KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YANSITAN VE TUTAN BARİYERLİ YARI-MARKOV RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİ ÜZERİNE

Selahattin MADEN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
“ Doktor ”
Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17. 02.1997
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 11. 04.1997

Tez Danışmanı : Doç. Dr. İhsan ÜNVER

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Fikri ÖZTÜRK

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Tahir A. KHANİEV

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Fazlı ARSLAN

Şubat 1997
TRABZON

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, "*Yansıtan ve Tutan Bariyerli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci*" olarak adlandırılan özel bir stokastik süreç ele alınmış ve detaylarıyla incelenmiştir.

Konunun seçiminde ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. İhsan ÜNVER'e ve Azerbaycan Bakü Devlet Üniversitesi öğretim üyeleri Sayın Doç. Dr. Tahir A. KHANİEV'e ve Sayın Prof. Dr. Tamilla H. NASİROVA' ya en içten duygularla teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca çok değerli tavsiye ve yardımlarından dolayı birlikte çalıştığımız, Matematik Bölümü araştıma görevlilerinden, Sayın Arş. Gör. Dr. Halim ÖZDEMİR' e ve Sayın Arş. Gör. Sema DİKMENOĞLU'na ve İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü araştırma görevlisi Sayın Arş. Gör. Zafer KÜÇÜK'e de teşekkür ederim.

Trabzon, Şubat 1997 Selahattin MADEN

İÇİNDEKİLER ***Sayfa No***

ÖZET

Stok kontrol, kuyruk ve güvenilirlik teorileri, matematiksel biyoloji v.s. nin birçok önemli probleminin çözümlenmesinde bariyerli veya bariyersiz rastgele yürüyüş süreçlerinin olasılık karekteristiklerinden yararlanılmaktadır. Ortaya çıkan somut problemlere bağlı olarak bu bariyerler yansıtan, tutan veya yutan olabilir.

Bununla ilgili olarak hazırlanan bu çalışmada, sıfır seviyesinde yansıtan ve $\beta\,(\beta > 0)$ seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci $X(t)$ ve bu sürecin önemli sınır fonksiyonalları sayılan, γ_1 - sürecin ilk kez tutan bariyere düşmesi anı ve γ_2 - sürecin ilk kez yansıtan bariyerden yansıması anı matematiksel olarak kurulmuş, γ_1 ve γ_2 nin dağılım fonksiyonları, moment çıkaran fonksiyonları, beklenen değer ve varyansları için açık formüller verilmiştir. $X(t)$ sürecinin bir boyutlu stasyoner olmayan dağılım fonksiyonları bir $\{T_n\}$ yenileme süreci ve bir $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade edilmiştir. Sürecin iki sıçrama anı arasındaki sürenin üstel, Erlang veya Ki-kare dağılımına sahip olması özel durumlarında γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları ve $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonları için formüller elde edilmiştir. Ayrıca, bazı varsayımlar altında $X(t)$ süreci için ergodik teorem ispatlanmış ve sürecin ergodik dağılım fonksiyonu bir $\{T_n\}$ yenileme süreci ve bir $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Stokastik süreç, rastgele yürüyüş, yenileme süreci, yansıtan bariyer, tutan bariyer, Laplace dönüşümü, yarı-Markov rastgele yürüyüş, Ki-kare dağılımı, Erlang dağılımı, üstel dağılım, ergodik.

SUMMARY

On The Semi-Markovian Random Walk Process with Reflecting and Delaying Barriers

Probability characteristics of random walks with or without barriers are being used to solve a number of very interesting problems in the fields of inventory, queues and reliability theories, mathematical biology etc,. These barrier can be reflecting, delaying or absorbing depending on concrete problems at hand.

In this study, the semi-Markovian random walk process $X(t)$ with reflecting barrier on the zero-level and delaying barrier on the $\beta\ (\beta > 0)$-level and the important boundary functionals of it, γ_1 - the first falling moment of the process into the delaying barrier and γ_2 - the first reflection moment of the process from the reflecting barrier are constructed mathematically, explicit formulae are given for the distribution functions, moment generating functions, expected value and variances of γ_1 and γ_2. One dimensional distribution functions of $X(t)$ are expressed by means of the probability characteristics of a renewal process $\{T_n : n \geq 0\}$ and a random walk $\{Y_n : n \geq 0\}$. In special cases in which the duration between two jump instants has exponential, Erlang or Chi-square distributions explicit formulae are obtained for distribution functions of γ_1 and γ_2 and one dimensional distribution functions of $X(t)$. Furthermore, under some assumptions, the ergodic theorem for the process $X(t)$ is proved and the ergodic distribution function of the process $X(t)$ is given by means of the probability characteristics of a renewal process $\{T_n : n \geq 0\}$ and a random walk $\{Y_n : n \geq 0\}$.

Key words : Stochastic process, random walk, renewal process, reflecting barrier, delaying barrier, Laplace transform, semi-Markovian random walk, Chi-square distribution, Erlang distribution, exponential distribution, ergodic.

ŞEKİL LİSTESİ *Sayfa No*

SEMBOL LİSTESİ

$a<b$	a küçüktür b
$a>b$	a büyüktür b
$a\leq b$	a küçüktür veya eşittir b
$a\geq b$	a büyüktür veya eşittir b
$a\in A$	a A nın elemanıdır
$a\notin A$	a A nın elemanı değildir
$a=b$	a eşitttir b
$a\neq b$	a farklıdır b
$a:=b$	a tanım olarak eşittir b
$\forall$	her
$\exists$	en az bir
∞	sonsuz
$a<\infty$	a sonludur
(a,b)	açık aralık
$[a,b)$	sağdan açık soldan kapalı aralık
$(a,b]$	soldan açık sağdan kapalı aralık
$[a,b]$	kapalı aralık
$[\lvert x\rvert]$	x sayısının tam kısmı
$\lvert x\rvert$	x sayısının mutlak değeri
$A\subseteq B$	B kümesi A kümesini içerir veya A ve B kümeleri eşittir
$A\supseteq B$	A kümesi B kümesini içerir veya A ve B kümeleri eşittir
$\min A$	A kümesinin minimumu
$\max A$	A kümesinin maksimumu
$\inf A$	A kümesinin infumumu
$\sup A$	A kümesinin supremumu

$\sum_{i=1}^{n} a_i$	$a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayılarının toplamı
$\prod_{i=1}^{n} a_i$	$a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayılarının çarpımı
$\prod_{k=1}^{m} * (a_n^{(k)})$	$a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(m)}$ dizilerinin konvolüsyon çarpımı
$\prod_{i=1}^{n} * f_i$	$f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı
$P\{.\}$	$\{.\}$ olayının olasılığı
$P_z\{.\}$	$\{.\}$ olayının koşullu olasılığı
$E[\xi]$	ξ rastgele değişkeninin beklenen değeri
$E_z[\xi]$	ξ rastgele değişkeninin koşullu beklenen değeri
$E[\xi^n]$	ξ rastgele değişkeninin n-yinci başlangıç momenti
$Var[\xi]$	ξ rastgele değişkeninin varyansı
$Var_z[\xi]$	ξ rastgele değişkeninin koşullu varyansı
$f(x)\|_{x=0}$	$f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki değeri
$d_z F$	F fonksiyonunun z değişkenine göre diferansiyeli
$\frac{\partial^n}{\partial x^n}[F(x,y)]$	$F[x,y]$ nin x değişkenine göre n-yinci kısmi türevi
$\lim_{x\to\infty} f(x)$	x ∞ a giderken $f(x)$ fonksiyonunun limiti

1.GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bilim dünyasında teoriler, bu dünyaya özgü aksiyomlar üzerine inşa olunurlar. Teorik sonuçlar, bu aksiyomlardan didaktif mantık yoluyla süzülüp çıkartılırlar. Bilim dünyasının teorileri ve ürünleri, gerçek dünyanın gerçekleri ile uyum içerisinde olmalarını sağlayacak şekilde biçimlendirilmiş olmalarına rağmen gerçeğin kendisi değildirler; nice varsayımın iklimlendirdiği bir ortamda boy atmış varlıklardır. Örneğin, yerden d kadar yüksekte bulunan bir cismin $t = \sqrt{2d / g}$ saniye içerisinde yere düşeceğini ifade eden yasa, ancak ve ancak söz konusu cismin, havası boşaltılmış bir tüp içerisinde düşme hareketini gerçekleştirmesi durumunda geçerlidir. Bu tip olaylara ve yasalara deterministik olaylar ve yasalar diyoruz. Aynı koşullar altında tekrarlandıklarında aynı sonuçları verdiklerini, vereceklerini biliyoruz.

Oysa bazı olaylar için bu tür bir determinizm söz konusu olmayabilir. Düzgün bir zarı aynı koşullar altında atmamız halinde, gelen yüzlerin hep aynı olmadığını görürüz. Aynı durum, iyi karıştırılmış bir deste kart içerisinden rastgele çekilen bir kart için de geçerlidir. Karar vermekte acele etmek, bu tür olayların matematiksel modellerini kurmanın mümkün olamayacağı sanısına kapılmak doğru olmaz. Düzgün bir zarı bir kez değilde söz gelimi 600 kez atarsak hemen her yüzün eşit sayılabilecek sayıda geldiğini görürüz. Bu atışların sayısını daha da yükseltirsek savımızın yasa mertebesine yükseldiğine şahit oluruz ve bu tür rastgele olayların da gerisinde yatan istatistiki bir düzenliliğin mevcut bulunduğunu kabule mecbur kalırız. Bir deney aynı şartlar altında bir çok kez tekrar edildiğinde sonuçlar belli bir kurala bağlı olmaksızın her kez değişebiliyorsa, bu deneyin belirli bir sonucuna bağımlı olarak gerçekleşen (ya da gerçekleşmeyen) bir olaya rastgele olay denmektedir. Rastgele olaylara etki eden nedenlerin çokluğu ve karmaşıklığı bunların incelenmesi için özel metodları gerekli kılmıştır. Pratikte deneyler göstermiştir ki, bir rastgele olayın gerçekleşmesi ya da gerçekleşmemesi pek çok sayıda gözlemlendiğinde, az çok bir kararlılık göstermektedir. Yani tek başına bir rastgele olayın karmaşıklığına karşılık, bunların cümlesi için geçerli basit bir kanun elde edilebilmektedir.

Onyedinci yüzyılda doğan olasılık teorisi, rastgele olayların ve rastlantı değişkenlerinin çizdiği çerçeveyi kendisine konu edinmiştir. Bu nedenle olasılık teorisi, rastgele olaylara egemen olan kanunları matematiksel metodlarla inceleyen bir bilimdir. Talih değişmelerine bağlı hemen hemen bütün gözlemleri, bu talih değişmelerinin doğal özelliğini incelemek olasılık kuramıdır. Talih kavramları ve onunla birlikte "Talih" tarih öncesine kadar gider, ancak bunların matematiksel incelenmesi 300 yıl eskiye dayanır. Olasılık hesabı başlangıçta talih oyunları ya da kumar oyunlarıyla canlandırıldı. Bir çift zarı 24 kez atıp en az bir kez düşeş getirme olasılığının, 4 zarı bir kez atıp en az bir şeş getirmenin olasılığına eşit olacağını düşünen Chevalier de Mere adlı kumarbaz, kumar masalarında harcadığı ömründen edindiği deneyiminin bu düşüncesini doğrulamadığını görür ve derdine deva olur umuduyla dönemin ünlü matematikçilerinden Blaise Pascal'a başvurur. Pascal (1623-1662) ve Pierre Fermat'ın (1601-1665) ortak çalışmaları, bir yandan de Mere'nin derdine deva olurken öte yandan da olasılık teorisinin doğmasına neden olmuştur.

Onyedinci asrın geri kalan kısmında, de Mere tarafından gündeme getirilen benzer nitelikteki problemler ve benzerleri tartışılmış ancak ne genel bir çerçeve ne de teorik bir taban oluşturulamamıştır.

Onsekizinci asrın hemen başlarında Jacob Bernovilli (1654-1705) ve Abraham de Moivre'ın (1667-1754) çalışmaları olasılık hesabı teorisinin başlamasını sağlamıştır. Bernovilli, ölümünden sonra 1713 de yayınlanan Ars Conectandi (The Art of Conjecture) adlı kitabında, önemli diğer çalışmalarının yanı sıra, adıyla anılan ve olasılığı, belirli bazı elemanter problemlerin çözümünde kullanılan bir araç olma seviyesinden bilimsel bir disiplin olma seviyesine yükselten teoremi, bilim dünyasının hizmetine sunmuştur. Olasılık teorisinin temel kanunlarından biri olan "Büyük Sayılar kanunu" nu ilk defa J.Bernovilli ispat etmiştir ve ilk kez bir olayın olasılığını, bu olayın frekansının limiti olarak tanımlamıştır. De Moivre (1667-1754), 1718 yılında The Doctrine of Chances adlı kitabını yayınlayarak olasılık teorisine çarpım kuralını hediye etmiş ve normal olasılık yoğunluk fonksiyonunun oluşumuma ilk katkıyı yapmıştır.

Laplace (1749-1827), Gauss (1777-1855), Markov (1856-1922), Tchebychev (1821-1891) olasılık teorisinin gelişimine hız kazandırmışlardır. Olasılık teorisinin temel taşlarından biri olan "Merkezi limit teoremi" (Moivre-Laplace teoremi) ilk kez Laplace tarafından ispat edilmiş ve bir çok dikkate değer uygulamaları yapılmıştır. Quetelet ve arkadaşları, Maxwell, Boltzman ve Gibbs çalışmalarında olasılık teorisinden şans oyunlarında, fizik ve astronomi sahalarında, sigortacılıkta, özellikle de ölüm istatistiklerinin oluşturulmasında, istatistiksel mekanikte bol miktarda yararlanmışlardır.

Olasılık teorisinde stokastik kavramı ilk kez bu teorinin kurucularından olan J. Bernovilli (1654-1705) tarafından kullanılmaya başlanmıştır. Sonra bu kavram bir süre unutulmuş olmasına rağmen ünlü olasılıkçı V. Bortkiyeviç (1868-1913) in büyük katkısıyla yirminci asrın başlarında yeniden kullanılmaya başlanmıştır.

Stokastik süreç kavramı ise sistematik olarak A. N. Kolmogorov ve A. Y. Hinçin gibi ünlü olasılıkçılar tarafından ortaya konulmuş ve bu alanda ilk esaslı sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır. A. N. Kolmogorov günümüzde Markov tipli süreç olarak adlandırılan stokastik süreçlerin esaslarını ortaya koyarken A. Y. Hinçin çalışmalarında stasyoner süreçler olarak adlandırdığı stokastik süreçler üzerinde çalışmalar yapmıştır. Çağımızda stokastik süreçlere ilişkin problemlere büyük ilgi gösterilmektedir. Bu alanda emeği geçen başlıca bilim adamları arasında N. Wiener, W. Feller, J. Dobb, R. Fisher, J. Neumann ve H. Cramer gibi olasılıkçıların isimlerini anabiliriz.

Özellikle hızla gelişmekte olan teknoloji ve ekonomiye paralel olarak stokların kontrol edilmesi ile ilgili birçok önemli problemler ortaya çıkmaktadır. Bunun için ise ele alınan problemi tam olarak ihtiva eden stokastik süreçlerin matematiksel kuruluşlarının verilmesi oldukça önemlidir. Örneğin bir işletmeci, işletmesinden maksimum miktarda yararlanabilmek için bazı önlemler almalıdır. Çünkü, ürettiği malın maliyeti, korunması, pazarlanması, dayanıklılığı, stoklanması vs., işletmenin hayatını etkileyecektir. Bütün bunların belirlenmesinde olasılık teorisinden ve özellikle de stokastik süreçler teorisinden faydalanılmaktadır.

Stok kontrol teorisi, kuyruk teorisi ve güvenilirlik teorisindeki problemlerin çoğu, bariyerli veya bariyersiz rastgele yürüyüş süreçleri yardımıyla ifade edilebilir öyle ki bu bariyerler ele alınan probleme bağlı olarak değişik tiplerden olabilir (yansıtan, tutan, yutan v.s.,). Özellikle kuyruk teorisi ve talih oyunlarında yutan bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri kullanılır. Örneğin, başlangıç sermayesi a, $a>0$, birim olan bir kumarbazın başlangıç sermayesi b, $b>0$, birim olan bir kumarbaza karşı oyun oynadığını varsayalım ve kumarbaz her bir oyunun sonunda bir birim kazansın veya kaybetsin. Ayrıca kumarbazın sermayesi

'0' a düşünceye kadar veya 'a+b' ye ulaşıncaya kadar oyuna devam ettiğini varsayalım. Bu durumda kumarbazın sermayesini *'0' ve 'a+b' de yutan bariyerlere sahip basit rastgele yürüyüş süreci* olarak adlandırılan bir stokastik süreçle karekterize etmek mümkündür. Eğer kumarbazın sermayesi belirli bir adım sonunda sıfır oluyorsa bu durumda kumarbaz iflas etmiş ve karşı kumarbaz onun bütün sermayesini kazanmış olacaktır.

Stok kontrol teorisindeki birçok problemin çözümlenmesinde basit rastgele yürüyüş süreçleri yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle bilim adamları çalışmalarını basit rastgele yürüyüş süreçleri yerine genel durum uzaylarına sahip rastgele yürüyüş süreçleri veya bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri üzerinde yoğunlaştırmışlardır. Basit rastgele yürüyüş süreçleri genel rastgele yürüyüş süreçlerinin değişik özel durumlarıdır.

Bu nedenledir ki stok kontrol, kuyruk ve güvenilirlik konularında ortaya çıkan genel durum uzayına sahip özel bir stokastik sürecin ele alınması ve bu sürecin detaylarıyla incelenmesi oldukça önemli olacaktır. Bununla ilgili olarak, rastgele yürüyüş süreçleri ve yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri üzerine bir literatür araştırması verelim.

1.2. Literatür Araştırması

Bu çalışmada, stokastik süreçlerin önemli bir kısmını oluşturan iki bariyerli rastgele yürüyüş süreçlerinin özel bir durumu ele alınmıştır. Bu nedenle önce yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçlerinin son yıllardaki gelişimini kısaca verelim. Yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri yarı-Markov süreçlerinin özel bir halidir. Yarı-Markov süreç kavramı ise ilk kez, birbirinden bağımsız olarak ve hemen hemen aynı zamanlarda, Levy [1], Smith [2] ve Takacs [3] gibi olasılıkçılar tarafından ortaya atılmıştır. Fakat bunların hepsinde durum uzayı sonlu olduğundan ve sıçrama anları fiziksel olarak belirlendiğinden bu kavramın genelleştirilmesi gerekli idi. Bu nedenle Çınlar [4], Gihman ve Skorohod [5], Serfoza [6] ve Ezhov ve Korolyuk [7] çalışmalarında genel durum uzayına sahip yarı-Markov süreci tanımlarını vermişlerdir. Gihman ve Skorohod'un vermiş olduğu tanımı kısaca verelim:

$(\Omega,\Im,P_x), x\in X$, olasılık uzayları ailesi verilmiş olsun ve bir (Ω,σ,P_x) olasılık uzayında tanımlanmış bir $\{X_n : n\geq 0\}$ Markov zincirinin verilmiş olduğunu kabul edelim. Bu zincirin

$$P_x\{X_0(w)=x\}=1$$

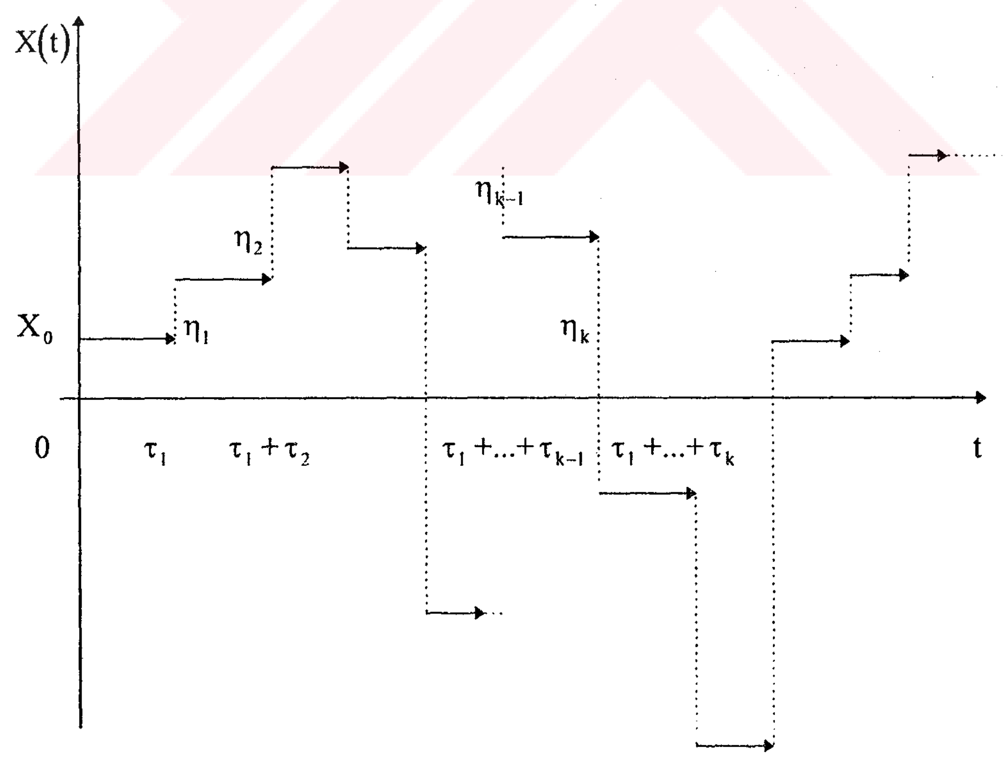
olmak üzere durum uzayı (X,B) ve geçiş olasılığı ise $\Pi(x,B)$ olsun. $\eta_1(w)$, $\eta_2(w)$, $\eta_3(w)$, ... bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip ve $\{X_n : n \geq 0\}$ ailesinden $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip rastgele değişkenler dizisi olsun. Her $x, y \in X$ için $F_{x,y}(t)$ nin negatif olmayan herhangi bir rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu olduğunu varsayalım. $\varphi_{x,y}(t)$ ise $F_{x,y}(t)$ fonksiyonu $\varphi_{x,y}(\xi)$ nin $[0,1]$ de dağılım fonksiyonu olacak şekilde negatif olmayan bir fonksiyon olsun, burada ξ rastgele değişkeni $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip bir rastgele değişkendir. Bu takdirde

$$\tau_k = \varphi_{x_{k-1},x_k}(\eta_k)$$

olmak üzere

$$X(t) = X_{k-1}(w), \text{ eğer } \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i \leq t < \sum_{i=1}^{k} \tau_i \text{ ise, } \left(\sum_{i=1}^{0} = 0\right)$$

ifadesiyle tanımlanan sürece bir *yarı-Markov süreç* adı verilir. Bu sürecin bir görünüşü Şekil 1 de görüldüğü gibidir.



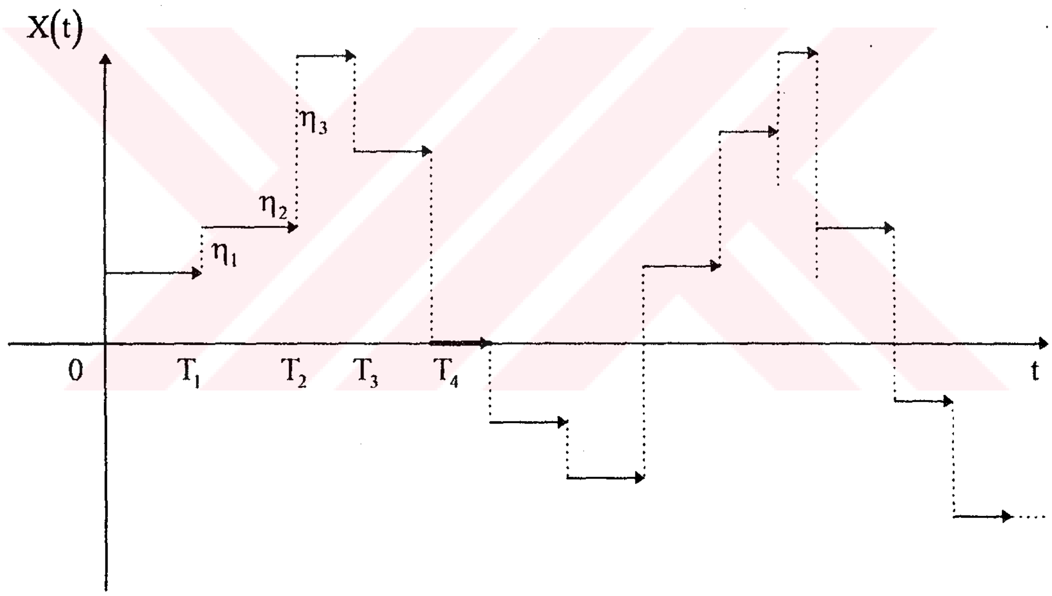
Şekil 1. Yarı-Markov sürecinin bir görünüşü

Nasirova [8] ise 1970 yılında Gihman ve Skorohod'un vermiş olduğu yarı-Markov süreç tanımının özel bir durumu olan yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci tanımını vermiştir. Şimdi bu tanımı verelim:

$\{(\xi_i, \eta_i) : i = 1,2,...\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler çiftleri dizisi olup ξ_i ler pozitif değerli, yani $P\{\xi_i > 0\} = 1$, $i = 1,2,...$ olsun. Bu takdirde

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \text{, eğer } T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = T_{n+1} \text{ ise,}$$

ile tanımlanan $X(t)$ stokastik sürecine bir *yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci* adı verilir. Bu sürecin görünüşlerinden birisi Şekil 2 de verildiği gibidir.



Şekil 2. Yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Nasirova bu şekilde inşa ettiği yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin dağılımını, sürecin supremumunun dağılımını, sürecin verilen bir seviyeye ilk defa ulaşma anı ile sıçramasının birleşik dağılımını, sürecin supremumu ile infimumun birleşik dağılımını ve süreç için limit teoremlerini çalışmıştır.

