KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ KUANTUM HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mazın ELCASIM

MART 2019
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ KUANTUM HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Mazın ELCASIM

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 27 / 02 /2019
Tezin Savunma Tarihi : 29 / 03 /2019

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Mehmet KUNT**

Trabzon 2019

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında
Mazın ELCASIM Tarafından Hazırlanan

KESİRLİ KUANTUM HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 05 / 03 / 2019 gün ve 1794 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ .... M. Akbaş

Üye : Doç. Dr. İmdat İŞCAN ....

Üye : Doç. Dr. Mehmet KUNT .... M. Kunt

Prof. Dr. Asim KADIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, Kesirli Kuantum Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri araştırılmıştır.

Öncelikle tez konusunun belirlenmesinden çalışmanın bu hale getirilmesine kadar yardımlarını esirgemeyen, değerli bilgilerini özveriyle paylaşan ve bana her zaman destek olan sayın hocam Doç. Dr. Mehmet KUNT'a, teşekkür ederim.

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca vermiş oldukları desteklerden dolayı KTÜ Matematik Bölümü öğretim üyelerinden sayın Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER, sayın Prof. Dr. Selçuk Han AYDIN, sayın Dr. Öğr. Üyesi Tuncay KÖROĞLU, sayın Dr. Öğr. Üyesi Meltem SERTBAŞ hocalarım ile bölüm başkanımız sayın Prof. Dr. Ömer PEKŞEN hocama teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, Türkiye Bursları Kurumu'na Yüksek Lisans eğitimi bursu vererek beni destekledikleri için şükranlarımı sunarım.

........رسالة شكر و إهداء.........

اللهم لك الحمد حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه، ملء السموات وملء الأرض، وملء ما شئت من شيء بعد، أهل الثناء والمجد، أحق ما قال العبد، وكلنا لك عبد، أشكرك ربي على نعمك التي لا تعد، وآلائك التي لا تحد، و صلى الله وسلم أفضل صلاة وأكمل سلام على أشرف مخلوقاته محمد وآله وأصحابه و أزواجه عدد معلوماته ومداد كلماته, أحمدك ربي وأشكرك على أن يسرت لي إتمام هذا البحث على الوجه الذي أرجو أن ترضى به عني.

و بعد فإني أهدي بحثي هذا أولا إلى روح نبينا و رسولنا و سيدنا و قائدتا و هادينا محمد صلى الله عليه و سلم, و من ثم إلى سيدي و مربي الشيخ أحمد فتح الله الجامي حفظه الله تعالى و أطال في عمره .

ومن ثم أتوجه بكامل الشكر إإلى من رعاني طالباً في برنامج الماجستير و من كان قائماً على هذا البحث أستاذي و مشرفي و أستاذي التركي الفاضل الدكتور: محمد كونت,و إلى جامعة البحر الأسود و المنحة التركية TÜRKİYE BURSLARI.

و إلى من تتسابق الكلمات وتتزاحم العبارات لتنظم عقد الشكر الذي لا يستحقه إلا أنت , إليك يامن كان لها قدم السبق في ركب العلم والتعليم, إليك يا من بذلت ولم تنتظر العطاء .. إليك أهدي عبارات الشكر والتقدير,ألى من كل الاحترام والتقدير لأجله يا نبع العطاء، يا مكافحاً لأجلنا، ويا مناضلاً لإسعادنا، كابدت مشاق الحياة كي تخدمنا، وذقت ألوان الشقاء كي تربينا، فزرعت البذور، وها أنت تجني الثمار، جيلاً طيباً فيه الخير والعطاء بإذن الله، فكل الفخر لي أنك أبي. والدي الحبيب...حفظك الله و أطال في عمرك ....

و إليكِ يا هبة الرحمن، يا مَن جهدت وضحيت لأجلي، تحملت الآلام حتى أشفى، وكتمت الآلام حتى أسعد، ورقت عظامك حتى أقوى، فكلّ التحية والتقدير لك يا أغلى من في الوجود، يا منبع العطاء والجود. كنت ولازلت كالنخلة الشامخة تعطي بلا حدود فجزاك عنا أفضل ما جزى العاملين المخلصين... أمي الحبيبة.. حفظك الله و أطال الله في عمرك.

و إلى صاحب التميّز والأفكار النيّرة .. أزكى التحيّات وأجملها وأنداها وأطيبها , تعجز الحروف أن تكتب ما يحمل قلبي من تقدير واحترام.... لأخي الكبير وأستاذي و معلمي وقدوتي في التحصيل العلمي باسم .. و إلى من أي أبواب الثناء سندخل وبأي أبيات القصيد نعبّر.. كنت كسحابة معطاءه سقت الأرض فاخضرت,إلى من ماذا أقول عن هذه الشخصيّة الرائعة المرحة .. فالكلمات والعبارات لن توفيها شيئاً من حقها ولا بجزء بسيط على ما قدمت,. وأسعدك أينما حطت بك الرحال وبارك الله لك...أختي الكبيرة الغالية بسمة ......

و كلمة شكر وامتنان .. إلى صاحب القلب الطيّب .. إلى صاحب النفس الأبيّة .. إلى صاحب الابتسامة الفريدة .. إلى من حارب وساهم الكثير مِن أجلي, فالكلمات والعبارات لن توفيه شيئاً من حقه ولا بجزء بسيط على ما قدم و لن أوفيك حقك مهما بذلت ..... أخي الحبيب حازم ..... و أيضاً تلوح في سمائنا دوماً نجوم براقه، لا يخفت بريقها عنا لحظة واحدة نترقب إضائتها بقلوب ولهانه، ونسعد بلمعانها في سمائنا كل ساعة فاستحقت وبكل فخر أن يُرفع اسمها في علياننا,ألى صاحبة الشخصية الشجاعة التي لاتخشى الخوف , وتعلمنا معاني الصمود .... أختي الغالية أماني.

إلى من أستقر في حياتنا وهلة و أعطاها كل معاني السعادة و البهجة و السرور و الأمل ثم رحل , ألى من جرحه غائرا في قلولنا حتى الأن و لم يندمل . إلى أخي الصغير الحبيب محمد , رحمك الله و حشرنا الله معا تحت لواء سيدي المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه و سلم......

Mazın ELCASIM
Trabzon 2019

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "KESİRLİ KUANTUM HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Mehmet KUNT'un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 29/03/2019

Mazın ELCASIM

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ IV
İÇİNDEKİLER V
ÖZET VI
SUMMARY VII
ŞEKİLLER DİZİNİ VIII
SEMBOLLER DİZİNİ IX
1. GENEL BİLGİLER 1
1.1. Giriş 1
1.2. Temel Kavramlar 5
1.3. Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler 8
1.4. Riemann-Liouville Kesirli İntegraller ve Riemann-Liouville Kesirli Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler 10
1.5. Kuantum Hesap ve Kuantum Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler 16
1.6. Kesirli Kuantum Hesap 30
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR 45
2.1. Riemann-Liouville Kesirli Kuantum Hermite-Hadamard Eşitsizliği 45
2.2. Riemann-Liouville Kesirli Kuantum Trapezoid Tipli İntegral Eşitsizlikler 53
2.3. Riemann-Liouville Kesirli Kuantum Midpoint Tipli İntegral Eşitsizlikler 67
3. İRDELEME 79
4. SONUÇLAR 80
5. ÖNERİLER 81
6. KAYNAKLAR 82
ÖZGEÇMİŞ

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

KESİRLİ KUANTUM HERMİTE-HADAMARD TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Mazın ELCASIM

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Mehmet KUNT
2019, 83 Sayfa

Bu tezin amacı, Hermite-Hadamard eşitsizliği, sol Riemann-Liouville kesirli Hermite-Hadamard eşitsizliği ve kuantum Hermite-Hadamard eşitsizliğini genelleştirerek Riemann-Liouville kesirli kuantum Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde etmektir. Ayrıca, Trapezoid-Midpoint tipli eşitsizlikler, sol Riemann-Liouville Trapezoid-Midpoint tipli eşitsizlikler ve kuantum Trapezoid-Midpoint tipli eşitsizlikleri genelleştirerek Riemann-Liouville kesirli kuantum Trapezoid-Midpoint tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konveks fonksiyonlar, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Trapezoid tipli eşitsizlikler, Midpoint tipli eşitsizlikler, Riemann-Liouville kesirli integraller, Kuantum hesap, Riemann-Liouville kesirli kuantum hesap.

Master Thesis

SUMMARY

FRACTIONAL QUANTUM HERMITE-HADAMARD TYPE INGERAL INEQUALITIES

Mazın ELCASIM

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet KUNT
2019, 83 Pages

The aim of this thesis is to obtain Riemann-Liouville fractional quantum Hermite-Hadamard inequality by generalizing Hermite-Hadamard inequality, left Riemann-Liouville fractional Hermite-Hadamard inequality and quantum Hermite-Hadamard inequality. In addition, Riemann-Liouville fractional quantum Trapezoid-Midpoint type inequalities were obtained by generalizing the trapezoid-midpoint type inequalities, left Riemann-Liouville Trapezoid-Midpoint type inequalities and quantum trapezoid-midpoint type inequalities.

Key Words: Convex functions, Hermite-Hadamard inequality, Trapezoid type inequalities, Midpoint type inequalities, Riemann-Liouville fractional integrals, Quantum calculus, Riemann-Liouville fractional quantum calculus.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

Şekil 1. Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genelleştirmeleri 2

Şekil 2. Konveks fonksiyonlar için Trapezoid ve Midpoint tipli eşitsizliklerin genelleştirmeleri 3

Şekil 3. Konveks ve konveks olmayan Kümeler 5

Şekil 4. Konveks Fonksiyon 5

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
f'	: f'nin 1.mertebeden türevi
$f'_{-}(x_0)$	: f'nin 1.mertebeden sol türevi
$f'_{+}(x_0)$	: f'nin 1.mertebeden sağ türevi
$\Gamma(x)$	: Gama fonksiyonu
$B(\mathrm{x}, \mathrm{y})$	: Beta fonksiyonu
$I \subset \mathbb{R}$	: I reel sayılardan oluşan bir aralık
$I°$	: I aralığının içi
$\|.\|$	: Mutlak değer
$\|f'\|^r$	: $\|f'\|$ fonksiyonunu r. kuvveti
$L[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
$J_{a+}^{\alpha}\,.$	: Sol Riemann-Liouville kesirli integral
$J_{b-}^{\alpha}\,.$	: Sağ Riemann-Liouville kesirli integral
$Re(\alpha)$	: α Kompleks sayısının reel kısmı
$T_i(\alpha)$	: α'ya bağlı bir katsayı fonksiyon
$T_i(\alpha, p)$	: α ve p'ye bağlı iki değişkenli bir katsayı fonksiyonu
q	: Kuantum
q-	: Kuantum-
$D_q\,.$	: $[0, b]$ Aralığında q-türev
$D_q^n\,.$	: :$[0, b]$ Aralığında n. mertebeden q- türev
$[n]_q$	: n Doğal sayısının q-hali
$\int\,.\,d_qt$	: Belirsiz q-integral veya Jackson integral
$\int_0^b\,.\,d_qt$	: $[0, b]$ Aralığında belirli q-integral
$\int_c^t\,.\,d_qs$	: $[0, b]$ Aralığında belirli q-integral
${}_aD_q\,.$	: $[a, b]$ Aralığında q- türev
${}_aD_q^k\,.$	: $[a, b]$ Aralığında k. mertebeden q- türev

$[\alpha]_q$	: α Reel sayısının q- hali
$\int_a^b \cdot\ {}_a d_q t$	: $[a,b]$ Aralığında belirli q-integral
$\int_a^t \cdot {}_a d_q s$	: $[a,b]$ Aralığında belirli q-integral
$\lvert g(x)\rvert^r$	: $\lvert g(x)\rvert$ Fonksiyonunun r. kuvveti
$\lvert {}_a D_q f\rvert^r$	: $\lvert {}_a D_q f\rvert$ Fonksiyonunu 1. mertebeden $[a,b]$ aralığında q-türevinin r. kuvveti
$(n-m)^{(k)}$	: $n-m(\in \mathbb{R})$ Sayısının k. q-kuvveti
$\prod_{i=0}^{k-1}$	: 0'dan $k-1$'e kadar çarpım
$(n-m)^{(\gamma)}$	: $n-m(\in \mathbb{R})$ sayısının $\gamma.(\in \mathbb{R})$ q-kuvveti
$\prod_{i=0}^{+\infty}$	: 0'dan ∞'e kadar çarpım
$\Gamma_q(t)$	: q-Gama fonksiyonu
$B_q(s,t)$	: q-Beta fonksiyonu
$(\,.\,;q)_k$	: Sonlu q-Pochhammer sembolü
$(\,.\,;q)_\infty$	: Sonsuz q-Pochhammer sembolü
$I_q^0\ .$	: 0. Mertebeden $[0,T]$ aralığında Riemann-Liouville tipli kesirli q-integral
$I_q^\alpha\ .$	: α. Mertebeden $[0,T]$ aralığında Riemann-Liouville tipli kesirli q-integral
$D_q^0\ .$	: $[0,T]$ Aralığında Riemann-Liouville tipli 0. mertebeden kesirli q-türev
$D_q^\alpha\ .$	: $[0,T]$ Aralığında Riemann-Liouville tipli α mertebeden kesirli q-türev
${}_a\phi_q(m)$	:q-Öteleme (q-Shifting) operatörü
${}_a\phi_q^k(m)$	: q-Öteleme (q-Shifting) operatörünün k. $(k \in \mathbb{N})$ kuvveti
${}_a\phi_q^\gamma(m)$	: q-Öteleme (q-Shifting) operatörünün $\gamma.(\in \mathbb{R})$ kuvveti
${}_a(n-m)_q^{(0)}$	: $n-m(\in \mathbb{R})$ Sayısının q-öteleme operatörünün 0. kuvveti
${}_a(n-m)_q^{(k)}$	: $n-m(\in \mathbb{R})$ Sayısının q-öteleme operatörünün k. $(k \in \mathbb{N})$ kuvveti
${}_a(n-m)_q^{(\gamma)}$	: $n-m(\in \mathbb{R})$ Sayısının q-öteleme operatörünün $\gamma.(\in \mathbb{R})$ kuvveti
${}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha-1)}$	: q-Öteleme operatörünün $a=0$ için q-kuvveti
${}_aI_q^0\ .$	: 0. Mertebeden $[a,b]$ Aralığında Riemann-Liouville tipli kesirli q-integral
${}_aI_q^\alpha\ .$	: α. Mertebeden $[a,b]$ Aralığında Riemann-Liouville tipli kesirli q-integral
${}_aD_q^0\ .$	: $[a,b]$ Aralığında Riemann-Liouville tipli 0.mertebeden kesirli q-türev
${}_aD_q^\alpha$	: $[a,b]$ Aralığında Riemann-Liouville tipli α. mertebeden kesirli q-türev

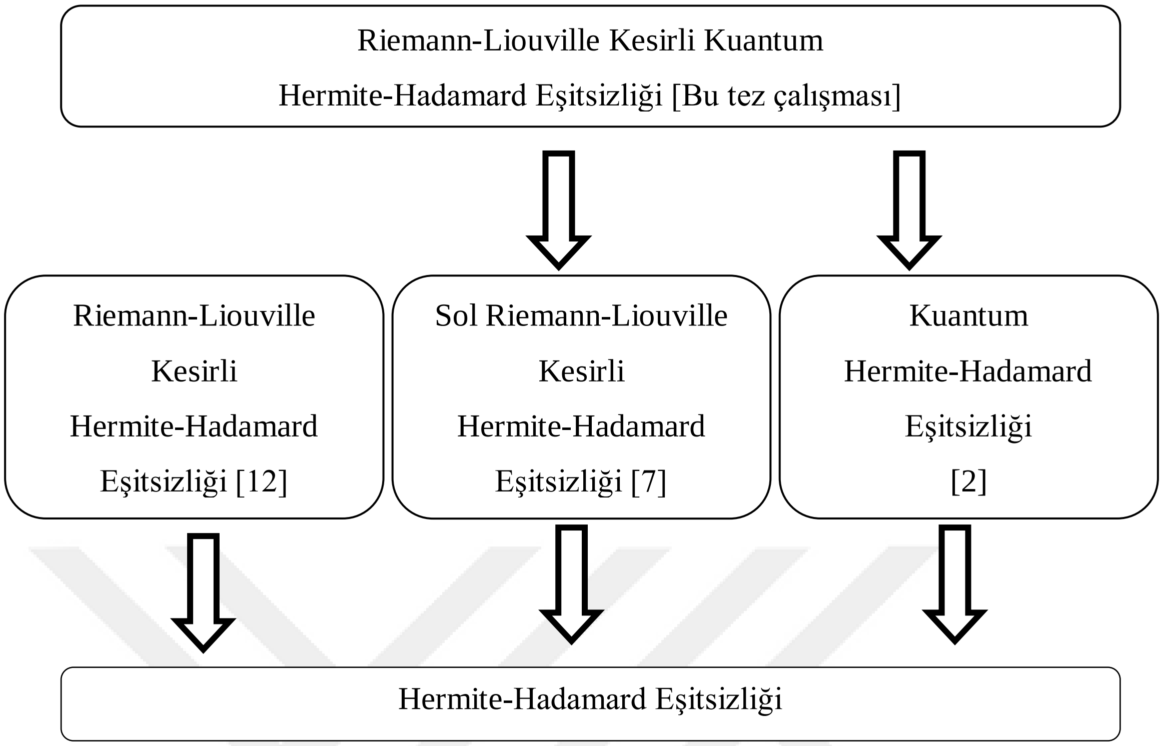
1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu tez çalışması, matematiğin ve mühendisliğin birçok alanında yaygın olarak çalışılan ve sayısız uygulaması olan eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar, kesirli integraller, kuantum hesap ve kesirli kuantum hesap teorilerinin hepsini ortak bir noktada birleştirmektedir.

Eşitsizlik kavramı matematiğin neredeyse tüm alanlarında kullanılmaktadır. Bilindiği gibi konveks fonksiyonun kendi tanımı da bir eşitsizliktir. Dolayısıyla, konveks fonksiyonlar teorisi için eşitsizlikler özel bir yere sahiptir. Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte başlangıcı 1893'te Hadamard'ın çalışmasında "açıkça belirtilmese de" bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak XX. yüzyılın başlarında Jensen tarafından çalışıldığı ve sonrasında konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. Benzer şekilde, konveks fonksiyonlar da eşitsizlikler teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. XIX. yüzyılın sonlarında ve XX. yüzyılın başlarında pek çok eşitsizlik elde edilmiştir. 1881 yılında Hermite tarafından verilen ve bugün birçok kaynakta Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlik konveks fonksiyonlar için verilmiştir.

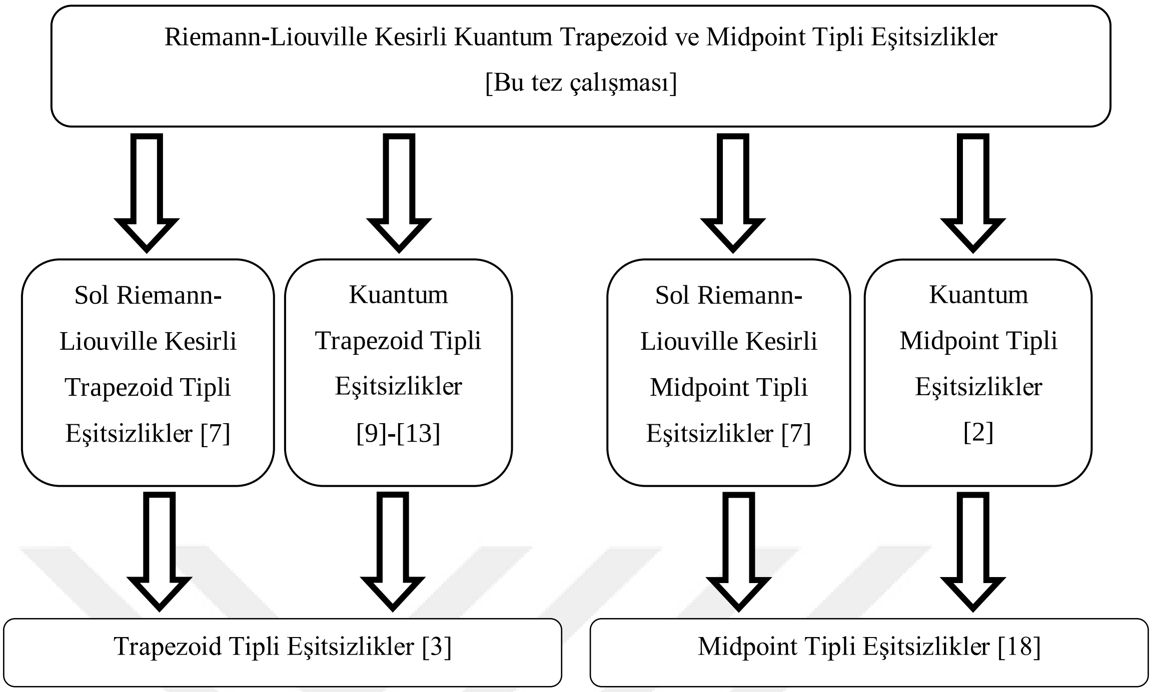
Hermite-Hadamard eşitsizliği üzerine son yıllarda yoğun ilgi gösteren araştırmacılar birçok genelleştirmesini elde etmişlerdir. Bunu yaparken bazı araştırmacılar farklı konveks fonksiyon sınıfları üzerine çalışmalarını yoğunlaştırırken, bazı araştırmacılarsa farklı türden integraller için genelleştirme yapma yoluna gitmiştir. Bu tez çalışmasında bizim amacımız Hermite-Hadamard eşitsizliğini konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville tipli kesirli (kuantum) q-integral kullanarak genelleştirmektir.



Şekil 1. Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genelleştirmeleri

Sarıkaya M. Z. ve arkadaşları Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanarak 2013 yılında [12]'de konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde etmiştir. Kunt M. ve arkadaşları ise 2018 yılında [7]'de konveks fonksiyonlar için sol Riemann-Liouville kesirli Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde etmiştir. Konveks fonksiyonlar için kuantum Hermite-Hadamard eşitsizliği 2018 yılında [2]'de Alp N. ve arkadaşları tarafından elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında ise Riemann-Liouville tipli kesirli kuantum integrali kullanarak Riemann-Liouville tipli kesirli kuantum Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde etmiş bulunmaktayız. Şekil 1'den de görüleceği üzere elde ettiğimiz bu eşitsizlik özel halde Sol Riemann-Liouville kesirli Hermite-Hadamard eşitsizliği, kuantum Hermite-Hadamard eşitsizliği ve Hermite-Hadamard eşitsizliğini genelleştirmektedir.

Hermite-Hadamard eşitsizliği aslında üç terimi sıralayarak kıyaslayan iki eşitsizlikten ibarettir. Bu üç terimden sağ taraftaki terimden ortadaki terimin farkı alınarak elde edilen eşitsizlikler literatürde Trapezoid tipli eşitsizlikler olarak anılır. Benzer şekilde sol taraftaki terimden ortadaki terimin farkı alınarak elde edilen eşitsizlikler ise literatürde Midpoint tipli eşitsizlikler olarak anılır.



Şekil 2. Konveks fonksiyonlar için Trapezoid ve Midpoint tipli eşitsizliklerin genelleştirmeleri

Konveks fonksiyonlar için Trapezoid tipli ilk eşitsizlikler 1998 yılında [3]'de Dragomir S. S. ve Agarwal R. P. tarafından elde edilmiştir. Buna paralel olarak konveks fonksiyonlar için Midpoint tipli eşitsizlikler ise ilk olarak 2004 yılında [18]'de Kırmacı U. S. tarafından elde edilmiştir. Sarıkaya M. Z. ve arkadaşları ise 2013 yılında [12]'de konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli Trapezoid tipli eşitsizlikleri ilk elde edenlerdir. Konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville Kesirli Midpoint tipli eşitsizlikler ise 2012 yılında [24]'de Zhu ve arkadaşları tarafından elde edilmiştir. Kunt M. ve arkadaşları ise 2018 yılında [7]'de konveks fonksiyonlar için sol Riemann-Liouville kesirli Trapezoid ve Midpoint tipli eşitsizlikleri birlikte elde etmiştir. Birbirinden bağımsız olarak 2015 yılında [13]'de Sudsutad W. ve arkadaşları, [9]'da Noor M. A. ve arkadaşları konveks fonksiyonlar için kuantum Trapezoid tipli eşitsizlikleri elde etmiştir. Alp N. ve arkadaşları 2018 yılında [2]'de konveks fonksiyonlar için kuantum Midpoint tipli eşitsizlikleri elde etmiştir. Bu tez çalışmasında ise Riemann-Liouville tipli kesirli kuantum Trapezoid ve Midpoint tipli eşitsizlikleri elde etmiş bulunmaktayız. Şekil 2'den de görüleceği üzere elde ettiğimiz bu eşitsizlikler özel halde Sol Riemann-Liouville kesirli Trapezoid ve Midpoint tipli eşitsizlikler, kuantum Trapezoid ve Midpoint tipli eşitsizlikler ve Trapezoid ve Midpoint tipli eşitsizlikleri genelleştirmektedir.

Yukarıda bahsedilen çalışmaların yıllarına bakıldığında tez konusunun hayli güncel bir konu olduğu belirtmek gerekir. Ayrıca değinmeden geçemeyeceğimiz bir konu da Sudsutad W., Ntouyas S. K., Tariboon J. ve Agarwal P. 'nin [14-15-16-17]'de $[a, b]$ aralığındaki kuantum ve kesirli kuantum hesabın temellerini atmaları ve bu çalışmayı yapmamıza imkan sağlamalarıdır. Gerçekten yukarıda anılan çalışmalardan önce kuantum ve kesirli kuantum hesap $[0, b]$ aralığında yapılıyordu ve Hermite-Hadamard eşitsizliğini çalışmak için mevut olan tanımlar yeterli olmuyordu.

