KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ FABER VE GENELLEŞTİRİLMİŞ FABER-LAURENT SERİLERİNİN BELİRLİ TİPTEN FONKSİYONLARA YAKINSAKLIĞI

İmdat İŞCAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Doktor"
Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarihi : 10.01.2003
Tezin Savunma Tarihi : 25.03.2003

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Yusuf AVCI
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Yusuf AYVAZ

Trabzon 2003

ÖNSÖZ

"Genelleştirilmiş Faber ve Genelleştirilmiş Faber-Laurent Serilerinin Belirli Tipten Fonksiyonlara Yakınsaklığı" adlı bu çalışma, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda "Doktora Tezi" olarak hazırlanmıştır.

Konunun seçilmesinde ve çalışma süresince özendirici ve yapıcı tutumu ile destek olan ve çalışmanın planlanmasında ve değerlendirilmesinde yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ'a en içten duygularımla teşekkür ederim.

Tezin hazırlık aşamasında, danışman hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ'un yöneticisi olduğu "96.111.003.4" kod no'lu projeden bir parça destek alınmıştır, bu nedenle K.T.Ü. Araştırma Fonu'na ve ayrıca bu zamana kadar bana maddi ve manevi her desteği veren başta sevgili ailem olmak üzere, şu ana kadar emeği geçmiş tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İmdat İŞCAN
Trabzon, Ocak 2003

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Tez iki bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde yaklaşım teorisinin temel teoremleri , Bergman uzayı, Yarıkonform dönüşümler, yarıkonform eğriler, Faber polinomları ve Faber-Laurent serileri ile ilgili bazı tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde ise G kompleks düzlemde bir noktadan daha fazla nokta içeren, ∞ noktasını içeren ve genişletilmiş kompleks düzlemde basit bağlantılı olan CG bütünleyenine sahip bir kontinyum, $\varphi : CG \to C\overline{D}(0,1)$, $\varphi(\infty)=\infty$ ve $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)/z>0$ koşullarını sağlayan konform dönüşüm, G_R (R>1), $\Gamma_R=\{z\in\mathbb{C}:|\varphi(z)|=R\}$ seviye eğrileri ile sınırlı sonlu bölge olmak üzere, $A^2(G_R)$ uzayına ait olan fonksiyonlara 1<r<R için $\overline{G}_r$ üzerinde G nin Faber polinomlarının genelleştirilmiş Faber serisi ile yaklaşım problemi incelendi ve bu yaklaşım ile ilgili bazı değerlendirmeler verildi. Daha sonra G, jordan eğrileri ile sınırlı iki bağlantılı sonlu bir bölge, $C\overline{G}=B_1\cup B_2$, $\infty\in B_1$, $\Gamma_k=\partial B_k$ (k=1,2), $\varphi_1 : B_1 \to C\overline{D}(0,1)$, $\varphi_1(\infty)=\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi_1(z)/z>0$ koşullarını sağlayan konform dönüşüm, $\varphi_2 : B_2 \to C\overline{D}(0,1)$, $z_o\in B_2$ olduğunda $\varphi_2(z_o)=\infty$, $\lim\limits_{z\to z_o}(z-z_o)\varphi_2(z)>0$ koşullarını sağlayan konform dönüşüm, $\Gamma_{k,R}:=\{z:|\varphi_k(z)|=R\}$, k=1,2, ve $\Gamma_{k,R}$ eğrileri ile sınırlanan sınırlı iki bağlantılı bölge G_R olmak üzere G nin genelleştirilmiş Faber-Laurent serisi tanımlandı ve bu serinin G_R nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsak olduğu ve düzgün yakınsadığı fonksiyonun G_R de alınan her kapalı eğri üzerinde integrali sıfır olan analitik fonksiyonların $H_0(G_R)$ uzayına ait olduğu gösterildi ve Dveirin integral gösterimleri kullanılarak $H_0(G_R)$ deki fonksiyonlar için genelleştirilmiş Faber-Laurent serilerinin G_R nin kompakt alt kümeleri üzerinde fonksiyona düzgün yakınsak olduğu ispatlandı.

Anahtar kelimeler: Faber Polinomu, Seviye Eğrisi, Genelleştirilmiş Faber Serisi, Genelleştirilmiş Faber-Laurent Serisi.

SUMMARY

Convergent to Specific Type Functions of Generalized Faber and Generalized Faber-Laurent Series

The thesis consists of two chapters.

In the first chapter, some definitions and theorems related to basis theorems of approximation theory, Bergman spaces, quasiconformal mappings, quasiconformal curves, Faber polynomials and Faber-Laurent series are given.

In the second chapter, if G is a continium on the complex plane containing more than one point, and the complement of which with respect to the extended plane being simply connected and containing the point ∞, $\varphi: CG \to C\overline{D}(0,1)$ is a conformal mapping having conditions $\varphi(\infty)=\infty$ and $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)/z>0$, and G_R (R>1) is the finite domain bounded by $\Gamma_R=\{z\in\mathbb{C}:|\varphi(z)|=R\}$ contour line then the approximation problems to the functions of $A^2(G_R)$ by generalized Faber series of Faber polynomials of G on $\overline{G}_r$, 1<r<R, are examined and some estimates related to this approximation are given. Afterwards, if G is a double connected domain bounded by Jordan curves, $C\overline{G}=B_1\cup B_2$, $\infty\in B_1$, $\Gamma_k=\partial B_k$ (k=1,2), $\varphi_1: B_1\to C\overline{D}(0,1)$ is a conformal mapping having conditions $\varphi_1(\infty)=\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi_1(z)/z>0$, for $z_o\in B_2$, $\varphi_2: B_2\to C\overline{D}(0,1)$ is a conformal mapping having conditions $\varphi_2(z_o)=\infty$, $\lim\limits_{z\to z_o}(z-z_o)\varphi_2(z)>0$, $\Gamma_{k,R}:=\{z:|\varphi_k(z)|=R\}$, k=1,2; R>1, and G_R is the finite domain bounded by $\Gamma_{k,R}$ contour lines then generalized Faber-Laurent series for G is defined, this series is uniformly convergent on compact subsets of G_R and the function which is uniformly convergent, belongs to $H_0(G_R)$, the space of functions having zero integral on any closed curves settled in G_R. Finally using Dveirin's integral representations for the functions in $H_0(G_R)$, generalized Faber-Laurent series are defined and it is proved that the generalized Faber-Laurent series of a function $f\in H_0(G_R)$ is uniformly convergent to f on compact subsets of G_R.

Key Words: Faber Polynomials, Contour Line, Generalized Faber Series, Generalized Faber-Laurent Series.

SEMBOLLER DİZİNİ

$a \in A$	a noktası A kümesinin elemanıdır
$a \notin A$	a noktası A kümesinin elemanı değildir
$A \subset B$	A kümesi B kümesinin altındadır
$A \supset B$	A kümesi B kümesini kapsar
$A(\overline{G})$	$= \{ f : f, \text{G de analitik}, \overline{G} \text{ de sürekli} \}$
$A^2(G)$	$= \left\{ f : f \in H(G) \text{ ve } \Vert f \Vert^2_{A^2(G)} := \iint\limits_G \vert f(z) \vert^2 d\sigma_z < \infty \right\}$
$A \backslash B$	A kümesinin B kümesinden farkı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_\infty$	$= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
CG	$= \mathbb{C}_\infty \backslash G$
$d(K_1, K_2)$	K_1 kümesinin K_2 kümesine uzaklığı
$D(z_o, R)$	$= \{ z \in \mathbb{C} : \vert z - z_o \vert < R,\ z_o \in \mathbb{C},\ R > 0 \}$
$E(\gamma)$	γ eğrisi ile sınırlı sonsuz bölge
f'	f fonksiyonunun türevi
$F_n(z)$	sınırlı bölgeler için Faber polinomu
$F_{2,n}\left(\dfrac{1}{z - z_o}\right)$	Sınırsız bölgenin Faber polinomu
$\overline{G}$	G kümesinin kapanışı
$H(G)$	$= \{ f : f, \text{G de analitik} \}$
$H_0(G_R)$	$= \left\{ f : f \in H(G_R) \text{ ve } G_R \text{ de alınan her kapalı C eğrisi için } \int\limits_C f(z)dz = 0 \right\}$
$I(\gamma)$	γ eğrisi ile sınırlı sonlu bölge
$K_1 \times K_2$	$= \{ (z, w) : z \in K_1,\ w \in K_2 \}$
ℓ_γ	γ eğrisinin uzunluğu
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi

∂G	G kümesinin sınırı
Γ_R	R>1 yarıçaplı seviye eğrisi
$\forall$	her
$:=$	tanım olarak eşittir
$\wp_n$	derecesi n yi aşmayan polinomlar kümesi
$\exists$	vardır, mevcuttur

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Yaklaşım Teorisinin Temel Teoremleri

1885 yılında K. Weierstrass sonlu [a,b] aralığı üzerinde sürekli olan herhangi bir $f(x)$ fonksiyonuna keyfi küçük hata ile cebirsel polinomlarla yaklaşılabileceğine dair teoremi, yani; $\forall\ \varepsilon > 0$ sayısı için bir cebirsel $P_n(x)$ polinomunun $\forall x \in [a,b]$ için

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde mevcut olduğunu ispatladı.

Kompleks düzlemde $D(z_\circ, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_\circ| < R,\ R > 0\}$ açık dairesinde analitik olan keyfi bir f fonksiyonu ele alındığında, bu fonksiyona

$$T_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_o)}{k!}(z - z_\circ)^k$$

Taylor polinomu ile $D(z_\circ, R)$ dairesinin kompakt alt kümeleri üzerinde yaklaşmak mümkündür.

Burada akla gelen doğal soru; herhangi bir bölgede analitik olan fonksiyonlara, bölgenin K kompakt alt kümeleri üzerinde polinomlar dizisi ile yaklaşmak mümkün müdür?

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bölgesi ele alındığında, $f(z) := \frac{1}{z}$ fonksiyonu $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da analitiktir, fakat bu fonksiyona $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ın kompakt alt kümeleri üzerinde $\{P_n(z)\}$ polinomlar dizisi ile yaklaşmak mümkün olsaydı, $C(0,1) := \{z \in \mathbb{C} : |z - 0| = |z| = 1\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kompakt alt kümesini ele aldığımızda,

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{z} dz = \lim_{n \to \infty} \int_{C(0,1)} P_n(z) dz$$

olur ve buradan da $2\pi i = 0$ çelişkisi ortaya çıkar. Dolayısıyla herhangi bir bölgede analitik olan fonksiyonlara, o bölgenin kompakt alt kümeleri üzerinde polinomlarla yaklaşmak her zaman mümkün değildir. Analitik fonksiyonlara yaklaşım problemi ile ilgili ilk sonuç 1885 yılında ispatlanan Runge teoremidir

Teorem 1 [Runge]: $K \subset \mathbb{C}$ kompakt bir küme, $f \in H(K) := \{f : f \text{ K da analitik}\}$ ve $P \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$ $(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$, $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ nın her bağlantılı bileşeninden yalnız bir nokta içeren bir alt küme olsun. Bu takdirde, $\forall\ \varepsilon > 0$ sayısı için kutup noktaları P de olan

$$\|f - R\|_\infty := \sup_{z \in K} |f(z) - R(z)| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir R(z) rasyonel fonksiyonu vardır[1].

Runge nin bu teoreminde $P = \{\infty\}$ alındığında polinomlarla yaklaşım ile ilgili aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 1: $K \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ bütünleyeni bağlantılı olan kompakt bir küme ve $f \in H(K)$ olsun. Bu takdirde, $\forall\ \varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|f - P\|_\infty < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir P(z) polinomu vardır[1].

Runge Teoreminin bu sonucu K kompakt kümesi üzerinde sürekli, K nın iç noktalarında analitik olan fonksiyonlara 1952 de Mergelyan tarafından genelleştirildi.

Teorem 2[S. N. Mergelyan]: $K \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ bütünleyeni bağlantılı olan bir kompakt küme ve f, K kümesi üzerinde sürekli ve $\overset{\circ}{K}$ de analitik olan bir fonksiyon ise $\forall\ \varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|f - P\|_\infty < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir P(z) polinomu vardır [1].

Bu tezde, Runge teoreminin bir uygulaması olarak, iki bağlantılı bir bölgede her kapalı eğri üzerinde integrali sıfır olan analitik fonksiyonlara Genelleştirilmiş Faber-Laurent Rasyonel fonksiyonları ile yaklaşım problemi ve belirli tipten bölgelerin Bergman uzaylarındaki analitik fonksiyonlara kompakt kümeler üzerinde Genelleştirilmiş Faber polinomları ile yaklaşımın derecesi incelenecektir. Bu amaçla bundan sonraki kısımlarda, Bergman uzayı ve özellikleri, Faber polinomları , Faber serileri ve Faber-Laurent serileri ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

1.2. Bergman Uzayı ve Özellikleri [2]

$G \subset \mathbb{C}$ keyfi bir bölge olmak üzere, G bölgesinde $\{G_n\}$ kapalı ve sınırlı bölgeler dizisini aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde bulabiliriz;

i) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $G_n \subset G$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $G_n \subset \overset{\circ}{G}_{n+1}$

iii) $\forall z \in G$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > N$ için $z \in G_n$ dir.

Bu durumda $f \in H(G)$ keyfi alınan bir fonksiyon ise

$$I_n = \iint_{G_n} |f(z)|^2 \, d\sigma_z$$

integralleri mevcuttur. $G_n \subset G_{n+1}$ olduğundan I_n artandır. Böylece $\lim_{n\to\infty} I_n$ mevcuttur (veya $+\infty$ dur) ve $\lim_{n\to\infty} \iint_{G_n} |f(z)|^2 \, d\sigma_z$ limiti i)-iii) koşullarını sağlayan $\{G_n\}$ dizilerinin seçiminden bağımsızdır.

$\lim_{n\to\infty} I_n = I < \infty$ olduğunu varsayalım. $\{B_n\}$, i)-iii) koşullarını sağlayan ikinci bir dizi olsun. Sabit bir B_n, yeteri kadar büyük k için G_k tarafından içerilir. Bu durumda

$$\iint_{B_n} |f(z)|^2 \, d\sigma_z \le \iint_{G_k} |f(z)|^2 \, d\sigma_z \le I$$

dir. Buradan $\lim_{n\to\infty} \iint_{B_n} |f(z)|^2 \, d\sigma_z = L \le I$ elde edilir. $\{B_n\}$ ve $\{G_n\}$ nin rolleri değiştirilirse $I \le L$ ve sonuç olarak I=L elde edilir.

Tanım 1: $G \subset \mathbb{C}$ keyfi bir bölge olmak üzere

$$A^2(G) := \left\{ f : f \in H(G) \text{ ve } \iint_G |f(z)|^2 \, d\sigma_z < \infty \right\}$$

uzayına G nin Bergman uzayı denir.

$f, g \in A^2(G)$ ise $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $\alpha f + \beta g \in A^2(G)$ dir. Dolayısıyla $A^2(G)$ bir lineer uzaydır.

$f, g \in A^2(G)$ için

$$f\overline{g} = \frac{1}{2}|f+g|^2 + \frac{i}{2}|f+ig|^2 - \frac{1+i}{2}|f|^2 - \frac{1+i}{2}|g|^2$$

olduğundan $\iint_G f(z)\overline{g}(z)d\sigma_z$ integrali mevcuttur ve $f,\ g \in A^2(G)$ için

$$\langle f,g\rangle := \iint_G f(z)\overline{g}(z)d\sigma_z$$

olarak tanımlanırsa, $\langle .,. \rangle$, $A^2(G)$ üzerinde bir iç çarpımdır. $A^2(G)$, bu iç çarpıma göre bir Hilbert uzayıdır ve bir $f\in A^2(G)$ için bu iç çarpımın doğurduğu norm

$$\|f\|_{A^2(G)} := \left(\langle f,f\rangle\right)^{1/2} = \left(\iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z\right)^{\frac{1}{2}}$$

dir.

Teorem 3: $f \in A^2(G)$ ve $K \subset G$ kompakt bir alt küme olsun. Bu taktirde; $\forall z \in K$ için

$$|f(z)| \le \frac{\|f\|_{A^2(G)}}{\sqrt{\pi}\, d(K,\partial G)} \tag{1}$$

dir. Burada $d(K,\partial G) := \inf\left\{|z-w| : z \in K \text{ ve } w \in \partial G\right\}$.

İspat: $z_o \in K$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. $f \in H(G)$ olduğundan, $o < \rho < d(z_o,\partial G)$ olmak üzere $f(z)$ fonksiyonunun

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_o)^k, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_o|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_o)^{k+1}}dz$$

Taylor serisi $\overline{D}(z_o,\rho)$ kapalı dairesinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Bu durumda,

$$\iint_{\overline{D}(z_o,\rho)} |f(z)|^2 d\sigma_z = \int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta}\right|^2 r\,d\theta\,dr = 2\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|^2}{2(k+1)}\rho^{2(k+1)}$$

dir. Böylece,

$$\|f\|^2_{A^2(G)} = \iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z \ge \iint_{\overline{D}(z_o,\rho)} |f(z)|^2 d\sigma_z \ge \pi|a_o|^2\rho^2 = \pi|f(z_o)|^2\rho^2$$

$$\lim_{\rho\to d(z_o,\partial G)^-} \pi|f(z_o)|^2\rho^2 \le \|f\|^2_{A^2(G)}$$

$$|f(z_o)| \le \frac{\|f\|_{A^2(G)}}{\sqrt{\pi}d(z_o,\partial G)} \le \frac{\|f\|_{A^2(G)}}{\sqrt{\pi}d(K,\partial G)}$$

$z_o \in K$ keyfi olduğundan $\forall z \in K$ için (1) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3 ün sonucu olarak , $\|.\|_{A^2(G)}$ normuna göre bir f fonksiyonuna polinomlarla yaklaşmak mümkün ise bu polinomlar aynı zamanda G nin kompakt alt kümeleri üzerinde f fonksiyonuna $\|.\|_\infty$ normuna göre yakınsaktır. Ancak, bunun tersi her zaman doğru değildir.

