_e ⊤L- denklik bağıntıları sırasıyla X ve Y üzerinde ⊤L-regüler(invariant) denklik bağıntılarıdır ve $E_e x F_e \leq G$ dir.

3) X herhangi küme, L kafes, ⊤, t-norm $A: X \to L$ L-alt küme olsun.

$$E(x,y)= \begin{cases} 1 & , x=y \\ (A(x) \top A(y)) & , x \neq y \end{cases}$$

fonksiyonu bir ⊤L-denklik bağıntısıdır

4) E: $\mathbb{R} x \mathbb{R} \to [0,1]$

$$E(x, y)= \begin{cases} \dfrac{1}{|x-y|+1} & , x-y \in \mathbb{Z} \\ 0 & , x-y \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ üzerinde T_P-fuzzy denklik bağıntısıdır.

2.YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

Cebir ve fuzzy üzerinde yapmış olduğumuz literatür taramasından sonra klasik anlamdaki bir çok tanımın fuzzy mantığa uyarlanabileceği görüldü. Bu çalışmada klasik anlamdaki modül homomorfizma tanımı ve diğer birçok tanım fuzzy mantığa uyarlandı. Aşağıda verilen tanımları mevcut tanım ve teoremlerle ilişkilendirip doğruluğu gösterilmeye çalışıldı. Verilen tanımlar örneklerle desteklendi.

2.1. $\top$L-Alt Modüller

Tanım 39. [29] $A \in \mathcal{F}(M,L)$ ye $\top$L-alt modül denir :⇔ Her $x,y \in M$, $r \in R$ için

$$A(x+y) \geqslant A(x) \top A(y)$$

$$A(rx) \geqslant A(x) \text{ ve } A(-x) \geq A(x)$$

Bütün $\top$L-alt modüllerin kümesini $\mathcal{FS}(M,L)$ ile göstereceğiz. Eğer $x \top y = x \wedge y$ olarak alınırsa L-alt modül olarak ifade edilecektir. $\mathcal{FS}(M,E,L) = \mathcal{FS}(M,L) \cap \mathcal{F}(M,E,L)$ olarak alınacaktır. Eğer M R-üniter modül ise $-x=(-1)x$ olduğundan $A(-x) \geq A(x)$ ifadesi $\top$L-alt modül tanımından elde edilir..

Tanım 40. [29] M bir R-modül $A, B \in \mathcal{F}(M,L)$ olsun. Bu taktirde

$$(A +_{\top} B)(x) = \bigvee \{A(y) \top B(z) \mid y,z \in M, y+z=x\} \quad (rA)(x) = \bigvee \{A(y) \mid y \in M, ry = x\}$$

ile tanımlanan $A +_{\top} B$ ve rA $\top$L-alt modüllerine sırasıyla A ile B nin $\top$-toplamı ve A nın r skaleri ile çarpımı denir.

Örnek 28. $(\mathbb{Z},+)$ grubu , Örnek 5 iii) ile $\mathbb{Z}$-modül olarak alınsın. Bu taktirde L Örnek 3. de verilen kafes ve

$A: \mathbb{Z} \to [0,1]$ $A(n) = \frac{1}{|n|+1}$ olarak tanımlanırsa A,

$\top_0$L ve $\top_1$L alt modüldür.

Örnek 29. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$-vektör uzayı ve $A\colon \mathbb{R}^2 \to [0,1]$

$$A(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=y=0\\ \frac{1}{3} & x=0, y\neq 0\\ \frac{1}{4} & x\neq 0, y=0\\ \frac{1}{20} & x\neq 0, y\neq 0\end{cases}$$

olarak tanımlanırsa A T_L-fuzzy alt modüldür. Ancak T_P-fuzzy alt modül değildir. Çünkü

$$A\big((1,1)+(0,-2)\big) \ngeq A(1,1)\, T_P A(0,-2)$$

$$A(1,-2) \ngeq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{20} \ngeq \frac{1}{6}$$

Tanım 41. [40] M, R yakın halkaları üzerinde R-modül ve E :MxM→[0,1] fuzzy denklik bağıntısı olsun. E ye kongrüans bağıntısı denir ⇔

$\forall a,b,c,d \in M$ ve $r \in R$ için

i) $E(a+c, b+d) \geq \mathrm{Min}\left[E(a,b), E(c,d)\right]$

ii) $E(ar, br) \geq E(a,b)$

Tanım 42. M, R-modül ve E :MxM→L TL-denklik bağıntısı olsun.

E ye M üzerinde TL-kongrüans bağıntısı denir :⇔ Her m,m',p,p'∈M ve r∈R için

$E(m+m',p+p') \geqslant E(m,p)\, T\, E(m',p')$ ve $E(r.m,r.p) \geqslant E(m,p)$.

Teorem 30. E:MxM→L TL-denklik bağıntısı, $ResE \subseteq D_T$ olsun. E, TL-kongrüans bağıntısıdır ⇔ $t \leq \bigvee ResE$, $t \in D_T$ için E_t M üzerinde kongrüans bağıntısıdır.

İspat: ⇒: E_t'nin M üzerinde kongrüans bağıntısı olduğu tanımdan kolayca elde edilir.

⇐: E'nin TL-denklik bağıntısı olduğu açıktır.

$E(m,p)TE(m',p') = t$, $\quad E(m,p) = s$ alalım.

$s \in D_T$, $t \in D_T$, $\bigvee ResE \geq s$ ve $\bigvee ResE \geq t$ dır. E_t ve E_s TL-kongrüans bağıntısıdır.

Böylece $(\mathrm{m},\mathrm{p}),(\mathrm{m}',\mathrm{p}') \in \mathrm{E}_{\mathrm{t}}$ ve $(\mathrm{m},\mathrm{p}) \in \mathrm{E}_{\mathrm{s}}$ elde edilir. $\mathrm{E}_{\mathrm{t}}, \mathrm{E}_{\mathrm{s}}$ kongrüans bağıntıları olduğundan $(\mathrm{m}+\mathrm{m}',\mathrm{p}+\mathrm{p}') \in \mathrm{E}_{\mathrm{t}}$ ve $(\mathrm{rm},\mathrm{rp}) \in \mathrm{E}_{\mathrm{s}}$ dır. Buradan

$$\mathrm{t} \leq \mathrm{E}(\mathrm{m}+\mathrm{m}',\mathrm{p}+\mathrm{p}')$$
$$\mathrm{s} \leq \mathrm{E}(\mathrm{rm},\mathrm{rp})$$

elde edilir. Böylece E, tanım 42'den TL-kongrüans bağıntısıdır.

Örnek 30. $(\mathbb{Z},+)$ grubu, Örnek 5 iii) deki işlem ile $\mathbb{Z}$-modül olsun. $E:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to [0,1]$ $E(x,y) = \frac{1}{|x-y|+1}$ olsun. Bu taktirde E, $\mathrm{T_D}$-kongrüans bağıntısıdır.

Eğer $(\mathbb{Z},+)$ grubu $\mathbb{Z}$ −modül olarak Örnek 5. (ii) deki gibi alınırsa E invaryant ancak $\mathrm{T_D}$-kongrüans bağıntısı değildir. Çünkü

$$\mathrm{E}(2.2, 2.1) \ngeq \mathrm{E}(2,1)$$

dir.

Teorem 31. $\mathrm{f}: \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ R-izomorfi F, N üzerinde bir TL-kongrüans bağıntısı ve $\mathrm{E}(\mathrm{x},\acute{\mathrm{x}}) = \mathrm{F}\big(\mathrm{f}(\mathrm{x}),\mathrm{f}(\acute{\mathrm{x}})\big)$ olsun. Bu taktirde E, M üzerinde TL-kongrüans bağıntısıdır.

İspat:

F'nin TL-denklik bağıntısı olmasından E, TL-denklik bağıntısıdır.

$\forall \mathrm{x},\mathrm{x}',\mathrm{y},\mathrm{y}' \in \mathrm{M}$ ve $\mathrm{r} \in \mathrm{R}$ için

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{x}+\mathrm{x}',\mathrm{y}+\mathrm{y}') &= \mathrm{F}\Big(\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{x}'),\mathrm{f}(\mathrm{y}+\mathrm{y}')\Big)\\
&= \mathrm{F}\Big(\mathrm{f}(\mathrm{x})+\mathrm{f}(\mathrm{x}'),\mathrm{f}(\mathrm{y})+\mathrm{f}(\mathrm{y}')\Big)\\
&\geq \mathrm{F}\big(\mathrm{f}(\mathrm{x}),\mathrm{f}(\mathrm{y})\big)\mathrm{T}\mathrm{F}\Big(\mathrm{f}(\mathrm{x}'),\mathrm{f}(\mathrm{y}')\Big)\\
&= \mathrm{E}(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{T}\mathrm{E}(\mathrm{x}',\mathrm{y}')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{rx},\mathrm{ry}) &= \mathrm{F}\big(\mathrm{f}(\mathrm{rx}),\mathrm{f}(\mathrm{ry})\big)\\
&= \mathrm{F}\big(\mathrm{rf}(\mathrm{x}),\mathrm{rf}(\mathrm{y})\big)\\
&\geq \mathrm{F}\big(\mathrm{f}(\mathrm{x}),\mathrm{f}(\mathrm{y})\big) = \mathrm{E}(\mathrm{x},\mathrm{y})
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece E, Tanım 42'den TL-kongrüans bağıntısıdır.

Örnek 31. $L = \{0, a, 1\}$ kafes olarak alınsın.

i) t-norm olarak Örnek 4. (i) deki T_1 i alırsak $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki tüm TL-kongrüans bağıntıları aşağıda verilmiştir.

E_1	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	0
$\bar{1}$	0	1	0
$\bar{2}$	0	0	1

E_2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	1	1
$\bar{1}$	1	1	1
$\bar{2}$	1	1	1

E_3	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	a	a
$\bar{1}$	a	1	a
$\bar{2}$	a	a	1

ii) t-norm olarak Örnek 4. (i) deki T_2 i alırsak $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki tüm TL-kongrüans bağıntıları aşağıda verilmiştir.

