38386

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLLERİN FUZZY ÇARPIMI ve EŞ ÇARPIMININ BİR KARAKTERİZASYONU

Osman KAZANCI

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
" Doktor "
Ünvanı Verilmesi için Kabul Edilen Tezdir

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 / 02 / 1995
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 26 / 05 / 1995

Tezin Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. M. Sabri TERZİ
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ergün BAYAR
Jüri Üyesi : Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Temel SAVAŞKAN

Şubat 95

TRABZON

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, modüllerin ailesi üzerine bir kategori konularak, t-seviyesinde fuzzy çarpım ve eş çarpımın mevcut olduğu gösterilmiştir. Ayrıca; fuzzy modül homomorfilerinin bir karakterizasyonu verilerek fuzzy altmodüllerle fuzzy modül homomorfilerin arasındaki ilişki ortaya konulmuştur.

Bu çalışmayı bana öneren ve çalışma süresince hiç bir yardımdan kaçınmayan, yapıcı tenkitleriyle çalışmamı sağlayan, çalışmalarımda büyük yardımlarını ve yakın ilgisini esirgemeyen saygı değer hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. M. Sabri Terzi'ye ve Sayın Prof. Dr. Ergün Bayar'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışma süresince beraber tartıştığımız meslektaşım Sayın Arş. Gör. Sultan Yamak'a ve bu çalışmayı destekleyen Araştırma Fonu çalışanlarına teşekkür eder saygılar sunarım.

Trabzon, Şubat 1995 Osman KAZANCI

İÇİNDEKİLER **Sayfa No**

ÖZET

Bu çalışmada, tam dağılımlı tam kafes üzerinde fuzzy modül homomorfileri ve fuzzy modül homomorfileri ile fuzzy altmodüller arasındaki ilişki ortaya konulmuştur. Modüllerin kategorisinde t-seviyesinde fuzzy çarpım ve eş çarpım karakterize edilerek, bu kategoride çarpım ve eş çarpımın üniversal özelliğe sahip olduğu gösterilmiştir.

Fuzzy mantık tanıtılarak kümeler ve fuzzy kümeleri arasındaki bazı özellikler verilmiştir. 3. Bölüm olan Bulgular bölümünün 1. kısmı ise, 3.2 ve 3.3 de yapılan çalışmalara ön hazırlık niteliğindedir. Burada fuzzy altgrupların, fuzzy althalkaların ve fuzzy ideallerin yapısı ele alınmıştır.

3.2. de fuzzy modül homomorfileri incelenmiş, klasik homomorfi teoremleri fuzzy ye taşınmıştır. Fuzzy modül homomorfisinin çekirdeği ve resminin tanımları verilerek bunların altmodül olduğu gözlenmiştir. Ayrıca; fuzzy modül homomorfileri ile fuzzy altmodüller arasındaki ilişki bir teoremle karakterize edilmiştir.

Son olarak, modüllerin kategorisinde çarpım ve eş çarpım tanımları verilerek bunlarla ilgili bazı önemli teoremler ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Fuzzy fonksiyon, fuzzy lojik, fuzzy homomorfi, fuzzy çarpım ve eş çarpım.

SUMMARY

A Characterization of Fuzzy Product and Coproduct Modules

In this study, fuzzy module homomorphisms on the completely distributed complete lattices and the relation between fuzzy module homomorphisms and fuzzy submodules have been established. It has been shown that, the fuzzy product and coproduct have the universal property by characterizing the fuzzy product and coproduct of t - level in the category of modules.

After the introduction to the fuzzy logic, some relations between sets and fuzzy sets has been investigated . The first section of chapter 3 is in a preliminary form to the next chapter. Here, the structure of fuzzy subgroups, fuzzy subrings and fuzzy ideals have been considered.

In section 3.2., the fuzzy module homomorphisms have been discussed and the theorems in classical homomorphisms have been carried to the fuzzy module homomorphism. In addition definition of kernel and image of a fuzzy module homomorphism have been given and it has been observed that these are submodules. In addion, the relation between fuzzy module homomorphism and fuzzy submodules has been characterized by a theorem.

Finally, after the definitions of fuzzy product and coproduct of t-level in the category of modules, some theorems concerning these concepts have been proved.

Key Words: Fuzzy function, fuzzy logic, fuzzy homomorphism, fuzzy product and coproduct.

1. GENEL BİLGİLER (Literatür Araştırması)

1.1. Giriş

Belirsiz kümeler "fuzzy kümeleri", ilk olarak 1965 de Zadeh ile başlamış ve günümüz lojiğinde birçok alanda uygulama olanağı bulmuştur [1]. Zadeh, kümeleri elemanlarının üyelik dereceleri ile belirlemiştir. Bu yaklaşım, bir çok araştırıcıyı ortak bir lojik oluşturmaya götürmüştür. [2], [3]. Ancak; bu beklenildiği gibi gelişmemiştir. Sadece; klasik lojik, karakteristik fonksiyonlar yardımıyla geliştirilen fuzzy lojiğe taşınmıştır.

Teori, Rosenfeld tarafindan 1971'de fuzzy cebirsel yapılara taşınarak, bir G grubunun fuzzy altgrubu tanımlanmıştır [4]. Rosenfeld tarafindan verilen bu tanım Negoita ve Ralescu [5], Anthony ve Sherwood [6] tarafindan genelleştirilmiştir. Das, 1981'de asal mertebeli devirli bir grubun tüm fuzzy altgruplarının karakterizasyonunu, üyelik fonksiyonları yardımı ile karakterize etmiştir. Ayrıca; sonlu devirli bir grubun tüm fuzzy altgrublarının bir karakterizasyonunu, seviye altgrupları yardımı ile vermiştir [7]. Anthony ve Sherwood, 1982'de [0,1] üzerinde bir t-norm tanımlayarak, teoriyi genellemiştir [8]. Liu, 1982' de fuzzy invaryant altgrupları ve fuzzy ideallerin bir karakterizasyonunu vermiştir [9].

Fakat; bu alanda yapılan çalışmalar, $[0\ ,\ 1]\subseteq\mathbb{R}$ üzerinde olmuştur. Liu, 1983'de L tam dağılımlı tam kafes olmak üzere L-fuzzy ideallerin bir karakterizasyonunu vermiştir [10]. Bu aşamadan sonra, teori iki ayrı yoldan ilerlemeye başlamıştır. Kumbhojker ve Bapat, halka homomorfisi altında fuzzy ideallerin bir karakterizasyonunu vererek, iki halkanın fuzzy ideallerinin halka homomorfisi altındaki ilişkisini ortaya koymuştur. Ayrıca; halkalarda fuzzy idealin yan sınıflarını tanımlayarak, yan sınıflar ve bölüm halkaları ile ilgili bazı önemli teoremler ifade ve ispat etmiştir. Eroğlu, bir grup (halka, cebir) homomorfisi altında fuzzy altgrubun (fuzzy althalka, fuzzy altcebir) resmi ve ters resminin fuzzy altgrup (fuzzy althalka, fuzzy altcebir) olduğunu ispat etmiştir [11]. Malik ve Mordeson, bir halkanın fuzzy althalkalarının ve fuzzy ideallerinin bir karakterizasyonunu vermiştir. Daha sonra t-seviyesinde fuzzy fonksiyon, fuzzy homomorfi tanımlarını vererek, bunlarla ilgili önemli teoremler ispat etmiştir. Ayrıca; fuzzy halkaların fuzzy direkt toplamını vermiştir [13], [14], [15]. Pan, fuzzy sonlu üretenli modüller ve fuzzy bölüm modülleri karakterize etmiştir [16], [17]. Zahedi, bir M-R modülün L- fuzzy altmodül kavramını , L-fuzzy ilkel (asalımsı) altmodüllere genelleştirerek bazı sonuçlar elde etmiştir. Ayrıca L-fuzzy bölüm modülünün yeni bir tanımını vererek, Pan'ın [16] verdiği tanımda halka ve modül üzerine hiç bir kısıtlama koymadan, bu tanımla bölüm modülleri için bazı sonuçlar elde etmiştir [18], [19].

1.2. Belirsiz Kümeler

Belirsiz kümeleri daha yakından tanımak için kümeler kavramı ele alınsın. Ortak bir isim altında toplanmış nesnelere küme denir. Örneğin; " K . T. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi'nde Okuyan Öğrenciler" bir küme oluşturur. Eğer; K. T. Ü.'de okuyan tüm öğrencilerin içinde bulunduğu kümeye evrensel küme denirse, bu kümeden bir takım öğrencileri ayırıp ortak bir isim altında toplaması yeni bir küme oluşturur. Şimdi, herhangi bir öğrenci ele alınsın. Bu öğrenci K. T. Ü. Fen - Edebiyat Fakültesi'nde ya okuyor ya da okumuyor olacaktır. Yani yapılan tanımlama her bir öğrenciyi ya Fen - Edebiyat Fakültesi'nde okuyanlar kümesine sokuyor, yada dışında bırakıyor. Bir kümeyi belirlemek için iki yöntem kullanılabilir. Birincisi kümenin elemanlarını isim isim sayıp kümeyi oluşturmak:

Fen - Edebiyat Fakültesi'nde Okuyanlar = {Banu, Oya, Işıl}

Bu yöntem, doğallıkla, ancak sonlu sayıda elemanı olan kümeleri tanımlamakta kullanılabilir. İkinci yöntem ise, bir karakteristik fonksiyon tanımlamak. Bu karakteristik fonksiyon, evrensel kümenin tek tek bütün bireylerinin bir kümenin içine girip girmediğini söyler.

Öyle bir karakteristik fonksiyon tanımlanır ki; eğer bir nesne bir kümenin elemanı ise, o kümeyi tanımlayan karakteristik fonksiyon 1, değilse 0 sonucunu verir. Yani; karakteristik fonksiyon evrensel kümenin her bir elemanını {1,0} kümesine eşler. Şimdi, yeni bir küme tanımlansın. "Fen - Edebiyat Fakültesi'nde Okuyan Gençler" kümesi göz önüne alınsın. 18 yaşındakiler bu kümeye rahatlıkla girerler, fakat, 25 yaşındakiler, 30 yaşındakiler, acaba sınır nerede bırakılabilir. Şöyle bir tanım yapılacak olursa, eğer birisi 25 yaşından küçükse genç, büyük ise yaşlı. 26 yaşında birisi için ne söylenebilir. İşte belirsiz kümeler burada önem kazanmaktadır. En kaba tanımıyla bir belirsiz küme, sınırları kesin cizgilerle belirlenmemiş bir kümedir. Başka bir ifade ile, bir belirsiz kümeyi oluşturan her bir eleman kısmen o kümenin elemanı olabilir. Yani, her bir elemanın bir üyelik derecesi vardır. Bu durumda eğer genç insanların kümesi oluşturulmak istenirse, 26 yaşındaki birisi bu kümenin kısmen elemanıdır denilebilir.

Belirsiz kümeleri normal kümelerde olduğu gibi ya elemanları tek tek sayılır, ek olarak da her bir elemanın üyelik derecesi de belirtilir.

Fen - Edebiyat Fakültesi'nde Okuyan Gençler = {1.0 Banu, 0.5 Oya, 0.8 Işıl }

Burada, isimlerin yanındaki sayılar, o kişinin ne kadar "genç" olduğunu, başka bir ifade ile "Fen-Edebiyat Fakültesi'nde Okuyan Gençler" kümesinin elemanı olduğunu gösterir. Yukarıdaki örnekte, Banu tümüyle "genç", Oya ise "yarı yarıya" genç olarak düşünülmüştür. Kümeleri betimlemek için kullanılan karakteristik fonksiyonlara benzer olarak, belirsiz kümeleri ifade etmek için de karakteristik fonksiyon tanımlanabilir. Öyle bir fonksiyon tanımlanabilir ki; bu fonksiyon, her bir eleman için bir üyelik derecesi verir. Yani karakteristik fonksiyon evrensel kümenin her bir elemanını için 0.0 ile 1.0 arasında bir gerçel sayı verir. Gençler kümesi örneği göz önüne alınacak olursa,

$$fG(y) = \begin{cases} 1.0, & y \leq 20 \\ -0.02.y+1, \quad y>20, & y \leq 40 \\ 0.0, & y>50 \end{cases}$$

olarak ifade edilebilir. Doğal olarak, gençler için başka bir karakteristik fonksiyon tanımlanabilir. Ayrıca; belirsiz kümelerin karakteristik fonksiyonlarına üyelik fonksiyonları da denmektedir. Normal kümelerin, elemanların üyelik dereceleri 1.0 olan birer belirsiz küme olduğu açıktır. Yani; belirsiz kümeler normal kümeleri de bir özel durum olarak içermektedir. Şimdi; Fen - Edebiyat Fakültesi öğrencisi olup, boyu 1.70 olan öğrenciler kümesi göz önüne alınsın. Fen - Edebiyat Fakültesi öğrencisi olanların kümesine X, boyu 1.70 olan öğrencilerin kümesine Y denilirse, Fen - Edebiyat Fakültesi öğrencisi olup boyu 1.70 olanların kümesi

$$Z = X \cap Y$$

ve Fen - Edebiyat Fakültesi öğrencileri veya boyu 1.70 olanların kümesi de

$$W = X \cup Y$$

olarak tanımlanır. Belirsiz kümeler dünyasında, bu iki küme tanımlamasının Zadeh, tarafindan verilen matematik tanımları sırasıyla şöyledir:

$$Z = \min(f_X(x), f_Y(x)) \text{ ve } W = \max(f_X(x), f_Y(x))$$

Burada $f_X(x)$ ve $f_Y(x)$ X ve Y kümelerinin karakteristik fonksiyonlarıdır.

Kümeler kuramı, matematiğin hemen her alanında etkili olmasına karşın, belirsiz kümeler de yeni yeni matematiksel kavramların doğmasına, araştırma kavramlarının çıkmasına, mühendislik uygulamalarının tasarımlanmasına yol açmıştır. [20].

1.3. Belirsiz Mantık

α bir önerme olmak üzere, $[\alpha]$ ile α önermesinin doğruluk derecesi gösterilsin. Klasik mantıkta $[\alpha] = 1$ veya $[\alpha] = 0$ olduğu biliniyor. Ancak belirsiz mantıkta $[\alpha]\in[0,1]\subseteq\mathrm{IR}$ dir.

α önermesinin değili $\neg\alpha$ ile gösterilsin. Bu taktirde $[\neg\alpha] = 1-[\alpha]$ olacaktır. Şimdi α, β iki önerme olsun.

$$[\alpha\wedge\beta] = \min(\ [\alpha], [\beta]\ )\ ,\ [\alpha\to\beta] = \min(\ 1,\ 1-[\alpha] + [\beta]\ )$$

olarak tanımlansın. Eğer $[\alpha] = 1$ ise, bu $\perp\alpha$ ile gösterilsin. $\perp\alpha\to\beta$ olsun. Bu taktirde,

$\min(\ 1,\ 1-[\alpha]+[\beta]\ ) = 1 :\Leftrightarrow 1-[\alpha]+[\beta]\geq 1 \Leftrightarrow [\alpha]\leq[\beta]$ elde edilir.

$$[\alpha\vee\beta] = [\neg(\neg\alpha\wedge\neg\beta)] = 1-[\neg\alpha\wedge\neg\beta] = 1-\min(\ [\neg\alpha], [\neg\beta]\ ) = 1-\min(1-[\alpha],\ 1-[\beta])$$
$$=1+\max(\ [\alpha]-1,\ [\beta]-1\ ) = \max(\ [\alpha], [\beta]\ )$$

$\alpha\leftrightarrow\beta = (\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)$ olarak tanımlansın. Bu taktirde,

$$[\alpha\leftrightarrow\beta] = [(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)] = \min(\ [\alpha\to\beta], [\beta\to\alpha]\ )$$
$$= \min(\min(1,\ 1-[\alpha]+[\beta]),\ \min(1,\ 1-[\beta]+[\alpha]))$$
$$= \min(1,\ 1-[\alpha]+[\beta],\ 1-[\beta]+[\alpha]\ )$$

$\perp\alpha\to\beta \Leftrightarrow [\alpha] \leq [\beta]$, $\perp\beta\to\alpha \Leftrightarrow [\beta] \leq [\alpha]$ olduğundan $\perp[\alpha\leftrightarrow\beta] \Leftrightarrow [\alpha] = [\beta]$ elde edilir.

$[\forall x\ ,\alpha(x)] = \inf\limits_{x}[\alpha(x)]$ ve $[\exists x\ ,\alpha(x)] = \sup\limits_{x}[\alpha(x)]$ olarak tanımlansın. Gerçekten,

$$[\forall x\ ,\alpha(x)] = [\neg\exists x\ ,\neg\alpha(x)] = 1-[\exists x\ ,\neg\alpha(x)] = 1-\sup_{x}[\alpha(x)] = 1-\sup_{x}[1-\alpha(x)]$$
$$= 1-(1-\inf_{x}[\alpha(x)]) = \inf_{x}[\alpha(x)]$$

$\exists x\ ,\alpha(x) = \neg\forall x\ ,\neg\alpha(x)$ olduğu kullanılcak olunursa,

$$[\exists x\ ,\alpha(x)] = [\neg\forall x\ ,\neg\alpha(x)] = 1-[\forall x\ ,\neg\alpha(x)] = 1-\inf_{x}[\neg\alpha(x)] = 1-\inf_{x}[1-\alpha(x)]$$
$$= 1-(1-\sup_{x}[\alpha(x)]) = \sup_{x}[\alpha(x)]$$

elde edilir. Bundan böyle min:= $\wedge$, max:= $\vee$, inf:= $\bigwedge$, sup:= $\bigvee$ notasyonları kullanılacaktır. [21].