Bu tez çalışması iki ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm olan "Genel Bilgiler" altı kısımdan oluşmaktadır. İkinci kısım tezde kullandığımız temel tanım ve teoremlerden oluşmaktadır. Üçüncü kısım konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği, Trapezoid ve Midpoint tipli eşitsizliklerden oluşmaktadır. Dördüncü kısım kesirli Riemann-Liouville integrallerin tanımları kesirli Riemann-Liouville Hermite-hadamard eşitsizliği, kesirli Riemann-Liouville Trapezoid ve Midpoint tipli eşitsizlikler ve sol kesirli Riemann-Liouville Trapezoid ve Midpoint tipli eşitsizliklerden oluşmaktadır. Beşinci kısım $[0, b]$ aralığında kuantum hesap ve $[a, b]$ aralığında kuantum hesap tanımları ve özellikleri verilerek, kuantum Hermite-Hadamard eşitsizliği, kuantum Trapezoid ve Midpoint tipli eşitsizliklerden oluşmaktadır. Altıncı kısım $[0, b]$ aralığında Riemann-Liouville kesirli kuantum hesap ve $[a, b]$ aralığında Riemann-Liouville kesirli kuantum hesap tanımları ve özelliklerinden oluşmaktadır.

İkinci bölüm olan "Yapılan çalışmalar" üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Riemann-Liouville kesirli kuantum Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir. İkinci kısımda Riemann-Liouville kesirli kuantum Trapezoid tipli eşitsizlikler verilmiştir. Üçüncü kısımda ise Riemann-Liouville kesirli kuantum Midpoint tipli eşitsizlikler verilmiştir.

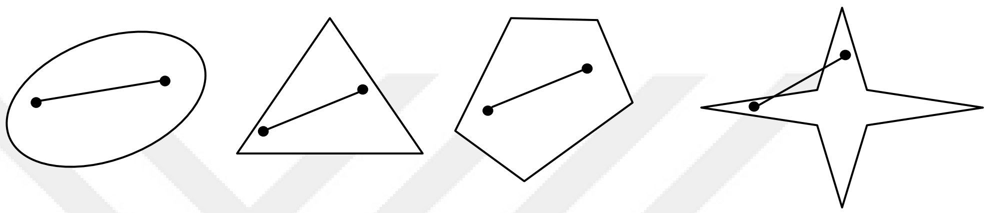
1.2. Temel Kavramlar

Bu bölümde tezde kullanılacak bazı temel kavramlar verilecektir.

Tanım 1.2.1. (Konveks Küme): [19]-[26, s-65] S bir küme olsun. Eğer S kümesinde alınacak her iki noktayı birleştiren doğru parçası yine S içerisinde kalıyorsa S ye bir konveks küme denir. Başka bir ifade ile L bir lineer uzay $S \subset L$ ve $x, y \in S$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1-\alpha)y, \quad \alpha \in [0,1]\} \subset S$$

ise S ye bir konveks küme denir.



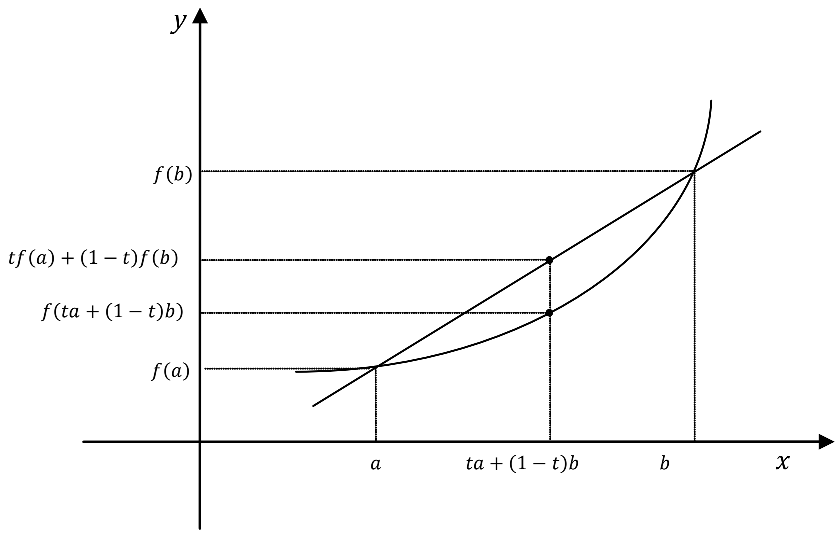
Konveks kümeler Konveks olmayan Küme

Şekil 3. Konveks ve konveks olmayan Kümeler

Tanım 1.2.2. (Konveks Fonksiyon): [20, s-1] $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \tag{1.1}$$

şartını sağlayan, f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.



Şekil 4. Konveks Fonksiyon

Teorem 1.2.3. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): [20, s-137] $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \text{'dir.} \tag{1.2}$$

Hermite-Hadamard eşitsizliğinde sağ taraftan ortanın farkı alınarak elde edilen eşitsizlikler literatürde Trapezoid tipli eşitsizlik olarak bilinmektedir. Sol taraftan ortanın farkı alınarak elde edilen eşitsizliklere ise Midpoint tipli eşitsizlikler denir.

Teorem 1.2.4: [23] f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

1. f, $(a.b)$ aralığında süreklidir,

2. f, $[a.b]$ aralığında sınırlıdır.

Teorem 1.2.5: [21, s-17] f fonksiyonunun I aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için $f''(x) \geq 0$ olmasıdır.

Tanım 1.2.6. (Destek Doğrusu): [11, s-12] $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in I$ bir noktasında f fonksiyonunun desteği vardır denir eğer

$$A(x) = f(x_0) + m(x - x_0) \tag{1.3}$$

öyle ki her $x \in I$ için $A(x) \leq f(x)$ olan bir Afin fonksiyonu vardır. Destek fonksiyonu olan A'in grafiğine f fonksiyonunun x_0 noktasında destek doğrusu denir. Burada $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ olarak alınabilir.

Teorem 1.2.7: [11, s-12] $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerekli ve yeterli şart her $x_0 \in (a, b)$ için f'nin x_0'da destek doğrusu vardır.

Teorem 1.2.8. (Hölder Eşitsizliği): [21, s-50-53] $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n-lisi olsun. Bu takdirde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

1. $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

2. $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ayrıca verilen Hölder eşitsizliğinin [26, s-14]'de aşağıdaki gösterimi de mevcuttur:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorem 1.2.9. (İntegral için Hölder Eşitsizliği): [22, s-106] $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve $|f(x)|^p$, $|g(x)|^q$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan Power Mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 1.2.10. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı, $|f(x)|$ ve $|g(x)|^q$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 1.2.11. (Üçgen Eşitsizliği): [22, s-473] Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|,$$

ve tümevarım metoduyla $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 1.2.12. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): [22, s-476] f, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad \text{burada } a < b,$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 1.2.13. (Gama Fonksiyonu): [28, s-15] $x \in \mathbb{R}^+$ için

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{1.4}$$

olarak tanımlanır. Gama fonksiyonu önemli bir özelliği

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Gamma(x) = (x-1)!, \qquad x \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$$

Tanım 1.2.14. (Beta Fonksiyonu): [28, s-17] $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \tag{1.5}$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca Beta fonksiyonunun Gama fonksiyonu türünden ifadesi $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \tag{1.6}$$

olarak yazılır.

1.3. Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde konveks fonksiyonlarda Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler için elde edilmiş bazı temel sonuçlar verilecektir. Bu bölümden sonra $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, I° aralığın içi olarak kabul edilecektir.

Trapezoid tipli eşitsizlikleri elde etmek için ilk eşitlik aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Lemma 1.3.1: [3] $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevli ve $f' \in L[a,b]$ ise aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt. \tag{1.7}$$

Lemma 1.3.1 kullanılarak aşağıdaki Trapezoid tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 1.3.2: [3] $I\subset\mathbb{R}$ bir aralık, $a,b\in I^{\circ}$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f:I^{\circ}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu türevli ve $[a,b]$ aralığında $|f'|$ konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8}. \tag{1.8}$$

Teorem 1.3.3: [3] $I\subset\mathbb{R}$ bir aralık, $a,b\in I^{\circ}$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f:I^{\circ}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu türevli, $p,q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $[a,b]$ aralığında $|f'|^q$ konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.9}$$

Teorem 1.3.4: [10] $I\subset\mathbb{R}$ bir aralık, $a,b\in I^{\circ}$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f:I^{\circ}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu türevli, $q\ge 1$ için $[a,b]$ aralığında $|f'|^q$ konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{(b-a)}{4}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.10}$$

Midpoint tipli eşitsizlikleri elde etmek için ilk eşitlik aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Lemma 1.3.5: [18] $I\subset\mathbb{R}$ bir aralık, $a,b\in I^{\circ}$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f:I^{\circ}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu türevli ve $f'\in L[a,b]$ ise aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)=(b-a)$$

$$\times\left[\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta+(1-t)b)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b)dt\right]. \tag{1.11}$$

Lemma 1.3.5 kullanılarak aşağıdaki Midpoint tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 1.3.6: [18] $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $a, b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f: I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevli ve $[a, b]$ aralığında $|f'|$ konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right)}{8}. \tag{1.12}$$

Teorem 1.3.7: [18] $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $a, b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f: I^{\circ} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevli, $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $[a, b]$ aralığında $|f'|^q$ konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)}{16} \left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times \left[\left(|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right]. \tag{1.13}$$

1.4. Riemann-Liouville Kesirli İntegraller ve Riemann-Liouville Kesirli Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde konveks fonksiyonlarda Riemann-Liouville kesirli Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler için elde edilmiş bazı temel sonuçlar verilecektir.

Sağ ve sol Riemann-Liouville kesirli integraller aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 1.4.1. (Riemann-Liouville Kesirli İntegraller): [8, s-69] $[a, b] \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $\alpha \in \mathbb{C}$ $(Re(\alpha) > 0)$ olmak üzere sırasıyla $J_{a+}^{\alpha} f$, $J_{b-}^{\alpha} f$ sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integralleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(J_{a+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \qquad (x > a;\ Re(\alpha) > 0), \tag{1.14}$$

$$(J_{b-}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt \qquad (x < b;\ Re(\alpha) > 0). \tag{1.15}$$

Burada $\Gamma(\alpha)$, Gama fonksiyonudur.

Riemann-Liouville kesirli Hermite-Hadamard eşitsizliği ilk olarak aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 1.4.2: [12] $0 \leq a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ de konveks ise $\alpha > 0$ olmak üzere aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli Hermite-Hadamard eşitsizliği sağlanır:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[(J_{a+}^{\alpha}f)(b) + (J_{b-}^{\alpha}f)(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.16}$$

Uyarı 1.4.3: Teorem 1.4.2'de a ve b sayıları sıfırdan büyük eşit olmak zorunda değildir. f fonksiyonu pozitif olmak zorunda değildir.

Ayrıca konveks fonksiyonlarda Riemann-Liouville kesirli Trapezoid tipli eşitsizlikleri elde etmek için aşağıdaki eşitlik verilmiştir.

Lemma 1.4.4: [12] $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b)'de diferensiyellenebilir olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise aşağıdaki eşitlik doğrudur :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[(J_{a+}^{\alpha}f)(b) + (J_{b-}^{\alpha}f)(a)\right]$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_{0}^{1}\left[(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right]f'(ta+(1-t)b)dt. \tag{1.17}$$

Lemma 1.4.4 kullanılarak aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli Trapezoid tipli eşitsizlik elde edilmiştir.

Teorem 1.4.5: [12] $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b)'de diferensiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$'de konveks ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[(J_{a+}^{\alpha}f)(b) + (J_{b-}^{\alpha}f)(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1 - \frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right]. \tag{1.18}$$

Konveks fonksiyonlarda Riemann-Liouville kesirli Midpoint tipli eşitsizlikleri elde etmek için aşağıdaki eşitlik verilmiştir.

Lemma 1.4.6: [24] $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b)'de diferensiyellenebilir olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise

$$k=\begin{cases}1, & 0\le t<\frac{1}{2}\ \ ise\\ -1, & \frac{1}{2}\le t\le 1\ \ ise\end{cases}$$

olmak üzere aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli eşitlik doğrudur:

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[(J_{a+}^{\alpha}f)(b)+(J_{b-}^{\alpha}f)(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ &\quad=\frac{b-a}{2}\left[\int_0^1 kf'(ta+(1-t)b)dt-\int_0^1[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}]f'(ta+(1-t)b)dt\right]\\ &=\frac{b-a}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}[1+t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}]f'(ta+(1-t)b)dt\right.\\ &\quad\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1[-1+t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}]f'(ta+(1-t)b)dt\right].\end{aligned}\tag{1.19}$$

Lemma 1.4.6 kullanılarak aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli Midpoint tipli eşitsizlik elde edilmiştir.

Teorem 1.4.7: [24] $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b)'de diferensiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|$ $[a,b]$'de konveks ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[(J_{a+}^{\alpha}f)(b)+(J_{b-}^{\alpha}f)(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\\ &\quad\le\frac{b-a}{4(\alpha+1)}\left(\alpha+3-\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)[|f'(a)|+|f'(b)|].\end{aligned}\tag{1.20}$$

Konveks fonksiyonlar için sol Riemann-Liouville kesirli Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 1.4.8: [7] $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ ve $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $f\in L[a,b]$ ise $\alpha>0$ olmak üzere bu durumda aşağıdaki sol Riemann-Liouville kesirli Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik elde edilir:

$$f\left(\frac{\alpha a+b}{\alpha+1}\right)\le\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}(J_{a+}^{\alpha}f)(b)\le\frac{\alpha f(a)+f(b)}{\alpha+1}.\tag{1.21}$$

Ayrıca konveks fonksiyonlarda sol Riemann-Liouville kesirli Trapezoid tipli eşitsizlikleri elde etmek için aşağıdaki eşitlik verilmiştir.

Lemma 1.4.9: [7] $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ olmak üzere $f: I^{\circ} \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise $\alpha > 0$ olmak üzere sol Riemann-Liouville kesirli integrali için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{\alpha f(a) + f(b)}{\alpha + 1} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} (J_{a+}^{\alpha} f)(b)$$
$$= \frac{b-a}{\alpha+1} \int_0^1 [1 - (\alpha+1)t^{\alpha}] f'(ta + (1-t)b) dt. \tag{1.22}$$

Lemma 1.4.9 kullanılarak [7]'de aşağıdaki sol Riemann-Liouville kesirli Trapezoid tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 1.4.10: [7] $f: I^{\circ} \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$'de konveks ise, $\alpha > 0$ ve

$$T_1(\alpha) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha+1}}} (1 - (\alpha+1)t^{\alpha})\, t\, dt = \frac{\alpha}{2(\alpha+2)(\alpha+1)^{\frac{2}{\alpha}}},$$

$$T_2(\alpha) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha+1}}} (1 - (\alpha+1)t^{\alpha})(1-t)\, dt = \frac{\alpha\left(2(\alpha+2)(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}-1} - 1\right)}{2(\alpha+2)(\alpha+1)^{\frac{2}{\alpha}}},$$

$$T_3(\alpha) = \int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha+1}}}^1 \left((\alpha+1)t^{\alpha} - 1\right) t\, dt = \frac{\alpha\left(1 + (\alpha+1)^{\frac{2}{\alpha}}\right)}{2(\alpha+2)(\alpha+1)^{\frac{2}{\alpha}}},$$

$$T_4(\alpha) = \int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha+1}}}^1 \left((\alpha+1)t^{\alpha} - 1\right)(1-t)\, dt$$
$$= \frac{\alpha\left(2(\alpha+2)(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}-1} - 1 - (\alpha+1)^{\frac{2}{\alpha}}\right)}{2(\alpha+2)(\alpha+1)^{\frac{2}{\alpha}}},$$

olmak üzere sol Riemann-Liouville kesirli integrali için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{\alpha f(a)+f(b)}{\alpha+1}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}(J_{a+}^{\alpha}f)(b)\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{\alpha+1}\begin{bmatrix} T_1(\alpha)|f'(a)|+T_2(\alpha)|f'(b)| \\ +T_3(\alpha)|f'(a)|+T_4(\alpha)|f'(b)|\end{bmatrix}. \tag{1.23}$$

Teorem 1.4.11: [7] $f: I^{\circ}\to\mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$'de konveks ise, $\alpha>0$, $q\geq 1$ ve $T_1(\alpha)$-$T_4(\alpha)$ 1.4.10 Teorem'deki integraller olmak üzere sol Riemann-Liouville kesirli integrali için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{\alpha f(a)+f(b)}{\alpha+1}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}(J_{a+}^{\alpha}f)(b)\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{\alpha+1}\left(\frac{2\alpha}{(\alpha+1)^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\begin{pmatrix} T_1(\alpha)|f'(a)|^q+T_2(\alpha)|f'(b)|^q \\ +T_3(\alpha)|f'(a)|^q+T_4(\alpha)|f'(b)|^q\end{pmatrix}^{\frac{1}{q}}. \tag{1.24}$$

Teorem 1.4.12: [7] $f: I^{\circ}\to\mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$'de konveks ise, $\alpha>0$, $p,q>1$ için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve

$$T_5(\alpha,p)=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha+1}}}(1-(\alpha+1)t^{\alpha})^p dt,$$

$$T_6(\alpha,p)=\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha+1}}}^{1}\left((\alpha+1)t^{\alpha}-1\right)^p dt,$$

olmak üzere sol Riemann-Liouville kesirli integrali için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{\alpha f(a)+f(b)}{\alpha+1}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}(J_{a+}^{\alpha}f)(b)\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{\alpha+1}\left[\left(T_5(\alpha,p)+T_6(\alpha,p)\right)^{\frac{1}{P}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]. \tag{1.25}$$

Ayrıca konveks fonksiyonlarda sol Riemann-Liouville kesirli Midpoint tipli eşitsizlikleri elde etmek için aşağıdaki eşitlik verilmiştir.

Lemma 1.4.13: [7] $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olmak üzere $f: I^\circ \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise $\alpha > 0$ olmak üzere sol Riemann-Liouville kesirli integrali için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left(J_{a+}^{\alpha}f\right)(b) - f\left(\frac{\alpha a + b}{\alpha+1}\right) = (b-a)$$
$$\times\left[\int_0^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} t^\alpha f'(ta+(1-t)b)dt + \int_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}^{1} (t^\alpha - 1) f'(ta+(1-t)b)dt\right]. \tag{1.26}$$

Lemma 1.4.13 kullanılarak aşağıdaki sol Riemann-Liouville kesirli Midpoint tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 1.4.14: [7] $f: I^\circ \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$'de konveks ise, $\alpha > 0$ ve

$$T_7(\alpha) = \int_0^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} t^{\alpha+1}\, dt = \frac{\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)},$$

$$T_8(\alpha) = \int_0^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} t^{\alpha} - t^{\alpha+1}\ \ dt = \frac{2\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)},$$

$$T_9(\alpha) = \int_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}^{1} t^{\alpha} - t^{\alpha+1}\, dt = \frac{\alpha(2\alpha^\alpha + (\alpha+1)^\alpha)}{2(\alpha+1)^{\alpha+2}(\alpha+2)},$$

$$T_{10}(\alpha) = \int_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}^{1} (1-t^{\alpha})(1-t)\, dt = \frac{4\alpha^{\alpha+1} - \alpha(\alpha+1)^\alpha}{2(\alpha+1)^{\alpha+2}(\alpha+2)},$$

olmak üzere sol Riemann-Liouville kesirli integrali için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left(J_{a+}^{\alpha}f\right)(b) - f\left(\frac{\alpha a + b}{\alpha+1}\right)\right|$$
$$\leq (b-a)\begin{bmatrix} T_7(\alpha)|f'(a)| + T_8(\alpha)|f'(b)| \\ +T_9(\alpha)|f'(a)| + T_{10}(\alpha)|f'(b)| \end{bmatrix}. \tag{1.27}$$

Teorem 1.4.15: [7] $f: I^\circ \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$'de konveks ise, $\alpha > 0$, $q \geq 1$ ve $T_7(\alpha)$-$T_{10}(\alpha)$ Teorem

1.4.14’deki integraller olmak üzere sol Riemann-Liouville kesirli integrali için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left(J_{a+}^{\alpha}f\right)(b)-f\left(\frac{\alpha a+b}{\alpha+1}\right)\right|$$
$$\leq (b-a)\left(\frac{\alpha^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\begin{array}{c}\left(T_7(\alpha)|f'(a)|^q+T_8(\alpha)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(T_9(\alpha)|f'(a)|^q+T_{10}(\alpha)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]. \quad (1.28)$$

Teorem 1.4.16: [7] $f: I^{\circ} \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$’de konveks ise, $\alpha > 0$, $p, q > 1$ için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve

$$T_{11}(\alpha,p)=\int_0^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} t^{\alpha p}dt,$$

$$T_{12}(\alpha,p)=\int_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}^{1}(1-t^{\alpha})^p dt,$$

olmak üzere sol Riemann-Liouville kesirli integrali için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left(J_{a+}^{\alpha}f\right)(b)-f\left(\frac{\alpha a+b}{\alpha+1}\right)\right|$$
$$\leq (b-a)\left[\begin{array}{c}T_{11}^{\frac{1}{p}}(\alpha,p)\left(\frac{\alpha^2}{2(\alpha+1)^2}|f'(a)|^q+\frac{\alpha^2+2\alpha}{2(\alpha+1)^2}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ T_{12}^{\frac{1}{p}}(\alpha,p)\left(\frac{2\alpha+1}{2(\alpha+1)^2}|f'(a)|^q+\frac{1}{2(\alpha+1)^2}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right]. \quad (1.29)$$

1.5. Kuantum Hesap ve Kuantum Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde $[0, b]$ aralığında tanımlanan kuantum türev ve kuantum integral ile ilgili kavramlar tanıtacaktır. Daha sonra daha genel olan $[a, b]$ aralığında kuantum türev ve kuantum integral ile ilgili kavramlar tanıtıp, kuantum Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecektir. Aşağıda verilen $[0, b]$ aralığında tanımlanan kuantum türev ve kuantum integral ile ilgili kavramlar [4] ve [16] ’dan bulunabilir.

Tanım 1.5.1. ($[\mathbf{0}, \boldsymbol{b}]$ Aralığında $\boldsymbol{q}$-türev): [4, s-2] $b > 0$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ keyfi bir fonksiyon olsun. Her $t \in [0, b]$ için f'nin kuantum türevi veya q-türevi:

$$D_q f(t) = \frac{d_q f(t)}{d_q t} = \frac{f(t) - f(qt)}{(1-q)t}, \qquad t \neq 0,$$

$$D_q f(0) = \lim_{t \to 0^+} D_q f(t).$$

şeklinde tanımlanır. Yüksek mertebeden türevler ise

$$D_q^0 f(t) = f(t).$$

$$D_q^n f(t) = D_q D_q^{n-1} f(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

şeklinde tanımlanır. Açıkça f türevlenebilirse

$$\lim_{q \to 1^-} D_q f(t) = \frac{df(t)}{dt} = f'(t)\text{'dir.}$$

Örnek 1.5.2: $n \in \mathbb{N}$, $b > 0$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere $f: [0, b] \to \mathbb{R}$, $f(t) := t^n$ fonksiyonunun q-türevini hesaplayalım.

$t \neq 0$ ise

$$D_q f(t) = D_q t^n = \frac{t^n - q^n t^n}{(1-q)t} = \frac{1-q^n}{1-q} t^{n-1}$$

$t = 0$ ise

$$D_q f(0) = \lim_{t \to 0^+} D_q f(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1-q^n}{1-q} t^{n-1} = 0.$$

O halde $\forall t \in [0, b]$ için $D_q f(t) = \frac{1-q^n}{1-q} t^{n-1}$'dir.

Örnek 1.5.2'de görülen $\frac{1-q^n}{1-q} \geq 1$ sayısı ile kuantum hesapta sık karşılaşılır. Bu sayı $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısının kuantum hali veya q-hali olarak isimlendirilir. Kısaca

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \tag{1.30}$$

ile gösterilir

Açıkça $\forall t \in [0, b]$ için

$$\lim_{q \to 1^-} D_q f(t) = \lim_{q \to 1^-} \frac{1-q^n}{1-q} t^{n-1} = \lim_{q \to 1^-} [n]_q t^{n-1}$$

$$= \lim_{q\to 1^-} (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})t^{n-1} = nt^{n-1} = f'(t)\text{'dir.}$$

q-türevin aşağıdaki özellikleri Tanım 1.5.1 kullanılarak kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 1.5.3. ($[0, b]$ Aralığında q-Türevinin Özellikleri): [4, s-2-3]

1. $c \in \mathbb{R}$ sabit ise $D_q(c) = 0$ (Sabitin türevi),

2. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ sabitler ise $D_q[\alpha_1 f(t) + \alpha_2 g(t)] = \alpha_1 D_q f(t) + \alpha_2 D_q g(t)$ (Lineerlik),

3. $D_q[f(t)g(t)] = f(qt)D_q g(t) + g(t)D_q f(t) = f(t)D_q g(t) + g(qt)D_q f(t)$ (Çarpım),

4. Eğer $g(t) \neq 0$ ise

$$D_q\left[\frac{f(t)}{g(t)}\right] = \frac{g(t)D_q f(t) - f(t)D_q g(t)}{g(t)g(qt)} = \frac{g(qt)D_q f(t) - f(qt)D_q g(t)}{g(t)g(qt)} \text{ (Bölüm).}$$

Örnek 1.5.4: $f: [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(t) := t^2 + 2t - 1$ olmak üzere Örnek 1.5.2 ve Teorem 1.5.3' den

$t \neq 0$ ise

$$D_q f(t) = D_q(t^2 + 2t - 1) = D_q(t^2) + 2D_q(t) - D_q(1)$$

$$= \frac{1 - q^2}{1 - q} t + 2\frac{1 - q}{1 - q} t^0 - 0 = (1 + q)t + 2$$

$t = 0$ ise

$$D_q f(0) = \lim_{t\to 0^+} D_q f(t) = \lim_{t\to 0^+} (1 + q)t + 2 = 2$$

O halde $\forall t \in [0,2]$ için $D_q f(t) = (1 + q)t + 2$'dir. Açıkça $\forall t \in [0,2]$ için

$$\lim_{q\to 1^-} D_q f(t) = \lim_{q\to 1^-} (1 + q)t + 2 = 2t + 2 = f'(t)\text{'dir.}$$

Tanım 1.5.5. (q-Antitürev ve Belirsiz q-İntegrali):[4, s-64] $b > 0$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ keyfi bir fonksiyon olsun. Eğer her $t \in [0, b]$ için $D_q F(t) = f(t)$ olacak şekilde bir $F(t)$ fonksiyonu varsa bu fonksiyona $f(t)$'nin bir kuantum antitürevi veya q-antitürevi denir ve bu durum

$$\int f(t)\, d_q t \tag{1.31}$$

ile gösterilir. Ayrıca

$$\int f(t)\, d_q t = (1 - q)t \sum_{n=0}^{+\infty} q^n f(q^n t) \tag{1.32}$$

serisine belirsiz q-integral veya Jackson integrali denir [4, s-67].

