KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KAFES - SIRALI GRUPOİDLER TEORİSİ

Funda KARAÇAL

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
" Doktor "
Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24. 05. 2001
Tezin Savunma Tarihi : 27. 06. 2001

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV (Cevat HACIOĞLU)
Jüri Üyesi : Prof. Dr. İsmail Ş. GÜLOĞLU
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Osman GÜRSOY
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ahmet KAYA

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Asım KADIOĞLU

Trabzon 2001

ÖNSÖZ

"Kafes-sıralı grupoidler teorisi " adlı bu çalışma , Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında " Doktora Tezi" olarak hazırlanmıştır.

Özendirici ve yapıcı tutumu ile bana maddi ve manevi destek olan Sayın Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ'a duyduğum gönül borcu sonsuzdur. Bu konunun seçilmesinde, çalışmanın planlanmasında ve değerlendirilmesinde her türlü yardımını gördüğüm Sayın hocam Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV'e (Cevat HACIOĞLU'na) en içten duygularla teşekkür ederim.

Ayrıca şu ana kadar bana emeği geçmiş bütün hocalarıma, çeşitli yardımlarından ve sabrından dolayı eşim Murat KARAÇAL'a , aileme ve arkadaşlarıma yürekten sevgiler sunuyor ve teşekkür ediyorum.

Trabzon, Mayıs 2001 Funda KARAÇAL

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bu tezin orijinal kısmı dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde bir l_0-grupoidde herhangi bir elemanın asal radikali ve bir l_0-grupoidin asal spektrumu tanımlanıp, özellikleri incelenmiştir.

İkinci bölümde, bir cebirsel l-grupoidde herhangi bir eleman için asal radikal hakkında bir genel teorem elde edildi ve bu teoremin doğru olduğu üniversal cebirlerin bir sınıfı tanımlandı.

Üçüncü bölümde, cebirsel ve modüler kafeslerde tüm koatomların arakesiti ve tüm atomların toplamı kavramları tanımlanıp, bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Son bölümde, 2 ve 3 boyutlu integral l-grupoidler tam olarak belirlenmiştir. Bu bölümde bir integral l-grupoidde birimin direkt parçalanmalarının özellikleri, komaksimal elemanlar ve direkt parçalanmalar arasındaki ilişkiler ve Krull-Schmidt teoreminin bir benzeri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler:

l-grupoid, l-monoid, yarı-integral l-grupoid, integral l-grupoid, asal radikal, asal spektrum, atom, koatom, direkt parçalanma, komaksimal eleman

SUMMARY

The Theory of Lattice-Ordered Groupoids

The original part of this thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the prime radical of an element in a l_0-groupoid and a prime spectrum of an l_0-groupoid are defined and properties of theirs are examined.

In the second chapter, the theorem on prime radical of an element of an algebraic *l*-groupoid and its applications are given. The applications of this theorem and its corollaries are done on distributive universal algebras.

In the third chapter, the intersection of the all coatoms and the sum of all atoms are defined and the relations among them are studied.

In the last chapter, the integral *l*-groupoids of lengths 2 and 3 are described completely. In addition, in this chapter, the properties of the direct decompositions of the unit, connections between comaximal elements and direct decompositions of the unit are examined and an analog of Krull-Schmidt theorem is given in an integral *l*-groupoid.

Key Words:

l-groupoid, *l*-monoid, semi integral *l*-groupoid, integral *l*-groupoid, prime radical, prime spectrums, atom, coatom, direct decomposition, comaximal element

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

IN	$=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$
IN^*	$=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$
Z	$=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$
po-grupoid	kısmen sıralı grupoid
l_0-grupoid	tam kafes olan po-grupoid
t-norm	üçgensel norm
$a \wedge b$	a ve b elemanlarının infumumu
$a \vee b$	a ve b elemanlarının supremumu
$\underset{T}{\wedge} b_\tau$	$\{b_\tau \mid \tau \in T\}$ ailesinin infumumu
$\underset{T}{\vee} b_\tau$	$\{b_\tau \mid \tau \in T\}$ ailesinin supremumu
2^S	S nin güç kümesi
$A(R)$	R halkasının tüm toplamlı altgruplarının kafesi
İnfX	X kümesinin infumumu
SupX	X kümesinin supremumu
$\overline{A}$	X topolojik uzayında A kümesinin kapanışı
$L(R)$	R halkasının tüm ideallerinin kafesi
$\sum_{\tau\in T} B_\tau$	B_τ ideallerinin (veya altgruplarının) toplamı
$N(G)$	G nin tüm normal altgruplarının kafesi
$\langle X \rangle$	X ile üretilen altgrup (veya normal altgrup)
$[a,b]$	$=a^{-1}b^{-1}ab$
$[A,B]$	$=\langle \{[a,b] \mid a \in A, b \in B\} \rangle$
X^{-1}	$=\{x^{-1} \mid x \in X\}, (X \subseteq G,\ G \text{ grup})$
$[a,b]^x$	$=x^{-1}[a,b]x$
K_0	K nın tüm ideal elemanlarının kafesi
$R(a)$	a elemanının asal radikali

L_R	L nin tüm radikal elemanlarının kafesi
$l(X)$	X topolojik uzayının tüm kapalı alt kümelerinin kafesi
$O(X)$	X topolojik uzayının tüm açık alt kümelerinin kafesi
$F(a)$	a yı içeren tüm maksimal elemanların arakesiti
L_F	$a = F(a)$ olacak şekilde a elemanlarının kafesi
$L_R(K)$	$L(K)$ nın tüm radikal elemanlarının kafesi
$R_\wedge(a)$	a yı içeren tüm $\wedge$-asal elemanların arakesiti
$L_{R_\wedge}$	L nin $a = R_\wedge(a)$ şartını sağlayan tüm elemanlarının kafesi
$P(L)$	L nin 1 den farklı asal elemanlarının kümesi
$V(a)$	$P(L)$ nin a yı içeren tüm elemanlarının kümesi
$Spec(L)$	$P(L)$ üzerindeki Zariski uzayı
$\hat{L}$	L kafesinin duali
$a * b$	ab yi içeren tüm $c \in K_0$ elemanlarının arakesiti
$a^{(0)}$	$=a$
$a^{(n+1)}$	$= \left(a^{(n)}\right)^2,\ n \in IN$
$a^{[1]}$	$=a$
$a^{[n]}$	$= aa^{[n-1]},\ n \in IN,\ n > 1$
$r(a)$	a nın yarı asal radikali
$s(h)$	K nın tüm kuvvetli h-çözülebilir elemanlarının supremumu
$Sub(G, w)$	(G, w) grupoidinin tüm altgrupoidlerinin kafesi
$w(P, Q)$	$= \{x \in G \mid x = w(a, b), a \in P, b \in Q\} (P, Q \subseteq G)$
$\{H\}$	H ile üretilen altgrupoid
$Id(G)$	(G, w) grupoidinin tüm ideallerinin kafesi
$\overline{w}(A, B)$	$w(A, B)$ yi içeren tüm ideallerin arakesiti
$[x]$	x i içeren en küçük ideal
$\{X, \varepsilon, \lambda_\tau(\tau \in T), w_1, w_2\}$	Bir üniversal cebir, burada ε X üzerinde bir 0-lı işlem , her $\tau \in T$ için λ_τ, X üzerinde 1-li işlem, w_1 ve w_2 X üzerinde ikili işlemler

$Sub(X,\Omega)$	(X,Ω,w_2) nin tüm Ω-altcebirlerinin kafesi
$Id(X,\Omega,w_2)$	(X,Ω,w_2) nin tüm (Ω,w_2)-ideallerinin kafesi
$\overline{w_2}(A,B)$	(X,Ω,w_2) nin $w_2(A,B)$ yi içeren tüm (Ω,w_2)-ideallerinin arakesiti
$F(L)$	L nin tüm koatomlarının arakesiti
Sub U	U üniversal cebrinin tüm altcebirlerinin kafesi
$F^*(L)$	L nin tüm atomlarının toplamı
$S(L)$	L nin tüm küçük elemanlarının toplamı
$S^*(L)$	L nin tüm büyük elemanlarının arakesiti
Con U	U üniversal cebrinin tüm kongrüanslarının kafesi
I_K	K halkasının tüm sağ ideallerinin kafesi
$T(\alpha)$	$= T\setminus\{\alpha\}$
$\overline{a}_\alpha$	$= \bigvee_{\tau\in T(\alpha)} a_\tau$
L_α	$= \{x \in L \mid x \le a_\alpha\}$ esas ideali
B_2	$= \{0,1\}$ *l*-grupoidi
$d(L)$	L integral *l*-grupoidinin uzunluğu
C_2	$= \{0,p,1\}, 0<p<1$
$\lvert T\rvert$	T kümesinin kardinal sayısı
$L(C_2,1), L(C_2,2)$	C_2 üzerinde integral *l*-grupoidler
$A(i)(i=\overline{1,7})$	A üzerinde tanımlanan çarpım işlemleri
$L(A,i)(i=\overline{1,7})$	$A(i)$ çarpım işlemli A integral *l*-grupoidi
C_3	$= \{0,\beta,\alpha,1\}, 0<\beta<\alpha<1$
$C_3(i)\ (i=\overline{1,11})$	C_3 üzerindeki çarpım işlemleri
$L(C_3,i)(i=\overline{1,11})$	$C_3(i)$ işlemli integral *l*-grupoidler
D_2	$= \{0,p_1,p_2,b,1\}, 0<p_1<b<1,\ 0<p_2<b,$ $p_1 \wedge p_2 = 0,\ p_1 \vee p_2 = b$
$D_2(i)(i=\overline{1,3})$	D_2 üzerinde tanımlanan çarpım işlemleri

$L(D_2,i)\,(i=\overline{1,3})$	$D_2(i)$ işlemli integral l-grupoidler
D_T	$=\{0,p_\tau(\tau\in T),b,1\}$, her $\tau\in T$ için $0<p_\tau<b<1$ ve her $\alpha\neq\beta$ için $p_\alpha\wedge p_\beta=0$ ve $p_\alpha\vee p_\beta=b$
$L(D_T)$	D_T üzerinde integral l-grupoid
$A'(i)(i=\overline{1,9})$	$a^2=0$ durumunda, lemma 6 nın şartını sağlayan $L=\{0,a,b_1,b_2,1\}$ üzerindeki mümkün olan çarpım işlemleri

1.GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Kafes-sıralı monoid (veya *l*-monoid) kavramı ideal teorisinden çıkar ve Dedekind'in [1] çalışmasına dayanır. Bu kavram 1924 yılında Krull'un [2] çalışmasında dikkatli bir şekilde incelenmiş ve ilk defa bu çalışmada kafes-teorik yöntemlerle ideal-teorik problemler tartışılmıştır.

1920-1930 yıllarına kadar birimli, birleşmeli, değişmeli halkalar teorisinde iyi gelişmeler kaydedilmiştir. Halka yapısının araştırılmasında ideallerin çok önemli olduğu anlaşılmıştır. İdeallerle ilgili çok sayıda önemli sonuçlar elde edilmiştir. Özel olarak, idealler teorisinin temel teoremlerinden biri olan aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

Teorem(Lascer- Nöther parçalanma teoremi): Bir Nöther halkasının keyfi bir ideali sonlu tane primer ideallerin arakesitidir.

Bu teoremi meşhur satranccı Emanuil Lascer polinom halkaları için ispatlamıştır. Daha sonra Emmy Noether bu teoremi kendisinin artan zincir şartını kullanarak daha geniş halkalar sınıfına- Nöther halkalarına genişletmiştir.

İkinci elde edilen temel teorem şudur:

Teorem(Dedekind): Bir Dedekind bölgesinde sıfırdan farklı her ideal asal ideallerin çarpımı şeklinde tek türlü yazılabilir.

Krull'un [2] çalışmasında zincir şartı zayıflatılmış, indirgenemez ve primer elemanlar arasında hiçbir bağlantı varsayılmamış bir rezidual kafeste Lascer-Nöther parçalanma teoreminin ne şekilde bulunabileceği problemi ile ilgilenilmiştir.

Kafes-sıralı monoidler teorisinin gelişimi kafesler teorisinin gelişimine bağlı bir şekilde ilerlemiştir. Kafesler teorisindeki önemli gelişmeler 1930-1940 yıllarında başlamıştır: M. H. Stone 1936-1937 yıllarında Bool halkalarına ait meşhur çalışmalarını yapmıştır. G. Birkhoff'un " Lattice Theory " adlı kitabının birinci baskısı 1940 yılında yapılmıştır.

Kafes-sıralı monoidlerin modern teorisi 1939 yılında M. Ward, R.P. Dilworth [3] ve R.P. Dilworth [4] temel makaleleri ile başlamıştır. M. Ward, R.P. Dilworth [3] makalesinde çarpım işlemine bir yardımcı işlem (rezidasyon adlı işlemle) tanımlı kafeslerin bir sistematik teorisi geliştirilmek istenmiştir. Çarpım ve rezidasyon işleminin oldukça genel şartlar altında birbiri ile ilgili olduğu gösterilmiştir. Bu şartlar altında bir çarpım işlemi yardımı ile rezidasyon tanımlanabileceği ve tersinin gerçeklenebileceği gösterilmiştir. Lascer- Nöther parçalanma teoremi Nöther (yani kafes olarak artan zincir koşulunu sağlayan) integral değişmeli *l*-monoidlerin bir sınıfına genişletilmiştir. Aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

L bir Nöther integral değişmeli *l*-monoid olsun. $q \in L$ keyfi alalım. Eğer $ab \leq q$ olan keyfi $a, b \in L$ için $a \leq q$ veya bir $n \in IN^{*}$ için $b^{n} \leq q$ ise, q elemanına (sağ) primer denir. Nöther kafesinin keyfi elemanı sonlu tane $\wedge$-parçalanamaz elemanların arakesiti şeklindedir. Halkalar teorisinde keyfi $\wedge$-parçalanamaz idealin primer olduğu gösterilmiştir. Fakat primer olmayan $\wedge$-parçalanamaz elemana sahip olan değişmeli Nöther integral *l*-monoidler mevcuttur.

M. Ward, R.P. Dilworth [3] çalışmasında keyfi $\wedge$-parçalanamaz elemanı primer olan değişmeli Nöther integral *l*-monoidlerin bir sınıfı belirlenmiştir. Halkalar teorisindeki primer ideallerin temel özelliklerinin benzerleri, değişmeli Nöther integral *l*-monoidlerin primer elemanları için ispatlanmıştır.

R.P. Dilworth'ün [4] makalesinde değişmeli olmayan rezidual kafesler incelenmiştir. Bir kafes üzerinde değişmeli olmayan çarpım ve rezidasyon kavramı geliştirilmiştir. Özel olarak, her bir işlemin diğerine dayanarak tanımlanabileceği gösterilmiş ve primer elemanlara parçalanış tartışılmıştır.

1943 yılında J. Certaine'ın [5] çalışması ile kafes-sıralı monoidler genelleştirilerek daha kapsamlı bir şekilde incelenmiştir.

M. L. Dubreil- Jacotin [6], L. Fuchs[7] ,[8], J. Kerstan [9] , V. S. Krishnan[10], L. Lesieur[11], K. Murata[12], [13],N. K. Thakare ve C. S. Manjarekar [14] çalışmalarında *l*-monoidlerde Lascer-Nöther parçalanış teoremi ve elemanların asal elemanların arakesitine parçalanış problemleri incelenmiştir.

E. G. Shulgeyfer [15], L. Fuchs ve O. Steinfeld [16] çalışmalarında *l*-monoidlerde Dedekind'in parçalanış teoremi tartışılmıştır.

E. G. Shulgeyfer'in [15] çalışmasında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

S bir kısmen sıralı yarı grup olsun. Aşağıdaki şartların sağlanması durumunda S de asal elemanlara parçalanış tek türlüdür denir:

1) Keyfi $e \neq a \in S$ (e S'nin en büyük elemanı) için $a = p_1 p_2 \cdots p_n$ şeklinde p_i asal elemanları mevcut ve keyfi $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ için $p_i p_j = p_j p_i$ dır;

2) $a = p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 q_2 \cdots q_m$, a elemanının iki asal çarpanlara parçalanışı ise, n=m ve $q_i = p_{k_i}$ şeklinde $1,2,\cdots,n$ sayılarının bir $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ permütasyonu mevcuttur;

3) Her a< b için a=bc olacak şekilde bir $c \in S$ mevcuttur.

Teorem: S bir kısmen sıralı yarı grup, 0 sıfır eleman ve e en büyük eleman (keyfi $a \in S$ için $0 \le a \le e$) olsun. S de asal çarpanlara parçalanışın tek türlü olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki dört şartın sağlanmasıdır:

1) S bir kafes sıralı yarıgruptur;

2) S Nöther kafesidir;

3) S nin maksimal elemanları değişmelidir;

4) S nin keyfi p asal elemanı için $1 > p > p^2 > \ldots\ldots. > p^n > \ldots\ldots.. > 0$ zinciri maksimaldir.

L. Fuchs ve O. Steinfeld'in [16] çalışmasında bir kısmen sıralı S yarı grubunda tek türlü asal çarpanlara parçalanışın mevcutluğu hakkındaki teorem, S nin kafes-sıralı yarıgrup olma şartı yerine S nin sağ bölünmeli yarı grup olma şartı koyularak ispatlanmıştır.

1971 de V.A. Andrunakievič ve Ju.M. Rjabuhin [17] çalışmasında kısmen sıralı cebirsel sistemlerin elemanlarının asal elemanların arakesitine parçalanış problemi tartışılmıştır.

Birleşmeli halkalar teorisinde 1940-1960 yıllarında önemli gelişmeler oldu. Bu halkaların yapısı üzerinde problemler ortaya çıktı. Halka yapısını incelemek için çok önemli olan halka radikalleri [18] (Weddenburn- Artin (klasik veya nilpotent) radikalleri , Jacobson radikali, Levizky radikali, Baer radikali, Brown- Mc Coy radikali (asal radikal)) tanımlanıp, incelenmiştir. Bu radikallerin en önemlileri Jacobson radikali ve asal radikaldir.

Bir K birimli, birleşmeli halkasının tüm sol maksimal ideallerinin arakesitine Jacobson radikali denir. K nın tüm asal ideallerinin arakesitine K nın asal radikali denir.

Halkalardaki radikallerin benzerleri modüller için (Lambek [19]) , gruplar için (K. K. Shukin [20], Dj. Khadjiev ve A.R. Gulamov [21]) yarıgruplar için (L. Marki [22]), diferansiyel halkalar için (V.D. Burkov [23], [24], Dj. Khadjiev ve F. Çallıalp [25], [26]), $*$-halkalar için (Dj. Khadjiev, F. Çallıalp ve V. N. Khudayberdiev [27]) incelendi.

H bir K-modül olsun. H modülünün tüm maksimal K-altmodüllerinin arakesitine H nın radikali denir. H nın tüm indirgenemez (atomik) K-altmodüllerinin toplamına H nın sokol'ü denir. Sokol radikalin dualidir.

Bu çalışmalar l-monoidler teorisine de yansıdı. Bo. Stenström [28], O. Steinfeld [29] , K. Keimel [30], P. D. Smith [31], M. Stern[32], V.A. Andrunakievič [33], N. K. Thakare ve C.S. Manjarekar [14], S. A. Amitsur [34], E. A. Bahrens [35], L. Lesieur, R. Croisot[36], J. Pla ve R. Carles[37], Dj. Khadjiev ve T. M. Shamilev[38], Dj. Khadjiev ve F. Karaçal [39], F. Karaçal[40], Dj. Khadjiev, F. Çallıalp ve F. Karaçal [41], Dj. Khadjiev ve F. Karaçal [42] çalışmalarında l-monoid elemanlarının çeşitli radikalleri tanımlanıp, incelendi.

L bir tam kafes olsun. L nin tüm koatomlarının arakesitini $F(L)$, tüm atomlarının toplamını $F^*(L)$, tüm küçük elemanlarının toplamını $S(L)$ ve tüm büyük elemanlarının arakesitini $S^*(L)$ ile gösterelim. Birimli, birleşmeli bir K halkasının tüm sol ideallerinin kafesini $L_-(K)$ ile gösterelim. Bu takdirde $F(L_-(K))$ K halkasının Jakobson radikalidir. Bir G grubunun tüm altgruplarının kafesini $L(G)$ ile gösterelim. Bu durumda $F(L(G))$, G grubunun Frattini altgrubudur. Buradan anlaşılıyor ki $F(L)$ ve $F^*(L)$ elemanları cebir için çok önemlidir.

Bo. Stenström'ün [28] çalışmasında keyfi L cebirsel modüler kafesi için $F(L)=S(L)$ ve $F^*(L)=S^*(L)$ eşitlikleri gösterilmiştir. M. Stern'ün [32] çalışmasında, Bo.Stenström'ün[28] sonuçları modüler olmayan kafeslerin belli bir sınıfına genelleştirilmiştir.

Dj. Khadjiev ve F. Karaçal [39], Dj. Khadjiev , F. Çallıalp ve F. Karaçal [41] çalışmalarının sonuçları tezde tam olarak verilmiştir.

L bir l_0- grupoid olsun. $a \in L$ elemanını kapsayan tüm asal elemanların arakesitini $R(a)$ ile gösterelim. Eğer $a=R(a)$, yani a elemanı asal elemanların arakesiti şeklinde ise, a ya radikal eleman denir. L nin tüm radikal elemanlarının kafesini L_R ile gösterelim. L_R bir tam kafestir.

Halkalardaki asal radikal hakkındaki teoremin sonuçlarından biri de şudur (T. Y. Lam[43]): Keyfi yarı asal ideal asal ideallerin arakesitidir. Bu sonuç O. Steinfeld'in [29] çalışmasında l-grupoidlere genelleştirilmiştir. Keyfi yarı-integral l-grupoidin keyfi yarı asal elemanı asal elemanların arakesitidir.

K. Keimel [30] çalışmasında O. Steinfeld'in [29] çalışmasındaki sonucun doğru olmadığını bir örnekle göstermiş ve O. Steinfeld'in sonucunun keyfi cebirsel yarı-integral l-grupoidler için doğru olduğunu ispatlamıştır.

Bu iki çalışmada incelenen probleme bir kafeste keyfi bir elemanın $\wedge$-parçalanamaz elemanların arakesiti şeklinde olduğu problemi çok yakındır.

P. D. Smith'in [31] çalışması son problem ile ilgilidir. Çalışmanın sonucu şu şekilde özetlenebilir. Bir L dağılmalı kafesinde herhangi bir eleman $\wedge$-parçalanamaz elemanların arakesiti ise, L bir Brouwerian kafesidir.

Bir dağılmalı L kafesinde $ab = a \wedge b$ alınırsa, $(L, \wedge)$ bir l-monoid olur. Aslında Smith'in [31] çalışmasında $L = L_R$ olması durumunda L nin bir Brouwerian kafesi olduğu gösterilmiştir. V. A. Andrunakievič'in [33] çalışması bu konuya çok yakındır ve bu çalışmada aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1) Bir modüler cebirsel sağ ideal çarpımlı L kafesinin idempotent olması için gerek ve yeter şart her elemanın asal elemanların bir arakesiti şeklinde olmasıdır;

2) L bir kafes ve L nin her bir elemanı $\wedge$-parçalanamaz elemanların (sonlu veya sonsuz) bir arakesiti olsun. L nin dağılmalı olması için gerek ve yeter şart her $\wedge$-indirgenemez elemanın $\wedge$-asal olmasıdır.

3) Bir cebirsel L kafesinin dağılmalı olması için gerek ve yeter şart her $\wedge$-indirgenemez elemanın $\wedge$-asal olmasıdır.

4) Bir modüler cebirsel sağ ideal çarpımlı L kafesinin her asal elemanı $\wedge$-asal eleman ise, L dağılmalıdır.

Dj. Khadjiev ve T. M. Shamilev'in [38] çalışmasında keyfi bir L l_0- grupoid için L_R kafesinin Brouwerian olduğu gösterilmiştir.

K birimli, birleşmeli, değişmeli bir halka ve $P(K)$, K nın K dan farklı tüm asal ideallerinin kümesi olsun. $P(K)$ da K nın tüm radikal ideallerin kafesi $L_R(K)$ yardımıyla spektral topoloji (veya Zariski topolojisi) tanımlanmıştır. $P(K)$ yı bu topolojiyle $\mathrm{Spec}(K)$ veya $\mathrm{Spec}(L(K))$ şeklinde gösterelim. $\mathrm{Spec}(L(K))$ topolojik uzayları cebirsel geometri için çok önemlidir. $\mathrm{Spec}(L(K))$ topolojik uzayları schemeler teorisinin temelini oluşturur [44]. Benzer şekilde $\mathrm{Spec}_D(L(K))$ topolojik uzayları diferansiyel halkalar için de tanımlanmış ve bu topolojik uzaylar diferansiyel-cebirsel geometride çok önemlidir [45]. Bir K halkasının tüm maksimal ideallerinin kümesini Max(K) ile gösterelim. $\mathrm{Max(K)} \subseteq \mathrm{Spec(K)}$ olduğundan Max(K) , Spec(K) topolojik uzayının bir altuzayıdır [44].

Max(K) ve Spec(K) topolojik uzayları önemli olduğundan dolayı keyfi bir l_0- grupoid için bunların benzerleri (Spec(L) ve Max(L)) l_0-grupoidler teorisinde de (J. R. Isbell ve J. T. Morse [46], G. Georgescu ve I. Vosculescu [47], Dj. Khadjiev ve T. M. Shamilev [38]) tanımlanıp, incelenmiştir.

1970 yılında J. R. Isbell ve J. T. Morse'un [46] " Kafeslerin yapı uzayları " adlı çalışmasında A bir birimli f-halka [48] ve M(A) sıfır-çekirdek topolojili A nın tüm maksimal l-ideallerinin uzayı olmak üzere, A ve A′ f-halkaları kafes izomorf ise onların M(A) ve M(A′) uzaylarının da homeomorf olduğunu göstermişlerdir.

1989 yılında G. Georgescu ve I. Voiculescu [47] çalışmasında, değişmeli halkalar ve dağılmalı kafeslerin her ikisinde de çok benzer bir şekilde ortaya çıkacak bazı sonuçlar için ortak bir formül bulmayı amaçlamışlardır.

1997 yılında Dj. Khadjiev ve T. M. Shamilev'in [38] çalışmasında herhangi yarı-integral l_0- grupoid için Spec(L) topolojik uzay- L nin asal spektrumu (veya yapı-uzayı) tanımlanmış ve incelenmiştir. Özel olarak, Spec(L) topolojik uzayı herhangi bir halka (birleşmeli veya birleşmeli değil) ve T_0 -kafesler için tanımlanmıştır. Spec(L) nin tüm T_0 -topolojik uzaylar içerisindeki yeri belirlenmiştir.

Frattini elemanına, özellikle Frattini altcebiri ve altkafesine ait bir çok çalışmalar (A.G. Kurosh [49], E. I. Marshall [50], L. M. Vrancken [51], P. M.Cohn [52],Bo. Stenström [28], M. Stern [32], K. M. Koh [53], [54],C. C.Chen, K.M. Koh ve S. K. Tan [55], M. E. Adams [56], M. Abad ve M. E. Adams [57], F. Karaçal [40]) yapıldı.

Lascer- Nöther ve Dedekind parçalanma teoremlerini l-monoidlere genelleştirme çalışmaları devam etmektedir(D. D. Anderson [58], [59]).

1976 yılında D.D. Anderson [58] çalışmasında R.P. Dilworth'ün Nöther kafes kavramını tanıtmış ve çeşitli klasik sonuçları Nöther halkaların teorisinden Nöther kafeslere genelleştirmişti. D.D. Anderson'ın bu makalesinde ideal teorisinin bir soyut incelemesi için artan zincir koşulunu sağlaması zorunlu olmayan genelliğin tam seviyesinde olan r-kafes kavramı tanıtılmıştır. Makalenin ilk bölümünde esas üreteçli elemanlar detayı ile incelenmiştir. İkinci bölümünde bir lokalizasyon teorisi geliştirilmiştir. Üçüncü bölümde dağılmalı r-kafesler incelenmiştir. Son bölümde her esas elemanı asal elemanların çarpımı şeklinde olan r-kafesler incelenmiştir. Bu yöndeki araştırma D.D. Anderson [59] ile devam etmiştir.

1978 de D.D. Anderson [59] çalışmasında da her esas elemanı asal elemanların bir çarpımı şeklinde olan çarpımlı kafeslerin incelenmesine devam edilmiştir. π-kafes tanımı yapılmış ve bir π-kafeste her esas elemanın rankı 1 den küçük veya eşit esas asal elemanların bir çarpımı şeklide olduğu gösterilmiştir.

l-grupoidlerin yapısı ve genelleştirilmeleri üzerine bir çok çalışma (R. G. Burton [60], B. Bosbach [61], [62], L. Libkin [63], A. Walendziak [64], D. D. Anderson, E. W. Johnson ve J. A. Johnson [65], D. D. Anderson ve E. W. Johnson [66], H. M. Nakkar [67], R. H. Lee [68], D. D. Anderson, A. J. Boals ve E. W. Johnson [69]) yapılmıştır.

Tezin amacı- araştırılan problemler:

Tezde aşağıdaki problemler araştırıldı.

1) Keyfi bir L l_0- grupoid elemanının asal radikalinin özellikleri. Radikal elemanların L_R kafesinin özellikleri. Keyfi bir L l_0- grupoid için Spec(L) topolojik uzayının tanımı ve özellikleri.

2) Cebirsel l-grupoid elemanının asal radikalinin özellikleri ve dağılmalı üniversal cebirlere uygulamaları.

3) Cebirsel modüler kafeslerde $F(L)$, $S(L)$, $F^*(L)$, $S^*(L)$ elemanları arasındaki ilişkiler.

4) İntegral l-grupoidlerin direkt parçalanmaları ve birimin direkt parçalanmaları arasındaki ilişkiler. Birimin direkt parçalanmaları ve komaksimal elemanların ailesinin özellikleri arasındaki ilişkiler. Bir integral Artin l-grupoidde birimin idempotentlere parçalanabilmesi. Tüm 2 ve 3 uzunluklu integral l-grupoidlerin belirlenmesi.

Bu problemlerin güncelliği.

1) Yukarıda bahsedilen çalışmalardan L_R kafesinin ve Spec(L) topolojik uzaylarının cebir için önemli olduğu ve bunlar üzerindeki çalışmaların devam ettiği anlaşılır.

2) Üniversal cebirlerin farklı sınıfları için asal radikal kavramı üzerinde çok sayıda çalışmalar vardır. Bundan dolayı *l*-grupoid elemanının asal radikali üzerine bir sistematik teoriye ihtiyaç vardır.

3) Yukarıda bahsedilen [28] çalışmasında $F(L) = S(L)$ ve $F^*(L) = S^*(L)$ eşitlikleri elde edilmiştir.

$F(L)$, $S(L)$, $F^*(L)$, $S^*(L)$ elemanları arasında daha başka bağlantıların olup olmadığı problemi ilginç bir problemdir.

4. İntegral *l*-grupoidlerin parçalanmaları üniversal cebirlerin yapısının araştırılmasında çok önemlidir. Birimin direkt parçalanmaları ve komaksimal elemanların ailesinin özellikleri arasındaki bağlantılar yardımıyla üniversal cebirlerin farklı sınıfları için Çin kalan teoreminin bir benzeri elde edilir. 2 ve 3 uzunluklu integral *l*-grupoidlerin belirlenmesi aslında yapısı en basit integral *l*-grupoidlerin tam olarak belirlenmesidir.

Elde edilen sonuçlar [41], [42] makalelerinde ve [39], [40] bildirilerinde yayınlanmıştır. Bu sonuçlar 1998-2001 yılları arasında Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik bölümünde seminer derslerinde anlatılıp, tartışılmıştır. Dj. Khadjiev ve F. Karaçal'ın " The description of all $\vee$-distributive triangular norms of lengths 2 and 3" adlı çalışması Dortmund Üniversitesinde düzenlenen "7^{th} Fuzzy Days in Dortmund –October 01-03, 2001" konferansında sunulmaya kabul edilmiştir.

1.2. l_0-grupoidler, üçgensel normlar ve *l*-grupoidler

Tanım 1: $(L,\le)$ bir kısmen sıralı küme ve $\cdot$, L üzerinde bir ikili çarpım olsun. Eğer her $a,b,x \in L$ ve $a \le b$ için $x \cdot a \le x \cdot b$, $a \cdot x \le b \cdot x$ ise, L ye bir *po-grupoid* denir [48].

Bundan sonra $a \cdot b$ yi ab ile göstereceğiz.

Çarpım değişmeli ise, L ye *değişmeli po-grupoid* denir. Çarpım birleşmeli ise, L ye *po- yarıgrup* denir.

L bir *po*-yarıgrup olsun. Her $x \in L$ için $x1 = 1x = x$ olacak şekilde $1 \in L$ birim eleman (veya etkisiz eleman) mevcut ise , L ye *po- monoid* denir.

Her $x \in L$ için $x \ge 0$ ve $x0 = 0x = 0$ özelliklerini sağlayan $0 \in L$ elemanına L nin bir *sıfırı* denir. Bir *po*-grupoidin en fazla bir tane sıfırı olacağı açıktır [48].

L bir *po*-grupoid olsun. L tam kafes ise, L ye kısalık olması açısından l_0*-grupoid* adı verilir.

Tanım 2: Bir *üçgensel norm (t-norm)* aşağıdaki dört özelliği sağlayan bir $T:[0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonudur $[70]$:

i) $T(x,y) = T(y,x)$ (değişme özelliği)

ii) $T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))$ (birleşme özelliği)

iii) $x \le y$ ise $T(x,z) \le T(y,z)$ (monotonluk özelliği)

iv) $T(x,1) = x$ (sınır özelliği).

Tanım 2 nin bir genelleştirilmesi olarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 3: L bir tam kafes olsun. 1 ile L nin en büyük elemanını gösterelim. Bir *genelleştirilmiş üçgensel norm (genelleştirilmiş t-norm)* aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $T':L \times L \to L$ fonksiyonudur $[71]$:

i) $T'(x,y) = T'(y,x)$

ii) $T'(T'(x,y),z) = T'(x,T'(y,z))$

iii) $x \le y$ ise $T'(x,z) \le T'(y,z)$

iv) $T'(x,1) = x$.

Uyarı:

i) Tanım 2 ve tanım 3 de verilen iv) özelliğine fuzzy cebirinde sınır özelliği denilmektedir $[70]$. Aslında bu özellik birim eleman özelliğidir.

ii) Tanım 2 ile bir üçgensel normun, tanım 3 ile bir genelleştirilmiş üçgensel normun birer değişmeli l_0-monoid işlemleri oldukları görülür. Bunun terside doğrudur: Eğer $([0,1],\cdot)$ ve $(L,*)$ birer değişmeli l_0- monoidler ve bu l_0- monoidlerde birim eleman ile en büyük eleman aynı ise, bu takdirde . işlemi bir *t*-norm ve $*$ işlemi bir genelleştirilmiş *t*-normdur.

Üçgensel normların ve genelleştirilmiş üçgensel normların fuzzy cebrinde iyi uygulamaları vardır($[70],[71],[72],[73],[74],[75]$). Bu nedenle l_0-monoidler teorisi fuzzy cebirinde de oldukça önemlidir.

Şimdi *po*-grupoidlere ve l_0-grupoidlere örnekler verelim.

Örnek 1: L bir kafes olsun. L de çarpım olarak $\wedge$ işlemi alınacak olursa, L bir *po*-yarıgruptur. L tam kafes olsun. 0 ile (1 ile) L nin en küçük (en büyük) elemanı gösterilsin. Bu takdirde $(L,\wedge)$ *po*-yarıgrubu, 0 sıfırlı ve 1 birimli bir l_0-monoiddir. $\wedge$ işlemi aynı zamanda değişmeli olduğundan $\wedge$ işlemi bir genelleştirilmiş *t*-norm olur.

Örnek 2: S bir yarıgrup ve 2^S, S nin tüm altkümelerinin kümesi olsun. 2^S nin elemanları X, Y, Z, ... ile gösterilsin. 2^S de sıra olarak kapsama, ikili çarpım olarak da

$$XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$$

çarpımı alınsın. Bu takdirde 2^S bir *po*-yarıgruptur. Ø, bu *po*-yarıgrubun sıfır elemanıdır. S nin 1 birim elemanlı monoid olması durumunda ; $\{1\} \in 2^S$ elemanı 2^S *po*-yarıgrubunun birim elemanıdır. Dolayısıyla 2^S *po*-monoid olur.

Örnek 3: R bir halka ve $A(R)$ R nin tüm toplamlı X, Y, Z, ... altgruplarının kümesi olsun. $A(R)$ de sıra olarak kapsama, ikili çarpım olarak da

$$XY = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \;\middle|\; x_i \in X, y_i \in Y, i \in \{1,2,\ldots,n\}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

çarpımı alınacak olursa, $A(R)$ bir *po*-grupoiddir. $\{0\}$, bu *po*-grupoidin sıfır elemanıdır. R nin 1 birim elemanlı birleşmeli bir halka olması durumunda; $\langle 1 \rangle = \{n1 \mid n \in Z\} \in A(R)$ elemanı, $A(R)$ *po*-grupoidinin birim elemanıdır. Dolayısıyla $A(R)$ bir *po*-monoiddir.

Örnek 4: S bir kısmen sıralı küme ve

$$P(S) = \{f : S \to S \mid x, y \in S, x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)\}$$

olsun. $P(S)$ de sıra

$$f \le g \Leftrightarrow \text{Her } x \in S \text{ için } f(x) \le g(x)$$

ile verilsin. İkili çarpım da

$$(fg)(x) = f(g(x))$$

ile verilecek olursa, $P(S)$ bir *po*-monoiddir.

Örnek 5: $T_M(x,y) = \min(x,y)$, $T_P(x,y) = xy$ ve $T_L(x,y) = \max(0, x+y-1)$ ile tanımlanan $T_M, T_P, T_L : [0,1]^2 \to [0,1]$ birer *t*-normdurlar. Fuzzy cebirinde T_M *minumum t-norm,* T_P *çarpım t-norm ve* T_L *Łukasievwicz t-norm* olarak adlandırılır[70].

Tanım 4: L bir kafes ve . L üzerinde bir ikili çarpım olsun. Eğer her $a, b, c \in L$ için $a(b \vee c) = ab \vee ac$ ve $(a \vee b)c = ac \vee bc$ eşitlikleri gerçeklenirse, L ye *l-grupoid (kafes-sıralı grupoid)* denir.

Çarpım işlemine göre bir yarıgrup (monoid) olan bir *l*-grupoide bir *l-yarıgrup (l-monoid)* denir[48].

Tanım 5: L bir tam kafes ve . , L üzerinde bir ikili çarpım olsun. Eğer keyfi $\{b_\tau | \tau \in T\} \subset L$ ve $a \in L$ için

$$a\left(\bigvee_T b_\tau\right) = \bigvee_T (ab_\tau) \text{ ve } \left(\bigvee_T b_\tau\right)a = \bigvee_T (b_\tau a)$$

özellikleri sağlanırsa, L ye *tam l-grupoid* veya *cl-grupoid* denir [48].