Teorem 4 [Carleman-Farell]: G, C eğrisi ile sınırlı, basit bağlantılı bir bölge olsun. $G \cup C$, bütünleyeninin sınırı tamamen C olan bir tek bölge ise, polinomlar kümesi $A^2(G)$ uzayında yoğundur.

1.3. Konform Eşdeğerlilik ve Riemann Dönüşüm Teoremi

Tanım 2: G_1 ve G_2 kompleks düzlemde iki bölge ve f: $G_1 \to G_2$ bire-bir, örten ve analitik bir fonksiyon ise f dönüşümüne bir konform dönüşüm denir.

G_1 bölgesini G_2 bölgesine resmeden bir konform dönüşüm bulunabilirse ; G_1 bölgesi G_2 bölgesine konform eşdeğerdir, denir. G_1 bölgesi G_2 bölgesine konform eşdeğer ise ters dönüşüm teoremi ne göre G_2 bölgesi de G_1 bölgesine konform eşdeğerdir[1].

Teorem 5 [Riemann Dönüşüm Teoremi] : G, genişletilmiş kompleks düzlemde sınırı bir noktadan daha fazla nokta içeren basit bağlantılı bir bölge ve $z_o \in G$, G nin keyfi sonlu bir noktası ise G yi D(0,1) açık birim dairesine konform ve tek değerli olarak dönüştüren ve $\varphi(z_o) = 0$, $\varphi'(z_o) > 0$ koşullarını sağlayan bir tek $\varphi: G \to D(0,1)$ konform dönüşümü vardır [3].

Teorem 6 [Schwarz Lemması] : $f \in H\big(D(0,R)\big)$, R>0, $f(0)=0$ ve $\forall z \in D(0,R)$ için

$$|f(z)| \leq M < \infty$$

olsun. Bu taktirde $\forall z \in D(0,R)$ için

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z| \tag{2}$$

dir ve ayrıca

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R} \tag{3}$$

dir. $z \neq 0$ için (2) de veya (3) de eşitlik olması için gerekli ve yeterli koşul $f(z)$ nin $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(z)=\frac{M}{R}e^{i\alpha}z$$

şeklinde bir lineer tam fonksiyon olmasıdır [4].

Sonuç 2: G, kompleks düzlemde bir noktadan daha fazla nokta içeren, $\mathcal{C}G:=\mathbb{C}_\infty\setminus G$ bütünleyeni genişletilmiş kompleks düzlemde basit bağlantılı ve ∞ noktasını içeren, bir kontinyum, ise $\varphi(\infty)=\infty$ ve $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}>0$ koşullarını sağlayan bir tek $\varphi:\mathcal{C}G\to\mathcal{C}\overline{D}(0,1)$ konform ve tek değerli dönüşümü vardır.

İspat: $z_0\in G$ sabit bir nokta olsun.

$$\eta:\mathcal{C}G\to\mathbb{C},\ \eta(z):=\frac{1}{z-z_0}$$

dönüşümü $\mathcal{C}G$ basit bağlantılı bölgesini $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde basit bağlantılı bir $B:=\eta(\mathcal{C}G)$ bölgesine resmeden bir konform dönüşümdür ve $\eta(\infty)=0$ dır. Diğer taraftan Riemann dönüşüm teoremine göre, B yi $D(0,1)$ açık birim dairesine dönüştüren ve $\psi(0)=0$, $\psi'(0)>0$ koşulllarını gerçekleyen bir tek $\psi:B\to D(0,1)$ konform dönüşümü vardır. $\mu:D(0,1)\to\mathcal{C}\overline{D}(0,1)$, $\mu(0)=\infty$ ve $t\neq0$ için $\mu(t)=\frac{1}{t}$, dönüşümü konform olduğundan ;

$$\varphi:=\mu\circ\psi\circ\eta:\mathcal{C}G\to\mathcal{C}\overline{D}(0,1),\quad \varphi(z)=\frac{1}{\psi\left(\frac{1}{z-z_0}\right)},$$

dönüşümü konformdur ve $\varphi(\infty)=\infty$ ve $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}>0$ koşullarını sağlar. Şimdi bu konform dönüşümün tekliğini gösterelim. $\phi:\mathcal{C}G\to\mathcal{C}\overline{D}(0,1)$ dönüşümü

$$\phi(\infty)=\infty,\ \lim_{z\to\infty}\frac{\phi(z)}{z}>0,$$

koşullarını sağlayan başka bir dönüşüm olsun. Bu taktirde,

$$\lambda:D(0,1)\to D(0,1),\ \lambda(w):=\frac{1}{\varphi\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{w}\right)\right)}$$

fonksiyonu birim dairesinde analitiktir ve $\lambda(0)=0$,

$$\lambda'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda(h)-\lambda(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h\varphi\left(\phi^{-1}\left(\frac{1}{h}\right)\right)}=\lim_{h\to\infty}\frac{h}{\varphi\left(\phi^{-1}(h)\right)}$$

$$=\lim_{h\to\infty}\frac{\phi\left(\phi^{-1}(h)\right)}{\varphi\left(\phi^{-1}(h)\right)}=\lim_{h\to\infty}\frac{\phi\left(\phi^{-1}(h)\right)/\phi^{-1}(h)}{\varphi\left(\phi^{-1}(h)\right)/\phi^{-1}(h)}>0$$

dir. Dolayısıyla Schwarz Lemmasına göre

$$|\lambda(w)|\leq|w|$$

yani, $\forall z\in CG$ için

$$|\phi(z)|\leq|\varphi(z)|$$

elde edilir. Buraya kadar olan işlemlerde φ ile ϕ fonksiyonlarının rolleri değiştirilirse,

$$|\varphi(z)|\leq|\phi(z)|$$

ve sonuç olarak bu iki eşitsizlikten,

$$|\varphi(z)|=|\phi(z)|$$

veya denk olarak,

$$|\lambda(w)|=|w|$$

elde edilir.Tekrar Schwarz lemması uygulanırsa,

$$\lambda(w)=e^{i\alpha}w$$

sonucu çıkar. Fakat $\lambda'(0)>0$ olduğundan $e^{i\alpha}=1$, yani

$$\lambda(w)=w$$

dir. Sonuç olarak $\forall z\in CG$ için

$$\phi(z)=\varphi(z)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3: G, kompleks düzlemde sınırı bir jordan eğrisi olan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0\in G$ ise

$$\varphi(z_0)=\infty\,,\quad \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\varphi(z)>0$$

koşullarını sağlayan bir tek $\varphi: G\to C\overline{D}$ konform ve tek değerli dönüşümü vardır.

İspat: sonuç 2 nin ispatına benzer şekilde Riemann dönüşüm teoremi kullanılarak kolayca ispatlanır.

1.4. Yarıkonform Dönüşümler ve Yarıkonform Eğriler

Tanım 3: A, B$\subset\mathbb{C}$ iki bölge f:A$\to$B, $\forall z\in A$ için

$$J_f(z) := |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 > 0$$

şartını sağlayan sürekli türevlenebilir bir homeomorfizm olsun.

$$\operatorname*{Sup}_{z\in A} \frac{|f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|} \leq K < +\infty$$

ise f dönüşümüne A üzerinde tanımlı bir K-yarıkonform dönüşüm ve K$\geq$1 sayısına ise f nin yarıkonformluk katsayısı denir [5].

Tanımdan görülüyor ki; f, A üzerinde K-yarıkonform ve

$$k := \frac{K-1}{K+1}$$

ise $\forall z\in A$ için

$$\frac{|f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)|} \leq k < 1$$

dir. Ayrıca yarıkonform dönüşümler için aşağıdaki özellikler geçerlidir;

1. 1-yarıkonform dönüşüm konformdur ve tersi de doğrudur.

2. Bir K_1-yarıkonform dönüşüm ve K_2-yarıkonform dönüşümün bileşkesi K_1 K_2-yarıkonform dönüşümdür.

3. Bir f, K-yarıkonform dönüşümünün f^{-1} ters dönüşümü K-yarıkonformdur[6].

Bundan sonra, aksi söylenmedikçe tüm yarıkonform dönüşümlerin K-yarıkonform olduğu kabul edilecektir.

Tanım 4: γ kompleks düzlemde bir jordan eğrisi olsun. γ eğrisi, kompleks düzlemde tanımlı bir yarıkonform dönüşüm altında bir çemberin resmi ise; γ eğrisine bir yarıkonform eğri denir [7].

Tanım 5: γ, kompleks düzlemde bir jordan eğrisi; I(γ), γ jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bölge; E(γ), γ jordan eğrisi ile sınırlı sonsuz bölge ve y: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, I(γ) yı E(γ) ya, E(γ) yı I(γ) ya dönüştüren ve $\forall z\in[\gamma]$ için y(z)=z koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. $\bar{y}$: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dönüşümü yarıkonform ise; y dönüşümüne γ eğrisine bir yarıkonform yansıma denir [6]. Bundan sonra aksi belirtilmedikçe bir γ eğrisine göre yarıkonform yansımayı $y(\gamma,.)$ ile göstereceğiz.

Önerme 1: Γ, kompleks düzlemde verilen bir jordan eğrisi olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktirler;

i) Γ yarıkonform bir eğridir.

ii) G_i , i=1,2, ler $\mathbb{C}_\infty \backslash \Gamma$ nın bağlantılı bileşenleri ve φ_i, G_i, i=1,2, nin $\mathbb{C}_\infty \backslash D(0,1)$ üzerine bir konform dönüşümü ise φ_i düzlemin kendi üzerine bir yarıkonform homeomorfizmi olarak genişletilebilir.

iii) Γ eğrisine göre yarıkonform yansıma mevcuttur [6].

Uyarı 1: Farzedelim ki Γ bir K- yarıkonform eğri olsun. Şayet Γ bir $f:\mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ yarıkonform homeomorfizm altında bir çemberin resmi ise genelliği kaybetmeksizin f nin birim dairenin dışını Γ eğrisinin dışına dönüştürdüğünü kabul edebiliriz (aksi durumda $f_1(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ dönüşümünü ele alınız).

$$G_1 = I(\Gamma)\,;\, G_2 = C\bar{G}_1 := \mathbb{C}_\infty \backslash \bar{G}_1$$

alalım. Bu durumda Γ eğrisine göre bir yarıkonform yansıma

$$y(\Gamma,.) = y = f \circ j \circ f^{-1},\ j(z) = \frac{1}{\bar{z}},$$

şeklinde seçilebilir. Bu durumda $\bar{y}$ dönüşümü düzlemin K^2-yarıkonform homeomorfizması olacaktır. Sonuç olarak, $z=\psi(w)$, $C\bar{D}(0,1)$ bölgesinin G_2 üzerine $\psi(\infty)=\infty$, $\psi'(\infty)>0$ koşulları altındaki Riemann dönüşüm fonksiyonu ise

$$F(w) = \begin{cases} \psi(w), & w \in C\bar{D} \\ y \circ \psi \circ j, & w \in D \end{cases}$$

homeomorfizmi $F(\infty)=\infty$, $F'(\infty)>0$ koşullarını sağlayan bir K^2-yarıkonform dönüşümdür[6].

Teorem 7: G, genişletilmiş kompleks düzlemde ∂G sınırı parça-parça sürekli türevlenebilir jordan eğrisi olan basit bağlantılı bir bölge ve $f(z)$, $\bar{G}$ üzerinde tanımlı sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. ∂G pozitif yönlendirilirse

$$2i\iint_G f_{\bar{z}}(z)d\sigma_z = \begin{cases} \int_{\partial G} f(z)dz, & G \text{ sonlu bölge ise} \\ -\int_{\partial G} f(z)dz, & G \text{ sonsuz bölge ise} \end{cases}$$

dir[8].

Teorem 8: $G\subset\mathbb{C}$, yarıkonform bir eğri ile sınırlı, sonlu bir bölge ve $\overline{y}(\partial G,.)$ dönüşümü, K-yarıkonform ise;

$$\iint_{CG}\left|y_{\bar{\varsigma}}(\partial G,\varsigma)\right|^2 d\sigma_\varsigma \le \frac{\text{AlanG}}{1-k^2}$$

dir. Burada $k=\dfrac{K-1}{K+1}$ dir[9].

1.5. Faber Polinomları

Tanım 6: G ve $\varphi: CG\to C\overline{D}(0,1)$ sonuç 2 nin koşullarını sağlasın. $n\in\mathbb{N}$ ise $\lim_{z\to\infty}\dfrac{\varphi(z)}{z}>0$ olduğundan $\lim_{z\to 0} z^n\varphi^n\left(\dfrac{1}{z}\right)>0$ dır. O halde z=0 noktası, $\varphi^n\left(\dfrac{1}{z}\right)$ fonksiyonunun n. mertebeden bir kutup yeridir ve yeteri kadar küçük $\varepsilon>0$ sayısı için $\Omega(0;0,\varepsilon):=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z|<\varepsilon\}$ halkasındaki Laurent serisi, $a_n^{(n)}\neq 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k{}^n}{z^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{nk}z^k$$

şeklinde olup; $\forall z\in\Omega(0;0,\varepsilon)$ için

$$\varphi^n\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k{}^n}{z^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{nk}z^k$$

dir. Bu eşitlikten $\forall z\in\Omega(0;\frac{1}{\varepsilon},+\infty)=\left\{z\in\mathbb{C}:\frac{1}{\varepsilon}<|z|<+\infty\right\}$ için

$$\varphi^n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k{}^{(n)}z^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{nk}}{z^k} \tag{4}$$

elde edilir ve sağ taraftaki seri $\Omega(0;\frac{1}{\varepsilon},+\infty)$ kümesinde $\varphi^n(z)$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak, yani $\Omega(0;\frac{1}{\varepsilon},+\infty)$ nın kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsaktır.

$$F_n(z):=a_n{}^{(n)}z^n+\ldots+a_1{}^{(n)}z+a_0{}^{(n)}$$

polinomuna G nin n. dereceden Faber polinomu denir[3, 10, 11, 12].

Tanım 7: $\varphi: CG \to C\overline{D}(0,1)$ sonuç 2 nin koşullarını sağlayan konform dönüşüm, $n \in \mathbb{N}$ ve $F_n(z)$, G nin n. dereceden Faber polinomu olsun.

$\omega_n : CG \to \mathbb{C}$, $\omega_n(z) := \varphi^n(z) - F_n(z)$,

fonksiyonuna φ^n fonksiyonunun esas kısmı denir. Açık olarak görülüyor ki; ω_n fonksiyonu CG bölgesinde analitiktir ve (4) e göre ∞ noktası ω_n in en az 1. mertebeden bir sıfır yeridir. Öte yandan ω_n nin ∞ noktası komşuluğundaki Laurent serisi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{nk}}{z^k}$ olup; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{nk}}{z^k}$ serisi yeteri kadar büyük r>0 sayıları için $\Omega(0; r, +\infty)$ halkasında ω_n ye hemen hemen düzgün yakınsaktır ve $\forall z \in \Omega(0; r, +\infty)$ için

$$\omega_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{nk}}{z^k}$$

dir. Ayrıca $\forall z \in CG$ için

$$F_n(z) = \varphi^n(z) - \omega_n(z)$$

dir.

Bundan sonraki kısımlarda aksi belirtilmedikçe $\varphi: CG \to C\overline{D}(0,1)$ ile $\varphi(\infty) = \infty$ ve $\lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$ koşullarını sağlayan konform dönüşümü ve ψ ile onun φ^{-1} tersi gösterilecektir.

Açık olarak, $\lim_{w\to\infty} \frac{\psi(w)}{w} > 0$ ve $\psi(\infty)=\infty$ olup; $\psi : C\overline{D}(0,1) \to CG$ dönüşümü konformdur. Diğer taraftan φ ve ψ dönüşümleri sırası ile $\overline{CG}$ ve $CD(0,1)$ üzerine sürekli genişletilebilir[6].

Örnek 1: $G := \overline{D}(z_o, R)$, $z_o \in \mathbb{C}$, R>0, alalım.

$$\varphi: CG \to C\overline{D}(0,1),\ w = \varphi(z) = \frac{z - z_o}{R}$$

sonuç 2 nin koşullarını sağlar. Böylece G nin Faber polinomları

$$F_n(z) = \frac{1}{R^n}(z - z_o)^n, \quad n = 0,1,2,...,$$

dir.

Tanım 8: R>1 olmak üzere $C\overline{D}(0,1)$ de, 0 merkezli R yarıçaplı $C(0,R)$ çemberinin, CG bölgesindeki

$$\Gamma_R := \psi(C(0,R)) := \{z \in CG : |\varphi(z)| = R\}$$

resmine R yarıçaplı bir seviye eğrisi denir. $C(0,R)$ çemberi pozitif yönlendirilirse ψ konform dönüşüm olduğundan Γ_R seviye eğrisi de pozitif yönlüdür. Diğer taraftan $R_2>R_1>1$ ise $\Gamma_{R_1} \subset I(\Gamma_{R_2})$ dir[11].

Teorem 9: $F_n(z)$, G nin n. dereceden Faber polinomu ve R>1 olsun.Bu taktirde;

i) $z\in I(\Gamma_R)$ ise

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{\varphi^n(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma \tag{5}$$

ii) $z \in E(\Gamma_R)$ ise

$$F_n(z) = \varphi^n(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{\varphi^n(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma \tag{6}$$

dir[13].