E_1	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	0
$\bar{1}$	0	1	0
$\bar{2}$	0	0	1

E_2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	1	1
$\bar{1}$	1	1	1
$\bar{2}$	1	1	1

iii) $\mathrm{L} = \{0, \mathrm{a}, \mathrm{b}, 1\}$ kafesi ve t-norm olarak Örnek 4. (ii) deki T_4 ü alırsak $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki tüm TL-kongrüans bağıntıları aşağıda verilmiştir.

E_1	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	0	0
$\bar{1}$	0	1	0
$\bar{2}$	0	0	1

E_2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	1	1	1
$\bar{1}$	1	1	1
$\bar{2}$	1	1	1

Teorem 32. M, R-modül E M üzerinde TL-kongrüans bağıntısı ise E invaryanttır.

İspat: Tanım 42'den kolayca elde edilir.

Örnek 30'dan Teorem 32'nin tersinin genel olarak doğru olmadığı elde edilir.

Teorem 33. M, R-modül, A∈$\mathcal{FS}$(M,L) olsun. Bu durumda

$$E_A\ x, y = \begin{cases} 1, & x = y \\ A\ x - y & x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa E_A TL-kongrüans bağıntısıdır.

İspat: $x, y, z \in M$ olsun. E_A'nın tanımından

$E_A(x,x) = 1$ ve $E_A(x,y) = E_A(y,x)$ eşitlikleri açıktır. Şimdi

$E_A(x,y)\, T\, E_A(y,z) \leq E_A(x,z)$ olduğunu gösterelim.

$x = y$ veya $y = z$ için iddia doğrudur

Diğer seçenek için

$$E_A(x,y)\, T\, E_A(y,z) = A(x-y)\, T\, A(y-z)$$
$$\leq A(x-y+y-z) = A(x-z) = E_A(x,z)$$

elde edilir. Böylece Tanım 27'den E_A TL-denklik bağıntısıdır.

$x, x', y, y' \in M$ olsun.

$x = y$ veya $x' = y'$ ise $E_A(x+x', y+y') \geq E_A(x,y)\, T\, E_A(x',y')$ olduğu açıktır.

Eğer $x \neq y$ ve $x' \neq y'$ ise

$$E_A(x+x', y+y') = A(x+x' - (y+y'))$$
$$= A(x-y+x'-y')$$
$$\geq A(x-y)\, T\, A(x'-y')$$
$$= E_A(x,y)\, T\, E_A(x',y')$$

dır. Diğer yandan

$x = y$ ise $E_A(rx, ry) \geq E_A(x,y)$ dır.

$x \neq y$ ise

$$E_A(rx, ry) = A(rx - ry) = A(r(x-y)) \geq A(x-y)$$
$$= E_A(x,y)$$

elde edilir. Böylece Tanım 42'den E_A TL-kongrüans bağıntısıdır.

Teorem 34. M_1, M_2 R-modüller, T_1, T_2 t-normlar ve E_1 ve E_2 sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde T_1L ve T_2L kongrüans bağıntıları ve $E: (M_1 \times M_2)^2 \to L_1 \times L_2$ $E((a,b),(c,d)) = (E_1(a,c), E_2(b,d))$ olsun. Bu taktirde E, M1×M2 üzerinde $T_1 \times T_2$L-kongrüans bağıntısıdır.

İspat: E'nin TL-denklik bağıntısı olduğu açıktır.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in M_1 \times M_2$ olsun.

$$E((x_1,y_1) + (x_2,y_2), (a_1,b_1) + (a_2,b_2))$$
$$= E((x_1 + x_2, y_1 + y_2), (a_1 + a_2, b_1 + b_2))$$
$$= (E_1(x_1 + x_2, a_1 + a_2), E_2(y_1 + y_2, b_1 + b_2))$$

$$\geq \left(E_1\left(x_1,a_1\right)T_1(x_2,a_2),E_2(\,y_1,b_1)T_2(y_2,b_2)\right)$$
$$= \left(E_1\left(x_1,a_1\right),E_2(\,y_1,b_1)\right)T_1 \times T_2\left(E_1(x_2,a_2),E_2(y_2,b_2)\right)$$
$$= E\big((x_1,y_1),(a_1,b_1)\big)T_1 \times T_2 E\big((x_2,y_2),(a_2,b_2)\big).$$

ve

$$E\big(r(a,b),r(c,d)\big) = E\big((ra,rb),(rc,rd)\big)$$
$$= \big(E_1(ra,rc),E_2(rb,rd)\big)$$
$$\geq \big(E_1(a,c),E_2(b,d)\big)$$
$$= E\big((a,b),(c,d)\big).$$

elde edilir. Böylece E Tanım 42'den TL-kongrüans bağıntısıdır.

Teorem 35. M, R-modül, E, M üzerinde TL-kongrüans bağıntısı ve A(x)=E(x,0) olsun. Bu durumda A, M nin üniter TL-alt modülüdür ve A(0)=1 dir.

İspat: $x,y \in M, r \in R$ olsun.

$$A\ \ x+y\ \ = E\ \ x+y,0$$
$$= E\ \ x+y,0+0\ \ \geq E\ \ x,0\ \ TE\ \ y,0$$
$$= A\ \ x\ \ TA\ \ y$$
$$A\ \ rx\ \ = E\ \ rx,0\ \ = E\ \ rx,r0\ \ \geq E\ \ x,0\ \ = A\ \ x$$

elde edilir. Böylece A Tanım 39'dan TL-alt modüldür ve A(0)=E(0,0)=1 dir.

Teorem 36. (M,+) değişmeli grup ve E M üzerinde TL-regüler denklik bağıntısı ve $ResE \subseteq D_T$ olsun. Bu durumda E, M kümesi üzerinde $\mathbb{Z}$-modül olarak TL-kongrüans bağıntısıdır.

İspat: $\forall x,y,p,q \in M$ için

$$E\ \ x+y,p+q\ \ \geq E\ \ x+y,y+p\ \ TE\ \ y+p,p+q$$
$$\geq E\ \ x,p\ \ TE\ \ y,q$$

$$
\begin{aligned}
E\big((n+1)x,(n+1)y\big) &= E(nx+x,ny+y)\\
&\geq E(nx,ny)\,\mathrm{T}\,E(x,y)\\
&\geq E(x,y)\,\mathrm{T}\,E(x,y)=E(x,y) \quad (E(x,y)\in D_{\mathrm{T}})
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece E, Tanım 42'den $\mathbb{Z}$ üzerinde TL-kongrüans bağıntısıdır.

Teorem 37. E, F sırasıyla M,N üzerinde TL-kongrüans bağıntısı olsun. O zaman ExF, MxN üzerinde TL-kongrüans bağıntısıdır.

İspat:

Teorem 20.'den $E\times F$ TL-denklik bağıntısı olduğu açıktır.

$\forall x,p,u,t\in M$, $\forall y,q,v,e\in N$ ve $r\in R$ için

$$
\begin{aligned}
(E\times F)\big((x,y)+(p,q),(u,v)+(t,e)\big) &= (E\times F)\big((x+p,y+q),(u+t,v+e)\big)\\
&=E(x+p,u+t)\,\mathrm{T}\,F(y+q,v+e)\\
&\geq E(x,u)\,\mathrm{T}\,E(p,t)\,\mathrm{T}\,F(y,v)\,\mathrm{T}\,F(q,e)\\
&=E(x,u)\,\mathrm{T}\,F(y,v)\,\mathrm{T}\,E(p,t)\,\mathrm{T}\,F(q,e)\\
&=(E\times F)\big((x,y),(u,v)\big)\,\mathrm{T}\,(E\times F)\big((p,q),(t,e)\big)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
(E\times F)\big(r(x,y),r(u,v)\big) &= (E\times F)\big((rx,ry),(ru,rv)\big)\\
&=E(rx,ru)\,\mathrm{T}\,F(ry,rv)\\
&\geq E(x,u)\,\mathrm{T}\,F(y,v)\\
&=(E\times F)\big((x,y),(u,v)\big)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece Tanım 42'den $E\times F$ TL-kongrüans bağıntısıdır.

Teorem 38. M R-modül ve $\{E_i \mid i\in\Lambda\}$ TL-kongrüans bağıntılar ailesi ise $\bigwedge_{i\in\Lambda} E_i$ TL-kongrüans bağıntısıdır.

İspat: $\bigwedge_{i\in\Lambda} E_i$ nın TL-denklik bağıntısı olduğu tanımdan kolayca elde edilir.

$x,y,a,b\in M$, $r\in R$ olsun. Bu taktirde

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(\bigwedge_{i\in\Lambda} E_i\right)(x+y,a+b)\right)\\
&=\bigwedge_{i\in\Lambda}\big(E_i(x+y,a+b)\big)
\end{aligned}
$$

$$\geq \bigwedge_{i\in I}\left(E_i(x,a)TE_i(y,b)\right) \geq \bigwedge_{i\in I}\left(E_i(x,a)T\bigwedge_{i\in I}E_i(y,b)\right)_i$$

$$\left(\bigwedge_{i\in I}E_i\right)(rx,ry) = \bigwedge_{i\in I}E_i(rx,ry) \geq \bigwedge_{i\in I}E_i(x,y) = \left(\bigwedge_{i\in I}E_i\right)(x,y)$$

elde edilir. Böylece $\bigwedge_{i\in\Lambda} E_i$ Tanım 42'den TL-kongrüans bağıntısıdır.

Teorem 38. TL-kongrüans bağıntılarının kümesinin bir tam kafes olduğu elde edilir.

2.2. TL-Modül Homomorfizmaları

Homomorfi kavramı Kazancı [51], Yamak [50], Choudhory ve Khare [48] çalışmalarında incelenmiştir. Burada bu tanımları TL-denklik bağıntısı yardımıyla verilen fonksiyon kavramı ile yeniden değerlendirilerek incelenecektir.