Teorem 1: S bir sıralı küme ve S nin en büyük elemanı mevcut olsun. Eğer S nin boştan farklı her altkümesinin infumumu mevcut ise, S nin boştan farklı her altkümesinin supremumu vardır. Yani S bir tam kafestir [48].

Uyarı:

i) Herhangi bir l_0-grupoid, *l*-grupoid olmayabilir. Örnek 1 de L bir tam kafes ise, $(L,\wedge)$ bir l_0-grupoiddir. L nin *l*-grupoid olması için gerek ve yeter şart L nin dağılmalı kafes olmasıdır. Eğer L dağılmalı değilse, L bir *l*-grupoid değildir.

ii) Herhangi bir *l*-grupoid, *cl*-grupoid olmayabilir. Örnek olarak, S Öklid topolojisine göre $[0,1]$ aralığındaki tüm kapalı kümelerin ailesi olsun. S, $2^{[0,1]}$ in bir alt kümesidir. Eğer $\{A_\tau | \tau \in T\} \subseteq S$ ise $\bigwedge_T A_\tau = \bigcap_T A_\tau \in S$ ve $[0,1] \in S$ olduğundan teorem 1 e göre S bir tam kafestir. S de

$$\bigvee_T A_\tau = \overline{\bigcup_T A_\tau}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Eğer $\{A_\tau | \tau \in T\} \subseteq S$ ailesi sonlu ise, bu durumda $\bigvee_T A_\tau = \overline{\bigcup_T A_\tau} = \bigcup_T A_\tau$ olur. Diğer taraftan S dağılmalı kafestir, yani her $A, B, C \in S$ için

$$A \wedge (B \vee C) = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

sağlanır.Fakat S tam dağılmalı kafes değildir. Gerçekten $A = \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = [1/n, 1] \in S$ alalım.

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} B_n = \overline{(0,1]} = [0,1], A \wedge \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \{0\} \cap [0,1] = \{0\}$$

ve

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} (A \wedge B_n) = \bigvee_{n=1}^{\infty} (\{0\} \cap [1/n, 1]) = \varnothing$$

olduğundan $A \wedge \left(\bigvee_{n=1}^{\infty} B_n\right) \neq \bigvee_{n=1}^{\infty} (A \wedge B_n)$ dir. Bu örnekte $\wedge$ çarpım olarak alınırsa, S bir *l*-grupoiddir, fakat *cl*-grupoid değildir.

Şimdi *l*-grupoid ve *cl*-grupoid örnekleri verelim.

Örnek 6: Bir R halkasının tüm toplamlı altgruplarının $A(R)$ kümesinin örnek 3 de bir *po*-grupoid olduğu gösterildi. $A(R)$nin bir *cl*-grupoid olduğunu gösterelim. Bunun için ilk önce $A(R)$ nin tam kafes olduğunu gösterelim. $\{A_\tau | \tau \in T\} \subseteq A(R)$ için

$$\underset{T}{\wedge} A_\tau = \underset{T}{\cap} A_\tau \in A(R)$$

dır. Ayrıca $R \in A(R)$ olduğundan teorem 1 e göre $A(R)$ tam kafestir. Özellikle, $\underset{T}{\vee} A_\tau = \sum_T A_\tau$ dır, burada

$$\sum_T A_\tau = \{a \in R : a = a_{\tau_1} + \cdots + a_{\tau_n}, a_{\tau_i} \in A_{\tau_i}, \{\tau_1, \cdots, \tau_n\} \text{ T nin keyfi sonlu altkümesi}\}$$

dır. $A(R)$ bir *po*-grupoid olduğundan $C \in A(R)$ ve $\{A_\tau | \tau \in T\} \subseteq A(R)$ için

$$CA_\tau \leq C(\underset{T}{\vee} A_\tau)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\underset{T}{\vee}(CA_\tau) \leq C(\underset{T}{\vee} A_\tau)$$

sağlanır. Ters yönde kapsamayı göstermek için $x \in C(\underset{T}{\vee} A_\tau)$ keyfi alınsın. Bu takdirde $x = \sum_{i=1}^{m} c_i a_i$, $c_i \in C$, $a_i \in \underset{T}{\vee} A_\tau$ şeklindedir. $a_i \in \underset{T}{\vee} A_\tau$ olduğundan bir sonlu $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq T$ için $a_i = a_{i1} + \ldots + a_{in_i}$ dır. Böylece

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i a_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} c_i a_{ij} \in \underset{T}{\vee}(CA_\tau)$$

elde edilir. Bundan dolayı $\underset{T}{\vee}(CA_\tau) = C(\underset{T}{\vee} A_\tau)$ bulunur. Benzer şekilde $\underset{T}{\vee}(A_\tau C) = (\underset{T}{\vee} A_\tau)C$ olduğu gösterilebilir. Örnek 3 de de belirtildiği gibi, eğer R 1 birimli, birleşmeli bir halka ise, bu *cl*-grupoid bir *cl*-monoid olur.

Örnek 7: R birleşmeli bir halka ve $L(R)$ R nin tüm ideallerinin kümesi olsun. $L(R)$ kapsama sırasına göre bir tam kafestir ve $A(R) \supseteq L(R)$ dir. $L(R)$ deki infumum (supremum) $A(R)$ deki infumum ile (supremum ile) çakışır. Gerçekten $\{B_\tau | \tau \in T\} \subseteq L(R)$ için

$$\underset{T}{\wedge} B_\tau = \underset{T}{\cap} B_\tau \in L(R)$$

ve

$$\underset{T}{\vee} B_\tau = \sum_T B_\tau \in L(R)$$

dır. $A, B \in L(R)$ için

$$AB = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \,\middle|\, a_i \in A, b_i \in B, i \in \{1,2,\ldots,n\}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

olsun. Bu takdirde $L(R)$ bir *cl*-grupoiddir: $\{B_\tau \mid \tau \in T\} \subseteq L(R)$ ve $C \in L(R)$ keyfi alınsın. $L(R) \subseteq A(R)$ ve örnek 6 ya göre $A(R)$ bir *cl*-grupoid olduğundan $\bigvee_T (CB_\tau) = C(\bigvee_T B_\tau)$ ve $\bigvee_T (B_\tau C) = (\bigvee_T B_\tau)C$ eşitlikleri elde edilir. Böylece $L(R)$ bir *cl*-grupoiddir. Buradan elde edilen bir başka sonuç $L(R)$ $A(R)$ nin bir alt *cl*-grupoididir (bir alt tam kafes ve altgrupoid).

Örnek 8: $A \neq \emptyset$ bir küme olsun. $2^{A\times A}$ nın herhangi bir elemanı A üzerinde bir ikili bağıntıdır. $\{\psi_i \mid i \in I\} \subseteq (2^{A\times A}, \subseteq)$ keyfi alınsın. $\bigwedge_I \psi_i = \bigcap_I \psi_i$ ve $\bigvee_I \psi_i = \bigcup_I \psi_i$ dir. Bundan dolayı $(2^{A\times A}, \subseteq)$ bir tam kafestir. $\varphi, \psi \in 2^{A\times A}$ için

$$\varphi\psi = \varphi \circ \psi = \{(x,z) \in A \times A \mid \exists y \in A \therefore (x,y) \in \varphi \text{ ve} (y,z) \in \psi\}$$

olsun. Bu küme $\emptyset$ ise, $\varphi\psi = \emptyset$ alınsın. $\varphi \in 2^{A\times A}$ ve $\{\psi_i \mid i \in I\} \subseteq 2^{A\times A}$ keyfi alınsın. $2^{A\times A}$ nın bir *cl*-grupoid olduğunu göstermek için

$$\varphi(\bigvee_I \psi_i) = \bigvee_I (\varphi\psi_i) \text{ ve } (\bigvee_I \psi_i)\varphi = \bigvee_I (\psi_i\varphi)$$

eşitliklerini göstermek gerekir. $2^{A\times A}$ nın *po*-grupoid olduğu kolayca gösterilir. Bu sebeple

$$\bigvee_I (\varphi\psi_i) \leq \varphi(\bigvee_I \psi_i)$$

dır. Ters yönde kapsamayı göstermek için, $(a,b) \in \varphi(\bigvee_I \psi_i)$ alınsın. $(a,z) \in \varphi$ ve $(z,b) \in \bigvee_I \psi_i$ olacak şekilde bir $z \in A$ mevcuttur. $(z,b) \in \bigvee_I \psi_i$ olduğundan bir $i_0 \in I$ için $(z,b) \in \psi_{i_0}$ olur. Böylece $(a,z) \in \varphi$ ve $(z,b) \in \psi_{i_0}$ dır. Bunun sonucu olarak, $(a,b) \in \varphi\psi_{i_0}$ ve $(a,b) \in \bigvee_I (\varphi\psi_i)$ dır. Böylece

$$\varphi(\bigvee_I \psi_i) = \bigvee_I (\varphi\psi_i)$$

dır. Benzer şekilde $(\bigvee_I \psi_i)\varphi = \bigvee_I (\psi_i\varphi)$ elde edilir.

Örnek 9: G bir grup, $N(G)$ G nin tüm normal altgruplarının kümesi olsun. $X \subseteq G$ için $X^{-1} := \{x^{-1} \mid x \in X\}$ alalım. X in ürettiği normal altgrubu

$$\langle X\rangle := \bigcap_{\substack{X\subseteq H\\ H\in N(G)}} H = \left\langle\left\{\prod_{i=1}^{n} x_i \,\middle|\, x_i \in X\cup X^{-1}, i\in\{1,2,\cdots,n\}, n\in\mathbb{N}^*\right\}\right\rangle \in N(G)$$

ile gösterelim. $\{A_\tau \mid \tau\in T\}\subseteq N(G)$ keyfi alalım.

$$\bigwedge_T A_\tau = \bigcap_T A_\tau \in N(G)$$

ve $G\in N(G)$ olduğundan teorem 1 e göre $N(G)$ kapsamaya göre bir tam kafestir. $N(G)$ de

$$\bigvee_T A_\tau = \left\langle \bigcup_T A_\tau \right\rangle$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $a,b\in G$ için $a^{-1}b^{-1}ab$ yi $[a,b]$ ile gösterelim. $A,B\in N(G)$ için $AB=[A,B]=\langle\{[a,b] \mid a\in A, b\in B\}\rangle$ ile tanımlayalım. Bu takdirde $N(G)$ nin bir *cl*-grupoid olduğunu gösterelim. $\{A_\tau \mid \tau\in T\}\subseteq N(G)$ ve $B\in N(G)$ keyfi alalım. $N(G)$ nin *po*-grupoid olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu sebeple her $\tau\in T$ için $BA_\tau \le \bigvee_T (BA_\tau)$ olduğundan

$$\bigvee_T (BA_\tau) \le B\left(\bigvee_T A_\tau\right)$$

dır. Ters yönde kapsamayı göstermek için $[b,x]\in B\left(\bigvee_T A_\tau\right)$ keyfi alalım.

$$\bigvee_T A_\tau = \left\langle \bigcup_T A_\tau \right\rangle = \left\langle\left\{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n} \,\middle|\, a_j\in A_j\cup A_j^{-1}, j\in\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}\subseteq T, n\in\mathbb{N}^*\right\}\right\rangle$$

olduğundan $x=a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n}$, $a_j\in A_j\cup A_j^{-1}$, $j\in\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}$, $n\in\mathbb{N}^*$ şeklinde alabiliriz. $x^{-1}a^{-1}b^{-1}abx$ elemanını $[a,b]^x$ ile gösterelim.

$$[b,x]=[b,a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n}]=$$

$$=[b,a_{i_n}][b,a_{i_{n-1}}]^{a_{i_n}}[b,a_{i_{n-2}}]^{a_{i_n}a_{i_{n-1}}}\ldots[b,a_{i_1}]^{a_{i_n}a_{i_{n-1}}\cdots a_{i_2}} \in \bigvee_{k=1}^{n}(BA_{i_k})\subseteq \bigvee_T (BA_\tau)$$

dır. Yani $\bigvee_T (BA_\tau)\supseteq B\left(\bigvee_T A_\tau\right)$ dır. Böylece $\bigvee_T (BA_\tau)=B\left(\bigvee_T A_\tau\right)$ elde edilir. Benzer şekilde $\bigvee_T (A_\tau B)=\left(\bigvee_T A_\tau\right)B$ olduğu gösterilir.

Not: [48] de; $N(G)$ nin sadece *l*-grupoid olduğu gösterilmiştir. Örnek 9 da, $N(G)$ nin *cl*-grupoid olduğu gösterildi.

Örnek 10: G bir küme, w G üzerinde bir üçlü bağıntı olsun. $a,b\in G$ için

$$ab = \{x \in G \mid (a,b,x) \in w\} \in 2^G$$

olsun. Eğer bu küme Ø ise, $ab = \emptyset$ alalım. $A, B \in 2^G$ olsun. 2^G de

$$AB = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} (ab) \in 2^G$$

ile bir çarpım işlemi tanımlayalım. 2^G nin bir *cl*-grupoid olduğunu gösterelim. 2^G kapsama sırasına göre bir tam kafestir. $\{A_\tau \mid \tau \in T\} \subseteq 2^G$ ve $B \in 2^G$ keyfi alalım. 2^G nin *po*-grupoid olduğu açıktır. Bu sebeple $\bigcup_T (BA_\tau) \leq B\left(\bigcup_T A_\tau\right)$ dır. Ters yönde kapsamayı elde etmek için $x \in B\left(\bigcup_T A_\tau\right)$ keyfi alalım. Çarpım işleminin tanımından, $x \in bc$ olacak şekilde $b \in B$ ve $c \in \bigcup_T A_\tau$ elemanları mevcutturlar. Böylece $(b,c,x) \in w$ dır. Diğer taraftan $c \in \bigcup_T A_\tau$ olduğundan bir $\tau_0 \in T$ için $c \in A_{\tau_0}$ dır. Bundan dolayı $x \in BA_{\tau_0} \subseteq \bigcup_T (BA_\tau)$ dır. Sonuç olarak $\bigcup_T (BA_\tau) = B\left(\bigcup_T A_\tau\right)$ elde edilir. Benzer şekilde $\bigcup_T (A_\tau B) = \left(\bigcup_T A_\tau\right)B$ elde edilir.

K bir l_0 - grupoid olsun. K nın en büyük (en küçük) elemanını 1 ile (0 ile) gösterelim.

Tanım 6: K bir l_0-grupoid ve $a \in K$ olsun. Her $x \in K$ için $xa \leq a$ ise, a ya *sol ideal eleman* denir. Her $x \in K$ için $ax \leq a$ ise, a ya *sağ ideal eleman* denir. Hem sağ ideal, hem de sol ideal olan elemana *ideal eleman* denir [48].

K nın tüm ideal elemanlarının kümesini K_0 ile gösterelim.

Tanım 7: K bir l_0-grupoid olsun. Eğer K nın her elemanı ideal ise, K ya *yarı-integral l_0-grupoid* denir [38].

Tanım 8: K bir l_0-grupoid olsun. Eğer her $a \in K$ için $a1 = 1a = a$ ise, K ya *integral l_0-grupoid* denir [48].

Uyarı: i) Herhangi bir integral l_0-grupoid yarı-integraldir.

ii) Yarı integral olan fakat integral olmayan l_0-grupoidler de mevcuttur. Örnek olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

K bir tam kafes olsun. K da herhangi iki elemanın çarpımı 0 olarak tanımlanacak olursa, K bir *po*-grupoiddir. Böylece K bir l_0-grupoiddir. K yarı integraldir, fakat integral değildir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. l_0-grupoidlerin asal spektrumları

2.1.1. Bir l_0-grupoidde herhangi bir elemanın asal radikali

Önerme 1: K bir yarı-integral l_0-grupoid olsun. Bu takdirde her $a, b \in K$ için $ab \vee ba \leq a \wedge b$ dir.

İspat: K bir yarı-integral l_0-grupoid olduğundan keyfi $a, b \in K$ elemanları için $ab \leq a$ ve $ab \leq b$ dir. Bundan dolayı $ab \leq a \wedge b$ dir. Benzer şekilde $ba \leq a \wedge b$ elde edilir. Dolayısıyla $ab \vee ba \leq a \wedge b$ dir.

K bir l_0-grupoid olsun.

Tanım 9: $p \in K$ olsun. Eğer $ab \leq p$ olan keyfi $a, b \in K$ için $a \leq p$ veya $b \leq p$ elde ediliyorsa, $p \in K$ elemanına *asal* denir [48].

Örnek olarak, 1 elemanı asaldır.

Uyarı: [48] de asal eleman tanımı yapılırken $p \neq 1$ koşulu konulmaktadır. Kolaylık olması açısından burada $p \neq 1$ koşulu kaldırılmıştır.

Tanım 10: K bir kafes ve $p \in K$ olsun. Eğer $a \wedge b \leq p$ olan keyfi $a, b \in K$ için $a \leq p$ veya $b \leq p$ elde ediliyorsa, $p \in K$ elemanına $\wedge$*-asal* denir [38].

Tanım 11: $p \in K$ olsun. Eğer $a \wedge b = p$ olan keyfi $a, b \in K$ için $a = p$ veya $b = p$ elde ediliyorsa, $p \in K$ elemanına $\wedge$*-parçalanamaz* denir [48].

$\vee$-asal eleman tanımı ($\vee$-parçalanamaz eleman tanımı) tanım 10 a (tanım 11 e) dual olarak verilir.

L bir tam kafes olsun. L üzerinde bir çarpım işlemi $ab = a \wedge b$ ile verilsin. Bu takdirde örnek 1 de de belirtildiği gibi $(L, \wedge)$ bir l_0-grupoiddir.

Önerme 2: L bir dağılmalı kafes olsun. Bir $p \in L$ nin $\wedge$- asal olması için gerek ve yeter şart p nin $\wedge$- parçalanamaz olmasıdır.

İspat [48] de verilmiştir.

Önerme 3: K bir yarı-integral l_0-grupoid olsun. Bu takdirde K nın her asal elemanı $\wedge$- asaldır.

İspat: p bir asal eleman ve $a \wedge b \leq p$ olsun. Önerme 1 e göre $ab \leq a \wedge b \leq p$ dir. Böylece $a \leq p$ veya $b \leq p$ elde edilir.

L bir l_0-grupoid olsun. $a \in L$ için L nin a yı içeren tüm asal elemanlarının arakesiti $R(a)$ ile gösterilsin. $R(a)$ elemanına *a nın asal radikali* denir.

Uyarı: Bir değişmeli Nöther *l*-grupoidde herhangi bir eleman için diğer bir asal radikal tanımı [48] de verilmiştir. Burada verilen herhangi bir elemanın asal radikal tanımı ile [48] de verilen tanım çakışır.

Önerme 4: L bir l_0-grupoid olsun. Bu takdirde:

i) $a \leq R(a)$;

ii) $R(R(a)) = R(a)$;

iii) $a \leq b$ ise $R(a) \leq R(b)$ dır.

İspat açıktır.

Önerme 4 ile L de R-radikal alma işleminin aslında L de bir kapanış operatörü olduğu görülür.

$a \in L$ olsun. Eğer $a = R(a)$ ise a elemanına *R-radikal* eleman denir. L nin tüm radikal elemanlarının kümesini L_R ile gösterelim. L_R de kısmen sıralama olarak L deki kısmen sıralama alınsın.

Önerme 5: L_R kümesi bir tam kafestir.

İspat: $1 \in L_R$ olduğu açıktır. $\{a_\tau : \tau \in T\} \subseteq L_R$ keyfi alınsın. $a := \wedge_T a_\tau \in L_R$ olduğunu göstermek gerekir. $a_\tau \in L_R$ olduğundan $a_\tau = R(a_\tau)$ dır. Bundan dolayı $p_{\nu\tau}$ elemanları asal olmak üzere $a_\tau = \bigwedge_{\substack{\nu \in Q_\tau \\ a_\tau \leq p_{\nu\tau}}} p_{\nu\tau}$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla

$$a = \bigwedge_T a_\tau = \bigwedge_{\tau \in T}\left(\bigwedge_{\substack{a_\tau \leq p_{\nu\tau} \\ \nu \in Q_\tau}} p_{\nu\tau} \right) = \bigwedge_T \bigwedge_{Q_\tau} p_{\nu\tau}$$

ve $a \leq a_\tau \leq p_{\nu\tau}$ dır. Böylece her $\nu \in Q_\tau, \tau \in T$ için $a \leq p_{\nu\tau}$ dır. Bunların sonucu olarak $a = \wedge_T a_\tau \in L_R$ dir. Teorem 1 e göre L_R kümesi bir tam kafestir.

L deki kafes işlemlerini $\cap$ ve + ile, L_R deki kafes işlemlerini $\wedge$ ve $\vee$ ile gösterelim.

Önerme 6: L bir l_0-grupoid olsun. Bu takdirde;

i) Her $a, b \in L$ için $R(a \cap b) \leq R(a) \wedge R(b) \leq R(ab)$ dir;

ii) Her $a, b \in L$ için $R(a+b) = R(R(a)+R(b))$ dir.

İspat: i): $a \cap b \leq a$ ve $a \cap b \leq b$ olduğundan önerme 4, iii) ye göre $R(a \cap b) \leq R(a)$ ve $R(a \cap b) \leq R(b)$ dir. Dolayısıyla $R(a \cap b) \leq R(a) \wedge R(b)$ dır. Diğer taraftan p_τ elemanları asal olmak üzere $R(ab) = \bigwedge_T p_\tau$ şeklinde yazılabilir. Böylece keyfi fakat sabit bir $\tau \in T$ için $ab \leq p_\tau$ dır. p_τ asal olduğundan $a \leq p_\tau$ veya $b \leq p_\tau$ bulunur. Buradan $R(a) \leq p_\tau$ veya $R(b) \leq p_\tau$ elde edilir. Böylece $R(a) \wedge R(b) \leq p_\tau$ dır. $\tau \in T$ keyfi olduğundan $R(a) \wedge R(b) \leq \bigwedge_T p_\tau = R(ab)$ elde edilir.

ii): $a \leq R(a)$ ve $b \leq R(b)$ olduğundan $a + b \leq R(a) + R(b)$ ve önerme 4,iii) ye göre $R(a+b) \leq R(R(a)+R(b))$ elde edilir. $a \leq a+b, b \leq a+b$ olduğundan $R(a) \leq R(a+b)$, $R(b) \leq R(a+b)$ yazılabilir. Bunun sonucu olarak $R(a)+R(b) \leq R(a+b)$ dir. Radikal alma özelliklerinden $R(R(a)+R(b)) \leq R(R(a+b)) = R(a+b)$ bulunur. Böylece istenen elde edilir.

Önerme 7: L bir yarı-integral l_0-grupoid olsun. Bu takdirde;

i) Her $a, b \in L$ için $R(ab) = R(a \cap b) = R(a) \wedge R(b)$ dir;

ii) $a_\tau \in L_R, \tau \in T$ ise, $\bigcap_T a_\tau = \bigwedge_T a_\tau$ dır.

İspat: i): Önerme 6, i) ye göre $R(a \cap b) \leq R(a) \wedge R(b) \leq R(ab)$ olduğu biliniyor. İspatı tamamlamak için $R(ab) \leq R(a \cap b)$ olduğunu göstermek gerekir. L yarı integral olduğundan $ab \leq a$ ve $ab \leq b$, dolayısıyla $ab \leq a \cap b$ elde edilir. Bunun sonucu olarak $R(ab) \leq R(a \cap b)$ bulunur.

ii): Önerme 5 in ispatından elde edilir.

Uyarı: L l_0-grupoidinin yarı-integral olma özelliği sadece önerme 7 de kullanıldı. L yarı-integral değilse, $R(ab) = R(a \cap b) = R(a) \wedge R(b)$ eşitliği doğru olmayabilir. Örnek olarak, $L = \{0, a, b, 1\}$, $0<a<1$, $0<b<1$ ve burada herhangi iki elemanın çarpımı supremumları olarak tanımlansın. Bu takdirde L bir l_0-grupoiddir. Fakat yarı integral değildir. $R(ab) = R(1) = 1$ dir. $R(a) = a, R(b) = b$ olduğundan $R(a) \wedge R(b) = 0$ dır. Dolayısıyla $R(ab) = R(a \cap b) = R(a) \wedge R(b)$ eşitliği gerçeklenmez.

Teorem 2: L bir yarı-integral l_0-grupoid olsun. Bu takdirde keyfi $a, b_\tau \in L_R (\tau \in T)$ elemanları için

$$a \wedge \left(\bigvee_T b_\tau\right) = \bigvee_T \left(a \wedge b_\tau\right)$$

dır. Yani L_R bir tam Brouwerian kafesidir. Özel olarak L_R dağılmalıdır.

İspat: $a, b_\tau \in L_R (\tau \in T)$ olsun. $a \wedge b_\tau \leq a \wedge \left(\bigvee_T b_\tau\right)$ ile $\bigvee_T (a \wedge b_\tau) \leq a \wedge \left(\bigvee_T b_\tau\right)$ elde edilir. Geriye ters yöndeki eşitsizliği göstermek kalır. $\bigvee_T (a \wedge b_\tau) = \bigwedge_Q p_v$ olacak şekilde p_v asal elemanlarının bir $S = \{p_v \mid v \in Q\}$ ailesi mevcuttur. Herhangi $p_v \in S$ için $\bigvee_T (a \wedge b_\tau) \leq p_v$ dır. Bu takdirde herhangi $p_v \in S$ ve her $\tau \in T$ için $a \wedge b_\tau \leq p_v$ dır. Önerme 3 e göre $a \wedge b_\tau \leq p_v$ den $a \leq p_v$ veya $b_\tau \leq p_v$ bulunur. $a \leq p_v$ olduğu kabul edilirse, $a \wedge \left(\bigvee_T b_\tau\right) \leq a \leq p_v$ dır. Eğer $a \not\leq p_v$ ise, her $\tau \in T$ için $b_\tau \leq p_v$ dır. Bundan dolayı $\bigvee_T b_\tau \leq p_v$ ve $a \wedge \left(\bigvee_T b_\tau\right) \leq \bigvee_T b_\tau \leq p_v$ elde edilir. Böylece her $v \in Q$ için $a \wedge \left(\bigvee_T b_\tau\right) \leq p_v$ dır. Sonuç olarak $a \wedge \left(\bigvee_T b_\tau\right) \leq \bigwedge_Q p_v = \bigvee_T (a \wedge b_\tau)$ ve $a \wedge \left(\bigvee_T b_\tau\right) = \bigvee_T (a \wedge b_\tau)$ elde edilir.

Uyarı: Teorem 2 ilk defa bir değişmeli halkanın R-radikal ideallerinin kafesi için [76] da ispatsız olarak verilmiştir.

Sonuç 1: L bir yarı-integral l_0-grupoid olsun. L nin her elemanı radikal ise L bir tam Brouwerian kafesidir ve her $a, b \in L$ için $ab = a \wedge b$ dır.

İspat: L nin tam Brouwerian kafesi olduğu teorem 2 nin bir sonucudur. Önerme 7, i) ye göre $R(ab) = R(a) \wedge R(b)$ dır. Fakat L nin her elemanı radikal olduğundan $ab = a \wedge b$ elde edilir.

$L = L_R$ olacak şekilde bir L yarı-integral l_0-grupoide örnek olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 11: X bir topolojik uzay ve $(O(X), \subseteq)$ X in tüm açık altkümelerinin kafesi olsun. Önce $(O(X), \subseteq)$ kafesinin bir tam kafes olduğunu gösterelim. $\emptyset \in (O(X), \subseteq)$ dır. $\{A_\tau \mid \tau \in T\} \subseteq O(X)$ keyfi alınsın. Herhangi sayıda açık kümenin birleşimi de açık olduğundan $\bigcup_T A_\tau \in O(X)$ dır. Teorem 1 in dualine göre $(O(X), \subseteq)$ bir tam kafestir. Bu kafesteki infumum işlemini $\wedge$ ile gösterelim. Sonlu tane $A_1, A_2, \cdots, A_n$ açık altkümeleri için $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ dir. Fakat keyfi $\{A_\tau \mid \tau \in T\} \subseteq O(X)$ için $\bigwedge_T A_\tau = \bigcap_T A_\tau$ eşitliği doğru olmayabilir. $(O(X), \subseteq)$ kafesinde çarpım olarak $\wedge$ alındığında $O(X)$ in bir integral

l_0-grupoid olduğu kolayca görülür. Şimdi $O(X)$ in her elemanının radikal olduğunu gösterelim.

A keyfi bir açık küme olsun. Bu takdirde B=X\A kapalı ve A=X\B dir. $A = \bigwedge_{b\in B} X/\overline{\{b\}}$ olduğunu göstereceğiz, burada $\overline{\{b\}}$ kümesi $\{b\}$ kümesinin kapanışıdır. Keyfi bir $b \in B$ için $\overline{\{b\}} \subseteq B$ dir. Böylece keyfi bir $b \in B$ için A=X\B$\subseteq X/\overline{\{b\}}$, dolayısıyla $A \subseteq \bigwedge_{b\in B} X/\overline{\{b\}}$ dir. Diğer taraftan keyfi bir $b_1 \notin A$ için $b_1 \in B$ ve $\overline{\{b_1\}} \subseteq B$ dir. Böylece $b_1 \notin X/\overline{\{b_1\}}$ ve $b_1 \notin \bigwedge_{b\in B} X/\overline{\{b\}}$ dir. Dolayısıyla $A = \bigwedge_{b\in B} X/\overline{\{b\}}$ elde edilir.

Şimdi keyfi bir $b \in X$ için $X/\overline{\{b\}}$ açık kümesinin $\wedge$-asal olduğunu gösterelim. $C,D \in O(X)$ ve $C \wedge D = C \cap D \subseteq X/\overline{\{b\}}$ olsun. Bu takdirde $b \notin C \cap D$ dir. Bundan dolayı $b \notin C$ veya $b \notin D$ dir. C ve D açık kümeler olduğundan $\overline{\{b\}} \subseteq X/C$ veya $\overline{\{b\}} \subseteq X/D$ dir. Böylece $C \subseteq X/\overline{\{b\}}$ veya $D \subseteq X/\overline{\{b\}}$ dir. Yani $X/\overline{\{b\}}$ açık kümesi $\wedge$-asaldır. Diğer taraftan $A = \bigwedge_{b\in B} X/\overline{\{b\}}$ olduğundan keyfi A açık kümesi $\wedge$-asal kümelerin infumumu şeklindedir. Böylece keyfi açık küme radikaldir.

Uyarı: Bu sonucun tersi de doğrudur: L bir yarı-integral l_0-grupoid ve $L = L_R$ ise, L l_0-grupoidinin bir X T_0-topolojik uzayının açık kümelerinin $(O(X),\subseteq)$ grupoidine izomorf olduğunu bölüm 2.1.2 de göstereceğiz.

Önerme 8: Herhangi bir integral l-grupoidde, her maksimal eleman asaldır.

İspat: L bir integral l-grupoid ve $m \in L$ maksimal olsun. $ab \le m$ ve $a \not\le m$ olsun. Bu takdirde $a \vee m = 1$ dir. Bu eşitliği kullanarak

$$b = 1b = (a \vee m)b = ab \vee mb \le m \vee m = m$$

elde edilir.

Uyarı: $[48]$ de önerme 8 in herhangi bir integral *po*-grupoid için doğru olduğu iddia edilir, bu ise doğru değildir. Aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 12: Bilinen 5 elemanlı modüler, fakat dağılmalı olmayan $M_3 = \{0,x,y,z,1\}$ kafesini göz önüne alalım, burada 0<x<1, 0<y<1, 0<z<1, $x \wedge y = 0$, $x \wedge z = 0$, $y \wedge z = 0$, $x \vee y = 1$, $x \vee z = 1$, $y \vee z = 1$ dır. M_3 $\wedge$ işlemine göre bir integral l_0-grupoid olarak düşünebilir. Dağılma özelliği sağlanmadığından bu integral l_0-grupoid bir l-grupoid değildir. M_3 ün x, y, z elemanları maksimaldirler, fakat $\wedge$-asal değildirler.

L bir integral l-grupoid olsun. $a \in L, a \neq 1$ keyfi alalım. a yı içeren tüm maksimal elemanların arakesitini $F(a)$ ile gösterelim. Eğer a yı içeren maksimal eleman mevcut değilse, $F(a) = 1$ alalım.

$a = F(a)$ olacak şekilde tüm $a \in L$ elemanlarının kümesini L_F ile gösterelim. L_F de L deki kısmen sıralama alınsın.

Teorem 3: L_F bir tam kafestir.

İspat: Önerme 5 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4: L bir integral l-grupoid olsun. Bu takdirde keyfi $a, b_\tau \in L_F \; (\tau \in T)$ elemanları için

$$a \wedge \left(\bigvee_T b_\tau\right) = \bigvee_T (a \wedge b_\tau)$$

dır. Yani L_F bir tam Brouwerian kafesidir. Özel olarak L_F dağılmalıdır.

İspat: Önerme 8 kullanılarak teorem 2 nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 2 ve teorem 4 ün önemli özel durumları aşağıda sonuç 2 ve sonuç 3 olarak verildi.

K (değişmeli veya birleşmeli olmayabilir) keyfi bir halka olsun. K daki tüm ideallerin kümesi $L(K)$ olsun. $L(K)$ da sıra olarak kapsama sırası alınsın. B ve C, K nın iki ideali ve tüm bc $(b \in B, c \in C)$ elemanlarını içeren tüm ideallerin arakesiti BC olsun. Örnek 6 ya göre K nın tüm toplamlı altgruplarının l_0-grupoidi $A(K)$ bir *cl*-grupoiddir. Önerme 16 da K yerine $A(K)$, K_0 yerine $L(K)$ alınırsa, $L(K)$ nın $A(K)$ nın bir tam altkafesi ve önerme 17 ye göre $L(K)$ bir yarı-integral *cl*-grupoid olur. K nın birleşmeli bir halka olması durumunda yukarıda verilen herhangi iki idealin çarpımı örnek 7 deki çarpım ile çakışır. Eğer K nın bir A ideali $L(K)$ nın bir asal elemanı ise, *A ya K da asal* denir. $L(K)$ l_0-grupoidi için $L_R(K)$ kafesini inceleyelim. Kapsama bağıntısına göre $L_R(K)$ bir tam kafestir.

Sonuç 2: Her K halkası için $L_R(K)$ bir tam Brouwerian kafesidir ve özel olarak dağılmalıdır.

Şimdi teorem 2 nin kafeslere nasıl uygulanacağını gösterelim.

L bir tam kafes olsun. $a \in L$ için a yı içeren tüm $\wedge$-asal elemanların arakesitini $R_{\wedge}(a)$ ile gösterelim. $a = R_{\wedge}(a)$ şartını sağlayan tüm elemanların kümesini $L_{R_{\wedge}}$ ile gösterelim. $L_{R_{\wedge}}$ bir tam kafestir. $L_{R_{\vee}}$ kafesi de dual yol ile (benzer şekilde) tanımlanır.

Sonuç 3: $L_{R_{\wedge}}$ kafesi bir tam Brouwerian kafesidir.

$L_{R_{\vee}}$ için sonuç 3 e dual bir iddia gerçeklenir.

L bir tam dağılmalı kafes ve her $a \in L$, a yı içeren tüm $\wedge$-parçalanamaz elemanların arakesiti olsun. Bu takdirde L bir tam Brouwerian kafesidir.

Bu iddianın duali de doğrudur.

Uyarı: Kavram olarak benzer, fakat farklı bir iddiayı [77] de Gorbunov elde etti.

2.1.2. l_0-grupoidlerin asal spektrumu ve T_0 -kafesler

L bir yarı-integral l_0-grupoid olsun. R-radikal elemanların L_R kafesi göz önüne alınsın. L l_0-grupoidinin 1 den farklı olan tüm asal elemanlarının kümesini $P(L)$ ile gösterelim. $a \in L_R$ olsun. $P(L)$ nin a yı içeren tüm elemanlarının kümesini $V(a)$ ile gösterelim.

Önerme 9: $P(L)$ de $\{V(a) | a \in L_R\}$ kümeler sistemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $V(0) = P(L)$, burada 0 L_R nin en küçük elemanıdır;

ii) $V(1) = \varnothing$;

iii) $a \le b \Leftrightarrow V(a) \supseteq V(b)$;

iv) Herhangi $a, b \in L_R$ için $V(a \wedge b) = V(a) \cup V(b)$;

v) Herhangi $a_\tau (\tau \in T)$ elemanlar sistemi için $V\left(\bigvee_{\tau \in T} a_\tau\right) = \bigcap_{\tau \in T} V(a_\tau)$;

vi) $a \ne b \Leftrightarrow V(a) \ne V(b)$ dir.

İspat: i): $P(L)$ nin tüm elemanları 0 ı içerdiği için $V(0) = P(L)$ dir.

ii) Açık.

iii): $a \le b$ olsun. b yi içeren tüm asal elmanlar a yı da içereceğinden $V(a) \supseteq V(b)$ dir. Tersine olarak $V(a) \supseteq V(b)$ olsun. $a, b \in L_R$ olduğundan a $V(a)$ daki asal elemanların, b de $V(b)$ deki asal elemanların arakesiti şeklindedir. $V(a) \supseteq V(b)$ olduğundan $a \le b$ elde edilir.

iv): $a \wedge b \le a, a \wedge b \le b$ olduğundan iii) ye göre $V(a \wedge b) \supseteq V(a)$, $V(a \wedge b) \supseteq V(b)$ dir. Dolayısıyla $V(a \wedge b) \supseteq V(a) \cup V(b)$ yazılabilir. Ters yönde kapsamayı göstermek için

$p \in V(a \wedge b)$ keyfi alalım. Bu takdirde $a \wedge b \leq p$ dir. p asal olduğundan önerme 3 e göre p $\wedge$-asaldır. Dolayısıyla $a \leq p$ veya $b \leq p$ dır. Bunun sonucu olarak $p \in V(a)$ veya $p \in V(b)$ dir. Böylece $V(a \wedge b) = V(a) \cup V(b)$ bulunur.

v): $a_\tau \leq \bigvee_{\tau \in T} a_\tau$ olduğundan iii) ye göre $V\left(\bigvee_{\tau \in T} a_\tau\right) \subseteq V(a_\tau)$ ve dolayısıyla $V\left(\bigvee_{\tau \in T} a_\tau\right) \subseteq \bigcap_{\tau \in T} V(a_\tau)$ yazılabilir. Ters yönde kapsamayı göstermek için $p \in \bigcap_{\tau \in T} V(a_\tau)$ keyfi alalım. Bu takdirde her $\tau \in T$ için $a_\tau \leq p$ dır. Dolayısıyla $\bigvee_T a_\tau \leq p$ olduğundan $p \in V\left(\bigvee_{\tau \in T} a_\tau\right)$ bulunur. Böylece istenen elde edilir.

vi): $a, b \in L_R$, $a \neq b$ olsun. $V(a) = V(b)$ olması durumunda iii) ye göre a=b çelişkisi bulunur. Tersine olarak $V(a) \neq V(b)$ ve a=b olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $V(a) = V(b)$ çelişkisi elde edilir.

Önerme 9 a göre $\{V(a), a \in L_R\}$ sistemi, $P(L)$ üzerinde kapalı kümeleri $V(a)\,(a \in L_R)$ olan bir topoloji belirler. $P(L)$ üzerindeki bu topolojiye *Spectral veya Zariski topolojisi* denir. Bu topoloji ile bir $P(L)$ topolojik uzayı L l_0-grupoidinin bir asal spektrumu olarak tanıtılabilir ve $Spec(L)$ ile gösterilir.