1.4. Belirsiz Kümeler Kuramı

L bir küme olsun. L de bir " $\leq$ " bağıntısına kısmi (bölümsel) sıralama bağıntısı denir. $\Leftrightarrow$ $\forall x, y, z \in L$ için,

i) $x \leq x$

ii) $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$

iii) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$

" $\leq$ " L de kısmi sıralama bağıntısı ise $(L , \leq)$ ikilisine kısmi (bölümsel) sıralanmış küme denir.

$(L , \leq)$ kısmi sıralanmış bir küme olsun. Her $x, y \in L$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise $(L , \leq)$ ikilisine tam sıralıdır denir. $(L , \leq)$ kısmi sıralı kümesinde her $x, y \in L$ için $\sup\{x , y\} = x \vee y$ ve $\inf\{x , y\} = x \wedge y$ elemanları varsa $(L , \leq)$ bir kafes denir. $(L , \leq)$ kısmi sıralı kümesine tam kafestir denir. $\Leftrightarrow$ her $A \subset L$ için $\bigvee A$ vardır.

$(L , \leq)$ kısmi sıralanmış kümesine tam dağılımlı tam kafestir denir. $\Leftrightarrow$ $(L , \leq)$ tam kafes ve her $a \in L$ $(a_i)_{i \in I} \subset L$ $(I \neq \varnothing)$ için

$$a \wedge \Big(\bigvee_{i \in I} a_i\Big) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i), \quad a \vee \Big(\bigwedge_{i \in I} a_i\Big) = \bigwedge_{i \in I} (a \vee a_i)$$

Teorem 1 : [22] $(L , \leq)$ tam dağılımlı tam kafes $a_i, b_j \in L$ $(i \in I , j \in J)$ olsun. Bu taktirde,

$$\Big(\bigvee_{i \in I} a_i\Big) \wedge \Big(\bigvee_{j \in J} b_j\Big) = \bigvee_{i \in I, j \in J} (a_i \wedge b_j) \quad , \quad \Big(\bigwedge_{i \in I} a_i\Big) \vee \Big(\bigvee_{j \in J} b_j\Big) = \bigwedge_{i \in I, j \in J} (a_i \wedge b_j)$$

Tanım 1 : $(L , \leq)$ en küçük elemanı 0 olan bir kafes olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\neg : L \rightarrow L$ dönüşümüne L üzerinde bir tümleyen dönüşümü denir:

i) $\neg(\neg x) = x$

ii) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$

iii) $x \wedge \neg x = 0$

$\neg$ L üzerinde bir tümleyen dönüşümü ise $(L , \leq , \wedge , \vee , \neg)$ ye de bir yarı tümleyenli kafes denir. L nin en küçük ve en büyük elemanları (evrensel sınırları) sırası ile 0 ve 1 ile gösterilsin.

Bundan sonra aksi söylenmedikçe L tam dağılımlı tam kafes ve $t\in L\setminus\{1\}$ olarak kabul edilecektir.

$X \neq \varnothing$ olan bir küme olsun. Her $A:X \to L$ fonksiyonuna X in L- belirsiz alt kümesi denir. X in tüm L- belirsiz altkümeleri $F(X, L)$ ile gösterilsin.

$(A_i)_{i\in I}\subset F(X, L)$ olsun. Her $x\in X$ için $(A_i(x))_{i\in I} \subset L$ olduğundan

$$A_1(x) = \bigvee_{i\in I} A_i(x) \,,\; A_2(x) = \bigwedge_{i\in I} A_i(x)$$

olarak tanımlanırsa açık olarak $A_1, A_2 \in F(X, L)$ dır.

$A, B\in F(X, L)$ olsun. $A\leq B :\Leftrightarrow \forall x\in X$ için $A(x)\leq B(x)$ olarak tanımlanırsa $(F(X, L), \leq, \wedge, \vee)$ bir tam kafestir. $(A_i)_{i\in I} \subset F(X, L)$ ve $A\in F(X, L)$ olsun. Bu taktirde $\forall x\in X$ için

$$A(x)\wedge(\bigvee_{i\in I} A_i(x)) = \bigvee_{i\in I} A(x)\wedge A_i(x) \,, \qquad A(x)\vee(\bigwedge_{i\in I} A_i(x)) = \bigwedge_{i\in I} A(x)\vee A_i(x)$$

koşulları gerçeklendiğinden $(F(X, L), \leq, \wedge, \vee)$ bir tam dağılımlı tam kafestir. Her $x\in X$ için $0(x) = 0$ ve $1(x) = 1$ ile tanımlanan $0,1:X\to L$ L- belirsiz altkümesi olup her $A\in F(X, L)$ ve $x\in X$ için $0 \leq A(x) \leq 1$ olduğundan her $A\in F(X, L)$ için $0 \leq A \leq 1$ dir. Buradan $(F(X, L), \leq, \wedge, \vee)$ evrensel sınırları 0, 1 olan tam dağılımlı tam kafestir.

$f\in F(X, L)$ keyfi olmak üzere $[x\in f] = f(x)$ olarak tanımlansın. $f, g\in F(X, L)$ olsun. $x\in f\cup g = (x\in f)\vee(x\in g)$ olarak tanımlansın. Bu taktirde,

$$[x\in f\cup g] = [(x\in f)\vee(x\in g)] = [x\in f]\vee[x\in g] = f(x)\vee g(x)$$

Buradan $(f\cup g)(x) = (f\vee g)(x) = f(x)\vee g(x)$ elde edilir. $x\in f\cap g = (x\in f)\wedge(x\in g)$ olarak tanımlansın. Bu taktirde,

$$[x\in f\cap g] = [(x\in f)\wedge(x\in g)] = [x\in f]\wedge[x\in g] = f(x)\wedge g(x)$$

Buradan $(f\cap g)(x) = (f\wedge g)(x) = f(x)\wedge g(x)$ elde edilir.

Sonuç olarak $F(X, L)$ de $(f\vee g)(x) = f(x)\vee g(x)$ ve $(f\wedge g)(x) = f(x)\wedge g(x)$ dır.

I indis kümesi $i \in I$ ve $\{f_i \mid i \in I\} \subset F(X, L)$ olsun. $\forall x \in X$ için

$x \in \bigcup_{i \in I} f_i = \exists\, i \in I, (x \in f_i) = \bigvee_{i \in I} (x \in f_i)$ olarak tanımlansın. Bu taktirde,

$(\bigcup_{i \in I} f_i)(x) = \sup_{i \in I} f_i(x) = \bigvee_{i \in I} f_i(x) = (\bigvee_{i \in I} f_i)(x)$ elde edilir.

$x \in \bigcap_{i \in I} f_i = \forall i \in I, (x \in f_i) = \bigwedge_{i \in I} (x \in f_i)$ olarak tanımlansın. Buradan,

$(\bigcap_{i \in I} f_i)(x) = \inf_{i \in I} f_i(x) = \bigwedge_{i \in I} f_i(x) = (\bigwedge_{i \in I} f_i)(x)$ elde edilir.

Teorem 2 : $(L, \leq)$ tam dağılımlı tam kafes ise $(F(X, L), \cap, \cup)$ tam dağılımlı tam kafestir.

Tanım 2 : $(L, \leq)$ tam kafesine kompakt kafes denir $:\Leftrightarrow$ Her $S \subseteq L$ ve $t \in L$ için $t < \vee S$ ise $\exists s \in S$ öyleki $t < s$ dir.

Uyarı 1 : Her tam sıralı kafes kompakt kafesdir.

Tanım 3 : $(L \leq)$ en küçük elemanı 0 olan bir kafes ve $\neg$ L üzerinde bir tümleyen dönüşümü ve $f \in F(X, L)$ olsun. Bu taktirte $x \in f' = \neg(x \in f)$ olarak tanımlanırsa,

$$[x \in f'] = [\neg(x \in f)] = \neg[x \in f] = \neg\, f(x)$$

Dolayısıyla $f'(x) = \neg f(x)$ elde edilir. $f, g \in F(X, L)$ olmak üzere $f \backslash g = f \cap \neg g$ ye f ile g nin L-belirsiz farkı denir.

Şimdi $f \in F(X, L)$, $g \in F(Y, L)$ olsun. $(fxg)(x, y) = f(x) \wedge g(y)$ olarak tanımlansın. Bu taktirde, $fxg \in F(XxY, L)$ ye f ile g L-belirsiz altkümelerinin L-belirsiz kartezyen çarpımı denir. Gerçekten $(x,y) \in fxg := (x \in f) \wedge (y \in g)$ dir. Buradan

$$[(x, y) \in fxg] = [(x \in f) \wedge (y \in g)] = [x \in f] \wedge [y \in g] = f(x) \wedge g(y)$$

dir. Buradan $(fxg)(x, y) = f(x) \wedge g(y)$ elde edilir.

Tanım 4 : $f \in F(XxY, L)$ ye X den Y ye bir L-belirsiz bağıntı denir.

Tanım 5 : i) $f \in F(X x Y , L)$ için $f^{-1}(y , x) = f(x , y)$ ile tanımlanan $f^{-1} \in F(Y x X , L)$ L-belirsiz bağıntısına f L-belirsiz bağıntısının tersi denir.

ii) $f \in F(X x Y , L)$, $g \in F(Y x Z , L)$ ise $\forall (x , z) \in X x Z$ için

$$(gof)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} f(x,y) \wedge g(y,z)$$

ile tanımlı bağıntıya f ile g bağıntılarının bileşkesi denir. Yukarıda tanımlanan bileşke işleminin asosyatif olduğu açıktır.

Tanım 6 : $f \in F(X x X , L)$ L-belirsiz bağıntısı verilsin.

i) f ye simetrik denir $\Leftrightarrow f = f^{-1}$

ii) f ye transitif denir $\Leftrightarrow f o f \subseteq f$

iii) f ye yansıyan denir $\Leftrightarrow \forall x \in X$ için $f(x , x) = 1$.

$f \in F(X , L)$ bir L- belirsiz bağıntı ve $t \in L \setminus \{1\}$ olsun. f nin L-belirsiz bağıntı olma derecesi :

$[\forall x \in X : \exists y \in Y | (x,y) \in f] > t$ olmalıdır. Buradan $\bigwedge_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} f(x,y) > t$ elde edilir.

Klasik teoride bir $\varphi : X \to Y$ fonksiyonu verildiğinde $\overline{\varphi} : \wp(X) \to \wp(Y)$ resim ve $\overline{\varphi}^{-1} : \wp(Y) \to \wp(X)$ ters resim tanımlı olduğunu biliniyor. Bu mantık da her $f \in F(X , L)$ ve $g \in F(Y , L)$ ve her $x \in X$ ve $y \in Y$ için:

$y \in \varphi(f) := \exists x ,(x \in f$ ve $y = \varphi(x))$ ve $x \in \varphi^{-1}(g) := \varphi(x) \in g$
olarak tanımlansın. Bu taktirde,

$$[y \in \varphi(f)] = \bigvee_{x} [x \in f \text{ ve } y = \varphi(x)] = \bigvee_{y=\varphi(x)} f(x)$$

elde edilir. Buradan $\varphi(f)(y) = \bigvee_{y=\varphi(x)} f(x)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\varphi(f) \in F(Y , L)$ dır.

$$[x \in \varphi^{-1}(g)] = [\varphi(x) \in g] = g(\varphi(x))$$

dır. Buradan $\varphi^{-1}(g)(x) = g(\varphi(x))$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\varphi^{-1}(g) \in F(X , L)$ dır.

$\overline{\varphi} : F(X , L) \to F(Y , L)$, $\overline{\varphi}(f) = \varphi(f)$ ve $\overline{\varphi}^{-1} : F(Y , L) \to F(X , L)$, $\overline{\varphi}^{-1}(g) = \varphi^{-1}(g)$ olarak tanımlanırsa aşağıdaki özelliklerin gerçeklendiği kolaylıkla gösterilebilir.

$$\overline{\varphi}(1_X) = 1_{\varphi(X)} , \qquad \overline{\varphi}^{-1}(1_Y) = 1_{\varphi^{-1}(Y)}$$

Kümeler ve Belirsiz kümelerle ilgili bazı özellikleri aşagıdaki gibi verilebilir. [21].

Kümeler	Belirsiz Kümeler
$\varnothing$, X	$0_X = 0$, $1_X = 1$
$(\bigcap_{i\in I} A_i)' = \bigcup_{i\in I} A_i'$	$\neg(\bigwedge_{i\in I} f_i) = \bigvee_{i\in I} \neg f_i$
$(\bigcup_{i\in I} A_i)' = \bigcap_{i\in I} A_i'$	$\neg(\bigvee_{i\in I} f_i) = \bigwedge_{i\in I} \neg f_i$
$A\cap A' = \varnothing$	$f\wedge\neg f = 0$
$A\cup A' = X$	$f\vee\neg f = 1$

Sonuç 1 : Kümeler kuramı $\subseteq$ Belirsiz kümeler kuramı.

1.5. Belirsiz Altkümeler

Tanım 7 : f, g$\in$F(X , L), $f\sqsubset g \Leftrightarrow \forall x\in X$ için $f(x) \leq g(x)$ olarak tanımlanır.
$\perp(f\sqsubset g)\wedge(g\sqsubset h)\Rightarrow f\sqsubset h$ genelde doğru değildir.

1.6. İki Belirsiz Kümenin Belirsiz Eşitliği

f, g$\in$F(X , L) olmak üzere $f \equiv g \Leftrightarrow [(f\sqsubset g)]\wedge[(g\sqsubset f)]$ olarak tanımlayalım. $\perp f\sqsubset g \Leftrightarrow \forall x\in X$ için $f(x) \leq g(x)$, $\perp[g\sqsubset f] \Leftrightarrow \forall x\in X$ için $g(x)\leq f(x)$ dır. Buradan $\perp f \equiv g \Leftrightarrow \forall x\in X$ için $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f\sqsubset g$ ve $g\sqsubset h$ dır.

Teorem 3 : [21] f, g, h, f*, g*$\in$F(X , L) olsun. Aşağıdaki özelliklerin gerçeklendiği kolaylıkla gösterilebilir:

i) $f\text{x}g = 0 \Rightarrow f = 0$ veya $g = 0$

ii) $f = g \Rightarrow f\text{x}g = g\text{x}f$

$f\text{x}g = g\text{x}f \Rightarrow f = g$ genelde doğru değildir.

iii) $f\text{x}(g\cup h) = (f\text{x}g)\cup(f\text{x}h)$

$f\text{x}(g\cap h) = (f\text{x}g)\cap(f\text{x}h)$

iv) $g\sqsubset h \Rightarrow f\text{x}g \subset f\text{x}h$

$f\text{x}g \subset f\text{x}h \not\Rightarrow g\sqsubset h$ $(f\neq 0)$

$f\text{x}g \subset f^*\text{x}g^* \not\Rightarrow f\sqsubset f^*$ ve $g\sqsubset g^*$ $(f\text{x}g\neq 0)$

v) $(f\equiv g)$ ve $(g\equiv h) \Rightarrow f\equiv h$ genelde doğru değildir.

Bu bölümden sonra L- berlirsiz yerine L- fuzzy kavramını kullanılmıştır.

2. TEORİK ÇALIŞMA

Bu çalışmada, [14], [15] çalışmaları baz alınmıştır. Fuzzy mantık tanıtılarak, kümeler ve fuzzy kümeleri arasındaki bazı özellikler incelenmiştir. [21]. Fuzzy altgrupların yapısı, fuzzy althalkalar, fuzzy idealler ve bazı özellikleri [10] baz alınarak verilmiştir. Daha önce yapılan çalışmalara [4], [8] paralel olarak bir fuzzy kümesinin resmi ve ters resmi yeniden tanımlanmıştır. Bu tanım ile ilgili bazı teoremler, ifade ve ispat edilmiştir. Bu yeni tanımın daha önceki çalışmalarda [4], [8] yapılan tanımdan daha genel olduğu gözlenmiştir.

Fuzzy altmodül, fuzzy modül homomorfisi, fuzzy çekirdek, fuzzy resim ve fuzzy ters resim tanımları verilmiştir. Fuzzy çekirdek ve fuzzy resmin klasik anlamda altmodüller olduğu gösterilmiştir. Ayrıca; fuzzy modül homomorfisinin bire-birliği fuzzy çekirdek yardımıyla karakterize edilmiştir. Klasik homomorfi teoremleri [23] fuzzy ye genelleştirilmiştir. Fuzzy modül homomorfisi ile klasik modül homomorfisi arasındaki ilişki ortaya konulmuştur. Ayrıca; fuzzy modül homomorfisi ile fuzzy altmodüller arasındaki ilişki bir teoremle ispatlanmıştır.

Son olarak, fuzzy modül homomorfileri yardımı ile modüllerin ailesi üzerine bir kategori konularak, bu kategoride t-seviyesinde fuzzy çarpım ve eş çarpım tanımları verilmiştir. Bu kategoride t-seviyesinde fuzzy çarpımı ve eş çarpımının üniversal özelliğe sahip olduğu iki teoremle ifade ve ispat edilmiştir.

3. BULGULAR

3.1. Fuzzy Cebirsel Yapılar

Rosenfeld, 1971'de fuzzy cebirsel yapılara, grup teori ile başlamış, asal mertebeli devirli bir grubun fuzzy altgruplarının bir karakterizasyonunu vermiştir. Daha sonra, teori Antonhy ve Sherwood [8] tarafindan 1979'da $I=[0,1]\subseteq IR$ üzerinde bir t-norm tanımlayarak teoriyi geliştirmişlerdir. Das [7], 1981'de teoriyi genellemiştir. Liu [9], 1982'de fuzzy invaryant altgrupları ve fuzzy ideallerin bir karakterizasyonunu vermiştir. Fakat; bu alanda yapılan çalışmalar $I = [0, 1]$ üzerinde olmuştur. Liu [10], 1983'de L tam dağılımlı tam kafes olmak üzere, L-fuzzy ideallerin bir karakterizasyonunu vermiştir. Bu aşamadan sonra, teori iki yoldan ilerlemeye başlamıştır. Bu bölümde, L-fuzzy cebirsel yapılar tam dağılımlı tam kafes üzerinde [10] baz alınarak minimal hacimde verilmiştir.