Tanım 43. M, N R-modüller ve $f\in\mathcal{F}(MxN,E,F,L)$ TL-fonksiyon olsun.
f ye TL-modül homomorfisi denir :⇔

i) Her $m,m'\in M;n,n'\in N$ için $f(m+m',n+n')\geqslant f(m,n)Tf(m',n')$,

ii) Her $m\in M,n\in N$ ve $r\in R$ için $f(rm,rn)\geqslant f(m,n)$.

Örnek 32. $L = \{0,a,1\}$ kafesi ve t-norm olarak Örnek 4. (i) deki T_1 i $\mathbb{Z}_3$üzerindeki TL-denklik bağıntısı Örnek 10. (i) deki E_3 ve $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki TL-denklik bağıntısı Örnek 10. (iii) deki F_1 olarak alırsak $f:\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2\to L$ şeklindeki fonksiyonlardan sadece aşağıda verileni TL-modül homomorfizmasıdır.

f_4	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	1	0
$\bar{1}$	1	0
$\bar{2}$	1	0

Teorem 39. T sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm, $f\in\mathcal{F}(M\times P,E,G,L)$ ve $g\in\mathcal{F}(P\times N,G,F,L)$ TL-modül homomorfileri olsun. Bu durumda $g\circ_T f$ de TL-modül homomorfisi olur.

İspat:

Teorem 22.'den $g \circ_T f \in \mathcal{F}(M \times N, E, F, L)$ nın TL-fonksiyon olduğu elde edilir.

$\forall m, m' \in M$ $n, n' \in N$ ve $r \in R$ olsun. T, sonsuz $\vee$-dağılımlı olduğundan

$$
\begin{aligned}
(g \circ_T f)(m+m', n+n') &= \bigvee_{y \in P} \big(f(m+m', y)\, T\, g(y, n+n')\big) \\
&= \bigvee_{y, y' \in P} \big(f(m+m', y+y')\, T\, g(y+y', n+n')\big) \\
&\geq \bigvee_{y, y' \in P} \big(f(m, y)\, T f(m', y')\, T g(y, n)\, T g(y', n')\big) \\
&= \bigvee_{y \in P} \big(f(m, y)\, T g(y, n)\big)\, T \bigvee_{y' \in P} \big(f(m', y')\, T g(y', n')\big) \\
&= (g \circ_T f)(m, n)\, T\, (g \circ_T f)(m', n')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(g \circ_T f)(r.m, r.n) &= \bigvee_{y \in P} \big(f(rm, y)\, T g(y, rn)\big) \\
&\geq \bigvee_{y \in P} \big(f(rm, ry)\, T g(ry, rn)\big) \\
&\geq \bigvee_{y \in P} \big(f(m, y)\, T g(y, n)\big) \\
&= (g \circ_T f)(m, n)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $g \circ_T f$ Tanım 43'den TL-modül homomorfisidir.

Tanım 44. $f \in \mathcal{F}(M \times N, E, F, L)$ TL-modül homomorfisi ve $m \in M, n \in N$ için

$$\text{Çek}f : M \to L, \quad \text{Çek}f(m) := f(m, 0)$$

$$\text{Res}f : N \to L, \quad \text{Res}f(n) := \bigvee_{m \in M} f(m, n)$$

ise Çekf, Resf L-alt kümelerine sırasıyla f'nin çekirdeği ve f'nin resmi denir.

Teorem 40. L sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes, M ve N R-üniter modüller ve $f \in \mathcal{F}(M \times N, E, F, L)$ TL-modül homomorfisi olsun.

Bu taktirde

$\text{Çek}f : M \to L$ ve $\text{Res}f : N \to L$ TL-alt modüllerdir.

İspat:

$m, m' \in M, n, n' \in N, r \in R$ olsun.

$$\begin{aligned}
\text{Çekf}\,(m+m') &= f\,(m+m',0) \\
&= f\,(m+m',0+0) \\
&\geq f\,(m,0)\,\mathrm{T}f\,(m',0) \\
&= \text{Çekf}\,(m)\,\mathrm{T}\text{Çekf}\,(m').
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Çekf}\,(rm) &= f\,(r.m,0) = f\,(r.m,0) = f\,(r.m,r.0) \\
&\geq f\,(m,0) = \text{Çekf}\,(m).
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Çekf Tanım 39'dan TL-alt modüldür.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Resf})\,(n+n') &= \bigvee_{m\in M} f\,(m,n+n') \\
&= \bigvee_{m,m'\in M} f\,(m+m',n+n') \\
&\geq \bigvee_{m,m'\in M} f\,(m,n)\,\mathrm{T}f\,(m',n') \\
&= \bigvee_{m\in M} f\,(m,n)\,\mathrm{T}\bigvee_{m'\in M} f\,(m',n') \\
&= \mathrm{Resf}\,(n)\,\mathrm{T}\mathrm{Resf}\,(n')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Resf}\,(r.n) &= \bigvee_{m\in M} f\,(m,r.n) \\
&\geq \bigvee_{m\in M} f\,(r.m,r.n) \\
&\geq \bigvee_{m\in M} f\,(m,n) \\
&= \mathrm{Resf}\,(n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Resf Tanım 39'dan TL-alt modüldür.

Teorem 41. M ve N R-modüller, $f \in \mathcal{F}(M \times N, E, F, L)$ TL-modül homomorfisi olsun. Bu durumda aşağıdakiler mevcuttur.

$\forall m \in M, n \in N$ için

i) $f(m,n) \leq f(0,0)$

ii) M ve N R-üniter modüller, $f(-m,-n) = f(m,n)$

İspat:

i) $\forall m \in M, n \in N$ için $f(0,0) = f(0.m,0.n) \geq f(m,n)$

ii) $m \in M, n \in N$

$f(-m,-n) = f((-1)m,(-1)n) \geq f(m,n)$.

$$f(m,n) = f(-(-m), -(-n)) \geq f(-m,-n)$$
$$\Rightarrow f(-m,-n) = f(m,n).$$

Teorem 42. M ve N R-modüller, $\top$ sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm, $f \in \mathcal{F}(M \times N, E, F, L)$ $\top$L-modül homomorfisi ve $A \in \mathcal{FS}(M,L)$ $B \in \mathcal{FS}(N,L)$ olsun. Bu taktirde $f(A) \in \mathcal{FS}(N,L)$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{FS}(M,L)$ $\top$L-alt modüllerdir.

İspat: $m, m' \in M, n, n' \in N, r \in R$ olsun.

$$\begin{aligned}
f(A)(n+n') &= \bigvee_{m \in M} \left[A(m) \top f(m, n+n') \right] \\
&= \bigvee_{m,m' \in M} \left[A(m+m') \top f(m+m', n+n') \right] \\
&\geq \bigvee_{m,m' \in M} \left[A(m) \top A(m') \top f(m,n) \top f(m',n') \right] \\
&= \bigvee_{m \in M} A(m) \top f(m,n) \top \bigvee_{m' \in M} A(m') \top f(m',n') \\
&= f(A)(n) \top f(A)(n')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(A)(r.n) &= \bigvee_{m \in M} A(m) \top f(m, r.n) \\
&\geq \bigvee_{m \in M} A(rm) \top f(rm, rn) \\
&\geq \bigvee_{m \in M} A(m) \top f(m,n) = f(A)(n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(A)(-n) &= \bigvee_{m \in M} A(m) \top f(m, -n) \\
&= \bigvee_{m \in M} A(-m) \top f(-m, -n) \\
&= \bigvee_{m \in M} A(-m) \top f(m, n) \\
&\geq \bigvee_{m \in M} A(m) \top f(m,n) = f(A)(n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece f(A) Tanım 39'dan $\top$L-alt modüldür.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(B)(m+m') &= \bigvee_{n \in N} \left[B(n) \top f(m+m', n) \right] \\
&= \bigvee_{n,n' \in N} \left[B(n+n') \top f(m+m', n+n') \right] \\
&\geq \bigvee_{n,n' \in N} \left[B(n) \top B(n') \top f(m,n) \top f(m',n') \right]
\end{aligned}$$

$$= \bigvee_{n\in N} B(n)\, T f(m,n)\; T \bigvee_{n'\in N} B(n')\, T f(m'.n')$$
$$= f^{-1}(B)(m)\, T f^{-1}(B)(m')$$

$$f^{-1}(B)(rm) = \bigvee_{n\in N} B(n)\, T f(rm,n)$$
$$\geq \bigvee_{n\in N} B(rn)\, T f(rm,rn)$$
$$\geq \bigvee_{n\in N} B(n)\, T f(m,n) = f^{-1}(B)(m)$$

$$f^{-1}(B)(-m) = \bigvee_{n\in N} B(y)\, T f(-m,n)$$
$$\geq \bigvee_{n\in N} B(-n)\, T f(-m,-n)$$
$$= \bigvee_{n\in N} B(-n)\, T f(m,n)$$
$$\geq \bigvee_{n\in N} B(n)\, T f(m,n) = f^{-1}(B)(m)$$

elde edilir. Böylece $f^{-1}(B)$ Tanım 39'dan TL-alt modüldür.

Teorem 43. M ve N R-modüller $f: M \to N$ R-modül homomorfisi ve (M, EM_L), (N, EN_L) olsun.

$$\bar{f}(x,y) := \begin{cases} 1, & y = f(x) \\ 0, & y \neq f(x) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\bar{f}: M \times N \to L$ fonksiyonu TL-modül homomorfisidir.

İspat:

$\bar{f} \in \mathcal{F}(M \times N, EM_L, EN_L, L)$ nin TL-fonksiyon olduğu açıktır.