Teorem 10: R>1 ve $z\in I(\Gamma_R)$ ise $\forall w \in C\overline{D}(0,R)$ için

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k(z)}{w^{k+1}} \tag{7}$$

dir ve $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k(z)}{w^{k+1}}$ serisi $I(\Gamma_R)\times C\overline{D}(0,R)$ de hemen hemen düzgün yakınsaktır.

İspat: $z\in I(\Gamma_R)$ ise $\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z}$ fonksiyonu $C\overline{D}(0,R)$ de analitik ve w=0 noktası $\frac{\psi'(1/w)}{\psi(1/w)-z}$ fonksiyonunun birinci mertebeden sıfır yeri olduğundan, $\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z}$ nin ∞ noktasının bir komşuluğundaki Laurent serisi $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k(z)}{w^{k+1}}$ şeklinde olup; bu seri bu komşulukta $\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z}$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır. $\forall w \in C\overline{D}(0,R)$ için

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k(z)}{w^{k+1}}$$

olduğundan, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{w^n \psi'(w)}{\psi(w)-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^n A_k(z)}{w^{k+1}} \tag{8}$$

dir. R′>R sayısı yeteri kadar büyük seçilirse (8) in sağ tarafındaki seri

$$C(0,R') := \{w : |w| = R'\} \subset C\overline{D}(0,R)$$

üzerinde düzgün yakınsak olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R')} \frac{w^n \psi'(w)}{\psi(w)-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R')} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^n A_k(z)}{w^{k+1}} dw$$

eşitliğinden , $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$F_n(z) = A_n(z)$$

ve bunun sonucunda (7) elde edilir.

$K \subset I(\Gamma_R) \times C\overline{D}(0,R)$ herhangi bir kompakt alt küme olsun. K_1 ve K_2 sırasıyla K nın $\pi_1 : I(\Gamma_R) \times C\overline{D}(0,R) \to \mathbb{C}$, $\pi_1(z,w) := z$ ve $\pi_2 : I(\Gamma_R) \times C\overline{D}(0,R) \to \mathbb{C}$, $\pi_2(z,w) := w$ izdüşümleri altındaki resimleri olsun. K kompakt, π_1 ve π_2 izdüşümleri sürekli olduklarından K_1 ve K_2 kompakt olup $K \subset K_1 \times K_2$ dir.

$$r = d(K_1, \Gamma_R) := \inf\{|z-\varsigma| : z \in K_1, \varsigma \in \Gamma_R\}$$

ve

$$R_1 := d(0, K_2) := \inf\{|w| : w \in K_2\}$$

ise r>0 ve $1 \le R < R_1$ dir. $\forall (z,w) \in K$ için

$$\left|\frac{F_k(z)}{w^{k+1}}\right| = \left|\frac{1}{w^{k+1}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{\varphi^k(z)}{\varsigma - z}d\varsigma\right)\right| \le \frac{\ell_{\Gamma_R}}{2\pi r R_1}\left(\frac{R}{R_1}\right)^k$$

elde edilir, burada ℓ_{Γ_R}, Γ_R eğrisinin uzunluğudur. $0 < \frac{R}{R_1} < 1$ olduğundan Weierstrass M-testine göre (7) serisi $I(\Gamma_R) \times C\overline{D}(0,R)$ de mutlak ve hemen hemen düzgün yakınsaktır.

Sonuç 4: R>1 ve $z \in I(\Gamma_R)$ ise $\forall w \in C\overline{D}(0,R)$ için

$$\frac{\psi'(w)}{(\psi(w)-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k'(z)}{w^{k+1}} \tag{9}$$

dir ve $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k'(z)}{w^{k+1}}$ serisi $I(\Gamma_R) \times C\overline{D}(0,R)$ de mutlak ve hemen hemen düzgün yakınsaktır.

Teorem 11: $\left\{\sqrt[n]{|F_n(z)|}\right\}$ dizisi CG de $|\varphi(z)|$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır[13].

Tanım 9: G sonuç 2 de verilen kontinyum olsun. $\{F_n(z)\}$, G nin Faber polinomları dizisi ve $\{a_n\}$ bir kompleks sayı dizisi ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z)$$

serisine G nin bir Faber serisi denir[12].

Teorem 12: $f \in H(G_R)$, $G_R := I(\Gamma_R)$, $1<r<R$, ise $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$a_k(f) = -\frac{1}{\pi} \iint_{CG_r} f\left(y(\Gamma_r,\varsigma)\right) \frac{\partial y(\Gamma_r,\varsigma)}{\partial \overline{\varsigma}} \frac{\varphi'(\varsigma)}{\varphi^{k+1}(\varsigma)} d\sigma_\varsigma$$

sayıları r den bağımsızdır[13].

Teorem 13: $f \in H(G_R)$, $G_R := I(\Gamma_R)$ ve $1<R_1<R$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n(f) := -\frac{1}{\pi} \iint_{CG_{R_1}} f\left(y(\Gamma_{R_1},\varsigma)\right) \frac{\partial y(\Gamma_{R_1},\varsigma)}{\partial \overline{\varsigma}} \frac{\varphi'(\varsigma)}{\varphi^{n+1}(\varsigma)} d\sigma_\varsigma$$

ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) F_n'(z)$ serisi G_R nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsaktır.

ii.) $\{c_n\}$ bir kompleks sayı dizisi olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n F_n'(z)$ serisi G_R nin kompakt alt kümelerinde f ye düzgün yakınsak ise $\forall$ n=1,2,... için $c_n = a_n(f)$ dir.

iii.) f nin, Γ_R üzerinde kaldırılabilir olmayan en az bir ayrık singüler noktası varsa,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(f)|} = \frac{1}{R}$$

dir ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) F_n'(z)$ serisi $\overline{G}_R$ nin dışında ıraksaktır.

iv.) Tersine, $\{c_n\}$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{1}{R}<1$ şartını sağlayan bir kompleks sayı dizisi olsun.Bu taktirde $\sum_{n=1}^{\infty}c_nF_n'(z)$ serisi G_R nin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak, $\overline{G}_R$ nin dışında ıraksaktır ve $f(z):=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(f)F_n'(z)$ fonksiyonunun Γ_R üzerinde kaldırılabilir olmayan en az bir ayrık singüler noktası vardır[13].

1.6. Sonsuz Bölgelerin Faber Polinomu

Tanım 10: G, kompleks düzlemde sınırı bir jordan eğrisi olan basit bağlantılı bir bölge, $\infty\neq z_o\in G$ ve $\varphi_2 : G\to C\overline{D}(0,1)$,

$$\varphi_2(z_o)=\infty\ ,\quad \lim_{z\to z_o}(z-z_o)\varphi_2(z)>0$$

koşullarını sağlayan konform dönüşümü olsun. Bu durumda $n\in\mathbb{N}$ için

$$\lim_{z\to z_o}(z-z_o)^n\varphi_2{}^n(z)>0$$

dir. O halde $z=z_o$ noktası, $\varphi_2{}^n(z)$ fonksiyonunun n. mertebeden bir kutup yeridir ve dolayısıyla $b_n{}^{(n)}\neq 0$ olmak üzere $\forall z\in G\backslash\{z_o\}$ için

$$\varphi_2{}^n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k{}^{(n)}}{(z-z_o)^k}+g(z)$$

olacak şekilde $g\in H(G)$ fonksiyonu ve $b_k{}^{(n)}, k=1,2...,n$, sabitleri vardır. Bu eşitlikteki

$$F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right):=\frac{b_n{}^{(n)}}{(z-z_o)^n}+\frac{b_{n-1}{}^{(n)}}{(z-z_o)^{n-1}}+\ldots+\frac{b_1{}^{(n)}}{(z-z_o)} \tag{10}$$

rasyonel fonksiyonuna CG nin n. dereceden Faber polinomu denir[10].

Uyarı 2: Tanım 10 da verilen koşullar sağlansın.

$$\varsigma(z):=\frac{1}{z-z_o}$$

dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşüm ile CG bölgesi sonlu bir G^* bölgesine dönüşür. $F_n{}^*(z)$, G^* bölgesinin Faber polinomları olmak üzere CG nin $F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ n. dereceden Faber polinomu ile

$$F_n^*(\varsigma(z)) = F_n^*\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$$

polinomu benzer polinomlardır ve aynı özelliklere sahiptir[10].

Örnek 2: G=D(0,1) ve $a \in G$ keyfi sabit bir nokta olsun. Bu durumda,

$$\varphi_2(z) := \frac{1-\bar{a}z}{z-a}$$

ile tanımlı φ fonksiyonu için $\varphi_2 : D(0,1) \to C\bar{D}(0,1)$ konform ve

$$\varphi_2(a) = \infty, \quad \lim_{z\to a}(z-a)\varphi_2(z) = 1-|a|^2 > 0$$

dir. Buradan $\forall z \in D(0,1)\setminus\{a\}$ için

$$\varphi_2^{\,n}(z) = \left(\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right)^n = \left(\frac{1-|a|^2}{z-a} - \bar{a}\right)^n = \binom{n}{0}\frac{\left(1-|a|^2\right)^n}{(z-a)^n} + \binom{n}{1}\frac{\left(1-|a|^2\right)^{n-1}(-\bar{a})}{(z-a)^{n-1}}$$

$$+\ldots+\binom{n}{n-1}\frac{\left(1-|a|^2\right)(-\bar{a})^{n-1}}{(z-a)} + \binom{n}{n}(-\bar{a})^n$$

elde edilir. Bu durumda $CD(0,1)$ in Faber polinomu;

$$F_{2,n}\left(\frac{1}{z-a}\right) = \frac{\left(1-|a|^2\right)^n}{(z-a)^n} - n\bar{a}\frac{\left(1-|a|^2\right)^{n-1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + n(-\bar{a})^{n-1}\frac{\left(1-|a|^2\right)}{(z-a)}$$

dir. Burada özel halde a=0 olarak alırsak $CD(0,1)$ in Faber polinomunun

$$F_{2,n}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^n}$$

olduğunu görürüz.

Şimdi uyarı 2 deki gibi CG bölgesini

$$\varsigma(z) = \frac{1-\bar{a}z}{z-a}$$

dönüşümü ile $G^* = \bar{D}(0,1)$ bölgesine dönüştürürsek, G^* ın Faber polinomları $F_n^*(\varsigma) = \varsigma^n$ olduğundan, buradan

$$F_n^*\left(\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right) = \left(\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right)^n = F_{2,n}\left(\frac{1}{z-a}\right) + (-\bar{a})^n$$

elde ederiz. Buradan da görüldüğü üzere $F_n^*\left(\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right)$ ve $F_{2,n}\left(\frac{1}{z-a}\right)$ polinomları bir sabit kadar fark etmektedir.

Tanım 11: R>1 ve $\psi_2 := \varphi_2^{-1}$ olmak üzere $C\bar{D}(0,1)$ de, $C(0,1)$ çemberinin, G bölgesindeki

$$\Gamma_{2,R} := \psi_2(C(0,1)) := \{ z \in G : |\varphi_2(z)| = R \}$$

resmine G nin R yarıçaplı bir seviye eğrisi denir. $R_2>R_1>1$ ise $\Gamma_{2,R_2} \subset I(\Gamma_{2,R_1})$ dir[10].

Teorem 14:

i) $z \in E(\Gamma_{2,R}), 1<R,$ ise

$$F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{\varphi^n{}_2(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma \tag{11}$$

dir.

ii) $z \in I(\Gamma_{2,R})$, R>1, ise

$$F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right) = \varphi_2{}^n(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{\varphi_2{}^n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma \tag{12}$$

dir.

İspat: i) $\varphi_2(z)$ fonksiyonu $z=z_o$ noktasının uygun bir civarında Laurent serisine açılırsa;

$$\varphi_2{}^n(z) = F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right) + E_{2,n}(z) \tag{13}$$

dir. Burada $E_{2,n}(z)$, $I(\Gamma_{2,R})$ de analitik bir fonksiyondur. $z \in E(\Gamma_{2,R})$ ise $\frac{E_{2,n}(\varsigma)}{\varsigma - z} \in H(I(\Gamma_{2,R}))$ olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{\varphi_2{}^n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{1}{\varsigma - z} F_{2,n}\left(\frac{1}{\varsigma - z_o}\right) d\varsigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{1}{\varsigma - z}\sum_{l=1}^{n} \frac{b^n{}_l}{(\varsigma - z_o)^l} d\varsigma$$

$$= -\sum_{l=1}^{n} \frac{b^n{}_l}{(z - z_o)^l} = -F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$$

dir. Buradan da $F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{\varphi_2{}^n(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma$ elde edilir.

ii) $z \neq z_o$ olsun. Bu durumda $\exists\varepsilon>0$ ve $1<R<r$ sayıları öyle ki ;

$\overline{D}(z,\varepsilon) \subset E(\Gamma_{2,r}) \cap I(\Gamma_{2,R})$

dir ve böylece $\dfrac{E_{2,n}(\varsigma)}{\varsigma - z}$; $\Gamma_{2,R}$, $\Gamma_{2,r}$ ve $\partial D(z,\varepsilon)$ eğrileri arasında kalan bölgede analitik olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{E_{2,n}(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,r}} \frac{E_{2,n}(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{E_{2,n}(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma = E_{2,n}(z)$$

dir ve buradan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{\varphi_2^{\,n}(\varsigma) - F_{2,n}\left(\dfrac{1}{\varsigma - z_o}\right)}{\varsigma - z}d\varsigma = E_{2,n}(z) = \varphi_2^{\,n}(z) - F_{2,n}\left(\frac{1}{z - z_o}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{\varphi_2^{\,n}(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{F_{2,n}\left(\dfrac{1}{\varsigma - z_o}\right)}{\varsigma - z}d\varsigma = \varphi_2^{\,n}(z) - F_{2,n}\left(\frac{1}{z - z_o}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{\varphi_2^{\,n}(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma - \frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{n}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{b_l^{(n)}d\varsigma}{(\varsigma - z)(\varsigma - z_o)^l} = \varphi_2^{\,n}(z) - F_{2,n}\left(\frac{1}{z - z_o}\right)$$

ve eşitliğin sol tarafındaki ikinci toplam sıfır olduğundan

$$F_{2,n}\left(\frac{1}{z - z_o}\right) = \varphi_2^{\,n}(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{\varphi_2^{\,n}(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma$$

elde edilir.

$z=z_o$ ise $\infty=\infty$ olacağından (12) yine doğrudur. Zira, $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{\varphi_2^{\,n}(\varsigma)}{\varsigma - z_o}d\varsigma = E_{2,n}(z_o)$

dır. Gerçekten (13) e göre

$$\frac{\varphi_2^{\,n}(\varsigma)}{\varsigma - z_o} = \frac{F_{2,n}\left(\dfrac{1}{\varsigma - z_o}\right)}{\varsigma - z_o} + \frac{E_{2,n}(\varsigma)}{\varsigma - z_o}$$

dir. Buradan,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{\varphi_2^{\,n}(\varsigma)}{\varsigma - z_o}d\varsigma = \sum_{l=1}^{n}\frac{b_l^{(n)}}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{d\varsigma}{(\varsigma - z_o)^{l+1}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{E_{2,n}(\varsigma)}{\varsigma - z_o}d\varsigma = E_{2,n}(z_o)$$

elde edilir.

Teorem 15: $R>1$, $z_o \in G$ ve $z \in E\left(\Gamma_{2,R}\right)$ ise $\forall w \in C\overline{D}(0,R)$ için

$$\frac{\psi_2'(w)}{\psi_2(w)-z}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{w^{m+1}}F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right) \tag{14}$$

dir ve $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{w^{m+1}}F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi $E(\Gamma_{2,R})\times C\bar{D}(0,R)$ de mutlak ve hemen hemen düzgün yakınsaktır.

İspat: $z\in E(\Gamma_{2,R})$ ise $\frac{\psi_2'(w)}{\psi_2(w)-z}$ fonksiyonu $C\bar{D}(0,R)$ de analitik ve $w=\infty$ noktası $\frac{\psi_2'(w)}{\psi_2(w)-z}$ fonksiyonunun ikinci mertebeden sıfır yeri olduğundan, $\frac{\psi_2'(w)}{\psi_2(w)-z}$ nin ∞ noktasının bir komşuluğundaki Laurent serisi $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{2,m}(z)}{w^{m+1}}$ şeklinde olup; bu seri bu komşulukta $\frac{\psi_2'(w)}{\psi_2(w)-z}$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır. $\forall w\in C\bar{D}(0,R)$ için

$$\frac{\psi_2'(w)}{\psi_2(w)-z}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{2,m}(z)}{w^{m+1}}$$

olduğundan, $n\in\mathbb{N}$ için

$$\frac{w^n\psi_2'(w)}{\psi_2(w)-z}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w^nA_{2,m}(z)}{w^{m+1}} \tag{15}$$

dir. R'>R sayısı yeteri kadar büyük seçilirse (15) in sağ tarafındaki seri $C(0,R'):=\{w:|w|=R'\}\subset C\bar{D}(0,R)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğundan teorem14 ve

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R'}}\frac{\varphi_2{}^n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R'}^-}\frac{\varphi_2{}^n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,R')}\frac{w^n\psi_2'(w)}{\psi_2(w)-z}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,R')}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w^nA_{2,m}(z)}{w^{m+1}}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,R')}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w^nA_{2,m}(z)}{w^{m+1}}dw$$

eşitliğinden , $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)=A_{2,n}(z)$$

ve bunun sonucunda

$$\frac{\psi_2'(w)}{\psi_2(w)-z}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{w^{m+1}}F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$$

elde edilir.