Uyarı: A birleşmeli ve değişmeli bir halka olmak üzere, L A nın tüm ideallerinin l-yarıgrubu ise, $Spec(L)$ topolojik uzayı A nın bir asal spektrumu ([44]) ile çakışır. Eğer A değişmeli değilse, $Spec(L)$ genel olarak [78] de bahsedilen spektral topolojili primitif ideallerin kümesinden farklıdır.

Önerme 10: $Spec(L)$ de aşağıdaki özellikler gerçeklenir:

i) $x \in P(L)$ ise, $Spec(L)$ de bir x noktasının $\overline{\{x\}}$ kapanışı $V(x)$ dır;

ii) $x, y \in P(L)$ ise, bu takdirde $y \in \overline{\{x\}}$ olması için gerek ve yeter şart $V(y) \subseteq V(x)$ olmasıdır.

İspat: i): $V(x)$ bir kapalı küme ve $x \in V(x)$ olduğundan $\overline{\{x\}} \subseteq V(x)$ dır. $q \in V(x)$ olsun, yani $x \leq q$ olsun. x i içeren bir keyfi $V(a)$ yı alalım. $x \in V(a)$ ise, $a \leq x$ dir. Böylece $a \leq x \leq q$ dur. Sonuç olarak $q \in V(a)$ dır, yani q elemanı x i içeren keyfi bir kapalı kümeye aittir. Bu takdirde $q \in \overline{\{x\}}$ dır. Bundan dolayı $\overline{\{x\}} = V(x)$ dir.

ii) $y \in \overline{\{x\}}$ olsun. Bu takdirde $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$ dir. Bu ve yukarda ispatlanan i) özelliğinden $V(y) \subseteq V(x)$ olduğu elde edilir. Şimdi $V(y) \subseteq V(x)$ olsun. Bu takdirde $y \in V(x) = \overline{\{x\}}$ dir.

$\text{Spec}(L)$ topolojik uzayının kapalı kümelerinin kafesini $\overline{L}$ ile gösterelim. $\overline{L} = \{V(a) \mid a \in L_R\}$. $\overline{L}$ de bir kısmen sıralama olarak kapsama bağıntısını alalım.

Önerme 11: i) $\overline{L}$ kafesi tamdır.

ii) $a \longrightarrow V(a)$ ile tanımlanan $\vartheta : L_R \longrightarrow \overline{L}$ dönüşümü bir kafes anti-izomorfisidir;

iii) Herhangi $a_\tau \in L_R (\tau \in T)$ elemanlar sistemi için $V\left(\bigwedge_{\tau \in T} a_\tau\right) = \overline{\bigcup_{\tau \in T} V(a_\tau)}$ dır, burada sağ taraf $\bigcup_{\tau \in T} V(a_\tau)$ nın kapanışıdır.

İspat: i) Önerme 9 a göre $\overline{L}$, $P(L)$ ve $V(a)$ kümelerinin keyfi ailesinin arakesitini içerir. Böylece teorem 1 e göre $\overline{L}$ bir tam kafestir.

ii) $a \in L_R$ olmak üzere $a \longrightarrow V(a)$ dönüşümü, önerme 9 a göre bir kafes anti-izomorfisidir.

iii) Önerme 9, iii) e göre $V\left(\bigwedge_{\tau \in T} a_\tau\right) \supseteq V(a_\tau)$ dır ve bu ifadeden

$$V\left(\bigwedge_{\tau \in T} a_\tau\right) \supseteq \overline{\bigcup_{\tau \in T} V(a_\tau)} \qquad (1)$$

olduğu görülür. $\overline{\bigcup_{\tau \in T} V(a_\tau)}$ kapalı küme olduğundan bir $b \in L_R$ için $V(b) = \overline{\bigcup_{\tau \in T} V(a_\tau)}$ dır. Buradan keyfi $\tau \in T$ için $V(b) \supseteq V(a_\tau)$ elde edilir. Önerme 9 a göre keyfi $\tau \in T$ için $b \le a_\tau$ dır. Bu takdirde $b \le \bigwedge_{\tau \in T} a_\tau$ dır. Böylece

$$V(b) = \overline{\bigcup_{T} V(a_\tau)} \supseteq V\left(\bigwedge_{\tau \in T} a_\tau\right) \qquad (2)$$

bulunur. Böylece istenen eşitlik (1) ve (2) den bulunur.

Önerme 12: $\text{Spec}(L)$ topolojik uzayı bir T_0-uzayıdır.

İspat: $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ olacak şekilde $x, y \in P(L)$ elemanlarını alalım. Önerme 10, i) ye göre $V(x) = V(y)$ dir. Önerme 9, iii) ye göre $x = y$ elde edilir.

Tanım 12: L bir tam dağılmalı kafes olsun. Eğer L nin her a elemanı a da içerilen tüm $\vee$-parçalanamaz elemanların bir birleşimi şeklindeyse, L ye bir T_0 *-kafesi* denir.

L bir T_0- kafesi olsun. Bu takdirde L nin duali olan $\hat{L}$ tam dağılmalı kafesi aşağıdaki özelliğe sahiptir:

Her bir $\hat{a} \in \hat{L}$ elemanı $\hat{a}$ yi içeren tüm $\wedge$-parçalanamaz elemanların bir arakesitidir.

$\hat{L}$ kafesi $\wedge$' a göre bir yarı-integral l_0-grupoid olarak göz önüne alınırsa önerme 9 a göre $\hat{L}$ için $\mathrm{Spec}(\hat{L})$ topolojik uzayı elde edilir.

X bir topolojik uzay olsun. X in kapalı kümelerinin kafesini $l(X)$ ile gösterelim.

Teorem 5: Bir L kafesinin T_0-kafesi olması için gerek ve yeter şart L nin uygun bir X T_0-uzayının kapalı kümelerinin bir $l(X)$ kafesine izomorf olmasıdır [79].

İspat: L bir T_0-kafesi ve $\hat{L}$, L nin duali olsun. L bir T_0-kafesi ve $\hat{L}$, L ye dual olduğundan her bir $\hat{a} \in \hat{L}$ elemanı $\hat{a}$ yı içeren tüm $\wedge$-parçalanamaz elemanların bir arakesitidir. Önerme 2 ye göre keyfi $\wedge$-parçalanamaz eleman $\wedge$-asaldır. Dolayısıyla $\hat{L} = \hat{L}_R$ dır. $X := \mathrm{Spec}(\hat{L})$ olsun. Önerme 12 ye göre X bir T_0-uzayıdır. $l(X)$ X in kapalı kümelerinin kafesi olduğundan önerme 11, ii) ye göre $\hat{L}$ ile $l(X)$ anti-izomorfdur. Diğer taraftan L ile $\hat{L}$ anti-izomorf olduğundan L ile $l(X)$ izomorfdur.

Ters yönde iddia edilen ifadenin doğruluğunu gösterelim. L uygun bir X T_0-uzayının kapalı kümelerinin bir $l(X)$ kafesine izomorf olsun. Örnek 11 e göre X in tüm açık kümelerinin yarı-integral l_0-grupoidinin her elemanının radikal eleman olduğunu ve teorem 2 ye göre dağılmalı kafes olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla onun duali olan $l(X)$ de dağılmalıdır. Dolayısıyla önerme 2 ye göre $l(X)$ de $\vee$-asal tanımı ile $\vee$-parçalanamaz tanımı çakışır. Yine örnek 11 e göre $l(X)$ de her A elemanı A nın içerdiği $\vee$-parçalanamaz elemanların supremumu şeklindedir. Dolayısıyla $l(X)$ bir T_0-kafesidir.

Sonuç 4: L bir yarı-integral l_0-grupoid ve $L = L_R$ olsun. Bu takdirde $\hat{L}$ bir T_0-kafese izomorfdur.

Önerme 13: X bir T_0-topolojik uzay ve A bir $\vee$-parçalanamaz kapalı altküme olsun. Bu takdirde T_0-uzaylarının homeomorfisi altında A nın resmi bir $\vee$-parçalanamaz kapalı kümedir.

İspat açıktır.

Aşağıdaki önermenin doğruluğunu görmek kolaydır.

Önerme 14: Eğer X ve Y homeomorf T_0-uzaylar ise, onların $l(X)$ ve $l(Y)$ kafesleri izomorfdur.

Uyarı: Önerme 14 ün tersi T_1-uzayları için gerçeklenir, fakat T_0-uzaylar için gerçeklenmez. Gerçekten X ve Y homeomorf değil, fakat onların $l(X)$ ve $l(Y)$ kafesleri izomorf olacak şekilde X ve Y T_0-uzaylarını inşa etmek zor değildir.

Tanım 13: X bir T_0-uzay olsun. X deki her A $\vee$-parçalanamaz kapalı küme için, $\overline{\{x\}} = A$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası mevcutsa, X T_0- uzayına *dengeli* denir [80].

Bu nokta bir $\vee$-parçalanamaz kapalı kümenin bir üretici elemanı olarak değerlendirilebilir. X in en fazla bir tane üretici eleman içerdiği açıktır.

Uyarı: Eğer $\Phi : X \to Y$, X ve Y T_0-uzaylarının bir homeomorfisi ve Y dengeli ise, X de dengelidir. Gerçekten A, X in keyfi bir $\vee$- parçalanamaz kapalı altkümesi olsun. Bu takdirde $\Phi(A)$ kümesi Y nin bir $\vee$- parçalanamaz altkümesidir.Y dengeli olduğundan $\overline{\{y\}} = \Phi(A)$ olacak şekilde $y \in Y$ elemanı mevcuttur. Bu takdirde $\overline{\{\Phi^{-1}(y)\}} = A$ dır. Dolayısıyla X dengelidir.

Teorem 6: Her L yarı-integral l_0-grupoidi için, $\mathrm{Spec}(L)$ topolojik uzayı dengelidir.

İspat: Önerme 9 ve önerme 11 e göre, $a \in L_R$ elemanının $\wedge$-parçalanamaz olması için gerek ve yeter şart $V(a)$ nın $\vee$-parçalanamaz olmasıdır. Bundan dolayı $V(a)$ $\vee$-parçalanamaz ise $a \in L_R$ $\wedge$-parçalanamazdır. Önerme 2 ve teorem 1 e göre $a \in L_R$ $\wedge$-asaldır (yani $a \in P(L)$). Önerme 10, i) ye göre bir $a \in P(L)$ noktasının kapanışı $V(a)$ dır. Bu ise $\mathrm{Spec}(L)$ uzayının dengeli olduğunu gösterir.

Açık olarak her T_2-uzayı dengelidir. Dengeli olmayan T_1-uzayları da mevcuttur.

Önerme 15: L_1 ve L_2, T_0-kafesleri olsunlar. L_1 ve L_2 nin izomorf olmaları için gerek ve yeter şart $\mathrm{Spec}(\hat{L}_1)$ ve $\mathrm{Spec}(\hat{L}_2)$ topolojik uzaylarının homeomorf olmasıdır.

İspat: $\mathrm{Spec}(\hat{L}_1)$ ve $\mathrm{Spec}(\hat{L}_2)$ topolojik uzayları homeomorf olsunlar. Önerme 9 ve önerme 11, ii) ye göre, $\mathrm{Spec}(\hat{L})$ nin kapalı kümelerinin kafesi L ye izomorfdur. Bundan dolayı önerme 14 e göre, L_1 ve L_2 kafesleri izomorfdur. Tersine olarak L_1 ve L_2 izomorf olsunlar: $F : L_1 \to L_2$. Bu takdirde onların dualleri de izomorfdur: $\hat{F} : \hat{L}_1 \to \hat{L}_2$, burada $\hat{F}$ $\hat{L}_1$ deki $\wedge$-parçalanamaz elemanları $\hat{L}_2$ deki $\wedge$-parçalanamaz elemanlara götürür. Bu bir $\hat{F}_p : P(\hat{L}_1) \to P(\hat{L}_2)$ bire-bir ve örten dönüşümünü verir. L_1 ve L_2 izomorf olduklarından $a \in \hat{L}_1$ için $\hat{F}_p(V(a)) = V(\hat{F}(a))$ eşitliği gerçeklenir, yani $\hat{F}_p$ bir homeomorfidir.

X bir T_0-uzayı, $l(X)$ X in kapalı kümelerinin kafesi ve $\hat{l}(X)$, $l(X)$in duali olsun.

$\text{Spec}(\hat{l}(X))$ T_0-uzayına, X T_0-uzayının bir ***dengeli kabuğu*** denir ve aşağıdaki şekilde karakterize edilebilir:

Bir X T_0-uzayından bir Y dengeli T_0-uzayına her homeomorfizma, $\text{Spec}(\hat{l}(X))$ den Y ye tanımlı bir homeomorfiye tek türlü olarak genişletilebilir.

Teorem 7: X T_0-uzayı olsun. Bu takdirde:

i) $F(x)=\widehat{\overline{\{x\}}}$ dönüşümü, X den $\text{Spec}(\hat{l}(X))$ nın her yerde yoğun bir altuzayına tanımlı homeomorfizmdir;

ii) X in tüm $\text{Spec}(\hat{l}(X))$ uzayına homeomorf olması için gerek ve yeter koşul X in dengeli olmasıdır.

İspat: $l(X)$ kafesinin duali X deki tüm açık kümelerin kafesi ile belirlenebilir. Bundan dolayı her bir $a \in l(X)$ için, X de $\hat{a}$ ile gösterilen bir komplement bulunabilir. $F: X \to \text{Spec}(\hat{l}(X))$ dönüşümü, her bir $x \in X$ için x noktasının kapanışının duali alınarak, yani $F(x)=\widehat{\overline{\{x\}}}$ olarak tanımlansın. $\overline{\{x\}}$ $\vee$-parçalanamaz olduğundan, $F(x) \in P(\hat{l}(X))$ dır. Eğer X de $\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$ ise, $x=y$ dir. Bu F in bire-bir olduğunu gösterir.

$a \in l(X)$ bir kapalı küme olsun. F dönüşümü a kümesini

$$F(a)=\left\{\widehat{\overline{\{x\}}} \mid x \in a\right\}=\left\{\widehat{\overline{\{x\}}} \mid \overline{\{x\}} \subseteq a, x \in X\right\}$$

$$=\left\{\widehat{\overline{\{x\}}} \mid \hat{a} \subseteq \widehat{\overline{\{x\}}}, x \in X\right\}=V(\hat{a}) \cap F(X)$$

e dönüştürür . Bununla birlikte $V(\hat{a}) \cap F(X)$ kümeleri $F(X)$ uzayının kapalı kümelerinin bir kafesi şeklindedir, burada $V(\hat{a})$ $\text{Spec}(\hat{l}(X))$ deki kapalı kümelerden biridir. Sonuç olarak F kapalıdır. F bire-bir olduğundan $F^{-1}: F(X) \to X$ dönüşümü mevcuttur. Bu takdirde $F(X)$ deki keyfi bir kapalı küme $V(\hat{a}) \cap F(X)$ şeklindedir. Bundan dolayı

$$F^{-1}(V(\hat{a})\cap F(X))=\left\{x\in X\mid \hat{a}\subseteq \widehat{\overline{\{x\}}}\right\}=\left\{x\in X\mid \overline{\{x\}}\subseteq a\right\}=a$$

dır. Dolayısıyla F^{-1} kapalı bir dönüşümdür. Sonuç olarak $F: X\to F(X)$ bir homeomorfidir. $F(X)$ in $\mathrm{Spec}(\hat{l}(X))$ de her yerde yoğun olduğunu gösterelim. $y\in P(\hat{l}(X))$ bir keyfi nokta olsun. Bu takdirde $\hat{y}=\bigvee_{x\in\hat{y}}\overline{\{x\}}$ olduğundan $y=\bigwedge_{x\in\hat{y}}\widehat{\overline{\{x\}}}$ elde edilir. Buradan önerme 11, iii) ve önerme 10 a göre

$$\overline{\{y\}}=V(y)=\overline{\bigcup_{x\in\hat{y}}V\left(\widehat{\overline{\{x\}}}\right)}=\overline{\left\{\widehat{\overline{\{x\}}}\mid x\in\hat{y}\right\}} \qquad (3)$$

dır. $y\in V(y)$ olduğundan, (3) ü kullanarak y nin $\{x\mid x\in\hat{y}\}\subset X$ in resminin kapanışında olduğu elde edilir. Böylece $F(X)$ $\mathrm{Spec}(\hat{l}(X))$ de her yerde yoğundur.

Φ dönüşümü X den $\mathrm{Spec}(\hat{l}(X))$ e örten homeomorfi olsun. Teorem 6 ve tanım 13 den sonra verilen uyarıya göre X dengelidir.

X dengeli olsun. Bu takdirde $x\to\widehat{\overline{\{x\}}}$ dönüşümü X den $P(\hat{l}(X))$ e bir örten dönüşümdür. Gerçekten $y\in P(\hat{l}(X))$ bir keyfi nokta olsun. Bu takdirde $\hat{y}$ X de bir kapalı ve $\vee$-parçalanamaz kümedir. X dengeli olduğundan, $\overline{\{x\}}=\hat{y}$ olacak şekilde bir $x\in X$ noktası mevcuttur. Sonuç olarak $F(x)=\widehat{\overline{\{x\}}}$ dönüşümü altında x elemanı y elemanına gider. Bu ise $F: X\to \mathrm{Spec}(\hat{l}(X))$ in bir örten homeomorfi olduğunu gösterir.

Uyarı: Biz tüm T_0-uzayların sınıfında, $\mathrm{Spec}(\hat{L})$ tipindeki topolojik uzayların bir karakterizasyonunu elde ettik. Yani $\mathrm{Spec}(\hat{L})$ tipindeki her topolojik uzay dengelidir ve diğer taraftan her X dengeli T_0-uzayı $\mathrm{Spec}(\hat{l}(X))$ ye homeomorfdur.

Sonuç 5: X ve Y dengeli T_0-uzaylarının homeomorf olması için gerek ve yeter koşul onların kapalı kümelerinin kafeslerinin ($l(X)$ ve $l(Y)$) izomorf olmasıdır.

L deki tüm asal elemanların kısmen sıralı kümesinin iki özelliğini verelim.

L bir keyfi l_0-grupoid, $P(L)$ L nin asal elemanlarının kümesi ve I $P(L)$ de bir zincir olsun. Bu takdirde: (i) $\bigwedge_{a\in I} a \in P(L)$ dır. (ii) Her $a \in P(L)$ için $b \le a$ olacak şekilde bir minimal $b \in P(L)$ mevcuttur.

2.2.Bir cebirsel *l*-grupoidde bir elemanın asal radikali hakkındaki teorem ve onun uygulamaları

2.2.1. Bir *l*-grupoidde çözülebilir ve nilpotent elemanlar

K bir l_0-grupoid ve K nın tüm ideal elemanlarının kümesi K_0 olsun.

Önerme 16: K bir *cl*-grupoid ise K_0, K nın bir tam altkafesidir.

İspat açıktır.

Uyarı: $x, y \in K_0$ ve $xy \notin K_0$ olacak şekilde bir K (birleşmeli olmayan) *l*-grupoidi mevcuttur.

Örnek 13: 0<a<b<1 olmak üzere $K = \{0, a, b, 1\}$ kafesi göz önüne alınsın. K daki çarpım işlemi aşağıdaki tablo ile verilsin:

Tablo 1

.	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	a	a	b
1	0	b	b	1

K nın bir *l*-grupoid olduğu yukarıdaki tablodan kolaylıkla kontrol edilebilir.

$1(ba) = 1a = b$ ve $(1b)a = ba = a$ olduğundan $1(ba) \neq (1b)a$ dır. Dolayısıyla K birleşmeli değildir. $b \in K$ nın ideal eleman olduğunu gösterelim. $0b = b0 = 0 < b$, $1b = b1 = b \le b$, $ab = ba = a < b$, $bb = a < b$ olduğundan b K nın bir ideal elemanıdır. Fakat bb= a elemanı K nın bir ideal elemanı değildir. Çünkü $1a = b \not\le a$ dır.

K_0 üzerinde aşağıdaki şekilde bir çarpım işlemi tanımlayalım. $a, b \in K_0$ için ab yi içeren tüm $c \in K_0$ elemanlarının arakesitini $a * b$ ile gösterelim.

Önerme 17: K bir *l*-grupoid(*cl*-grupoid) ise $(K_0,*)$ bir yarı-integral *l*-grupoiddir (*cl*-grupoiddir).

İspat: $b_1 \le b_2$ ise, * işleminin tanımından, $a*b_1 \le a*b_2$ ve $b_1*a \le b_2*a$ elde edilir. Bundan dolayı $(a*b)\vee(a*c) \le a*(b\vee c)$ dır. $a(b\vee c) = ab\vee ac \le (a*b)\vee(a*c)$ olduğundan $a*(b\vee c) \le (a*b)\vee(a*c)$ bulunur. Böylece $a*(b\vee c) = (a*b)\vee(a*c)$ dır. Benzer şekilde $(b\vee c)*a = (b*a)\vee(c*a)$ olduğu gösterilir. K nın bir *cl*-grupoid olması durumunda $a*\left(\bigvee_T b_\tau\right) = \bigvee_T (a*b_\tau)$ ve $\left(\bigvee_T b_\tau\right)*a = \bigvee_T (b_\tau * a)$ eşitlikleri benzer şekilde elde edilir.

K bir l_0-grupoid, $a\in K$ ve $a^{(0)} := a,\ a^{(n+1)} := \left(a^{(n)}\right)^2$ olsun.

Tanım 14: $h, a\in K$ olsun. Eğer $a^{(n)} \le h$ olacak şekilde bir n sayısı mevcut ise, $a\in K$ elemanına ***h-çözülebilir*** denir.

Önerme 18: K bir yarı-integral *l*-grupoid ise sonlu sayıda h-çözülebilir elemanların toplamı da h-çözülebilirdir.

İspat: İlkönce iki h-çözülebilir elemanın toplamının h-çözülebilir olduğunu gösterelim (genel halde, tümevarım uygulanabilir).

Öncelikle herhangi $a, b\in K$ ve $n \ge 0$ için, $(a\vee b)^{(n)} \le a\vee b^{(n)}$ eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$n = 0$ olsun. Bu takdirde $(a\vee b)^{(0)} = a\vee b = a\vee b^{(0)}$ dır. n-1 için $(a\vee b)^{(n-1)} \le a\vee b^{(n-1)}$ eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu eşitsizliği kullanarak,

$$\begin{aligned}(a\vee b)^{(n)} &= (a\vee b)^{(n-1)}(a\vee b)^{(n-1)} \le \left(a\vee b^{(n-1)}\right)\left(a\vee b^{(n-1)}\right)\\ &\le a^2 \vee ab^{(n-1)} \vee b^{(n-1)}a \vee b^{(n)} \le a\vee b^{(n)}\end{aligned}$$

elde edilir. a ve b h-çözülebilir elemanlar olsunlar. Bu takdirde $a^{(k)} \le h$, $b^{(m)} \le h$ olacak şekilde k, m sayıları mevcutturlar. $(a\vee b)^{(n)} \le a\vee b^{(n)}$ eşitsizliğini kullanarak

$$(a\vee b)^{(m+k)} \le \left(\left(a\vee b\right)^{(m)}\right)^{(k)} \le \left(a\vee b^{(m)}\right)^{(k)} \le (a\vee h)^{(k)} \le h\vee a^{(k)} \le h$$

bulunur.

$a\in K$ için, $a^{[1]} := a$, $a^{[n]} := aa^{[n-1]}$ olsun.

Tanım 15: $h, a\in K$ olsun. Eğer $a^{[m]} \le h$ olacak şekilde bir m sayısı mevcutsa, $a\in K$ elemanına ***h-nilpotent*** denir.

Önerme 19: K bir yarı-integral *l*-grupoid ise sonlu sayıda h-nilpotent elemanların toplamı da h-nilpotenttir.

İspat:

Lemma 1: $a_1,a_2,\cdots,a_n \in K$ olsun. $a_1 = a_1, a_n * a_{n-1} * \cdots * a_1 = a_n * (a_{n-1} * \cdots * a_1)$ alalım. $a_1,a_2,\cdots,a_n \in K$ ve $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ olsun. Bu takdirde

$$a_n * a_{n-1} * \cdots * a_1 \le a_{i_k} * a_{i_{k-1}} * \cdots * a_{i_1}$$

dır.

Lemma 1 in ispatı: $n = 1$ durumunda lemma açıktır. n-1 durumu ve herhangi $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n-1$ sistemi için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_r \le n$ olsun. $j_r < n$ olduğunu kabul edelim. Tümevarım ile

$$a_{n-1} * \cdots * a_1 \le a_{j_r} * \cdots * a_{j_1}$$

bulunur. Bundan dolayı

$$a_n * a_{n-1} * \cdots * a_1 \le a_{n-1} * \cdots * a_1 \le a_{j_r} * \cdots * a_{j_1}$$

dır. $j_r = n$ olsun. Tümevarım ile

$$a_{n-1} * \cdots * a_1 \le a_{j_{r-1}} * \cdots * a_{j_1}$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$a_n * a_{n-1} * \cdots * a_1 \le a_{j_r} * a_{j_{r-1}} * \cdots * a_{j_1}$$

dır. Böylece lemma 1 ispatlandı.

Önerme 19 u ilk önce iki eleman için ispat edelim. a, b h-nilpotent elemanlar ise $a^{[p]} \le h$ ve $b^{[q]} \le h$ olacak şekilde p ve q mevcuttur. $(a \vee b)^{[p+q]}$ elemanı $a_n * a_{n-1} * \cdots * a_1$ formundaki elemanların bir supremumudur, burada n=p+q ve a_i elemanı a veya b ye eşittir. n=p+q olduğundan $a_n * \cdots * a_1$ formunda verilen elemanlar için aşağıdaki iki durum mümkün olabilir:

1) $a_n * \cdots * a_1$ formunda bulunan $a_1,a_2,\cdots,a_n$ elemanlarının arasından a elemanı m defa bulunabilir, burada $m \ge p$ dır.

2) $a_n * \cdots * a_1$ formunda bulunan $a_1,a_2,\cdots,a_n$ elemanlarının arasından b elemanı m defa bulunabilir, burada $m \ge q$ dır.

İlk durumda lemma 1 kullanılarak

$$a_n * \cdots * a_1 \leq a^{[p]} \leq h$$

yazılabilir. İkinci durumda lemma 1 kullanılarak

$$a_n * \cdots * a_1 \leq b^{[q]} \leq h$$

elde edilir. Bundan dolayı $(a \vee b)^{[p+q]}$ elemanının her $a_n * \cdots * a_1$ formu için $a_n * \cdots * a_1 \leq h$ elde edilir. Bundan dolayı $(a \vee b)^{[p+q]} \leq h$ dır.

Önerme 20: K bir yarı-integral *l*-grupoid ise, her $a \in K$ ve $n \geq 1$ için $a^{[n]} \geq a^{(n)}$ dır.

İspat: $n = 1$ olsun. Bu durumda $a^{[1]} = a \geq a^2 = a^{(1)}$ dır. İddianın n-1 için doğru olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $a^{[n-1]} \geq a^{(n-1)}$ dır. Bu ifadeden yararlanarak $a^{[n]} = aa^{[n-1]} \geq aa^{(n-1)} \geq a^{(n-1)}a^{(n-1)} = a^{(n)}$ elde edilir.

Önerme 21: K bir yarı-integral *l*-grupoid ise K nın herhangi bir h-nilpotent elemanı h-çözülebilirdir.

İspat: a bir h-nilpotent eleman ise $a^{[n]} \leq h$ olacak şekilde bir n sayısı mevcuttur. Önerme 20 kullanılarak $a^{(n)} \leq a^{[n]} \leq h$ elde edilir.

Önerme 22: K bir yarı-integral *l*-grupoid ve $a, b, h \in K$ olsun. Eğer a elemanı b-çözülebilir ve b elemanı h-çözülebilir ise, a elemanı h-çözülebilirdir.

İspat: $a^{(n)} \leq b$ ve $b^{(m)} \leq h$ olacak şekilde n, m sayıları mevcut olduğundan $a^{(m+n)} = \left(a^{(n)}\right)^{(m)} \leq b^{(m)} \leq h$ elde edilir.

Uyarı: Yukarıdaki önermenin bir benzeri h-nilpotent elemanlar için doğru değildir.

Örnek 14: $K = \{0, a, b, 1\}$ integral *l*-grupoidini göz önüne alalım, burada 0<a<b<1, 10=01=a0=0a=b0=0b=00=0, 11=1, 1b=b1=b, 1a=a1=a, bb=a, ab=ba=a, aa=0 dır. b elemanı a-nilpotent ve a elemanı 0-nilpotent fakat b 0-nilpotent değildir: Her $n \geq 1$ için

$$b^{[2]} = b^2 = a, \; b^{[n]} = bb^{[n-1]} = a$$

dır.

2.2.2. Bir cebirsel *l*-grupoidde bir elemanın asal radikali hakkında teorem

K bir l_0-grupoid olsun.

Tanım 16: $h \in K$ olsun. Eğer $b^2 \le h$ olan keyfi $b \in K$ için $b \le h$ elde ediliyorsa, $h \in K$ elemanına *yarı asal* denir.

Önerme 23: K bir yarı-integral *l*-grupoid olsun. Aşağıdaki şartlar denktir:

i) $h \in K$ yarı asaldır;

ii) Bir $n \in IN^*$ için, $b^{(n)} \le h$ olan keyfi $b \in K$ için $b \le h$ dır;

iii) Bir $n \in IN^*$ için, $b^{[n]} \le h$ olan keyfi $b \in K$ için $b \le h$ dır.

İspat: i)$\Rightarrow$ii) gerektirmesi tümevarım ile elde edilir.

ii)$\Rightarrow$iii) : Bir n için $b^{[n]} \le h$ olsun. Önerme 20 ye göre $b^{(n)} \le b^{[n]} \le h$ dır. ii) yi kullanarak $b \le h$ dır.

iii)$\Rightarrow$i) gerektirmesi açıktır.

Yarı asal elemanların herhangi bir ailesinin arakesiti yarı asaldır.

$a \in K$ için, a yı içeren tüm yarı asal elemanların arakesitini $r(a)$ ile gösterelim. $r(a)$ ya *a nın yarı asal radikali* denir.

Herhangi $a \in K$ için $r(a) \le R(a)$ dır.

Uyarı: K bir değişmeli halka ve $L(K)$ K nın tüm ideallerinin *l*-yarıgrubu ise, $I \in L(K)$ olmak üzere $r(I)$ I idealinin en küçük radikalidir [18].

Önerme 24: K bir l_0-grupoid olsun. Bu takdirde:

i) $a \le b$ ise $r(a) \le r(b)$ dir;

ii) $r(r(a)) = r(a)$;

iii) $r(a) \le r(a^2)$.

İspat: i) ve ii) ifadeleri açıktır. b a^2yi içeren keyfi bir yarı asal eleman olsun: $a^2 \le b$. Bu takdirde $a \le b$ ve $r(a) \le b$ dır. Bundan dolayı $r(a) \le r(a^2)$ elde edilir.

Önerme 25: K bir yarı-integral l_0-grupoid olsun. Aşağıdaki şartlar denktir:

i) Her $a, b \in K$ için $ab = a \wedge b$ dir;

ii) Her $a \in K$ için $a^2 = a$ dır;

iii) K nın her elemanı yarı asaldır, yani her a elemanı için $a = r(a)$ dır.

İspat: i)$\Rightarrow$ii) ve ii)$\Rightarrow$iii) açıktır.

iii) $\Rightarrow$ i): Önerme 24 ve önerme 1 den

$$a \wedge b = r(a \wedge b) \leq r((a \wedge b)(a \wedge b)) = (a \wedge b)(a \wedge b) \leq ab \leq a \wedge b$$

dir. Bundan dolayı $ab = a \wedge b$ elde edilir.

Tanım 17: L bir tam kafes ve $c \in L$ olsun.

$$c \leq \bigvee_{\tau \in T} a_\tau$$

olan her $\{a_\tau \mid \tau \in T\} \subseteq L$ ailesi için,

$$c \leq \bigvee_{i=1}^{n} a_{\tau_i}$$

olacak şekilde $\{a_{\tau_1}, \cdots, a_{\tau_n}\} \subset \{a_\tau \mid \tau \in T\}$ alt ailesi bulunabilir ise, c elemanına *kompakt* denir[48].

Tanım 17 ye dual olarak kokompakt eleman tanımı verilir.

Tanım 18: L bir tam kafes olsun. Eğer her $a \in L$ kompakt elemanların bir supremumu şeklinde ise, L ye *cebirsel kafes* denir[48].

Kokompakt eleman tanımı kullanılarak, tanım 18 e dual olarak kocebirsel kafes tanımlanır.

K bir cebirsel l_0-grupoid olsun.

Tanım 19: c elemanı K nın bir kompakt elemanı olsun. K nın $x_0 = c, x_{n+1} \leq x_n^2$ olacak şekilde x_n kompakt elemanlarının her $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ dizisine *c elemanının s-dizisi* denir.

Tanım 20: $h, c \in K$ ve c kompakt olsun. Eğer c elemanının her $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ s-dizisi için , bir n_0 sayısı mevcut öyle ki her $n \geq n_0$ için $x_n \leq h$ ise, c elemanına *kuvvetli h -çözülebilir* denir.

$h \in K$ olmak üzere, K nın tüm kuvvetli h-çözülebilir elemanlarının supremumunu $s(h)$ ile gösterelim.

Teorem 8: K bir cebirsel yarı-integral *l*-grupoid ise, her $h \in K$ için $s(h) = r(h) = R(h)$ dır.

İspat: Her $h \in K$ için $s(h) \leq r(h)$ olduğunu ispatlayalım.

b elemanı K nın h ı içeren bir yarı asal elemanı ve c elemanı K nın bir kuvvetli h-çözülebilir elemanı olsun. $c \leq b$ olduğunu gösterelim. $c \not\leq b$ olduğunu varsayalım. $x_0 = c$

olsun. Bu takdirde $x_0^2 = c^2 \nleq b$ dır. $x_1 \nleq b$ ve $x_1 \leq x_0^2$ olacak şekilde bir x_1 kompakt elemanı mevcuttur. Bundan dolayı $x_1^2 \nleq b$ bulunur. Bu şekilde devam ederek, $x_0 = c$, her n için $x_{n+1} \leq x_n^2, x_n \nleq b$ olacak şekilde bir $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ dizisi elde edilebilir. Bu dizi c elemanının bir s-dizisidir. c kuvvetli h-çözülebilir eleman olduğundan, bir n_0 sayısı her $n \geq n_0$ için $x_n \leq h$ olacak şekilde mevcuttur. Bu takdirde her $n \geq n_0$ için $x_n \leq h \leq b$ dır. Fakat bu bir çelişkidir. Böylece $c \leq b$ dır. b elemanı h elemanını içeren keyfi bir yarı asal eleman olduğundan $c \leq r(h)$ yazılabilir. c keyfi kuvvetli h-çözülebilir eleman olduğundan $s(h) \leq r(h)$ dır. $r(h) \leq R(h)$ ile, her $h \in K$ için $s(h) \leq r(h) \leq R(h)$ bulunur.

Her $h \in K$ için $R(h) \leq s(h)$ olduğunu ispatlayalım. Eğer $s(h) = 1$ ise, bu takdirde $1 = s(h) = r(h) = R(h)$ dır.

$s(h) \neq 1$ olsun. Bu takdirde $x \nleq s(h)$ olacak şekilde bir $x \in K$ kompakt eleman mevcuttur. y K nın $y \nleq s(h)$ olan bir keyfi kompakt elemanı olsun. $y \nleq p$ olacak şekilde h ı içeren bir $p \in K$ asal elemanının mevcut olduğunu ispatlayalım.

$y \nleq s(h)$ ile, kompakt y elemanı kuvvetli h-çözülebilir değildir. Bundan dolayı y elemanının bir $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ s-dizisi her n için, $x_n \nleq h$ olacak şekilde mevcuttur. Her n için $x_n \nleq m$ ve $m \geq h$ olan tüm $m \in K$ elemanlarının kümesini Σ ile gösterelim. $h \in \Sigma$ olduğundan Σ boştan farklıdır. Σ da K daki kısmen sıralamayı göz önüne alalım. Zorn lemmasının Σ ya uygunabileceğini gösterelim.

$\{m_\tau, \tau \in T\}, \Sigma$ da bir zincir olsun. $m = \underset{T}{\vee} m_\tau$ olsun. Bu takdirde $m \geq h$ dır. $m \in \Sigma$ olduğunu ispatlayalım. Bir n için $x_n \leq m$ olduğunu kabul edelim. K bir cebirsel kafes olduğundan

$$x_n = x_n \wedge m = x_n \wedge \left(\underset{T}{\vee} m_\tau\right) = \underset{T}{\vee}(x_n \wedge m_\tau)$$

dır. x_n bir kompakt eleman olduğundan bir τ için $x_n = x_n \wedge m_\tau$ dır. Böylece aynı τ için $x_n \leq m_\tau$ dur. Fakat bu bir çelişkidir. Bundan dolayı her n için $x_n \nleq m$ dir. Böylece Zorn lemması Σ ya uygulanabilir. Zorn lemmasına göre Σ nın bir maksimal elemanı mevcuttur. p Σ nin bir maksimal elemanı olsun. $p \in \Sigma$ olduğundan $p \geq h$ dır. p nin asal olduğunu gösterelim. $a \nleq p$ ve $b \nleq p$ özelliklerini sağlayan $a, b \in K$ elemanlarını alalım. Bu takdirde $p \vee a \neq p$ ve $p \vee b \neq p$ dır. Σ da p nin maksimalliği ile $p \vee a \notin \Sigma$ ve $p \vee b \notin \Sigma$ elde edilir. $x_n \leq p \vee a$ ve $x_q \leq p \vee b$ olacak şekilde $x_n \in X$ ve $x_q \in X$ elemanları mevcuttur. Bundan dolayı

$$x_{n+1} \leq x_n^2 \leq x_n \leq p \vee a$$

$$x_{q+1} \leq x_q^2 \leq x_q \leq p \vee b$$

Bu şekilde devam ederek her t için

$$x_{n+t} \leq p \vee a,\ x_{q+t} \leq p \vee b$$

elde edilir. k=max(n, q) olsun. Bu takdirde $x_k \leq p \vee a$, $x_k \leq p \vee b$ dır. Bundan dolayı $x_{k+1} \leq x_k^2 \leq (p \vee a)(p \vee b) \leq p \vee ab$ elde edilir. Fakat $x_{k+1} \not\leq p$ dır. Böylece $ab \not\leq p$ bulunur. Bu p nin asal olduğunu gösterir. Böylece $y \not\leq s(h)$ olan herhangi kompakt eleman için $y \not\leq p$ olacak şekilde bir $p \geq h$ asal elemanı mevcuttur. Eğer y K nın bir kompakt elemanı ve $y \leq R(h)$ ise, $y \leq s(h)$ dır. $y \not\leq s(h)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $p \geq h$ ve $y \not\leq p$ olacak şekilde bir p asal elemanı mevcuttur. Bu durum $y \leq R(h) \leq p$ olması ile çelişir. Bundan dolayı $R(h) \leq s(h)$ dır. Böylece her $h \in K$ için $s(h) = r(h) = R(h)$ elde edilir.