Yarı-Markov süreçleri ile ilgili birçok önemli problemi Borovkov [9-11], Korolyuk ve Turbin [12], Çınlar [4,13,14], Takacs [3,15], Korolyuk ve Pirliev [16], Tomko [17], Smith [2,18, 9], Spitzer [20,21], Feller [22,23], Anisimov [24,25], Gnedenko ve Kovalenko [26], Shurenkov [27-29] v.s., çalışmalarında detaylarıyla incelemişlerdir.

Stokastik süreçlerin esas sınır fonksiyonallarının incelenmesi de oldukça önemlidir. Bu konuda ilk çalışmayı Spitzer [21] yapmıştır. Onun çalışmalarını Rogozin [30] ve Gusak ve Korolyuk [31] toplam dizisi için genelleştirmiştir. Daha sonra Rogozin [32] aynı çalışmaları artımları bağımsız olan süreçler için de genelleştirmiştir. Gusak [33] sıçrama anı ve değerinin birleşik dağılımı için genel sonuçlar elde etmiştir. Ayrıca Gusak ve Korolyuk [34] sürecin değerinin ve supremumunun ortak dağılımını vermiştir. Skorohod [35] sıçramalarının işareti aynı olan süreçlerin karekteristikleri ile, verilen bir seviyeye ilk kez ulaşması anı arasındaki ilişkileri ortaya koymuştur. Borovkov [11] sıçramalarının işareti aynı ve artımları bağımsız olan süreçlerin belirli bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımı ile, sürecin değerinin dağılımı arasındaki ilişkileri vermiştir. Levy [1] ise böyle bir sürecin değerinin infimumu ile supremumunun ortak dağılımını vermiştir.

Hem pratik hem de teorik bakımdan yarı-Markov süreçleri için ergodik teoremler ve süreçlerin ergodik dağılımları da oldukça önemlidir. Yarı-Markov sınıfına ait olan yenileme süreçleri için esas ergodik teorem 1975 yılında Smith tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca Ezhov ve Shurenkov [36] tarafından da yarı-Markov süreçler için ergodik teoremler ispatlanmıştır. Shurenkov [27] yarı-Markov süreçlerin ergodik dağılımının varlığı için gerek ve yeter şart elde etmiştir.

Yarı-Markov süreçler için en genel durumda limit teoremleri Anisimov [24,25], Sil'vestrov [37,38], Dzhafarov, Nasirova ve Skorohod [39], Korolyuk ve Svishchuk [40] tarafından verilmiştir. Rastgele yürüyüş süreçleri için limit teoremleri ise Skorohod ve Slobodenyuk [41], Nasirova [8] ve Harlamov [42] tarafından verilmiştir.

Yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleriyle ilgili, fakat daha karmaşık olan süreçlerden biri de yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş süreci olarak adlandırılan bir stokastik süreçtir. Bu süreçlere örnek olarak Nasirova'nın ele aldığı süreç gösterilebilir [8]. Bu süreci kısaca aşağıdaki şekilde özetleyebiliriz:

$(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere $\left\{\left(\xi_i^+, \eta_i^+, \xi_i^-, \eta_i^-\right) : i = 1,2,...\right\}$,bu uzay üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılmış rastgele değişkenler dörtlüleri dizisi verilmiş olsun. ξ_i^+, η_i^+ ve ξ_i^- rastgele değişkenlerinin pozitif değerli ve η_i^- rastgele değişkeninin ise negatif değerli olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$X^+(t)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i^+, \quad \text{eğer } T_n^+=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^+\le t<\sum_{i=1}^{n+1}\xi_i^+=T_{n+1}^+ , \ n\ge 1 \text{ ise}$$

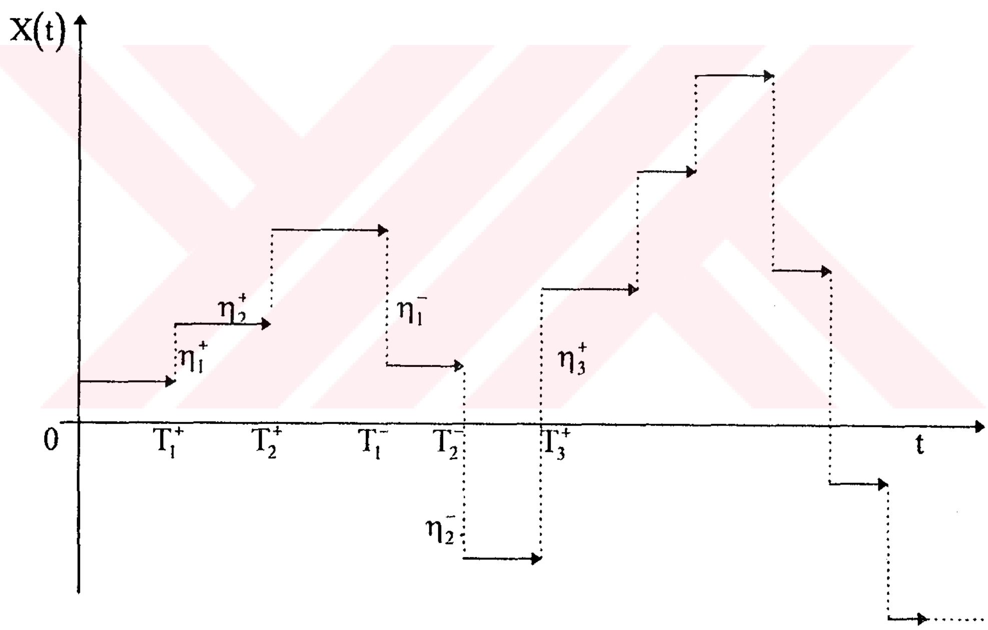
ve

$$X^-(t)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i^-, \quad \text{eğer } T_n^-=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^-\le t<\sum_{i=1}^{n+1}\xi_i^-=T_{n+1}^- , \ n\ge 1 \text{ ise}$$

olmak üzere (burada $T_0^+ = T_0^- = 0$ dır)

$$X(t)=X^+(t)+X^-(t)$$

ile tanımlanan $X(t)$ stokastik süreci *yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş süreci* olarak adlandırılır. Bu süreç için önemli olan bütün olasılık karekteristikleri incelenmiştir. Bu sürecin görünüşlerinden birisi Şekil 3 de verildiği gibidir.



Şekil 3. Yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Yarı-Markov süreçlerinin incelenmesinden sonra, uygulamada ortaya çıkan bazı problemlerin incelenmesi ve çözümlenmesi için yarı-Markov sürecinin kendisi değil onun değişik tipleri, yani bariyerli tipleri incelenmeye başlandı. Bunlar ise bir bariyerli veya iki bariyerli olarak sınıflandırılabilir. Bu bariyerler ise ortaya çıkan somut problemlere bağlı olarak yansıtan, tutan, yutan, v.s., olabilir.

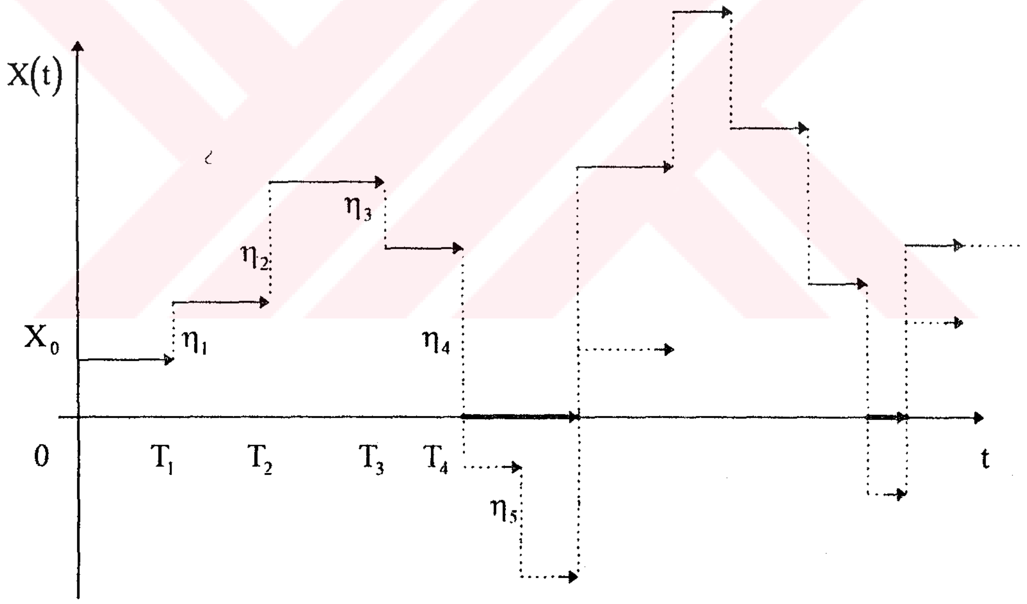
Nasirova [8] sıfır seviyesinde tutan bariyere sahip olan bir bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecini şu şekilde kurmuştur: $\{(\xi_i, \eta_i) : i = 1,2,...\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler çiftleri dizisi olup ξ_i ler pozitif değerli, yani $P\{\xi_i > 0\} = 1$, $i = 1,2,...$ olsun. Bu takdirde

$$X_n = \max\{0, X_{n-1} + \eta_n\}, \quad n \geq 1 \; ; \; X_0 = z > 0$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n \quad \text{eğer} \quad T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = T_{n+1} \quad \text{ise,}$$

ile tanımlanan $X(t)$ stokastik süreci *sıfır seviyesinde tutan bariyerli bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreç* oluşturacaktır. Bu sürecin görünüşlerinden biri Şekil 4 de verilmiştir.



Şekil 4. Sıfır seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Nasirova [8,43] bu sürecin dağılımını, sürecin esas sınır fonksiyonallarının dağılımını incelemiştir. Nasirova ve Skorohod [43,44] bu süreç için ergodik teoremi ispatlamışlar ve sürecin ergodik dağılım fonksiyonunu elde etmişlerdir. Nasirova [8] ve Borovkov [10] bu süreç için seriler şeklinde limit teoremlerini ifade ve ispat etmişlerdir.

Benzer şekilde $\beta > 0$ seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci de kurulmuş ve incelenmiştir: $\{(\xi_i, \eta_i) : i = 1,2,...\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler çiftleri dizisi olup ξ_i ler pozitif değerli, yani $P\{\xi_i > 0\} = 1$, $i = 1,2,...$, olsun. Bu takdirde

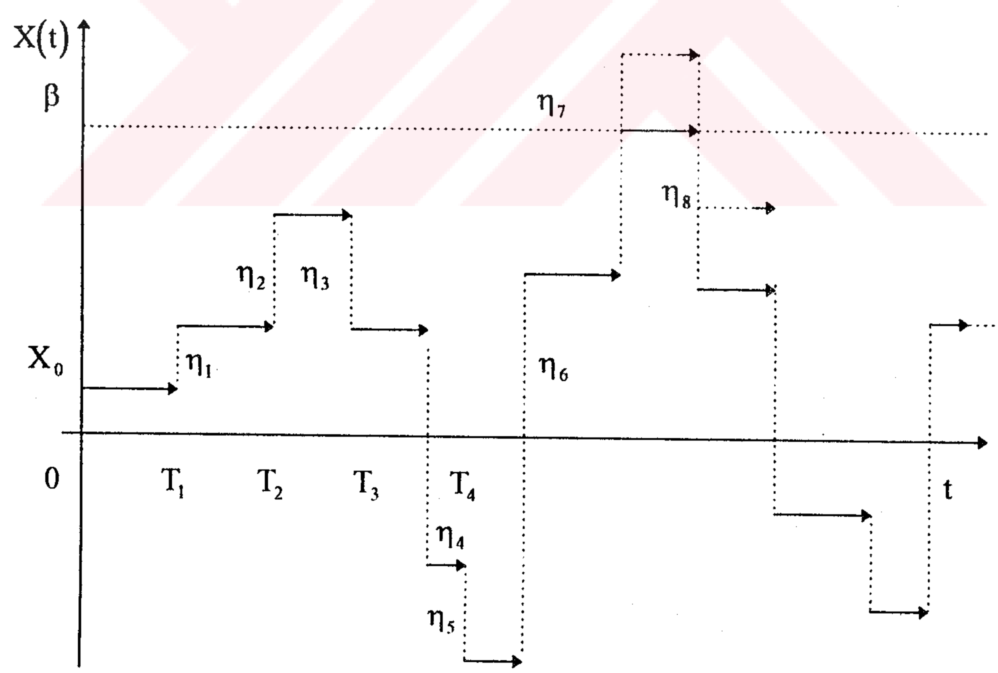
$$X_n = \min\{\beta, X_{n-1} + \eta_n\}, \quad n \geq 1 \; ; \; X_0 = z \leq \beta$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n \text{ , eğer } T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = T_{n+1} \text{ ise,}$$

ile tanımlanan $X(t)$ stokastik süreci $\beta > 0$ *seviyesinde tutan bariyerli bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreç* oluşturacaktır. Bu sürecin bir görünüşü Şekil 5 de verilmiştir.

Nasirova ve Skorohod [43] bu süreç için ergodik teoremini ispatlamışlar ve sürecin ergodik dağılım fonksiyonunu vermişlerdir. Ayrıca bu tipten stokastik süreçler Feller [22], Spitzer [20], Smith [18] gibi olasılıkçılar tarafından da çalışılmıştır.



Şekil 5. $\beta > 0$ seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Benzer şekilde $\beta > 0$ seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci de kurulmuş ve incelenmiştir: $\{(\xi_i, \eta_i) : i = 1,2,...\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler çiftleri dizisi olup ξ_i ler pozitif değerli, yani $P\{\xi_i > 0\} = 1$, $i = 1,2,...$, olsun. Bu takdirde

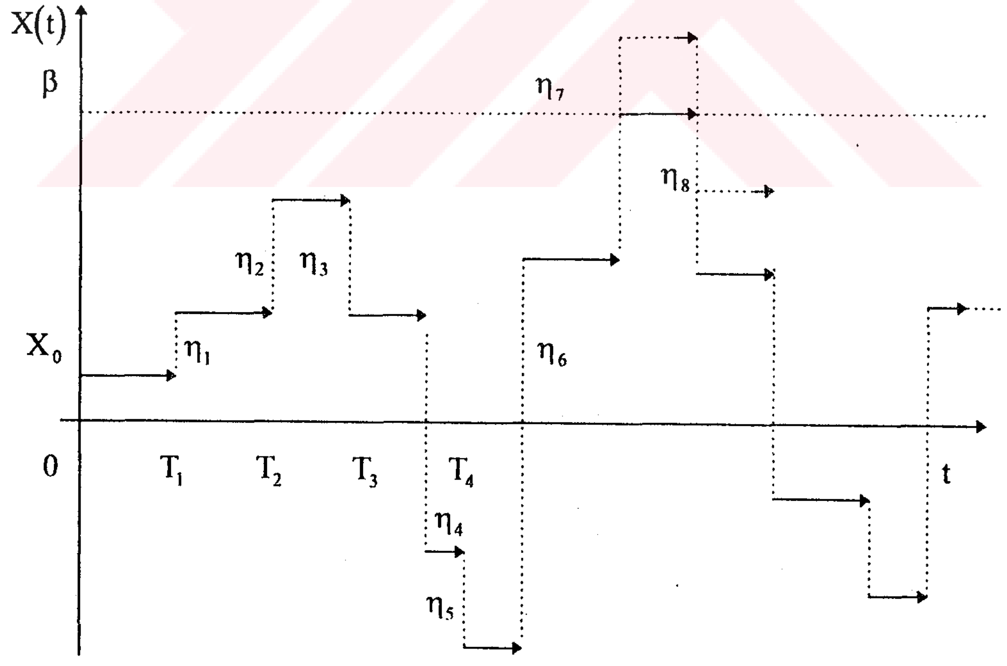
$$X_n = \min\{\beta, X_{n-1} + \eta_n\}, \quad n \geq 1 \; ; \; X_0 = z \leq \beta$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n \text{ , eğer } T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = T_{n+1} \text{ ise,}$$

ile tanımlanan $X(t)$ stokastik süreci $\beta > 0$ *seviyesinde tutan bariyerli bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreç* oluşturacaktır. Bu sürecin bir görünüşü Şekil 5 de verilmiştir.

Nasirova ve Skorohod [43] bu süreç için ergodik teoremini ispatlamışlar ve sürecin ergodik dağılım fonksiyonunu vermişlerdir. Ayrıca bu tipten stokastik süreçler Feller [22], Spitzer [20], Smith [18] gibi olasılıkçılar tarafından da çalışılmıştır.



Şekil 5. $\beta > 0$ seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Ayrıca Nasirova [8] sıfır seviyesinde yansıtan bariyerli bir yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş sürecini aşağıdaki şekilde kurmuş ve çalışmıştır: $(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere $\{(\xi_i^+, \eta_i^+, \xi_i^-, \eta_i^-) : i = 1,2,...\}$ bu uzay üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılmış rastgele değişkenler dörtlüleri dizisi verilmiş olsun. ξ_i^+, η_i^+ ve ξ_i^- rastgele değişkenlerinin pozitif değerli ve η_i^- rastgele değişkeninin ise negatif değerli olduğunu varsayalım.

$$T_k^+ = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^+ \quad \text{ve} \quad T_k^- = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^-$$

olmak üzere T_k^+ ve T_k^- rastgele değişkenlerini artan sırada yeniden düzenleyelim ve bu düzenlemeyi T_k ile gösterelim.

$$\eta_k = \begin{cases} \eta_i^+ , & T_k = T_i^+ \\ \eta_j^- , & T_k = T_j^- \end{cases}$$

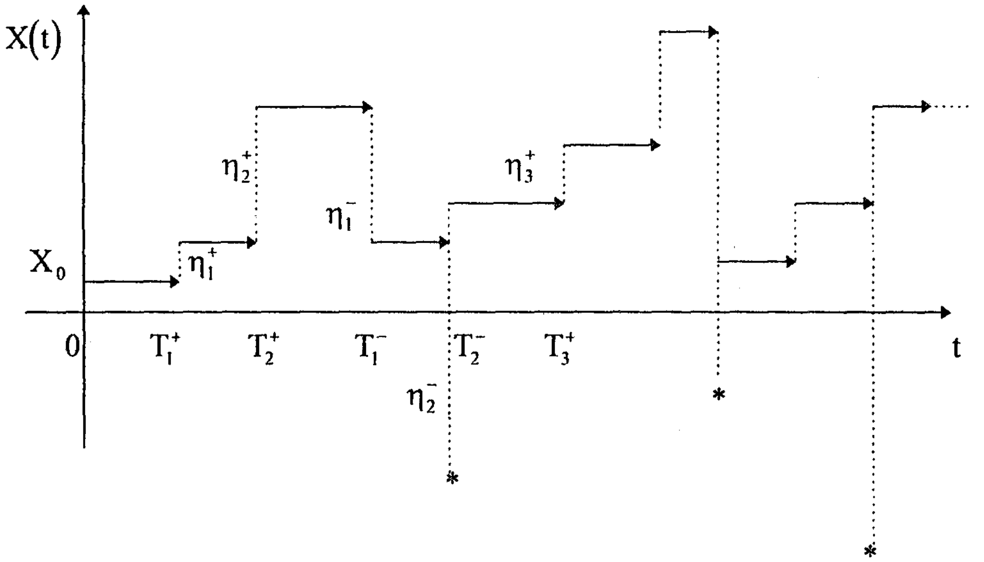
olarak tanımlayalım. Bu takdirde

$$X_k = |X_{k-1} + \eta_k| \quad k \geq 1 \, , \; X_0 = z > 0$$

olmak üzere

$$X(t) = X_k \, , \quad \text{eğer } T_k \leq t < T_{k+1} \text{ ise}$$

ile tanımlanan stokastik süreç *sıfır seviyesinde yansıtan bariyerli bir yarı-markov toplam rastgele yürüyüş süreci* oluşturur. Bu sürecin görünüşlerinden biri Şekil 6 daki gibidir.



Şekil 6. Sıfır seviyesinde yansıtan bariyerli yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Nasirova [8] bu süreç için, sürecin yansıtan bariyere ilk kez düşme anının dağılımını, sürecin verilen bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımını, sürecin sonlu boyutlu dağılımının Laplace dönüşümünü çalışmış ve sürecin ergodikliğini incelemiştir. Ayrıca süreç için limit teoremini ifade ve ispat etmiştir.

Stok kontrol, kuyruk ve güvenilirlik teorilerinin bir çok önemli problemi iki bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri yardımıyla verilir öyle ki bu bariyerler muhtelif türlerden olabilirler. Hem pratik hem de teorik bakımdan önemli olmasından dolayı iki bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri hakkında bir çok ilginç ilmi çalışmalar yapılmıştır. Ancak yapılan bu çalışmaların çoğu sonlu durum uzayına sahip rastgele yürüyüş süreçleri için sınır-değer problemlerine hasredilmiştir (Korolyuk ve Borovskikh [46], Lotov [47,48], Prabhu [49], Zhang [50], El-Shehawey [51], Weesakul [52], Kastenbaum [53], v.s.).

Sınır-değer problemlerinin incelenmesi önemli olmasına rağmen ele alınan süreçlerin kendi karekteristiklerinin incelenmesi de oldukça önemlidir. Bu nedenle iki bariyerli rastgele yürüyüş süreçlerinin kendi karekteristiklerine ait bazı ilmi çalışmalar da mevcuttur (Feller [22], Spitzer [20], Borovkov [10], Lotov [54], Afanas'eva ve Bulinskaya [55,56,57], Khaniev [58,59,60,61], Zhang [50], v.s.). Bunlardan Borovkov [10] iki bariyerli bir boyutlu rastgele yürüyüş süreçleri için ergodik teoremini ispatlamış ve ergodik dağılım fonksiyonu için bir formül ortaya koymuştur. Feller [22] bariyerlerinin her ikisi de yansıtan olan veya her ikisi de yutan olan bir boyutlu rastgele yürüyüş süreçlerini kurmuş ve bu süreçlerin bazı olasılık karekteristiklerini hesaplamıştır.

. Literatürde iki bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri hakkında da bazı ilmi çalışmalar mevcuttur. Ancak bu çalışmalarda bariyerlerin her ikisinin de tutan veya yutan olduğu durumlar ele alınmıştır. Khaniev [60,61] iki tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecini aşağıdaki gibi kurmuş ve incelemiştir.

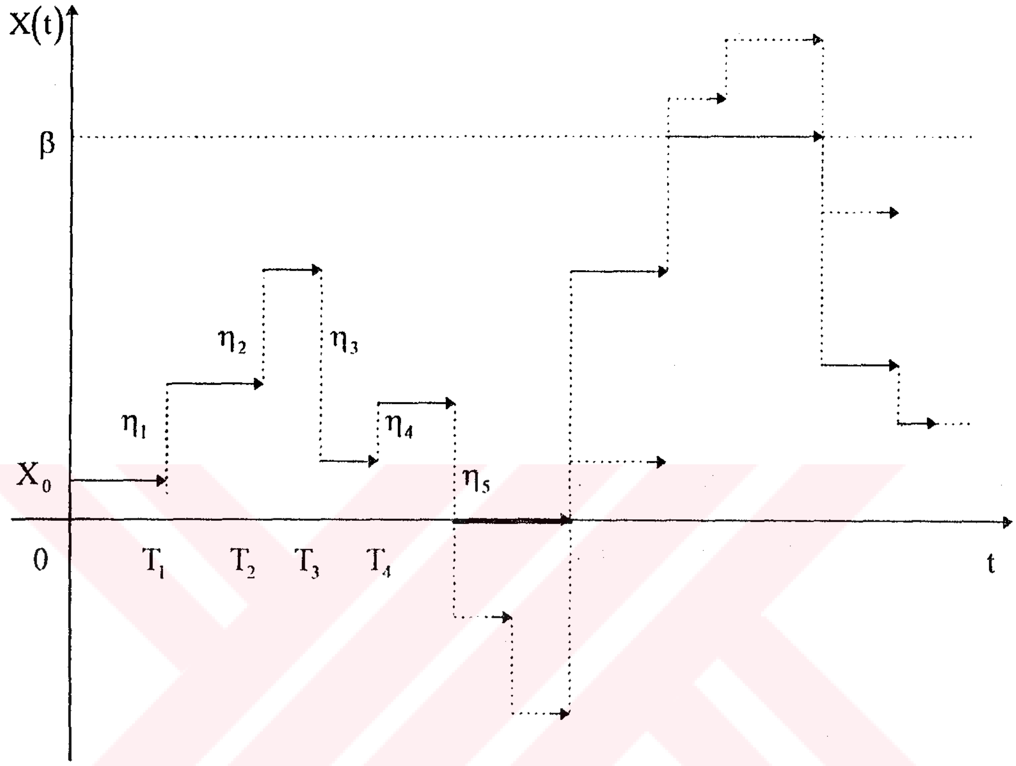
$\{(\xi_i,\eta_i) : i = 1,2,...\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler çiftleri dizisi olup ξ_i ler pozitif değerli, yani, $P\{\xi_i > 0\} = 1$, $i = 1,2,...$ olsun. Bu takdirde

$$X_n = \min\{\beta, \max\{0, X_{n-1} + \eta_n\}\}, \quad n \geq 1 \,;\; X_0 = z \in [0,\beta]$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n \,, \text{ eğer } T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = T_{n+1} \text{ ise,}$$

ile tanımlanan $X(t)$ stokastik süreci *sıfır ve* $\beta>0$ *seviyelerinde tutan bariyerli bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreç* oluşturacaktır. Bu sürecin görünüşlerinden biri Şekil 7 deki gibidir.



Şekil 7. Sıfır ve $\beta>0$ seviyelerinde tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Khaniev [60,61] bu süreç için, sürecin dağılımını, verilen bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımını ve sürecin beklenen değer ve varyans gibi bazı olasılık karekteristiklerini hesaplamış ve süreç için ergodik teoremini ifade ve ispat etmiştir. Ayrıca bu süreç için limit teoremlerini vermiş ve sürecin asimptotik durumunu incelemiştir.