$m, m' \in M,\ n, n' \in N, r \in R$ olsun.

i) $f(m) \neq n$ veya $f(m') \neq n'$ ise $\bar{f}(m,n)\, T \bar{f}(m',n') = 0 \leq f(m+m', n+n')$

ii) $f(m) = n$ ve $f(m') = n'$ ise $f(m+m') = f(m) + f(m') = n + n'$

$\Rightarrow \bar{f}(m+m', n+n') = 1 = 1T1 = \bar{f}(m,n)\, T \bar{f}(m',n')$

$\Rightarrow \bar{f}(m+m', n+n') \geq \bar{f}(m,n)\, T \bar{f}(m',n')$

$f(m) \neq n \Rightarrow \bar{f}(rm, rn) \geq 0 = \bar{f}(m,n)$

$f(m) = n \Rightarrow f(rm) = rf(m) = r.n$

$\Rightarrow \bar{f}(rm, rn) = 1 = \bar{f}(m,n)$

elde edilir. Böylece $\bar{f}$ Tanım 43'den T L-modül homomorfisidır.

Teorem 44. M,P,N R-modüller, T sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm, $f \in \mathcal{F}(M \times P, E, G, L)$ ve $g \in \mathcal{F}(P \times N, G, F, L)$ T L-modül homomorfileri ise

Çek(go$_T$f)=f^{-1}(Çekg) ve Res(go$_T$f)=g(Resf) dır.

İspat:

Teorem 39. ile $g \circ_T f \in \mathcal{F}(M \times N, E, F, L)$ T L-modül homomorfisi olduğu açıktır.

$m \in M, n \in N$ için

$$\text{Çek}(go_Tf)(m) = go_Tf\,(m,0) = \bigvee_{y \in P} f(m,y)Tg(y,0)$$

$$= \bigvee_{y \in P} \text{Çek}g(y)Tf(m,y)$$

$$= f^{-1}(\text{Çek}g)(m)$$

$$\Rightarrow \text{Çek}\ \ g \circ_T f\ \ = f^{-1}\ \ \text{Çek}g$$

$$\text{Res}(go_Tf)(n) = \bigvee_{x \in M}\ \ go_Tf\ \ (x,n)$$

$$= \bigvee_{x \in M} [\bigvee_{y \in P} f(x,y)Tg(y,n)]$$

$$= \bigvee_{y \in P} [\bigvee_{x \in M} f(x,y)]Tg(y,n)$$

$$= \bigvee_{y \in P} \text{Res}f(y)Tg(y,n) = g(\text{Res}f)(n)$$

$$\Rightarrow \text{Res}\ \ g \circ_T f\ \ = g\ \ \text{Res}f$$

Teorem 45. M üniter R-modül, E :MxM$\rightarrow$L T L-kongrüans bağıntısı, f: MxN$\rightarrow$L T L-modül homomorfisi ve Çekf $\subseteq D_T$ olsun. Bu takdirde;

i) f T-L birebir $\Leftrightarrow$ Her $m \in M$ için Çekf(m)$\leq$E(m,0).

ii) f örtendir $\Leftrightarrow$ Resf=1_N

İspat:

i) f, T L-birebir ve $m \in M, n \in N$ olsun. Çekf $\subseteq D_T$ olduğundan

$$f(m,0) = f(m,0)\top f(m,0) \le f(m,0)\top f(0,0) \le E(m,0)$$

Böylece Çekf(m)=f(m,0) $\le$ E(m,0)

Tersine olarak $\forall m \in M$ için Çekf(m)$\le$E(m,0) olsun.

E(m,m')=E(m-m'+m',m')$\geqslant$E(m-m',0) $\top$ E(m',m')= E(m-m',0) $\top$ 1= E(m-m',0),

Böylece

$$\begin{aligned} f(m,n)\top f(m',n) &= f(m,n)\top f(-m',-n) \\ &\le f(m-m',0) \\ &= \text{çekf}(m-m') \\ &\le E(m-m',0) \le E(m,m') \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f $\top$L-birebir fonksiyondur.

ii) Tanımdan açıktır.

Teorem 46. M üniter R-modül ve E :MxM$\rightarrow$L $\top$L-kongrüans bağıntısı ise E $\top$L-modül homomorfisidir.

İspat: Tanım 42.den elde edilir.

Teorem 47. M,N üniter R-modüller, $\top$ sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm olsun. Eğer f:MxN$\rightarrow$L $\top$L-modül homomorfisi ve A$\in\mathcal{FS}$(M,L) ise

f^{-1}(f(A))$\le$A+Çekf

dır.

İspat:

$m, m' \in M,\ n, n' \in N, r \in R$ için

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(A)(m)) &= \bigvee_{n\in N} f(A)(n)\top f(m,n) \\ &= \bigvee_{n\in N}\left[\bigvee_{k\in M}[A(k)\top f(k,n)]\right]\top f(m,n) \\ &= \bigvee_{n\in N}\bigvee_{k\in M} A(k)\top f(k,n)\top f(m,n) \end{aligned}$$

$$\leq \bigvee_{k\in M} A(k)\top f(m-k,0)$$
$$= \bigvee_{k\in M} A(k)\top \text{Çekf}(m-k)$$
$$= \bigvee_{p+q=m} A(p)\top \text{Çekf}(q)$$
$$= (A+\text{Çekf})(m).$$

Teorem 48. F, N üzerinde $\top$L-kongrüans bağıntısı ve f :M→N E-F-genişletilmiş R-modül homomorfisi, olsun. Bu durumda f* :MxN→L $\top$L-modül homomorfisidir.

İspat:

f^*: M×N→L nın $\top$L-mükemmel fonksiyon olduğu Teorem 21.den açıktır.

$x, y \in M, p, q \in N, \alpha \in R$

$$f^* \ x+y, p+q \ = F \ f \ x+y \ , p+q$$
$$= F \ f \ x \ + f \ y \ , p+q$$
$$\geq F \ f \ x \ , p \ \top f^* \ y, q$$

$$f^* \ \alpha x, \alpha p \ = F \ f \ \alpha x \ , \alpha p \ = F \ \alpha f \ x \ , \alpha p$$
$$\geq F \ f \ \alpha \ , p \ = f^* \ x, p$$

elde edilir. Böylece f^*, Tanım 43'den $\top$L-modül homomorfisidir.

Teorem 48. ile $\top$L-modül homomorfileri klasik anlamda modül homomorfilerinin genellemesidir. Ancak her $\top$L-modül homomorfisi bu şekilde yazılamayabilir.

Örnek 33. L, Örnek 4. ii) deki gibi ve $g\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to L, g(x,y) = \begin{cases} a, & 2|y \\ b, & 2\nmid y \end{cases}$ olsun.

i) $g \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, E\mathbb{Z}_L, E\mathbb{Z}_L)$ $\top_D$L-modül homomorfizmasıdır. Ancak $g = f^*$ olacak şekilde bir $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $E\mathbb{Z}_L - E\mathbb{Z}_L$ genişletilmiş modül homomorfisi yoktur. Çünkü g fonksiyonun görüntü kümesi $\{a, b\}$ dir. Ancak f^* ın görüntü kümesi $\{0,1\}$ dir.

Örnek 34. $M = \{1, -1, i, -i\}$, (M,.) değişmeli grup ve F $\top_P$-denklik bağıntısı

F	1	-1	i	-i
1	1	6/10	3/10	4/10
-1	6/10	1	4/10	3/10
i	3/10	4/10	1	6/10
-i	4/10	3/10	6/10	1

tablosu ile verilsin.

i) Eğer M, Örnek 5. iii) ile R-modül olarak alınırsa F, T_P-modül homomorfizmasıdır.

ii) Eğer M, Örnek 5. ii) ile $\mathbb{Z}$-modül olarak alınırsa F, T_P-modül homomorfizması değildir.

iii) i) ile ÇekFve ResF fuzzy alt kümeleri aşağıdaki şekildedir.

ÇekF(m)	1	-1	i	-i
	1	6/10	3/10	4/10

, ResF(n)= $\bigvee_{m\in M} F(m,n) = 1$

Teorem 49. E, F sırasıyla M ve N üzerinde TL-kongrüans bağıntısı olmak üzere p_1, p_2, e_1, e_2 TL-modül homomorfizmalarıdır.

İspat: p_1 ve e_1'nin TL-fonksiyon oldukları Örnek 22.de ifade edilmiştir.

$x, x', p, q \in M \quad y, y' \in N \quad \alpha \in R$

$$
\begin{aligned}
p_1((x,y)+(x',y'), p+q) &= p_1((x+x', y+y'), p+q) \\
&= E(x+x', p+q) \\
&\geq E(x,p)\,\mathrm{T}\,E(x',q) \\
&= p_1((x,y),p)\,\mathrm{T}\,p_1((x',y'),q)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_1(\alpha(x,y), \alpha p) &= p_1((\alpha x, \alpha y), \alpha p) = E(\alpha x, \alpha p) \\
&\geq E(x,p) = p_1((x,y),p)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece Tanm 43'den p_1 TL – modül homomorfizmasıdır.

$x, x', y, y' \in M \quad z, z' \in N \quad \alpha \in R$

$$
\begin{aligned}
e_1(x+x', (y,z)+(y',z')) &= e_1(x+x', (y+y', z+z')) \\
&= E(x+x', y+y')\,\mathrm{T}\,F(y+y', 0)
\end{aligned}
$$

$$\geq E(x,y) \top E(x',y') \top F(y,0) \top F(y',0)$$

$$= E(x,y) \top F(y,0) \top E(x',y') \top F(y',0)$$

$$= e_1(x,(y,z)) \top e_1(x',(y',z'))$$

$$e_1(\alpha x, \alpha(y,z)) = e_1(\alpha x, (\alpha y, \alpha z)) = E(\alpha x, \alpha y) \top F(\alpha y, 0)$$

$$\geq E(x,y) \top F(y,0) = e_1(x,(y,z))$$

elde edilir. Böylece e_1 Tanım 43'den $\top$L-modül homomorfizmasıdır. Benzer şekilde p_2 ve e_2'nin $\top$L-modül homomorfizması oldukları gösterilir.

