

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**İKİ BARIYERLİ YARI-MARKOV RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜREÇLERİNİN
ASİMPOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ ÜZERİNE**

139252

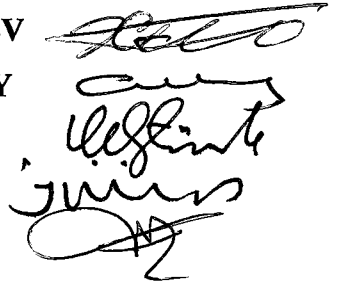
Zafer KÜÇÜK

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
“Doktor”
Ünvanı verilmesi için kabul edilen tezdır.**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 27.05.2003
Tezin Savunma Tarihi : 11.07.2003

138252

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Tahir KHANIYEV
Juri Üyesi : Prof. Dr. Osman GÜRSOY
Juri Üyesi : Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK
Juri Üyesi : Doç. Dr. İhsan ÜNVER
Juri Üyesi : Doç. Dr. Hilmi ZENGİN



Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Yusuf AYVAZ



Trabzon 2003

**T.C. YÖKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, iki bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri ele alınmış ve bu süreçlerin olasılık karakteristikleri hem asimptotik, hem de simülasyon yöntemleriyle incelenmiştir.

Tezin konusunu belirleyen ve tezde ele alınan problemlerin çözülmesinde her türlü katkılarını esirgemeyen danışmanım sayın Doç. Dr. Tahir KHANİYEV'e en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Ayrıca bu tezin ortaya çıkmasındaki desteklerinden dolayı Doç. Dr. İhsan ÜNVER'e ve bugünlere gelmemdeki katkılarından dolayı Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü öğretim üyelerinden Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK'e ve Bakü Devlet Üniversitesi öğretim üyelerinden Prof. Dr. Tamilla NASİROVA'ya şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmam süresince desteklerinden dolayı K.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü ve İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü mensuplarına, simülasyon çalışmamdaki yardımlarından dolayı Arş. Gör. Tolga Berber'e ve her konudaki desteğinden dolayı Arş. Gör. Zöhre Kara'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Doktora süresince yaptıkları maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme şükranlarımı sunarım.

Zafer KÜÇÜK
Trabzon 2003

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VII
TABLolar DİZİNİ.....	IX
SEMBOLLER DİZİNİ.....	XII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş ve Ön Bilgiler.....	1
1.2. Literatür Araştırması.....	5
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR ve BULGULAR.....	11
2.0. Fiziksel Model.....	11
2.1. $X(t)$ Sürecinin Matematiksel Kuruluşu ve Gösterimler.....	14
2.2. $X(t)$ Sürecinin Bir Boyutlu Dağılımları.....	15
2.3. $X(t)$ Sürecinin Toplamsal Fonksiyonelinin ($J_f(t)$) Dağılımı.....	19
2.4. $X(t)$ Sürecinin Ergodikliği.....	22
2.5. $X(t)$ Sürecinin Ergodik Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu.....	26
2.6. $X(t)$ Sürecinin Ergodik Dağılımının Birinci ve İkinci Momentleri İçin Kesin Formüller.....	30
2.7. Özel Durum: İki Taraflı Üstel Dağılım.....	35
2.7.1. İki Taraflı Üstel Özel Durumu İçin Simülasyon Sonuçları.....	42
2.8. Genel Durum: Wald Yaklaşımı Yardımıyla $X(t)$ Sürecinin İncelenmesi.....	59
2.9. $X(t)$ Sürecinin Ergodik Dağılımı İçin Zayıf Yakınsama Teoremi.....	67
2.9.1. İki taraflı Üstel Dağılım Durumunda $W_a(t)$ nin Ergodik Dağılımının Teorik, Asimptotik ve Simülasyon Değerlerinin Karşılaştırılması.....	72
2.10. τ_1 Sınır Fonksiyonelinin İncelenmesi.....	83
2.11. Normal Dağılım İçin Simülasyon Sonuçları.....	88
3. İRDELEME.....	92

4. SONUÇLAR.....	93
5. ÖNERİLER.....	94
6. KAYNAKLAR.....	95
EKLER.....	102
ÖZGEÇMİŞ.....	120



ÖZET

İki bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri ile ilgili literatürde pek çok çalışma bulunmaktadır. Bu bariyerler yansıtan, tutan, yutan, v.b. gibi özelliklere sahip bariyerlerdir ve bu çalışmalarda elde edilen sonuçlar oldukça teorik olup uygulama için kullanışlı değildir. Ele alınan model için ise bir çok asimptotik sonuçlar elde edilebilir ki, bu sonuçlar fizikçiler veya mühendisler için büyük önem taşımaktadır.

Yapılan bu çalışmada, 0 ve β , $\beta > 0$ seviyelerinde iki bariyer bulunan yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci $X(t)$ ve bu sürecin önemli bir sınır fonksiyoneli olan, sürecin ilk kez bariyerlere ulaşma anı τ_1 matematiksel olarak kurulmuş, τ_1 rasgele değişkeninin momentleri için açık formüller verilmiştir. $X(t)$ sürecinin ve toplamsal fonksiyoneli olan $J_r(t)$ 'nin dağılım fonksiyonları bir $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin bilinen olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade edilmiştir. En genel şartlar altında süreç için ergodik teorem ispatlanmış ve sürecin ergodik dağılım fonksiyonu $\{T_n\}$ ve $\{S_n\}$ süreçlerinin olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade edilmiştir. Sürecin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu N ve S_N sınır fonksiyonelleri yardımı ile ifade edilerek birinci ve ikinci momenti için kesin ifadeler elde edilmiştir. η_1 başlangıç rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametrelili iki taraflı üstel dağılıma sahip olduğu durumda süreç ayrıntılarıyla incelenmiştir. Ayrıca süreç için zayıf yakınsama teoremi verilmiş ve son olarak, simülasyon yöntemlerini de kullanarak η_1 rasgele değişkeni normal dağılıma sahip olduğunda sürecin sınır fonksiyonelleri N , S_N için ve sürecin ergodik dağılımının ilk 4 momenti için iki terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Stokastik süreç, Rasgele yürüyüş süreci, Yenileme süreci, Ödüllü yenileme süreci, Wald özdeşliği, Spitzer özdeşliği, Basamak değişkenleri, Wiener-Hopf faktörizasyonu, Zayıf yakınsama, Asimptotik açılım.

SUMMARY

On The Asimptotic Behaviour of The Semi-Markovian Random Walk With Two Barriers

Many studies exist about random walk processes with two barriers in literature. These barriers have some properties like reflecting, delaying, absorbing etc. And these results which were found by those studies are theoretical and are not applicable for practice. Many asymptotic results that are very important for engineers and physicists can be found in our observing model.

In this study, semi-Markovian random walk process $X(t)$ with two barriers at 0 and $\beta(> 0)$, and the moment τ_1 that process reaches the barriers, which is an important boundary functional for this process, are constructed mathematically and exact formulas are given for moments of random variable τ_1 .

Distribution function of $X(t)$ process and its additive functional $J_f(t)$ are explained by means of known probability characteristics of a $\{T_n\}$ renewal process and $\{S_n\}$ random walk process. Ergodic theorem is proved in very general conditions and ergodic distribution function of the process is obtained by probability characteristics of $\{T_n\}$ and $\{S_n\}$ process. Characteristic function of the ergodic distribution of the process is explained by N and S_N boundary functional and exact expressions are found for its first and second moment. In case η_1 random variable has two sided exponential distribution with $\lambda > 0$ parameter, the process is examined in detail. Weakly convergence theorem is also given for the process. Finally, two-termed asymptotic expansion is obtained for first-four moments of boundary functional N and S_N , and ergodic distribution of the process in the case where η_1 random variable has normal distribution by using simulation methods.

Key Words: Stochastic process, Random walk process, Renewal process, Reward renewal process, Wald identity, Spitzer identity, Ladder variable, Wiener-Hopf factorization, Weak convergence, Asymptotic expansion.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. İki bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü.....	13
Şekil 2. $\beta = 10$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği.....	43
Şekil 3. $\beta = 10$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği.....	43
Şekil 4. $\beta = 20$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği.....	44
Şekil 5. $\beta = 20$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği.....	44
Şekil 6. $\beta = 30$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği.....	45
Şekil 7. $\beta = 30$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği.....	45
Şekil 8. $\beta = 30$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği.....	46
Şekil 9. $\beta = 30$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği.....	46
Şekil 10. $\beta = 50$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği.....	47
Şekil 11. $\beta = 50$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği.....	47
Şekil 12. $\beta = 60$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği.....	48
Şekil 13. $\beta = 60$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği.....	48
Şekil 14. $\beta = 70$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği.....	49
Şekil 15. $\beta = 70$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği.....	49
Şekil 15. $\beta = 80$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği.....	50
Şekil 16. $\beta = 80$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği.....	50
Şekil 17. $\beta = 90$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği.....	51
Şekil 18. $\beta = 90$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği.....	51
Şekil 19. $\beta = 100$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği.....	52
Şekil 20. $\beta = 100$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği.....	52
Şekil 21. $\lambda = 1$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği.....	53
Şekil 22. $\lambda = 2$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği.....	53
Şekil 23. $\lambda = 3$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği.....	54

Şekil 24. $\lambda=5$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği.....	54
Şekil 25. $\lambda=10$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği.....	55
Şekil 26. $\lambda=0.5$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği.....	56
Şekil 27. $\lambda = 0.3\bar{3}$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği..	57
Şekil 28. $\lambda = 0.2$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği...	57
Şekil 29. $\lambda = 0.1$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği...	58



TABLULAR DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. $\beta = 10$ için beklenen değer ve varyansın teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	42
Tablo 2. $\beta = 20$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	43
Tablo 3. $\beta = 30$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	44
Tablo 4. $\beta = 40$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	45
Tablo 5. $\beta = 50$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	46
Tablo 6. $\beta = 60$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	47
Tablo 7. $\beta = 70$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	48
Tablo 8. $\beta = 80$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	49
Tablo 9. $\beta = 90$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	50
Tablo 10. $\beta = 100$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	51
Tablo 11. $\lambda = 1$ için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	52
Tablo 12. $\lambda = 2$ için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	53
Tablo 13. $\lambda = 3$ için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	54
Tablo 14. $\lambda = 5$ için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	54
Tablo 15. $\lambda = 10$ için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	55
Tablo 16. $\lambda = 0.5$ için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görelî fark tablosu.....	56

Tablo 17. $\lambda = 0.33$ için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu.....	56
Tablo 18. $\lambda = 0.2$ için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu.....	57
Tablo 19. $\lambda = 0.1$ için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu.....	58
Tablo 20. $\lambda=0.2$ için $\tilde{\delta}$ hataları tablosu.....	72
Tablo 21. $\lambda=0.333$ için $\tilde{\delta}$ hataları tablosu.....	72
Tablo 22. $\lambda=0.5$ için $\tilde{\delta}$ hataları tablosu.....	73
Tablo 23. $\lambda=1$ için $\tilde{\delta}$ hataları tablosu.....	73
Tablo 24. $\lambda=2$ için $\tilde{\delta}$ hataları tablosu	74
Tablo 25. $\lambda=3$ için $\tilde{\delta}$ hataları tablosu.....	74
Tablo 26. $\lambda=10$ için $\tilde{\delta}$ hataları tablosu.....	75
Tablo 27. $\beta=10$, $\lambda = 8$ ve $\lambda = 9$ için hatalar tablosu.....	75
Tablo 28. $\beta=20$, $\lambda = 7$ ve $\lambda = 8$ için hatalar tablosu.....	76
Tablo 29. $\beta=30$, $\lambda = 3$ ve $\lambda = 6$ için hatalar tablosu.....	76
Tablo 30. $\beta=30$, $\lambda = 7$ ve $\lambda = 8$ için hatalar tablosu.....	76
Tablo 31. $\beta=30$, $\lambda = 9$ için hatalar tablosu.....	77
Tablo 32. $\beta=40$, $\lambda = 6$ ve $\lambda = 7$ için hatalar tablosu.....	77
Tablo 33. $\beta=40$, $\lambda = 8$ ve $\lambda = 9$ için hatalar tablosu.....	77
Tablo 34. $\beta=50$, $\lambda = 5$ ve $\lambda = 6$ için hatalar tablosu.....	78
Tablo 35. $\beta=50$, $\lambda = 7$ ve $\lambda = 8$ için hatalar tablosu.....	78
Tablo 36. $\beta=50$, $\lambda = 9$ için hatalar tablosu.....	78
Tablo 37. $\beta=60$, $\lambda = 5$ ve $\lambda = 6$ için hatalar tablosu.....	79
Tablo 38. $\beta=60$, $\lambda = 7$ ve $\lambda = 8$ için hatalar tablosu.....	79
Tablo 39. $\beta=60$, $\lambda = 5$ ve $\lambda = 6$ için hatalar tablosu.....	79
Tablo 40. $\beta=70$, $\lambda = 7$ ve $\lambda = 8$ için hatalar tablosu.....	80
Tablo 41. $\beta=80$, $\lambda = 5$ ve $\lambda = 6$ için hatalar tablosu.....	80
Tablo 42. $\beta=80$, $\lambda = 7$ ve $\lambda = 8$ için hatalar tablosu.....	80

Tablo 43. $\beta=90$, $\lambda=5$ ve $\lambda=6$ için hatalar tablosu.....	81
Tablo 44. $\beta=90$, $\lambda=7$ ve $\lambda=8$ için hatalar tablosu.....	81
Tablo 45. $\beta=100$, $\lambda=4$ ve $\lambda=5$ için hatalar tablosu.....	81
Tablo 46. $\beta=100$, $\lambda=6$ ve $\lambda=7$ için hatalar tablosu.....	82
Tablo 47. $\beta=100$, $\lambda=8$ için hatalar tablosu.....	82
Tablo 48. $E(N_1)$ nin simülasyon değeri ile asimptotik değerinin karşılaştırılması.....	88
Tablo 49. $E(N_1^2)$ nin simülasyon değeri ile asimptotik değerinin karşılaştırılması.....	89
Tablo 50. $E(S_N^2)$ nin simülasyon değeri ile asimptotik değerinin karşılaştırılması.....	89



SEMBOLLER DİZİNİ

$a=b$	a eşittir b
$a \leftrightarrow b$	a, b ile tanımlıdır
$a \neq b$	a farklıdır b
$a < b$	a küçüktür b
$a > b$	a büyüktür b
$a \leq b$	a küçüktür veya eşittir b
$a \geq b$	a büyüktür veya eşittir b
$a \in A$	a A'nın elemanıdır
$a \notin A$	a A'nın elemanı değildir
(a, b)	açık aralık
$(a, b]$	soldan açık, sağdan kapalı aralık
$[a, b)$	soldan kapalı, sağdan açık aralık
$[a, b]$	kapalı aralık
$ a $	a sayısının mutlak değeri
$\lfloor a \rfloor$	a sayısının tam kısmı
$a < \infty$	a sonludur
\forall	her
\exists	en az bir
:	öyleki
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^+	$\mathbb{R} \cup \{0\} = [0, \infty)$
$A \subset B$	A kümesi B kümesini alt kümesidir
$A \supset B$	A kümesi B kümesini içerir
$A \subseteq B$	A kümesi B kümesinin alt kümesidir
$A \supseteq B$	A kümesi B kümesini içerir
$\min A$	A kümesinin minimumu
$\max A$	A kümesinin maksimumu
$\inf A$	A kümesinin infimumu

$\sup A$	A kümesinin supremumu
$\sum_{k=1}^m a_k$	a_1, a_2, \dots, a_m sayılarının toplamı
$\prod_{k=1}^m a_k$	a_1, a_2, \dots, a_m sayılarının çarpımı
$\prod_{k=1}^m \cdot (a_n^{(k)})$	$a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \dots, a_n^{(m)}$ dizilerinin konvolüsyon çarpımı
$\prod_{k=1}^m \cdot f_k$	f_1, f_2, \dots, f_n fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı
$P\{\cdot\}$	$\{\cdot\}$ olayının olasılığı
$P_z\{\cdot\}$	$\{\cdot\}$ olayının koşullu olasılığı
$E[\xi]$	ξ rasgele değişkeninin beklenen değeri
$E_z[\xi]$	ξ rasgele değişkeninin koşullu beklenen değeri
$\text{Var}[\xi]$	ξ rasgele değişkeninin varyansı
$\text{Var}_z[\xi]$	ξ rasgele değişkeninin koşullu varyansı
$f(x) _{x=0}$	$f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki değeri
$d_x F(x, y)$	$F(x, y)$ fonksiyonunun z değerine göre diferansiyeli
$\frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x, y)$	$F(x, y)$ fonksiyonunun x değerine göre n . kısmi türevi
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	$f(x)$ fonksiyonunun $x \rightarrow \infty$ için limiti

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş ve Ön Bilgiler

Bilim adamlarının pek çoğu olasılık hesabının doğuşunu Blaise Pascal (1623-1662) ile Pierre de Fermat (1601-1665)' in XVII. yüzyıldaki yazışmalarına bağlıyorlar. Ancak bu dönemdeki Olasılık Teorisinin oluşumundaki en önemli rol Jacob (James, Jacques) Bernoulli'e (1654-1705) aittir. Jacop Bernolli'nin elde ettiği en önemli sonuç "En Büyük Sayılar Kanunudur". Bu kanun Olasılık Teorisinin uygulamaları için temel oluşturmaktadır. Bu kanun ilk kez J. Bernoulli'nin ölümünden sonra 1713 yılında yayınlanan "Ars Conectandi (The Art of Conjecture)" isimli kitabında limit teoremi şeklinde yer almıştır. "Büyük Sayılar Kanunu" kavramı 1835 yılında Poission tarafından teklif edilmiştir. J. Bernoulli'den sonraki dönemde (XVIII. ve XIX. yüzyılın birinci yarısı) Olasılık Teorisinde iz bırakmış bilim adamlarından Pierre-Remond de Montmort (1678-1719), Abraham de Moivre (1667-1754), Thomas Bayes (1702-1761), Pierre Simon de Laplace (1749-1827), Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ve Simon Denis Poisson (1781-1840)'u sıralamak mümkündür. Bu dönemde Olasılık Teorisinin analitik yöntemleri geliştirilmeye başlanmıştır. Moivre'nin ismi daha çok Binom dağılımının normal dağılımına yaklaşımıyla bilinmektedir. "Büyük Sayılar Kanunu"nda J. Benoulli frekansların, belli bir anlamda, olasılığa yakınsadığını göstermişse de, Moivre normal yaklaşım ile beklenen değerden sapmaların davranışındaki diğer bir evrensel kuralı ortaya koymuştur. Moivre'nin bu sonucunu ifade eden "İntegral Limit Teoremi" o kadar büyük öneme sahip idi ki bu teorem sonraki dönemlerde "Olasılık Teorisinin Merkezi Limit Teoremi" olarak anılmaya başlandı. Bu dönemin en değerli bilim adamı olarak Laplace kabul edilmektedir. Laplace'ın "Theorie Analytique des Probabilites" (1812) adlı kitabı XIX. yüzyılda Olasılık Teorisi üzerine yazılmış temel ders kitabı sayılmıştır. Hatalar teorisinde normal dağılım kullanılması Laplace ve Gauss'un isimlerine bağlıdır.

XIX. yüzyılın ikinci yarısından itibaren Olasılık Teorisinin temel problemlerinin incelenmesinde P.L. Chebishev (1821-1894), A.A. Markov (1856-1922), A.M. Liapunov (1857-1918) vs. büyük rol oynamışlardır. Örneğin, Chebishev rasgele değişkenler ve beklenen değer kavramlarının Olasılık Teorisinde önemli yer almasına büyük katkıda bulunmuştur. Diğer taraftan bu dönemde, J. Bernoulli, Moivre, Laplace ve başkalarının

elde ettikleri sonuçlar daha genel bir biçimde incelendi. Bu sonuçlar genel olarak bağımsız rasgele değişkenler dizisi ile ilgili idiler. Fakat A.A. Markov tarafından bağımlı rasgele değişkenler dizinin ele alınması ve incelenmesi ile olasılık teorisinde yeni bir dalın temeli atılmış oldu.

Bu dönemde Olasılık Teorisinin gelişmesinde büyük rolü olan bilim adamlarından Henri Poincare (1854-1912), James Clerk Maxwell (1831-1879), Ludwig Boltzman (1844-1906), J. Willard Gibbs (1839-1903), Albert Einstein (1879-1955), Marian Smoluchowski (1872-1941), Emile Borel (1871-1956), Henri Lebesgue (1875-1941), David Hilbert (1862-1943), S.N. Bernshtein (1880-1968), Richard Van Mises (1883-1953), Bruno de Finetti (1906-1985), Abraham Wald (1902-1950), A.Y. Khinchin, A.N. Kolmogorov (1903-1987) vs. isimlerini saymak mümkündür. 1930 yılında A.N. Kolmogorov "Olasılık Teorisinin Analitik Yöntemleri" isimli çalışmasında Markov Süreçleri Teorisinin temellerini atmıştır. A.N. Kolmogorov, aynı çalışmada Olasılık Teorisinin ve ayrıca Markov Süreçleri Teorisinin Matematiksel Analiz, Diferansiyel Denklemler (adi veya kısmı), mekanik, fizik vs. gibi bilim dalları ile sıkı ilişkide olduğunu ortaya koymuştur. 1933 yılında yayınlanan "Foundations of The Theory of Probability" kitabında ise modern Olasılık Teorisinin Matematiksel temelini atmıştır. Bu kitapta "Temel Teorem" diye verilen bir teoremden, verilmiş sonlu boyutlu dağılımlara göre Stokastik Sürecin inşa edilebilmesinin mümkünlüğü ispat edilmiştir.

A.N. Kolmogorov'un bu iki çalışması hem Genel Olasılık Teorisinin hem de Stokastik Süreçler Teorisinin hızlı bir biçimde gelişmesine neden olmuştur. XX. yüzyılın II. yarısından sonra Stokastik Süreçler Teorisinin gelişmesinde ve derinleşmesinde büyük hizmetleri olmuş bilim adamlarından J.L. Doob, N. Winer, A.V. Skorokhod, W. Feller, E. Dinkin, E. Çinlar, T. Sarimsakov, P. Levy, K. Ito, I.I. Gihman, P. Spitzer vs. isimlerini sıralamak mümkündür. Bu dönemde Stokastik Süreçlerin bir çok yararlı uygulamaları da bilim adamları tarafından ele alınmıştır. Bu konuda emeği geçen bilim adamları arasında A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, M.S. Bartlett, A.T. Barucha-Reid vs. önemli isimlerdir.

Çalışmada geçen bazı tanım ve kavramlar aşağıdaki şekilde verilebilir.

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı ölçülebilir bir fonksiyon yani, her $x \in \mathbb{R}$ için $\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$ ise X e bir boyutlu rasgele değişken ve $F(x) = P\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ olasılık fonksiyonuna X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu denir.

$t \in T \subset \mathbb{R}^+$ için X_t ler aynı bir olasılık uzayında tanımlı rasgele değişkenler olmak üzere, $\{X_t : t \in T\}$ ailesine bir stokastik süreç denir. Buradaki t parametresi zaman olarak da düşünülebilir. T kümesi sonlu veya sayılabilir sonsuz ise sürece kesikli zamanlı stokastik süreç, T kümesi bir aralık (sonlu veya sonsuz) ise sürece sürekli zamanlı stokastik süreç adı verilir.

$n = 2, 3, \dots$ olmak üzere, $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ özelliğini sağlayan $t_0, t_1, \dots, t_n \in T$ ler için $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ rasgele değişkenleri bağımsız ise sürece bağımsız artımlı süreç denir.

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ özelliğini sağlayan $t_0, t_1, \dots, t_n \in T$ ler için

$$P\{X_{t_n} < y | X_{t_{n-1}} = x, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \dots, X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = x_0\} = P\{X_{t_n} < y | X_{t_{n-1}} = x\}$$

eşitliği her $x_{n-2}, \dots, x_0 \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa $X(t)$ sürecine bir Markov süreci denir. Bu durumda $t_1, t_2 \in T$ ve $t_1 < t_2$ olmak üzere

$$F(t_1, x, t_2, y) = P\{X_{t_2} < y | X_{t_1} = x\}$$

dağılım fonksiyonu $t < t_1$ olan $t \in T$ ler için X_t değerlerinden bağımsızdır. Eğer bu fonksiyon sadece $t = t_2 - t_1$ farkına bağlı ise $X(t)$ Markov sürecine homojendir denir.

$\eta_i, i = 1, 2, \dots$ rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip olmak üzere,

$S_n = \sum_{i=1}^n \eta_i$ ile tanımlı $\{S_n\}, n \geq 0$ sürecine

a) η_i ler pozitif değerli ise yenileme süreci

b) η_i ler hem negatif hem de pozitif değerli ise rasgele yürüyüş süreci denir.

$$\begin{aligned} P\{X_n = j | X_{n-1} = i, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0\} = \\ = P\{X_n = j | X_{n-1} = i\} = p_{ij} \end{aligned}$$

eşitliği her $x_{n-2}, \dots, x_0 \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa $\{X_n : n \in \mathbb{N}\} = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sürecine bir Markov zinciri ve p_{ij} ye de i durumundan j durumuna bir adıma geçiş olasılığı denir.

$\{X_n : n \in \mathbb{N}\} = \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Markov zinciri verilsin. Bu takdirde

$$f_{ii}(n) = P\{X_n = i, X_{n-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i | X_0 = i\} \text{ ve } p_{ij}(n) = P\{X_{m+n} = j | X_m = i\}$$

olmak üzere

$$F_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n), R_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)$$

şeklinde tanımlansın. F_{ii} , başlangıçta i durumunda olan zincirin herhangi bir adım sonunda i durumuna gelme olasılığıdır. R_{ii} ye i durumunun ortalama tekrarlama zamanı denir. Eğer

1-) $F_{ii} = 1$ ise i durumuna tekrarlanan durum denir.

2-) i durumu tekrarlanan durum ve $R_{ii} = +\infty$ ise i durumuna sıfır durumu denir, $R_{ii} < \infty$ ise i durumuna sıfır olmayan durum denir.

3-) $p_{ii}(n_1) > 0, p_{ii}(n_2) > 0, \dots$ ve $n_1 > n_2 > \dots$ olan n_1, n_2, \dots sayıları için $d_i = \text{obeb}(n_1, n_2, \dots) > 1$ ise i durumuna d_i periyotlu periyodik durum, $d_i = 1$ ise i durumuna periyodik olmayan durum denir.

Tekrarlanan, sıfır olmayan ve periyodik olmayan bir duruma ergodik durum denir. Bütün durumları ergodik olan Markov zincirine ergodiktir denir. Markov sürecinin ergodikliğinin tanımı ise aşağıdaki gibidir:

$X(t)$ bir Markov süreci ve $f(x)$ sınırlı, ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(X(t)) dt$$

limiti mevcut, sonlu ve rasgele değişken değil ise (yani $X(0) = z$ ve t değerlerinden bağımsız) $X(t)$ Markov süreci ergodiktir ve bu limit değerine sürecin en genel ergodik dağılım fonksiyonu denir.

Bir Markov sürecinin ergodik olması için bu süreçten ergodik bir Markov zincirinin oluşturulabilmesi gerekir. Ancak bu yeterli koşul değildir.

X rasgele değişkeni ve $\{X_n\}, n \in \mathbb{N}$ rasgele değişkenler dizisi aynı bir $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı ve $F(x), F_n(x)$ de sırasıyla dağılım fonksiyonları olsunlar.

Eğer $F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x)$ ise $\{X_n\}, n \in \mathbb{N}$ rasgele değişken dizisi X rasgele değişkenine dağılıma göre yakınsaktır denir ve $X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega)$ şeklinde gösterilir.

Bir $\{X_n(t)\}, n \in \mathbb{N}$ süreç dizisinin bir $X(t)$ sürecine dağılıma göre yakınsaması da benzer şekilde tanımlanır. Bu durumda $X(t)$ ye $\{X_n(t)\}, n \in \mathbb{N}$ süreç dizisinin dağılıma göre limit süreci denir.

Eğer her $\varepsilon > 0$ için $P\{X_n(\omega) > \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ise $\{X_n(t)\}, n \in \mathbb{N}$ rasgele değişken dizisi X rasgele değişkenine olasılığa göre yakınsaktır denir ve $X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X(\omega)$ şeklinde gösterilir.

Eğer ölçüsü sıfır olan bir kümenin dışında $X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X(\omega)$ ise $\{X_n(t)\}, n \in \mathbb{N}$ rasgele değişken dizisi X rasgele değişkenine 1 olasılığı ile yakınsaktır denir ve $X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{1} X(\omega)$ şeklinde gösterilir.

1.1. Literatür Araştırması

Stok kontrol teorisi, kuyruk teorisi ve güvenilirlik teorisindeki problemlerin çoğu, bariyerli veya bariyersiz rasgele yürüyüş süreçleri yardımıyla ifade edilebilir öyle ki bu bariyerler ele alınan probleme bağlı olarak değişik tiplerde olabilir (yansıtan, tutan, yutan v.s.). Özellikle kuyruk teorisi ve talih oyunlarında yutan bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri kullanılır. Örneğin, başlangıç sermayesi a , $a > 0$, birim olan bir kumarbazın başlangıç sermayesi b , $b > 0$, birim olan bir kumarbaza karşı oyun oynadığını varsayalım ve kumarbaz her bir oyunun sonunda bir birim kazansın veya kaybetsin. Ayrıca kumarbazın sermayesi '0' a düşünceye kadar veya 'a+b' ye ulaşınca ya kadar oyuna devam ettiğini varsayalım. Bu durumda kumarbazın sermayesini '0' ve 'a+b' de yutan bariyerlere sahip basit rasgele yürüyüş süreci olarak adlandırılan bir stokastik süreçle karakterize etmek mümkündür. Eğer kumarbazın sermayesi belirli bir adım sonunda sıfır oluyorsa bu durumda kumarbaz iflas etmiş ve karşı kumarbaz onun bütün sermayesini kazanmış olacaktır. Stok kontrol teorisindeki birçok problemin çözümlenmesinde basit rasgele yürüyüş süreçleri yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle bilim adamları çalışmalarını basit rasgele yürüyüş süreçleri yerine genel durum uzaylarına sahip rasgele yürüyüş süreçleri veya bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri üzerinde yoğunlaştırmışlardır. Basit rasgele yürüyüş süreçleri genel rasgele yürüyüş süreçlerinin değişik özel durumlarıdır.

Bu çalışmada, iki bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri asimptotik yöntemlerle incelenecektir. Bu nedenle önce yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçlerinin son yıllardaki gelişimini kısaca verelim. Yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri yarı-Markov süreçlerinin özel bir halidir.

Yarı-Markov süreci ilk olarak Levy [62], Smith [88] ve Takacs [93] tarafından çalışılmaya başlanmıştır. Tanımını aşağıdaki gibidir:

$X_t(\omega)$ sürecinin durum uzayı $\{0,1,2,\dots\}$ olduğunda $X_t(\omega)$ sürecinin geçiş olasılıkları $f_t(i, j, u) = P\{\varepsilon_{k-1}; \tau_t(\varepsilon_k(\omega)) < u; \varepsilon_k(\omega) = i\}; i, j = 0,1,\dots,s$

fonksiyonlar ailesi tarafından belirlenirse bu sürece yarı-Markov süreci denir.

$\varepsilon_k(\omega)$, k . sıçramada sistemin durumu ve $\chi_t(k)$ k . sıçrama anı olmak üzere

$$\tau_t(\varepsilon_k(\omega)) = \chi_t(k+1) - \chi_t(k)$$

dır.

Yukarıda verilen tanım da durum uzayı sonlu ve sıçrama anları fiziksel olarak belirlendiğinden bu tanım Shurenkov [83], Çınlar[12], Gihman ve Skorohod [21], Serfoza [82], Ezhov ve Korolyuk [17] tarafından genelleştirilmiştir. Bu tanımlardan Gihman ve Skorohod'un verdiği tanım aşağıdaki gibidir:

$(\Omega, \mathfrak{F}, P_x)$, $x \in X$ olasılık uzayları ailesi ve bir (Ω, σ, P_x) olasılık uzayında bir $\{X_n(\omega); n = 0,1,\dots\}$ Markov zinciri verilsin. Bu zincirin $P_x\{X_0(\omega) = x\} = 1$ olmak üzere durum uzayı (X, B) ve geçiş olasılığı $\pi(x, B)$ dır. $\eta_1(\omega), \eta_2(\omega), \dots$ rasgele değişkenleri bağımsız, aynı tür dağılıma sahip ve $\{X_n(\omega); n = 0,1,\dots\}$ ailesinden $[0,1]$ de düzgün dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Her $x, y \in X$ için $F_{x,y}(t)$ herhangi bir negatif değerler almayan rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu olmak üzere $[0,1]$ de öyle bir negatif olmayan $\varphi_{x,y}(t)$ fonksiyonu belirlenmelidir ki, $\varphi_{x,y}(\xi)$ nin $[0,1]$ de dağılım fonksiyonu $F_{x,y}(t)$ olsun (burada ξ , $[0,1]$ de düzgün dağılıma sahip bir rasgele değişkendir). Bu durumda

$$\tau_k = \varphi_{X_{k-1}, X_k}(\eta_k)$$

olmak üzere

$$X(t) = X_{k-1}(\omega), \text{ eğer } \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i \leq t < \sum_{i=1}^k \tau_i \text{ ise } \left(\sum_1^0 = 0 \right)$$

dır.

Yarı-Markov süreçleri ile ilgili pek çok önemli problem, Borovkov [8], Koroljuk ve Turbin [60], Çınlar [12], Takacs [92], Smith [88], Spitzer [89], Feller [19], Anisimov [6], Shurenkov [83], Harlamov [26], v.b., tarafından çalışılmıştır.

Yarı-Markov sürecinin özel bir durumu olan yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecinin tanımını ise aşağıdaki gibidir. Bu tanım 1970 yılında Nasirova [70] tarafından verilmiştir.

$\{(\xi_i, \eta_i), i = 1, 2, \dots\}$ rasgele değişken çiftleri $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı, bağımsız aynı tür dağılıma sahip ve ξ_i ler ise pozitif değerli olduğunda,

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i, \text{ eğer } T_n \leq t < T_{n+1} \text{ ise, burada } T_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, n \geq 1, T_0 = 0$$

dır. Nasırova bu şeklide inşa ettiği sürecin; dağılımını, supremumunun dağılımını, verilen bir seviyeye ilk defa ulaşma anı ile sıçrama anlarının birleşik dağılımını, supremumu ile infimumunun ortak dağılımını ve süreç için limit teoremlerini çalışmıştır.

Dzhafarov ve Skorohod'un ele aldığı negatif akımlı, pozitif sıçramalı yarı-Markov sürecinin tanımı aşağıdaki gibidir:

$\{(\xi_i, \eta_i), i = 1, 2, \dots\}$ rasgele değişken çiftleri $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı, bağımsız aynı tür dağılıma sahip ve ξ_i, η_i ler ise pozitif değerli olduğunda

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i, \text{ eğer } T_n \leq t < T_{n+1} \text{ ise, burada } T_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, n \geq 1, T_0 = 0$$

olmak üzere

$$X(t) = z + \zeta(t) - t, \text{ eğer } T_n \leq t < T_{n+1} \text{ ise}$$

dır. Bu tip süreçlerin esas olasılık karakteristikleri incelenmiştir. Benzer şekilde Ahmedova [3] pozitif akımlı, negatif sıçramalı yarı-Markov sürecini tanımlamış ve esas olasılık karakteristiklerini incelemiştir.

Yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri ile ilgili fakat daha karmaşık olan süreçlerden biri de yarı-Markov toplam rasgele yürüyüş sürecidir. Bu süreç Nasırova [70] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmış ve temel olasılık karakteristikleri incelenmiştir.

$\{(\xi_i^+, \eta_i^+, \xi_i^-, \eta_i^-), i = 1, 2, \dots\}$ $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı, bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rasgele değişkenler dördüleri dizisi ve ξ_i^+, η_i^+ rasgele değişkenleri pozitif değerli ve ξ_i^-, η_i^- rasgele değişkenleri de negatif değerli olsunlar. Bu durumda,

$$X^+(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i^+, \text{ eğer } T_n^+ \leq t < T_{n+1}^+ \text{ ise } T_n^+ = \sum_{i=1}^n \xi_i^+, n \geq 1, T_0^+ = 0$$

$$X^-(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i^-, \text{ eğer } T_n^- \leq t < T_{n+1}^- \text{ ise } T_n^- = \sum_{i=1}^n \xi_i^-, n \geq 1, T_0^- = 0$$

olmak üzere

$$X(t) = X^+(t) - X^-(t)$$

dır.

Yarı-Markov süreçleri için ergodik teoremler ve süreçlerin ergodik dağılımlarının elde edilmesi hem teorik hem de pratik bakımdan oldukça önemlidir. 1975 yılında Smith anahtar yenileme teoremi adı altında yenileme süreçleri için esas teoremi ispatlamıştır. Yarı-Markov süreçleri için ergodik teorem ise Ezhov ve Shurenkov [18] tarafından ifade ve ispat edilmiştir.

Uygulamanın ihtiyacından dolayı yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçlerinin bariyerli tipleri de incelenmeye başlandı. Bu bariyerler problemin özelliğine göre tutan, yansıtan, yutan, elastik, v.b. olabilir.

Sıfır seviyesinde tutan bariyere sahip yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci için Nasirova [70] sürecin dağılımı ve esas sınır fonksiyonlarının dağılımını, Nasirova ve Skorohod [71] ergodik teoremi, ergodik dağılım fonksiyonunu ve seri şeklinde limit teoremini ise Borovkov [9] vermiştir. Benzer şekilde β , (> 0) seviyesinde tutan bariyere sahip yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci için Nasirova ve Skorohod [71] ergodik teorem ispatlamışlar ve sürecin ergodik dağılımını elde etmişlerdir. Ayrıca benzer süreçler için Feller [19], Spitzer [89] ve Smith [88] inde literatürde çalışmaları bulunmaktadır.

Meyilli yarı-Markov süreçleri için de Dzhaferov da sıfır seviyesinde tutan bariyere sahip negatif akımlı pozitif sıçramalı yarı-Markov sürecini, Ahmedova [3] de sıfır seviyesinde tutan bariyere sahip pozitif akımlı yarı-Markov sürecini incelemiştir.

Bir tutan bariyere sahip yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçlerinin en genel şeklini Borovkov [8] aşağıdaki şekilde vermiştir.

$X(t)$ bir yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci olmak üzere

$$X_0^*(t) = X(t) - \inf_{0 \leq s < t} \{0, X(s)\}$$

ile tanımlı sürece sıfır seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci

$$X_\beta^*(t) = \beta + X(t) - \sup_{0 \leq s < t} \{\beta, X(s)\}$$

ile tanımlı sürece β seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci denir.

Nasirova [70] sıfır seviyesinde yansıtan bariyerli yarı-Markov toplam rasgele yürüyüş sürecini tanımlamış bu süreç için sürecin; yansıtan bariyere ilk kez düşme anının dağılımını, verilen bir seviyeye ilk kez düşme anının dağılımını, Laplace dönüşümünü çalışmış ve süreç için limit teoremini ifade ve ispat etmiş ayrıca ergodikliğini incelemiştir.

Bundan başka sıfır seviyesinde yansıtan bariyere sahip yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci; Nasirova, Yapar ve Maden tarafından, $\beta(> 0)$ seviyesinde yansıtan bariyere sahip

yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci ise Nasirova, Yapar ve Dikmenoğlu tarafından kurulmuş ve bu süreçler için limit teoremleri ispatlanmıştır.

Gerçek hayatta karşılaşılan problemlerin bazıları da iki bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri yardımıyla çözülebilir. Örnek olarak stok kontrol, kuyruk, güvenilirlik, risk analizi, sigortacılıktaki problemler verilebilir. İki yansıtan bariyerli ve iki yutan bariyerli bir boyutlu rasgele yürüyüş süreçleri Feller [19] tarafından kurulmuş ve önemli bazı olasılık karakteristikleri incelenmiştir. Spitzer [90], Borovkov [8], Lotov [63], Afanas'eva ve Bulinskaya [1], Zhang [96], Korolyuk ve Borovskikh [61], Prabhu [75], El-Shehawey [15], Weesakul [95], Kastenbaum [29], v.b., bu konuda çalışmaları bulunan bilim adamlarına örnek olarak verilebilir.