Ayrıca Nasirova, Yapar ve Khaniev [62] sıfır seviyesinde yansıtan ve β, $\beta>0$, seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş sürecini şu şekilde kurmuş ve çalışmışlardır: $(\Omega,\Im,P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere $\left\{\left(\xi_i^+,\eta_i^+,\xi_i^-,\eta_i^-\right): i=1,2,\ldots\right\}$ bu uzay üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılmış rastgele değişkenler dörtlüleri dizisi verilmiş olsun. ξ_i^+,η_i^+ ve ξ_i^- rastgele değişkenlerinin pozitif değerli ve η_i^- rastgele değişkeninin ise negatif değerli olduğunu varsayalım.

$$T_k^+ = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^+ \quad \text{ve} \quad T_k^- = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^- \ , \quad k \geq 1 \ , \ T_0^+ = T_0^- = 0$$

olmak üzere T_k^+ ve T_k^- rastgele değişkenlerini artan sırada yeniden düzenleyelim ve bu düzenlemeyi T_k ile gösterelim.

$$\eta_k = \begin{cases} \eta_i^+ \ , & T_k = T_i^+ \\ \eta_j^- \ , & T_k = T_j^- \end{cases}$$

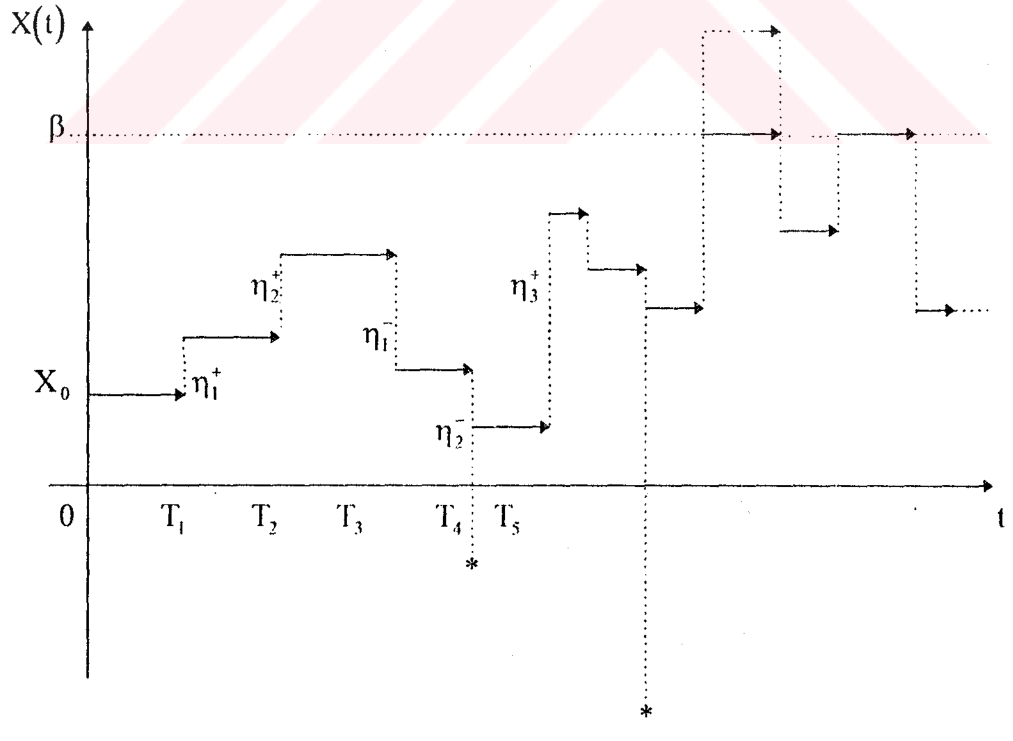
olarak tanımlayalım. Bu takdirde

$$X_k = \min\left\{\beta, \left|X_{k-1} + \eta_k\right|\right\} \quad k \geq 1 \ , \ X_0 = z > 0$$

olmak üzere

$$X(t) = X_k \ , \quad \text{eğer } T_k \leq t < T_{k+1} \ \text{ ise},$$

ile tanımlanan stokastik süreç *sıfır seviyesinde yansıtan ve β >0 seviyesine tutan bariyerli bir yarı-markov toplam rastgele yürüyüş süreci* oluşturur. Bu sürecin görünüşlerinden biri Şekil 8 de görüldüğü gibidir.



Şekil 8. Sıfır seviyesinde yansıtan ve β >0 seviyesine tutan bariyerli yarı-markov toplam rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Nasirova, Yapar ve Khaniev [62], bu sürecin dağılım fonksiyonunun Laplace dönüşümü ile sürecin ilk kez yansıma anının ve ilk kez tutulma anının dağılımlarını vermişlerdir. Ayrıca süreç için seriler şeklinde limit teoremlerinin ispatlamışlardır.

Bu çalışmada *ise, yansıtan ve tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci* olarak adlandırılan bir stokastik süreç incelenmiştir. Bununla ilgili olarak sıfır seviyesinde yansıtan ve $\beta\,(\beta > 0)$ seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci $X(t)$ ve bu sürecin önemli sınır fonksiyonalları sayılan, γ_1- sürecin ilk kez tutan bariyere düşmesi anı ve γ_2- sürecin ilk kez yansıtan bariyerden yansıması anı matematiksel olarak kurulmuş, γ_1 ve γ_2 nin dağılım fonksiyonları, moment çıkaran fonksiyonları, beklenen değer ve varyansları için açık formüller verilmiştir. $X(t)$ sürecinin bir boyutlu stasyoner olmayan dağılım fonksiyonları bir $\{T_n\}$ yenileme süreci ve bir $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade edilmiştir. Sürecin iki sıçrama anı arasındaki sürenin üstel, Erlang veya Ki-kare dağılımına sahip olması özel durumlarında γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları ve $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonları için formüller elde edilmiştir. Ayrıca, bazı varsayımlar altında $X(t)$ süreci için ergodik teorem ispatlanmış ve sürecin ergodik dağılım ifade edilmiştir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Fiziksel Model

Bariyerli ve bariyersiz rastgele yürüyüş süreçleri stokastik süreç teorisinin önemli bir kısmını oluşturur. Özellikle stok kontrol, kuyruk ve güvenilirlik teorilerinin birçok önemli problemi iki bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri yardımıyla ifade edilir öyle ki bu bariyerler muhtelif türden olabilir. Örneğin, bekleme zamanı ya da bulunma zamanı sonlu olan kuyruk sistemlerini veya sonlu hacimli depolardaki stokların rastgele seviyelerini, iki tutan bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri yardımıyla vermek mümkündür. Ayrıca yedek alete sahip stokastik sistemlerin çalışması da biri tutan diğeri ise herhangi bir özelliğe sahip iki bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri yardımıyla verilebilir. Ancak bu tezde stok kontrol ve güvenilirlik teorilerinde ortaya çıkan özel bir problem ele alınacak ve en genel şartlarda incelenecektir. Sözü edilen problemi kısaca aşağıdaki gibi izah edebiliriz.

Belirli bir depodaki stoğun miktarının rastgele zamanlarda rastgele kesikli miktarlarda arttığını veya azaldığını varsayalım. Bu durumda depodaki stoğun seviyesini yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci veya tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci olarak adlandırılan bir stokastik süreçle karekterize etmek mümkündür. Bu tipten süreçler literatürde oldukça geniş bir şekilde çalışılmıştır. Fakat stok kontrol teorisinde bazen öyle problemler ortaya çıkar ki bu tipten problemlere bir çözüm elde etmek için tutan bariyerli rastgele yürüyüş süreçlerinden daha karmaşık süreçleri gözönüne almak gerekebilir. Örneğin, bazen talep edilen miktar, o anda depoda bulunan stoğun toplam miktarından daha fazla olabilir. Bu durumda depodaki stoğun tamamı bu talebi karşılamak üzere verilir ve bu talep kapanmış olur. Ancak talepten borçlu kalınan kısmın derhal temin edilip stoğa eklenmesi gerekmektedir. Bu durumda depodaki stoğun seviyesini yansıtan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci olarak adlandırılan bir stokastik süreçle karekterize etmek mümkündür. Ancak reel durumlarda deponun hacmi sonlu olduğundan depo dolu olduğunda bir sonraki talep gerçekleşinceye kadar depoya yapılan girdi durdurulmalıdır. Bu iki şarta bağlı olarak depodaki stoğun seviyesini karekterize etmek için bariyerlerinden biri yansıtan diğeri ise tutan bariyer olmak üzere iki bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci olarak adlandırılan bir stokastik süreci kullanmak gerekmektedir. Bu tipten problemler, örneğin askeri stokların kontrolünda ortaya çıkabilir. Böyle bir süreç aşağıdaki fiziksel modeli ifade etmektedir.

Model. Farzedelim ki başlangıç anında $X_0 \in [0,\beta], \beta > 0,$ durumunda bulunan bir parçacığın sıfır seviyesinde yansıtan bariyer ve β $(\beta > 0)$ seviyesinde ise tutan bariyerle sınırlanan bir aralıktaki hareketini izlemeliyiz. Bu hareket aşağıdaki kurallara uygun olarak gerçekleşsin: Parçacık X_0 başlangıç durumunda rastgele bir ξ_1 süresince kaldıktan sonra η_1 kadarlık bir sıçrayışla $X_0 + \eta_1$ durumuna ulaşmaya çalışacaktır. Fakat β seviyesinde tutan bariyer bulunduğundan eğer $X_0 + \eta_1 > \beta$ ise bu takdirde parçacık $X_1 = \beta$ durumunda kalacaktır. Benzer şekilde sıfır seviyesinde yansıtan bariyer bulunduğundan eğer $X_0 + \eta_1 < 0$ ise bu takdirde parçacık $|X_0 + \eta_1|$ durumuna geri dönecektir. Bu durumda eğer $|X_0 + \eta_1| > \beta$ ise β seviyesinde tutan bariyer bulunduğundan parçacık yine $X_1 = \beta$ pozisyonunda bulunacaktır ve eğer $|X_0 + \eta_1| < \beta$ ise parçacık $X_1 = |X_0 + \eta_1|$ pozisyonunda olacaktır. Eğer $X_0 + \eta_1 \in [0,\beta]$ ise bu durumda parçacığın pozisyonu $X_1 = X_0 + \eta_1$ ile belirlenecektir. Bu durumları birlikte gözönüne alırsak parçacığın birinci sıçrayış sonundaki pozisyonu $X_1 = \min\{\beta ; |X_0 + \eta_1|\}$ ile belirlenecektir.

X_1 pozisyonunda rastgele bir ξ_2 süresince kaldıktan sonra parçacık η_2 kadarlık bir sıçrayışla $X_1 + \eta_2$ pozisyonuna ulaşmaya çalışacaktır. Bu durumda da yukarıdakine benzer düşünceyle eğer $X_1 + \eta_2 > \beta$ ise parçacık $X_2 = \beta$ pozisyonunda bulunacak, eğer $X_1 + \eta_2 \in [0,\beta]$ ise parçacık $X_2 = X_1 + \eta_2$ pozisyonunda kalacak ve eğer $X_1 + \eta_2 < 0$ ise sıfır seviyesinde yansıtan bariyer bulunduğundan parçacık bu bariyerden $|X_1 + \eta_2|$ kadar yansıyacaktır. Bu durumda eğer $|X_1 + \eta_2| > \beta$ ise β seviyesinde tutan bariyer bulunduğundan parçacık $X_2 = \beta$ pozisyonunda bulunacak, eğer $|X_1 + \eta_2| < \beta$ ise parçacık $X_2 = |X_1 + \eta_2|$ durumunda olacaktır. Böylece ikinci sıçrayış sonunda parçacığın pozisyonu $X_2 = \min\{\beta ; |X_1 + \eta_2|\}$ ile belirlenecektir.

Bu kurallara uygun olarak hareket eden parçacığın n-yinci sıçrayış sonundaki pozisyonu ise $X_n = \min\{\beta ; |X_{n-1} + \eta_n|\}$, $n \geq 1$, formulüyle belirlenecektir. Bu türlü bir fiziksel modeli 0 (sıfır)- seviyesinde yansıtan ve β ($\beta > 0$)- seviyesinde ise tutan bariyerli bir rastgele yürüyüş süreci ile ifade etmek mümkündür.

2.2. Sürecin Matematiksel Kuruluşu

Bu kısımda sıfır seviyesinde yansıtan ve β ($\beta > 0$) seviyesinde ise tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci matematiksel olarak kurulacak ve bu sürecin bazı önemli sınır fonksiyonalleri verilecektir.

$(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere $\{(\xi_i, \eta_i) : i = 1,2,\ldots\}$ bu uzay üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rastgele değişken ikilileri dizisi olsun. Ayrıca ξ_i ler pozitif değerli, yani, $P\{\xi_i > 0\} = 1$ olsun ve ξ_1 ve η_1 in dağılım fonksiyonlarının da bilindiğini varsayalım, yani,

$$\Phi(t) = P\{\xi_1 \leq t\}, \; F(x) = P\{\eta_1 \leq x\}, \quad t \in R^+, \; x \in R \tag{1}$$

olsun. Bu rastgele değişkenler ikilileri yardımıyla aşağıdaki stokastik süreçleri inşa edelim:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad Y_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i, \; n \geq 1 \; ; \; Y_0 = T_0 = 0. \tag{2}$$

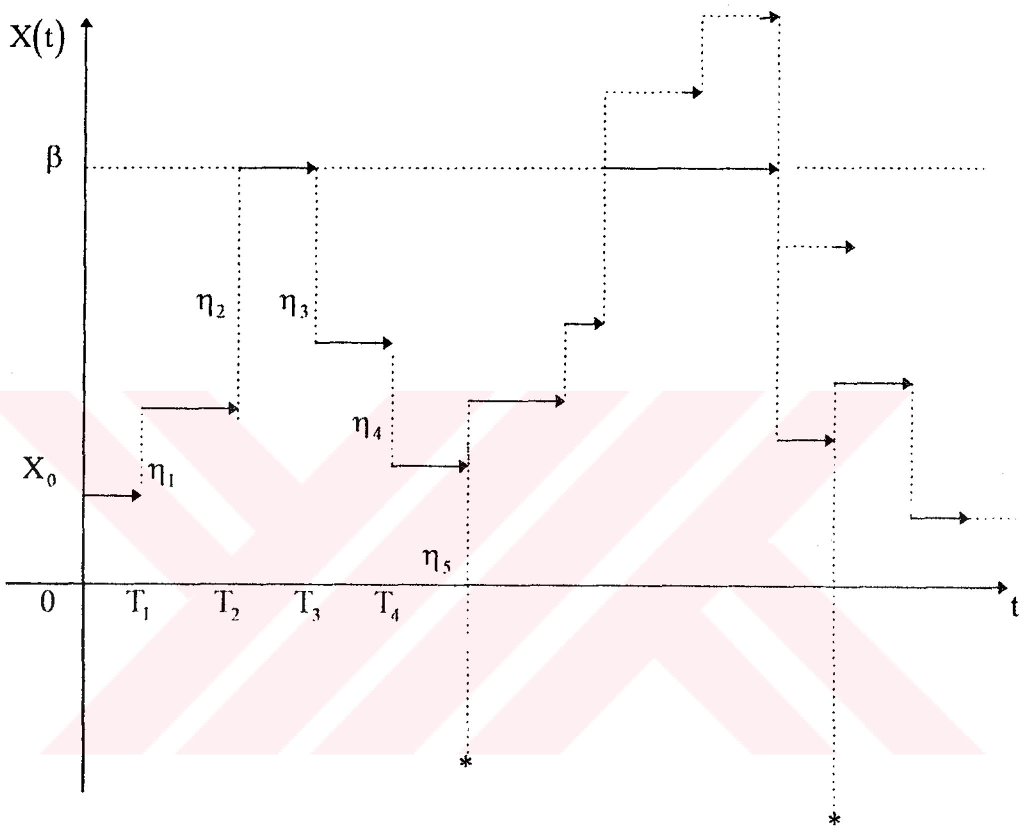
Belirtelim ki bu şekilde inşa edilen $\{T_n : n \geq 0\}$ ailesi bir yenileme süreci ve $\{Y_n : n \geq 0\}$ ailesi ise bir rastgele yürüyüş süreci oluşturur. Yenileme süreci ve rastgele yürüyüş sürecinin esas olasılık karekteristiklerinin yeteri kadar iyi bilindiğini varsayalım (bkz. Feller [22], Smith [18], Spitzer [20], v.s.). Şimdi de aşağıdaki Markov zincirini inşa edelim:

$$X_n = \min\{\beta ; |X_{n-1} + \eta_n|\}, n \geq 1; X_0 \in [0,\beta], \beta > 0. \tag{3}$$

Bu şekilde inşa edilen $\{X_n : n \geq 0\}$ Markov zinciri sıfır seviyesinde yansıtan ve $\beta > 0$ seviyesinde tutan bariyerli bir rastgele yürüyüş süreci oluşturur. Burada $X_0 \in [0,\beta]$ sürecin başlangıç seviyesini göstermektedir. Artık amacımız olan $X(t)$ sürecini matematiksel olarak kurabiliriz:

$$X(t) = X_n \text{ ; eğer } \ t \in [T_n, T_{n+1}),\ n \geq 0 \ \text{ ise.} \tag{4}$$

Bu şekilde inşa edilen $X(t)$ süreci *sıfır seviyesinde yansıtan ve* $\beta > 0$ *seviyesinde tutan bariyerli bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreç* oluşturur. $X(t)$ süreci, stoğun t anındaki seviyesini göstermektedir. Bu sürecin görünüşlerinden biri Şekil 9 daki gibidir.



Şekil 9. Sıfır seviyesinde yansıtan ve $\beta > 0$ seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

$X(t)$ sürecinin önemli ihtimal karekteristiklerinden olan sonlu boyutlu dağılım fonksiyonlarını incelemek için bu sürecin önemli sınır fonksiyonalleri sayılan bazı özel rastgele değişkenlerden yaralanacağız. γ_1 ve γ_2 ile sırasıyla $X(t)$ sürecinin ilk kez yukarıdaki bariyere düşmesi ve ilk kez aşağıdaki bariyerden yansıması anlarını gösterelim ve bu rastgele değişkenleri matematiksel olarak inşa edelim. Bununla ilgili olarak önce ν_1 ve ν_2 tam değerli rastgele değişkenlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\nu_1 = \min\left\{n \geq 1 : \left|X_{n-1} + \eta_n\right| > \beta\right\}$$

ve

$$\nu_2 = \min\left\{n \geq 1 : X_{n-1} + \eta_n < 0\right\}, \tag{5}$$

olsun, burada $X_0 \in [0, \beta]$ dır. Şimdi de ν_1 ve ν_2 rastgele değişkenlerini kullanarak γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerini aşağıdaki gibi inşa edelim:

$$\gamma_1 = \sum_{i=1}^{\nu_1} \xi_i \tag{6}$$

ve

$$\gamma_2 = \sum_{i=1}^{\nu_2} \xi_i \tag{7}$$

dır. Böylece $X(t)$ sürecinin yansıtan bariyerden ilk kez yansıma anını ve tutan bariyere ilk kez düşme anını matematiksel olarak kurmuş olduk. Belirtelim ki γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenleri, $X(t)$ sürecinin önemli sınır fonksiyonalleri olup hem teorik hem de pratik bakımdan oldukça önemlidirler. Örneğin, stok kontrol teorisinde γ_1 rastgele değişkeni, sonlu hacime sahip bir deponun ilk kez tamamen dolması anı ve γ_2 rastgele değişkeni ise böyle bir depoya ilk kez ani olarak stok eklenmesi anı olarak yorumlanabilir. Bu rastgele değişkenler $X(t)$ stokastik sürecine uygun olarak faaliyet gösteren depodaki stokların rastgele seviyelerinin idare olunmasında ortaya çıkan birçok olasılık probleminin çözümlenmesinde önemli rol oynamaktadırlar. Bu nedenle γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin her yönüyle ele alınıp incelenmesi hem ilmi hem de pratik bakımdan ilginç görülmektedir.

2.3. γ_1 ve γ_2 Sınır Fonksiyonallarının Dağılımları

Dağılım fonksiyonları, rastgele değişkenlerin en önemli olasılık karekteristiklerinden olduğundan her şeyden önce γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonlarının hesaplanması oldukça önemlidir. Bu kısımda amacımız γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonlarını $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade etmektir. Bununla ilgili olarak önce $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin aşağıdaki olasılık karekteristiklerinin bilindiğini varsayacağız.

$$a_n(z) = P\{z + Y_i \in [0,\beta]\ ; 1 \le i \le n\},$$

$$b_n(z) = P\{z + Y_i \in [0,\beta]\ ; 1 \le i \le n-1\,; z + Y_n > \beta\},$$

$$c_n(z;v) = P\{z + Y_i \in [0,\beta]\ ; 1 \le i \le n-1\,; z + Y_n < v\},$$

$$c_n(z;dv) = d_v(c_n(z;v)),$$

$$\Phi_n(t) = P\{T_n \le t\},$$

$$\Delta\Phi_n(t) = \Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t),$$

olsun, burada $z \in [0,\beta]$, $v < 0$, $n \ge 1$ dır ve

$$a_0(z) = 1;\ b_0(z) = c_0(z;v) = 0,$$

$$\Phi_0(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \le 0 \end{cases}$$

olduğunu belirtelim. Ayrıca (α_n) ve (β_n), $n \ge 0$, gibi herhangi iki dizinin konvolüsyon çarpımını aşağıdaki gibi verelim:

$$\alpha_n * \beta_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}\ , n \ge 0.$$

Benzer şekilde $\{\alpha_n^{(k)}\}$ $k = 1,2,\ldots,m$, $m \ge 2$, dizilerinin m-katlı konvolüsyon çarpımını da aşağıdaki tekrarlama bağıntısı ile verelim:

$$\prod_{k=1}^{m}{}_{*}\left(\alpha_n^{(k)}\right) = \left[\prod_{k=1}^{m-1}{}_{*}\left(\alpha_n^{(k)}\right)\right] * \alpha_n^{(m)} \quad , \ m \ge 2.$$

Ayrıca $P_z(A)$, ile A olayının aşağıdaki şartlı olasılığını gösterelim:

$$P_z(A) = P\{A | X(0) = z\},\ z \in [0,\beta],\ A \in \Im.$$

Şimdi aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edebiliriz:

Teorem 1. $\{(\xi_i, \eta_i) : i = 1,2,\ldots\}$ başlangıç rastgele değişkenler ikilileri dizisinde eğer ξ_1 ve η_1 bağımsız rastgele değişkenler ise bu takdirde $X(t)$ sürecinin tutan bariyere ilk kez düşmesi anı γ_1 in dağılım fonksiyonunu $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür:

$$P_z\{\gamma_1 \le t\} = \Phi(t) - \sum_{n=1}^{\infty} g_1(n;z)\,\Delta\Phi_n(t), \tag{8}$$

dir, burada

$$g_1(n;z) = a_n(z) + \sum_{m=1}^{n} \int_{-\beta}^{0} \ldots (m) \ldots \int_{-\beta}^{0} \prod_{k=1}^{m} * \left(c_n(|v_{k-1}|; dv_k)\right) * a_n(|v_m|),\ n \ge 1, \tag{9}$$

olup $|v_0| = z$ dır.