$K \subset E(\Gamma_{2,R}) \times C\overline{D}(0,R)$ herhangi bir kompakt alt küme olsun. K_1 ve K_2 sırasıyla K nın $\pi_1 : E(\Gamma_{2,R}) \times C\overline{D}(0,R) \to \mathbb{C}$, $\pi_1(z,w) := z$ ve $\pi_2 : E(\Gamma_{2,R}) \times C\overline{D}(0,R) \to \mathbb{C}$, $\pi_2(z,w) := w$ izdüşümleri altındaki resimleri olsun. K kompakt, π_1 ve π_2 izdüşümleri sürekli olduklarından K_1 ve K_2 kompakt olup $K \subset K_1 \times K_2$ dir.

$r = d(K_1, \Gamma_{2,R}) := \inf\{|z-\varsigma| : z \in K_1, \varsigma \in \Gamma_{2,R}\}$ ve $R_1 := d(0, K_2) := \inf\{|w| : w \in K_2\}$ ise $r>0$ ve $1 \le R < R_1$ dir. $\forall (z,w) \in K_1 \times K_2$ için

$$\left|\frac{1}{w^{m+1}} F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right| = \left|\frac{1}{w^{m+1}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R}} \frac{\varphi_2{}^m(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma\right)\right| \le \frac{\ell_{\Gamma_{2,R}}}{2\pi r R_1}\left(\frac{R}{R_1}\right)^m$$

elde edilir, burada $\ell_{\Gamma_{2,R}}$, $\Gamma_{2,R}$ eğrisinin uzunluğudur. $0 < \frac{R}{R_1} < 1$ olduğundan Weierstrass M-testine göre (14) serisi $E(\Gamma_{2,R}) \times C\overline{D}(0,R)$ de mutlak ve hemen hemen düzgün yakınsaktır.

Sonuç 5: $R>1$, $z_o \in G$ ve $z \in E(\Gamma_{2,R})$ ise $\forall w \in C\overline{D}(0,R)$ için

$$\frac{\psi_2'(w)}{(\psi_2(w) - z)^2} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(z-z_o)^2} \frac{1}{w^{m+1}} F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$$

dir ve $-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(z-z_o)^2} \frac{1}{w^{m+1}} F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi $E(\Gamma_{2,R}) \times C\overline{D}(0,R)$ de mutlak ve hemen hemen düzgün yakınsaktır.

Teorem 16: $F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$, m=1,2,..., *C* G nin Faber polinomları ise

$$\left\{\sqrt[m]{\left|F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right|}\right\}_{m=1}^{\infty}$$

dizisi $G \setminus \{z_o\}$ ın kompakt alt kümeleri üzerinde $|\varphi_2(z)|$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

İspat: $K \subset G \setminus \{z_o\}$ herhangi bir kompakt alt küme olsun. $\rho := d(0, \varphi_2(K)) = \inf\{|\varphi_2(z)| : z \in K\}$ ise $\rho > 1$ dir. r, $R>0$ sayıları $1<r<R<\rho$ olacak şekilde seçilirse, $K \subset I(\Gamma_{2,R}) \subset I(\Gamma_{2,r})$ ve $\forall z \in K$ için $|\varphi_2(z)| > R$ dir. (12) den

$$\left|\left(\left|F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right|\Big/\left|\varphi_2{}^m(z)\right|\right)-1\right| \le \frac{1}{2\pi\left|\varphi_2{}^m(z)\right|}\int_{\Gamma_{2,r}}\frac{\left|\varphi_2{}^m(\varsigma)\right|}{|\varsigma-z|}|d\varsigma|$$

$$\le \frac{\ell_{\Gamma_{2,r}}}{2\pi d(K,\Gamma_{2,r})}\left(\frac{r}{R}\right)^m$$

elde edilir. Bu durumda $\frac{r}{R}<1$ olduğundan yeteri kadar büyük m ler ve $\forall z\in K$ için

$$\frac{1}{2}\le\frac{\left|F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right|}{\left|\varphi_2{}^m(z)\right|}\le\frac{3}{2}$$

buradan

$$\frac{1}{2}|\varphi_2(z)|^m\le\left|F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right|\le\frac{3}{2}|\varphi_2(z)|^m$$

dir ve bu $\left\{\sqrt[m]{\left|F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right|}\right\}_{m=1}^{\infty}$ dizisinin K üzerinde $|\varphi_2(z)|$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösterir ve ispat tamamlanır.

Teorem 17: $F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$, m=1,2,..., $C\,G$ nin Faber polinomları ise

$$\left\{\sqrt[m]{\left|F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right|\Big/|z-z_o|^2}\right\}_{m=1}^{\infty}$$

dizisi $G\backslash\{z_o\}$ ın kompakt alt kümeleri üzerinde $|\varphi_2(z)|$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

İspat: $K\subset G\backslash\{z_o\}$ herhangi bir kompakt alt küme olsun. $\rho:=d(0,\varphi_2(K))=\inf\{|\varphi_2(z)|:z\in K\}$ ise $\rho>1$ dir. r, $R>0$ sayıları $1<r<R<\rho$ olacak şekilde seçilirse, $K\subset \text{int}(\Gamma_{2,R})\subset \text{int}(\Gamma_{2,r})$ ve $\forall z\in K$ için $|\varphi_2(z)|>R$ dir. Ayrıca $\forall z\in K$ için (13) den

$$-\left(\frac{1}{z-z_o}\right)^2F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)=m\varphi_2{}^{m-1}(z)\varphi'_2(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,r}}\frac{\varphi_2{}^m(\varsigma)}{(\varsigma-z)^2}d\varsigma \tag{16}$$

dir.

$M_1:=\sup\{|\varphi_2(z)|:z\in K\}$, $M_2:=\sup\{|\varphi'_2(z)|:z\in K\}$

$m_1:=\inf\{|\varphi_2(z)|:z\in K\}$, $m_2:=\inf\{|\varphi'_2(z)|:z\in K\}$

alalım. $\forall z\in K$ için $\varphi_2(z)\neq 0$ ve $\varphi'_2(z)\neq 0$ ve sürekli fonksiyonların modülü kompakt kümeler üzerinde maksimum ve minimum değerini aldığından m_1, m_2, M_1, $M_2>0$ dır. (16) dan

$$\left|\frac{\left|F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right|}{\left|m\varphi_2^{m-1}(z)\varphi'_2(z)(z-z_o)^2\right|}-1\right|\leq\frac{1}{2\pi m\left|\varphi_2^{m-1}(z)\varphi'_2(z)\right|}\int_{\Gamma_{k,r}}\frac{\left|\varphi_2^{m}(\varsigma)\right|}{\left|\varsigma-z\right|^2}|d\varsigma|$$

$$\leq\frac{RL_{\Gamma_{2,r}}}{2\pi m m_2 d^2(K,\Gamma_{2,r})}\left(\frac{r}{R}\right)^m$$

elde edilir. Bu durumda $\frac{r}{R}<1$ olduğundan yeteri kadar büyük m ler ve $\forall z\in K$ için

$$\frac{1}{2}\leq\frac{\left|F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right|}{m\left|\varphi_2^{m-1}(z)\right|\left|\varphi'_2(z)\right|\left|z-z_o\right|^2}\leq\frac{3}{2}$$

buradan

$$\frac{1}{2}m\frac{m_2}{M_1}|\varphi_2(z)|^m\leq\frac{\left|F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right|}{\left|z-z_o\right|^2}\leq\frac{3}{2}m\frac{M_2}{m_1}|\varphi_2(z)|^m$$

dir ve bu $\left\{\sqrt[m]{F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\Big/\left|z-z_o\right|^2}\right\}_{m=1}^{\infty}$ dizisinin K üzerinde $|\varphi_2(z)|$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösterir ve ispat tamamlanır.

1.7. Faber-Laurent Serisi

G, jordan eğrileri ile sınırlı iki bağlantılı sonlu bir bölge, $C\bar{G}=B_1\cup B_2$, $\infty\in B_1$, $\Gamma_k=\partial B_k$ (k=1,2) olsun. Sonuç 2 ye göre B_1 bölgesini $C\bar{D}(0,1)$ bölgesine $\varphi_1(\infty)=\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\varphi_1(z)}{z}>0$ koşulları altında konform ve tek değerli olarak dönüştüren $\omega=\varphi_1(z)$ dönüşümü mevcuttur, $z=\psi_1(w)$ ile onun tersini gösterelim.

Benzer şekilde her B_2 için sonuç 3 e göre B_2 bölgesini $C\overline{D}(0,1)$ bölgesine $z_o \in B_2$ olduğunda $\varphi_2(z_o) = \infty$, $\lim\limits_{z \to z_o}(z - z_o)\varphi_2(z) > 0$ koşulları altında konform ve tek değerli olarak dönüştüren $w = \varphi_2(z)$ dönüşümü mevcuttur, $z = \psi_2(w)$ ile onun tersini gösterelim.

$\Gamma_{k,R} := \{z : |\varphi_k(z)| = R\}$, k=1,2,

olsun ve $\Gamma_{k,R}$ eğrileri ile sınırlanan sınırlı iki bağlantılı bölgeyi G_R ile gösterelim. $B_{1,R}$, $\Gamma_{1,R}$ eğrisi ile sınırlanan sonsuz bölge; $B_{2,R}$, $\Gamma_{2,R}$ eğrisi ile sınırlanan, sonlu, basit bağlantılı bölge olsun [10].

Tanım 12: $\{F_{1,n}(z)\}$, CB_1 nin Faber polinomları dizisi; $\left\{F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right\}$, CB_2 nin Faber polinomları dizisi ve $\{a_{1,n}\}$ ve $\{a_{2,n}\}$ iki kompleks sayı dizisi olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}F_{1,n}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2,n}F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right) \tag{17}$$

serisine G nin bir Faber-Laurent serisi denir.

Teorem 18: $F_{1,m}(z)$, $F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ sırası ile CB_1 ve CB_2 nin Faber Polinomları ise $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1,R_1}} \frac{F_{1,m}(z)\varphi_1'(z)}{\varphi_1^{n+1}(z)}dz = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad [13]$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R_1}} \frac{F_{1,m}(z)\varphi_2'(z)}{\varphi_2^{n+1}(z)}dz = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1,R_1}} \frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1^{n+1}(z)}F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_k}\right)dz = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R_1}} \frac{\varphi_2'(z)}{\varphi_2^{n+1}(z)}F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)dz = \begin{cases} -1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}, \quad R_1 > 1$$

dir.

İspat: $\dfrac{F_{1,m}(z)\varphi_2'(z)}{\varphi_2^{n+1}(z)}$ fonksiyonu $\Gamma_{2,R_1}, R_1 > 1$, eğrisi ile sınırlı sonlu bölgede analitik olduğundan,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R_1}}\frac{F_{1,m}(z)\varphi_2'(z)}{\varphi_2^{n+1}(z)}dz=0,\ n\in\mathbb{N}$$

ve benzer şekilde $\frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1^{n+1}(z)}F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ fonksiyonu $\Gamma_{1,R_1}, R_1>1$, eğrisi ile sınırlı sonsuz bölgede analitik olduğundan,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1,R_1}}\frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1^{n+1}(z)}F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)dz=0,\ n\in\mathbb{N}$$

dır. (13) e göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R_1}}\frac{F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\varphi_2'(z)}{\varphi_2^{n+1}(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R_1}}\frac{\left(\varphi_2^{m}(z)-E_{2,n}(z)\right)\varphi_2'(z)}{\varphi_2^{n+1}(z)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R_1}}\frac{\varphi_2^{m}(z)\varphi_2'(z)}{\varphi_2^{n+1}(z)}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R_1}}\frac{E_{2,n}(z)\varphi_2'(z)}{\varphi_2^{n+1}(z)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R_1}}\varphi_2^{m-n-1}(z)\varphi_2'(z)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)^-}w^{m-n-1}dw=\begin{cases}-1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 19: $\{a_{k,n}\}$, $k=1,2$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{k,n}|}=\frac{1}{R}$, $R>1$, koşulunu sağlayan iki dizi ise

i) (17) serisi G_R de mutlak ve hemen hemen düzgün yakınsak ve $C\overline{G}_R$ de ıraksaktır.

ii) $\forall z\in G_R$ için

$$f(z):=\sum_{n=0}^{\infty}a_{1,n}F_{1,n}(z)+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2,n}F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$$

ise $f\in H(G_R)$ dir ve $1<r<R$, $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$a_{k,n}=\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i}\int_{\Gamma_{k,r}}\frac{f(z)\varphi_k'(z)}{\varphi_k^{n+1}(z)}dz$$

dir.

İspat: i) $K\subset G_R$ herhangi bir kompakt alt küme olsun. $R^*\in(1,R)$ sayısı $K\subset G_{R^*}$ olacak şekilde seçilsin. Maksimum modül teoremine göre $\forall z\in K$ için

$$\left|a_{1,n}F_{1,n}(z)\right| \le \left|a_{1,n}F_{1,n}(\varsigma_o)\right|$$

olacak şekilde bir $\varsigma_o \in \Gamma_{1,R*}$ noktası ve $\forall z \in K$ için

$$\left|a_{1,n}F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right| \le \left|a_{1,n}F_{2,n}\left(\frac{1}{\varsigma_1-z_o}\right)\right|$$

olacak şekilde bir $\varsigma_1 \in \Gamma_{2,R*}$ noktası vardır. Teorem 11 ve teorem 16 ye göre,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|a_{1,n}F_{1,n}(\varsigma_o)\right|} = \frac{|\varphi_1(\varsigma_o)|}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|a_{1,n}F_{2,n}\left(\frac{1}{\varsigma_1-z_o}\right)\right|} = \frac{|\varphi_2(\varsigma_1)|}{R} = \frac{R^*}{R} < 1$$

olduğundan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{1,n}F_{1,n}(z) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2,n}F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi K üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Son olarak (17) serisinin $C\overline{G}_R$ de ıraksak olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $z_1 \in C\overline{G}_R$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. $1<R<R_1$ ve $z_1 \in \Gamma_{1,R_1}$ veya $z_1 \in \Gamma_{2,R_1}$ olacak şekilde bir $R_1>0$ sayısı vardır. Genellikten bir şey kaybetmeyeceği için $z_1 \in \Gamma_{1,R_1}$ olduğunu kabul edelim. Teorem 11 e göre

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|a_{1,n}F_{1,n}(z_1)\right|} = \frac{R_1}{R}$$

ve $\frac{R_1}{R} > 1$ olduğundan seriler için kök testine göre $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{1,n}F_{1,n}(z_1)$ serisi dolayısıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}F_{1,n}(z_1) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2,n}F_{2,n}\left(\frac{1}{z_1-z_o}\right)$$

serisi ıraksaktır. $z_1 \in C\overline{G}_R$ keyfi alınan bir nokta olduğundan (17) serisi $C\overline{G}_R$ de ıraksaktır.

ii) i) ye göre (17) serisi G_R de mutlak ve hemen hemen düzgün yakınsak olduğundan $f \in H(G_R)$ dir.

$1<r<R$ olsun. (17) serisi G_R de $f(z)$ ye hemen hemen düzgün yakınsak olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}F_{1,n}(z)\frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1^{n+1}(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2,n}F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1^{n+1}(z)}$$

serisi $\Gamma_{1,r}$ üzerinde $\frac{f(z)\varphi_1'(z)}{\varphi^{n+1}{}_1(z)}$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. O halde

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1,r}} F_{1,n}(z) \frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1^{n+1}(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2,n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1,r}} F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right) \frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1^{n+1}(z)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1,r}} \frac{f(z)\varphi_1'(z)}{\varphi_1^{n+1}(z)}$$

dir. Bu eşitliğin sol tarafındaki ikinci integral sıfır olduğundan teorem 18 e göre

$$a_{1,n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1,r}} \frac{f(z)\varphi_1'(z)}{\varphi_1^{n+1}(z)} dz$$

elde edilir. Benzer şekilde (17) serisi G_R de $f(z)$ ye hemen hemen düzgün yakınsak olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n} F_{1,n}(z) \frac{\varphi_2'(z)}{\varphi_2^{n+1}(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2,n} F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right) \frac{\varphi_2'(z)}{\varphi_2^{n+1}(z)}$$

serisi $\Gamma_{2,r}$ üzerinde $\dfrac{f(z)\varphi_2'(z)}{\varphi^{n+1}{}_2(z)}$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. O halde

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{2,r}} F_{1,n}(z) \frac{\varphi_2'(z)}{\varphi_2^{n+1}(z)} dz + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{2,r}} F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right) \frac{\varphi_2'(z)}{\varphi_2^{n+1}(z)} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{2,r}} \frac{f(z)\varphi_2'(z)}{\varphi_2^{n+1}(z)} dz$$

dir. Bu eşitliğin sol tarafındaki birinci integral sıfır olduğundan teorem 18 e göre

$$a_{2,n} = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{2,r}} \frac{f(z)\varphi_2'(z)}{\varphi_2^{n+1}(z)} dz$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Tersine olarak; $f \in H(G_R)$ ve $1<r<R$ ise

$$a_{k,n}(f,r) := \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k,r}} \frac{f(z)\varphi_k'(z)}{\varphi_k^{n+1}(z)} dz, \quad k=1,2,$$

sayıları r den bağımsızdır. Gerçekten, $1<r_1<r_2<R$ ise $\dfrac{f(z)\varphi_k'(z)}{\varphi_k^{n+1}(z)}$, $CG_{r_1} \cap \overline{G}_{r_2}$ yi içeren bir bölgede analitik olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r_1}} \frac{f(z)\varphi_k'(z)}{\varphi_k^{n+1}(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r_2}} \frac{f(z)\varphi_k'(z)}{\varphi_k^{n+1}(z)} dz, \quad k=1,2,$$

dir. $a_{k,n}(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k,r}} \frac{f(z)\varphi_k'(z)}{\varphi_k^{n+1}(z)} dz$, $k = 1,2$, katsayılarına $f \in H(G_R)$ nin Faber-Laurent katsayıları ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}(f)F_{1,n}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2,n}(f)F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisine de f nin Faber-Laurent serisi denir.