Jackson integrali her zaman mevcut olmayabilir. Aşağıdaki teoremde mevcut olması için gerekli şartlar verilmiştir.

Teorem 1.5.6: [4, s-68] $f(t)$ keyfi bir fonksiyon olsun. Eğer $|f(t)t^{\alpha}|$, $(0,b]$ aralığında bazı $0 \leq \alpha < 1$ için sınırlı ise (1.32)'de tanımlı Jackson integral $f(t)$'nin bir antitürevi olan $F(t)$ fonksiyonuna $(0,b]$ aralığında yakınsaktır. Üstelik $F(t)$, $t = 0$ noktasında süreklidir ve $F(0) = 0$'dır.

Tanım 1.5.7. (Belirli q-İntegrali): [4, s-69] $b > 0$, $0 < q < 1$ ve $f: [0,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $[0,b]$ aralığında $f(t)$'nin belirli kuantum integrali veya belirli q-integrali aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\int_0^b f(t)\, d_q t = (1-q)b \sum_{n=0}^{+\infty} q^n f(q^n b) \text{'dir.} \tag{1.33}$$

Özel olarak $\forall t \in [0,b]$ ise

$$\int_0^t f(s)\, d_q s = (1-q)t \sum_{n=0}^{+\infty} q^n f(q^n t) \tag{1.34}$$

olduğu açıktır. Ayrıca $0 < c < t$ ise

$$\int_c^t f(s)\, d_q s = \int_0^t f(s)\, d_q s - \int_0^c f(s)\, d_q s \text{ 'dir.} \tag{1.35}$$

Ayrıca eğer $f(t)$ fonksiyonu $[0,b]$ aralığında sürekli ise [4, s-70]

$$\lim_{q \to 1^-} \int_0^b f(t)\, d_q t = \int_0^b f(t)\, dt \tag{1.36}$$

yani $f(t)$ fonksiyonunun $[0,b]$ aralığındaki Riemann integrali elde edilir.

Örnek 1.5.8: $t \in [0,b]$ için $f(t) = t$ olmak üzere. O halde

$$\int_0^t f(s)\, d_q s = \int_0^t s\, d_q s = (1-q)t \sum_{n=0}^{\infty} q^n (q^n t) = (1-q)t \left[t \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}\right]$$

$$= (1-q)t \left[t \frac{1}{1-q^2}\right] = \frac{t^2}{1+q}$$

Teorem 1.5.9. ($[0,b]$ Aralığında q-Hesabın Temel Teoremi): [4, s-73] $0 \leq a < b$, $0 < q < 1$ ve $f: [0,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $F(t)$, $f(t)$'nin $t = 0$'da sürekli olan bir q-antitürevi ise:

$$\int_a^b f(s)\, d_q s = F(b) - F(a)\,'\text{dır.} \tag{1.37}$$

Sonuç 1.5.10: [4, s-74] $0 \leq a < b$, $0 < q < 1$ ve $f: [0,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f'(t)$, $t = 0$'ın bir komşuluğunda mevcut ve $t = 0$'da sürekli ise:

$$\int_a^b D_q f(s)\, d_q s = f(b) - f(a)\,'\text{dir.} \tag{1.38}$$

Ayrıca

$$\int_a^b f(s)\, D_q g(s)\, d_q s = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(s)\, D_q f(s)\, d_q s\,'\text{dir.} \tag{1.39}$$

Aşağıda verilen $[a,b]$ aralığında tanımlanan q-türev ve q-integral ile ilgili kavramlar [15] ve [16] da bulunabilir.

Tanım 1.5.11. ($[a,b]$ Aralığında q-Türev): [16] $a < b$, $0 < q < 1$ ve $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her $t \in [a,b]$ için f'nin $[a,b]$ aralığındaki kuantum türevi veya q-türevi

$$_aD_q f(t) = \frac{f(t) - f(qt + (1-q)a)}{(1-q)(t-a)}, t \neq a$$

$$_aD_q f(a) = \lim_{t \to a^+} {_aD_q f(t)},$$

şeklinde tanımlanır. Yüksek mertebeden q-türevler

$$_aD_q f(t) = f(t), \qquad \left({_aD_q^k}\, f\right)(t) = {_aD_q}\left({_aD_q^{k-1}}\, f\right)(t),$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımda $a = 0$ aldığında Tanım 1.5.1'daki $[0,b]$ aralığındaki q-türevin elde edileceği açıktır.

Örnek 1.5.12: $f: [3,7] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^3 + 3t$ sürekli fonksiyonunun q-türevini hesaplayalım:

$t \neq 3$ ise

$$\begin{aligned}
{}_3D_q f(t) &= {}_3D_q(t^3 + 3t) \\
&= \frac{f(t) - f(qt + (1-q)3)}{(1-q)(t-3)} \\
&= \frac{t^3 + 3t - (qt + (1-q)3)^3 - 3(qt + (1-q)3)}{(1-q)(t-3)} \\
&= \frac{t^3 - (qt + (1-q)3)^3 + 3\big(t - (qt + (1-q)3)\big)}{(1-q)(t-3)} \\
&= \frac{\big(t - (qt + (1-q)3)\big)[t^2 + t(qt + (1-q)3) + (qt + (1-q)3)^2 + 3]}{(1-q)(t-3)} \\
&= t^2 + t(qt + (1-q)3) + (qt + (1-q)3)^2 + 3, \qquad t \neq 3,
\end{aligned}$$

$t = 3$ ise

$$\begin{aligned}
{}_3D_q f(3) &= \lim_{t \to 3^+} {}_3D_q f(t) = 9 + 3(3q + (1-q)3) + (3q + (1-q)3)^2 + 3 \\
&= 9 + 9 + 9 + 3 = 30
\end{aligned}$$

O halde $\forall t \in [3,7]$ için

${}_3D_q f(t) = t^2 + t(qt + (1-q)3) + (qt + (1-q)3)^2 + 3$'dir.

Açıkça $\forall t \in [3,7]$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{q \to 1^-} {}_3D_q f(t) &= \lim_{q \to 1^-} t^2 + t(qt + (1-q)3) + (qt + (1-q)3)^2 + 3 \\
&= 3t^2 + 3 = f'(t)\text{ 'dir.}
\end{aligned}$$

Örnek 1.5.13: $f: [1,4] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$ sürekli fonksiyonunun q-türevini $q = \frac{1}{2}$ için hesaplayalım:

$t \neq 1$ ise

$$\begin{aligned}
{}_1D_q f(t) &= {}_1D_q(t^2) \\
&= \frac{f(t) - f\big(qt + (1-q)\big)}{(1-q)(t-1)} \\
&= \frac{t^2 - \big(qt + (1-q)\big)^2}{(1-q)(t-1)} \\
&= \frac{\big(t - qt - (1-q)\big)(t + qt + (1-q))}{(1-q)(t-1)} \\
&= (1+q)t + 1 - q
\end{aligned}$$

$t = 1$ ise

$_1D_q f(1) = \lim_{t\to 1^+} {}_1D_q f(t) = 2$

O halde $\forall t \in [1,4]$ için $_1D_q f(t) = (1+q)t + 1 - q$’dir.

Özel olarak $q = \frac{1}{2}$ alınırsa $\forall t \in [1,4]$ için $_1D_{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$’dir.

Lemma 1.5.14: [15] $\alpha \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $0 < q < 1$ için:

$$_aD_q(t-a)^\alpha = \frac{1-q^\alpha}{1-q}(t-a)^{\alpha-1} = [\alpha]_q (t-a)^{\alpha-1}\text{’dir.}$$

Dikkat edilirse bu q-türevde $a = 0$, $\alpha = n \in \mathbb{N}$ alınırsa

$$_0D_q(t-0)^n = [n]_q(t-0)^{n-1} = [n]_q t^{n-1} = D_q t^n$$

Yani Örnek 1.5.2’de hesaplanan $[0,b]$ aralığındaki q-türev elde edilir.

Uyarı 1.5.15: [4, s -10] Her $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$ için:

$$[\alpha]_q = \frac{1-q^\alpha}{1-q}. \tag{1.40}$$

q-türevin aşağıdaki özellikleri Tanım 1.5.11 kullanılarak kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 1.5.16. ($[a,b]$ Aralığında q-Türevinin Özellikleri): [16] $a < b$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ q-türevlenebilir fonksiyonlar, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ sabitler olsun,

1. $c \in \mathbb{R}$, sabit ise $_aD_q(c) = 0$ (Sabitin türevi),

2. $_aD_q[\alpha_1 f(t) + \alpha_2 g(t)] = \alpha_1\, {}_aD_q f(t) + \alpha_2\, {}_aD_q g(t)$ (Lineerlik),

3. $_aD_q[f(t)g(t)] = f(t)\, {}_aD_q g(t) + g(qt + (1-q)a)\, {}_aD_q f(t)$

$= g(t)\, {}_aD_q f(t) + f(qt + (1-q)a)\, {}_aD_q g(t)$ (Çarpım),

4. Eğer $g(t) \neq 0$ ise

$$_aD_q\left[\frac{f(t)}{g(t)}\right] = \frac{g(t)\, {}_aD_q f(t) - f(t)\, {}_aD_q g(t)}{g(t)g(qt + (1-q)a)} \text{ (Bölüm).}$$

Açıkça Teorem 1.5.16’de $a = 0$ alınırsa Teorem 1.5.3 elde edilir.

Aralıklarda belirli q-integral aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 1.5.17. ($[a,b]$ Aralığında Belirli q-İntegral): [16] $a < b$, $0 < q < 1$ ve $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $f(t)$’nin $[a,b]$ aralığında belirli q-integrali aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\int_a^b f(t)\ {}_ad_qt = (1-q)(b-a)\sum_{n=0}^{+\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a). \tag{1.41}$$

Özel olarak $\forall t \in [a,b]$ ise

$$\int_a^t f(s)\ {}_ad_qs = (1-q)(t-a)\sum_{n=0}^{+\infty} q^n f(q^n t + (1-q^n)a) \tag{1.42}$$

ve $a < c < t$ ise

$$\int_c^t f(s)\ {}_ad_qs = \int_a^t f(s)\ {}_ad_qs - \int_a^c f(s)\ {}_ad_qs \text{ 'dir.} \tag{1.43}$$

Açıkça Tanım 1.5.17'da $a = 0$ alınırsa Tanım 1.5.7 elde edilir.

Örnek 1.5.18: $t \in [a,b]$ için $f(t) = t$ olmak üzere. O halde

$$\begin{aligned}\int_a^t f(s)\ {}_ad_qs &= \int_a^t s\ {}_ad_qs\\ &= (1-q)(t-a)\sum_{n=0}^{\infty} q^n(q^n t + (1-q^n)a)\\ &= (1-q)(t-a)\left[t\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} + a\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n - \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}\right)\right]\\ &= (1-q)(t-a)\left[t\frac{1}{1-q^2} + a\left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q^2}\right)\right]\\ &= (t-a)\left[t\frac{1}{1+q} + a\left(1 - \frac{1}{1+q}\right)\right] = \frac{(t-a)(t+qa)}{1+q}.\end{aligned}$$

Açıkça Örnek 1.5.18'de $a = 0$ alınırsa Örnek 1.5.8 elde edilir.

Teorem 1.5.19: [16] $a < b$ ve $0 < q < 1$ olsun. O halde her $t \in [a,b]$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

1. ${}_aD_q \int_a^t f(s)\ {}_ad_qs = f(t)$,

2. $\int_a^t {}_aD_q f(s)\ {}_ad_qs = f(t) - f(a)$,

3. $\forall c \in (a,t)$ için $\int_c^t {}_aD_q f(s)\ {}_ad_qs = f(t) - f(c)$ 'dir.

Teorem 1.5.20: [16] $a < b,\ 0 < q < 1,\ f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. O halde her $t \in [a,b]$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

1. $\int_a^t [\alpha f(s) + \beta g(s)]\ {}_ad_qs = \alpha \int_a^t f(s)\ {}_ad_qs + \beta \int_a^t g(s)\ {}_ad_qs$,

2. $\int_a^t f(s)\ {}_aD_q g(s)\ {}_ad_qs = f(s)g(s)\Big|_a^t - \int_a^t g(qs + (1-q)a)\ {}_aD_q f(s)\ {}_ad_qs$ 'dir.

Lemma 1.5.21: [15] $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $a < b$ ve $0 < q < 1$ ve olmak üzere her $t \in [a,b]$ ((1.40)'dan):

$$\int_a^t (s-a)^\alpha\ {}_ad_qs = \left(\frac{1-q}{1-q^{\alpha+1}}\right)(t-a)^{\alpha+1} = \frac{1}{[\alpha+1]_q}(t-a)^{\alpha+1} \text{ 'dir.} \tag{1.44}$$

Örnek 1.5.22: [15] $t \in [a,b]$ olmak üzere

$$\int_a^t s(s-a)\ {}_ad_qs$$

integralini Lemma 1.5.14, Teorem 1.5.20 ve Lemma 1.5.21 kullanarak hesaplayalım.

I.Yol:

Lemma 1.5.14'dan ${}_aD_q(t-a)^2 = [2]_q(t-a)$ olduğu biliniyor.

$$\int_a^t s(s-a)\ {}_ad_qs = \frac{1}{[2]_q}\int_a^t s\ {}_aD_q(s-a)^2\ {}_ad_qs$$

$$= \frac{1}{1+q}\int_a^t s\ {}_aD_q(s-a)^2\ {}_ad_qs$$

$$= \frac{1}{1+q}\left[t(t-a)^2 - a(a-a)^2 - \int_a^t (qs + (1-q)a - a)^2\ {}_aD_qs\ {}_ad_qs\right]$$

$$= \frac{1}{1+q}\left[t(t-a)^2 - q^2\int_a^t (s-a)^2 \ {}_aD_q s \ {}_ad_q s\right]$$

$${}_aD_q s = \frac{s-(qs+(1-q)a)}{(1-q)(s-a)} = \frac{(1-q)(s-a)}{(1-q)(s-a)} = 1 \text{ olduğundan}$$

$$= \frac{1}{1+q}\left[t(t-a)^2 - q^2\int_a^t (s-a)^2 \ {}_ad_q s\right]$$

$$= \frac{1}{1+q}\left[t(t-a)^2 - q^2\left(\frac{1-q}{1-q^3}\right)(t-a)^3\right]$$

$$= \frac{(t-a)^2}{1+q}\left[t - \frac{q^2}{1+q+q^2}(t-a)\right]$$

$$= \frac{(t-a)^2}{1+q}\left[\frac{t(1+q)+q^2a}{1+q+q^2}\right].$$

II.Yol:

$$\int_a^t s(s-a) \ {}_ad_q s = \int_a^t (s-a+a)(s-a) \ {}_ad_q s$$

$$= \int_a^t (s-a)^2 \ {}_ad_q s + a\int_a^t (s-a) \ {}_ad_q s$$

$$= \left(\frac{1-q}{1-q^3}\right)(t-a)^3 + a\left(\frac{1-q}{1-q^2}\right)(t-a)^2$$

$$= \frac{1}{1+q+q^2}(t-a)^3 + a\frac{1}{1+q}(t-a)^2$$

$$= \frac{(t-a)^2}{1+q}\left[\frac{1+q}{1+q+q^2}(t-a) - a\right]$$

$$= \frac{(t-a)^2}{1+q}\left[\frac{t(1+q)+q^2a}{1+q+q^2}\right].$$

Teorem 1.5.23. (q-Hölder Eşitsizliği): [15] $a < b,\ 0 < q < 1,\ p, r > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ ve $\alpha > 0$ olsun. O halde her $t \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlanır:

$$\int_a^t |f(s)||g(s)| \ {}_ad_q s \le \left(\int_a^t |f(s)|^p \ {}_ad_q s\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^t |g(s)|^r \ {}_ad_q s\right)^{\frac{1}{r}} \text{'dir.} \qquad (1.45)$$

Ayrıca q-Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan q-Power Mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 1.5.24. (q-Power Mean Eşitsizliği): $a < b,\ 0 < q < 1,\ r \geq 1$ ve $\alpha > 0$ olsun. O halde her $t \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlanır:

$$\int_a^t |f(s)||g(s)|\ {}_a d_q s \leq \left(\int_a^t |f(s)|\ {}_a d_q s\right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \text{'dir.} \tag{1.46}$$

Teorem 1.5.25. (q-Hermite-Hadamard Eşitsizliği): [2]-[25] $a < b,\ \ 0 < q < 1$ $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda:

$$f\left(\frac{qa + b}{1 + q}\right) \leq \frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)\ {}_a d_q t \leq \frac{qf(a) + f(b)}{1 + q} \text{ 'dir.} \tag{1.47}$$

Konveks fonksiyonlarda q-Trapezoid tipli eşitsizlikleri elde etmek için aşağıdaki eşitlikler verilmiştir.

Lemma 1.5.26: [9]-[13] $a < b,\ \ 0 < q < 1,\ \ f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b)'de q-türevlenebilir, ${}_aD_q f$, $[a, b]$'de sürekli ve q-integrallenebilir olsun. O halde aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)\ {}_a d_q\, t - \frac{qf(a) + f(b)}{1 + q}$$

$$= \frac{q(b - a)}{1 + q}\int_0^1 (1 - (1 + q)t)\ {}_aD_q f(tb + (1 - t)a)\ {}_0 d_q t. \tag{1.48}$$

Lemma 1.5.27: [13] Aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\int_0^1 t|1 - (1 + q)t|\ {}_0 d_q t = \frac{q(1 + 4q + q^2)}{(1 + q + q^2)(1 + q)^3} \text{ 'dir.} \tag{1.49}$$

Lemma 1.5.28: [13] Aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\int_0^1 |1-(1+q)t|\ {}_ad_q\, t = \frac{2q}{(1+q)^2}\ \text{'dir.} \tag{1.50}$$

Lemma 1.5.29: [13] Aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\int_0^1 (1-t)|1-(1+q)t|_0 d_q t = \frac{q(1+3q^2+2q^3)}{(1+q+q^2)(1+q)^3}\ \text{'dir.} \tag{1.51}$$

$0 < q < 1$, $a > 0$ için Tanım 1.5.7 ve [27, s-603]'den

$$\left|(1-q)a\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n a)\right| \le (1-q)a\sum_{n=0}^{\infty} q^n |f(q^n a)|$$

olup

$$\left|\int_0^a f(x)\, d_q x\right| \le \int_0^a |f(x)|\, d_q x\ \text{'dir.} \tag{1.52}$$

(1.52)'ye benzer şekilde Tanım 1.5.17'den

$$\left|\int_a^b f(x)\ {}_ad_q x\right| = \left|(1-q)(b-a)\sum_{n=0}^{+\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a)\right|$$

$$\le (1-q)(b-a)\sum_{n=0}^{+\infty} q^n |f(q^n b + (1-q^n)a)| = \int_a^b |f(x)|\ {}_ad_q x\ \text{'dir.} \tag{1.53}$$

Lemma 1.5.26, Lemma 1.5.29 ve (1.53) kullanılarak aşağıdaki q-Trapezoid tipli elde edilmiştir.

Teorem 1.5.30: [13] $a < b$, $0 < q < 1$ $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $|{}_aD_q f|$, $[a, b]$ aralığında konveks ve (a, b) q-integrallenebilir ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{qf(a)+f(b)}{1+q} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,{}_ad_q t\right| \le \frac{q^2(b-a)}{(1+q+q^2)(1+q)^4}$$

$$\times\left[(1+4q+q^2)\left|{}_aD_q f(b)\right| + (1+3q^2+2q^3)\left|{}_aD_q f(a)\right|\right]. \tag{1.54}$$

(Ayrıca [5]'e bakınız.)

Teorem 1.5.31: [9]-[13] $a < b,\ 0 < q < 1,\ f: [a, b] \to \mathbb{R},\ (a, b)$'de q-türevlenebilir bir fonksiyon, ${}_aD_q\, f$, $[a, b]$'de sürekli ve q-integrallenebilir olsun. Eğer $r \geq 1$ için $\left|{}_aD_q\, f\right|^r$, $[a, b]$ aralığında konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{qf(a) + f(b)}{1 + q} - \frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)\,{}_ad_qt\right| \leq \frac{q(b - a)}{1 + q}\left(\frac{2q}{(1 + q)^2}\right)^{1-1/r}$$

$$\times \left[\frac{q(1 + 4q + q^2)}{(1 + q + q^2)(1 + q)^3}\left|{}_aD_q\, f(b)\right|^r + \frac{q(1 + 3q^2 + 2q^3)}{(1 + q + q^2)(1 + q)^3}\left|{}_aD_q\, f(a)\right|^r\right]^{1/r}. \quad (1.55)$$

(Ayrıca [5] ve [6]'ya bakınız.)

Teorem 1.5.32: [9] $a < b,\ 0 < q < 1,\ f: [a, b] \to \mathbb{R},\ (a, b)$'de q-türevlenebilir bir fonksiyon, ${}_aD_q\, f$, $[a, b]$'de sürekli ve q-integrallenebilir olsun. Eğer $p, r > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ için $\left|{}_aD_q\, f\right|^r$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{qf(a) + f(b)}{1 + q} - \frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)\,{}_ad_qt\right| \leq \frac{q(b - a)}{1 + q}\left(\frac{2q}{(1 + q)^2}\right)^{1/p}$$

$$\times \left[\frac{q(1 + 4q + q^2)}{(1 + q + q^2)(1 + q)^3}\left|{}_aD_q\, f(b)\right|^r + \frac{q(1 + 3q^2 + 2q^3)}{(1 + q + q^2)(1 + q)^3}\left|{}_aD_q\, f(a)\right|^r\right]^{1/r}. \quad (1.56)$$

(Ayrıca [6]'ya bakınız.)

Konveks fonksiyonlarda q-Midpoint tipli eşitsizlikleri elde etmek için aşağıdaki eşitlik verilmiştir.