Şimdi klasik anlamdaki Homomorfizma teoremi bulanık mantığa taşımak için gerekli tanım ve teoremleri ifade edilecektir.

Tanım 45. [70] M R-modül $A \in \mathcal{FS}(M,L)$ olsun.
$x \in M$ için $x+A : M \to L$ $(x+A)(y) = A(x-y)$ ile tanımlanan x+A L-alt kümesine A'nın denklik sınıfı denir.

Teorem 50. [70] M R-modül $A \in \mathcal{FS}(M,L)$ ve $A(0) = 1$ olsun. $x, y \in M$ için

$$x + A = y + A \Leftrightarrow A(x-y) = 1$$

Teorem 51. [70] M R-modül, $A \in \mathcal{FS}(M,L)$ ve $A(0) = 1$ olsun.
$M/A = \{x + A \mid x \in A\}$ kümesi üzerinde

$$(x+A) + (y+A) = (x+y) + A$$

$$\lambda(x+A) = (\lambda x) + A$$

işlemleri alınırsa M/A R-modüldür. Eğer M R-üniter modül ise M/A da R-üniter modüldür.

Teorem 52. $A : M \to L$ $\top$L-alt modül, ve A(0)=1 olsun. Bu durumda
$E/A : M/A \times M/A \to L$ $E/A(x+A, y+A) = A(x-y)$
şeklinde tanımlanan E/A, $\top$L-kongrüans bağıntısıdır.

İspat:

$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$ için $x_1 + A, y_1 + A = x_2 + A, y_2 + A$ olsun. Buradan

$x_1 + A = x_2 + A$ ve $y_1 + A = y_2 + A$ olduğundan

$A \ x_1 - x_2 = A \ y_1 - y_2 = 1$dır. Böylece

$$A \ x_1 - y_1 = A \ x_1 - y_1 + x_2 - x_2 \geq A \ x_1 - x_2 \ \top A \ x_2 - y_1$$

$$= 1 \top A \ x_2 - y_1 = A \ x_2 - y_1 = A \ x_2 - y_2 + y_2 - y_1$$

$$\geq A \ x_2 - y_2 \ \top A \ y_2 - y_1$$

$$= A \ x_2 - y_2 \ \top 1 = A \ x_2 - y_2$$

ve $A \ x_2 - y_2 = A \ x_2 - y_2 + x_1 - x_1 = A \ x_2 - x_1 + x_1 - y_2$

$$\geq A \ x_2 - x_1 \ \top A \ x_1 - y_2$$

$$= 1 \top A \ x_1 - y_2 = A \ x_1 - y_2$$

$$= A \ x_1 - y_2 + y_1 - y_1$$

$$= A \ x_1 - y_1 + y_1 - y_2$$

$$\geq A \ x_1 - y_1 \ \top A \ y_1 - y_2$$

$$= A \ x_1 - y_1 \ \top 1 = A \ x_1 - y_1$$

elde edilir. Buradan $A \ x_1 - y_1 = A \ x_2 - y_2$ dır. Böylece E/A iyi tanımlıdır.

E/A'nın $\top$L-denklik bağıntısı olduğu açıktır.

$x + A, y + A, x' + A, y' + A \in M/A$ olsun.

i) $E/A \ x + A, y + A \ \top E/A \ x' + A, y' + A = A \ x - y \ \top A \ x' - y'$

$\leq A \ x + x' - \ y + y' = E/A \ x + x' + A, y + y' + A$

ii) $E/A \ x + A, y + A = A \ x - y \leq A \ r \ x - y = A \ rx - ry$

$= E/A \ rx + A, ry + A$

elde edilir. Böylece E/A Tanım 43'den $\top$L-kongrüans bağıntısıdır.

Teorem 53. (Homomorfizma Teoremi)

$f: M \times N \to L$ TL-örten modül homomorfizması, f(0,0)=1 ve E/Çekf M/Çekf üzerinde TL-kongrüans bağıntısı olsun. Bu taktirde

$\overline{f}: M/\text{çekf} \times N \to L$, $\overline{f}(x+\text{Çekf}, y) = f(x,y)$ şeklinde tanımlanan L-bağıntısı bir TL-modül izomorfisidir.

İspat: $\overline{f}$ nin TL-fonksiyon olduğu açıktır.

$x + \text{Çekf} = x' + \text{Çekf}, y \in N$ olsun. Teorem 50 ile

$\text{Çekf}(x - x') = 1 \Rightarrow f(x - x', 0) = 1$ Buradan

$\Rightarrow f(x - x', 0) = 1$ dır.

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(x + \text{Çekf}, y) &= f(x, y) \\
&= f(x - x' + x', 0 + y) \\
&\geq f(x - x', 0)\, T\, f(x', y) \\
&= 1\, T\, f(x', y) = f(x', y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(x' + \text{Çekf}, y) &= f(x', y) \\
&= f(x' - x + x, 0 + y) \\
&\geq f(x' - x, 0)\, T\, f(x, y) \\
&= 1\, T\, f(x, y) = f(x, y) \\
&\Rightarrow f(x, y) = f(x', y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani $\overline{f}(x' + \text{Çekf}, y) = \overline{f}(x + \text{Çekf}, y)$ olur. Böylece $\bar{f}$ iyi tanımlıdır.

i) $x + \text{Çekf}, x' + \text{Çekf} \in M/\text{Çekf}, y, y' \in N$ olsun.

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(x + \text{Çekf}, y)\, T\, \overline{f}(x' + \text{Çekf}, y') &= f(x, y)\, T\, f(x', y') \\
&\leq f(x + x', y + y') \\
&= \overline{f}(x + x' + \text{Çekf}, y + y') \\
&= \overline{f}(x + \text{Çekf} + x' + \text{Çekf}, y + y')
\end{aligned}
$$

ii) $\overline{f}(\alpha(x + \text{Çekf}), \alpha y) = f(\alpha x + \text{Çekf}, \alpha y)$

$$= f(\alpha x, \alpha y) \geq f(x, y) = \overline{f}(x + \text{Çekf}, y)$$

dır. Böylece $\bar{f}$ Tanım 43'den TL-modül homomorfisidir. Ayrıca $y \in N$ için $\bar{f}$ TL-örten modül homomorfisi olduğundan

$\bigvee_{x \in M} \overline{f}(x + \text{Çekf}, y) = \bigvee_{x \in M} f(x, y) = 1$ elde edilir.

elde edilir. Böylece $\bar{f}$ Tanım 34’den örtendir.

$\forall x, x' \in X,\ y \in Y$ için

$$\begin{aligned}\bar{f}(x+Çekf, y)\top\bar{f}(x'+Çekf, y) &\leq f(x,y)\top f(x',y)\\ &\leq f(x-x',0) = Çekf(x-x')\\ &= E_{Çekf}(x+Çekf, x'+Çekf)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\bar{f}$ Tanım 34’den birebirdir.

Böylece $\bar{f}$ $\top$L-modül izomorfisidir.

Teorem 54. $A: M \to L$, E’ye genişletilmiş $\top$L-alt modül (M,E), (M/A, E/A) $\top$L-kongrüans bağıntıları ve $A(0)=1$ olsun. Bu taktirde

$$\pi : M \times M/A \to L$$
$$\pi(x, y+A) = A(y-x)$$

şeklinde tanımlanan π fonksiyonu $\top$L-mükemmel fonksiyonudur.

İspat

$y+A = y'+A \Rightarrow A(y-y') = 1$ dir.

$$\begin{aligned}A(y-x+y'-y') &= A(y-y'+y'-x)\\ &\geq A(y-y')\top A(y'-x)\\ &= 1\top A(y'-x) = A(y'-x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A(y'-x+y-y) &\geq A(y'-y)\top A(y-x)\\ &= 1\top A(y-x)\end{aligned}$$

$A(y-x) = A(y'-x)$ elde edilir. Böylece π iyi tanımlıdır.

$$\begin{aligned}\pi(x, y+A)\top E_A(y+A, y'+A) &= A(y-x)\top A(y'-y)\\ &\leq A(y'-x) = \pi(x, y'+A)\end{aligned}$$

π E_A-genişletilmiş $\top$L-bağıntısıdır.

$$\pi(x, y+A)\top E(x,x') = A(y-x)\top E(x,x') \geq A(y-x')$$

elde edilir. Böylece πTanım33’den E-genişletilmiş $\top$L-bağıntısıdır. Sonuç olarak π E-E_A genişletilmiş $\top$L-bağıntısıdır.

$$\begin{aligned}\pi(x,y+A)\,T\,\pi(x,y'+A) &= A(y-x)\,T\,A(y'-x)\\ &= A(x-y)\,T\,A(y'-x)\\ &\le A(y'-y) = E_A(y+A,y'+A)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece π Tanım 34'den TL-kısmi fonksiyondur.

$\pi(x,x+A) = A(x-x) = A(0) = 1$ olduğundan π, TL-fonksiyon ve mükemmel TL-fonksiyonudur.

Teorem 55. $A : M \to L$, (M,E) ve (M/A, E/A) TL-kongrüans bağıntıları E'ye genişletilmiş TL-alt modül ve $A(0) = 1$ olsun. Bu taktirde

$$\pi : M \times M/A \to L$$
$$\pi(x,y+A) = A(y-x)$$

şeklinde tanımlanan π, TL-fonksiyonu, TL-modül homomorfizmasıdır.

ispat:

i) $x,y,x',y' \in M$

$$\begin{aligned}\pi(x,y+A)\,T\,\pi(x',y'+A) &= A(y-x)\,T\,A(y'-x')\\ &\le \pi((y+y')-(x+x'))\\ &= A(x+x',y+y'+A)\\ &= A(x+x',(y+A)+(y'+A))\end{aligned}$$

ii) $\alpha \in R$ $x,y \in M$

$$\pi(\alpha x,\alpha(y+A)) = A(\alpha y-\alpha x) \ge A(y-x) = \pi(x,y+A)$$

elde edilir. Böylece π Tanım 43'den TL-modül homomorfisidir.