Tanım 8 : G bir grup ve $A\in F(G, L)$ olsun. A ya G nin bir L- fuzzy altgrubudur denir.
$\Leftrightarrow \forall x, y\in G$ için,

i) $A(xy) \geq A(x) \wedge A(y)$

ii $A(x^{-1}) \geq A(x)$

dir. Eğer $A\in F(G, L)$ L- fuzzy altgrup ise $\forall x\in G$ için $A(x) \leq A(e)$ ($e\in G$ birim eleman) ve $A(x) = A(x^{-1})$ dir.

Tanım 9 : $A\in F(G, L)$ olsun.

$A_t = \{x\in G \mid A(x) \geq t\}$

kümesine A L- fuzzy altkümesinin seviye altkümesi denir. Açık olarak A_t G nin bir altkümesidir.

Önerme 1 : [7] G bir grup olsun. $A\in F(G, L)$ L- fuzzy altgruptur. $\Leftrightarrow$ $t\leq A(e)$ için A_t G nin altgrubudur.

Bir fuzzy altgrubunun seviye altkümesine seviye altgrubu denir.

Önerme 2 : [7] L- fuzzy altgrupların keyfi bir ailesinin arakesiti L-fuzzy altgruptur.

Önerme 3 : [7] $T \subset G$ ve $< T > = \bigcap_{T \subset K \leq G} K$ olmak üzere $<\chi_T> = \chi_{<T>}$ dir.

Önerme 4 : [7] χ_T L- fuzzy altgruptur. $\Leftrightarrow$ $T \leq G$ dir.

Tanım 10 : [7] $B \in F(G, L)$ olsun. $\bigcap_{\substack{A \in F(G,L) \\ B \leq A}} A$ L- fuzzy altgrubuna B ile üretilen L- fuzzy altgrubudur denir ve $< B >$ ile gösterilir.

Tanım 11 : $X, Y \neq \varnothing$ olan kümeler ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Her $A \in F(X, L)$ ve

$B \in F(Y, L)$ için $X_y = \{x \in X \mid y = f(x)\}$ için,

$$f(A)(y) = \bigvee_{x \in X_y} A(x)$$

ve $f^{-1}(B) = B(f(x))$
yardımıyla tanımlanan X in ve Y nin L- fuzzy altkümelerine sırası ile A nın f altındaki resmi ve B nin f altındaki ters resmi denir.

Önerme 5 : [12] G ve G' iki grup, $f: G \rightarrow G'$ grup homomorfisi olsun. Her $A \in F(G, L)$ ve $B \in F(G', L)$ L- fuzzy altgrupları için $f(A) \in F(G', L)$ ve $f^{-1}(B) \in F(G, L)$ L-fuzzy altgrubudur.

Tanım 12 : X, $Y \neq \varnothing$ olan kümeler ve $t \in L \setminus \{1\}$ olsun. $f \in F(XxY, L)$ t- fuzzy fonksiyon denir. $\Leftrightarrow$

i) $\forall x \in X$ için $\exists y \in Y$ öyleki $f(x, y) > t$.

ii) $\forall x \in X$, $\forall y_1, y_2 \in Y$ için $f(x, y_1) > t$, $f(x, y_2) > t$ ise $y_1 = y_2$.

iii) f t- fuzzy fonksiyonu örtendir . $\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y$ için $\exists x \in X$ öyleki $f(x, y) > t$.

iv) f t- fuzzy fonksiyonu bire-bir dir. $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall y \in Y$ için $f(x_1, y) > t$, $f(x_2, y) > t$ ise $x_1 = x_2$ dir.

$f \in F(XxY, L)$ ve $g \in F(XxY, L)$ t-fuzzy fonksiyon olsun. Bu taktirde f ve g t-fuzzy fonksiyonlarına t-seviyesinde eşittir denir ve $f \equiv_t g$ yazılır. $\Leftrightarrow$ $f(x, y) > t$ olan her $(x, y) \in XxY$ için $g(x, y) > t$ dir.

Önerme 6 : [14] $f \in F(XxY, L)$, $g \in F(YxZ, L)$ t- fuzzy fonksiyonlar ve k = i, ii, iii, iv olsun. Eğer f ve g Tanım 12 deki k-koşullarını gerçekler ise gof de k-koşullarını gerçekler.

Tanım 13 : $f \in F(XxY, L)$ t-fuzzy fonksiyon olsun.

i) $A \in F(X, L)$ ise $f(A)(y) = \bigvee_{f(x,y)>t} A(x)$

ii) $B \in F(Y, L)$ ise $f^{-1}(B)(x) = B(y)$, $f(x,y)>t$

olarak tanımlanırsa $f(A) \in F(Y, L)$, $f^{-1}(B) \in F(X, L)$ dir.

Teorem 4 : $A, B \in F(X, L)$, $C, D \in F(Y, L)$, $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq F(X, L)$, $\{B_i \mid i \in I\} \subseteq F(Y, L)$ ve $\alpha \in F(XxY, L)$ bir t-fuzzy fonksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdakiler gerçeklenir:

i) $\alpha(\bigvee_{i \in I} A_i) = \bigvee_{i \in I} \alpha(A_i)$

ii) $\alpha(\bigwedge_{i \in I} A_i) = \bigwedge_{i \in I} \alpha(A_i)$

iii) $\alpha^{-1}(\bigvee_{i \in I} B_i) = \bigvee_{i \in I} \alpha^{-1}(B_i)$

iv) $\alpha^{-1}(\bigwedge_{i \in I} B_i) = \bigwedge_{i \in I} \alpha^{-1}(B_i)$

v) $A \leq B$ ise $\alpha(A) \leq \alpha(B)$ ve $C \leq D$ ise $\alpha^{-1}(C) \leq \alpha^{-1}(D)$

vi) $A \leq \alpha^{-1}(\alpha(A))$ veya $\alpha(\alpha^{-1}(C)) \leq C$ olması gerekmez.

İspat :i)$\alpha((\bigvee_{i \in I} A_i)(y) = \bigvee_{\alpha(x,y)>t} (\bigvee_{i \in I} A_i(x)) = \bigvee_{\alpha(x,y)>t} \bigvee_{i \in I} A_i(x) =$

$$= \bigvee_{i \in I} \bigvee_{\alpha(x,y)>t} A_i(x) = \bigvee_{i \in I} \alpha(A_i)(y) = (\bigvee_{i \in I} \alpha(A_i))(y)$$

Buradan $\alpha(\bigvee_{i \in I} A_i) = \bigvee_{i \in I} \alpha(A_i)$ elde edilir.

ii) $\alpha(\bigwedge_{i \in I} A_i)(y) = \bigvee_{\alpha(x,y)>t} (\bigwedge_{i \in I} A_i(x)) = \bigvee_{\alpha(x,y)>t} \bigwedge_{i \in I} A_i(x) = \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{\alpha(x,y)>t} A_i(x) = \bigwedge_{i \in I} \alpha(A_i)(y)$

$$= (\bigwedge_{i \in I} \alpha(A_i))(y)$$

Buradan $\alpha(\bigwedge_{i \in I} A_i) \leq \bigwedge_{i \in I} \alpha(A_i)$ dir.

iii) $\alpha^{-1}(\bigvee_{i \in I} B_i)(x) = (\bigvee_{i \in I} B_i)(y)$, $\alpha(x, y)>t$

$$= \bigvee_{i \in I} B_i(y), \ \alpha(x, y)>t$$

$$=(\bigvee_{i \in I} \alpha^{-1}(B_i)(x), \ \alpha(x, y)>t$$

Sonuç olarak $\alpha^{-1}(\bigvee_{i\in I} B_i) = \bigvee_{i\in I} \alpha^{-1}(B_i)$ koşulu gerçeklenir.

iv) $\alpha^{-1}(\bigwedge_{i\in I} B_i)(x) = (\bigwedge_{i\in I} B_i)(y), \ \alpha(x, y)>t$

$$= \bigwedge_{i\in I} B_i(y), \ \alpha(x, y)>t$$

$$= \bigwedge_{i\in I} \alpha^{-1}(B_i)(x), \ \alpha(x, y)>t$$

Buradan $\alpha^{-1}(\bigwedge_{i\in I} B_i) = \bigwedge_{i\in I} \alpha^{-1}(B_i)$ elde edilir.

v)$\alpha(A)(y) = \bigvee_{\alpha(x,y)>t} A(x) \leq \bigvee_{\alpha(x,y)>t} B(x) = \alpha(B)(y)$. Buradan $\alpha(A) \leq \alpha(B)$ elde edilir.

$C \leq D$ olsun. $\forall y\in Y$ için $C(y) \leq D(y)$ dır. Buradan,

$$\alpha^{-1}(C)(x) = C(y), \ \alpha(x, y)>t$$
$$\leq D(y), \ \alpha(x, y)>t$$
$$= \alpha^{-1}(D)(x), \ \alpha(x, y)>t$$

Sonuç olarak $\alpha^{-1}(C) \leq \alpha^{-1}(D)$ elde edilir.

vı) $\alpha(\alpha^{-1}(C))(y) = \bigvee_{\alpha(x,y)>t} \alpha^{-1}(C)(x) = \bigvee_{\alpha(x,y)>t} C(y) \nleq C(y)$ dır.

Şimdi $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon $A\in F(X, L)$, $B\in F(Y, L)$ olsun.

$$\chi_{t,f}(x, y) = \begin{cases} 1, & y = f(x) \\ t, & y \neq f(x) \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\chi_{t,f}\in F(XxY, L)$ t-fuzzy fonksiyondur. Ayrıca,

$$\chi_{t,f}(A)(y) = \bigvee_{\chi_{t,f}(x,y)>t} A(x) \ \text{ ve } \chi^{-1}_{t,f}(B)(x) = B(y), \ \chi_{t,f}(x, y)>t$$

Bu tanıma göre Tanım 11 çok özel kalıyor. Gerçekten,

$$\chi_{t,f}(A)(y) = \bigvee_{\chi_{t,f}(x,y)>t} A(x) = \bigvee_{y=f(x)} A(x) = f(A)(y)$$

Buradan $\chi_{t,f}(A) = f(A)$ olduğu görülür.

$$\chi^{-1}_{t,f}(B)(x) = B(y), \ \chi_{t,f}(x, y)>t \Leftrightarrow y = f(x) = B(f(x)) = f^{-1}(B)(x)$$

Sonuç olarak $\chi^{-1}_{t,f}(B) = f^{-1}(B)$ elde edilir.

Bu bölümden sonra aksi söylenmedikçe (R, +, .) komutatif birim elemanlı bir halka olarak ele alınacaktır.

Tanım 14 : (R , +, .) iki ikili işlemli küme ve A, B$\in$F(R , L) olsun.

$$(A\oplus B)(x) = \bigvee_{y+z=x} A(y)\wedge B(z)$$

$$(A\otimes B)(x) = \bigvee_{y.z=x} A(y)\wedge B(z)$$

olarak tanımlanırsa A$\oplus$B, A$\otimes$B$\in$F(R , L) dir. Eğer (R , .) asosyatif, komutatif ise açık olarak (F(R , L), $\otimes$) asosyatif, komutatifdir. Ayrıca A, B, C$\in$F(R , L) ve A $\leq$ B ise A$\otimes$C $\leq$ B$\otimes$C dir. Gerçekten, A $\leq$ B ise $\forall$x$\in$R için A(x) $\leq$ B(x) dir. Buradan A(x)$\wedge$C(x) $\leq$ B(x)$\wedge$C(x) dir. Dolayısıyla,

$$\bigvee_{x.z=y} A(x)\wedge C(z) \leq \bigvee_{x.z=y} B(x)\wedge C(z)$$

dır. Sonuç olarak (A$\otimes$C)(y) $\leq$ (B$\otimes$C)(y) elde edilir.

Tanım 15 : R = (R ,+ , .) bir halka A$\in$F(R , L) olsun. A ya R nin L-fuzzy althalkası denir. $\Leftrightarrow$

i) A$\oplus$A $\leq$ A ve her x$\in$R için A(-x) = A(x)

ii) A$\otimes$A $\leq$ A

dır.

Önerme 7 : A$\in$F(R , L) olsun. A ya R nin L-fuzzy althalkasıdır denir. $\Leftrightarrow$ $\forall$x, y$\in$R için,

i) A(x)$\wedge$A(y) $\leq$ A(x-y)

ii) A(x)$\wedge$A(y) $\leq$ A(xy)

dir.

İspat : "$\Leftarrow$" $(A\oplus A)(z) = \bigvee_{u+v=z} A(u)\wedge A(v) \leq \bigvee_{u+v=z} A(u+v) = \bigvee_{u+v=z} A(z) = A(z)$

Buradan A$\oplus$A $\leq$ A dır. x$\in$R olmak üzere A(x) = A(x)$\wedge$A(x) = A(x-x) = A(0) ve A(0)$\wedge$A(x) $\leq$ A(0-x) = A(-x) olduğundan A(x) $\leq$ A(-x) elde edilir. Diğer yandan A(x) = A(-(-x)) $\geq$ A(-x) olduğundan A(x) $\geq$ A(-x) elde edilir.

Sonuç olarak A(x) = A(-x) dır. (1)

$$(A\otimes A)(z) = \bigvee_{u.v=z} A(u)\wedge A(v) \leq \bigvee_{u.v=z} A(u.v) = \bigvee_{u.v=z} A(z) = A(z)$$

Buradan A$\otimes$A$\leq$A (2)

(1) ve (2) den A R nin L-fuzzy althalkasıdır.

"$\Rightarrow$" i) A R nin L-fuzzy althalkası olsun. $(A\oplus A)(x-y) = \bigvee_{u+v=x-y} A(u)\wedge A(v) \leq A(x-y)$

Buradan $A(x)\wedge A(y) \leq A(x-y)$ dır.

ii) $(A\otimes A)(xy) = \bigvee_{uv=xy} A(u)\wedge A(v) \leq A(xy)$ dır. Buradan $A(x)\wedge A(y) \leq A(xy)$ elde edilir.

Önerme 8 : [10] A, B, $C\in F(R , L)$ olsun. Bu taktirde,

i) $A\otimes(B\oplus C) \leq (A\otimes B)\oplus(A\otimes C)$
ii) $(B\oplus C)\otimes A \leq (B\otimes A)\oplus(C\otimes A)$

dır.

Uyarı 2 : Yukarıdaki eşitlik her zaman doğru değildir. Örneğin $L = \{0 ,1\}$, $R = \mathbb{Z}$
$A = \chi_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ $B = C = \chi_{\mathbb{N}}$ olsun. Bu taktirde,

$A\otimes(B\oplus C) = A\otimes B = A = \chi_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$
$(A\otimes B)\oplus(A\otimes C) = A\oplus A = \chi_{\mathbb{Z}}$

dır.

Tanım 16 : $A\in F(R , L)$ olsun. A ya R nin L-fuzzy idealidir denir. $\Leftrightarrow$

i) $A\oplus A \leq A$ ve her $x\in R$ için $A(-x) = A(x)$
ii) $1\otimes A \leq A$ ve $A\otimes 1 \leq A$

dır.

Önerme 9 : $A\in F(R , L)$ olsun. A ya R nin L-fuzzy idealidir denir. $\Leftrightarrow$ $\forall x, y\in R$ için

i) $A(x)\wedge A(y) \leq A(x-y)$
ii) $A(x)\vee A(y) \leq A(xy)$

dır.

İspat : "$\Leftarrow$ " Tanım 15 ile $A\otimes A \leq A$ ve $A(x) = A(-x)$ olduğu açıktır. $\forall x, y\in R$ için $A(x)\vee A(y) \leq A(xy)$ olsun.

$$(1\otimes A)(z) = \bigvee_{u.v=z} 1(u)\wedge A(v) \leq \bigvee_{u.v=z} A(uv) = A(z)$$

Buradan $1\otimes A \leq A$ dır.

$$(A\otimes 1)(z) = \bigvee_{u.v=z} A(u)\wedge 1(v) \leq \bigvee_{u.v=z} A(uv) = A(z)$$

Buradan $A\otimes 1 \leq A$ dır. Sonuç olarak $A\in F(R , L)$ L-fuzzy idealdir.

"$\Rightarrow$" $A\in F(R , L)$ L-fuzzy ideal olsun. $\forall x, y\in R$ için

$A(x)\wedge A(y) \leq \bigvee_{u+v=x+y} A(u)\wedge A(v)$. Buradan $(A\otimes A)(x + y) \leq A(x + y)$ elde edilir.

Sonuç olarak $A\oplus A \leq A$ bulunur. $A(x) = A(-x)$ olduğu açıktır. Diğer yandan,

$$A(y) = 1(x) \wedge A(y) \leq \bigvee_{u.v=xy} 1(u) \wedge A(v) = (1 \otimes A)(xy) \leq A(xy)$$

olduğundan $1 \otimes A \leq A$ dır. Benzer şekilde $A \otimes 1 \leq A$ olduğu gösterilebilir.

$$I = \{A \in F(R\,, L) \mid A \text{ L-fuzzy ideal}\}$$

olsun. $I \neq \varnothing$ dır. Gerçekten $1(x) = 1$ ile tanımlanan $1{:}R \rightarrow L$ fuzzy altkümesi L-fuzzy ideal olup $1 \in I$ dır.

Önerme 10 : A, $B \in I$ olsun. Bu taktirde $A \wedge B \in I$ dır. $A \wedge B$ ye A ve B L-fuzzy idealinin arakesiti denir.

