KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

CEBİRSEL KAFESLER ÜZERİNDE T-NORMLARIN İNŞASI VE KAFESLERDE T-NORMA BAĞLI ELEMANLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rabia İŞÇİ

OCAK 2020
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

CEBİRSEL KAFESLER ÜZERİNDE T-NORMLARIN İNŞASI VE KAFESLERDE T-NORMA BAĞLI ELEMANLAR

Rabia İŞÇİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30 / 12 /2019
Tezin Savunma Tarihi : 15 / 01 /2020

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Şerife YILMAZ

Trabzon 2020

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında
Rabia İŞÇİ Tarafından Hazırlanan

CEBİRSEL KAFESLER ÜZERİNDE T-NORMLARIN İNŞASI
ve KAFESLERDE T-NORMA BAĞLI ELEMANLAR

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 31 / 12 / 2019 gün ve 1834 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Osman KAZANCI ....

Üye : Prof. Dr. Hamza MENKEN ....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Şerife YILMAZ ....

Ş. Yılmaz

Prof. Dr. Asim KADIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

En başından beri bana inanan, bana yol gösteren, çalışma süresince desteğini, önerilerini, tecrübelerini hiç esirgemeyen ve bana pek çok katkıda bulunan saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Şerife YILMAZ'a bana gösterdiği sabır, özveri ve destek için en içten dileklerimle saygı, minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca attığım her adımda yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini hiç esirgemeyen, her türlü fedakarlıkta bulunan ve bu günlere gelmemdeki en büyük paya sahip olan annem ve babama teşekkür ederim.

Bu süreçte bana her zaman destek olan eşim Ahmet İŞÇİ'ye teşekkür ederim.

Ayrıca üzerimde emeği geçen Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma teşekkür ederim.

Rabia İŞÇİ
Trabzon, 2020

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Cebirsel Kafesler Üzerinde T-Normların İnşası ve Kafeslerde T-Norma Bağlı Elemanlar" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Şerife YILMAZ'in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 15/01/2020

Rabia İŞÇİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

CEBİRSEL KAFESLER ÜZERİNDE T-NORMLARIN İNŞASI VE KAFESLERDE T-NORMA BAĞLI ELEMANLAR

Rabia İŞÇİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Şerife YILMAZ
2020, 39 Sayfa

Bu çalışmanın amacı, cebirsel bir L kafesinin üretici elemanlarının kümesi üzerinde verilen t-normları kullanarak L kafesi üzerinde t-norm elde etmek için bir inşa yöntemi sunmak ve ayrıca tam kafesler üzerinde tanımlı bir t-norma bağlı olarak verilen indirgenemez elemanların ve asal elemanların kümelerinin bazı cebirsel özelliklerini araştırmaktır.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde çalışmada kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde, ilk olarak, bir L cebirsel kafesinin kompakt elemanlarının kümesi üzerinde verilen bir t-norm yardımıyla L kafesi üzerinde bir t-norm ve bir t-eş norm elde etmek için inşa yöntemi verilmiştir. Daha sonra bazı şartlar altında bir L tam kafesinde T-asal elemanların kümesi ile eş atomların kümesi arasındaki ilişki incelenmiştir. Son olarak, tam kafeslerin direkt çarpımında T-indirgenemez elemanların kümesi ve T-asal elemanların kümesi için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Cebirsel kafes, Üçgensel norm, İndirgenemez eleman.

Master Thesis

SUMMARY

CONSTRUCTION OF T-NORMS ON ALGEBRAIC LATTICES AND ELEMENTS DEPENDING ON A T-NORM IN LATTICES

Rabia İŞÇİ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Asst. Prof. Şerife YILMAZ
2020, 39 Pages

The aim of this study is to provide a construction method for obtaining a t-norm on an algebraic lattice L by using the t-norms given on the set of generating elements of the lattice L and also to investigate some algebraic properties of the sets of the irreducible and prime elements depending on a t-norm given on complete lattices.

This study consists of two parts. In the first chapter, some basic definitions and theorems are given. In the second chapter, firstly, a construction method is given for obtaining a t-norm and a t-conorm on an algebraic lattice L. Then, the relationship between the set of T-prime elements and the set of coatoms is discussed under some conditions in a complete lattice L. Finally, some characterizations are given for the set of T-irreducible elements and the set of T-prime elements in the direct product of complete lattices.