Teorem 20: $f \in H(G_R)$, R>1, ve $a_{k,m}(f) := \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k,r}} \frac{f(z)\varphi_k'(z)}{\varphi_k^{m+1}(z)} dz$, $k = 1,2$, ise

i) $\sum_{m=0}^{\infty} a_{1,m}(f)F_{1,m}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m}(f)F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ (18)

serisi G_R de f fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır.

ii) $\sum_{m=0}^{\infty} c_{1,m}F_{1,m}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} c_{2,m}F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ Faber-Laurent serisi G_R de f fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak ise $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$c_{k,m}=a_{k,m}(f)$, k=1,2,

dir.

İspat: i) $K \subset G_R$ herhangi bir kompakt alt küme ise, $1<r_1<R$ ve $K \subset G_{r_1}$ olacak şekilde bir $r_1>0$ sayısı vardır . f nin Faber-Laurent katsayıları $1<r<R$ olan r sayılarından bağımsız olduğundan $a_{1,n}(f)$ ve $a_{2,n}(f)$ katsayılarının tanımında kullanılan r sayısı $1 < r_1 < r < R$ olacak biçimde seçilebilir, bu durumda,

$$a_{k,n}(f) := \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k,r}} \frac{f(\varsigma)\varphi_k'(\varsigma)}{\varphi_k^{n+1}(\varsigma)} d\varsigma, \quad k = 1,2,$$

dir ve $f \in H(G_R)$ olduğundan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1,r}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{2,r}} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma$$

dir. Bu eşitliğin sol tarafındaki birinci integralde $\varsigma = \psi_1(w)$ değişken dönüşümü ve ikinci integralde $\varsigma = \psi_2(w)$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(\psi_1(w))}{\psi_1(w) - z} \psi_1'(w) dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(\psi_2(w))}{\psi_2(w) - z} \psi_2'(w) dw \quad (19)$$

elde edilir Teorem 10 ve teorem 15 e göre $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{F_{1,m}(z)}{w^{m+1}}$ ve $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{w^{m+1}}F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serileri $\partial D(0,r)$ üzerinde sırası ile $\frac{\psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z}$ ve $\frac{\psi_2'(w)}{\psi_2(w)-z}$ fonksiyonlarına düzgün yakınsak, $f(\psi_1(w))$ ve $f(\psi_2(w))$ fonksiyonları $\partial D(0,r)$ üzerinde sınırlı olduklarından, $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(\psi_1(w))F_{1,m}(z)}{w^{m+1}}$ ve $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f(\psi_2(w))}{w^{m+1}}F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serileri $\partial D(0,r)$ üzerinde sırası ile $\frac{f(\psi_1(w))}{\psi_1(w)-z}\psi_1'(w)$ ve $\frac{f(\psi_2(w))}{\psi_2(w)-z}\psi_2'(w)$ fonksiyonlarına düzgün yakınsaktır, dolayısıyla $\forall z\in K$ için

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1,r}}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma-\sum_{m=0}^{n}a_{1,m}(f)F_{1,m}(z)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{f(\psi_1(w))\psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z}dw-\sum_{m=0}^{n}a_{1,m}(f)F_{1,m}(z)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(\psi_1(w))F_{1,m}(z)}{w^{m+1}}dw-\sum_{m=0}^{n}a_{1,m}(f)F_{1,m}(z)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\int_{|w|=1}\frac{f(\psi_1(w))}{w^{m+1}}dw\right)F_{1,m}(z)-\sum_{m=0}^{n}a_{1,m}(f)F_{1,m}(z)\right|$$

$$=\left|\sum_{m=n+1}^{\infty}a_{1,m}(f)F_{1,m}(z)\right|\le\sum_{m=n+1}^{\infty}\left|a_{1,m}(f)F_{1,m}(z)\right|$$

dir. Teorem 9 a göre $\forall z\in K$ için

$$F_{1,m}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1,r_1}}\frac{\varphi_1^{\,m}(z)}{\varsigma-z}d\varsigma$$

olduğundan, $M_k(r):=\{|f(\varsigma)\varphi_k'(\varsigma)|:\varsigma\in\Gamma_{k,r}\}$ k=1,2, ise

$$\left|a_{1,m}(f)F_{1,m}(z)\right|\le C(r,r_1)\left(\frac{r_1}{r}\right)^m,\quad C(r,r_1)=\frac{M_1(r)\ell_{\Gamma_{1,r}}\ell_{\Gamma_{1,r_1}}}{4\pi^2 d(K,\Gamma_{1,r_1})r}$$

dir. $0<\frac{r_1}{r}<1$ olduğundan

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}C(r,r_1)\left(\frac{r_1}{r}\right)^m=C(r,r_1)\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{r}\right)^m=C(r,r_1)\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+1}\frac{r}{r-r_1}$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} C(r,r_1)\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+1}\frac{r}{r-r_1}=0$ olduğundan $\forall z\in K$ ve $\forall\varepsilon>0$ için $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq N(\varepsilon)$ için

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1,r}}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma-\sum_{m=0}^{n}a_{1,m}(f)F_{1,m}(z)\right|<\varepsilon$$

dir. Dolayısıyla $\sum_{m=0}^{\infty}a_{1,m}(f)F_{1,m}(z)$ serisi $K\subset G_R$ kompakt alt kümesi üzerinde $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1,r}}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. Benzer şekilde $\sum_{m=1}^{\infty}a_{2,m}(f)F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisinin de $K\subset G_R$ kompakt alt kümesi üzerinde $-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,r}}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Sonuç olarak, $K\subset G_R$ keyfi alınan bir kompakt küme olduğundan $\sum_{m=0}^{\infty}a_{1,m}(f)F_{1,m}(z)+\sum_{m=1}^{\infty}a_{2,m}(f)F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi G_R de f fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır.

ii) $\sum_{m=0}^{\infty}c_{1,m}F_{1,m}(z)+\sum_{m=1}^{\infty}c_{2,m}F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ Faber-Laurent serisi G_R de $f\in H(G_R)$, $R>1$, fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak ise teorem 19 a göre

$$c_{k,m}=\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1,r}}\frac{f(z)\varphi_k'(z)}{\varphi_k^{m+1}(z)}dz=a_{k,m}(f)$$

elde edilir.

2.YAPILAN ÇALIŞMALAR ve BULGULAR

2.1. Bergman Uzaylarında Genelleştirilmiş Faber Polinomları ile Fonksiyonlara Yaklaşımın Derecesi

G, Γ yarıkonform eğrisi ile sınırlı sonlu bölge olsun. D. M. Israfilov [14] de,

$f \in A(\overline{G}) := \{f : f \text{ G de analitik, } \overline{G} \text{ de sürekli}\}$

olduğunda,

$$a_m(f) := -\frac{1}{\pi} \iint_{|w|>1} \frac{f\left(y(\Gamma, \psi(w))\right)\overline{\psi'(w)}}{w^{m+1}} y_{\bar{\varsigma}}(\Gamma, \psi(w))\, d\sigma_w$$

ise $\sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) F'_m(z)$ serisinin G nin kompakt alt kümeleri üzerinde f ye düzgün yakınsak olduğunu gösterdi.

$A^2(G)$ uzayını ele alındığında, Carleman-Farell teoremine göre polinomlar kümesi, $A^2(G)$ de $\|f\|_{A^2(G)} := \left(\langle f, g\rangle\right)^{\frac{1}{2}}$ normuna göre yoğundur. Aynı zamanda $n \in \mathbb{N}$ için $\wp_n$, derecesi n yi aşmayan polinomlar kümesi ve

$$E_n(f, G) = \inf_{p \in \wp_n} \|f - p\|_{A^2(G)}$$

$\wp_n$ deki polinomlarla f ye en iyi yaklaşımın derecesi olmak üzere bir $\pi_n \in \wp_n$ polinomu vardır öyle ki, $E_n(f, B) = \|f - \pi\|_{A^2(G)}$ dir. Buradaki $\pi_n \in \wp_n$ polinomuna $f \in A^2(G)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom denir. A. Çavuş [15] deki çalışmasında $f \in A^2(G)$ olduğunda, $a_m(f)$ yukarıdaki gibi olmak üzere $\sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) F'_m(z)$ serisinin G nin kompakt alt kümeleri üzerinde f ye düzgün yakınsak olduğunu, seriye açılımın tek türlü olduğunu ve $S_n(f, z) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k(f) F'_k(z)$ olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\|f - S_n(f, .)\|_{A^2(G)} \leq \sqrt{6n/(1-k^2)}\, E_n(f, G)$$

olduğunu gösterdi.

G, sonuç 2 nin koşullarını sağlayan bir kontinyum olmak üzere $f \in A^2(G_R)$, R>1, olsun, $f \in A^2(G_R)$ için

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{CG_R} \frac{f(y(\Gamma_R,\varsigma))}{(\varsigma - z)^2} y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma) d\sigma_\varsigma$$

$$= -\frac{1}{\pi}\iint_{|w|>R} f(y(\Gamma_R,\psi(w)))y_{\bar{\varsigma}}(\Gamma_R,\psi(w))\overline{\psi'(w)}\frac{\psi'(w)}{(\psi(w)-z)^2} d\sigma_\varsigma$$

dir[6]. Sonuç 4 kullanılırsa, $f \in A^2(G_R)$ fonksiyonuna ,

$$a_m(f) := -\frac{1}{\pi}\iint_{|w|>R} \frac{f(y(\Gamma_R,\psi(w)))y_{\bar{\varsigma}}(\Gamma_R,\psi(w))\overline{\psi'(w)}}{w^{m+1}} d\sigma_\varsigma \tag{19}$$

olmak üzere $\sum_{m=1}^{\infty} a_m(f)F'_m(z)$ serisini karşılık getirebiliriz. $\sum_{m=1}^{\infty} a_m(f)F'_m(z)$ serisine f nin bir genelleştirilmiş Faber serisi ve $S_n(f,z) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k(f)F'_k(z)$ polinomuna f nin bir genelleştirilmiş Faber polinomu denir.

Bu kısımda, $f \in A^2(G_R)$ ve $a_m(f)$ (19) daki gibi tanımlı ve 1<r<R olmak üzere, $\|f - S_n(f,.)\|_{A^2(G_r)}$ ve $\|f - S_n(f,.)\|_{A^2(G)}$ farklarının sıfıra gitme hızlarını ölçmek için bir değerlendirme verilmektedir.

Lemma 1: $f \in A^2(G_R)$, R>1, ve $y(\Gamma_R,z)$, Γ_R eğrisine göre yarıkonform yansıma olsun. Bu taktirde;

$$\iint_{CG_R} |f(y(\Gamma_R,\varsigma))|^2 |y_{\bar{\varsigma}}(\Gamma_R,\varsigma)|^2 d\sigma_\varsigma \le \|f\|^2_{A^2(G_R)} \tag{20}$$

dir.

İspat: Γ_R , konform bir dönüşüm altında bir çemberin resmi ve her konform dönüşüm 1-yarkonform olduğundan, uyarı 1 e göre $y(z) = y(\Gamma_R,z)$ 1-yarıkonform yansımadır. Dolayısıyla $|\bar{y}_{\bar{\varsigma}}|/|\bar{y}_\varsigma| \le k = 0$ ve $|\bar{y}_\varsigma|^2 - |\bar{y}_{\bar{\varsigma}}|^2 > 0$ dır. Aynı zamanda $|\bar{y}_\varsigma| = |y_{\bar{\varsigma}}|$ ve $|\bar{y}_{\bar{\varsigma}}| = |y_\varsigma|$ olduğundan $|y_{\bar{\varsigma}}|^2 = |y_{\bar{\varsigma}}|^2 - |y_\varsigma|^2 > 0$ dır. Bunun sonucu olarak;

$$\iint_{CG_R} |(f \circ y)(\varsigma)|^2 |y_{\bar{\varsigma}}(\varsigma)|^2 d\sigma_\varsigma = \iint_{CG_R} |(f \circ y)(\varsigma)|^2 \left(|y_\varsigma|^2 - |y_{\bar{\varsigma}}|^2\right) d\sigma_\varsigma$$

y(z), nin jakobiyeni $\left(|y_\varsigma|^2-|y_{\bar\varsigma}|^2\right)$ olduğundan üstteki eşitsizliğin sağ tarafındaki integralde $z=y(\varsigma)$ değişken dönüşümü yapılırsa (20) elde edilir.

Lemma 2: $F_n(z)$, G nin n. dereceden Faber polinomu ve R>1 olsun. Bu taktirde;

$$\|F_n'\|^2_{A^2(G_R)}\le n\pi R^{2n}$$

dir.

İspat: $|w|>1$ için

$$F_n(\psi(w))=w^n+\sum_{\nu=1}^{\infty}nb_{n\nu}w^{-\nu} \tag{21}$$

dir[16], burada $b_{n\nu}$ Grunsky katsayılarıdır.

$$\|F_n'\|^2_{A^2(G_R)}=\iint_{G_R}|F_n'(z)|^2d\sigma_z=\iint_{G_R}F_n'(z)\overline{F_n'(z)}d\sigma_z$$

Green teoremi kullanılırsa;

$$\|F_n'\|^2_{A^2(G_R)}=\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_R}F_n'(z)\overline{F_n(z)}\,dz=\frac{1}{2i}\int_{|w|=R}F_n'(\psi(w))\psi'(w)\overline{F_n(\psi(w))}\,dw$$

(21) den

$$F_n'(\psi(w))\psi'(w)=nw^{n-1}-\sum_{\nu=1}^{\infty}nb_{n\nu}\nu w^{-\nu-1},\ |w|>1,$$

elde edilir, bunu yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak ,

$$\|F_n'\|^2_{A^2(G_R)}=\frac{1}{2i}\int_{|w|=R}\left(nw^{n-1}-\sum_{\nu=1}^{\infty}nb_{n\nu}\nu w^{-\nu-1}\right)\overline{\left(w^n+\sum_{\nu=1}^{\infty}nb_{n\nu}w^{-\nu}\right)}dw$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{|w|=R}\left(n\frac{|w|^{2n}}{w}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{n^2\nu|b_{n\nu}|^2|w|^{-2\nu}}{w}\right)dw$$

$$=\left(nR^{2n}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu n^2|b_{n\nu}|^2R^{-2\nu}\right)\frac{1}{2i}\int_{|w|=R}\frac{dw}{w}$$

$$=\pi\left(nR^{2n}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu n^2|b_{n\nu}|^2R^{-2\nu}\right)\le n\pi R^{2n}$$

Lemma 3: $f\in A^2(G_R)$ olsun. Bu taktirde, $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$|a_n(f)| \leq \frac{\|f\|_{A^2(G_R)}}{\sqrt{\pi n} R^n}, \tag{22}$$

dir.

İspat :

$$a_n(f) = -\frac{1}{\pi} \iint_{|w|>R} \frac{f(y(\Gamma_R, \psi(w)))\psi'(w) y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_R, \psi(w))}{w^{n+1}} d\sigma_w$$

olduğundan, Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$|a_n(f)| \leq \frac{1}{\pi}\left(\iint_{|w|>R} \left|f(y(\Gamma_R, \psi(w))) y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_R, \psi(w))\overline{\psi'(w)}\right|^2 d\sigma_w\right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_{|w|\geq R} \frac{d\sigma_w}{|w|^{2n+2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\iint_{C\bar{G}_R} \left|f(y(\Gamma_R,\zeta)) y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_R,\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_R^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{r}{r^{2n+2}} d\theta dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\pi} R^n}\left(\iint_{C\bar{G}_R} \left|f(y(\Gamma_R,\zeta)) y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_R,\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. $y(\Gamma_R,.)$ 1- yarıkonform yansıma olduğundan

$$|y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_R,\zeta)|^2 = |J_{y(\Gamma_R,.)}(\zeta)|^2$$

ve

$$|a_n(f)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n} R^n}\left(\iint_{C\bar{G}_R} |f(y(\Gamma_R,\zeta))|^2 |J_{y(\Gamma_R,.)}(\zeta)|^2 d\sigma_\zeta\right)^{\frac{1}{2}}$$

dir. $z = y(\Gamma_R, \zeta)$ değişken dönüşümünün sonucu olarak,

$$|a_n(f)| \leq \frac{\|f\|_{A^2(G_R)}}{\sqrt{\pi n} R^n}$$

elde edilir.

Sonuç 6: $F_n(z)$, G nin n. dereceden Faber polinomu ve $K \subset G_R$, $R>1$, kompakt bir alt küme olsun. Bu taktirde $\forall z \in K$ için

$$|F_n'(z)| \leq \frac{\sqrt{n} R^n}{d(K, \Gamma_R)}$$

dir.

İspat: G bölgesi yerine G_R bölgesi alındığında teorem 3 ün sonucu olarak $\forall z \in K$ için

$$|f(z)| \le \frac{\|f\|_{A^2(G_R)}}{\sqrt{\pi}\, d(K,\Gamma_R)} \tag{23}$$

dir. Buradan lemma 2 ye göre $\forall z \in K$ için

$$|F_n'(z)| \le \frac{\|F_n'\|_{A^2(G_R)}}{\sqrt{\pi}\, d(K,\Gamma_R)} \le \frac{\sqrt{n}R^n}{d(K,\Gamma_R)}$$

elde edilir.

Teorem 21: : R>1 ve $f \in A^2(G_R)$ ise $S_n(f,z)$, G_R nin kompakt alt kümeleri üzerinde f ye düzgün yakınsaktır.