Örnek 35. $T=T_L$ t-norm ve R^2 üzerindeki TL-denklik bağıntısı Örnek 26. daki gibi verilsin. Bu taktirde $f : R^2 \times R^2 \to [0,1]$

$f[(x_1,y_1),(x_2,y_2)] = 1-\min(|(x_1+y_1)-(x_2+y_2)|,1)$ fuzzy bağıntısı, T_L-fuzzy modül homomorfizmasıdır.

Çözüm:

$T: 0,1 \times 0,1 \to 0,1 \quad xTy = \max \; x + y - 1, 0$ dır.

i) $f\left[\; x_1, y_1 \; + \; a_1, b_1 \; , \; x_2, y_2 \; + \; a_2, b_2 \; \right] = f\left[\; x_1 + a_1, y_1 + b_1 \; , \; x_2 + a_2, y_2 + b_2 \; \right]$

$1 - \min \; \left| x_1 + a_1 + y_1 + b_1 - \; x_2 + a_2 + y_2 + b_2 \; \right|, 1$ ....*

$f\left[\; x_1, y_1 \; , \; x_2, y_2 \; \right] T f\left[\; a_1, b_1 \; , \; a_2, b_2 \; \right]$

$= \; 1 - \min \; \left| x_1 + y_1 - \; x_2 + y_2 \; \right|, 1 \quad T \; 1 - \min \; \left| a_1 + b_1 - \; a_2 + b_2 \; \right|, 1 \; , 0$ ....**

$* \geq **$ olduğunu gösterelim. Daha basit işlem yapmak için

$x_1 + y_1 = a \qquad a_1 + b_1 = c$

$x_2 + y_2 = b \qquad a_2 + b_2 = d$ alalım.

$1 - \min \; \left| a + c - \; b + d \; \right|, 1 \; \geq \max \; 1 - \; \min \; \left| a - b \right|, 1 \; + \min \; \left| c - d \right|, 1 \quad , 0$ dır. Gösterelim.

i) $\left| a - b \right| \geq 1, \; \left| c - d \right| \geq 1$ için $\left| a + c - \; b + d \; \right| \geq 2$ olur.

$1 - 1 \geq \max \; 1 - \; 1 + 1 \; , 0 \; \Rightarrow 0 \geq 0$

ii) $\left| a - b \right| < 1, \; \left| c - d \right| < 1$ için $\left| a + c - \; b + d \; \right| < 2$ olur.

$0 < \left| a + c - \; b + d \; \right| \leq 1 \Rightarrow$

$1 - \left| a + c - \; b + d \; \right| \geq \max \; 1 - \; \left| a - b \right| + \left| c - d \right| \; , 0$

$1 < \left| a + c - \; b + d \; \right| < 2 \Rightarrow$

$1 - 1 \geq \max \; 1 - \; \left| a - b \right| + \left| c - d \right| \; , 0$

$0 \geq 0$

$\left| a - b \right| \geq 1$ ve $\left| c - d \right| < 1$ yada

$\left| a - b \right| < 1$ ve $\left| c - d \right| \geq 1$ için

$\max \; 1 - \; 1 + \left| c - d \right| \; , 0 \; = 0$ yada $\max \; 1 - \; \left| a - b \right| + 1 \; , 0 \; = 0$

olduğundan $* \geq **$ oldu.

ii) $f\left[r \; x_1, y_1 \; , r \; x_2, y_2 \; \right] = f\left[\; rx_1, ry_1 \; , \; rx_2, ry_2 \; \right]$

$= 1 - \min \; \left| rx_1 + ry_1 - \; rx_2 + ry_2 \; \right|, 1$

$= 1 - \min \; \left| r \; x_1 + y_1 - \; x_2 + y_2 \; \right|, 1$

$\geq 1 - \min \; \left| r \right| \left| x_1 + y_1 - \; x_2 + y_2 \; \right|, 1$ ....*

$f\left[\; x_1, y_1 \; , \; x_2, y_2 \; \right] = 1 - \min \; \left| x_1 + y_1 - \; x_2 + y_2 \; \right|, 1$ ....**

$* \geq **$ gösterelim.

$|r|\geq 1$ için doğru $|r|<1$ için $|r||x_1+y_1-\ x_2+y_2\ |$ dır.

$|r||x_1+y_1-\ x_2+y_2\ |<1$ için

$1-|r||x_1+y_1-\ x_2+y_2\ |\leq 1-\min\ |x_1+y_1-\ x_2+y_2\ |,1$

$|r||x_1+y_1-\ x_2+y_2\ |\geq 1$ için

$|x_1+y_1-\ x_2+y_2\ |\geq 1$ dir. Buradan $1-1\geq 1-1$

elde edilir. Böylece f Tanım 43'den T-fuzzy modül homomorfisidir.

Teorem 56. $M_1,E_1\ ,\ M_2,E_2\ ,\ N_1,F_1\ ,\ N_2,F_2$ olmak üzere;

$f : M_1\times N_1 \to L$
$g : M_2\times N_2 \to L$

$g\times f\ :\ M_1\times M_2\ \times\ N_1\times N_2\ \to L$

$g\times f\quad x_1,x_2\ ,\ y_1,y_2\ = f\ x_1,y_1\ Tg\ x_2,y_2$

için f ve g TL-modül homomorfisi ise g×f TL-modül homomorfisidir. Ayrıca f ve g mükemmel ise g×f de mükemmeldir.

İspat:

$x_1,x_2x_*,x'_*\in M, y_1,y_2\in N$

$$\begin{aligned}
g\times f\quad x_1,x_2\ ,\ y_1,y_2\ \ T\ E_1\times E_2\quad x_1,x_2\ ,\ x_*,x'_* \\
&=\left[f\ x_1,y_1\ Tg\ x_2,y_2\ \right]T\left[E_1\ x_1,x_*\ TE_2\ x_2,x'_*\ \right]\\
&=\left[f\ x_1,y_1\ TE_1\ x_1,x_*\ \right]T\left[g\ x_2,y_2\ TE_2\ x_2,x'_*\ \right]\\
&\leq f\ x_*,y_1\ Tg\ x'_*,y_2\\
&=\ g\times f\quad x_*,x'_*\ ,\ y_1,y_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $g\times f$ Tanım 33'den $E_1\times E_2$-genişletilmiştir.

$$\begin{aligned}
g\times f\quad x_1,x_2\ ,\ y_1,y_2\ \ T\ F_1\times F_2\quad y_1,y_2\ ,\ y_*,y'_* \\
&=\left[f\ x_1,y_1\ Tg\ x_2,y_2\ \right]T\left[F_1\ y_1,y_*\ TF_2\ y_2,y'_*\ \right]\\
&=\left[f\ x_1,y_1\ TF_1\ y_1,y_*\ \right]T\left[g\ x_2,y_2\ TF_2\ y_2,y'_*\ \right]\\
&\leq f\ x_1,y_*\ Tg\ x_2,y'_*\\
&=\ g\times f\quad x_1,x_2\ ,\ y_*,y'_*
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $g\times f$ Tanım 33'den $F_1\times F_2$-genişletilmiştir.

$x_1, x_2 \in M, y_1, y_2, y_*, y'_* \in N$

$$g\times f \quad x_1,x_2 \ , \ y_1,y_2 \quad T \ g\times f \quad x_1,x_2 \ , \ y_*,y'_*$$

$$=\left[f \ x_1,y_1 \ Tg \ x_2,y_2 \ \right]T\left[f \ x_1,y_* \ Tg \ x_2,y'_* \ \right]$$

$$f \ x_1,y_1 \ Tf \ x_1,y_* \ Tg \ x_2,y_2 \ Tg \ x_2,y'_*$$

$$\leq F_1 \ y_1,y_* \ TF_2 \ y_2,y'_*$$

$$= \ F_1\times F_2 \ \left[\ y_1,y_* \ , \ y_2,y'_* \ \right]$$

$$\bigvee_{y,y' \in Y\times Y'} g\times f \ \left[\ x_1,x_2 \ , \ y_1,y_2 \ \right]$$

$$=\bigvee f \ x_1,y_1 \ Tg \ x_2,y_2$$

$$=\bigvee_{y\in Y} f \ x_1,y_1 \ T\bigvee g \ x_2,y_2 \ =1$$

elde edilir. Böylece g×f Tanım 34’den T L-fonksiyondur.

i) $g\times f \left[\ x,x' \ + \ a,a' \ , \ y,y'+ \ b,b' \ \right]= \ g\times f \ \left[\ x+a,x'+a' \ , \ y+b,y'+b' \ \right]$

$$=f \ x+a,y+b \ Tg \ x'+a',y'+b'$$

$$\geq\left[f \ x,y \ Tf \ a,b \ \right]T\left[g \ x',y' \ Tg \ a',b' \ \right]$$

$$= \ g\times f \ \left[\ x,x' \ , \ y,y' \ \right]T \ g\times f \ \left[\ a,a' \ , \ b,b' \ \right]$$

ii) $g\times f \ \left[r \ x,x' \ ,r \ y,y' \ \right]= \ g\times f \ \left[\ rx,rx' \ , \ ry,ry' \ \right]$

$$=f \ rx,ry \ Tg \ rx',ry'$$

$$\geq f \ x,y \ Tg \ x',y'$$

$$= \ g\times f \ \left[\ x,x' \ , \ y,y' \ \right]$$

elde edilir. Böylece g×f Tanım 43’den T L-modül homomorfisidir.

Teorem 57. $X,E \ , \ Y,F \ f:X\times Y\to L$ f, $T'-L$ fonksiyon ve $T\leq T'$ ise f, T L-fonksiyondur.