İspat : i)$(A \wedge B)(x\text{-}y) = A(x\text{-}y) \wedge B(x\text{-}y) \geq A(x) \wedge A(y) \wedge B(x) \wedge B(y) = A(x) \wedge B(x) \wedge A(y) \wedge B(y)$ dır. Buradan $(A \wedge B)(x\text{-}y) \geq (A \wedge B)(x) \wedge (A \wedge B)(y)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{ii) } (A \wedge B)(xy) &= A(xy) \wedge B(xy) \geq (A(x) \vee A(y)) \wedge (B(x) \vee B(y)) \\ &= A(x) \wedge B(x) \vee A(x) \wedge B(y) \vee A(y) \wedge B(x) \vee A(y) \vee B(y) \\ &\geq A(x) \wedge B(x) \vee A(y) \wedge B(y) = (A \wedge B)(x) \vee (A \wedge B)(y) \end{aligned}$$

Buradan $(A \wedge B)(xy) \geq (A \wedge B)(x) \vee (A \wedge B)(y)$ elde edilir. Önerme 7 ile $A \wedge B \in I$ dır.

Önerme 11 : A, $B \in I$ olsun. $A.B \in F(R\,, L)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(A.B)(x) = \bigvee \{ \bigwedge_{1 \leq i \leq p} A(y_i) \wedge B(z_i) \mid \sum_{i=1}^{p} y_i z_i = x,\ p \in \mathbb{N} \}$$

Bu taktirde $A.B \in I$ dır. A.B ye A ve B L-fuzzy idealinin çarpımı denir.

İspat : x, $x' \in R$ keyfi olsun.

$$(A.B)(x) \wedge (A.B)(x') = \bigvee \{ \bigwedge_{1 \leq i \leq p} A(y_i) \wedge B(z_i) \mid \sum_{i=1}^{p} y_i z_i = x,\ p \in \mathbb{N} \} \wedge$$

$$\bigvee \{ \bigwedge_{1 \leq j \leq r} A(y'_j) \wedge B(z'_j) \mid \sum_{j=1}^{r} y'_j z'_j = x',\ r \in \mathbb{N} \}$$

$$= \bigvee \{ \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}} A(y_i) \wedge A(y'_i) \wedge B(z_i) \wedge B(z'_i) \mid \sum_{i=1}^{p} y_i z_i = x,\ \sum_{j=1}^{r} y'_j z'_j = x', p, r \in \mathbb{N} \}$$

$$\leq \bigvee \{ \bigwedge_{1 \leq k \leq s} A(y''_k) \wedge B(z''_k) \mid \sum_{k=1}^{s} y''_k z''_k = x + x',\ s \in \mathbb{N} \} = (A.B)(x+x')$$

$$(A.B)(-x) = \bigvee\{ \bigwedge_{1\leq i\leq p} A(y_i)\wedge B(z_i) \mid \sum_{i=1}^{p} y_i z_i = -x,\ p \in \mathbb{N}\}$$

$$= \bigvee\{ \bigwedge_{1\leq i\leq p} A(y_i)\wedge B(z_i) \mid \sum_{i=1}^{p} (-y_i) z_i = x,\ p \in \mathbb{N}\}$$

$$= \bigvee\{ \bigwedge_{1\leq i\leq p} A(-y_i)\wedge B(z_i) \mid \sum_{i=1}^{p} (-y_i) z_i = x,\ p \in \mathbb{N}\} = (A.B)(x)$$

$$(A.B)(x') = \bigvee\{ \bigwedge_{1\leq j\leq r} A(y'_j)\wedge B(z'_j) \mid \sum_{j=1}^{r} y'_j z'_j = x',\ r \in \mathbb{N}\}$$

$$= \bigvee\{ \bigwedge_{1\leq j\leq r} A(y'_j)\wedge B(z'_j) \mid \sum_{j=1}^{r} (xy'_j) z'_j = x.x',\ r \in \mathbb{N}\}$$

$$\leq \bigvee\{ \bigwedge_{1\leq j\leq r} A(x.y'_j)\wedge B(z'_j) \mid \sum_{j=1}^{r} (x.y'_j) z'_j = x.x',\ r \in \mathbb{N}\} = (A.B)(x.x')$$

Benzer şekilde $(A.B)(x) \leq (A.B)(x.x')$ elde edilir. Önerme 7 ile $A.B\in I$ dır.

Tanım 17 : $A\in F(R , L)$ olsun.

$$<A> = \bigwedge_{A\leq B\in I} B \in I$$

L-fuzzy idealine A tarafından üretilen L-fuzzy ideali denir. Şimdi $<A>\in I$ olduğunu gösterilecektir. $x, y\in R$ keyfi olsun.

$$\text{i) } <A>(x)\wedge<A>(y) = \bigwedge_{A\leq B\in I} B(x)\wedge \bigwedge_{A\leq C\in I} C(y) = \bigwedge_{A\leq B\wedge C} B(x)\wedge C(y) \leq \bigwedge_{A\leq B\in I} B(x)\wedge B(y)$$

$$\leq \bigwedge_{A\leq B\in I} B(x-y) = <A>(x-y)$$

Buradan $<A>(x)\wedge<A>(y) \leq <A>(x-y)$ elde edilir.

$$\text{ii) } <A>(x)\vee<A>(y) = \bigwedge_{A\leq B\in I} B(x)\vee \bigwedge_{A\leq C\in I} C(y) = \bigwedge_{A\leq B\vee C} B(x)\vee C(y) \leq \bigwedge_{A\leq B\in I} B(x)\vee B(y)$$

$$\leq \bigwedge_{A\leq B\in I} B(x.y) = <A>(x.y)$$

Buradan $<A>(x)\vee<A>(y) \leq <A>(x.y)$ elde edilir. i) ii) ve Önerme 7 ile $<A>\in I$ dır.

Önerme 12 :[10] A, B$\in$I olsun. Bu taktirde,

$$A:B = \bigvee_{C\in I} (B \otimes C) \vee (C \otimes B) \in I$$

dır. A:B L-fuzzy idealine A nın B ye göre kalan L-fuzzy ideali denir.

Önerme 13 : [11] A$\in$F(R , L) L-fuzzy ideal olsun. Bu taktirde,

i) $\forall x \in R$ için $A(0) \geq A(x) \geq A(1)$

ii) $A(x-y) = A(0)$ ise her $x, y \in R$ için $A(x) = A(y)$

iii) $A_t = \{x \in R \mid A(x) \geq t\}$, $t \leq A(0)$ R nin idealidir. Özellikle $R_A = \{x \in R \mid A(x) = A(0)\}$ R nin idealdir.

Tanım 18 : A$\in$F(R , L) olsun. $\forall x \in R$ için $(x+A)(y) = A(y-x)$ olarak tanımlanırsa x+A R nin L-fuzzy altkümesidir.

Önerme 14 : A$\in$F(R , L) L-fuzzy ideal olsun. Bu taktirde $x+A = y+A \Leftrightarrow A(x-y) = A(0)$ dır. Bu durumda $A(x) = A(y)$ dir.

İspat : "$\Rightarrow$" x+A = y+A 0lsun. Bu taktirde $(x+A)(x) = A(x-x) = (y+A)(x) = A(x-y)$ dir. Buradan $A(x-x) = A(x-y)$ dir. Sonuç olarak $A(0) = A(x-y)$ elde edilir. Tersine olarak $A(x-y) = A(0)$ olsun. $(x+A)(z) = A(z-x) = A(z-x+y-y) \geq A(z-y) \wedge A(0) = A(z-y) = (y+A)(z)$ dir. Buradan $x+A \geq y+A$ elde edilir.

Diğer yandan $(y+A)(z) = A(z-y) = A(z-y+x-x) \geq A(z-x) \wedge A(0) = A(z-x) = (x+A)(z)$ dir. Buradan $y+A \geq x+A$ elde edilir. Sonuç olarak $x+A = y+A$ dır.

Önerme 15 : A$\in$F(R , L) L-fuzzy ideal x, y, u, v$\in$R için $x+A = u+A$ ve $y+A = v+A$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler gerçeklenir:

i) $(x+y)+A = (u+v)+A$

ii) $xy+A = uv+A$

İspat : i) Önerme 14 ile $A(x-u) = A(y-v) = A(0)$ dır.

$A(x+y-u-v) = A(x-u+y-v) \geq A(x-u) \wedge A(y-v) = A(0)$. Buradan $A(x+y-u-v) \geq A(0)$ elde edilir. Önerme 14 ile $(x+y)+A = (u+v)+A$ dır.

ii) $A(uv-xy) = A(uv-uy+uy-xy) \geq A(u(v-y)) \wedge A((u-x)y) \geq [A(u) \vee A(v-y)] \wedge [A(u-x) \vee A(y)]$
$= [A(u) \vee A(0)] \wedge [A(0) \vee A(y)]$
$= A(0).$

Buradan $A(uv-xy) \geq A(0)$ elde edilir. Önerme 14 ile $xy+A = uv+A$ dır.

Şimdi $A \in F(R, L)$ L-fuzzy ideal olsun. $R/_A$ üzerinde "+" ve "." işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$(x+A)+(y+A) = (x+y)+A,$
$(x+A).(y+A) = x.y+A.$

Açık olarak $(R/_A, +, .)$ bir halkadır.

Tanım 19 : $R/_A$ ya A L-fuzzy idealinin R ye göre bölüm halkası denir.

R, R' iki halka $A \in F(R, L)$, $B \in F(R', L)$ ve $f : R \to R'$ üniter halka homomorfisi olsun. Bu taktirde aşağıdaki Lemma 1, Önerme 16 ve Önerme 17 gerçeklenir:

Lemma 1 : [11] i) $f(A)(0') = A(0)$

ii) $f(R_A) \subseteq R'_{f(A)}$
iii) A çekf üzerinde sabit ise her $x \in R$ için $f(A)f(x) = A(x)$ dir.

Önerme 16 : [11] i) $f^{-1}(B)$ çekf üzerinde sabit olan R nin idealidir.

ii) $f^{-1}(R'_B) = R_{f^{-1}(B)}$
iii) f örten ise $f(f^{-1}(B)) = B$
iv) A çekf üzerinde sabit ise $f^{-1}(f(A)) = A$
v) f örten ise $f(A) \in F(R', L)$ L-fuzzy idealdir.

Teorem 17 : (Karşılaştırma Teoremi) $f : R \to R'$ örten halka homomorfisi olsun. R' nin L-fuzzy idealleri ile R nin çekf üzerinde sabit olan L-fuzzy idealleri arasında bire-bir bir karşılaştırma vardır.

İspat : $I(R', L)$ ile R' nın tüm L-fuzzy ideallerinin kümesini ve $I(R, L)$ ile de çekf üzerinde sabit olan R nin tüm L-fuzzy ideallerinin kümesini gösterelim. $\varphi(A) = f(A)$ ve $\psi(B) = f^{-1}(B)$ yardımıyla tanımlanan $\varphi : I(R, L) \to I(R', L)$, $\psi : I(R', L) \to I(R, L)$ dönüşümleri istenilen özellikleri gerçekler.

Tanım 20 : $f \in F(RxR', L)$ t-fuzzy fonksiyonuna fuzzy halka homomorfisi denir. $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in R$ ve $y \in R'$ için,

$$f(x_1 + x_2, y) \geq \bigvee_{y=u+v} f(x_1, u) \wedge f(x_2, v)$$

$$f(x_1 . x_2, y) \geq \bigvee_{y=u.v} f(x_1, u) \wedge f(x_2, v)$$

dir.

Teorem 5 : [11] $f \in F(RxR', L)$ fuzzy halka homomorfisi $A \in F(R, L)$ ve $B \in F(R', L)$ L-fuzzy ideal olsun. Bu taktirde $f(A) \subset Imf$ ve $f^{-1}(B) \subset R$ L-fuzzy idealdir.

3.2. Fuzzy Modül Homomorfileri

Burada fuzzy modül homomorfilerinin bir karakterizasyonu verilmiştir. $_R\mathfrak{I}$ ile tüm R-sol modüllerin kategorisi gösterilsin.

Tanım 21 : R bir halka, $M \in {_R\mathfrak{I}}$ ve $A \in F(M, L)$ olsun. A ya M de L-fuzzy R-sol altmodül (kısaca L-fuzzy altmodül) denir. $\Leftrightarrow$ $\forall r \in R$, $m_1, m_2 \in M$ için,

i) $A(m_1 - m_2) \geq A(m_1) \wedge A(m_2)$
ii) $A(rm_1) \geq A(m_1)$

dir.

Teorem 7: [18] $A, B \in F(M, L)$ L-fuzzy altmodül ise $A \oplus B$ ve $A \wedge B$ de birer L-fuzzy altmodüldürler.

Teorem 8 : $A \in F(M, L)$ L-fuzzy altmodül olsun. $\lambda \in R$ için $(\lambda A)(x) = \bigvee_{x=\lambda u} A(u)$ olarak tanımlansın. Bu taktirde $\lambda A \in F(M, L)$ L-fuzzy altmodüldür.

Tanım 22 : $M, N \in {_R\mathfrak{I}}$ $f \in F(MxN, L)$ t-fuzzy fonksiyonuna fuzzy modül homomorfisi denir. $\Leftrightarrow \forall m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ ve $r \in R$ için,

i) $f(m_1 + m_2, n_1 + n_2) \geq f(m_1, n_1) \wedge f(m_2, n_2)$

ii) $f(rm, rn) \geq f(m, n)$

dir.

Tanım 23 : $f \in F(MxN, L)$ fuzzy modül homomorfisi olsun.

$f^* = \{m \in M \mid f(m, 0) > t\}$

kümesine f nin fuzzy çekirdeği denir.

Teorem 9 : $f \in F(MxN\ ,\ L)$ fuzzy modül homomorfisi olsun. Bu taktirde $f^* \subset M$ altmodüldür.

İspat : $m_1, m_2 \in f^*$ keyfi olsun. Bu taktirde, $f(m_1\ ,\ 0)>t$, $f(m_2\ ,\ 0)>t$ dir. Buradan (3)
$f(m_1-m_2\ ,\ 0) \geq f(m_1\ ,0) \wedge f(m_2\ ,\ 0)>t$ olduğundan $m_1-m_2 \in f^*$ elde edilir.
$r \in R$ ve $m \in f^*$ keyfi olsun. Bu taktirde $f(m\ ,\ 0)>t$ dir.

$$f(rm\ ,\ r0) = \bigvee_{r0=0} f(m, 0)>t$$

olduğundan $rm \in f^*$ elde edilir. (4)
(3) ve (4) den $f^* \subset M$ altmodüldür.

Teorem 10 : $f \in F(MxN\ ,\ L)$ fuzzy modül homomorfisi olsun. Bu taktirde $f^* = \{0\} \Leftrightarrow f$ bire-bir dir.

İspat : $f^* = \{0\}$ ve $f(m_1\ ,\ n)>t$, $f(m_2\ ,\ n)>t$ olsun. B u taktirde;

$$f(m_1-m_2\ ,0) = f(m_1-m_2,\ n-n) \geq f(m_1\ ,\ n) \wedge f(m_2\ ,\ n)>t$$

olduğundan $m_1-m_2 \in f^*$ dır. Buradan $f(m_1\ ,0)>t$, $f(m_2\ ,\ 0)>t$ olduğundan $m_1 = m_2$ elde edilir. Dolayısıyla f bire-bir dir.
Tersine olarak f bire-bir ve $m \in f^*$ olsun. $f(m\ ,\ 0)>t$ dir. $f(m\ ,\ 0)>t$ ve $f(0\ ,\ 0)>t$ olduğundan $m = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $f^* = \{0\}$ dır.

Tanım 24 : $f \in F(MxN\ ,\ L)$ fuzzy modül homomorfisi olsun.

$$\text{İm}(f) = \{n \in N \mid \exists m \in M \text{ öyleki } f(m\ ,\ n)>t\ \}$$

kümesine f nin fuzzy resmi denir.

Teorem 11 : $f \in F(MxN\ ,\ L)$ fuzzy modül homomorfisi olsun. Bu taktirde $\text{İm}(f) \subset N$ altmodüldür.

İspat : $f(0\ ,\ 0)>t$ olduğundan $0 \in \text{İm}(f)$ dır. Dolayısıyla $\text{İm}(f) \neq \varnothing$ dır. $n_1, n_2 \in \text{İm}(f)$ keyfi olsun.
$\exists\ m_1, m_2 \in M$ öyleki $f(m_1\ ,\ n_1)>t$ ve $f(m_2\ ,\ n_2)>t$ dır.

$$f(m_1-m_2,\ n_1-n_2) \geq f(m_1\ ,\ n_1) \wedge f(m_2\ ,\ n_2)>t$$

olduğundan $n_1-n_2 \in \text{İm}(f)$ elde edilir. (5)

$r \in R$ ve $n \in \text{İm}(f)$ keyfi olsun. $\exists\ m \in M$ öyleki $f(m\ ,\ n)>t$. $f(rm\ ,\ rn) \geq f(m\ ,\ n)>t$ olduğundan $rn \in \text{İm}(f)$ elde edilir. (6)

(5) ve (6) ile $\text{İm}(f) \subset N$ altmodüldür.

Teorem 12 : $f \in F(MxN, L)$ t-fuzzy fonksiyon $A \in F(M, L)$ ve $B \in F(N, L)$ olsun . Bu taktirde, $f(A) \in F(N, L)$ ve $f^{-1}(B) \in F(M, L)$ dır.

Teorem 13 : $f \in F(MxN, L)$ fuzzy modül homomorfisi olsun. Bu taktirde,

i) $A \in F(M, L)$ L-fuzzy altmodül ise $f(A) \subset Im(f)$ L-fuzzy altmodüldür.

ii) $B \in F(N, L)$ L-fuzzy altmodül ise $f^{-1}(B) \subset M$ L-fuzzy altmodüldür.