Bunlara ek olarak Khaniyev [32], iki tutan bariyere sahip yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecini inşa etmiş ve bu sürecin; dağılımın, verilen bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımını, beklenen değer ve varyansı gibi bazı olasılık karakteristiklerini hesaplayarak süreç için ergodik teoremi ifade ve ispat etmiştir. Ayrıca süreç için limit teoremi vermiş ve sürecin asimptotik durumunu incelemiştir. Nasirova, Yapar ve Khaniyev [72], sıfır seviyesinde yansıtan ve $\beta(> 0)$ seviyesinde tutan bariyere sahip yarı-Markov toplam rasgele yürüyüş sürecini inşa etmiş ve incelemişlerdir. Bu sürecin; dağılımının Laplace dönüşümünü, ilk kez yansıma ve tutulma anlarının dağılımları vermişlerdir. Özdemir [74], yansıtan ve tutan bariyerlere sahip pozitif akımlı, negatif sıçramalı yarı-Markov sürecini inşa etmiş ve incelemiştir. Bu sürecin; bir boyutlu dağılım fonksiyonunun Laplace dönüşümünü, bazı sınır fonksiyonlarının esas olasılık karakteristiklerini hesaplayarak, süreç için ergodik teorem ispat ederek ergodik dağılımını bulmuştur. Maden [68], yansıtan ve tutan bariyerlere sahip yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecini inşa etmiş ve incelemiştir. Bu sürecin; ilk kez yansıma, ilk kez tutulma anlarının dağılımlarını ve moment çıkaran fonksiyonlarını ile bazı olasılık karakteristiklerini hesaplamış, sonlu boyutlu dağılım fonksiyonlarını belirlemiş ve ergodik teorem ispat ederek sürecin ergodik dağılımını elde etmiştir. Dikmenoğlu [14], iki yansıtan bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecini inşa etmiş ve incelemiştir. Bu sürecin önemli bir fonksiyoneli olan aşağı bariyerden ilk kez yansıma anına kadarki sıçrama sayısı ile sürecin ortak dağılımını belirlemiş ve aşağı bariyerden ilk kez yansıma anına kadarki sıçrama sayısının beklenen değeri ile varyansını hesaplamıştır. Ayrıca sürecin aşağı bariyerden ilk kez yansıma anının süreç ile ortak dağılımını belirleyerek Laplace dönüşümü elde edilerek yüksek momentleri için formül bulunmuştur. Sürecin bir boyutlu dağılımları bulunmuş ve bazı özel durumlar

incelenmiştir. Son olarak ergodik teorem verilerek süreç için limit teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

Ayrıca, Lotov [63] de η_1 rasgele değişkeni normal dağılıma sahip olduğu durumda N sınır fonksiyonelinin beklenen değeri için üç terimli asimptotik açılım elde etmiştir. Rogozin [77] de basamak yüksekliğinin a seviyesinin üstünde kalan kısmı için $a \rightarrow \infty$ iken limit dağılımı elde etmiştir. Brown, M., Solomon, H. [11] de ödüllü yenileme sürecinin birinci ve ikinci momentleri için iki terimli asimptotik açılım elde etmişlerdir. Kemperman [31] de iki bariyerli rasgele yürüyüş sürecinin olasılık karakteristiklerini basamak değişkenleri yardımıyla ifade etmek için genel bir algoritma ortaya koymuştur. Afanaseva, L.G., Bulinskaya, E.V. [1] de iki tutan bariyerli rasgele yürüyüş sürecinin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi ispat etmiş ve yakınsama hızını da bulmuştur. Spitzer [89] da birinci basamak anı ve basamak yüksekliğinin fonksiyonel karakteristiklerini harmonik yenileme fonksiyonu yardımıyla ifade etmiştir. Spitzer [90] da ise rasgele yürüyüş sürecinin olasılık karakteristiklerini incelemek için Fourier yöntemlerini uygulamıştır. Bu yöntem sayesinde sürecin ilk n adımdaki karakteristiklerini n . adımdaki karakteristikleriyle ifade etmiştir. Ayrıca rasgele yürüyüş süreci teorisinde büyük öneme sahip olan Spitzer özdeşliğini ispat etmiştir. Smith'in [88] deki bu klasik çalışmasında yenileme fonksiyonu ilk kez detaylı bir incelemeye tabi tutulmuş ve yenileme fonksiyonu için bir dizi analitik ve asimptotik sonuçlar elde edilmiştir. Alsmeyer [4] de basamak anı ve yüksekliklerinin olasılık karakteristiklerini hesaplamak için gerekli olan harmonik yenileme ölçüsünü ele almış ve ayrıca harmonik yenileme fonksiyonu için iki terimli asimptotik açılım elde etmiştir. Sinai [84] de rasgele yürüyüş sürecinin sınır fonksiyoneli olan S_N yi basamak yükseklikleri yardımıyla incelemiştir. Korolyuk, V.S., Borovskikh, Y.V. [61] de ise rasgele yürüyüş sürecinin sınır fonksiyonellerinin olasılık karakteristikleri için kesin ve yaklaşık formüller elde etmiştir.

Dikmenoğlu'nun [14] çalışmasında ele alınan süreç için genel olarak teorik sonuçlar elde edilmiştir. Ancak bariyerlerin her ikisini yansıtan kabul ettiğimizde uygulamalı matematiğin ihtiyacını karşılayabilecek basit formül elde etmek hemen hemen imkansızdır. Ele alınan model için ise bir çok asimptotik sonuçlar elde edilebilir ki bu sonuçlar fizikçiler veya mühendisler için büyük önem taşımaktadır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.0. Fiziksel Model

Stokastik süreçler teorisinin önemli bir kısmını bariyerli ve bariyersiz rasgele yürüyüş süreçleri oluşturur. Özellikle stok kontrol, kuyruk ve güvenilirlik teorilerinin pek çok önemli problemi iki bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri yardımıyla ifade edilirler. Bu bariyerler yansıtıcı, yutan, tutan, elastik gibi değişik türden olabilirler. Örneğin, bekleme zamanı sonlu olan kuyruk sistemlerinin veya sonlu hacimli depolardaki stokların rasgele seviyelerini iki tutan bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri yardımıyla ifade etmek mümkündür.

Örneğin Selahattin Maden'in [68] "yansıtıcı ve tutan bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci üzerine" ve Sema Dikmenoğlu'nun [14] "iki yansıtıcı bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci" adlı doktora tezlerinde iki bariyer arasında hareket eden bir parçacığın hareketi izlenmektedir. Fakat bu çalışmalarda 0 (sıfır) ve β ($\beta > 0$) seviyelerinde bulunan bariyerler yansıtıcı ve tutan özelliğe sahip bariyerlerdir. Mevcut çalışmada ise adı yukarıda belirtilen tezlerden farklı olarak genel özelliğe sahip olan iki bariyer arasındaki hareket için matematiksel model inşa edilecek ve gereken olasılık karakteristikleri hesaplanacaktır.

Bu çalışmada ele alınacak stokastik süreç aşağıdaki fiziksel model ile ifade edilebilir.

Model. 0 (sıfır) ve β ($\beta > 0$) seviyelerinde iki bariyer bulunan bir şeridi ve bu şeridin içinde rasgele hareket eden bir parçacığı göz önüne alınsın (önceki çalışmalardan farklı olarak bu durumda bariyerler herhangi bir belirgin özelliğe sahip değildir). Parçacık başlangıç anı olan $X_0 = z \in [0, \beta]$ pozisyonundan hareketine başlasın. Bu pozisyonda rasgele bir ξ_1 süresi kadar kaldıktan sonra parçacık ani bir sıçrayışla $X_0 + \eta_1$ pozisyonuna geçmeye çalışsın (burada η_1 hem pozitif hemde negatif değerler alabilen bir rasgele değişkendir). Bu durumda aşağıdaki iki farklı durum söz konusudur.

Eğer $X_0 + \eta_1 \in [0, \beta]$ şartı sağlanmış olursa bu durumda parçacık $X_1 = X_0 + \eta_1$ yeni pozisyonundan hareketine devam eder. Yani parçacık X_1 durumunda ξ_2 süresince kaldıktan sonra bir sonraki $X_1 + \eta_2$ durumuna ulaşmaya çalışacaktır.

Eğer $X_0 + \eta_1 \notin [0, \beta]$ şartı sağlanmış olursa bu durumda dışarıdan müdahale edilerek parçacık yeni bir $\varsigma_1 \in [0, \beta]$ başlangıç durumundan harekete başlamaya mecbur edilir ve bundan sonraki hareketine yukarıdaki kuralla devam eder. Dolayısıyla izlenmekte olan parçacık bariyerlere ulaşmadığı sürece yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecine tabi olur. Ancak parçacık aşağı yada yukarı bariyere ulaştığında dışarıdan müdahale ile yeni bir ς_1 başlangıç durumuna döndürülecektir. Daha sonra parçacığın hareketi yukarıdaki koşullara benzer şekilde tekrarlanacaktır. Not edelim ki, ς_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu uygun bir şekilde değiştirerek onlarca özel bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci elde etmek mümkündür.

Bu tür fiziksel modellere; partikül fiziğinde ayrıca stok kontrol, kuyruk, güvenilirlik v.s. teorilerinde rastlamak mümkündür. Amacımız, bu türden olan fiziksel modellerin genel matematik modelleri kurmak ve daha önceki bir çok çalışmadan farklı olarak sadece ağır analitik sonuçlarla yetinmeyip uygulamanın ihtiyacını karşılayabilecek türden asimptotik sonuçlar da elde etmeye çalışmaktadır. Özellikle Sema Dikmenoğlu'nun [14] tezinde incelenen model belli koşullar altında ele alınan model ile ifade edilebilecektir.

Bu modeli ifade eden gösterimlerden biri aşağıdaki gibidir.

2.1. X(t) Sürecinin Matematiksel Kuruluşu ve Gösterimler

Bu kısımda iki bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci matematiksel olarak kurulacak ve çalışmada kullanılacak olan gösterimler verilecektir.

$\{(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\}$, $(i = 1, 2, \dots)$ rasgele değişkenleri $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı, aynı tür dağılıma sahip ve bağımsız rasgele değişken üçlüleri olsunlar. ξ_i, η_i, ζ_i bağımsız rasgele değişkenleri için ξ_i 'ler pozitif değerli, η_i 'ler hem negatif hem de pozitif değerler alabilen, ζ_i 'lar ise $[0, \beta]$ aralığında değerler alabilen rasgele değişkenlerdir. Burada β pozitif reel değerli sabit bir sayıdır. $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş süreci aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, S_n = \sum_{i=1}^n \eta_i, n = 1, 2, \dots, T_0 = S_0 = 0$$

ve tam sayılı değer alan N_n dizisini de

$$N_1 = \min\{k \geq 1 : z + S_k \notin [0, \beta]\}$$

$$N_{n+1} = \min\{k \geq N_n + 1 : \zeta_n + S_k \notin (0, \beta)\}, n = 1, 2, \dots, N_0 = 0,$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\zeta_0 = z \in (0, \beta)$, N_1 ; sürecin ilk kez $[0, \beta]$ aralığından çıkana kadar atılan adımların sayısıdır.

$$\tau_n = T_{N_n} = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i, n = 1, 2, \dots, \tau_0 = 0$$

ve

$$v(t) = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}$$

şeklinde ifade edilirse $X(t)$ süreci aşağıdaki gibi kurulmuş olur.

$$X(t) = \zeta_n + S_{v(t)} - S_{N_n}, \text{ eğer } \tau_n \leq t < \tau_{n+1}, n = 1, 2, \dots$$

Bu süreç bir şeritte tanımlı yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci olarak adlandırılabilir.

Gösterimler. Çalışma boyunca aşağıdaki gösterimleri kullanılacaktır.

$$\Phi(t) = P\{\xi_1 \leq t\}, F(x) = P\{\eta_1 \leq x\}, \pi(z) = P\{\zeta_1 \leq z\},$$

$$t \in [0, \infty), x \in (-\infty, \infty), z \in [0, \beta].$$

$$\Phi_n(t) = \Phi^{*n}(t), n \geq 1, \Phi_0(t) = \varepsilon(t) = 1 \text{ eğer } t \geq 0, \varepsilon(t) = 0 \text{ eğer } t < 0.$$

$$\Delta\Phi_n(t) = \Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t), n \geq 0.$$

$$a_n(x; z) = P\{z + S_i \in [0, \beta], i = \overline{1, n}, z + S_n \leq x\}, n \geq 1, a_0(x; z) = \varepsilon(x - z).$$

$$b_n(z) = P\{z + S_i \in [0, \beta], i = \overline{1, n-1}, z + S_n \notin [0, \beta]\}, n \geq 1, b_0(z) = 0.$$

Sınırlı, ölçülebilir $M_i(t, x, z)$, $i = 1, 2$ fonksiyonları için aşağıdaki gösterimleri ifade edilsin:

$$M_i(t, x, \bullet) = \int_0^\beta M_i(t, x, z) d\pi(z), i = 1, 2,$$

$$M_1(t, x, z) * M_2(t, x, z) = \int_0^t M_2(t-s, x, z) d_s M_1(s, x, z).$$

2.2. X(t) Sürecinin Bir Boyutlu Dağılımları

Bu kısımdaki esas amaç, daha önce matematiksel olarak kurulan $X(t)$ sürecinin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonlarını $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin bilinen olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade etmektir. Bunun için, $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu $Q(t, x, z)$ ile gösterilsin, yani;

$$Q(t, x, z) \equiv P_z\{X(t) \leq x\}$$

olsun.

TEOREM 1. $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu $Q(t, x, z)$, $\{T_n\}$ yenileme sürecinin ve $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin yukarıda tanımlanmış olasılık karakteristikleri ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Q(t, x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, z) \Delta \Phi_n(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n(z) * U_n(\bullet) * a_n(x, \bullet)] \Delta \Phi_n(t)$$

burada

$$U_n(z) = \sum_{m=1}^n [b_n(z)]^{m-1}$$

dır.

İSPAT. Tam olasılık formülüne göre,

$$Q(t, x, z) \equiv P_z\{X(t) \leq x\} = \sum_{m=0}^{\infty} P_z\{\tau_m \leq t < \tau_{m+1}; X(t) \leq x\} \quad (1)$$

yazılabilir. Gösterim kolaylığı için (1) toplamının iç terimlerini $q_m(t, x, z)$ ile gösterilsin, yani her $m = 0, 1, 2, \dots$ için

$$q_m(t, x, z) \equiv P_z\{\tau_m \leq t < \tau_{m+1}; X(t) \leq x\}$$

olsun. Önce $q_0(t, x, z)$ 'i hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
q_0(t, x, z) &\equiv P_z \{0 \leq t < \tau_1; X(t) \leq x\} = \\
&= P_z \{\tau_1 > t; X(t) \leq x\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_z \{T_n \leq t < T_{n+1}; T_{N_1} > t; X(t) \leq x\} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_z \{T_n \leq t < T_{n+1}; T_{N_1} > t; z + S_n \leq x\} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_z \{T_n \leq t < T_{n+1}; N_1 \geq n+1; z + S_n \leq x\} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_z \{T_n \leq t < T_{n+1}; N_1 > n; z + S_n \leq x\} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \leq t < T_{n+1}; z + S_1 \in [0, \beta]; z + S_2 \in [0, \beta]; \dots; z + S_n \in [0, \beta]; z + S_n \leq x\} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \leq t < T_{n+1}\} P\{z + S_i \in [0, \beta], i = \overline{1, n}; z + S_n \leq x\} = \\
q_0(t, x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)] a_n(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \Phi_n(t) a_n(x, z).
\end{aligned}$$

Şimdi de $q_1(t, x, z)$ 'i hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
q_1(t, x, z) &\equiv P_z \{\tau_1 \leq t < \tau_2; X(t) \leq x\} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P_z \{T_n \leq t < T_{n+1}; \tau_1 \leq t < \tau_2; X(t) \leq x\} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n P_z \{N_1 = k; T_n \leq t < T_{n+1}; T_{N_1} \leq t < T_{N_2}; X(t) \leq x\} \\
&= \int_{v=0}^{\beta} \int_{s=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n P\{z + S_1 \in [0, \beta]; z + S_2 \in [0, \beta]; \dots; z + S_{k-1} \in [0, \beta]; z + S_k \notin [0, \beta]; \\
&\quad T_k \in ds; \zeta_1 \in dv; v + \eta_{k+1} \in [0, \beta]; v + \eta_{k+1} + \eta_{k+2} \in [0, \beta], \dots \\
&\quad v + \eta_{k+1} + \dots + \eta_n \in [0, \beta]; v + \eta_{k+1} + \dots + \eta_n \leq x; s + \sum_{i=k+1}^n \xi_i \leq t < s + \sum_{i=k+1}^{n+1} \xi_i \} \\
&= \int_{v=0}^{\beta} \int_{s=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n P\{z + S_i \in [0, \beta], i = \overline{1, k-1}; z + S_k \notin [0, \beta], T_k \in ds \\
&\quad P\{\zeta_1 \in dv; v + S_1 \in [0, \beta]; v + S_2 \in [0, \beta], \dots, v + S_{n-k} \in [0, \beta], \\
&\quad v + S_{n-k} \leq x; s + T_{n-k} \leq t < s + T_{n-k+1}\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{v=0}^{\beta} \int_{s=0}^t \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n P\{z + S_i \in [0, \beta], i = \overline{1, k-1}; z + S_k \notin [0, \beta]\} d\Phi_k(s) \pi\{dv\} \\
&\quad P\{v + S_i \in [0, \beta], i = \overline{1, n-k}; v + S_{n-k} \leq x\} \Delta\Phi_{n-k}(t-s) = \\
&= \int_{v=0}^{\beta} \pi\{dv\} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) \sum_{k=1}^n b_k(z) a_{n-k}(x, v) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) \sum_{k=1}^n b_k(z) a_{n-k}(x, \bullet) \equiv \\
&\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) \sum_{k=0}^n b_k(z) a_{n-k}(x, \bullet),
\end{aligned}$$

burada

$$\sum_{k=0}^n b_k(z) a_{n-k}(x, \bullet) = b_n(z) * a_n(x, \bullet)$$

olduğu için

$$q_1(t, x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) b_n(z) * a_n(x, \bullet)$$

şeklinde yazılabilir. Tümevarım yönteminin güvenli bir şekilde uygulanabilmesi için $q_2(t, x, z)$ aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}
q_2(t, x, z) &= P_z\{\tau_2 \leq t < \tau_3; X(t) \leq x\} = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} P_z\{T_n \leq t < T_{n+1}; T_{N_2} \leq t < T_{N_3}; X(t) \leq x\} = \\
&= \int_{v_1=0}^{\beta} \int_{v_2=0}^{\beta} \iint_{0 \leq s+u \leq t} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{2 \leq k+\ell \leq n} P\{z + S_i \in [0, \beta], i = \overline{1, k-1}; z + S_k \notin [0, \beta]\} P\{T_k \in ds\} \\
&\quad P\{\zeta_1 \in dv_1\} P\{v_1 + S_i \in [0, \beta], i = \overline{1, \ell-1}; v_1 + S_{\ell} \notin [0, \beta]\} P\{T_{\ell} \in du\} \\
&\quad P\{\zeta_2 \in dv_2\} P\{v_2 + S_i \in [0, \beta], i = \overline{1, n-k-\ell}; v_2 + S_{n-k-\ell} \leq x\} \\
&\quad P\{T_{n-k-\ell} \leq t-u-s < T_{n-k-\ell+1}\} \\
&= \int_{v_1=0}^{\beta} \int_{v_2=0}^{\beta} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{2 \leq k+\ell \leq n} \Delta\Phi_n(t) b_k(z) \pi\{dv_1\} b_{\ell}(v_1) \pi\{dv_2\} a_{n-k-\ell}(x, v_2) = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) \sum_{2 \leq k+\ell \leq n} b_k(z) b_{\ell}(\bullet) a_{n-k-\ell}(x, \bullet)
\end{aligned}$$

buradan

$$q_2(t, x, z) = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) b_n(z) * b_n(\bullet) * a_n(x, \bullet)$$

yazılır. Böylece,

$$q_2(t, x, z) = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) b_n(z) * b_n(\bullet) * a_n(x, \bullet)$$

elde edilmiş olur.

Benzer düşünceyle göstermek mümkündür ki, $\forall m \geq 2$ için

$$q_m(t, x, z) = \sum_{n=m}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) b_n(z) * [b_n(\bullet)]_*^{m-1} * a_n(x, \bullet)$$

dır. $q_m(t, x, z)$ olasılıkları (1) eşitliğinde yerine yazılarak,

$$\begin{aligned} Q(t, x, z) &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} q_m(t, x, z) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) a_n(x, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) b_n(z) * a_n(x, \bullet) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) b_n(z) * b_n(\bullet) * a_n(x, \bullet) + \dots + \\ &+ \sum_{n=m}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) b_n(z) * [b_n(\bullet)]_*^{m-1} * a_n(x, \bullet) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) a_n(x, z) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) b_n(z) * [b_n(\bullet)]_*^{m-1} * a_n(x, \bullet) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) a_n(x, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \{b_n(z) * [b_n(\bullet)]_*^{m-1} * a_n(x, \bullet)\} \Delta\Phi_n(t) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, z) \Delta\Phi_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n(z) * U_n(\bullet) * a_n(x, \bullet)] \Delta\Phi_n(t) \end{aligned}$$

burada

$$U_n(z) = \sum_{m=1}^n [b_n(z)]_*^{m-1}$$

dır. Böylece $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu, $Q(t, x, z)$ dağılım fonksiyonu $\{T_n\}$ yenileme sürecinin ve $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karakteristikleri yardımı ile ifade edilmiş oldu.

2.3. X(t) Sürecinin Toplamsal Fonksiyonelinin ($J_f(t)$) Dağılımı

Teori ve uygulamadaki pek çok problemin çözümünde sürecin sınır fonksiyonelleri ve kendi karakteristikleri yanında toplamsal fonksiyonelleri de önemli rol oynamaktadır. Bu yüzden, bu bölümde ele alınan sürecin toplamsal fonksiyonelinin bir boyutlu dağılımları verilecektir.

$f(x)$ fonksiyonu $R^+ = [0, \infty)$ de tanımlanmış, keyfi, ölçülebilir sınırlı bir fonksiyon, yani, $f: [0, \infty) \rightarrow R$ olsun ve $J_f(t) = \int_0^t f(X(u))du, t \geq 0$ şeklinde tanımlansın. $J_f(t)$ 'ye $X(t)$ sürecinin toplamsal fonksiyoneli denir. Bu bölümdeki amaç $J_f(t)$ toplamsal fonksiyonelinin dağılım fonksiyonunu incelemektir. Bu amaç için aşağıda ifade edilen teoremden $J_f(t)$, toplamsal fonksiyonelinin dağılım fonksiyonunun iki kat dönüşümü (Laplace-Fourier) elde edilmiştir.

TEOREM 2. $X(t)$ sürecinin $J_f(t)$ toplamsal fonksiyonelinin bir boyutlu dağılım fonksiyonlarının iki kat dönüşümü (Laplace-Fourier); $\{(\xi_n, \eta_n), n \geq 1\}$ rasgele değişken çiftleri dizisinin olasılık karakteristikleri yardımı ile aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\tilde{Q}_f(\lambda; \mu; z) = \tilde{G}_f(\lambda; \mu; z) + \frac{R_f^{**}(\lambda; \mu; z) \tilde{G}_f(\lambda; \mu; \bullet)}{1 - R_f^{**}(\lambda; \mu; \bullet)}, \quad (2)$$

burada

$$G_f(t; x; z) = \sum_{n=0}^{\infty} P \left\{ z + S_k \in [0, \beta], k = \overline{1, n}, T_n \leq t < T_{n+1}, \sum_{k=1}^n f(z + S_{k-1}) \xi_k + (t - T_n) f(z + S_n) \leq x \right\},$$

$$R_f(t; x; z) = \sum_{n=1}^{\infty} P \left\{ z + S_k \in [0, \beta], k = \overline{1, n-1}, z + S_n \notin [0, \beta], T_n \leq t, \sum_{k=1}^n f(z + S_{k-1}) \xi_k \leq x \right\}$$

dır.

İSPAT. $Q_f(t; x; z)$ için yenileme tipli integral denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} Q_f(t; x; z) &= P_z \{J_f(t) \leq x\} = \\ &= P_z \{\tau_1 > t; J_f(t) \leq x\} + P_z \{\tau_1 \leq t; J_f(t) \leq x\} \\ &= G_f(t, x, z) + \int_{s=0}^t P_z \{\tau_1 \in ds; J_f(t) \leq x\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= G_f(t, x, z) + \int_{s=0}^t \int_{y=-\infty}^{\infty} P_z \{ \tau_1 \in ds; J_f(\tau_1 - 0) \in dy; J_f(t) \leq x \} \\
&= G_f(t; x; z) + \int_{s=0}^t \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{v=0}^{\infty} P_z \{ \tau_1 \in ds; J_f(\tau_1 - 0) \in dy; \zeta_1 \in dv; J_f(t) \leq x \} \\
&= G_f(t; x; z) + \int_{s=0}^t \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{v=0}^{\infty} P_z \{ \tau_1 \in ds; J_f(s - 0) \in dy; \zeta_1 \in dv \} \\
&\quad P \{ J_f(t) \leq x / \tau_1 = s; J_f(s) = y; \zeta_1 = v \} \\
&= G_f(t; x; z) + \int_{s=0}^t \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{v=0}^{\infty} P_z \{ \tau_1 \in ds; J_f(s) \in dy \} \pi \{ dv \} P_v \{ J_f(t - s) \leq x - y \} \\
&= G_f(t; x; z) + \int_{s=0}^t \int_{y=-\infty}^{\infty} P_z \{ \tau_1 \in ds; J_f(s) \in dy \} \int_{v=0}^{\infty} Q_f \{ (t - s); x - y; v \} d\pi(v) \\
&= G_f(t; x; z) + \int_{s=0}^t \int_{y=-\infty}^{\infty} R_f \{ ds; dy; z \} Q(t - s; x - y; \bullet) \\
Q_f(t; x; z) &= G_f(t; x; z) + \int_{s=0}^t \int_{y=-\infty}^{\infty} R_f \{ ds; dy; z \} Q(t - s; x - y; \bullet). \tag{3}
\end{aligned}$$

(3) eşitliğinin her iki tarafı z değişkenine göre ortalanırsa aşağıdaki eşitliği elde edilir.

$$Q_f(t; x; \bullet) = G_f(t; x; \bullet) + \int_{y=-\infty}^{\infty} R_f(t; dy; \bullet) * Q_f(t; x - y; \bullet). \tag{4}$$

(4) eşitliğinin her iki tarafına önce t değişkenine göre Laplace dönüşümü,

$$\begin{aligned}
\int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda t} Q_f(t; x; \bullet) dt &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda t} G_f(t; x; \bullet) dt + \\
&\quad + \int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \int_{y=-\infty}^{\infty} R_f(t; dy; \bullet) * Q_f(t; x - y; \bullet) dt \\
\tilde{Q}_f(\lambda; x; \bullet) &= \tilde{G}_f(\lambda; x; \bullet) + \int_{y=-\infty}^{\infty} R_f^*(\lambda; dy; \bullet) * \tilde{Q}_f(\lambda; x - y; \bullet)
\end{aligned}$$

sonra ise x değişkenine göre Fourier dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} \tilde{Q}_f(\lambda; x; \bullet) dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} \tilde{G}_f(\lambda; x; \bullet) dx + \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} \int_{y=-\infty}^{\infty} R_f^*(\lambda; dy; \bullet) * \tilde{Q}_f(\lambda; x - y; \bullet) dx$$

böylece,

$$\tilde{Q}_f(\lambda; \mu; \bullet) = \tilde{G}_f(\lambda; \mu; \bullet) + \tilde{R}_f(\lambda; \mu; \bullet) \tilde{Q}_f(\lambda; \mu; \bullet)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\tilde{Q}_f(\lambda; \mu; \bullet) [1 - R_f^{**}(\lambda; \mu; \bullet)] = \tilde{G}_f(\lambda; \mu; \bullet)$$

olur ve buradan da

$$\tilde{Q}_f(\lambda; \mu; \bullet) = \tilde{G}_f(\lambda; \mu; \bullet) [1 - R_f^{**}(\lambda; \mu; \bullet)]^{-1} \quad (5)$$

elde edilir.

(3) eşitliğine geri dönülüp iki kat Laplace-Fourier dönüşümü uygulanırsa,

$$\tilde{Q}_f(\lambda; \mu; z) = \tilde{G}_f(\lambda; \mu; z) + R_f^{**}(\lambda; \mu; z) \tilde{Q}_f(\lambda; \mu; \bullet) \quad (6)$$

olur. (5) eşitliği (6) formülünde yerine yazılırsa,

$$\tilde{Q}_f(\lambda; \mu; z) = \tilde{G}_f(\lambda; \mu; z) + \tilde{R}_f(\lambda; \mu; z) [1 - \tilde{R}_f(\lambda; \mu; \bullet)]^{-1} \tilde{Q}_f(\lambda; \mu; \bullet) \quad (7)$$

elde edilir.

Böylece, $J_f(t)$ toplamsal fonksiyonelinin bir boyutlu dağılım fonksiyonlarının Laplace-Fourier iki kat dönüşümü hesaplanmış oldu. İspatı tamamlamak için $G_f(t; x; z)$ ve $R_f(t; x; z)$ fonksiyonlarını, $\{T_n\}$ yenileme ve $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş dizilerinin olasılık karakteristikleriyle ifade etmek yeterlidir.

Bu amaç için $G_f(t; x; z)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} G_f(t; x; z) &= P_z \{ \tau_1 > t; J_f(t) \leq x \} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_z \left\{ v(t) = n; N_1 > n; \int_0^t f(X(u)) du \leq x \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P \left\{ T_n \leq t < T_{n+1}; z + S_k \in [0, \beta], k = \overline{1, n}; \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=0}^{n-1} \int_{T_k}^{T_{k+1}} f(X(u)) du + (t - T_n) f(z + S_n) \leq x \right\} \\ G_f(t; x; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P \left\{ z + S_k \in [0, \beta], k = \overline{1, n}, T_n \leq t < T_{n+1}; \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=0}^{n-1} f(z + S_k) \xi_{k+1} + (t - T_n) f(z + S_n) \leq x \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

burada $\sum_{k=0}^{-1} = 0$ dır.

Benzer şekilde $R(ds; dy; z)$ de aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} R(ds; dy; z) &= P_z \{ \tau_1 \in ds; J_f(\tau_1 - 0) \in dy \} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_z \left\{ N_1 = n; T_n \in ds; J_f(\tau_1 - 0) = \sum_{k=1}^n f(z + S_{k-1}) \xi_k \in dy \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P \left\{ z + S_k \in [0, \beta], k = \overline{1, n-1}; z + S_n \notin [0, \beta]; T_n \in ds; \sum_{k=1}^n f(z + S_{k-1}) \xi_k \in dy \right\}. \end{aligned}$$

Bu eşitlik s parametresine göre sıfırdan t 'ye kadar daha sonra ise y parametresine göre $-\infty$ dan x e kadar integralleyerek

$$\begin{aligned} R(t; x; z) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P \left\{ z + S_k \in [0, \beta], k = \overline{1, n-1}; z + S_n \notin [0, \beta]; T_n \leq t; \sum_{k=1}^n f(z + S_{k-1}) \xi_k \leq x \right\}, \\ t \in \mathbb{R}^+; z \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}, \mathbb{R}^+ &= [0, \infty) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise Teorem 2'nin ispatını tamamlar. ▶

2.4. $X(t)$ Sürecinin Ergodikliği

Bu kısımda $X(t)$ süreci için en genel şartlar altında ergodik teoremi ispatlanacak ve sürecin ergodik olması durumunda ergodik dağılım fonksiyonu için aşikar bir formül verilecektir. Bunun için önce aşağıdaki teoremi verelim.

TEOREM 3. (ξ_n, η_n, ζ_n) bağımsız başlangıç rasgele değişken üçlüleri dizisi aşağıdaki ilave koşulları da sağlasın:

1) $0 < E\xi_1 < \infty$; 2) $P\{\eta_1 > 0\} > 0$, $P\{\eta_1 < 0\} > 0$; 3) η_1 bir aritmetik olmayan rasgele değişken olsun. Bu durumda $X(t)$ süreci ergodiktir ve $[0, \beta]$ aralığında tanımlı, sınırlı, ölçülebilir her $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki ilişki 1 olasılığı ile doğrudur.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{J_f(t)}{t} \equiv S_f = \frac{1}{A(\beta, \bullet)} \int_0^{\beta} f(x) d_x A(x, \bullet)$$

burada

$$A(x, \bullet) = \int_0^{\beta} A(x, z) d\pi(z) = \int_0^{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} P \left\{ z + S_k \in [0, \beta], k = \overline{1, n}, z + S_n \leq x \right\} d\pi(z)$$

dır.

İSPAT. Smith'in kesikli şans karışımı stokastik süreçler sınıfı için "anahtar yenileme teoremi" isimli ergodik teoremi literatürde mevcuttur (örneğin, bak, [21], sayfa 243). Uygulamada bu teoremin varsayımlarının sağlanıp sağlanmadığını görmek oldukça zordur. Bu zorluğu ortadan kaldırmak için özel sınıfları ele alıp bu sınıfların ergodiklik şartlarını yeterince basit şekle getirmek gerekli görülmektedir.

Bu nedenle, bu çalışmada kesikli şans karışımı süreçlerin özel bir sınıfı ele alınmış ve bu sınıf için yeterince açık olan ergodiklik koşulları bulunmuştur.

Dolayısıyla Teorem 3.3'ün (1-3) koşulları altında ele aldığımız süreç için Smith'in anahtar ergodik teoreminin (bak, [21], sayfa 243) tüm varsayımlarının sağlandığı gösterelim.

Bu amaç için, teoremin koşulları altında aşağıdaki iki varsayımın sağlandığını göstermemiz gerekmektedir.

Varsayım 1. Ele alınan teoremin koşulları altında öyle bir artan rasgele anlar dizisi seçmeliyiz ki, sürecin bu anlardaki değerlerinden oluşan "gömülü Markov zinciri" ergodik olmuş olsun.

Bu amaç için yukarıda tanımlanan τ_1, τ_2, \dots rasgele anlar dizisini ele almak yeterlidir. Not edelim ki, bu dizi durdurma anları olarak yorumlanabilirler. Başka bir deyişle, bu noktalardaki $X(t)$ sürecinin değerleri $\xi_n = \zeta_n = X(\tau_n + 0)$, $n \geq 1$, "gömülü Markov zinciri" oluştururlar.

Teoremin şartına göre $X(\tau_n + 0) = \zeta_n$, $n \geq 1$, bağımsız ve benzer dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olduğu için "gömülü Markov zinciri" ergodiktir ve bu zincirin durağan dağılım fonksiyonu $\pi(z) = P\{\zeta_1 < z\}$ dir. Böylece genel ergodik teoremin ilk varsayımı sağlanmış oldu.

Varsayım 2. Teoremin koşulları altında τ_1 rasgele değişkeninin beklenen değerinin sonlu (yani, $E\tau_1 < \infty$ olduğunu) göstermek gerekmektedir.

Teorem 3.2.'nin (1-3) koşulları sağlandığında τ_1 rasgele değişkeninin beklenen değerinin sonlu olması C. Stein'nin yardımcı teoreminden (bak, [19], sayfa 601) elde edilir.

Not: $A = \overline{-a, b}$, sıfırı da içeren sınırlı bir aralık olsun. Burada $a > 0, b > 0$ dir. N ile $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin ilk kez A kümesinden çıkma anını, S_N ile ise rasgele

yürüyüş sürecinin bu andaki pozisyonunu gösterebilir. Bu takdirde (N, S_N) rasgele değişken çiftleri için Stein'inin yardımcı teoremi olarak bilinen aşağıdaki önermeler doğrudur.

Stein Yardımcı Teoremi: Yukarıda tanımlanan N ve S_N rasgele değişkenleri öz rasgele değişkenlerdir.

Ayrıca,

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n P\{N > n\} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n G_n\{A\}$$

üretici fonksiyonu belirli bir $s \geq 1$ için yakınsaktır ve bu yakınsaklığın varlığından dolayı N rasgele değişkeninin tüm momentleri mevcuttur. Buna ilaveten S_N rasgele değişkeninin beklenen değerinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul η_1 rasgele değişkeninin sonlu beklenen değerinin var olmasıdır. Bu durumda ise,

$$E(S_N) = E\eta_1 E(N)$$

dır. Son yazılan özdeşlik ilk olarak A. Wald tarafından önerilmiştir.

Böylece, Teorem 3.3'ün koşulları altında, kesikli şans karışımı stokastik süreçler için genel ergodik teoremin tüm varsayımları sağlanmış oldu. Bu nedenle, $X(t)$ sürecinin ergodik olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, teoremin ispatı tamamlanır. ►

$f(x)$ fonksiyonunun yerine $(-\infty, x]$ kümesinin ayırıcı fonksiyonunu yazarak, Teorem 3.3' den aşağıdaki sonuç elde edilebilir

SONUÇ 1. Teorem 3'ün koşulları altında $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun aşikar şekli aşağıdaki gibidir:

$$Q(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) \leq x\} = \frac{A(x, \bullet)}{A(\beta, \bullet)}, \quad x \in [0, \beta]. \quad \blacktriangleright$$

Yukarıda $X(t)$ sürecinin bazı koşullar altında ergodik olduğu gösterildi. Şimdi ise sürecin ergodik dağılım fonksiyonunu $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade edilecektir.

$$S_f = \frac{1}{E\tau_1} \int_0^{\beta} \int_0^{\beta} f(x) P_z\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\} dt \pi\{dz\}$$

$$P_z\{\tau_1 > t; X(t) \leq x\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{v(t) = n; \tau_1 > t; X(t) \leq x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{v(t) = n; T_{N_1} > t; z + S_n \leq x\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_z \{T_n \leq t < T_{n+1}; N_1 > n; z + S_n \leq x\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P \{T_n \leq t < T_{n+1}; z + S_1 \in [0, \beta] + z + S_2 \in [0, \beta] + \dots + z + S_n \in [0, \beta]; z + S_n \leq x\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \Phi_n(t) a_n(z, x)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} P_z \{\tau_1 > t; X(t) \leq x\} dt &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \Phi_n(t) a_n(z, x) dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \Delta \Phi_n(t) dt \right] a_n(z, x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(\xi_1) a_n(z, x) = \\
&= E(\xi_1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z, x) = E(\xi_1) A(x, z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\int_0^{\infty} \Delta \Phi_n(t) dt = E\xi_1$$

dır. Böylece;

$$\int_0^{\infty} P_z \{\tau_1 > t; X(t) \leq x\} dt = E\xi_1 A(x, z)$$

elde edilmiş oldu.

S_f eşitliğindeki ikinci integral dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\beta} \int_0^{\infty} P_z \{\tau_1 > t; X(t) \leq x\} dt \pi\{dz\} &= \int_0^{\beta} E\xi_1 A(x, z) \pi\{dz\} = \\
E\xi_1 \int_0^{\beta} A(x, z) \pi\{dz\} &= E\xi_1 A(x, \bullet)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde S_f deki son integral dikkate alınırsa,

$$\int_0^{\beta} f(x) \int_0^{\infty} P_z \{\tau_1 > t; X(t) \in dx\} dt \pi\{dz\} =$$

$$= E\xi_1 \int_0^\beta f(x) d_x A(x, \bullet)$$

ve buradan da,

$$S_f = \frac{1}{E\tau_1} E\xi_1 \int_0^\beta f(x) d_x A(x, \bullet)$$

olur. Buradaki

$$\begin{aligned} E\tau_1 &= \int_0^\infty t P\{\tau_1 \in dt\} = \int_0^\infty P\{\tau_1 > t\} dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\beta P_z\{\tau_1 > t\} dt \pi\{dz\} = \int_0^\beta l(x) \int_0^\infty \int_0^\beta P_z\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\} dt \pi\{dz\} \\ &= E\xi_1 \int_0^\beta l(x) d(x, \bullet) = E\xi_1 \int_0^\beta d(x, \bullet) \\ &= E\xi_1 [A(\beta, \bullet) - A(0, \bullet)] = E\xi_1 A(\beta, \bullet) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak, $0 < E\xi_1 < \infty$ olduğu için

$$S_f = \frac{1}{A(\beta, o)} \int_0^\beta f(x) dA(x, \bullet)$$

elde edilir. ▶

2.5. X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu

Bu kısımda X(t) sürecinin ergodik dağılımın karakteristik fonksiyonu $(N(z), S_{N(z)})$ sınır fonksiyonlarının ortak dağılım fonksiyonu yardımıyla ifade edilecektir.