İspat: $G_1(t;z)$ ile aşağıdaki şartlı olasılığı gösterelim:

$$G_1(t;z) = P_z\{\gamma_1 > t\} = P\{\gamma_1 > t \,|\, X(0) = z\},\ z \in [0,\beta],\quad t \in R^+.$$

olsun. Bu takdirde toplam olasılık formulüne göre $G_1(t;z)$ yi aşağıdaki formda yazabiliriz.

$$G_1(t;z) = P_z\{\gamma_1 > t\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{T_n \le t < T_{n+1};\gamma_1 > t\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\left\{T_n \le t < T_{n+1};\ \sum_{i=1}^{\nu_1} \xi_i > t\right\}. \tag{10}$$

ν_1 rastgele değişkeninin tanımı gözönüne alınırsa (10) bağıntısı

$$G_1(t;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} P_z\left\{\nu_1 = k; T_n \le t < T_{n+1};\ \sum_{i=1}^{k} \xi_i > t\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} P_z\{\nu_1 = k; T_n \le t < T_{n+1}; T_k > t\}. \tag{11}$$

formunu alır. T_k, $k \ge 1$, rastgele değişkenleri 1 olasılıkla monoton artan bir dizi oluşturduğundan, $\{w : T_{n+1} > t\}$ olayı $\{w : T_k > t\}$, $k \ge n+1$, olaylarını sağlar, yani her $k \ge n+1$ ve $n \ge 0$ için

$$\{w : T_{n+1} > t\} \subseteq \{w : T_k > t\}$$

dir. Dolayısıyla (11) bağıntısını

$$G_1(t;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} P_z\{\nu_1 = k; T_n \le t < T_{n+1}\} \tag{12}$$

olarak yazmak mümkündür. $\{\xi_i\}$ ve $\{\eta_i\}$, $i=1,2,\ldots,$ dizilerinin bağımsız olduğu gözönüne alınırsa (12) ifadesinden

$$G_1(t;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}P_z\{\nu_1=k\,;T_n\leq t<T_{n+1}\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_z\{\nu_1>n\}P\{T_n\leq t<T_{n+1}\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_z\{\nu_1>n\}\left[P\{T_n\leq t\}-P\{T_{n+1}\leq t\}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_z\{\nu_1>n\}\left[\Phi_n(t)-\Phi_{n+1}(t)\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_z\{\nu_1>n\}\left[\Delta\Phi_n(t)\right]$$

elde edilir. $g_1(n;z)$ ile $P_z\{\nu_1>n\}$, $n\geq 0$, olasılığını gösterelim, yani,

$$g_1(n;z)=P_z\{\nu_1>n\}\,,\ n\geq 0 \tag{13}$$

olsun. Bu takdirde

$$G_1(t;z)=\sum_{n=0}^{\infty}g_1(n;z)\left[\Delta\Phi_n(t)\right]$$

olduğu görülür. Şimdi $g_1(n;z)$ yi $\{Y_n:n\geq 0\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade edelim. Bunun için yeni bir $\nu_0(n)$ tam değerli rastgele değişkeni tanımlayalım. $\nu_0(n)$ rastgele değişkeni $\{X_n:n\geq 1\}$ Markov zincirinin ilk n adım boyunca yansıtan bariyerden yansımalarının sayısını göstersin. Bu takdirde $\nu_0(n)$ yi aşağıdaki gibi kurabiliriz: $k\geq 1$ olmak üzere

$$\chi_k=\begin{cases}1 & ,\ X_{k-1}+\eta_k<0\\ 0 & ,\ X_{k-1}+\eta_k\geq 0\end{cases}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda $\nu_0(n)$ yi

$$\nu_0(n)=\sum_{k=1}^{n}\chi_k\,,\ n\geq 1 \tag{14}$$

olarak yazabiliriz. Eğer $\nu_0(n)$ rastgele değişkeninin tanımını gözönüne alırsak bu takdirde toplam olasılık formulüne göre $g_1(n;z)$ yi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$g_1(n;z)=P_z\{\nu_1>n\}=\sum_{m=0}^{n}P\{\nu_0(n)=m;\nu_1>n\} \tag{15}$$

O halde (15) toplamındaki herbir terimi ayrı ayrı hesaplayalım. $m=0$ özel durumunda

$$\begin{aligned}P\{\nu_0(n)=0\,;\nu_1>n\}&=P\{z+Y_1\in[0,\beta],\ldots,z+Y_n\in[0,\beta]\}\\&=P\{z+Y_i\in[0,\beta]\,;1\le i\le n\}\\&=a_n(z)\end{aligned} \tag{16}$$

elde edilir. Şimdi de $m=1$ olması durumunu gözönüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}P\{\nu_0(n)=1\,;\nu_1>n\}&=\int_{-\beta}^{0}\sum_{k=1}^{n}P\{z+Y_i\in[0,\beta]\,;1\le i\le k-1\,;z+Y_k\in dv\}\\&\quad\cdot P\{|v|+Y_i\in[0,\beta]\,;1\le i\le n-k\}\\&=\int_{-\beta}^{0}\sum_{k=1}^{n}c_k(z;dv)\,a_{n-k}(|v|)\\&=\int_{-\beta}^{0}\sum_{k=0}^{n}c_k(z;dv)\,a_{n-k}(|v|)\end{aligned}$$

dir, çünkü her $v<0$ ve $z\in[0,\beta]$ için $c_0(z;v)=0$ dır. İki dizinin konvolüsyon çarpımı gözönüne alınırsa son eşitlikten

$$P\{\nu_0(n)=1\,;\nu_1>n\}=\int_{-\beta}^{0}c_n(z;dv)*a_n(|v|) \tag{17}$$

olduğu görülür. $P\{\nu_0(n)=m;\nu_1>n\}$ olasılığı için genel bir formül elde etmek amacıyla $P\{\nu_0(n)=2;\nu_1>n\}$ olasılığını da hesaplayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}P\{\nu_0(n)=2;\nu_1>n\}&=\int_{-\beta}^{0}\int_{-\beta}^{0}\sum_{2\le k_1+k_2\le n}P\{z+Y_i\in[0,\beta];1\le i\le k_1-1;z+Y_{k_1}\in dv_1\}\\&\quad\cdot P\{|v_1|+Y_i\in[0,\beta];1\le i\le k_2-1;|v_1|+Y_{k_2}\in dv_2\}\\&\quad\cdot P\{|v_2|+Y_i\in[0,\beta];1\le i\le n-k_1-k_2\}\\&=\int_{-\beta}^{0}\int_{-\beta}^{0}\sum_{2\le k_1+k_2\le n}c_{k_1}(z;dv_1)c_{k_2}(|v_1|;dv_2)a_{n-k_1-k_2}(|v_2|)\end{aligned} \tag{18}$$

olduğu görülür. Eğer her $v<0$ ve $z\in[0,\beta]$ için $c_0(z;v)=0$ olduğu gözönüne alınırsa (18) bağıntısından

$$P\left\{v_0(n)=2;v_1>n\right\}=\int_{-\beta}^{0}\int_{-\beta}^{0} c_n(z;dv_1)*c_n(|v_1|;dv_2)*a_n(|v_2|) \tag{19}$$

elde edilir. Benzer muhakemeyle, matematiksel tümevarım metodunu kullanarak her $m=1,2,\ldots,n$ için, $|v_0|=z\in[0,\beta]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} P\left\{v_0(n)=m;v_1>n\right\} &= \int_{-\beta}^{0}\ldots(m)\ldots\int_{-\beta}^{0} c_n(z;dv_1)*c_n(|v_1|;dv_2)*\ldots*c_n(|v_{m-1}|;dv_m)*a_n(|v_2|) \\ &= \int_{-\beta}^{0}\ldots(m)\ldots\int_{-\beta}^{0} \prod_{k=1}^{n}\cdot\left(c_n(|v_{k-1}|;dv_k)\right)*a_n(|v_m|) \end{aligned} \tag{20}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. (16), (17), (19) ve (20) de elde edilen ifadeleri (15) bağıntısında yerine yazarak, her $n\geq 1$ için

$$g_1(n;z)=a_n(z)+\sum_{m=1}^{n}\int_{-\beta}^{0}\ldots(m)\ldots\int_{-\beta}^{0}\prod_{k=1}^{n}\cdot\left(c_n(|v_{k-1}|;dv_k)\right)*a_n(|v_m|) \tag{21}$$

elde edilir. Öte yandan

$$g_1(0;z)=P_z\{v_1>0\}=1=a_0(z) \tag{22}$$

olduğu aşikardır. (21) ve (22) ifadelerini birlikte gözönüne alarak $G_1(t;z)$ için aşağıdaki formül elde edilir:

$$\begin{aligned} G_1(t;z) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_1(n;z)\Delta\Phi_n(t) \\ &= g_1(0;z)\Delta\Phi_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty} g_1(n;z)\Delta\Phi_n(t) \\ &= 1-\Phi(t)+\sum_{n=1}^{\infty} g_1(n;z)\Delta\Phi_n(t). \end{aligned} \tag{23}$$

Dolayısıyla γ_1 rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun

$$\begin{aligned} P_z\left\{\gamma_1\leq t\right\} &= 1-G_1(t;z) \\ &= \Phi(t)-\sum_{n=1}^{\infty} g_1(n;z)\Delta\Phi_n(t) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Böylece Teorem 1 in ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi de γ_2 rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu hesaplayalım. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2. $\{(\xi_i, \eta_i) : i = 1,2,...\}$ başlangıçta verilen rastgele değişkenler dizisinde eğer ξ_1 ve η_1 rastgele değişkenleri bağımsız ise bu takdirde $X(t)$ sürecinin yansıtan bariyerden ilk kez yansıma anı γ_2 nin dağılım fonksiyonunu $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla aşağıdaki gibi vermek mümkündür:

$$P_z\{\gamma_2 \le t\} = \Phi(t) - \sum_{n=1}^{\infty} g_2(n;z)\Delta\Phi_n(t), \tag{24}$$

dir, burada

$$g_2(n;z) = a_n(z) + b_n(z) * a_n(\beta) + b_n(z) * U_n(\beta) * a_n(\beta),\ n \ge 2, \tag{25}$$

ve

$$g_2(1;z) = a_1(z) + b_1(z) * a_1(\beta) = 1 - F(-z)$$

olup burada

$$U_n(\beta) = \sum_{m=1}^{\infty} (b_n(\beta))_*^m$$

dir.

İspat: $G_2(t;z)$ ile aşağıdaki şartlı olasılığı gösterelim:

$$G_2(t;z) = P_z\{\gamma_2 > t\} = P\{\gamma_2 > t |\ X(0) = z\},\ t \in R^+,\ z \in [0,\beta].$$

Bu takdirde γ_2 nin tanımını ve toplam olasılık formulünü kullanarak $G_2(t;z)$ yi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
G_2(t;z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{T_n \le t < T_{n+1}; \gamma_2 > t\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\left\{T_n \le t < T_{n+1}; \sum_{i=1}^{\nu_2} \xi_i > t\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} P_z\left\{\nu_2 = k; T_n \le t < T_{n+1}; \sum_{i=1}^{k} \xi_i > t\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} P_z\{\nu_2 = k; T_n \le t < T_{n+1}; T_k > t\}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Her $k \ge n+1$ ve $n \ge 0$ için $\{w: T_{n+1} > t\} \subseteq \{w: T_k > t\}$ olduğundan (26) bağıntısını

$$G_2(t;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{k=n+1}^{\infty}P_z\{\nu_2=k;T_n\le t<T_{n+1}\}\tag{27}$$

olarak yeniden yazabiliriz. Öte taraftan $\{\xi_i\}$ ve $\{\eta_i\}$, $i=1,2,\ldots,$ dizilerinin bağımsız olduğu gözönüne alınırsa (27) ifadesinden

$$G_2(t;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{k=n+1}^{\infty}P_z\{\nu_2=k\}\,P\{T_n\le t<T_{n+1}\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_z\{\nu_2>n\}\,P\{T_n\le t<T_{n+1}\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_z\{\nu_2>n\}\,\Delta\Phi_n(t)\tag{28}$$

elde edilir. Bu toplamdaki $P_z\{\nu_2>n\}$ olasılığını $g_2(n;z)$ ile gösterelim, yani,

$$g_2(n;z)=P_z\{\nu_2>n\},\ n\ge 0$$

olsun. Bu takdirde $G_2(t;z)$ için

$$G_2(t;z)=\sum_{n=0}^{\infty}g_2(n;z)\,\Delta\Phi_n(t)\tag{29}$$

yazılabilir. ν_2 rastgele değişkeninin tanımı gözönüne alınırsa her $z\in[0,\beta]$ için $g_2(0;z)=1$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu gerçeği gözönüne alarak $G_2(t;z)$ için aşağıdaki formül yazılabilir:

$$G_2(t;z)=g_2(0;z)\,\Delta\Phi_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}P_z\{\nu_2>n\}\,\Delta\Phi_n(t)$$

$$=\Delta\Phi_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}P_z\{\nu_2>n\}\,\Delta\Phi_n(t)$$

$$=1-\Phi(t)+\sum_{n=1}^{\infty}g_2(n;z)\Delta\Phi_n(t).\tag{30}$$

Şimdi de $g_2(n;z), n\ge 1$, olasılığını $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade edelim. Bu amaçla bir $\nu_\beta(n)$ tam değerli rastgele değişkeni tanımlayalım. $\nu_\beta(n)$ rastgele değişkeni $\{X_n:n\ge 1\}$ Markov zincirinin ilk n adım boyunca tutan bariyere düşmelerinin sayısını göstersin. Bu durumda $\nu_\beta(n)$ rastgele değişkenini matematiksel olarak kuralım. Bunun için $k\ge 1$ olmak üzere

$$\tilde{\chi}_k = \begin{cases} 1 \ , & |X_{k-1} + \eta_k| > \beta \\ 0 \ , & |X_{k-1} + \eta_k| \le \beta \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde

$$\nu_\beta(n) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\chi}_k, \ k \ge 1 \tag{31}$$

elde edilir. $\nu_\beta(n)$ nin tanımını kullanarak toplam olasılık formulüne göre $g_2(n;z)$ yi

$$g_2(n;z) = P_z\{\nu_2 > n\} = \sum_{m=0}^{n} P_z\{\nu_\beta(n) = m \,;\, \nu_2 > n\} \tag{32}$$

olarak yazabiliriz. Şimdi (32) ifadesindeki herbir terimi ayrı ayrı hesaplayalım. $m = 0$ olması özel durumunda

$$\begin{aligned} P_z\{\nu_\beta(n) = 0 \,;\, \nu_2 > n\} &= P\{z + Y_i \in [0,\beta] \ ; 1 \le i \le n\} \\ &= a_n(z) \end{aligned} \tag{33}$$

elde edilir. $m = 1$ olması durumunda ise

$$\begin{aligned} P_z\{\nu_\beta(n) = 1 \,;\, \nu_2 > n\} &= \sum_{k=1}^{n} P\{z + Y_i \in [0,\beta] \ ; 1 \le i \le k-1 \,;\, z + Y_k > \beta\} \\ &\quad \cdot P\{\beta + Y_i \in [0,\beta] \ ; 1 \le i \le n-k\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_k(z)\, a_{n-k}(\beta) \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k(z)\, a_{n-k}(\beta) \\ &= b_n(z) * a_n(\beta) \end{aligned} \tag{34}$$

elde edilir, burada her $z \in [0,\beta]$ için $b_0(z) = 0$ ve $a_0(z) = 1$ olduğu dikkate alınmıştır.

Şimdi $P_z\{\nu_\beta(n) = m; \nu_2 > n\}$ olasılığı için bir genel formül vermek amacıyla $P_z\{\nu_\beta(n) = 2; \nu_2 > n\}$ olasılığını da hesaplayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} P_z\{\nu_\beta(n) = 2 \,;\, \nu_2 > n\} &= \sum_{\substack{2 \le k+r \le n \\ k,r \ge 1}} P\{z + Y_i \in [0,\beta]; 1 \le i \le k-1 \,;\, z + Y_k > \beta\} \\ &\quad . P\{\beta + Y_i \in [0,\beta]; 1 \le i \le r-1 \,;\, \beta + Y_r > \beta\} \end{aligned}$$

$$P\{\beta + Y_i \in [0,\beta]; 1 \le i \le n-k-r\}$$

$$= \sum_{\substack{2 \le k+r \le n \\ k,r \ge 1}} b_k(z)\, b_r(\beta)\, a_{n-k-r}(\beta)$$

$$= \sum_{\substack{0 \le k+r \le n \\ k,r \ge 0}} b_k(z)\, b_r(\beta)\, a_{n-k-r}(\beta)$$

$$= b_n(z) * b_n(\beta) * a_n(\beta) \tag{35}$$

elde edilir. Benzer muhakemeyle, matematiksel tümevarım metodunu kullanarak her $m = 1,2,\ldots,n$ için

$$P_z\{\nu_\beta(n) = m \;; \nu_2 > n\} = b_n(z) * (b_n(\beta))_*^{m-1} * a_n(\beta) \tag{36}$$

olduğu gösterilebilir. (33), (34) ve (36) da elde edilen ifadeleri (32) bağıntısında yerlerine yazmak suretiyle her $n \ge 2$ için

$$g_2(n;z) = \sum_{m=0}^{n} P_z\{\nu_\beta(n) = m; \nu_2 > n\}$$

$$= a_n(z) + b_n(z) * a_n(\beta) + \sum_{m=2}^{\infty} b_n(z) * (b_n(\beta))_*^{m-1} * a_n(\beta) \tag{37}$$

elde edilir. Diziler için m-katlı konvolüsyon çarpımı tanımı ve her $z \in [0,\beta]$ için $b_0(z) = 0$ olduğu gerçeği gözönünde tutulursa, bu takdirde $m \ge n+1$ olduğunda

$$b_n(z) * (b_n(\beta))_*^{m-1} * a_n(\beta) = 0$$

olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz. Böylece (37) ifadesi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$g_2(n;z) = a_n(z) + b_n(z) * a_n(\beta) + b_n(z) * U_n(\beta) * a_n(\beta) \tag{38}$$

dir, burada

$$U_n(\beta) = \sum_{m=1}^{\infty} (b_n(\beta))_*^{m}$$

dır. Ayrıca $n = 1$ olduğunda

$$g_2(1;z) = a_1(z) + b_1(z) * a_1(\beta)$$

$$= a_1(z) + b_1(z) a_0(\beta) + b_0(z) a_1(\beta)$$

$$= P\{z + \eta_1 \in [0,\beta]\} + P\{z + \eta_1 > \beta\}$$

$$= P\{z + \eta_1 \ge 0\}$$

$$= 1 - P\{z + \eta_1 < 0\}$$
$$= 1 - P\{\eta_1 < -z\}$$
$$= 1 - F(-z) \tag{39}$$

olduğu açıktır. Böylece her $n \geq 1$ için $g_2(n;z)$ olasılığını $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade etmiş olduk. Öte yandan , eğer

$$P_z\{\gamma_2 \leq t\} = 1 - G_2(t;z)$$

olduğu dikkate alınırsa

$$P_z\{\gamma_2 \leq t\} = \Phi(t) - \sum_{n=1}^{\infty} g_2(n;z)\Delta\Phi_n(t)$$

elde edilir, burada $g_2(n;z)$, $n \geq 1$, (38) ve (39) da verildiği gibidir. Böylece Teorem 2 nin ispatı tamamlanmış olur.

$\Delta\Phi_n(t)$ nin $X(t)$ sürecinin $[0,t]$ zaman aralığında tam olarak n kez sıçraması olasılığı olarak yorumlanabileceğine dikkat edelim. Ayrıca $\Delta\Phi_n(t)$ olasılığı ξ_1 rastgele değişkeninin dağılm fonksiyonuyla tam olarak ifade edilebilir. Bu nedenle ξ_1 rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu biliniyorsa $\Delta\Phi_n(t)$ olasılığı prensip olarak hesaplanabilir. Fakat ξ_1 rastgele değişkeninin $\Phi(t)$ dağılımının n-katlı konvolüsyon çarpımının genel durumunda hesaplanması oldukça zordur. Bu nedenle $\Delta\Phi_n(t)$ olasılığını bazı özel durumlar için hesaplayacağız. Bunu yaparken ξ_1 rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu, uygulamanın çeşitli problemlerinde sıksık karşımıza çıkan üstel dağılım, Erlang dağılımı ve Ki-kare dağılımı olarak alıp bazı sonuçlar elde edeceğiz.

Sonuç 1. Teorem 1 in koşulları sağlanmak üzere, eğer ξ_1 rastgele değişkeni $\theta > 0$ parametreli üstel dağılıma sahipse, bu takdirde γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları aşağıdaki aşikar formda verilebilir:

$$P_z\{\gamma_i \leq t\} = 1 - e^{-\theta t} - \sum_{n=1}^{\infty} g_i(n;z)\frac{(\theta t)^n}{n!}e^{-\theta t}, \quad i = 1,2, \tag{40}$$

dir, burada $g_1(n;z)$ ve $g_2(n;z)$ sırasıyla Teorem 1 ve Teorem 2 de verildikleri gibidir.

İspat: ξ_1 rastgele değişkeni $\theta > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olduğunda, n tane üstel dağılıma sahip rastgele değişkenin toplamı olarak

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \;, n \geq 1,$$

rastgele değişkeni (n, θ) parametreli Erlang dağılımına sahip olacaktır. Böylece, T_n rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{T_n}(t) = \frac{\theta^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\theta t}, \quad n \geq 1$$

dır. Dolayısıyla $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi_n(t) &= \Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t) \\
&= P\{T_n \leq t < T_{n+1}\} \\
&= \int_0^t P\{T_n \in du \,;\, t - u < \xi_{n+1}\} \\
&= \int_0^t P\{T_n \in du \,;\, t - u < \xi_1\} \\
&= \int_0^t P\{\xi_1 > t - u\}\, P\{T_n \in du\} \\
&= \int_0^t P\{\xi_1 > t - u\}\, \Phi_n(u) du \\
&= \int_0^t e^{-\theta(t-u)}\, \theta \,\frac{(\theta u)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\theta u} du \\
&= e^{-\theta t} \int_0^{\theta t} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} dx \\
&= \frac{(\theta\, t)^n}{n!} e^{-\theta t} \qquad (41)
\end{aligned}$$

dir. Öte taraftan $n = 0$ olması durumunda

$$\Delta\Phi_0(t) = \Phi_0(t) - \Phi_1(t) = 1 - P\{T_1 < t\} = 1 - \Phi(t) = e^{-\theta t}$$

dir. Böylece Teorem 1 ve Teorem 2 den

$$P_z\{\gamma_i \le t\} = 1 - e^{-\theta t} - \sum_{n=1}^{\infty} g_i(n;z)\frac{(\theta t)^n}{n!}e^{-\theta t}, \quad i = 1,2$$

elde edilir. Bu ise Sonuç 1 in ispatını tamamlar.

Sonuç 2. Teorem 1 in koşulları sağlanmak üzere, eğer ξ_1 rastgele değişkeni $k(k \ge 1)$-yıncı mertebeden ve $\theta > 0$ parametreli Erlang dağılımına sahip ise, bu takdirde γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları aşağıdaki aşikar formda verilebilir:

$$P_z\{\gamma_i \le t\} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} g_i(n;z) \sum_{m=kn}^{kn+k-1} \frac{(\theta t)^m}{m!}e^{-\theta t}, \quad i = 1,2 \tag{42}$$

dır, burada $g_1(n;z)$ ve $g_2(n;z)$ sırasıyla Teorem 1 ve Teorem 2 de verildiği gibidir.

İspat: ξ_1 rastgele değişkeni $k(k \ge 1)$-yıncı mertebeden ve $\theta > 0$ parametreli Erlang dağılımına sahip olduğundan ξ_1 in yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu, sırasıyla

$$f(t) = \theta\frac{(\theta t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\theta t}, k \ge 1, t > 0$$

ve

$$\Phi(t) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\theta t)^m}{m!}e^{-\theta t}, \quad t > 0$$

formunda olacaktır. $\Delta\Phi_n(t)$ olasılığını hesaplamak için önce n - parametresine bağlı $I_n(t)$ integralini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$I_n(t) = \int_0^t \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}e^{-u}\,du, \quad n \ge 1. \tag{43}$$

Eğer $n \ge 2$ için bu integrali kısmi integrasyonla çözersek aşağıdaki tekrarlama formulünü elde ederiz.

$$I_n(t) = I_{n-1}(t) - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}$$

dir. Buradan da kolaylıkla görülebilir ki her $j \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ için

$$I_n(t)=I_{n-j}(t)-\sum_{m=n-j}^{n-1}\frac{t^m}{m!}e^{-t} \tag{44}$$

dir. Şimdi $\Delta\Phi_n(t)$ olasılığını $I_n(t)$ integrali ile ifade edelim. T_n rastgele değişkeni k-mertebeli ve $\theta>0$ parametreli Erlang dağılımına sahip n tane bağımsız rastgele değişkenin toplamı olduğundan, T_n rastgele değişkeni de nk mertebeli ve $\theta>0$ parametreli Erlang dağılımına sahip olacaktır. Dolayısıyla

$$\Phi_n(t)=I_{nk}(\theta t)\ ,\quad \Phi_{n+1}(t)=I_{nk+k}(\theta t)$$

olup (44) tekrarlama formulü gözönüne alınırsa

$$I_{nk+k}(\theta t)=I_{nk}(\theta t)-\sum_{m=kn}^{kn+k-1}\frac{(\theta t)^m}{m!}e^{-\theta t} \tag{45}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_n(t)&=\Phi_n(t)-\Phi_{n+1}(t)\\&=I_{nk}(\theta t)-I_{nk+k}(\theta t)\\&=\sum_{m=kn}^{kn+k-1}\frac{(\theta t)^m}{m!}e^{-\theta t}\end{aligned} \tag{46}$$

dir. $\Delta\Phi_n(t)$ değerini Teorem 1 ve Teorem 2 de yerlerine yazmak suretiyle $\Phi(t)$ dağılım fonksiyonu da gözönüne alınarak

$$P_z\{\gamma_i\le t\}=1-\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(\theta t)^m}{m!}e^{-\theta t}-\sum_{n=1}^{\infty}g_i(n;z)\sum_{m=kn}^{kn+k-1}\frac{(\theta t)^m}{m!}e^{-\theta t},i=1,2$$

olduğu görülür. Her $z\in[0,\beta]$ için $g_i(0;z)=1, i=1,2$ olduğundan bu son ifadeyi aşağıdaki kapalı formda yazabiliriz:

$$P_z\{\gamma_i\le t\}=1-\sum_{n=0}^{\infty}g_i(n;z)\sum_{m=kn}^{kn+k-1}\frac{(\theta t)^m}{m!}e^{-\theta t},\ i=1,2 \tag{47}$$

dir. Böylece Sonuç 2 ispatlanmış olur.

Sonuç 3. Teorem 1 in koşulları sağlanmak üzere, eğer ξ_1 rastgele değişkeni 2-inci mertebeden ve $\theta > 0$ parametreli Erlang dağılımına sahip ise, bu takdirde γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin dağılm fonksiyonları aşağıdaki aşikar formda verilebilir:

$$P_z\{\gamma_i \le t\} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} g_i(n;z)\left(1 + \frac{\theta t}{2n+1}\right)\frac{(\theta t)^{2n}}{(2n)!}e^{-\theta t},\ i = 1,2.$$

Proof: (47) ifadesinde k yerine 2 konulmak suretiyle

$$P_z\{\gamma_i \le t\} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} g_i(n;z)\sum_{m=2n}^{2n+1}\frac{(\theta t)^m}{m!}e^{-\theta t}$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} g_i(n;z)\left[\frac{(\theta t)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(\theta t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]e^{-\theta t}$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} g_i(n;z)\left(1 + \frac{\theta t}{2n+1}\right)\frac{(\theta t)^{2n}}{(2n)!}e^{-\theta t},\quad i = 1,2$$

elde edilir. Böylece Sonuç 3 ispatlanmış olur.

Sonuç 4. Teorem 1 in koşulları sağlanmak üzere, eğer ξ_1 rastgele değişkeni $2k(k \ge 1)$ serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahip ise, bu takdirde γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları aşağıdaki aşikar formda verilebilir:

$$P_z\{\gamma_i \le t\} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} g_i(n;z)\sum_{m=kn}^{kn+k-1}\frac{(t)^m}{m!\,2^m}e^{-t/2}, i = 1,2$$

dir.

İspat: n serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahip bir rastgele değişkenin dağılımı $\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$ parametreli bir Erlang dağılımı olduğundan, ξ_1 rastgele değişkeni k - mertebeli ve $\frac{1}{2}$ parametreli Erlang dağılımına sahip olacaktır. Böylece (47) ifadesinde θ yerine $\frac{1}{2}$ alınarak

$$P_z\{\gamma_i \le t\} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} g_i(n;z) \sum_{m=kn}^{kn+k-1} \frac{\left(\frac{1}{2}t\right)^m}{m!} e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} g_i(n;z) \sum_{m=kn}^{kn+k-1} \frac{t^m}{m!\,2^m} e^{-\frac{1}{2}t}, \quad i = 1,2$$

elde edilir. Böylece Sonuç 4 ispatlanmış olur.

Şimdi γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin moment çıkaran fonksiyonlarını $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleriyle ifade edeceğiz.