İspat : i) $$f(A)(n-n') = \bigvee_{f(m,n-n')>t} A(m) \geq \bigvee_{\substack{f(a,n)>t \\ f(b,n')>t \\ m=a-b}} A(a-b) \geq \bigvee_{\substack{f(a,n)>t \\ f(b,n')>t}} A(a) \wedge A(b)$$

$$= \bigvee_{f(a,n)>t} A(a) \wedge \bigvee_{f(b,n')>t} A(b) = f(A)(n) \wedge f(A)(n') \qquad (7)$$

$$f(A)(rn) = \bigvee_{f(m,rn)>t} A(m) \geq \bigvee_{f(m',n)>t} A(rm') \geq \bigvee_{f(m',n)>t} A(m') = f(A)(n) \qquad (8)$$

(7), (8) ve Tanım 21 ile $f(A) \subset$ İm(f) fuzzy altmodüldür.

ii) $f^{-1}(B)(m_1-m_2) = B(n)$, $f(m_1-m_2, n)>t$. f t- fuzzy fonksiyon olduğundan $\exists$ $n_1, n_2 \in N$ öyleki $f(m_1, n_1)>t$, $f(m_2, n_2)>t$ dir. Diğer yandan f fuzzy modül homomorfisi olduğundan $n = n_1 - n_2$ elde edilir.

$$f^{-1}(B)(m_1-m_2) = B(n) = B(n_1-n_2) \geq B(n_1) \wedge B(n_2) = f^{-1}(B)(m_1) \wedge f^{-1}(B)(m_2) \qquad (9)$$

$r \in R$ keyfi olsun. $f^{-1}(B)(rm) = B(n)$, $f(rm, n)>t$. f t-fuzzy fonksiyon olduğundan $\exists$ $n_1 \in N$ öyleki $f(m, n_1)>t$ dır. Buradan $f(rm, rn_1)>t$ ve $n = rn_1$ elde edilir.

$$f^{-1}(B)(rm) = B(n) = B(rn_1) \geq B(n_1) = f^{-1}(B)(m) \qquad (10)$$

(9), (10) ve Tanım 21 ile $f^{-1}(B) \subset M$ L-fuzzy altmodüldür.

Teorem 14 : $f \in F(MxN , L)$, $g \in F(NxK , L)$ fuzzy modül homomorfisi ise $gof \in F(MxK , L)$ fuzzy modül homomorfisidir.

İspat : $(gof)(m_1+m_2 , k_1+k_2) = \bigvee_{n \in N} f(m_1 + m_2 , n) \wedge g(n , k_1 + k_2)$

$$= \bigvee_{n=n_1+n_2} f(m_1 + m_2 , n_1 + n_2) \wedge g(n_1 + n_2 , k_1 + k_2)$$

$$\geq \bigvee_{\substack{n=n_1+n_2 \\ k=k_1+k_2}} [\ f(m_1 , n_1) \wedge f(m_2 , n_2) \wedge g(n_1 , k_1) \wedge g(n_2 , k_2)\ ]$$

$$= \bigvee_{n_1 , k_1} f(m_1 , n_1) \wedge g(n_1 , k_1) \wedge \bigvee_{n_2 , k_2} f(m_2 , n_2) \wedge g(n_2 , k_2)$$

$$= \bigvee_{k=k_1+k_2} (gof)(m_1 , k_1) \wedge \vee (gof)(m_2 , k_2)$$

Buradan $(gof)(m_1+m_2 , k_1+k_2) \geq (gof)(m_1 , k_1) \wedge (gof)(m_2 , k_2)$ dır. (11)

$$(gof)(rm , rk) = \bigvee_{n \in N} f(rm , n) \wedge g(n , rk) = \bigvee_{\substack{r_1 \in R \\ n \in N}} f(r_1 m , r_1 n) \wedge g(r_1 n , r_1 k) \geq \bigvee_{n \in N} f(m , n) \wedge g(n , k)$$

$$= (gof)(m , k)$$

Buradan $(gof)(rm , rk) \geq (gof)(m , k)$ dır. (12)

(11), (12) ve Tanım 22 ile $gof \in F(MxK , L)$ fuzzy modül homomorfisidir.

Tanım 25 : $A \in F(M , L)$ L-fuzzy altmodül olmak üzere her $x \in M$ için $(m+A)(x) = A(x-m)$ olarak tanımlanırsa $m+A$ M nin L-fuzzy altkümesidir.

$M/A = \{m+A \mid m \in M\}$ ve $M_A = \{m \in M \mid A(m) = A(0)\}$
olarak tanımlansın.

Önerme 17 : $A \in F(M, L)$ L-fuzzy altmodül olsun. M/A üzerinde her $r \in R$ ve $m \in M$ için $r(m+A) = rm+A$ yardımıyla bir işlem tanımlayalım. Bu taktirde aşağıdakiler gerçeklenir.

i) $M/A \subset R\mathfrak{I}$
ii) $M_A \subset M$ altmodüldür.
iii) $M/A \cong M/M_A$

İspat : Önerme 14 ve 15 ile yukarıda tanımlanan işlemin iyi tanımlılığı açıktır. $r, r_1 \in R$ ve $m_1, m_2 \in M$ keyfi olsun.

i) $r(m_1+A+m_2+A) = r(m_1+m_2+A) = r(m_1+m_2)+A = rm_1+rm_2+A = rm_1+A+rm_2+A$

$$= r(m_1+A)+r(m_2+A) \qquad (13)$$

$(r+r_1)(m_1+A) = (r+r_1)m_1+A = rm_1+r_1m_1+A = rm_1+A+r_1m_1+A$

$$= r(m_1+A)+r_1(m_1+A) \qquad (14)$$

$$r(r_1(m_1+A)) = r(r_1m_1+A) = rr_1m_1+A = (rr_1)(m_1+A) \qquad (15)$$

(13), (14) ve (15) ile $M/A \subset R\mathfrak{I}$ elde edilir.

ii) a) $m_1, m_2 \in M_A$ keyfi olsun. $A(m_1) = A(m_2) = A(0)$ dır. Buradan $A(m_1-m_2) = A(0)$ elde edilir. Dolayısıyla $m_1-m_2 \in M_A$ dır.

b) $r \in R$ ve $m \in M_A$ keyfi olsun. $A(m) = A(0)$ dır. Buradan $m+A = 0+A$ olduğundan

$r(m+A) = rm+A = r(0+A) = 0+A$ dır.Dolayısıyla $A(rm) = A(0)$ elde edilir. Sonuç olarak

a) ve b) den $M_A \subset M$ altmodüldür.

iii) $\varphi : M \to M/A$, $\varphi(m) = m+A$ olarak tanımlanan dönüşüm açık olarak modül epimorfisidir. $x \in$ çekf $\Leftrightarrow \varphi(x) = x+A = A \Leftrightarrow A(x) = A(0) \Leftrightarrow x \in M_A$. Buradan çekf $= M_A$ elde edilir.

Homomorfi teoremine göre $M/$Çekf $\cong M/A$ dır.

Tanım 26 : $A \in F(M\ ,\ L)$ L-fuzzy altmodül ve $f \in F(MxM/A\ ,\ L)$ t-fuzzy örten fonksiyon olsun. f ye M den M/A ya t-fuzzy doğal modül homomorfisi denir. $\Leftrightarrow$ Her m, m_1, $m_2 \in M$ ve $r \in R$ için,

i) $f(m\ ,\ m+A)>t$ ve $m+A \neq m_1+A$ için $f(m\ ,\ m_1+A) \leq t$

ii) $f(m_1+m_2\ ,\ m_1+A+m_2+A) \geq f(m_1\ ,\ m_1+A) \wedge f(m_2\ ,\ m_2+A)$

iii) $f(rm\ ,\ r(m+A)) \geq f(m\ ,\ m+A)$

Böyle bir fuzzy doğal modül homomorfisi vardır.

Gerçekten $\alpha \in L \setminus [0\ ,\ t)$ olmak üzere her m, $n \in M$ için $f(m\ ,\ m+A) = \alpha$, $m_1+A \neq m+A$ için $f(m\ ,\ m_1+A) = 0$ olarak tanımlanırsa $f : M \to M/A$ t-fuzzy doğal modül homomorfisidir.

Önerme 18 : A, $B \in F(M\ ,\ L)$ L-fuzzy altmodül öyleki $B \subseteq A$ olsun. $A(0) = B(0)$ ise $M_B \subseteq M_A$ dır.

İspat : $x \in M_B$ keyfi olsun. Buradan $B(x) = B(0)$ dır. $A(0) \geq A(x) \geq B(x) = B(0) = A(0)$ olduğundan $A(x) = A(0)$ olde edilir. Buradan $x \in M_A$ dır.

$\alpha \in L \setminus [0\ ,t)$ olmak üzere
$Hom_\alpha(M\ ,\ N) = \{f \mid f \in F(MxN\ ,\ L)$ fuzzy modül homomorfisi, $\{\alpha\} \subseteq Im(f) \subseteq [0\ ,t) \cup \{\alpha\}\}$ olarak tanımlansın.

Teorem 15 : L kompkat kafes, $f \in F(MxN\ ,\ L)$ örten fuzzy modül homomorfisi $A \in F(M\ ,\ L)$ L-fuzzy altmodül öyleki $M_A \subseteq f^*$ olsun. $g \in F(MxM/A\ ,\ L)$ fuzzy doğal modül homomorfisi ise $\exists\ h \in F(M/AxN\ ,\ L)$fuzzy örten modül homomorfisi öyleki

$hog \supseteq f \Leftrightarrow \forall m \in M$ için $g(m\ ,\ m+A) \geq f(m\ ,\ n)>t$ olsun. (16)

(16) koşulu gerçeklensin. Bu taktirde,

i) h bire-bir dir $\Leftrightarrow M_A = f^*$

ii) Eğer $\forall m_1, m_2 \in M$, $\forall n \in N$ için $f(m_1\ ,\ n)>t$ ve $f(m_2\ ,\ n)>t$ ise $f(m_1, n) = f(m_2, n)$ (17)

Bu taktirde, $f(m\ ,\ n)>t$ olan her $m \in M$ ve $n \in N$ ve için $h(m+A\ ,\ n) = f(m\ ,\ n)$ ve $(hog)(m\ ,\ n) = f(m\ n)$ dir.

iii)Eğer $g \in H_\beta(M\ ,\ M/A)$ ve $f \in H_\alpha(M\ ,\ N)$, $\beta>\alpha$ için $h \in H_\alpha(M/A\ ,\ N)$ dır.

İspat : (16) koşulu gerçeklensin. Bu taktirde, $\exists h \in F(M/A \times N\ ,\ L)$ fuzzy örten modül homomorfisi öyleki $hog \supseteq f$ olduğu gösterilecektir. Her $m+A \in M/A$ için,

$$h(m+A,n) = \bigvee_{m'+A=m+A} f(m',n)$$

yardımıyla tanımlanan $h : M/A \times N \to L$ fuzzy örten modül homomorfisidir. h bir t-fuzzy fonksiyondur. Gerçekten, kabul edilsin ki $h(m+A\ ,\ n)>t$ ve $h(m+A\ ,\ n')>t$ olsun. Bu taktirde,

$$\bigvee_{m_1+A=m+A} f(m_1\ ,n)>t \quad \text{ve} \quad \bigvee_{m_2+A=m+A} f(m_2\ ,n')>t$$

dır. Böylece $\exists u,\ v \in M$ öyleki $u+A = m+A$, $v+A = m+A$ dır. Buradan $u+A = v+A$ ve $f(u\ ,\ n)>t$ ve $f(v\ ,\ n')>t$ dir. $u+A = v+A$ olduğundan $A(u-v) = A(0)$ ve buradan $u-v \in M_A \subseteq f^*$ dır. Böylece $f(u-v\ ,\ 0)>t$.

Şimdi $f(u-v\ ,\ n-n') \geq f(u\ ,\ n) \wedge f(v\ ,\ n')>t$ olduğundan $n = n'$ elde edilir. Böylece $h \in F(M/A \times N\ ,\ L)$ t-fuzzy fonksiyondur. f örten olduğundan h örtendir. Şimdi h nın fuzzy modül homomorfisi olduğu gösterilecektir.

$m_1, m_2 \in M$, $n \in N$ ve $r \in R$ olsun.

$$h(m_1+A+m_2+A\ ,\ n) = h(m_1+m_2+A\ ,\ n) = \bigvee_{m'+A=m_1+m_2+A} f(m',n) \geq \bigvee_{\substack{m_1'+A=m_1+A \\ m_2'+A=m_2+A}} f(m_1'+m_2'\ ,n) \geq$$

$$\geq \bigvee \Big\{ \bigvee_{\substack{m_1'+A=m_1+A \\ m_2'+A=m_2+A}} f(m_1'\ ,n_1) \wedge f(m_2'\ ,n_2) \ \Big|\ n=n_1+n_2 \Big\}$$

$$= \bigvee \Big\{ \bigvee_{m_1'+A=m_1+A} f(m_1'\ ,n_1) \wedge \bigvee_{m_2'+A=m_2+A} f(m_2'\ ,n_2) \ \Big|\ n=n_1+n_2 \Big\}$$

$$= \bigvee_{n=n_1+n_2} h(m_1+A\ ,n_1) \wedge h(m_2+A\ ,n_2)$$

Buradan $h(m_1+A+m_2+A\ ,\ n) \geq \bigvee_{n=n_1+n_2} h(m_1+A\ ,n_1) \wedge h(m_2+A\ ,n_2)$ (18)

$$h(r(m+A)\ ,\ rn) = h(rm+A\ ,\ rn) = \bigvee_{u+A=rm+A} f(u\ ,rn) \geq \bigvee_{v+A=m+A} f(rv\ ,rn) \geq \bigvee_{v+A=m+A} f(v\ ,n) = h(m+A\ ,\ n)$$

Buradan $h(r(m+A)\ ,\ rn) \geq h(m+A\ ,\ n)$ (19)

(18) ve (19) ile $h \in F(M/A \times N\ ,\ L)$ fuzzy modül homomorfisidir.

$$(hog)(m\,,n) = \bigvee_{m'\in M} \left\{ g(m\,,m'+A) \wedge h(m'+A\,,n) \right\}$$

$$= \bigvee_{m'\in M} \left\{ g(m\,,m'+A) \wedge \bigvee_{m''+A=m+A} f(m'',n) \right\}$$

$$\geq \bigvee_{m'+A=m+A} \left\{ g(m\,,m'+A) \wedge \bigvee_{m''+A=m+A} f(m'',n) \right\}$$

$$\geq \bigvee_{m'+A=m+A} g(m,m'+A) \wedge f(m,n) = f(m\,,n)$$

(16 ile $\forall m\in M$ için $g(m, m+A)\geq f(m,n)>t$)

Böylece hog $\supseteq f$ elde edilir. Tersine olarak $h\in F(M/_A xN\,, L)$ fuzzy örten modül homomorfisi ve $f\subseteq hog$ olsun. Kabul edilsin ki $f(m\,,n)>t$ olsun. Bu taktirde $h(m+A\,,n)>t$ dir. Böylece,

$$f(m\,,n)\leq (hog)(m\,,n) = \bigvee_{m'+A\in M/_A} \left\{ g(m\,,m'+A) \wedge h(m'+A\,,n) \right\}$$

$$= \bigvee_{m'+A=m+A} \left\{ g(m\,,m+A) \wedge h(m'+A\,,n) \right\}$$

$$= g(m\,,m+A) \wedge h(m+A\,,n).$$

Böylece $g(m\,,m+A)\geq f(m\,,n)>t$ dir. Sonuç olarak (16) gerçeklenir.

i) h bire-bir olsun. Bu taktirde, $M_A = f^*$ olduğu gösterilecektir. $m\in f^*$ keyfi olsun. Bu taktirde,

$f(m\,,0)>t$ ve $f(0\,,0)>t$ dır. Böylece, $h(m+A\,,0)>t$ ve $h(0+A\,,0)>t$ olduğundan $m+A = 0+A$ dır. Buradan, $A(m) = A(0)$ ve $m\in M_A$ elde edilir. Sonuç olarak $f^*\subseteq M_A$ dır. Hipotezden $f^*\supseteq M_A$ olduğundan $M_A = f^*$ elde edilir. Tersine olarak $M_A = f^*$ olsun. Kabul edilsin ki $h(m_1+A\,,n)>t$ ve $h(m_2+A\,,n)>t$ olsun. Bu taktirde, $\exists u, v\in M$ öyleki $u+A = m_1+A$, $v+A = m_2+A$ ve $f(u\,,n)>t$, $f(v\,,n)>t$ dir. Buradan, $f(u-v\,,n)>t$ ve $u-v\in f^* = M_A$ dır. Dolayısıyla $A(u-v) = A(0)$ ve $u+A = v+A$ dır. Buradan $m_1+A = m_2+A$ elde edilir. Sonuç olarak h bire-bir dir.

ii) $h(m+A\,,n) = \bigvee_{m'+A=m+A} f(m',n)$ ve (2) ile $h(m+A\,,n) = f(m\,,n)$ elde edilir. Kabul edilsin ki $f(m\,,n)>t$ olsun. Bu taktirde,

$$(hog)(m\,,n) = \bigvee_{m'\in M} \left\{ g(m\,,m'+A) \wedge h(m'+A\,,n) \right\}$$

$$= \bigvee_{m'\in M} \left\{ g(m\,,m'+A) \wedge \bigvee_{m''+A=m'+A} f(m'',n) \right\}$$

$$= \bigvee_{m'+A=m+A} \left\{ g(m\,,m'+A) \wedge \bigvee_{m''+A=m'+A} f(m'',n) \right\}$$

$$= \bigvee_{m'+A=m+A} g(m,m'+A) \wedge f(m,n) = f(m\,,n).$$

Sonuç olarak $(hog)(m\,,n) = f(m\,,n)$ elde edilir.

iii) (17) geçerli ve $h \in F(M/A \times N, L)$ örten fuzzy modül homomorfisi öyleki $hog = f$ olsun. Bu taktirde, $f(m, n) > t$ ve $h(m+A, n) = f(m, n) = \alpha$ dır. $t = 0$ ise $f \subseteq hog$ ise $f = hog$ dır. Sonuç olarak $h \in H_\alpha(M/A \times N, L)$ dir.