Lemma 1.5.33: [2] $a < b,\ 0 < q < 1,\ f: [a, b] \to \mathbb{R},\ (a, b)$'de q-türevlenebilir bir fonksiyon, ${}_aD_qf$, $[a, b]$'de sürekli ve q-integrallenebilir olsun. O halde aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$f\left(\frac{qa + b}{1 + q}\right) - \frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)\ {}_ad_qt = q(b - a)$$

$$\times \left[\int_0^{\frac{1}{1+q}} t\ {}_aD_qf(tb + (1 - t)a)\ {}_0d_qt + \int_{\frac{1}{1+q}}^1 \left(t - \frac{1}{q}\right)\ {}_aD_qf(tb + (1 - t)a)\ {}_0d_qt\right]. \quad (1.57)$$

Ayrıca [2]'de aşağıdaki eşitlikler verilmiştir.

$$\int_{0}^{\frac{1}{1+q}} t^2 \ {}_0d_q t = \frac{1}{(1+q)^3(1+q+q^2)} \text{ 'dir.} \tag{1.58}$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{1+q}} t(1-t) \ {}_0d_q \, t = \frac{q}{(1+q)^2(1+q+q^2)} \text{ 'dir.} \tag{1.59}$$

$$\int_{\frac{1}{1+q}}^{1} \left(\frac{1}{q}-t\right) t \ {}_0d_q \, t = \frac{2}{(1+q)^3(1+q+q^2)} \text{ 'dir.} \tag{1.60}$$

$$\int_{\frac{1}{1+q}}^{1} \left(\frac{1}{q}-t\right)(1-t) \ {}_0d_q \, t = \frac{-1+q+q^2}{(1+q)^3(1+q+q^2)} \text{ 'dir.} \tag{1.61}$$

(1.58)-(1.61) ve Lemma 1.5.33 kullanılarak aşağıdaki q-Midpoint tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 1.5.34: [2] $a < b$, $0 < q < 1$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b)'de q-türevlenebilir bir fonksiyon, ${}_aD_q \, f$, $[a,b]$'de sürekli ve q-integrallenebilir olsun. Eğer $\left|{}_aD_q \, f\right|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t) \ {}_ad_q t \right| \leq q(b-a)$$

$$\left[\left|{}_aD_q f(b)\right| \frac{3}{(1+q)^3(1+q+q^2)} + \left|{}_aD_q f(a)\right| \frac{-1+2q+2q^2}{(1+q)^3(1+q+q^2)}\right]. \tag{1.62}$$

Teorem 1.5.35: [2] $a < b$, $0 < q < 1$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b)'de q-türevlenebilir bir fonksiyon, ${}_aD_q \, f$, $[a,b]$'de sürekli ve q-integrallenebilir olsun. Eğer $r \geq 1$ için $\left|{}_aD_q \, f\right|^r$, $[a,b]$ aralığında konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t) \ {}_ad_q t \right| \leq q(b-a) \frac{1}{(1+q)^{3-\frac{3}{r}}}$$

$$\times \left[\begin{array}{l} \left(\left|{}_aD_q f(b)\right|^r \frac{1}{(1+q)^3(1+q+q^2)} + \left|{}_aD_q f(a)\right|^r \frac{q}{(1+q)^2(1+q+q^2)}\right)^{\frac{1}{r}} \\ + \left(\left|{}_aD_q f(b)\right|^r \frac{2}{(1+q)^3(1+q+q^2)} + \left|{}_aD_q f(a)\right|^r \frac{-1+q+q^2}{(1+q)^2(1+q+q^2)}\right)^{\frac{1}{r}} \end{array} \right]. \tag{1.63}$$

Teorem 1.5.36: [2] $a < b,\ \ 0 < q < 1,\ \ f:[a,b] \to \mathbb{R},\ \ (a,b)$'de q-türevlenebilir bir fonksiyon, ${}_aD_q\, f$, $[a,b]$'de sürekli ve q-integrallenebilir olsun. Eğer $p,r > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=1$ için $\left|{}_aD_q\, f\right|^r$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ {}_ad_qt\right| \leq q(b-a)$$

$$\times\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{(1+q)^{p+1}}\frac{1-q}{1-q^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left|{}_aD_qf(b)\right|^r}{(1+q)^3}+\frac{(2q+q^2)\left|{}_aD_qf(a)\right|^r}{(1+q)^3}\right)^{\frac{1}{r}}\\ +\left(\int_{\frac{1}{1+q}}^{1}\left(\frac{1}{q}-t\right)^p\ {}_0d_qt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{(2q+q^2)\left|{}_aD_qf(b)\right|^r}{(1+q)^3}+\frac{(-q+q^2+q^3)\left|{}_aD_qf(a)\right|^r}{(1+q)^3}\right)^{\frac{1}{r}}\end{array}\right]. \tag{1.64}$$

Teorem 1.5.37: [2] $a < b,\ \ 0 < q < 1,\ \ f:[a,b] \to \mathbb{R},\ \ (a,b)$'de q-türevlenebilir bir fonksiyon, ${}_aD_q\, f$, $[a,b]$'de sürekli ve q-integrallenebilir olsun. Eğer $p,r > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=1$ için $\left|{}_aD_q\, f\right|^r$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ {}_ad_qt\right| \leq q(b-a)\left(\frac{1}{1+q}\right)^{\frac{3}{p}}$$

$$\times\left[\begin{array}{c}\left(\left|{}_aD_qf(b)\right|^r\frac{1}{(1+q)^3(1+q+q^2)}+\left|{}_aD_qf(a)\right|^r\frac{q}{(1+q)^2(1+q+q^2)}\right)^{\frac{1}{r}}\\ +\left(\left|{}_aD_qf(b)\right|^r\frac{2}{(1+q)^3(1+q+q^2)}+\left|{}_aD_qf(a)\right|^r\frac{-1+q+q^2}{(1+q)^2(1+q+q^2)}\right)^{\frac{1}{r}}\end{array}\right]. \tag{1.65}$$

1.6. Kesirli Kuantum Hesap

Bu bölümde $[0,b]$ aralığında tanımlanan kesirli kuantum integral ile ilgili kavramlar tanıtacaktır. Daha sonra daha genel olan $[a,b]$ aralığında kesirli kuantum integral ile ilgili kavramlar tanıtılacaktır.

Önce bu bölümde kullanılacak kuantum hesabın bazı temel kavramlarını tanıtalım.

$k \in \mathbb{N}$, $n,m \in \mathbb{R}$ için $(n-m)^k$ kuvvetinin q-hali aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 1.6.1. (q-Kuvvet Fonksiyonu): [17] $0 < q < 1$, $k \in \mathbb{N}$, $n,m \in \mathbb{R}$ için q-kuvvet fonksiyonu

$$(n-m)^{(0)}=1, \qquad (n-m)^{(k)}=\prod_{i=0}^{k-1}\left(n-q^{i}m\right), \tag{1.66}$$

ayrıca $\gamma\in\mathbb{R}$ için $(n-m)^{(\gamma)}$ q-kuvvet fonksiyonu

$$(n-m)^{(\gamma)}=n^{\gamma}\prod_{i=0}^{+\infty}\frac{n-mq^{i}}{n-mq^{\gamma+i}} \quad ,n\neq 0 \tag{1.67}$$

şeklinde tanımlanır. Açıkça $m=0$ ise $n^{(\gamma)}=n^{\gamma}$'dir. Ayrıca $\gamma>0$ için $0^{(\gamma)}=0$'dir.

q-Gama ve q-Beta fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 1.6.2. (q-Gama Fonksiyonu): [17] $0<q<1$ ve $t\in\mathbb{R}^{+}$ için

$$\Gamma_q(t)=\frac{(1-q)^{(t-1)}}{(1-q)^{t-1}} \tag{1.68}$$

fonksiyonuna q-Gama fonksiyonu denir. Ayrıca q-Gama fonksiyonu için

$$\Gamma_q(t+1)=[t]_q\Gamma_q(t) \tag{1.69}$$

eşitliği sağlanıp, $\Gamma(t)$, 1.2.13 Tanım'da verilen Gama fonksiyonun olmak üzere

$$\lim_{q\to 1^-}\Gamma_q(t)=\Gamma(t)\text{ 'dir.} \tag{1.70}$$

Tanım 1.6.3. (q-Beta Fonksiyonu): [17] $0<q<1$ ve $s,t\in\mathbb{R}^{+}$ için

$$B_q(s,t):=\int_0^1 u^{(s-1)}(1-qu)^{(t-1)}d_qt \tag{1.71}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca q-Beta fonksiyonunun q-Gama fonksiyonu türünden ifadesi $s,t\in\mathbb{R}^{+}$ için

$$B_q(s,t)=\frac{\Gamma_q(s)\Gamma_q(t)}{\Gamma_q(s+t)}, \tag{1.72}$$

olarak yazılır. Açıkça $B(s,t)$, Tanım 1.2.14'te verilen Beta fonksiyonun olmak üzere

$$\lim_{q\to 1^-}B_q(s,t)=B(s,t)\text{ 'dir.} \tag{1.73}$$

Pochhammer sembolünün q-hali aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 1.6.4. (q-Pochhammer Sembolü): [17] $0<q<1$, $k\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ ve $m\in\mathbb{R}$ için q-Pochhammer sembolü

$$(m;q)_0 = 1, \qquad (m;q)_k = \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - q^i m\right), \tag{1.74}$$

şeklinde tanımlanır.

Açıkça $k \in \mathbb{N}$, $\gamma, n, m \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$ için q-kuvvet fonksiyonu ve q-Pochhammer sembolü arasında

$$(n-m)^{(0)} = 1 = n^0\left(\frac{m}{n};q\right)_0$$

$$(n-m)^{(k)} = \prod_{i=0}^{k-1}\left(n - q^i m\right) = n^k \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{m}{n}q^i\right) = n^k\left(\frac{m}{n};q\right)_k$$

$$(n-m)^{(\gamma)} = n^\gamma \prod_{i=0}^{+\infty}\frac{n - mq^i}{n - mq^{\gamma+i}} = n^\gamma \prod_{i=0}^{+\infty}\frac{1 - \frac{m}{n}q^i}{1 - \frac{mq^\gamma}{n}q^i}$$

$$= n^\gamma \frac{\prod_{i=0}^{+\infty} 1 - \frac{m}{n}q^i}{\prod_{i=0}^{+\infty} 1 - \frac{mq^\gamma}{n}q^i} = n^\gamma \frac{\left(\frac{m}{n};q\right)_\infty}{\left(\frac{m}{n}q^\gamma;q\right)_\infty}. \tag{1.75}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Teorem 1.6.5: [1, s-4] $0 < q < 1$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olsun. O halde $S := \{(\lambda,\mu) : \mu \geq \lambda$ ve $\mu + \lambda \geq 1\}$ olmak üzere

$$\lim_{q\to 1^-}\frac{\left(q^\lambda x;q\right)_\infty}{\left(q^\mu x;q\right)_\infty} = (1-x)^{\mu-\lambda}\,'dir \tag{1.76}$$

$(\lambda,\mu) \in S$ için $\{x \in \mathbb{C} : |x| \leq 1\}$'de düzgün yakınsaktır, $(\lambda,\mu) \notin S$ için $\{x \in \mathbb{C} : |x| \leq 1$, $x \neq 1\}$'in kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsaktır.

Tanım 1.6.6. ($[0,T]$ Aralığında Kesirli q-İntegrali): [17] $0 < q < 1$, $\alpha \geq 0$ ve f, $[0,T]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun Riemann-Liouville tipli kesirli q-integrali aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\left(I_q^0 f\right)(t) := f(t), \quad (\alpha = 0; t \in [0,T]),$$

$$\left(I_q^\alpha f\right)(t) := \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^t (t - qs)^{(\alpha-1)} f(s)\, d_q s, \quad (\alpha > 0; t \in [0,T]). \tag{1.77}$$

Tanım 1.6.7. ($[\mathbf{0}, \boldsymbol{T}]$ Aralığında Kesirli $\boldsymbol{q}$-Türevi): [17] $0 < q < 1$ için Riemann-Liouville tipli $\alpha \geq 0$ mertebeden kesirli q-türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\left(D_q^0 h\right)(t) = h(t)$$

$$\left(D_q^\alpha h\right)(t) = \left(D_q^l I_q^{l-\alpha} h\right)(t), \quad (\alpha > 0; t \in [0,T]) \tag{1.78}$$

Burada l, α'den büyük veya ona eşit en küçük tam sayıdır.

Lemma 1.6.8: [17] $0 < q < 1$, $\alpha, \beta \geq 0$ ve f, $[0,T]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $\left(I_q^\beta I_q^\alpha f\right)(t) = \left(I_q^{\alpha+\beta} f\right)(t)$,

2. $\left(D_q^\alpha I_q^\alpha f\right)(t) = f(t)$.

Lemma 1.6.9: [17] $0 < q < 1$, $\alpha > 0$ ve n bir pozitif tamsayı olsun. Aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\left(I_q^\alpha D_q^n f\right)(t) = \left(D_q^n I_q^\alpha f\right)(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^{\alpha-n+i}}{\Gamma_q(\alpha + i - n + 1)} \left(D_q^i f\right)(0). \tag{1.79}$$

Yukarıda verilen $[0,T]$ aralığında tanımlı fonksiyon için Riemann-Liouville kesirli q-integral ve q-türev tanımlarını $[a,b]$ aralığında tanımlı fonksiyona genelleştirmek için [17]'de yazarlar aşağıdaki tanımları kullanmıştır. Bizim çalışmalarımızda bu tanımlar kullanılacağı için bizde gerekli ispatları burada vereceğiz.

Tanım 1.6.10. ($\boldsymbol{q}$-Öteleme ($\boldsymbol{q}$-Shifting) Operatörü): [14-17] $0 < q < 1$ ve $a, m \in \mathbb{R}$ olsun. q-öteleme (q-shifting) operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$${}_a\phi_q(m) = qm + (1-q)a. \tag{1.80}$$

Ayrıca her k pozitif tamsayısı için

$${}_a\phi_q^k(m) = {}_a\phi_q^{k-1}\left({}_a\phi_q(m)\right) \quad \text{ve} \quad {}_a\phi_q^0(m) = m\text{'dir.} \tag{1.81}$$

Bu tanımdan aşağıdaki özellikler sağlanır:

Özellikler 1.6.11: [14-17] $0 < q < 1$, $a, n, m \in \mathbb{R}$ ve k, j pozitif tamsayıları için:

1. ${}_a\phi_q^k(m) = {}_a\phi_{q^k}(m)$,

2. ${}_a\phi_q^k\left({}_a\phi_q^j(m)\right) = {}_a\phi_q^j\left({}_a\phi_q^k(m)\right) = {}_a\phi_q^{j+k}(m)$,

3. ${}_a\phi_q(a) = a$,

4. ${}_a\phi_q^k(m) - a = q^k(m-a)$,

5. $m - {}_a\phi_q^k(m) = (1-q^k)(m-a)$,

6. $m \neq 0$ için ${}_a\phi_q^k(m) = m\,{}_{\frac{a}{m}}\phi_q^k(1)$,

7. ${}_a\phi_q(m) - {}_a\phi_q^k(n) = q\big(m - {}_a\phi_q^{k-1}(n)\big)$'dir.

İspat:

1. Her k pozitif tamsayısı için ${}_a\phi_q^k(m) = {}_a\phi_{q^k}(m)$ olduğunu matematiksel indüksiyon (tümevarım) ile ispatlayalım.

$k=1$ için ${}_a\phi_q^1(m) = {}_a\phi_q(m) = {}_a\phi_{q^1}(m)$ olduğu açıktır.

$k=n$ için ${}_a\phi_q^n(m) = {}_a\phi_{q^n}(m)$ olduğu varsayalım.

$k=n+1$ için (1.80)'den

$$\begin{aligned}
{}_a\phi_q^{n+1}(m) &= {}_a\phi_q^n\big({}_a\phi_q(m)\big) = {}_a\phi_{q^n}\big({}_a\phi_q(m)\big) \\
&= q^n\,{}_a\phi_q(m) + (1-q^n)a \\
&= q^n(qm + (1-q)a) + (1-q^n)a \\
&= q^{n+1}m + q^n a - q^{n+1}a + a - q^n a \\
&= q^{n+1}m + (1-q^{n+1})a \\
&= {}_a\phi_{q^{n+1}}(m).
\end{aligned}$$

2. 1. maddeden

$$\begin{aligned}
{}_a\phi_q^k\left({}_a\phi_q^j(m)\right) &= {}_a\phi_{q^k}\left({}_a\phi_{q^j}(m)\right) = {}_a\phi_{q^k}\big(q^j m + (1-q^j)a\big) \\
&= q^k\big(q^j m + (1-q^j)a\big) + (1-q^k)a \\
&= q^{k+j}m + q^k a - q^{k+j}a + a - q^k a \\
&= q^{k+j}m + \big(1-q^{k+j}\big)a \\
&= {}_a\phi_{q^{j+k}}(m) \\
&= {}_a\phi_q^{j+k}(m).
\end{aligned}$$

Bezer şekilde ${}_a\phi_q^j\left({}_a\phi_q^k(m)\right) = {}_a\phi_q^{j+k}(m)$ olduğu gösterilebilir.

3. ${}_a\phi_q(a) = qa + (1-q)a = a$'dir.

4. ${}_a\phi_q^k(m) - a = {}_a\phi_{q^k}(m) - a = q^k m + (1-q^k)a - a = q^k(m-a)$'dir.

5. $m - {}_a\phi_q^k(m) = m - {}_a\phi_{q^k}(m) = m - (q^k m + (1-q^k)a) = (1-q^k)(m-a)$'dir.

6. $m \neq 0$ için

$$ {}_a\phi_q^k(m) = {}_a\phi_{q^k}(m) = q^k m + (1-q^k)a = m\left(q^k + (1-q^k)\frac{a}{m}\right)$$

$= m\,{}_{\frac{a}{m}}\phi_{q^k}(1) = m\,{}_{\frac{a}{m}}\phi_q^k(1)$'dir.

7. ${}_a\phi_q(m) - {}_a\phi_q^k(n) = {}_a\phi_q(m) - {}_a\phi_{q^k}(n) = qm + (1-q)a - (q^k n + (1-q^k)a)$

$= qm - qa - q^k n + q^k a = q\left(m - (q^{k-1}n + (1-q^{k-1})a)\right)$

$= q\left(m - {}_a\phi_q^{k-1}(n)\right)$'dir.

Uyarı 1.6.12: ${}_a\phi_q(t) = qt + (1-q)a$ olduğundan Tanım 1.5.11'da ${}_aD_q f(t)$ türevi

$${}_aD_q f(t) = \frac{f(t) - f(qt + (1-q)a)}{(1-q)(t-a)} = \frac{f(t) - f\left({}_a\phi_q(t)\right)}{(1-q)(t-a)},$$

ve Tanım 1.5.17'de $\int_a^t f(s)\ {}_ad_q s$ integrali

$$\int_a^t f(s)\ {}_ad_q s = (1-q)(t-a)\sum_{n=0}^{+\infty} q^n f(q^n t + (1-q^n)a)$$

$$= (1-q)(t-a)\sum_{n=0}^{+\infty} q^n f\left({}_a\phi_{q^n}(t)\right)$$

$$= (1-q)(t-a)\sum_{n=0}^{+\infty} q^n f\left({}_a\phi_q^n(t)\right)$$

şeklinde q-öteme operatörü ile yazılabildiğine dikkat ediniz.

Tanım 1.6.13.(q-Öteleme Operatörünün Kuvveti): [14-17] $0 < q < 1,\ a, n, m \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{N}$ için q-operatörünün kuvveti aşağıdaki gibi tanımlanır:

$${}_a(n-m)_q^{(0)} = 1, \quad {}_a(n-m)_q^{(k)} = \prod_{i=0}^{k-1}\left(n - {}_a\phi_q^i(m)\right),\ \ k \in \mathbb{N}, \tag{1.82}$$

$${}_a(n-m)_q^{(\gamma)} = (n-a)^\gamma \prod_{i=0}^{\infty} \frac{n - {}_a\phi_q^i(m)}{n - {}_a\phi_q^{\gamma+i}(m)}, \quad n \neq 0\,. \tag{1.83}$$

Burada ${}_a\phi_q^{\gamma+i}(m) = {}_a\phi_{q^{\gamma+i}}(m) = q^{\gamma+i}m + \left(1 - q^{\gamma+i}\right)a$ şeklinde anlaşılacaktır.

Ayrıca (1.82)-(1.83)'de $a = 0$ alınırsa (1.66)-(1.67)'de verilen $[0, b]$ aralığındaki q-kuvvet elde edilir.

Özellikler 1.6.14: [14-17] $0 < q < 1, \gamma, a, n, m \in \mathbb{R}$, $n \neq a$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

1. ${}_a(n-m)_q^{(k)} = (n-a)^k \left(\frac{m-a}{n-a}; q\right)_k,$

2. $_a(n-m)_q^{(\gamma)}=(n-a)^{\gamma}\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1-\frac{m-a}{n-a}q^i}{1-\frac{m-a}{n-a}q^{i+\gamma}}=(n-a)^{\gamma}\frac{\left(\frac{m-a}{n-a};q\right)_\infty}{\left(\frac{m-a}{n-a}q^{\gamma};q\right)_\infty}$,

3. $_a\left(n-{}_a\phi_q^k(n)\right)_q^{(\gamma)}=(n-a)^{\gamma}\frac{(q^k;q)_\infty}{(q^{\gamma+k};q)_\infty}$'dir.

İspat:

1. $_a(n-m)_q^{(k)}=\prod_{i=0}^{k-1}\left(n-{}_a\phi_q^i(m)\right)=\prod_{i=0}^{k-1}\left(n-\left(q^im+\left(1-q^i\right)a\right)\right)$

$$=\prod_{i=0}^{k-1}\left(n-a-q^i(m-a)\right)=\prod_{i=0}^{k-1}(n-a)\left(1-q^i\left(\frac{m-a}{n-a}\right)\right)$$

$$=(n-a)^k\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-q^i\left(\frac{m-a}{n-a}\right)\right)=(n-a)^k\left(\frac{m-a}{n-a};q\right)_k$$'dir.

2. $_a(n-m)_q^{(\gamma)}=(n-a)^{\gamma}\prod_{i=0}^{\infty}\frac{n-{}_a\phi_q^i(m)}{n-{}_a\phi_q^{\gamma+i}(m)}$

$$=(n-a)^{\gamma}\prod_{i=0}^{\infty}\frac{n-\left(q^im+\left(1-q^i\right)a\right)}{n-\left(q^{\gamma+i}m+\left(1-q^{\gamma+i}\right)a\right)}$$

$$=(n-a)^{\gamma}\prod_{i=0}^{\infty}\frac{n-a-q^i(m-a)}{n-a-q^{\gamma+i}(m-a)}$$

$$(n-a)^{\gamma}\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1-\frac{m-a}{n-a}q^i}{1-\frac{m-a}{n-a}q^{i+\gamma}}$$

$$=(n-a)^{\gamma}\frac{\left(\frac{m-a}{n-a};q\right)_\infty}{\left(\frac{m-a}{n-a}q^{\gamma};q\right)_\infty}$$'dir.

3. 2. madde ve Özellikler 1.6.11 4. maddeden

$$_a\left(n-{}_a\phi_q^k(n)\right)_q^{(\gamma)}=(n-a)^{\gamma}\frac{\left(\frac{{}_a\phi_q^k(n)-a}{n-a};q\right)_\infty}{\left(\frac{{}_a\phi_q^k(n)-a}{n-a}q^{\gamma};q\right)_\infty}$$

$$=(n-a)^{\gamma}\frac{\left(\frac{n-a}{n-a}q^k;q\right)_\infty}{\left(\frac{n-a}{n-a}q^{\gamma+k};q\right)_\infty}=(n-a)^{\gamma}\frac{(q^k;q)_\infty}{(q^{\gamma+k};q)_\infty}$$'dir.

Açıkça (1.83)'den

$$ {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(1)\right)_q^{(\gamma)} = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1 - q^{i+1}}{1 - q^{\gamma+i+1}}\text{'dir.} \tag{1.84}$$

Ayrıca q-Gama fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz

$$ \Gamma_q(t) = \frac{{}_0\left(1 - {}_0\phi_q(1)\right)_q^{(t-1)}}{(1-q)^{t-1}}\text{'dir,} \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \tag{1.85}$$

Her $s, t > 0$ için q-Beta fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$ B_q(s,t) := \int_0^1 u^{(s-1)} \, {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(u)\right)_q^{(t-1)} d_q u. \tag{1.86}$$

$[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonun Riemann-Liouville tipli kesirli q-integrali tanımlayalım.

Tanım 1.6.15. ($[a, b]$ Aralığında Kesirli q-İntegrali): [14-17] $a < b,\ 0 < q < 1,\ \alpha \geq 0$ ve f, $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun Riemann-Liouville tipli kesirli q-integrali aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\left.\begin{aligned} \left({}_aI_q^0 f\right)(t) &:= f(t), \quad (\alpha = 0; t \in [a, b]) \\ \left({}_aI_q^\alpha f\right)(t) &:= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_a^t {}_a\left(t - {}_a\phi_q(s)\right)_q^{(\alpha-1)} f(s)\, {}_ad_q s, \quad (\alpha > 0; t \in [a, b]) \\ &= \frac{(1-q)(t-a)}{\Gamma_q(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} q^i \, {}_a\left(t - {}_a\phi_q^{i+1}(t)\right)_q^{(\alpha-1)} f\left({}_a\phi_q^i(t)\right) \\ &= \frac{(1-q)(t-a)}{\Gamma_q(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} q^i \, {}_a\left(t - {}_a\phi_q\left({}_a\phi_q^i(t)\right)\right)_q^{(\alpha-1)} f\left({}_a\phi_q^i(t)\right). \end{aligned}\right\}. \tag{1.87}$$

Bazen $\left({}_aI_q^\alpha f\right)(t) = \left({}_aI_q^\alpha f(s)\right)(t)$ şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.6.16. ($[a, b]$ Aralığında Kesirli q-Türevi): [14-17] $a < b,\ 0 < q < 1,\ \ \alpha \geq 0$ ve f, $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun Riemann-Liouville tipli $\alpha \geq 0$ mertebeden kesirli q-türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$ \left({}_aD_q^0 f\right)(t) = f(t)$$

$$ \left({}_aD_q^\alpha f\right)(t) = \left({}_aD_q^l \, {}_aI_q^{l-\alpha} f\right)(t), \quad (\alpha > 0\,;\ t \in [a, b]) \tag{1.88}$$

Burada l, α'dan büyük veya ona eşit en küçük tamsayıdır.

Lemma 1.6.17: [14-17] $a < b,\ 0 < q < 1,\ \alpha, \beta \geq 0$ ve $f,\ [a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Riemann-Liouville tipli kesirli q-integrali aşağıdaki yarı-grup özelliğini sağlar:

$$\left({}_aI_q^{\beta}\left({}_aI_q^{\alpha} f\right)\right)(t) = \left({}_aI_q^{\alpha}\left({}_aI_q^{\beta} f\right)\right)(t) = \left({}_aI_q^{\alpha+\beta} f\right)(t). \tag{1.89}$$

Lemma 1.6.18: [14] $a < b,\ 0 < q < 1,\ \alpha, \beta \geq 0$ ise her $t \in [a. b]$ için aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$\left({}_aI_q^{\alpha}(s-a)^{\beta}\right)(t) = \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+\alpha+1)}(t-a)^{\beta+\alpha}. \tag{1.90}$$

İspat: Tanım 1.6.15, Özellikler 1.6.11 4. madde ve Özellikler 1.6.14 3. madde kullanılırsa:

$$\left({}_aI_q^{\alpha}(s-a)^{\beta}\right)(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_a^t {}_a\left(t - {}_a\phi_q(s)\right)_q^{(\alpha-1)} (s-a)^{\beta}\, {}_ad_qs$$

$$= \frac{(1-q)(t-a)}{\Gamma_q(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} q^i\, {}_a\left(t - {}_a\phi_q^{i+1}(t)\right)_q^{(\alpha-1)} \left({}_a\phi_q^{i}(t) - a\right)^{\beta}$$

$$= \frac{(1-q)(t-a)}{\Gamma_q(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} q^i (t-a)^{\alpha-1} \frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{\left(q^{\alpha+i};q\right)_\infty} \left({}_a\phi_q^{i}(t) - a\right)^{\beta}$$

$$= \frac{(1-q)(t-a)}{\Gamma_q(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} q^i (t-a)^{\alpha-1} \frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{\left(q^{\alpha+i};q\right)_\infty} \left(q^i(t-a)\right)^{\beta}$$

$$= \frac{(1-q)(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma_q(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} q^i \frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{\left(q^{\alpha-1+i+1};q\right)_\infty} q^{i\beta}$$

$$= \frac{(1-q)(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma_q(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} q^i\, {}_0\left(1 - {}_0\phi_q^{i+1}(1)\right)_q^{(\alpha-1)} q^{i\beta}$$

$$= (t-a)^{\alpha+\beta} \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \left[(1-q) \sum_{i=0}^{\infty} q^i\, {}_0\left(1 - {}_0\phi_q\left({}_0\phi_q^{i}(1)\right)\right)_q^{(\alpha-1)} \left({}_0\phi_q^{i}(1)\right)^{\beta}\right]$$

$$= (t-a)^{\alpha+\beta} \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \left[\int_0^1 {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(s)\right)_q^{(\alpha-1)} s^{\beta}\, {}_0d_qs\right]$$

$$= (t-a)^{\alpha+\beta} \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \left[\int_0^1 s^{(\beta+1-1)}\, {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(s)\right)_q^{(\alpha-1)}\, {}_0d_qs\right]$$

$$= (t-a)^{\alpha+\beta}\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}B_q(\beta+1,\alpha)$$

$$= (t-a)^{\alpha+\beta}\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\frac{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(\beta+\alpha+1)}$$

$$= \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+\alpha+1)}(t-a)^{\beta+\alpha}\text{ 'dir.}$$

Sonuç 1.6.19: [14] $a<b$, $0<q<1$, $\alpha>0$ ve her $t\in[a,b]$ için $f(t)=t$ ve $g(t)=t^2$ şeklide tanımlanan iki fonksiyonlar olsun. O halde aşağıdaki bağlantılar sağlanır:

1. $\left({}_aI_q^{\alpha}f(s)\right)(t)=\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+2)}\left(t+\left([\alpha+1]_q-1\right)a\right)$,

2. $\left({}_aI_q^{\alpha}g(s)\right)(t)=\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+3)}\left((1+q)(t-a)^2+2a(t-a)[\alpha+2]_q+a^2[\alpha+1]_q[\alpha+2]_q\right)$.