Key Words: Algebraic lattice, Triangular norm, Irreducible element.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$x \parallel y$: x ve y elemanları kıyaslanamazdır

$x \succ y$: x elemanı y elemanını örter

$L_1 \times L_2$: L_1 ve L_2 kafeslerinin direkt çarpımı

$\Lambda(G)$: G grubunun alt gruplarının kümesi

$P(A)$: A kümesinin kuvvet kümesi

L^c : L kafesinin kompakt elemanlarının kümesi

$A(L)$: L kafesinin bütün atomlarının kümesi

$C(L)$: L kafesinin bütün ko-atomlarının kümesi

$J(L)$: L kafesinin $\vee -$indirgenemez elemanlarının kümesi

$M(L)$: L kafesinin $\wedge -$indirgenemez elemanlarının kümesi

$pr(L)$: L kafesinin bütün asal elemanlarının kümesi

$copr(L)$: L kafesinin bütün ko-asal elemanlarının kümesi

$T_i(L)$: L kafesinin tüm $T -$indirgenemez elemanlarının kümesi

$L_R(T)$: L kafesinin tüm $T -$asal radikal elemanlarının kümesi

$T_p(L)$: L kafesinin tüm $T -$asal elemanlarının kümesi

$T_{sp}(L)$: L kafesinin tüm $T -$koasal elemanlarının kümesi

$Id(L)$: L kafesinin bütün ideallerinin kümesi

$Con(L)$: L kafesinin kongrüans bağıntılarının kümesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Üçgensel normlar ilk olarak Menger'in 'Statistical Metrics' isimli kısa makalesinde [13] tanıtılmıştır. Üçgensel normları bugünkü aksiyomlarıyla literatüre kazandıran Schweizer ve Sklar [16-18] olmuştur. Üçgensel normlar, uygulamalı matematikte olasılık, istatistik, karar verme teorisi, vb. alanlarda, bilgisayar bilimlerinde yapay zeka, yöneylem araştırması gibi alanlarda ve ayrıca ekonomi, finans, desen tanıma ve görüntü işleme gibi alanlarda uygulanma imkanı bulan agregasyon fonksiyonlarının önemli bir sınıfını oluşturur [3]. Bu şekilde birçok uygulama alanı bulunduğundan, literatürde birçok araştırmacı tarafından kafesler üzerinde üçgensel normlar çalışılmıştır [6,9,10,20].

Saminger [15], sınırlı bir L kafesin alt aralıkları üzerinde verilen t-normları kullanarak bazı şartlar altında L kafesi üzerinde t-norm elde etmek için bir yöntem sunmuştur. Yılmaz ve diğerleri [20], sonlu dağılmalı bir L kafesinde $\vee$-indirgenemez elemanların kısmi sıralı kümesi üzerinde verilen bir t-normu L kafesi üzerinde bir t-norma genişletmek için bir metot vermiştir. Adı geçen çalışmalar ışığında, bu çalışmada cebirsel kafeslerin üretici elemanlarının kümesi üzerinde tanımlı bir t-norm yardımıyla cebirsel kafes üzerinde bir t-norm elde etmek için bir inşa yöntemi araştırılmıştır.

Karacal ve diğerleri [10], bir tam kafeste T-asal elemanı tanıtmışlardır. Ayrıca Yılmaz ve diğerleri [21], bir tam kafeste T-indirgenemez eleman tanımını vermişler ve bu elemanların kümesinin bazı cebirsel özelliklerini çalışmıştır.Bu çalışmada, ek olarak, tam kafesler üzerinde verilen bir t–norma bağlı indirgenemez elemanların ve asal elemanların kümelerinin bazı cebirsel özellikleri incelenmiş ve bazı örnekler sunulmuştur. Önce bazı şartlar altında bir L tam kafesinde T-asal elemanların kümesi ile ko-atomların kümesi arasındaki ilişki incelenmiştir. Daha sonra, tam kafeslerin direkt çarpımında T-indirgenemez elemanların kümesi ve T-asal elemanların kümesinin bazı cebirsel özellikleri araştırılmış ve örnekler sunulmuştur. Ayrıca bu kümeler için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

1.2. Kafesler

Tanım 1.2.1.[2] $L \neq \emptyset$, " $\leq$ " L üzerinde bir bağıntı olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $(L, \leq)$ ikilisine *kısmi sıralı bir küme* denir.

(i) $\forall x \in L$ için $x \leq x$ (yansıma),

(ii) $\forall x, y \in L$ için $x \leq y$ ve $y \leq x \Rightarrow x = y$ (ters simetri),

(iii) $\forall x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ve $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (geçişme özelliği).

" $\leq$ " bağıntısına da L üzerinde bir *kısmi sıralama bağıntısı* denir.