Önerme 19 : $f \in F(M \times N, L)$ örten fuzzy modül homomorfisi ise $\exists\, \alpha : M \to N$ örten modül homomorfisi öyleki $çek\alpha = f^*$ dır.

İspat : $\forall m \in M$ için $\alpha(m) = n \Leftrightarrow f(m, n) > t$ olarak tanımlayalım. Açık olarak α örten fonksiyondur. $\alpha(m_1+m_2) = n$ olsun. Bu taktirde, $f(m_1+m_2, n) > t$ dir. Diğer yandan f t-fuzzy fonksiyon olduğundan $\exists n_1, n_2 \in N$ öyleki $f(m_1, n_1) > t$, $f(m_2, n_2) > t$. f fuzzy modül homomorfisi olduğundan $f(m_1+m_2, n_1+n_2) \geq f(m_1, n_1) \wedge f(m_2, n_2) > t$. Buradan $n = n_1+n_2$ dir. Sonuç olarak $\alpha(m_1+m_2) = n = n_1+n_2 = \alpha(m_1)+\alpha(m_2)$ (20)

$r \in R$ için $\alpha(rm) = n$ olsun. Bu taktirde, $f(rm, n) > t$ dir. Diğer yandan f fonksiyon olduğundan $\exists n_1 \in N$ öyleki $f(m, n_1) > t$. f fuzzy modül homomorfisi olduğundan $f(rm, rn_1) \geq f(m, n_1) > t$ Buradan $rn_1 = n$ dir. Sonuç olarak

$$\alpha(rm) = n = rn_1 = r\alpha(m) \qquad (21)$$

(20) ve (21) in sonucu olarak $\alpha : M \to N$ modül homomorfisidir. $m \in Çek\alpha \Leftrightarrow \alpha(m) = 0 :\Leftrightarrow f(m, 0) > t \Leftrightarrow m \in f^* \Leftrightarrow Çek\alpha = f^*$.

Sonuç 2 : $f \in F(M \times N, L)$ fuzzy modül izomorfisi ise $\exists \alpha: M \to N$ öyleki α modül izomorfisidir.

Tanım 27 : $f \in F(M \times N, L)$ fuzzy modül homomorfisi ve $A \in F(M, L)$ L-fuzzy altmodül olsun. Bu taktirde; A f-invaryanttır. $\Leftrightarrow$ $f(m, n) > t$ ve $f(m', n) > t$ olan her $m, m' \in M$ ve $n \in N$ için $A(m) = A(m')$ dır.

Önerme 20 : $f \in F(M \times N, L)$ fuzzy modül homomorfisi ve $A \in F(M, L)$ L-fuzzy altmodül olsun. Bu taktirde, A f-invaryanttır. $\Leftrightarrow f^* \subseteq M_A$ dır.

İspat : A f-invaryant ve $m \in f^*$ olsun. Bu taktirde, $f(m, 0) > t$. $f(0, 0) > t$ ve A f-invaryant olduğundan $A(m) = A(0)$ dır. Buradan $m \in M_A$ olup $f^* \subseteq M_A$ elde edilir. Tersine olarak $f^* \subseteq M_A$ ve $f(m, n) > t$ ve $f(m', n) > t$ olsun. Bu taktirde, $f(m-m', 0) \geq f(m, n) \wedge f(-m', -n) > t$ dir. Buradan $m-m' \in f^* \subseteq M_A$ ve $A(m) = A(m')$ elde edilir. Sonuç olarak A f-invaryanttır.

Lemma 2 : $A \in F(M, L)$ L-fuzzy altmodül $m, m' \in M$ ve L tam sıralı olsun.Eğer, $A(m) \neq A(m')$ ise $A(m-m') = A(m) \wedge A(m')$ dır.

İspat : Önerme 20 ile hemen görülür.

Teorem 16 : $f \in F(MxN, L)$ fuzzy modül homomorfisi ve$A \in F(M, L)$ L-fuzzy altmodül öyleki $f^* \subseteq M_A$, $h \in F(MxM/A, L)$ ve $h' \in F(NxN/f(A), L)$ fuzzy doğal modül homomorfisi olsun. Bu taktirde,

$\exists g \in F((M/A)x(N/f(A)), L)$ fuzzy modül izomorfisi öyleki $h'of \subseteq goh$ (22)

$\Leftrightarrow$ her $m \in M$ için $h(m, m+A) \geq (h'of)(m, n+f(A))$. Burada $(h'of)(m, n+f(A)) > t$ dir. Eğer $h \in H_\beta(M, M/A)$ ve $h'of \in H_\alpha(M, N/f(A))$, $\beta > \alpha$ ise $g \in H_\alpha(M/A, N/f(A))$ dır.

İspat : Teorem 15 den $(h'of)^* = M_A$ olduğunu göstermek yeterlidir. $m \in (h'of)^*$ keyfi olsun. Bu taktirde, $\exists n \in N$ öyleki $f(m, n) > t$ ve $h'(n, 0+f(A)) > t$ $\Leftrightarrow$Teorem 15 ii) ile $\exists n \in N$ öyleki $f(m, n) > t$, $n+f(A) = 0+f(A)$ dır. Teorem 15 ii) den açıktır ki $\exists n \in N$ öyleki $f(m, n) > t$ ve

$$\bigvee_{f(m,-n)>t} A(m) = \bigvee_{f(m',-n)>t} A(m') = A(0) \quad (f^* \subseteq M_A)$$

Buradan $\bigvee_{f(m,-n)>t} A(m) = \bigvee_{f(-m,n)>t} A(-m)$ dır. $A(m) = A(-m)$ olduğundan ve $f(-m, n) > t$

$\Leftrightarrow f(m, -n) > t$ dir. Bu ise Teorem 15 ii) ile $A(m) = A(0)$ olduğuna denktir. (çünkü A f-invaryant ve bu durumda $f(m, n) > t$ dir.) Şimdi $A(m) = A(0) \Leftrightarrow m \in M_A$ dır. Buradan $(h'of)^* \subseteq M_A$ elde edilir. İspatı tamamlamak için Teorem 15 deki ii) den i) yi elde etmek gerekir. $n_1 \in N$ olmak üzere

$$(n+f(A))(n_1) = \bigvee_{f(m', n_1-n)>t} A(m') \quad \text{ve} \quad (0+f(A))(n_1) = \bigvee_{f(m'', n_1)>t} A(m'')$$

dır.

Şimdi $f(m'-m'', -n) \geq f(m', n_1-n) \wedge f(-m'', -n_1) > t$.Teorem 15 ii) ve A f-invaryant olduğundan $A(m'-m'') = A(0)$ dır. Buradan

$A(m'-m'') \geq A(m') \wedge A(m'')$ dır. Şimdi $A(m') \neq A(m'')$ olduğunu varsayalım. Bu taktirde $A(m'-m'') = A(m') \wedge A(m'') < A(0)$ elde edilirki bu ise Lemma 2 ile çelişir. O halde $A(m') = A(m'')$ dır. Buradan $(0+f(A))(n_1) = (n+f(A))(n_1)$ dır.

Böylece $0+f(A) = n+f(A)$ elde edilir. Böylece Teorem 15 i) koşulu gerçeklenir.

Sonuç olarak $M_A \subseteq (h'of)^*$ dır. Eğer $(h'of)^*$ Teorem 15 ii) koşulunu gerçekler ise $(goh)(m,n) = (h'of)(m, n)$ ve $(h'of)(m, n) > t$ dir.

Sonuç 3 : $A_1, A_2 \in F(M, L)$ L-fuzzy altmodül öyleki $A_2 \subseteq A_1$ ve $A_1(0) = A_2(0)$ olsun. $f \in F(Mx(M/A_2), L)$ fuzzy doğal modül homomorfisi ve A_1/A_2 yi $f(A_1)$ olarak tanımlarsak

$$M/A_1 \cong (M/A_2)/(A_1/A_2)$$

dir.

İspat : $f^* = MA_2 \subseteq MA_1$, $h \in H\alpha(M, M/A_1)$ ve $\alpha = 1$ alınırsa Teorem 16 ile hemen elde edilir.

Önerme 21 : $A_1, A_2 \in F(M, L)$ L-fuzzy altmodül öyleki $A_1(0) = A_2(0)$ olsun. Bu taktirde,

i) $MA_1 \cap A_2 = MA_1 \cap MA_2$

ii) $MA_1 + A_2 \subseteq MA_1 + MA_2$

dir.

İspat : i) $m \in MA_1 \cap A_2$ keyfi olsun. Bu taktirde,

$(A_1 \cap A_2)(m) = (A_1 \cap A_2)(0) \Leftrightarrow A_1(m) \wedge A_2(m) = A_1(0) \wedge A_2(0) \Leftrightarrow A_1(m) = A_1(0)$, $A_2(m) = A_2(0) \Leftrightarrow m \in MA_1$ ve $m \in MA_2 \Leftrightarrow m \in MA_1 \cap MA_2$.

ii) $(A_1+A_2)(0) = \bigvee_{y+z=0} A_1(y) \wedge A_2(z) = A_1(0) \wedge A_2(0) = A_1(0) = A_2(0)$ ve

$(A_1+A_2)(m) = \bigvee_{y+z=m} A_1(y) \wedge A_2(z) = A_1(m) \wedge A_2(0) = A_1(m)$. Buradan $A_1 \subseteq A_1+A_2$ dır. Önerme 17 ile $MA_1 \subseteq MA_1+A_2$ elde edilir. Benzer şekilde $MA_2 \subseteq MA_1+A_2$ dir. Buradan $MA_1+MA_2 \subseteq MA_1+A_2$ elde edilir.

Teorem 17 : $A_1, A_2 \in F(M, L)$ L-fuzzy altmodül $A_1(0) = A_2(0)$ ve $f \in F(MA_1 x(MA_1+A_2/A_2), L)$ örten fuzzy modül homomorfisi öyleki $f(m, m+A_2) > t$ olsun. Her $m \in MA_1$ için $g \in F(MA_1 x(MA_1/MA_1 \cap A_2), L)$ fuzzy doğal modül homomorfisi olsun. Bu taktirde $\exists h \in F((MA_1/MA_1 \cap A_2) x((MA_1+A_2)/A_2), L)$ fuzzy modül izomorfisi öyleki $f \subseteq hog \Leftrightarrow$ Her $m \in MA_1$ için $g(m, m+A_1+A_2) \geq f(m, m+A_1)$ dır.

Eğer $g \in H\beta(MA_1, MA_1/A_1 \cap A_2)$ ve $f \in H\alpha(MA_1, MA_1+A_2)$, $\beta > \alpha$ için $h \in H\alpha(MA1/A_1 \cap A_2, MA_1+A_2/A_2)$ dır.

İspat : Teorem ile $MA_1 \cap A_2 = f^*$ olduğunu göstermek yeterlidir. $m \in f^* \Leftrightarrow$ $f(m, m+A_2) = f(m, 0+A_2) > t \Leftrightarrow m+A_2 = 0+A_2 \Leftrightarrow A_2(m) = A_2(0) \Leftrightarrow m \in MA_2$ dır. $m \in MA_1$ olduğundan Önerme 16 ile $m \in f^* \Leftrightarrow m \in MA_1 \cap MA_2 = MA_1 \cap A_2$ dır. Sonuç olarak $f^* = MA_1 \cap A2$ elde edilir.

Teorem 18 : $f \in F(MxN, L)$ fuzzy modül homomorfisidir $\Leftrightarrow \exists f_M \in F(M, L)$ ve $f_N \in F(N, L)$ L-fuzzy altmodül öyleki $f_M x f_N = f$ dir.

İspat : "$\Rightarrow$" $f \in F(MxN, L)$ fuzzy modül homomorfisi olsun. $f_M(m) = f(m, 0)$ ve $f_N(n) = f(0, n)$ olarak tanımlansın. Bu taktirde $f_M \in F(M, L)$, $f_N \in F(N, L)$ L-fuzzy altmodüldür. Gerçekten,

$f_M(m_1-m_2) = f(m_1-m_2, 0) = f(m_1-m_2, 0+0) \geq f(m_1, 0) \wedge f(m_2, 0) = f_M(m_1) \wedge f_M(m_2)$.
Buradan $f_M(m_1-m_2) \geq f_M(m_1) \wedge f_M(m_2)$ elde edilir. (22)

$f_M(rm) = f(rm, 0) = f(rm, r0) \geq f(m, 0) = f_M(m)$.
Buradan $f_M(rm) \geq f_M(m)$ elde edilir. (23)

(22), (23) veTanım 21 ile $f_M \in F(M, L)$ L-fuzzy altmodüldür.

$f_N(n_1-n_2) = f(0, n_1-n_2) = f(0+0, n_1-n_2) \geq f(0, n_1) \wedge f(0, n_2) = f_N(n_1) \wedge f_N(n_2)$.
Buradan $f_N(n_1-n_2) \geq f_N(n_1) \wedge f_N(n_2)$ elde edilir. (24)

$f_N(rn) = f(0, rn) = f(r0, rn) \geq f(0, n) = f_N(n)$.
Buradan $f_N(rn) \geq f_N(n)$ elde edilir. (25)

(24), (25) ve Tanım 21 ile $f_N \in F(N, L)$ L-fuzzy altmodüldür.

$f(m, 0) = f(m, n-n) \geq f(m, n)$ ve $f(0, n) = f(m-m, n) \geq f(m, n)$ olduğundan $f(m, 0) \wedge f(0, n) \geq f(m, n)$ elde edilir.Buradan $f_M(m) \wedge f_N(n) \geq f(m, n)$ dır.
Diğer yandan $f(m, n) = f(m+0, 0+n) \geq f(m, 0) \wedge f(0, n) = f_M(m) \wedge f_N(n)$ olduğundan $f_M x f_N = f$ elde edilir.

"$\Leftarrow$ " $f_M \in F(M, L)$ ve $f_N \in F(N, L)$ L-fuzzy altmodül olsun. Bu taktirde $f \in F(MxN, L)$ t-fuzzy fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$f(m, n) = f_M(m) \wedge f_N(n)$.

Bu taktirde f fuzzy modül homomorfisidir.Gerçekten,

$$f(m_1+m_2, n_1+n_2) = f_M(m_1+m_2) \wedge f_N(n_1+n_2) \geq f_M(m_1) \wedge f_M(m_2) \wedge f_N(n_1) \wedge f_N(n_2)$$
$$= f_M(m_1) \wedge f_N(n_1) \wedge f_M(m_2) \wedge f_N(n_2) = f(m_1, n_1) \wedge f(m_2, n_2). \quad (26)$$

$$f(rm, rn) = f_M(rm) \wedge f_N(rn) \geq f_M(m) \wedge f_N(n) = f(m, n) \quad (27)$$

(26), (27) ve Tanım 22 ile $f \in F(MxN, L)$ fuzzy modül homomorfisidir.

3.3. Modüllerin Fuzzy Çarpımı ve Eş Çarpımının Bir Karakterizasyonu

Burada, modüllerin ailesi üzerine bir kategori konularak t-seviyesinde fuzzy çarpım ve eş çarpımın üniversal özelliğe sahip olduğu gösterildi.

R bir halka, M, N, $K \in {}_R\mathfrak{I}$ ve $t \in L \setminus \{1\}$ olsun.

$$Mor_{\mathfrak{I}}(M, N) = \{ f \in F(MxN, L) \mid f \text{ fuzzy modül homomorfisi} \}$$

$$o : Mor_{\mathfrak{I}}(N, K) x\, Mor_{\mathfrak{I}}(M, N) \to Mor_{\mathfrak{I}}(M, K)$$

$$(f, g) \to fog$$

olsun. Bu taktirde, her $M \in {}_R\mathfrak{I}$ için,

$$1_M(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ t, & x \neq y \end{cases}$$

ile tanımlansın. Açık olarak $1_M \in F(MxM, L)$ fuzzy modül homomorfisidir. Her $f \in Mor_{\mathfrak{I}}(M, N)$

$$fo1_M = 1_N of = f$$

dır. Buradan $\mathfrak{I} = ({}_R\mathfrak{I}, Mor_{\mathfrak{I}}, o)$ kategori olduğu hemen görülür.

3.3.1. ${}_R\mathfrak{I}$ Kategorisinde Çarpım ve Eş Çarpım

$I \neq \emptyset$ bir indis kümesi, $\{ A_i \mid i \in I \} \subset {}_R\mathfrak{I}$ bir ailesi olsun.

$$\prod_{i \in I}^{t} A_i = \{ f \in F(Ix(\bigcup_{i \in I} A_i), L) \mid f \text{ t-fuzzy fonksiyon, } \forall i \in I \text{ için } \exists! a \in A_i \text{ öyleki } f(i, a) > t \}$$

olarak tanımlansın.

$$\theta(i, a) = \begin{cases} 1, & a = 0_i \\ t, & a \neq 0_i \end{cases}$$

yardımıyla $\theta : Ix(\bigcup_{i \in I} A_i) \to L$ tanımlansın. Bu taktirde, $\theta \in \prod_{i \in I}^{t} A_i$ olduğu açıktır.