İspat: $\alpha>0$ ve her $t\in[a,b]$ için , (1.69), (1.30) ve Lemma1.6.18 kullanılırsa:

1. $\left({}_aI_q^{\alpha}f(s)\right)(t)=\left({}_aI_q^{\alpha}\,s\right)(t)$

$$=\left({}_aI_q^{\alpha}\,s-a+a\right)(t)$$

$$={}_aI_q^{\alpha}\,(s-a)^1+a\,{}_aI_q^{\alpha}\,(s-a)^0$$

$$=\frac{\Gamma_q(1+1)}{\Gamma_q(1+\alpha+1)}(t-a)^{1+\alpha}+a\frac{\Gamma_q(0+1)}{\Gamma_q(0+\alpha+1)}(t-a)^{0+\alpha}$$

$$=\frac{\Gamma_q(2)}{\Gamma_q(\alpha+2)}(t-a)^{\alpha+1}+a\frac{\Gamma_q(1)}{\Gamma_q(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha}\text{ 'dir.}$$

$$\Gamma_q(1)=\Gamma_q(t)=\frac{(1-q)^{(1-1)}}{(1-q)^{1-1}}=\frac{(1-q)^{(0)}}{(1-q)^0}=\frac{1}{1}=1.$$

$$\Gamma_q(2)=\Gamma_q(1+1)=[1]_q\Gamma_q(1)=\frac{1-q^1}{1-q}\Gamma_q(1)=\frac{1-q}{1-q}\times 1=1.$$

$$\Gamma_q(\alpha+2)=[\alpha+1]_q\Gamma_q(\alpha+1)\text{'dir.}$$

Dolaysıyla

$$\left({}_aI_q^{\alpha}\,s\right)(t)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+2)}(t-a)^{\alpha+1}+a\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha}$$

$$=\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+2)}\left((t-a)+a[\alpha+1]_q\right)$$

$$=\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+2)}\left(t+\left([\alpha+1]_q-1\right)a\right)\text{ 'dir.}$$

2.$\left({}_aI_q^\alpha g(s)\right)(t) = \left({}_aI_q^\alpha\, s^2\right)(t)$

$$= \left({}_aI_q^\alpha\,(s-a)^2 + 2as - a^2\right)(t)$$

$$= {}_aI_q^\alpha\,(s-a)^2 + 2a\,{}_aI_q^\alpha\, s - a^2\,{}_aI_q^\alpha\,(s-a)^0$$

$$= \frac{\Gamma_q(2+1)}{\Gamma_q(2+\alpha+1)}(t-a)^{2+\alpha} + 2a\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+2)}\left(t + \left([\alpha+1]_q - 1\right)a\right)$$

$$- a^2\frac{\Gamma_q(0+1)}{\Gamma_q(0+\alpha+1)}(t-a)^{0+\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma_q(3)}{\Gamma_q(\alpha+3)}(t-a)^{2+\alpha} + 2a\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+2)}\left(t + \left([\alpha+1]_q - 1\right)a\right)$$

$$- a^2\frac{\Gamma_q(1)}{\Gamma_q(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha}\text{'dir.}$$

$$\Gamma_q(3) = \Gamma_q(2+1) = [2]_q\Gamma_q(2) = \frac{1-q^2}{1-q}\Gamma_q(1) = (1+q)\times 1 = 1+q.$$

$$\Gamma_q(\alpha+3) = [\alpha+2]_q\Gamma_q(\alpha+2) = [\alpha+2]_q[\alpha+1]_q\Gamma_q(\alpha+1)\text{'dir.}$$

Dolaysıyla

$$\left({}_aI_q^\alpha\, s^2\right)(t) = \frac{1+\mathrm{q}}{\Gamma_q(\alpha+3)}(t-a)^{2+\alpha} + 2a\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+2)}\left((t-a) + a[\alpha+1]_q\right)$$

$$- a^2\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+1)}(t-a)^\alpha$$

$$= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+3)}\Big((1+q)(t-a)^2 + 2a(t-a)[\alpha+2]_q + 2a^2[\alpha+1]_q[\alpha+2]_q$$

$$- a^2[\alpha+1]_q[\alpha+2]_q\Big)$$

$$= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+3)}\left((1+q)(t-a)^2 + 2a(t-a)[\alpha+2]_q + a^2[\alpha+1]_q[\alpha+2]_q\right).$$

Lemma 1.6.20: [17] $a<b,\ 0<q<1$ ve f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında q-integrallenebilir olsun. O halde $\alpha>0$ ve her $t\in[a,b]$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\left({}_aD_q^\alpha\,{}_aI_q^\alpha f\right)(t) = f(t)\text{ 'dir.} \tag{1.91}$$

İspat: Eğer $\alpha = n$ ve $n\in\mathbb{N}$ ise ${}_aD_q^\alpha = {}_aD_q^n$ Tanım1.5.11 de verilen q-türevin n. kuvveti olmak üzere (1.89) $\left({}_aD_q^n\,{}_aI_q^n f\right)(t) = f(t)$ olduğu açıktır. $\alpha>0$ sayısı bir $n\in\mathbb{N}$ için $n-1<\alpha<n$ ise Tanım 1.6.16 ve Lemma 1.6.17'den her $t\in[a,b]$ için

$$\left({}_aD_q^\alpha\,{}_aI_q^\alpha f\right)(t) = \left({}_aD_q^n\,{}_aI_q^{n-\alpha}\,{}_aI_q^\alpha f\right)(t) = \left({}_aD_q^n\,{}_aI_q^n f\right)(t) = f(t)\text{'dir.}$$

Lemma 1.6.21: [17] $a < b$, $0 < q < 1$ olsun. O halde her $t, s \in [a,b]$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

1. ${}_a^tD_q\ {}_a(t-s)_q^{(\alpha)} = (t-a)[\alpha]_q\ {}_a(t-s)_q^{(\alpha-1)}$,
2. ${}_a^sD_q\ {}_a(t-s)_q^{(\alpha)} = -(t-a)[\alpha]_q\ {}_a\left(t - {}_a\phi_q(s)\right)_q^{(\alpha-1)}$'dir.

Burada ${}_a^iD_q$ ifadesi i değişkenine göre q-türevi gösterir.

İspat: Özellikler 1.6.11 7. madde ve Uyarı 1.6.12 kullanılırsa:

1. $${}_a^tD_q\ {}_a(t-s)_q^{(\alpha)} = \frac{{}_a(t-s)_q^{(\alpha)} - {}_a\left({}_a\phi_q(t)-s\right)_q^{(\alpha)}}{(1-q)(t-a)}$$

$$= \frac{(t-a)^\alpha \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t-{}_a\phi_q^i(s)}{t-{}_a\phi_q^{\alpha+i}(s)} - \left({}_a\phi_q(t)-a\right)^\alpha \prod_{i=0}^{\infty} \frac{{}_a\phi_q(t)-{}_a\phi_q^i(s)}{{}_a\phi_q(t)-{}_a\phi_q^{\alpha+i}(s)}}{(1-q)(t-a)}$$

$$= \frac{(t-a)^\alpha \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t-{}_a\phi_q^i(s)}{t-{}_a\phi_q^{\alpha+i}(s)} - q^\alpha(t-a)^\alpha \prod_{i=0}^{\infty} \frac{q\left(t-{}_a\phi_q^{i-1}(s)\right)}{q\left(t-{}_a\phi_q^{\alpha-1+i}(s)\right)}}{(1-q)(t-a)}$$

$$= \frac{(t-a)^\alpha \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t-{}_a\phi_q^i(s)}{t-{}_a\phi_q^{\alpha+i}(s)} - q^\alpha(t-a)^\alpha \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t-{}_a\phi_q^{i-1}(s)}{t-{}_a\phi_q^{\alpha-1+i}(s)}}{(1-q)(t-a)}$$

$$= \frac{\left(t-{}_a\phi_q^{\alpha-1}(s)\right) \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t-{}_a\phi_q^i(s)}{t-{}_a\phi_q^{\alpha-1+i}(s)} - q^\alpha\left(t-{}_a\phi_q^{-1}(s)\right) \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t-{}_a\phi_q^i(s)}{t-{}_a\phi_q^{\alpha-1+i}(s)}}{(1-q)(t-a)}(t-a)^\alpha$$

$$= \frac{t-{}_a\phi_q^{\alpha-1}(s) - q^\alpha\left(t-{}_a\phi_q^{-1}(s)\right)}{1-q}(t-a)^{\alpha-1}\prod_{i=0}^{\infty}\frac{t-{}_a\phi_q^i(s)}{t-{}_a\phi_q^{\alpha-1+i}(s)}$$

$$= \frac{t-\left(q^{\alpha-1}s+(1-q^{\alpha-1})a\right) - q^\alpha\left(t-\left(q^{-1}s+(1-q^{-1})a\right)\right)}{1-q}\ {}_a(t-s)_q^{(\alpha-1)}$$

$$= \frac{t-q^{\alpha-1}s-a+q^{\alpha-1}a-q^\alpha\left(t-\left(\frac{s}{q}+\left(1-\frac{1}{q}\right)a\right)\right)}{1-q}\ {}_a(t-s)_q^{(\alpha-1)}$$

$$= \frac{t-q^{\alpha-1}s-a+q^{\alpha-1}a-q^\alpha\left(\frac{qt-(s+(q-1)a)}{q}\right)}{1-q}\ {}_a(t-s)_q^{(\alpha-1)}$$

$$= \frac{t-q^{\alpha-1}s-a+q^{\alpha-1}a-q^{\alpha-1}(qt-s-qa+a)}{1-q}\ {}_a(t-s)_q^{(\alpha-1)}$$

$$= \frac{t-q^{\alpha-1}s-a+q^{\alpha-1}a-q^\alpha t+q^{\alpha-1}s+q^\alpha a-q^{\alpha-1}a}{1-q}\ {}_a(t-s)_q^{(\alpha-1)}$$

$$= \frac{t - a - q^{\alpha} t + q^{\alpha} a}{1-q} \ {}_a(t-s)_q^{(\alpha-1)}$$

$$= (t-a)\frac{1-q^{\alpha}}{1-q} \ {}_a(t-s)_q^{(\alpha-1)}$$

$$= (t-a)[\alpha]_q \ {}_a(t-s)_q^{(\alpha-1)}\text{'dir.}$$

2. $${}_a^sD_q \ {}_a(t-s)_q^{(\alpha)} = \frac{f(s) - f\big({}_a\phi_q(s)\big)}{(1-q)(s-a)}$$

$$= \frac{{}_a(t-s)_q^{(\alpha)} - {}_a\big(t - {}_a\phi_q(s)\big)_q^{(\alpha)}}{(1-q)(s-a)}$$

$$= \frac{(t-a)^{\alpha} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t - {}_a\phi_q^i(s)}{t - {}_a\phi_q^{\alpha+i}(s)} - (t-a)^{\alpha} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t - {}_a\phi_q^i({}_a\phi_q(s))}{t - {}_a\phi_q^{\alpha+i}({}_a\phi_q(s))}}{(1-q)(s-a)}$$

$$= \frac{\prod_{i=0}^{\infty} \frac{t - {}_a\phi_q^i(s)}{t - {}_a\phi_q^{\alpha+i}(s)} - \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t - {}_a\phi_q^i({}_a\phi_q(s))}{t - {}_a\phi_q^{\alpha+i}({}_a\phi_q(s))}}{(1-q)(s-a)} (t-a)^{\alpha}$$

$$= \frac{(t-s) \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t - {}_a\phi_q^i({}_a\phi_q(s))}{t - {}_a\phi_q^{\alpha-1+i}({}_a\phi_q(s))} - \big(t - {}_a\phi_q^{\alpha}(s)\big) \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t - {}_a\phi_q^i({}_a\phi_q(s))}{t - {}_a\phi_q^{\alpha-1+i}({}_a\phi_q(s))}}{(1-q)(s-a)} (t-a)^{\alpha}$$

$$= \frac{(t-s) - \big(t - {}_a\phi_q^{\alpha}(s)\big)}{(1-q)(s-a)} (t-a)^{\alpha} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{t - {}_a\phi_q^i\big({}_a\phi_q(s)\big)}{t - {}_a\phi_q^{\alpha-1+i}\big({}_a\phi_q(s)\big)}$$

$$= \frac{{}_a\phi_q^{\alpha}(s) - s}{(1-q)(s-a)} (t-a) \ {}_a\big(t - {}_a\phi_q(s)\big)_q^{(\alpha-1)}$$

$$= \frac{q^{\alpha} s + (1-q^{\alpha})a - s}{(1-q)(s-a)} (t-a) \ {}_a\big(t - {}_a\phi_q(s)\big)_q^{(\alpha-1)}$$

$$= \frac{(1-q^{\alpha})(a-s)}{(1-q)(s-a)} (t-a) \ {}_a\big(t - {}_a\phi_q(s)\big)_q^{(\alpha-1)}$$

$$= -(t-a)[\alpha]_q \ {}_a\big(t - {}_a\phi_q(s)\big)_q^{(\alpha-1)}\text{'dir.}$$

Lemma 1.6.22: [17] $a < b$, $0 < q < 1$, p bir pozitif tamsayı ve $\alpha > 0$ olsun. O halde her $t \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\big({}_aI_q^{\alpha} \, {}_aD_q^P f\big)(t) = \big({}_aD_q^P \, {}_aI_q^{\alpha} f\big)(t) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(t-a)^{\alpha-p+k}}{\Gamma_q(\alpha+k-p+1)} \, {}_aD_q^P f(a)\text{'dir.} \qquad (1.92)$$

Teorem 1.6.23. (Kesirli q-Hölder Eşitsizliği):[14] $a < b,\ 0 < q < 1,\ p, r > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ ve $\alpha > 0$ olsun. O halde her $t \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlanır:

$$\left({}_aI_q^\alpha |f(s)||g(s)|\right)(t) \leq \left(\left({}_aI_q^\alpha |f(s)|^p\right)(t)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\left({}_aI_q^\alpha |g(s)|^r\right)(t)\right)^{\frac{1}{r}} \text{ 'dir.} \qquad (1.93)$$

İspat: Tanım 1.6.15 ve Teorem 1.2.8 (Hölder eşitsizliği) kullanılırsa:

$$\left({}_aI_q^\alpha |f(s)||g(s)|\right)(t)$$

$$= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_a^t {}_a\left(t - {}_a\phi_q(s)\right)_q^{(\alpha-1)} |f(s)||g(s)|\ {}_ad_qs$$

$$= \frac{(1-q)(t-a)}{\Gamma_q(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} q^i\ {}_a\left(t - {}_a\phi_q^{i+1}(t)\right)_q^{(\alpha-1)} \left|f\left({}_a\phi_q^i(t)\right)\right| \left|g\left({}_a\phi_q^i(t)\right)\right|$$

$$= \frac{(1-q)(t-a)}{\Gamma_q(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} {}_a\left(t - {}_a\phi_q^{i+1}(t)\right)_q^{(\alpha-1)} \left(q^i\right)^{\frac{1}{p}} \left|f\left({}_a\phi_q^i(t)\right)\right| \left(q^i\right)^{\frac{1}{r}} \left|g\left({}_a\phi_q^i(t)\right)\right|$$

$$= \frac{(1-q)(t-a)}{\Gamma_q(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} {}_a\left(t - {}_a\phi_q^{i+1}(t)\right)_q^{(\alpha-1)} \left(q^i\right)^{\frac{1}{p}} \left|f\left({}_a\phi_q^i(t)\right)\right| \left(q^i\right)^{\frac{1}{r}} \left|g\left({}_a\phi_q^i(t)\right)\right|$$

$$\leq \left(\frac{(1-q)(t-a)}{\Gamma_q(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} q^i\ {}_a\left(t - {}_a\phi_q^{i+1}(t)\right)_q^{(\alpha-1)} \left|f\left({}_a\phi_q^i(t)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(\frac{(1-q)(t-a)}{\Gamma_q(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} q^i\ {}_a\left(t - {}_a\phi_q^{i+1}(t)\right)_q^{(\alpha-1)} \left|g\left({}_a\phi_q^i(t)\right)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_a^t {}_a\left(t - {}_a\phi_q(s)\right)_q^{(\alpha-1)} |f(s)|^p\ {}_ad_qs\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_a^t {}_a\left(t - {}_a\phi_q(s)\right)_q^{(\alpha-1)} |g(s)|^r\ {}_ad_qs\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \left(\left({}_aI_q^\alpha |f(s)|^p\right)(t)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\left({}_aI_q^\alpha |g(s)|^r\right)(t)\right)^{\frac{1}{r}} \text{'dir.}$$

Ayrıca kesirli q-Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan kesirli q-Power Mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 1.6.24. (Kesirli q-Power Mean Eşitsizliği): $a < b,\ 0 < q < 1,\ r \geq 1$ ve $\alpha > 0$ olsun. O halde her $t \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlanır:

$$\left({}_aI_q^\alpha|f(s)||g(s)|\right)(t) \leq \left(\left({}_aI_q^\alpha|f(s)|\right)(t)\right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\left({}_aI_q^\alpha|f(s)||g(s)|^r\right)(t)\right)^{\frac{1}{r}} \text{'dir.} \quad (1.94)$$

Teorem 1.6.25. (1. Kesirli q-Hermite-Hadamard Eşitsizliği): [14] $a < b,\ 0 < q < 1$, $\alpha > 0$ ve $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks ve sürekli bir fonksiyon olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{2}{\Gamma_q(\alpha+1)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f(a+b-s)\right)(b) \leq \frac{1}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f(s)\right)(b)$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+2)}\left(\left([\alpha+1]_q - 1\right)f(a) + f(b)\right)\text{'dir.} \quad (1.95)$$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Riemann-Liouville Kesirli Kuantum Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu bölümde Teorem1.6.25'te verilen kesirli q-Hermite-Hadamard eşitsizliğinden daha uygun formda olan yeni bir kesirli q-Hermite-Hadamard eşitsizliği verilecektir.

Teorem 2.1.1. (2. Kesirli q-Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $a < b,\ 0 < q < 1,\ \alpha > 0$ ve $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks ve sürekli bir fonksiyon olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f\left(\frac{\left([\alpha+1]_q - 1\right)a + b}{[\alpha+1]_q}\right) \le \frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b) \le \frac{\left([\alpha+1]_q - 1\right)f(a) + f(b)}{[\alpha+1]_q}. \quad (2.1)$$

İspat: Öncelikle $\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q} \in (a,b)$ olduğu gösterilmelidir. $\alpha > 0$ ve $0 < q < 1$ için

$$q^{\alpha+1} < q$$

olduğundan

$$1 - q^{\alpha+1} > 1 - q$$

$$[\alpha+1]_q = \frac{1-q^{\alpha+1}}{1-q} > 1\ '\text{dir.}$$

O halde $a < b$ olduğundan

$$[\alpha+1]_q a < [\alpha+1]_q a - a + b$$

$$[\alpha+1]_q a < \left([\alpha+1]_q - 1\right)a + b$$

$$a < \frac{\left([\alpha+1]_q - 1\right)a + b}{[\alpha+1]_q}\ '\text{dir.} \quad (2.2)$$

Öte yandan $[\alpha+1]_q - 1 > 0$ olduğundan

$$\left([\alpha+1]_q - 1\right)a < \left([\alpha+1]_q - 1\right)b$$

$$\left([\alpha+1]_q - 1\right)a < [\alpha+1]_q b - b$$

$$\left([\alpha+1]_q - 1\right)a + b < [\alpha+1]_q b$$

$$\frac{\left([\alpha+1]_q - 1\right)a + b}{[\alpha+1]_q} < b'\text{dir.} \quad (2.3)$$

O halde (2.2) ve (2.3)'ten $\frac{([\alpha+1]_q-1)a+b}{[\alpha+1]_q} \in (a,b)$'dir. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan Teorem 1.2.7'den f'nin $\frac{([\alpha+1]_q-1)a+b}{[\alpha+1]_q} \in (a,b)$ noktasında destek doğrusu vardır. Tanım 1.2.6'dan her $x \in [a,b]$ ve

$m \in \left[f'_-\left(\frac{([\alpha+1]_q-1)a+b}{[\alpha+1]_q}\right), f'_+\left(\frac{([\alpha+1]_q-1)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)\right]$ için

$$A(x) = f\left(\frac{([\alpha+1]_q-1)a+b}{[\alpha+1]_q}\right) + m\left(x - \frac{([\alpha+1]_q-1)a+b}{[\alpha+1]_q}\right) \leq f(x)\text{'dir.} \quad (2.4)$$

Öte yandan her $t \in [0,1]$ için $(1-t)a+tb \in [a,b]$'dir. O halde her $t \in [0,1]$ ve $m \in \left[f'_-\left(\frac{([\alpha+1]_q-1)a+b}{[\alpha+1]_q}\right), f'_+\left(\frac{([\alpha+1]_q-1)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)\right]$ için

$$A\big((1-t)a+tb\big) = f\left(\frac{([\alpha+1]_q-1)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)$$
$$+m\left((1-t)a+tb - \frac{([\alpha+1]_q-1)a+b}{[\alpha+1]_q}\right) \leq f\big((1-t)a+tb\big)'\text{dir.} \quad (2.5)$$

Diğer taraftan (1.67) ve (1.68)'den her $\alpha > 0$ için $\Gamma_q(\alpha) > 0$, $\Gamma_q(\alpha+1) > 0$ ve $\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)} > 0$ olduğu açıktır. Ayrıca (1.75)'ten her $t \in [0,1]$ için

$$_0\big(1 - {}_0\phi_q(t)\big)_q^{(\alpha-1)} = (1-qt)^{(\alpha-1)} = 1^{\alpha-1}\prod_{i=0}^{+\infty}\frac{1-tq^{i+1}}{1-tq^{\alpha+i}} > 0\text{'dir.}$$

O halde $\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}\,{}_0\big(1 - {}_0\phi_q(t)\big)_q^{(\alpha-1)} > 0$'dir. (2.5) eşitsizliğinin her iki yanı $\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}\,{}_0\big(1 - {}_0\phi_q(t)\big)_q^{(\alpha-1)}$ ile çarpılıp $\alpha > 0$ için t'ye göre $[0,1]$ aralığında q-integrali alınırsa:

$$\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 {}_0\big(1 - {}_0\phi_q(t)\big)_q^{(\alpha-1)} A\big((1-t)a+tb\big)\, {}_0d_qt$$
$$\leq \frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 {}_0\big(1 - {}_0\phi_q(t)\big)_q^{(\alpha-1)} f\big((1-t)a+tb\big)\, {}_0d_qt\text{'dir.} \quad (2.6)$$

İlk olarak eşitsizliğin sol tarafındaki integrali hesaplayalım:

$$\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 {}_0\big(1 - {}_0\phi_q(t)\big)_q^{(\alpha-1)} A\big((1-t)a+tb\big)\, {}_0d_qt$$

$$=\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha-1)}\left[\begin{array}{c} f\left(\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right) \\ +m\left((1-t)a+tb-\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)\end{array}\right]{}_0d_qt$$

$$=\left[\begin{array}{c} \frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}f\left(\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)\int_0^1 {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha-1)}{}_0d_qt \\ +\Gamma_q(\alpha+1)m\left(\begin{array}{c} \frac{a}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha-1)}(1-t)\ {}_0d_qt \\ +\frac{b}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha-1)}t\ {}_0d_qt \\ -\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\int_0^1 {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha-1)}{}_0d_qt\end{array}\right)\end{array}\right]. \quad (2.7)$$

Diğer taraftan $n^{(\gamma)}=n^{\gamma}$, $(n-m)^{(0)}=1$, (1.68) , (1.72) ve (1.86)’dan

$$\int_0^1 {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha-1)}{}_0d_qt=\int_0^1 t^{(0)}\,{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha-1)}{}_0d_qt$$

$$=\int_0^1 t^{(1-1)}\,{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha-1)}{}_0d_qt=B_q(1,\alpha)=\frac{\Gamma_q(1)\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(1+\alpha)}.$$