$A(x, z)$ fonksiyonunun hesaplanması genellikle çok zordur. Bu nedenle, $A(x, z)$ fonksiyonunun hesaplanması için öyle algoritmalar geliştirmek gerekiyor ki bu algoritmanın sonunda elde edilen ifadeler ve formüller uygulamanın ihtiyacını karşılayabilsin. Bu algoritmalarından birisi $A(x, z)$ fonksiyonunun rasgele yürüyüş sürecinin belirli sınır fonksiyonlarının olasılık karakteristikleriyle ifade edilmesidir. Hatırlatalım ki, rasgele yürüyüş süreci $\{S_n\}, n \geq 1$ nin sınır fonksiyonlarının bir çok özellikleri literatürde bilinmektedir. Bu nedenle aşağıda X(t) sürecinin olasılık karakteristikleri $(N(z), S_{N(z)})$ sınır fonksiyonlarının ortak dağılım fonksiyonu yardımıyla ifade edilecektir.

Bu amaç için başlangıç durumu $S_0 = 0$ olan $\{S_n\}, n \geq 1$ rasgele yürüyüş sürecinin $[-z, \beta - z]$ aralığında davranışını inceleyelim (bak, örneğin, [5], sayfa 598-600), burada $z \in (0, \beta), \beta > 0$ dır.

$N(z)$ ile $\{S_n\}, n \geq 1$ rasgele yürüyüş sürecinin ilk kez $B(z) = [-z, \beta - z]$ aralığından çıkma anını gösterebilir. $S_{N(z)}$ ise rasgele yürüyüş sürecinin $N(z)$ anındaki değeri olsun. Bu kısımdaki amaç bu iki sınır fonksiyonelinin ortak dağılımını incelemektir. Bunun için aşağıdaki notasyon dahil edilsin:

$$d_n(I; z) = P\{N(z) = n; S_{N(z)} \in I\}, \text{ eğer } I \subset B'(z),$$

$$d_n(I, z) = 0, \text{ eğer } I \subset B(z), n \geq 0,$$

burada $B'(z)$ ile $B(z)$ aralığının tümleyeni gösterilmiştir.

$N(z)$ sınır fonksiyonelinin tanımından

$$d_n(I; z) = P\{S_k \in B(z), k = 1, n-1; S_n \in B'(z), S_n \in I\}, \text{ eğer } I \subset B'(z)$$

olduğu görülmektedir.

Not edelim ki, $d_n(I; z)$ olasılıkları $\{S_n\}, n \geq 1$ rasgele yürüyüş sürecinin $B'(z)$ kümesine ilk kez ulaşma olasılığı gibi yorumlanmaktadır. Bu olasılıkların incelenmesi $\{S_n\}, n \geq 1$ rasgele yürüyüş sürecinin $B'(z)$ kümesine ilk kez ulaşma anına kadar olan zaman aralığındaki davranışı ile sıkı bir ilişkidir.

Bu ilişkiyi ortaya koymak için aşağıdaki gösterim verilsin:

Her $I \subset B(z) = [-z, \beta - z]$ ve $n = 1, 2, \dots$ için

$$a_n(I; z) = P\{S_1 \in B(z); S_2 \in B(z); \dots; S_n \in B(z); S_n \in I\}$$

olsun.

Ayrıca bu tanım gerçek sayılar kümesinin tüm alt kümeleri için de genişletilebilir. Bu amaçla her $I \subset B'(z), z \in (0, \beta)$ için $a_n(I, z) = 0$ kabul edelim. Bundan böyle genellikle $(N(z), S_{N(z)})$ çiftinin dağılımını ele alınacaktır. $N(z)$ tam değerli bir rasgele değişken olduğu için onun moment çıkarıcı fonksiyonunu, $S_{N(z)}$ rasgele değişkeninin ise karakteristik fonksiyonunu ele alınacaktır. Bu amaç için aşağıdaki gösterimler yapılsın:

$$\tilde{d}^*(s; \theta; z) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{B'(z)} e^{i\theta x} d_n(dx; z),$$

$$\tilde{a}^*(s; \theta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_{B(z)} e^{i\theta x} a_n(dx; z).$$

(Bu serilerin sıfıncı terimleri sırasıyla 0 ve 1 dir.) Kolayca görülür ki bu seriler en azından $|s| \leq 1$ değerleri için yakınsaktır. (bak, örneğin, Stein yardımcı teoremi, [19], sayfa 601).

Her sınırlı ölçülebilir $M(x; z)$ fonksiyonu için

$$M^*(\theta; z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} d_x M(x; z)$$

ve

$$\varphi(\theta) = Ee^{i\theta \eta_1} = F^*(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} dF(x)$$

olsun. Bu gösterimleri göz önünde bulundurarak aşağıdaki temel özdeşliği yazmak mümkündür:

$$1 - \tilde{d}^*(s; \theta; z) = \tilde{a}^*(s; \theta; z)[1 - s\varphi(\theta)], \quad (9)$$

(bak, örneğin, [19], sayfa 600). Bu özdeşlik $\tilde{d}^*(s; \theta; z)$ ve $\tilde{a}^*(s; \theta; z)$ arasında önemli bir ilişki kurmaktadır. Not edelim ki (9) özdeşliğinden uygulama için bir çok gerekli bilgi elde etmek mümkündür. Ayrıca, bu özdeşlikten yararlanarak $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonunu ($N(z), S_{N(z)}$) sınır fonksiyonellerinin olasılık karakteristikleri ile ifade edilebilir.

S_f fonksiyoneli detaylı bir şekilde incelemek için $\varphi(s; \theta)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\varphi(s; \theta) = \int_0^{\infty} \pi(dz) \int_{x=0}^{\beta} e^{i\theta x} \sum_{n=0}^{\infty} s^n P\{z + S_k \in [0, \beta], u = \overline{1, n}; z + S_n \in dx\}.$$

Yukarıdaki gösterimler göz önünde bulundurularak $\varphi(s; \theta)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\varphi(s; \theta) = \int_0^{\beta} e^{i\theta z} \pi\{dz\} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_{-z}^{\beta-z} e^{i\theta v} P\{S_k \in B(z), u = \overline{1, n}; S_n \in dv\}. \quad (10)$$

$\tilde{a}^*(s; \theta; z)$ 'nin tanımını hatırlayarak (10) eşitliğini

$$\varphi(s; \theta) = \int_0^{\infty} e^{i\theta z} \tilde{a}^*(s; \theta; z) d\pi(z) \quad (11)$$

şeklinde tekrar yazmak mümkündür.

(9) temel özdeşliği kullanılarak (11) formülü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varphi(s; \theta) = \int_0^\beta e^{i\theta z} \frac{1 - \tilde{d}^*(s; \theta; z)}{1 - s\varphi(\theta)} d\pi(z). \quad (12)$$

(12) eşitliğinde $s \rightarrow 1$ için limite geçilirse,

$$\varphi(1; \theta) = \int_0^\beta e^{i\theta z} \frac{1 - \tilde{d}^*(1; \theta; z)}{1 - \varphi(\theta)} d\pi(z) \quad (13)$$

elde edilir. $\varphi(\theta)$ ve $\tilde{d}^*(1; \theta; z)$ nin tanımlarını göz önünde bulundurularak (13) eşitliği aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\varphi(1; \theta) = \int_0^\beta e^{i\theta z} \frac{E\{\exp(i\theta S_{N(z)}) - 1\}}{E\{\exp(i\theta \eta_1) - 1\}} d\pi(z). \quad (14)$$

Bu eşitlikten yararlanarak $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının sayısal karakteristiklerini $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonlarının uygun karakteristikleri ile ifade etmek mümkündür.

Bundan böyle iki durum ayrı ayrı ele alınacaktır:

a) $E\eta_1 = m_1 \neq 0$; b) $E\eta_1 = m_1 = 0$.

Not edelim ki, (14) eşitliğinde $\theta \rightarrow 0$ için limite geçilir ve Wald özdeşliği dikkate alınırsa $\varphi(1,0)$ için her iki durumda aynı ifadeyi elde edilebilir:

$$\varphi(1,0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \varphi(1, \theta) = \int_0^\beta E(N(z)) d\pi(z). \quad (15)$$

(15) eşitliğinin sağ tarafını bundan böyle EN ile göstereceğiz, yani

$$EN = \int_0^\beta EN(z) d\pi(z)$$

dır.

Şimdi bu bölümün temel sonucu aşağıdaki teorem yardımıyla verilebilir:

TEOREM 4. Teorem 3 ün şartları altında $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $(N(z), S_{N(z)})$ sınır fonksiyonlarının olasılık karakteristikleri ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E \exp(i\theta X(t)) &= E e^{i\theta X} \\ &= \frac{1}{EN} \int_0^\beta e^{i\theta z} \frac{E\{\exp(i\theta S_{N(z)}) - 1\}}{E\{\exp(i\theta \eta_1) - 1\}} d\pi(z). \end{aligned} \quad (16)$$

(16) eşitliğinden yararlanarak $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının momentlerini $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonellerinin uygun karakteristikleri ile ifade etmek mümkündür. Aşağıdaki bölümde, uygulamadaki önemini göz önünde bulundurarak, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk iki momenti için kesin ifadeler elde edilmiştir.

2.6. $X(t)$ Sürecinin Ergodik Dağılımının Birinci ve İkinci Momentleri İçin Kesin Formüller

Bu kısımda aşağıdaki iki durum ayrı ayrı incelenecektir:

a) $E\eta_1 = m_1 \neq 0$ ve b) $E\eta_1 = m_1 = 0$.

Bu amaçla aşağıdaki gösterimler dahil edilsin.

$$E(X^k) = \lim_{t \rightarrow \infty} E[X^k(t)], \quad m_k = E(\eta_1^k), \quad M_k(z) = E(S_{N(z)}^k), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

$$m_1 \neq 0 \text{ olduğu durumda } m_{k1} = \frac{m_k}{m_1}, \quad M_{k1}(z) = \frac{M_k(z)}{M_1(z)}$$

ve

$$m_1 = 0 \text{ olduğunda ise } m_{k2} = \frac{m_k}{m_2}, \quad M_{k2}(z) = \frac{M_k(z)}{M_2(z)}$$

gösterimleri yapılsın. Bu gösterimleri göz önünde bulundurarak aşağıdaki teoremler verilebilir.

TEOREM 5. Ergodik Teorem 3 ün varsayımlarına ek olarak

$$1) E|\eta_1|^3 < \infty \text{ ve } 2) E\eta_1 = m_1 \neq 0$$

koşulları da sağlandığında $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının birinci momenti ($E(X)$) ve ikinci momenti ($E(X^2)$) için S_N sınır fonksiyonelinin ilk üç momenti yardımıyla yazılan aşağıdaki ifadeler doğrudur:

$$E(X) = \frac{1}{M_1(\beta)} \int_0^\beta [zM_1(z) + \frac{1}{2} M_2(z) - \frac{m_{21}}{2} M_1(z)] d\pi(z),$$

$$E(X^2) = \frac{1}{M_1(\beta)} \int_0^\beta \left\{ z^2 M_1(z) + z M_2(z) + \frac{1}{3} M_3(z) - \frac{m_{21}}{2} M_2(z) - m_{21} z M_1(z) + \frac{c_1}{6} M_1(z) \right\} d\pi(z),$$

burada $c_1 = 3m_{21}^2 - 2m_{31}$ ve $M_1(\beta) = \int_0^\beta M_1(z) d\pi(z)$ dır.

İSPAT. 2.4. bölümde $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\varphi_X(\theta)$ için (16) kesin ifadesi bulunmuştu. Bu ifade aşağıdaki eşitlikle verilebilir:

$$\varphi_X(\theta) = \frac{1}{EN} \int_0^\beta e^{i\theta z} \frac{\varphi_{S_{N(z)}}(\theta) - 1}{\varphi_{\eta_1}(\theta) - 1} d\pi(z), \quad (17)$$

burada $\varphi_{S_{N(z)}}(\theta)$ ve $\varphi_{\eta_1}(\theta)$ sırasıyla $S_{N(z)}$ ve η_1 rasgele değişkenlerinin karakteristik fonksiyonlarıdır. Teoremin koşulları gereği $E(\eta_1) = m_1 \neq 0$ ve $E|\eta_1|^3 < \infty$ olduğu için $\theta \rightarrow 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir (bak, örneğin, [11]):

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_{S_{N(z)}}(\theta) - 1}{\varphi_{\eta_1}(\theta) - 1} = \\ & = \frac{1 + i\theta ES_{N(z)} + \frac{(i\theta)^2}{2!} ES_{N(z)}^2 + \frac{(i\theta)^3}{3!} ES_{N(z)}^3 + \dots - 1}{1 + i\theta E\eta_1 + \frac{(i\theta)^2}{2} E\eta_1^2 + \frac{(i\theta)^3}{3} E(\eta_1^3) + \dots - 1} = \\ & = \frac{i\theta M_1 \left\{ 1 + \frac{i\theta}{2} \frac{M_2(z)}{\mu_1(z)} + \frac{(i\theta)^2}{6} M_{31} + o(\theta^2) \right\}}{i\theta m_1 \left\{ 1 + \frac{i\theta}{2} m_{21} + \frac{(i\theta)^2}{6} m_{31} + o(\theta^2) \right\}} = \\ & = EN(z) \left\{ 1 + \frac{i\theta}{2} [M_{21}(z) - m_{21}] + \frac{(i\theta)^2}{12} [2M_{31}(z) - 3m_{21}M_{21}(z) + c_1] + O(\theta^2) \right\}, \end{aligned}$$

burada $c_1 = 3m_{21}^2 - 2m_{31}$ dır.

Diğer taraftan da her $z \in [0, \beta]$ için

$$e^{i\theta z} = 1 + i\theta z + \frac{(i\theta)^2}{2} z^2 + o(\theta^2)$$

dır.

$$\begin{aligned} & e^{i\theta z} \frac{\varphi_{S_{N(z)}}(\theta) - 1}{\varphi_{\eta_1}(\theta) - 1} = \\ & = \frac{1}{m_1} \left\{ M_1(z) + \frac{i\theta}{2} [2zM_1(z) + M_2(z) - m_{21}M_1(z)] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{(i\theta)^2}{12} [6z^2M_1(z) + 6zM_2(z) + 2M_3(z) - 3m_{21}M_2(z) - 6m_{21}zM_1(z) + c_1M_1(z)] + o(\theta^2) \}$$

yazılır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \varphi_X(\theta) &= 1 + \frac{i\theta}{2m_1EN} \int_0^\beta [2zM_1(z) + M_2(z) - m_{21}M_1(z)] d\pi(z) \\ &+ \frac{(i\theta)^2}{12m_1EN} \int_0^\beta [6z^2M_1(z) + 6zM_2(z) + 2M_3(z) \\ &- 3m_{21}M_2(z) - 6m_{21}zM_1(z) + c_1M_1(z)] d\pi(z) + o(\theta^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\varphi_X(\theta) = E(e^{i\theta X}) = 1 + i\theta EX + \frac{(i\theta)^2}{2} EX^2 + o(\theta^2)$$

dır. Bu iki açılımı karşılaştırarak $E(X)$ ve $E(X^2)$ için aşağıdaki kesin ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{M_1(\beta)} \int_0^\beta [zM_1(z) + \frac{1}{2}M_2(z) - \frac{m_{21}}{2}M_1(z)] d\pi(z), \\ E(X^2) &= \frac{1}{M_1(\beta)} \int_0^\beta \{z^2M_1(z) + zM_2(z) + \frac{1}{3}M_3(z) \\ &- \frac{m_{21}}{2}M_2(z) - m_{21}zM_1(z) + \frac{c_1}{6}M_1(z)\} d\pi(z) \end{aligned}$$

burada $c_1 = 3m_{21}^2 - 2m_{31}$ ve $\bar{M}_1(\beta) = \int_0^\beta M_1(z) d\pi(z)$ dır.

Böylece ispat tamamlanmış olur. ▶

TEOREM 6. Ergodik teoremin varsayımlarına ek olarak

$$1) E(\eta_1) = 0, 2) E(\eta_1^2) = m_2 > 0 \text{ ve } 3) E|\eta_1|^3 < \infty$$

koşulları da sağlandığında $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının birinci momenti ($E(X)$) ve ikinci momenti ($E(X^2)$) için S_N sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti yardımıyla yazılan aşağıdaki ifadeler doğrudur:

$$E(X) = \frac{1}{M_2(\beta)} \int_0^\beta [zM_2(z) + \frac{1}{3}M_3(z) - \frac{1}{3}M_2(z)m_{32}] d\pi(z),$$

$$E(X^2) = \frac{1}{M_2(\beta)} \int_0^\beta [z^2 M_2(z) + \frac{2z}{3} M_3(z) + \frac{1}{6} M_4(z) - \frac{2}{3} z M_2(z) m_{32} - \frac{2}{9} M_3(z) m_{32} - \frac{1}{6} M_2(z) m_{42} + \frac{2}{9} M_2(z) m_{32}^2] d\pi(z),$$

burada $\bar{M}_2(\beta) = \int_0^\beta M_2(z) d\pi(z)$ dir.

İSPAT. Teoremin koşullarından $E|\eta_1|^3 < \infty$ ve $E(\eta_1) = 0$ olduğundan dolayı $\theta \rightarrow 0$ iken aşağıdaki açılımlar yazılabilir (bak, örneğin, [11]):

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{S_{N(z)}}(\theta) - 1}{\varphi_{\eta_1}(\theta) - 1} &= \\ &= \frac{1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} ES_{N(z)}^2 + \frac{(i\theta)^3}{3!} ES_{N(z)}^3 + \frac{(i\theta)^4}{4!} ES_{N(z)}^4 + \dots - 1}{1 + \frac{(i\theta)^2}{2} E\eta_1^2 + \frac{(i\theta)^3}{3!} E(\eta_1^3) + \frac{(i\theta)^4}{4!} E(\eta_1^4) + \dots - 1} = \\ &= \frac{M_2 \left\{ 1 + \frac{i\theta}{3} \frac{M_3(z)}{M_2(z)} + \frac{(i\theta)^2}{12} M_{42} + o(\theta^2) \right\}}{m_2 \left\{ 1 + \frac{i\theta}{3} m_{32} + \frac{(i\theta)^2}{12} m_{42} + o(\theta^2) \right\}} = \\ &= \frac{M_2(z)}{m_2} \left\{ 1 - \frac{i\theta}{3} (m_{32} - M_{32}(z)) \right. \\ &\quad \left. + (i\theta)^2 \left[\frac{1}{9} (m_{32}^2 - M_{32}(z)m_{32}) + \frac{1}{12} (M_{42}(z) - m_{42}) \right] + o(\theta^2) \right\}. \end{aligned}$$

Diğer taraftan her $z \in [0, \beta]$ için

$$e^{i\theta z} = 1 + i\theta z + \frac{(i\theta)^2}{2} z^2 + o(\theta^2)$$

dır.

$$\begin{aligned} e^{i\theta z} \frac{\varphi_{S_{N(z)}}(\theta) - 1}{\varphi_{\eta_1}(\theta) - 1} &= \\ &= \left\{ 1 + i\theta z + \frac{(i\theta)^2}{2} z^2 + o(\theta^2) \right\} \times \frac{M_2(z)}{m_2} \left\{ 1 - \frac{i\theta}{3} (m_{32} - M_{32}(z)) \right. \\ &\quad \left. + (i\theta)^2 \left[\frac{1}{9} (m_{32}^2 - M_{32}(z)m_{32}) + \frac{1}{12} (M_{42}(z) - m_{42}) \right] + o(\theta^2) \right\} \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla,

$$\varphi_X(\theta) = \frac{1}{EN} \int_0^\beta \frac{M_2(z)}{m_2} \left\{ 1 + i\theta \left[z - \frac{1}{3}(m_{32} - M_{32}) \right] + (i\theta)^2 \left[\frac{1}{9}(m_{32}^2 - M_{32}m_{32}) + \frac{1}{12}(M_{42}(z) - m_{42}) - \frac{z}{3}(m_{32} - M_{32}(z)) + \frac{z^2}{2} \right] d\pi(z) + o(\theta^2) \right\}.$$

dır. Ayrıca,

$$\varphi_X(\theta) = E(e^{i\theta X}) = 1 + i\theta EX + \frac{(i\theta)^2}{2} EX^2 + o(\theta^2)$$

olduğundan bu iki açılım karşılaştırılarak $E(X)$ ve $E(X^2)$ için aşağıdaki kesin ifadeler elde edilir:

$$E(X) = \frac{1}{M_2(\beta)} \int_0^\beta [zM_2(z) + \frac{1}{3}M_3(z) - \frac{1}{3}M_2(z)m_{32}] d\pi(z),$$

$$E(X^2) = \frac{1}{M_2(\beta)} \int_0^\beta [z^2M_2(z) + \frac{2z}{3}M_3(z) + \frac{1}{6}M_4(z) - \frac{2}{3}zM_2(z)m_{32} - \frac{2}{9}M_3(z)m_{32} - \frac{1}{6}M_2(z)m_{42} + \frac{2}{9}M_2(z)m_{32}^2] d\pi(z).$$

Böylece Teorem 6'nın ispatı tamamlanmış oldu. ▶

Not: Genel durumda elde edilen kesin ifadeleri hesaplamak kolay değildir ancak bazı özel durumlar için sürecin ergodik dağılımının birinci ve ikinci momentleri için basit ve aşikar ifadeler elde etmek mümkündür. Böyle özel durumlardan birisi η_1 rasgele değişkeninin iki taraflı üstel dağılıma sahip olduğu durumdur. Bu özel durum sonraki bölümde yeterli bir biçimde ele alınacaktır. Ayrıca da ζ_1 'in dejenere olmuş rasgele değişken olduğu varsayılacaktır. Yani;

$$\pi(z) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases} \quad \text{burada } a = \beta/2 \text{ dir.}$$

Bu durumda birinci ve ikinci moment için kesin ifadeler aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$E(X) = a, \quad E(X^2) = a^2 + \frac{1}{6}(M_{42} - m_{42}),$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{6}(M_{42} - m_{42}).$$

2.7. Özel Durum: İki Taraflı Üstel Dağılım

Bu kısımda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı η_1 rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametrelili iki taraflı üstel dağılıma sahip olduğu durumda incelenecektir. η_1 rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametrelili iki taraflı üstel dağılımına sahip olduğunda yoğunluk fonksiyonu

$$f_{\eta_1}(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \equiv (-\infty, \infty), \quad \lambda \in (0, \infty)$$

ve karakteristik fonksiyonunun

$$\varphi_{\eta_1}(\theta) = E(e^{i\theta\eta_1}) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \theta^2}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

şeklinde olduğu iyice bilinmektedir.

Ayrıca üstel dağılımın unutkanlık özelliğinden dolayı N ve S_N sınır fonksiyonlarının bağımsız olduğu da literatürden bilinmektedir (bak, örneğin, [19], sayfa 600). Diğer taraftan üstel dağılımın unutkanlık özelliğinden yararlanarak S_N sınır fonksiyonelinin yoğunluk fonksiyonunun

$$f_{S_N}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda(|x|-a)}, & |x| \geq a \\ 0, & |x| < a \end{cases},$$

şeklinde olduğunu göstermek zor değildir. Burada $a = \beta/2$ dır. Bu formül göz önüne alınarak S_N sınır fonksiyonelinin karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \varphi_{S_N}(\theta) &= E(e^{i\theta S_N}) \\ &= \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{e^{-i\theta a}}{\lambda + i\theta} + \frac{e^{i\theta a}}{\lambda - i\theta} \right\} = \frac{\lambda[\lambda \cos(\theta a) - \theta \sin(\theta a)]}{\lambda^2 + \theta^2}. \end{aligned}$$

$\varphi_{\eta_1}(\theta) = \frac{1}{s}$, $s \in (0,1)$ denkleminin kökü olsun. Ele alınan durumda bu denklemin iki

simetrik kökü vardır. Bu köklerden pozitif olanı $\theta_1(s)$ ile gösterilsin yani $\theta_1(s) = \lambda i \sqrt{1-s}$ olsun. Wald'un temel özdeşliğine göre $\theta = \theta_1(s)$ olduğunda $E(s^N e^{i\theta_1(s)S_N}) = 1$ olur. Diğer taraftan N ve S_N rasgele değişkenleri bağımsız oldukları için $E(s^N)E(e^{i\theta_1(s)S_N}) = 1$ dır.

Dolayısıyla,

$$E(s^N) = \frac{1}{\varphi_{S_N}(\theta_1(s))}$$

şeklinde yazılabilir. $\Psi_N(s)$, N rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunu gösterebilir, yani $\Psi_N(s) \equiv E(s^N)$ olsun. Bu durumda $\Psi_N(s)$ aşağıdaki aşikar şekilde yazılabilir:

$$\Psi_N(s) \equiv \frac{1}{\varphi_{S_N}(\theta_1(s))} = \frac{s}{\text{Cosh}(a\lambda\sqrt{1-s}) + \sqrt{1-s}\text{Sinh}(a\lambda\sqrt{1-s})}, s \in (0,1).$$

$$\text{Cosh}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ ve } \text{Sinh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ olduğu bilinmektedir.}$$

Böylece yukarıda yazılanların bir özeti olarak aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir.

Yardımcı Teorem 1. η_1 rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametrelili iki taraflı üstel dağılıma sahip olduğu durumda N sınır fonksiyonelinin moment çıkaran fonksiyonu $\Psi_N(s)$ ve S_N sınır fonksiyonelinin karakteristik fonksiyonu $\varphi_{S_N}(\theta)$ aşağıdaki aşikar şekilde yazılabilirler:

$$\Psi_N(s) \equiv E(s^N) = \frac{s}{\text{Cosh}(a\lambda\sqrt{1-s}) + \sqrt{1-s}\text{Sinh}(a\lambda\sqrt{1-s})},$$

$$\varphi_{S_N}(\theta) = E(e^{i\theta S_N}) = \frac{\lambda[\lambda \text{Cos}(\theta a) - \theta \text{Sin}(\theta a)]}{\lambda^2 + \theta^2}, \text{ burada } a = \frac{\beta}{2}. \quad \blacktriangleright$$

$\Psi_N(s)$ fonksiyonunun aşikar şekliyle yararlanarak N sınır fonksiyonelinin momentleri için kesin ifadeler elde etmek mümkündür.

Yardımcı Teorem 2. η_1 rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametrelili iki taraflı üstel dağılıma sahip olduğu durumda N sınır fonksiyonelinin ilk dört momentleri için aşağıdaki kesin ve aşikar formüller yazılabilir:

$$E(N) = \frac{(a\lambda)^2}{2} + a\lambda + 1,$$

$$E(N^2) = \frac{5}{12}(a\lambda)^4 + \frac{5}{3}(a\lambda)^3 + \frac{7}{2}(a\lambda)^2 + 3(a\lambda) + 1,$$

$$E(N^3) = \frac{61}{120}(a\lambda)^6 + \frac{21}{20}(a\lambda)^5 + \frac{23}{2}(a\lambda)^4 + 16(a\lambda)^3 + \frac{31}{2}(a\lambda)^2 + 7(a\lambda) + 1,$$

$$E(N^4) = \frac{277}{168}(a\lambda)^8 + \frac{277}{21}(a\lambda)^7 + \frac{5601}{20}(a\lambda)^6 + \frac{905}{10}(a\lambda)^5 + \frac{1685}{12}(a\lambda)^4 + \frac{305}{3}(a\lambda)^3 + \frac{115}{2}(a\lambda)^2 + 15(a\lambda) + 1. \quad \blacktriangleright$$

SONUÇ 2. Yardımcı Teorem 2 nin koşulları altında N rasgele değişkeninin varyansı aşağıdaki aşikar formülle verilebilir:

$$\text{Var}(N) = \frac{1}{6}(a\lambda)^4 + \frac{2}{3}(a\lambda)^3 + \frac{3}{2}(a\lambda)^2 + (a\lambda). \quad \blacktriangleright$$

Ayrıca S_N sınır fonksiyonelinin karakteristik fonksiyonunun aşikar şekli bilindiği için S_N sınır fonksiyonelinin momentleri için kesin ifadeler elde etmek mümkündür.

Yardımcı Teorem 3. η_1 rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametrelili iki taraflı üstel dağılıma sahip olduğu durumda S_N sınır fonksiyonelinin ilk dört momentleri ($M_k, k = 1, 2, 3, 4$) aşağıdaki aşikar formüllerle verilebilir:

$$M_1 = M_3 = 0,$$

$$M_2 = \left(a + \frac{1}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2},$$

$$M_4 = \left(a + \frac{1}{\lambda}\right)^4 + \frac{6}{\lambda^2} \left(a + \frac{1}{\lambda}\right)^2 + \frac{8}{\lambda^3} \left(a + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{9}{\lambda^4}.$$

SONUÇ 3. Yardımcı Teorem 3 ün koşulları altında S_N rasgele değişkeninin varyansı:

$$\text{Var}(S_N) = \left(a + \frac{1}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} \quad \blacktriangleright$$

şeklindedir.

Aşağıdaki teoremle $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\varphi_X(\theta)$ nin aşikar şekli verilebilir.

TEOREM 7. η_1 rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametrelili iki taraflı üstel dağılıma sahip olduğu durumda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\varphi_X(\theta)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\varphi_X(\theta) = \frac{e^{i\theta a}}{[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]} \left\{ (a\lambda)^2 \left[\frac{\text{Sin}(\theta a / 2)}{\theta a / 2} \right]^2 + 2a\lambda \frac{\text{Sin}(\theta a)}{\theta a} + 2 \right\}.$$

İSPAT. Teorem 4 de $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu için aşağıdaki kesin ifade bulunmuştur:

$$\begin{aligned} \varphi_X(\theta) &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} E \exp(i\theta X(t)) = E e^{i\theta X} \\ &= \frac{1}{EN} \int_0^{\beta} e^{i\theta z} \frac{E \left\{ \exp(i\theta S_{N(z)}) - 1 \right\}}{E \left\{ \exp(i\theta \eta_1) - 1 \right\}} d\pi(z). \end{aligned}$$

Diğer taraftan yukarıda N , S_N ve η_1 rasgele değişkenlerinin sayısal ve fonksiyonel karakteristikleri için aşikar ifadeler verilmişti. Başka bir deyişle;

$$E(N) = \frac{(a\lambda)^2}{2} + a\lambda + 1,$$

$$\varphi_{S_N}(\theta) = \frac{\lambda^2 \cos(\theta a) - \lambda \theta \sin(\theta a)}{\lambda^2 + \theta^2},$$

$$\varphi_{\eta_1}(\theta) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \theta^2}.$$

Bu ifadeleri göz önünde bulundurarak bazı sadeleştirmelerden sonra

$$\varphi_X(\theta) = \frac{e^{i\theta a}}{[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]} \left\{ (a\lambda)^2 \left[\frac{\sin(\theta a / 2)}{\theta a / 2} \right]^2 + 2a\lambda \frac{\sin(\theta a)}{\theta a} + 2 \right\}$$

elde edilir. Burada $\pi(B)$ dağılımı $x = a$ noktasında toplanmış dejenere dağılımdır.

Böylece ispat tamamlanmış olur. ▶

Şimdi de $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(u)$ 'nin aşikar şeklini elde etmeye çalışalım. Bunun için aşağıdaki bilinen dağılım fonksiyonlarını ifade edelim:

$$I) F_1(u) = \begin{cases} 0 & , u \in (-\infty, 0) \\ \frac{u^2}{2a^2} & , u \in [0, a) \\ 1 - \frac{(2a-u)^2}{2a^2} & , u \in [a, 2a) \\ 1 & , u \in [2a, \infty) \end{cases},$$

$F_1(u)$ fonksiyonu, $[0, 2a]$ aralığında tanımlanmış üçgensel dağılım fonksiyonudur.

$$II) F_2(u) = \begin{cases} 0 & , u \in (-\infty, 0) \\ \frac{u}{2a} & , u \in [0, 2a) \\ 1 & , u \in [2a, \infty) \end{cases}$$

$F_2(u)$ fonksiyonu, $[0, 2a]$ aralığında tanımlanmış düzgün dağılım fonksiyonudur.

$$III) F_3(u) = \varepsilon(u-a) = \begin{cases} 0 & , u \in (-\infty, a) \\ 1 & , u \in [a, \infty) \end{cases}$$

$F_3(u)$ fonksiyonu ise, dejenere olmuş dağılım fonksiyonudur.

TEOREM 8. η_1 rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametrelili iki taraflı üstel dağılıma sahip olduğu durumda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(u)$ aşağıdaki aşikar şekilde yazılabilir:

$$Q_X(u) = \alpha_1 F_1(u) + \alpha_2 F_2(u) + \alpha_3 F_3(u), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Burada

$$\alpha_1 = \frac{(a\lambda)^2}{[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]}, \quad \alpha_2 = \frac{2a\lambda}{[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]}, \quad \alpha_3 = \frac{2}{[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]}$$

dır.

İSPAT. Teorem 7 de ergodik dağılımın karakteristik fonksiyonunun aşikar şekli elde edilmişti. Bu sonuçtan yola çıkarak $\varphi_X(\theta)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varphi_X(\theta) = \alpha_1 e^{i\theta a} \frac{2(1 - \cos(\theta a))}{\theta a} + \alpha_2 e^{i\theta a} \frac{\sin \theta a}{\theta a} + \alpha_3 e^{i\theta a}.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ katsayılarının aşağıdaki koşulları sağladıkları kolayca görülmektedir.

$$1) \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0,$$

$$2) \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

diğer taraftan

$$\varphi_1(\theta) = e^{i\theta a} \frac{2(1 - \cos(\theta a))}{\theta a}, \quad \varphi_2(\theta) = e^{i\theta a} \frac{\sin \theta a}{\theta a} \quad \text{ve} \quad \varphi_3(\theta) = e^{i\theta a}$$

fonksiyonlarının birer karakteristik fonksiyonlar olduklarını görmek zor değildir. Dolayısıyla karakteristik fonksiyonlar ile dağılım fonksiyonları arasındaki birebirlik özelliğine göre, $\varphi_X(\theta)$ karakteristik fonksiyonuna karşılık gelen $Q_X(u)$ dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_X(u) = \alpha_1 F_1(u) + \alpha_2 F_2(u) + \alpha_3 F_3(u), \quad u \in \mathbb{R},$$

burada $F_1(u), F_2(u), F_3(u)$ dağılım fonksiyonları, sırasıyla $\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta), \varphi_3(\theta)$ karakteristik fonksiyonlarına karşılık gelen dağılım fonksiyonlarıdır.

$\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta), \varphi_3(\theta)$ karakteristik fonksiyonlarının aşikar şeklinden yola çıkarak $\varphi_1(\theta)$ karakteristik fonksiyonuna karşılık gelen $F_1(u)$ fonksiyonunun $[0, 2a]$ aralığında üçgensel dağılım fonksiyonu, $\varphi_2(\theta)$ karakteristik fonksiyonuna karşılık gelen $F_2(u)$ fonksiyonunun $[0, 2a]$ aralığında düzgün dağılım fonksiyonu ve $\varphi_3(\theta)$ karakteristik fonksiyonuna karşılık gelen $F_3(u)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında toplanmış dejenere dağılım fonksiyonu olduğunu görmek zor değildir. Bu fonksiyonların aşikar şekilleri yukarıda ifade edilmiştir. Dolayısıyla $Q_X(u)$ ergodik dağılımının aşikar şekli elde edilmiş olur. Buda ispatı tamamlar. ▶

Yukarıda elde edilen kesin ifadelerden yola çıkarak ergodik dağılımın momentleri için kesin ve asimptotik ifadeler elde edilebilir. Özellikle aşağıdaki ifadeleri vermek mümkündür.

SONUÇ 4. η_1 rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametrelili iki taraflı üstel dağılıma sahip olduğu durumda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti aşağıdaki aşikar şekilde yazılabilir:

$$E(X) = a, \quad a = \beta/2,$$

$$E(X^2) = \frac{a^2[7(a\lambda)^2 + 16a\lambda + 12]}{6[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]},$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{6}[M_{42} - m_{42}] = \frac{a^2[(a\lambda)^2 + 4a\lambda]}{6[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]},$$

$$E(X^3) = \frac{a^3[3(a\lambda)^2 + 8a\lambda + 4]}{2[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]},$$

$$E(X^4) = \frac{a^4[31(a\lambda)^2 + 96a\lambda + 30]}{15[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]}.$$

İSPAT. Teorem 7 de aşikar şekli bulunan karakteristik fonksiyonu θ 'nın derecelerine göre Taylor serisine ayırarak aşağıdaki kesin ifadeleri elde etmek zor değildir:

$$E(X) = a, \quad a = \beta/2,$$

$$E(X^2) = \frac{a^2[7(a\lambda)^2 + 16a\lambda + 12]}{6[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]},$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{6}[M_{42} - m_{42}] = \frac{a^2[(a\lambda)^2 + 4a\lambda]}{6[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]},$$

$$E(X^3) = \frac{a^3[3(a\lambda)^2 + 8a\lambda + 4]}{2[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]},$$

$$E(X^4) = \frac{a^4[31(a\lambda)^2 + 96a\lambda + 30]}{15[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]}.$$

Bu kısımda da aşağıdaki teorem verilebilir.

TEOREM 9. η_1 rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametrelili iki taraflı üstel dağılıma sahip olduğu durumda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için $a \rightarrow \infty$ iken aşağıdaki asimptotik açılımları yazmak mümkündür:

$$E(X) = a$$

$$E(X^2) = \frac{a^2}{6} \left\{ 7 + \frac{2}{a\lambda} - \frac{6}{(a\lambda)^2} + \frac{8}{(a\lambda)^3} + O\left(\frac{1}{(a\lambda)^4}\right) \right\},$$

$$\text{Var}(X) = \frac{a^2}{6} \left\{ 1 + \frac{2}{a\lambda} - \frac{6}{(a\lambda)^2} + \frac{8}{(a\lambda)^3} + O\left(\frac{1}{(a\lambda)^4}\right) \right\},$$

$$E(X^3) = \frac{a^3}{2} \left\{ 3 + \frac{2}{a\lambda} - \frac{6}{(a\lambda)^2} + \frac{8}{(a\lambda)^3} + O\left(\frac{1}{(a\lambda)^4}\right) \right\},$$

$$E(X^4) = \frac{a^4}{15} \left\{ 31 + \frac{34}{a\lambda} - \frac{100}{(a\lambda)^2} + \frac{132}{(a\lambda)^3} + O\left(\frac{1}{(a\lambda)^4}\right) \right\}.$$

İSPAT. Sonuç 4 de $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentinin aşikar şekli rasyonel ifadeler şeklinde bulunmuştur. $a \rightarrow \infty$ iken bu ifadelerin asimptotik açılımlarını bulmak zor değildir.

NOT. Yukarıda elde ettiğimiz asimptotik açılımları λ parametresi yardımı ile değil de genel duruma uygun olarak momentler yardımıyla ifade etmekte yarar vardır. Bu anlamda, $\text{Var}(\eta_1) \equiv \sigma^2 = \frac{2}{\lambda^2}$ olduğu için $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}$ dönüşümünü yaparak aşağıdaki asimptotik ifadeleri elde etmek mümkündür.

$$E(X^2) = \frac{7a^2}{6} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{2}\sigma}{7a} - \frac{3\sigma^2}{7a^2} + O\left(\left(\frac{\sigma}{a}\right)^3\right) \right\},$$

$$\text{Var}(X) = \frac{a^2}{6} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{2}\sigma}{a} - \frac{3\sigma^2}{a^2} + O\left(\left(\frac{\sigma}{a}\right)^3\right) \right\},$$

$$E(X^3) = \frac{3a^3}{2} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{2}\sigma}{3a} - \frac{\sigma^2}{a^2} + O\left(\left(\frac{\sigma}{a}\right)^3\right) \right\},$$

$$E(X^4) = \frac{31a^4}{15} \left\{ 1 + \frac{17\sqrt{2}\sigma}{31a} - \frac{50\sigma^2}{31a^2} + O\left(\left(\frac{\sigma}{a}\right)^3\right) \right\}. \quad \blacktriangleright$$

2.7.1. İki Tarafli Üstel Özel Durumu İcin Simülasyon Sonuçları

Elde edilen teorik sonuçların simülasyon sonuçları ile karşılaştırılması için aşağıdaki tablolar ve grafikler oluşturulmuştur.