Her $\lambda \in R$, $f, g \in \prod_{i \in I}^{t} A_i$ için

$$(f \oplus g)(i, a) = \bigvee_{a = u + v} f(i, u) \wedge g(i, v)$$

$$(\lambda . f)(i, a) = \bigvee_{a = \lambda u} f(i, u)$$

yardımıyla $f\oplus g$,$\lambda.f : Ix(\bigcup_{i\in I} A_i) \to L$ tanımlansın.

$i\in I$ keyfi olsun. Bu taktirde, $\exists a_1$, $a_2\in A_i$ öyleki $f(i , a_1)>t$ ve $g(i , a_2)>t$ dir.
Buradan

$$(f\oplus g)(i , a_1+a_2)\geq f(i , a_1)\wedge f(i , a_2)>t$$

dir. Dolayısıyla $(f\oplus g)(i , a_1+a_2) >t$ dir. $(f\oplus g)(i , a)>t$ ve $(f\oplus g)(i , a^*)>t$ olsun. $(f\oplus g)(i , a)>t$ olduğundan $\exists$ a_1 , $a_2\in A_i$ öyleki $a = a_1+a_2$ ve $f(i , a_1)\wedge g(i , a_2)>t$ dir.
$f\oplus g)(i , a^*)>t$ olduğundan $\exists$ a_1^* , $a_2^*\in A_i$ öyleki $a^* = a_1^*+a_2^*$ ve $f(i , a_1^*)\wedge g(i , a_2^*)>t$ dir.

$f(i , a_1)>t$ ve $f(i , a_1^*)>t$ olduğundan $a_1 = a_1^*$, $g(i , a_2)>t$ ve $g(i , a_2^*)>t$ olduğundan

$a_2 = a_2^*$ dır. Buradan $a = a^*$ elde edilir. Dolayısıyla $f\oplus g \in \prod_{i\in I}^{t} A_i$. Diğer yandan $i\in I$ keyfi olsun. Bu taktirde, $\exists a_1\in A_i$ öyleki $f(i , a_1)>t$ dir. Buradan $(\lambda f)(i , \lambda a_1)\geq f(i , a_1)>t$ dir.
Dolayısıyla $(\lambda f)(i , \lambda a_1)>t$ dir. $(\lambda f)(i , a)>t$ ve $(\lambda f)(i , a^*)>t$ olsun. $(\lambda f)(i , a)>t$ olduğundan $\exists a_1\in A_i$ öyleki $a = \lambda a_1$ ve $f(i , a_1)>t$ dir. $(\lambda f)(i , a^*)>t$ olduğundan $\exists a_1^*\in A_i$ öyleki $a^* = \lambda a_1^*$ ve $f(i , a_1^*)>t$ dir. $f(i , a_1)>t$ ve $f(i , a_1^*)>t$ olduğundan $a_1 = a_1^*$ dır. Buradan $a = a^*$ elde edilir.

Dolayısıyla $(\lambda f)\in \prod_{i\in I}^{t} A_i$.

Açık olarak $\prod_{i\in I}^{t} A_i \in R\mathfrak{I}$. $\prod_{i\in I}^{t} A_i$ ye $\{A_i \mid i\in I\}$ ailesinin t-fuzzy çarpımı denir. $\forall k\in I$ için

$\pi_k(f , a) = f(k , a)$ yardımıyla tanımlanan $\pi_k :(\prod_{i\in I}^{t} A_i)xA_k \to L$ t-fuzzy fonksiyonu fuzzy modül homomorfisidir.

$$\pi_k(f\oplus f^* , a+b) = (f\oplus f^*)(k , a+b) \geq f(k , a)\wedge f^*(k , b) = \pi_k(f , a)\wedge \pi_k(f^* , b) \qquad (28)$$

$$\pi_k(\lambda f, \lambda a) = (\lambda f)(k , \lambda a) = \bigvee_{\lambda a=\lambda u} f(k,u) \geq f(k , a) = \pi_k(f , a) \qquad (29)$$

(28) ve (29) den π_k fuzzy modül homomorfisidir.

$\forall i\in I$ ve $a\in A_i$ için

$$f_a(i , r) = \begin{cases} 1 , & (i=k \text{ ve } a=r) \text{ veya } (i \neq k \text{ ve } r=0_k) \\ t , & \text{Aksi taktirde} \end{cases}$$

yardımıyla $f_a : Ix(\bigcup_{i\in I} A_i) \to L$ t-fuzzy fonksiyonu tanımlansın. Bunun yardımıyla

$$e_k(a, f) = \begin{cases} 1, & f=f_a \\ t, & f \neq f_a \end{cases}$$

ile tanımlanan $e_k : A_k x (\prod_{i\in I}^{t} A_i) \to L$ t-fuzzy fonksiyonu fuzzy modül homomorfisidir.

A) $e_k(a_1+a_2, f_1 \oplus f_2) = 1$ ise $e_k(a_1+a_2, f_1 \oplus f_2) \geq e_k(a_1, f_1) \wedge e_k(a_2, f_2)$ olduğu açıktır.

$e_k(a_1+a_2, f_1 \oplus f_2) \neq 1$ olsun. Bu taktirde $f_1 \oplus f_2 \neq f_{a_1+a_2}$ dır.

İddia : $f_1 \neq f_{a_1}$ veya $f_2 \neq f_{a_2}$ dir.

Varsayım : $f_1 = f_{a_1}$ ve $f_2 = f_{a_2}$. Bu taktirde $f_1 \oplus f_2 = f_{a_1} \oplus f_{a_2} = f_{a_1+a_2}$ olduğu gösterilecektir.

I) $f_{a_1+a_2}(k, r) = 1$ olsun. Buradan $r = a_1+a_2$ dir.

$$(f_{a_1} \oplus f_{a_2})(k, r) = \bigvee_{r=u+v} f_{a_1}(k, u) \wedge f_{a_2}(k, v) \geq f_{a_1}(k, a_1) \wedge f_{a_2}(k, a_2) = 1$$

Buradan $(f_{a_1} \oplus f_{a_2})(k, r) = 1$ dir.

I_1) $k \neq i$ için $f_{a_1+a_2}(k, r) = 1$ olsun. Bu taktirde, $r = 0$ dır.

$$(f_{a_1} \oplus f_{a_2})(i, 0) = \bigvee_{0=u+v} f_{a_1}(i, u) \wedge f_{a_2}(i, v) \geq f_{a_1}(i, 0) \wedge f_{a_2}(i, 0) = 1$$

Buradan $(f_{a_1} \oplus f_{a_2})(i, r) = 1$ dir.

II) $f_{a_1+a_2}(k, r) \neq 1$ olsun. $f_{a_1+a_2}(k, r) = t$ ise $r \neq a_1+a_2$ dir.

$(f_{a_1} \oplus f_{a_2})(k, r) = \bigvee_{r=u+v} f_{a_1}(k, u) \wedge f_{a_2}(k, v)$, $r \neq a_1+a_2$ olduğundan $u \neq a_1$ veya $v \neq a_2$ dir.

Dolayısıyla $f_{a_1}(k, u) = t$ veya $f_{a_2}(k, v) = t$, $r = u+v$ dir. Sonuç olarak $(f_{a_1} \oplus f_{a_2})(k, r) = t$ elde edilir.

II_2) $k \neq i$ için $f_{a_1+a_2}(k, r) = t$ olsun. olsun. Bu taktirde $r \neq 0$ dır.

$(f_{a_1} \oplus f_{a_2})(i, r) = \bigvee_{r=u+v} f_{a_1}(i, u) \wedge f_{a_2}(i, v)$, $r = u+v$ ve $r \neq 0$. Buradan $u \neq 0$ veya $v \neq 0$

dır.

Dolayısıyla $f_{a_1}(i, u) = t$ veya $f_{a_2}(i, v) = t$, $r = u+v$. Sonuç olarak $(f_{a_1} \oplus f_{a_2})(i, r) = t$ elde edilir. I) ve II) den $f_{a_1+a_2} = f_{a_1} \oplus f_{a_2}$ elde edilir. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. Sonuç olarak

$$e_k(a_1+a_2, f_1 \oplus f_2) \geq e_k(a_1, f_1) \wedge e_k(a_2, f_2)$$

dir.

B) $\lambda \in R$ ve $e_k(\lambda a, \lambda f) = 1$ ise $e_k(\lambda a, \lambda f) \geq e_k(a, f)$ olduğu açıktır. $e_k(\lambda a, \lambda f) \neq 1$ olsun. Bu taktirde, $f_{\lambda a} \neq \lambda f_a$ dir.

İddia : $f_a \neq f$ dir

Varsayım : $f_a = f$ olsun. Bu taktirde $\lambda f_a = f_{\lambda a}$ olduğunu gösterelim. $f_{\lambda a}(k, r) = 1$ ise $r = \lambda a$ dır.

I) $(\lambda f_a)(k, r) = \bigvee_{r=\lambda u} f_a(k,u) \geq f_a(k, r) = 1$. Buradan $(\lambda f_a)(k, r) = 1$ dir.

I1) $k \neq i$ için $f_{\lambda a}(i, r) = 1$ olsun. Bu taktirde $r = 0$ dır.

$$(\lambda f_a)(i, 0) = \bigvee_{0=\lambda u} f_a(i,u) \geq f_a(i, 0) = 1. \text{ Buradan } (\lambda f_a)(i, r) = 1 \text{ dir.}$$

II) $f_{\lambda a}(k, r) \neq 1$ olsun. Bu taktirde, $f_{\lambda a}(k, r) = t$ dir. Buradan $\lambda a \neq r$ dir. Dolayısıyla $f_a(k, u) = t$ dir. Sonuç olarak $(\lambda f_a)(k, r) = t$ elde edilir.

$(\lambda f_a)(k, r) = \bigvee_{r=\lambda u} f_a(k,u)$, $\lambda a \neq r$, $r = \lambda u$ olduğundan $u \neq a$ dır. I) ve II) den $\lambda f_a = f_{\lambda a}$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak $e_k(\lambda a, \lambda f) \geq e_k(a, f)$ elde edilir. A) ve B) den e_k fuzzy modül homomorfisidir.

π_k ve e_k ya sırası ile k.fuzzy projeksiyonu ve fuzzy injeksiyonu denir.

$C \in R\mathfrak{I}$ ve $\varphi_i \in F(C x A_i, L)$ fuzzy modül homomorfisi olsun. Bu taktirde, $\exists \overline{\varphi}_i \in Hom(C, A_i)$ öyleki $\overline{\varphi}_i(c) = a_i \Leftrightarrow \varphi_i(c, a_i) > t$ olarak tanımlansın. Bu taktirde $\overline{\varphi}$ tektir.

$$f_c(i, a) := \begin{cases} \varphi_i(c, a_i), & a = a_i = \overline{\varphi}_i(c) \\ t, & \text{Aksi taktirde} \end{cases}$$

ile t-fuzzy fonksiyonu tanımlansın.

Bunun yardımıyla

$$\varphi(c,f):=\begin{cases} 1, & f=f_c \\ t, & f\neq f_c \end{cases}$$

ile tanımlanan $\varphi\in F(C\times\prod_{i\in I}^{t} A_i, L)$ t-fuzzy fonksiyonu göz önüne alınsın.

Teorem 19 : $\{A_i \mid i\in I\}\subset R\mathfrak{I}$ bir ailesi ve $C\in R\mathfrak{I}$ olmak üzere $\{\varphi_i : C\times A_i \to L \mid i\in I\}$ fuzzy modül homomorfilerinin bir ailesi verilsin. Bu taktirde $\exists!\ \varphi\in F(C\times\prod_{i\in I}^{t} A_i, L)$ fuzzy modül homomorfisi öyleki $\forall i\in I$ için $\pi_i o\varphi = \varphi_i$ dir.

İspat : $f_{c_1+c_2}(i, a) = \begin{cases} \varphi_i(c_1+c_2, a_i), & a_i=\overline{\varphi}_i(c_1+c_2)=\overline{\varphi}_i(c_1)+\overline{\varphi}_i(c_2) \\ t, & \text{Aksi taktirde} \end{cases}$

olarak tanımlansın. $f_{c_1+c_2}(i, a)>t$ olduğundan $a=\overline{\varphi}_i(c_1)+\overline{\varphi}_i(c_2)$ dir.

$\varphi_i(c_1+c_2, a)\geq\varphi_i(c_1, a_1)\wedge\varphi_i(c_2, a_2)>t$ ise $\overline{\varphi}_i(c_1)=a_1$, $\overline{\varphi}_i(c_2)=a_2$ dir. Buradan

$$(f_{c_1}+f_{c_2})(i, a)=\bigvee_{a=a_1+a_2} f_{c_1}(i,a_1)\wedge f_{c_2}(i,a_2)\geq f_{c_1}(i, \overline{\varphi}_i(c_1))\wedge f_{c_2}(i, \overline{\varphi}_i(c_2))>t$$

dir. Sonuç olarak $f_{c_1+c_2}=f_{c_1}+f_{c_2}$ elde edilir. Buradan

$$\varphi(c_1+c_2, f)\geq\bigvee_{f=f_1+f_2} f_{c_1}(i,a_1)\wedge f_{c_2}(i,a_2) \qquad (30)$$

$\lambda\in R$ olmak üzere

$$(f_{\lambda c})(i, a)=\begin{cases} \varphi_i(\lambda c, a_i), & a_i=\overline{\varphi}_i(\lambda c)=\lambda\overline{\varphi}_i(c) \\ t, & \text{Aksi taktirde} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $f_{\lambda c}(i, a)>t$ olduğundan $a=\lambda\overline{\varphi}_i(c)$ dir. Diğer yandan

$\varphi_i(\lambda c, a)\geq\bigvee_{a=\lambda u}\varphi_i(c,u)$, $u=\overline{\varphi}_i(c)$ dır. Bu taktirde $(\lambda f_c)(i, a)=\bigvee_{a=\lambda u} f_c(i,u)\geq f_c(i, \overline{\varphi}_i(c))>t$

Sonuç olarak $\lambda f_c = f_{\lambda c}$ elde edilir. Buradan

$$\varphi(\lambda c, f)\geq\bigvee_{f=\lambda f_1}\varphi(c,f_1) \qquad (31)$$

(30) ve (31) den φ fuzzy modül homomorfisidir. $(\pi_i o\varphi)(c, a)=f_c(i, a)=\varphi_i(c, a)$ dır. Sonuç olarak her $i\in I$ için $\pi_i o\varphi=\varphi_i$ dir. φ nin tekliği tanımından açıktır.

Aşağıdaki küme göz önüne alınsın.

$$\sum_{i\in I}^{t} A_i = \{f\in \prod_{i\in I}^{t} A_i \mid \exists\, S_f \subset I \text{ sonlu ve } \forall i\in I\setminus S_f \text{ için } f(i, 0_i)>t\}$$

$S_0 = \varnothing$ olduğundan $0 = |S_0|<\infty$. Buradan $0\in \sum_{i\in I}^{t} A_i \neq\varnothing$ dır. $f, g\in \sum_{i\in I}^{t} A_i$ keyfi verilsin. Bu taktirde $\exists S_f, S_g \subset I$ sonlu öyleki her $i\in I\setminus S_f$, $j\in I\setminus S_g$ için $f(i, 0_i)>t$ ve $g(j, 0_j)>t$ dir. Dolayısıyla her $i\in I\setminus(S_f\cup S_g)$ için $f(i, 0_i)>t$ ve $g(i, 0_i)>t$ dir. Sonuç olarak

$$(f\oplus g)(i, 0_i) = \bigvee_{0_i=a+b} f(i,a)\wedge g(i,b) \geq f(i, 0_i)\wedge g(i, 0_i)>t$$

elde edilir. Diğer yandan $|S_f\cup S_g| = |S_f|+|S_g|-|S_f\cap S_g|\leq|S_f|+|S_g|<\infty$ olduğundan $f\oplus g\in \sum_{i\in I}^{t} A_i$ dir.

$\lambda\in R$ ve $f\in \sum_{i\in I}^{t} A_i$ keyfi verilsin. Bu taktirde $\exists S_f\subset I$ sonlu öyleki her $i\in I\setminus S_f$ için $f(i, 0_i)>t$ dir.

$$(\lambda f)(i, 0_i) = \bigvee_{0_i=\lambda v} f(i,v) \geq f(i, 0_i)>t$$

elde edilir. Diğer yandan $|S_{\lambda f}| = |\lambda S_f|\leq|S_f|<\infty$ olduğundan $\lambda f\in \sum_{i\in I}^{t} A_i$ dir. $\sum_{i\in I}^{t} A_i \subset \prod_{i\in I}^{t} A_i$ altmodül olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$\sum_{i\in I}^{t} A_i$ ye $\{ A_i \mid i\in I \}$ ailesinin t-fuzzy eş çarpımı denir.

$D\in R\mathfrak{I}$ ve $\psi_i : A_i x D \to L$ fuzzy modül homomorfisi olsun. $f\in \sum_{i\in I}^{t} A_i$ keyfi olsun. Bu taktirde $\exists S_f\subset I$ sonlu öyleki her $i\in I\setminus S_f$ için $f(i, 0_i)>t$ dir. Böylece $\exists a_i\in A_i$, $u_i\in D$ öyleki $f(i, a_i)>t$ ve $\psi_i(a_i, u_i)>t$ dir. Şimdi

$$\psi(f, d) = \begin{cases} 1, & d = \sum_{i\in S_f} u_i \\ t, & \text{Aksi taktirde} \end{cases}$$

yardımıyla tanımlanan $\psi : \sum_{i\in I}^{t} A_i x D \to L$ L-fuzzy fonksiyonunu göz önüne alınsın.