İspat: $K \subset G_R$ alınan keyfi kompakt bir alt küme ve $z \in K$ keyfi alınan sabit bir nokta olsun. Bu durumda,

$$f(z) - S_n(f,z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{CG_R} f(y(\Gamma_R,\varsigma)) y_{\bar\varsigma}(\Gamma_R,\varsigma) \left(\frac{1}{(\varsigma - z)^2} - \sum_{k=1}^{n+1} F_k'(z) \frac{\varphi'(\varsigma)}{\varphi^{k+1}(\varsigma)} \right) d\sigma_\varsigma$$

$$= -\frac{1}{\pi} \iint_{|w|>R} f(y(\Gamma_R,\psi(w))) y_{\bar\varsigma}(\Gamma_R,\psi(w)) \left(\frac{\psi'(w)}{(\psi(w) - z)^2} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{F_k'(z)}{w^{k+1}} \right) d\sigma_w$$

dir. Buradan Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$|f(z) - S_n(f,z)|^2 \le \frac{1}{\pi^2} \left(\iint_{|w|>R} \left| f(y(\Gamma_R,\psi(w))) y_{\bar\varsigma}(\Gamma_R,\psi(w)) \psi'(w) \right|^2 d\sigma_w \right)$$

$$\times \left(\iint_{|w|>R} \left| \frac{\psi'(w)}{(\psi(w) - z)^2} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{F_k'(z)}{w^{k+1}} \right|^2 d\sigma_w \right)$$

lemma 1 den,

$$|f(z) - S_n(f,z)|^2 \le \frac{1}{\pi^2} \|f\|^2_{A^2(G_R)} \left(\iint_{|w|>R} \left| \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{F_k'(z)}{w^{k+1}} \right|^2 d\sigma_w \right)$$

$$\le \frac{1}{\pi^2} \|f\|^2_{A^2(G_R)} \int_R^\infty \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{F_k'(z)}{\rho^{k+1} e^{i(k+1)\theta}} \right] \left[\sum_{k=n+2}^{\infty} \overline{\frac{F_k'(z)}{\rho^{k+1}}} e^{i(k+1)\theta} \right] d\theta \right\} \rho\, d\rho$$

$$=\frac{\|f\|^2_{A^2(G_R)}}{\pi^2}2\pi\int_R^{\infty}\left\{\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{|F_k'(z)|^2}{\rho^{2k+1}}\right\}d\rho$$

$$=\frac{2\|f\|^2_{A^2(G_R)}}{\pi}\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{|F_k'(z)|^2}{2kR^{2k}} \tag{24}$$

elde edilir. $K\subset G_R$ olduğundan, $K\subset G_r$ olacak şekilde bir $r\in(1,R)$ sayısı mevcuttur. Dolayısıyla Sonuç 6 ve (24) nın sonucu olarak,

$$|f(z)-S_n(f,z)|^2\le\frac{2\|f\|^2_{A^2(G_R)}}{\pi}\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1}{2d^2(K,\Gamma_r)}\left(\frac{r^2}{R^2}\right)^k$$

$$\le\frac{\|f\|^2_{A^2(G_R)}}{\pi d^2(K,\Gamma_r)}\left(\frac{r^2}{R^2}\right)^{n+2}\frac{R^2}{R^2-r^2} \tag{25}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (25) in sonucu olarak f nin genelleştirilmiş Faber serisinin K kompakt alt kümesi üzerinde f ye düzgün yakınsak olduğu çıkar. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 22: $R>1$ ve $f\in A^2(G_R)$ olsun. Bu durumda;

i) $\forall\in\mathbb{N}$ için

$$\|f-S_n(f,.)\|_{A^2(\bar{G}_r)}\le\frac{R\|f\|_{A^2(G_R)}}{\sqrt{(R^2-r^2)}}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \tag{26}$$

ii) Yeteri kadar büyük $n\in\mathbb{N}$ için,

$$\|f-S_n(f,.)\|_{A^2(G)}\le\frac{cR\sqrt{e}\|f\|_{A^2(G_R)}}{\sqrt{(R^2-1)}}\left(\frac{1}{R}\right)^{n+2} \tag{27}$$

İspat: i) $z\in\bar{G}_r$ keyfi alınan bir nokta olsun. Bu durumda, (24) eşitsizliğinde her iki tarafın $\bar{G}_r$ üzerinden integrali alınırsa, lemma 2 nin sonucu olarak;

$$\|f-S_n(f,.)\|^2_{A^2(\bar{G}_r)}\le\frac{\|f\|^2_{A^2(G_R)}}{\pi}\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{\|F_k'\|_{A^2(\bar{G}_r)}}{kR^{2k}}\le\frac{\|f\|^2_{A^2(G_R)}}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{kr^{2k}\pi}{kR^{2k}}$$

$$=\|f\|^2_{A^2(G_R)}\sum_{k=n+2}^{\infty}\left(\frac{r^2}{R^2}\right)^k=\|f\|^2_{A^2(G_R)}\left(\frac{r^2}{R^2}\right)^{n+2}\frac{1}{1-\dfrac{r^2}{R^2}}$$

$$=\|f\|^2_{A^2(G_R)}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2}\right)^2\frac{R^2}{R^2-r^2}$$

dir, buradan her iki tarafın karekökü alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

ii) (26) eşitsizliğinde $r^2=1+\dfrac{1}{n+2}$ alınırsa, yeteri kadar büyük $n\in\mathbb{N}$ için, (25) elde edilir.

Sonuç 7: $f\in H(G_R)$, $R>1$, olsun. Eğer f fonksiyonunun Γ_R üzerinde kaldırılabilir olmayan bir singüler noktası varsa,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n+2]{E_n(f,\overline{G}_r)}=\frac{r}{R},$$

dir.

İspat: $1<r<R$ olan her r sayısı için $f\in H(\overline{G}_r)$ ve $\overline{G}_r$ kompakt alt küme olduğundan $f\in A^2(\overline{G}_r)$ dir. (24) eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n+2]{E_n(f,\overline{G}_r)}\le\frac{r}{R}\tag{28}$$

elde edilir. Şimdi $E_n(f,\overline{G}_r)$ için bir alt sınır bulmaya çalışalım. $\pi_n(z)$, derecesi n yi aşmayan polinomlar sınıfından $\overline{G}_r$ üzerinde $f(z)$ ye en iyi yaklaşan polinom olsun. Yani

$$E_n(f,\overline{G}_r)=\|f-\pi_n\|_{A^2(\overline{G}_r)}$$

olsun. $T_n(z):=f(z)-\pi_n(z)$ alalım. $T_n(z)$ fonksiyonunu genelleştirilmiş Faber polinomları serisine açalım;

$$T_n(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k^{(n)}F_k'(z)$$

dir. Buradan,

$$f(z)=\pi_n(z)+\sum_{k=1}^{\infty}b_k^{(n)}F_k'(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(f)F_k'(z)$$

elde edilir. $f(z)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Faber polinomları serisine açılımı tek olduğundan;

$$a_k(f)=b_k^{(n)},\quad k=n+2,n+3,\ldots$$

dir. Lemma 3 den $k\in\mathbb{N}$ için

$$\left|b_k^{(n)}\right| \le \frac{\|T_n\|_{A^2(\bar{G}_r)}}{\sqrt{\pi k r^k}} = \frac{E_n(f,\bar{G}_r)}{\sqrt{\pi k r^k}}$$

dir. Sonuç olarak buradan da

$$E_n(f,\bar{G}_r) \ge \left|b_{n+2}^{(n)}\right| \sqrt{\pi(n+2)}\, r^{n+2} = \left|a_{n+2}(f)\right| \sqrt{\pi n}\, r^{n+2} \qquad (29)$$

elde edilir. Teorem 13 e göre $f \in H(G_R)$ ve f fonksiyonunun Γ_R üzerinde kaldırılabilir olmayan bir singüler noktası bulunduğundan,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(f)|} = \frac{1}{R}$$

idi, o halde (29) un sonucu olarak;

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n+2]{E_n(f,G_r)} \ge \frac{r}{R} \qquad (30)$$

ve (28) ve (30) un sonucu olarak ta istenilen sonuç elde edilir.

2.2. İki Bağlantılı Bölgelerde Belirli Tipten fonksiyonlara Genelleştirilmiş Faber-Laurent Serileri ile Yaklaşım

Bu kısımda yarıkonform eğrilerle sınırlı çok bağlantılı bölgeler için M. Z. Dveirin [17] tarafından verilen integral gösteriminden yola çıkılarak seviye eğrileri ile sınırlı iki bağlantılı bölgede ilkeli olan analitik fonksiyonlara genelleştirilmiş Faber-Laurent serileri ile hemen hemen düzgün yakınsaklık problemi incelenmiştir.

G, jordan eğrileri ile sınırlı iki bağlantılı sonlu bir bölge, $C\bar{G} = B_1 \cup B_2$, $\infty \in B_1$ ve $\Gamma_k = \partial B_k$ (k=1,2); $\varphi_1 : B_1 \to C\bar{D}(0,1)$, $\varphi_1(\infty) = \infty$, $\lim_{z\to\infty} \frac{\varphi_1(z)}{z} > 0$ koşullarını sağlayan konform dönüşüm, $\psi_1 := \varphi_1^{-1}$; $\varphi_2 : B_2 \to C\bar{D}(0,1)$, $\varphi_2(z_o) = \infty$, $\lim_{z\to z_o}(z-z_o)\varphi_2(z) > 0$ koşullarını sağlayan konform dönüşüm, $\psi_2 := \varphi_2^{-1}$;

$$\Gamma_{k,R} := \{z : |\varphi_k(z)| = R\},\ k=1,2,$$

ve $\Gamma_{k,R}$ eğrileri ile sınırlanan sınırlı iki bağlantılı bölge G_R ile gösterilsin. $B_{1,R}$, $\Gamma_{1,R}$ eğrisi ile sınırlanan sonsuz bölge; $B_{2,R}$, $\Gamma_{2,R}$ eğrisi ile sınırlanan sınırlı basit bağlantılı bölge; ve

$y(\Gamma_{k,R},.)$, $\Gamma_{k,R}$ eğrisine göre yarıkonform yansıma olsun. Bu yansıma sürekli türevlenebilir olarak ta seçilebilir [17].

Tanım 13: $\{F_{1,n}(z)\}$, CB_1 nin Faber polinomları dizisi; $\left\{F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right\}$, CB_2 nin Faber polinomları dizisi ve $\{a_{1,n}\}$ ve $\{a_{2,n}\}$ iki kompleks sayı dizisi olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n}F_{1,n}'(z)+\sum_{n=1}^{\infty} a_{2,n}F_{2,n}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\frac{1}{(z-z_o)^2}$$

serisine G nin bir genelleştirilmiş Faber-Laurent serisi denir.

Teorem 23: Her sabit k=1,2 için $\{a_{k,m}\}_{m=1}^{\infty}$,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{|a_{k,m}|}=\frac{1}{R}<1,$$

koşulunu sağlayan iki kompleks sayı dizisi ise,

i) $$\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}F_{1,m}'(z)+\sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m}\frac{1}{(z-z_o)^2}F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$$

serisi G_R nin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak ve $\overline{G}_R$ nin dışında ıraksaktır.

ii) $\forall z\in G_R$ için

$$f(z):=\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}F_{1,m}'(z)+\sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m}\frac{1}{(z-z_o)^2}F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$$

ise $f\in H_0(G_R):=\left\{f: f\in H(G_R) \text{ ve } G_R \text{ de alınan her kapalı C eğrisi için } \int_C f(z)dz=0\right\}$

dir ve F, f nin G_R deki ilkeli olmak üzere, $1<R_1<R$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$a_{k,m}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{k,R_1}}\frac{F(\varsigma).\varphi_k'(\varsigma)}{\varphi_k^{m+1}(\varsigma)}d\varsigma$$

dir.

iii) f fonksiyonunun $\Gamma_{k,R}$ eğrilerinin her biri üzerinde kaldırılabilir olmayan en az bir singüler noktası vardır.

İspat: i) Teorem 13 iv) ye göre k=1 durumunda $\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}F_{1,m}'(z)$ serisinin $B_{1,R}$ de ıraksak $C\overline{B}_{1,R}=G_R\cup\overline{B}_{2,R}$ nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsaktır. Şimdi

$\sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m} \frac{1}{(z-z_o)^2} F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisinin $C\overline{B}_{2,R}$ nin kompakt alt kümeleri üzerinde mutlak ve düzgün yakınsak, $B_{2,R}$ de ıraksak olduğunu gösterelim.

$K \subset C\overline{B}_{2,R}$ keyfi bir kompakt alt küme olsun. Bu durumda $\exists$ R_2, $1< R_2<R$ öyle ki $K \subset C\overline{B}_{2,R_2}$ dir. Maksimum modül teoremine göre $\exists\varsigma = \varsigma(K) \in \Gamma_{2,R_2}$ öyle ki $\forall z \in K$ için

$$\frac{|a_{2,m}|}{|z-z_o|^2}\left|F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right| \le \frac{|a_{2,m}|}{|\varsigma-z_o|^2}\left|F'_{2,m}\left(\frac{1}{\varsigma-z_o}\right)\right|$$

dir. Teorem 17 nin sonucu olarak,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{\frac{|a_{2,m}|}{|\varsigma-z_o|^2}\left|F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right|} = \frac{R_2}{R} < 1$$

elde edilir. Dolayısıyla $\sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m} \frac{1}{(z-z_o)^2} F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi $C\overline{B}_{k,R}$ nin kompakt alt kümeleri üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

$z \in B_{2,R}$ olsun. Bu durumda $\exists$ $r>0$, $1<R<r<+\infty$ öyle ki $z \in \Gamma_{2,r}$ dir. Buradan,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{\frac{|a_{2,m}|}{|\varsigma-z_o|^2}\left|F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right|} = \frac{|\varphi_2(z)|}{R} = \frac{r}{R} > 1$$

olduğundan $\sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m} \frac{1}{(z-z_o)^2} F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi $B_{2,R}$ de ıraksaktır.

Sonuç olarak; $\sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m} \frac{1}{(z-z_o)^2} F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi $C\overline{B}_{2,R}$ bölgesinin kompakt alt kümeleri üzerinde ve $\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m} F'_{1,m}(z)$ serisi $C\overline{B}_{1,R}$ nin kompakt alt kümeleri üzerinde mutlak ve düzgün yakınsak olduklarından $\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m} F'_{1,m}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m} \frac{1}{(z-z_o)^2} F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi $G_R = \bigcap_{k=1}^{2} C\overline{B}_{k,R}$ nin kompakt alt kümeleri üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Benzer ifadeyle; $\sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m} \frac{1}{(z-z_o)^2} F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi $B_{2,R}$ kümesinde ıraksak ve

$\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m} F'_{1,m}(z)$ serisi $B_{1,R}$ kümesinde ıraksak olduğundan

$\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m} F'_{1,m}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m} \frac{1}{(z-z_o)^2} F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi $C\overline{G}_R = \bigcup_{k=1}^{l} B_{k,R}$ de ıraksaktır.

ii) γ, G_R de alınan keyfi kapalı bir eğri olsun.

$\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m} F'_{1,m}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m} \frac{1}{(z-z_o)^2} F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi G_R nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsak olduğundan

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m} F'_{1,m}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m} \frac{1}{(z-z_o)^2} F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right) dz$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m} \int_\gamma F'_{1,m}(z)dz + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m} \int_\gamma \frac{1}{(z-z_o)^2} F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right) dz = 0$$

dir ve bu bize $f \in H_0(G_R)$ olduğunu gösterir. $f \in H_0(G_R)$ olduğundan f fonksiyonu G_R de bir F ilkeline sahiptir ve $F \in H(G_R)$ dir. Teorem 20 ye göre $1<R_1<R$ ise

$$a_{k,m}(F) := \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k,R_1}} \frac{F(z)\varphi'_k(z)}{\varphi^{m+1}{}_k(z)} dz, \quad k = 1, 2,$$

olmak üzere

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{1,m}(F) F_{1,m}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m}(F) F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$$

serisi G_R de F fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{1,m}(F) F_{1,m}{}'(z) - \sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m}(F) F_{2,m}{}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right) \frac{1}{(z-z_o)^2}$$

serisi G_R de $F' = f$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır.

Diğer taraftan $\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m} F'_{1,m}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m} \frac{1}{(z-z_o)^2} F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi G_R nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsak olduğundan

$$f(z) := \sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m} F'_{1,m}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m} \frac{1}{(z-z_o)^2} F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$$

eşitliğinin her iki tarafından integral alınırsa $\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}F_{1,m}(z)-\sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m}F_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)+c$ serisi G_R de F fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır. Buradan da teorem 20 ii) ye göre

$$a_{k,m}=(-1)^{k+1}a_{k,m}(F):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{k,R_1}}\frac{F(z)\varphi_k'(z)}{\varphi_k{}^{m+1}(z)}dz$$

elde edilir.

ii) Eğer f nin en az bir $\Gamma_{k_o,R}$, $k_o\in\{1,2\}$, eğrisi üzerinde kaldırılabilir olmayan bir singüler noktası varsa, f fonksiyonu $R_o>R$ için $\Gamma_{k,R}$, $k\in\{1,2\}\backslash\{k_o\}$, ve Γ_{k_o,R_o} eğrileri ile sınırlı olan bir G_{R,R_o} bölgesine analitik olarak genişleyebilir. Bu durumda, $R_1\in(1,R_o)$ olmak üzere

$$\left|a_{k_o,m}\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{k_o,R_1}}\frac{F(z)\varphi_{k_o}'(z)}{\varphi^{m+1}{}_{k_o}(z)}dz\right|=\frac{1}{2\pi}\int_{|w|=R_1}\left|\frac{F(\psi_{k_o}(w))}{\psi_{k_o}{}^{m+1}(w)}\right||dw|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\frac{1}{R_1{}^{m+1}}\int_{|w|=R_1}\left|F(\psi_{k_o}(w))\right||dw|$$

elde edilir. $M_{k_o}:=\operatorname{Sup}\{|F(\psi_{k_o}(w))|:|w|=R_1\}$ olmak üzere yukarıdaki eşitsizlikten

$$\left|a_{k_o,m}\right|\leq\frac{M_{k_o}}{R_1{}^m}$$

çıkar ve $R_1\in(1,R_o)$ keyfi olduğundan $\overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{\left|a_{k_o,m}\right|}=\frac{1}{R}\leq\frac{1}{R_o}$ elde edilir ki, bu $R_o>R$ olması ile çelişir. Böylece f (z) nin, $\Gamma_{k,R}$, $k\in\{1,2\}$, eğrilerinin her biri üzerinde kaldırılabilir olmayan bir singüler noktası vardır.