2.4. γ_1 ve γ_2 nin Moment Çıkaran Fonksiyonları

Uygulamaya ait birçok problemde rastgele değişkenlerin dağılım fonksiyonlarının yanında onların başlangıç ve merkezi momentlerinin hesaplanması da istenebilir. Bu sayısal karekteristikleri hesaplamanın bir yolu, rastgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonunu hesaplamaktır. Bununla ilgili olarak bu kısımda, γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin moment çıkaran fonksiyonlarını hesaplayacağız. $\tilde{G}_i(\lambda;z)$, $i = 1,2$, ile sırasıyla γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin moment çıkaran fonksiyonlarını gösterelim ve onları aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\tilde{G}_i(\lambda;z) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} G_i(t;z)\,dt, \ \lambda > 0\ , \ i = 1,2 \tag{48}$$

Bu şekilde tanımlanan $\tilde{G}_i(\lambda;z)$, $i = 1,2$, fonksiyonlarını $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleriyle ifade etmek için aşağıdaki notasyonları verelim: $|s| \le 1$, $\lambda > 0$, $z \in [0,\beta]$ ve $v < 0$ olmak üzere

$$\varphi(\lambda) = E[\exp\{-\lambda \xi_1\}]\ ,$$

$$\tilde{a}(s;z) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n a_n(z),$$

$$\widetilde{b}(s;z)=\sum_{n=0}^{\infty}s^n b_n(z)\ ,$$

$$\widetilde{c}(s;z;v)=\sum_{n=0}^{\infty}s^n c_n(z;v)$$

olsun. Şimdi bu kısmın esas sonuçlarını aşağıdaki iki teorem ile verebiliriz:

Teorem 3. Teorem 1 in koşulları altında γ_1 rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu, $\widetilde{G}_1(\lambda;z)$, $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleriyle aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\widetilde{G}_1(\lambda;z)=\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\left[\widetilde{a}(\varphi(\lambda);z)+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\beta}^{0}\ldots(m)\ldots\int_{-\beta}^{0}\prod_{k=1}^{m}\widetilde{c}(\varphi(\lambda);|v_{k-1}|;dv_k)\widetilde{a}(\varphi(\lambda);|v_m|)\right] \quad (49)$$

dir, burada $|v_0|=z\in[0,\beta]$ dir.

İspat: $|s|\le 1$ olan her s için

$$\widetilde{g}_1(s;z)=\sum_{n=0}^{\infty}s^n g_1(n;z)$$

olduğunu varsayalım. Bu takdirde $n\ge 0$ olmak üzere $g_1(n;z)$ için Teorem 1 de elde edilen (21) ve (22) ifadelerini gözönüne alarak

$$\widetilde{g}_1(s;z)=s^0 g_1(0;z)+\sum_{n=1}^{\infty}s^n g_1(n;z)$$

$$=a_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}s^n\left[a_n(z)+\sum_{m=1}^{n}\int_{-\beta}^{0}\ldots(m)\ldots\int_{-\beta}^{0}\prod_{k=1}^{m}{}_{*}\left(c_n(|v_{k-1}|;dv_k)\right)*a_n(|v_m|)\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}s^n a_n(z)+\sum_{n=1}^{\infty}s^n\sum_{m=1}^{n}\int_{-\beta}^{0}\ldots(m)\ldots\int_{-\beta}^{0}\prod_{k=1}^{m}{}_{*}\left(c_n(|v_{k-1}|;dv_k)\right)*a_n(|v_m|)$$

$$=\widetilde{a}(s;z)+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\beta}^{0}\ldots(m)\ldots\int_{-\beta}^{0}\prod_{k=1}^{m}\widetilde{c}(s;|v_{k-1}|;dv_k)\widetilde{a}(s;|v_m|) \quad (50)$$

olduğunu görürüz. Diğer taraftan $n=0,1,2,\ldots,$ olmak üzere $\Delta\Phi_n(t)$ ifadesinin Laplace dönüşümü

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Delta\Phi_n(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\Phi_n(t)-\Phi_{n+1}(t)\right]dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi_n(t)dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi_{n+1}(t)dt$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{\left[\varphi(\lambda)\right]^n - \left[\varphi(\lambda)\right]^{n+1}\right\}$$

$$= \frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\left[\varphi(\lambda)\right]^n \tag{51}$$

dir. $G_1(t;z)$ için verilen (23) ifadesinde t argümentine göre Laplace dönüşümüne geçilirse ve (51) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\widetilde{G}_1(\lambda;z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[1-\Phi(t)+\sum_{n=1}^\infty g_1(n;z)\Delta\Phi_n(t)\right]dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi(t)dt + \sum_{n=1}^\infty g_1(n;z)\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Delta\Phi_n(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} + \sum_{n=1}^\infty g_1(n;z)\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\left[\varphi(\lambda)\right]^n$$

$$= \frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\left\{1+\sum_{n=1}^\infty g_1(n;z)\left[\varphi(\lambda)\right]^n\right\}$$

$$= \frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\sum_{n=0}^\infty(\varphi(\lambda))^n g_1(n;z) \tag{52}$$

elde edilir. Ayrıca her $\lambda>0$ için $|\varphi(\lambda)|\le 1$ olduğundan (50) ifadesinde s yerine $\varphi(\lambda)$ alındığında

$$\widetilde{G}_1(\lambda;z) = \frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\widetilde{g}_1(\varphi(\lambda);z)$$

$$= \frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\left[\widetilde{a}(\varphi(\lambda);z)+\sum_{m=1}^\infty\int_{-\beta}^0\ldots(m)\ldots\int_{-\beta}^0\prod_{k=1}^m\widetilde{c}(\varphi(\lambda);|v_{k-1}|;dv_k)\widetilde{a}(\varphi(\lambda);|v_m|)\right]$$

elde edilir. Böylece Teorem 3 ün ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4. Teorem 1 in koşulları altında γ_2 rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu , $\tilde{G}_2(\lambda;z)$, $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin olasılık karekteristikleriyle aşağıdaki formda verilebilir:

$$\tilde{G}_2(\lambda;z)=\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\left[\tilde{a}(\varphi(\lambda);z)+\frac{\tilde{b}(\varphi(\lambda);z).\tilde{a}(\varphi(\lambda);\beta)}{1-\tilde{b}(\varphi(\lambda);\beta)}\right] \tag{53}$$

dir. Özellikle $z=\beta$ olduğunda,

$$\tilde{G}_2(\lambda;\beta)=\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\tilde{a}(\varphi(\lambda);\beta)\left[1-\tilde{b}(\varphi(\lambda);\beta)\right]^{-1} \tag{54}$$

dir.

İspat: $|s|\le 1$ olan her s için

$$\tilde{g}_2(s;z)=\sum_{n=0}^{\infty}s^n g_2(n;z)$$

olsun. Teorem 2 nin ispatında elde edilen (37) eşitliğini kullanarak

$$\tilde{g}_2(s;z)=\sum_{m=0}^{n}s^n\left[a_n(z)+b_n(z)*a_n(\beta)+\sum_{m=2}^{\infty}b_n(z)*(b_n(\beta))_*^{m-1}*a_n(\beta)\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}s^n a_n(z)+\sum_{n=0}^{\infty}s^n\sum_{m=1}^{n}b_n(z)*(b_n(\beta))_*^{m-1}*a_n(\beta)$$

$$=\tilde{a}(s;z)+\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{b}(s;z)\left(b(s;\beta)\right)^{m-1}\tilde{a}(s;\beta)$$

$$=\tilde{a}(s;z)+\tilde{b}(s;z)\,\tilde{a}(s;\beta)\sum_{m=1}^{\infty}\left(b(s;\beta)\right)^{m-1}$$

$$=\tilde{a}(s;z)+\tilde{b}(s;z)\tilde{a}(s;\beta)\left[1-\tilde{b}(s;\beta)\right]^{-1} \tag{55}$$

ve $z=\beta$ özel durmunda

$$\tilde{g}_2(s;\beta)=\tilde{a}(s;\beta)+\tilde{b}(s;\beta)\tilde{a}(s;\beta)\left[1-\tilde{b}(s;\beta)\right]^{-1}$$

$$=\tilde{a}(s;\beta)\left[1-\tilde{b}(s;\beta)\right]^{-1}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

Öte taraftan $G_2(t;z)$ için verilen (30) ifadesinde t argümentine göre Laplace dönüşümüne geçilirse

$$\tilde{G}_2(\lambda;z)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[1-\Phi(t)+\sum_{n=1}^\infty g_2(n;z)\Delta\Phi_n(t)\right]dt$$

$$=\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\left\{1+\sum_{n=1}^\infty g_2(n;z)\left[\varphi(\lambda)\right]^n\right\}$$

$$=\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\tilde{g}_2(\varphi(\lambda);z)$$

$$=\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\left\{\tilde{a}(\varphi(\lambda);z)+\tilde{b}(\varphi(\lambda);z).\tilde{a}(\varphi(\lambda);\beta)\left[1-\tilde{b}(\varphi(\lambda);\beta)\right]^{-1}\right\} \qquad (56)$$

elde edilir. Özellikle $z=\beta$ olarak alınırsa

$$\tilde{G}_2(\lambda;\beta)=\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\tilde{a}(\varphi(\lambda);\beta)\left[1-\tilde{b}(\varphi(\lambda);\beta)\right]^{-1}$$

olduğu aşikardır. Böylece Teorem 4 ün ispatı tamamlanmış olur.

Bir çok pratiksel problemde, genellikle, her şeyden önce γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin beklenen değerlerinin hesaplanması istenebilir. Örneğin, stok kontrol teorisinde sonlu hacme sahip bir deponun ilk kez tamamen dolması veya böyle bir depoya ilk kez ani olarak stok eklenmesi anının beklenen değerinin bilinmesi oldukça önemlidir. Bu nedenle şimdi γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin beklenen değerleri için aşikar ifadeler elde edeceğiz. Bununla ilgili olarak öncekilere ilaveten aşağıdaki notasyonları verelim:

$$A(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n(z)$$

$$B(z)=\sum_{n=0}^\infty b_n(z)$$

$$C(z;v)=\sum_{n=0}^\infty c_n(z;v)$$

$$C(z;dv)=d_vC(z;v)$$

olsun. Buna göre, $A(z)$ z- başlangıç noktasından çıkan $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin hiçbir zaman $[0,\beta]$ aralığından çıkmaması olasılığı, $B(z)$ ise z- başlangıç noktasından çıkan $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin ilk defa olarak β seviyesini aşmak suretiyle $[0,\beta]$ aralığından çıkması olasılığı $C(z;v)$ ise z- başlangıç noktasından çıkan $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin ilk defa olarak $v<0$ seviyesinin altına düşerek $[0,\beta]$ aralığından çıkması olasılığı olarak yorumlanabilir.

Sonuç 5. Teorem 1 in koşullarına ilaveten eğer, $E[\xi_1]<\infty$ ve $E[\gamma_1]<\infty$ ise, bu takdirde $E_z[\gamma_1]$ aşağıdaki formdadır:

$$E_z[\gamma_1] = E[\xi_1]\left[A(z)+\sum_{m=1}^{n}\int_{-\beta}^{0}\ldots(m)\ldots\int_{-\beta}^{0}\prod_{k=1}^{m}C(|v_{k-1}|;dv_k)A(|v_m|)\right] \tag{57}$$

dir, burada $|v_0| = z\in[0,\beta]$ dır.

İspat: Teorem 3 de $\widetilde{G}_1(\lambda;z)$ için verilen ifadede $\lambda\to 0$ için limite geçilirse eşitliğin bir tarafından (soldan)

$$\lim_{\lambda\to 0}\widetilde{G}_1(\lambda;z) = \lim_{\lambda\to 0}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}G_1(t;z)d$$

$$= \int_0^{\infty} P_z\{\gamma_1>t\}dt = E_z[\gamma_1] \tag{58}$$

ve diğer tarafından (sağdan)

$$\lim_{\lambda\to 0}\widetilde{G}_1(\lambda;z) = E[\xi_1]\left[\widetilde{a}(1;z)+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\beta}^{0}\ldots(m)\ldots\int_{-\beta}^{0}\prod_{k=1}^{m}\widetilde{c}(1;|v_{k-1}|;dv_k)\widetilde{a}(1;|v_m|)\right] \tag{59}$$

olduğu gösterilebilir. Öte yandan

$$\widetilde{a}(1;z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z) = A(z)$$

ve

$$\widetilde{c}(1;z;dv\ ) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z;dv) = C(z;dv)$$

olduğundan iddia edildiği gibi

$$E_z[\gamma_1] = E[\xi_1]\left[A(z)+\sum_{m=1}^{n}\int_{-\beta}^{0}\ldots(m)\ldots\int_{-\beta}^{0}\prod_{k=1}^{m}C(|v_{k-1}|;dv_k)A(|v_m|)\right]$$

elde edilir. Böylece Sonuç 5 ispatlanmış olur.

Sonuç 6. Teorem 2 nin koşullarına ilaveten eğer, $E[\xi_1]<\infty, E[\gamma_2]<\infty$ ve $B(\beta)<1$ ise, bu takdirde $E_z[\gamma_2]$ aşağıdaki formdadır:

$$E_z[\gamma_2] = E[\xi_1]\left\{A(z) + B(z)A(\beta)[1-B(\beta)]^{-1}\right\} \tag{60}$$

dır ve özel olarak $z=\beta$ olduğunda

$$E_\beta[\gamma_2] = E[\xi_1]A(\beta)[1-B(\beta)]^{-1} \tag{61}$$

dır.

İspat: Teorem 4 de $\widetilde{G}_2(\lambda;z)$ için verilen formülde $\lambda \to 0$ için limite geçilirse, verilen hipotezler altında,

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda} = E\ [\xi_1],$$

ve

$$\widetilde{a}(1;z) = A(z),\ \widetilde{b}(1;z) = B(z)$$

olduğu dikkate alınırsa (53) ifadesinden

$$E_z[\gamma_2] = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\left\{\widetilde{a}(\varphi(\lambda);z) + \frac{\widetilde{b}(\varphi(\lambda);z)\,\widetilde{a}(\varphi(\lambda);\beta)}{1-\widetilde{b}(\varphi(\lambda);\beta)}\right\}$$

$$= E[\xi_1]\left\{\widetilde{a}(1;z) + \frac{\widetilde{b}(1;z)\,\widetilde{a}(1;\beta)}{1-\widetilde{b}(1;\beta)}\right\}$$

$$= E[\xi_1]\left\{A(z) + B(z)A(\beta)[1-B(\beta)]^{-1}\right\}$$

elde edilir. Bu formülde z yerine β almak suretiyle

$$E_\beta[\gamma_2] = E[\xi_1]A(\beta)[1-B(\beta)]^{-1}$$

olduğu görülür. Böylece Sonuç 6 ispatlanmış olur.

Uyarı: Eğer ξ_1 in n (n>1) -inci başlangıç momenti mevcut ise, bu takdirde Sonuç 5 in varsayımları altında γ_1 in daha yüksek mertebeden momentlerini hesaplamak için

$$E_\beta\left[\gamma_1^k\right]=k(-1)^{k-1}\lim_{\lambda\to 0}\frac{\partial^{k-1}}{\partial\lambda^{k-1}}\left[\tilde{G}_1(\lambda;z)\right],\quad k\geq 2$$

bağıntısı, ve Sonuç 6 nın varsayımları altında γ_2 nin daha yüksek mertebeden momentlerini hesaplamak için

$$E_\beta\left[\gamma_2^k\right]=k(-1)^{k-1}\lim_{\lambda\to 0}\frac{\partial^{k-1}}{\partial\lambda^{k-1}}\left[\tilde{G}_2(\lambda;z)\right],\quad k\geq 2$$

bağıntısı kullanılabilir.

2.5. Sürecin Sonlu Boyutlu Dağılım Fonksiyonları

Bu kısımdaki esas amacımız, daha önce Kısım 2.2 de matematiksel olarak kurmuş olduğumuz $X(t)$ stokastik sürecinin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonlarını, $\{T_n\}$ yenileme sürecinin ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade etmektir. Bununla ilgili olarak daha önce verilenlere ilaveten bazı notasyonları verelim. $x,z\in[0,\beta]$, $v<0$ olmak üzere , $n\geq 1$ için

$$a_n(z;x)=P\{z+Y_i\in[0,\beta];1\leq i\leq n;z+Y_n\in[0,x]\},$$

$$b_n(z;\beta)=P\{z+Y_i\in[0,\beta];1\leq i\leq n-1;z+Y_n>\beta\},$$

$$c_n(z;v)=P\{z+Y_i\in[0,\beta];1\leq i\leq n-1;z+Y_n<v\}$$

ve

$$a_0(z;x)=\varepsilon(x-z)\,;\,b_0(z;\beta)=c_0(z;v)=0,\ \varepsilon(u)=\begin{cases}1 & ,u\geq 0\\ 0 & ,u<0\end{cases}$$

olsun.

$Q(t;z;x)$ ile $X(t)$ sürecinin bir boyutlu koşullu dağılım fonksiyonunu gösterelim. Yani,

$$Q(t;z;x)=P_z\{X(t)\leq x\}=P\{X(t)\leq x\,|\,X(0)=z\},\ x,z\in[0,\beta],\ t\in R^+$$

olsun. Şimdi aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 5. $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu, $Q(t;z;x)$, $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Q(t;z;x) = \varepsilon(x-z)[1-\Phi(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} q(n;z;x)\,\Delta\Phi_n(t), \tag{62}$$

burada

$$q(n;z;x) = g_n(z;x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \ldots (k) \ldots \int_{-\infty}^{0} \prod_{i=1}^{k} {}_{*}\left(r_n(\bar{v}_{i-1};dv_i)\right) * g_n(\bar{v}_k;x),$$

$\bar{v}_0 = z$, $\bar{v}_i = \min\{\beta; |v_i|\}$, $i \geq 1$, $n \geq 1$, olup $n \geq 1$ olmak üzere

$$g_n(z;x) = a_n(z;x) + b_n(z;\beta) * a_n(\beta;x) + b_n(z;\beta) * U_n(\beta;\beta) * a_n(\beta;x),$$

$$r_n(z;v) = c_n(z;v) + b_n(z;\beta) * c_n(\beta;v) + b_n(z;\beta) * U_n(\beta;\beta) * c_n(\beta;v),$$

$$U_n(\beta;\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_n(\beta;\beta)\right)_*^k$$

ve

$$g_0(z;x) = a_0(z;x) = \varepsilon(x-z), \quad r_0(z;v) = 0$$

dır.

İspat: Toplam olasılık formülüne göre $Q(t;z;x)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} Q(t;z;x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{T_n \leq t < T_{n+1}; X(t) \leq x\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{T_n \leq t < T_{n+1}; X_n \leq x\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{X_n \leq x\}\; P\{T_n \leq t < T_{n+1}\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q(n;z;x)\; \Delta\Phi_n(t) \end{aligned} \tag{63}$$

dir, burada

$$q(n;z;x) = P_z\{X_n \leq x\}, \; n \geq 0 \tag{64}$$

dır. $\Delta\Phi_n(t)$ yi $\{T_n\}$ yenileme sürecinin belirli olasılık karekteristikleriyle direkt olarak ifade edebildiğimizden burada yapacağımız iş $q(n;z;x)$ ifadesini de $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade etmektir. Bu amaçla ν_n, $n \geq 1$, tam değerli rastgele değişkenlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\nu_0 = 0,$$

$$\nu_1 = \min\{k \geq 1 : X_{k-1} + \eta_k < 0\},$$

$$\nu_n = \min\{k \geq \nu_{n-1} + 1 : X_{k-1} + \eta_k < 0\}, n \geq 2$$

olsun. Belirtelim ki $\{\nu_n\}$, $n \geq 1$, rastgele değişkenler dizisi $\{X_n\}$ Markov zincirinin aşağıdaki bariyerden ardışık yansıma anları olarak yorumlanabilir. Bu takdirde $q(n;z;x)$, $n \geq 1$, aşağıdaki gibi yazabilir:

$$q(n;z;x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_z\{\nu_k \leq n < \nu_{k+1} \,;\, X_n \leq x\}. \tag{65}$$

Şimdi amacımız (65) serisindeki herbir terimi $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade etmektir. İlk olarak (65) serisindeki birinci terimi hesaplayalım:

$$P_z\{\nu_0 \leq n < \nu_1 \,;\, X_n \leq x\} = P_z\{\nu_1 > n \,;\, X_n \leq x\}$$

dır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ifadeyle sıksık karşılaşacağımızdan dolayı bunu kısaca $g_n(z;x)$ ile gösterelim, yani,

$$g_n(z;x) = P_z\{\nu_1 > n \,;\, X_n \leq x\}, n \geq 0 \tag{66}$$

olsun. Şimdi $g_n(z;x)$ i hesaplayalım. Toplam olasılık formülüne göre

$$g_n(z;x) = \sum_{m=0}^{n} P_z\{\nu_1 > n \,;\, X_n \leq x \,;\, \nu_\beta(n) = m\} \tag{67}$$

olarak yazılabilir, burada $\nu_\beta(n)$ rastgele değişkeni daha önce belirtildiği gibi $\{X_n\}$ Markov zincirinin ilk n adım boyunca tutan bariyere düşmelerinin sayısını göstermektedir. Ayrıca ν_1 ve $\nu_\beta(n)$ rastgele değişkenlerinin tanımları gözönüne alınırsa bu takdirde

$$P_z\{\nu_1 > n\,;X_n \le x\,;\nu_\beta(n)=0\} = P\{z+Y_i \in [0,\beta];1\le i\le n;z+Y_n \in [0,x]\}$$

$$= a_n(z;x) \qquad (68)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir, burada $x,z \in [0,\beta]$, $n \ge 0$ dır.

Şimdi (67) serisindeki ikinci terimi hesaplayalım. ν_1 ve ν_2 rastgele değişkenlerinin tanımlarını ve η_i, $i=1,2,\ldots$, rastgele değişkenlerinin bağımsız olduklarını ve aynı tür dağıldıklarını gözönüne alırsak, bu takdirde

$$P_z\{\nu_1 > n\,;X_n \le x\,;\nu_\beta(n)=1\} = \sum_{k=1}^{n} P\{z+Y_i \in [0,\beta];1\le i\le k-1;z+Y_k > \beta\}$$

$$.P\{\beta+Y_i \in [0,\beta];0\le i\le n-k;\beta+Y_{n-k} \in [0,x]\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_k(z;\beta)\,a_{n-k}(\beta;x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_k(z;\beta)\,a_{n-k}(\beta;x) \qquad (69)$$

elde edilir. Burada her $z \in [0,\beta]$ için $b_0(z;\beta)=0$ olduğu dikkate alınmıştır. İki dizinin konvolüsyon çarpımı tanımını gözönüne alarak (69) bağıntısını

$$P_z\{\nu_1 > n;X_n \le x\,;\nu_\beta(n)=1\} = b_n(z;\beta)*a_n(\beta;x)$$

olarak yazabiliriz. Şimdi de (67) serisindeki üçüncü terimi hesaplayalım. Bu durumda

$$P_z\{\nu_1 > n\,;X_n \le x\,;\nu_\beta(n)=2\} = \sum_{\substack{2\le k+r\le n\\ k,r\ge 1}} P\{z+Y_i \in [0,\beta];1\le i\le k-1;z+Y_k > \beta\}$$

$$.P\{\beta+Y_i \in [0,\beta];1\le i\le r-1;\beta+Y_r > \beta\}$$

$$.P\{\beta+Y_i \in [0,\beta];1\le i\le n-k-r;\beta+Y_{n-k-r} \in [0,x]\}$$

$$= \sum_{\substack{2\le k+r\le n\\ k,r\ge 1}} b_k(z;\beta)b_r(\beta;\beta)a_{n-k-r}(\beta;x)$$

$$= \sum_{\substack{0\le k+r\le n\\ k,r\ge 0}} b_k(z;\beta)b_r(\beta;\beta)a_{n-k-r}(\beta;x)$$

$$= b_n(z;\beta)*b_n(\beta;\beta)*a_n(\beta;x) \qquad (70)$$

elde edilir, burada her $z \in [0,\beta]$ için $b_0(z;\beta) = 0$ olduğu gözönüne alınmıştır. Benzer muhakemeyle her $m \geq 2$ için

$$P_z\{\nu_1 > n\,;X_n \leq x\,;\nu_\beta(n) = m\} = b_n(z;\beta) * (b_n(\beta;\beta))_*^{m-1} * a_n(\beta;x), \tag{71}$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. (68), (69) ve (71) ifadeleri (67) serisinde yerine yazılarak

$$g_n(z;x) = P_z\{\nu_1 > n\,;X_n \leq x\}$$

$$= a_n(z;x) + b_n(z;\beta) * a_n(\beta;x) + \sum_{m=2}^{\infty} b_n(z;\beta) * (b_n(\beta;\beta))_*^{m-1} * a_n(\beta;x)$$

ifadesi elde edilir. Kısalık olsun diye

$$U_n(\beta;\beta) = \sum_{m=2}^{\infty} (b_n(\beta;\beta))_*^{m-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (b_n(\beta;\beta))_*^{k}$$

olarak tanımlayalım. Böylece her $n \geq 1$ için

$$g_n(z;x) = a_n(z;x) + b_n(z;\beta) * a_n(\beta;x) + b_n(z;\beta) * U_n(\beta;\beta) * a_n(\beta;x)$$

ve $n = 0$ için

$$g_0(z;x) = a_0(z;x) = P\{z \in [0,x]\} = P\{z \leq x\} = \varepsilon(x-z)$$

elde edilir. Dolayısıyla (65) serisinin birinci terimi olan $g_n(z;x)$, $n \geq 0$, ifadesini $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin yukarıda verilen olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade etmiş olduk.

Şimdi de (65) serisindeki ikinci terimi hesaplayalım. ν_1 rastgele değişkeninin tanımı ve η_i, $i = 1,2,\ldots$, rastgele değişkenlerinin bağımsız ve aynı tür dağılmış oldukları gözönüne alınırsa (65) serisindeki ikinci terimi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$P_z\{\nu_1 \leq n < \nu_2; X_n \leq x\} = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{0} P_z\{\nu_1 = k; X_{k-1} + \eta_k \in dv\}.$$

$$.\,P_{\bar{v}}\{\nu_1 > n-k; X_{n-k} \leq x\} \tag{72}$$

dir, burada $\bar{v} = \min\{\beta\,;|v|\}$ ve $n \geq 1$ dır. Yine sıksık karşılaşacağımızdan dolayı kısalık olsun diye $r_k(z;v)$ ile aşağıdaki olasılığı gösterelim: $z \in [0,\beta]$ ve $v < 0$ olmak üzere

$$r_k(z;v) = P_z\{\nu_1 = k\,; X_{k-1} + \eta_k \leq v\}\,, k \geq 1,$$

$$r_0(z;v) = 0$$

olsun. Ayrıca $r_k(z;dv)=d_v(r_k(z;v))$ yazalım. Bu notasyonları da dikkate alarak (72) ifadesini

$$P_z\{\nu_1 \le n < \nu_2; X_n \le x\} = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{0} r_k(z;dv) g_{n-k}(\overline{v};x)$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \sum_{k=1}^{n} r_k(z;dv) g_{n-k}(\overline{v};x)$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \sum_{k=0}^{n} r_k(z;dv) g_{n-k}(\overline{v};x)$$

$$= \int_{-\infty}^{0} r_n(z;dv) * g_n(\overline{v};x) \tag{73}$$

olarak yazabiliriz. Burada $r_0(z;dv)=0$ olduğu dikkate alınmıştır.