Teorem 20 : $\{A_i \mid i\in I\}\subset \mathcal{R}\mathfrak{I}$ bir ailesi ve $D\in \mathcal{R}\mathfrak{I}$ olmak üzere $\{\Psi_i : A_i xD \rightarrow L \mid i\in I\}$ fuzzy modül homomorfilerinin bir ailesi verilsin. Bu taktirde, $\exists! \Psi\in F(\sum_{i\in I}^{t} A_i\, xD\, , L)$ fuzzy modül homomorfisi öyleki $\forall i\in I$ için $\psi o e_i = \psi_i$ dir.

İspat : $\Psi\in F(\sum_{i\in I}^{t} A_i\, xD\, , L)$ t-fuzzy fonksiyondur. $\Psi(f\, ,\ \sum_{i\in S_f} u_i)>t$ dir. Aksine $\exists u,\ v\in D$ öyleki

$u = \sum_{i\in S_f} u_i,\ \ v = \sum_{i\in S_f} v_i$ olup $\Psi(f\, , u)>t$ ve $\Psi(f\, , v)>t$ dir. Dolayısıyla $f(i\, , a_i)>t$ ve $f(i\, , b_i)>t$ dir. Buradan $\Psi_i(a_i\, , u_i)>t$ ve $\Psi_i(b_i\, , v_i)>t$ ve $a_i = b_i$ dir.

Sonuç olarak $\Psi_i(a_i\, , u_i)>t$ ve $\Psi_i(a_i\, , v_i)>t$ olup $u_i = v_i$ dir. Böylece $u = v$, $\Psi(f\, ,\ \sum_{i\in S_f} u_i)>t$ dir. Sonuç olarak $\psi\in F(\sum_{i\in I}^{t} A_i\, xD\, , L)$ t-fuzzy fonksiyondur. $f,\ g\in \sum_{i\in I}^{t} A_i$ keyfi olsun. Eğer $\Psi(f+g\, , x+y) = 1$ ise açık olarak

$\Psi(f+g\, , x+y) \geq \Psi(f\, , x)\wedge\psi(g\, , y)$ dir. $\Psi(f+g\, , x+y) \neq 1$ olsun. Buradan $\Psi(f+g\, , x+y) = t$ ve

$x+y \neq \sum_{i\in S_{f+g}} u_i \neq u$ dır. $\forall i\in S_{f+g}$ için $(f+g)(i\, ,0_i)>t$ olduğundan $\exists a_i\in A_i,\ u_i\in D$ öyleki

$(f+g)(i\ ,\ 0_i)>t$, $u \neq \sum_{i\in S_{f+g}} u_i$ dir. Eğer $u = x+y$ ise her $i\in S_f$ için $f(i\ ,\ b_i)>t$, $\Psi_i(b_i\ ,\ x_i)>t$,

$x = \sum_{i\in S_f} x_i$. Her $i\in S_g$ için $g(i\, , c_i)>t$ ve $\Psi_i(c_i\, , y_i)>t$, $y = \sum_{i\in S_g} y_i$. Bu taktirde,

$(f+g)(i\, , b_i+c_i)\geq f(i\, , b_i)\wedge g(i\, , _i)>t$ olduğundan $\Psi_i(b_i+c_i\, , x_i+y_i) \geq \Psi_i(b_i\, , x_i)\wedge\Psi_i(c_i\, , y_i)>t$ dir. Diğer yandan $u = x+y$ olduğundan

$$u = x+y = \sum_{i\in S_f} x_i + \sum_{i\in S_g} y_i = \sum_{i\in S_f\, ,\, i\in S_g} x_i + y_i = \sum_{i\in S_{f+g}} u_i$$

elde edilir. Bu ise $u \neq \sum_{i\in S_{f+g}} u_i$ olması ile çelişir. O halde her $u \neq x+y$ için $x \neq \sum_{i\in S_f} x_i$ ve

$y \neq \sum_{i\in S_g} y_i$ dir. Buradan $\Psi(f\, , x) = t$ veya $\Psi(g\, , y) = t$ elde edilir.

Sonuç olarak $\Psi(f+g\, , x+y) \geq \Psi(f\, , x)\wedge\psi(g\, , y)$ dır. (32)

$\lambda \in R$ ve $f \in \sum_{i \in I}^{t} A_i$ keyfi olsun. $u \in D$ için $\Psi(\lambda f, \lambda u) = 1$ ise açık olarak $\Psi(\lambda f, \lambda u) \geq \Psi(f, u)$ dır.

$\Psi(\lambda f, \lambda u) \neq 1$ olsun. Buradan $\Psi(\lambda f, \lambda u) = t$ ve $\lambda u \neq \sum_{i \in S_{\lambda f}} u_i$ elde edilerek $u \neq \sum_{i \in S_f} u_i$ dir.

Aksine $u = \sum_{i \in S_f} u_i$ olsun. Bu taktirde, her $i \in S_f$ için $f(i, a_i) > t$ ve $\Psi_i(a_i, u_i) > t$ dir.

$(\lambda f)(i, \lambda a_i) \geq f(i, a_i) > t$ olduğundan $\Psi_i(\lambda a_i, \lambda u_i) \geq \Psi_i(a_i, u_i) > t$ ve buradan $\sum_{i \in S_f} \lambda u_i = \sum_{i \in S_{\lambda f}} u_i$

dır. Sonuç olarak $\lambda u = \sum_{i \in S_{\lambda f}} u_i$ elde edilir ki bu $\lambda u \neq \sum_{i \in S_{\lambda f}} u_i$ olması ile çelişir. O halde

$u \neq \sum_{i \in S_f} u_i$ için $\Psi(f, u) = t$ dir.

Sonuç olarak $\Psi(\lambda f, \lambda u) \geq \Psi(f, u)$ elde edilir. (33)

(32), (33) ve Tanım 22 ile Ψ fuzzy modül homomorfisidir.

$(\psi o e_i)(a, d) = \bigvee_{f \in \sum_{i \in I}^{t} A_i} e_i(a,f) \wedge \psi(f,d) = \Psi_i(a,d)$ dir. Gerçekten $(\Psi o e_i)(a, d) > t$ olsun. Bu

taktirde, $\exists f \in \sum_{i \in I}^{t} A_i$ öyleki $e_i(a, f) > t$ ve $\Psi(f, d) > t$ dir. $e_i(a, f) > t$ olduğundan $\exists j \in I \setminus \{i\}$ öyleki

$f = f_a$ dır. $\Psi(f, d) > t$ olduğundan $\exists j \in I \setminus \{i\}$ öyleki $d = \sum_{j \in S_f} u_j$ dır. $f = f_a$ olduğundan $S_{f_a} = \{i\}$

ve $d = a_i$ dir. Buradan $\Psi_i(a, d) > t$ elde edilir. Diğer yandan $\Psi_i(a, d) > t$ ise

$\bigvee_{f \in \sum_{i \in I}^{t} A_i} e_i(a,f) \wedge \psi(f,d) \geq e_i(a, f_a) \wedge \Psi(f_a, d) > t$ dir. Buradan $(\Psi o e_i)(a, d) > t$ elde edilir. Sonuç

olarak her $i \in I$ için $\Psi o e_i = \Psi_i$ dir. Ψ nin tekliği tanımından açıktır.

4. İRDELEME

Belirsiz yada bulanık anlamına gelen "fuzzy " kelimesi, bilinmesine rağmen yaşadığımız dünyada çoğu kez farkında olmadan kullanılmıştır. Klasik mantığın önermelerinin iki değerli olduğu bilinmektedir. Klasik mantığın önermelerinin yetersiz olduğu durumlarda, bir çok çelişkilerle karşılaşan matematikçiler, bu durum karşısında bir çözüm yolu aramaya başlamışlardır. Bu çelişkilerin kaynağını mantıkta aramak gerektiğine inanmışlardır. Sonuçta, geleneksel mantık ve kümelerin, belirsiz kavramlar için uygun bir model olmadığı kanısına varmışlardır. Henüz oturmuş bir mantığı yoktur. Bunun için matematik yapmak isteyen bir kişi önce mantığını seçmesi gerekir.

$\Re$ önermelerin bir ailesi olsun. Her p, $q \in \Re$ için p "~" q : $\Leftrightarrow [p \Leftrightarrow q]$ olarak tanımlansın. Bu taktirde " ~ " $\Re$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $p \in \Re$ olmak üzere p nin denklik sınıfı $\overline{p}$ ile gösterilsin. $\Re$ nin tüm denklik sınıflarınını kümesi $\overline{\Re}$ olsun. $\overline{p}$, $\overline{q} \in \overline{\Re}$ olmak üzere $\overline{p}$ "$\leq$ "$\overline{q}$ $\Leftrightarrow$ $p \Rightarrow q \equiv 1$ tüm geçerli önerme olarak tanımlansın. Açık olarak ($\overline{\Re}$,$\leq$) bir kafestir.

$$M: \overline{\Re} \rightarrow \{0, 1\}, M(\overline{p}) = [\overline{p}] = \begin{cases} 1 \ , & p \text{ doğru önerme} \\ 0 \ , & p \text{ yanlış önerme} \end{cases}$$

Bu şekilde tanımlanan M dönüşümü bir kafes homomorfisidir. Bu dönüşüm aşağıdaki özellikleri gerçekler :

i) $[\overline{p} \vee \overline{q}] = \text{mak}\{[\overline{p}], [\overline{q}]\}$

ii) $[\overline{p} \wedge \overline{q}] = \min\{[\overline{p}], [\overline{q}]\}$ (34)

iii) $[\sim\overline{p}] = 1-[\overline{p}]$

iv) $[\overline{p} \Rightarrow \overline{q}] = \min(1, 1-[\overline{p}]+[\overline{q}])$

Bunlara ilaveten, tüm geçerli önermeler 1 ve tüm geçersiz önermeler 0 ile gösterilecek olunursa aşağıdaki iki özellik elde edilir:

i) $[\sim\overline{p}] = [\overline{p} \Rightarrow o]$

ii) $[\overline{p} \Rightarrow \overline{q}] = 1 \Leftrightarrow [\overline{p}] \leq [\overline{q}]$

Bu şekilde oluşturulan mantığa klasik mantık denir. Zadeh, yukarıda tanımlanan dönüşümü, değer kümesini [0,1] için alarak (34) bağıntılarını gerçekleyen özllikleri ile fuzzy küme kavramını inşa etmeye çalışmıştır. Daha sonra bir çok araştırıcı tarafından [0,1] yerine değişik kafesler alarak bir lojik oluşturmaya gidilmiştir.

L evrensel sınırları 0, 1 olan tam dağılımlı tam kafes olsun.

$M_L : \overline{\Re} \to L$, $M_L(\overline{p}) = [\overline{p}]$ ile tanımlanan dönüşüm bir kafes homomorfisidir. M_L kafes homomorfisine L- mantık denilirse, L değiştikçe yapılan matematik de değişecektir. L mantığına karşılık gelen matematiğe M_L matematik diyelim.

Bu çalışmada, L tam dağılımlı tam kafes olmak üzere, t-seviyesinde modüllerin ailesi üzerine bir kategorik yapı açıklayarak, bu kategoride modüllerin fuzzy çarpımı ve eş çarpımının bir karakterizasyonu verilmiştir. Bu karakterizasyonda, fuzzy çarpım ve eş çarpımın üniversal özelliğe sahip olduğu gösterilmiştir.

5. SONUÇLAR

1- Fuzzy fonksiyon altında fuzzy altkümelerin resmi ve ters resmi tanımlanarak bu resim ve ters resmin gerçeklediği bazı önemli teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

2- Fuzzy modül homomorfisi, fuzzy çekirdek ve fuzzy resim tanımları verilmiştir. Fuzzy çekirdek ve fuzzy resmin klasik anlamda altmodül olduğu görülmüştür. Fuzzy resim ve ters resim tanımı altında bir fuzzy altmodülün resminin ve ters resminin altmodül olduğu bir teoremle ispatlanmıştır.

3- Fuzzy modül homomorfisinin bire-birliği fuzzy çekirdek yardımıyla karakterize edilmiştir.

4- Klasik homomorfi teoremleri fuzzy ye genelleştirilmiştir.

5- Fuzzy modül homomorfisi ile klasik modül homomorfisi arasındaki ilişki ortaya konulmuştur.

6- Fuzzy modül homomorfisi ile fuzzy altmodüller arasındaki ilişki bir teoremle karakterize edilmiştir.

7- Fuzzy modül homomorfileri yardımı ile modüllerin ailesi üzerine bir kategori konularak, bu kategoride modüllerin t-seviyesinde fuzzy çarpımı ve eş çarpımının bir karakterizasyonu verilmiştir. Bu kategoride fuzzy çarpım ve eş çarpımının üniversal özelliğe sahip olduğu iki teoremle ispat edilmiştir.

6. ÖNERİLER

Oturmuş bir lojiği yoktur. Bunun için, bu alanda araştırma yapmak isteyen bir kişinin önce lojiğini belirlemesi gerekir. Bu alanda yapılan çalışmalarda, verilen tanımlar birbirini tutmamasına karşın, klasik teoriyi bir genellemeye götürmesi gerekir. Çoğu zaman klasik yapılar, karakteristik fonksiyonlar yardımıyla fuzzy cebirsel yapılara taşınmıştır.

Bu çalışmada, fuzzy modül homomorfilerin bir karakterizasyonu verilerek, fuzzy modül homomorfileri ile fuzzy altmodüller arasındaki ilişki ortaya koyulmuştur. Sonra, modüllerin ailesi üzerine bir kategorik yapı oluşturulmuştur. Bu kategoride modüllerin fuzzy çarpımı ve eş çarpımının bir karakterizasyonu verilmiştir.

Bu kategoride klasik cebirsel yapılarda olduğu gibi fuzzy projektif, fuzzy injektif modül tanımları ve bu yapıdaki fuzzy altmodüllerin fuzzy çarpımı ve eş çarpımının fuzzy injektif ve fuzzy projektif modül olup olmadıkları araştırmacılar için açık bir yoldur.

7. KAYNAKLAR

[1] Zadeh, L., Fuzzy Sets, Inform and Control, 8 (1965) 338-353.

[2] Turunenen, E., Algebraic Structure in Fuzzy Logic, Fuzzy Set and Systems, 52 (1992) 181-188.

[3] Taketi, G. ve Titani S., Fuzzy Logic and Fuzzy Set Theory, Ann. Pure Appl. Logic, 34 (1987) 135-164.

[4] Rosenfeld, A., Fuzzy Group, J. Math. Anal. Appl, 35 (1971) 512-517.

[5] Negoita, C. V. ve Ralescu, D. A., Appl. of Fuzzy Sets to Systems Analysis, Journal of Mat. Anal, 41 (1975) 54-59.

[6] Anthony, J. M. ve Sherwood, H., Fuzzy groups Redefined, Journal of Mat. Anal, 69 (1979) 124-132.

[7] Das, P. S., Fuzzy Groups and Level Subgroups, J.Math. Anal. Appl, 84 (1981) 264-269

[8] Anthony, J. M. ve Sherwood, H., A Characterization of Fuzzy Subgroups, Fuzzy Set and Systems, 7 (1982) 297-305.

[9] Liu, Jin-W., Fuzzy Invariant Subgroups and Fuzzy Ideals, Fuzzy Set and Systems, 8 (1982) 133-139.

[10] Liu Jin-W., Operations On Fuzzy Ideals, Fuzzy Set and Systems, 11 (1983) 31-41.

[11] Kumbhojker, H. V. ve Bapat, M. S., Correspondence Theeorem for Fuzzy Ideals, Fuzzy Set and Systems, 41 (1991) 213-219.

[12] Eroğlu, M. S., The Homomorphic Image of Fuzzy Subgroups is Always a Fuzzy Subgroups, Fuzzy Set and Systems, 37 (1990) 255-256.

[13] Malik, D.S. ve Mordeson, J. N., Fuzzy Relations On Rings, Fuzzy Set and Systems, 43 (1991)117-123.

[14] Malik D.S. ve Mordeson, J. N., Fuzzy Direct Sums of Fuzzy Rings, Fuzzy Set and Systems, 45 (1992) 83-91.

[15] Malik, D.S. ve Mordeson, J. N., Fuzzy Homomorphism of Rings, Fuzzy Set and Systems, 46 (1992)139-146.

[16] Pan, Fu-Zheng., Fuzzy Finitely Generadet of Modules, FuzzySet and Systems, 21 (1987) 105-113.

[17] Pan, Fu-Zheng., Fuzzy Quotient Modules, Fuzzy Set and Systems, 28 (1989) 85-90.

[18] Zahedi, M. M., On L-fuzzy Resudial Quotient Modules and Primary Submodules, Fuzzy Set and Systems, 51 (1992) 333-334.

[19] Zahedi, M. M., Some Results on L-Fuzzy Modules, Fuzzy Set and Systems, 35(1993) 355-361.

[20] Şekercioğlu, A., Bulanık Kümeler, Matematik Dünyası, 3 (1994) 14-18.

[21] Eroğlu, M. S., Fuzzy Algebraic Structures, The Balcanic Union for Fuzzy Systems and Artificial Intellence, Eylül 1992, Trabzon, BUFSA, 172-175.

[22] Burris, S. ve Sonkappanavas, H. P., A Course Univeraal Algebra, Springer-Verlag, New York, 1981.

[23] Hungerford, T. W., Algebra, Springer-Verlag, New York, 1987.

8. ÖZGEÇMİŞ

1966 yılında Trabzon-Vakfikebir'de doğan Osman Kazancı 1975 yılında Vakfikebir Bozalan Köyü İlkokulunu, 1978 yılında Vakfikebir Ortaokulunu ve 1981 yılında Vakfikebir Ticaret Lisesini bitirdi. 1982 yılında K. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başladı. 1986 yılında K. Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans proğramına başladı. Bir yıl İngilizce hazırlık okudu. 1990 yılında K. T. Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans proğramından mezun oldu. Aynı yıl K. T. Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü Doktara proğramına başladı.

Halen K. T. Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.