Burada $E(X)$ ve $\hat{E}(X)$ ile sırasıyla sürecin ergodik dağılımının beklenen değerinin teorik ve simülasyon yöntemiyle elde edilen değerleri; $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ ile ise sürecin ergodik dağılımının varyans değerinin teorik ve simülasyon yöntemiyle elde edilen değerleri gösterilmiştir. $\Delta(\text{EX})$ ve $\Delta(\text{VarX})$ ile sürecin adı geçen karakteristiklerin teorik ve simülasyon değerlerinin mutlak farkı; $\delta(\text{EX})(\%)$ ve $\delta(\text{VarX})(\%)$ ile de adı geçen karakteristiklerin teorik ve simülasyon değerlerinin görel farkı gösterilmiştir. Yani,

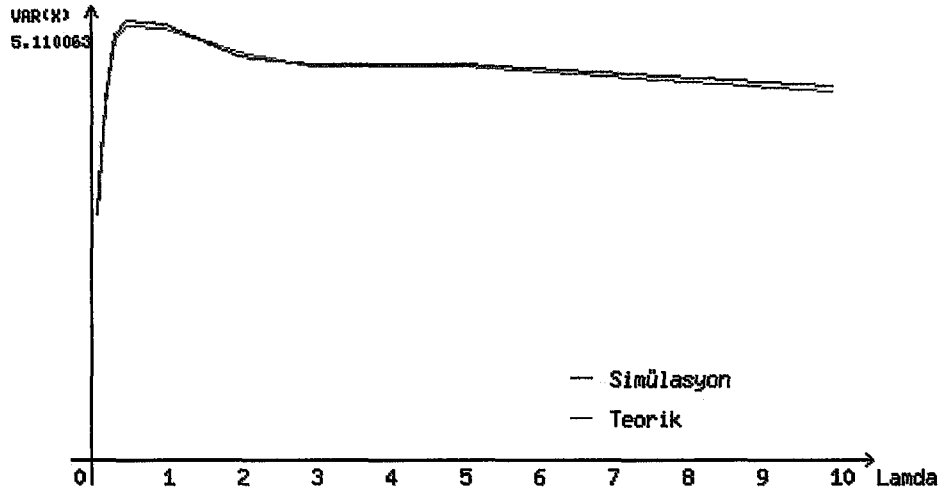
$$\Delta(\text{EX}) = |E(X) - E(\hat{X})|; \Delta(\text{VarX}) = |\text{Var}(X) - \text{Var}(\hat{X})|$$

$$\delta(\text{EX}) = \frac{\Delta(\text{EX})}{E(X)} \cdot 100(\%), \delta(\text{VarX}) = \frac{\Delta(\text{VarX})}{\text{Var}(X)} \cdot 100(\%)$$

dır.

Tablo 1. $\beta = 10$ için beklenen değer ve varyansın teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve görel fark tablosu

λ	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(\text{EX})$	$\delta(\text{EX})(\%)$	$\text{Var}(X)$	$\hat{\text{Var}}(X)$	$\Delta(\text{VarX})$	$\delta(\text{VarX})(\%)$
0,1	5	5,000791	0,000791	0,0158	2,884615	2,884568	0,000047	0,00162
0,2	5	4,999584	0,000416	0,00832	4,166667	4,165539	0,001128	0,02707
0,333	5	5,001361	0,001361	0,0272	4,954984	4,954285	0,000698	0,00014
0,5	5	5,000216	0,000216	0,0044	5,110063	5,108254	0,001808	0,03538
1	5	5,000368	0,000368	0,0074	5,067568	5,066884	0,000683	0,013
2	5	4,999989	0,000011	0,00022	4,781421	4,781806	0,000385	0,00815
3	5	4,998536	0,001464	0,02928	4,620623	4,620541	0,000082	0,00177
5	5	4,998536	0,001464	0,02928	4,620623	4,620541	0,000082	0,00177
10	5	4,997525	0,002475	0,0495	4,323597	4,322416	0,001181	0,0273



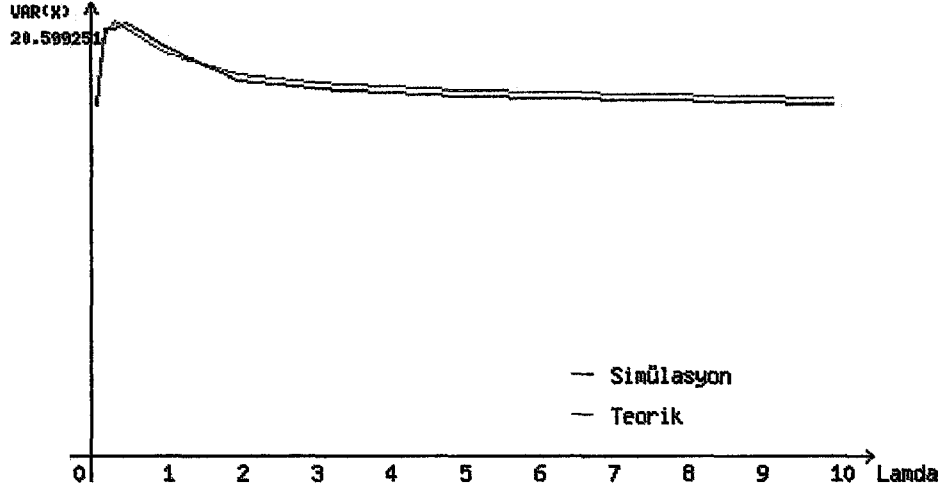
Şekil 2. $\beta = 10$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği



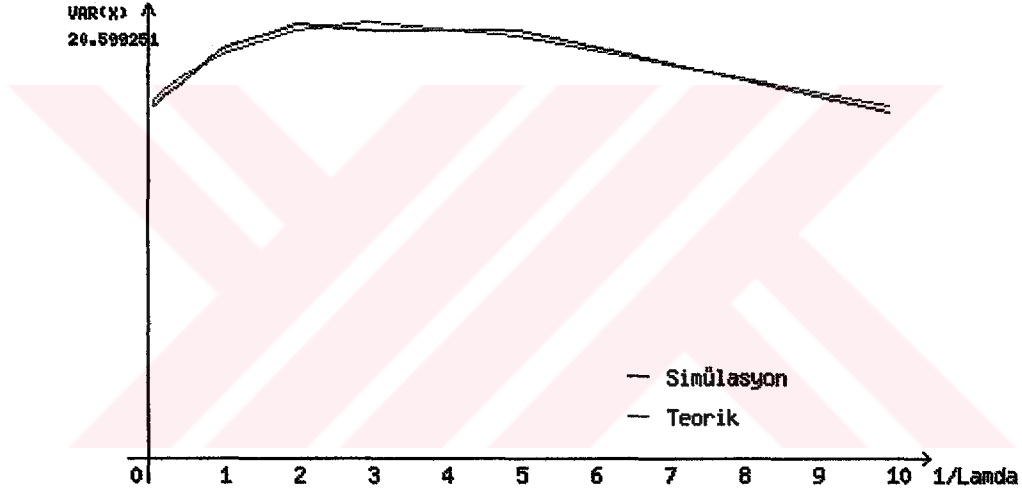
Şekil 3. $\beta = 10$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği

Tablo 2. $\beta = 20$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

λ	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(E(X))$	$\delta(E(X))$ (%)	$\text{Var}(X)$	$\hat{\text{Var}}(X)$	$\Delta(\text{Var}X)$	$\delta(\text{Var}X)$ (%)
0,1	10	10,00107	0,001072	0,0107	16,666667	16,670273	0,003606	0,02165
0,2	10	10,00062	0,000629	0,0063	20	19,994963	0,005037	0,02518
0,333	10	9,999732	0,000268	0,00268	20,599251	20,605130	0,005879	0,02854
0,5	10	10,00118	0,001188	0,0119	20,27027	20,261507	0,008762	0,0432
1	10	9,999773	0,000227	0,00227	19,125683	19,116564	0,009119	0,0476
2	10	10,00113	0,001135	0,0114	18,099548	18,105814	0,006267	0,03464
3	10	9,997989	0,00201	0,0201	17,671518	17,674658	0,00314	0,0176
5	10	10,00251	0,002516	0,0252	17,294389	17,304159	0,00977	0,05649
10	10	9,998665	0,001335	0,01335	16,990133	16,992309	0,002176	0,01283



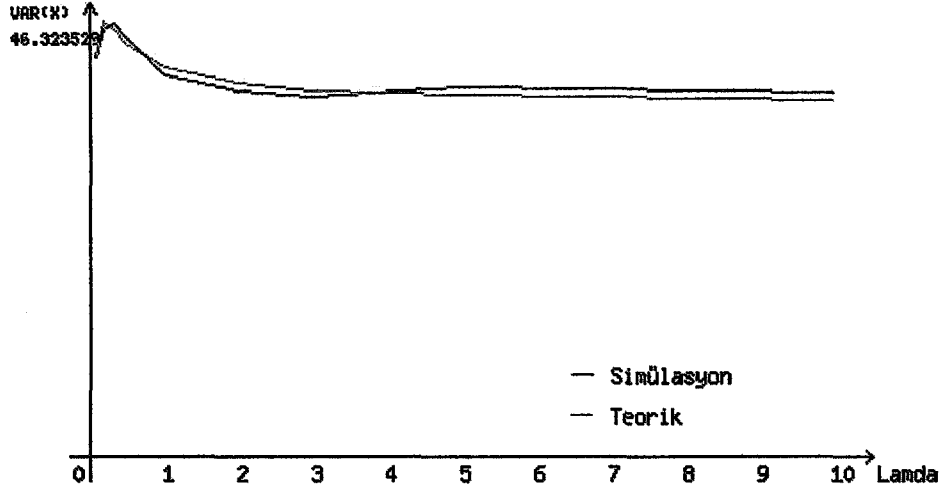
Şekil 4. $\beta = 20$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği



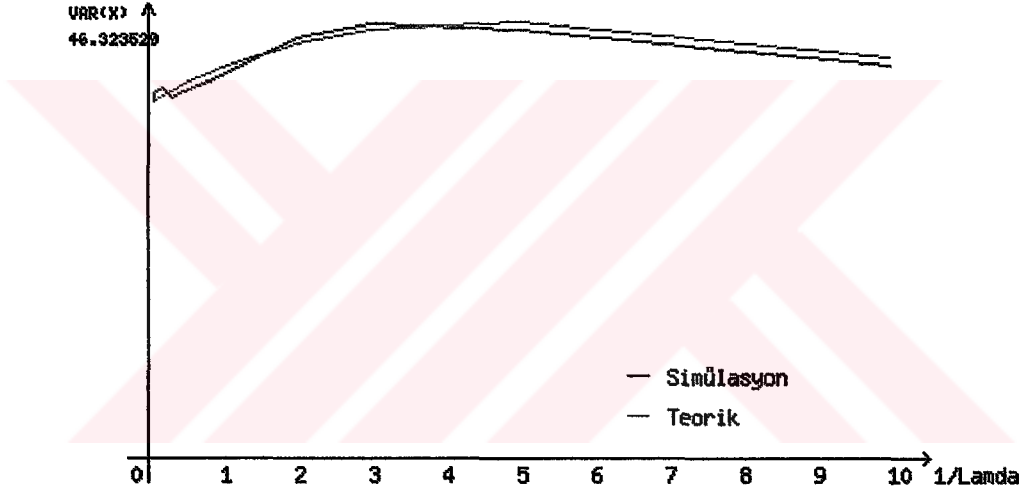
Şekil 5. $\beta = 20$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği

Tablo 3. $\beta = 30$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

λ	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(EX)$	$\delta(EX)$ (%)	$\text{Var}(X)$	$\hat{\text{Var}}(X)$	$\Delta(\text{Var}X)$	$\delta(\text{Var}X)$ (%)
0,1	15	14,998386	0,001614	0,01076	42,672414	42,690938	0,018524	0,0434
0,2	15	14,999873	0,000127	0,000846	46,323529	46,327498	0,003968	0,008570
0,333	15	15,000767	0,000767	0,005133	45,608108	45,602359	0,005749	0,0126
0,5	15	14,999450	0,00055	0,003666	44,155290	44,146318	0,008972	0,0203
1	15	14,999765	0,000235	0,00156	41,585603	41,597756	0,012153	0,0292
2	15	15,000771	0,000771	0,005133	39,760915	39,778748	0,017833	0,0448
3	15	15,000248	0,000248	0,001666	39,058810	39,073137	0,014328	0,03668
5	15	15,001312	0,001312	0,008733	38,460706	38,445040	0,015666	0,0407
10	15	15,003941	0,003941	0,0262	37,990089	37,952099	0,03799	0,0999



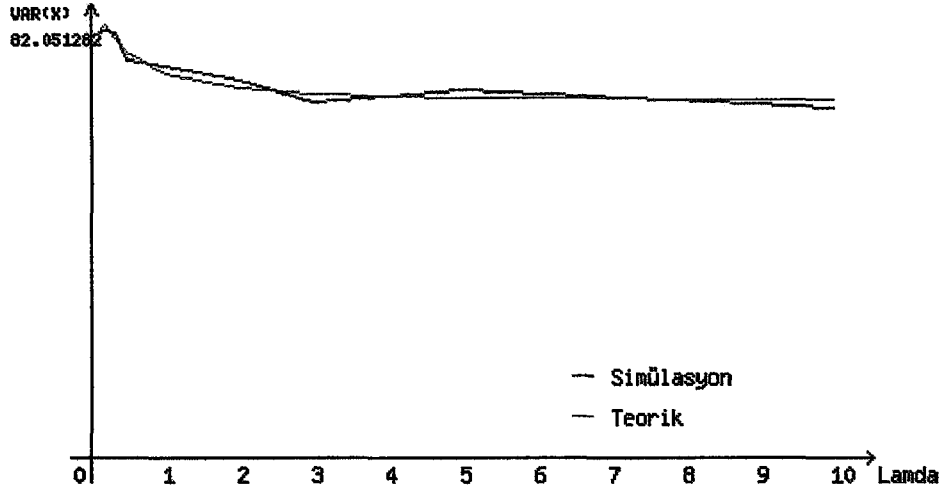
Şekil 6. $\beta = 30$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği



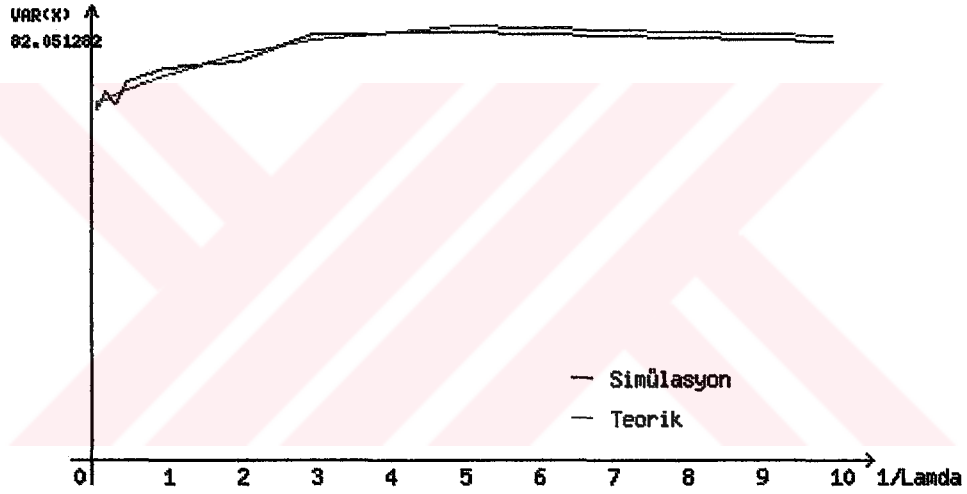
Şekil 7. $\beta = 30$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği

Tablo 4. $\beta = 40$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

λ	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(E(X))$	$\delta(E(X))$ (%)	$\text{Var}(X)$	$\hat{\text{Var}}(X)$	$\Delta(\text{Var}X)$	$\delta(\text{Var}X)$ (%)
0,1	20	19,999434	0,000566	0,00283	80,000000	80,002547	0,002547	0,00318
0,2	20	19,991245	0,008755	0,04377	82,051282	82,094730	0,043448	0,05295
0,333	20	19,997242	0,002758	0,01379	79,306072	79,302546	0,003526	0,00444
0,5	20	19,999486	0,000514	0,00257	76,502732	76,548570	0,045838	0,05991
1	20	20,001965	0,001965	0,00985	72,398190	72,387031	0,011159	0,01541
2	20	20,001449	0,001449	0,00725	69,758224	69,733861	0,024364	0,03492
3	20	20,004498	0,004498	0,0225	68,780226	68,794904	0,014679	0,02134
5	20	19,998953	0,001047	0,00523	67,960531	67,888492	0,072039	0,106
10	20	19,991588	0,008412	0,04206	67,323400	67,351238	0,027838	0,04135



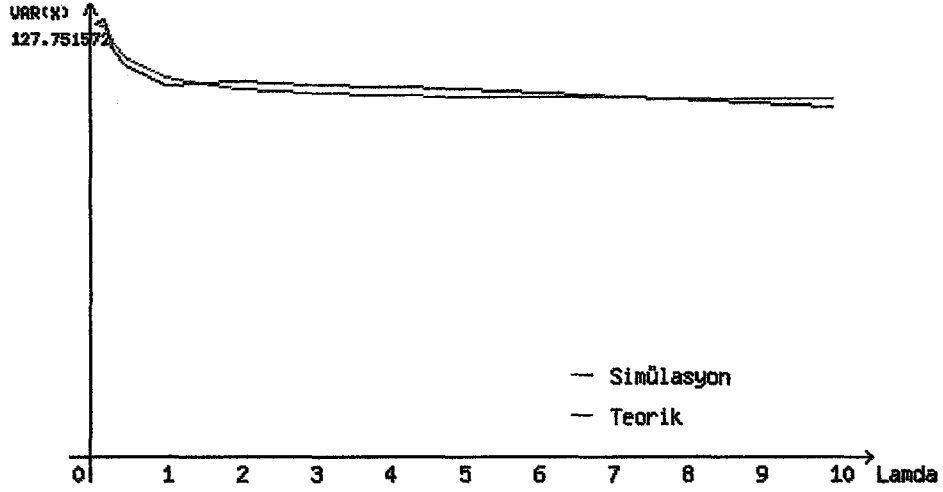
Şekil 8. $\beta = 30$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği



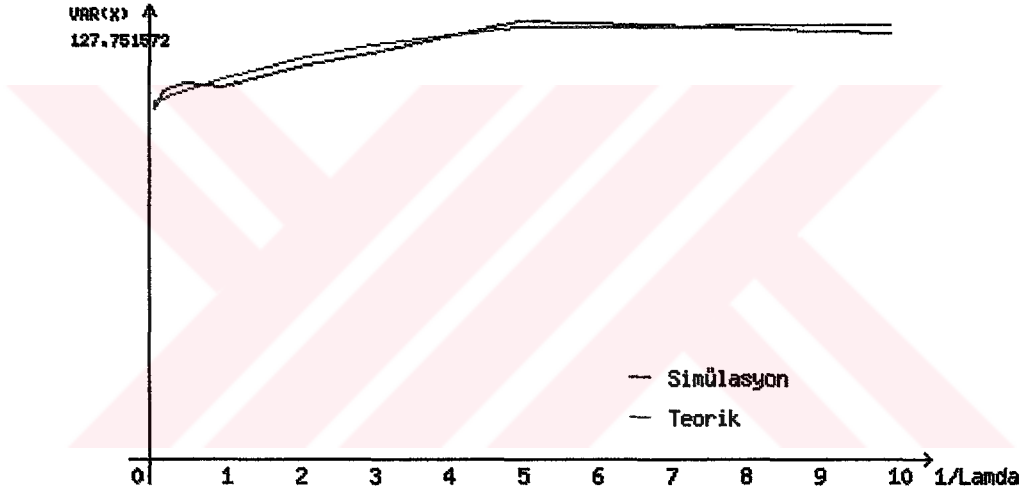
Şekil 9. $\beta = 30$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği

Tablo 5. $\beta = 50$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

λ	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(EX)$	$\delta(EX)$ (%)	$\text{Var}(X)$	$\hat{\text{Var}}(X)$	$\Delta(\text{Var}X)$	$\delta(\text{Var}X)$ (%)
0,1	25	24,994534	0,005466	0,021864	127,751572	127,77876	0,027193	0,02128
0,2	25	25,006593	0,006593	0,02636	126,689189	126,68449	0,004692	0,003703
0,333	25	25,007119	0,007119	0,02848	121,505885	121,56851	0,062628	0,05154
0,5	25	24,996981	0,003019	0,012076	117,240791	117,26588	0,025089	0,02140
1	25	24,999433	0,000567	0,002268	111,552191	111,60264	0,050455	0,04523
2	25	24,996898	0,003102	0,012408	108,089931	108,06288	0,027045	0,025
3	25	25,002146	0,002146	0,0086	106,835295	106,76207	0,073219	0,0685
5	25	25,001081	0,001081	0,00432	105,793758	105,71211	0,081645	0,07717
10	25	24,985375	0,014625	0,0585	104,990053	105,01925	0,029201	0,0278



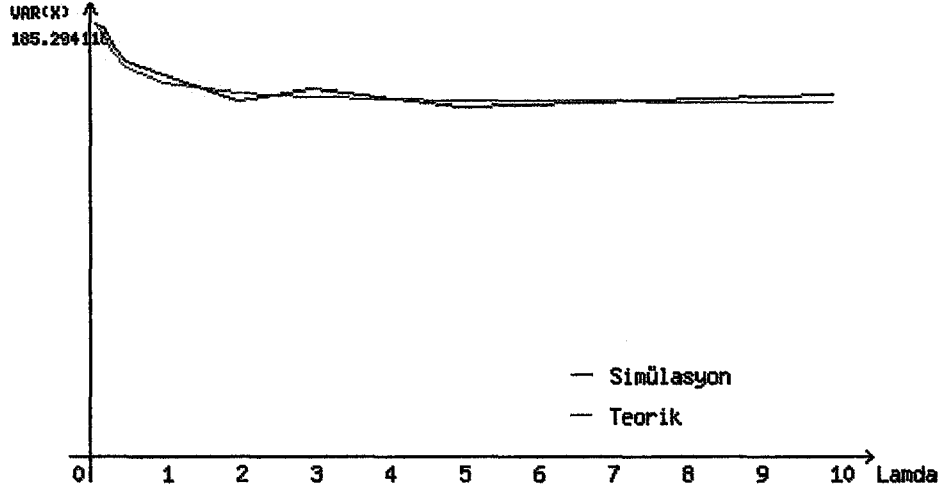
Şekil 10. $\beta = 50$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği



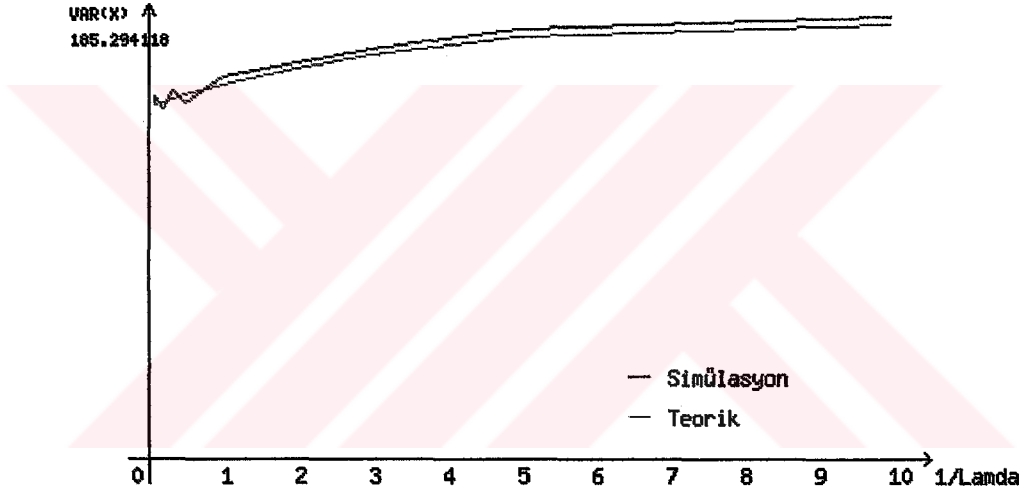
Şekil 11. $\beta = 50$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği

Tablo 6. $\beta = 60$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

λ	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(EX)$	$\delta(EX)$ (%)	$\text{Var}(X)$	$\hat{\text{Var}}(X)$	$\Delta(\text{Var}X)$	$\delta(\text{Var}X)$ (%)
0,1	30	30,002390	0,00239	0,007966	185,294118	185,187893	0,106225	0,05732
0,2	30	29,999555	0,000445	0,001483	180,000000	179,898108	0,101892	0,05660
0,333	30	30,004277	0,004277	0,014	172,131147	172,124113	0,007034	0,00408
0,5	30	29,996607	0,003393	0,01131	166,342412	166,332588	0,009825	0,005906
1	30	29,995831	0,004169	0,01389	159,043659	159,025509	0,01815	0,0114
2	30	29,996756	0,003245	0,0108	154,755508	154,824140	0,068633	0,04434
3	30	30,000493	0,000493	0,001633	153,223859	153,103890	0,119969	0,07829
5	30	30,001770	0,001769	0,0059	151,960354	152,031539	0,071185	0,0468
10	30	30,006260	0,00626	0,020865	150,990044	150,975541	0,014504	0,0096



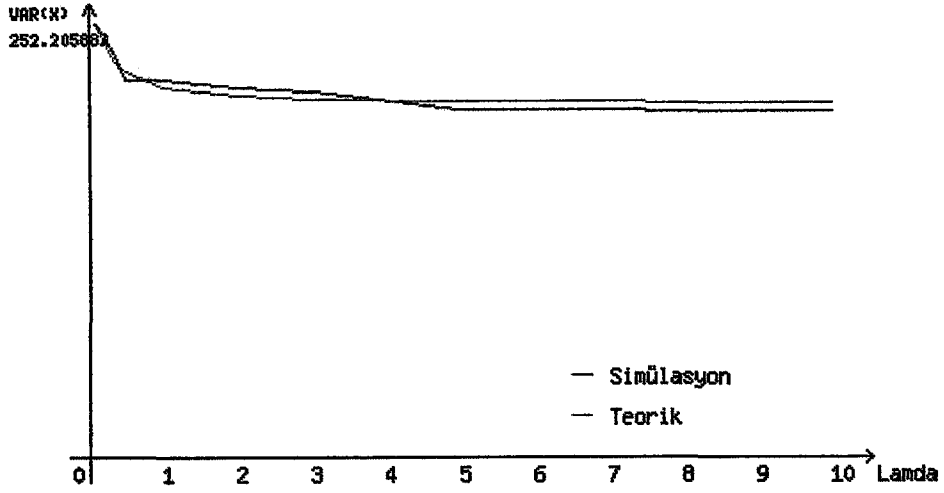
Şekil 12. $\beta = 60$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği



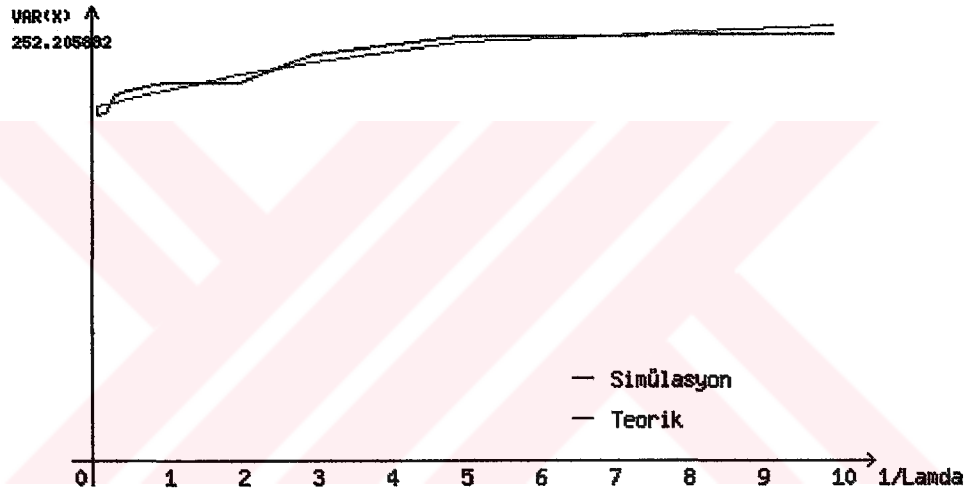
Şekil 13. $\beta = 60$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği

Tablo 7. $\beta = 70$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

λ	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(E(X))$	$\delta(E(X)) (\%)$	$\text{Var}(X)$	$\hat{\text{Var}}(X)$	$\Delta(\text{Var}X)$	$\delta(\text{Var}X) (\%)$
0,1	35	34,999031	0,000969	0,002768	252,205882	252,329785	0,123903	0,04912
0,2	35	35,001069	0,001069	0,003057	241,858974	241,750789	0,108185	0,04473
0,333	35	35,005474	0,005474	0,015628	231,145331	231,117500	0,027831	0,01204
0,5	35	34,995520	0,00448	0,0128	223,795217	223,877492	0,082275	0,03676
1	35	35,003352	0,003352	0,00957	214,870856	214,715042	0,155813	0,072514
2	35	34,994402	0,005598	0,015994	209,754727	209,666754	0,087973	0,04194
3	35	34,996288	0,003712	0,01060	207,945849	207,840907	0,104941	0,05046
5	35	35,006118	0,006118	0,017485	206,460304	206,555790	0,095486	0,04625
10	35	35,001937	0,001937	0,005542	205,323371	205,374173	0,050801	0,02474



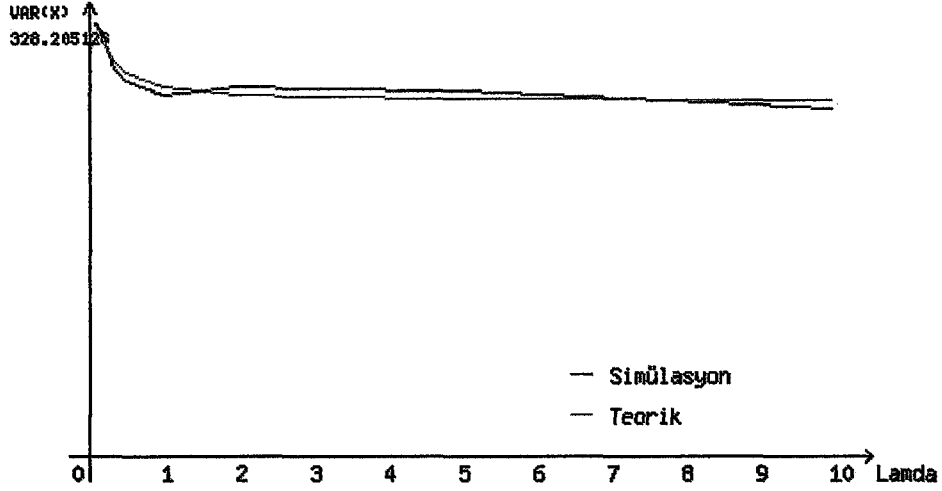
Şekil 14. $\beta = 70$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği



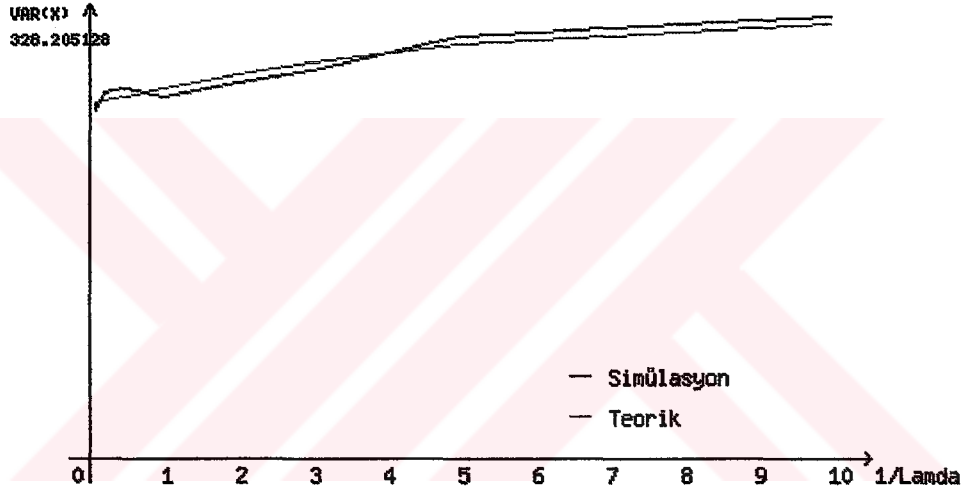
Şekil 15. $\beta = 70$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği

Tablo 8. $\beta = 80$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

λ	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(EX)$	$\delta(EX) (\%)$	$\text{Var}(X)$	$\hat{\text{Var}}(X)$	$\Delta(\text{Var}X)$	$\delta(\text{Var}X) (\%)$
0,1	40	39,989923	0,010076	0,02519	328,20512	328,120644	0,084483	0,02574
0,2	40	40,009309	0,009309	0,023275	312,19512	312,125724	0,069397	0,0222
0,333	40	40,002188	0,002188	0,005475	298,52888	298,565917	0,037034	0,01240
0,5	40	39,999828	0,000171	0,000427	289,59276	289,858815	0,266055	0,009187
1	40	40,006153	0,006153	0,015375	279,03289	279,092687	0,05979	0,021427
2	40	40,003669	0,003669	0,009175	273,08747	272,925852	0,161621	0,059182
3	40	39,996074	0,003926	0,009815	271,00122	270,825031	0,176198	0,065
5	40	39,999729	0,000271	0,000677	269,29359	269,229997	0,063602	0,023618
10	40	40,004721	0,004721	0,0118	267,99003	268,331934	0,341901	0,127579



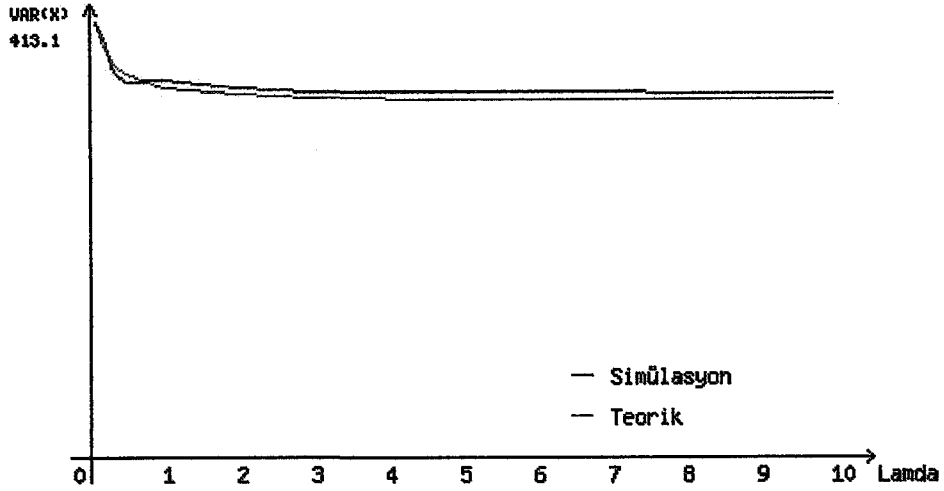
Şekil 15. $\beta = 80$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği



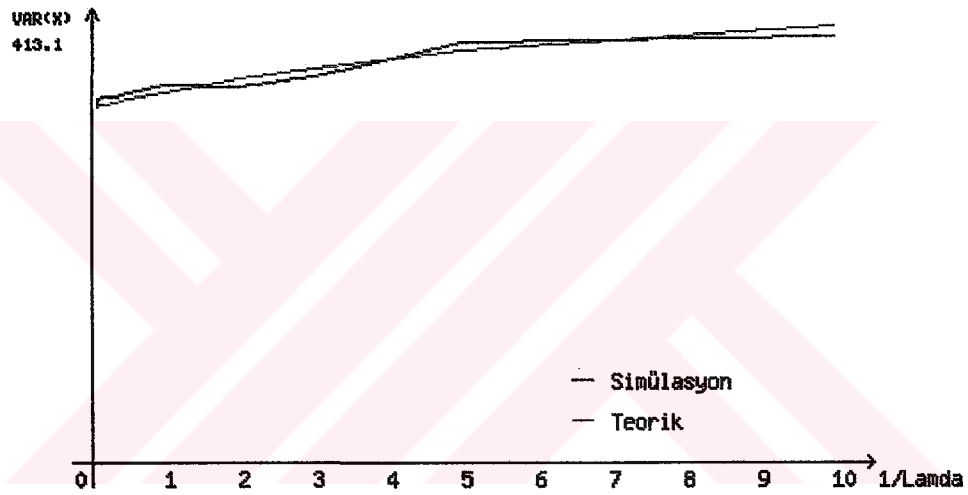
Şekil 16. $\beta = 80$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği

Tablo 9. $\beta = 90$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

λ	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(EX)$	$\delta(EX) (\%)$	$\text{Var}(X)$	$\hat{\text{Var}}(X)$	$\Delta(\text{Var}X)$	$\delta(\text{Var}X) (\%)$
0,1	45	45,0023047	0,0023047	0,00511	413,1	413,12835	0,0283563	0,006865
0,2	45	45,0096814	0,0096814	0,02151	390,96534	390,90981	0,0555338	0,0142
0,333	45	44,9962492	0,0037508	0,008335	374,27042	374,45708	0,1866577	0,04987
0,5	45	44,9901912	0,0098088	0,02179	363,73136	363,86489	0,1335317	0,03671
1	45	44,994438	0,005562	0,01236	351,52928	351,49013	0,039157	0,011139
2	45	45,000958	0,000958	0,002133	344,75368	344,48014	0,273534	0,07934
3	45	44,998445	0,001555	0,003455	342,38998	342,38009	0,009892	0,002889
5	45	44,992608	0,007392	0,01642	340,46023	338,92882	1,531407	0,449805
10	45	44,963357	0,036643	0,081429	338,99003	338,33771	0,652311	0,192428



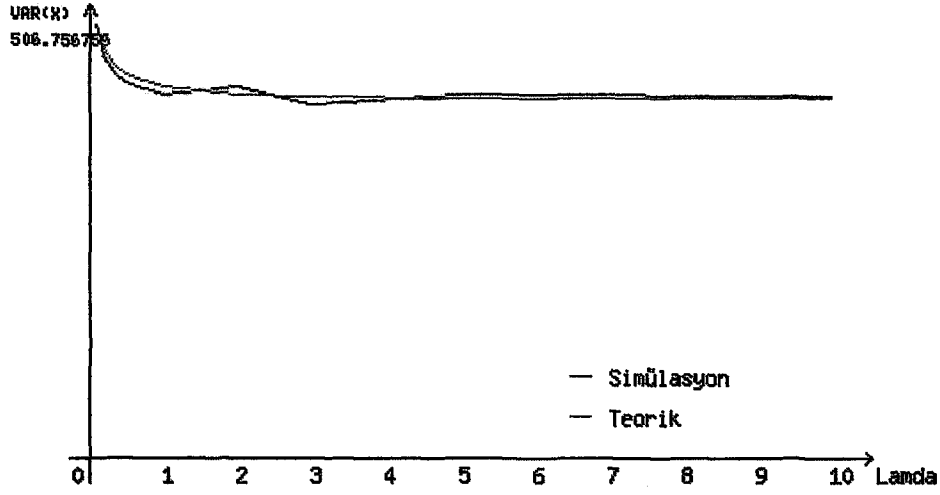
Şekil 17. $\beta = 90$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği



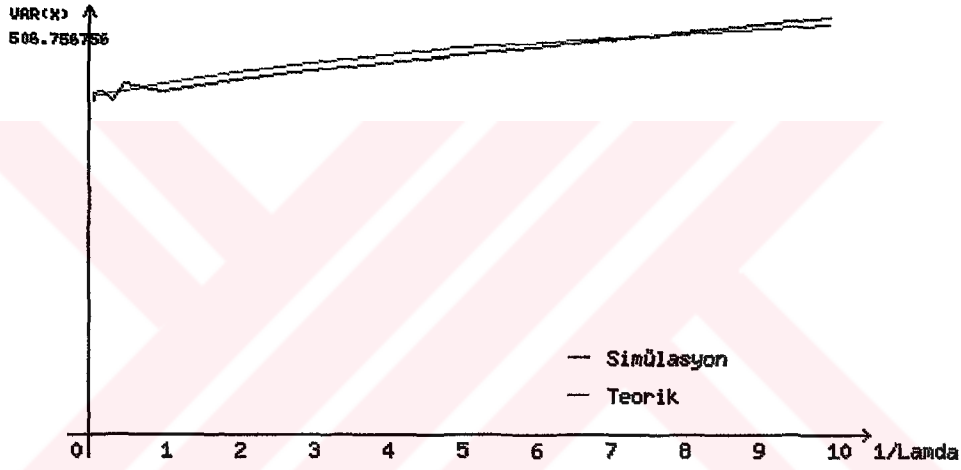
Şekil 18. $\beta = 90$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği

Tablo 10. $\beta = 100$ için birinci ve ikinci momentlerin teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