Belirli bir kural verebilmek için (65) serisindeki üçüncü terimi de hesaplayalım. $\{X_n\}$ Markov zincirinin, ν_1 ve ν_2 rastgele değişkenlerinin tanımlarını ve η_i, $i=1,2,\ldots$, rastgele değişkenlerinin bağımsız ve aynı tür dağılmış olduklarını gözönüne alarak (65) serisindeki üçüncü terimi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$P_z\{\nu_2 \le n < \nu_3; X_n \le x\} = \sum_{\substack{2\le k+m\le n \\ k,m\ge 1}} \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} P_z\{\nu_1 = k; X_{k-1}+\eta_k \in dv_1\}$$

$$\cdot\, P_{\overline{v}_1}\{\nu_1 = m; X_{m-1}+\eta_m \in dv_2\}$$

$$\cdot\, P_{\overline{v}_2}\{\nu_1 > n-k-m; X_{n-k-m} \le x\}$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} \sum_{\substack{2\le k+m\le n \\ k,m\ge 1}} r_k(z;dv_1) r_m(\overline{v}_1;dv_2) g_{n-k-m}(\overline{v}_2;x)$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} \sum_{\substack{0\le k+m\le n \\ k,m\ge 0}} r_k(z;dv_1) r_m(\overline{v}_1;dv_2) g_{n-k-m}(\overline{v}_2;x) \tag{74}$$

olur, burada $r_0(z;dv)=r_0(\overline{v}_1;dz)=0$ olduğu gözönüne alınmıştır. Üç dizinin konvolüsyon çarpımı tanımı gözönüne alınırsa (74) ifadesi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$P_z\{\nu_2 \le n < \nu_3; X_n \le x\} = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} r_n(z;dv_1) * r_n(\overline{v}_1;dv_2) * g_n(\overline{v}_2;x). \tag{75}$$

Benzer muhakemeyle, her $k \geq 2$ için

$$P_z\{\nu_k \leq n < \nu_{k+1}; X_n \leq x\} = \int_{-\infty}^{0} \ldots (k) \ldots \int_{-\infty}^{0} r_n(z; dv_1) * r_n(\bar{v}_1; dv_2) * \ldots$$

$$\ldots * r_n(\bar{v}_{k-1}; dv_k) * g_n(\bar{v}_k; x)$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \ldots (k) \ldots \int_{-\infty}^{0} \prod_{i=1}^{k} * \Big(r_n\big(\bar{v}_{i-1}; dv_i\big)\Big) * g_n\big(\bar{v}_k; x\big) \tag{76}$$

ifadesi elde edilebilir, burada $\bar{v}_0 = z$ dır. Sonuç olarak elde edilen tüm bu ifadeler $q(n; z; x)$ için verilen (64) ifadesinde yerine yazılarak $n \geq 1$ için, $\bar{v}_0 = z$ ve $\bar{v}_i = \min\{\beta; |v_i|\}$, $i \geq 1$ olmak üzere

$$q(n; z; x) = P_z\{X_n \leq x\}$$

$$= g_n(z; x) + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{0} \ldots (k) \ldots \int_{-\infty}^{0} \prod_{i=1}^{k} * \Big(r_n\big(\bar{v}_{i-1}; dv_i\big)\Big) * g_n\big(\bar{v}_k; x\big)$$

ve n=0 için

$$q(0; z; x) = g_0(z; x) = a_0(z; x) = \varepsilon(x - z) = \begin{cases} 1, & x \geq z \\ 0, & x < z \end{cases}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

İspatın tamamlanabilmesi için $r_n(z; dv)$ leri $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin yukarıda verilen olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade etmek yeterlidir. $\nu_\beta(n)$ nin daha önce verilen tanımından yararlanarak $r_n(z; v)$, $n \geq 1$, yi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$r_n(z; v) = P_z\{\nu_1 = n; X_{n-1} + \eta_n \leq v < 0\}$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} P_z\{\nu_\beta(n) = m; \nu_1 = n; X_{n-1} + \eta_n \leq v < 0\} \tag{77}$$

dır. Şimdi bu serideki terimleri ayrı ayrı hesaplayalım. $m = 0$ olduğunda

$$P\{\nu_\beta(n) = 0; \nu_1 = n; X_{n-1} + \eta_n \leq v\}$$

$$= P\{z + Y_i \in [0, \beta]; 1 \leq i \leq n-1; z + Y_n \leq v < 0\}$$

$$= c_n(z; v) \tag{78}$$

elde edilir. Eğer $m = 1$ ise, bu durumda

$$P\{\nu_\beta(n)=1\,;\nu_1=n\,;X_{n-1}+\eta_n\le v\}=\sum_{k=1}^{n-1}P\{z+Y_i\in[0,\beta];1\le i\le k-1;z+Y_k>\beta\}$$

$$.P\{\beta+Y_i\in[0,\beta];1\le i\le n-k-1;\beta+Y_{n-k}\le v<0\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}b_k(z;\beta)c_{n-k}(\beta;v)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}b_k(z;\beta)c_{n-k}(\beta;v)$$

$$=b_n(z;\beta)*c_n(\beta;v) \tag{79}$$

elde edilir, burada $b_0(z;\beta)=c_0(\beta\,;v)=0$ olduğu dikkate alınmıştır. Genel bir formül elde etmek için (77) serisindeki üçüncü terimi de hesaplayalım. Bu durumda

$$P\{\nu_\beta(n)=2\,;\nu_1=n\,;X_{n-1}+\eta_n\le v\}=\sum_{\substack{2\le k+\ell\le n-1\\ k,\ell\ge 1}}P\{z+Y_i\in[0,\beta];1\le i\le k-1;z+Y_k>\beta\}$$

$$.P\{\beta+Y_i\in[0,\beta];1\le i\le \ell-1;\beta+Y_\ell>\beta\}$$

$$.P\{\beta+Y_i\in[0,\beta];1\le i\le n-k-\ell-1;\beta+Y_{n-k-\ell}\le v<0\}$$

$$=\sum_{\substack{2\le k+\ell\le n-1\\ k,\ell\ge 1}}b_k(z;\beta)b_\ell(\beta;\beta)c_{n-k-\ell}(\beta;v)$$

$$=\sum_{\substack{0\le k+\ell\le n\\ k,\ell\ge 0}}b_k(z;\beta)b_\ell(\beta;\beta)c_{n-k-\ell}(\beta;v)$$

$$=b_n(z;\beta)*b_n(\beta;\beta)*c_n(\beta;v) \tag{80}$$

dir,burada $b_0(z;\beta)=b_0(\beta;\beta)=c_0(\beta\,;v)=0$ olduğu dikkate alınmıştır. Benzer muhakeme ile, $m\ge 2, n\ge 2, v<0$ için aşağıdaki ifadenin doğruluğunu göstermek mümkündür:

$$P\{\nu_\beta(n)=2\,;\nu_1=n\,;X_{n-1}+\eta_n\le v\}=b_n(z;\beta)*(b_n(\beta;\beta))_*^{m-1}*c_n(\beta;v). \tag{81}$$

(78), (79) ve (81) ifadeleri (77) de yerine yazılırsa

$$r_n(z;v)=c_n(z;v)+b_n(z;\beta)*c_n(\beta;v)+\sum_{m=2}^{n-1}b_n(z;\beta)*(b_n(\beta;\beta))_*^{m-1}*c_n(\beta;v) \tag{82}$$

olduğu görülür. Dizilerin konvolüsyon çarpımı tanımını ve

$$b_0(z;\beta)=b_0(\beta;\beta)=c_0(\beta\,;v)=0$$

olduğunu gözönüne alarak

$$\sum_{m=2}^{n-1} b_n(z;\beta)*(b_n(\beta;\beta))_*^{m-1}*c_n(\beta;v)=\sum_{m=2}^{\infty} b_n(z;\beta)*(b_n(\beta;\beta))_*^{m-1}*c_n(\beta;v)$$

$$=b_n(z;\beta)*\left(\sum_{k=1}^{\infty}(b_n(\beta;\beta))_*^{k}\right)*c_n(\beta;v)$$

$$=b_n(z;\beta)*U_n(\beta;\beta)*c_n(\beta;v).$$

gerçeği dikkate alınırsa (82) ifadesinin

$$r_n(z;v)=c_n(z;v)+b_n(z;\beta)*c_n(\beta;v)+b_n(z;\beta)*U_n(\beta;\beta)*c_n(\beta;v)$$

şeklinde yeniden yazılabileceği görülür, burada

$$U_n(\beta;\beta)=\sum_{k=1}^{\infty}(b_n(\beta;\beta))_*^{k}\quad .$$

olduğu dikkate alınmıştır. Öte taraftan

$$r_1(z;v)=P_z\{\nu_1=1;X_0+\eta_1\le v<0\}$$

$$=P\{z+Y_1\le v\}$$

$$=c_1(z;v)$$

elde edilir. Böylece $r_n(z;v), n\ge 0$, leri $\{Y_n\}, n\ge 1$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade etmiş olduk. Böylece Teorem 5 ispatlanmış olur.

Daha önce de belirttiğimiz gibi $\Delta\Phi_n(t)$, $X(t)$ sürecinin $[0,t]$ zaman aralığında tam olarak n kez sıçraması olasılığı olarak yorumlanabilir. Ayrıca ξ_1 rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonuyla $\Delta\Phi_n(t)$ yi tam olarak ifade etmek mümkündür. ξ_1 rastgele değişkeninin dağılımının bazı özel durumları için (üstel, Erlang, Ki-kare gibi) $X(t)$ sürecinin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları daha aşikar formda verilebilir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 7. Teorem 5 in koşulları sağlanmak üzere eğer ξ_1 rastgele değişkeni $\theta > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip ise bu takdirde $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonları için aşağıdaki aşikar formülü verebiliriz:

$$Q(t;z;x) = \varepsilon(x-z)e^{-\theta t} + \sum_{n=1}^{\infty} q(n;z;x)\frac{(\theta\, t)^n}{n!}e^{-\theta t},$$

burada $\varepsilon(x-z)$ ve $q(n;z;x)$ Teorem 5 de verildikleri gibidir.

İspat: Sonuç 1 de eğer ξ_1 rastgele değişkeni $\theta > 0$ parametreli üstel dağılıma sahipse bu takdirde $n \geq 1$ için

$$\Delta\Phi_n(t) = \frac{(\theta\, t)^n}{n!}e^{-\theta t}$$

ve $n = 0$ için

$$\Delta\Phi_0(t) = 1 - \Phi(t) = e^{-\theta t}$$

olduğunu göstermiştik. Eğer $\Delta\Phi_n(t)$, $n \geq 0$, $Q(t;z;x)$ için verilen (62) formulünde yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 8. Teorem 5 in koşulları sağlanmak üzere eğer ξ_1 rastgele değişkeni $k(k \geq 1)$-yıncı mertebeden ve $\theta > 0$ parametreli Erlang dağılımına sahipse bu takdirde $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonları aşağıdaki formda verilebilir:

$$Q(t;z;x) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n;z;x) \sum_{m=nk}^{nk+k-1} \frac{(\theta\, t)^n}{n!}e^{-\theta t},$$

burada $q(n;z;x)$ Teorem 5 de verildiği gibidir.

İspat: Sonuç 2 de eğer ξ_1 $k(k \geq 1)$-yıncı mertebeden ve $\theta > 0$ parametreli Erlang dağılımına sahip ise bu takdirde

$$\Delta\Phi_n(t) = \sum_{m=nk}^{nk+k-1} \frac{(\theta\, t)^m}{m!}e^{-\theta t}$$

ve

$$1 - \Phi(t) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\theta\, t)^m}{m!}e^{-\theta t}$$

olduğunu göstermiştik. $1 - \Phi(t)$ ve $\Delta\Phi_n(t)$ (62) de yerine yazılırsa

$$Q(t;z;x)=\varepsilon(x-z)\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(\theta\, t)^m}{m!}e^{-\theta t}+\sum_{n=1}^{\infty}q(n;z;x)\sum_{m=nk}^{nk+k-1}\frac{(\theta\, t)^n}{n!}e^{-\theta t}$$

elde edilir. Öte yandan $q(0;z;x)=\varepsilon(x-z)$ olduğundan

$$Q(t;z;x)=\sum_{n=0}^{\infty}q(n;z;x)\sum_{m=nk}^{nk+k-1}\frac{(\theta\, t)^n}{n!}e^{-\theta t}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 9. Teorem 5 in koşulları sağlanmak üzere eğer ξ_1 rastgele değişkeni 2k (k>0) serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahipse bu takdirde $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu aşağıdaki formda verilebilir:

$$Q(t;z;x)=\sum_{n=0}^{\infty}q(n;z;x)\sum_{m=nk}^{nk+k-1}\frac{t^m}{m!2^m}e^{-t/2}$$

dir.

İspat: n serbestlik dereceli χ^2-dağılımına sahip bir rastgele değişkenin dağılımı $\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$ parametreli bir gamma dağılımı olduğundan sözü edilen ξ_1 rastgele değişkeni k-mertebeli ve $\frac{1}{2}$ parametreli Erlang dağılımına sahip olacaktır. Bu nedenle Sonuç 8 de verilen ifadede θ yerine $\frac{1}{2}$ alınırsa istenilen sonuç elde edilir. Böylece Sonuç 9 un ispatı tamamlanmış olur.

2.6. Sürecin Ergodikliği

Bu kısımda $X(t)$ süreci için en genel şartlar altında ergodik teoremi ispatlanacak ve sürecin ergodik olması durumunda ergodik dağılım fonksiyonu için aşikar bir formül verilecektir. Bununla ilgili olarak önce $X(t)$ sürecinin ergodik olduğunu göstereceğiz. Bunun için de iki tane yardımcı teorem ispatlayacağız. Şimdi aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 6. $\{(\xi_i, \eta_i)\}$ $(i = 1,2,3,...)$ daha önce verilen rastgele değişkenler ikilileri dizisi olsun. Eğer aşağıdaki üç şart sağlanıyorsa bu takdirde $X(t)$ süreci ergodiktir:

1) $E[\xi_1] < \infty$,

2) $P\{\eta_1 > 0\} > 0$ ve $P\{\eta_1 < 0\} > 0$,

3) η_1 aritmetik olmayan dağılıma sahiptir.

İspat: $X(t)$ sürecinin ergodik olduğunu ispatlamak için teoremdeki şartların sağlanması halinde, bunun yarı-Markov süreçler için ergodik teoremin (bkz. Gihman ve Skorohod [5], sh.243.) şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bununla ilgili olarak, önce stasyoner dağılım fonksiyonuna sahip ergodik bir Markov zinciri inşa etmeliyiz. Daha sonra da bu zincirin ardışık iki sıçrama anı arasındaki sürenin beklenen değerinin sonlu olduğunu göstermeliyiz. Bunun için önce aşağıdaki rastgele değişkenleri tanımlayalım:

$$\nu_1 = \min\left\{k \geq 1 \,;\, X_{k-1} + \eta_k \geq \beta\right\}$$

$$\nu_n = \min\left\{k > \nu_{n-1} \,;\, X_{k-1} + \eta_k \geq \beta\right\},\ n \geq 2,$$

olsun. ν_n rastgele değişkenleri yardımıyla $\gamma_{n\beta}$ ve $\tilde{\gamma}_{n\beta}$, $n \geq 1$, rastgele değişkenlerini sırasıyla

$$\gamma_{1\beta} = \sum_{i=1}^{\nu_1} \xi_i \quad ; \quad \gamma_{n\beta} = \sum_{i=1}^{\nu_n} \xi_i \,,\, n \geq 2$$

ve

$$\tilde{\gamma}_{1\beta} = \sum_{i=1}^{\nu_1+1} \xi_i \quad ; \quad \tilde{\gamma}_{n\beta} = \sum_{i=1}^{\nu_n+1} \xi_i \,,\ \ n \geq 2$$

olarak tanımlayalım, burada $\gamma_{n\beta}$ ve $\tilde{\gamma}_{n\beta}$, $n \geq 1$, sırasıyla $X(t)$ sürecinin tutan bariyere n-yinci kez düşmesi anını ve tutan bariyerden n-yinci kez çıkması anını göstermektedir.

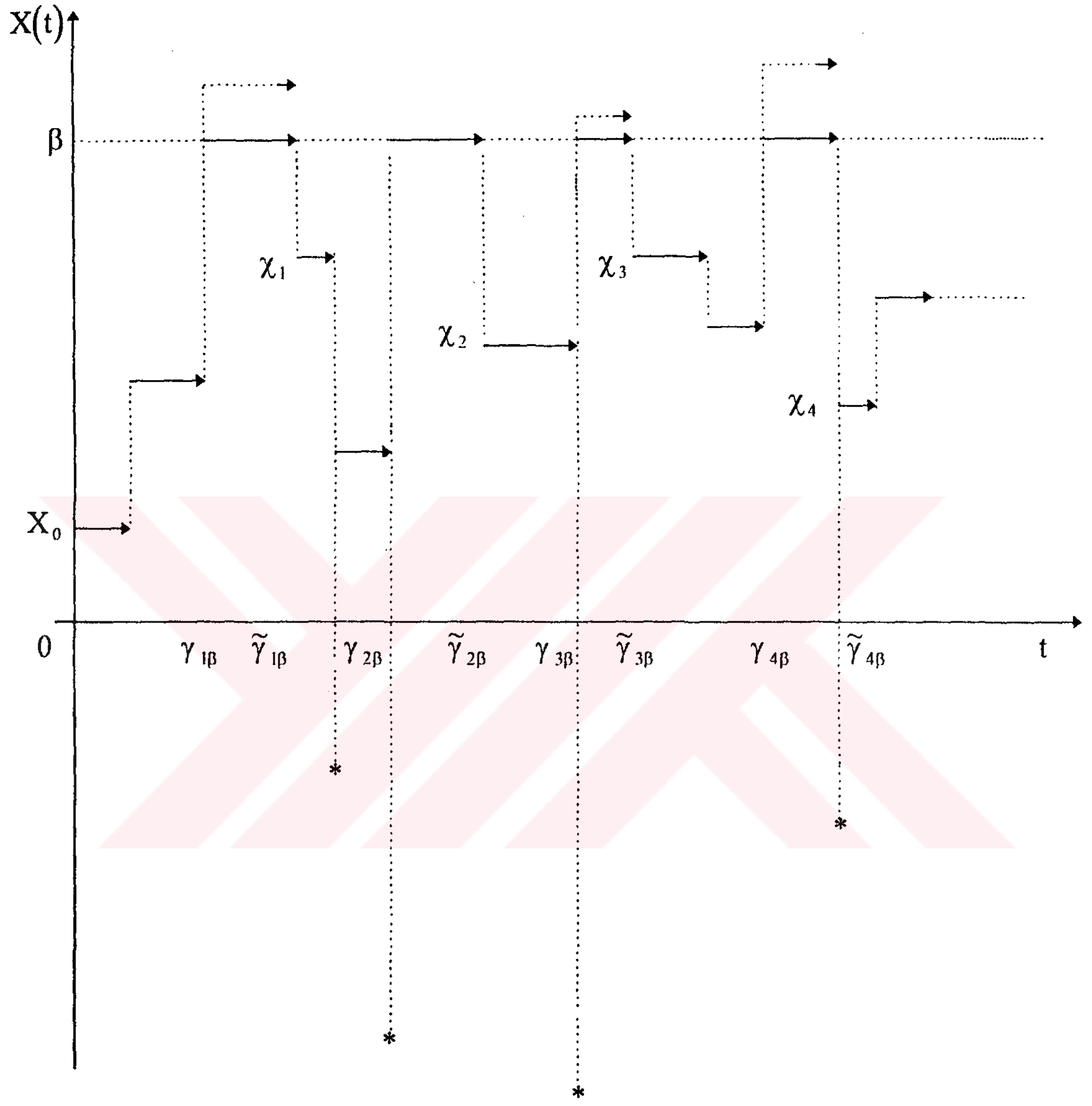
$$\chi_n = X\left(\tilde{\gamma}_{n\beta} + 0\right),\, n \geq 1$$

olsun. Bu şekilde tanımlanan $\{\chi_n : n \geq 1\}$ istenilen Markov zincirini oluşturur. Bu takdirde

χ_n, $n \geq 1$, rastgele değişkenlerini

$$\chi_n = \min\left\{\beta; \left|\beta + \eta_{\nu_n+1}\right|\right\},\ n = 1,2,... \tag{83}$$

olarak yazabiliriz. Bu şekilde inşa olunan $\{\chi_n : n \geq 1\}$ Markov zincirinin bir görünüşü Şekil 10 da verildiği gibidir.



Şekil 10. $\{\chi_n : n \geq 1\}$ Markov zincirinin bir görünüşü

χ_n rastgele değişkenlerinin yapısına bakıldığında onların bağımsız ve aynı tür dağıldıkları, dolayısıyla inşa edilen Markov zincirinin stasyoner dağılım fonksiyonuna sahip olduğu ve böylece de ergodik olduğu söylenebilir. Bu dağılım fonksiyonunu $\pi(x)$ ile gösterelim. Şimdi bu $\pi(x)$ dağılım fonksiyonunu hesaplayalım.

Eğer $x \leq 0$ ise $\pi(x) = P\{\chi_1 \leq x\} = 0$ olduğu ve $x > \beta$ ise $\pi(x) = P\{\chi_1 \leq x\} = 1$ olduğu, yani,

$$\pi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > \beta \end{cases}$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla sadece $x \in (0, \beta]$ olması durumu ile ilgileneceğiz. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= P\{\chi_1 \leq x\} \\
&= P\{\min\{\beta ; |\beta + \eta_1|\} \leq x\} \\
&= 1 - P\{\min\{\beta ; |\beta + \eta_1|\} \geq x\} \\
&= 1 - P\{\beta \geq x ; |\beta + \eta_1| \geq x\} \\
&= 1 - P\{\beta \geq x\} P\{|\beta + \eta_1| \geq x\} \\
&= 1 - \bar{\varepsilon}(x - \beta) P\{|\beta + \eta_1| \geq x\} \\
&= 1 - \bar{\varepsilon}(x - \beta)\left[1 - P\{|\beta + \eta_1| < x\}\right] \\
&= 1 - \bar{\varepsilon}(x - \beta) + \bar{\varepsilon}(x - \beta) P\{|\beta + \eta_1| < x\} \\
&= \varepsilon(x - \beta) + \bar{\varepsilon}(x - \beta)\varepsilon(x) P\{-x < \beta + \eta_1 < x\} \\
&= \varepsilon(x - \beta) + \bar{\varepsilon}(x - \beta)\varepsilon(x) P\{-(\beta + x) < \eta_1 < -\beta + x\} \\
&= \varepsilon(x - \beta) + \bar{\varepsilon}(x - \beta)\varepsilon(x)\left[F(-\beta + x) - F(-\beta - x)\right]
\end{aligned} \tag{84}$$

olur, burada

$$\varepsilon(u) = \begin{cases} 1 & , \quad u \geq 0 \\ 0 & , \quad u < 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \bar{\varepsilon}(u) = 1 - \varepsilon(u)$$

dir. Böylece, $\pi(x)$ dağılım fonksiyonu

$$\pi(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \in (-\infty, 0] \\ F(-\beta + x) - F(-\beta - x) & , \ x \in (0, \beta] \\ 1 & , \ x \in (\beta, +\infty) \end{cases} \tag{85}$$

formundadır. Dolayısıyla $X(t)$ süreci için, ergodik olacak şekilde bir $\{\chi_n ; n \geq 1\}$ Markov zincirinin varlığı gösterilmiş olup bu zincire uygun gelen $\pi(x)$ stasyoner dağılım fonksiyonu da hesaplanmış oldu. Yani sözü edilen ergodiklik teoreminin birinci şartı sağlanmış oldu. Çünkü, her ölçülebilir ve sınırlı $\psi(x)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \psi(x)\, d\pi(x) &= \int_0^\beta \psi(x)\, d\pi(x) + \psi(\beta)[1 - F(0) - F(-2\beta)] \\
&= \int_0^\beta \psi(x)\, d_x[F(x-\beta) - F(-x-\beta)] + \psi(\beta)[1 - F(0) - F(-2\beta)] \\
&= \int_{-\beta}^0 \psi(u+\beta)\, dF(u) + \int_{-\beta}^{-2\beta} \psi(-u-\beta)\, dF(u) + \psi(\beta)[1 - F(0) - F(-2\beta)] \\
&= \int_{-\beta}^0 \psi(u+\beta)\, dF(u) - \int_{-2\beta}^{-\beta} \psi(-u-\beta)\, dF(u) + \psi(\beta)[1 - F(0) - F(-2\beta)] \\
&= \overline{\psi}(\beta)
\end{aligned} \tag{86}$$

bağıntısı gerçeklenir, burada

$$\overline{M}(*;x) = \int_{-\beta}^0 M(\beta+u;x)dF(u) - \int_{-2\beta}^{-\beta} M(-\beta-u;x)dF(u) + M(\beta;x)[1 - F(0) - F(-2\beta)]$$

dır.

Şimdi de söz konusu teoremin ikinci şartının sağlandığını, yani, $\tilde{\gamma}_{1\beta}$ rastgele değişkeninin beklenen değerinin sonlu olduğunu gösterelim. Ancak bunu yapmadan önce aşağıdaki yardımcı teoremleri verelim:

Yardımcı Teorem 1. Eğer $E[\xi_1] < \infty$ ve $P\{\eta_1 > 0\} > 0$ ise bu takdirde

$$\sup_{0 \le z \le \beta} P_z\{\gamma_{1\beta} \ge T_\alpha\} \le \alpha < 1$$

olacak şekilde $\alpha \in [0,1)$ ve $T_\alpha < \infty$ parametreleri mevcuttur.