Tersine olarak $f\in H_0(G_R)$ ve $R_1\in(1,R)$ alınırsa $f\in H(\overline{G}_{R_1})$ dir ve

$$\tilde{f}(z):=\begin{cases} f(z), & z\in\overline{G}_{R_1};\\ f\left(y(\Gamma_{k,R_1},z)\right), & z\in B_k\cap y(\Gamma_{k,R_1},G_{R_1})\end{cases},\ k=1,2.$$

eşitliği ile tanımlanan $\tilde{f}$ fonksiyonu $R_1<R^*<R$ olan bir $R^*>0$ sayısı için G_{R^*} bölgesinde analitiktir. Başka bir ifade ile f fonksiyonu $\overline{G}_{R_1}$ yi içeren daha geniş bir G_{R^*} bölgesine analitik olarak genişletilebilir. Bu durumda $f\in H_0(G_R)$ ise

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1,R^*}}\frac{\tilde{F}(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{B_{1,R_1}\cap G_{R^*}}\frac{f\left(y(\Gamma_{1,R_1},\zeta)\right).y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_{1,R_1},\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,R^*}}\frac{\tilde{F}(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{B_{2,R_1}\cap G_{R^*}}\frac{f(y(\Gamma_{2,R_1},\zeta).y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_{2,R_1},\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta \qquad (31)$$

dir[18]. Burada F(z), $f(z)$ fonksiyonunun G_R bölgesindeki ilkel fonksiyonudur.

(31) de $\zeta\in B_k$ için $\zeta=\psi_k(w)$, k=1,2 dönüşümünü uyguladığımızda,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R^*}\frac{\tilde{F}(\psi_1(w))}{(\psi_1(w)-z)^2}\psi_1'(w)dw+\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R^*}\frac{\tilde{F}(\psi_2(w))}{(\psi_2(w)-z)^2}\psi_2'(w)dw$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{R_1<|w|<R^*}f(y(\Gamma_{1,R_1},\psi_1(w)).y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_{1,R_1},\psi_1(w))\overline{\psi_1'(w)}\frac{\psi_1'(w)}{(\psi_1(w)-z)^2}d\sigma_w$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{R_1<|w|<R^*}f(y(\Gamma_{2,R_1},\psi_2(w)).y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_{2,R_1},\psi_2(w))\overline{\psi_2'(w)}\frac{\psi_2'(w)}{(\psi_2(w)-z)^2}d\sigma_w \qquad (32)$$

integral gösterimini elde ederiz.

Sonuç 4 ve sonuç 5 e göre $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{F_{1,m}'(z)}{w^{m+1}}$ ve $-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(z-z_o)^2 w^{m+1}}F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serileri

sırası ile $C\overline{B}_{1,R}\times C\overline{D}(0,R)$ ve $C\overline{B}_{2,R}\times C\overline{D}(0,R)$ bölgelerinde $\frac{\psi_1'(w)}{(\psi_1(w)-z)^2}$ ve

$\frac{\psi_2'(w)}{(\psi_2(w)-z)^2}$ fonksiyonlarına hemen hemen düzgün yakınsak olduğundan (32) nin sonucu

olarak $f\in H_0(G_R)$, k=1,2 ve m=1,2,..., için $a_{k,m}(f)$ katsayıları

$$a_{k,m}(f):=\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i}\int_{|w|=R^*}\frac{(\tilde{F}\circ\psi_k)(w)}{w^{m+1}}dw$$

$$-\frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\iint_{R_1<|w|<R^*}\frac{f(y(\Gamma_{k,R_1},\psi_k(w))).y(\Gamma_{k,R_1},\psi_k(w))\overline{\psi_k'(w)}}{w^{m+1}}d\sigma_w \qquad (33)$$

olarak tanımlanırsa aşağıdaki teorem ifade ve ispat edilebilir.

Teorem 24: $f\in H_0(G_R)$ olsun. Bu durumda,

i) (33) ile tanımlı $a_{k,m}(f)$, k=1,2, katsayıları, $1<R_1<R$ olan R_1 sayılarından

bağımsızdır.

ii) $\forall$ k=1,2 için $\overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{|a_{k,m}(f)|} \le \frac{1}{R}$ dir.

İspat: i) (33) de $w = \varphi_k(\varsigma)$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$a_{k,m}(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{k,R^*}} \frac{\tilde{F}(\varsigma)\varphi_k'(\varsigma)}{\varphi_k^{m+1}(\varsigma)}d\varsigma - \frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\iint_{B_{k,R_1}\cap G_{R^*}} \frac{f(y(\Gamma_{k,R_1},\varsigma))y_{\bar{\varsigma}}(\Gamma_{k,R_1},\varsigma)\overline{\varphi_k'(\varsigma)}}{\varphi_k^{m+1}(\varsigma)}d\sigma_\varsigma$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{k,R^*}} \frac{\tilde{F}(\varsigma).\varphi_k'(\varsigma)}{\varphi_k^{m+1}(\varsigma)}d\varsigma - \frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\iint_{B_{k,R_1}\cap G_{R^*}} \frac{\partial}{\partial\bar{\varsigma}}\left(\frac{F(y(\Gamma_{k,R_1},\varsigma)).\varphi_k'(\varsigma)}{\varphi_k^{m+1}(\varsigma)}\right)d\sigma_\varsigma$$

dir. Green teoremine göre,

$$a_{k,m}(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{k,R^*}} \frac{F(y(\Gamma_{k,R_1},\varsigma))\varphi_k'(\varsigma)}{\varphi_k^{m+1}(\varsigma)}d\varsigma - \frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2i}\int_{\Gamma_{k,R^*}} \frac{F(y(\Gamma_{k,R_1},\varsigma))\varphi_k'(\varsigma)}{\varphi_k^{m+1}(\varsigma)}d\varsigma\right.$$

$$\left. - \frac{(-1)^{k+1}}{2i}\int_{\Gamma_{k,R_1}} \frac{F(y(\Gamma_{k,R_1},\varsigma))\varphi_k'(\varsigma)}{\varphi_k^{m+1}(\varsigma)}d\varsigma\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{k,R_1}} \frac{F(y(\Gamma_{k,R_1},\varsigma))\varphi_k'(\varsigma)}{\varphi_k^{m+1}(\varsigma)}d\varsigma$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{k,R_1}} \frac{F(\varsigma).\varphi_k'(\varsigma)}{\varphi_k^{m+1}(\varsigma)}d\varsigma \tag{34}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i}\int_{|w|=R_1} \frac{F(\psi_k(w))}{w^{m+1}}dw \tag{35}$$

Burada $\frac{F(\psi_k(w))}{w^{m+1}}$ fonksiyonu $\{w : 1 < |w| < R\}$ halka bölgesinde analitik olduğundan $a_{k,m}(f)$, $k\in\{1,2\}$, katsayıları R_1 den bağımsızdır.

ii) R_1, $1<R_1<R$ koşulunu sağlayan keyfi bir sayı olsun. (35) den,

$$|a_{k,m}(f)| = \left|\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i}\int_{|w|=R_1} \frac{F(\psi_k(w))}{w^{m+1}}dw\right| \le \frac{1}{2\pi}\frac{1}{R_1^{m+1}}\int_{|w|=R_1} |F(\psi_k(w))||dw|$$

elde edilir. $M_k := \mathrm{Sup}\{|F(\psi_k(w))| : |w| = R_1\}$ ve $M = \max\{M_1, M_2\}$ olmak üzere yukarıdaki eşitsizlikten

$$|a_{k,m}(f)| \le \frac{M}{R_1^m} \tag{36}$$

$R_1\in(1,R)$ keyfi olduğundan (36) nın sonucu olarak $\forall$ k=1,2 için $\overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{|a_{k,m}(f)|} \le \frac{1}{R}$ dir.

Tanım 14: R>1 ve $f \in H_0(G_R)$ olsun. Bu durumda (34) ile tanımlı $a_{k,m}(f)$ katsayılarına f nin genelleştirilmiş Faber-Laurent katsayıları

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}(f)F'_{1,m}(z)+\sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m}(f)\frac{1}{(z-z_0)^2}F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_0}\right) \tag{37}$$

serisine ise f nin genelleştirilmiş Faber-Laurent serisi denir.

Teorem 25: $f \in H_0(G_R)$, R>1, olsun. Bu durumda,

i) (37) serisi G_R nin kompakt alt kümeleri üzerinde f ye düzgün yakınsaktır.

ii) Her sabit k=1,2 için $\{c_{k,m}\}_{m=1}^{\infty}$ kompleks sayı dizileri verilmiş olsun. Bu taktirde

$\sum_{m=1}^{\infty} c_{1,m}F'_{1,m}(z)+\sum_{m=1}^{\infty} c_{2,m}\frac{1}{(z-z_0)^2}F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ serisi G_R nin kompakt alt kümeleri üzerinde f ye düzgün yakınsak ise $\forall$ k=1,2 ve $\forall$ m=1,2,... için $c_{k,m} = a_{k,m}(f)$ dir.

iii) $f \in H_0(G_R)$ nin, $\Gamma_{k,R}$, k=1,2 eğrilerinin her biri üzerinde en az bir kaldırılabilir olmayan singüler noktası varsa,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_{k,m}(f)|} = \frac{1}{R}, \quad k=1,2$$

dir.

İspat: i) $K \subset G_R$ herhangi bir kompakt alt küme ise, $1<r_1<R$ ve $K \subset G_{r_1}$ olacak şekilde bir $r_1>0$ sayısı vardır . f nin genelleştirilmiş Faber-Laurent katsayıları $1<R_1<R$ olan R_1 sayılarından bağımsız olduğundan $a_{1,m}(f)$ ve $a_{2,m}(f)$ katsayılarının tanımında kullanılan R_1 sayısı $1<r_1<R_1<R$ olacak biçimde seçilebilir, bu durumda,

$$a_{k,m}(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{k,R_1}} \frac{F(\varsigma)\varphi'_k(\varsigma)}{\varphi_k^{m+1}(\varsigma)}d\varsigma, \quad k=1,2,$$

dir ve $f \in H_0(G_R)$ olduğundan (32) geçerlidir. sonuç 4 ve sonuç 5 e göre $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{F'_{1,m}(z)}{w^{m+1}}$ ve $-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^2 w^{m+1}}F_{2,m}{}'\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ serileri $G_{r_1} \times CD(0,r_1)$ üzerinde sırası ile $\frac{\psi'_1(w)}{(\psi_1(w)-z)^2}$ ve $\frac{\psi'_2(w)}{(\psi_2(w)-z)^2}$ fonksiyonlarına hemen hemen düzgün yakınsak ve k=1,2 için

$\tilde{F}(\psi_k(w))$ ve $f(y(\Gamma_{k,R_1},\psi_k(w)))y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_{k,R_1},\psi_k(w))\overline{\psi_k'(w)}$ fonksiyonları $R_1 \le |w| \le R^*$ kümesi üzerinde sınırlı olduklarından, $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{F}(\psi_1(w))F_{1,m}'(z)}{w^{m+1}}$ ve $-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{F}(\psi_2(w))}{(z-z_o)^2 w^{m+1}}F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serileri $\partial D(0,R^*)$ üzerinde sırası ile $\frac{\tilde{F}(\psi_1(w))}{(\psi_1(w)-z)^2}\psi_1'(w)$ ve $\frac{\tilde{F}(\psi_2(w))}{(\psi_2(w)-z)^2}\psi_2'(w)$ fonksiyonlarına düzgün yakınsak ve

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(y(\Gamma_{1,R_1},\psi_1(w)).y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_{1,R_1},\psi_1(w))\overline{\psi_1'(w)}\frac{F_{1,m}'(z)}{w^{m+1}}$$

ve

$$-\sum_{m=1}^{\infty} f(y(\Gamma_{2,R_1},\psi_2(w)).y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_{2,R_1},\psi_2(w))\overline{\psi_2'(w)}\frac{1}{(z-z_o)^2 w^{m+1}}F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$$

serileri $R_1 \le |w| \le R^*$ kümesinde sırası ile

$$f(y(\Gamma_{1,R_1},\psi_1(w)).y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_{1,R_1},\psi_1(w))\overline{\psi_1'(w)}\frac{\psi_1'(w)}{(\psi_1(w)-z)^2}$$

ve

$$f(y(\Gamma_{2,R_1},\psi_2(w)).y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_{2,R_1},\psi_2(w))\overline{\psi_2'(w)}\frac{\psi_2'(w)}{(\psi_2(w)-z)^2}$$

fonksiyonlarına düzgün yakınsaktır, dolayısıyla $\forall z \in K$ için

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R^*}\frac{\tilde{F}(\psi_1(w))}{(\psi_1(w)-z)^2}\psi_1'(w)dw - \frac{1}{\pi}\iint_{R_1<|w|<R^*} f(y(\Gamma_{1,R_1},\psi_1(w)).y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_{1,R_1},\psi_1(w))\overline{\psi_1'(w)}\frac{\psi_1'(w)}{(\psi_1(w)-z)^2}d\sigma_w - \sum_{m=1}^{n+1} a_{1,m}(f)F_{1,m}'(z)\right|$$

$$=\left|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R^*}\frac{(\tilde{F}\circ\psi_1)(w)}{w^{m+1}}dw - \frac{1}{\pi}\iint_{R_1<|w|<R^*}\frac{f(y(\Gamma_{1,R_1},\psi_1(w))).y(\Gamma_{1,R_1},\psi_1(w))\overline{\psi_1'(w)}}{w^{m+1}}d\sigma_w\right)F_{1,m}'(z)\right.$$

$$\left.-\sum_{m=1}^{n+1} a_{1,m}(f)F_{1,m}'(z)\right|$$

$$=\left|\sum_{m=n+2}^{\infty} a_{1,m}(f)F_{1,m}'(z)\right|$$

dir. Teorem 9 un bir sonucu olarak $\forall z\in K$ için

$$F_{1,m}'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1,r_1}}\frac{\varphi_1^{m}(\zeta)}{(\varsigma-z)^2}d\varsigma$$

dir ve (36) dan

$$\left|a_{1,m}(f)F_{1,m}'(z)\right|\le C(r_1)\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^m,\quad C(r_1)=\frac{M\ell_{\Gamma_{1,r_1}}}{2\pi d^2(K,\Gamma_{1,r_1})}$$

dir. $0<\frac{r_1}{R_1}<1$ olduğundan

$$\sum_{m=n+2}^{\infty} C(r_1)\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^m=C(r_1)\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^m=C(r_1)\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^{n+2}\frac{R_1}{R_1-r_1}$$

elde edilir. $\lim\limits_{n\to\infty} C(r_1)\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^{n+2}\frac{R_1}{R_1-r_1}=0$ olduğundan $\forall z\in K$ ve $\forall\varepsilon>0$ için $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$