λ	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(E(X))$	$\delta(E(X))$ (%)	$\text{Var}(X)$	$\hat{\text{Var}}(X)$	$\Delta(\text{Var}X)$	$\delta(\text{Var}X)$ (%)
0,1	50	50,003336	0,003336	0,00668	506,756756	506,640990	0,115767	0,02284
0,2	50	50,0130985	0,013098	0,0262	478,142076	478,253476	0,111400	0,02329
0,333	50	50,0227987	0,022798	0,0456	458,362904	458,476056	0,113152	0,02468
0,5	50	49,992858	0,007142	0,001428	446,208764	446,227078	0,018314	0,004103
1	50	50,004490	0,00449	0,00898	432,359723	432,566400	0,206677	0,0478
2	50	50,001740	0,00174	0,00348	424,753316	424,564588	0,188728	0,0444
3	50	50,006923	0,006923	0,01384	422,112095	422,321257	0,209161	0,04955
5	50	49,989077	0,010923	0,021846	419,960213	413,269950	6,690263	1,593071
10	50	49,935519	0,064481	0,128963	418,323360	413,194526	5,128834	1,226045



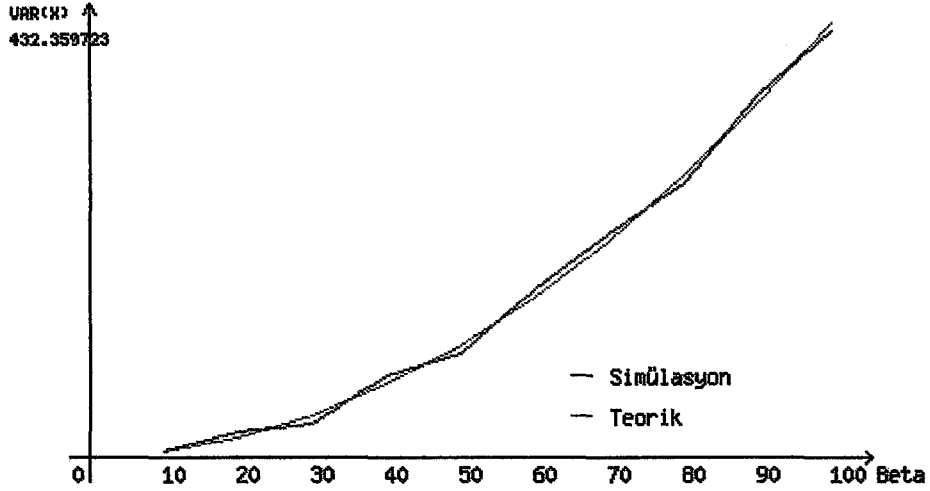
Şekil 19. $\beta = 100$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in λ parametresine göre değişim grafiği



Şekil 20. $\beta = 100$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in $1/\lambda$ parametresine göre değişim grafiği

Tablo 11. $\lambda=1$ için için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

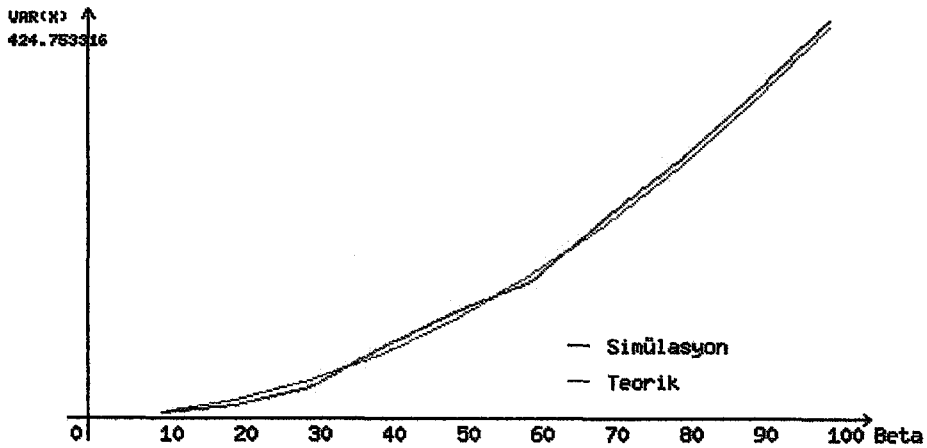
β	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(E(X))$	$\delta(E(X))(\%)$	$\text{Var}(X)$	$\hat{\text{Var}}(X)$	$\Delta(\text{Var}X)$	$\delta(\text{Var}X)(\%)$
10	5	5,000368	0,000368	0,0074	5,067568	5,066884	0,000683	0,013
20	10	9,999773	0,000227	0,00227	19,125683	19,116564	0,009119	0,0476
30	15	14,999765	0,000235	0,00156	41,585603	41,597756	0,012153	0,0292
40	20	20,001965	0,001965	0,00985	72,398190	72,387031	0,011159	0,01541
50	25	24,999433	0,000567	0,002268	111,552191	111,602647	0,050455	0,04523
60	30	29,995831	0,004169	0,01389	159,043659	159,025509	0,01815	0,0114
70	35	35,003352	0,003352	0,00957	214,870856	214,715042	0,155813	0,072514
80	40	40,006153	0,006153	0,015375	279,032897	279,092687	0,05979	0,021427
90	45	44,994438	0,005562	0,01236	351,529287	351,490130	0,039157	0,011139
100	50	50,004490	0,00449	0,00898	432,359723	432,566400	0,206677	0,04780



Şekil 21. $\lambda=1$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği

Tablo 12. $\lambda=2$ için için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

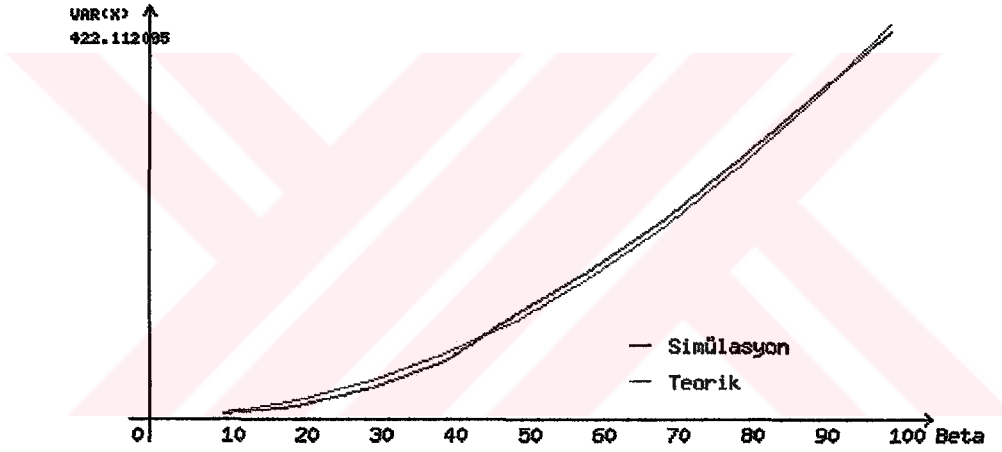
β	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(EX)$	$\delta(EX)$ (%)	$\text{Var}(X)$	$\hat{\text{Var}}(X)$	$\Delta(\text{Var}X)$	$\delta(\text{Var}X)$ (%)
10	5	4,999989	1,1E-005	0,00022	4,781421	4,781806	0,000385	0,008156
20	10	10,001135	0,001135	0,0114	18,099548	18,105814	0,006267	0,03464
30	15	15,000771	0,000771	0,005133	39,760915	39,778748	0,017833	0,0448
40	20	20,001449	0,001449	0,00725	69,758224	69,733861	0,024364	0,03492
50	25	24,996898	0,003102	0,012408	108,089931	108,062886	0,027045	0,025
60	30	29,996756	0,003245	0,0108	154,755508	154,824140	0,068633	0,04434
70	35	34,994402	0,005598	0,015994	209,754727	209,666754	0,087973	0,04194
80	40	40,003669	0,003669	0,009175	273,087473	272,925852	0,161621	0,059182
90	45	45,000958	0,000958	0,002133	344,753683	344,480149	0,273534	0,079341
100	50	50,001740	0,00174	0,00348	424,753316	424,564588	0,188728	0,0444



Şekil 22. $\lambda=2$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği

Tablo 13. $\lambda=3$ için için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

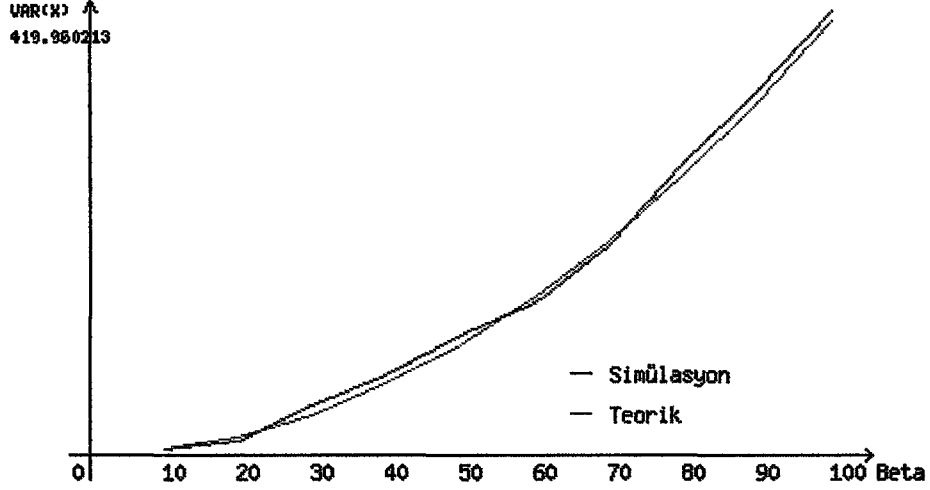
β	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(EX)$	$\delta(EX)$ (%)	$Var(X)$	$\hat{Var}(X)$	$\Delta(VarX)$	$\delta(VarX)$ (%)
10	5	4,998536	0,001464	0,022928	4,620623	4,620541	8,2E-005	0,001774
20	10	9,997989	0,00201	0,0201	17,671518	17,674658	0,00314	0,0176
30	15	15,000248	0,000248	0,001666	39,058810	39,073137	0,014328	0,03668
40	20	20,004498	0,004498	0,0225	68,780226	68,794904	0,014679	0,02134
50	25	25,002146	0,002146	0,0086	106,835295	106,762076	0,073219	0,0685
60	30	30,000493	0,000493	0,001633	153,223859	153,103890	0,119969	0,07829
70	35	34,996288	0,003712	0,01060	207,945849	207,840907	0,104941	0,05046
80	40	39,996074	0,003926	0,009815	271,001229	270,825031	0,176198	0,065
90	45	44,998445	0,001555	0,003455	342,389982	342,380090	0,009892	0,002889
100	50	50,006923	0,006923	0,01384	422,112095	422,321257	0,209161	0,04955



Şekil 23. $\lambda=3$ için $Var(X)$ ve $\hat{Var}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği

Tablo 14. $\lambda=5$ için için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

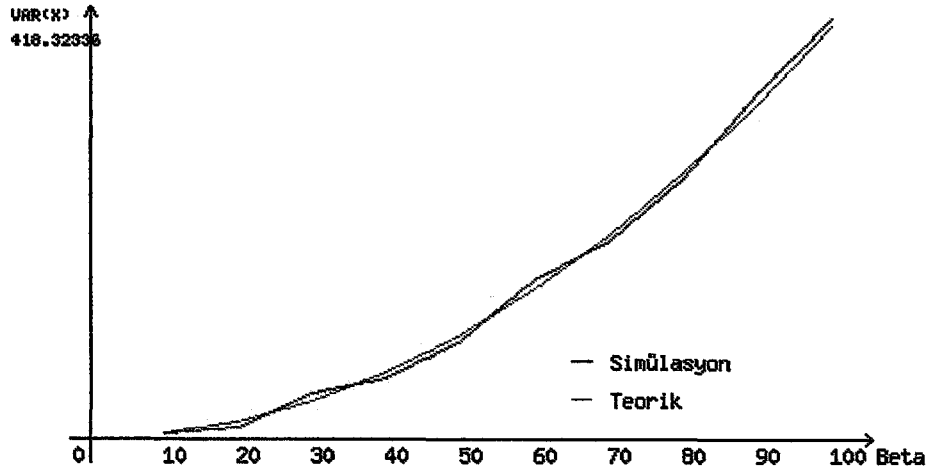
β	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(EX)$	$\delta(EX)$ (%)	$Var(X)$	$\hat{Var}(X)$	$\Delta(VarX)$	$\delta(VarX)$ (%)
10	5	4,998536	0,001464	0,02928	4,620623	4,620541	8,2E-005	0,001774
20	10	10,002516	0,002516	0,0252	17,294389	17,304159	0,00977	0,05649
30	15	15,001312	0,001312	0,008733	38,460706	38,445040	0,015666	0,0407
40	20	19,998953	0,001047	0,005235	67,960531	67,888492	0,072039	0,106
50	25	25,001081	0,001081	0,00432	105,793758	105,712113	0,081645	0,07717
60	30	30,001770	0,001769	0,0059	151,960354	152,031539	0,071185	0,0468
70	35	35,006118	0,006118	0,017485	206,460304	206,555790	0,095486	0,04625
80	40	39,999729	0,000271	0,000677	269,293599	269,229997	0,063602	0,023618
90	45	44,992608	0,007392	0,01642	340,460237	338,928829	1,531407	0,44
100	50	49,989077	0,010923	0,021846	419,960213	413,269950	6,690263	1,593071



Şekil 24. $\lambda=5$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği

Tablo 15. $\lambda=10$ için için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

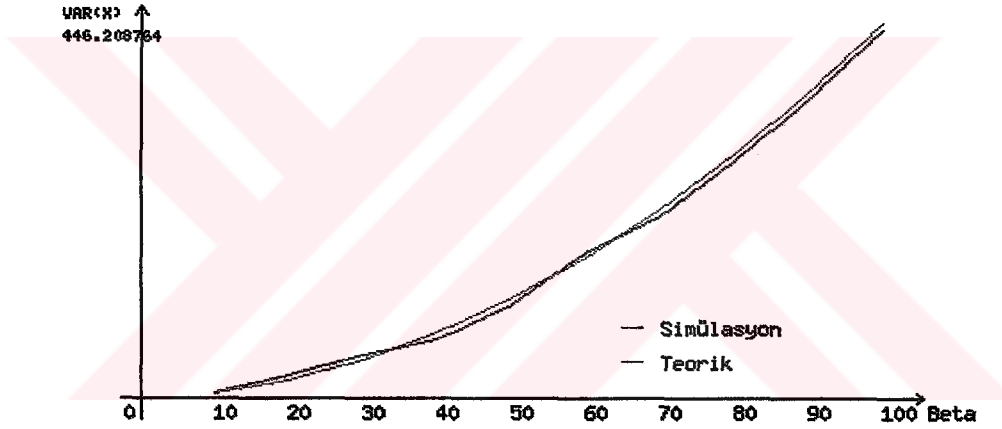
β	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(E(X))$	$\delta(E(X)) (\%)$	$\text{Var}(X)$	$\hat{\text{Var}}(X)$	$\Delta(\text{Var}X)$	$\delta(\text{Var}X) (\%)$
10	5	4,997525	0,002475	0,0495	4,323597	4,322416	0,001181	0,0273
20	10	9,998665	0,001335	0,01335	16,990133	16,992309	0,002176	0,01283
30	15	15,003941	0,003941	0,0262	37,990089	37,952099	0,03799	0,0999
40	20	19,991588	0,008412	0,04206	67,323400	67,351238	0,027838	0,04135
50	25	24,985375	0,014625	0,058502	104,990053	105,019254	0,029201	0,0278
60	30	30,006260	0,00626	0,020865	150,990044	150,975541	0,014504	0,00960
70	35	35,001937	0,001937	0,005542	205,323371	205,374173	0,050801	0,02474
80	40	40,004721	0,004721	0,0118	267,990033	268,331934	0,341901	0,127579
90	45	44,963357	0,036643	0,081428	338,990030	338,337718	0,652311	0,192428
100	50	49,935519	0,064481	0,128962	418,323360	413,194526	5,128834	1,226045



Şekil 25. $\lambda=10$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği

Tablo 16. $\lambda=0.5$ için için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

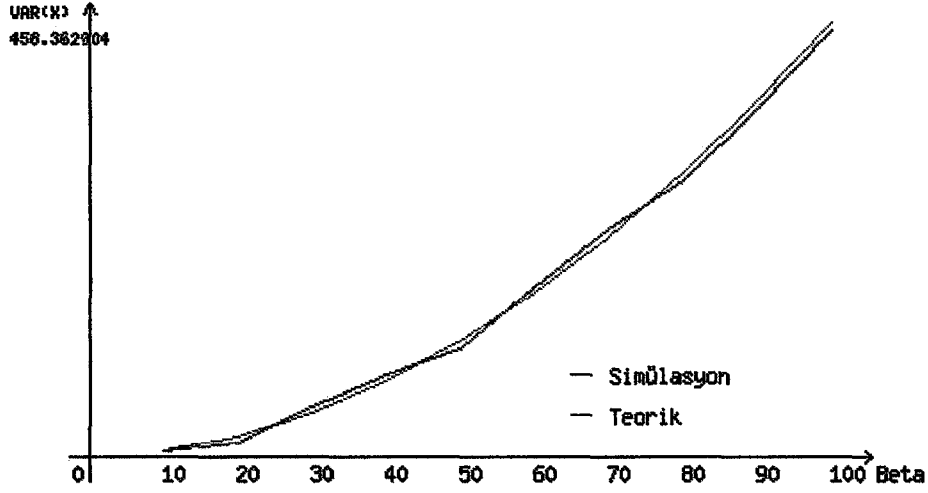
β	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(EX)$	$\delta(EX)$ (%)	$Var(X)$	$\hat{Var}(X)$	$\Delta(VarX)$	$\delta(VarX)$ (%)
10	5	5,0002168	0.00021	0,0044	5,110063	5,1082548	0.001808	0,03538
20	10	10,001188	0.00118	0,0119	20,27027	20,261507	0.008762	0,0432
30	15	14,999450	0.00055	0,003666	44,15529	44,146318	0.008972	0,0203
40	20	19,999486	0.00051	0,00257	76,50273	76,548570	0.045838	0,05991
50	25	24,996981	0.00301	0,012076	117,2407	117,26588	0.025089	0,02140
60	30	29,996607	0.00339	0,01131	166,3424	166,33258	0.009825	0,005906
70	35	34,995520	0.00448	0,0128	223,7952	223,87749	0.082275	0,03676
80	40	39,9998286	0.00017	0,000427	289,5927	289,85881	0.266055	0,009187
90	45	44,9901912	0.00980	0,02179	363,7313	363,86489	0.133531	0,03671
100	50	49,992858	0.00714	0,001428	446,2087	446,22707	0.018314	0,004103



Şekil 26. $\lambda=0.5$ için $Var(X)$ ve $\hat{Var}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği

Tablo 17. $\lambda = 0.33$ için için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

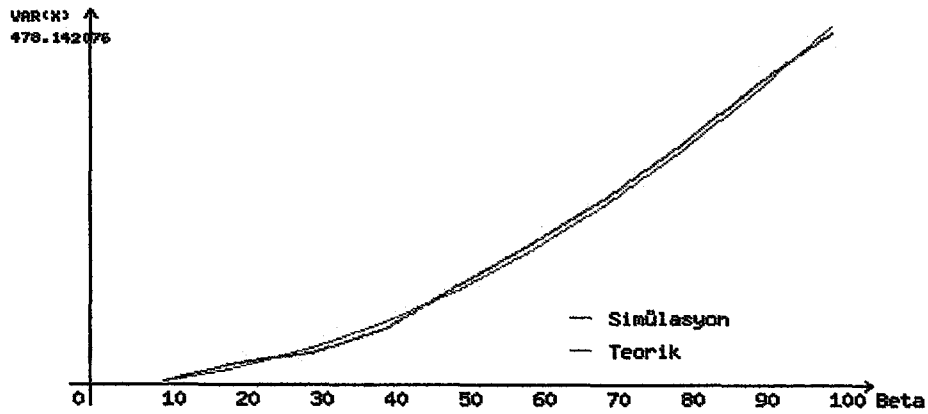
β	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(EX)$	$\delta(EX)$ (%)	$Var(X)$	$\hat{Var}(X)$	$\Delta(VarX)$	$\delta(VarX)$ (%)
10	5	5,0013613	0,0013613	0,0272	4,954984	4,9542858	0,0006981	0,000140
20	10	9,999732	0,000268	0,00268	20,599251	20,605130	0,005879	0,02854
30	15	15,000767	0,000767	0,005133	45,608108	45,602359	0,005749	0,0126
40	20	19,997242	0,002758	0,01379	79,306072	79,302546	0,003526	0,00444
50	25	25,007119	0,007119	0,02848	121,505885	121,568512	0,062628	0,05154
60	30	30,004277	0,004277	0,014	172,131147	172,124113	0,007034	0,004086
70	35	35,005474	0,005474	0,015628	231,145331	231,117500	0,027831	0,01204
80	40	40,002188	0,002188	0,005475	298,528883	298,565917	0,037034	0,01240
90	45	44,996249	0,003750	0,008335	374,270427	374,457085	0,1866577	0,04987
100	50	50,022798	0,022798	0,0456	458,362904	458,476056	0,1131524	0,02468



Şekil 27. $\lambda = 0.33$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği

Tablo 18. $\lambda = 0.2$ için için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

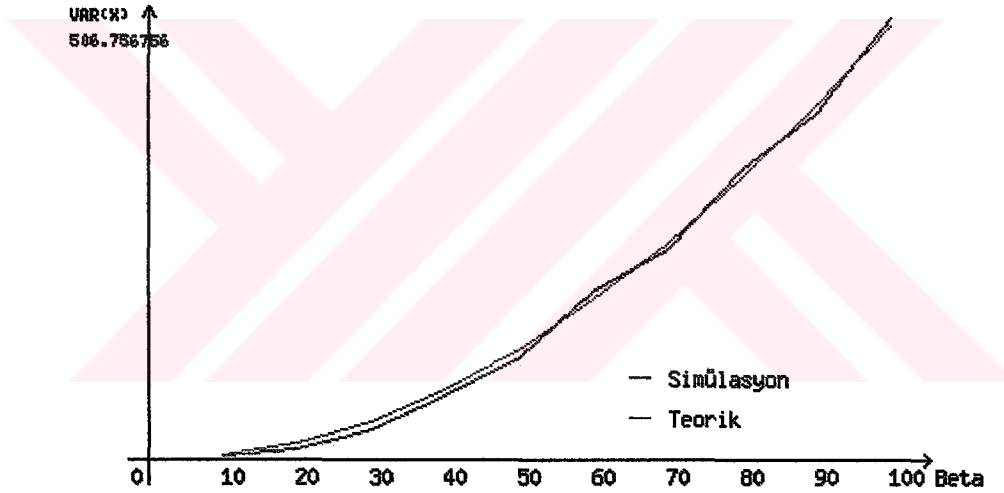
β	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(E(X))$	$\delta(E(X)) (\%)$	$\text{Var}(X)$	$\hat{\text{Var}}(X)$	$\Delta(\text{Var}X)$	$\delta(\text{Var}X) (\%)$
10	5	4,999584	0,000416	0,00832	4,166667	4,165539	0,001128	0,02707
20	10	10,00062	0,0006291	0,0063	20	19,994963	0,005037	0,025185
30	15	14,99987	0,000127	0,000846	46,323529	46,327498	0,003968	0,00857
40	20	19,99124	0,008755	0,043775	82,051282	82,094730	0,043448	0,05295
50	25	25,00659	0,0065939	0,02636	126,689189	126,68449	0,0046921	0,003703
60	30	29,99955	0,000445	0,001483	180,000000	179,89810	0,101892	0,05660
70	35	35,00106	0,001069	0,003057	241,858974	241,75078	0,108185	0,04473
80	40	40,00930	0,0093095	0,023275	312,195122	312,12572	0,0693971	0,0222
90	45	45,00968	0,0096814	0,02151	390,965346	390,90981	0,0555338	0,0142
100	50	50,01309	0,0130985	0,0262	478,142076	478,25347	0,1114004	0,02329



Şekil 28. $\lambda = 0.2$ için $\text{Var}(X)$ ve $\hat{\text{Var}}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği

Tablo 19. $\lambda = 0.1$ için için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının teorik ve simülasyon değerleri arasındaki mutlak ve göreceli fark tablosu

β	$E(X)$	$\hat{E}(X)$	$\Delta(EX)$	$\delta(EX)(\%)$	$Var(X)$	$\hat{Var}(X)$	$\Delta(VarX)$	$\delta(VarX)(\%)$
10	5	5,0007918	0.0007918	0,0158	2,884615	2,8845682	4.7E-005	0,001629
20	10	10,001072	0.001072	0,0107	16,666667	16,670273	0.003606	0,02165
30	15	14,998386	0.001614	0,01076	42,672414	42,690938	0.018524	0,0434
40	20	19,999434	0.000566	0,00283	80,000000	80,002547	0.002547	0,003187
50	25	24,994534	0.005466	0,021864	127,75157	127,77876	0.027193	0,02128
60	30	30,002390	0.00239	0,007966	185,29411	185,18789	0.106225	0,05732
70	35	34,999031	0.000969	0,002768	252,20588	252,32978	0.123903	0,049126
80	40	39,9899236	0.0100764	0,02519	328,20512	328,12064	0.084483	0,02574
90	45	45,0023047	0.0023047	0,005111	413,1	413,12835	0.028356	0,0068651
100	50	50,003336	0.003336	0,00668	506,75675	506,64099	0.115767	0,0228446



Şekil 29. $\lambda = 0.1$ için $Var(X)$ ve $\hat{Var}(X)$ in beta parametresine göre değişim grafiği

Yukarıdaki tablolar Delphi-7 ile yapılan bilgisayar programı yardımıyla elde edilmiş, grafikler ise PHP de çizilmiştir. Ek-1 ve Ek-2 de bu programlar sunulmuştur. Bu programdan veriler elde edilirken λ nın küçük değerleri için 40.000 adım süreç izlenmiş, λ nın büyük değerleri için ise süreç 10.000 adım izlenmiş ve deneme her iki durum için 1.000.000 kez tekrarlanmıştır. Aynı işlem her seferinde 10 kez tekrarlanmış ve bu 10 tekrarın ortalaması alınarak en son sonuçlar elde edilmiştir.

2.8. Genel Durum: Wald Yaklaşımı Yardımıyla $X(t)$ Sürecinin İncelenmesi

Rasgele yürüyüş süreci için temel özdeşliğe göre aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$1 - E(s^N e^{i\theta S_N}) = \tilde{c}^*(s, \theta, a)[1 - s\varphi_\eta(\theta)], \quad \theta = \theta(s)$$

burada $\varphi_\eta(\theta)$, η rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu, $\tilde{c}^*(s, \theta, a)$ ise aşağıdaki dönüşümdür:

$$\tilde{c}^*(s, \theta, a) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_{-a}^a e^{i\theta x} P\{S_i \in [-a, a], i = \overline{1, n}; S_n \in dx\}.$$

$\varphi_\eta(i\theta) = \frac{1}{s}$ denkleminin kökleri olan θ değerleri için $E(s^N e^{i\theta S_N}) = 1$ özdeşliğinin

sağlandığını görmek zor değildir. Bu özdeşlik ilk olarak Wald tarafından “seri analizi” problemlerini çözerken elde edilmiştir. Bu nedenle, literatürde bu özdeşliğe çoğu zaman Wald’ın 2. özelliği de denmektedir. Wald bu özdeşliğe rasgele yürüyüş sürecinin $[-a, a]$ aralığından ilk kez çıkma anı olan N sınır fonksiyonelinin dağılımı için yaklaşık ifadeler elde etmek isterken ulaşmıştır.

Wald’un temel varsayımına göre $a > 0$ parametresi η_1 rasgele değişkeninin beklenen değer ve standart sapması ile karşılaştırıldığında çok büyük olduğunda S_N sınır fonksiyonelinin değerlerinin yaklaşık olarak a ve $-a$ ya yakın olacaktır.

Dolayısıyla yukarıdaki varsayımlar altında,

$$S_N \approx \begin{cases} a, & P\{S_N \geq a\} \\ -a, & P\{S_N \leq -a\} \end{cases}$$

yazılabilir. Wald yaklaşımından yararlanarak $X(t)$ sürecinin kendi momentleri ve sınır fonksiyonelinin momentleri için yaklaşık formüller elde etmek mümkündür. Bu amaç için

$$f(\theta) = \varphi_\eta(i\theta) =$$

$$= E(e^{-\theta \eta_1}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta x} dF_\eta(x), \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (18)$$

olarak tanımlansın. Yukarıdaki integral, sıfırı içeren belli bir $-\theta_0 < \theta < \theta_1$ aralığında yakınsaktır, burada $\theta \in (-\theta_0, \theta_1)$ dir. Bundan dolayı η_1 rasgele değişkeninin $\varphi_\eta(\theta)$ karakteristik fonksiyonu $-\theta_0 < \text{Im}(z) < \theta_1$ aralığında analitik olacaktır. Bu durumda da $f(\theta)$ fonksiyonu konveks olur. Ayrıca öyle bir $s_0 < s < s_1$ aralığı bulmak mümkündür ki,

$(1 \in (s_0, s_1))$ bu aralıkta s parametresine göre sürekli olan $f(\theta) = \frac{1}{s}$ denkleminin iki $\theta_1(s)$ ve $\theta_2(s)$ biçiminde kökü olsun.

Wald'un ikinci özdeşliğini göz önünde bulundurarak N sınır fonksiyonelinin dağılımını (en azından yaklaşık olarak) bulmak mümkündür.

Bununla ilgili olarak aşağıdaki yardımcı teoremi verilebilir.

Yardımcı Teorem 4. a parametresi η_1 rasgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı ile karşılaştırıldığında çok büyük ve (18) integrali de yakınsak olsun. Bu durumda N sınır fonksiyonelinin moment çıkarar fonksiyonu yaklaşık olarak aşağıdaki gibidir:

$$\Psi_N(s) \equiv E(s^N) \approx \frac{1 + e^{-(\theta_1(s) + \theta_2(s))a}}{e^{-\theta_1(s)a} + e^{-\theta_2(s)a}}, \quad s \in (0, 1).$$

İSPAT: $p_n = P\{N = n; S_N \geq a\}$, $q_n = P\{N = n; S_N \leq -a\}$ şeklinde tanımlansın ve ayrıca

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n p_n = \Psi_+(s), \quad \sum_{n=1}^{\infty} s^n q_n = \Psi_-(s)$$

gösterimleri yapısın.

Wald'un yaklaşımına göre (bak, [19], sayfa 603) $\forall \theta$ için $\Psi_+(s)e^{-\theta a} + \Psi_-(s)e^{+\theta a} = 1$ dir. Dolayısıyla, $f(\theta) = \frac{1}{s}$ denkleminin kökleri olan $\theta_1(s)$ ve $\theta_2(s)$ için aşağıdaki eşitlikler sistemi yazılabilir:

$$\begin{cases} \Psi_+(s)e^{-\theta_1(s)a} + \Psi_-(s)e^{+\theta_1(s)a} = 1 \\ \Psi_+(s)e^{-\theta_2(s)a} + \Psi_-(s)e^{+\theta_2(s)a} = 1 \end{cases}$$

Birinci satır $e^{\theta_1(s)a}$ ve ikinci satır da $e^{\theta_2(s)a}$ ile çarpılırsa

$$\begin{cases} \Psi_+(s) + \Psi_-(s)e^{2\theta_1(s)a} = e^{\theta_1(s)a} \\ \Psi_+(s) + \Psi_-(s)e^{2\theta_2(s)a} = e^{\theta_2(s)a} \end{cases}$$

elde edilir. Buradan,

$$\Psi_-(s)[e^{2\theta_1(s)a} - e^{2\theta_2(s)a}] = e^{\theta_1(s)a} - e^{\theta_2(s)a}$$

olur. Eşitliğin sol tarafındaki katsayı çarpanlarına ayrılırsa,

$$\Psi_-(s)[e^{\theta_1(s)a} + e^{\theta_2(s)a}][e^{\theta_1(s)a} - e^{\theta_2(s)a}] = e^{\theta_1(s)a} - e^{\theta_2(s)a}$$

elde edilir. Not edelim ki, $s \neq 1$ olduğunda $\theta_1(s) \neq \theta_2(s)$ olur. Dolayısıyla,

$$\Psi_-(s) = \frac{1}{e^{\theta_1(s)a} + e^{\theta_2(s)a}}$$

elde edilir. Birinci denklemlerden,

$$\begin{aligned}\Psi_+(s) &= e^{\theta_1(s)a} - \Psi_-(s)e^{2\theta_1(s)a} = \\ &= e^{\theta_1(s)a} - \frac{e^{2\theta_1(s)a}}{e^{\theta_1(s)a} + e^{\theta_2(s)a}} \\ &= \frac{e^{a(\theta_1(s)+\theta_2(s))}}{e^{\theta_1(s)a} + e^{\theta_2(s)a}}\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\Psi(s) = \Psi_+(s) + \Psi_-(s) \approx \frac{1 + e^{(\theta_1(s)+\theta_2(s))a}}{e^{\theta_1(s)a} + e^{\theta_2(s)a}}$$

elde edilmiş olur. ▶

Yardımcı Teorem 4 de elde edilen yaklaşık formülden ve $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının birinci ve ikinci momentleri için elde edilmiş kesin formüllerden yola çıkarak aşağıdaki sonuçları elde etmek mümkündür.

TEOREM 10. (18) integrali sıfırı içeren $-\theta_0 < \theta < \theta_1$ aralığında yakınsak ve buna ek olarak $m_1 = E\eta_1 = 0$, $0 < \text{Var}(\eta_1) < \infty$ olsun. Bu takdirde $a \rightarrow \infty$ iken aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur.

$$E[N(a)] \approx \frac{a^2}{\sigma^2}, \quad E[N^2(a)] \approx \frac{5a^4}{3\sigma^4},$$

$$\text{Var}[N(a)] \approx \frac{2a^4}{3\sigma^4}, \quad E[S_{N(a)}] = 0,$$

$$E[S_{N(a)}^2] \approx a^2, \quad \text{Var}[S_{N(a)}] \approx a^2$$

$$E(X) \approx a, \quad E(X^2) \approx \frac{7}{6}a^2, \quad \text{Var}(X) \approx \frac{a^2}{6}.$$

İSPAT. $\varphi_\eta(i\theta) = \frac{1}{s}$ denkleminin kökleri $\theta_{1,2}(s)$ olsun. $m_1 = E(\eta_1) = 0$ durumu için η_1 rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu olan $f(\theta)$ nın Taylor açılımı $\theta \rightarrow 0$ için aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_\eta(i\theta) = E(e^{-\theta\eta_1}) = 1 - \theta E(\eta_1) + \frac{\theta^2}{2} E(\eta_1^2) + o(\theta^2).$$

$m_1 = E(\eta_1) = 0$ ve $E(\eta_1^2) = \sigma^2$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$\varphi_{\eta}(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2}\sigma^2 + o(\theta^2)$$

elde edilir. Elde edilen bu açılım koşul gereği $\frac{1}{s}$ e eşitlenerek;

$$1 + \frac{\theta^2}{2}\sigma^2 + o(\theta^2) = \frac{1}{s}$$

$$\frac{\theta^2}{2}\sigma^2 = \frac{1}{s} - 1 + o(\theta^2) = \frac{1-s}{s} + o(\theta^2)$$

buradan da

$$\theta^2 = \frac{2(1-s)}{s\sigma^2} + o(\theta^2)$$

olur.

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{1-(1-s)} = 1 + (1-s) + O((1-s)^2) \text{ açılımı göz önüne alınarak}$$

$$\theta^2 = \frac{2(1-s)}{\sigma^2} \{1 + (1-s) + O((1-s)^2)\} + o(\theta^2)$$

$$\theta^2 = \frac{2(1-s)}{\sigma^2} + O((1-s)^2) + o(\theta^2), \quad s \rightarrow 1$$

yazılır.

Her $\alpha > 0$ için $(1 + o(1))^\alpha = 1 + o(1)$ ve $\frac{o(\theta^2)}{\theta^2} \rightarrow 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \theta^2 &= \frac{2(1-s)}{\sigma^2} + O((1-s)^2) + o(1-s) \\ &= \frac{2(1-s)}{\sigma^2} + o(1-s) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\theta = \pm \sqrt{\frac{2(1-s)}{\sigma^2}}(1 + o(1)) = \pm \frac{\sqrt{2(1-s)}}{\sigma}(1 + o(1))$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{cases} \theta_1(s) = \frac{\sqrt{2(1-s)}}{\sigma}(1 + o(1)) \\ \theta_2(s) = -\theta_1(s) = -\frac{\sqrt{2(1-s)}}{\sigma}(1 + o(1)) \end{cases}$$

dır. Tanımı gereği $\theta_1(1) = 0$ dır. Ayrıca, $\theta_1^2 \equiv h(s)$ fonksiyonunu $s \rightarrow 1$ iken Taylor serisine aşağıdaki gibi açmak mümkündür.

$$\theta_1^2(s) \equiv h(s) = h(1) + \frac{h'(1)}{1!}(s-1) + o(1-s).$$

$h(1) = 0$ olduğundan

$$\theta_1^2(s) = h'(1)(s-1) + o(1-s)$$

ve diğer taraftan $\theta_1(s) = \frac{\sqrt{2(1-s)}}{\sigma}(1 + o(1))$ olduğu için

$$h(s) \equiv \theta_1^2(s) = \frac{-2}{\sigma^2}(s-1) + o(1-s)$$

dır. Bu iki ifadenin denkleğinden kolayca görülür ki, $h(s)$ fonksiyonunun $s = 1$ noktasında

türevi vardır ve bu türev $h'(1) = -\frac{2}{\sigma^2}$ dır. Dolayısıyla,

$$\lim_{s \rightarrow 1} (\theta_1^2(s))' \equiv 2\theta_1(1)\theta_1'(1) = h'(1) = -\frac{2}{\sigma^2}$$

dır.