Sonuç 6: K bir cebirsel yarı-integral *l*-grupoid olsun. Aşağıdaki şartlar denktir:

i) Herhangi $a \in K$ için $a = R(a)$ dır;

ii) Herhangi $a \in K$ için $a = r(a)$ dır;

iii) Her $a, b \in K$ için $ab = a \wedge b$ dır;

iv) Herhangi $a \in K$ için $a = a^2$ dır.

İspat: Teorem 8 kullanılarak i) $\Leftrightarrow$ ii), önerme 25 kullanılarak ii) $\Leftrightarrow$ iii) $\Leftrightarrow$ iv) elde edilir.

Sonuç 7: K bir cebirsel yarı-integral *l*-grupoid ve herhangi $a \in K$ için $a = R(a)$ olsun. Bu takdirde K bir dağılmalı kafestir ve $ab = a \wedge b$ dır.

Tersine olarak, K bir cebirsel dağılmalı kafes ve $ab = a \wedge b$ olsun. Bu takdirde K bir cebirsel yarı-integral *l*-grupoiddir ve her $a \in K$ için $a = R(a)$ dır.

İspat. Sonuç 6 ile her $a, b \in K$ için $ab = a \wedge b$ dır. K bir *l*-grupoid olduğundan K bir dağılmalı kafestir. Ters yöndeki iddiayı ispatlayalım. K bir cebirsel dağılmalı kafes olsun. Bu takdirde K, $ab = a \wedge b$ işlemi ile sırası belirli olan bir cebirsel yarı-integral *l*-grupoiddir. Sonuç 6 ile her $a \in K$ için $a = R(a)$ dır.

Sonuç 8: K bir cebirsel dağılmalı kafes ise, K nın her a elemanı K nın a yı içeren tüm $\wedge$-asal elemanlarının arakesitidir.

İspat: Sonuç 7 ile her a elemanı K nın a yı içeren tüm $\wedge$-asal elemanlarının arakesitidir.

Uyarı: Eğer K bir Nöther kafes ise, bu sonuç bilinmektedir [48].

Tanım 21: K bir l_0-grupoid olsun. Eğer K bir kafes olarak artan (azalan) zincir koşulunu sağlıyorsa, K ya *Nöther (Artin) l_0-grupoidi* denir.

Teorem 9: K bir Nöther yarı-integral *l*-grupoidi olsun. Bu takdirde her $h \in K$ için $R(h)$ h-çözülebilirdir.

İspat: b bir h-çözülebilir eleman olsun. Bu takdirde bir n için $b^{(n)} \leq h \leq R(h)$ sağlanır. Bundan dolayı $b \leq R(h)$ dır. Tüm h-çözülebilir elemanlarının kümesini M ile gösterelim. M de sıra olarak K daki sıralamayı alalım. $h \in M$ olduğundan M boştan farklıdır. K Nöther olduğundan M Nötherdir. Bu sebeple M nin bir maksimal elemanı mevcuttur. Önerme 18 e göre M nin herhangi bir maksimal elemanı M nin en büyük elemanıdır. Bu elemanı m ile gösterelim. Bu takdirde $h \leq m \leq R(h)$ dır. m nin yarı-asal olduğunu gösterelim. $c^2 \leq m$ olsun. c m-çözülebilirdir. Önerme 22 ye göre c elemanı h-çözülebilirdir. Böylece $c \leq m$ dır. Bu m in yarı-asal olduğunu gösterir. Teorem 8 e göre $r(h) = R(h) \leq m$ bulunur. Bu ise $m = R(h)$ olduğunu gösterir.

Uyarı: Eğer K bir Nöther birleşmeli halkanın ideallerinin *l*-yarıgrubu ise, bu teorem bilinmektedir [81].

Teorem 10: K bir cebirsel Artin yarı-integral *cl*-yarıgrup olsun. Bu takdirde her $h \in K$ için $R(h)$ h-nilpotenttir.

İspat: Kısalık olması açısından $I := R(h)$ alalım. K yarı-integral olduğundan $I \geq I^2 \geq \cdots \geq I^k \geq \cdots$ dır. K Artin olduğundan $I^m = I^{m+1}$ olacak şekilde bir m mevcuttur. $I^m \not\leq h$ olduğunu kabul edelim. $I_1 = I^m$ olsun. Bu takdirde $I_1 \not\leq h$ ve $I_1^2 = I_1$ dir.

$I_1 J = J$, $J \leq I_1$, $J \not\leq h$ olacak şekildeki tüm $J \in K$ elemanlarının kümesini Σ ile gösterelim. $I_1 \in \Sigma$ olduğundan Σ boştan farklıdır. K Artin olduğundan Σ nın bir minimal elemanı mevcuttur. J_1 Σ nın bir minimal elemanı olsun.

$x \leq J_1$ ve $I_1 x \not\leq h$ olacak şekilde K nın bir x kompakt elemanı mevcuttur. Gerçekten, eğer $p_\tau \leq J_1$ olan tüm p_τ kompakt elemanları için $I_1 p_\tau \leq h$ ise,

$$J_1 = I_1 J_1 = I_1\left(\bigvee_T p_\tau\right) = \bigvee_T (I_1 p_\tau) \leq h$$

dır. Bu bir çelişkidir.

$x \leq J_1$ ve $I_1 x \not\leq h$ olacak şekilde bir x kompakt elemanını alalım. Bu takdirde

$$I_1(I_1 x) = I_1^2 x = I_1 x,\ I_1 x \not\leq h \text{ ve } I_1 x \leq I_1$$

olur. Bundan dolayı $I_1 x \in \Sigma$ ve $I_1 x \leq x \leq J_1$ dır. J_1 in minimalliğinden $I_1 x = x = J_1$ elde edilir. Böylece $x \not\leq h$ dır.

K nın tüm kuvvetli h-çözülebilir elemanlarının kümesini $\{y_\nu \mid \nu \in Q\}$ ile gösterelim. Bu takdirde her y_ν elemanı kompakttır ve $s(h) = \bigvee_Q y_\nu$ dır. $I_1 \leq R(h) = s(h)$ ifadesinden

$$\begin{aligned} x = I_1 x = I_1^2 x = I_1(I_1 x) &\leq I_1(s(h)x) \\ &= I_1\left(\left(\bigvee_Q y_\nu\right)x\right) = \bigvee_Q (I_1(y_\nu x)) \leq I_1 x = x \not\leq h \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı $I_1(y_\nu x) \not\leq h$ olacak şekilde y_ν mevcuttur. $I_1(y_\nu x)$ elemanı için

$$I_1(I_1(y_\nu x)) = I_1(y_\nu x),\ I_1(y_\nu x) \leq I_1,\ I_1(y_\nu x) \not\leq h,\ I_1(y_\nu x) \leq x$$

dır. Böylece $I_1(y_\nu x) \in \Sigma$ dır. x in minimalliğinden $I_1(y_\nu x) = x$ bulunur.

$$I_1(y_\nu x) \leq y_\nu x \leq x$$

ile $y_\nu x = x$ dır. $y_\nu = a_0$ koyalım. $a_0 x = x$ ile $a_0^2 x = x$ elde edilir. Bundan dolayı $a_0^2 \not\leq h$ dır. z_τ elemanları kompakt elemanlar olmak üzere, $a_0^2 = \bigvee_T z_\tau$ şeklinde yazabiliriz. Bu takdirde $\left(\bigvee_T z_\tau\right)x = x$ dir. x in kompaktlığından

$$x \leq z_{\tau_1} x \vee z_{\tau_2} x \vee \cdots \vee z_{\tau_n} x \leq x$$

olacak şekilde $z_{\tau_1}, z_{\tau_2}, \cdots, z_{\tau_n}$ elemanları mevcutturlar. $a_1 = z_{\tau_1} \vee z_{\tau_2} \cdots \vee z_{\tau_n}$ olsun. Bu takdirde $a_1 x = x$, $a_1 \not\leq h$, $a_1 \leq a_0^2$ dır ve a_1 kompakttır. Tümevarım ile, $a_0 = y_\nu$ elemanının $a_n \not\leq h$ olacak şekilde bir $\{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$ s-dizisi mevcuttur. Fakat y_ν bir kuvvetli h-çözülebilir elemandır. Bu bir çelişkidir. Böylece $I_1 \leq h$ ve $R(h)$ elemanı h-nilpotenttir.

2.2.3. Dağılmalı üniversal cebirlere uygulamaları

İlkönce grupoidlere uygulamaları inceleyeceğiz.

(G,w) bir grupoid olsun, burada w G üzerinde bir ikili işlemdir.

Tanım 22: $A \subseteq G$ olsun. Eğer her $a,b \in A$ için $w(a,b) \in A$ ise, A ya *G nin bir altgrupoidi* denir.

(G,w) nin tüm altgrupoidlerinin kümesini $Sub(G,w)$ ile gösterelim. $\varnothing \in Sub(G,w)$ kabul edelim. $(Sub(G,w), \subseteq)$ bir tam kafestir.

G nin P ve Q altkümeleri için

$$w(P,Q) := \{x \in G \mid x = w(a,b), a \in P, b \in Q\}$$

ile tanımlayalım. Eğer P=∅ veya Q=∅ ise, $w(P,Q) := \varnothing$ alalım.

G nin bir H altkümesi için, G nin H ile üretilen altgrupoidini $\{H\}$ ile gösterelim. $H_0 := H$ ve her $n \geq 0$ için $H_{n+1} := H_n \cup w(H_n, H_n)$ alalım. Bu takdirde G nin herhangi H altkümesi için $\{H\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ olduğunu tümevarım kullanarak gösterelim. $H_0 = H \subseteq \{H\}$ dır. n için doğru olduğunu, yani $H_n \subseteq \{H\}$ olduğunu kabul edelim. $\{H\}$ altgrupoid olduğundan $w(H_n, H_n) \subseteq \{H\}$ dır. Böylece $H_{n+1} \subseteq \{H\}$ dır. Bundan dolayı $\bigcup_{i=0}^{\infty} H_i \subseteq \{H\}$ ve $H \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i \subseteq \{H\}$dır. Şimdi ters yönde kapsamayı gösterelim. Bunun için $\bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ nın altgrupoid olduğunu göstermek gerekir. $a,b \in \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ olsun. Bu takdirde $a \in H_i, b \in H_j$ olacak şekilde i ve j mevcuttur. $\{H_i \mid i \in \{0,1,\cdots,n,\cdots\}\}$ ailesi bir zincir olduğundan $H_i \subseteq H_j$ veya $H_j \subseteq H_i$ dır. $H_i \subseteq H_j$ olduğunu kabul edersek $a,b \in H_j$ elde edilir. Böylece $w(a,b) \in H_{(j+1)}$ ve dolayısıyla $w(a,b) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ ve $\bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ bir altgrupoiddir. Bundan dolayı $\{H\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ bulunur. $Sub(G,w)$ de kafes işlemlerini $\wedge$ ve $\vee$ ile gösterelim. Bu takdirde herhangi $A, B \in Sub(G,w)$ için $A \vee B = \{H\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ olduğunu gösterelim, burada $H = A \cup B$ dır. $\{H\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i \supseteq A$, $\{H\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i \supseteq B$ olduğu açıktır. $\{H\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ altgrupoid olduğundan $\{H\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i \supseteq A \vee B$

dır. Ters yöndeki kapsamayı tümevarımla gösterelim. $H_0 = H = A \cup B \subseteq A \vee B$ dır. n için $H_n \subseteq A \vee B$ olsun. $H_{n+1} = H_n \cup w(H_n, H_n) \subseteq A \vee B$ dır. Dolayısıyla $A \vee B = \{H\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ elde edilir.

Tanım 23: $A \subseteq G$ olsun. Eğer her $a \in A$, $x \in G$ için $w(a,x) \in A$, $w(x,a) \in A$ ise, A ya (G,w) nin bir *ideali* denir.

(G,w) nin tüm ideallerinin kümesini $Id(G)$ ile gösterelim. $\varnothing \in Id(G)$ kabul edelim. Bu takdirde $(Id(G), \subseteq)$ bir tam kafestir. Eğer $\tau \in T, B_\tau \in Id(G)$ ise, $\bigcup_T B_\tau \in Id(G)$ olduğunu gösterelim. $a \in \bigcup_T B_\tau$, $x \in G$ keyfi alalım. Bir τ_0 için $a \in B_{\tau_0}$ dır. B_{τ_0} ideal olduğundan $w(a,x) \in B_{\tau_0} \subseteq \bigcup_T B_\tau$ ve $w(x,a) \in B_{\tau_0} \subseteq \bigcup_T B_\tau$ elde edilir. Böylece $\bigcup_T B_\tau \in Id(G)$ dır. A, $B \in Id(G)$ için, $w(A,B)$ yi içeren tüm ideallerinin arakesitini $\overline{w}(A,B)$ ile gösterelim.

Önerme 26: $(Id(G), \overline{w})$ bir *cl*-grupoiddir.

İspat. A, $B_\tau \in Id(G)$, $\tau \in T$ alalım.

$$\bigcup_T \overline{w}(A, B_\tau) \subset \overline{w}\left(A, \bigcup_T B_\tau\right)$$

eşitsizliği açıktır. Ters yöndeki eşitsizliği gösterelim. $y \in w\left(A, \bigcup_T B_\tau\right)$ olsun. Bu takdirde $y = w(a,b)$ olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in \bigcup_T B_\tau$ elemanları mevcutturlar. Bu takdirde bir $\tau \in T$ için $b \in B_\tau$ ve $y = w(a,b) \in w(A, B_\tau) \subset \overline{w}(A, B_\tau)$ dur. Bundan dolayı $y \in \bigcup_T \overline{w}(A, B_\tau)$ dur. Böylece

$$w\left(A, \bigcup_T B_\tau\right) \subset \bigcup_T \overline{w}(A, B_\tau)$$

elde edilir. $\overline{w}$ işleminin tanımıyla

$$\overline{w}\left(A, \bigcup_T B_\tau\right) \subset \bigcup_T \overline{w}(A, B_\tau)$$

bulunur. Böylece $\overline{w}\left(A, \bigcup_T B_\tau\right) = \bigcup_T \overline{w}(A, B_\tau)$ dır. Benzer şekilde $\overline{w}\left(\bigcup_T B_\tau, A\right) = \bigcup_T \overline{w}(B_\tau, A)$ olduğu gösterilir.

Önerme 26 ya göre $(Id(G), \overline{w})$ için teorem 8, teorem 9 ve teorem 10 doğrudur. Özel olarak, (G,w) nin herhangi A ideali için $s(A) = r(A) = R(A)$ dır.

Uyarı: $r(A) = R(A)$ eşitliği yarıgruplar için bilinmektedir [22].

$[x]$ ile $x \in G$ yi içeren G nin en küçük ideali gösterilsin.

Sonuç 9: (G, w) bir grupoid olsun. Aşağıdaki şartlar denktir:

i) Her $A \in Id(G)$ için $A = R(A)$ dır;

ii) Her $A \in Id(G)$ için $A = r(A)$ dır;

iii) Her $A, B \in Id(G)$ için $\overline{w}(A, B) = A \cap B$ dır;

iv) Herhangi $x \in G$ için $x \in \overline{w}([x],[x])$ dır.

İspat: i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii) gerektirmeleri sonuç 6 dan elde edilir.

iii) $\Rightarrow$ iv): Herhangi bir $A \in Id(G)$ için $A = \overline{w}(A, A)$ dır. $A = [x]$ olsun. Bu takdirde $[x] = \overline{w}([x],[x])$ dir. Bundan dolayı $x \in \overline{w}([x],[x])$ elde edilir.

iv) $\Rightarrow$ i): Herhangi bir $x \in Id(G)$ için $[x] = \overline{w}([x],[x])$ dir. $A \in Id(G)$ olsun. $\overline{w}([x],[y]) \subset [x] = \overline{w}([x],[x])$ olduğundan önerme 26 ya göre,

$$\overline{w}(A, A) = \overline{w}\left(\bigvee_{x \in A}[x], \bigvee_{y \in A}[y]\right) = \left(\bigvee_{\substack{x, y \in A \\ x \neq y}}\left(\overline{w}([x],[y])\right)\right) \vee \left(\bigvee_{x \in A} \overline{w}([x],[x])\right)$$

$$= \bigvee_{x \in A} \overline{w}([x],[x]) = \bigvee_{x \in A}[x] = A$$

elde edilir. Sonuç 6 dan i) elde edilir.

Sonuç 9 a göre bir G regüler yarıgrubun her ideali G nin asal ideallerinin bir arakesitidir.

(G, w) bir grupoid ve her $x \in G$ için $x = w(x, x)$ olsun. Sonuç 9 a göre (G, w) nin her ideali G nin asal ideallerinin arakesitidir. Özel olarak, bir her elemanı idempotent olan bir yarıgrubun her ideali ve bir yarıkafesin her ideali, asal ideallerin bir arakesitidir.

Yaptığımız çalışmaları halkaları içeren üniversal cebirlerin sınıfına, diferansiyel halkalara, involüsyonlu halkalara, halkalar üzerinde yarıgrupların hareketlerine ve çarpımlı yarıkafeslere uygulayalım.

$\{X, \varepsilon, \lambda_\tau(\tau \in T), w_1, w_2\}$ bir üniversal cebir olsun, burada X bir kümedir, ε X üzerinde bir 0-lı işlemdir, her $\tau \in T$ için λ_τ, X üzerinde 1-li işlemdir, w_1 ve w_2 X üzerinde ikili işlemlerdir. $\Omega = \{\varepsilon, \lambda_\tau(\tau \in T), w_1\}$ olsun ve kısalık olması açısından $\{X, \varepsilon, \lambda_\tau(\tau \in T), w_1, w_2\}$ nın yerine (X, Ω, w_2) yazalım. (X, Ω, w_2) ye (Ω, w_2)-cebri diyeceğiz.

Tanım 24: (X,Ω,w_2) bir (Ω,w_2)-cebri ve $A\subseteq X$ olsun. Eğer $\varepsilon(X^0)\in A$, her $\tau\in T, a,b\in A$ için $\lambda_\tau(a)\in A$ ve $w_1(a,b)\in A$ ise, A ya (X,Ω,w_2) nin bir Ω*-altcebri* denir.

(X,Ω,w_2)nin tüm Ω-altcebirlerinin kümesini $Sub(X,\Omega)$ ile gösterelim. $\emptyset\in Sub(X,\Omega)$ kabul edelim. Bu takdirde $Sub(X,\Omega)$, "$\subseteq$" bağıntısına göre bir tam kafestir.

Tanım 25. Eğer aşağıdaki iki şart sağlanırsa, X in A altkümesine X in (Ω,w_2)*-ideali* denir:

i) $A\in Sub(X,\Omega)$;

ii) A, (X,w_2) grupoidinin bir idealidir.

(X,Ω,w_2) nin tüm (Ω,w_2)-ideallerinin kümesini $Id(X,\Omega,w_2)$ ile gösterelim. $\emptyset\in Id(X,\Omega,w_2)$ kabul edelim. $Id(X,\Omega,w_2)$ "$\subseteq$ " bağıntısına göre bir tam kafestir.

$A,B\in Id(X,\Omega,w_2)$ için (X,Ω,w_2) nin $w_2(A,B)$yi içeren tüm (Ω,w_2)-ideallerinin arakesitini $\overline{w_2}(A,B)$ ile gösterelim. $(Id(X,\Omega,w_2),\overline{w_2})$ bir l_0-grupoiddir.

Tanım26: λ, X üzerinde bir 1-li işlem olsun. Eğer her $a,b\in X$ için $\lambda(w_1(a,b))=w_1(\lambda(a),\lambda(b))$ (sırasıyla $\lambda(w_1(a,b))=w_1(\lambda(b),\lambda(a))$) sağlanırsa, λ ya bir w_1*-endomorfizm (sırasıyla* w_1*- antiendomorfizm)* denir.

Tanım 27: Eğer aşağıdaki iki şart sağlanırsa, (X,Ω,w_2) cebrine bir *dağılmalı* (Ω,w_2)*-cebir* denir:

i) Her λ_τ $(\tau\in T)$ bir w_1-endomorfizm veya w_1- antiendomorfizmdir;

ii) Her $a,b,c\in X$ için

$$w_2(a,w_1(b,c))=w_1(w_2(a,b),w_2(a,c))$$

ve

$$w_2(w_1(b,c),a)=w_1(w_2(b,a),w_2(c,a))$$

sağlanır.

$Sub(X,\Omega)$ ve $Id(X,\Omega,w_2)$ deki supremum işlemlerini sırasıyla $\vee$ ve $\oplus$ ile gösterelim.

Önerme 27: (X,Ω,w_2) bir dağılmalı (Ω,w_2)-cebir olsun. Bu takdirde her $A_v\in Id(X,\Omega,w_2),(v\in Q)$ için

$$\underset{Q}{\oplus} A_v = \underset{Q}{\vee} A_v = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$$

sağlanır, burada $H_0 = \underset{Q}{\cup} A_v$, her n için $H_{n+1} = H_n \cup w_1(H_n, H_n)$ dır.

İspat. İlk önce $Sub(X,\Omega)$ de $\underset{T}{\vee} A_\tau = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ olduğunu gösterelim. $\bigcup_{i=0}^{\infty} H_i \subseteq \underset{Q}{\vee} A_v$ olduğunu göstermek için tümevarım uygulayalım. k=0 için $H_0 = \underset{Q}{\cup} A_v \subseteq \underset{Q}{\vee} A_v$ dır. Bir n için $H_n \subseteq \underset{Q}{\vee} A_v$ olsun. $\underset{Q}{\vee} A_v \in Sub(X,\Omega)$ olduğunu kullanarak

$$H_{n+1} = H_n \cup w_1(H_n, H_n) \subseteq \underset{Q}{\vee} A_v$$

elde edilir. Dolayısıyla $\bigcup_{i=0}^{\infty} H_i \subseteq \underset{Q}{\vee} A_v$ dır. Diğer taraftan $\underset{Q}{\cup} A_v \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i \subseteq \underset{Q}{\vee} A_v$ dır. Böylece ispatın ilk kısmını tamamlamak için $\bigcup_{i=0}^{\infty} H_i \in Sub(X,\Omega)$ olduğunu göstermek gerekir.

$$\varepsilon(X^0) \in A_v \subseteq \underset{Q}{\cup} A_v \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$$

dır. $\varepsilon(X^0) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ dır. $\tau \in T$ ve $a \in \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ keyfi alalım. $\lambda_\tau(a) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ olduğunu tümevarım kullanarak gösterelim. $a \in H_0$ ise, $a \in A_{v_0}$ olacak şekilde bir $v_0 \in Q$ bulunur. $A_{v_0} \in Sub(X,\Omega)$ olduğundan $\lambda_\tau(a) \in A_{v_0} \subseteq \underset{Q}{\cup} A_v \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ dır. Bir n için $a \in H_n$ ise, $\lambda_\tau(a) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ olduğunu kabul edelim. $a \in H_{n+1}$ olsun. $H_{n+1} = H_n \cup w_1(H_n, H_n)$ olduğundan $a \in H_n$ veya $a \in w_1(H_n, H_n)$ dır. n için kabulümüzden dolayı $a \in H_n$ olması durumunda $\lambda_\tau(a) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ olduğunu biliyoruz. $a \in w_1(H_n, H_n)$ olsun. Bu takdirde $a = w_1(c,d)$ olacak şekilde $c,d \in H_n$ mevcuttur. $c,d \in H_n$ olduğundan $\lambda_\tau(c), \lambda_\tau(d) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ dır. $\lambda_\tau(c) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ olduğundan $\lambda_\tau(c) \in H_m$ olacak şekilde bir m mevcuttur. $\lambda_\tau(d) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ olduğundan $\lambda_\tau(c) \in H_k$ olacak şekilde bir k mevcuttur. $\{H_i \mid i \in \{0,1,\cdots,n,\cdots\}\}$ bir zincir olduğundan

$H_m \subseteq H_k$ veya $H_k \subseteq H_m$ bulunur. $H_m \subseteq H_k$ olduğunu kabul edelim. $\lambda_\tau(c), \lambda_\tau(d) \in H_k$ dır. (X, Ω, w_2) nin bir dağılmalı (Ω, w_2)-cebir olduğunu kullanarak

$$\lambda_\tau(a) = \lambda_\tau(w_1(c,d)) = w_1(\lambda_\tau(c), \lambda_\tau(d)) \in w_1(H_k, H_k)$$

ve $H_{k+1} = H_k \cup w_1(H_k, H_k)$ olduğundan $\lambda_\tau(a) \in H_{k+1}$ elde edilir. Dolayısıyla $\lambda_\tau(a) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ dir. $a, b \in \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ olsun. $a, b \in H_m$ olacak şekilde bir m bulunur.

$$w_1(a,b) \in w_1(H_m, H_m) \subseteq H_m \cup w_1(H_m, H_m) = H_{m+1}$$

Dolayısıyla $w_1(a,b) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ yazılabilir. Böylece $\bigcup_{i=0}^{\infty} H_i \in Sub(X, \Omega)$ olduğu gösterildi. $\bigvee_T A_\tau = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ dır. İspatı tamamlamak için $\bigoplus_Q A_v = \bigvee_Q A_v$ olduğunu göstermeliyiz. $A_v \subseteq \bigoplus_Q A_v$ ve $\bigoplus_Q A_v$ bir altcebir olduğundan $\bigvee_Q A_v \subseteq \bigoplus_Q A_v$ dır. $\bigvee_Q A_v \in Id(X, \Omega, w_2)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için ise, $\bigvee_Q A_v \in Sub(X, \Omega)$ olduğundan $\bigvee_Q A_v$ nin (X, w_2) nin bir ideali olduğunu göstermek yeterlidir. Tümevarım kullanalım. $a \in \bigvee_Q A_v$ ve $x \in X$ olsun. $a \in H_0$ olsun. Bu durumda $a \in A_{v_0}$ olacak şekilde bir $v_0 \in Q$ mevcuttur. $A_{v_0} \in Id(X, \Omega, w_2)$ olduğundan $w_2(a,x) \in A_{v_0} \subseteq \bigvee_Q A_v$ dır. Bir n için $a \in H_n$ ise, $w_2(a,x) \in \bigvee_T A_\tau = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ olduğunu kabul edelim. $a \in H_{n+1}$ olsun. $H_{n+1} = H_n \cup w_1(H_n, H_n)$ olduğundan $a \in H_n$ veya $a \in w_1(H_n, H_n)$ dır. $a \in H_n$ ise, istenen kabulden elde edilir. $a \in w_1(H_n, H_n)$ ise, $a = w_1(c,d)$ olacak şekilde $c, d \in H_n$ mevcuttur. $c, d \in H_n$ olduğundan $w_2(c,x), w_2(d,x) \in \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ dır. $w_2(c,x), w_2(d,x) \in H_k$ olacak şekilde bir k bulunur.

$$w_2(a,x) = w_2(w_1(c,d), x) = w_1(w_2(c,x), w_2(d,x)) \in w_1(H_k, H_k)$$

ve $H_{k+1} = H_k \cup w_1(H_k, H_k)$ olduğundan $w_2(a,x) \in \bigvee_T A_\tau = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ elde edilir. Benzer şekilde $w_2(x,a) \in \bigvee_T A_\tau = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$ olduğu gösterilir. Böylece $\bigoplus_Q A_v = \bigvee_Q A_v$ dır.

Önerme 28: (X, Ω, w_2) bir dağılmalı (Ω, w_2)-cebir olsun. Bu takdirde $(Id(X, \Omega, w_2), \overline{w_2})$ bir *cl*-grupoiddir.

İspat: $\underset{T}{\oplus}\overline{w_2}(A,B_\tau)\subset\overline{w_2}\left(A,\underset{T}{\oplus}B_\tau\right)$ eşitsizliği açıktır. Ters yöndeki eşitsizliği gösterelim.

Önerme 27 ye göre

$$\underset{T}{\oplus}B_\tau=\bigcup_{i=0}^{\infty}H_i$$

dır, burada $H_0=\underset{T}{\cup}B_\tau$, her n için $H_{n+1}=H_n\cup w_1(H_n,H_n)$ dır. $a\in A, b\in H_0$ olsun. Bu takdirde bir τ için $b\in B_\tau$ dır.

Bundan dolayı

$$w_2(a,b)\in w_2(A,B_\tau)\subset\underset{T}{\oplus}\overline{w_2}(A,B_\tau)$$

ve

$$w_2(A,H_0)\subset\underset{T}{\oplus}\overline{w_2}(A,B_\tau)$$

dır.

$$w_2(A,H_n)\subset\underset{T}{\oplus}\overline{w_2}(A,B_\tau)$$

olduğunu kabul edelim. $a\in A$, $b\in H_{n+1}=H_n\cup w_1(H_n,H_n)$ olsun. Eğer $b\in H_n$ ise, yukarıdaki varsayım ile

$$w_2(a,b)\in\underset{T}{\oplus}\overline{w_2}(A,B_\tau)$$

elde edilir. $b\in w_1(H_n,H_n)$ olsun. Bu takdirde $b=w_1(c,d)$ olacak şekilde $c,d\in H_n$ elemanları vardır. Bundan dolayı

$$\begin{aligned}w_2(a,b)&=w_2(a,w_1(c,d))\\&=w_1(w_2(a,c),w_2(a,d))\in w_1(w_2(A,H_n),w_2(A,H_n))\subset\underset{T}{\oplus}\overline{w_2}(A,B_\tau)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$w_2(A,H_{n+1})\subset\underset{T}{\oplus}\overline{w_2}(A,B_\tau)$$

ve

$$w_2\left(A,\underset{T}{\oplus}B_\tau\right)\subset\underset{T}{\oplus}\overline{w_2}(A,B_\tau)$$

dır. Bu takdirde

$$\overline{w_2}\left(A,\underset{T}{\oplus}B_\tau\right)\subset\underset{T}{\oplus}\overline{w_2}(A,B_\tau)$$

dır. Bundan dolayı

$$\overline{w_2}\left(A, \underset{T}{\oplus} B_\tau\right) = \underset{T}{\oplus} \overline{w_2}(A, B_\tau)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\overline{w_2}\left(\underset{T}{\oplus} B_\tau, A\right) = \underset{T}{\oplus} \overline{w_2}(B_\tau, A)$$

elde edilir.

Önerme 28 e göre, herhangi dağılmalı (Ω, w_2)-cebirlere teorem 8, teorem 9 ve teorem 10 uygulanabilir.

(X, Ω, w_2) nin $x \in X$ i içeren en küçük (Ω, w_2)-idealini $[x]$ ile gösterelim.

Sonuç 10: (X, Ω, w_2) bir dağılmalı (Ω, w_2)-cebir olsun. Aşağıdaki şartlar denktir:

i) Herhangi $A \in Id(X, \Omega, w_2)$ için $A = R(A)$ dır;

ii) Herhangi $A \in Id(X, \Omega, w_2)$ için $A = r(A)$ dır;

iii) Her $A, B \in Id(X, \Omega, w_2)$ için $\overline{w_2}(A, B) = A \cap B$ dir;

iv) Herhangi $x \in X$ için $x \in \overline{w_2}([x], [x])$ dır.

İspat sonuç 9 un ispatına benzer şekilde yapılır.

Üniversal cebirlerin aşağıdaki sınıfları dağılmalı (Ω, w_2)-cebirlerdir: halkalar, diferansiyel halkalar, involüsyonlu halkalar, halkalar üzerinde yarıgrupların hareketleri, çarpımlı yarıkafesler.

1.Halkalar (birleşmeli veya birleşmeli değil). Bir X halkası bir $(X, \Theta, \mu, +, \cdot)$ sistemi olarak incelenebilir, burada Θ bir 0-lı işlemdir, μ bir 1-li işlemdir, X $(\Theta, \mu, +)$ ya göre bir değişmeli grup ve $(X, .)$ bir grupoid ve her $a, b, c \in X$ için $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$ olmak üzere, + ve . X üzerinde ikili işlemlerdir.

Bundan dolayı teorem 8, teorem 9, teorem 10 bir halkaya uygulanabilir. Teorem 8, teorem 9, teorem 10 birleşmeli halkalar için bilinmektedir [18], [81], [82].

2. Diferansiyel halkalar. Bir X diferansiyel halkası bir $\{X, \Theta, \mu, +, ., d_\tau(\tau \in T)\}$ sistemi olarak incelenebilir, burada her $\tau \in T$ için d_τ $(X, \Theta, \mu, +, \cdot)$ halkasının bir diferansiyelidir. Teorem 8, 9 ve 10 [23], [24], [25], [26] da diferansiyel halkalar için elde edilmiştir.

3. İnvolüsyonlu halkalar. İnvolüsyonlu bir halka bir $(X, \Theta, \mu, +, \cdot, *)$ sistemi olarak düşünülebilir, burada $*$ bir $(X, \Theta, \mu, +, \cdot)$ halkasının bir involüsyonudur. Teorem 8, 9 ve 10 [27] de involüsyonlu bir halka için verilmiştir.

4. Halkalar üzerinde yarıgrupların hareketleri. Bir halka üzerinde bir yarıgubun bir hareketi bir $\{X,\Theta,\mu,+,.,g_\tau(\tau\in T)\}$ sistemi olarak düşünülebilir, burada $g_\tau\,(\tau\in T)$ $(X,\Theta,\mu,+,\cdot)$ halkasının bir endomorfisidir.

5.Çarpımlı yarıkafesler[48]. Bir çarpımlı yarıkafesi $(X,\vee,.)$ sistemi olarak inceleyebiriz, burada $(X,\vee)$ her $a,b,c\in X$ için $a(b\vee c)=ab\vee ac$ ve $(b\vee c)a=ba\vee ca$ eşitliklerini sağlayan bir yarıkafestir. Bundan dolayı teorem 8, teorem 9, teorem 10 bir çarpımlı yarıkafese uygulanabilir.

Özel olarak her $x\in X$ için $x=x^2$ ise, sonuç 6 ya göre $(X,\vee,.)$ nin herhangi bir ideali asal ideallerin bir arakesitidir. $\cdot=\wedge$ olması durumunda Stone teoremi elde edilir[83]. Asal radikal üzerinde Stone teoreminin doğru olması için gerek ve yeter koşul L nin bir dağılmalı kafes olmasıdır.

6. Bir grubun RI^*- radikali. G bir grup olsun. G nin tüm normal altgruplarının kafesini $N(G)$ ile gösterelim. $A,B\in N(G)$ için $a^{-1}b^{-1}ab\ (a\in A, b\in B)$ elemanları ile üretilen G nin normal altgrubunu $[A,B]$ ile gösterecek olursak $(N(G),[\cdot])$ nin bir l-grupoid olduğu örnek 9 da gösterildi. Bundan dolayı teorem 8, teorem 9 bir gruba uygulanabilir. $A\in N(G)$ için $R(A)$ radikaline bir A grubunun RI^* -radikali denir[20]. Teorem 8 ve teorem 9 gruplar için verilmiştir[21].

2.3. Cebirsel ve modüler kafeslerde tüm koatomların arakesiti ve tüm atomların toplamı

L bir tam kafes olsun. 1 ile (0 ile) L nin en büyük elemanını (en küçük elemanını) gösterelim.

Tanım 28: $x\in L$ ve $x\neq 1$ olsun. Eğer $x\le y\le 1$ olan keyfi $y\in L$ için $y=x$ veya $y=1$ elde ediliyorsa, x elemanına koatom(veya maksimal eleman) denir.

L deki tüm koatomların arakesitini $F(L)$ ile gösterelim. L de koatom yoksa $F(L)=1$ alalım

U bir üniversal cebir olsun. U nun tüm altcebirlerinin kafesi SubU ile gösterilsin. Bu durumda $F(\mathrm{SubU})$ altcebirine Frattini altcebri denir[52].

Üniversal cebirlerin farklı sınıfları için Frattini altcebrinin özelliklerini inceleyen birçok çalışma yapılmıştır(Örnek olarak [49],[50], [51], [52],[53], [54], [55],[56], [57]).

K bir birimli birleşmeli halka olsun. I_K, K nın tüm sağ ideallerinin kafesini göstersin. Bu durumda $F(I_K)$ K nın Jakobson radikalidir. M bir K-modül olsun. L_M M nin tüm altmodüllerinin kafesini göstersin. Bu durumda $F(L_M)$ M nin radikalidir [19].

Tanım 29: $x \in L$ ve $x \neq 0$ olsun. Eğer $0 \leq y \leq x$ olan keyfi $y \in L$ için $y = 0$ veya $y = x$ elde ediliyor ise, x elemanına atom denir.

L deki tüm atomlarının toplamını $F^*(L)$ ile gösterelim. L de atom yoksa $F^*(L) = 0$ alalım.

Tanım 30: $x \in L$ olsun. Eğer $x \vee y = 1$ olan keyfi $y \in L$ için $y = 1$ elde ediliyor ise, x' e küçük denir.

L nin tüm küçük elemanlarının toplamı $S(L)$ ile gösterilsin.

Tanım 31: $x \in L$ olsun. Eğer $x \wedge y = 0$ olan keyfi $y \in L$ için $y = 0$ elde ediliyor ise, x' e büyük (veya temel) denir.

L nin tüm büyük elemanlarının arakesiti $S^*(L)$ ile gösterilsin.

Uyarı: Kafeslerdeki küçük ve büyük elemanların tanımları bir modülün küçük ve büyük altmodüllerinin genelleştirilmeleridir [19].

Bizim bu bölümdeki amacımız cebirsel ve modüler kafeslerde $F(L)$ ve $F^*(L)$ elemanlarının özelliklerinin incelenmesidir. Biz $F(L)$ ve $F^*(L)$ elemanlarını bir kafesin büyük ve küçük elemanları türünden tanımladık. $F(L) = 0$ ve $F^*(L) = 1$ olduğu zaman şartları inceledik.

Önerme 29: L bir tam kafes olsun. Bu takdirde:

i) L nin tüm küçük elemanlarının kümesi L nin bir idealidir;

ii) L nin tüm büyük elemanlarının kümesi L nin bir koidealidir;

iii) $S(L) \leq F(L)$ ve $S^*(L) \geq F^*(L)$ dır.

İspat: i): $T = \{x \in L \mid x, L \text{ nin küçük elemanı}\}$ ve $x, y \in T$ olsun. $x \vee y \in T$ olduğunu ve $a \in T, m \leq a$ ise $m \in T$ olduğunu göstermek gerekir. $(x \vee y) \vee z = 1$, $z \in L$ olsun. $z=1$ olduğunu göstermek gerekir. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = 1$ ve x küçük eleman olduğundan $y \vee z = 1$ dir. y küçük eleman olduğundan $z = 1$ dir. $a \in T$, $m \leq a$ olsun. $m \vee y' = 1$, $y' \in L$ olsun. Böylece $1 = m \vee y' \leq a \vee y'$ olduğundan $a \vee y' = 1$ elde edilir. a küçük eleman olduğundan $y' = 1$ dir ve istenen elde edilir.

ii): i) ye dual olarak benzer şekilde elde edilir.

iii): $S(L) \leq F(L)$ olduğunu ispat edelim. x elemanı L nin bir küçük elemanı olsun. $x \leq F(L)$ olduğunu gösterelim.

Eğer L de koatom yok ise, $F(L) = 1$ dir. Bundan dolayı bu durumda $x \leq F(L)$ sağlanır.