Örnek 1.2.2. $A \neq \emptyset$ ve $P(A)$, A nın kuvvet kümesi olmak üzere $P(A)$ üzerinde " $\leq$ " bağıntısı "$x \leq y \Leftrightarrow x \subseteq y$" olarak tanımlanırsa, $(P(A), \subseteq)$ kısmi sıralı bir kümedir.

Tanım 1.2.3.[2] $(L, \leq)$ kısmi sıralı küme olsun.

(i) $x, y \in L$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ bağıntılarından hiçbiri sağlanmıyorsa, x, y elemanlarına *karşılaştırılamaz veya kıyaslanamaz elemanlar* denir ve bu durum $x \parallel y$ ile gösterilir.

(ii) $x, y \in L$ için $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise, x y den *kesin küçüktür* denir ve bu durum

(iii) $x < y$ veya $y < x$ gösterilir.

Tanım 1.2.4.[8] $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $x, y \in L$ olsun. Eğer $x \leq y$ veya $y \leq x$ bağlantılarından biri sağlanıyorsa, L ye bir *tam sıralı küme (zincir)* denir.

Örnek 1.2.5. Örnek 1.2.2. de verilen $(P(A), \subseteq)$ kısmi sıralı kümesi bir zincir değildir.

Tanım 1.2.6.[2] $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $x, y \in L$ olsun. x y *yi örter* denir ve $x \succ y$ ile gösterilir $:\Leftrightarrow x > y$ ve $x > z \geq y$ olan $\forall z \in L$ için $z = y$ dir.

Tanım 1.2.7.[2] $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme, $X \subseteq L$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $a \leq x$ olacak şekilde bir $a \in X$ varsa, a ya X *in en küçük elemanı* denir. Benzer şekilde $\forall x \in X$ için $x \leq b$ olacak şekilde $b \in X$ varsa, b ye X *in en büyük elemanı* denir. Bu elemanlar, sırayla, $Eke(X)$ ve $Ebe(X)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.8.[2] $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun.

(i) Eğer L kısmi sıralı kümesinin en küçük elemanı mevcut ise, L ye *alttan sınırlı kısmi sıralı küme* denir ve $(L, \leq, 0)$ ile gösterilir.

(ii) Eğer L kısmi sıralı kümesinin en büyük elemanı mevcut ise, L ye *üstten sınırlı kısmi sıralı küme* denir ve $(L, \leq, 1)$ ile gösterilir.

(iii) Eğer L alttan ve üstten sınırlı kısmi sıralı bir küme ise, L ye *sınırlı kısmi sıralı küme* denir ve $(L, \leq, 0, 1)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.9.[2] $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme, $X \subseteq L$ olsun. $a \in X$ için $x < a$ olacak şekilde bir $x \in X$ yoksa, a ya X in bir *minimal eleman* denir.

Benzer şekilde $b \in X$ için $b < x$ olacak şekilde bir $x \in X$ yoksa, b ye X in bir *maksimal eleman* denir.

L nin bütün maksimal elemanlarının kümesi $Maks(L)$ ve bütün minimal elemanlarının kümesi $Min(L)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.10.[2] $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme, $T \subseteq L$ olsun.

(i) $\bar{T} \coloneqq \{x \in L | \forall t \in T \; için \; t \leq x\}$ kümesine T nin *üst sınırlarının kümesi* denir.

(ii) $\underline{T} \coloneqq \{x \in L | \forall t \in T \; için \; x \leq t\}$ kümesine T nin *alt sınırlarının kümesi* denir.

Tanım 1.2.11.[2] $(\mathrm{L}, \leq)$ kısmi sıralı bir küme, $T \subseteq L$ olsun.

(i) $Eke(\bar{T}) \in L$ elemanına, varsa, T nin *en küçük üst sınırı(supremumu)* denir ve $supT$ veya $\vee T$ ile gösterilir.

(ii) $Ebe(\underline{T}) \in L$ elemanına, varsa, T nin *en büyük alt sınırı(infimumu)* denir ve $infT$ veya $\wedge T$ ile gösterilir.

Ayrıca $x, y \in L$ olmak üzere, $sup\{x, y\} = x \vee y$ ve $inf\{x, y\} = x \wedge y$ ile gösterilecektir.

Teorem 1.2.12.[2] $(\mathrm{L}, \leq)$ kısmi sıralı bir küme, $B, C \subseteq L$ olsun. Eğer $B \subseteq C$ ise $supB \leq supC$ ve $infC \leq infB$ dir.

Lemma 1.2.13.[2] L kısmi sıralı bir küme ve $x, y, z \in L$ için,

(i) $x \wedge x = x$ ve $x \vee x = x$,

(ii) $x \wedge y = y \wedge x$ ve $x \vee y = y \vee x$,

(iii) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ ve $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,

(iv) $x \wedge (x \vee y) = x$ ve $x \vee (x \wedge y) = x$ dir.