Ayrıca

$$\Gamma_q(1)=\frac{(1-q)^{(1-1)}}{(1-q)^{1-1}}=\frac{(1-q)^{(0)}}{(1-q)^{0}}=\frac{1}{1}=1$$

olduğundan

$$\int_0^1 {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha-1)}{}_0d_qt=\frac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(1+\alpha)}\text{'dir.} \quad (2.8)$$

Öte yandan

$$\int_0^1 {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha-1)}t\ {}_0d_qt=\int_0^1 t^{1}\,{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha-1)}\ {}_0d_qt$$

$$=\int_0^1 t^{(1)}\,{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha-1)}\ {}_0d_qt=\int_0^1 t^{(2-1)}\,{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha-1)}\ {}_0d_qt$$

$$= B_q(2,\alpha) = \frac{\Gamma_q(2)\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(2+\alpha)}.$$

Ayrıca (1.30) ve (1.69)'dan ($\Gamma_q(1) = 1$ olduğundan)

$$\Gamma_q(2) = [1]_q\Gamma_q(1) = \frac{1-q^1}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1.$$

olduğundan

$$\int_0^1 {}_0\big(1 - {}_0\phi_q(t)\big)_q^{(\alpha-1)}\, t\ {}_0d_qt = \frac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(2+\alpha)}\text{'dir.} \tag{2.9}$$

Açıkça (2.8) ve (2.9)'dan

$$\int_0^1 {}_0\big(1 - {}_0\phi_q(t)\big)_q^{(\alpha-1)}\,(1-t)\ {}_0d_qt = B_q(1,\alpha) - B_q(2,\alpha)$$

$$= \frac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(1+\alpha)} - \frac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(2+\alpha)}\text{'dir.} \tag{2.10}$$

O halde (2.7)'da (2.8),(2.9) ve (2.10) kullanılırsa

$$\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 {}_0\big(1 - {}_0\phi_q(t)\big)_q^{(\alpha-1)}\, A\big((1-t)a+tb\big)\ {}_0d_qt$$

$$= \left[\begin{array}{c} \dfrac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)} f\left(\dfrac{\big([\alpha+1]_q-1\big)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)\dfrac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(1+\alpha)} \\ +\Gamma_q(\alpha+1)m\left(\begin{array}{c} \dfrac{a}{\Gamma_q(\alpha)}\left(\dfrac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(1+\alpha)} - \dfrac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(2+\alpha)}\right) \\ +\dfrac{b}{\Gamma_q(\alpha)}\dfrac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(1+\alpha)} \\ -\dfrac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\dfrac{\big([\alpha+1]_q-1\big)a+b}{[\alpha+1]_q}\dfrac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(1+\alpha)} \end{array}\right) \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c} f\left(\dfrac{\big([\alpha+1]_q-1\big)a+b}{[\alpha+1]_q}\right) \\ +\Gamma_q(\alpha+1)m\left(\begin{array}{c} a\left(\dfrac{1}{\Gamma_q(1+\alpha)} - \dfrac{1}{\Gamma_q(2+\alpha)}\right) \\ +\dfrac{b}{\Gamma_q(1+\alpha)} \\ -\dfrac{\big([\alpha+1]_q-1\big)a+b}{[\alpha+1]_q\Gamma_q(1+\alpha)} \end{array}\right) \end{array}\right]$$

($\Gamma_q(2+\alpha) = [1+\alpha]_q\Gamma_q(1+\alpha)$ olduğundan)

$$=\begin{bmatrix} f\left(\dfrac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right) \\ +\Gamma_q(\alpha+1)m\left(\begin{array}{c}\dfrac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a}{\Gamma_q(2+\alpha)}+\dfrac{b}{\Gamma_q(1+\alpha)} \\ -\dfrac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q\Gamma_q(1+\alpha)}\end{array}\right)\end{bmatrix}$$

$$=f\left(\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)\text{'dir.} \tag{2.11}$$

İkinci olarak (2.6)'nin sağ tarafındaki integrali hesaplayalım. Uyarı 1.6.12'den

$$\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha-1)} f\left((1-t)a+tb\right)\,{}_0d_qt$$

$$=\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}(1-q)(1-0)$$

$$\times\sum_{i=0}^{\infty}q^i\,{}_0\left(1-{}_0\phi_q\left({}_0\phi_q^i(1)\right)\right)_q^{(\alpha-1)} f\left(\left(1-{}_0\phi_q^i(1)\right)a+{}_0\phi_q^i(1)b\right)$$

$$=\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}(1-q)\sum_{i=0}^{\infty}q^i\,{}_0\left(1-{}_0\phi_q^{i+1}(1)\right)_q^{(\alpha-1)} f\left(\left(1-q^i\right)a+q^ib\right)$$

Özellikler 1.6.11 1. madde, Özellikler 1.6.14 3. madde ve (1.80)'den

$$=\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}(1-q)\sum_{i=0}^{\infty}q^i\,(1-0)^{\alpha-1}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{\left(q^{\alpha-1+i+1};q\right)_\infty}f\left({}_a\phi_q^i(b)\right)$$

$$=\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}(1-q)\sum_{i=0}^{\infty}q^i\,\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{\left(q^{(\alpha-1)+(i+1)};q\right)_\infty}f\left({}_a\phi_q^i(b)\right)$$

$$=\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left(\frac{(1-q)(b-a)}{\Gamma_q(\alpha)}\sum_{i=0}^{\infty}q^i(b-a)^{\alpha-1}\,\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{\left(q^{(\alpha-1)+(i+1)};q\right)_\infty}f\left({}_a\phi_q^i(b)\right)\right)$$

$$=\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left(\frac{(1-q)(b-a)}{\Gamma_q(\alpha)}\sum_{i=0}^{\infty}q^i\,{}_a\left(b-{}_a\phi_q^{i+1}(b)\right)_q^{(\alpha-1)}f\left({}_a\phi_q^i(b)\right)\right)$$

$$=\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left(\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_a^b {}_a\left(b-{}_a\phi_q(s)\right)_q^{(\alpha-1)}f(s)\,{}_ad_qs\right)$$

$$=\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left(\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b)\right)\text{'dir.} \tag{2.12}$$

O halde (2.6), (2.11) ve (2.12)'den

$$f\left(\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right) \le \frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left({}_aI_q^{\alpha}f\right)(b)'\text{dir.} \tag{2.13}$$

Diğer taraftan f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan (1.1)'den her $t \in [0,1]$ için

$$f\big((1-t)a+tb\big) \le (1-t)f(a)+tf(b)\,'\text{dir.} \tag{2.14}$$

(2.14) eşitsizliğinin her iki yanı $\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}\,{}_0\big(1-{}_0\phi_q(t)\big)_q^{(\alpha-1)}$ ile çarpılıp $\alpha>0$ için t'ye göre $[0,1]$ aralığında q-integrali alınırsa:

$$\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 {}_0\big(1-{}_0\phi_q(t)\big)_q^{(\alpha-1)} f\big((1-t)a+tb\big)\,{}_0d_qt$$

$$\le \frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 {}_0\big(1-{}_0\phi_q(t)\big)_q^{(\alpha-1)}\big((1-t)f(a)+tf(b)\big)\,{}_0d_qt\,'\text{dir.} \tag{2.15}$$

Ayrıca (2.9) ve (2.10)'dan

$$\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 {}_0\big(1-{}_0\phi_q(t)\big)_q^{(\alpha-1)}\big((1-t)f(a)+tf(b)\big)\,{}_0d_qt$$

$$= \frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}\left[f(a)\int_0^1 {}_0\big(1-{}_0\phi_q(t)\big)_q^{(\alpha-1)}(1-t)\,{}_0d_qt\right.$$

$$\left. + f(b)\int_0^1 {}_0\big(1-{}_0\phi_q(t)\big)_q^{(\alpha-1)}t\,{}_0d_qt\right]$$

$$= \frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}\left[f(a)\left(\frac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(1+\alpha)}-\frac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(2+\alpha)}\right)+f(b)\frac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(2+\alpha)}\right]$$

$$= \frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha)}\left[f(a)\left(\frac{\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(1+\alpha)}-\frac{\Gamma_q(\alpha)}{[1+\alpha]_q\Gamma_q(1+\alpha)}\right)+f(b)\frac{\Gamma_q(\alpha)}{[1+\alpha]_q\Gamma_q(1+\alpha)}\right]$$

$$= \left[f(a)\left(1-\frac{1}{[1+\alpha]_q}\right)+f(b)\frac{1}{[1+\alpha]_q}\right]$$

$$= \frac{\big([\alpha+1]_q-1\big)f(a)+f(b)}{[\alpha+1]_q}\,'\text{dir.} \tag{2.16}$$

O halde (2.12), (2.15) ve (2.16)'dan

$$\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left({}_aI_q^{\alpha}f\right)(b) \le \frac{\big([\alpha+1]_q-1\big)f(a)+f(b)}{[\alpha+1]_q}\,'\text{dir.} \tag{2.17}$$

Son olarak (2.13) ve (2.17)'den (2.1) elde edilir.

Sonuç 2.1.2: Teorem 2.1.1'de aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1. $\alpha = 1$ alınırsa Teorem 1.5.25 elde edilir,

2. $q \to 1^-$ limit alınırsa Teorem 1.4.8 elde edilir,

3. $\alpha = 1$ ve $q \to 1^-$ limit alınırsa Teorem 1.2.3 elde edilir.

İspat:

1. $\alpha = 1$ alınırsa (1.30), (1.82) ve (1.87)'den

$$[\alpha+1]_q = [2]_q = \frac{1-q^2}{1-q} = 1+q'\text{dir.} \tag{2.18}$$

$$\Gamma_q(\alpha+1) = \Gamma_q(2) = [1]_q\Gamma_q(1) = \frac{1-q^1}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1'\text{dir.} \tag{2.19}$$

$$\left({}_aI_q^1 f\right)(b) = \frac{1}{\Gamma_q(1)}\int_a^b {}_a\left(b - {}_a\phi_q(s)\right)_q^{(1-1)} f(s)\,{}_ad_qs$$

$$= \int_a^b {}_a\left(b - {}_a\phi_q(s)\right)_q^{(0)} f(s)\,{}_ad_qs = \int_a^b f(s)\,{}_ad_qs\,'\text{dir.} \tag{2.20}$$

O halde (2.1)'de (2.18), (2.19) ve (2.20) kullanılırsa

$$f\left(\frac{qa+b}{1+q}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)\,{}_ad_qs \le \frac{qf(a)+f(b)}{1+q}$$

elde edilir.

2. $q \to 1^-$ limit alınırsa

$$\lim_{q\to1^-}[\alpha+1]_q = \lim_{q\to1^-}\frac{1-q^{\alpha+1}}{1-q} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{q\to1^-}\frac{-(\alpha+1)q^\alpha}{-1} = \alpha+1'\text{dir} \tag{2.21}$$

(1.70)'ten

$$\lim_{q\to1^-}\Gamma_q(\alpha+1) = \Gamma(\alpha+1)'\text{dir.} \tag{2.22}$$

(1.76), Özellikler 1.6.11 4. madde ve Özellikler 1.6.14 2. madde'den

$$\lim_{q\to1^-} {}_a\left(b - {}_a\phi_q(s)\right)_q^{(\alpha-1)} = \lim_{q\to1^-}(b-a)^{\alpha-1}\frac{\left(\frac{{}_a\phi_q(s)-a}{b-a};q\right)_\infty}{\left(\frac{{}_a\phi_q(s)-a}{b-a}q^{\alpha-1};q\right)_\infty}$$

$$= (b-a)^{\alpha-1}\lim_{q\to1^-}\frac{\left(\frac{s-a}{b-a}q;q\right)_\infty}{\left(\frac{s-a}{b-a}q^\alpha;q\right)_\infty} = (b-a)^{\alpha-1}\left(1-\frac{s-a}{b-a}\right)^{\alpha-1}$$

$$= (b-a)^{\alpha-1}\left(\frac{b-s}{b-a}\right)^{\alpha-1} = (b-s)^{\alpha-1}\text{'dir.} \tag{2.23}$$

(136)'dan

$$\lim_{q\to 1^-}\int_0^b f(t)\, d_q t = \int_0^b f(t)\, dt$$

olduğundan (1.33) ve (1.41)'den

$$\lim_{q\to 1^-}\int_a^b f(t)\ {}_a d_q t = \lim_{q\to 1^-}(1-q)(b-a)\sum_{n=0}^{+\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a)$$

$$= (b-a)\lim_{q\to 1^-}(1-q)\sum_{n=0}^{+\infty} q^n f(q^n b + (1-q^n)a)$$

$$= (b-a)\lim_{q\to 1^-}\int_0^1 f(tb+(1-t)a)\ {}_0 d_q t$$

$$= (b-a)\int_0^1 f(tb+(1-t)a)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt\text{'dir.} \tag{2.24}$$

(1.14), (1.70), (1.87), (2.23) ve (2.24)'den

$$\lim_{q\to 1^-}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b) = \lim_{q\to 1^-}\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_a^b {}_a\left(b - {}_a\phi_q(s)\right)_q^{(\alpha-1)} f(s)\,{}_a d_q s$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-s)^{\alpha-1} f(s) ds = (J_{a+}^\alpha f)(b)\text{ 'dir.} \tag{2.25}$$

O halde (2.21), (2.22) ve (2.25)'ten

$$f\left(\frac{\alpha a + b}{\alpha+1}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}(J_{a+}^\alpha f)(b) \le \frac{\alpha f(a) + f(b)}{\alpha+1}\text{'dir.}$$

elde edilir.

3. 1. madde'de $q \to 1^-$ limit alınırsa f sürekli olduğundan (2.24)'den

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\text{'dir.}$$

2.2. Riemann-Liouville Kesirli Kuantum Trapezoid Tipli İntegral Eşitsizlikler

Bu bölümde Riemann-Liouville kesirli q- Trapezoid tipli eşitsizlikler incelenecektir. Bunun için aşağıdaki eşitlikten faydalanılacaktır.

Lemma 2.2.1: $\alpha > 0$, $a < b$, $0 < q < 1$ ve $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve (a, b)'de q-türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer${}_aD_qf$, (a, b) aralığında sürekli q-integrallenebilir ise aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b) - \frac{\left([\alpha+1]_q - 1\right)f(a) + f(b)}{[\alpha+1]_q}$$

$$= \frac{b-a}{[\alpha+1]_q}\int_0^1 \left([\alpha+1]_q\ {}_0\!\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1\right) {}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right) {}_0d_qt. \quad (2.26)$$

İspat: Teorem 1.5.20 1. madde'den $[0,1]$ aralığındaki q-integrali lineer olduğunda (2.26) eşitliğin sağ tarafındaki q-integral göz önüne alınırsa:

$$\frac{b-a}{[\alpha+1]_q}\int_0^1 \left([\alpha+1]_q\ {}_0\!\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1\right) {}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right) {}_0d_qt$$

$$= (b-a)\int_0^1 {}_0\!\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\ {}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right) {}_0d_qt$$

$$-\frac{b-a}{[\alpha+1]_q}\int_0^1 {}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right) {}_0d_qt\text{'dir.} \quad (2.27)$$

(2.27)'deki q-integralleri hesaplamak için Tanım 1.5.11'den faydalanırsa:

$$K_1 := (b-a)\int_0^1 {}_0\!\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\ {}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right) {}_0d_qt$$

$$= (b-a)\int_0^1 {}_0\!\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} \frac{f\left((1-t)a+tb\right) - f\left(q\left((1-t)a+tb\right) + (1-q)a\right)}{(1-q)\left((1-t)a+tb-a\right)} {}_0d_qt$$

$$= (b-a)\int_0^1 {}_0\!\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} \frac{f\left((1-t)a+tb\right) - f\left((1-qt)a+qtb\right)}{(1-q)(b-a)t} {}_0d_qt$$

$$= \int_0^1 {}_0\!\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} \frac{f\left((1-t)a+tb\right) - f\left((1-qt)a+qtb\right)}{(1-q)t} {}_0d_qt$$

$$=\frac{1}{(1-q)}\int_{0}^{1}{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\frac{f\big((1-t)a+tb\big)}{t}\,{}_{0}d_qt$$

$$-\frac{1}{(1-q)}\int_{0}^{1}{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\frac{f\big((1-qt)a+qtb\big)}{t}\,{}_{0}d_qt$$

(Burada Tanım 1.6.15 kullanılırsa)

$$=\frac{1}{(1-q)}(1-q)\sum_{i=0}^{\infty}q^i\,{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q^{i+1}(1)\right)_q^{(\alpha)}\frac{f\left(\left(1-{}_{0}\phi_q^{i}(1)\right)a+{}_{0}\phi_q^{i}(1)b\right)}{{}_{0}\phi_q^{i}(1)}$$

$$-\frac{1}{(1-q)}(1-q)\sum_{i=0}^{\infty}q^i\,{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q^{i+1}(1)\right)_q^{(\alpha)}\frac{f\left(\left(1-q\,{}_{0}\phi_q^{i}(1)\right)a+q\,{}_{0}\phi_q^{i}(1)b\right)}{{}_{0}\phi_q^{i}(1)}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}q^i\,{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q^{i+1}(1)\right)_q^{(\alpha)}\frac{f\left(\left(1-q^i\right)a+q^ib\right)}{q^i}$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty}q^i\,{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q^{i+1}(1)\right)_q^{(\alpha)}\frac{f\left(\left(1-q^{i+1}\right)a+q^{i+1}b\right)}{q^i}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q^{i+1}(1)\right)_q^{(\alpha)}f\left(\left(1-q^i\right)a+q^ib\right)$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty}{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q^{i+1}(1)\right)_q^{(\alpha)}f\left(\left(1-q^{i+1}\right)a+q^{i+1}b\right)$$

(Burada Özellikler 1.6.14 3. madde kullanılırsa)

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{\left(q^{\alpha+i+1};q\right)_\infty}f\left(\left(1-q^i\right)a+q^ib\right)$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{\left(q^{\alpha+i+1};q\right)_\infty}f\left(\left(1-q^{i+1}\right)a+q^{i+1}b\right)$$

(Burada Tanım 1.6.4 kullanılırsa)

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-q^{n+\alpha+i+1}\right)}f\left(\left(1-q^i\right)a+q^ib\right)$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-q^{n+i+1}\right)}{\left(q^{\alpha+i+1};q\right)_\infty}f\left(\left(1-q^{i+1}\right)a+q^{i+1}b\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\left(1-q^{\alpha+i}\right)\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{\prod_{n=-1}^{\infty}\left(1-q^{n+\alpha+i+1}\right)}f\left(\left(1-q^i\right)a+q^ib\right)$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty}\left(1-q^{i+1}\right)\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n+i+1}\right)}{(q^{\alpha+i+1};q)_{\infty}}\,f\left(\left(1-q^{i+1}\right)a+q^{i+1}b\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\left(1-q^{\alpha+i}\right)\frac{\left(q^{i+1};q\right)_{\infty}}{\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{n+\alpha+i})}\,f\left(\left(1-q^{i}\right)a+q^{i}b\right)$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty}\left(1-q^{i+1}\right)\frac{\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-q^{n+i+2}\right)}{(q^{\alpha+i+1};q)_{\infty}}\,f\left(\left(1-q^{i+1}\right)a+q^{i+1}b\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\left(1-q^{\alpha+i}\right)\frac{\left(q^{i+1};q\right)_{\infty}}{(q^{\alpha+i};q)_{\infty}}\,f\left(\left(1-q^{i}\right)a+q^{i}b\right)$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty}\left(1-q^{i+1}\right)\frac{\left(q^{i+2};q\right)_{\infty}}{(q^{\alpha+i+1};q)_{\infty}}\,f\left(\left(1-q^{i+1}\right)a+q^{i+1}b\right)$$

$$=\begin{bmatrix}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_{\infty}}{(q^{\alpha+i};q)_{\infty}}\,f\left(\left(1-q^{i}\right)a+q^{i}b\right)\\ \displaystyle-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(q^{i+2};q\right)_{\infty}}{(q^{\alpha+i+1};q)_{\infty}}\,f\left(\left(1-q^{i+1}\right)a+q^{i+1}b\right)\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}q^{\alpha+i}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_{\infty}}{(q^{\alpha+i};q)_{\infty}}\,f\left(\left(1-q^{i}\right)a+q^{i}b\right)\\ \displaystyle-\sum_{i=0}^{\infty}q^{i+1}\frac{\left(q^{i+2};q\right)_{\infty}}{(q^{\alpha+i+1};q)_{\infty}}\,f\left(\left(1-q^{i+1}\right)a+q^{i+1}b\right)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_{\infty}}{(q^{\alpha+i};q)_{\infty}}\,f\left(\left(1-q^{i}\right)a+q^{i}b\right)-\frac{\left(q^{i+2};q\right)_{\infty}}{(q^{\alpha+i+1};q)_{\infty}}\,f\left(\left(1-q^{i+1}\right)a+q^{i+1}b\right)\right]$$

$$-\begin{bmatrix}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}q^{\alpha+i}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_{\infty}}{(q^{\alpha+i};q)_{\infty}}\,f\left(\left(1-q^{i}\right)a+q^{i}b\right)\\ \displaystyle-\sum_{i=1}^{\infty}q^{i}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_{\infty}}{(q^{\alpha+i};q)_{\infty}}\,f\left(\left(1-q^{i}\right)a+q^{i}b\right)\end{bmatrix}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_{\infty}}{(q^{\alpha+i};q)_{\infty}}\,f\left(\left(1-q^{i}\right)a+q^{i}b\right)-\sum_{i=0}^{n}\frac{\left(q^{i+2};q\right)_{\infty}}{(q^{\alpha+i+1};q)_{\infty}}\,f\left(\left(1-q^{i+1}\right)a+q^{i+1}b\right)\right]$$

$$-\left[\begin{array}{r}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} q^{\alpha+i}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{(q^{\alpha+i};q)_\infty}\, f\left(\left(1-q^i\right)a+q^i b\right)\\ \displaystyle-\sum_{i=0}^{\infty} q^{i}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{(q^{\alpha+i};q)_\infty}\, f\left(\left(1-q^i\right)a+q^i b\right)\\ \displaystyle+\frac{(q;q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty}\, f(b)\end{array}\right]$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(q;q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty}\, f(b)-\frac{(q^{n+2};q)_\infty}{(q^{\alpha+n+1};q)_\infty}\, f\left((1-q^{n+1})a+q^{n+1}b\right)\right]\right]$$

$$-\left[\begin{array}{r}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} q^{\alpha+i}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{(q^{\alpha+i};q)_\infty}\, f\left(\left(1-q^i\right)a+q^i b\right)\\ \displaystyle-\sum_{i=0}^{\infty} q^{i}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{(q^{\alpha+i};q)_\infty}\, f\left(\left(1-q^i\right)a+q^i b\right)\\ \displaystyle+\frac{(q;q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty}\, f(b)\end{array}\right]$$

$$=\left[\frac{(q;q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty}\, f(b)-\frac{(0;q)_\infty}{(0;q)_\infty}\, f(a)\right]$$

$$-\left[\begin{array}{r}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} q^{\alpha+i}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{(q^{\alpha+i};q)_\infty}\, f\left(\left(1-q^i\right)a+q^i b\right)\\ \displaystyle-\sum_{i=0}^{\infty} q^{i}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{(q^{\alpha+i};q)_\infty}\, f\left(\left(1-q^i\right)a+q^i b\right)\\ \displaystyle+\frac{(q;q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty}\, f(b)\end{array}\right]$$

(Burada Tanım 1.6.4'ten $(0;q)_\infty=1$ olduğu açıktır)

$$=-f(a)-\sum_{i=0}^{\infty} q^{\alpha+i}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{(q^{\alpha+i};q)_\infty}\, f\left(\left(1-q^i\right)a+q^i b\right)$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty} q^{i}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{(q^{\alpha+i};q)_\infty}\, f\left(\left(1-q^i\right)a+q^i b\right)$$

$$=-f(a)+(1-q^\alpha)\sum_{i=0}^{\infty} q^{i}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{(q^{\alpha+i};q)_\infty}\, f\left(\left(1-q^i\right)a+q^i b\right)$$

$$=-f(a)+[\alpha]_q(1-q)\sum_{i=0}^{\infty} q^{i}\frac{\left(q^{i+1};q\right)_\infty}{(q^{\alpha+i};q)_\infty}\, f\left(\left(1-q^i\right)a+q^i b\right)$$

$$= -f(a) + \frac{[\alpha]_q \Gamma_q(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}} \left(\frac{(1-q)(b-a)}{\Gamma_q(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} q^i (b-a)^{\alpha-1} \frac{(q^{i+1};q)_\infty}{(q^{\alpha+i};q)_\infty} f\left(\left(1-q^i\right)a + q^i b\right) \right)$$

$$\overset{(2.12)}{=} \quad -f(a) + \frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left(\left({}_a I_q^{\alpha} f \right)(b) \right)$$

Şimdi (2.27)'deki 2. q-integrali hesaplayalım. Tanım 1.5.7 ve Tanım 1.5.11 kullanılırsa:

$$K_2 := \frac{b-a}{[\alpha+1]_q} \int_0^1 {}_a D_q f\big((1-t)a + tb\big)\, {}_0 d_q t$$

(Burada (1.40) kullanılırsa)

$$= \frac{(b-a)(1-q)}{1-q^{\alpha+1}} \int_0^1 \frac{f\big((1-t)a+tb\big) - f\big(q\big((1-t)a+tb\big) + (1-q)a\big)}{(1-q)\big((1-t)a+tb-a\big)}\, {}_0 d_q t$$

$$= \frac{(b-a)(1-q)}{1-q^{\alpha+1}} \int_0^1 \frac{f\big((1-t)a+tb\big) - f\big((1-qt)a+qtb\big)}{(1-q)(b-a)t}\, {}_0 d_q t$$

$$= \frac{1}{1-q^{\alpha+1}} \int_0^1 \frac{f\big((1-t)a+tb\big) - f\big((1-qt)a+qtb\big)}{t}\, {}_0 d_q t$$

$$= \frac{1}{1-q^{\alpha+1}} \left[\int_0^1 \frac{f\big((1-t)a+tb\big)}{t}\, {}_0 d_q t - \int_0^1 \frac{f\big((1-qt)a+qtb\big)}{t}\, {}_0 d_q t \right]$$

$$= \frac{1-q}{1-q^{\alpha+1}} \left[\sum_{i=0}^{\infty} q^i \frac{f\left(\left(1-q^i\right)a+q^i b\right)}{q^i} - \sum_{i=0}^{\infty} q^i \frac{f\left(\left(1-q^{i+1}\right)a+q^{i+1} b\right)}{q^i} \right]$$

$$= \frac{1}{[\alpha+1]_q} \left[\sum_{i=0}^{\infty} f\left(\left(1-q^i\right)a+q^i b\right) - \sum_{i=0}^{\infty} f\left(\left(1-q^{i+1}\right)a+q^{i+1} b\right) \right]$$

$$= \frac{1}{[\alpha+1]_q} \left[\lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=0}^{n} f\left(\left(1-q^i\right)a+q^i b\right) - \sum_{i=0}^{n} f\left(\left(1-q^{i+1}\right)a+q^{i+1} b\right) \right] \right]$$

$$= \frac{1}{[\alpha+1]_q} \left[\lim_{n\to\infty} \left[f(b) - f\big((1-q^{n+1})a + q^{n+1} b\big) \right] \right]$$

$$= \frac{f(b)-f(a)}{[\alpha+1]_q}\text{'dir.}$$

(2.27)'de K_1 ve K_2 yerine yazılırsa

$$\frac{b-a}{[\alpha+1]_q}\int_0^1\left([\alpha+1]_q\ {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}-1\right){}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right){}_0d_qt$$

$$=K_1-K_2$$

$$=-f(a)+\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left(\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b)\right)-\frac{f(b)-f(a)}{[\alpha+1]_q}$$

$$=\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b)-\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)f(a)+f(b)}{[\alpha+1]_q}\text{'dir.}$$

Sonuç 2.2.2: Lemma 2.2.1'de aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1. $\alpha=1$ alınırsa Lemma 1.5.26 elde edilir,

2. $q\to 1^-$ limit alınırsa Lemma 1.4.9 elde edilir,

3. $\alpha=1$ ve $q\to 1^-$ limit alınırsa Lemma 1.3.1 elde edilir.