İspat: ξ_1 rastgele değişkeninin beklenen değeri sonlu olduğundan

$$\Phi(T) = P\{\xi_1 < T\} = c_1 > 0 \tag{87}$$

olacak şekilde bir $T < \infty$ seçmek mümkündür. Ayrıca $P\{\eta_1 > 0\} > 0$ olduğundan

$$P\{\eta_1 \ge h\} = c_2 > 0 \tag{88}$$

olacak şekilde bir h seçmek mümkündür. c ile

$$c = P\{\xi_1 < T\ ;\ \eta_1 \geq h\} = c_1 c_2 \tag{89}$$

olasılığını gösterelim. Bu takdirde $c > 0$ olduğu aşikardır. Dolayısıyla, $\{(\xi_i, \eta_i)\}$, $i = 1,2,3,\ldots$ rastgele değişkenler dizisi bağımsız ve aynı tür dağılmış olduğundan

$$\begin{aligned}
&P\{\xi_1 + \xi_2 < 2T\ ;\ \eta_1 + \eta_2 \geq 2h\} \\
&\qquad = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty P\{\xi_1 \in du\ ;\ \eta_1 \in dv; u + \xi_2 < 2T;\ v + \eta_2 \geq 2h\} \\
&\qquad = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty P\{\xi_1 \in du\ ;\ \eta_1 \in dv\} P\{\xi_2 < T + (T - u);\ \eta_2 \geq h - (v - h)\} \\
&\qquad \geq \int_0^T \int_h^\infty P\{\xi_1 \in du\ ;\ \eta_1 \in dv\} P\{\xi_2 < T + (T - u);\ \eta_2 \geq h - (v - h)\} \\
&\qquad \geq \int_0^T \int_h^\infty P\{\xi_1 \in du\ ;\ \eta_1 \in dv\} P\{\xi_2 < T;\ \eta_2 \geq h\} \\
&\qquad = c \int_0^T \int_h^\infty P\{\xi_1 \in du\ ;\ \eta_1 \in dv\} \\
&\qquad = c\, P\{\xi_1 < T\ ;\ \eta_1 \geq h\} \\
&\qquad = c^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$P\{\xi_1 + \xi_2 < 2T\ ;\ \eta_1 > +\eta_2 \geq 2h\} \geq c^2 \tag{90}$$

olduğunu göstermiş olduk. Amacımız her $n \geq 1$ için

$$P\{T_n < nT\ ;\ Y_n \geq nh\} \geq c^n \tag{91}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermektir. $n = 1$ ve $n = 2$ için eşitsizliğin doğruluğu sırasıyla (89) ve (90) den görülmektedir. Matematiksel tümevarım metodunu kullanarak (91) nin daima doğru olduğunu göstermek için bu eşitsizliğin $n = k > 2$ için doğru olduğunu, yani,

$$P\{T_k < kT\ ;\ Y_k \geq kh\} \geq c^k$$

olduğunu varsayıp $n = k + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
&P\{T_{k+1} < (k+1)T\ ;\ Y_{k+1} \geq (k+1)h\} \\
&\qquad = P\{T_k + \xi_{k+1} < kT + T\ ;\ Y_k \geq kh + h\}
\end{aligned}$$

$$=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P\{\xi_{k+1}\in du;\eta_{k+1}\in dv\,;T_k<kT+(T-u);Y_k\geq kh-(v-h)\}$$

$$\geq\int_0^{\infty}\int_h^{\infty}P\{\xi_{k+1}\in du;\eta_{k+1}\in dv\}P\{\,T_k<kT+(T-u);Y_k\geq kh-(v-h)\}$$

$$\geq\int_0^{T}\int_h^{\infty}P\{\xi_1\in du;\eta_1\in dv\}P\{\,T_k<kT;Y_k\geq kh\}$$

$$=P\Big\{\,T_k<kT;Y_k\geq kh\Big\}\int_0^{T}\int_h^{\infty}P\Big\{\xi_1\in du;\eta_1\in dv\Big\}$$

$$=c^k\int_0^{T}\int_h^{\infty}P\Big\{\xi_1\in du;\eta_1\in dv\Big\}$$

$$=c^kP\Big\{\xi_1<T;\eta_1\geq h\Big\}$$

$$=c^{k+1}$$

dir. Böylece her $n\geq 1$ için

$$P\{T_n<nT\,;\;Y_n\geq nh\}\geq c^n$$

olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi, $\left[\left|a\right|\right]$ a sayısının tam kısmını göstermek üzere

$$N=\left[\left|\frac{\beta}{h}\right|\right]+1$$

olsun. Bu takdirde N sayısının tanımına göre, $\beta<\infty$, $h>0$ ve $N>\beta/h$ olduğundan $N<\infty$ ve $\beta<Nh$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla,

$$P\{Y_N\geq\beta\}\geq P\{Y_N\geq Nh\} \tag{92}$$

elde edilir. Bu nedenle, $N<\infty$ ve $c>0$ için

$$P\{T_N<NT\,;\;Y_N\geq\beta\}\geq P\{T_N<NT\,;\;Y_N\geq Nh\}\geq c^N>0$$

dir. Şimdi de aşağıdaki yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçlerini gözönüne alalım:

i) $W_0(t)=W_{0,n}$, eğer $T_n\leq t<T_{n+1}$ ise

olsun, burada $W_{0,n}=W_{0,n-1}+\eta_n$, $n\geq 1$; $W_{0,0}=0$ dir.

ii) $W_z(t)=W_{z,n}$, eğer $T_n\leq t<T_{n+1}$ ise

olsun, burada $W_{z,n} = W_{z,n-1} + \eta_n$, $n \geq 1$; $W_{z,0} = z \in [0,\beta]$ dir.

iii) $X_z(t)$ ile $X_z(0) = z \in [0,\beta]$ başlangıç pozisyonuna sahip yansıtan ve tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecini, yani bizim sürecimizi, gösterelim.

$\tilde{\gamma}$ ile $W_0(t)$ yarı markov rastgele yürüyüş sürecinin β-seviyesini ilk kez aşması anını gösterelim. Yani, $\tilde{\gamma} = \inf\{t > 0 : W_0(t) \geq \beta\}$ olsun. Buna göre,

$$\{w : \tilde{\gamma} < NT\} \supseteq \{w : T_N < NT; Y_N \geq \beta\} \tag{93}$$

bağıntısı gerçeklendiğini göstereceğiz.. Bunu göstermek için $w_0 \in \{w : T_N < NT; Y_N \geq \beta\}$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$\tilde{\gamma}(w_0) \leq T_N(w_0) < NT$$

dır, yani, $\tilde{\gamma}(w_0) < NT$ dir. Bunun sonucu olarak da $w_0 \in \{w : \tilde{\gamma} < NT\}$ elde edilir. Böylece (93) bağıntısının doğru olduğu gösterilmiş oldu. Sonuç olarak

$$P_0\{\tilde{\gamma} < NT\} \geq P_0\{T_N < NT;\ Y_N \geq \beta\} = P\{T_N < NT;\ Y_N \geq \beta\} \geq c^N > 0$$

ve dolayısıyla da

$$P\{\tilde{\gamma} \geq NT\} \leq 1 - c^N < 1 \tag{94}$$

olduğu görülür. Öte taraftan $X_z(t)$, $W_z(t)$ ve $W_0(t)$ süreçlerinin matematiksel kuruluşlarına bakılırsa 1 olasılıkla her $t \in [0, \gamma_{1\beta})$ ve $z \in [0,\beta]$ için

$$X_z(t) \geq W_z(t) \geq W_0(t),$$

olduğu aşikardır. Bu nedenle

$$P\left\{\sup_{0\leq s\leq t} X_z(s) \geq \beta\right\} \geq P\left\{\sup_{0\leq s\leq t} W_0(s) \geq \beta\right\}$$

dır. Diğer taraftan

$$P_z\{\gamma_{1\beta} < t\} = P\left\{\sup_{0\leq s\leq t} X_z(s) = \beta\right\}$$

ve

$$P_0\{\tilde{\gamma} < t\} = P\left\{\sup_{0\leq s\leq t} W_0(s) \geq \beta\right\}$$

dır. Bu sebeple, her $z \in [0,\beta]$ için

$$P_z\{\gamma_{1\beta} < t\} \geq P_0\{\tilde{\gamma} < t\}$$

veya buna denk olarak

$$P_z\{\gamma_{1\beta} \geq t\} \leq P_0\{\tilde{\gamma} \geq t\}$$

elde edilir. Bu takdirde,

$$\sup_{0\leq z\leq \beta} P_z\{\gamma_{1\beta} \geq t\} \leq P_0\{\tilde{\gamma} \geq t\}$$

dir. Bu eşitsizlikte özel olarak $t = T_\alpha = NT$ alınırsa, bu takdirde

$$\sup_{0\leq z\leq \beta} P_z\{\gamma_{1\beta} \geq T_\alpha\} \leq P_0\{\tilde{\gamma} \geq NT\}$$

elde edilmiş olur. Eğer $\alpha = 1 - c^N$ olarak seçilirse, $c > 0$ ve $N < \infty$ olduğundan istenilen sonuç elde edilir. Böylece Yardımcı Teorem 1 ispatlanmış olur.

Şimdi $E[\gamma_{1\beta}] < \infty$ olduğunu gösterelim.

Yardımcı Teorem 2. Eğer Yardımcı Teorem 1 in koşulları sağlanıyorsa, bu takdirde $\gamma_{1\beta}$ rastgele değişkeninin beklenen değeri sonludur, yani, $E[\gamma_{1\beta}] < \infty$ dır.

İspat: Her $z \in [0,\beta]$ için $P\{\gamma_{1\beta} \geq T_\alpha\} \leq \alpha < 1$ olacak şekilde $\alpha \in [0,1)$ ve $T_\alpha < \infty$ parametrelerinin bulunabileceğini Yardımcı Teorem 1 de göstermiştik. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
P_z\{\gamma_{1\beta} \geq 2T_\alpha\} &= \int_0^\beta P_z\{\gamma_{1\beta} \geq T_\alpha\,; X(T_\alpha) \in dv\} \\
&= \int_0^\beta P_z\{\gamma_{1\beta} \geq T_\alpha\,; X(T_\alpha) \in dv\} \,.\, P_v\{\gamma_{1\beta} \geq T_\alpha\} \\
&\leq \alpha \,.\, \int_0^\beta P_z\{\gamma_{1\beta} \geq T_\alpha\,; X(T_\alpha) \in dv\} \\
&= \alpha \,.\, P_z\{\gamma_{1\beta} \geq T_\alpha\} \\
&\leq \alpha^2
\end{aligned} \tag{95}$$

elde edilir.

Şimdi her $n \geq 1$ ve $z \in [0,\beta]$ için $P_z\{\gamma_{1\beta} \geq nT_\alpha\} \leq \alpha^n$ olduğunu göstermek için matematiksel tümevarım metodunu kullanalım. Eşitsizliğin $n = 1$ ve $n = 2$ için doğruluğu Yardımcı Teorem 1 ve (95) ifadesinden görülür. Şimdi eşitsizliğin $n = k > 2$ için doğru olduğunu, yani, $P_z\{\gamma_{1\beta} \geq kT_\alpha\} \leq \alpha^k$ olduğunu varsayalım ve $n = k + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim. Bu durumda

$$P_z\left\{\gamma_{1\beta} \geq (k+1)T_\alpha\right\} = P_z\left\{\gamma_{1\beta} \geq kT_\alpha + T_\alpha\right\}$$

$$= \int_0^\beta P_z\left\{\gamma_{1\beta} \geq k\,T_\alpha + T_\alpha \;\; ; \; X(k\,T_\alpha) \in dv\right\}$$

$$= \int_0^\beta P_z\left\{\gamma_{1\beta} \geq kT_\alpha ; \; X(kT_\alpha) \in dv\right\} . \; P_v\left\{\gamma_{1\beta} \geq T_\alpha\right\}$$

$$\leq \alpha \, . \int_0^\beta P_z\left\{\gamma_{1\beta} \geq kT_\alpha \; ; \; X(kT_\alpha) \in dv\right\}$$

$$= \alpha \, . P_z\left\{\gamma_{1\beta} \geq kT_\alpha\right\}$$

$$\leq \alpha^{k+1} \tag{96}$$

elde edilir. Böylece, her $n \geq 1$ and $z \in [0,\beta]$ için

$$P_z\left\{\gamma_{1\beta} \geq nT_\alpha\right\} \leq \alpha^n$$

olduğu gösterilmiş olur. Diğer taraftan

$$E_z\left[\gamma_{1\beta}\right] = \int_0^\infty P_z\left\{\gamma_{1\beta} \geq t\right\} dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)T_\alpha}^{nT_\alpha} P_z\left\{\gamma_{1\beta} \geq t\right\} dt$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)T_\alpha}^{nT_\alpha} P_z\left\{\gamma_{1\beta} \geq (n-1)T_\alpha\right\} dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} T_\alpha \, . P_z\left\{\gamma_{1\beta} \geq (n-1)T_\alpha\right\}$$

$$= T_\alpha \, . \sum_{k=0}^{\infty} P_z\left\{\gamma_{1\beta} \geq kT_\alpha\right\}$$

$$\leq T_\alpha \, . \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} T_\alpha \tag{97}$$

dır. $\alpha \in (0,1)$ ve $T_\alpha < \infty$ olduğundan her $z \in [0,\beta]$ için

$$E_z\left[\gamma_{1\beta}\right] \leq \frac{1}{1-\alpha} T_\alpha < \infty$$

elde edilir. Öte taraftan

$$E\left[\gamma_{1\beta}\right]=\int_0^{\beta} E_z\left[\gamma_{1\beta}\right].d\pi(z)$$

dır. α ve T_α sabitleri z den bağımsız olduğundan,

$$E\left[\gamma_{1\beta}\right]\leq \frac{T_\alpha}{1-\alpha}\int_0^{\beta} d\pi(z)=\frac{1}{1-\alpha}.T_\alpha<\infty$$

dır. Böylece Yardımcı Teorem 2 ispatlanmış olur.

Şimdi de $\widetilde{\gamma}_{1\beta}$ nın beklenen değerinin sonlu olduğunu gösterelim. $\gamma_{1\beta}$ ve $\widetilde{\gamma}_{1\beta}$ nın tanımları gözönüne alınırsa,

$$\widetilde{\gamma}_{1\beta}=\sum_{i=1}^{v_1+1}\xi_i=\sum_{i=1}^{v_1}\xi_i+\xi_{v_1+1}=\gamma_{1\beta}+\xi_{v_1+1}$$

olup ξ_i ler bağımsız aynı tür dağılıma sahip olduklarından

$$E\left[\widetilde{\gamma}_{1\beta}\right]=E\left[\gamma_{1\beta}+\xi_{v_1+1}\right]=E\left[\gamma_{1\beta}\right]+E\left[\xi_{v_1+1}\right]=E\left[\gamma_{1\beta}\right]+E\left[\xi_1\right]$$

elde edilir. O halde $E\left[\widetilde{\gamma}_{1\beta}\right]$ de sonludur. Böylelikle Gihman ve Skorohod tarafından verilmiş olan teoremin her iki şartının da sağlandığını göstermiş olduk. Yani $X(t)$ süreci ergodiktir.

Şimdi de $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımını $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla verelim. Bununla ilgili olarak daha önce verilenlere ek olarak bazı notasyonlara ihtiyacımız vardır. Önce bunları verelim.

$$A(z;x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z;x),$$

$$C(z;dv)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z;dv),$$

$$A(t;z;x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z;x)\Delta\Phi_n(t),$$

$$C(s;z;v)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z;v)\,\Phi_n(s),$$

$$C(ds;z;dv)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z;dv)d\Phi_n(s),$$

$$\overline{M}_f(v;*)=\int_0^{\beta} f(x)d_x M(v;x),$$

$$\overline{\overline{M}}_f(*;*)=\int_0^{\beta} f(x)d_x \overline{M}(*;x),$$

burada f sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyon $M(v;x)$ ise herhangi bir fonksiyondur.

Herhangi bir $M(t;z;x)$ fonksiyonunun t ye göre Laplace ve Laplace-Stieltjes dönüşümünü sırasıyla $\widetilde{M}(p;z;x)$ ve $M^*(p;z;x)$ ile gösterelim, yani

$$\widetilde{M}(p;z;x)=\int_0^{\infty} e^{-pt}M(t;z;x)dt$$

ve

$$M^*(p;z;x)=\int_0^{\infty} e^{-pt}d_t M(t;z;x)$$

olsun.

Herhangi iki $M(t;z;x)$ ve $N(t;z;x)$ fonksiyonu için $M(t;z;x)*N(t;z;x)$ ile aşağıdaki ifadeyi gösterelim:

$$M(t;z;x)*N(t;z;x)=\int_0^{t} N(t-s;z;x)\,d_s M(s;z;x).$$

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 7. Teorem 6 nın şartlarının sağlanması koşulu altında $f(x)$ ölçülebilir ve sınırlı herhangi bir fonksiyon olmak üzere $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı için aşağıdaki ifade doğrudur:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T} f(X(t))dt=\frac{\overline{\overline{R}}_f(*;*)}{\overline{R}(*;\infty)}, \tag{98}$$

burada

$$\overline{\overline{R}}_f(*;*)=\overline{\overline{A}}_f(*;*)+\int_{-\beta}^{0}\overline{C}(*;dv_1)\overline{A}_f(|v_1|;*)$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{-\beta}^{0}\ldots(n)\ldots\int_{-\beta}^{0}\overline{C}(*;dv_1)\prod_{i=2}^{n}C(|v_{i-1}|;dv_i)\overline{A}_f(|v_n|;*)$$

ve

$$\overline{R}(*;\infty)=\overline{A}(*;\infty)+\int_{-\beta}^{0}\overline{C}(*;dv_1)A(|v_1|;\infty)$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{-\beta}^{0}\ldots(n)\ldots\int_{-\beta}^{0}\overline{C}(*;dv_1)\prod_{i=2}^{n}C(|v_{i-1}|;dv_i)A(|v_n|;\infty)$$

dır.

İspat: Teorem 6 da, verilen koşullar altında, $X(t)$ süreci için "kesikli şans karışımlı süreçler için ergodik teoremi" adlı ergodiklik teoreminin her iki şartının da sağlandığını, yani sürecin ergodik olduğunu göstermiştik. Bu takdirde herhangi bir ölçülebilir ve sınırlı $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifade doğrudur (bkz. Gihman ve Skorohod [5], sh:244):

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))dt=\left[\int_{z=0}^{\beta}\int_{t=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\beta}f(x)P_z\{\tilde{\gamma}_{1\beta}\geq t:X(t)\in dx\}dt\pi(dz)\right]$$

$$\cdot\left[\int_{z=0}^{\beta}\int_{t=0}^{\infty}P_z\{\tilde{\gamma}_{1\beta}\geq t\}dt\pi(dz)\right]^{-1} \qquad (99)$$

dir. Bu durumda, amacımız (99) formülündeki kesrin pay ve paydasını $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade etmektir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki koşullu olasılıkları tanımlayalım:

$$R(t;z;x)=P_z\{\tilde{\gamma}_{1\beta}\geq t:X(t)<x\}$$

ve

$$r_n(t;z;x)=P_z\{\tilde{\gamma}_{1\beta}\geq t:X(t)<x:\nu_0(t)=n\},\ n\geq 0,$$

olsun, burada $\nu_0(t)$ $X(t)$ sürecinin t zaman zarfı süresince yansıtan bariyerden yansımalarının sayısını göstermektedir. Bu takdirde toplam olasılık formülüne göre $R(t;z;x)$ olasılığı

$$R(t;z;x)=\sum_{n=0}^{\infty}r_n(t;z;x)$$

olarak yazılabilir. O halde $r_n(t;z;x)$, $n\geq 0$, olasılıklarını $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade etmeliyiz: $n=0$ olduğunda

$$
\begin{aligned}
r_0(t;z;x) &= P_z\left\{\widetilde{\gamma}_{1\beta} \geq t : X(t) < x : \nu_0(t) = 0\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\left\{T_n \leq t < T_{n+1} ; \widetilde{\gamma}_{1\beta} \geq t : X(t) < x : \nu_0(t) = 0\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{z + Y_i \in [0,\beta], 1 \leq i \leq n ; z + Y_n \in [0,x]\right\} P\left\{T_n \leq t < T_{n+1}\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z;x) \Delta\Phi_n(t) \\
&= A(t;z;x) \qquad (100)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi $r_1(t;z;x)$ olasılığını hesaplayalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
r_1(t;z;x) &= P_z\left\{\widetilde{\gamma}_{1\beta} \geq t : X(t) < x : \nu_0(t) = 1\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P_z\left\{T_n \leq t < T_{n+1} ; \widetilde{\gamma}_{1\beta} \geq t : X(t) < x : \nu_0(t) = 1\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\beta}^{0} \int_{0}^{t} P\left\{z + Y_j \in [0,\beta] ; 1 \leq j \leq i-1 ; z + Y_i \in dv ; T_i \in ds\right\} \\
&\quad . P\left\{|v| + Y_j \in [0,\beta] ; 1 \leq j \leq n-i ; |v| + Y_{n-i} < x\right\} \Delta\Phi_{n-i}(t-s) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\beta}^{0} \int_{0}^{t} c_i(z;dv)\, d\Phi_i(s)\, a_{n-i}(|v|;x)\, \Delta\Phi_{n-i}(t-s) \\
&= \int_{-\beta}^{0} \int_{0}^{t} \left[\ \sum_{i=1}^{\infty} c_i(z;dv) d\Phi_i(s)\ \right]\left[\ \sum_{n=i}^{\infty} a_{n-i}(|v|;x) \Delta\Phi_{n-i}(t-s)\ \right] \\
&= \int_{-\beta}^{0} \int_{0}^{t} C(ds;z;dv) A(t-s;|v|;x) \\
&= \int_{-\beta}^{0} C(t;z;dv) * A(t;|v|;x) \qquad (101)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eğer (100) ve (101) ifadelerinde t argümentine göre Laplace dönüşümüne geçilirse, sırasıyla,

$$
\widetilde{r}_0(\lambda;z;x) = \widetilde{A}(\lambda;z;x)
$$

ve

$$
\widetilde{r}_1(\lambda;z;x) = \int_{-\beta}^{0} C^*(\lambda;z;dv) \widetilde{A}(\lambda;|v|;x)
$$

olduğu elde edilir. $r_n(t;z;x)$ in hesaplanabilmesi için genel bir formül verebilmek amacıyla $r_2(t;z;x)$ olasılığını da hesaplayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
r_2(t;z;x) &= P_z\left\{\tilde{\gamma}_{1\beta} \geq t : X(t) < x : \nu_0(t) = 2\right\} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} P_z\left\{T_n \leq t < T_{n+1}; \tilde{\gamma}_{1\beta} \geq t : X(t) < x : \nu_0(t) = 2\right\} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{2\leq i+k\leq n} \iint_{0\leq s+u\leq t} \int_{-\beta}^{0}\int_{-\beta}^{0} P\left\{z+Y_j \in [0,\beta]; 1\leq j\leq i-1; z+Y_i \in dv_1\right\} P\left\{T_i \in ds\right\} \\
&\quad . P\left\{|v_1| + Y_j \in [0,\beta]; 1\leq j\leq k-1; |v_1| + Y_k \in dv_2\right\} P\left\{T_k \in du\right\} \\
&\quad . P\left\{|v_2| + Y_j \in [0,\beta]; 1\leq j\leq n-k-i; |v_2| + Y_{n-k-i} \leq x\right\} \Delta\Phi_{n-k-i}(t-s-u) \\
&= \int_{-\beta}^{0}\int_{-\beta}^{0} \iint_{0\leq s+u\leq t} \left[\sum_{i=1}^{\infty} c_i(z;dv_1) d\Phi_i(s)\right]\left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k(|v_1|;dv_2) d\Phi_k(u)\right] \\
&\quad . \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell(|v_2|;x) \Delta\Phi_\ell(t-s-u)\right] \\
&= \int_{-\beta}^{0}\int_{-\beta}^{0} \iint_{0\leq s+u\leq t} C(ds;z;dv_1) C(u;|v_1|;dv_2) A(t-s-u;|v_2|;x) \\
&= \int_{-\beta}^{0}\int_{-\beta}^{0} C(t;z;dv_1) * C(t;|v_1|;dv_2) * A(t;|v_2|;x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan t değişkenine göre Laplace dönüşümüne geçilirse

$$\tilde{r}_2(\lambda;z;x) = \int_{-\beta}^{0}\int_{-\beta}^{0} C^*(\lambda;z;dv_1)\, C^*(\lambda;|v_1|;dv_2) \tilde{A}(\lambda;|v_2|;x)$$

olduğu görülür.

Benzer muhakemeyle, $|v_0| = z \in [0,\beta]$ olmak üzere her $n \geq 1$ için, matematiksel tümevarım metodunu kullanarak,

$$\tilde{r}_n(\lambda;z;x) = \int_{-\beta}^{0} \ldots (n) \ldots \int_{-\beta}^{0} \prod_{i=1}^{n} C^*(\lambda;|v_{i-1}|;dv_i) \tilde{A}(\lambda;|v_n|;x) \tag{102}$$

olduğu gösterilebilir. Bu nedenle,

$$\tilde{R}(\lambda;z;x) = \tilde{A}(\lambda;z;x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\beta}^{0} \ldots (n) \ldots \int_{-\beta}^{0} \prod_{i=1}^{n} C^*(\lambda;|v_{i-1}|;dv_i) \tilde{A}(\lambda;|v_n|;x) \tag{103}$$

dir. Böylece $\widetilde{R}(\lambda;z;x)$ i $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade etmiş olduk. Buradan $\lambda \to 0$ için limite geçersek

$$\int_0^\infty P_z\{\widetilde{\gamma}_{1\beta} \geq t; X(t) < x\}dt = \widetilde{R}(\lambda;z;x)\Big|_{\lambda=0} = \widetilde{R}(0;z;x)$$

$$= \widetilde{A}(0;z;x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\beta}^{0} \ldots(n)\ldots \int_{-\beta}^{0} \prod_{i=1}^{n} C^*(0;|v_{i-1}|;dv_i)\widetilde{A}(0;|v_n|;x)$$

elde ederiz. Şimdi $\widetilde{A}(0;z;x)$ değerini hesaplayalım:

$$\widetilde{A}(0;z;x) = \lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty A(t,z,x)e^{-\lambda t}dt$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z;x)\Delta\Phi_n(t)e^{-\lambda t}dt$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty a_n(z;x)\Delta\Phi_n(t)e^{-\lambda t}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z;x)\, E[\xi_1]$$

$$= E[\xi_1]A(z;x)$$

dir.