Özet olarak: $s \rightarrow 1$ iken $\theta_1(s) \rightarrow 0$ ve $(\theta_1^2(s))' \rightarrow -\frac{2}{\sigma^2}$ dır. Benzer düşünceyle;

$$\theta_1^4(s) = \frac{4(1-s)^2}{\sigma^4}(1 + o(1)) = \frac{4(1-s)^2}{\sigma^4} + o((1-s)^2)$$

ve

$$\begin{aligned} g(s) \equiv \theta_1^4(s) &= \\ &= g(1) + \frac{g'(1)}{1!}(s-1) + \frac{g''(1)}{2!}(s-1)^2 + o((s-1)^2) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$g(1) = \theta_1^4(1) = 0$$

ve

$$g'(s) = (\theta_1^4(s))'_s = 4\theta_1^3(s)\theta_1'(s) = 2\theta_1^2(s)(\theta_1^2(s))'$$

dır. Bu eşitlikte $s \rightarrow 1$ iken limite geçilirse,

$$\lim_{s \rightarrow 1} g'(s) = \lim_{s \rightarrow 1} (2\theta_1^2(s)) \lim_{s \rightarrow 1} (\theta_1^2(s))' = 0 \left(-\frac{2}{\sigma^2}\right) = 0 \equiv g'(1)$$

olur. Bu nedenle,

$$g(s) = \frac{g''(1)}{2}(s-1)^2 + o((s-1)^2) = \frac{g''(1)}{2}(1-s) + o((1-s)^2)$$

yazılabilir. Diğer taraftan tanım gereği

$$g(s) \equiv \theta_1^4(s) = \frac{4(1-s)^2}{\sigma^4} + o((1-s)^2) = \frac{4}{\sigma^4}(1-s)^2 + o((1-s)^2)$$

olduğu bilinmektedir. Böylece, iki açılım karşılaştırılarak

$$\frac{g''(1)}{2} = \frac{4}{\sigma^4} \text{ veya } g''(1) = \frac{8}{\sigma^4}$$

olduğu görülür. Yani, $\lim_{s \rightarrow 1} (\theta_1^4(s))'' = g''(1) = \frac{8}{\sigma^4}$ elde edilir. Özetlersek;

$$\theta_1(s) = \frac{\sqrt{2(1-s)}}{\sigma}(1 + o(1)); \theta_1(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0$$

$$(\theta_1^2(s))' \xrightarrow{s \rightarrow 1} -\frac{2}{\sigma^2}$$

$$(\theta_1^4(s))'' \xrightarrow{s \rightarrow 1} \frac{8}{\sigma^4}; \theta_1^4(1) = 0; (\theta_1^4(1))' = 0$$

dır. Alınan sonuçlar $\Psi_N(s)$ nin ifadesinde kullanılacaktır.

$$\Psi_N(s) = E(s^N) \approx \frac{1 + e^{-(\theta_1(s) + \theta_2(s))a}}{e^{-\theta_1(s)a} + e^{-\theta_2(s)a}}$$

olduğu gösterilmişti. Burada, $s \rightarrow 0$ iken $\theta_2(s) = -\theta_1(s) = \frac{\sqrt{2(1-s)}}{\sigma}(1 + o(1))$ olduğu için

$$\theta_1(s) + \theta_2(s) \approx 0$$

dır. Böylece;

$$\Psi_N(s) \equiv E(s^N) \approx \frac{2}{e^{\theta_1(s)a} + e^{-\theta_1(s)a}}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} e^{\theta_1(s)a} + e^{-\theta_1(s)a} &= \\ &= [1 + \theta_1(s)a + \frac{(\theta_1(s)a)^2}{2} + \frac{(\theta_1(s)a)^3}{6} + \frac{(\theta_1(s)a)^4}{24} + o((\theta_1(s)a)^4)] + \\ &+ [1 - \theta_1(s)a + \frac{(\theta_1(s)a)^2}{2} - \frac{(\theta_1(s)a)^3}{6} + \frac{(\theta_1(s)a)^4}{24} + o((\theta_1(s)a)^4)] \\ &= 2\{1 + \frac{\theta_1^2(s)a^2}{2} + \frac{\theta_1^4(s)a^4}{24} + o([\theta_1(s)a]^4)\} \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{\theta_1(s)a} + e^{-\theta_1(s)a}}{2} = \\
& = 1 - \frac{\theta_1^2(s)a^2}{2} - \frac{\theta_1^4(s)a^4}{24} + \frac{\theta_1^4(s)a^4}{4} + o((\theta_1(s)a)^4) \\
& = 1 - \frac{\theta_1^2(s)a^2}{2} + \frac{5a^4}{24}\theta_1^4(s) + o(a^4\theta_1^4) \\
& = 1 - \frac{a^2}{2} \left[-\frac{2}{\sigma^2}(s-1) + o(1-s) \right] + \frac{5a^4}{24} \left[\frac{4(1-s)^2}{\sigma^4} + o(1-s)^2 \right] + o(a^4(1-s)^2) \\
& = 1 + \frac{a^2}{\sigma^2}(s-1) + o(a^2(1-s)) + \frac{5a^4}{6\sigma^4}(1-s)^2 + o(a^4(1-s)^2)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}
\Psi_N(s) &= 1 + \Psi'(1)(s-1) + \frac{\Psi''(1)}{2}(s-1)^2 + o((s-1)^2) \\
\Psi'(1) &\approx \frac{a^2}{\sigma^2}; \quad \frac{\Psi''(1)}{2} \approx \frac{5a^4}{6\sigma^4} \Leftrightarrow \Psi''(1) \approx \frac{5a^4}{3\sigma^4}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$E(N) \approx \frac{a^2}{\sigma^2}; \quad E(N^2) \approx \frac{5a^4}{3\sigma^4}$$

elde edilir. Bu sonuçlar göz önünde bulundurularak, teoremin diğer önermelerini kolayca elde etmek mümkündür. Bunun için $a \rightarrow \infty$ iken $M_{32} \rightarrow 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Wald özdeşliğine göre $E(\eta_1) = 0$ olduğunda

$$E(S_N) = E(\eta_1)E(N) \equiv 0$$

olur.

$$E(S_N) \approx a(P\{S_N \geq a\} - P\{S_N \leq -a\}) \approx E(S_N) = 0$$

olduğundan dolayı

$$a(P\{S_N \geq a\} - P\{S_N \leq -a\}) = o(1)$$

olur. Buradan,

$$P\{S_N \geq a\} - P\{S_N \leq -a\} = o\left(\frac{1}{a}\right)$$

ve S_N nin tanımına göre

$$P\{S_N \geq a\} + P\{S_N \leq -a\} = 1$$

dır. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$2P\{S_N \geq a\} = 1 + o\left(\frac{1}{a}\right) \text{ veya } P\{S_N \geq a\} = \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{a}\right)$$

olur. Benzer şekilde $P\{S_N \leq a\} = \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{a}\right)$ elde edilir. İki olasılığın arasındaki fark ise $o\left(\frac{1}{a}\right)$ dir. Böylece;

$$M_3 = E(S_N^3) \approx a^3 [P\{S_N \geq a\} - P\{S_N \leq -a\}] = a^3 o\left(\frac{1}{a}\right) = o(a^2)$$

$$M_2 \approx a^2 \text{ olduğu dikkate alınır; } M_{32} \approx \frac{o(a^2)}{a^2} = o(1) \rightarrow 0 \text{ olur.}$$

$$\text{Sonuç olarak } M_{42} \approx \frac{a^4}{a^2} = a^2; \text{ Var}(X) \approx \frac{a^2}{6} \text{ elde edilir.}$$

Buda teoremin ispatını tamamlar. ▶

Benzer düşünceyle, aşağıdaki sonuçlar da verilebilir.

TEOREM 11. (18) integrali sıfırı içeren $-\theta_0 < \theta < \theta_1$ aralığında yakınsak olsun.

Buna ek olarak $0 < m_1 = E\eta_1 < \infty$ olsun. Bu takdirde $a \rightarrow \infty$ iken aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur.

$$E[N(a)] \approx \frac{a}{m_1}, \quad E[N^2(a)] \approx \frac{a^2}{m_1^2}, \quad E[N^3(a)] \approx \frac{a^3}{m_1^3},$$

$$E[S_{N(a)}] \approx a, \quad E[S_{N(a)}^2] \approx a^2, \quad \text{Var}[S_{N(a)}] \approx a^2,$$

$$E(X) \approx \frac{3}{2}a, \quad E(X^2) \approx \frac{7}{3}a^2, \quad \text{Var}(X) \approx \frac{a^2}{12}$$

TEOREM 12. (18) integrali sıfırı içeren $-\theta_0 < \theta < \theta_1$ aralığında yakınsak olsun.

Buna ek olarak $-\infty < m_1 = E\eta_1 < 0$ olsun. Bu takdirde $a \rightarrow \infty$ iken aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur.

$$E[N(a)] \approx \frac{a}{m}, \quad E[N^2(a)] \approx \frac{a^2}{m^2}, \quad E[N^3(a)] \approx \frac{a^3}{m^3},$$

$$E[S_{N(a)}] \approx -a, \quad E[S_{N(a)}^2] \approx a^2,$$

$$E(X) \approx \frac{a}{2}, \quad E(X^2) \approx \frac{a^2}{3}, \quad \text{Var}(X) \approx \frac{a^2}{12}$$

burada $m = |m_1|$ dir.

2.9. X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımı İçin Zayıf Yakınsama Teoremi

Genel durumda X(t) sürecinin ergodik dağılımının açık şeklini bulmak oldukça zordur. Bu nedenle, bu bölümde $\beta \rightarrow \infty$ iken X(t) sürecinin ergodik dağılımı için zayıf yakınsaklık teoremi ispat edilecek ve limit dağılımı bulunacaktır. Bunun için

$$W_a(t) = \frac{X(t) - a}{a}, \quad a = \beta/2, \quad \text{gösterimi yapılınsın. Not edelim ki,}$$

$m_1 = E\eta_1 = 0$, $m_1 > 0$ ve $m_1 < 0$ durumları için ayrı ayrı zayıf yakınsaklık hakkındaki teoremleri ifade edilecektir.

$$\text{Durum 1. } E\eta_1 = m_1 = 0 \text{ ve } \varphi_0(\theta) = \left[\frac{\text{Sin}(\theta/2)}{(\theta/2)} \right]^2 \text{ olsun.}$$

Bu durumda önce $W_a(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonunun $a \rightarrow \infty$ iken yakınsadığı limit fonksiyonunu bulalım.

TEOREM 13. Teorem 10'nun koşulları altında $W_a(t)$ sürecinin ergodik dağılımının $\varphi_{w_a}(\theta)$ karakteristik fonksiyonu $a \rightarrow \infty$ iken $\varphi_0(\theta)$ limit karakteristik fonksiyonuna zayıf yakınsar. Başka bir ifadeyle her $\theta \in \mathbf{R}$ için $a \rightarrow \infty$ iken

$$\varphi_{w_a}(\theta) \rightarrow \varphi_0(\theta) \equiv \left[\frac{\text{Sin}(\theta/2)}{(\theta/2)} \right]^2$$

dır.

İSPAT. Ele alınan teoremin koşulları altında $m_1 = E\eta_1 = 0$ ve $0 < \sigma^2 < \infty$ dir. Bir önceki bölümde gösterilmiştir ki bu koşullar sağlandığında ve $a \rightarrow \infty$ iken aşağıdaki yaklaşık formüller doğrudur:

$$E(N) \approx \frac{a^2}{\sigma^2}; \quad E(N^2) \approx \frac{5a^4}{3\sigma^4}, \quad \text{dolayısıyla } \frac{EN}{a^2} \rightarrow \frac{1}{\sigma^2}$$

dır. $W_a(t)$ sürecinin tanımına göre ise aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \varphi_{w_a}(\theta) &= E \exp\left(i\theta \frac{X-a}{a}\right) = e^{-i\theta} E\left[\exp\left(\frac{i\theta X}{a}\right)\right] = \\ &= e^{-i\theta} \varphi_X\left(\frac{\theta}{a}\right) = e^{-i\theta} e^{i\theta} \frac{(1 - \varphi_{s_N}\left(\frac{\theta}{a}\right))}{EN(1 - \varphi_\eta\left(\frac{\theta}{a}\right))} = \frac{(1 - \varphi_{s_N}\left(\frac{\theta}{a}\right))}{EN(1 - \varphi_\eta\left(\frac{\theta}{a}\right))} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - \varphi_{S_N}\left(\frac{\theta}{a}\right)}{\frac{EN}{a^2} a^2 \left(1 - \varphi_n\left(\frac{\theta}{a}\right)\right)} \approx \frac{1 - \varphi_{S_N}\left(\frac{\theta}{a}\right)}{\frac{1}{\sigma^2} \frac{\sigma^2 \theta^2}{2}} = \frac{2}{\theta^2} \left[1 - \varphi_{S_N}\left(\frac{\theta}{a}\right)\right]. \quad (19)$$

Buradan

$$E\text{Cos}\left(\frac{\theta S_N}{a}\right) = E\left\{\text{Cos}\left(\frac{\theta S_N}{a}\right); S_N \geq a\right\} + E\left\{\text{Cos}\left(\frac{\theta S_N}{a}\right); S_N \leq -a\right\}.$$

olduğunu görmek zor değildir. Ayrıca,

$$\bar{S}_N = S_N - a \text{ ve } \bar{\bar{S}}_N = S_N + a$$

gösterimleri yapılsın. Burada $S_N \geq a$ olduğu durumda $\bar{S}_N = S_N - a = \sum_{i=1}^{H^+(a)} \chi_i^+ - a$ yazılabilir.

Benzer şekilde $S_N \leq -a$ olduğu durumda ise $\bar{\bar{S}}_N = S_N + a = \sum_{i=1}^{H^-(a)} \chi_i^- + a$ yazılabilir.

Burada χ_i^+ yukarı basamak yükseklikleri; χ_i^- aşağı basamak yükseklikleridir. $H^+(a)$ ($H^-(a)$), $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin a ($-a$) seviyesine ulaşması için gereken basamak anları sayısıdır. Başka bir deyişle, $H^+(a)$ ($H^-(a)$), χ_i^+ (χ_i^-) oluşturduğu yenileme sürecidir.

$E(\chi_i^+) \in (0, +\infty)$ olduğundan Büyük Sayıların Güçlendirilmiş Kanunu'na ve yenileme teoremine göre (bak, [77])

$$\frac{\bar{S}_N}{a} = \frac{H^+(a)}{a} \frac{1}{H^+(a)} \sum_{i=1}^{H^+(a)} \chi_i^+ - 1 \xrightarrow{1} \frac{1}{E(\chi_i^+)} E(\chi_i^+) - 1 = 0$$

ve benzer şekilde göstermek mümkündür ki, $E(\chi_i^-) \in (-\infty, 0)$ ise yine Büyük Sayıların Güçlendirilmiş Kanunu'na göre,

$$\frac{\bar{\bar{S}}_N}{a} = \frac{H^-(a)}{a} \frac{1}{H^-(a)} \sum_{i=1}^{H^-(a)} \chi_i^- + 1 \xrightarrow{1} \frac{1}{-E(\chi_i^-)} E(\chi_i^-) + 1 = 0$$

dır. Bilinmektedir ki her ölçülebilir, sınırlı $f(x)$ fonksiyonu için $f\left(\frac{\bar{S}_N}{a}\right) \xrightarrow{1} f(0)$ bağıntısı

doğrudur. Bu nedenle

$$E\text{Cos}\left(\frac{\theta S_N}{a}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= E\left\{\cos\left(\theta + \frac{\bar{S}_N}{a}\right); S_N \geq a\right\} + E\left\{\cos\left(-\theta + \frac{\bar{S}_N}{a}\right); S_N \leq -a\right\} \\
&\xrightarrow{a \rightarrow \infty} E\{\cos(\theta); S_N \geq a\} + E\{\cos(-\theta); S_N \leq -a\} = \\
&= \cos(\theta)E\{1; S_N \geq a\} + \cos(-\theta)E\{1; S_N \leq -a\} = \\
&= \cos\theta P\{S_N \geq a\} + \cos\theta P\{S_N \leq -a\} = \\
&= \cos\theta [P\{S_N \geq a\} + P\{S_N \leq -a\}] = \\
&= 1\cos\theta = \cos\theta
\end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde göstermek mümkündür ki;

$$\begin{aligned}
E\left(\sin\left(\theta \frac{S_N}{a}\right)\right) &\xrightarrow{a \rightarrow \infty} \sin\theta P\{S_N \geq a\} + \sin(-\theta)P\{S_N \leq -a\} = \\
&= \sin\theta [P\{S_N \geq a\} - P\{S_N \leq -a\}]
\end{aligned}$$

dır. Wald yaklaşımına göre $P\{S_N \geq a\} = \frac{1}{2} + o(1)$ ve $P\{S_N \leq -a\} = \frac{1}{2} + o(1)$ dir. Ele alınan

durumda $m_1 = E\eta_1 = 0$ ve $0 < \sigma^2 < \infty$ olduğu için $a \rightarrow \infty$

$$E\left(\sin\left(\theta \frac{S_N}{a}\right)\right) \rightarrow \sin\theta \left\{\frac{1}{2} + o(1) - \frac{1}{2} + o(1)\right\} = \sin\theta o(1) = o(1) \rightarrow 0$$

yazılır. Dolayısıyla $a \rightarrow \infty$ iken $\varphi_{S_N}\left(\frac{\theta}{a}\right) = \cos\left(\theta \frac{S_N}{a}\right) + i\sin\left(\theta \frac{S_N}{a}\right) \rightarrow \cos\theta$ elde edilmiş olur.

Bu sonucun (19) formülü de göz önünde bulundurularak , $a \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned}
\varphi_w(\theta) &\rightarrow \frac{2(1 - \cos\theta)}{\theta^2} = \\
&= \frac{4\sin^2(\theta/2)}{\theta^2} = \frac{\sin^2\theta/2}{(\theta/2)^2} = \left[\frac{\sin\theta/2}{\theta/2}\right]^2
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Böylece Teorem 13'ün ispatı tamamlanmış olur. ▶

SONUÇ 5. Teorem 10'nun koşulları altında $W_a(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_{wa}(x)$, $(-1,1)$ aralığında tanımlanmış bir üçgen dağılım olan $G_0(x)$ dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsar. Başka bir ifadeyle her $x \in (-1,1)$ için $a \rightarrow \infty$ iken

$$Q_{wa}(x) \rightarrow G_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)^2, & x \in (-1,0] \\ 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2, & x \in (0,1) \end{cases}$$

dır.

SONUÇ 6. Teorem 10'nun koşulları altında $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_x(u)$, $(0,2a)$ aralığında üçgen dağılıma sahip $G_a(u)$ dağılım fonksiyonuna asimptotik olarak denktir. Başka bir ifadeyle, her $u \in (0,2a)$ ve $a \rightarrow \infty$ iken

$$Q_x(u) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) \leq u\} \approx G_a(u) = \begin{cases} \frac{u^2}{2a^2} & , u \in (0, a) \\ 1 - \frac{(2a-u)^2}{2a^2} & , u \in (a, 2a) \end{cases}$$

dır. Benzer şekilde aşağıdaki sonuçları da elde etmek mümkündür.

Durum 2. $m_1 = E\eta_1 > 0$, $\varphi_0^+(\theta) = \frac{e^{i\theta} - 1}{i\theta}$ gösterimlerini kabul edelim ve aşağıdaki sonucu ispatsız verelim.

TEOREM 14. Teorem 11'in koşulları altında $W_a(t)$ sürecinin ergodik dağılımının $\varphi_{wa}(\theta)$ karakteristik fonksiyonu bir $\varphi_0^+(\theta)$ limit karakteristik fonksiyonuna yakınsar. Başka bir ifadeyle $\forall \theta \in \mathbf{R}$ için $a \rightarrow \infty$ iken

$$\varphi_{wa}(\theta) \rightarrow \varphi_0^+(\theta) \equiv \frac{e^{i\theta} - 1}{i\theta}$$

dır.

SONUÇ 7. Teorem 11'in koşulları altında $W_a(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_{wa}(x)$, $(0,1)$ aralığında düzgün dağılıma sahip bir $G_0^+(x)$ dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsar. Başka bir ifadeyle her $x \in (0,1)$, için $a \rightarrow \infty$ iken

$$Q_{wa}(x) \rightarrow G_0^+(x) = x$$

dır.

SONUÇ 8. Teorem 11'in koşulları altında $X(t)$ sürecinin $Q_x(u)$ ergodik dağılım fonksiyonu $(a,2a)$ aralığında düzgün dağılıma sahip $G_a^+(u)$ dağılım fonksiyonuna asimptotik olarak denktir. Başka bir deyişle her $u \in (a,2a)$, için $a \rightarrow \infty$ iken aşağıdaki doğrudur.

$$Q_X(u) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) \leq u\} \approx G_a^+(u) = \frac{u-a}{a}$$

Durum 3. $m_1 = E\eta_1 < 0$, $\varphi_0^-(\theta) = \frac{1-e^{-i\theta}}{i\theta}$ gösterimlerini yapalım ve aşağıdaki

sonucu ifade edelim.

TEOREM 15. Teorem 12'in koşulları altında $W_a(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\varphi_{wa}(\theta)$, $a \rightarrow \infty$ iken $\varphi_0^-(\theta)$ limit fonksiyonuna yakınsar. Başka bir ifadeyle; her $\theta \in \mathbf{R}$ için $a \rightarrow \infty$ iken

$$\varphi_{wa}(\theta) \rightarrow \varphi_0^-(\theta) \equiv \frac{1-e^{-i\theta}}{i\theta}$$

dır.

SONUÇ 9. Teorem 12'in koşulları altında $W_a(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_{wa}(x)$, $(-1,0)$ aralığında düzgün dağılıma sahip $G_0^-(x)$ dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsar. Başka bir ifadeyle her $x \in (-1,0)$ için $a \rightarrow \infty$ iken

$$Q_{wa}(x) \rightarrow G_0^-(x) = 1+x$$

dır.

SONUÇ 10. Teorem 12'nin koşulları altında $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(u)$, $(0,a)$ aralığında düzgün dağılıma sahip $G_a^-(u)$ dağılım fonksiyonuna asimptotik olarak denktir. Başka bir ifadeyle her $u \in (0,a)$ için, $a \rightarrow \infty$ iken

$$Q_X(u) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) \leq u\} \approx G_a^-(u) = \frac{u}{a}$$

dır.

Böylece $W_a(t)$ sürecinin ergodik dağılımının zayıf yakınsaması üzerine teoremler elde edilmiş oldular.

Not: Elde edilen zayıf yakınsaklık sonuçlarının teorik sonuçlara yakınlık derecesini görebilmek için iki taraflı üstel dağılım durumunda bilgisayarı da kullanarak $W_a(t)$ nin ergodik dağılımının teorik, asimptotik ve simülasyon değerleri aşağıdaki bölümde karşılaştırılmıştır.

2.9.1. İki taraflı Üstel Dağılım Durumunda $W_a(t)$ nin Ergodik Dağılımının Teorik, Asimptotik ve Simülasyon Değerlerinin Karşılaştırılması

$W(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_W(x)$ 'nin aşikar şekli aşağıdaki gibidir:

$$Q_W(x) = \alpha_1 G_1(x) + \alpha_2 G_2(x) + \alpha_3 G_3(x), \quad x \in [-1,1],$$

burada $\alpha_1 = \frac{(a\lambda)^2}{[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]}$, $\alpha_2 = \frac{2a\lambda}{[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]}$, $\alpha_3 = \frac{2}{[(a\lambda)^2 + 2a\lambda + 2]}$ ve

$$G_1(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, -1] \\ \frac{(1+x)^2}{2} & , x \in (-1, 0] \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{2} & , x \in (0, 1] \\ 1 & , x \in (1, \infty) \end{cases}$$

($G_1(x)$ fonksiyonu, $[-1,1]$ aralığında tanımlanmış üçgensel dağılım fonksiyonudur),

$$G_2(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1+x}{2} & , x \in (-1, 1] \\ 1 & , x \in (1, \infty) \end{cases}$$

($G_2(x)$ fonksiyonu, $[-1,1]$ aralığında tanımlanmış düzgün dağılım fonksiyonudur),

$$G_3(x) = \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 0] \\ 1 & , x \in (0, \infty) \end{cases}$$

($G_3(x)$ fonksiyonu ise, dejenere olmuş dağılım fonksiyonudur)

dır. Diğer taraftan zayıf yakınsama teoreminden $W_a(t)$ sürecinin ergodik dağılımının asimptotik açılımının birinci teriminin

$$\tilde{Q}_W(x) \equiv \lim_{a \rightarrow \infty} Q_W(x) = G_1(x), \quad x \in [-1,1]$$

olduğu bilinmektedir. Bu bölümdeki amaç $W_a(t)$ sürecinin ergodik dağılımının teorik ve asimptotik ifadelerinin arasındaki farkın değerlendirilmesidir. Bu durumda mutlak fark fazla bir anlam ifade etmediğinden dolayı aşağıda görel hatalar için tablolar verilecektir.

Burada $\tilde{\delta} = \frac{|Q_W(x) - \tilde{Q}_W(x)|}{Q_W(x)} \cdot 100\%$, $x \in [-1,1]$ dir. β ve λ parametresinin çeşitli

Tablo 26. $\lambda=10$ için $\tilde{\delta}$ hataları tablosu

x	$\beta=10$	$\beta=20$	$\beta=30$	$\beta=40$	$\beta=50$	$\beta=60$	$\beta=70$	$\beta=80$	$\beta=90$	$\beta=100$
h	25.65	14.98	10.58	8.17	6.66	5.62	4.86	4.28	3.82	3.46
2h	13.26	7.25	4.99	3.80	3.07	2.57	2.22	1.95	1.73	1.56
4h	5.38	2.83	1.92	1.45	1.17	0.98	0.84	0.73	0.65	0.59
6h	2.42	1.27	0.86	0.65	0.52	0.43	0.37	0.32	0.29	0.26
8h	0.87	0.46	0.31	0.24	0.19	0.16	0.14	0.12	0.10	0.09
10h	0.07	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
12h	0.41	0.22	0.15	0.11	0.09	0.07	0.06	0.05	0.05	0.04
13h	0.51	0.26	0.18	0.13	0.10	0.09	0.07	0.06	0.06	0.05
14h	0.54	0.28	0.19	0.14	0.11	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05
15h	0.54	0.27	0.18	0.14	0.11	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05
16h	0.49	0.25	0.17	0.12	0.10	0.08	0.07	0.06	0.05	0.05
17h	0.42	0.21	0.14	0.10	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.04
18h	0.31	0.15	0.10	0.08	0.06	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03
19h	0.17	0.08	0.05	0.04	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01
20h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Yukarıda ergodik dağılımın teorik değerleri ile asimptotik sonuçlar karşılaştırıldı. Buna benzer şekilde aşağıda teorik ve asimptotik sonuçlar; simülasyon sonuçlarıyla karşılaştırılmış ve sonuç olarak görel hatalar tabloları düzenlenmiştir. Bu tablolarda

$$\hat{\delta} = \frac{|\hat{Q}_w(x) - Q_w(x)|}{Q_w(x)} \cdot 100\%, \quad \tilde{\delta} = \frac{|\tilde{Q}_w(x) - Q_w(x)|}{Q_w(x)} \cdot 100\% \text{ ve}$$

$$\hat{\tilde{\delta}} = \frac{|\hat{Q}_w(x) - \tilde{Q}_w(x)|}{\hat{Q}_w(x)} \cdot 100\%$$

dır. Burada $\hat{Q}_w(x)$ ile $W(t)$ sürecinin ampirik dağılım fonksiyonu gösterilmiştir. Aşağıdaki tablolarda aralık sayısı $k=10$ ve adım uzunluğu $h=2/k$ dir.

Tablo 27. $\beta=10$, $\lambda=8$ ve $\lambda=9$ için hatalar tablosu.

x	$\lambda=8$			$\lambda=9$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	0.222579	22.628571	22.455974	0.113685	13.266667	13.365157
2h	0.122867	9.733333	9.622289	0.110294	5.381818	5.486062
3h	0.101349	4.423529	4.326565	0.00852	2.425	2.433313
4h	0.053567	1.527273	1.474496	0.027195	0.87619	0.849226
5h	0.005957	0.296296	0.302271	0.024915	0.076923	0.101864
6h	0.015662	0.73523	0.75101	0.00957	0.417707	0.427318
7h	0.016722	1.026388	1.043284	0.002957	0.548539	0.551513
8h	0.013815	0.946515	0.960463	0.001873	0.497061	0.495179
9h	0.000794	0.600455	0.599656	0.003461	0.313139	0.316612
10h	0	0	0	0	0	0

Tablo 28. $\beta=20$, $\lambda=7$ ve $\lambda=8$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=7$			$\lambda=8$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	0.069645	19.833333	19.889127	0.215902	13.266667	13.079002
2h	0.07686	8.380952	8.451317	0.152981	5.381818	5.236849
3h	0.088725	3.8	3.885277	0.130687	2.425	2.297316
4h	0.117868	1.333333	1.449493	0.02038	0.87619	0.855985
5h	0.081229	0.208333	0.127001	0.016469	0.076923	0.093407
6h	0.061794	0.64	0.577849	0.016127	0.417707	0.433904
7h	0.04896	0.87468	0.825317	0.024269	0.548539	0.572947
8h	0.000273	0.801822	0.801548	0.015146	0.497061	0.512285
9h	0.009187	0.507463	0.516697	0.014496	0.313139	0.327682
10h	0	0	0	0	0	0

Tablo 29. $\beta=30$, $\lambda=3$ ve $\lambda=6$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=3$			$\lambda=6$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	0.209609	7.254545	7.448541	0.266855	19.833333	20.046693
2h	0.023566	2.838095	2.860987	0.117172	8.380952	8.488179
3h	0.01251	1.270968	1.283317	0.021705	3.8	3.820876
4h	0.099971	0.468293	0.567696	0.04043	1.333333	1.293426
5h	0.015847	0.019608	0.00376	0.007596	0.208333	0.215945
6h	0.051907	0.221901	0.169906	0.023136	0.64	0.616721
7h	0.031136	0.283385	0.252171	0.002019	0.87468	0.876717
8h	0.010461	0.254646	0.24416	0.008098	0.801822	0.809986
9h	0.001513	0.159888	0.161403	0.009828	0.507463	0.497586
10h	0	0	0	0	0	0

Tablo 30. $\beta=30$, $\lambda=7$ ve $\lambda=8$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=7$			$\lambda=8$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	0.104971	14.464646	14.374765	0.428987	9.380392	8.989971
2h	0.263661	5.911111	5.66238	0.054029	3.716667	3.76866
3h	0.076627	2.666667	2.592026	0.039818	1.668085	1.628916
4h	0.038603	0.959064	0.920817	0.008132	0.610753	0.618834
5h	0.061305	0.094563	0.155963	0.030791	0.034632	0.065443
6h	0.032985	0.457781	0.490928	0.009702	0.290018	0.299749
7h	0.0285	0.605042	0.633722	0.004176	0.373768	0.37796
8h	0.020658	0.549303	0.570079	0.007123	0.336794	0.329648
9h	0.007419	0.346312	0.353757	0.010909	0.2117	0.20077
10h	0	0	0	0	0	0

Tablo 31. $\beta=30$, $\lambda=9$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=9$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	0.417015	4.991667	4.593808
2h	0.007836	1.926882	1.919196
3h	0.05793	0.86087	0.918267
4h	0.097665	0.319126	0.416384
5h	0.035134	0.008772	0.026353
6h	0.00761	0.150885	0.143264
7h	0.001195	0.190976	0.192173
8h	0.009953	0.171139	0.18111
9h	0.009253	0.107338	0.098076
10h	0	0	0

Tablo 32. $\beta=40$, $\lambda=6$ ve $\lambda=7$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=6$			$\lambda=7$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	0.05377	15.9	15.945196	0.020774	11.380952	11.399359
2h	0.168473	6.555556	6.712719	0.075752	4.564103	4.636343
3h	0.164502	2.961538	3.120906	0.061399	2.052632	2.112734
4h	0.029591	1.058824	1.088093	0.008093	0.746667	0.754698
5h	0.034988	0.119048	0.084031	0.007229	0.053763	0.060997
6h	0.03933	0.506151	0.466638	0.01424	0.355274	0.369567
7h	0.013611	0.674453	0.660752	0.005337	0.462146	0.456784
8h	0.000981	0.613784	0.612798	0.002303	0.417595	0.415283
9h	0.0092	0.387333	0.378098	0.007562	0.262782	0.255201
10h	0	0	0	0	0	0

Tablo 33. $\beta=40$, $\lambda=8$ ve $\lambda=9$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=8$			$\lambda=9$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	0.012988	7.254545	7.26659	0.253715	3.804762	4.048206
2h	0.252131	2.838095	2.592501	0.031656	1.458537	1.427332
3h	0.012173	1.270968	1.258948	0.123331	0.65082	0.773197
4h	0.038884	0.468293	0.506979	0.042397	0.241975	0.284252
5h	0.047173	0.019608	0.027552	0.023311	0.00495	0.018357
6h	0.022017	0.221901	0.19984	0.04034	0.114277	0.15468
7h	0.013354	0.283385	0.269995	0.00665	0.144006	0.150666
8h	0.003095	0.254646	0.25775	0.018644	0.128872	0.110208
9h	0.004334	0.159888	0.164228	0.009053	0.080785	0.071725
10h	0	0	0	0	0	0

Tablo 34. $\beta=50$, $\lambda=5$ ve $\lambda=6$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=5$			$\lambda=6$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	0.488737	22.628571	22.248571	0.094603	13.266667	13.348642
2h	0.155137	9.733333	9.593078	0.074684	5.381818	5.3111
3h	0.067897	4.423529	4.358592	0.038769	2.425	2.462814
4h	0.062922	1.527273	1.465273	0.051051	0.87619	0.926768
5h	0.03075	0.296296	0.327147	0.034402	0.076923	0.111364
6h	0.007595	0.73523	0.727579	0.014562	0.417707	0.432332
7h	0.008756	1.026388	1.017542	0.035305	0.548539	0.58405
8h	0.002995	0.946515	0.943492	0.008483	0.497061	0.505587
9h	0.006186	0.600455	0.606679	0.009582	0.313139	0.322753
10h	0	0	0	0	0	0

Tablo 35. $\beta=50$, $\lambda=7$ ve $\lambda=8$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=7$			$\lambda=8$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	0.574172	9.380392	9.897734	0.509172	5.914074	6.390706
2h	0.138297	3.716667	3.583326	0.386607	2.295385	2.671663
3h	0.068334	1.668085	1.600845	0.063205	1.026494	1.08901
4h	0.042557	0.610753	0.568438	0.001299	0.379608	0.378313
5h	0.008063	0.034632	0.042698	0.027007	0.012598	0.039616
6h	0.050201	0.290018	0.34039	0.040039	0.179642	0.139547
7h	0.032256	0.373768	0.406155	0.034402	0.228184	0.193716
8h	0.019183	0.336794	0.356046	0.023009	0.204706	0.181655
9h	0.003014	0.2117	0.208679	0.017447	0.128447	0.11098
10h	0	0	0	0	0	0

Tablo 36. $\beta=50$, $\lambda=9$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=9$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	4.296085	3.073846	1.277104
2h	2.736771	1.173333	1.60743
3h	1.378327	0.523158	0.867121
4h	0.38024	0.194851	0.186096
5h	0.013015	0.003175	0.009839
6h	0.142034	0.091958	0.050004
7h	0.312829	0.115577	0.196637
8h	0.274894	0.103347	0.171076
9h	0.087329	0.064763	0.022546
10h	0	0	0

Tablo 37. $\beta=60$, $\lambda=5$ ve $\lambda=6$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=5$			$\lambda=6$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	0.032167	19.833333	19.807538	0.296482	11.380952	11.117432
2h	0.053039	8.380952	8.42952	0.050462	4.564103	4.612237
3h	0.094924	3.8	3.891231	0.06597	2.052632	2.117205
4h	0.077785	1.333333	1.410022	0.110262	0.746667	0.855985
5h	0.011243	0.208333	0.219601	0.032272	0.053763	0.021485
6h	0.002912	0.64	0.642931	0.03945	0.355274	0.315699
7h	0.017864	0.87468	0.892704	0.010189	0.462146	0.451911
8h	0.000864	0.801822	0.800951	0.001757	0.417595	0.41936
9h	0.000695	0.507463	0.508161	0.002221	0.262782	0.260555
10h	0	0	0	0	0	0

Tablo 38. $\beta=60$, $\lambda=7$ ve $\lambda=8$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=7$			$\lambda=8$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	0.227666	7.977778	7.767796	0.085579	4.991667	5.072904
2h	0.018711	3.134503	3.152624	0.060325	1.926882	1.986009
3h	0.037906	1.404762	1.442121	0.056521	0.86087	0.804804
4h	0.035887	0.516517	0.480802	0.00401	0.319126	0.315129
5h	0.001132	0.024155	0.025286	0.016613	0.008772	0.007839
6h	0.016988	0.244927	0.227901	0.023369	0.150885	0.127486
7h	0.003768	0.313737	0.317517	0.014616	0.190976	0.176335
8h	0.003428	0.28218	0.285618	0.017202	0.171139	0.15391
9h	0.003835	0.17724	0.181082	0.001122	0.107338	0.106215
10h	0	0	0	0	0	0

Tablo 39. $\beta=60$, $\lambda=5$ ve $\lambda=6$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=5$			$\lambda=6$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	0.218984	17.650794	17.830731	0.661796	9.964286	9.364464
2h	0.10825	7.357143	7.45732	0.230585	3.961905	3.739944
3h	0.001246	3.329193	3.327988	0.182478	1.779221	1.599662
4h	0.01414	1.180952	1.194924	0.129343	0.650246	0.521578
5h	0.045072	0.15444	0.109319	0.06664	0.039683	0.106393
6h	0.02041	0.565564	0.545043	0.01537	0.308953	0.324372
7h	0.001661	0.761724	0.76005	0.001884	0.399223	0.401115
8h	0.005814	0.695359	0.689504	0.001558	0.360017	0.358454
9h	0.002725	0.439352	0.442089	0.00401	0.226369	0.22235
10h	0	0	0	0	0	0

Tablo 43. $\beta=90$, $\lambda=5$ ve $\lambda=6$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=5$			$\lambda=6$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	0.412899	14.464646	14.110008	0.069566	7.977778	8.041749
2h	0.031732	5.911111	5.881246	0.124165	3.134503	3.01408
3h	0.053267	2.666667	2.614793	0.081066	1.404762	1.32477
4h	0.036869	0.959064	0.922535	0.017918	0.516517	0.498688
5h	0.027953	0.094563	0.12255	0.017896	0.024155	0.042058
6h	0.03656	0.457781	0.494522	0.035946	0.244927	0.208906
7h	0.028892	0.605042	0.634118	0.029042	0.313737	0.284613
8h	0.00586	0.549303	0.555196	0.019375	0.28218	0.262754
9h	0.007153	0.346312	0.35349	0.000891	0.17724	0.178133
10h	0	0	0	0	0	0

Tablo 44. $\beta=90$, $\lambda=7$ ve $\lambda=8$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=7$			$\lambda=8$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	0.297679	5.507024	5.787475	1.695491	3.400473	1.734388
2h	0.085372	2.132275	2.048652	1.186979	1.300483	0.114868
3h	0.055451	0.953146	0.898193	0.328958	0.580049	0.251919
4h	0.017923	0.352862	0.334999	0.056406	0.215873	0.159558
5h	0.000293	0.010814	0.010521	0.030326	0.003916	0.034252
6h	0.013133	0.166919	0.153765	0.033105	0.101911	0.068783
7h	0.006792	0.211688	0.204882	0.079514	0.128235	0.048682
8h	0.00198	0.189815	0.18783	0.071048	0.114707	0.043628
9h	0.004352	0.11908	0.114723	0.024695	0.071892	0.047186
10h	0	0	0	0	0	0

Tablo 45. $\beta=100$, $\lambda=4$ ve $\lambda=5$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=4$			$\lambda=5$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\tilde{\delta}} \%$
h	0.18312	22.628571	22.486629	0.288758	13.266667	13.015492
2h	0.172756	9.733333	9.889006	0.104253	5.381818	5.283073
3h	0.00559	4.423529	4.428872	0.082224	2.425	2.344704
4h	0.029827	1.527273	1.556636	0.028062	0.87619	0.848366
5h	0.023248	0.296296	0.319618	0.010824	0.076923	0.087757
6h	0.007803	0.73523	0.72737	0.000798	0.417707	0.418509
7h	0.021372	1.026388	1.004801	0.025392	0.548539	0.523014
8h	0.010456	0.946515	0.935962	0.019788	0.497061	0.477179
9h	0.005413	0.600455	0.595009	0.004072	0.313139	0.309054
10h	0	0	0	0	0	0

Tablo 46. $\beta=100$, $\lambda=6$ ve $\lambda=7$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=6$			$\lambda=7$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\delta} \%$
h	0.232787	7.254545	7.038142	0.529125	4.991667	4.486279
2h	0.10251	2.838095	2.937594	0.004914	1.926882	1.9317
3h	0.050027	1.270968	1.320334	0.045152	0.86087	0.905613
4h	0.016862	0.468293	0.485073	0.025441	0.319126	0.29376
5h	0.027809	0.019608	0.008199	0.037352	0.008772	0.046141
6h	0.007102	0.221901	0.214784	0.016779	0.150885	0.167693
7h	0.038205	0.283385	0.245087	0.012631	0.190976	0.203633
8h	0.010025	0.254646	0.244597	0.026089	0.171139	0.19728
9h	0.013348	0.159888	0.14652	0.006989	0.107338	0.114335
10h	0	0	0	0	0	0

Tablo 47. $\beta=100$, $\lambda=8$ için hatalar tablosu.

X	$\lambda=8$		
	$\hat{\delta} \%$	$\tilde{\delta} \%$	$\hat{\delta} \%$
h	3.866702	3.073846	0.824746
2h	2.691311	1.173333	1.559961
3h	1.207559	0.523158	0.692766
4h	0.333394	0.194851	0.139005
5h	0.051656	0.003175	0.048457
6h	0.167322	0.091958	0.075237
7h	0.340373	0.115577	0.224034
8h	0.287755	0.103347	0.183879
9h	0.100868	0.064763	0.036069
10h	0	0	0

2.10. τ_1 Sınır Fonksiyonelinin İncelenmesi

$X(t)$ sürecinin olasılık karakteristiklerinin yanısıra bazı fonksiyonelerin de incelenmesi uygulama açısından büyük önem taşımaktadır. Bu fonksiyonelerin başlıcalarından birisi de sınır fonksiyoneli. Sınır fonksiyoneli dendiğinde $X(t)$ sürecinin $[0, \beta]$ aralığının sınırlarına ilk kez ulaşma anı anlaşılmaktadır. Önce bu sınır fonksiyonelinin matematiksel tanımını verelim. Hatırlatalım ki, ele alacağımız rasgele değişkenlerin tanımları sürecin matematiksel kuruluşu bölümünde verilmiştir.

$$N_1 \equiv N = \min\{n \geq 1 : \zeta_0 + S_n \notin [0, \beta]\}, \zeta_0 \in [0, \beta]$$

ve

$$\tau_1 = \sum_{i=1}^N \xi_i$$

olsun. ξ_1, N ve τ_1 rasgele değişkenlerinin fonksiyonel karakteristikleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\varphi_\xi(k) = E(e^{-k\xi_1}), k \geq 0,$$

$$\Psi_N(z) = E(z^N), |z| \leq 1,$$

$$\Phi_\tau(\mu) = E(e^{-\mu\tau_1}), \mu \geq 0.$$

Bu üç fonksiyonel karakteristik arasındaki bağlantı aşağıdaki teorem yardımıyla verilebilir.