L de bir koatom mevcut olsun. m elemanı L de bir koatom olsun. Eğer $x \not\leq m$ ise, $x \vee m = 1$ dir. Fakat bu x in küçük eleman olması ile çelişir. Bundan dolayı L nin herhangi bir m koatomu için $x \leq m$ dir. Böylece $x \leq F(L)$ dir. x keyfi bir küçük eleman olduğundan $S(L) \leq F(L)$ dir.

$S^*(L) \geq F^*(L)$ ifadesinin ispatı da (dual olarak) benzer şekilde yapılır.

Uyarı: $S(L) \neq F(L)$ olacak şekilde bir L kafesi mevcuttur.

Örnek 15: $L = [0,1] \cup \{\alpha\}, \alpha \notin [0,1]$ olsun, burada $[0,1]$ de doğal sırayı ve α için $0<\alpha<1$ sırasını alalım. Bu takdirde L bir kafestir. L nin 0 dan başka küçük elemanı yoktur. Eğer $x \in [0,1]$, $x > 0$ bir küçük eleman olsaydı, $x \vee \alpha = 1$ eşitliğinden $\alpha = 1$ çelişkisi elde edilirdi. Keyfi bir $x \in [0,1]$, $x > 0$ için $x \vee \alpha = 1$ olduğundan α elemanı da küçük eleman olamaz. Dolayısıyla $S(L) = 0$ dır. Keyfi $x \in [0,1]$, $x \neq 1$ elemanı için x den daha büyük bir eleman bulunabileceğinden x koatom olamaz. Dolayısıyla tek koatom α dır. Bu kafesde $S(L) \neq F(L)$ dir.

Önerme 30: L bir tam kafes olsun. Herhangi bir $x \in L$, $x \neq 1$ için $x \leq m$ olacak şekilde L de bir m koatom mevcut olsun. Bu takdirde $F(L)$ bir küçük elemandır ve $S(L) = F(L)$ dir.

İspat: Eğer L de 0=1 ise, bu takdirde $F(L)$ bir küçük elemandır ve $S(L) = F(L)$ dir.

$0 \neq 1$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde L de bir koatom mevcuttur. Bundan dolayı $F(L) \neq 1$ bulunur.

$F(L)$ nin bir küçük eleman olduğunu ispat edelim. Bir $y \in L$ için $F(L) \vee y = 1$ olduğunu kabul edelim. Eğer $y \neq 1$ ise, bu takdirde $y \leq m$ olacak şekilde L de bir m koatomu mevcuttur. Bu durumda $1 = F(L) \vee y \leq F(L) \vee m \leq m$ dir. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $y = 1$ dir. Bu $F(L)$ nin küçük eleman olması anlamına gelir. Önerme 29 a göre $S(L) = F(L)$ elde edilir.

Sonuç 11: L artan zincir koşulunu sağlayan bir tam kafes olsun. Bu takdirde $F(L)$ bir küçük elemandır ve $S(L) = F(L)$ dir.

İspat: L artan zincir koşulunu sağlasın. Önerme 30 un hipotezinin sağlandığını göstermek gerekir. Bir $1 \neq a \in L$ için $a \leq m$ olacak şekilde bir m koatomu mevcut olmasın. Bu takdirde a nın kendisi bir koatom değildir. Bu takdirde $a_1 \neq 1$, $a < a_1$ olacak şekilde bir $a_1 \in L$ elemanı mevcutdur. Bu a_1 elemanı koatom olamaz. . Bundan dolayı $a_2 \neq 1$, $a < a_2$ olacak şekilde bir $a_2 \in L$ elemanı mevcutdur. Bu a_2 elemanı koatom olamaz. Bu şekilde devam edilerek

$$a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$$

olacak şekilde bir artan zincir bulunmuş olur ki bu bir çelişkidir. Böylece önerme 30 un hipotezi sağlanır. $F(L)$ bir küçük elemandır ve $S(L) = F(L)$ dir.

Önerme 31: L bir komplementli tam kafes olsun. Bu takdirde $S(L) = 0$ ve $S^*(L) = 1$ dir.

İspat: Eğer $x \neq 0$ ise, x in bir küçük eleman olamayacağını gösterelim.

$x \neq 0$ için, $x \wedge y = 0, x \vee y = 1$ olacak şekilde $y \in L$ mevcuttur. $x \neq 0$ ve $x \wedge y = 0$ ile, $y \neq 1$ elde edilir. Bu x in L nin bir küçük elemanı olamayacağını gösterir. Böylece $S(L) = 0$ dır.

$S^*(L) = 1$ eşitliği (dual olarak) benzer şekilde gösterilir.

Teorem 11(kafesler için Nakayama lemması): L bir cebirsel kafes olsun. Bu takdirde:

i) $p \in L$, p kompakt ve $p \leq F(L)$ ise, p küçük elemandır;

ii) 1 kompakt ve $p \leq F(L)$ ise, p küçük elemandır.

iii) $S(L) = F(L)$ dir.

İspat: i): $p \leq F(L)$ olacak şekilde L nin bir p kompakt elemanını alalım. p nin L de bir küçük eleman olduğunu gösterelim.

p bir küçük eleman olmasın. Bu takdirde $y \neq 1$ ve $p \vee y = 1$ olacak şekilde $y \in L$ elemanı mevcuttur. $b \geq y$ ve $p \not\leq b$ olacak şekildeki tüm $b \in L$ elemanlarının kümesini B ile gösterelim. $y \in B$ olduğundan B boştan farklıdır. B üzerindeki kısmen sıralama olarak L deki sırayı alalım. B ye Zorn Lemmasının uygulanabileceğini gösterelim.

$\{d_\tau \mid \tau \in T\}$ B de bir zincir ve $d = \bigvee_{\tau \in T} d_\tau$ olsun. Bu takdirde $d \geq y$ dir. $p \not\leq d$ olduğunu ispatlayalım.

$p \leq d$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $p = p \wedge d$ dır. L bir cebirsel kafes olduğundan

$$p = p \wedge d = p \wedge \left(\vee_{\tau \in T} d_\tau \right) = \vee_{\tau \in T} (p \wedge d_\tau)$$

yazılabilir. p L nin bir kompakt elemanı ve $\{p \wedge d_\tau \mid \tau \in T\}$ bir zincir olduğundan bir $\nu \in T$ için $p = p \wedge d_\nu$ elde edilir [48]. Bundan dolayı $p \leq d_\nu$ dür. Bu her $\tau \in T$ için $p \not\leq d_\tau$ olması ile çelişir.

Böylece $d \in B$ dir. Bundan dolayı B ye Zorn lemmasını uygulayabiliriz. m B nin bir maksimal elemanı olsun. m nin L de bir koatom olduğu gösterilmelidir.

$$1 = p \vee y \leq p \vee m$$

dır. Böylece $p \vee m = 1$ dir. $m \neq 1$ olduğunu ispat edelim. Eğer $m = 1$ ise, $p \leq m$ dir. Bu ise her $b \in B$ için $p \not\leq b$ olduğundan $m \in B$ olması ile çelişir. Böylece $m \neq 1$ dir.

Bir $k \in L$ için $m \leq k \leq 1$ olduğunu kabul edelim. Eğer $p \leq k$ ise,

$$1 = p \vee m \leq k \vee k = k$$

dır. Böylece $k = 1$ dir. $p \not\leq k$ olması durumunda $y \leq m \leq k$ dır. Bundan dolayı $k \in B$ dir. m B nin maksimal elemanı olduğundan $m = k$ dır. Böylece m L de bir koatomdur. $p \leq F(L) \leq m$ olduğundan $p \leq m$ elde edilir. Bu $m \in B$ olması ile çelişir. Bundan dolayı p L nin bir küçük elemanıdır.

Böylece eğer p elemanı $p \leq F(L)$ olacak şekilde bir kompakt eleman ise, p L de bir küçük elemandır.

ii) $p \in L$ ve $p \leq F(L)$ olsun. L cebirsel olduğundan dolayı kompakt elemanların bir $\{p_\tau \mid \tau \in T\}$ ailesi için $p = \vee_T p_\tau$ dır. Bir $n \in L$ için $p \vee n = 1$ olsun. Bu takdirde $\left(\vee_T p_\tau \right) \vee n = 1$ dir. 1 kompakt olduğundan dolayı

$$p_{\tau_1} \vee \cdots \vee p_{\tau_n} \vee n = 1$$

olacak şekilde $\tau_1, \cdots, \tau_n \in T$ elemanları mevcuttur. $p' = p_{\tau_1} \vee \cdots \vee p_{\tau_n}$ elemanı kompakttır. $p' \leq p \leq F(L)$ eşitsizliğinden ve i) nin ispatına göre p' bir küçük elemandır. Buna göre $p' \vee n = 1$ eşitliğinden n=1 elde edilir. Dolayısıyla p elemanı küçüktür.

iii) Teoremin yukarıda ispatlanan i) ve ii) kısımlarından ve $F(L)$, $p \leq F(L)$ olacak şekildeki p kompakt elemanlarının toplamı olduğundan $F(L) \leq S(L)$ eşitsizliği elde edilir. Önerme 29 a göre $S(L) \leq F(L)$ dır. Dolayısıyla $F(L) = S(L)$ dır.

Uyarı: i) Teorem 11 in i) ve iii) kısımları [84] de ispatsız olarak verilmiştir. Teorem 11 modüller için Nakayama lemmasının [85] bir genelleşmesidir.

U bir üniversal cebir olsun. SubU bir cebirsel kafestir [52]. $F(SubU)$ U nun tüm üreteç olmayan elemanlarından oluşur [52].

U nun tüm kongrüanslarının kafesi ConU ile gösterilsin. ConU bir cebirsel kafestir [52]. $F(ConU)$ teorem 11 de tanımlandı.

K birimli bir halka olsun. I_K K nın tüm sağ ideallerinin kafesi olsun. Teorem 11 ile verilen $F(I_K)$ nın tanımı halka teorisinde verilen tanımından farklıdır.

Sonuç 12: L bir cebirsel kafes ve L nin her kompakt elemanının L de sıfırdan farklı bir komplementi mevcut olsun. Bu takdirde $F(L) = 0$ dır.

İspat: Herhangi kompakt elemanın küçük eleman olmadığını gösterelim.

x bir kompakt eleman ve $x \neq 0$ olsun.

$$x \wedge x' = 0, x \vee x' = 1$$

olacak şekilde $x' \in L$ mevcuttur. $x \neq 0$ olduğundan $x' \neq 1$ dir. Bu x in bir küçük eleman olmadığını gösterir. Dolayısıyla her $a \in L\ (a \neq 0)$ elemanı bir küçük eleman değildir. Çünkü $x \neq 0$ ve $x \leq a$ olacak şekilde bir x kompakt elemanı mevcuttur. Bundan dolayı $0 = S(L) = F(L)$ dir.

Uyarı: Sonuç 12, [86] da verilmiştir.

D bir kısmen sıralı küme olsun.

Tanım 32: Eğer her $\alpha, \beta \in D$ için $\gamma \geq \alpha$ ve $\gamma \geq \beta$ olacak şekilde $\gamma \in D$ elemanı mevcutsa, D kısmen sıralı kümesine *yönlü küme* denir [48].

Tanım 33: L bir tam kafes olsun. Eğer her $a \in L$ ve L nin her yönlü $D = \{x_\delta \mid \delta \in T\}$ altkümesi için

$$a \wedge (\vee_T x_\delta) = \vee_T (a \wedge x_\delta)$$

sağlanırsa, L ye $\wedge$-sürekli kafes denir [48].

Önerme 32: L bir $\wedge$-sürekli kafes ise, L nin herhangi bir atomu bir kompakt elemandır.

İspat: L bir $\wedge$-sürekli kafes ve p L de bir atom olsun. L de bir $\{a_\tau \mid \tau \in T\}$ ailesi için

$$p \leq \vee_T a_\tau$$

olduğunu kabul edelim. $\{a_\tau \mid \tau \in T\}$ nun tüm sonlu altailelerinin kümesini D ile gösterelim. $\delta = \{a_{\tau_1}, \cdots, a_{\tau_n}\} \in D$ için

$$x_\delta = a_{\tau_1} \vee \cdots \vee a_{\tau_n}$$

olsun. $\{x_\delta : \delta \in D\}$ L de bir yönlü kümedir.

$$p \leq \bigvee_T a_\tau$$

ve

$$p = p \wedge \left(\bigvee_D x_\delta\right) = \bigvee_D (p \wedge x_\delta)$$

elde edilir. Eğer her $\delta \in D$ için $p \wedge x_\delta = 0$ ise, $p = 0$ dır. Fakat bu bir çelişkidir. Bundan dolayı bir $\delta \in D$ için $p \wedge x_\delta \neq 0$ ve $p = p \wedge x_\delta \leq x_\delta$ dır. Böylece p L de bir kompakt elemandır.

Tanım 34: L bir tam kafes olsun. Eğer herhangi bir $0 \neq a \in L$ elemanı için a da içerilen bir atom mevcut ise, L ye *atomik kafes* denir [48].

$a, b \in L$ ve $a \leq b$ için $[a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$ olsun.

Sonuç 13: L bir $\wedge$-sürekli atomik kafes ve herhangi $x \in L$ için $[0, x]$ aralığı bir komplementli kafes olsun. Bu takdirde L bir cebirsel kafestir.

İspat: a=0 ise, 0 kompakt olduğundan istenen elde edilir. $0 \neq a \in L$ alalım. $T := \{p \mid p \leq a, p \text{ atom}\}$, $x := \bigvee_T p$ ile tanımlayalım. x=a olduğunu göstermek gerekir. x<a olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $x \in [0, a]$ dır. L yerel komplementli olduğundan $x \wedge x^* = 0, x \vee x^* = a$ olacak şekilde $x^* \in [0, a]$ elemanı mevcuttur. $x \neq a$ olduğundan $x^* \neq 0$ dır. L atomik kafes olduğundan $q \leq x^*$ olacak şekilde bir q atomu mevcuttur. $q \leq x^* \leq a$ olduğundan $q \leq a$ dır. x in tanımından $q \leq x$ dır. Dolayısıyla $q \leq x \wedge x^* = 0$ çelişkisi elde edilir. Çelişki x<a kabul etmekten geldi. Böylece x=a dır.

Teorem 12: L bir $\wedge$-sürekli modüler kafes olsun. Aşağıdaki şartlar denktir:

i) $S^*(L) = 1$;

ii) L bir komplementli kafestir.

İspat: Önerme 31 i kullanarak ii) $\Rightarrow$ i) elde edilir.

$i) \Rightarrow ii)$: $S^*(L)=1$ ve $x \in L$ olsun. $y \wedge x = 0$ olacak şekildeki tüm $y \in L$ elemanlarının kümesi A ile gösterilsin. $0 \in A$ olduğundan A boştan farklıdır. $\{c_v \mid v \in T\}$ A da bir zincir olsun. Bu takdirde her $v \in T$ için $x \wedge c_v = 0$ ve L $\wedge$-sürekli olduğundan

$$x \wedge \left(\bigvee_T c_v\right) = 0$$

dır. Bundan dolayı $c = \bigvee_T c_v \in A$ dır. A ya Zorn lemmasını uygulanabilir. Böylece A nın bir maksimal elemanı mevcuttur. m A nın bir maksimal elemanı olsun. $x \vee m$ nin bir büyük eleman olduğunu göstermek gerekir.

Bir $d \in L$ için $(x \vee m) \wedge d = 0$ olduğunu kabul edelim. $x \wedge m = 0, (x \vee m) \wedge d = 0$ ve L bir modüler kafes olduğundan [87] ye göre

$$x \wedge (m \vee d) = x \wedge m = 0$$

elde edilir. Böylece $m \vee d \in A$ dır.

m A da maksimal olduğundan $m \vee d = m$ elde edilir. Böylece $d \leq m$ dir. Bu takdirde $d = (x \vee m) \wedge d = 0$ dır. Bu $x \vee m$ nin L de bir büyük eleman olması anlamına gelir. $S^*(L) = 1$ ile $x \vee m = 1$ dır. Bundan dolayı m L de x in bir komplementidir. Sonuç olarak L bir komplementli kafestir.

Teorem 13: L bir modüler cebirsel kafes olsun. Aşağıdaki şartlar denktir:

i) $F^*(L) = 1$;

ii) $S^*(L) = 1$;

iii) L bir komplementli kafestir.

İspat: $i) \Rightarrow ii)$: Önerme 29, iii) ye göre $S^*(L) \geq F^*(L)$ ve $F^*(L) = 1$ olduğundan $S^*(L) = 1$ elde edilir.

L bir cebirsel kafes olduğundan L $\wedge$-süreklidir. L modüler olduğundan teorem 12 ye göre $ii) \Leftrightarrow iii)$ elde edilir.

$iii) \Rightarrow i)$:Önerme31 e göre $S(L) = 0$ dır. Teorem 11, iii) yi kullanarak $F(L) = S(L) = 0$ dır. $F^*(L)$ elemanının L de bir c komplementini göz önüne alalım:

$$F^*(L) \wedge c = 0, F^*(L) \vee c = 1 .$$

$c = 0$ olduğunu gösterelim. $c \neq 0$ olsun. $[0, c]$ altkafesi bir komplementli modüler cebirsel kafestir. Bundan dolayı $F([0, c]) = 0$ dır.

$F([0,c]) = 0$ olduğundan $[0,c]$ de bir y koatomu mevcuttur. y nin $[0,c]$ de bir x komplementini göz önüne alalım:

$$y \wedge x = 0, y \vee x = c.$$

x in L de bir atom olduğunu gösterelim. $x' \neq 0$ ve $x \geq x' \geq 0$ olacak şekilde bir $x' \in L$ mevcut olsun. Bu takdirde $x' \wedge y = 0$ dır. y $[0,c]$ de bir koatom, $x' \wedge y = 0$ ve $x' \in [0,c]$ olduğundan $x' \vee y = c$ elde edilir. Bundan dolayı

$$x \wedge y = x' \wedge y = 0$$

$$x \vee y = x' \vee y = c$$

dır. $x' \leq x$ ve L modüler olduğundan $x' = x$ bulunur. Bundan dolayı x elemanı L de bir atomdur. Dolayısıyla $x \leq c$ ve $x \leq F^*(L)$ bulunur. Böylece $0 < x \leq c \wedge F^*(L) = 0$ dır. Bu bir çelişkidir. Böylece $c = 0$ dır. Bu $F^*(L) = 1$ olması anlamına gelir.

Sonuç 14: L bir modüler cebirsel kafes ve $F^*(L) = 1$ olsun. Bu takdirde:

i) Herhangi $a, b \in L$ için $F^*([a,b]) = S^*([a,b]) = b$ dir;

ii) Herhangi $a, b \in L$ için $F([a,b]) = S([a,b]) = a$ dır. Özel olarak $F(L) = 0$ dır.

İspat: Teorem 13 e göre L bir komplementli kafestir. Bundan dolayı keyfi $a, b \in L$ için $[a,b]$ komplementli kafestir. Teorem 13 e göre $F^*([a,b]) = S^*([a,b]) = b$ elde edilir. $[a,b]$ komplementli olduğundan önerme 31 e göre $S([a,b]) = a$ dır. Teorem 11 e göre $F([a,b]) = S([a,b]) = a$ dır. Teorem 13, önerme 31 ve teorem 11 i kullanarak $F(L) = 0$ elde edilir.

Uyarı: i) $F(L) = 0$ ve $F^*(L) \neq 1$ olacak şekilde bir L modüler cebirsel kafesi mevcuttur. Örnek olarak Z tamsayılar halkasını Z-modül olarak göz önüne alalım. $L(Z)$ de koatomlar (maksimal) elemanlar $p \in Z$ asal olmak üzere pZ şeklindedir. $\bigcap_{p \text{ asal}} pZ = 0$ olduğundan $F(L(Z)) = 0$ dır. Diğer taraftan $L(Z)$ de $\{0\}$ dan farklı her eleman bir büyük elemandır. $\{0\} \neq nZ \in L(Z)$ keyfi alalım. $nZ \cap mZ = \{0\}$ ise, $nm \in nZ \cap mZ = \{0\}$, nm=0 ve $n \neq 0$ olduğundan m=0 elde edilir. Dolayısıyla $mZ = \{0\}$ ve $nZ \in L(Z)$ büyük elemandır. $S^*(L(Z)) = \bigwedge_{n \neq 0} nZ = 0$ dır. Diğer taraftan $F^*(L(Z)) \leq S^*(L(Z))$ eşitsizliğini kullanarak $F^*(L(Z)) = 0$ bulunur.

ii) Teorem 13 de $i) \Leftrightarrow iii)$ denkliği bilinmektedir [88], [89]. Teorem 13 modüller için bilinmektedir [19].

iii) $S^*(L)=1$, yerel komplementli fakat $F^*(L)=0$ olacak şekilde bir L $\wedge$-sürekli modüler kafesi mevcuttur. Bir L atomsuz tam Bool cebiri örnek olarak verilebilir.

Sonuç 15: L bir cebirsel ve kocebirsel modüler kafes olsun. Aşağıdaki şartlar denktir:

i) $F^*(L)=1$;

ii) $F(L)=0$.

İspat: $i) \Rightarrow ii)$: $F^*(L)=1$ olsun. Teorem $13, i) \Rightarrow iii)$ ye göre L bir komplementli kafestir. L nin duali $\hat{L}$ ile gösterilecek olursa $\hat{L}$ de komplementlidir. L modüler olduğundan $\hat{L}$ de modüler, L kocebirsel olduğundan $\hat{L}$ cebirseldir. Tekrar teorem 13, $iii) \Rightarrow i)$ yi kullanarak $F^*(\hat{L})=0=1_{\hat{L}}$ elde edilir. Eğer $x \in L$ elemanı L de bir atom ise, $x \in \hat{L}$ elemanı $\hat{L}$ de bir koatomdur. Bu sebeple aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$F^*(\hat{L})=F(L)=0.$$

$ii) \Rightarrow i)$: $F(L)=0$ olsun. L cebirsel kafes olduğundan $F(L)=S(L)=0$ dır. Eğer $x \in L$ elemanı L nin bir küçük elemanı ise, $x \in \hat{L}$ elemanı $\hat{L}$ nin bir büyük elemanıdır. Böylece aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$S(L)=S^*(\hat{L})=0=1_{\hat{L}}$$

Teorem $13, i) \Rightarrow iii)$ ye göre $\hat{L}$ bir komplementli kafestir. Dolayısıyla L komplementli kafestir. Tekrar teorem 13, $iii \Rightarrow i)$ yi kullanarak $F^*(L)=1$ elde edilir.

Tanım 35: $B=\{a_\tau \mid \tau \in T\}$ L de bir aile ve her $\tau \in T$ için $a_\tau \neq 0$ olsun. Eğer herhangi $\tau \in T$ ve $B \setminus \{a_\tau\}$ nun herhangi bir $\{a_{\tau_1}, \cdots, a_{\tau_n}\}$ sonlu altkümesi için

$$a_\tau \wedge (a_{\tau_1} \vee \cdots \vee a_{\tau_n})=0$$

sağlanırsa, B ye *w-bağımsız* denir.

L bir tam kafes olsun.

Tanım 36: $B=\{a_\tau \mid \tau \in T\}$ L de bir aile olsun. Eğer herhangi $\tau \in T$ için $a_\tau \neq 0$ ve

$$a_\tau \wedge \bigvee_{\nu \in T \setminus \{\tau\}} a_\nu = 0$$

sağlanırsa, B ye *bağımsız* denir. Bu durumda $a = \bigvee_T a_\tau$ toplamı $a = \bigoplus_T a_\tau$ ile gösterilir ve a ya $\{a_\tau \mid \tau \in T\}$ ailesinin bir *direkt toplamı* denir.

Önerme 33: L bir $\wedge$-sürekli kafes ise, L de herhangi bir w-bağımsız aile bağımsızdır.

İspat: $B=\{a_\tau \mid \tau\in T\}$ L de bir w-bağımsız aile olsun. $a_\tau\in B$ için, $B\setminus\{a_\tau\}$ nun tüm sonlu altkümelerinin kümesi H ile gösterilsin. $\rho\in H$ için

$$c_\rho=\vee\rho$$

olsun. $\{c_\rho \mid \rho\in H\}$ L nin bir yönlü altkümesidir.

$$a_\tau\wedge\left(\bigvee_{\nu\in T\setminus\{\tau\}}a_\nu\right)=a_\tau\wedge\left(\bigvee_H c_\rho\right)=\bigvee_H\left(a_\tau\wedge c_\rho\right)=0$$

elde edilir.

Bir kafes için aşağıdaki şartı göz önüne alalım:

Bir L kafesinin herhangi bir p atomu ve her $y\in L$ için aşağıdaki gerektirme sağlanır:

$$(z\le y)\Rightarrow z\vee(p\wedge y)=(z\vee p)\wedge y \qquad (4)$$

Uyarı: L bir modüler kafes ise, (4) şartı sağlanır. (4) şartını sağlayan modüler olmayan bir kafes mevcuttur. (4) şartı [48] de verilmiştir ve bu şart AC-kafeslerinin tanımı için kullanılır.

Teorem 14: L (4) şartını sağlayan $\wedge$-sürekli bir kafes ve $F^*(L)=1$ olsun. Bu takdirde:

i) L bir komplementli kafestir.

ii) $1=\bigoplus_J p_j$ olacak şekilde L de atomların bir $\{p_j \mid j\in J\}$ ailesi mevcuttur.

İspat: $x\in L, x\ne 1$ olsun. L de tüm atomların kümesini $I=\{p_i \mid i\in T\}$ ile gösterelim. $F^*(L)=1$ olduğundan $I\ne\varnothing$ dur.

$I\supseteq J$ olsun. Eğer

$$x\vee\left(\bigvee_J p_j\right)=x\oplus\left(\bigoplus_J p_j\right)$$

sağlanırsa, J ye bir direkt küme denir.

Bir direkt küme mevcuttur. Gerçekten $x\ne 1$ ve $F^*(L)=1$ dir. Bu takdirde $p\not\le x$ olacak şekilde bir p atomu mevcuttur. $p\not\le x$ den, $p\wedge x=0$ (eğer $p\wedge x\ne 0$ ise, $p=p\wedge x$ ve böylece $p\le x$ elde edilir, bu ise bir çelişkidir) elde edilir. $J=\{p\}$ olsun. Bu takdirde J bir direkt kümedir. I nın tüm direkt kümelerinin ailesini M ile gösterelim.

$\{J_k \mid k\in K\}$ M de bir zincir olsun.

$$J=\bigcup_K J_k$$

olsun. $J \in \mathcal{M}$ olduğunu ispatlayalım. Her $k \in K$ için

$$x \vee \left(\bigvee_{J_k} p_j \right) = x \oplus \left(\bigoplus_{J_k} p_j \right)$$

elde edilir. Buradan

$$x \wedge \left(\bigvee_{J_k} p_j \right) = 0$$

ve herhangi $\tau \in J_k$ için

$$p_\tau \wedge \left(x \vee \left(\bigvee_{\substack{j \in J_k \\ j \neq \tau}} p_j \right) \right) = 0 \qquad (5)$$

dır.

$$0 = \bigvee_{k \in K} \left(x \wedge \left(\bigvee_{J_k} p_j \right) \right) = x \wedge \left(\bigvee_{k \in K} \left(\bigvee_{J_k} p_j \right) \right) = x \wedge \left(\bigvee_{J} p_j \right)$$

elde edilir.

$p_\tau \in J$ olsun. Bu takdirde bir $\nu \in K$ için $p_\tau \in J_\nu$ dır.

$$y_{\tau k} = \bigvee_{\substack{j \in J_k \\ j \neq \tau}} p_j , \; y_\tau = \bigvee_{\substack{j \in J \\ j \neq \tau}} p_j$$

olsun. $\{ y_{\tau k} \mid k \in K \}$ L de bir zincirdir ve

$$y_\tau = \bigvee_{k \in K} \left(\bigvee_{\substack{j \in J_k \\ j \neq \tau}} p_j \right) = \bigvee_{k \in K} y_{\tau k}$$

dır. (5) özelliğini ve $\{ x \vee y_{\tau k} \mid k \in K \}$ nın bir zincir olduğunu kullanarak

$$p_\tau \wedge (x \vee y_\tau) = p_\tau \wedge \left(\bigvee_{k \in K} (x \vee y_{\tau k}) \right) = \bigvee_{k \in K} \left(p_\tau \wedge (x \vee y_{\tau k}) \right) = 0$$

elde edilir.

Böylece J I nın bir direkt altkümesidir. $\mathcal{M}$ ye Zorn lemmasını uygulayabiliriz. Dolayısıyla $\mathcal{M}$ nin bir H maksimal elemanı mevcuttur.

$$x \oplus \left(\bigoplus_{h \in H} p_h \right) = 1$$

olduğunu gösterelim.

$$x \oplus \left(\bigoplus_{h \in H} p_h \right) \neq 1$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$p_i \not\leq x \oplus \left(\bigoplus_{h \in H} p_h \right)$$

olacak şekilde bir $p_i \in L$ atomu mevcuttur. Eğer tüm $p \in L$ atomları için

$$p \leq x \oplus \left(\bigoplus_{h \in H} p_h\right)$$

özelliği sağlanırsa,

$$1 = F^*(L) \leq x \oplus \left(\bigoplus_{h \in H} p_h\right) \neq 1$$

çelişkisi elde edilir.

$$p_i \not\leq x \oplus \left(\bigoplus_{h \in H} p_h\right)$$

den

$$p_i \wedge \left(x \oplus \left(\bigoplus_{h \in H} p_h\right)\right) = 0 \tag{6}$$

bulunur. $H \cup \{i\}$ kümesinin I nın bir direkt altkümesi olduğunu gösterelim. $\tau \in H \cup \{i\}$ olsun. Eğer $\tau = i$ ise, (6) ile

$$p_i \wedge \left(x \vee \left(\bigvee_{h \in H} p_h\right)\right) = 0 \tag{7}$$

dır. $\tau \neq i$ olsun.

$$p_\tau \wedge \left(x \vee \left(\bigvee_{\substack{h \in H \\ h \neq \tau}} p_h \right) \vee p_i \right) = 0$$

olduğunu göstermek gerekir.

H I nın bir direkt altkümesi olduğundan

$$p_\tau \wedge \left(x \vee \left(\bigvee_{\substack{h \in H \\ h \neq \tau}} p_h \right) \right) = 0 \tag{8}$$

dır.

$$y = p_\tau \vee \left(x \vee \left(\bigvee_{\substack{h \in H \\ h \neq \tau}} p_h \right) \right) = x \vee \left(\bigvee_{h \in H} p_h \right)$$

$$z = x \vee \left(\bigvee_{\substack{h \in H \\ h \neq \tau}} p_h \right)$$

olsun. $z \leq y$ olduğuna dikkat edelim. $(7), (8)$ ve (4) şartı ile

$$p_\tau \wedge \left(x \vee \left(\bigvee_{\substack{h \in H \\ h \neq \tau}} p_h \right) \vee p_i \right)$$

$$= p_\tau \wedge \left(p_\tau \vee \left(x \vee \left(\bigvee_{\substack{h \in H \\ h \neq \tau}} p_h \right) \right) \right) \wedge \left(x \vee \left(\bigvee_{\substack{h \in H \\ h \neq \tau}} p_h \right) \vee p_i \right)$$

$$= p_\tau \wedge (y \wedge (z \vee p_i)) = p_\tau \wedge (z \vee (y \wedge p_i))$$

$$= p_\tau \wedge \left[\left(x \vee \left(\bigvee_{\substack{h\in H\\ h\neq\tau}} p_h\right)\right) \vee \left(\left(x \vee \left(\bigvee_{h\in H} p_h\right) \wedge p_i\right)\right)\right]$$

$$= p_\tau \wedge \left(\left(x \vee \left(\bigvee_{\substack{h\in H\\ h\neq\tau}} p_h\right)\right) \vee 0\right)$$

$$= p_\tau \wedge \left(x \vee \left(\bigvee_{\substack{h\in H\\ h\neq\tau}} p_h\right)\right) = 0$$

$x \wedge \left(\left(\bigvee_{h\in H} p_h\right) \vee p_i\right) = 0$ olduğunu gösterelim. H I nın bir direkt altkümesi olduğu için

$$x \wedge \left(\left(\bigvee_{h\in H} p_h\right)\right) = 0 \tag{9}$$

olduğunu biliyoruz.

$$y' := x \vee \left(\bigvee_{h\in H} p_h\right)$$

$$z' := \bigvee_{h\in H} p_h$$

alalım. $z' \leq y'$ olduğuna dikkat edelim. (7), (9) ve (4) şartı ile

$$x \wedge \left(\left(\bigvee_{h\in H} p_h\right) \vee p_i\right)$$

$$= x \wedge \left(x \vee \left(\bigvee_{h\in H} p_h\right)\right) \wedge \left(\left(\bigvee_{h\in H} p_h\right) \vee p_i\right)$$

$$= x \wedge \left(y' \wedge \left(z' \vee p_i\right)\right) = x \wedge \left(z' \vee \left(y' \wedge p_i\right)\right)$$

$$= x \wedge \left(\bigvee_{h\in H} p_h \vee \left(\left(x \vee \left(\bigvee_{h\in H} p_h\right)\right) \wedge p_i\right)\right)$$

$$= x \wedge \left(\left(\bigvee_{h\in H} p_h\right) \vee 0\right)$$

$$= x \wedge \left(\bigvee_{h\in H} p_h\right) = 0$$

elde edilir. Bu $H \cup \{i\}$ nin I nın bir direkt altkümesi olduğunu gösterir. H M nin maksimal elemanı olduğundan bu bir çelişkidir.

Bundan dolayı

$$x \oplus \left(\bigoplus_{h\in H} p_h\right) = 1$$

dır. Böylece her x elemanı L de bir komplemente sahiptir. Özel olarak $x = 0$ için I nın bir J direkt altkümesi

$$\bigoplus_{J} p_j = 1$$

olacak şekilde mevcuttur.

Uyarı: L modüler $\wedge$-sürekli kafes ise teoremin i) kısmı bilinmektedir. ii) kısmı ise, L kompozisyon serili bir modüler kafes olduğu zaman bilinmektedir [87].

2.4. Bir integral *cl*-grupoidde birimin direkt parçalanmaları. 2 ve 3 boyutlu integral *l*-grupoidlerin bulunması.

2.4.1. Bir integral *cl*-grupoidde birimin direkt parçalanmalarının özellikleri.

L bir integral *cl*-grupoid olsun. $\{a_\tau | \ \tau \in T\}$ L nin bir altkümesi ve $\alpha \in T$ olsun. $T(\alpha) = T \setminus \{\alpha\}$, $\bar{a}_\alpha = \bigvee_{\tau \in T(\alpha)} a_\tau$ alalım.

Önerme 34: L bir integral *cl*-grupoid, $\{b_\tau | \ \tau \in T\}$ L nin bir bağımsız ailesi ve her $\tau \in T$ için $a_\tau \neq 0$ ve $a_\tau \leq b_\tau$ olsun. Bu takdirde $\{a_\tau | \ \tau \in T\}$ altkümesi de bağımsızdır.

İspat açıktır.

Tanım 37: Bir $\{a_\tau | \ \tau \in T\}$ altkümesi verilsin. Eğer

$$1 = \bigvee_T a_\tau$$

ise, $\{a_\tau | \ \tau \in T\}$ kümesine L nin *1 birim elemanının bir parçalanması* denir.

Teorem 15: L bir integral *cl*-grupoid, $\{a_\tau | \ \tau \in T\}$ kümesi L nin 1 birim elemanının bir parçalanması ve her $\tau \in T$ için $a_\tau \neq 0$ olsun. Aşağıdaki şartlar denktir:

i) $\{a_\tau | \ \tau \in T\}$ bağımsızdır;

ii) Her $\alpha \neq \beta$ için $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ dır;

iii) Her $\alpha \neq \beta$ için $a_\alpha a_\beta = 0$ dır.

İspat: i) $\Rightarrow$ ii): $\alpha \neq \beta$ için $a_\alpha \wedge a_\beta \leq \bar{a}_\beta \wedge a_\beta$ ve her $\beta \in T$ için $\bar{a}_\beta \wedge a_\beta = 0$ olduğundan her $\alpha \neq \beta$ için $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ elde edilir.

ii) $\Rightarrow$ iii): Önerme 1 e göre her $\alpha \neq \beta$ için $0 \leq a_\alpha a_\beta \leq a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ dır. Bundan dolayı her $\alpha \neq \beta$ için $a_\alpha a_\beta = 0$ elde edilir.

iii) $\Rightarrow$ i): Her $\alpha \neq \beta$ için $a_\alpha a_\beta = 0$ olduğunu kullanarak, her $\alpha \in T$ için

$$a_\alpha \bar{a}_\alpha = a_\alpha \left(\bigvee_{\beta \in T(\alpha)} a_\beta \right) = \bigvee_{\beta \in T(\alpha)} (a_\alpha a_\beta) = 0$$

bulunur. Benzer şekilde her $\alpha \in T$ için $\bar{a}_\alpha a_\alpha = 0$ elde edilir. $a_\alpha \vee \bar{a}_\alpha = 1$ eşitliğini ve önerme 1 i kullanarak

$$\bar{a}_\alpha \wedge a_\alpha = (\bar{a}_\alpha \wedge a_\alpha)1 = (\bar{a}_\alpha \wedge a_\alpha)(a_\alpha \vee \bar{a}_\alpha)$$
$$= ((\bar{a}_\alpha \wedge a_\alpha)a_\alpha \vee (\bar{a}_\alpha \wedge a_\alpha)\bar{a}_\alpha)$$
$$\leq (\bar{a}_\alpha a_\alpha) \vee (a_\alpha \bar{a}_\alpha) \leq \bar{a}_\alpha \wedge a_\alpha$$

ve dolayısıyla

$$\bar{a}_\alpha \wedge a_\alpha = (a_\alpha \bar{a}_\alpha) \vee (\bar{a}_\alpha a_\alpha)$$

bulunur. Her $\alpha \in T$ için $a_\alpha \bar{a}_\alpha = \bar{a}_\alpha a_\alpha = 0$ eşitliklerini kullanarak her $\alpha \in T$ için $\bar{a}_\alpha \wedge a_\alpha = 0$ elde edilir.

Uyarı: iii) $\Rightarrow$ i) gerektirmesi L integral *cl*-grupoid değilse doğru değildir.

Tanım 38: Bir $\{a_\tau | \ \tau \in T\}$ kümesi verilsin. Eğer

$$1 = \bigvee_T a_\tau$$

ve $\{a_\tau | \ \tau \in T\}$ bağımsız ise, $\{a_\tau | \ \tau \in T\}$ kümesine L nin *1 birim elemanının bir direkt parçalanması* denir.

Önerme 35: L bir integral *cl*-grupoid ve $\{a_\tau | \ \tau \in T\}, \{b_\tau | \ \tau \in T\}$ L nin birimin parçalanmaları olsunlar. $\{b_\tau | \ \tau \in T\}$ her $\tau \in T$ için $a_\tau \leq b_\tau$ olacak şekilde birimin bir direkt parçalanması olsun. Bu takdirde her $\tau \in T$ için $a_\tau = b_\tau$ dır.