Şimdi de $C^*(0;z;dv)$ değerini hesaplayalım.

$$C^*(0;z;dv) = \lim_{\lambda\to 0} C^*(\lambda;z;dv)$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty} P\{z + Y_i \in [0,\beta]; 1 \leq i \leq n-1; z + Y_n \in dv\}d\Phi_n(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{z + Y_i \in [0,\beta]; 1 \leq i \leq n-1; z + Y_n \in dv\}.\lim_{\lambda\to 0} \int_0^\infty e^{-\lambda t}d\Phi_n(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{z + Y_i \in [0,\beta]; 1 \leq i \leq n-1; z + Y_n \in dv\}$$

$$= C(z;dv)$$

dir. Böylece,

$$\int_0^\infty P_z\{\widetilde{\gamma}_{1\beta} \geq t; X(t) < x\}dt = E[\xi_1]A(z;x)$$

$$+ E[\xi_1]\sum_{n=1}^\infty \int_{-\beta}^0 \ldots(n)\ldots \int_{-\beta}^0 \prod_{i=1}^n C(|v_{i-1}|;dv_i)A(|v_n|;x)$$

olduğu görülür. Buradan, $x \to \infty$ için limite geçilirse

$$\int_0^\infty P_z\{\widetilde{\gamma}_{1\beta} \geq t\}dt = E[\xi_1]A(z;\infty)$$

$$+ E[\xi_1]\sum_{n=1}^\infty \int_{-\beta}^0 \ldots(n)\ldots \int_{-\beta}^0 \prod_{i=1}^n C(|v_{i-1}|;dv_i)A(|v_n|;\infty)$$

elde edilir, burada

$$A(z;\infty) = A(z) = \sum_{n=0}^\infty P\{z + Y_i \in [0,\beta]; 1 \leq i \leq n\}$$

dir. Şimdi (99) formulündeki paydayı hesaplayalım.

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty P_z\{\widetilde{\gamma}_{1\beta} \geq t\}dt\right]d\pi(z) = E[\xi_1]\overline{A}(*;\infty) + E[\xi_1]\int_{-\beta}^0 \overline{C}(*;dv_1)A(|v_1|;\infty)$$

$$+ E[\xi_1]\sum_{n=2}^\infty \int_{-\beta}^0 \ldots(n)\ldots \int_{-\beta}^0 \overline{C}(*;dv_1)\prod_{i=2}^n C(|v_{i-1}|;dv_i)A(|v_n|;\infty)$$

$$= E[\xi_1]\overline{R}(*;\infty)$$

elde edilir. Benzer metodla

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty P_z\{\widetilde{\gamma}_{1\beta} \geq t; X(t) < x\}dt\right]d\pi(z)$$

$$= E[\xi_1]\overline{A}(*;x) + E[\xi_1]\int_{-\beta}^0 \overline{C}(*;dv_1)A(|v_1|;x)$$

$$+ E[\xi_1]\sum_{n=2}^\infty \int_{-\beta}^0 \ldots(n)\ldots \int_{-\beta}^0 \overline{C}(*;dv_1)\prod_{i=2}^n C(|v_{i-1}|;dv_i)A(|v_n|;x)$$

olduğu gösterilebilir.

Şimdi de (99) formülündeki payı hesaplayalım.

$$\int_0^{\beta}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(x)P_z\left\{\tilde{\gamma}_{1\beta} \geq t; X(t) \in dx\right\}dt\, d\pi(z)$$

$$= E[\xi_1]\overline{\overline{A}}_f(*;*) + E[\xi_1]\int_{-\beta}^{0}\overline{C}(*;dv_1)\overline{A}_f(|v_1|;*)$$

$$+ E[\xi_1]\sum_{n=2}^{\infty}\int_{-\beta}^{0}\ldots(n)\ldots\int_{-\beta}^{0}\overline{C}(*;dv_1)\prod_{i=2}^{n} C(|v_{i-1}|;dv_i)\overline{A}_f(|v_n|;*)$$

$$= E[\xi_1]\overline{\overline{R}}_f(*;*)$$

dir. Böylece, $E[\xi_1] < \infty$ olduğu da dikkate alınarak

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))dt = \frac{\overline{\overline{R}}_f(*;*)}{\overline{\overline{R}}(*;\infty)}$$

elde edilir ki bu da Teorem 6 nın ispatını tamamlar.

3. BULGULAR

Bu çalışmada, sıfır seviyesinde yansıtan ve $\beta\left(\beta > 0\right)$ seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci $X(t)$ ve bu sürecin önemli sınır fonksiyonalları sayılan, γ_1- sürecin ilk kez tutan bariyere düşmesi anı ve γ_2- sürecin ilk kez yansıtan bariyerden yansıması anı matematiksel olarak kurulmuş, γ_1 ve γ_2 nin dağılım fonksiyonları, moment çıkaran fonksiyonları, beklenen değer ve varyansları için açık formüller verilmiştir. $X(t)$ sürecinin bir boyutlu stasyoner olmayan dağılım fonksiyonları bir $\{T_n\}$ yenileme süreci ve bir $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade edilmiştir. Sürecin iki sıçrama anı arasındaki sürenin üstel, Erlang veya Ki-kare dağılımına sahip olması özel durumlarında γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları ve $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonları için formüller elde edilmiştir. Ayrıca, bazı varsayımlar altında $X(t)$ süreci için ergodik teorem ispatlanmış ve sürecin ergodik dağılım fonksiyonu bir $\{T_n\}$ yenileme süreci ve bir $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade edilmiştir.

4. İRDELEME

Son yıllarda hızla gelişen teknolojiyle birlikte bilim adamları hergün değişik problemlerle karşılaşmaktadırlar ve bu problemlerin çözümlenmesinde yeni yeni yöntemler geliştirmektedirler. Böylece her geçen gün yeni bilimsel istikametler ortaya çıkmaktadır. Yeni bilimsel istikametlerin ortaya çıkmasının en önemli sebebi ise gerçek hayatta karşılaşılabilen problemlerin birçoğunun çözümlenmesinde bilinen metodların yetersiz kalması veya çok zor uygulanabilir olmasıdır.

Bütün bu bilimsel gelişmelere paralel olarak olasılık teorisi de kendisini geliştirmiş ve hemen her bilim alanına girmiştir. Olasılık teorisi, soyut bir matematiksel disiplin olarak ele alındığında Ölçü Teorisinin bir parçası, rastgelelik olgusunun modellenmesinde uygulamalı bir matematiksel disiplin olarak ele alındığında ise İstatistik Teorisinin bir parçasıdır.

Olasılık teorisi, metot olarak olayları tek tek değil, toplu olarak inceleme metodunu kabul etmektedir. Bugün olasılık teorisinin uygulanmadığı alan hemen hemen hiç yoktur. Rastgele etkiler altında bulunan olayların matematiksel olarak açıklanması konusunda modeller oluşturan ve kurallar ortaya koyan olasılığın yöntemlerine, günümüzde astronomi, nükleer fizik, kimya, biyoloji, tıp, ruhbilim, toplumbilim, siyasal bilim, eğitim, ekonomi, işletme, yöneylem, veterinerlik, mühendislik, sigortacılık, planlama ve programlama, sistem güvenilirliği, kalite kontrolü, askeri operasyonlar ve meteoroloji alanlarında sık sık başvurulmaktadır. Olasılık metodları, matemetiksel metotlar yardımıyla ortaya çıkarılmış oldukları için olasılık teorisi, matematiğin bir dalı olarak gözetilir. Bu nedenle olasılık teorisi de matematiğin diğer dalları kadar mantıklı ve kesin sonuçlar verir. Özetle olasılık teorisi, matematiğin diğer dalları gibi, uygulama ihtiyaçlarından doğmuştur.

Yirminci yüzyılda olasılık teorisi modern bir aksiyomatik kuruluşa kavuşmuştur. Özellikle fen bilimlerinde zamandan zamana değişen olayların incelenmesiyle ilgili problemlerin çözümlenmesinde olasılık teorisinin önemli bir kısmını oluşturan stokastik süreçler teorisi kullanılmaktadır. Günümüzde hızla gelişmekte olan teknoloji ve ekonomiye paralel olarak stokların kontrol edilmesi ile ilgili birçok önemli problemler ortaya çıkmaktadır. Askeri stokların, rafineri stoklarının, kuyruk sistemlerinin v.s. kontrolünde ortaya çıkan bu tip problemler için ele alınan problemi tam olarak ihtiva eden stokastik süreçlerin matematiksel kuruluşlarının verilmesi oldukça önemlidir.

Stok kontrol teorisi, kuyruk teorisi ve güvenilirlik teorisindeki problemlerin çoğu bir bariyerli veya bariyersiz rastgele yürüyüş süreçleri yardımıyla ifade edilebilir öyle ki ele alınan probleme bağlı olarak bariyerler değişik tiplerden olabilir (yansıtan, tutan, yutan v.s.,). Bariyersiz ve bir bariyerli süreçler literatürde oldukça geniş bir şekilde çalışılmıştır.

Bu çalışmada ele alınan stokastik süreç ise özel bir rastgele yürüyüş sürecidir. Her şeyden önce ele alınan süreç iki bariyerli bir süreçtir. İki bariyerli süreçler literatürde pek az incelenmiş olmakla birlikte, incelenenler de daha çok ya basit rastgele yürüyüş süreçleri veya her iki bariyeride aynı tipli olan rastgele yürüyüş süreçleridir. Çalışmada ise iki farklı tipten bariyer; sıfır seviyesinde yansıtan bariyer ve $\beta\ (\beta > 0)$ seviyesinde ise tutan bariyer vardır.

Çalışmada ele alınan sürecin bir başka özelliği ise sürecin yarı-Markovluk özelliğine sahip olmasıdır, başka bir deyişle, sadece sıçrama anları dikkate alındığında sürecin Markov özelliğine sahip olmasıdır. Yani, bu çalışmada süreç, sıfır seviyesinde yansıtan bariyerli ve $\beta\ (\beta > 0)$ seviyesinde ise tutan bariyerli bir yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecidir. Bu özellikleriyle çalışma literatürde yapılmış olanlardan önemli derecede farklılık göstermektedir ve bu nedenle de oldukça önemlidir.

Çalışmanın yeni bir çalışma olmasına rağmen bazı değişiklikler yapmak ve varsayımlarla oynamak mümkündür. Her şeyden önce bariyerlerin yerleri ve tipleri değiştirilebilir. Mesela, sıfır seviyesinde yansıtan ve $-\beta\ (\beta > 0)$ seviyesinde tutan bariyer olabilir ki bu bizim sürecimizin eksi işaretlisi olacaktır veya bariyerlerin her ikisi de yansıtan olabilir v.s. Bunun dışında aynı sistemin aynı dağılıma uygun olarak çalışmasının beklenen bir durum olmasına rağmen $\{(\xi_i, \eta_i) : i = 1,2,\ldots\}$ rastgele değişken ikilileri dizisinin aynı dağılıma sahip olması varsayımı değiştirilebilir ve belki de kaldırılabilir. Çalışmanın çok daha güçleşecek olmasına rağmen bağımsızlık varsayımı kaldırılabilir. Yani ele alınacak probleme uygun olarak bariyerleri değiştirmek veya varsayımlar üzerinde değişiklikler yapmak suretiyle yeni yeni problemler ortaya çıkarılabilir.

Çalışmada sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları bir $\{T_n : n \geq 0\}$ yenileme süreci ve bir $\{Y_n : n \geq 0\}$ rastgele yürüyüş sürecinin olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade edilmiştir. Ancak bu yine de kullanılması oldukça güç bir ifadedir. Bu nedenle bazı hesaplamaları daha kolay yapabilmek için dağılım fonksiyonunu hesaplamaksızın onun Laplace dönüşümünü hesaplamak ve onunla çalışmak da mümkündür. Hatta çalışmada verilen sınır fonksiyonallerinin de Laplace dönüşümlerini hesaplamak ve bu dönüşümleri kullanarak bu fonksiyonallerin yüksek mertebeden momentlerini hesaplamak bu sınır fonksiyonallerinin dağılımlarını kullanmaktan daha kolay olabilir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada stok kontrol, kuyruk ve güvenilirlik teorilerindeki bir çok önemli problemin çözümlenmesinde kullanılan özel bir stokastik süreç ele alınmıştır. Bu tipten stokastik süreçler pek çok uygulama alanına sahip olmasına rağmen, literatürde yeteri kadar ele alınmamıştır. Bu nedenle, çalışmada " *Yansıtan ve tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci* " olarak adlandırılan bir $X(t)$ süreci bir $\{T_n : n \geq 0\}$ yenileme süreci ve bir $\{Y_n : n \geq 0\}$ rastgele yürüyüş süreci yardımıyla matematiksel olarak kuruldu ve bu süreç ile ilgili aşağıdaki teorik sonuçlar ortaya konuldu.

$X(t)$ sürecinin tutan bariyere ilk kez düşme anının $(\gamma_1 \text{ in})$ ve yansıtan bariyerden ilk kez yansıma anının $(\gamma_2 \text{ nin})$ dağılım fonksiyonları, moment çıkaran fonksiyonları ve beklenen değerleri verildi. İki sıçrama anı arasındaki sürenin üstel, Erlang veya Ki-kare dağılımlarına sahip olması durumlarında γ_1 ve γ_2 nin dağılım fonksiyonları, moment çıkaran fonksiyonları ve beklenen değerleri için aşikar formüller elde edildi.

$X(t)$ sürecinin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları verildi ve iki sıçrama anı arasındaki sürenin üstel, Erlang veya Ki-kare dağılımlarına sahip olması özel durumları için bu dağılım fonksiyonlarının aşikar formülleri verildi.

Ayrıca en genel şartlar altında $X(t)$ sürecinin ergodik olduğu ispatlandı ve sürecin ergodik olması durumunda ergodik dağılım fonksiyonu bir $\{T_n : n \geq 0\}$ yenileme süreci ve bir $\{Y_n : n \geq 0\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karekteristikleri yardımıyla ifade edildi.

6. ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmanın stokastik süreç teorisindeki önemli bir eksikliği gidereceği umulmaktadır. Bununla beraber bu çalışmanın aşağıdaki yönlerde geliştirilmesi ve benzer sonuçların elde edilmesi de mümkündür:

1. $\{(\xi_i, \eta_i) : i = 1,2,\ldots\}$ rastgele değişken ikilileri dizisinin bileşenlerinin bağımlı olması durumunda sürecin yeniden ele alınması ve benzer çalışmaların yapılması.

2. Sürecin dağılım fonksiyonunun hesaplanmasının güç olduğu durumlarda dağılım fonksiyonunun Laplace dönüşümünün hesaplanması.

3. Ele alınan sürecin bariyerlerinin değiştirilmesi veya her iki bariyerininde yansıtan bariyer olması durumunda benzer incelemelerin yapılması.

4. Ele alınan sürecin asimptotik davranışının incelenmesi ve süreç için seri şeklinde limit teoremlerinin ifade ve ispat edilmesi.

5. Yapılan çalışmada teorik olarak ortaya konulmuş sonuçların uygulanabileceği alanların tespit edilmesi ve uygulanması.

6. Süreçle ilgili bazı sayısal karekteristiklerin hesaplanmasında kullanılabilecek olan uygun bilgisayar programlarının geliştirilmesi.

7. Çalışmada ele alınan özel dağılımların dışındaki bazı dağılımlar için de benzer hesaplamaların yapılması.

8. Simülasyon metodlarını da kullanarak çalışmada teorik olarak elde edilen sonuçların bazı yaklaşık değerlerinin hesaplanması.

7. KAYNAKLAR

1. Levy, P., Processus semi - Markoviens. Proc. III. Internat. Congr. Math., 1954 Amsterdam, 416-426.

2. Smith, W. L., Regenerative stochastic processes, Proc. Roy. Soc. Edinburg Ser. A, 232, (1955) 6-31.

3. Takacs, L., Bizonyus tipusu requrrens sztochasztikus folyamotok vizsgalatarol, Magyartud. Akad. Math. Kutato. Int. Kozl., k3, 1954, 1-2.

4. Çınlar, E., Some joint distributions for Markov renewal processes, Austral. J. Stat., 10, (1968) 1.

5. Gihman, I. I. ve Skorohod, A. V., Theory of Stochastic Processes 2, Springer-Verlag, New York, 1975.

6. Serfoza, R. F., Functions of emi-Markov processes, SIAM J. Appl. Math., 20, (1971) 3.

7. Ezhov, I. I. ve Korolyuk, V. S., Semi-Markovian processes and their applications (Russian), Cybernetica, 5, Kiev 1967, 58-65.

8. Nasirova, T. H., Processes of semi-Markov Walk (Russian), Baku : EHLM.

9. Borovkov, A. A., Stochastic Processes in Queueing Theory., X1, Springer-Verlag. X1., New York, 1976.

10. Borovkov, A. A., On a walk in a strip with inhibitory boundaries, Math. Notes, 17, (1975) 385-389.

11. Borovkov, A. A., On the first passage time for one class of processes with independent increments, Theor. Prob. Appl., 10, (1965) 331-334.

12. Korolyuk, V. S. ve Turbin, A. F., Semi - Markov processes and their applications (Russian), Kiev : Izdatel'stvo, Nauka Dumka, R. 1. 12, 1976.

13. Çınlar, E., Introduction to stochastic processes, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

14. Çınlar, E., Markov renewal theory, Adv. Appl. Probab., 1, (1975) 123-187.

15. Takacs, L., Combinatorial methods in the theory of stochastic processes, 2nd ed , Huntington, New York : Robert E. Krieger Publishing Co. X1, 1977.

16. Korolyuk, V. S. ve Pirliev, B., Random walk on a semi-axis on a superposition of two renewal processes (Russian), Ukr. Math. Zh., 36, 4, (1984) 433-436.

17. Tomko, J., On the theory of semi-Markov processes with a general state space (Russian), Teor. Veroyatn. Primen., 34, 2, (1989) 314-329.

18. Smith, W. L., Renewal theory and its ramifications, Journ.Roy.Statist. Soc., 20, (1958) 243-302.

19. Smith,W.L., Some peculier semi-Markov processes, Proc.5-Th Berkelly Symp. Math.Statist. And Probab., 2, 2, 1965-1966, 255-263.

20. Spitzer, F., Principles of random walk, Princeton, N. J.: D. Van Nostrand, 1964.

21. Spitzer, F., A combinatorial lemma and its applications to probability theory, Trans.Amer. Math. Soc., 82, (1956) 323-339.

22. Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications II , 2nd Ed., Wiley, New York, 1971.

23. Feller, W., On semi-Markov processes, Proc. Nat. Acad. Sci.USA ,51, 4, 1964.

24. Anisimov, V. V., Limit distributions of functionals of a semi - Markov process given on a fixed set of states, up to the time of first exit, Überstzung in Soviet Math., 11, (1970) 1002-1004.

25. Anisimov, V. V., The limiting behaviour of a semi - Markov process with a decomposable state space, Soviet Math., 13, (1973) 1276-1279.

26. Gnedenke, I. I. ve Kovalenko, I. N., Introduction to queing theory, IX, Translation edited by D. Louvish, Jerussalem : Israel Program for Scientific Translation, 1968.

27. Shurenkov, V. M., Ergodic Markov processes (Russian), Ed. By A. N. Kolmogorov, Teoriya, Veroyatnostej i Matematichheskaya statistica, 41, Moskva Nauka, 1989.

28. Shurenkov, V. M., Ergodic Theorems and related questions of the theory of random processes (Russian), Kiev, Naukova Dumka, 1981.

29. Shurenkov, V. M., On the Markov renewal theory, Teor. Veroyatn. Primen., 29, 2,(1984) 248-263.

30. Rogozin, B. A., On the distribution of the first jump, Theory Probab. Appl., 9, (1964) 450-464.

31. Gusak, D. V. ve Korolyuk, V. S., On the first passage time across a given level for processes with independent increments, Theor. Probab. Appl., 13, (1968) 448-456.

32. Rogozin, B. A., On some classes of processes with independent increments, Theory Probab. Appl., 10, (1965) 479-483.

33. Gusak, D. V., On the joint distribution of the first exit time and exit value for homogeneous process with independent increments, Theor. Probab. Appl., 14, (1969) 14-23.

34. Gusak, D. V. ve Korolyuk, V. S., On the joint distribution of the process with stationary movements and its maximum, Theor. Probab. Appl., 14, (1969) 400-469.

35. Skorohod, A. V., Random processes with independent increments, Moscow: Nauka, 1967.

36. Ezhov, I. I. ve Shurenkov V. S., Ergodic theorems connected with the Markov property of random , Theor. Probab. Appl., 21, (1977) 620-624.

37. Sil'vestrov, D. S., Limit theorems for semi-Markov processes and their applications I., Theor. Probab. Math. Statist., 3, (1975) 159-176.

38. Sil'vestrov, D. S., Limit theorems for semi-Markov processes and their applications II., Theor. Probab. Math. Statist., 3, (1975) 177-198.

39. Dzhafarov, V. S., Nasirova, T. H. ve Skorohod, A. V., On the limit of certain process with semi independent increments, Theor. Probab. Math. Statist., 5, (1976) 52-57.

40. Korolyuk, V. S. Ve Svishchuk, A. V., Limit representation of continuous semi-Markovian random evolutions in as sheme of series (Russian), Ukr. Math. Zh., 41, 11, (1989) ,1476-1482.

41. Skorohod, A. V. ve Slobodenyuk, N. P., Limit theorems for random walks, Ukr. SSSR; Nauka Dumka, 1970.

42. Harlamov, B. P., On convergence of semi-Markov walks to a continuous semi-Markov process, Theor. Probab. Appl., 21, (1977) 482-498.

43. Nasirova, T. H. ve Skorohod, A. V., On a class of jump processes with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 16, (1978) 81-94.

44. Nasirova, T. H., On ergodic theorems for some semi-Markov processes with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 20, (1979) 90-97.

45. Nasirova, T. H., Distribution of a semi-Markov walk process with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 20, (1979) 90-97.

46. Korolyuk, V. S. ve Borovskikh, Y. U., Analytical problems for asymptotics of probability distributions, Nauka Dumka, Kiev, 240 shf.

47. Lotov, V. I., On random walks within a stripe, Theor.Veroyatn. Primen., 36, 1, (1991) ,160-165.

48. Lotov, V. I., On the asymptotics of distributions in two-sided boundary problems for random walks defined on a Markov chain, Sib. Adv. Math., 1,3, (1991) 26-51.

49. Prabhu, N. U., Stochastic storage processes , New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 140 shf.

50. Zhang, Y. L., Some problems on a one dimensional correlated random walk with various types of barriers, J. Appl. Probab., 29, (1992) 196-201.

51. El-Shehawey, M. A., Limit distribution of first hitting time of delayed random walk, J. Ind. Soc. Oper. Res., 13, 1-4, (1992) 63-72.

52. Weesakul, B., The random walk between a reflecting and an absorbing barrier, Ann. Math. Statist., 23, (1961) 765- .

53. Kastenbaum, M. A., A dialysis system with one absorbing and one semi-reflecting state, J.Appl. Probab., 3, (1966) 363- .

54. Lotov, V. I., On asymptotics of distributions related to the departure of a non-discrete random walk from an interval (Russian), Predel'nye Teoremy Teori i Veroyatnoste i Smezhnye Vpoprosy, 1, (1982) 18-25.

55. Afanas'eva, L.G. ve Bulinskaya, E. V., Stochastic processes in the theory of queues and inventory control (Russian), Moskva, 1980.

56. Afanas'eva, L. G. ve Bulinskaya, E. V., Storage capacity optimization, Eng. Cybern., 19, 5, (1981) 49-57.

57. Afanas'eva, L. G. ve Bulinskaya, E. V., Some asyptotic results on random walks in a stripe, Teor. Veroyatn. Primen., 29, 4, (1984) 654-668.

58. Khaniev, T. A., Distribution of a semi-Markov walk with two delay screens (Russian), Some questions of the theory of stochastic processes , Kiev 1984, Collect sci. Works, 106-113.

59. Khaniev, T. A., An ergodic theorem for a semi-Markov walk with two delay screens (Russian), İzv. Acad. Nauk. Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Math. Nauk , 4, (1986) 37-42.

60. Khaniev, T. A., The explicit form of the ergodic distribution of the process of semi-Markov walk dependent components (Russian), Probabilistic method for the investigation of systems with an infinite number of degrees of freedom , Kiev, 1986, Collect. Sci. Works, 119-125.

61. Khaniev, T. A., Distribution of a Process of semi-Markov walk on a closed interval with exponentially distributed components, İzv. Acad. Nauk. Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Math.Nauk , 1, (1988) 45-50.

62. Nasirova, T. H., Yapar, C. ve Khaniev, T. A., On some probability characteristics of the complex semi-Markovian random walk with reflecting and delaying screens, Cybernetica and System Analysis.

8. ÖZGEÇMİŞ

Selahattin Maden, 10. 07. 1965 tarihinde Samsun İli Vezirköprü İlçesi Gömlekhisar Köyü' nde doğdu. İlk öğrenimini Gömlekhisar Köyü İlkokulu'nda, Orta ve Lise öğrenimini ise Vezirköprü İmam Hatip Lisesi'nde tamamladı. 1984-1985 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyet Fakültesi Matematik Bölümü' ne girdi. 1989 yılında bu bölümden mezun olan Selahattin Maden Ekim 1989 da aynı bölümde Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı nda araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 1990 yılında başlamış olduğu, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programından 1994 yılında mezun oldu ve aynı yılda aynı Enstitünün aynı Anabilim dalında Doktora programına kayıt oldu. Halen Karadeniz Teknik Üniversitesi'ndeki görevine devam etmektedir. Evli olup Şeyma ve Tuğba isimlerinde iki kız çocuğu babasıdır.