TEOREM 16. τ_1 sınır fonksiyonelinin Laplace dönüşümü ($\Phi_\tau(k)$), ξ_1 rasgele değişkeninin Laplace dönüşümü ($\varphi_\xi(k)$) ve N rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu ($\Psi_N(z)$) yardımı ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\Phi_\tau(k) = \Psi_N(\varphi_\xi(k)), k \geq 0.$$

İSPAT. τ_1 sınır fonksiyonelinin tanımı göz önünde bulundurularak

$$\Phi_\tau(k) = E(e^{-k\tau_1}) = E(e^{-k\sum_{i=1}^{N_1}\xi_i})$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\{\xi_i\}$ ve $\{\eta_i\}$, $i \geq 1$ dizileri birbirlerinden bağımsız oldukları için

$$\Phi_\tau(k) = \sum_{n=1}^{\infty} E(e^{-k\sum_{i=1}^n\xi_i})P\{N_1 = n\}$$

olduğu görülür. $\{\xi_i\}$, $i \geq 1$, rasgele değişkenleri pozitif değerli, bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip oldukları için

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} [E(e^{-k\xi_1})]^n P\{N_1 = n\} = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_\xi(k)]^n P\{N_1 = n\} = \Psi_N(\varphi_\xi(k)) \end{aligned}$$

yazılabilir. Özetle, τ_1 sınır fonksiyonelinin Laplace dönüşümü aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\Phi_\tau(k) = \Psi_N(\varphi_\xi(k)), k \geq 0.$$

Bununla da Teorem 16'nın ispatı tamamlanmış olur. ▶

Teorem 16 dan sonuç olarak, τ_1 sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki kesin ifadeler elde edilebilir.

TEOREM 17. ξ_1 ve N rasgele değişkenlerinin ilk dört momentleri var ve sonlu ise bu takdirde τ_1 sınır fonksiyonelinin de ilk dört momentleri var ve sonludur. Ayrıca, bu momentler aşağıdaki şekilde yazılabilirler:

$$1-) E(\tau_1) = \alpha_1 E(N),$$

$$2-) E(\tau_1^2) = \alpha_1^2 E(N^2) + (\alpha_2 - \alpha_1^2) E(N),$$

$$3-) E(\tau_1^3) = \alpha_1^3 E(N^3) + 3\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1) E(N^2) + (2\alpha_1^3 - 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3) E(N),$$

$$4-) E(\tau_1^4) = \alpha_1^4 E(N^4) + 6\alpha_1^2(\alpha_2 - \alpha_1^2) E(N^3) + \\ + (11\alpha_1^4 - 18\alpha_1^2\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2) E(N^2) + \\ + (-6\alpha_1^4 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_2^2 + \alpha_4) E(N).$$

Burada, $\alpha_i = E(\xi_1^i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ dır.

İSPAT. N rasgele değişkeninin ilk dört momentleri mevcut ve sonlu olduğu için $z \rightarrow 1$ iken aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$\Psi_N(z) = \Psi_N(1) + \frac{\Psi_N'(1)}{1!} (z-1) + \frac{\Psi_N''(1)}{2!} (z-1)^2 \\ + \frac{\Psi_N'''(1)}{3!} (z-1)^3 + \frac{\Psi_N^{(4)}(1)}{4!} (z-1)^4 + o((z-1)^4) \\ \Psi_N(z) = 1 + \frac{E(N)}{1!} (z-1) + \frac{E[N(N-1)]}{2!} (z-1)^2 \\ + \frac{E[N(N-1)(N-2)]}{3!} (z-1)^3 + \frac{E[N(N-1)(N-2)(N-3)]}{4!} (z-1)^4 + o((z-1)^4).$$

Dolayısıyla, $k \rightarrow 0$ iken aşağıdaki asimptotik aılım yazılabilir:

$$\Psi_N(\varphi_\xi(k)) = 1 + E(N)[\varphi_\xi(k) - 1] + \frac{E[N^2] - E(N)}{2!} [\varphi_\xi(k) - 1]^2 \\ + \frac{E[N(N-1)(N-2)]}{3!} [\varphi_\xi(k) - 1]^3 \\ + \frac{E[N(N-1)(N-2)(N-3)]}{4!} [\varphi_\xi(k) - 1]^4 + o([\varphi_\xi(k) - 1]^4).$$

ξ_1 rasgele değişkeninin ilk dört momentleri mevcut ve sonlu olduğu için $k \rightarrow 0$ iken $\varphi_\xi(k)$ için aşağıdaki asimptotik aılım yazılabilir:

$$\varphi_\xi(k) = E(e^{-k\xi_1}) = 1 - k\alpha_1 + \frac{k^2}{2!} \alpha_2 - \frac{k^3}{3!} \alpha_3 + \frac{k^4}{4!} \alpha_4 + o(k^4).$$

Buradan,

$$\begin{aligned}\varphi_\xi(k) - 1 &= -k\alpha_1 + \frac{k^2}{2!}\alpha_2 - \frac{k^3}{3!}\alpha_3 + \frac{k^4}{4!}\alpha_4 + o(k^4), \\ [\varphi_\xi(k) - 1]^2 &= [-k\alpha_1 + \frac{k^2}{2!}\alpha_2 - \frac{k^3}{3!}\alpha_3 + \frac{k^4}{4!}\alpha_4 + o(k^4)]^2 = \\ &= \alpha_1^2 k^2 - \alpha_1 \alpha_2 k^3 + \frac{k^4}{3!}(2\alpha_1 \alpha_3 + \frac{3}{2}\alpha_2^2) + o(k^4), \\ [\varphi_\xi(k) - 1]^3 &= [-k\alpha_1 + \frac{k^2}{2!}\alpha_2 - \frac{k^3}{3!}\alpha_3 + \frac{k^4}{4!}\alpha_4 + o(k^4)]^3 = \\ &= -k^3 \alpha_1^3 + \frac{3}{2}k^4 \alpha_1^2 \alpha_2 + o(k^4), \\ [\varphi_\xi(k) - 1]^4 &= [-k\alpha_1 + \frac{k^2}{2!}\alpha_2 - \frac{k^3}{3!}\alpha_3 + \frac{k^4}{4!}\alpha_4 + o(k^4)]^4 = \\ &= k^4 \alpha_1^4 + o(k^4)\end{aligned}$$

olduğunu görmek zor değildir. Böylece,

$$\begin{aligned}\Psi_N(\varphi_\xi(k)) &= 1 + E(N)[-k\alpha_1 + \frac{k^2}{2!}\alpha_2 - \frac{k^3}{3!}\alpha_3 + \frac{k^4}{4!}\alpha_4 + o(k^4)] + \\ &+ \frac{E(N^2) - E(N)}{2!}[\alpha_1^2 k^2 - \alpha_1 \alpha_2 k^3 + \frac{k^4}{3!}(2\alpha_1 \alpha_3 + \frac{3}{2}\alpha_2^2) + o(k^4)] + \\ &+ \frac{E(N^3) - 3E(N^2) + 2E(N)}{3!}[-\alpha_1^3 k^3 + \frac{3k^4}{2}\alpha_1^2 \alpha_2 + o(k^4)] + \\ &+ \frac{E(N^4) - 6E(N^3) + 11E(N^2) - 6E(N)}{4!}[k^4 \alpha_1^4 + o(k^4)]\end{aligned}$$

yazılır. Parantezler açılır ve sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\Psi_N[\varphi_\xi(k)] &= 1 - k\alpha_1 E(N) + \frac{k^2}{2!}\{\alpha_2 E(N) + \alpha_1^2 [E(N^2) - E(N)]\} - \\ &- \frac{k^3}{3!}\{\alpha_3 E(N) + 3\alpha_1 \alpha_2 [E(N^2) - E(N)] + \alpha_1^3 [E(N^3) - 3E(N^2) + 2E(N)]\} + \\ &+ \frac{k^4}{4!}\{\alpha_4 E(N) + (4\alpha_1 \alpha_3 + 3\alpha_2^2)[E(N^2) - E(N)] + 6\alpha_1^2 \alpha_2 [E(N^3) - 3E(N^2) + 2E(N)] + \\ &+ \alpha_1^4 [E(N^4) - 6E(N^3) + 11E(N^2) - 6E(N)]\} + o(k^4)\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $k \rightarrow 0$ iken

$$\Psi_N[\varphi_\xi(k)] = 1 - kE(\gamma_1) + \frac{k^2}{2!}E(\gamma_1^2) - \frac{k^3}{3!}E(\gamma_1^3) + \frac{k^4}{4!}E(\gamma_1^4) + o(k^4)$$

olduğu bilinmektedir. Böylece,

$$1-) E(\tau_1) = \alpha_1 E(N),$$

$$2-) E(\tau_1^2) = \alpha_1^2 E(N^2) + (\alpha_2 - \alpha_1^2) E(N),$$

$$3-) E(\tau_1^3) = \alpha_1^3 E(N^3) + 3\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1) E(N^2) + (2\alpha_1^3 - 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3) E(N),$$

$$4-) E(\tau_1^4) = \alpha_1^4 E(N^4) + 6\alpha_1^2(\alpha_2 - \alpha_1^2) E(N^3) \\ + (11\alpha_1^4 - 18\alpha_1^2\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2) E(N^2) \\ - (6\alpha_1^4 - 12\alpha_1^2\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2 - \alpha_4) E(N)$$

elde edilir. Burada $\alpha_i = E(\xi_1^i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ dir.

Böylece Teorem 17'nin ispatı tamamlanmış oldu. ▶

NOT. N rasgele değişkeninin ilk dört faktoriyel momenti f_1, f_2, f_3, f_4 ile gösterilsin, yani

$$f_1 = E(N), \quad f_2 = E[N(N-1)],$$

$$f_3 = E[N(N-1)(N-2)],$$

$$f_4 = E[N(N-1)(N-2)(N-3)]$$

olsun. Bu gösterimler göz önüne alındığında τ_1 sınır fonksiyonelinin ilk dört başlangıç momenti için aşağıdaki sonuca varılabilir.

SONUÇ 11.

$$E(\tau_1) = \alpha_1 f_1,$$

$$E(\tau_1^2) = \alpha_2 f_1 + \alpha_1^2 f_2,$$

$$E(\tau_1^3) = \alpha_3 f_1 + 3\alpha_1\alpha_2 f_2 + \alpha_1^3 f_3,$$

$$E(\tau_1^4) = \alpha_4 f_1 + (4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2) f_2 + 6\alpha_1^2\alpha_2 f_3 + \alpha_1^4 f_4$$

dir.

Özel Durum. η_1 rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametrelili iki taraflı üstel dağılıma sahip olduğunda N rasgele değişkeninin ilk dört momenti için aşağıdaki kesin ifadeler doğrudur.

$$E(N) = \frac{(a\lambda)^2}{2} + a\lambda + 1,$$

$$E(N^2) = \frac{5}{12} (a\lambda)^4 + \frac{5}{3} (a\lambda)^3 + \frac{7}{2} (a\lambda)^2 + 3(a\lambda) + 1,$$

$$E(N^3) = \frac{61}{120} (a\lambda)^6 + \frac{21}{20} (a\lambda)^5 + \frac{23}{2} (a\lambda)^4 + 16(a\lambda)^3 + \frac{31}{2} (a\lambda)^2 + 7(a\lambda) + 1,$$

$$E(N^4) = \frac{277}{168}(a\lambda)^8 + \frac{277}{21}(a\lambda)^7 + \frac{5601}{20}(a\lambda)^6 + \frac{905}{10}(a\lambda)^5 + \\ + \frac{1685}{12}(a\lambda)^4 + \frac{305}{3}(a\lambda)^3 + \frac{115}{2}(a\lambda)^2 + 15(a\lambda) + 1$$

dır. Bu değerler göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki sonuca varılır.

SONUÇ 12. η_1 rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametrelili iki taraflı üstel dağılıma sahip ve ξ_1 rasgele değişkeninin ilk dört momenti sonlu ise bu takdirde τ_1 sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti aşağıdaki kesin ve aşikar ifadelerle verilebilir:

$$E(\tau_1) = \frac{\alpha_1}{2}(a\lambda)^2 + \alpha_1(a\lambda) + \alpha_1,$$

$$E(\tau_1^2) = \left(\frac{5}{12}\alpha_1^2\right)(a\lambda)^4 + \left(\frac{5}{3}\alpha_1^2\right)(a\lambda)^3 + (3\alpha_1^2 + \frac{\alpha_2}{2})(a\lambda)^2 + (2\alpha_1^2 + \alpha_2)a\lambda + \alpha_2,$$

$$E(\tau_1^3) = \frac{61}{120}\alpha_1^3(a\lambda)^6 + \frac{21}{20}\alpha_1^3(a\lambda)^5 + \left(\frac{41}{4}\alpha_1^3 + \frac{5}{4}\alpha_1\alpha_2\right)(a\lambda)^4 +$$

$$+ (11\alpha_1^3 + 5\alpha_1\alpha_2)(a\lambda)^3 + \left(\frac{\alpha_3}{2} + 9\alpha_1\alpha_2 + 6\alpha_1^3\right)(a\lambda)^2 + (\alpha_3 + 6\alpha_1\alpha_2)a\lambda + \alpha_3,$$

$$E(\tau_1^4) = \frac{277}{168}\alpha_1^4(a\lambda)^8 + \frac{277}{21}\alpha_1^4(a\lambda)^7 + (277\alpha_1^4 + \frac{61}{20}\alpha_1^2\alpha_2)(a\lambda)^6 +$$

$$+ \left(\frac{842}{10}\alpha_1^4 + \frac{63}{10}\alpha_1^2\alpha_2\right)(a\lambda)^5 + \left(76\alpha_1^4 + \frac{123}{2}\alpha_1^2\alpha_2 + \frac{5}{2}\alpha_1\alpha_3 + \frac{5}{4}\alpha_2^2\right)(a\lambda)^4 +$$

$$+ (24\alpha_1^4 + 66\alpha_1^2\alpha_2 + \frac{20}{3}\alpha_1\alpha_3 + 5\alpha_2^2)(a\lambda)^3 +$$

$$+ (36\alpha_1^2\alpha_2 + 12\alpha_1\alpha_3 + 9\alpha_2^2 + \frac{\alpha_4}{2})(a\lambda)^2 +$$

$$+ (8\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_2^2 + \alpha_4)a\lambda + 4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2 + \alpha_4. \quad \blacktriangleright$$

2.11. Normal Dağılım İçin Simülasyon Sonuçları

N ve S_N sınır fonksiyonellerinin sayısal karakteristikleri için yukarıda iki taraflı üstel durumunda kesin formüller elde edilmişti. Fakat bu tür açık ve kesin formüller diğer dağılımlar için (basit durumlar hariç) elde edilememektedir. Ancak β 'nin büyük değerlerinde N ve S_N nin momentleri için asimptotik açılımlar elde etmek mümkündür. Özellikle bilgisayar yardımıyla asimptotik açılımının katsayılarını belirlemek mümkündür.

Biz bu bölümde η_1 normal dağılıma sahip olduğu durumda bu tür asimptotik formüller elde etmeye çalışacağız. Zayıf yakınsaklık teoreminden genel durumda N , S_N sınır fonksiyonlarının sayısal karakteristikleri ve $X(t)$ ile $W(t)$ süreçlerinin ergodik dağılımları için asimptotik açılımlarının birinci terimleri elde edilebilir. Fakat asimptotik formüllerin yakınlık derecelerini artırmak için yukarıdaki karakteristiklerin asimptotik açılımlarının ikinci terimlerini bulmak çok önemlidir. Bu anlamda, bu alt bölümde η_1 rasgele değişkeni $N(0, \sigma^2)$ parametrelili normal dağılıma sahip olduğu durumda N ve S_N sınır fonksiyonlarının birinci ve ikinci momentleri için aşağıdaki şekilde iki terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir:

$$E\tilde{N} = \left(\frac{a}{\sigma}\right)^2 + k_1\left(\frac{a}{\sigma}\right), \quad E\tilde{N}^2 = \frac{5}{3}\left(\frac{a}{\sigma}\right)^4 + l_1\left(\frac{a}{\sigma}\right)^3,$$

$$E\tilde{S}_N^2 = a^2 + c_1 a \sigma.$$

Buradaki k_1, l_1 ve c_1 sabitleri simülasyon yöntemleri uygulanarak yaklaşık olarak aşağıdaki gibi bulunmuşlardır:

$$\hat{k}_1 = \frac{E\hat{N}}{(a/\sigma)} - (a/\sigma), \quad \hat{l}_1 = \frac{E\hat{N}^2}{(a/\sigma)^2} - \frac{5}{3}(a/\sigma)^2 \quad \text{ve} \quad \hat{c}_1 = \frac{E\hat{S}_N^2}{a\sigma} - \frac{a}{\sigma}$$

burada $a = \beta/2$, $\sigma^2 = \text{Var}(\eta_1)$ dir. \hat{B} ile B karakteristiğinin ampirik değeri gösterilmiştir. Not edelim ki ampirik değerler 10 Milyar deneme sonucunda elde edilmişlerdir. Kullanılan bilgisayar programı Ek-3 de sunulmuştur. Burada ise elde edilen sonuçlar tablo şeklinde verilmektedir.

Tablo 48. $E\tilde{N}_1$ nin simülasyon değeri ile asimptotik değerinin karşılaştırılması

a/σ	$E\hat{N}_1$	\hat{k}_1	$E\tilde{N}_1$	$\frac{ E\hat{N}_1 - E\tilde{N}_1 }{E\hat{N}_1} \cdot 100\%$
10	113,2526	1,3253	111	1,98900
12,5	172,4318	1,2945	170	1,41029
14,285	222,344784	1,2784205	219,7959	1,14637
16,666	298,7378	1,2576	296,1111	0,87926
20	424,8738	1,2441	422	0,67639
25	655,9265	1,2369	652,5	0,52239
33,333	1152,20	1,2327	1147,7777	0,38381
50	2560,27056	1,2054114	2555	0,20586
80	6498,120	1,2265	6488	0,15574
100	10109,99975	1,10	10110	0,00002

Tablo 49. EN_1^2 nin simülasyon değeri ile asimptotik değerinin karşılaştırılması

a/σ	EN_1^2	\tilde{EN}_1^2	\hat{l}_1	$\frac{ EN_1^2 - \tilde{EN}_1^2 }{EN_1^2} \cdot 100\%$
10	21188,5785	20519,2667	4,5219	3,16
12,5	49246,3541	48214,71	4,3808	2,09
14,285	82041,628128	80647,5913	4,3297	1,69
16,666	148265,9833	146436,9341	4,2477	1,23
20	300108	297487,4667	4,1801	0,87
25	716341,1294	711238,5417	4,1682	0,71
33,333	2212728	2200302,0575	4,1529	0,56
50	10913995,2695	10898241,666	3,9786	0,144
100	170348945,2274	170519266	3,8526	0,099

Tablo 50. ES_N^2 nin simülasyon değeri ile asimptotik değerinin karşılaştırılması

	ES_N^2	\hat{c}_1	\tilde{ES}_N^2	$\frac{ ES_N^2 - \tilde{ES}_N^2 }{ES_N^2} \cdot 100\%$
a=100; $\sigma=10$	11224,0929	12,24	10117	9,86
a=100; $\sigma=8$	10969,7749	9,697749	10117	7,77
a=100; $\sigma=7$	10844,4012	8,444012	10117	6,71
a=100; $\sigma=6$	10720,4769	7,2	10117	5,63
a=100; $\sigma=5$	10597,2945	5,97	10117	4,53
a=100; $\sigma=4$	10475,2640	4,75264	10117	3,42
a=100; $\sigma=3$	10354,8460	3,54846	10117	2,29
a=100; $\sigma=1$	10117,13145	1,1713145	10117	0,001

$a/\sigma \rightarrow \infty$ iken $\hat{k}_1 \rightarrow k_1$; $\hat{l}_1 \rightarrow l_1$ ve $\hat{c}_1 \rightarrow c_1$ oldukları için k_1, l_1, c_1 bilinmeyen sabitleri için a/σ nın en büyük değerine uygun gelen sayıları kabul edeceğiz. Yani $k_1 = 1.10$; $l_1 = 3.8526$; $c_1 = 1.1713$ kabul edilmiştir. Dolayısıyla

$$EN = \left(\frac{a}{\sigma}\right)^2 + k_1 \left(\frac{a}{\sigma}\right) + \varepsilon_1, \quad k_1 = 1.10;$$

$$EN^2 = \frac{5}{3} \left(\frac{a}{\sigma}\right)^4 + l_1 \left(\frac{a}{\sigma}\right)^3 + \varepsilon_2, \quad l_1 = 3.8526;$$

$$ES_N^2 = a^2 + c_1 a \sigma + \varepsilon_3, \quad c_1 = 1.1713$$

dır. Buradaki $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ kalan terimleri tablolardan da görüldüğü gibi $\frac{a}{\sigma} \geq 20$ olduğunda toplam bilginin %5 inden fazlasını içermemektedirler. Bu ise uygulamanın ihtiyacını karşılayabilmektedir.

Not: Benzer asimptotik açılımlar sürecin kendi karakteristikleri içinde elde etmek mümkündür. Ayrıca, η_1 normal dağılımdan farklı bir dağılıma sahip olduğunda da önerilen yöntemle benzer iki terimli asimptotik sonuçlar elde edilebilir.



3. İRDELEME

Bu çalışmada, iki bariyerli yarı-Makov rasgele yürüyüş süreçleri ele alınmış ve detaylarıyla incelenmiştir. Ele alınan süreçte, $[0, \beta]$, $\beta > 0$ aralığında hareket eden parçacık bariyerlere ulaştığında dışarıdan müdahale ile hareketine aralığın rasgele bir noktasından devam etmektedir. Bu özelliği ile bu çalışma literatürde bulunan bariyerleri yansıtan, tutan, yutan, elastik, v.b. gibi çalışmalardan farklılık göstermektedir. Daha önce yapılan çalışmaların pek çoğu teorik sonuçlar içermekte ve elde edilen bu teorik sonuçlar mühendisler, fizikçiler, kimyacılar gibi uygulamacılar tarafından kullanılamamaktadır. Bu boşluğu doldurabilmek için çalışmada asimptotik açılımlar ve simülasyon sonuçlar verilmiştir.

Çalışmada η_1 rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametrelili iki taraflı üstel dağılıma sahip olduğu özel durumda süreç ayrıntılarıyla incelenmiştir. Bilinen diğer dağılımlar için benzer sonuçların elde edilmesi oldukça zordur. Fakat simülasyon yöntemlerini de kullanarak bir çok dağılım için asimptotik formüller elde etmek mümkündür. Bu bakımdan, bu çalışmada normal dağılım durumunda sürecin ergodik karakteristikleri ve sınır fonksiyonlarının sayısal karakteristikleri için iki terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Diğer dağılımlar için de benzer asimptotik sonuçlar elde edilebilir (örneğin, η_1 rasgele değişkeni Gamma dağılımına sahip iki rasgele değişkeninin farkı şeklinde olduğunda vs.). Başlangıç rasgele değişkenleri üzerine konulan bağımsızlık şartı kaldırıldığında benzer problemlere bakılabilir.

4. SONUÇLAR

Stok kontrol, kuyruk ve güvenilirlik teorilerinin bazı önemli problemlerinin çözülmesinde kullanılabilen stokastik modeller ve stokastik süreçler teorisi son yıllarda hızlı bir gelişme kaydetmektedir. Özellikle, reel hayatta karşılaşılabilecek pek çok ilginç problem Markov ve yarı-Markov modellerin yardımıyla ifade edilmekte ve gerekli bir biçimde çözümlenmektedir.

Bu çalışmada ele alınan iki bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci, bir $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş süreci yardımıyla matematiksel olarak inşa edilmiş ve süreç ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonları $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin olasılık karakteristikleri ile ifade edilmiştir.
2. $X(t)$ sürecinin toplamsal fonksiyonelinin dağılımının iki kat (Laplace-Fourier) dönüşümü elde edilmiştir.
3. Bazı şartlar altında $X(t)$ sürecinin ergodik olduğu ispatlanmış ve aynı şartlar altında sürecin ergodik dağılımı $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin olasılık karakteristikleri ile ifade edilmiştir.
4. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu N_1 ve S_{N_1} sınır fonksiyonellerinin yardımıyla ifade edilmiştir.
5. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının birinci momenti ($E(X)$) ve ikinci momenti ($E(X^2)$) için kesin formüller elde edilmiştir.
6. η_1 rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametrelili iki taraflı üstel dağılıma sahip olduğu durumda $X(t)$ süreci ayrıntılarıyla incelenmiştir.
7. Genel durumda, $X(t)$ süreci Wald yaklaşımıyla incelenmiştir.
8. $X(t)$ süreci için zayıf yakınsama teoremi ifade ve ispat edilmiştir.
9. $X(t)$ sürecinin $[0, \beta]$ da bulunan bariyerlere ilk kez ulaşma anı olan τ_1 in sayısal ve fonksiyonel karakteristikleri bulunmuştur.
10. η_1 rasgele değişkeni Normal dağılıma sahip olduğunda asimptotik ve simülasyon yöntemlerinin yardımıyla sürecin sınır fonksiyonelleri ve ergodik karakteristikleri için asimptotik açılımlar elde edilmiştir.

5. ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmanın aşağıdaki yönlerde geliştirilmesi ve benzer sonuçların elde edilmesi mümkündür.

1. $\{(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), i = 1, 2, \dots\}$ rasgele değişken üçlüleri dizisinin bileşenlerinin bağımlı olması durumunda sürecin yeniden ele alınması ve benzer çalışmaların yapılması.

2. Sürecin dağılım fonksiyonunun hesaplanmasının güç olduğu durumlarda dağılım fonksiyonunun Laplace dönüşümünün hesaplanması.

3. Sürecin bariyerlerine verilen özelliklerin değiştirilmesi, örneğin sürecin başlangıç noktasının orta nokta yerine $[0, \beta]$ da tanımlı düzgün dağılıma sahip bir nokta olarak değiştirilmesi.

4. Ele alınan süreç için seri şeklinde limit teoremlerinin ifade ve ispat edilmesi.

5. Yapılan çalışmada ortaya konulmuş sonuçların uygulanabileceği alanların tesbiti ve uygulanması.

6. Çalışmada ele alınan özel dağılımlar dışındaki bazı dağılımlar içinde benzer hesaplamaların yapılması.

7. Elde edilen kesin formüller ve asimptotik formüller arasındaki farkların değerlendirilmesi.

8. Sürecin ergodik dağılımının momentleri için iki terimli asimptotik açılımların elde edilmesi.

6. KAYNAKLAR

1. Afanaseva, L.G. ve Bulinskaya, E.V., 1984. Certain asymptotic results for random walks in a strip, Theory Probability and Its Applications, 29, 4, 677-693.
2. Ahmedova, H.M., 1981. The distribution of main functionals of generalized Poisson process with delaying screen, Theor. Verojatn. Mat. Satat., 20, 3-10.
3. Ahmedova, H.M., 1983. Processes with negative jumps and a positive drift, Problems of the Theory of Probability Distribution, Kiev, Collect. Sci. Works, 106-123.
4. Alsmeyer, G., 1991. Some relations between harmonic renewal measure and certain first passage times, Statistics & Probability Letters, 12, 1, 19-27.
5. Alsmeyer, G., 1992. On generalized renewal measures and certain first passage times, The Annals of Probability, 20, 3, 1229-1247.
6. Anisimov, V.V., 1995. Diffusion approximation in switching stochastic models and its applications, In: Exploring Stochastic Laws, eds.: A.V. Skorohod and Yu. V. Borovskikh, VSP, Zeist, The Netherlands, 13-40.
7. Borovkov, A.A., 1965. On the first passage time for one class of processes with independent increments, Theor. Prob. Appl., 10, 331-334.
8. Borovkov, A.A., 1976. Stochastic Process in Queuing Theory, Springer, New York.
9. Borovkov, A.A., 1984. Asymptotic Methods in Queuing Theory, J.Wiley, New York.
10. Brown, M. ve Ross, S.M., 1972. Asymptotic properties of processes, SIAM J. Appl. Math., 22, 1, 93-105.
11. Brown, M. ve Solomon, H., 1975. A second-order approximation for the variance of a renewal-reward process, Stochastic Processes and Their Appl., 3, 301-314.
12. Çinlar, E., 1975. Introduction to Stochastic Processes, Englewood Cliffs, New Jersey.
13. Çinlar, E., 1975. Markov renewal theory, Adv. Appl. Probab., 1, 123-187.
14. Dikmenoğlu, S., 1997. İki Yansıtıcı Bariyerli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreci, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
15. El-Shehawey, M.A., 1992. Limit distribution of first hitting time of delayed random walk, J. Indian. Soc. Oper. Res., 13, 1-4, 63-72.
16. Embrechts, P., Maejima, M. ve Omey, E., 1984. A renewal theorem of Blackwell type, Ann. Probab., 12, 561-570.

17. Ezhov, I.I. ve Korolyuk, V.S., 1967. Semi-Markovian processes and their applications, Cybernetics and System Analysis, 5, 58-65.
18. Ezhov, I.I. ve Shurenkov, V.M., 1976. Ergodic theorems related with the Markov property of random processes, Theory Prob. and Its Appl., 21, 3, 635-638.
19. Feller, W., 1971. An Introduction to Probability Theory and Its Applications II, 2nd Ed., Wiley, New York, 680p.
20. Federyuk, M.V., 1984. Asymptotic for Integrals and Series, Nauka, Moskow.
21. Gihman, I. I. ve Skorohod, A.V., 1975. Theory of Stochastic Processes II, Springer-Verlag, New York.
22. Greenwood, P., Omey, E. ve Teugels, J.L., 1982. Harmonic renewal measures, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 59, 391-409.
23. Grübel, R., 1986. On harmonic renewal measures, Probability Theory Related Fields, 71, 393-403.
24. Gusak, D.V., 1969. On the joint distribution of the first exit time and exit value for homogeneous process with independent increments, Theory Probability and Its Applications, 14, 14-23.
25. Gusak, D.V. ve Korolyuk, V.S., 1968. On the first passage time across a given level for processes with independent increments, Theor. Probab. Appl., 13, 448-456.
26. Harlamov, B.P., 1977. On convergence of semi-Markov walks to a continuous semi-Markov process, Theor. Probab. Appl., 21, 482-498.
27. Janson, S., 1986. Moments for first passage times, the minimum, and related quantities for random walks with positive drift, Adv. In Appl. Probab., 18, 865-879.
28. Jewell, W.S., 1967. Fluctuation of a renewal-reward process, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 19, 309-329.
29. Kastenbaum, M.A., 1966. A dialysis system with one absorbing and one semi reflecting state, Journal of Applied Probability, 3, 363-.
30. Kemperman, J.H.B., 1961. The passage problem for a stationary Markov chain, Statist. Res. Monographs, 1, Univ. of Chicago Press.
31. Kemperman, J.H.B., 1963. A Wiener-Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary, Ann. Math. Statist., 34, 1168-1193.
32. Khaniev, T.A., 1984. Distribution of a Semi- Markovian random walk with two delaying screens, Some questions of the theory stochastic processes, Kiev: Ins. Math.of Acad. Sciences of Ukraine, p.106-113.

33. Khaniev, T.A., 1986. On the processes of the Semi-Markov Walk with two delay screens, Preprint, Dep. at VINITI (Moskow) 26.02.87, No.1427-B87, 58p.
34. Khaniev, T.A., 1986. An ergodic theorem for a process of Semi-Markov walk with two delay barriers, Izv. of Acad. Sci. of Azerbaijan., Ser. Phis.-Tech. and Math. Sciences, No.4, p.37-42.
35. Khaniev, T.A., 1987. Distribution of an additive functional of a Semi-Markov walk process with two delay screens and dependent components, Asymptotic problems of the theory of stochastic processes, Kiev: Ins. Math.of Acad. Sci. of Ukraine, p.97-101.
36. Khaniev, T.A., 1988. Distribution of a process of Semi-Markov walk on a closed interval with exponentially distributed component, Izv. of Acad. Sci. of Azerbaijan., Ser. Phis.-Tech. and Math. Sciences, No. 1, p.45-50.
37. Khaniev, T.A., 1991. On the distributions of semi-continuous processes with throwing off to zero, Preprint, Dep. at VINITI (Moskow),14.02.91, No.774-B91,15 p.
38. Khaniev, T.A., 1997. On the probability characteristics of a semi-Markovian random walks with two barriers, Bulletin of the International Statistical Institute, Vol. 57, No.2, p.569-570, Voorburg, Netherlands.
39. Khaniev, T.A., 1999. Some results on a stochastic process with a discrete chance interference, Mathematical & Computational Applications, Vol.4, No.2, pp.145-152.
40. Khaniev T.A., 1999. Some problems connected with the stochastic processes with a discrete chance interference, Abstracts of 1st Turkish World Mathematics Symposium, 29 June-2 July, Elazığ, Turkey, pp.152-153.
41. Khaniev, T.A., 2000. Some asymptotic results for ergodic distribution of the semi-Markovian random walk with special barrier, Journal of Institute of Mathematics & Computer Sciences (Mathematics Series), Vol. 13, No. 2, p. 203-209, India.
42. Khaniev, T.A, 2002. About a convergence of ergodic distribution of the model of type (s,S), Transactions of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of Phys.-Tech. Math. Sciences, Vol. 21, No.3, p. 88-90, Azerbaijan.
43. Khaniev T., 2003. Investigation of the semi-Markovian random walk process with two barriers, Theory of Stochastic Processes, 10p., Kiev, Ukraine (to appear).
44. Khaniev, T., 2003. On the additive functional of a semi-Markovian random walk with two reflecting barriers, The Conference Dedicated to 90th Anniversary of B.V. Gnedenko, 2-9 June, Kyiv, Ukraine (to appear).

45. Khaniev, T.A. ve Özdemir, H., 1995. On the Laplace of Finite Dimensional Functions of Semi-Continuous Random Processes With Reflecting and Delaying Screens, *Exploring Stochastic Laws*, eds: A.V. Skorokhod, Yu.V. Borovskikh, VSP, The Netherlands, p.167-174.
46. Khaniev, T.A. ve Dikmenoğlu, S., 1996. On the ergodicity of the semi-Markov random walk process, with reflecting barriers, *Sakarya University Journal of the Faculty of Arts and Sciences (Special Issue)*, No.1, series A, p.143-154.
47. Khaniev, T.A. ve Unver, I., 1997. The study of the level zero crossing time of a semi-Markovian random walk with delaying screen, *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 21, No.3, p.257-268.
48. Khaniev, T.A. ve Aliev, S.A., 1997. On a stochastic process with two barriers arising in the theory of stock control, *Doklady of Acad. Sci. of Azerbaijan*, Vol.53, No:1, p.11-14, Baku.
49. Khaniyev, T. ve Kucuk Z., 2002. Asymptotical results for a semi-Markovian random walk in a strip, "Statistical Days" conference, 23-24 May, Ankara, Turkey.
50. Khaniyev, T. ve Kucuk Z., 2003. Wald's approximation for semi-Markovian random walk in a strip, The Conference Dedicated to 90th Anniversary of B.V. Gnedenko, 2-9 June, Kyiv, Ukraine (to appear).
51. Khaniyev, T. ve Kucuk Z., On the weak convergence of the ergodic distribution of a semi-Markovian random walk with two barriers, International Congress of Mathematicians, 20-28 August, Beijing, China (to appear).
52. Khaniev, T.A., Ünver İ. ve Maden S., 1997. On the ergodicity of a semi-Markovian random walk process with reflecting and delaying barriers, *Bulletin of the International Statistical Institute*, Vol.57, No. 2, p.245-246, Voorburg.
53. Khaniev, T.A., Unver, I. ve Dikmenoğlu, S., 1998. On the ergodicity of a semi-Markovian random walk process with two reflecting barriers, *Izv. o of Acad. Sci. of Azerbaijan., Ser. Phis. Tech. And Math. Sciences*, Vol. 17, No: 1-3, p. 76-84.
54. Khaniev, T.A., Özdemir H. ve Maden S., 1998. Calculating the probability characteristics of a boundary functional of a semi-continuous random process with reflecting and delaying screens, *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 14, p.117-123, UK.
55. Khaniev, T.A., Unver, I. ve Kucuk Z., 1998. About a semi-Markov random walk process with barrier, "Statistical Days" conference, 26-27 October, Ankara, pp.17-27.

56. Khaniev T.A., Unver İ. ve Küçük Z., 1999. On the stochastic models described by semi-Markovian random walks with described by semi-Markovian random walks with two barriers of various types, Abstracts of 1st Turkish World Mathematics Symposium, 29 June-2 July, Elazığ, Turkey, p.154-156.
57. Khaniev T.A., Unver I. ve Küçük Z., 1999, On the semi-Markovian random walk with two barriers of various types, Proceedings of the Second International Symposium on Mathematical & Computational Application, September 1-3, Baku, Azerbaijan, p.350-357.
58. Khaniev, T.A., Unver ve İ, Maden, S., 2001. On the semi-Markovian random walk with two reflecting barriers, Stochastic Analysis and Its Application, Vol.19, No.5, p.799-819, USA.
59. Kolmogorov, A.N., 1986. Theory of Probability and Mathematical Statistics, Nauka, Moscow, (in Russian).
60. Korolyuk, V.S. ve Turbin, A.F., 1976. Semi-Markov Processes and Their Applications, Naukova Dumka, Kiev, (in Russian).
61. Korolyuk, V.S. ve Borovskikh, Y.V., 1981. Analytical Problems for Asymptotics of Probability Distributions, Naukova Dumka, Kiev (in Russian).
62. Kovalenko, I.N., Kuznetsov, N. ve Shurenkov, V.M., 1983. Stochastic Processes, Naukova Dumka, Kiev, (in Russian).
62. Levy, P., 1954. Processus semi-Markoviens, Proc. III. Internat. Congr. Math., Amsterdam, 416-426.
63. Lotov, V.I., 1979. Asymptotic analysis of distributions in problems with two boundaries I-II, Theory Probab. Appl., 24, 480-491, 869-876.
64. Lotov, V.I., 1991. On the asymptotic of distributions in two-sided boundary problems for random walks defined on a Markov chain, Sib. Adv. Math., 1, 3, 26-51.
65. Lotov, V.I., 1991. On random walks within a stripe, Theory Probability and Its Applications, 36, 1, 160-165.
66. Lotov, V.I., 1996. On some boundary crossing problems for Gaussian random walks, The Annals of Probability, 24, 4, 2154-2171.
67. Lukacs, E., 1970. Characteristics Function, Griffin, London, 59p.
68. Maden, S., 1997. Yansitan ve Tutan Bariyerli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreci Üzerine, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
69. Mogulskiy, A.A., 1981. Exact asymptotic for the random walks with two-sided boundaries, Preprint of Ins. of Math. S.D. Akad. Nauk, SSSR, 22p.

70. Nasirova, T.I., 1984. Processes of Semi-Markovian Random Walk, Elm, Baku.
71. Nasirova, T.I. ve Skorohod, A.V., 1978. On a class of jump processes with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 16, 81-94.
72. Nasirova, T.I., Yapar, C. ve Khaniev, T.A., 1998. On the probability characteristics of the stock level in the model of type (s,S), Cybernetics and System Analysis, 5, 69-76.
73. Olver, F.W.J., 1974. Asymptotic and Special Functions, Academic Press, London.
74. Özdemir, H., 1996. Yansıtan ve Tutan Bariyerli Pozitif Akımlı Yarı-Markov Süreci, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
75. Prabhu, N.U., 1981. Stochastic Storage Processes, Springer-Verlag, New York.
76. Resnick, S.I., 1992. Adventures in Stochastic Processes, Birkhäuser Boston, Cambridge.
77. Rogozin, B.A., 1964. On the distribution of the first jump, Theory Probab. Appl., 9, 450-464.
78. Rogozin, B.A., 1965. On some classes of processes with independent increments, Theory Probab. Appl., 10, 479-483.
79. Ross, S.M., 1993. Introduction to Probability Models, Academic Press, New York.
80. Saaty, T.L., 1983. Elements of Queuing Theory with Applications, Dover, New York.
81. Senturia, L. ve Puri Prem, S.A., 1973. A semi-Markov storage model, Adv. App. Probab., 1, 2, 362-378.
82. Serfoza, R.F., 1971. Functions of Semi-Markov Processes, SIAM J. Appl. Math., 20, 3.
83. Shurenkov, V.M., 1989. The Ergodic Markov Processes, Nauka, Moscow.
84. Sinai, Ya.G., 1957. On the distribution of the first positive sum for a sequence of independent random variables, Theory Prob. Applications, 2, 122-129.
85. Skorohod, A.V., 1961. Additive functional from the process of Brown motion, Theory Prob. and Appl., 5, 2, 430-439.
86. Skorohod, A.V. ve Slobedenyuk, N.P., 1970. Limit Theorems for The Random Walks, Naukova Dumka, Kiev, 302p.
87. Skorohod, A.V. ve Nasirova, T.I., 1981. On the asymptotic behaviour of processes in an inventory control model, Theory. Probab. Math. Stat., 23, 137-142.