öyle ki $\forall n\in\mathbb{N},\ n\ge N(\varepsilon)$ için

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R^*}\frac{\tilde F(\psi_1(w))}{(\psi_1(w)-z)^2}\psi_1'(w)dw-\frac{1}{\pi}\iint_{R_1<|w|<R^*} f(y(\Gamma_{1,R_1},\psi_1(w)).y_{\bar\zeta}(\Gamma_{1,R_1},\psi_1(w))\overline{\psi_1'(w)}\frac{\psi_1'(w)}{(\psi_1(w)-z)^2}d\sigma_w\right.$$

$$\left.-\sum_{m=1}^{n+1} a_{1,m}(f)F_{1,m}'(z)\right|<\varepsilon$$

dir. Dolayısıyla $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{1,m}(f)F_{1,m}'(z)$ serisi $K\subset G_R$ kompakt alt kümesi üzerinde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R^*}\frac{\tilde F(\psi_1(w))}{(\psi_1(w)-z)^2}\psi_1'(w)dw-\frac{1}{\pi}\iint_{R_1<|w|<R^*} f(y(\Gamma_{1,R_1},\psi_1(w)).y_{\bar\zeta}(\Gamma_{1,R_1},\psi_1(w))\overline{\psi_1'(w)}\frac{\psi_1'(w)}{(\psi_1(w)-z)^2}d\sigma_w$$

fonksiyonuna düzgün yakınsar. Benzer şekilde $\forall z\in K$ için

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R^*}\frac{\tilde F(\psi_2(w))}{(\psi_2(w)-z)^2}\psi_2'(w)dw\right.$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{R_1<|w|<R^*} f(y(\Gamma_{2,R_1},\psi_2(w)).y_{\bar\zeta}(\Gamma_{2,R_1},\psi_2(w))\overline{\psi_2'(w)}\frac{\psi_2'(w)}{(\psi_2(w)-z)^2}d\sigma_w$$

$$-\sum_{m=1}^{n+1}\frac{a_{2,m}(f)}{(z-z_o)^2}F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\Bigg|$$

$$=\left|\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R^*}\frac{(\tilde{F}\circ\psi_2)(w)}{w^{m+1}}dw+\frac{1}{\pi}\iint_{R_1<|w|<R^*}\frac{f(y(\Gamma_{2,R_1},\psi_2(w))).y(\Gamma_{2,R_1},\psi_2(w))\overline{\psi_2'(w)}}{w^{m+1}}d\sigma_w\right)\frac{F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)}{(z-z_o)^2}\right.$$

$$\left.-\sum_{m=1}^{n+1}\frac{a_{2,m}(f)}{(z-z_o)^2}F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right|$$

$$=\left|\sum_{m=n+2}^{\infty}\frac{a_{2,m}(f)}{(z-z_o)^2}F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right|$$

dir. Teorem 14 ün sonucu olarak $\forall z\in K$ için

$$\frac{1}{(z-z_o)^2}F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{2,r_1}}\frac{\varphi_2^{\,m}(\varsigma)}{(\varsigma-z)^2}d\varsigma$$

dir ve (36) dan

$$\left|\frac{a_{2,m}(f)}{(z-z_o)^2}F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)\right|\le C'(r_1)\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^m,\ C'(r_1)=\frac{M\ell_{\Gamma_{2,r_1}}}{2\pi d^2(K,\Gamma_{2,r_1})}$$

dir. $0<\frac{r_1}{R_1}<1$ olduğundan

$$\sum_{m=n+2}^{\infty}C'(r_1)\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^m=C'(r_1)\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^m=C'(r_1)\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^{n+2}\frac{R_1}{R_1-r_1}$$

elde edilir. $\lim\limits_{n\to\infty}C'(r_1)\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^{n+2}\frac{R_1}{R_1-r_1}=0$ olduğundan $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{a_{2,m}(f)}{(z-z_o)^2}F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisinin

de $K\subset G_R$ kompakt alt kümesi üzerinde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R^*}\frac{\tilde{F}(\psi_2(w))}{(\psi_2(w)-z)^2}\psi_2'(w)dw-\frac{1}{\pi}\iint_{R_1<|w|<R^*}f(y(\Gamma_{2,R_1},\psi_2(w)).y_{\bar{\zeta}}(\Gamma_{2,R_1},\psi_2(w))\overline{\psi_2'(w)}\frac{\psi_2'(w)}{(\psi_2(w)-z)^2}d\sigma_w$$

fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu çıkar. Sonuç olarak, $K \subset G_R$ keyfi alınan bir kompakt küme olduğundan $\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}(f) F_{1,m}'(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{2,m}(f)}{(z-z_o)^2} F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi G_R de f fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır.

ii) $\sum_{m=1}^{\infty} c_{1,m} F_{1,m}'(z) + \sum_{m=1}^{\infty} c_{2,m} \frac{1}{(z-z_o)^2} F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi G_R nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsak ise f teorem 23 ii) ye göre $1<R_1<R$ olmak üzere,

$\forall$ k=1,2 ve $\forall$ m=1,2,... için $c_{k,m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k,R_1}} \frac{F(\varsigma).\varphi_k'(\varsigma)}{\varphi_k^{m+1}(\varsigma)} d\varsigma = a_{k,m}(f)$ elde edilir.

iii) Teorem 24 e göre $\forall\, k \in \{1,2\}$ için

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_{k,m}(f)|} \le \frac{1}{R}$$

dir. En az bir $k_o \in \{1,2\}$ için $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_{k_o,m}(f)|} < \frac{1}{R}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda bir $R_o>1$ sayısı vardır, öyle ki,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_{k_o,m}(f)|} = \frac{1}{R_o} < \frac{1}{R}$$

dir. Teorem 23 den $\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}(f) F_{1,m}'(z) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m}(f) \frac{1}{(z-z_o)^2} F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi $\Gamma_{k,R}$, $k \in \{1,2\} \setminus \{k_o\}$, ve Γ_{k_o,R_o} eğrileri ile sınırlı G_{R,R_o} iki bağlantılı bölgesinin kompakt alt kümeleri üzerinde bir h fonksiyonuna düzgün yakınsar ve $h \downarrow G_R = f$ dir. Böylece f nin G_{R,R_o} üzerine bir analitik devamı vardır, bu ise f nin $\Gamma_{k_o,R}$ üzerinde bir singüler noktasının olması ile çelişir. Bu nedenle

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_{k,m}(f)|} = \frac{1}{R},\ k \in \{1,2\}$$

dir.

3. İRDELEME

G, jordan eğrileri ile sınırlı iki bağlantılı sonlu bir bölge, $C\overline{G} = B_1 \cup B_2$, $\infty \in B_1$, $\Gamma_k = \partial B_k$ (k=1,2), $CG = \mathbb{C}_\infty \backslash G$, $z_o \in B_2$, $F_{1,n}(z)$, CB_1 in n. dereceden Faber polinomu ve $F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$, CB_2 nin n. dereceden Faber polinomları olsun. R>1 için $\Gamma_{k,R}$ eğrileri ile sınırlanan sınırlı iki bağlantılı bölgeyi G_R ile gösterelim. $f \in H_0(G_R)$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu G_R de bir F ilkel fonksiyonuna sahiptir. $F \in H(G_R)$ olduğundan Teorem 20 ye göre

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}(F)F_{1,n}(z) + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}(F)F_{2,n}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$$

serisi G_R de F fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}(F)F_{1,n}'(z) - \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n}(F)\frac{1}{(z-z_o)^2}F_{2,n}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$$

serisi G_R de $F' = f$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır. Teorem 25 e göre de $f \in H_0(G_R)$ fonksiyonuna G_R de

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}(f)F_{1,m}'(z) + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m}(f)\frac{1}{(z-z_o)^2}F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right) \tag{38}$$

serisi karşılık gelir ve bu seri G_R de f fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır, G_R de seriye açılım tektürlü olacağından $a_{k,m}(f) = (-1)^{k+1}a_{k,m}(F)$ elde edilir. Bu aynı zamanda (34) eşitliğinin doğruluğunun başka bir ispatı olarak ta ele alınabilir.

V.I. Smirnov, N.A Lebedev [10] de $f \in H(G_R)$ fonksiyonu

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(\psi\left(re^{i\theta}\right)\right)\right|d\theta \le M_1, \quad 1<r<R, \quad M_1<\infty,$$

koşulunun sağlandığında $z \in \overline{G}_r$, 1<r<R, için

$$\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)\right| \le M_1\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}$$
$$\times\left\{\frac{R}{R-r} + \left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}\sqrt{\left[\frac{(n+1)R^2}{R^2-1} + \frac{R^2}{(R^2-1)^2}\right]\ln\left(\frac{r^2}{r^2-1}\right)}\right\}$$

ve $z \in G$ için

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) \right| \le \frac{M_1}{R^n} \left\{ \frac{2\sqrt{e}}{R-1} + \sqrt{\left[\frac{n+1}{R^2-1} + \frac{1}{(R^2-1)^2} \right] \ln(n+2)} \right\}$$

değerlendirmelerini vermiştir.

G, Γ yarıkonform eğrisi ile sınırlı sonlu bölge olduğunda A. Çavuş' un [15] deki çalışmasında $A^2(G)$ uzayına ait olan fonksiyonlar için G nin Faber polinomları yardımı ile genelleştirilmiş Faber serileri tanımlandı, bu serilerin G nin kompakt alt kümeleri üzerinde f ye düzgün yakınsaklığı incelendi ve $S_n(f, z)$ bu serinin n. kısmi toplamlar dizisi ve $E_n(f, G)$, $\|\cdot\|_{A^2(G)}$ normuna göre $\wp_n$ deki polinomlarla f ye en iyi yaklaşımın derecesi olmak üzere $\|f - S_n(f, .)\|_{A^2(G)}$ normu için $E_n(f, G)$ ye bağlı bir değerlendirme verildi.

Bu tezde ise, G, sonuç 2 nin koşullarını sağlayan bir kontinyum olmak üzere G nin Faber polinomları yardımı ile $f \in A^2(G_R)$, R>1, için genelleştirilmiş Faber serileri tanımlandı ve $f \in A^2(G_R)$ için (26), (27) değerlendirmeleri elde edildi.

4. SONUÇLAR

1. G, sonuç 2 nin koşullarını sağlayan bir kontinyum olmak üzere $f \in A^2(G_R)$, R>1, ve $S_n(f,z)=\sum_{k=1}^{n+1} a_k(f)F_k'(z)$ G nin genelleştirilmiş Faber polinomu, R>1 ve $f \in A^2(G_R)$ olsun. Bu durumda ;

i) $\forall \in \mathbb{N}$ için

$$\|f-S_n(f,.)\|_{A^2(\overline{G}_r)} \leq \frac{R\|f\|_{A^2(G_R)}}{\sqrt{(R^2-R_r{}^2)}}\left(\frac{R_r}{R}\right)^{n+2}$$

ii) Yeteri kadar büyük $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\|f-S_n(f,.)\|_{A^2(G)} \leq \frac{cR\sqrt{e}\|f\|_{A^2(G_R)}}{\sqrt{(R^2-1)}}\left(\frac{1}{R}\right)^{n+2}$$

değerlendirmeleri elde edildi.

2. $f \in H(G_R)$, R>1, olsun. Eğer f fonksiyonu Γ_R üzerinde kaldırılabilir olmayan bir singüler noktaya sahip ise;

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n+2]{E_n(f,\overline{G}_r)} = \frac{r}{R},$$

dir.

G, jordan eğrileri ile sınırlı iki bağlantılı sonlu bir bölge, $C\overline{G}=B_1 \cup B_2$, $\infty \in B_1$, $\Gamma_k=\partial B_k$ (k=1,2) olsun. $\Gamma_{k,R}$ seviye eğrileri ile sınırlanan sonlu iki bağlantılı bölgeyi G_R ile gösterelim. Bu durumda;

3. Her sabit k=1,2 için $\{a_{k,m}\}_{m=1}^{\infty}$,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_{k,m}|} = \frac{1}{R} < 1,$$

koşulunu sağlayan iki kompleks sayı dizisi ise,

i) $$\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}F_{1,m}'(z)+\sum_{m=1}^{\infty} a_{2,m}\frac{1}{(z-z_o)^2}F_{2,m}'\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$$

serisi G_R nin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak ve $\overline{G}_R$ nin dışında ıraksaktır.

ii) $\forall z \in G_R$ için

$$f(z):=\sum_{m=1}^{\infty}a_{1,m}F'_{1,m}(z)+\sum_{m=1}^{\infty}a_{2,m}\frac{1}{(z-z_o)^2}F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$$

ise $f\in H_0(G_R):=\left\{f: f\in H(G_R) \text{ ve } G_R \text{ de alınan her kapalı C eğrisi için } \int_C f(z)dz=0\right\}$

dir ve F, f nin G_R deki ilkeli olmak üzere, $1<R_1<R$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$a_{k,n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{k,R_1}}\frac{F(\varsigma).\varphi'_k(\varsigma)}{\varphi_k^{m+1}(\varsigma)}d\varsigma$$

dir.

iii) f fonksiyonu $\Gamma_{k,R}$ eğrilerinin her biri üzerinde kaldırılabilir olmayan en az bir singüler noktaya sahiptir.

4) $f\in H_0(G_R)$ ise,

i) (33) ile tanımlı $a_{k,m}(f)$, k=1,2, katsayıları, $1<R_1<R$ olan R_1 sayılarından bağımsızdır.

ii) $\forall$ k=1,2 için $\overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{|a_{k,m}(f)|}\le\frac{1}{R}$ dir.

5. $f\in H_0(G_R)$, R>1, olsun. Bu durumda,

i) (37) serisi G_R nin kompakt alt kümeleri üzerinde f ye düzgün yakınsaktır.

ii) Her sabit k=1,2 için $\{c_{k,m}\}_{m=1}^{\infty}$ kompleks sayı dizileri verilmiş olsun. Bu taktirde

$\sum_{m=1}^{\infty}c_{1,m}F'_{1,m}(z)+\sum_{m=1}^{\infty}c_{2,m}\frac{1}{(z-z_o)^2}F'_{2,m}\left(\frac{1}{z-z_o}\right)$ serisi G_R nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsak ise $\forall$ k=1,2 ve $\forall$ m=1,2,... için $c_{k,m}=a_{k,m}(f)$ dir.

iii) $f\in H_0(G_R)$, $\Gamma_{k,R}$, k=1,2 eğrilerinin her biri üzerinde en az bir kaldırılabilir olmayan singüler noktaya sahipse,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\sqrt[m]{|a_{k,m}(f)|}=\frac{1}{R},\quad k=1,2$$

dir.

5. ÖNERİLER

1) G, yarıkonform sınırlı iki bağlantılı sonlu bir bölge ve $0 \notin G$ olsun. γ, Γ iki yarıkonform eğri olmak üzere $\partial G = \gamma \cup \Gamma$, $\gamma \subset I(\Gamma)$, ve $\{F_n\}, \{\tilde{F}_n\}$ sırası ile $\overline{I(\Gamma)}$ ve $\overline{E(\gamma)}$ nin Faber polinomları dizisi ise $A(\overline{G})$, $A^2(G)$ ve $E^p(G)$ uzaylarındaki fonksiyonlara $\left\{\sum_{k=1}^{n+1} a_k F_k'(z) + \sum_{k=1}^{n+1} \tilde{a}_k \tilde{F}_k'\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$ şeklindeki bir fonksiyon dizisi ile yaklaşım problemi incelenebilir.

2) T:B→B, B kompleks Banach uzayı üzerinde bir sınırlı lineer operatör; f, T nin $S_p(T)$ spektrumunu içeren bir D bölgesinde analitik bir fonksiyon; E, $S_p(T)$ yi içeren en küçük basit bağlantılı kompakt küme; $F_n(z)$, E nin Faber polinomları; $\varphi: CE \to C\overline{D}(0,1)$, $\varphi(\infty) = \infty$ ve $\lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > o$ koşullarını sağlayan konform dönüşüm ve $\psi := \varphi^{-1}$ olsun. Bu durumda

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(T)$$

dir[18]. Burada

$$f(T) := \frac{1}{2\pi} \int_C f(z)(z-T)^{-1} dz$$

ve

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\psi(w))}{w^{n+1}} dw$$

ile tanımlı olup, $\overline{C}$, $I(\overline{C}) \supset E$ olan bir eğri, C, $C \subset I(\overline{C})$ ve $I(C) \supset E$ koşullarını sağlayan bir eğri ve $C' = \varphi(\overline{C})$ dir. $A(\overline{G})$, $A^2(G)$ ve $E^p(G)$ uzaylarındaki fonksiyonlara $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k F_k(T)\right\}$ şeklindeki fonksiyon dizileri ile yaklaşım problemi ∂G sınırının özelliklerine bağlı olarak incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Greene, R. E. ve Krantz, S. G., Function theory of one complex variable, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1997.

2. Davis, P. J., Interpolation and approximation, Blaisdell Pub. Co., New York, 1963.

3. Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, Silverman, R.A., Volume 3, Prentice-Hall, INC., N.J., 1967

4. Markushevich, A.I., Theory of Functions of A Complex Variable, Volume 1, Prentice-Hall, Inc., USA, 1965.

5. Ahlfors, L.V., Lectures on Quasiconformal Mappings, Van Nostrand Company, USA, 1987.

6. Andrievskii, V.V., Belyi, V.I. ve Dzjadyk, V.K., Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Variable, Çeviren: Kravchuk, D.N., World Federation Publishers, Inc., Atlanta, Georgia, 1995.

7. Lehto, O., ve Virtanen, K.I., Quasiconformal Mappings in the Plane, Second Eddition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1973.

8. Gonzalez, M.O., Classical Complex Analysis, Markel Dekker,Inc., U.S.A., 1992.

9. Belyi, V. I., Conformal mappings and approximation of analytic functions in domains with quasiconformal boundary, Math. USSR-Sb., 31 (1977) 289-317.

10. Smirnov,V. I. ve Lebedev, N. A., The consructive theory of functions of a complex variable, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1968.

11. Gaier, D., Lectures on Complex Approximation, Birkhauser Boston, Inc., U.S.A., 1987.

12. Suetin, P. K.,Series of Faber Polynomials, V.1, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam,1998.

13. İşcan, İ., Faber Polinomları ve Yaklaşım Özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1996.

14. Israfilov, D. M., On approximation by partial sums of generalized Faber series in domains with Quasiconformal boundary, Izv. Acad. Nauk. Az. SSR, 5 (1981) 10-16.

15. Çavuş, A., Approximation by generalized Faber series in Bergman spaces on finite regions with a Quasiconformal boundary, Journal of Approximation Theory, 87,1 (1996) 25-35.

16. Dyn'kin E. M., The Rate of Polynomial Approximation in the Complex Domain, Lecture Notes in Mathematics, 864 (1981) 90-142.

17. Dveirin, M. Z., On approximation of analytical functions in multiconnected domains, Izv. Acad. Nauk. Arm. SSR, 17,1 (1982) 48-61.

18. Hasson, M., Expansions of Analytic Functions of an Operator in Series of Faber Polynomials, Bull. Ausral. Math. Soc., 56 (1997) 303-318.

ÖZGEÇMİŞ

İmdat İŞCAN, 07.05.1972 tarihinde Giresun'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Giresun'da tamamladı. 1988 yılında K.T.Ü. Fatih Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandı ve bu bölümden 1992 yılında birincilikle mezun oldu.

1992-1993 Eğitim-Öğretim yılında Çayeli-Rize'de öğretmen olarak görev yaptı. 1993 yılında K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans programına ve aynı yıl K.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı.

Şubat 1996 da Yüksek Lisans programından mezun olup, aynı üniversitede Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora programına başladı. Halen K.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.