İspat:

i) $\forall x,x'\in X$ ve $y\in Y$ için $f \ x,y \ TE \ x,x' \ \leq f \ x,y \ T'E \ x,x' \ \leq f \ x',y$

ii) $\forall x\in X$ ve $y,y'\in Y$ için $f \ x,y \ TF \ y,y' \ \leq f \ x,y \ T'F \ y,y' \ \leq f \ x,y'$

elde edilir. Böylece f Tanım 33’den E-F genişletilmiştir.

$\forall x \in X$ ve $y, y' \in Y$ için

$$f(x,y)\, T\, f(x,y') \le f(x,y)\, T'\, f(x,y')$$
$$\le F(y,y').$$
$$\bigvee_{z\in Y} f(x,z) = 1$$

elde edilir. f Tanım 34'den TL-fonksiyondur.

Teorem 58. (X,E), (Y,F) $f: X\times Y \to L$ f, $T'-L$ fonksiyon olsun. $T \ll T'$ ise f, TL-fonksiyondur.

İspat:

i)

$$f(x',y) \ge f(x,y)\, T'\, E(x,x') = \big(f(x,y)\, T\, 1\big)\, T'\, \big(1\, T\, E(x,x')\big)$$
$$\ge \big(f(x,y)\, T'\, 1\big)\, T\, \big(1\, T'\, E(x,x')\big)$$
$$= f(x,y)\, T\, E(x,x')$$

ii)

$$f(x,y') \ge f(x,y)\, T'\, F(y,y') = \big(f(x,y)\, T\, 1\big)\, T'\, \big(1\, T\, F(y,y')\big)$$
$$\ge \big(f(x,y)\, T'\, 1\big)\, T\, \big(1\, T'\, F(y,y')\big)$$
$$= f(x,y)\, T\, F(y,y')$$

elde edilir. Böylece f Tanım 33'den E-F genişletilmiş TL-bağıntıdır.

$\forall x \in X$ ve $\forall y, y' \in Y$ için

$$f(x,y)\, T\, f(x,y') = \big(f(x,y)\, T'\, 1\big)\, T\, \big(1\, T'\, f(x,y')\big)$$
$$\le \big(f(x,y)\, T\, 1\big)\, T'\, \big(1\, T\, f(x,y')\big)$$
$$= f(x,y)\, T'\, f(x,y') \le F(y,y').$$
$$\bigvee_{z\in Y} f(x,z) = 1$$

elde edilir. Böylece f Tanım 34'den TL-fonksiyondur.

Teorem 59. (X,E), (Y,F) $f: X\times Y \to L$ f, $T'-L$ modül homomorfisi $T \le T'$ ise f, TL-modül homomorfisidir.

ispat: f'nin TL-fonksiyon olduğu Teorem 57.da ifade edilmiştir.

i) $\forall x, x' \in X,\ y, y' \in Y$ için $f\ \ x+x', y+y'\ \ \geq f\ \ x, y\ \ T'f\ \ x', y'\ \ \geq f\ \ x, y\ \ Tf\ \ x', y'$

ii) $\forall x \in X, y \in Y, r \in R$ için $f\ \ rx, ry\ \ \geq f\ \ x, y$

elde edilir. Böylece f Tanım 43'den T L-modül homomorfisidir.

Teorem 60. $X, E\ \ ,\ \ Y, F\ \ f : X \times Y \to L\ \ f,\ \ T'L-$modül homomorfisi $T \ll T'$ ise $f,\ \ T$ L-modül homomorfisidir.

İspat: f'nin T L-fonksiyon olduğu Teorem 58.de ifade edilmiştir.

i) $\forall x, x' \in X,\ y, y' \in Y$ için

$$
\begin{aligned}
f\ \ x+x', y+y'\ \ \geq f\ \ x, y\ \ T'f\ \ x', y'\ \ &= f\ \ x, y\ \ T1\ \ T'\ \ 1Tf\ \ x', y' \\
&\geq\ f\ \ x, y\ \ T'1\ \ T\ \ 1T'f\ \ x', y' \\
&= f\ \ x, y\ \ Tf\ \ x', y'
\end{aligned}
$$

ii) $\forall x \in X, y \in Y, r \in R$ için

$f\ \ rx, ry\ \ \geq f\ \ x, y$

elde edilir. Böylece f Tanım 43'den T L-modül homomorfisidir.

3. İRDELEME

Cebirde Modüller ve Modül Homomorfizmaları kavramı önemli yer tutmaktadır. Modüllerin fuzzye aktarımı Negoita ve Ralescu [4], Maschinchi ve Zahedi [6], Katsaras ve Liu [7], Yu[8, 9], Abu Osman [10], Das [11], Golan [12], Gu ve Lu [13], Lowen [14], Lubczonok [15], Malik ve Mordeson [16], Mugandu [17], Pan [18-21], Yu [9], Zahedi [22,23] yazarlar tarafından çalışılmıştır. Sasaki [42] ve Sidky [43], Fang [44], Chakraborty ve Khare [45], Su-Yun, De-Gang, Wen-Xiang Gu, Wang [46], Sebastian ve Sander [47] fuzzy Malik ve Mordeson [49], Yamak [50], Kazancı [51] ve Tang [52]'ın fuzzy fonksiyon ve cebirsel yapılar arasında homomorfi kavramını fuzzy'e aktarmakta önemli katkıları olmuştur. Bu tezde bunların ışığı altında öncelikle 1. bölümde genel olarak TL-alt küme, TL-denklik bağıntısı ve TL-fonksiyon kavramı literatürden titizlikle verilmiştir. İkinci Bölümde ise Demirci [60] nin ortaya koyduğu TL-fonksiyon kavramıyla TL-modül homomorfileri tanımları incelenmiştir. Ayrıca Çekf ve Resf TL-altküme olarak bu alana aktarılmıştır.

Teorem 40. ile Çekf ve Resf TL-alt modül olduğu gösterilmiştir. Teorem 42.de TL-alt modüllerin görüntü ve ters görüntüsünün TL-alt modül olduğu gösterilmiştir. Teorem 43.de her modül homomorfisinin TL-modül homomorfisine genişletilebileceği verilmiştir. Teorem 45.de TL-modülhomomorfisinin birebirliği ile gerek ve yeter şart ifade edilmiştir.

Teorem 48.de her E-F genişletilmiş modül homomorfisinin TL-modül homomorfisine genişletilebileceği ancak TL-modül homomorfilerinin bu şekilde yazılmasının mümkün olmadığıdır. Bu Örnek 33.te görülmüştür. Teorem 52 bir TL-alt modül yardımıyla bölüm modülü üzerinde TL-denklik bağıntısı verilerek özellikle Teorem 55'de π, TL-modül homomorfisi elde edilmiştir.Teorem 57, Teorem 58. ve Teorem 59'da özellikle T-normların bu alanda önemli yer tuttuğunun bir göstergesi olarak gözlemlenmiştir. Teorem 53'de modüllerdeki homomorfi teoremi fuzzye aktarılmıştır.

4. SONUÇLAR

Lotfi Zadeh [1] tarafından 1965 yılında ortaya çıkan fuzzy kavramı günümüze kadar birçok uygulama alanı bulmuştur. Uzun yıllardan beri matematikteki fonksiyon kavramı bu alana taşınmaya çalışılmaktadır. Hala fuzzy fonksiyon kavramı net bir şekilde bu alana aktarılamamıştır. Mevcut tanımların çoğu klasik anlamda fonksiyon kavramının ötesine geçememiştir. Son yıllarda özellikle fuzzy denklik bağıntıları ve L-fuzzy bağıntıları yardımıyla bu tanımlar iyileştirilmeye başlanmıştır. Bu alanda Demirci [57], Sostak [54] ve Höhle [53] gibi araştırmacılar önemli katkılar sağlamışlardır. Fuzzy fonksiyon kavramının yerleşmeye başlamasıyla birlikte özellikle cebirsel yapıların bu alana taşınmaları önem kazanmaya başladı. Bu tezde TL-modül homomorfi tanımı verilerek modüller için bilinen önemli teoremler bu alana taşınmıştır. Literatürde mevcut birçok çalışmanın bu tanımla yeniden yapılandırılabilmesi bakımından katkılar sağlayacağı bilinmektedir.

5. ÖNERİLER

Fuzzy fonksiyon kavramı son yıllarda araştırmalara konu olması nedeniyle cebirsel yapılar arasında homomorfi kavramı fuzzy fonksiyon yardımıyla yeniden tanımlanabilir. Ayrıca fuzzy fonksiyon kavramı yardımıyla Demirci [60] özellikle gruplarda ikili işlem tanımını vererek fuzzy grup yapısını geliştirmiştir. Bu tanım diğer cebirsel yapılara genişletilerek TL-modül homomorfisi veya diğer yapılar arasında homomorfik yapılar fuzzy ikili işlemler için verilebilir.

İkili işlemin ve dış işlemin fuzzy olarak tanımı, yapılan çalışmaların tekrar bu alanda incelenmesi durumu dikkate alındığında çok büyük bir çalışma alanı yaratacağı kesindir. Bu tanım her türlü cebirsel yapılara uyarlanması bakımından önemlidir.

6.KAYNAKLAR

1. Zadeh L. A., Fuzzy Sets, Information and Control, 8 (1965) 338-353.

2. Nabiyev Vasif V.,Yapay Zeka:Problemler, Yöntemler, Algoritmalar, 1, 1, Ankara : Seçkin yayınevi, 2003

3. Rosenfield A., fuzzy groups, Journal of Mathematical Analysis and Applications 35 (1971) 512-517.

4. Negoita, C.V. and Ralescu, D.A. Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis, Birkhauser Verlag, Basel, Stuttgart: (1975).

5. Anthony, J. M. and Sherwood, H., Fuzzy groups redefined, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 69 (1979) 124-130.

6. Mashinchi M. and Zahedi M.M., On L-Fuzzy Primary Submodules, Fuzzy Sets and Systems 49 (1992) 231-236.

7. Katsaras, A. and Liu, D. B., Fuzzy vector spaces and fuzzy topological vector spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 58, (1977), 135-146.