İspat: $\{b_\tau | \ \tau \in T\}$ L nin birimin bir direkt parçalanması olduğundan teorem 15 e göre tüm $\alpha \neq \beta$ lar için $b_\alpha b_\beta = 0$ elde edilir. $b_\alpha b_\beta = 0$ $(\alpha \neq \beta)$ ifadesini kullanarak her $\alpha \neq \beta$ için

$$0 \leq a_\alpha b_\beta \leq b_\alpha b_\beta = 0$$

elde edilir. Bundan dolayı her $\alpha \neq \beta$ için $a_\alpha b_\beta = 0$ dır. Benzer şekilde her $\alpha \neq \beta$ için $b_\alpha a_\beta = 0$ dır. Bu eşitlikleri kullanarak, $1 = \bigvee_{\alpha \in T} a_\alpha$ ifadesinden

$$b_\beta = b_\beta 1 = b_\beta \left(\bigvee_{\alpha \in T} a_\alpha \right) = \bigvee_{\alpha \in T} (b_\beta a_\alpha) = b_\beta a_\beta$$

bulunur. Benzer şekilde, $1 = \bigvee_{\alpha \in T} b_\alpha$ ifadesinden

$$a_\beta = 1 a_\beta = \left(\bigvee_{\alpha \in T} b_\alpha \right) a_\beta = \bigvee_{\alpha \in T} (b_\alpha a_\beta) = b_\beta a_\beta$$

elde edilir. Bundan dolayı her $\beta \in T$ için $a_\beta = b_\beta$ dır.

Önerme 36: L bir integral *cl*-grupoid ve $\{a_\tau|\ \tau \in T\}$ L nin 1 birim elemanının bir direkt parçalanması olsun. Bu takdirde her $\tau \in T$ için $a_\tau^2 = a_\tau$ dır.

İspat:

$$1 = \bigvee_{\beta \in T} a_\beta = \bigvee_{\beta \in T}(1a_\beta) = \bigvee_{\beta \in T}\left(\left(\bigvee_{\alpha \in T} a_\alpha\right)a_\beta\right)$$

ifadesinden $a_\alpha a_\beta = 0\,(\alpha \neq \beta)$ eşitliklerini kullanarak

$$1 = \bigvee_{\alpha \in T} a_\alpha^2$$

elde edilir. $\{a_\tau^2|\ \tau \in T\}$ L nin 1 birim elemanının bir parçalanmasıdır. $a_\alpha^2 \le a_\alpha\ (\alpha \in T)$ olduğundan, önerme 35 i kullanarak her $\alpha \in T$ için $a_\alpha^2 = a_\alpha$ bulunur.

Tanım 39: $a \in L$ olsun. $\{x \in L|\ x \le a\}$ altkümesine *L nin bir esas ideali* denir.

$\{L_\alpha : \alpha \in T\}$ L nin esas ideallerinin bir ailesi olsun.

Tanım 40: L integral *cl*-grupoidi ve L nin esas ideallerinden oluşan $\{L_\alpha|\ \alpha \in T\}$ ailesi için aşağıdaki şartlar sağlansın:

i) Herhangi bir $x \in L$ için, $x_\alpha \in L_\alpha(\alpha \in T)$ ve $x = \bigvee_{\alpha \in T} x_\alpha$ olacak şekilde bir tek $\{x_\alpha|\ \alpha \in T\}$ ailesi mevcuttur. Bu durum $x \approx \{x_\alpha|\ \alpha \in T\}$ ile gösterilir.

ii) Eğer $x, y \in L$, $x \approx \{x_\alpha|\ \alpha \in T\}, y \approx \{y_\alpha|\ \alpha \in T\}$ ise,

$$x \vee y \approx \{x_\alpha \vee y_\alpha|\ \alpha \in T\}$$

$$xy \approx \{x_\alpha y_\alpha|\ \alpha \in T\}$$

$$x \wedge y \approx \{x_\alpha \wedge y_\alpha|\ \alpha \in T\}.$$

Bu durumda $L = \prod_T L_\alpha$ yazılır ve L ye L_α esas ideallerinin *bir direkt çarpımı* denir.

Teorem 16: $\{L_\alpha|\ \alpha \in T\}$ L nin esas ideallerinin bir ailesi olsun, burada $\alpha \in T$ için $L_\alpha = \{x \in L|\ x \le a_\alpha\}$dır. Aşağıdaki şartlar denktir:

i) Her $\alpha \in T$ için L_α integral *cl*-grupoid ve L $\{L_\alpha|\ \alpha \in T\}$ ailesinin bir direkt çarpımıdır;

ii) $\{a_\alpha : \alpha \in T\}$ L nin biriminin bir direkt parçalanmasıdır.

İspat: $i) \Rightarrow ii)$: L nin bir $\{L_\alpha \mid \alpha \in T\}$ ailesinin bir direkt çarpımı olduğunu kabul edelim. Bu takdirde L nin birim elemanı için bir tek $\{x_\alpha \mid \alpha \in T\}$ ailesi mevcuttur, burada $x_\alpha \in L_\alpha (\alpha \in T)$ ve $1 = \vee_{\alpha \in T} x_\alpha$ dır.

$$1 = \vee_{\alpha \in T} x_\alpha \leq \vee_{\alpha \in T} a_\alpha$$

ve $\{x_\alpha \mid \alpha \in T\}$ ailesinin tekliğinden her $\alpha \in T$ için $x_\alpha = a_\alpha$ elde edilir.

$\alpha \neq \beta$ için $a_\alpha \wedge a_\beta \in L_\alpha$ ve $a_\alpha \wedge a_\beta \in L_\beta$ ifadelerinden $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ elde edilir. Teorem 15 e göre $\{a_\tau \mid \tau \in T\}$ L nin biriminin bir direkt parçalanmasıdır.

$ii) \Rightarrow i)$: $\{a_\tau \mid \tau \in T\}$ L nin biriminin bir direkt parçalanması olsun. Teorem 15 e göre $\alpha \neq \beta$ için $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ elde edilir. Özel olarak, her $\alpha \neq \beta$ için $L_\alpha \cap L_\beta = \{0\}$ dır.

L_α nın L grupoidinin bir altgrupoidi olduğunu gösterelim. $x \in L_\alpha$ olsun. Bu takdirde $xy \leq x \leq a_\alpha$ ve bundan dolayı $xy \in L_\alpha$ dır. Bundan dolayı L_α bir grupoiddir. L_α nın L nin bir alt tamkafesi olduğu kolaylıkla gösterilebilir. L bir *cl*-grupoid olduğundan L_α bir *cl*-grupoiddir.

L_α nın bir integral *cl*-grupoid olduğunu gösterelim. $x \in L_\alpha$ alalım. Bu takdirde

$$x = 1x = \left(\vee_{\tau \in T} a_\tau\right)x = \vee_T (a_\tau x) = a_\alpha x$$

dır. Benzer şekilde $x = xa_\alpha$ eşitliği gösterilir. Bundan dolayı a_α L_α nın birimidir ve L_α bir integral *cl*-grupoiddir. L nin $\{L_\alpha \mid \alpha \in T\}$ ailesinin bir direkt çarpımı olduğunu ispat edelim. $x \in L$ olsun. $x_\alpha = a_\alpha x$ alalım. Bu takdirde $x_\alpha \in L_\alpha$ ve

$$\vee_T x_\alpha = \vee_T (a_\alpha x) = \left(\vee_T a_\alpha\right)x = 1x = x$$

dır. Bir $\{x'_\alpha \mid \alpha \in T\}$ ailesi için $x = \vee_{\alpha \in T} x'_\alpha$ olduğunu kabul edelim, burada her $\alpha \in T$ için $x'_\alpha \in L_\alpha$ dır.

$$x_\alpha = a_\alpha x = a_\alpha \left(\vee_T x'_\tau\right) = \vee_{\tau \in T} (a_\alpha x'_\tau) = a_\alpha x'_\alpha = x'_\alpha$$

elde edilir. Bundan dolayı herhangi bir $x \in L$ için $x_\alpha \in L$ ve $x = \vee_{\alpha \in T} x_\alpha$ olacak şekilde bir tek $\{x_\alpha \mid \alpha \in T\}$ ailesi mevcuttur. $x \approx \{x_\alpha \mid \alpha \in T\}$ yazılır.

$x, y \in L$ ve $x \approx \{x_\alpha \mid \alpha \in T\}, y \approx \{y_\alpha \mid \alpha \in T\}$ olsun.

$$x \vee y = \left(\underset{T}{\vee} x_\alpha\right) \vee \left(\underset{T}{\vee} y_\tau\right) = \underset{T}{\vee}(x_\alpha \vee y_\alpha).$$

Her $\alpha \in T$ için $x_\alpha \vee y_\alpha \in L_\alpha$ olduğundan $x \vee y \approx \{x_\alpha \vee y_\alpha \mid \alpha \in T\}$ bulunur. Her $\alpha \neq \beta$ için

$$xy = \left(\underset{T}{\vee} x_\alpha\right)\left(\underset{T}{\vee} y_\beta\right) = \underset{\alpha \in T}{\vee}\ \underset{\beta \in T}{\vee}(x_\alpha y_\beta) = \underset{T}{\vee}(x_\alpha y_\alpha)$$

dır. $x_\alpha y_\alpha \in L_\alpha$ ifadesini kullanarak $xy \approx \{x_\alpha y_\alpha \mid \alpha \in T\}$ bulunur. $x \wedge y \approx \{x_\alpha \wedge y_\alpha \mid \alpha \in T\}$ olduğunu gösterelim. $x = \underset{\alpha \in T}{\vee} x_\alpha$, $y = \underset{\alpha \in T}{\vee} y_\alpha$ eşitliklerinden $x_\alpha \leq x, y_\alpha \leq y$ yazılabilir. Bundan dolayı $x_\alpha \wedge y_\alpha \leq x \wedge y$ ve dolayısıyla $x \wedge y \geq \underset{T}{\vee}(x_\alpha \wedge y_\alpha)$ dır.

$x \wedge y$ için bir tek $\{t_\alpha \mid \alpha \in T\}$ ailesi mevcuttur, burada $t_\alpha \in L_\alpha$, $x \wedge y \approx \{t_\alpha \mid \alpha \in T\}$, $t_\alpha = a_\alpha(x \wedge y)$ dır. $x \geq x \wedge y$ den $x_\alpha = a_\alpha x \geq a_\alpha(x \wedge y) = t_\alpha$ elde edilir. Bundan dolayı her $\alpha \in T$ için $x_\alpha \geq t_\alpha$ dır. Benzer şekilde her $\alpha \in T$ için $y_\alpha \geq t_\alpha$ dır. Böylece her $\alpha \in T$ için $x_\alpha \wedge y_\alpha \geq t_\alpha$ eşitsizliklerinden

$$\underset{T}{\vee}(x_\alpha \wedge y_\alpha) \geq \underset{T}{\vee} t_\alpha = x \wedge y$$

elde edilir. Bundan dolayı $x \wedge y = \underset{T}{\vee}(x_\alpha \wedge y_\alpha)$ ve $x \wedge y \approx \{x_\alpha \wedge y_\alpha \mid \alpha \in T\}$ dır. Teorem ispat edildi.

2.4.2. Komaksimal elemanlar ve birimin direkt parçalanmaları.

L bir integral *cl*-grupoid olsun.

Tanım 41: $\{b_\alpha \mid \alpha \in T\}$ L de bir aile olsun. Eğer her $\alpha \in T$ için $b_\alpha \neq 1$ ve her $\alpha \neq \beta$ için $b_\alpha \vee b_\beta = 1$ ise, $\{b_\alpha \mid \alpha \in T\}$ ailesine *aralarında komaksimal* denir.

Teorem 17: L bir *cl*-grupoid ve $\{a_\alpha \mid \alpha \in T\}$ L nin biriminin bir direkt parçalanması olsun.

$$b_\alpha = \underset{\beta \in T(\alpha)}{\vee} a_\beta$$

alalım. Bu takdirde $\{b_\alpha \mid \alpha \in T\}$ L de aralarında komaksimal bir ailedir ve

$$\underset{\alpha \in T}{\wedge} b_\alpha = 0, a_\alpha = \underset{\beta \in T(\alpha)}{\wedge} b_\beta$$

dır.

İspat: Her $\alpha \neq \beta$ için $a_\alpha \leq b_\beta$ dır. Bu eşitsizliği kullanarak

$$1 = \bigvee_{\alpha\in T} a_\alpha = \left(\bigvee_{\beta\in T(\alpha)} a_\beta\right) \vee a_\alpha = b_\alpha \vee a_\alpha \leq b_\alpha \vee b_\beta \leq 1$$

elde edilir. Bundan dolayı $\alpha \neq \beta$ için $b_\alpha \vee b_\beta = 1$ dir. $\{a_\alpha \mid \alpha \in T\}$, L nin biriminin bir direkt parçalanması olduğundan

$$b_\alpha \wedge a_\alpha = \left(\bigvee_{\beta\in T(\alpha)} a_\beta\right) \wedge a_\alpha = 0$$

dır.Bundan dolayı her $\alpha \in T$ için $b_\alpha \neq 1$ dır (eğer $b_\alpha = 1$ ise, $b_\alpha \wedge a_\alpha = 1 \wedge a_\alpha = a_\alpha \neq 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir.)

Böylece $\{b_\alpha \mid \alpha \in T\}$ L de bir aralarında komaksimal ailedir. $x = \bigwedge_{\alpha\in T} b_\alpha$ olsun.

Teorem 15 i kullanarak, herhangi bir $\beta \in T$ için

$$0 \leq xa_\beta = \left(\bigwedge_{\alpha\in T} b_\alpha\right) a_\beta \leq b_\beta a_\beta$$

$$= \left(\bigvee_{\tau\in T(\beta)} a_\tau\right) a_\beta = \bigvee_{\tau\neq\beta} \left(a_\tau a_\beta\right) = 0$$

elde edilir. Bu eşitliği kullanarak

$$x = x1 = x\left(\bigvee_{\alpha\in T} a_\alpha\right) = \bigvee_{\alpha\in T} \left(xa_\alpha\right) = 0$$

bulunur. Bundan dolayı $x = \bigwedge_{\alpha\in T} b_\alpha = 0$ dır. $y = \bigwedge_{\beta\in T(\alpha)} b_\beta$ olsun. Herhangi $\alpha \neq \tau$ için

$$0 \leq ya_\tau = \left(\bigwedge_{\beta\in T(\alpha)} b_\beta\right) a_\tau \leq b_\tau a_\tau = 0$$

dır. Her $\alpha \neq \beta$ için $a_\alpha \leq b_\beta$ eşitsizliğini kullanarak

$$a_\alpha \leq \bigwedge_{\beta\in T(\alpha)} b_\beta$$

bulunur. Bundan dolayı $a_\alpha \leq y$ dir. Böylece

$$a_\alpha \leq y = y1 = y\left(\bigvee_{\beta\in T} a_\beta\right) =$$

$$= \bigvee_{\beta\in T} \left(ya_\beta\right) = ya_\alpha \leq a_\alpha$$

ve $y = \bigwedge_{\beta\in T(\alpha)} b_\beta = a_\alpha$ elde edilir.

Teorem 18: L bir kafes olarak $\vee$-sürekli olan bir integral *cl*-grupoid olsun. $\{b_\alpha \mid \alpha \in T\}$ L de aralarında komaksimal bir aile, $\bigwedge_{\alpha\in T} b_\alpha = 0$ ve $a_\alpha = \bigwedge_{\beta\in T(\alpha)} b_\beta$ olsun. Bu takdirde $\{a_\alpha \mid \alpha \in T\}$ L nin biriminin bir direkt parçalanmasıdır ve her $\alpha \in T$ için $b_\alpha = \overline{a}_\alpha$ dır (burada $\overline{a}_\alpha = \bigvee_{\tau\in T(\alpha)} a_\tau$ dır).

İspat: $0 \le a_\alpha \wedge b_\alpha = \left(\bigwedge_{\beta\in T(\alpha)} b_\beta\right) \wedge b_\alpha = 0$ eşitsizliğini kullanarak her $\alpha \in T$ için $a_\alpha \wedge b_\alpha = 0$ bulunur. Her $\alpha \neq \beta$ için $a_\alpha \le b_\beta$ eşitsizliğini kullanarak

$$0 \le a_\alpha \wedge a_\beta \le b_\beta \wedge a_\beta = 0$$

elde edilir. Bundan dolayı $\alpha \neq \beta$ için $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ dır.

Şimdi her $\alpha \in T$ için $a_\alpha \vee b_\alpha = 1$ olduğunu gösterelim.

Lemma 2: Herhangi $c, c_1, \cdots, c_n \in L$ elemanları için

$$(c \vee c_1)(c \vee c_2)\cdots(c \vee c_n) \le c \vee (c_1 \wedge \cdots \wedge c_n)$$

eşitsizliği doğrudur.

Lemma 2 nin ispatı: Lemmayı ilk önce $n = 2$ için ispatlayalım. $(c \vee c_1)(c \vee c_2) = c^2 \vee cc_2 \vee c_1c \vee c_1c_2$ eşitliğini ve daha sonra önerme 1 i kullanarak

$$(c \vee c_1)(c \vee c_2) \le c \vee c_1c_2 \le c \vee (c_1 \wedge c_2)$$

bulunur. Lemmanın $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim:

$$(c \vee c_1)(c \vee c_2)\cdots(c \vee c_{n-1}) \le c \vee (c_1 \wedge \cdots \wedge c_{n-1})$$

dır. Bu eşitsizliği kullanarak

$$(c \vee c_1)(c \vee c_2)\cdots(c \vee c_{n-1})(c \vee c_n) \le (c \vee (c_1 \wedge \cdots c_{n-1}))(c \vee c_n)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&(c \vee (c_1 \wedge \cdots c_{n-1}))(c \vee c_n) \\
&= c^2 \vee (c_1 \wedge \cdots c_{n-1})c \vee cc_n \vee (c_1 \wedge \cdots c_{n-1})c_n \\
&\le c \vee (c_1 \wedge \cdots \wedge c_{n-1} \wedge c_n)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece lemma 2 ispat edildi.

$\alpha \in T$ ve $\{\tau_1, \cdots \tau_n\}$ $T(\alpha)$ nın bir sonlu altkümesi olsun. $b_\alpha \vee b_{\tau_1} = 1, \cdots, b_\alpha \vee b_{\tau_n} = 1$ den,

$$1 = (b_\alpha \vee b_{\tau_1})\cdots(b_\alpha \vee b_{\tau_n})$$

elde edilir. Lemma 2 ye göre

$$1 \le b_\alpha \vee (b_{\tau_1} \wedge \cdots \wedge b_{\tau_n}) \le 1$$

dır. Bundan dolayı

$$b_\alpha \vee (b_{\tau_1} \wedge \cdots \wedge b_{\tau_n}) = 1$$

yazılabilir. Tüm $b_{\tau_1} \wedge \cdots \wedge b_{\tau_n}$ elemanlarının kümesini $D(\alpha)$ ile gösterelim, burada $\{\tau_1, \cdots, \tau_n\}$ $T(\alpha)$ nın herhangi bir sonlu altkümesidir. $D(\alpha)$ L de bir yönlü kümedir.

$$b_\alpha \vee (b_{\tau_1} \wedge \cdots \wedge b_{\tau_n}) = 1$$

eşitliğinden, L nin $\vee$-sürekli olmasını kullanarak

$$1 = \bigwedge_{D(\alpha)} (b_\alpha \vee (b_{\tau_1} \wedge \cdots \wedge b_{\tau_n}))$$
$$= b_\alpha \vee \left(\bigwedge_{\tau \in T(\alpha)} b_\tau \right) = b_\alpha \vee a_\alpha$$

bulunur. Bundan dolayı herhangi bir $\alpha \in T$ için $a_\alpha \vee b_\alpha = 1$ elde edilir.

Lemma 3: Keyfi $c_1, \cdots, c_n, d_1, \cdots d_n \in L$ elemanları için

$$(c_1 \vee d_1)(c_2 \vee d_2) \cdots (c_n \vee d_n) \le (c_1 \vee \cdots \vee c_n) \vee (d_1 \wedge \cdots \wedge d_n)$$

eşitsizliği doğrudur.

Lemma 3 ün ispatı: Lemmayı $n = 2$ için ispat edelim. Böylece

$$(c_1 \vee d_1)(c_2 \vee d_2) = c_1 c_2 \vee c_1 d_2 \vee d_1 c_2 \vee d_1 d_2$$
$$\le (c_1 \vee c_2) \vee d_1 d_2 \le (c_1 \vee c_2) \vee (d_1 \wedge d_2)$$

dır. Lemmanın $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim:

$$(c_1 \vee d_1)(c_2 \vee d_2) \cdots (c_{n-1} \vee d_{n-1}) \le (c_1 \vee \cdots \vee c_{n-1}) \vee (d_1 \wedge \cdots \wedge d_{n-1}).$$

Bu eşitsizlikten

$$(c_1 \vee d_1)(c_2 \vee d_2) \cdots (c_{n-1} \vee d_{n-1})(c_n \vee d_n)$$
$$\le ((c_1 \vee \cdots \vee c_{n-1}) \vee (d_1 \wedge \cdots \wedge d_{n-1}))(c_n \vee d_n)$$
$$\le ((c_1 \vee \cdots \vee c_{n-1}) \vee c_n) \vee ((d_1 \wedge \cdots \wedge d_{n-1}) \wedge d_n)$$

elde edilir. Böylece lemma 3 ispatlandı.

$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ T nin bir sonlu altkümesi olsun. $a_{\alpha_1} \vee b_{\alpha_1} = 1, \cdots, a_{\alpha_n} \vee b_{\alpha_n} = 1$ den,

$$1=(a_{\alpha_1}\vee b_{\alpha_1})\cdots(a_{\alpha_n}\vee b_{\alpha_n})$$

yazılabilir. Lemma 3 ü kullanarak

$$1\le(a_{\alpha_1}\vee\cdots\vee a_{\alpha_n})\vee(b_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge b_{\alpha_n})$$
$$\le\left(\bigvee_{\alpha\in T}a_\alpha\right)\vee(b_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge b_{\alpha_n})\le 1$$

bulunur. Bundan dolayı T nin herhangi bir sonlu $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ altkümesi için

$$\left(\bigvee_{\alpha\in T}a_\alpha\right)\vee(b_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge b_{\alpha_n})=1$$

dır. T nin tüm sonlu altkümelerinin ailesini D ile gösterelim. L nin $\vee$-sürekliliğini kullanarak

$$1=\bigwedge_D\left(\left(\bigvee_{\alpha\in T}a_\alpha\right)\vee(b_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge b_{\alpha_n})\right)$$
$$=\left(\left(\bigvee_{\alpha\in T}a_\alpha\right)\vee\left(\bigwedge_D(b_{\alpha_1}\wedge\cdots b_{\alpha_n})\right)\right)$$
$$=\left(\left(\bigvee_{\alpha\in T}a_\alpha\right)\vee\left(\bigwedge_{\alpha\in T}b_\alpha\right)\right)$$

bulunur.

$\bigwedge_{\alpha\in T}b_\alpha=0$ dan $\bigvee_{\alpha\in T}a_\alpha=1$ elde edilir. Bu eşitlikten ve her $\alpha\ne\beta$ için $a_\alpha\wedge a_\beta=0$ eşitliklerinden $\{a_\alpha\mid\alpha\in T\}$nin L nin biriminin bir direkt parçalanması olduğu elde edilir.

Her $\beta\ne\alpha$ için $a_\beta\le b_\alpha$ eşitsizliğini kullanarak $\bigvee_{\beta\in T(\alpha)}a_\beta\le b_\alpha$ eşitsizliği verilebilir.

$a_\alpha\vee\left(\bigvee_{\beta\in T(\alpha)}a_\beta\right)=1$ den

$$b_\alpha=1b_\alpha=\left(a_\alpha\vee\left(\bigvee_{\beta\in T(\alpha)}a_\beta\right)\right)b_\alpha$$
$$=(a_\alpha b_\alpha)\vee\left(\bigvee_{\beta\in T(\alpha)}a_\beta\right)b_\alpha$$
$$=0\vee\left(\bigvee_{\beta\in T(\alpha)}a_\beta\right)b_\alpha\le\bigvee_{\beta\in T(\alpha)}a_\beta$$

elde edilir. Bundan dolayı $\bigvee_{\beta\in T(\alpha)}a_\beta=b_\alpha$ dır.

$L=\{0,1\}$ *l*-grupoidini B_2 ile gösterelim, burada 0<1, $0.0=0, 0.1=1.0=0, 1.1=1$ dir.

Teorem 19: L bir *cl*-grupoid ve L nin tüm atomlarının supremumu 1 olsun. Bu takdirde

L $L_\alpha, \alpha \in T$ *cl*-grupoidlerinin bir direkt çarpımıdır, burada her $\alpha \in T$ için L_α B_2 ye izomorfdur.

İspat: $1 = \vee_{\alpha \in T} p_\alpha$ olsun, burada her $\alpha \in T$ için p_α L de bir atomdur. Bu takdirde her $\alpha \neq \beta$ için $p_\alpha \wedge p_\beta = 0$ dır. Teorem 15 e göre $\{p_\alpha | \alpha \in T\}$ ailesi L nin biriminin bir direkt parçalanmasıdır. Teorem 16 ya göre L $\{L_\alpha | \alpha \in T\}$ nun bir direkt çarpımıdır, burada p_α bir atom olduğundan her $\alpha \in T$ için $L_\alpha = \{x \in L | x \leq p_\alpha\} \cong B_2$ dir.

Teorem 20: L bir *cl*-grupoid ve $\bigwedge_{i=1}^{n} b_i = 0$ olacak şekilde b_i maksimal elemanlarının bir $\{b_1, \cdots, b_n\} \subset L$ ailesi mevcut olsun. Bu takdirde *cl*-grupoidlerin bir $\{L_i | i \in \{1,2,\cdots,n\}\}$ ailesi, $L_i \subset L$ ve L $L_1, \cdots, L_n$ *cl*-grupoidlerinin bir direkt çarpımı olacak şekilde mevcuttur, burada $i = 1,2,\cdots,n$ için L_i ler B_2 ye izomorfdur.

İspat: $a_i = \bigwedge_{i \neq j} b_j$ olsun. $b_1, \cdots, b_n$ lerin maksimalliği ile her $i \neq j$ için $b_i \vee b_j = 1$ elde edilir. Bu takdirde teorem 18 e göre $\{a_1, \cdots, a_n\}$ ailesi L nin biriminin bir direkt parçalanmasıdır.

a_i elemanlarının L de birer atom olduğunu gösterelim.

Teorem 17 ye göre her $i = 1,2,\cdots,n$ için

$$a_i \wedge b_i = 0, a_i \vee b_i = 1$$

dır. Önerme 1 e göre $a_i b_i = 0$ dır.

$0 < a \leq a_i$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $0 \leq a \wedge b_i \leq a_i \wedge b_i = 0$ dır. Bundan dolayı $a \wedge b_i = 0$ yazılabilir. Önerme 1 e göre $ab_i = b_i a = 0$ dır. b_i nin maksimalliğinden $a \vee b_i = 1$ elde edilir. $a \vee b_i = 1$ eşitliğinden

$$a_i = a_i 1 = a_i(a \vee b_i) = (a_i a) \vee (a_i b_i) = a_i a$$

ve

$$a = 1a = (a_i \vee b_i)a = (a_i a) \vee (b_i a) = a_i a$$

dır. Bundan dolayı $a = a_i$ dır. Böylece a_i bir atomdur. Bu takdirde 1 elemanı $a_1, \cdots, a_n$ atomlarının bir toplamıdır. Teorem 19 a göre L nin $L_1, \cdots, L_n$ lerin bir direkt çarpımı olduğu elde edilir, burada $L_i = \{x \in L | x \leq a_i\} \cong B_2$ dir.

2.4.3. Krull-Schmidt teoreminin bir benzeri

Tanım 42: $\{a_\alpha \mid \alpha \in T\}$ L nin biriminin bir direkt parçalanması olsun. Eğer T sonlu ise, $\{a_\alpha \mid \alpha \in T\}$ ye L nin biriminin *bir sonlu direkt parçalanması* denir.

Önerme 37: L artan zincir şartını sağlayan bir *cl*-grupoid olsun. Bu takdirde L nin biriminin herhangi bir direkt parçalanması sonludur.

İspat: $\{a_\alpha \mid \alpha \in T\}$ L nin biriminin bir direkt parçalanması olsun.

T nin sonsuz olduğunu kabul edelim. Her $i \neq j$ için $a_i \wedge a_j = 0$ olacak şekilde bir $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir ailesi mevcuttur. $n \in \mathbb{N}$ için $b_n = a_1 \vee \cdots \vee a_n$ alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \leq b_{n+1}$ olduğunu biliyoruz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \neq b_{n+1}$ olduğunu ispat edelim. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $b_n = b_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $b_n = b_n \vee a_{n+1}$ dır. Bundan dolayı $a_{n+1} \leq b_n$ dir. Teorem 15 e göre

$$0 \leq a_{n+1} \wedge b_n = a_{n+1} \wedge (a_1 \vee \cdots \vee a_n) \leq a_{n+1} \wedge \overline{a_{n+1}} = 0$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$a_{n+1} \wedge b_n = 0$$

dır. Bu eşitlikten ve $a_{n+1} \leq b_n$ den $a_{n+1} = a_{n+1} \wedge b_n = 0$ yazılabilir. Bu her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \neq 0$ olması ile çelişir.

Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \neq b_{n+1}$ dır. Bu takdirde her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \leq b_{n+1}$ ve $b_n \neq b_{n+1}$ dır. L artan zincir koşulunu sağladığından bu bir çelişkidir.

Tanım 43: $e \in L$ olsun. Eğer $e^2 = e$ ise, $e \in L$ elemanına *idempotent* denir.

Tanım 44: $e \in L$ bir idempotent eleman olsun. $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ ve $e_1 \wedge e_2 = 0$ olmak üzere $e = e_1 \vee e_2$ den $e = e_1$ veya $e = e_2$ elde ediliyorsa, $e \in L$ ye *primitif* denir.

Teorem 21: L azalan zincir koşulunu sağlayan bir *cl*-grupoid olsun. Bu takdirde L nin biriminin bir tek $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sonlu direkt parçalanması mevcuttur, burada her $i = 1, 2, \cdots, n$ için e_i bir primitif idempotent elemandır.

İspat: İlk önce $1 = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i$, her $i = 1, 2, \cdots, n$ için $e_i^2 = e_i$, e_i primitif ve her $i \neq j$ için $e_i \wedge e_j = 0$ olacak şekilde L nin bir $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sonlu altkümesinin mevcut olduğunu ispat edelim.

Böyle bir sonlu altkümenin mevcut olmadığını kabul edelim. Bu takdirde 1 primitif idempotent değildir. Bundan dolayı $1 = a_{11} \vee a_{12}, a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0, a_{11} \wedge a_{12} = 0$, $a_{11}^2 = a_{11}$, $a_{12}^2 = a_{12}$ olacak şekilde $a_{11}, a_{12} \in L$ elemanları mevcuttur.

Kabulden dolayı, a_{11} veya a_{12} sonlu sayıda primitif elemanların toplamı şeklinde yazılamaz. Tümevarım ile aşağıdaki şartları sağlayan bir $\{a_{11}, a_{12}; a_{21}, a_{22}; \cdots; a_{m1}, a_{m2}; \cdots\}$ sonsuz dizisi mevcuttur:

1) Her $m \in IN^*$ ve $i = 1,2$ için $a_{mi} \neq 0$ ve a_{mi} bir idempotent elemandır;

2) a_{m1} sonlu sayıda primitif elemanların toplamı değildir;

3) Her $m \geq 1$ için $a_{m1} = a_{m+1\,1} \vee a_{m+1\,2}, a_{m+1\,1} \wedge a_{m+1\,2} = 0$ dır;

4) Her $m \geq 1$ için $a_{m1} \geq a_{m+1\,1}$ dır.

Her $m \geq 1$ için $a_{m1} \neq a_{m+1\,1}$ olduğunu gösterelim. Bir n için $a_{n1} = a_{n+1\,1}$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $a_{n1} = a_{n+1\,1} \vee a_{n+1\,2} = a_{n+1\,1}$ dır. Bu eşitlikten $a_{n+1\,2} \leq a_{n+1\,1}$ elde edilir. Bu takdirde $a_{n+1\,2} = a_{n+1\,1} \wedge a_{n+1\,2} = 0$ dır. $a_{n+1\,2} \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Bundan dolayı $\{a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}, \cdots\}$ L de bir azalan zincirdir. Bu bir çelişkidir. Böylece 1 her $i \neq j$ için $e_i \wedge e_j = 0$ olacak şekilde $e_i (i = 1,2 \cdots, n)$ primitif idempotentlerin bir sonlu ailesinin bir supremumudur.

Birimin bu şekildeki bir parçalanmasının tek olduğunu ispat edelim. $\{a_1, \cdots, a_n\}$, $\{b_1, \cdots, b_m\}$ böyle iki aile olsun: $1 = a_1 \vee \cdots \vee a_n, 1 = b_1 \vee \cdots \vee b_m$, burada a_i, b_j primitif idempotentler, her $i \neq j$ için $a_i \wedge a_j = 0$ ve her $k \neq 1$ için $b_k \wedge b_1 = 0$ dır.

$n = m$ ve $a_i = b_{n_i} (i = 1,2, \cdots, n)$ olduğunu ispat edelim.

Bir $\{a_i b_j : i = 1,2 \cdots, n, j = 1,2, \cdots, m\}$ ailesini göz önüne alalım.

$$0 \leq (a_i b_j) \wedge (a_i b_k) \leq b_j \wedge b_k = 0 \ (j \neq k)$$

eşitsizliğinden $(a_i b_j) \wedge (a_i b_k) = 0$ elde edilir.

$$a_i = a_i 1 = a_i \left(\bigvee_{j=1}^{m} b_j \right) = \bigvee_{j=1}^{m} (a_i b_j)$$

dır. $a_i^2 = a_i$ ve $(a_i b_j) \wedge (a_i b_k) = 0 \ (j \neq k)$ eşitliklerini kullanarak

$j=1$

$$a_i b_j \le a_i \wedge b_j \le a_i$$

eşitsizliğinden $a_i \wedge b_j = a_i$ elde edilir. Bundan dolayı $a_i \le b_j$ yazılabilir.

Benzer şekilde bir k için $b_j \le a_k$ elde edilir. $r \ne s$ için $a_r \wedge a_s = 0$ olduğundan $a_k = a_i$ ve $a_i = b_j$ dır. Böylece $n = m$ ve $a_1 = b_{j_1} \cdots, a_n = b_{j_n}$ dır.

2.4.4. 2 ve 3 uzunluklu integral *l*-grupoidlerin bulunması

L bir kafes olarak sonlu uzunluklu bir integral *l*-grupoid olsun[48]. $d(L)$ ile L nin uzunluğunu gösterelim.

$d(L) = 1$ olsun. Bu takdirde $L \cong B_2$ olduğu açıktır.

$d(L) = 2$ olacak şekilde integral *l*-grupoidlerin aşağıdaki örneklerini inceleyelim:

1) $C_2 = \{0, p, 1\}$ bir zincir olsun, burada $0<p<1$ dir. Aşağıdaki çarpıma göre integral *l*-grupoidi $L(C_2, 1)$ ile gösterelim:

$$0.0 = 0.p = p.0 = 0.1 = 1.0 = p^2 = 0,\ p.1 = 1.p = p,\ 1.1 = 1.$$

2) Aşağıda tanımlanan çarpıma göre integral *l*-grupoidi $L(C_2, 2)$ ile gösterelim:

$$0.0 = 0.p = p.0 = 0.1 = 1.0 = 0,\ p^2 = p,\ p.1 = 1.p = p,\ 1.1 = 1$$

3) B_2 ve B_2 integral *l*-grupoidlerinin direkt çarpımı $B_2 \times B_2$ olsun. Bu takdirde $d(B_2 \times B_2) = 2$ dır.

Tanım 45: L_1 ve L_2 iki integral *l*-grupoid ve $f : L_1 \to L_2$ bir bire-bir, örten dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartların sağlanması halinde *f ' ye integral l-grupoidlerin bir izomorfizması* denir:

i) Her $a, b \in L_1$ için $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ dir;

ii) Her $a, b \in L_1$ için $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ dir;

iii) Her $a, b \in L_1$ için $f(ab) = f(a)f(b)$ dir;

iv) $f(1_{L_1}) = 1_{L_2}$ dir.

Bu durumda $L_1 \cong L_2$ yazılır.

Yukarıda verilen $L(C_2,1)$, $L(C_2,2)$ ve $B_2 \times B_2$ integral *l*-grupoidleri için $L(C_2,1) \not\cong L(C_2,2)$, $L(C_2,1) \not\cong B_2 \times B_2$ ve $L(C_2,2) \not\cong B_2 \times B_2$ olduğu açıktır.

Önerme 38: L bir integral *l*-grupoid olsun. Bu takdirde herhangi $a \in L$ için $0a = a0 = 0$ ve $1a = a1 = a$ dır.

İspat: L bir integral *l*-grupoid olduğundan herhangi $a \in L$ için $1a = a1 = a$ dır.

Önerme 1 e göre her $a, b \in L$ için $ab \le a \wedge b$ dır. Özel olarak,

$$0a \le 0 \wedge a = 0, a0 \le a \wedge 0 = 0$$

dır. Bundan dolayı $0a = a0 = 0$ dır.

Teorem 22: 2 uzunluklu tüm integral *l*-grupoidler aşağıda verilmiştir:

$$L(C_2,1), L(C_2,2), B_2 \times B_2 .$$

İspat: L 2 uzunluklu bir integral *l*-grupoid olsun. L nin tüm atomlarının kümesini $\{p_\tau \mid \tau \in T\}$ ile gösterelim. $|T|$ T kümesinin kardinal sayısı olsun.

$|T| = 1$ ve $T = \{p\}$ olsun. $d(L) = 2$ olduğundan $L = \{0, p, 1\}, 0<p<1$ dır. Önerme 38 e göre $0.0 = 0.p = p.0 = 0.1 = 1.0 = 0, 1.1 = 1$ elde edilir. Önerme 1 e göre $p^2 \le p$ dir. Bu takdirde $p^2 = 0$ veya $p^2 = p$ dır. Eğer $p^2 = 0$ ise, bu takdirde $L \cong L(C_2,1)$ dır ve $p^2 = p$ ise, $L \cong L(C_2,2)$ dır.

$|T| > 1$ durumunu göz önüne alalım. Bu takdirde $p_1 \ne p_2$ olacak şekilde $p_1, p_2 \in L$ atomları mevcuttur. $p_1 \wedge p_2 = 0$ dır. $d(L) = 2$ olduğundan $p_1 \vee p_2 = 1$ elde edilir. Teorem 19 a göre $L = B_2 \times B_2$ dır.

Önerme 39: $B_2, L(C_2,1), L(C_2,2), B_2 \times B_2$ *l*-grupoidleri birleşmeli ve değişmelidir.

İspatı açıktır.

Şimdi 3 uzunluklu tüm integral *l*-grupoidleri bulalım.