İspat:

1. Sonuç 2.1.2 1. madde'den (2.26)'nin sol tarafı

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ {}_ad_q\,t-\frac{qf(a)+f(b)}{1+q}$$

olduğu açıktır. $[2]_q=1+q,\quad {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(1)}={}_0(1-qt)_q^{(1)}=1-qt$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ {}_ad_q\,t-\frac{qf(a)+f(b)}{1+q}$$

$$=\frac{(b-a)}{1+q}\int_0^1\left((1+q)(1-qt)-1\right){}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right){}_0d_qt$$

$$=\frac{q(b-a)}{1+q}\int_0^1(1-(1+q)t)\ {}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right){}_0d_qt.$$

2. Sonuç 2.1.2 2. madde'den (2.26)'nin sol tarafı

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}(J_{a+}^\alpha f)(b)-\frac{\alpha f(a)+f(b)}{\alpha+1}$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan (2.21)'den

$$\lim_{q\to 1^-}[\alpha+1]_q=\alpha+1\text{'dir.}$$

Ayrıca (2.23)'ten

$$\lim_{q\to 1^-} {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} = (1-t)^{\alpha}\text{'dir.}$$

olduğu göz önüne alınırsa (1.36)'dan

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left(J_{a+}^{\alpha}f\right)(b) - \frac{\alpha f(a)+f(b)}{\alpha+1}$$

$$= \frac{b-a}{\alpha+1}\int_0^1 \left((\alpha+1)(1-t)^{\alpha}-1\right) f'\big((1-t)a+tb\big)dt.$$

Burada $u = 1-t$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{\alpha f(a)+f(b)}{\alpha+1} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left(J_{a+}^{\alpha}f\right)(b)$$

$$= \frac{b-a}{\alpha+1}\int_0^1 \left(1-(\alpha+1)u^{\alpha}\right) f'(ua+(1-u)b)du.$$

3. 1. madde'de $q \to 1^-$ limit alınırsa (1.36) ve (2.24)'den ve ${}_aD_q f(1-t)a+tb \to f'\big((1-t)a+tb\big)$ olup

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt - \frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{(b-a)}{2}\int_0^1 (1-2t)\,f'\big((1-t)a+tb\big)dt.$$

Burada $u = 1-t$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2u)f'(ua+(1-u)b)du.$$

Teorem 2.2.3: $\alpha > 0$, $a < b$, $0 < q < 1$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli, (a,b)'de q-türevlenebilir bir fonksiyon ve ${}_aD_q f$, (a,b) aralığında sürekli q-integrallenebilir olsun. Eğer $\left|{}_aD_q f\right|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli q- Trapezoid tipli eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left({}_aI_q^{\alpha}f\right)(b) - \frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)f(a)+f(b)}{[\alpha+1]_q}\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{[\alpha+1]_q}\left[\left|{}_aD_q f(a)\right|M_1 + \left|{}_aD_q f(b)\right|M_2\right], \tag{2.28}$$

burada

$$M_1 = \int_0^1 \left|[\alpha+1]_q \, {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1\right|(1-t)_0 d_q t,$$

$$M_2 = \int_0^1 \left| [\alpha+1]_q \ {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1 \right| t\, {}_0d_q t \text{ 'dir.}$$

İspat: Lemma 2.2.1, $\left|{}_aD_q f\right|$'nin $[a,b]$ aralığında konveksliği ve (1.53) kullanılırsa:

$$\left|\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b) - \frac{\left([\alpha+1]_q - 1\right)f(a) + f(b)}{[\alpha+1]_q}\right|$$

$$= \left| \frac{b-a}{[\alpha+1]_q} \int_0^1 \left([\alpha+1]_q \ {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1 \right) {}_aD_q f\left((1-t)a + tb\right) {}_0d_q t \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{[\alpha+1]_q} \int_0^1 \left| \left([\alpha+1]_q \ {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1 \right) \right| \left| {}_aD_q f\left((1-t)a + tb\right) \right| {}_0d_q t$$

$$\leq \frac{b-a}{[\alpha+1]_q} \int_0^1 \left| \left([\alpha+1]_q \ {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1 \right) \right| \begin{bmatrix} \left|{}_aD_q f(a)\right|(1-t) \\ +\left|{}_aD_q f(b)\right| t \end{bmatrix} {}_0d_q t$$

$$= \frac{b-a}{[\alpha+1]_q} \begin{bmatrix} \left|{}_aD_q f(a)\right| \int_0^1 \left| \left([\alpha+1]_q \ {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1 \right) \right| (1-t)\, {}_0d_q t \\ +\left|{}_aD_q f(b)\right| \int_0^1 \left| \left([\alpha+1]_q \ {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1 \right) \right| t\, {}_0d_q t \end{bmatrix}$$

$$= \frac{b-a}{[\alpha+1]_q} \left[\left|{}_aD_q f(a)\right| M_1 + \left|{}_aD_q f(b)\right| M_2 \right] \text{'dir.}$$

Sonuç 2.2.4: Teorem 2.2.3'de aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1. $\alpha = 1$ alınırsa Teorem 1.5.30 elde edilir,

2. $q \to 1^-$ limit alınırsa Teorem 1.4.10 elde edilir,

3. $\alpha = 1$ ve $q \to 1^-$ limit alınırsa Teorem 1.3.2 elde edilir.

İspat:

1. Sonuç 2.1.2 1. madde'den (2.28)'in sol tarafı

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\ {}_ad_q\, t - \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} \right|$$

olduğu açıktır. Ayrıca (1.51)'den

$$M_1 = \int_0^1 \left|(1+q)\,(1-qt) - 1\right| (1-t)\, {}_0d_q t = q \int_0^1 \left|1 - (1+q)t\right| (1-t)\, {}_0d_q t$$

$$=\frac{q^2(1+3q^2+2q^3)}{(1+q+q^2)(1+q)^3}\text{'dir.}$$

(1.49)'dan

$$M_2=q\int_0^1|1-(1+q)t|t\ {}_0d_qt=\frac{q^2(1+4q+q^2)}{(1+q+q^2)(1+q)^3}\text{'dir.}$$

O halde

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ {}_ad_q\,t\ -\frac{qf(a)+f(b)}{1+q}\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{1+q}\left[\frac{q^2(1+3q^2+2q^3)}{(1+q+q^2)(1+q)^3}\left|{}_aD_qf(a)\right|+\frac{q^2(1+4q+q^2)}{(1+q+q^2)(1+q)^3}\left|{}_aD_qf(b)\right|\right].$$

2. Sonuç 2.1.2 2. madde'den (2.28)'nin sol tarafı

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}(J_{a+}^\alpha f)(b)-\frac{\alpha f(a)+f(b)}{\alpha+1}\right|$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan

$$M_1=\int_0^1|(\alpha+1)\,(1-t)^\alpha-1|\,(1-t)dt=\int_0^1|(\alpha+1)\,u^\alpha-1|\,u\,du$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha+1}}}(1-(\alpha+1)u^\alpha)\,u\,du+\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha+1}}}^1\big((\alpha+1)u^\alpha-1\big)\,u\,du$$

$$=T_1(\alpha)+T_3(\alpha)$$

$$M_2=\int_0^1|(\alpha+1)\,(1-t)^\alpha-1|\,tdt=\int_0^1|(\alpha+1)\,u^\alpha-1|\,(1-u)\,du$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha+1}}}(1-(\alpha+1)u^\alpha)(1-u)\,du+\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha+1}}}^1\big((\alpha+1)u^\alpha-1\big)(1-u)\,du$$

$$=T_2(\alpha)+T_4(\alpha).$$

Açık olarak ${}_aD_qf(a)\to f'(a)$ ve ${}_aD_qf(b)\to f'(b)$ olup

$$\left|\frac{\alpha f(a)+f(b)}{\alpha+1}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}(J_{a+}^\alpha f)(b)\right|\leq\frac{b-a}{\alpha+1}\begin{bmatrix}T_1(\alpha)|f'(a)|+T_2(\alpha)|f'(b)|\\+T_3(\alpha)|f'(a)|+T_4(\alpha)|f'(b)|\end{bmatrix}$$

elde edilir.

3. 1. madde'de $\boldsymbol{q \to 1^-}$ limit alınırsa (1.36) ve (2.24)'den, $\boldsymbol{{}_aD_qf(a) \to f'(a)}$ ve $\boldsymbol{{}_aD_qf(b) \to f'(b)}$ olup

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt - \frac{f(a)+f(b)}{2}\right| \leq \frac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.5: $\alpha > 0$, $a < b$, $0 < q < 1$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli, (a,b)'de q-türevlenebilir bir fonksiyon ve ${}_aD_qf$, (a,b) aralığında sürekli q-integrallenebilir olsun. Eğer $r \geq 1$ için $\left|{}_aD_qf\right|^r$, $[a,b]$ aralığında konveks ise aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli q- Trapezoid tipli eşitsizlik sağlanır:

$$\left.\begin{aligned}
&\left|\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b) - \frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)f(a)+f(b)}{[\alpha+1]_q}\right| \\
&\qquad \leq \frac{b-a}{[\alpha+1]_q}M_3^{1-\frac{1}{r}}\left[M_1\left|{}_aD_qf(a)\right|^r + M_2\left|{}_aD_qf(b)\right|^r\right]^{\frac{1}{r}} \\
&\text{burada } \mathrm{M}_1 \text{ ve } \mathrm{M}_2 \text{ 2.2.3 Teorem'deki katsayılar ve} \\
&\qquad M_3 = \int_0^1 \left|[\alpha+1]_q\ {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1\right|\ {}_0d_qt.
\end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

İspat: Lemma 2.2.1, $\left|{}_aD_qf\right|^r$'nin $[a,b]$ aralığında konveksliği, q-Power Mean eşitsizliği ve (1.53) kullanılırsa:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b) - \frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)f(a)+f(b)}{[\alpha+1]_q}\right| \\
&\quad = \left|\frac{b-a}{[\alpha+1]_q}\int_0^1 \left([\alpha+1]_q\ {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1\right){}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right){}_0d_qt\right| \\
&\quad \leq \frac{b-a}{[\alpha+1]_q}\int_0^1 \left|\left([\alpha+1]_q\ {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1\right)\right|\left|{}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right)\right|{}_0d_qt \\
&\quad \leq \frac{b-a}{[\alpha+1]_q}\left(\int_0^1 \left|\left([\alpha+1]_q\ {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1\right)\right|{}_0d_qt\right)^{1-\frac{1}{r}} \\
&\quad \times\left(\int_0^1 \left|\left([\alpha+1]_q\ {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1\right)\right|\left|{}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right)\right|^r{}_0d_qt\right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{b-a}{[\alpha+1]_q} M_3^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 \left| \left([\alpha+1]_q \, {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1 \right) \right| \begin{bmatrix} \left|{}_aD_q f(a)\right|^r (1-t) \\ + \left|{}_aD_q f(b)\right|^r t \end{bmatrix} {}_0d_q t \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \frac{b-a}{[\alpha+1]_q} M_3^{1-\frac{1}{r}} \begin{bmatrix} \left|{}_aD_q f(a)\right|^r \int_0^1 \left| \left([\alpha+1]_q \, {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1 \right) \right| (1-t) {}_0d_q t \\ + \left|{}_aD_q f(b)\right|^r \int_0^1 \left| \left([\alpha+1]_q \, {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)} - 1 \right) \right| t \, {}_0d_q t \end{bmatrix}^{\frac{1}{r}}$$

$$= \frac{b-a}{[\alpha+1]_q} M_3^{1-\frac{1}{r}} \left[M_1 \left|{}_aD_q f(a)\right|^r + M_2 \left|{}_aD_q f(b)\right|^r \right]^{\frac{1}{r}} \text{'dir.}$$

Sonuç 2.2.6: Teorem 2.2.5'te aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1. $\alpha = 1$ alınırsa Teorem 1.5.31 elde edilir,

2. $q \to 1^-$ limit alınırsa Teorem 1.4.11 elde edilir,

3. $\alpha = 1$ ve $q \to 1^-$ limit alınırsa Teorem 1.3.4 elde edilir.

İspat:

1. Sonuç 2.1.2 1. madde'den (2.29)'in sol tarafı

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, {}_ad_q \, t - \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} \right|$$

olduğu açıktır. Ayrıca (1.50)'den

$$M_3 = \int_0^1 |(1+q)\,(1-qt) - 1| \, {}_0d_q t = q \int_0^1 |1 - (1+q)t| \, {}_ad_q \, t = \frac{2q^2}{(1+q)^2},$$

$$M_1 = \frac{q^2(1+3q^2+2q^3)}{(1+q+q^2)(1+q)^3},$$

$$M_2 = \frac{q^2(1+4q+q^2)}{(1+q+q^2)(1+q)^3},$$

olduğundan

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, {}_ad_q \, t - \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} \right| \leq \frac{b-a}{1+q} \left(\frac{2q^2}{(1+q)^2} \right)^{1-\frac{1}{r}}$$

$$\times \left[\frac{q^2(1+3q^2+2q^3)}{(1+q+q^2)(1+q)^3} \left|{}_aD_q f(a)\right|^r \frac{q^2(1+4q+q^2)}{(1+q+q^2)(1+q)^3} \left|{}_aD_q f(b)\right|^r \right]^{\frac{1}{r}}.$$

2. Sonuç 2.1.2 2. madde'den (2.29)'nin sol tarafı

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}(J_{a+}^{\alpha}f)(b)-\frac{\alpha f(a)+f(b)}{\alpha+1}\right|$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan

$$M_3=\int_0^1 |(\alpha+1)\,(1-t)^{\alpha}-1|\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha+1}}}(1-(\alpha+1)t^{\alpha})dt+\int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha+1}}}^{1}\big((\alpha+1)t^{\alpha}-1\big)dt=$$

$$=\left[\frac{\alpha}{(\alpha+1)^{1+\frac{1}{\alpha}}}+\frac{\alpha}{(\alpha+1)^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right]=\frac{2\alpha}{(\alpha+1)^{1+\frac{1}{\alpha}}}$$

$M_1=T_1(\alpha)+T_3(\alpha)$

$M_2=T_2(\alpha)+T_4(\alpha).$

Açık olarak ${}_aD_qf(a)\to f'(a)$ ve ${}_aD_qf(b)\to f'(b)$ olup

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}(J_{a+}^{\alpha}f)(b)-\frac{\alpha f(a)+f(b)}{\alpha+1}\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{\alpha+1}\left(\frac{2\alpha}{(\alpha+1)^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right)^{1-\frac{1}{r}}\left(\begin{matrix}T_1(\alpha)|f'(a)|^r+T_2(\alpha)|f'(b)|^r\\+T_3(\alpha)|f'(a)|^r+T_4(\alpha)|f'(b)|^r\end{matrix}\right)^{\frac{1}{r}}$$

3. 1. madde'de $\boldsymbol{q\to 1^-}$ limit alınırsa (1.36) ve (2.24)'den, $\boldsymbol{{}_aD_qf(a)\to f'(a)}$ ve $\boldsymbol{{}_aD_qf(b)\to f'(b)}$ olup

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\leq\frac{(b-a)}{4}\left(\frac{|f'(a)|^r+|f'(b)|^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.7: $\alpha>0$, $a<b$, $0<q<1$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli, (a,b)'de q-türevlenebilir bir fonksiyon ve ${}_aD_qf$, (a,b) aralığında sürekli q-integrallenebilir olsun. Eğer $p,r>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=1$ için $\left|{}_aD_qf\right|^r$, $[a,b]$ aralığında konveks ise aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli q- Trapezoid tipli eşitsizlik sağlanır:

$$\left.\begin{array}{l}\left|\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b)-\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)f(a)+f(b)}{[\alpha+1]_q}\right| \\ \qquad\qquad \leq \frac{b-a}{[\alpha+1]_q}M_4^{\frac{1}{p}}\left[\frac{q\left|{}_aD_qf(a)\right|^r+\left|{}_aD_qf(b)\right|^r}{1+q}\right]^{\frac{1}{r}} \\ \text{burada} \\ \qquad M_4=\int_0^1\left|[\alpha+1]_q\ {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}-1\right|^P {}_0d_qt.\end{array}\right\}. \tag{2.30}$$

İspat: Lemma 2.2.1, $\left|{}_aD_qf\right|^r$'nin $[a,b]$ aralığında konveksliği, q-Hölder eşitsizliği ve (1.53) kullanılırsa:

$$\left|\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b)-\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)f(a)+f(b)}{[\alpha+1]_q}\right|$$

$$=\left|\frac{b-a}{[\alpha+1]_q}\int_0^1\left([\alpha+1]_q\ {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}-1\right){}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right){}_0d_qt\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{[\alpha+1]_q}\int_0^1\left|\left([\alpha+1]_q\ {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}-1\right)\right|\left|{}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right)\right|{}_0d_qt$$

$$\leq\frac{b-a}{[\alpha+1]_q}\left(\int_0^1\left|\left([\alpha+1]_q\ {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}-1\right)\right|^p{}_0d_qt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left|{}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right)\right|^r{}_0d_qt\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq\frac{b-a}{[\alpha+1]_q}M_4^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left[\left|{}_aD_qf(a)\right|^r(1-t)+\left|{}_aD_qf(b)\right|^rt\right]{}_0d_qt\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$=\frac{b-a}{[\alpha+1]_q}M_4^{\frac{1}{p}}\left[\left|{}_aD_qf(a)\right|^r\int_0^1(1-t){}_0d_qt+\left|{}_aD_qf(b)\right|^r\int_0^1 t\ {}_0d_qt\right]^{\frac{1}{r}}$$

$\int_0^1(1-t){}_0d_qt=\frac{q}{1+q}$ ve $\int_0^1 t\ {}_0d_qt=\frac{1}{1+q}$ olduğundan

$$=\frac{b-a}{[\alpha+1]_q}M_4^{\frac{1}{p}}\left[\frac{q\left|{}_aD_qf(a)\right|^r+\left|{}_aD_qf(b)\right|^r}{1+q}\right]^{\frac{1}{r}}\text{'dir.}$$

Sonuç 2.2.8: Teorem 2.2.7'de aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1. $\alpha = 1$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ {}_a d_q t - \frac{qf(a)+f(b)}{1+q}\right| \le \frac{q(b-q)}{1+q}\left(\int_0^1 |1-(1+q)t|^p\ {}_a d_q t\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\frac{q\left|{}_a D_q f(a)\right|^r + \left|{}_a D_q f(b)\right|^r}{1+q}\right]^{\frac{1}{r}}$$

elde edilir,

2. $q \to 1^-$ limit alınırsa Teorem 1.4.12 elde edilir,

3. $\alpha = 1$ ve $q \to 1^-$ limit alınırsa Teorem 1.3.3 elde edilir.

İspat:

1. Sonuç 2.1.2 1. madde'den (2.30)'in sol tarafı

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ {}_a d_q\ t - \frac{qf(a)+f(b)}{1+q}\right|$$

olduğu açıktır.

$$M_4 = \int_0^1 |1-(1+q)t|^p\ {}_a d_q t$$

olduğundan ispat tamamlanır.

2. Sonuç 2.1.2 2. madde'den (2.29)'nin sol tarafı

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}(J_{a+}^\alpha f)(b) - \frac{\alpha f(a)+f(b)}{\alpha+1}\right|$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan olarak ${}_a D_q f(a) \to f'(a)$ ve ${}_a D_q f(b) \to f'(b)$ olup

$$M_4 = \int_0^1 |(\alpha+1)\ (1-t)^\alpha - 1|^P\ dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha+1}}} (1-(\alpha+1)t^\alpha)^p dt + \int_{\frac{1}{\sqrt[\alpha]{\alpha+1}}}^1 \left((\alpha+1)t^\alpha - 1\right)^p dt$$

$$= T_6(\alpha,p) + T_5(\alpha,p)$$

olduğundan ispat tamamlanır.

3. 1. madde'de $q \to 1^-$ limit alınırsa (1.36) ve (2.24)'den, ${}_aD_qf(a) \to f'(a)$ ve ${}_aD_qf(b) \to f'(b)$ olup

$$\int_0^1 |1-2t|^p \, dt = \frac{1}{1+p}$$

olduğundan

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt - \frac{f(a)+f(b)}{2}\right| \leq \frac{(b-q)}{2}\left(\frac{1}{1+p}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^r+|f'(b)|^r}{2}\right]^{\frac{1}{r}}$$

elde edilir.

2.3. Riemann-Liouville Kesirli Kuantum Midpoint Tipli İntegral Eşitsizlikler

Bu bölümde Riemann-Liouville kesirli q- Midpoint tipli eşitsizlikler incelenecektir. Bunun için aşağıdaki eşitlikten faydalanılacaktır.

Lemma 2.3.1: $\alpha > 0,\ a < b,\ 0 < q < 1$ ve $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve (a,b)'de q-türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer ${}_aD_qf,\ (a,b)$ aralığında sürekli q-integrallenebilir ise aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$f\left(\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right) - \frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b)$$

$$= (b-a)\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} \left(1 - {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right) {}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right){}_0d_qt \\ \displaystyle + \int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^1 - {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\ {}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right){}_0d_qt\end{array}\right]. \tag{2.31}$$

İspat: Teorem 1.5.20 1. madde'den $[0,1]$ aralığındaki q-integrali lineer olduğundan ve (1.34) kullanılarak (2.31) eşitliğin sağ tarafındaki q-integral göz önüne alınırsa:

$$(b-a)\left[\begin{array}{l}\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\left(1-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right){}_aD_qf\big((1-t)a+tb\big){}_0d_qt \\ +\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1}-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}{}_aD_qf\big((1-t)a+tb\big){}_0d_qt\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c}(b-a)\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}{}_aD_qf\big((1-t)a+tb\big){}_0d_qt \\ -(b-a)\int_0^1{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}{}_aD_qf\big((1-t)a+tb\big){}_0d_qt\end{array}\right]$$

$$=(b-a)\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}{}_aD_qf\big((1-t)a+tb\big){}_0d_qt-K_1=K_3-K_1$$

$$K_3=(b-a)\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}{}_aD_qf\big((1-t)a+tb\big){}_0d_qt$$

K_3 q-integralini hesaplamak için Tanım 1.5.11'den faydalanılırsa:

$$(b-a)\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}{}_aD_qf\big((1-t)a+tb\big){}_0d_qt$$

$$=(b-a)\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\frac{f\big((1-t)a+tb\big)-f\big(q\big((1-t)a+tb\big)+(1-q)a\big)}{(1-q)\big((1-t)a+tb-a\big)}{}_0d_qt$$

$$=(b-a)\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\frac{f\big((1-t)a+tb\big)-f\big((1-qt)a+qtb\big)}{(1-q)(b-a)t}{}_0d_qt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\frac{f\big((1-t)a+tb\big)-f\big((1-qt)a+qtb\big)}{(1-q)t}{}_0d_qt$$

$$=\frac{1}{(1-q)}\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\frac{f\big((1-t)a+tb\big)}{t}{}_0d_qt-\frac{1}{(1-q)}\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\frac{f\big((1-qt)a+qtb\big)}{t}{}_0d_qt$$

(Burada Tanım 1.5.7 kullanılırsa)

$$= \frac{1}{(1-q)}(1-q)\frac{1}{[\alpha+1]_q}\sum_{i=0}^{\infty} q^i \frac{f\left(\left(1-\frac{q^i}{[\alpha+1]_q}\right)a+\frac{q^i b}{[\alpha+1]_q}\right)}{\frac{q^i}{[\alpha+1]_q}}$$

$$-\frac{1}{(1-q)}(1-q)\frac{1}{[\alpha+1]_q}\sum_{i=0}^{\infty} q^i \frac{f\left(\left(1-\frac{q^{i+1}}{[\alpha+1]_q}\right)a+\frac{q^{i+1} b}{[\alpha+1]_q}\right)}{\frac{q^i}{[\alpha+1]_q}}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} f\left(\left(1-\frac{q^i}{[\alpha+1]_q}\right)a+\frac{q^i b}{[\alpha+1]_q}\right)-\sum_{i=0}^{\infty} f\left(\left(1-\frac{q^{i+1}}{[\alpha+1]_q}\right)a+\frac{q^{i+1} b}{[\alpha+1]_q}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n} f\left(\left(1-\frac{q^i}{[\alpha+1]_q}\right)a+\frac{q^i b}{[\alpha+1]_q}\right)-\sum_{i=0}^{n} f\left(\left(1-\frac{q^{i+1}}{[\alpha+1]_q}\right)a+\frac{q^{i+1} b}{[\alpha+1]_q}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[f\left(\left(1-\frac{1}{[\alpha+1]_q}\right)a+\frac{b}{[\alpha+1]_q}\right)-f\left(\left(1-\frac{q^{n+1}}{[\alpha+1]_q}\right)a+\frac{q^{n+1} b}{[\alpha+1]_q}\right)\right]$$

$$= f\left(\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)-f(a)\text{ 'dir.}$$

O halde

$$K_3-K_1=\left(f\left(\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)-f(a)\right)-\left(-f(a)+\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b)\right)$$

$$= f\left(\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)-\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b)$$

olduğundan ispat tamamlanır. (Burada ki K_1 Lemma 2.2.1'de hesaplanmıştı).