8. Yu, Y. D., On the convex fuzzy sets, Fuzzy Math., 4, 2 (1984) 29-40.

9. Yu, Y. D., Fuzzy linear spaces redefined, Fuzzy Math., 4, 3 (1984) 59-62.

10. Abu Osman, M. T., On fuzzy vector spaces via triangular norm, Bull. Malaysian Math. Soc. 9 (1986) 33-42.

11. Das, P., Fuzzy vector spaces under triangular norms, Fuzzy Sets and Systems 25 (1988) 73-85.

12. Golan, J. S., Making modules fuzzy, Fuzzy Sets and Systems, 32 (1989) 91-94.

13. Gu, W. X. and Lu, T., Fuzzy linear spaces, Fuzzy Sets and Systems, 49 (1992) 377-380.

14. Lowen, R., Convex fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 3 (1980) 291-310.

15. Lubcznok, P., Fuzzy vector spaces, Fuzzy Sets and Systems 38 (1990) 329-343.

16. Malik, D. S. and Mordeson J. N., Fuzzy vector spaces, Information Sciences 55 (1991) 271-281.

17. Muganda G. C., Free fuzzy modules and their bases, Information Sciences 72 (1993) 65-82.

18. Pan, F. Z., Fuzzy finitely generated modules, Fuzzy Sets and Systems 21 (1987) 105-113.

19. Pan, F. Z., Fuzzy quotient modules, Fuzzy Sets and Systems 28 (1988) 85-90.

20. Pan, F. Z., The various structures of fuzzy quotient modules, Fuzzy Sets and Systems 50 (1992) 187-192.

21. Pan, F. Z., Finitely fuzzy value distribution of fuzzy vector spaces and fuzzy modules, Fuzzy Sets and Systems 55 (1993) 319-322.

22. Zahedi, M. M., On L-fuzzy residual quotient modules and p-primary submodules, Fuzzy Sets and Systems 51 (1992) 333-344.

23. Zahedi, M. M., Some results on L-fuzzy modules, Fuzzy Sets and Systems 55 (1993) 355-361.

24. Wang, Z. D., On L-subsets and TL-subalgebras, Fuzzy Sets and Systems 65 (1994) 59-69.

25. Yu, Y. D., L-subsets and L-universal algebras in: Advances in Fuzzy Theory and Technology, Bookwrights-Independent Book Producers, North Carolina (1993)

26. Wang Z. D., Cheng S. C. and Yu, Y. D., TL-subgroups and Ω-TL-subgroups, Fuzzy Sets and Systems 78 (1996) 387-393.

27. Wang Z. D. and Yu Y. D., TL-subrings and TL-ideals, Part 2: Generated TL-ideals, Fuzzy Sets and Systems 87 (1997) 209-217.

28. Wang Z. D. and Yu Y. D., TL-subrings and TL-ideals, Part 1: Basic concepts, Fuzzy Sets and Systems 68 (1994) 93-103.

29. Wang Z., TL-submodules and TL-linear subspaces, Fuzzy Sets and Systems 68 (1994) 211-225.

30. Murali V., Fuzzy equivalence relations, Fuzzy Sets and Systems 30 (1989) 155-163.

31. Murali V., Fuzzy congruence relations, Fuzzy Sets and Systems 41 (1991) 359-369.

32. Samhan M., Fuzzy congruences on semigroups, Information Sciences 74 (1993) 165-175.

33. Zadeh, L. A., Similarity relations and fuzzy orderings, Information Sciences 3 (1971) 177-200

34. Rosenfeld, A., Fuzzy graphs, in; L.A. Zadeh, K. S. Fv, M. Shimura(Eds.), Fuzzy Sets and Their Applications, Academic press, New York, 1975

35. Tamura S., Higuchi S. and Tanaka K., Pattern classification based on fuzzy relations, IEEE Trans. Systems Man Cybernet. 1 (1971) 61-66.

36. Yeh R.T. and Bang S.Y., Fuzzy relations, Fuzzy graphs and their applications to cluster analysis, in; L.A. Zadeh, S. Fu, M.Shimula (Eds.), Fuzzy sets and Their Applications, Academic press New York, 1975

37. Kuroki N., Fuzzy congruences and fuzzy normal subgroups, Information Sciences, 60 (1992) 247-259.

38. Filep L. and Maurer I., Fuzzy congruences and compatible fuzzy partitions, Fuzzy Sets and Systems 29 (1989) 357-361.

39. Dutta T.K. and Biswas B.K., Fuzzy congruence and quotient semiring of a semiring. Fuzzy Math. 4 (1996) 737–748.

40. Dutta T.K. and Biswas B.K., On Fuzzy Congruence of a Near-Ring Module, Fuzzy Sets and Systems 112 (2000) 343-348.

41. Kim J. and Bae D., Fuzzy congruences in groups, Fuzzy Sets and Systems 85 (1997) 115-120.

42. Sasaki M., Fuzzy functions, Fuzzy Sets and Systems 55 (1993) 295-301.

43. Sidky F.I., t-fuzzy mapping, Fuzzy Sets and Systems 76 (1995) 387-393.

44. Fang J. X., Fuzzy homomorphism and fuzzy isomorphism, Fuzzy Sets and Systems 63 (1994) 237-242.

45. Chakraborty A. B. and Khare S. S., Fuzzy homomorphism and f-fuzzy subgroups generated by a fuzzy subset, Fuzzy Sets and Systems 74 (1995) 259-268.

46. Li S. Y., Chen D. G., Gu W. X. and Wang H., Fuzzy Homomorphisms, Fuzzy sets and Systems 79 (1996) 235-238.

47. Sebastian S. and Sander S. B., Fuzzy Groups and Group Homomorphisms, Fuzzy Sets and Systems 81 (1996) 397-401.

48. Choudhury. F.P., Chakraborty A. B. and Khare S.S., A note on fuzzy subgroups and fuzzy homomorphism, Journal of .Mathematical Analysis and Applications 131 (2) (1988) 537-553.

49. Malik D.S. and Mordeson John N., Fuzzy homomorphisms of rings, Fuzzy Sets and Systems 46 (1992) 139-146.

50. Yamak, S., Fuzzy Cebirsel Yapıları ve Grupların Fuzzy Gösterimleri, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1995.

51. Kazancı, O., Modüllerin Fuzzy Çarpımı ve Eş Çarpımının Bir Karakterizasyonu, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1995.

52. Tang J., Invertibility of Morphisms in the Category of L-Fuzzy Left R-Modules, Fuzzy Sets and Systems 105 (1999) 503-507.

53. Höhle U., Porst H. and Sostak A., Fuzzy functions: a fuzzy extension of the category SET and some related categories Applied General Topology 1 (2000) 115-127.

54. Šostak A. P., Fuzzy Functions and an Extension of the Category L-Top of Chang-Goguen L-Topological Spaces, Proceedings of the Ninth Prague Symposium, pp. 271-294, Topology Atlas, Toronto, 2002

55. Kim H. S., Monk B. and Neggers J., On pseudo-fuzzy linear mappings, Information Sciences 177 (2007) 897-905.

56. Demirci M., Fuzzy Functions and Their Fundamental Properties, Fuzzy Sets and Systems, 106 (1999) 239-246.

57. Demirci M., Fuzzy Functions and Their Applications, Journal of .Mathematical Analysis and Applications 252 (2000) 495-517.

58. Demirci M., Gradation of being Fuzzy Function, Fuzzy Sets and Systems 119 (2001) 383-392.

59. Demirci M., Fundamentals of M-vague Algebra and M-Vague Arithmetic Operations, Int. J. Uncertainly, Fuzziness Knowledge-Based Systems 10, 1 (2002) 25-75.

60. Demirci M. and Recasens J., Fuzzy Groups, Fuzzy Functions and Fuzzy Equivalence Relations, Fuzzy Sets and Systems 144 (2004) 441-458.

61. Demirci M., Product Elements in Vague Semigroups and Their Implementations in Vague Arithmtic, Fuzzy Sets and Systems 156 (2005) 93-123.

62. Klement E.P., Mesiar R. and Pap E., Triangular Norms. Position Paper I: Basic Analytical and Algebraic Properties, Fuzzy Sets and Systems 143(2004) 5-26.

63. Klement E.P., Mesiar R. and Pap E., Triangular Norms. Position Paper II: General Constructions and Parameterized Families, Fuzzy Sets and Systems 145 (2004) 411-438.

64. Klement E.P., Mesiar R. and Pap E., Triangular Norms. Position Paper III: Continuous t-Norms, Fuzzy Sets and Systems 145 (2004) 439-454.

65. Pap, E.; Mesiar, R. and Klement, E. P.; Triangular Norms, London, 2000

66. Birkhoff, G., Lattice Theory, American Mathematical society, Providence, Rhode Island 1967

67. Mordeson, J.N. and Malik, D. S., Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1998

68. Hungerford T., Algebra, Springer-Verlag, Newyork USA 1974

69. Kaufmann A., Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, Volume I, Academic Press, London, 1975

70. Gang C., Properties of the T-fuzzy factor groups, Fuzzy Sets and Systems 99 (1998) 187-192.

ÖZGEÇMİŞ

Ümit TERZİOĞLU 07.01.1977 yılında Rize'de doğdu. İlköğrenimini Rize İstiklal İlkokulunda okudu. Orta öğrenimini Rize Anadolu Lisesinde tamamladı. 1995 yılında girdiği Mimar Sinan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 1999 yılında bitirdi. 1999 yılında KTÜ Rize Fen Edebiyat Fakültesine araştırma görevlisi olarak atandı. Aynı yıl KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. 2002 yılında yüksek lisansını bitirip aynı Enstitüde Doktora programına başladı. 17 Mart 2006 tarihi itibariyle Rize Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesinde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

Ümit TERZİOĞLU 2007 yılında evlendi. Artık DENİZ soyadını kullanmaktadır.