$A = \{0, a, b_1, b_2, 1\}$ olsun, burada $0<a<b_1<1$, $a<b_2<1$, $a = b_1 \wedge b_2, b_1 \vee b_2 = 1$ dır. A üzerinde aşağıdaki çarpım işlemlerini göz önüne alalım:

Tablo 6 $A(5)$

	b_1	b_2	a
b_1	b_1	a	a
b_2	a	b_2	0
a	a	a	0

Tablo 7 $A(6)$

	b_1	b_2	a
b_1	b_1	a	a
b_2	a	b_2	a
a	a	0	0

Tablo 8 $A(7)$

	b_1	b_2	a
b_1	b_1	a	a
b_2	a	b_2	a
a	a	a	0

$A(i)$ çarpım işlemli A integral *l*-grupoidini $L(A,i), i=\overline{1,7}$ ile gösterelim, burada

$$0.0 = 0.a = a.0 = 0.b_1 = b_1.0 = 0.b_2 = b_2.0 = 0.1 = 1.0 = 0$$

$$1.1 = 1, 1.a = a.1 = a, b_1.1 = 1.b_1 = b_1, b_2.1 = 1.b_2 = b_2$$

dır.

$C_3 = \{0,\beta,\alpha,1\}$ olsun, burada $0<\beta<\alpha<1$ dir. C_3 üzerinde aşağıdaki çarpım işlemleri göz önüne alalım:

Tablo 9 $C_3(1)$

	α	β
α	α	β
β	β	β

Tablo 10 $C_3(2)$

	α	β
α	α	β
β	β	0

Tablo 11 $C_3(3)$

	α	β
α	α	β
β	0	0

Tablo 12 $C_3(4)$

	α	β
α	α	0
β	β	0

Tablo 13 $C_3(5)$

	α	β
α	α	0
β	0	0

Tablo 14 $C_3(6)$

	α	β
α	β	β
β	β	β

Tablo 15 $C_3(7)$

	α	β
α	β	β
β	β	0

Tablo 16 $C_3(8)$

	α	β
α	β	β
β	0	0

Tablo 17 $C_3(9)$

	α	β
α	β	0
β	β	0

Tablo 18 $C_3(10)$

	α	β
α	β	0
β	0	0

Tablo 19 $C_3(11)$

	α	β
α	0	0
β	0	0

$C_3(i)$ çarpım işlemli integral *l*-grupoidini $L(C_3,i), i=\overline{1,11}$ ile gösterelim, burada

$$0.0 = 0.\beta = \beta.0 = 0.\alpha = \alpha.0 = 0.1 = 1.0 = 0$$

$$1.1 = 1, 1.\alpha = \alpha.1 = \alpha, 1.\beta = \beta.1 = \beta$$

dır.

D_2 ile $\{0, p_1, p_2, b, 1\}$ şeklindeki kafesi gösterelim, burada $0<p_1<b<1$, $0<p_2<b$, $p_1 \wedge p_2 = 0$, $p_1 \vee p_2 = b$ dır.

D_2 üzerinde aşağıdaki çarpım işlemlerini göz önüne alalım.

Tablo 20 $D_2(1)$

	b	p_1	p_2
b	0	0	0
p_1	0	0	0
p_2	0	0	0

Tablo 21 $D_2(2)$

	b	p_1	p_2
b	p_1	p_1	0
p_1	p_1	p_1	0
p_2	0	0	0

Tablo 22 $D_2(3)$

	b	p_1	p_2
b	b	p_1	p_2
p_1	p_1	p_1	0
p_2	p_2	0	p_2

$D_2(i)$ çarpım işlemli ve aşağıdaki özellikleri gerçekleyen integral *l*-grupoidi $L(D_2,i)$ ile gösterelim:

gösterelim:

Her $\alpha \neq \beta$ için $p_\alpha p_\beta = 0$, her $\alpha \in T$ için

$$b^2 = 0.0 = 0.p_\alpha = p_\alpha.0 = 0.b = b.0 = 0,\ p_\alpha b = bp_\alpha = 0$$

$$1.1 = 1, 1.b = b.1 = b, 1.p_\alpha = p_\alpha.1 = p_\alpha$$

dır.

Önerme 40: 3 uzunluklu aşağıdaki integral *l*-grupoidler izomorf değildir:

1) $B_2 \times B_2 \times B_2$;

2) $B_2 \times L(C_2,i)$, i=1,2;

3) $L(A,i)$, $i = \overline{1,7}$;

4) $L(C_3,i)$, $i = \overline{1,11}$;

5) $L(D_2,i)$, $i = \overline{1,3}$.

İspat açıktır.

Önerme 41: 1) $|T|>2$ olmak üzere $L(D_T)$ integral *l*-grupoidi önerme 40 da verilen integral *l*-grupoidlere izomorf değildir.

2) $L(D_{T_1})$ ve $L(D_{T_2})$ integral *l*-grupoidlerinin izomorf olması için gerek ve yeter koşul $|T_1| = |T_2|$ olmasıdır.

İspat açıktır.

Teorem 23: L 3 uzunluklu bir integral *l*-grupoid olsun. Bu takdirde L önerme 40 ve önerme 41 de verilen integral *l*-grupoidlerin birine izomorftur.

İspat: L nin tüm maksimal elemanlarının kümesini $\{b_\tau |\ \tau \in T\}$ ile gösterelim.

A) $|T|>1$ olsun. $a := \underset{T}{\wedge} b_\tau$ alalım. b_τ nun maksimalliğinden ve $|T|>1$ olduğundan her $\tau \in T$ için $a<b_\tau$ elde edilir.

Aşağıdaki durumlar gerçekleşebilir:

1) $a=0$ veya 2) a bir atomdur.

$a=0$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler elde edilir:

Her $\alpha\neq\beta$ için $b_\alpha\vee b_\beta=1$ ve $\underset{T}{\wedge} b_\tau=0$ dır. L azalan zincir koşulunu sağladığından $\{b_\tau|\ \tau\in T\}$nun $b_{\tau_1}\wedge\cdots\wedge b_{\tau_n}=0$ olacak şekilde bir sonlu $\{b_{\tau_1},\cdots b_{\tau_n}\}$ altkümesi mevcuttur.

Bu takdirde her $i\neq j$ için $b_{\tau_i}\vee b_{\tau_j}=1$ ve

$$b_{\tau_1}\wedge\cdots\wedge b_{\tau_n}=0$$

dır. Teorem 20 ye göre $L=B_2^n$ dır. L nin uzunluğu 3 olduğundan dolayı $L=B_2\times B_2\times B_2$ elde edilir.

B) a bir atom olsun. $|T|>1$ olduğundan dolayı $b_1\neq b_2$ olacak şekilde b_1 ve b_2 maksimal elemanları mevcuttur. $0<a=\underset{T}{\wedge} b_\tau\leq b_1\wedge b_2$ eşitsizliği bulunur. $d(L)=3$ ve $b_1\wedge b_2\neq b_1$, $b_1\wedge b_2\neq b_2$ olduğundan $a=b_1\wedge b_2$ elde edilir. $b_1\neq b_3$, $b_2\neq b_3$ olacak şekilde b_3 maksimal elemanını alalım. Bu takdirde $b_1\wedge b_3=a, b_2\wedge b_3=a$ elde edilir. Bundan dolayı $b_3b_1\leq a$ ve $b_3b_2\leq a$ dır. $b_3=b_3 1=b_3(b_1\vee b_2)=b_3b_1\vee b_3b_2\leq a$ yazılabilir. Bu ise bir çelişkidir. Bundan dolayı $|T|=2$ dir.

b_1,b_2 L nin maksimal elemanları olsunlar. İki durum gerçekleşebilir: 1) a bir tek atomdur; 2) $p\neq a$ olacak şekilde bir p atomu mevcuttur.

C) Aşağıdaki durumu göz önüne alalım: a L de tek atomdur. Bu takdirde L aşağıdaki şekildedir: $L=\{0,a,b_1,b_2,1\}$, burada $0<a<b_1<1$, $a<b_2<1$, $a=b_1\wedge b_2$, $b_1\vee b_2=1$ dir.

Bu durumda L üzerindeki tüm çarpım işlemlerinin sadece $A(i), i=\overline{1,7}$ işlemleri olduğunu ispatlayalım.

Lemma 4: $b_1^2=b_1$ ve $b_2^2=b_2$ dır.

Lemma 4 ün ispatı: $a=b_1\wedge b_2, b_1b_2\leq b_1\wedge b_2$, $b_2b_1\leq b_1\wedge b_2$ den

$$b_1b_2\leq a,\ b_2b_1\leq a \tag{10}$$

elde edilir. Bu takdirde $b_1^2\leq b_1$, $b_2^2\leq b_2$ dır. $b_1\vee b_2=1$ den

$$1=(b_1\vee b_2)^2=b_1^2\vee b_1b_2\vee b_2b_1\vee b_2^2 \tag{11}$$

elde edilir. $b_1^2 < b_1$ olduğunu kabul edelim. Böylece $b_1^2 \le a$ dır. Bu takdirde (10) eşitsizliklerini kullanarak

$$b_1^2 \vee b_1b_2 \vee b_2b_1 \vee b_2^2 \le a \vee a \vee a \vee b_2^2 \le b_2 < 1$$

elde edilir. Fakat bu (11) eşitliği ile çelişir. Bundan dolayı $b_1^2 = b_1$ bulunur. Benzer şekilde $b_2^2 = b_2$ dır. Böylece lemmanın ispatı verildi.

Böylece aşağıdaki bağıntıları verebiliriz:

$$b_1^2 = b_1, b_2^2 = b_2, a^2 \le b_1b_2 \le a,$$
$$a^2 \le b_2b_1 \le a,\ a^2 \le ab_1 \le a,$$
$$a^2 \le ab_2 \le a,\ a^2 \le b_1a \le a,$$
$$a^2 \le b_2a \le a,\ a^2 \le a.$$

Şu iki durum söz konusudur: 1) $a^2 = a$ veya 2) $a^2 = 0$.

1) durumunda yukarıda verilen bağıntıları kullanarak aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$b_1b_2 = b_2b_1 = ab_1 = b_1a = ab_2 = b_2a = a.$$

Bundan dolayı her $x, y \in L$ için $xy = x \wedge y$ dir. L, $L(A,1)$ dağılmalı kafesi ile çakışır.

$a^2 = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda aşağıdaki durumlar gerçeklenir:

$$b_1^2 = b_1, b_2^2 = b_2,\ 0 \le b_1b_2 \le a,$$
$$0 \le b_2b_1 \le a, 0 \le ab_1 \le a,$$
$$0 \le b_1a \le a, 0 \le ab_2 \le a,$$
$$0 \le b_2a \le a.$$

Lemma 5: 1) $ab_1 = a$ veya $ab_2 = a$ dır.

2) $b_1a = a$ veya $b_2a = a$ dır.

3) $b_1b_2 = a$ veya $b_2b_1 = a$ dır.

Lemma 5 in ispatı: $ab_1 \le a, ab_2 \le a$ eşitsizliklerini kullanarak

$$a = a1 = a(b_1 \vee b_2) = ab_1 \vee ab_2$$

eşitliğinden $ab_1 = a$ veya $ab_2 = a$ durumlarından en az bir tanesi gerçeklenir. Benzer şekilde $b_1a = a$ veya $b_2a = a$ den an az birinin gerçekleneceği gösterilir.

3) $b_1 \vee b_2 = 1$ ve $[48]$ i kullanarak

$$b_1 \wedge b_2 = b_1b_2 \vee b_2b_1$$

elde edilir. $a = b_1 \wedge b_2$ olduğundan $b_1 b_2 = a$ veya $b_2 b_1 = a$ durumlarından en az biri gerçeklenir.

Lemma 6: $L = \{0, a, b_1, b_2, 1\}$ üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde . çarpım işlemini alalım , burada $0<a<b_1<1$, $a<b_2<1$, $a = b_1 \wedge b_2$, $b_1 \vee b_2 = 1$ dir.

1) $x \le y$ ise, $xz \le yz$ ve $zx \le zy$ dir;

2) Her $x \in L$ için $0x = x0 = 0, 1x = x1 = x$ dir;

3) $b_1^2 = b_1$ ve $b_2^2 = b_2$ dir;

4) $ab_1 = a$ veya $ab_2 = a$ dır;

5) $b_1 a = a$ veya $b_2 a = a$ dır.

Bu takdirde $(L,.)$ bir integral *l*-grupoiddir.

Lemma 6 nın ispatı: 2) özelliğine göre 0 ın L nin en küçük elemanı ve çarpım işlemi için sıfır eleman olduğu elde edilir. 2) özelliğine göre 1 in L nin en büyük elemanı olduğu ve çarpım işlemi için birim eleman olduğu elde edilir. Her $x, y, z \in L$ için

$$x(y \vee z) = xy \vee xz$$

ve (12)

$$(y \vee z)x = yx \vee zx$$

olduğunu ispat edelim.

Eğer x,y,z elemanlarından en az biri 0 veya 1 e eşitse, bu takdirde (12) doğrudur.

Eğer $x = 0$ ise, bu takdirde

$$0(y \vee z) = 0y \vee 0z,$$

$$(y \vee z)0 = y0 \vee z0$$

dır. Eğer $y = 0$ ise, bu takdirde

$$x(0 \vee z) = x0 \vee xz,$$

$$(0 \vee z)x = 0x \vee zx$$

bulunur. Eğer $z = 0$ ise, bu takdirde

$$x(y \vee 0) = xy \vee x0,$$

$$(y \vee 0)x = yx \vee 0x$$

bulunur. Eğer $x = 1$ ise, bu takdirde

$$1(y \vee z) = 1y \vee 1z,$$

$$(y \vee z)1 = y1 \vee z1$$

dır. Eğer $y = 1$ ise, bu takdirde

$$x(1 \vee z) = x1 = x,$$

$$x1 \vee xz = x \vee xz$$

yazılabilir. $z \leq 1$ olduğundan $xz \leq x1 = x$ dır.

$$x1 \vee xz = x$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$x = x(1 \vee z) = x1 \vee xz = x$$

dır. Benzer şekilde

$$(1 \vee z)x = 1x \vee zx$$

dır. Şimdi şu durumu göz önüne alalım:

$$a \leq x < 1,\ a \leq y < 1,\ a \leq z < 1.$$

$y = a$ olsun. Bu takdirde $y = a \leq z, y \vee z = z$ ve $x(y \vee z) = xz$ dir. $xy \leq xz$, dolayısıyla $xy \vee xz = xz$ olduğundan $x(y \vee z) = xy \vee xz$ dir. Benzer şekilde $(y \vee z)x = yx \vee zx$ elde edilir.

$z = a$ durumu $y = a$ durumuna benzerdir.

$y = z$ olsun. Bu takdirde $x(y \vee z) = xz, xy \vee xz = xz$ bulunur. Bundan dolayı $x(y \vee z) = xy \vee xz$ dir. Benzer şekilde $(y \vee z)x = yx \vee zx$ dır. Geriye aşağıdaki durumu incelemek kalıyor: $a \leq x < 1$, $a<y<1$,$a<z<1$, $y \neq z$.

$y = b_1, z = b_2, x = b_1$ olsun. Bu takdirde $b_1^2 = b_1$ eşitliğini kullanarak

$$b_1(b_1 \vee b_2) = b_1 1 = b_1$$

ve $b_1 b_2 \leq b_1$ olduğundan

$$b_1^2 \vee b_1 b_2 = b_1$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$b_1(b_1 \vee b_2) = b_1^2 \vee b_1 b_2$$

dir. $(b_1 \vee b_2)b_1 = b_1^2 \vee b_2 b_1$ ifadesinin ispatı da benzerdir. Benzer şekilde aşağıdaki durumlar göz önüne alınır:

$$y = b_1, z = b_2, x = b_2$$

$$y = b_2, z = b_1, x = b_1$$

$y = b_2, z = b_1, x = b_2$.

$y = b_1, z = b_2, x = a$ olsun. Bu takdirde

$$a(b_1 \vee b_2) = a1 = a$$

elde edilir. $ab_1 \leq a, ab_2 \leq a$ ve $ab_1 = a$ veya $ab_2 = a$ ifadelerinden en az biri gerçeklendiğinden

$$ab_1 \vee ab_2 = a$$

dır. Bundan dolayı

$$a(b_1 \vee b_2) = ab_1 \vee ab_2$$

dır. Benzer şekilde

$$(b_1 \vee b_2)a = b_1a \vee b_2a$$

bulunur. Aşağıdaki durum da benzer şekilde incelenir:

$$y = b_2, z = b_1, x = a.$$

Böylece lemmanın ispatı verildi. Böylece $a^2 = 0$ durumunda, lemma 6 nın şartını sağlayan $L = \{0, a, b_1, b_2, 1\}$ üzerinde çarpım işlemleri tanımlanmalıdır.

Mümkün olan tüm durumları inceleyelim:

Tablo 23

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$ab_1=$	a	a	0	0	a	a	a	0	a
$ab_2=$	0	0	a	a	a	a	0	a	a
$b_1a=$	a	0	a	0	a	0	a	a	a
$b_2a=$	0	a	0	a	0	a	a	a	a

Yukarıdaki durumların her birini tek tek inceleyelim.

1) $ab_1 = a$, $ab_2 = 0$, $b_1a = a, b_2a = 0$ olsun. Bu takdirde lemma 6, 1) özelliğini kullanarak $b_1b_2 \geq b_1a = a, b_2b_1 \geq ab_1 = a$ elde edilir.

$b_1b_2 \leq b_1 \wedge b_2 = a$, $b_2b_1 \leq b_1 \wedge b_2 = a$ eşitsizliklerini kullanarak

$$b_1b_2 = a,\ b_2b_1 = a$$

yazılabilir. Böylece aşağıdaki çarpım işlemi elde edilir:

Tablo 24 $A'(1)$

	b_1	b_2	a
b_1	b_1	a	a
b_2	a	b_2	0
a	a	0	0

2) $ab_1 = a$, $ab_2 = 0$, $b_1a = 0, b_2a = a$ olsun. Bu takdirde b_1b_2 ve b_2b_1 için aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$0 = ab_2 \leq b_1b_2 \leq a, a = ab_1 \leq b_2b_1 \leq a.$$

Bu takdirde aşağıda verilen iki durum söz konusudur:

2.1) $b_1b_2 = 0, b_2b_1 = a$;

2.2) $b_1b_2 = a, b_2b_1 = a$.

Böylece aşağıdaki çarpım işlemleri elde edilir:

Tablo 25 $A'(2,1)$

	b_1	b_2	a
b_1	b_1	0	0
b_2	a	b_2	a
a	a	0	0

Tablo 26 $A'(2,2)$.

	b_1	b_2	a
b_1	b_1	a	0
b_2	a	b_2	a
a	a	0	0

3) $ab_1 = 0$, $ab_2 = a$, $b_1a = a, b_2a = 0$ olsun. Bu takdirde b_1b_2 ve b_2b_1 için

$$a = b_1 a \leq b_1 b_2 \leq a,\ 0 = ab_1 \leq b_2 b_1 \leq a$$

dır.

$b_1 b_2$ ve $b_2 b_1$ için aşağıda verilen iki durum söz konusudur:

3.1) $b_1 b_2 = a, b_2 b_1 = 0$;

3.2) $b_1 b_2 = a, b_2 b_1 = a$.

Böylece aşağıdaki çarpım işlemleri elde edilir:

Tablo 27 $A'(3,1)$

	b_1	b_2	a
b_1	b_1	a	a
b_2	0	b_2	0
a	0	a	0

Tablo 28 $A'(3,2)$

	b_1	b_2	a
b_1	b_1	a	a
b_2	a	b_2	0
a	0	a	0

4) $ab_1 = 0$, $ab_2 = a$, $b_1 a = 0, b_2 a = a$ olsun. Bu takdirde $b_1 b_2$ ve $b_2 b_1$ için

$$a = ab_2 \leq b_1 b_2 \leq a,\ a = b_2 a \leq b_2 b_1 \leq a$$

dır. Bundan dolayı $b_1 b_2 = a$, $b_2 b_1 = a$ dır. Böylece aşağıdaki çarpım işlemi elde edilir:

Tablo 29 $A'(4)$.

	b_1	b_2	a
b_1	b_1	a	0
b_2	a	b_2	a
a	0	a	0

5) $ab_1 = a$, $ab_2 = a$, $b_1 a = a$, $b_2 a = 0$ olsun. Bu takdirde $b_1 b_2$ ve $b_2 b_1$ için

$$a = ab_2 \leq b_1 b_2 \leq a,\ a = ab_1 \leq b_2 b_1 \leq a$$

dır. Bundan dolayı $b_1 b_2 = a$, $b_2 b_1 = a$ dır. Böylece aşağıdaki çarpım işlemi elde edilir:

Tablo 30 $A'(5)$.

	b_1	b_2	a
b_1	b_1	a	a
b_2	a	b_2	0
a	a	a	0

6) $ab_1 = a$, $ab_2 = a$, $b_1a = 0, b_2a = a$ olsun. Bu takdirde b_1b_2 ve b_2b_1 için

$$a = ab_2 \leq b_1b_2 \leq a, a = ab_1 \leq b_2b_1 \leq a$$

dır. Bundan dolayı $b_1b_2 = a, b_2b_1 = a$ bulunur. Böylece aşağıdaki çarpım işlemi elde edilir:

Tablo 31 $A'(6)$

	b_1	b_2	a
b_1	b_1	a	0
b_2	a	b_2	a
a	a	a	0

7) $ab_1 = a$, $ab_2 = 0$, $b_1a = a, b_2a = a$ olsun. Bu takdirde b_1b_2 ve b_2b_1 için

$$a = b_1a \leq b_1b_2 \leq a, a = ab_1 \leq b_2b_1 \leq a$$

dır. Bundan dolayı $b_1b_2 = a, b_2b_1 = a$ dır. Böylece aşağıdaki çarpım işlemi elde edilir:

Tablo 32 $A'(7)$.

	b_1	b_2	a
b_1	b_1	a	a
b_2	a	b_2	a
a	a	0	0

8) $ab_1 = 0$, $ab_2 = a$, $b_1a = a, b_2a = a$ olsun. Bu takdirde b_1b_2 ve b_2b_1 için

$$a = ab_2 \leq b_1b_2 \leq a,\ a = b_2a \leq b_2b_1 \leq a$$

dır. Bundan dolayı $b_1b_2 = a,\ b_2b_1 = a$ dır. Böylece aşağıdaki çarpım işlemi elde edilir:

Tablo 33 $A'(8)$.

	b_1	b_2	a
b_1	b_1	a	a
b_2	a	b_2	a
a	0	a	0

9) $ab_1 = a$, $ab_2 = a$, $b_1a = a, b_2a = a$ olsun. Bu takdirde

$$a = ab_2 \leq b_1b_2 \leq a,\ a = ab_1 \leq b_2b_1 \leq a$$

dır. Bundan dolayı $b_1b_2 = a,\ b_2b_1 = a$ dır. Böylece aşağıdaki çarpım işlemi elde edilir:

Tablo 34 $A'(9)$.

	b_1	b_2	a
b_1	b_1	a	a
b_2	a	b_2	a
a	a	a	0

$L = \{0, a, b_1, b_2, 1\}$ olmak üzere $f(0) = 0, f(a) = a, f(b_1) = b_2, f(b_2) = b_1, f(1) = 1$ ile tanımlanan $f : L \to L$ dönüşümü aşağıdaki izomorfileri verir:

$A'(1) \cong A'(4), A'(2,1) \cong A'(3,1), A'(2,2) \cong A'(3,2), A'(5) \cong A'(6), A'(7) \cong A'(8)$.

Şimdi $(L, A'(1))$, $(L, A'(2,1))$, $(L, A'(2,2))$, $(L, A'(5))$, $(L, A'(7))$, $(L, A'(9))$ integral *l*-grupoidlerinin izomorf olmadığını ispat edelim.

Yukarıdaki *l*-grupoidler arasındaki her izomorfizm bir kafes izomorfisidir. Bundan dolayı bu izomorfilerin her biri aşağıdaki şekildedir:

1) $f_1 : L \to L$, burada her $x \in L$ için $f(x) = x$ dir;

2) $f_2 : L \to L$, burada $f(0) = 0, f(a) = a, f(b_1) = b_2, f(b_2) = b_1, f(1) = 1$ dir.

D) L $b_1 \wedge b_2 = a$ olacak şekilde (a bir atomdur) b_1, b_2 gibi iki maksimal eleman ve $p \neq a$ olacak şekilde en az bir p atomu içersin. Bu takdirde $p \neq b_1$ ve $p \neq b_2$ dir (Aksi halde a<p dir. Bu ise p nin atom olması ile çelişir). L nin p< b_i olacak şekilde b_i (i=1,2) maksimal elemanları mevcuttur. p< b_1 olduğunu varsayalım. Bu takdirde $p \wedge b_2 \leq b_1 \wedge b_2 = a$ dır. $p \wedge b_2 \leq a \wedge p = 0$ elde edilir.

Bundan dolayı $p \wedge b_2 = 0$ dır. b_2 nin maksimalliği ile $p \vee b_2 = 1$ elde edilir. Teorem 16 ya göre $L = [0,p] \times [0,b_2]$, burada $p \wedge b_2 = 0$, $[0,p] = \{x \in L : x \leq p\}$, $[0,b_2] = \{x \in L : x \leq b_2\}$ dır.

p bir atom olduğundan $[0,p] \cong B_2$ dir. $[0,b_2]$ 2 uzunluklu olduğundan teorem 22 ye göre $[0,b_2]$ aşağıdaki integral *l*-grupoidlerden birine izomorfdur:

$B_2 \times B_2$, $L(C_2,1)$, $L(C_2,2)$.

Böylece bu durumda aşağıdaki integral *l*-grupoidler elde edilir:

$L = B_2 \times B_2 \times B_2$

$L = B_2 \times L(C_2,1)$

$L = B_2 \times L(C_2,2)$.

E) Geriye $|T| = 1$, yani L nin bir tek maksimal eleman içermesi durumunu incelemek kalır.

L nin tüm atomlarının kümesini $\{p_\nu : \nu \in Q\}$ ile gösterelim. Aşağıdaki iki durum mümkündür: 1) $|Q| = 1$; 2) $|Q| \geq 2$.

$|Q| = 1$ olsun. Bu takdirde L bir zincirdir. 0<p<b<1 olmak üzere $L = C_3 = \{0, p, b, 1\}$ dır. $(C_3, .)$ bir integral *l*-grupoid olacak şekilde C_3 üzerinde bir xy çarpım işleminin verildiğini kabul edelim. Bu takdirde her $x \in C_3$ için $0x = x0 = 0$, $1x = x1 = x$ ve $b^2 \le b$, $bp \le p$, $pb \le p$, $p^2 \le p$ dır .

Lemma 7: C_3 üzerinde her $x \in C_3$ için $0x = x0 = 0, 1x = x1 = x$ ve $b^2 \le b, bp \le p$, $pb \le p$, $pb \le p$ olacak şekilde bir xy çarpım işleminin verildiğini kabul edelim. Bu takdirde $(C_3,.)$ bir integral *l*-grupoiddir.

Lemma 7 nin ispatı: Her $x, y, z \in C_3$ için (12) de verilen eşitliklerin gerçeklendiğini göstermeliyiz.

x,y,z lerin en az biri 0 veya 1 olsun. Bu takdirde (12) eşitlikleri açıktır.

$p \le x \le b, p \le y \le b, p \le z \le b$ eşitsizliklerinin sağlanması durumunda (12) eşitliğinin doğru olduğunu göstermeliyiz.

y=z olsun. Bu takdirde (12) eşitlikleri açıktır.

$y \ne z$ ve y<z olsun. Bu takdirde

$$x(y \vee z) = xz$$

dır. $xy \le xz$ olduğundan

$$x(y \vee z) = xz$$

elde edilir. Bundan dolayı $x(y \vee z) = xy \vee xz$ dir. Benzer şekilde $(y \vee z)x = yx \vee zx$ dır. Böylece lemmanın ispatı verildi.

Şimdi lemma 7 nin şartlarını sağlayan C_3 üzerinde tüm çarpım işlemlerini bulalım. Bunlar $L(C_3, i), i = \overline{1, 11}$ integral *l*-grupoidleridir.

F) $|T| = 1$ ve $|Q| \ge 2$ olsun. Bu durumda her p_α, p_β $(\alpha \ne \beta)$ atomları için $p_\alpha \wedge p_\beta = 0$ elde edilir. Bundan dolayı her $\alpha \ne \beta$ için $p_\alpha p_\beta = 0$ $(p_\alpha p_\beta \le p_\alpha \wedge p_\beta$ olduğundan) dır. p_α için $p_\alpha^2 \le p_\alpha$ olduğundan şu durumlar mümkündür: 1) $p_\alpha^2 = 0$; 2) $p_\alpha^2 = p_\alpha$.

Her $\alpha \in Q$ için $p_\alpha^2 = 0$ olsun. $|Q| \ge 2$ den p_1 ve p_2 ($p_1 \ne p_2$) atomlarının mevcut olduğu elde edilir. Bu takdirde $p_1 \vee p_2 = b$, burada b L nin maksimal elemanıdır. $p_1 \vee p_2 = b$ den $b^2 = (p_1 \vee p_2)(p_1 \vee p_2) = p_1^2 \vee p_1 p_2 \vee p_2 p_1 \vee p_2^2 = 0$ elde edilir. Bu takdirde $p_\alpha b \le b^2 = 0, bp_\alpha \le b^2 = 0$ dır. Bundan dolayı her $\alpha \in Q$ için $p_\alpha b = bp_\alpha = 0$ dır. Böylece L $L(D_Q)$ ya izomorfdur.

G) $|T| = 1$, $|Q| \ge 2$ ve $p_1^2 = p_1$ olacak şekilde bir $p_1 \in L$ atomu mevcut olsun.

$|Q| \geq 2$ ile $p_2 \neq p_1$ olacak şekilde $p_2 \in L$ atomu mevcuttur.

Bu durumda $|Q| = 2$ olduğunu gösterelim.

$p_3 \neq p_1$, $p_3 \neq p_2$ olacak şekilde bir $p_3 \in L$ atomunun mevcut olduğunu kabul edelim. $p_1 \vee p_2 = b$, $p_2 \vee p_3 = b$, $p_1 \wedge p_2 = 0$, $p_1 \wedge p_3 = 0$ elde edilir. $p_1p_2 \leq p_1 \wedge p_2 = 0$ ve $p_1p_3 \leq p_1 \wedge p_3 = 0$ eşitsizliklerinden $p_1p_2 = p_1p_3 = 0$ elde edilir. $p_1 = p_1^2 \leq p_1b$ ve $p_1b = p_1(p_2 \vee p_3) = p_1p_2 \vee p_1p_3 = 0$ dır. Bu bir çelişkidir. Böylece $|Q| = 2$ dır. Aşağıdaki iki durum mümkündür: 1) $p_2^2 = 0$; 2) $p_2^2 = p_2$.

$p_1^2 = p_1$, $p_2^2 = 0$ olması durumunda L $L(D_2,2)$ integral *l*-grupoidine izomorfdur.

$p_1^2 = p_1$, $p_2^2 = p_2$ olması durumunda L $L(D_2,3)$ integral *l*-grupoidine izomorfdur.

Böylece mümkün olan tüm durumlar incelendi. Teorem 23 ispat edildi.

Teorem 24: Aşağıdaki integral *l*-grupoidler değişmelidir:

1) B_2;

2) $B_2 \times B_2$;

3) $L(C_2,i)$, $i = 1,2$;

4) $B_2 \times B_2 \times B_2$

5) $B_2 \times L(C_2,i)$, $i = 1,2$;

6) $L(A,i)$, $i = 1,2,7$;

7) $L(C_3,i)$, $i = 1,2,5,6,7,10,11$;

8) $L(D_2,i)$, $i = 1,2,3$;

9) $L(D_T)$, T keyfi, $|T| > 2$.

(B) Aşağıdaki integral *l*-grupoidler değişmeli değildir:

1) $L(A,i)$, $i = 3,4,5,6$;

2) $L(C_3,i)$, $i = 3,4,8,9$.

İspat açıktır.

Teorem 25: A) Aşağıdaki integral *l*-grupoidler birleşmelidir:

1) B_2;

2) $B_2 \times B_2$;

3) $L(C_2,i)$, $i = 1,2$;

4) $B_2 \times B_2 \times B_2$

5) $B_2 \times L(C_2,i), i = 1,2;$

6) $L(A,i), i = 1,3;$

7) $L(C_3,i), i = 1,2,3,4,5,6,10,11;$

8) $L(D_2,i), i = 1,2,3;$

9) $L(D_T)$, T keyfi, $|T| > 2$.

B) Aşağıdaki integral l-grupoidler birleşmeli değildir:

1) $L(A,i), i = 2,4,5,6,7$;

2) $L(C_3,i), i = 7,8,9$.

İspat: 1), 2) ve 3) açıktır. Bundan dolayı 4), 5) doğrudur. 8), 9) özelliklerinin gerçeklendiği de açıktır.

$L(A,1) = (A,\wedge)$ integral l-grupoidi bir dağılmalı kafestir. Bundan dolayı birleşmelidir.

$L(A,i), 1 < i \leq 7$ yı göz önüne alalım.

$(xy)z = x(yz)$ eşitliğinin $x = a$, $y = b_1$, $z = b_2$ elemanları için inceleyelim. Yani $(ab_1)b_2$, $a(b_1b_2)$ elemanlarını inceleyelim. $b_1b_2 \leq a$ olduğundan $a(b_1b_2) \leq a^2 = 0$ dır. Böylece $(ab_1)b_2 = a(b_1b_2)$ olması için $ab_1 = a$ ve $ab_2 = 0$ olmalıdır. Fakat $ab_1 = a$ ve $ab_2 = 0$ eşitlikleri sadece $L(A,2)$, $L(A,3)$, $L(A,4)$ ve $L(A,6)$ için doğrudur. Bundan dolayı $L(A,5)$ ve $L(A,7)$ birleşmeli değildir.

$x = b_1, y = b_2$, $z = b_2$ olsun. $(b_1b_2)b_2$ ve $b_1(b_2b_2)$ elemanlarını inceleyelim. $a = b_1b_2$ alalım. $L(A,2)$, $L(A,4)$, $L(A,6)$ için de bu durum geçerlidir. Bu takdirde $(b_1b_2)b_2 = ab_2$ ve $b_1(b_2b_2) = b_1b_2 = a$ olduğundan dolayı $(b_1b_2)b_2 = b_1(b_2b_2)$ olması için $ab_2 = a$ eşitliğinin sağlanması gerekir. Fakat bu eşitlik $L(A,2)$, $L(A,4)$, $L(A,6)$ için doğru değildir. Böylece $L(A,2)$, $L(A,4)$, $L(A,6)$ birleşmeli değildir.

$L(A,3)$ ün birleşmeliliği elemanter olarak ispat edilir.

Sadece i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11 için $L(C_3,i)$ nin birleşmeli ve $L(C_3,7)$, $L(C_3,8)$ ve $L(C_3,9)$ integral l-grupoidlerinin birleşmeli olmadıkları elemanter şekilde gösterilir. Böylece teorem 25 in ispatı verildi.

3. BULGULAR

Bu tezde elde edilen bulgular aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

1. Bir L l_0-grupoidin elemanları için R-radikal eleman tanımı verildi. L nin tüm R-radikal elemanlarının L_R kümesi L deki sıraya göre bir tam kafestir. L bir yarı-integral l_0-grupoid ise, teorem 2 de keyfi $a, b_\tau \in L_R (\tau \in T)$ elemanları için

$$a \wedge \left(\underset{T}{\vee} b_\tau\right) = \underset{T}{\vee}(a \wedge b_\tau)$$

eşitliğinin sağlandığı, yani L_R nin bir tam Brouwerian kafesi olduğu gösterildi. Bunun sonucu olan sonuç 1 de L yarı-integral l_0-grupoid ve L nin her elemanı radikal ise, L nin bir tam Brouwerian kafesi olduğu ve herhangi $a, b \in L$ için $ab = a \wedge b$ eşitliğinin gerçeklendiği ispatlanmıştır. Sonuç 2 de her K halkası için K halkasının tüm radikal ideallerinin kafesi olan $L_R(K)$ nın tam Brouwerian kafesi olduğu gösterilmiştir.

2. Herhangi L yarı-integral l_0-grupoid için $\mathrm{Spec}(L)$ topolojik uzayı- L nin asal spektrumu (veya yapı-uzayı) tanımlandı. Özel olarak, $\mathrm{Spec}(L)$ topolojik uzayı herhangi bir halka (birleşmeli veya birleşmeli değil), grup ve T_0- kafes için tanımlanmıştır. Keyfi bir X T_0-topolojik uzayın tüm açık kümelerinin $(L_a(X), \wedge)$ l-grupoidi yardımıyla X in dengeli kabuğu adı verilen $\mathrm{Spec}(L_a(X))$ topolojik uzayı tanımlanmıştır.

3. Önerme 12 ve teorem 6 da keyfi L l_0-grupoid için $\mathrm{Spec}(L)$ topolojik uzayının bir dengeli T_0-topolojik uzayı olduğu gösterilmiştir.

4. X T_0-uzayı, $l(X)$ X'in kapalı kümelerinin kafesi ve $\hat{l}(X)$ $l(X)$' in duali olmak üzere, teorem 7 de şu ifadeler ispatlanmıştır: $F(x) = \widehat{\{x\}}$ dönüşümü, X den $\mathrm{Spec}(\hat{l}(X))$ nın bir her yerde yoğun altuzayına tanımlı homeomorfizmdir; X in tüm $\mathrm{Spec}(\hat{l}(X))$ uzayına homeomorf olması için gerek ve yeter koşul X in dengeli olmasıdır.

Bunun bir sonucu olan sonuç 5 de X ve Y dengeli T_0-uzaylarının homeomorf olması için gerek ve yeter şartın onların kapalı kümelerinin kafeslerinin ($l(X)$ ve $l(Y)$) izomorf olması gerekliliği gösterilmiştir.

5. Keyfi K cl-grupodi için K nın tüm ideal elemanlarının kümesi K_0' ın K daki sıraya

göre bir tam alt kafes olduğu ispatlanmıştır. $x, y \in K_0$ ve $xy \notin K_0$ olacak şekilde bir K (birleşmeli olmayan) *cl*-grupoid örnek 13 de verilmiştir. Bundan dolayı K_0 üzerinde aşağıdaki şekilde bir çarpım işlemi tanımlanmıştır: $a, b \in K_0$ için ab yi içeren tüm $c \in K_0$ elemanlarının arakesiti $a * b$ ile gösterilmiştir. Önerme 17 de K bir *l*-grupoid (*cl*-grupoid) ise, bu takdirde $(K_0, *)$ ın bir yarı-integral *l*-grupoid (*cl*-grupoid) olduğu gösterilmiştir.

6. Bir K yarı-integral l_0-grupoidin herhangi bir $h \in K$ elemanı için h-çözülebilir ve h-nilpotent eleman tanımları verilmiştir. Önerme 18 ve önerme 19 da bir K yarı-integral *l*-grupoidde sonlu sayıda h-çözülebilir (h- nilpotent) elemanın toplamınında h- çözülebilir (h-nilpotent) olduğu ispatlanmıştır.

7. Önerme 25 de K bir yarı-integral l_0-grupoid ise aşağıdaki şartların eşdeğer olduğu gösterilmiştir:

i) Her $a, b \in K$ için $ab = a \wedge b$ dır;

ii) Her $a \in K$ için $a^2 = a$ dır;

iii) K nın her elemanı yarı asaldır, yani her a elemanı için $a = r(a)$ dır.