Sonuç 2.3.2: Lemma 2.3.1'da aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1. $\alpha = 1$ alınırsa Lemma 1.5.33 elde edilir,

2. $q \to 1^-$ limit alınırsa Lemma 1.4.13 elde edilir,

3. $\alpha = 1$ ve $q \to 1^-$ limit alınırsa Lemma 1.3.5 elde edilir.

İspat: 2.2.2 Sonuç ispatına benzer yapılır.

Teorem 2.3.3: $\alpha > 0$, $a < b$, $0 < q < 1$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli, (a,b)'de q-türevlenebilir bir fonksiyon ve ${}_aD_qf$, (a,b) aralığında sürekli q-integrallenebilir olsun. Eğer $|{}_aD_qf|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli q-Midpoint tipli eşitsizlik sağlanır:

$$\left.\begin{array}{l}
\left|f\left(\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)-\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b)\right| \\
\qquad\qquad \le (b-a)\begin{bmatrix}\left|{}_aD_qf(a)\right|M_5+\left|{}_aD_qf(b)\right|M_6 \\ \left|{}_aD_qf(a)\right|M_7+\left|{}_aD_qf(b)\right|M_8\end{bmatrix} \\
\text{burada} \\
M_5=\left[\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\left|1-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|(1-t)\,{}_0d_qt\right], \\
M_6=\left[\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\left|1-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|t\,{}_0d_qt\right] \\
M_7=\left[\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1}\left|-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|(1-t)\,{}_0d_qt\right], \\
M_8=\left[\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1}\left|-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|t\,{}_0d_qt\right],
\end{array}\right\}. \qquad (2.32)$$

İspat: Lemma 2.3.1, $|{}_aD_qf|$'nin $[a,b]$ aralığında konveksliği ve (1.53) kullanılırsa:

$$f\left(\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)-\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b)$$

$$\le (b-a)\left[\begin{array}{l}\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\left|1-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|\left|{}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right)\right|{}_0d_qt \\ +\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1}\left|-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|\left|{}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right)\right|{}_0d_qt\end{array}\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\begin{array}{l}\int\limits_{0}^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} \left|1-{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|\left[\begin{array}{r}\left|{}_aD_qf(a)\right|(1-t)\\+\left|{}_aD_qf(b)\right|t\end{array}\right]{}_0d_qt\\+\int\limits_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1}\left|-{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|\left[\begin{array}{r}\left|{}_aD_qf(a)\right|(1-t)\\+\left|{}_aD_qf(b)\right|t\end{array}\right]{}_0d_qt\end{array}\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left|{}_aD_qf(a)\right|\int\limits_{0}^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\left|1-{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|(1-t){}_0d_qt\\+\left|{}_aD_qf(b)\right|\int\limits_{0}^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\left|1-{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|t{}_0d_qt\end{array}\right]\\+\left[\begin{array}{l}\left|{}_aD_qf(a)\right|\int\limits_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1}\left|-{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|(1-t){}_0d_qt\\+\left|{}_aD_qf(b)\right|\int\limits_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1}\left|-{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|t{}_0d_qt\end{array}\right]\end{array}\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\begin{array}{l}\left[\left|{}_aD_qf(a)\right|\ M_5+\left|{}_aD_qf(b)\right|\ M_6\right]\\+\left[\left|{}_aD_qf(a)\right|\ M_7+\left|{}_aD_qf(b)\right|\ M_8\right]\end{array}\right]\text{'dir.}$$

Sonuç 2.3.4: Teorem 2.3.3'de aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1. $\alpha=1$ alınırsa Teorem 1.5.34 elde edilir,

2. $q\to 1^-$ limit alınırsa Teorem 1.4.14 elde edilir,

3. $\alpha=1$ ve $q\to 1^-$ limit alınırsa Teorem 1.3.6 elde edilir.

İspat: Sonuç 2.2.4 ispatına benzer yapılır.

Teorem 2.3.5: $\alpha > 0$, $a < b$, $0 < q < 1$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli, (a,b)'de q-türevlenebilir bir fonksiyon ve ${}_aD_qf$, (a,b) aralığında sürekli q-integrallenebilir olsun. Eğer $r \geq 1$ için $\left|{}_aD_qf\right|^r$, $[a,b]$ aralığında konveks ise aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli q-Midpoint tipli eşitsizlik sağlanır:

$$\left.\begin{array}{l}
\left|f\left(\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)-\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b)\right| \\
\qquad \leq (b-a)\begin{bmatrix} M_9^{1-\frac{1}{r}}\left(M_5\left|{}_aD_qf(a)\right|^r+M_6\left|{}_aD_qf(b)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ M_{10}^{1-\frac{1}{r}}\left(M_7\left|{}_aD_qf(a)\right|^r+M_8\left|{}_aD_qf(b)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \end{bmatrix} \\
\text{burada } \mathrm{M}_5, \mathrm{M}_6, \mathrm{M}_7 \text{ ve } \mathrm{M}_8 \text{ 2.3.3 Teorem}'\text{deki katsayılar ve} \\
M_9=\left[\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\left|1-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|{}_0d_qt\right], \\
M_{10}=\left[\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1}\left|-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|{}_0d_qt\right],
\end{array}\right\}. \tag{2.33}$$

İspat: Lemma 2.3.1, $\left|{}_aD_qf\right|^r$'nin $[a,b]$ aralığında konveksliği, q-Power Mean eşitsizliği ve (1.53) kullanılırsa:

$$f\left(\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)-\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b)$$

$$\leq (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\int_{0}^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\left|1-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|{}_0d_qt\right)^{1-\frac{1}{r}}\\ \times\left(\int_{0}^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\left|1-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|\left|{}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right)\right|^r{}_0d_qt\right)^{\frac{1}{r}}\\ +\left(\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1}\left|-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|{}_0d_qt\right)^{1-\frac{1}{r}}\\ \times\left(\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1}\left|-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|\left|{}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right)\right|^r{}_0d_qt\right)^{\frac{1}{r}}\end{array}\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\begin{array}{c}\left(\int_{0}^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\left|1-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|{}_0d_qt\right)^{1-\frac{1}{r}}\\ \times\left(\int_{0}^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\left|1-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|\begin{bmatrix}\left|{}_aD_qf(a)\right|^r(1-t)\\ +\left|{}_aD_qf(b)\right|^rt\end{bmatrix}{}_0d_qt\right)^{\frac{1}{r}}\\ +\left(\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1}\left|-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|{}_0d_qt\right)^{1-\frac{1}{r}}\\ \times\left(\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1}\left|-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|\begin{bmatrix}\left|{}_aD_qf(a)\right|^r(1-t)\\ +\left|{}_aD_qf(b)\right|^rt\end{bmatrix}{}_0d_qt\right)^{\frac{1}{r}}\end{array}\right]$$

$$
\leq (b-a)\left[\begin{array}{c}
\left(\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} \left|1- {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right| {}_0d_qt\right)^{1-\frac{1}{r}} \\
\times\left(\begin{array}{c} \left|{}_aD_qf(a)\right|^r \int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} \left|1- {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right| (1-t){}_0d_qt \\
+\left|{}_aD_qf(b)\right|^r \int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} \left|1- {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right| t{}_0d_qt \end{array}\right)^{\frac{1}{r}} \\
+\left(\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^1 \left|- {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right| {}_0d_qt\right)^{1-\frac{1}{r}} \\
\times\left(\begin{array}{c} \left|{}_aD_qf(a)\right|^r \int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^1 \left|- {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right| (1-t){}_0d_qt \\
+\left|{}_aD_qf(b)\right|^r \int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^1 \left|- {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right| t{}_0d_qt \end{array}\right)^{\frac{1}{r}}
\end{array}\right]
$$

$$
\leq (b-a)\left[\begin{array}{c} {M_9}^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|{}_aD_qf(a)\right|^r M_5+\left|{}_aD_qf(b)\right|^r M_6\right)^{\frac{1}{r}} \\ +\,{M_{10}}^{1-\frac{1}{r}}\left(\left|{}_aD_qf(a)\right|^r M_7+\left|{}_aD_qf(b)\right|^r M_8\right)^{\frac{1}{r}} \end{array}\right]\text{'dir.}
$$

Sonuç 2.3.6: Teorem 2.3.5'de aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1. $\alpha = 1$ alınırsa Teorem 1.5.35 elde edilir,

2. $q \to 1^-$ limit alınırsa Teorem 1.4.15 elde edilir,

3. $\alpha = 1$ ve $q \to 1^-$ limit alınırsa

$$
\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{b-a}{8}\left[\left(\frac{|f'(a)|^q+2|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{2|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right].
$$

İspat: Sonuç 2.2.6 ispatına benzer yapılır.

Teorem 2.3.7: $\alpha > 0$, $a < b$, $0 < q < 1$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli, (a,b)'de q-türevlenebilir bir fonksiyon ve ${}_aD_qf$, (a,b) aralığında sürekli q-integrallenebilir olsun. Eğer $p,r > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=1$ için $\left|{}_aD_qf\right|^r$, $[a,b]$ aralığında konveks ise aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli q-Midpoint tipli eşitsizlik sağlanır:

$$\left\{\begin{array}{l}\left|f\left(\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)-\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b)\right| \\ \leq (b-a)\left[\begin{array}{c} M_{11}^{\frac{1}{p}}\left(\begin{array}{c}\left|{}_aD_qf(a)\right|^r\left(\frac{(1-q)[\alpha+1]_q-1}{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)^2}\right) \\ +\left|{}_aD_qf(b)\right|^r\left(\frac{1}{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)^2}\right)\end{array}\right)^{\frac{1}{r}} \\ M_{12}^{\frac{1}{p}}\left(\begin{array}{c}\left|{}_aD_qf(a)\right|^r\left(\frac{q}{1+q}-\frac{(1-q)[\alpha+1]_q-1}{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)^2}\right) \\ +\left|{}_aD_qf(b)\right|^r\left(\frac{1}{1+q}-\frac{1}{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)^2}\right)\end{array}\right)^{\frac{1}{r}}\end{array}\right] \\ \text{burada} \\ M_{11}=\left[\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\left|1-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|^p{}_0d_qt\right], \\ M_{12}=\left[\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^1\left|-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|^p{}_0d_qt\right],\end{array}\right\}. \tag{2.34}$$

İspat: Lemma 2.3.1, $\left|{}_aD_qf\right|^r$'nin $[a,b]$ aralığında konveksliği, q-Hölder eşitsizliği ve (1.53) kullanılırsa:

$$\left|f\left(\frac{\left([\alpha+1]_q-1\right)a+b}{[\alpha+1]_q}\right)-\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left({}_aI_q^\alpha f\right)(b)\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\begin{array}{l}\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}\left|1-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|\left|{}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right)\right|{}_0d_qt \\ +\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^1\left|-{}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|\left|{}_aD_qf\left((1-t)a+tb\right)\right|{}_0d_qt\end{array}\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\begin{array}{l}\left(\int_{0}^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} \left|1-{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|^p {}_{0}d_q t\right)^{\frac{1}{p}} \\ \times\left(\int_{0}^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} \left|{}_{a}D_q f\left((1-t)a+tb\right)\right|^r {}_{0}d_q t\right)^{\frac{1}{r}} \\ +\left(\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1} \left|-{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|^p {}_{0}d_q t\right)^{\frac{1}{p}} \\ \times\left(\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1} \left|{}_{a}D_q f\left((1-t)a+tb\right)\right|^r {}_{0}d_q t\right)^{\frac{1}{r}}\end{array}\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\begin{array}{l}\left(\int_{0}^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} \left|1-{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|^p {}_{0}d_q t\right)^{\frac{1}{p}} \\ \times\left(\int_{0}^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} \left[\begin{array}{c}\left|{}_{a}D_q f(a)\right|^r (1-t) \\ +\left|{}_{a}D_q f(b)\right|^r t\end{array}\right] {}_{0}d_q t\right)^{\frac{1}{r}} \\ +\left(\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1} \left|-{}_{0}\left(1-{}_{0}\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|^p {}_{0}d_q t\right)^{\frac{1}{p}} \\ \times\left(\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1} \left[\begin{array}{c}\left|{}_{a}D_q f(a)\right|^r (1-t) \\ +\left|{}_{a}D_q f(b)\right|^r t\end{array}\right] {}_{0}d_q t\right)^{\frac{1}{r}}\end{array}\right]$$

$$= (b-a)\left[\begin{array}{c} \left(\displaystyle\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} \left|1 - {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|^p {}_0d_qt\right)^{\frac{1}{p}} \\ \times\left(\left|{}_aD_qf(a)\right|^r \displaystyle\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} (1-t)\,{}_0d_qt + \left|{}_aD_qf(b)\right|^r \displaystyle\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} t\,{}_0d_qt\right)^{\frac{1}{r}} \\ +\left(\displaystyle\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1} \left|- {}_0\left(1 - {}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|^p {}_0d_qt\right)^{\frac{1}{p}} \\ \times\left(\left|{}_aD_qf(a)\right|^r \displaystyle\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1} (1-t)\,{}_0d_qt + \left|{}_aD_qf(b)\right|^r \displaystyle\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1} t\,{}_0d_qt\right)^{\frac{1}{r}} \end{array}\right]$$

1.5.8 Örnek'ten

$$\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} t\,{}_0d_qt = \frac{\left(\frac{1}{[\alpha+1]_q}\right)^2}{1+q} = \frac{1}{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)^2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} (1-t)\,{}_0d_qt = \int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} 1\,{}_0d_qt - \int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} t\,{}_0d_qt = \frac{1}{[\alpha+1]_q} - \frac{1}{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)^2}$$

$$= \frac{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right) - 1}{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)^2}$$

$$\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1} t\,{}_0d_qt = \int_0^1 t\,{}_0d_qt - \int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} t\,{}_0d_qt = \frac{1}{1+q} - \frac{1}{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)^2}$$

$$= \frac{\left([\alpha+1]_q\right)^2 - 1}{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)^2}$$

$$\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1} (1-t)\ {}_0d_qt = \int_0^1 (1-t)\ {}_0d_qt - \int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} (1-t)\ {}_0d_qt$$

$$= \frac{q}{1+q} - \frac{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)-1}{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)^2}$$

olduğundan

$$= (b-a)\left[\begin{array}{c} \left(\displaystyle\int_0^{\frac{1}{[\alpha+1]_q}} \left|1 - {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|^p {}_0d_qt\right)^{\frac{1}{p}} \\ \times\left(\left|{}_aD_qf(a)\right|^r\left(\dfrac{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)-1}{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)^2} + +\left|{}_aD_qf(b)\right|^r\left(\dfrac{1}{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)^2}\right)\right)\right)^{\frac{1}{r}} \\ +\left(\displaystyle\int_{\frac{1}{[\alpha+1]_q}}^{1} \left|- {}_0\left(1-{}_0\phi_q(t)\right)_q^{(\alpha)}\right|^p {}_0d_qt\right)^{\frac{1}{p}} \\ \times\left(\left|{}_aD_qf(a)\right|^r\left(\dfrac{q}{1+q} - \dfrac{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)-1}{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)^2} + \left|{}_aD_qf(b)\right|^r\dfrac{\left([\alpha+1]_q\right)^2-1}{(1+q)\left([\alpha+1]_q\right)^2}\right)\right)^{\frac{1}{r}} \end{array}\right]$$

Sonuç 2.3.8: Teorem 2.3.7'de aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1. $\alpha = 1$ alınırsa Teorem 1.5.36 elde edilir,

2. $q \to 1^-$ limit alınırsa Teorem 1.4.16 elde edilir,

3. $\alpha = 1$ ve $q \to 1^-$ limit alınırsa Teorem 1.3.7 elde edilir.

İspat: Sonuç 2.2.8 ispatına benzer yapılır.

3. İRDELEME

Bu çalışmada Riemann-Liouville kesirli kuantum Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiş, Riemann-Liouville kesirli kuantum Trapezoid ve Midpoint tipi integral eşitsizlikleri incelenmiştir.

Literatürde Riemann integrali, sol Riemann-Liouville kesirli integrali ve kuantum integrali ile elde edilmiş temel çalışmalar mevcuttur. Riemann-Liouville kesirli kuantum integral, $\alpha = 1$ alınması durumunda kuantum integrale, $q \to 1^-$ alınması durumunda sol Riemann-Liouville kesile integrale, $\alpha = 1$ ve $q \to 1^-$ alınması durumunda Riemann integrale inmesi sebebi ile elde ettiğimiz bulguların literatürde var olan bu bulgular ile örtüşüyor olması, bu çalışmanın doğruluğu ve güvenilirliği açısından önemlidir.

Literatürde, kuantum hesap ve Riemann-Liouville kesirli kuantum hesap $[0, T]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar üzerine kurulmuş olup konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri incelemekte yetersiz kalmakta idi. Fakat birkaç yıl öncesinde $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için kuantum hesap ve Riemann-Liouville kesirli kuantum hesap sırayla geliştirilmiş ve bizimde bu çalışmayı yapmamıza imkan doğmuştur. Fakat bu çalışmalarda bazı yanlışlıklar ve eksikliklerin olduğunu belirtmek de gereklidir. Biz bu yanlışlıkları ve eksiklikleri düzelterek çalışmalarımızı yürütüp, elde ettiğimiz bulguları makale formatında düzenleyip yayınlanmak üzere bir SCI-E indeksli dergiye göndermiş durumdayız. Bu sayede eksikliklerin ve yanlışlıkların da giderileceğini umuyoruz.

4. SONUÇLAR

Yaptığımız çalışmada elde edilen başlıca sonuçlar şunlardır:

1. Riemann-Liouville kesirli kuantum Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiş, α ve q'nun özel hallerinde literatürdeki hangi Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerinin elde edileceği gösterilmiştir (Teorem 2.1.1 – Sonuç 2.1.2).

2. Riemann-Liouville kesirli kuantum Trapezoid tipli integral eşitsizliklerinin elde edilebileceği özdeşlik elde edilmiş, α ve q'nun özel hallerinde literatürdeki hangi özdeşliklerin elde edilebileceği gösterilmiştir (Lemma 2.2.1 - Sonuç 2.2.2). Bu özdeşlik, Hölder, power mean eşitsizlikleri ve temel kurallar kullanılarak Riemann-Liouville kesirli kuantum Trapezoid tipli integral eşitsizlikleri ve özel durumları incelenmiştir (Teorem 2.2.3 - Sonuç 2.2.4, Teorem 2.2.5 - Sonuç 2.2.6 ve Teorem 2.2.7 - Sonuç 2.2.8).

3. Riemann-Liouville kesirli kuantum Midpoint tipli integral eşitsizliklerinin elde edilebileceği özdeşlik elde edilmiş, α ve q'nun özel hallerinde literatürdeki hangi özdeşliklerin elde edilebileceği gösterilmiştir (Lemma 2.3.1 - Sonuç 2.3.2). Bu özdeşlik, Hölder, power mean eşitsizlikleri ve temel kurallar kullanılarak Riemann-Liouville kesirli kuantum Midpoint tipli integral eşitsizlikleri ve özel durumları incelenmiştir (Teorem 2.3.3 - Sonuç 2.3.4, Teorem 2.3.5 - Sonuç 2.3.6 ve Teorem 2.3.7 - Sonuç 2.3.8).

5.ÖNERİLER

Yapılan çalışmaya benzer olarak harmonik konveks, GA-konveks, preinveks gibi diğer konveks fonksiyon sınıfları için inceleme yapılabilir. Ayrıca Ostorowski, Simpson gibi diğer integral eşitsizlikleri de benzer şekilde Riemann-Liouville kesirli kuantum integrale genelleştirilebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Annaby M. H. ve Mansour Z. S., q-Fractional Calculus and Equations, Springer, Heidelberg, 2012.

2. Alp N., Sarıkaya M. Z., Kunt M. ve İşcan İ., q-Hermite-Hadamard inequalities quantum estimates for midpoint type inequalities via convex and quasi-convex functions, Journal of King Saud University-Science, 30 (2018) 193-203.

3. Dragomir S. S. ve Agarwal R. P., Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to Trapezoidal formula, Applied Mathematics Letters, 11,5 (1998) 91-95.

4. Kac V. ve Cheung P., Quantum Calculus, Springer, New York, 2002.

5. Kunt M. ve İşcan İ., Erratum: Quantum integral inequalities for convex functions**,** Researchgate, DOI:10.13140/RG.2.1.3509.1441, (2016).

6. Kunt M. ve İşcan İ., Erratum: Some quantum estimates for Hermite-Hadamard inequalities, Researchgate, DOI:10.13140/RG.2.1.4076.4402, (2016).

7. Kunt M., Karapınar D., Turhan S. ve İşcan İ., The left Riemann-Liouville fractional Hermite-Hadamard type inequalities for convex functions, Mathematica Slovaca, (Kabul edildi).

8. Kilbas A. A., Srivastava H. M. ve Trujillo J. J., Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam, 2006.

9. Noor M. A., Noor K. I. ve Awan M. U., Some quantum estimates for Hermite.Hadamard inequalities, Applied Mathmatics and Computation, 251 (2015) 675.679.

10. Pearce C. E. M. ve Pecaric J., Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulae, Applied Mathematics Letters, 13 (2000) 51-55.

11. Roberts A. W. ve Varberg D. E., Convex functions, Academic Press, New York, 1973.

12. Sarıkaya M. Z., Set E., Yaldız H. ve Başak N., Hermite.Hadamard.s inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, Mathematical and Computer Modelling, 57 (2013) 2403-2407.

13. Sudsutad W., Ntouyas S. K. ve Tariboon J., Quantum integral inequalities for convex functions, Journal of Mathematical Inequalies, 9,3 (2015) 781-793.

14. Sudsutad W., Ntouyas S. K. ve Tariboon J., Integral inequalities via fractional quantum calculus, Journal of Inequalities Applications, 81 (2016) 1-15.

15. Tariboon J ve Ntouyas S. K., Quantum integral inequalities on finite intervals, Journal of Inequalities Applications, 121 (2014) 1-13.

16. Tariboon J ve Ntouyas S. K., Quantum calculus on finite intervals and applications to impulsive difference equations, Advances in Difference Equations, 282 (2013) 1-19.

17. Tariboon J.,Ntouyas S. K. ve Agarwal P., New concepts of fractional quantum calculus and applications to impulsive fractional q-difference equations, Advances in Difference Equations, 18 (2015) 1-19.

18. Kırmacı U. S., Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula, Applied Mathmatics and Computation, 147 (2004) 137–146.

19. Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitapevi, Ankara, 2000.

20. Pecaric J. E., Proschan F. ve Tong Y. L., Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications, Academic Press, Boston, 1992.

21. Mitrinovic D. S., Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

22. Mitrinovic D. S., Pecaric J. E. ve Fink A. M., Classical and New Inequalities in Analysis , Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

23. Azpetitia, A. G., Convex Functions and the Hadamard Inequality, Revista Colombiana de Matematicas, 28 (1994) 7-12.

24. Zhu, C., Feckan, M. ve Wang, J., Fractional Integral Inequalities for Differentiable Convex Mappings and Applications to Special Means and a Midpoint Formula, Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics, 8,2 (2012) 21-28.

25. Zhang, Y., Du, T.-S., Wang, H. ve Shen, Y.-J., Different types of quantum integral inequalities via (α, m)-convexity, Journal of Inequalities and Applications, 264 (2018) 1-24.

26. Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York, 1978.

27. Anastassiou, G. A., Intelligent Mathematics: Computational Analysis, Volume 5, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.

28. Samko, S. G., Kilbas, A. A. ve Marichev, O. I., Fractional Integrals and Derivatives, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.

ÖZGEÇMİŞ

Suriyeli beş çocuklu bir ailenin üçüncü çocuğu olan Mazın ELCASIM 1985 yılında Suudi Arabistan'ın Büreyde şehrinde doğdu. İlk orta ve lise öğrenimini Suriye'nin Deyrizor şehrinde tamamladı. 2003 yılında Suriye'nin Deyrizor şehrindeki El-Furat Üniversitesi Matematik Bölümünde başladığı üniversite öğrenimini 2007 yılında üçüncülükle yüksek onur öğrencisi olarak tamamladı. 2008-2014 yılları arasında Suriye'de öğretmen olarak çalıştı. İç savaş sebebi ile Suriye'nin Şam üniversitesinde başladığı Yüksek Lisans eğitimini bitiremeyerek Türkiye'ye geldi. 2015-2016 yılları arasında UNİCEF'in desteği ile Suriye'li öğrencilere öğretmenlik yaptı. 2018 yılında KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı.

.