88. Smith, W.L., 1958. Renewal theory and its ramifications, Journal of Royal Statistic Society, 20, 243-302.
89. Spitzer, F., 1956. A combinatorial lemma and its applications to probability theory, Trans. Amer. Math. Soc., 82, 323-339.
90. Spitzer, F., 1960. A Tauberian theorem and its probability interpretation, Trans. Amer. Math. Soc., 94, 150-169.
91. Spitzer, F., 1964. Principles of Random Walk, Van Nostrand, Princeton, 406p.
92. Takacs L., 1966. Stochastic Processes: Problems and Solutions, J. Wiley, New York.
93. Takacs, L., 1977. Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes, Huntington, New York.
94. Unver, I., 1977. On distributions of the semi-Markovian random walk with reflecting and delaying barriers, Bulletin of Calcutta Math. Society, 89, 231-242.
95. Weesakul, B., 1961. The random walk between a reflecting and an absorbing barrier, Ann. Math. Statist., 23, 765-.
96. Zhang, Y.L., 1992. Some problems on a one dimensional correlated random walk with various types of barrier, Journal of Applied Probability, 29, 196-201.
97. Zolotarev, V.M., Korolyuk V.S., 1960. On a new method in random walk problems on a half-line, Theory Prob. Applications, 5, 236-238.

EKLER

EK-1. İki taraflı üstel dağılım durumunda verilmiş beta ve lamda değerleri için ergodik dağılımın beklenen değer ve varyansının simülasyon yöntemleriyle ile test edilmesine ait bilgisayar programı

```
unit form1pas;
interface
uses
    Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
    Dialogs, StdCtrls, ExtCtrls, Gauges, Grids;
const
    m=1000000;
    Betalar:array [0..9] of integer=(1,2,3,4,5,60,70,80,90,100);
    lamdalar:array [1..9] of single=(1,2,3,5,10,1/2,1/3,1/5,1/10);
type
    TForm1 = class(TForm)
        StringGrid1: TStringGrid;
        Label1: TLabel;
        Button1: TButton;
        RadioGroup1: TRadioGroup;
        RadioGroup2: TRadioGroup;
        OpenDialog1: TOpenDialog;
        Button2: TButton;
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure AktiflikAyarla(Deger: Boolean);
    procedure RastgeleSayi(var x1,x2:Extended);
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure OrtalamaAl;
    procedure DurumuKaydet;
    procedure islemyap(basl:integer);
    procedure GeriYukle;
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
    private
        lamda, beta:single;
        etta:array of double;
        n:integer;
    public
        { Public declarations }
    end;
var Form1: TForm1;
implementation
uses Math;
{$R *.dfm}
procedure TForm1.AktiflikAyarla(Deger: Boolean);
begin
    Button1.Enabled:=Deger;
end;
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
    islemyap(1);
end;
procedure TForm1.RastgeleSayi(var x1,x2:Extended);
var x:extended;
begin
    x:=random;
    x1:=(-1)*(1/lamda)*ln(1-x); x:=random; x2:=(-1)*(1/lamda)*ln(1-x);
```

```

end;
procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
begin
    StringGrid1.Cells[0,1]:= '1. Deneme';
    StringGrid1.Cells[0,2]:= '2. Deneme';
    StringGrid1.Cells[0,3]:= '3. Deneme';
    StringGrid1.Cells[0,4]:= '4. Deneme';
    StringGrid1.Cells[0,5]:= '5. Deneme';
    StringGrid1.Cells[0,6]:= '6. Deneme';
    StringGrid1.Cells[0,7]:= '7. Deneme';
    StringGrid1.Cells[0,8]:= '8. Deneme';
    StringGrid1.Cells[0,9]:= '9. Deneme';
    StringGrid1.Cells[0,10]:= '10. Deneme';
    StringGrid1.Cells[0,11]:= 'Ortalamalar';
    StringGrid1.Cells[1,0]:= 'E(X)';
    StringGrid1.Cells[2,0]:= 'E^2(X)';
    StringGrid1.Cells[3,0]:= 'Fark';
    StringGrid1.Cells[4,0]:= 'Oran';
    StringGrid1.Cells[5,0]:= 'V(X)';
    StringGrid1.Cells[6,0]:= 'VT(X)';
    StringGrid1.Cells[7,0]:= 'Fark';
    StringGrid1.Cells[8,0]:= 'Oran';
end;
procedure TForm1.OrtalamaAl;
var i,j:integer;
    toplam1,toplam2,toplam3,toplam4,toplam5,toplam6:double;
    str:string;
begin
    StringGrid1.Cells[1,11]:=Format('%0.6f',[beta/2]);
    StringGrid1.Cells[5,11]:=StringGrid1.Cells[5,10];
    toplam1:=0;
    toplam2:=0;
    toplam3:=0;
    toplam4:=0;
    toplam5:=0;
    toplam6:=0;
for i:=1 to 10 do
begin
        toplam1:=toplam1+StrToFloat(StringGrid1.Cells[2,i]);
        toplam2:=toplam2+StrToFloat(StringGrid1.Cells[3,i]);
        str:=StringGrid1.Cells[4,i]; delete(str,1,1);
        toplam3:=toplam3+StrToFloat(str);
        toplam4:=toplam4+StrToFloat(StringGrid1.Cells[6,i]);
        toplam5:=toplam5+StrToFloat(StringGrid1.Cells[7,i]);
        str:=StringGrid1.Cells[8,i]; delete(str,1,1);
        toplam6:=toplam6+StrToFloat(str);
end;
    StringGrid1.Cells[2,11]:=Format('%0.6f',[toplam1/10]);
    StringGrid1.Cells[3,11]:=Format('%0.6f',[toplam2/10]);
    StringGrid1.Cells[4,11]:=Format('%0.6f',[toplam3/10]);
    StringGrid1.Cells[6,11]:=Format('%0.6f',[toplam4/10]);
    StringGrid1.Cells[7,11]:=Format('%0.6f',[toplam5/10]);
    StringGrid1.Cells[8,11]:=Format('%0.6f',[toplam6/10]);
end;
procedure TForm1.DurumuKaydet;
var yol,str:string; i,j:integer; dosya:TextFile;
begin
    yol:=ExtractFilePath(Application.ExeName);
    yol:=yol+'Veri'+inttostr(RadioGroup1.ItemIndex);

```

```

if RadioGroup2.ItemIndex=9 then
    yol:=yol+'Lamda'+FloatToStrF(lamda,ffGeneral,2,0)
else
    yol:=yol+'Lamda'+inttostr(RadioGroup2.ItemIndex);
    yol:=yol+'.csv';
    AssignFile(dosya,yol);
try
    str:='Beta;'+floattostr(beta)+';Lamda;'+floattostr(lamda);
    Rewrite(dosya);
    Writeln(dosya,str);
for i:=0 to StringGrid1.RowCount-1 do
begin
    str:='';
for j:=0 to StringGrid1.ColCount-1 do
    str:=str+StringGrid1.Cells[j,i]+';';
    delete(str,length(str),1);
    Writeln(dosya,str);
end;
finally
    CloseFile(dosya);
end; end;
procedure TForm1.islemyap(basl: integer);
var ort,gvary,vary,y:Extended; x1,x2,x:Extended;
    i,j,k,l,b:integer;
    t:int64;
    yol,str:string;
    counter:Cardinal;
    kalanzaman:int64;
begin
    AktiflikAyarla(false);
    setlength(etta,m);
    Randomize;
try
    if RadioGroup2.ItemIndex<>9 then
        lamda:=lamdalar[RadioGroup2.ItemIndex+1];
for l:=1 to 9 do
begin
    beta:=betalar[RadioGroup1.ItemIndex];
if RadioGroup2.ItemIndex=9 then
    lamda:=lamdalar[l];
if lamda<1 then
    n:=40000
else
    n:=10000;
for k:=basl to 10 do
begin
    Label1.Caption:=format('%d. Deneme (Beta=%3.2f,Lamda=%3.3f)',[k,beta,lamda]);
    Label1.Refresh;
    counter:=GetTickCount;
for j:=0 to m-1 do
begin
    etta[j]:=beta / 2;
for i:=1 to n do
begin
    RastgeleSayi(x1,x2);
    etta[j]:=etta[j]+(x1-x2);
if (etta[j]>beta) or (etta[j]<0) then etta[j]:=beta/2;
end;
if ((j mod 50)=0) and (j>0) then

```

```

begin
  b:=GetTickCount-counter;
  kalanzaman:=(int64(m)*b) div j;
  kalanzaman:=kalanzaman-b;
  kalanzaman:=kalanzaman div 1000;
  b:=kalanzaman div 60;
  kalanzaman:=kalanzaman mod 60;
  label1.Caption:=Format('Kalan Zaman=%02d:%02d:%02d sn, %d',[b div 60,b mod 60,kalanzaman,j]);
  label1.Refresh;
end; end;
  MeanAndStdDev(etta,ort,vary);
  vary:=sqr(vary);
  gvary:=Power(beta/2,3)*((beta/2)+(4*(1/lamda)));
  gvary:=gvary/(6*(sqr(beta/2)+(beta*(1/lamda))+(2*sqr(1/lamda))));
  StringGrid1.Cells[1,k]:=Format('%0.6f',[beta/2]);
  StringGrid1.Cells[2,k]:=format('%0.6f,[ort]);
  StringGrid1.Cells[3,k]:=Format('%0.6f,[beta/2)-ort]);
  StringGrid1.Cells[4,k]:=Format('%0.6f,[abs((beta/2)-ort)/(beta/2)*100]);
  StringGrid1.Cells[5,k]:=Format('%0.6f,[gvary]);
  StringGrid1.Cells[6,k]:=Format('%0.6f,[vary]);
  StringGrid1.Cells[7,k]:=Format('%0.6f,[gvary-vary]);
  StringGrid1.Cells[8,k]:=Format('%0.6f,[ABS(gvary-vary)*100/gvary]);
  StringGrid1.Refresh;
  DurumuKaydet;
end;
  OrtalamaAl;
  DurumuKaydet;
  StringGrid1.Refresh;
if RadioGroup2.ItemIndex<>9 then break;
end;
finally
  AktiflikAyarla(true);
end; end;
procedure TForm1.GeriYukle;
var dosya:TextFile;
    str:string;
    strlist:TStringList;
    p:integer; sat:integer;
begin
  if OpenFileDialog1.Execute then
begin
  AssignFile(dosya,OpenDialog1.FileName);
  strlist:=TStringList.Create;
  try
  reset(dosya);
  Readln(dosya,str);
while str<>' ' do
begin
  p:=pos(';',str);
if p<>0 then begin
  strlist.Add(copy(str,1,p-1));
  Delete(str,1,p);
end
else
begin
  strlist.Add(str);
  str:="";
end;
end;

```

```

        beta:=StrToFloat(strlist[1]);
    for p:=0 to 9 do
    if Betalar[p]=beta then
        RadioGroup1.ItemIndex:=p;
        lamda:=StrToFloat(strlist[3]);
    for p:=1 to 9 do
    if lamdalar[p]=lamda then
        RadioGroup2.ItemIndex:=p-1;
        readln(dosya,str);
        sat:=1;
    while not Eof(dosya) do
    begin
        readln(dosya,str);
        strlist.Clear;
    while str<>" do
    begin
        p:=pos(';',str);
    if p<>0 then begin
        strlist.Add(copy(str,1,p-1));
        Delete(str,1,p);
    end
    else
    begin
        strlist.Add(str);
        str:="";
    end; end;
        StringGrid1.Cells[1,sat]:=strlist[1];
        StringGrid1.Cells[2,sat]:=strlist[2];
        StringGrid1.Cells[3,sat]:=strlist[3];
        StringGrid1.Cells[4,sat]:=strlist[4];
        StringGrid1.Cells[5,sat]:=strlist[5];
        StringGrid1.Cells[6,sat]:=strlist[6];
        StringGrid1.Cells[7,sat]:=strlist[7];
        StringGrid1.Cells[8,sat]:=strlist[8];
        inc(sat);
    end;
    finally
        CloseFile(dosya);
        strlist.Destroy;
    end; end;
        islemyap(sat);
    end;
    procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
    begin
        GeriYukle;
    end; end.

```

EK-2. İki taraflı üstel dağılım durumunda elde edilen verilere göre grafiklerin çizilmesine ait bilgisayar programı

```

<?
for($i=0;$i<=8;$i++)
{
    for($b=0;$b<=9;$b++)
    {
        $string="Veri".$b."Lamda".$i.".csv";
        $fp=fopen("BETA=".$b*10)."/".$string,"r");

        for($k=0;$k<=12;$k++){ $satir[$k]=fgets($fp); }
        $sele=explode(";", $satir[$k-1]);

        $EX[$i][$b]=$sele[1];
        $EX1[$i][$b]=$sele[2];
        $fEX[$i][$b]=$sele[3];
        $oEX[$i][$b]=$sele[4];
        $VX[$i][$b]=str_replace(",",".", $sele[5]);
        $var[$b]=$VX[$i][$b];
        $VTX[$i][$b]=str_replace(",",".", $sele[6]);
        $vart[$b]=$VTX[$i][$b];
        $fVX[$i][$b]=$sele[7];
        $oVX[$i][$b]=$sele[8];

        settype($VX[$i][$b],"double");settype($VTX[$i][$b],"double");
    }
    fclose($fp);
    $VMAX[$i]=max($var);
    settype($VMAX[$i],"double");

    $VTMAX[$i]=str_replace(",",".",max($vart));
    settype($VTMAX[$i],"double");
}
$i=8;
$genislik=465;
$yukseklk=240;

$simaj=imagecreate($genislik,$yukseklk);

$siyah=imagecolorallocate($simaj,0,0,0);
$beyaz=imagecolorallocate($simaj,255,255,255);
$mavi=imagecolorallocate($simaj,0,0,255);
$pembe=imagecolorallocate($simaj,250,0,200);

imagefill($simaj,0,0,$beyaz);

imageline($simaj,40,0,40,$yukseklk,$siyah);
imageline($simaj,40,0,37,5,$siyah);
imageline($simaj,40,0,43,5,$siyah);
imageline($simaj,30,$yukseklk-13,430,$yukseklk-13,$siyah);
imageline($simaj,430,$yukseklk-13,427,$yukseklk-16,$siyah);
imageline($simaj,430,$yukseklk-13,427,$yukseklk-10,$siyah);

for($j=1;$j<=10;$j++){
    imagestring($simaj,2,40+(37*$j),$yukseklk-11,$j*10,$siyah);
}

```

```

imagestring($simaj,2,32,$yukseklk-11,"0",$siyah);
imagestring($simaj,1,1,1,"VAR(X)",$siyah);
imagestring($simaj,1,1,14,$VMAX[$i],$siyah);
imagestring($simaj,2,433,$yukseklk-11,"Beta",$siyah);

$xeski=40+37;
$yeski=($yukseklk-23)-(((yukseklk-23)*$VX[$i][0])/$VMAX[$i])+10;
$yeski1=($yukseklk-23)-(((yukseklk-23)*$VTX[$i][0])/$VTMAX[$i])+10;

for($j=1;$j<=9;$j++){
  $x=40+(37*($j+1));

  $y=($yukseklk-23)-(((yukseklk-23)*$VX[$i][$j])/$VMAX[$i])+10;
  $y1=($yukseklk-23)-(((yukseklk-23)*$VTX[$i][$j])/$VTMAX[$i])+10;

  if (abs($VX[$i][$j]-$VTX[$i][$j])>0.01) {
    if ($VX[$i][$j]>$VTX[$i][$j]){ $y1=$y1-4; }
    else { $y1=$y1+4; }
  }
  else if ((abs($VX[$i][$j]-$VTX[$i][$j])<=0.01)&&
    (abs($VX[$i][$j]-$VTX[$i][$j])>0.001))
  {
    if ($VX[$i][$j]>$VTX[$i][$j]){ $y1=$y1-3; }
    else { $y1=$y1+3; }
  }
  else if ((abs($VX[$i][$j]-$VTX[$i][$j])<=0.001)&&
    (abs($VX[$i][$j]-$VTX[$i][$j])>0.0001))
  {
    if ($VX[$i][$j]>$VTX[$i][$j]){ $y1=$y1-2; }
    else { $y1=$y1+2; }
  }
  else if (abs($VX[$i][$j]-$VTX[$i][$j])<=0.0001) {
    if ($VX[$i][$j]>$VTX[$i][$j]){ $y1=$y1-1; }
    else { $y1=$y1+1; }
  }

  imageline($simaj,$xeski,$yeski,$x,$y,$pembe);
  imageline($simaj,$xeski,$yeski1,$x,$y1,$mavi);

  $xeski=$x;
  $yeski=$y;$yeski1=$y1;
}

header("Content-type:image/jpeg");
imagejpeg($simaj);
imagedestroy($simaj);

?>

```


EK-3. Normal dağılım durumunda sabitlerin elde edilmesine ait bilgisayar programı

```

unit form1pas;
interface
uses
    Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
    Dialogs, StdCtrls, TeEngine, Series, ExtCtrls, TeeProcs, Chart, Grids, math;
const
    BetaAlt=0;
    wtAlt=-1;
    n:cardinal=10000;
    EtiketBasligi='%d:%d:%d süre kaldı';
type
    TForm1 = class(TForm)
        Panel1: TPanel;
        Panel2: TPanel;
        StringGrid1: TStringGrid;
        Panel4: TPanel;
        Label1: TLabel;
        Button1: TButton;
        Button2: TButton;
        Splitter3: TSplitter;
        Label2: TLabel;
        ComboBox1: TComboBox;
        Label3: TLabel;
        ComboBox2: TComboBox;
        Splitter6: TSplitter;
        StringGrid2: TStringGrid;
        Label4: TLabel;
        Edit1: TEdit;
        Label5: TLabel;
        Edit2: TEdit;
        Label6: TLabel;
        Edit3: TEdit;
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
    private
    procedure RastgeleSayi(var x1,x2:Extended);
    procedure IslemYap;
    procedure AddToArray(beta:extended);
    procedure Sifirla;
    procedure GridBasligi;
    procedure GridGuncelle;
    function F(x:extended):Extended;
    function F1(x:extended):Extended;
    function F2(x:extended):Extended;
    function F3(x:extended):Extended;
    function q(x:extended):Extended;
    function q1(x:extended):Extended;
    function q2(x:extended):Extended;
    function QW(x:Extended):Extended;
    function G1(x:Extended):Extended;
    function G2(x:Extended):Extended;
    function G3(x:Extended):Extended;
    function QWD(x:Extended):Extended;
    function EFBul(index:integer):Extended;
    function RunningwtBul(index:integer):Extended;
    function RealVaryans(Beta,lamda:extended):Extended;
    function RealOrtalama(Beta:Extended):Extended;
    end;
end;

```

```

Procedure Alfalar(var a1,a2,a3:Extended);
procedure BetaLamda;
public
    BetaAraliklar:array of double;
    betadag:array of double;
    wtdag:array of double;
    wtAraliklar:array of double;
    lamda:extended;
    Beta:extended;
    a:Extended;
    m:int64;
    toplam,karetoplam:extended;
    toplam1,karetoplam1:extended;
    EX1,VX1,EX2,VX2:extended;
end;
var
    Form1: TForm1;
implementation
    {$R *.dfm}
    { TForm1 }
procedure TForm1.RastgeleSayi(var x1, x2: Extended);
var
    x:extended;
begin
    x:=random;
    x1:=(-1)*(1/lamda)*ln(1-x);
    x:=random;
    x2:=(-1)*(1/lamda)*ln(1-x);
end;
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
if (ComboBox1.ItemIndex<0) or (ComboBox2.ItemIndex<0) then
raise Exception.Create('Gerekli Bilgileri Tam Olarak Girmelisiniz');
    BetaLamda;
    IslemYap;
end;
procedure TForm1.IslemYap;
var
    startnokta:extended;
    i,j:integer;
    basl:int64;
    gecen:int64;
    kalan:cardinal;
    x,y:extended;
    s,d,sn:Cardinal;
begin
    Sifirla;
    SetLength(betadag,length(BetaAraliklar));
    SetLength(wtdag,length(wtAraliklar));
    Sifirla;
    basl:=GetTickCount;
    Randomize;
    toplam:=0;toplam1:=0;
    karetoplam:=0;karetoplam1:=0;
for i:=1 to m do
    {0}begin
        startnokta:=a;
for j:=1 to n do
        {1}begin

```

```

RastgeleSayi(x,y);
startnokta:=startnokta+(x-y);
if (startnokta>Beta) or (startnokta<0) then
startnokta:=a;
{1} end;
toplaml:=toplaml+startnokta;
karetoplaml:=karetoplaml+(startnokta*startnokta);
AddToArray(startnokta);
gecen:=GetTickCount-basl;
kalan:=(m*gecen) div i;
kalan:=kalan-gecen;
kalan :=kalan div 1000;
d:=kalan div 60;
sn:=Kalan mod 60;
s:=d div 60;
d:=d mod 60;
Label1.Caption:=Format(EtiketBasligi,[s,d,sn]);
label1.Refresh;
{0} end;
EX1:=toplaml/m;
VX1:=karetoplaml/m-(EX1*EX1);
GridBasligi;
GridGuncelle;
Button2.Click;
end;
procedure TForm1.AddToArray(beta: extended);
label
farkhes;
var
i:integer;
fark:extended;
begin
if beta<BetaAlt then goto farkhes;
for i:=0 to Length(BetaAraliklar)-1 do
begin
if beta<betaAraliklar[i] then
begin
betadag[i]:=betadag[i]+1;
break;
end;
end;
end;
farkhes:
fark:=beta-a;
fark:=fark/a;
if fark<wtAlt then exit;
for i:=0 to length(wtAraliklar)-1 do
begin
if fark<wtAraliklar[i] then
begin
wtdag[i]:=wtdag[i]+1;
break;
end;
end;
end;
end;
end;
procedure TForm1.Sifirla;
var
i:integer;
asay:integer;
artim:Double;

```

```

        kusur:Double;
begin
    for i:=0 to Length(wtdag)-1 do
        wtdag[i]:=0;
    for i:=0 to Length(betadag)-1 do
        betadag[i]:=0;
    asay:=StrToIntDef(Edit1.Text,10);
    setlength(BetaAraliklar,asay);
    artim:=Beta/asay;
    for i:=1 to asay do
        BetaAraliklar[i-1]:=artim*i;
        asay:=StrToIntDef(Edit3.Text,20);
        SetLength(wtAraliklar,asay);
        wtAraliklar[0]:=wtAlt+2/asay;
    for i:=1 to asay-1 do
    begin
        wtAraliklar[i]:=wtAraliklar[0]+i*(2/asay);
        kusur:=frac(wtAraliklar[i]);
        kusur:=kusur*asay;
        kusur:=abs(kusur);
    if (kusur>=0) and (kusur<=0.00000001) then
        wtAraliklar[i]:=Round(wtAraliklar[i]*asay)/asay;
    end;
    m:=StrToIntDef(Edit2.Text,10000000);
end;
procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
var
    f:TextFile;
    i,j:integer;
begin
    AssignFile(f,ExtractFilePath(Application.ExeName)+'Betalar.csv');
    try
        rewrite(f);
    for i:=0 to StringGrid1.RowCount-1 do
    begin
        for j:=0 to StringGrid1.ColCount-1 do
            Write(f,stringgrid1.cells[j,i],',');
            Writeln(f,'');
        end;
    finally
        CloseFile(f);
    end;
    AssignFile(f,ExtractFilePath(Application.ExeName)+'wtler.csv');
    try
        rewrite(f);
    for i:=0 to StringGrid2.RowCount-1 do
    begin
        for j:=0 to StringGrid2.ColCount-1 do
            Write(f,stringgrid2.cells[j,i],',');
            Writeln(f,'');
        end;
    finally
        CloseFile(f);
    end;
end;
end;
procedure TForm1.GridBasligi;
begin
    StringGrid1.Cells[0,0]:='X(t) nin değeri';
    StringGrid1.Cells[1,0]:='Teorik';

```

```

StringGrid1.Cells[2,0]:='Simülasyon';
StringGrid1.Cells[3,0]:='F1(x)';
StringGrid1.Cells[4,0]:='Delta Sim-Teo (%)';
StringGrid1.Cells[5,0]:='Delta F1(x)-Teo (%)';
StringGrid1.Cells[6,0]:='Delta F1(x)-Simülasyon (%)';
StringGrid2.Cells[0,0]:='w(t) nin değeri';
StringGrid2.Cells[1,0]:='Teorik';
StringGrid2.Cells[2,0]:='Simülasyon';
StringGrid2.Cells[3,0]:='G1(x)';
StringGrid2.Cells[4,0]:='Delta Sim-Teo (%)';
StringGrid2.Cells[5,0]:='Delta G1(x)-Teo (%)';
StringGrid2.Cells[6,0]:='Delta G1-Simülasyon (%)';
end;
procedure TForm1.GridGuncelle;
var
    i:integer;
    ep,d,x,fx,fx1:extended;
    d1,d2,a1,a2,a3:extended;
begin
    StringGrid1.RowCount:=length(betadag)+3;
for i:=1 to StringGrid1.RowCount-3 do
begin
if i=1 then
begin
    x:=(betaaraliklar[0]);
    fx:=f(betaaraliklar[0]);
    fx1:=(Betaaraliklar[0]);
end
else
begin
    x:=betaaraliklar[i-1];
    fx:=f(betaaraliklar[i-1]);
    fx1:=q(betaaraliklar[i-1]);
end;
end;
    StringGrid1.Cells[0,i]:=FloatToStr(x);
    StringGrid1.Cells[1,i]:=Format('%0.6f',[fx]);
    StringGrid1.Cells[2,i]:=Format('%0.6f',[efbul(i-1)]);
    StringGrid1.Cells[3,i]:=Format('%0.6f',[F1(x)]);
    d:=(fx-(efbul(i-1)))/fx;
    d:=d*100;
    d:=abs(d);
    StringGrid1.Cells[4,i]:=Format('%0.6f',[d]);
    d:=(fx-f1(x))/fx;
    d:=d*100;
    d:=abs(d);
    StringGrid1.Cells[5,i]:=Format('%0.6f',[d]);
    d:=(efbul(i-1)-f1(x))/efbul(i-1);
    d:=d*100;
    d:=abs(d);
    StringGrid1.Cells[6,i]:=Format('%0.6f',[d]);
end;
    StringGrid1.Cells[1,StringGrid1.RowCount-2]:='E(X)';
    StringGrid1.Cells[2,StringGrid1.RowCount-2]:='Ê(X)';
    StringGrid1.Cells[3,StringGrid1.RowCount-2]:='Fark';
    StringGrid1.Cells[4,StringGrid1.RowCount-2]:='Oran (%)';
    StringGrid1.Cells[5,StringGrid1.RowCount-2]:='V(X)';
    StringGrid1.Cells[6,StringGrid1.RowCount-2]:='VT(X)';
    StringGrid1.Cells[7,StringGrid1.RowCount-2]:='Fark';
    StringGrid1.Cells[8,StringGrid1.RowCount-2]:='Oran (%)';

```

```

StringGrid1.Cells[1,StringGrid1.RowCount-1]:=Format('%0.6f',[RealOrtalama(Beta)]);
StringGrid1.Cells[2,StringGrid1.RowCount-1]:=Format('%0.6f',[EX1]);
StringGrid1.Cells[3,StringGrid1.RowCount-1]:=Format('%0.6f',[abs(RealOrtalama(beta)-EX1)]);
StringGrid1.Cells[4,StringGrid1.RowCount-1]:=Format('%0.6f',[100*ABS(RealOrtalama(Beta)-
EX1)/RealOrtalama(Beta)]);
StringGrid1.Cells[5,StringGrid1.RowCount-1]:=Format('%0.6f',[RealVaryans(Beta,lamda)]);
StringGrid1.Cells[6,StringGrid1.RowCount-1]:=Format('%0.6f',[VX1]);
StringGrid1.Cells[7,StringGrid1.RowCount-1]:=Format('%0.6f',[abs(RealVaryans(beta,lamda)-
VX1)]);
StringGrid1.Cells[8,StringGrid1.RowCount-
1]:=Format('%0.6f',[100*ABS(RealVaryans(beta,lamda)-VX1)/RealVaryans(Beta,lamda)]);
StringGrid2.RowCount:=length(wtdag)+1;
for i:=1 to StringGrid2.RowCount-1 do
begin
if i=1 then
begin
x:=wtaraliklar[0];
fx:=QW(wtaraliklar[0]);
end
else
begin
x:=wtaraliklar[i-1];
fx:=QW(wtaraliklar[i-1]);
end;
StringGrid2.Cells[0,i]:=Format('%0.6f',[x]);
StringGrid2.Cells[1,i]:=Format('%0.6f',[fx]);
StringGrid2.Cells[2,i]:=Format('%0.6f',[RunningwtBul(i-1)]);
StringGrid2.Cells[3,i]:=Format('%0.6f',[QWD(wtaraliklar[i-1])]);
d:=abs(fx-QWD(wtaraliklar[i-1]))/fx;
StringGrid2.Cells[5,i]:=Format('%0.6f',[d*100]);
d:=abs(RunningwtBul(i-1)-fx)/fx;
StringGrid2.Cells[4,i]:=Format('%0.6f',[d*100]);
d:=abs(QWD(wtaraliklar[i-1])-RunningwtBul(i-1))/RunningwtBul(i-1);
d1:=QWD(wtaraliklar[i-1]);
d2:=QW(wtaraliklar[i-1]);
StringGrid2.Cells[6,i]:=Format('%0.6f',[d*100]);
end;
end;
procedure TForm1.Alfalar(var a1, a2, a3: Extended);
var
payda:extended;
begin
a1:=(a*lamda)*(a*lamda);
payda:=(a1+(2*a*lamda)+2);
a1:=a1/payda;
a2:=(2*a*lamda)/payda;
a3:=2/payda;
end;
function TForm1.F1(x: extended): Extended;
begin
if x<0 then Result:=0
else if x<a then
Result:=(x*x)/(2*a*a)
else if x<beta then
result:=1-(((2*a-x)*(2*a-x))/(2*a*a))
else Result:=1;
end;
function TForm1.F2(x: extended): Extended;
begin

```

```

    if x<0 then Result:=0
else if x<beta then result:=(x)/(2*a)
    else result:=1;
end;
function TForm1.F3(x: extended): Extended;
begin
    if x<=a then result:=0 else result:=1;
end;
function TForm1.F(x: extended): Extended;
var
    a1,a2,a3:extended;
begin
    Alfalar(a1,a2,a3);
    result:=a1*F1(x)+a2*F2(x)+a3*F3(x);
end;
function TForm1.EFBul(index: integer): Extended;
var
    i:integer;
begin
    result:=0;
    if index=0 then result:=betadag[index]/m
else
    for i:=0 to index do
        result:=result+betadag[i]/m;
end;
function TForm1.RunningwtBul(index: integer): Extended;
var
    i:integer;
begin
    result:=0;
    if index=0 then result:=wtdag[index]/m
else
    for i:=0 to index do
        result:=result+wtdag[i]/m;
end;
procedure TForm1.BetaLamda;
var
    atr:string;
    lst:TStringList;
begin
    Beta:=StrToFloat(ComboBox1.Items[ComboBox1.itemindex]);
    a:=Beta/2;
    atr:=ComboBox2.Items[ComboBox2.itemindex];
    lst:=TStringList.Create;
try
    lst.Delimiter:='/';
    lst.DelimitedText:=atr;
    if lst.Count=1 then
        lamda:=StrToFloat(lst[0])
    else
        lamda:=StrToFloat(lst[0])/StrToFloat(lst[1]);
finally
    lst.Free;
end;
end;
function TForm1.G1(x: Extended): Extended;
begin
    if x<-1 then Result:=0
    else if x<0 then Result:=((x+1)*(x+1))/2

```

```

    else if x<1 then Result:=1-(((1-x)*(1-x))/2)
else Result:=1;
end;
function TForm1.G2(x: Extended): Extended;
begin
    if x<-1 then Result:=0
    else if x<1 then Result:=((x+1))/2
    else Result:=1;
end;
function TForm1.G3(x: Extended): Extended;
begin
    if x<=0 then Result:=0 else Result:=1;
end;
function TForm1.QW(x: Extended): Extended;
var
    a1,a2,a3:Extended;
begin
    Alfalar(a1,a2,a3);
    Result:=a1*G1(x)+a2*G2(x)+a3*G3(x);
end;
function TForm1.QWD(x: Extended): Extended;
begin
    result:=g1(x);
end;
function TForm1.q(x: extended): Extended;
var
    a1,a2,a3:extended;
begin
    alfalar(a1,a2,a3);
    Result:=a1*q1(x)+a2*q2(x);
end;
function TForm1.q1(x: extended): Extended;
begin
    if x<0 then Result:=0
    else if x<a then Result:=x/(a*a)
    else if x<Beta then Result:=(2*a-x)/(a*a)
    else Result:=0;
end;
function TForm1.q2(x: extended): Extended;
begin
    if x<0 then Result:=0
    else if x<beta then result:=1/(2*a)
    else Result:=0;
end;
function TForm1.RealVaryans(Beta, lamda: extended): Extended;
begin
    Result:=Power(beta/2,3)*((beta/2)+(4*(1/lamda)));
    Result:=Result/(6*(sqr(beta/2)+(beta*(1/lamda))+(2*sqr(1/lamda))));
end;
function TForm1.RealOrtalama(Beta: Extended): Extended;
begin
    result:=Beta/2;
end;
end.

```


EK-4. η_1 rasgele değişkeninin normal dağılıma sahip olduğu durumda sınır fonksiyonlarının momentlerinin hesaplanması için kullanılan bilgisayar programı

```

unit form1pas;
interface
uses
    Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
    Dialogs, StdCtrls, TeEngine, Series, ExtCtrls, TeeProcs, Chart, Grids, math;
const
    n:cardinal=20000;
    EtiketBasligi='%d:%d:%d süre kaldı';
type
    TForm1 = class(TForm)
    Panel4: TPanel;
    Label1: TLabel;
    Label2: TLabel;
    Label3: TLabel;
    Label5: TLabel;
    Button1: TButton;
    Button2: TButton;
    ComboBox1: TComboBox;
    ComboBox2: TComboBox;
    Edit2: TEdit;
    Label4: TLabel;
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
    private
    procedure RastgeleSayi(var x1,x2:Extended);
    procedure IslemYap;
    procedure Sifirla;
    procedure Betasigma;
    public
    sigma:extended;
    Beta:extended;
    a:Extended;
    m:int64;
    toplam,karetoplam:int64;
    t31,t41:extended;
    toplam1,karetoplam1,t32,t42:extended;
    EN1,VN1,EN2,VN2,en3,en4:extended;
    a1,a2,a3,a4,b1,b2,b3,b4,z,v:extended;
    end;
var
    Form1: TForm1;
implementation
    {$R *.dfm}
    { TForm1 }
    procedure TForm1.RastgeleSayi(var x1, x2: Extended);
    var
        x,x3:extended;
    begin
        x:=1-random;
        x3:=1-random;
        x1:=sqrt(-2*Ln(x))*cos(2*pi*x3);
        x1:=sigma*x1;
    end;
    procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
    begin

```

```

    if (ComboBox1.ItemIndex<0) or (ComboBox2.ItemIndex<0) then
        raise Exception.Create('Gerekli Bilgileri Tam Olarak Girmelisiniz');
    Betasigma;
    IslemYap;
end;
procedure TForm1.IslemYap;
var
    startnokta:extended;
    i,j:integer;
    basl:int64;
    gecen:int64;
    kalan:cardinal;
    x1,p,q,y,t:extended;
    s,d,sn:Cardinal;
    k1,l1:extended;
    sn1,sn2,sn3,sn4,k2,l2:extended;
begin
    Sifirla;
    basl:=GetTickCount;
    Randomize;
    t:=a/sigma;
    p:=a/sigma;
    p:=p*p;
    q:=a*a;
    a1:=0;a2:=0;a3:=0;a4:=0;
    b1:=0;b2:=0;b3:=0;b4:=0;
    toplam:=0;toplam1:=0;
    karetoplam:=0;karetoplam1:=0;
    t31:=0;t41:=0;t32:=0;t42:=0;
    for i:=1 to m do
        {0}begin
            startnokta:=a;
            j:=1;
        while true do
            {1}begin
                RastgeleSayi(x1,y);
                startnokta:=startnokta+x1;
            if (startnokta>Beta) or (startnokta<0) then begin
                break;
            end;
                inc(j);
            {1}end;
            inc(j);
            z:=j/p;
            v:=(startnokta-a)/q;
            a1:=a1+z/m;
            a2:=a2+(z*z)/m;
            a3:=a3+(z*z*z)/m;
            a4:=a4+(z*z*z*z)/m;
            b1:=b1+v/m;
            b2:=b2+(v*v)/m;
            b3:=b3+(v*v*v)/m;
            b4:=b4+(v*v*v*v)/m;
            gecen:=GetTickCount-basl;
            kalan:=(m*gecen) div i;
            kalan:=kalan-gecen;
            kalan:=kalan div 1000;
            d:=kalan div 60;
            sn:=Kalan mod 60;
        end;
    end;
end;

```

```

s:=d div 60;
d:=d mod 60;
Label1.Caption:=Format(EtiketBasligi,[s,d,sn]);
label1.Refresh;
{0}end;
EN1:=a1*p;
EN2:=a2*p*p;
en3:=a3*p*p*p;
en4:=a4*p*p*p*p;
VN1:=EN2-(EN1*EN1);
k1:=EN1/t;
k1:=k1-t;
k2:=en1-(t*t)-(k1*t);
l1:=(EN2/(t*t*t))-(5/3)*t;
l2:=(en2/(t*t*t))-(5/3)*(t*t)-(l1*t);
sn1:=b1*q; sn2:=b2*q*q; sn3:=b3*q*q*q; sn4:=b4*q*q*q*q;
Label4.Caption:=Format('EN1=%0.6f#13#10'EN2=%0.6f#13#10'EN3=%0.6f#13#10'EN4=%0.6f#13#10'K1=%
.6f#13#10'K2=%0.6f#13#10'L1=%0.6f#13#10'L2=%0.6f#13#10'SN1=%0.6f#13#10'SN2=%0.6f#13#10'SN3=%
.6f#13#10'SN4=%0.6f,
[EN1,EN2,en3,en4,K1,K2,L1,L2,sn1,sn2,sn3,sn4]);
Button2.Click;
end;
procedure TForm1.Sifirla;
begin
m:=StrToIntDef(Edit2.Text,10000000);
end;
procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
var
f:TextFile;
begin
AssignFile(f,ExtractFilePath(Application.ExeName)+'Sonuc B='+inttostr(Trunc(beta))+
S='+Floattostr(sigma)+''.txt');
try
rewrite(f);
Write(f,label4.caption);
finally
CloseFile(f);
end;
end;
procedure TForm1.Betasigma;
var
atr:string;
lst:TStringList;
begin
Beta:=StrToFloat(ComboBox1.Items[ComboBox1.itemindex]);
a:=Beta/2;
atr:=ComboBox2.Items[ComboBox2.itemindex];
lst:=TStringList.Create;
try
lst.Delimiter:='/';
lst.DelimitedText:=atr;
if lst.Count=1 then
sigma:=StrToFloat(lst[0])
else
sigma:=StrToFloat(lst[0])/StrToFloat(lst[1]);
finally
lst.Free;
end; end; end.

```

ÖZGEÇMİŞ

Zafer Küçük, 23.07.1971 tarihinde Trabzon İli Sürmene İlçesinde doğdu. İlk öğrenimini Sürmene'de Hasan Tahsin Kırali İlkokulu'nda, Orta ve Lise öğrenimini ise Sürmene Lisesi'nde tamamladı. 1990-1991 eğitim-öğretim yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'ne girdi. 1994 yılında bu bölümden mezun olduktan sonra aynı yıl Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisansa başladı. 1996 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümüne araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 1997 yılında yüksek lisansını bitirdikten sonra aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Doktora programına kayıt oldu. Halen Karadeniz Teknik Üniversitesi'ndeki görevine devam etmekte olup bekardır.