8. Teorem 8 de K bir cebirsel yarı-integral *l*-grupoid ise, her $h \in K$ için $s(h) = r(h) = R(h)$ eşitliğinin sağlandığı ispatlanmıştır.

Teorem 8 in bir sonucu olan sonuç 7 de K bir cebirsel yarı-integral *l*-grupoid ve herhangi $a \in K$ için $a = R(a)$ ise, bu takdirde K nın bir dağılmalı kafes ve $ab = a \wedge b$ olduğu gösterilmiştir.

Tersine olarak, K bir cebirsel dağılmalı kafes ve $ab = a \wedge b$ ise, bu takdirde K nın bir cebirsel yarı-integral *l*-grupoid ve her $a \in K$ için $a = R(a)$ olduğu gösterilmiştir.

Teorem 8 in bir sonucu olan sonuç 8 de K bir cebirsel dağılmalı kafes ise, K nın her a elemanının K nın a yı içeren tüm $\wedge$-asal elemanlarının arakesiti şeklinde olduğu gösterilmiştir.

9. Teorem 9 da K bir Nöther yarı-integral *l*-grupoid ise, her $h \in K$ için $R(h)$'ın h-çözülebilir olduğu ispatlanmıştır.

10. Teorem 10 da K bir cebirsel Artin yarı-integral *cl*-yarıgrup ise, her $h \in K$ için $R(h)$' ın h-nilpotent olduğu gösterilmiştir.

11. Bölüm 2.2.3 de bir keyfi dağılmalı bir (X, Ω, w_2) (Ω, w_2)-cebirinin tüm (Ω, w_2)-ideallerinin $\left(Id(X, \Omega, w_2), \overline{w_2}\right)$ l_0-grupoidinin *cl*-grupoid olduğu gösterilmiştir.

12. Bölüm 2.2.2 de elde edilen asal radikal hakkındaki teorem (teorem 8) , teorem 8 in sonuçları, teorem 9 ve teorem 10 bölüm 2.2.3 de dağılmalı universal cebirlere, özel olarak halkalara, diferansiyel halkalara, $*$ -halkalara, gruplara ve yarı gruplara uygulanmıştır.

13. Cebirler ve modüller teorisinde Nakayama lemması çok önemlidir. Teorem 11 de Nakayama lemmasının cebirsel kafeslere bir genelleştirilmesi ispatlanmıştır.

14. Teorem 12 de L bir $\wedge$-sürekli modüler kafes ise, aşağıdaki iki şartın denk olduğu gösterilmiştir: i) $S^*(L) = 1$; ii) L bir komplementli kafestir.

15. Teorem 13 de L bir cebirsel modüler kafes ise aşagıda verilen üç şartın denk olduğu ispatlanmıştır: i) $F^*(L) = 1$; ii) $S^*(L) = 1$; iii) L bir komplementli kafestir.

16. Bir halkanın direkt parçalanması ve komaksimal idealleri arasındaki bağıntı hakkındaki teorem değişmeli birleşmeli halkalar teorisinde önemlidir. Bölüm 2.4 de bu teoremin integral *cl*-grupoidler için genelleşmeleri (birimin direkt parçalanmaları hakkında teorem 15 ve teorem 16, komaksimal elemanlar hakkında teorem 17 ve teorem 18) verilmiştir. Özel olarak, halkanın direkt parçalanması ve komaksimal idealleri arasındaki bağıntı hakkındaki teoremler değişmeli ve birleşmeli olmayan halkalar ve diferansiyel halkalar için de doğrudur.

17. Birleşmeli halkalar teorisindeki Krull-Schmidt teoreminin bir benzeri integral *cl*-grupoidler için genelleştirilmiştir.

18. 2 ve 3 uzunluklu tüm integral *l*-grupoidler belirlenmiştir.

4. İRDELEME

1. Brouwerian kafesler, $\wedge$-indirgenemez elemanlar, $\wedge$-asal elemanlar ve idempotent elemanlar arasındaki ilişkiler.

1972 de P. D. Smith [31] bir Brouwerian kafesinin $\wedge$-indirgenemez elemanlarını karakterize etmiştir. Elde ettiği sonuçlardan bir tanesi de şudur: Eğer bir L tam dağılmalı kafesin her elemanı bir $\wedge$-indigenemez parçalanışa sahip ise, bu kafes brouweriandır.

Bu sonuç tezin 2.1.1. bölümünde teorem 2 nin bir sonucu olan sonuç 1 den şu şekilde elde edilebilir: L dağılmalı olduğundan dolayı bölüm 2.1.1 deki önerme 2 ye göre L nin keyfi $\wedge$-indirgenemez elemanı $\wedge$-asaldır. Bundan dolayı L nin keyfi elemanı $\wedge$-asal elemanların arakesitidir, yani radikaldir. Bölüm 2.1.1 deki sonuç 1' i kullanarak L nin bir Brouwerian kafes olduğu elde edilir.

1978 de V. A. Andrunakievič [33] şu sonuçları elde etmiştir:

i) L bir modüler cebirsel sağ ideal *cl*-grupoid olsun. L de her elemanın idempotent olması için gerek ve yeter şart her $a \in L$ için $a = R(a)$dır.

ii) Eğer bir kafesin her bir elemanı $\wedge$-indirgenemez elemanların (sonlu veya sonsuz) bir infumumu şeklinde ise, kafesin dağılmalı olması için gerek ve yeter şart her $\wedge$- indirgenemez elemanın $\wedge$-asal olmasıdır.

iii) Kompakt üretenli(yani cebirsel) kafesin dağılmalı olması için gerek ve yeter şart her $\wedge$-indirgenemez elemanın $\wedge$-asal olmasıdır.

V. A. Andrunakievič'in incelediği problemler tezde sadece yarı-integral l_0-grupoidler için incelenmiştir. Bundan dolayı Andrunakievič'in sonuçlarını ve tezin buna karşılık gelen sonuçlarını yarı- integral *l*-grupoidler için kıyaslayacağız.

i) sonucu ile ilgili şu karşılaştırmaları yapabiliriz. L bir yarı-integral cebirsel *l*-grupoid olsun. Bu takdirde bölüm 2.2.2 de sonuç 6 ya göre aşağıdaki şartlar denktir:

1) Herhangi $a \in K$ için $a = a^2$ dır;

2) Herhangi $a \in K$ için $a = R(a)$ dır.

Bu sonuç gösteriyor ki, L nin yarı integral olması durumunda, Andrunakievič'in i) sonucundaki modülerlik şartı fazladır.

ii) sonucu ile ilgili şu karşılaştırmaları yapabiliriz. Bölüm 2.1.1 deki önerme 2 ye göre L bir dağılmalı kafes ise, keyfi $\wedge$-indirgenemez eleman $\wedge$-asaldır. Böylece Andrunakievič'in ii) sonucunda " L dağılmalı kafes ise keyfi $\wedge$-indirgenemez eleman $\wedge$-asaldır" gerektirmesinde her bir elemanın $\wedge$-indirgenemez elemanların bir arakesiti olması şartına gerek yoktur.

Şimdi ters yöndeki gerektirmeyi inceleyelim: "L nin her bir elemanı $\wedge$-indirgenemez elemanların arakesiti şeklinde ve keyfi $\wedge$-indirgenemez eleman $\wedge$-asal olsun. Bu takdirde L dağılmalı kafestir." L kafesine $(L, \wedge)$ l_0-grupoid olarak bakacağız. L nin keyfi elemanı $\wedge$-indirgenemez elemanların arakesiti ve keyfi $\wedge$-indirgenemez eleman $\wedge$-asal olduğundan dolayı L nin keyfi elemanı $\wedge$-asal elemanların arakesitidir. Bu takdirde $(L, \wedge)$ l_0-grupoidi bölüm 2.1.1 deki sonuç 2 ye göre L Brouwerian kafesidir, özel olarak L dağılmalıdır.

Bu sonuç gösteriyor ki, tezde verilen sonuç 1' i kullanarak, Andrunakievič'in ii) sonucuna göre daha iyi (yani L nin Brouwerian olduğu) sonuç alınıyor. ii) sonucundaki gibi iii) sonucunun " L dağılmalı kafes ise, keyfi $\wedge$-indirgenemez eleman $\wedge$-asaldır" gerektirmesinde cebirsellik şartına gerek yoktur. iii) sonucunun ikinci kısmı ii) sonucunun ikinci kısmı yardımıyla ispat edilir. Bundan dolayı bu durumda da L nin Brouwerian olduğu elde edilir.

2. Asal radikal hakkındaki teorem. 1968 de O. Steinfeld [29] çalışmasında K yarı-integral *l*-grupoid ise, K nın yarı asal her elemanının a elemanını kapsayan asal elemanların arakesiti şeklinde olduğunu, yani $a = R(a)$ olduğunu ispatlamıştır.

1972 de K.Keimel [30] çalışmasında K cebirsel değilse, Steinfeld'in bu sonucunun doğru olmadığını örnek vererek göstermiştir ve Steinfeld'in teoreminin cebirsel yarı-integral *cl*-grupoidler için doğru olduğunu ispatlamıştır. Keimel'in bu teoremi tezin 2.2.2 bölümünde verilen teorem 8 ile ilgilidir. Teorem 8 de K bir cebirsel yarı-integral *l*-grupoid olmak üzere herhangi $h \in K$ için $s(h) = r(h) = R(h)$ olduğu gösterilmiştir. Aslında K.Keimel'in verdiği sonuç teorem 8 deki herhangi $h \in K$ için $r(h) = R(h)$ ifadesi ile denktir. Yani K bir cebirsel yarı-integral *l*-grupoid olmak üzere K nın herhangi a yarı asal elemanının a yı kapsayan asal elemanların arakesiti şeklinde olması için gerek ve yeter şart her $h \in K$ için $r(h) = R(h)$ olmasıdır. Keyfi bir $a \in K$ yarı asal eleman için $a = R(a)$ olsun. $h \in K$ keyfi alalım. $r(h)$ yarı asal olduğundan $r(h) = R(r(h))$dır. $R(h) = \wedge_I p_i$,

$h \le p_i$, p_i asal $(i \in I)$ ve $R(r(h)) = \wedge_J q_j$, $r(h) \le q_j$, q_j asal $(j \in J)$ olsun. q_j ler asal, $r(h) \le q_j$ ve $h \le r(h)$ olduğundan her $j \in J$ için $h \le q_j$ dır. Bundan dolayı $R(h) \le \wedge_J q_j = R(r(h)) = r(h)$ dır. Diğer taraftan $r(h) \le R(h)$ olduğunu biliniyor. Böylece $r(h) = R(h)$ elde edilir. Tersine olarak her $h \in K$ için $r(h) = R(h)$ olsun. $a \in K$ keyfi bir yarı asal eleman alalım. Bu takdirde $r(a) = R(a)$ dır. a yarı asal olduğundan $a = r(a)$ ve böylece $a = R(a)$ dır.

3. Cebirsel modüler kafeslerde $F(L)$, $F^*(L)$, $S(L)$ ve $S^*(L)$ elemanları arasındaki bağlantılar.

1969 da Bo. Stenström[28] çalışmasında bir L kompakt üretenli kafeste $F(L) = S(L)$ ve $F^*(L) = S^*(L)$ eşitliklerinin sağlandığını göstermiştir. M. Stern[32], Bo. Stenström[28] ün sonuçlarını modüler olmayan kafeslerin belli bir sınıfına genişletmiştir.

Bo. Stenström[28] ün sonuçlarını inceleyelim. L bir cebirsel modüler kafes olsun. Bölüm 2.3 deki teorem 11'in iii) kısmına göre $F(L) = S(L)$ dır. Böylece $F(L) = S(L)$ sonucu ilk olarak Bo. Stenström[28]'ün çalışmasında verilmiştir. Bo. Stenström[28]'ün elde ettiği $F^*(L) = S^*(L)$ sonucundan bölüm 2.3 deki teorem 13 ün "$F^*(L) = 1$ olması için gerek ve yeter şart $S^*(L) = 1$" sonucu alınır. Aslında Bo. Stenström'ün "$F^*(L) = 1$ olması için gerek ve yeter şart $S^*(L) = 1$" sonucundan Bo. Stenström[28] $F^*(L) = S^*(L)$ sonucu da teorem 13'e benzer şekilde elde edilebilir.

4. $\mathrm{Spec}(L)$ topolojik uzayı.

K bir halka ve $L(K)$, K nın tüm ideallerinin *cl*-grupoidi olsun.

Birimli, değişmeli, birleşmeli K halkaları için $\mathrm{Spec}(L(K))$ topolojik uzayı değişmeli cebirde [44] ve cebirsel geometride [90] çok önemlidir. K nın birimli birleşmeli olduğu durumda N. Jakobson [78]'un çalışmasında $\mathrm{Spec}(L(K))$' nın bir benzeri tanımlanıp, incelenmiştir. Ama Jakobson'un tanımladığı topolojik uzay tezdeki $\mathrm{Spec}(L(K))$ topolojik uzayından genel halde farklıdır. Dj. Khadjiev ve T.M. Shamilev[38] çalışmasında keyfi L l_0-grupoid için $\mathrm{Spec}(L)$ tanımlanıp, incelenmiştir. Tezde verilen $\mathrm{Spec}(L)$ topolojik uzayına ait temel sonuçlar [38] çalışmasında elde edilmiştir.

5. $\mathrm{Max}(L(K))$ topolojik uzayları.

Bir K birimli halkasının tüm maksimal ideallerinin kümesini $M(K)$ ile gösterelim. K birimli olduğundan $L(K)$ bir integral *cl*-grupoiddir. Bölüm 2.1.1 de verilen önerme 8' e göre K nın keyfi maksimal ideali asaldır. Buna göre $M(K) \subseteq P(K) = \mathrm{Spec}(L(K))$ dır ($P(K)$, K nın K dan farklı tüm asal ideallerinin kümesi).

$M(K)$ kümesi $\mathrm{Spec}(L(K))$ topolojik uzayındaki topolojiye göre $\mathrm{Spec}(L(K))$' nın bir topolojik altuzayıdır. Bu topolojik altuzay $M(K)$ veya $\mathrm{Max}(L(K))$ ile gösteriliyor[44]. Bölüm 2.1.1 deki önerme 8 e göre $\mathrm{Max}(L) \subseteq \mathrm{Spec}(L)$ topolojik altuzayı keyfi integral *l*-grupoid için tanımlayabiliriz. $\mathrm{Spec}(L)$ topolojik uzaylar için bölüm 2.1.2 de alınan sonuçlar $\mathrm{Max}(L)$ topolojik altuzaylar için de elde edilebilir.

$\mathrm{Max}(L)$ topolojik altuzayları $\mathrm{Spec}(L)$ topolojik uzayları kadar önemli değildir. Buna rağmen $\mathrm{Max}(L)$ topolojik uzaylarına ait bir çok çalışma vardır. Birimli birleşmeli değişmeli olan K halkaları için $\mathrm{Max}(L(K))$ topolojik uzayları değişmeli cebirde [44] ve Banach cebirleri teorisinde tanımlanıyor ve inceleniyor.

Birimli f-halkalar için 1970 yılında J.R. Isbell ve J.T. Morse'un [46] çalışmasında A nın tüm maksimal *l*-ideallerinin kümesi $M(A)$ sıfır-çekirdek topolojiye göre incelenmiştir. A nın tüm *l*-ideallerinin kümesini $L_e(A)$ ile gösterelim. $L_e(A)$ kapsama sırasına göre bir tam kafestir. Bölüm 2.2.1 deki önerme 17 kullanılarak $L_e(A)$ nın bir integral *cl*-grupoid olduğu gösterilir. Bu takdirde önerme 8 e göre A nın keyfi maksimal *l*-ideali $L_e(A)$ nın asal elemanıdır. Bundan dolayı $M(A)$ ya $\mathrm{Spec}(L_e(A))$ topolojik uzayının bir altuzayı olarak bakılabilir. Bu durumda bu altuzayın topolojisi sıfır çekirdek topoloji ile çakışır.

R. Isbell ve J.T. Morse'un [46] çalışmasında A ve A' birimli f-halkaları izomorf ise, bu takdirde onların $M(A)$ ve $M(A')$ uzaylarının da homeomorf olduğunu göstermişlerdir. Bu sonuç tezdeki önerme 15 in bir benzeridir. Önerme 15 in benzeri genel halde L nin keyfi bir integral *l*-grupoid olması durumunda $\mathrm{Max}(L)$ topolojik uzayları için de doğrudur.

1989 yılında G. Georgescu ve I. Voiculescu [47] çalışmasında, değişmeli halkalar ve dağılmalı kafeslerin her ikisinde de çok benzer bir şekilde ortaya çıkacak bazı sonuçlar için ortak bir formül bulmayı amaçlamıştır. Bir cebirsel integral *cl*-grupoidde herhangi bir a elemanı için (bir halkanın radikal ideallerinin genelleştirilmesi olan) a nın radikali olarak a yı kapsayan tüm maksimal elemanların arakesiti alınmıştır. Bir cebirsel integral *cl*-

grupoidde tüm radikal elemanlar yardımı ile radikal elemanların bir çatısının tanımı verilmiş, ve maksimal ideal uzayı (L nin maksimal spektrumu da denilebilir) tanımlanmıştır.

Bölüm 2.1.1 de herhengi bir L integral *l*-grupoidde keyfi $a \in L$ elemanı için a yı kapsayan tüm maksimal elemanların arakesiti $F(a)$ ile gösterildi. $L_F = \{a \in L : a = F(a)\}$ kafesi de tam Brouwerian kafesidir.

6. Diferansiyel halkalar ve diferansiyel modüller için Nakayama lemması.

A. Nowicki [91] çalışmasında Nakayama lemmasının bir diferansiyel benzerinin doğru olmadığını bir diferansiyel halka örneği ile göstermiştir. Bu konu hakkında A. V. Mihalev ve E. V. Pankratev [45] çalışmasında bilgi vermiştir. Ama A. Nowicki'nin [91] makalesine ulaşamadık. Bundan dolayı A. Nowicki'nin [91] Nakayama lemmasının diferansiyel benzeri olarak neyi düşündüğünü bilemiyoruz. Tezdeki teorem 11 e göre Nakayama lemması keyfi cebirsel kafes için doğrudur. Özel olarak, Nakayama lemması keyfi bir K diferansiyel halkanın keyfi bir H diferansiyel modülünün tüm diferansiyel altmodüllerinin $L_K(H)$ kafesi içinde doğrudur. Çünkü $L_K(H)$ bir cebirsel kafestir.

Bundan dolayı bu durumda ortaya çıkan bu çelişkinin nedeni henüz belli değildir.

5. SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen en önemli sonuçlar aşağıdakilerdir.

Bölüm 2.1.1 de:

1. Bir L l_0-grupoidin keyfi elemanı radikal ise, L nin bir tam Brouwerian kafesi ve keyfi $a, b \in L$ için $a.b = a \wedge b$ olduğu gösterildi.

2. Keyfi bir L l_0-grupoid için $\mathrm{Spec}(L)$ asal spektrum topolojik uzayı tanımlandı ve $\mathrm{Spec}(L)$ topolojik uzaylarının tüm T_0-topolojik uzayların içerisinde yeri belirlenmiştir. Özellikle, keyfi bir X T_0-topolojik uzayın tüm açık kümelerinin $(L_a(X), \wedge)$ l-grupoidi yardımıyla $\mathrm{Spec}(L_a(X))$ topolojik uzayı ve X in dengeli kabuğu tanımlanıp, X in dengeli kabuğu ile X arasındaki ilişkiler incelendi.

Bölüm 2.1.2 de:

3. Keyfi bir L cebirsel l- grupoid için asal radikal hakkında bir genel teorem elde edildi. Bu teoremin doğru olduğu üniversal cebirlerin bir doğal sınıfı belirlendi. Özel olarak, bu genel teorem şimdiye kadar yapılan üniversal cebirlerin farklı sınıfları (halkalar [18], [81], [82], [92], yarıgruplar [22], [92], gruplar [20], [21], diferansiyel halkalar [23], [24], [25], [26] ve $*$-halkalar [27]) için asal radikal ile ilgili bir çok çalışmanın sonuçlarını kapsar.

Bölüm 2.3 de:

4. Modüller için verilen Nakayama lemmasının cebirsel kafeslere bir genelleşmesi teorem 11 de verildi.

5. Bir cebirsel modüler kafeste tüm koatomların arakesiti $F(L)$, tüm atomların toplamı $F^*(L)$, tüm küçük elemanların toplamı $S(L)$ ve tüm büyük elemanların arakesiti $S^*(L)$ elemanları için 1) $F(L)=0$; 2) $F^*(L)=1$; 3) $S(L)=0$; 4) $S^*(L)=1$ şartları arasındaki ilişkiler belirlendi.

Bölüm 2.4.1 de:

6. Herhangi bir integral cl-grupoidde birimin direkt parçalanmaları ve komaksimal elemanlar hakkındaki teoremler elde edildi.

7. 2 ve 3 uzunluklu integral l-grupoidler tam olarak belirlendi.

6. ÖNERİLER

1. K bir halka ve $L(K)$, K halkasının ideallerinin *cl*-grupoidi olsun. Birimli, birleşmeli ve değişmeli olan K halkası için $Spec(L(K))$ topolojik uzayı cebirsel geometride, schemeler teorisinde çok önemlidir. Birimli birleşmeli fakat değişmeli olmayan bir K halkası için $Spec(L(K))$ topolojik uzayı değişmeli olmayan cebirsel geometride önemli olabilir.

Bir X T_0-topolojik uzayının $Spec(\hat{I}(X))$ dengeli kabuğu, genel topolojide önemli olabilir.

2. Örnek 9 da bir G grubunun tüm normal altgruplarının $N(G)$ l_0-grupoidinin *cl*-grupoid olduğu elde edildi. G. Birkhoff'un [48] kitabında $N(G)$ nin sadece *l*-grupoid olduğu gösterilmiştir. Önerme 17 nin farklı üniversal cebirlere benzer şekilde uygulanışı önemli olabilir.

3. *l*-halkalar, grup ve yarıgrupların halkalar üzerindeki hareketleri için asal radikal hakkındaki teoremin bir benzerinin yapılmasında asal radikal hakkında verilen teorem 8, teorem 8 in sonuçları, teorem 9 ve teorem 10 önemli olabilir.

4. Teorem 11 özel olarak diferansiyel modüller için Nakayama lemmasının diferansiyel varyantını yapmakta önemlidir. Gruplar, diferansiyel cebirler, $*$-halkalar ve farklı üniversal cebirler için Nakayama lemmasının benzerlerini yapmakta Teorem 11 kullanılabilir.

5. Diferansiyel halkalar, $*$ -halkalar, *l*-halkalar ve grupların halkalar üzerindeki hareketleri için Weddenburn- Artin teoreminin benzerlerini yapma çalışmalarında, bölüm 2.3 de verilen $F(L)$, $F^*(L)$, $S(L)$ ve $S^*(L)$ elemanlarının aralarında bulunan bağlantılar önemli olabilir.

6. Tezin genel bilgiler bölümünde bahsedildiği gibi *l*-monoidler ile Fuzzy cebirinde tanımlanan *t*-normlar ve genelleştirilmiş *t*-normlar arasında yakın ilişkiler vardır. Bu sebeple burada elde edilen teorem ve sonuçlar Fuzzy cebirinde de önemli olabilir. Özel olarak, genelleştirilmiş t-normların direkt parçalanmalarını bulma yönündeki araştırmalarda bölüm 2.4.1 de elde edilen birimin direkt parçalanmaları hakkındaki teoremler önemli olabilir.

7. Değişmeli ve birleşmeli olmayan halkalar, diferansiyel halkalar, gruplar ve grupoidler için Çin kalan teoreminin benzerlerinin yapımında, bölüm 2.4.1 de elde edilen komaksimal elemanlar hakkındaki teoremler önemli olabilir.

8. Birimli basit halkalar aslında ideallerinin *cl*-grupoidi B_2 ye eşit olan halkalar olarak tanımlanabilirler. B_2 uzunluğu 1 olan tek *cl*-grupoiddir. Birimli halkaların sınıfında basit halkalardan sonra birinci sırada ideallerinin *cl*-grupoidinin uzunluğu 2 veya 3 olan halkalar gelir. Bundan dolayı 2 ve 3 uzunluklu integral *l*-grupoidlerin tam olarak belirlenmesi halkaların sınıflandırılma problemlerinde önemli olabilir. Bu sonuçlar diferansiyel halkalar, gruplar ve farklı üniversal cebirlerin sınıflandırılma problemlerinde önemli olabilir.

9. Tez çalışmaları sürecinde çözümü yapılmayan aşağıdaki problemler ortaya çıkmıştır:

Problem 1. Teorem 10' un birleşmeli olmayan artin *l*-grupoidlere genelleşmesi.

Problem 2. İdeallerinin *cl*-grupoidi $L(C_2, 1)$ olan birimli, birleşmeli ve değişmeli halkaların belirlenmesi.

Problem 3. Belirlenen 2 ve 3 uzunluklu tüm *l*-grupoidlerden hangilerinin birimli halkaların ideallerinin *l*-grupoidi şeklinde olduğunun incelenmesi.

Problem 4. Grupoidler için Problem 3'ün benzeri.

Problem 5. Gruplar için problem 3'ün benzeri.

Problem 6. Örnek 9 da bir G grubunun tüm normal altgruplarının $N(G)$ kümesinin *cl*-grupoid olduğunu gösterdik. $N(G)$ *cl*-grupoidi integral olacak şekilde tüm G gruplarının bulunması ilginçtir.

7. KAYNAKLAR

1. Dedekind, R., Ges. Werke, Vol.III, 62-71.

2. Krull, W., S.B. Phys. Med. Soc. Zu Erlangen, 56, (1924)47-63.

3.Ward, M., Dilworth, R.P., Residuated lattices, Trans. AMS, 45 ,(1939) 335-354 .

4. Dilworth, R.P., Non-commutative residuated lattices, Trans. AMS, 46, (1939) 426- 444.

5. Certaine, J., Lattice-ordered groupoids and some related problems, Harvard Doctoral Thesis(unpublished), 1943.

6. Dubreil-Jacotin , M. L., Théorémes de decomposition dans certains treillis et demigroupes réticules sans condition de chaine, C. R. Acad. Sci. Paris, 232(1951), 287-289.

7. Fuchs, L., The meet-decomposition of elements in lattice-ordered semigroups, Acta Sci. Math. Szeged , 12A , (1950) 105-111.

8. Fuchs, L., A lattice theoretic discussion of some problems in additive ideal theory, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 5 , (1954) 293-313.

9. Kerstan, J., Elementfreie Begründung der allgemeinen Ideal-und Modultheorie, Ber. Math. Tagung. Berlin, (1953) 49-57.

10. Krishnan, V.S., Les algébres partiellement ordonnées et leurs extensions, Bull. Soc. Math. France, 78, (1950) 235-263; 79 (1951) ,81-120.

11. Lesieur, L., Théorémes de décomposition dans certains demi-groupes réticules satisfaisant a la condition de chaine descendante affaiblie, C. R. Acad. Sci.Paris,234,(1952) 2250-2252.

12. Murata, K., Additive ideal theory in multiplicative systems, J. Inst. Poly techn. Osaka City.Univ., 10, (1959) 91-115.

13. Murata, K., Decomposition of radical elements of commutative residuated lattice, J. Inst. Poly techn. Osaka City.Univ., 10, (1959) 31-34.

14. Thakare,N:K., Manjarekar, C.S., Radicals and uniqueness theorems in multiplicative lattices with chain conditions, Stud. Sci. Math. Hung.,18, (1983) 13-19.

15. Shulgeyfer, E. G., A prime factorization in lattice-ordered semigroups, Ukr. Math. Journ. 2:3, (1950) 100-114.

16. Fuchs, L., Steinfeld, O., Principal components and prime factorization in partially ordered semi groups, Ann. Univ.scient. Budapest. Sci. Math., 6, (1964) 103-111.

17. Andrunakievič V. A., Rjabuhin,Ju. M., On decompositions of elements of partially ordered algebraic systems into intersections of prime elements, Doklady Akad. Nauk SSSR 198,13-15 (Russian) (1971), engl.Übersetzung in Soviet Math. Doklady, 12, (1971) 692-695.

18. Gray, M. A., Radical Approach to Algebra, Addison-Wesley.

19. Lambek, J., Lectures on Rings and Modules , Blaisdell Publising Company , Waltham , Massachusetts , Toronto , London, 1966 .

20. Shukin, K.K., On RI*-solvable radical of groups, Matem. Sbornik, 52(94), 4, (1960) 1021-1031.

21. Khadjiev, Dj., Gulamov A.R., On *RI**-solvable radical of a group, Dokl. Acad. Nauk of Rep.of Uzbekistan,10, (1999) 7-10.

22. Marki, L., Radical semisimple classes and varieties of semigroups with zero / Algebraic Theory of Semigroups.-Coll.Math .Soc.J.Bolyai, 20, North-Holland, (1979) 357-370.

23. Burkov, V. D., Differential prime rings, Moscow Univ., Mech. math. fac., Moscow,1980, Dep. VINITI, N1884-80(1980).

24. Burkov, V. D., On differential prime rings, Usp. Math. nauk, 35, 5, (1980), 219-220.

25. Hadjiev (Khadjiev), Dj., Çallıalp F, On a differential analog of the prime radical and properties of the lattice of the radical differential ideals in associative differential rings, Tr.J. Math., 20, ,4, (1996) 571-582.

26. Khadjiev , Dj., Çallıalp , F., On the differential prime radical of a differential ring . Tr.J. Math., 22, 4, 355-368(1998).

27. Khadjiev , Dj. ,Çallıalp, F., Khudayberdiev V.N, On the (*)-prime radical of a ring with involution. Marmara University , Journal of Sciences and Technology ,15, (1999) 65-68.

28. Stenström, Bo, Radicals and socles of lattices, Arch.derMath., 20, (1969) 258-261.

29. Steinfeld, O., Acta math. Acad. Sci. Hungar. ,23, (1972) 51-69.

30. Keimel, K., A unified theory of minmal prime ideals, Acta Math. Sci.Hungar., 23, (1972) 51-69.

31. Smith, D.P., Meet-irreducible elements in implicative lattices, Proc. Amer.math.Soc., 34, (1972) 57-62.

32. Stern, M., On radicals in lattices, Acta Sci. Math., 38, (1976) 157-164.

33. Andrunakievič A.V., Idempotente Verbände und die Strukter von Ringen, Izvestija Akad. Nauk Moldav. SSR, ser. fiz.- tehn. mat. Nauk, 2 ,(1978) 5-12(Russich)(1978).

34. Amitsur, S. A., Amer. J. Math., 74, (1952) 775-86 and 76, (1954) 100-36.

35. Bahrens, E.A., Math. Z. , 64, (1956)169-82.

36. Lesieur, L., Croisot, R., Théorie Noethédes anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif.I: Colloque d'Algébre Supérieure(Bruxelles,1956), 79-121; II : Math. Annalen,134 (1958) 458-476; III: Bull. Acad. Royale Belgique, 44, (1958) 75-93.

37. Pla, J., Carles, R., Radical d'un treilli residué, Stochastica ,10, (1986) 90-108.

38. Dj. Khadjiev, Shamilev, T.M., Complete l-groupoids and their prime spectrums, Algebra i logica, 36:3, (1997) 341-355. English translation: Algebra and Logic, 36, 3, (1997) 204-211.

39. Khadjiev, Dj., Karaçal, F., Cebirsel ve modüler kafeslerde tüm dual atomların arakesiti ve tüm atomların toplamı üzerine, Atatürk Üniversitesi Matematik Sempozyumu, 20-22 Mayıs 1998, Erzurum.

40. Karaçal, F., On the Frattini's element in algebraic and modular lattices, XI. Ulusal Matematik Sempozyumu, 7 Kasım 1998, Isparta.

41. Khadjiev, Dj., Çallıalp, F., Karaçal, F., The prime radical of an element of an algebraic l-groupoid , Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 16, (2000) 121-126.

42. Khadjiev,Dj., Karaçal, F., Cebirsel ve modüler kafeslerde Frattini elemanı, Fen ve Mühendislik bilimleri dergisi, I. Türk dünyası Matematik sempozyumu özel sayısı, 11, 3, (1999) 87-90, Elazığ.

43. Lam, T. Y., A first course in Noncommutative Rings, Springer- Verlag, NewYork, 1991.

44. Atiyah, M. F., MacDonald, I .G., Introduction to commutative Algebra, Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1969.

45. Mihalev, A. V., Pankratev, E. V., Differential and difference algebra, Itogi Nauki i Tehniki, Algebra, Topology, Geometry, 25, 67-139.

46. Isbell, J.R., Morse, J.T., Structure spaces of lattices, Fundamenta Math. Acad. Sci.Hungar., 23, (1972) 90-102.

47. Georgescu, G., Voiculescu, I., Some abstract maximal-like spaces, Algebra Univers., 1, (1989) 90-102.

48. Birkhoff, G., Lattice theory, 3 rd edition , Providence,1967.

49. Kurosh A.G. , Group theory , Moscow , Nauka , 1967.

50. Marshall E. I. , The Frattini subalgebra of a Lie algebra , J. London Math . Soc. , 42 , 3, (1967) 416 - 422 .

51. Vrancken, Mawet , L., Sous - algébras de Frattini d' algébre de fermeture , Bull . Soc. Math. Belg. , B 39 , 1, (1987) 33-45 .

52. Cohn P.M. , Universal Algebra , Harper & Row , Publishers , New-York , Evanston , and London , 1965.

53. Koh, K.M., On the Frattini sublattice of a finite modular planar lattices, Algebra Universalis, 3, (1973) 304-317.

54. Koh, K.M. , On the Frattini sublattice of a lattice, Algebra Universalis ,1, (1971) 104-116.

55. Chen, C.C., Koh, K.M., Tan, S.K., Frattini sublattice of distributive lattices, Algebra Universalis,3, (1973) 294-303.

56. Adams, M.E., The Frattini sublattice of a distributive lattice, Algebra Universalis , 3, (1973) 216-228.

57. Abad, M., Adams, M.E.,The Frattini sublattice of a finite distributive lattice, Algebra Universalis, 32, 3, (1994) 314-329.

58. Anderson, D.D., Abstract commutative ideal theory without chain condition, Algebra universalis,6, (1976) 131-145.

59. Anderson, D.D., Multiplicative lattices in which every principal element is a product of prime elements, Algebra universalis, 8, (1978) 330-335.

60. Burton,R.G., Integral closure in multiplicative lattices, Algebra Univers. , 6, 3, (1975) 399-409.

61. . Bosbach,B., Residuation groupoids and lattices, Stud.Sci. Math. Hung.,13, 3-4, (1978) 433-451.

62. Bosbach, B., Residuation groupoids, Result. Math. , 5, (1982) 107-122.

63. Libkin, L., Direct decompositions of atomistic algebraic lattices, Algebra Univers. , 33,1, (1995) 127-135.

64. Walendziak, A., On direct decompositions of lattices, Algebra Univers. , 37, 2, (1997) 185-190.

65. Anderson, D.D., Johnson, E.W., Johnson, J.A., Noether lattices representable as quotients of the lattice of monomilly generated ideals of polynomial rings, Canad. J. Math., 31, 4, (1979) 789-799.

66. Anderson, D.D., Johnson, E.W., Weak join–principal element lattices, Algebra Univers., 6, 3, (1976) 377-381.

67. Nakkar, H.M., A localization in multiplicative lattices, Mathem. issledovaniya, 9,2 (32),Kishinev, Stiinca, (1974) 88-108.

68. Lee, R.H., Covers and associated primes in Noetherian lattice modules, Houston J.Math. , 5, 2, (1979) 219-238.

69. Anderson, D.D., Boals, A.J.,Johnson, E.W., Noether lattices: some constructions and decompositions, Fund.Math., 114, 1, (1981) 11-16.

70. Vicenik, P., A note to a construction of t-norms based on pseudo-inverses of monotone functions, Fuzzy Sets and Systems, 104, (1999) 15-18.

71. Drossos, C.A., Generalized t-norm structures, Fuzzy Sets and Systems, 104, (1999) 53-59.

72. Mesiar, R., Navara M., Diagonals of continuous triangular norms, Fuzzy Sets and Systems, 104, (1999) 35-41.

73. De Baets, B., Mesiar, R., Triangular norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104, (1999) 61-75.

74. Mesiar, R., Novák, V., Operations fitting triangular-norm-based biresiduation, , Fuzzy Sets and Systems, 104, (1999)77-84.

75. Calvo, T., On some solutions of the distributivity equation, , Fuzzy Sets and Systems, 104, (1999) 85-96.

76. Khadjiev, Dj., The relation between properties of a commutative ring and its subring of invariants for actions of finite groups, Dokl. Acad. Nauk Resp. Uzbekistan, (1995) 5-6.

77. Gorbunov, V. A., Canonical decompositions in complete lattices, Algebra i Logika, 17, 5, (1978) 495-511.

78. Jacobson, N., Structure of Rings, Coll. Publ. Am. Math. Soc., Providence, 37 (1964).

79. Drake,D., Thron, W.J., On the representations of an abstract lattice as the family of closed sets of a topological space, Trans. Am. Math. Soc.,120,1,(1965) 57-71.

80. Artamonov, V. A., Salii, V. N., Skornyakov, L. A., General Algebra, Nauka, Moscow, 2(1991).

81. Rowen, L. H., Ring Theory, Acad. Press., INC., Boston, V.1, 1988 .

82. Andrunakievich V.A., Ryabuhin Y.M., Radicals of Algebras and a Structure Theory, Moscow, Nauka ,1979 .

83. Grätzer, G., General lattice theory , Akademie - Verlag , Berlin , 1978 .

84. Kasch, F., Modules and Rings, Academic Press, London,New York ,1982.

85. Pierce, R. S., Associative Algebras, Springer-Verlag, New York, 1982.

86. Kalman J.A., A property of algebraic lattices whose compact elements have complements , Algebra univers., 22 , 1 , (1986) 100-101.

87. Skornyakov, L.A., Elements of lattice theory , Moscow , Nauka , 1982.

88. Grawley, Dilworth, R.P., Algebraic theory of lattices, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

89. Năstăsescu, C., Van Oystaeyen, F., Dimensions of Ring Theory, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo, 1987.

90. Shafereviç, I. R., Foundations of the Algebraic geometry, 2, Nauka, Moscow, 1988.

91. Nowicki, A., The primary decomposition of differential modules, Rocz. Pol. Tow. Mat., 1, 21, 2, (1979), 341-346.

92. Khadjiev, Dj., Çallıalp, F., On the prime radical of a ring and a groupoid, Marmara University, Journal of sciences and Technology, 14, (1988) 81-84.

8. ÖZGEÇMİŞ

Funda KARAÇAL, 23. 10. 1971 tarihinde Adana'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Hatay-Erzin'de tamamladı. 1989 yılında K. T. Ü. Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandı. 1993 yılında bu bölümden mezun olup, aynı yıl K. T. Ü. Fen Edebiyat Fakültesi, Cebir ve Sayılar teorisi Anabilim dalına Araştırma görevlisi olarak atandı ve K. T. Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans programına başladı.1996 yılında K. T. Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans programından mezun oldu. Aynı yıl K. T. Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü Doktora programına başladı. Evli ve bir çocuk annesidir.