Tanım 1.2.14.[2] $(L_1, \leq_1)$ ve $(L_2, \leq_2)$ kısmi sıralı iki küme olsun. $L_1 \times L_2$ direkt çarpımı üzerinde $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 \leq_1 x_2)$ ve $(y_1 \leq_2 y_2)$ şeklinde tanımlanan $'' \leq ''$ bağıntısı ile kısmi sıralı bir kümedir.

Tanım 1.2.15.[2] Bir L kısmi sıralı kümesinin x, y elemanları için $x > y$ olduğunda x, y den daha üste yerleştirilir. x, y yi örttüğü zaman x den y ye doğrusal bir parça çizilir. Bunların sonucunda oluşan şekle L nin *Hasse diyagramı* denir.

Tanım 1.2.16.[5] $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer L nin elemanları ile verilen herhangi bir $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ ... dizisi için $x_k = x_{k+1} = \cdots$ olacak şekilde bir $k \in N$ varsa, L ye *artan zincir şartını* sağlar denir. (ACC)

Tanım 1.2.17.[5] $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer L nin elemanları ile verilen herhangi bir $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$ dizisi için $x_k = x_{k+1} = \cdots$ olacak şekilde bir $k \in N$ varsa, L ye *azalan zincir şartını* sağlar denir. (DCC)

Örnek 1.2.18. $\mathbb{N}$ azalan zincir şartını (DCC) sağlar, fakat artan zincir şartını (ACC) sağlamaz. $\tilde{\tilde{\mathbb{N}}}$ artan zincir şartını (ACC) sağlar, azalan zincir şartını (DCC) sağlamaz.

Şekil 1. $\mathbb{N}$ zincirinin ve $\tilde{\tilde{\mathbb{N}}}$ zincirinin Hasse diyagramları

Lemma 1.2.19.[5] L kısmi sıralı bir küme olsun. Bu takdirde L artan zincir şartını sağlar $\Leftrightarrow$ L nin boştan farklı her alt kümesi bir maksimal elemana sahiptir.

Tanım 1.2.20.[8] $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun.

(i) $\forall x, y \in L$ için $inf\{x, y\}$ mevcut ise L ye bir $\wedge$-*yarı kafes*,

(ii) $\forall x, y \in L$ için $sup\{x, y\}$ mevcut ise L ye bir $\vee$-*yarı kafes*,

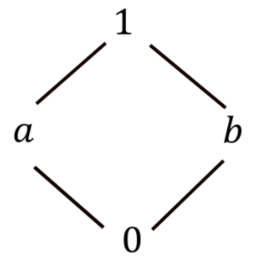
(iii) $\forall x, y \in L$ için $inf\{x, y\}$ ve $sup\{x, y\}$ mevcut ise L ye bir *kafes* denir.

Lemma 1.2.21.[2] L bir kafes ve $x, y, z, t \in L$ olsun. Bu takdirde,

(i) $x \leq y$ ise $x \vee z \leq y \vee z$ ve $x \wedge z \leq y \wedge z$ dir.

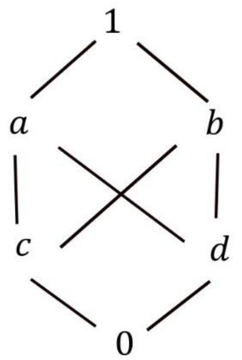
(ii) $x \leq y$ ve $z \leq t$ ise $x \vee z \leq y \vee t$ ve $x \wedge z \leq y \wedge t$ dir.

Örnek 1.2.22. Aşağıda Şekil 2 ile Hasse diyagramı verilen $L = \{0,1,a,b\}$ kafesi göz önüne alınsın. $S = \{a,b,0\} \subseteq L$ için S bir $\wedge -$ yarı kafestir. Fakat $a \vee b = 1 \notin S$ olduğundan S bir $\vee -$ yarı kafes değildir.



Şekil 2. $L = \{0,1,a,b\}$ kafesinin Hasse diyagramı

Örnek 1.2.23. Aşağıda Şekil 3 ile Hasse diyagramı verilen $L = \{0,1,a,b,c,d\}$ kısmi sıralı kümesi göz önüne alınsın. $a, b \in L$ için $\underline{\{a,b\}} = \{c,d,0\}$ ve $Ebe\{c,d,0\}$ mevcut olmadığından L bir $\wedge -$ yarı kafes değildir. Benzer şekilde, $c, d \in L$ için $\overline{\{c,d\}} = \{a,b,1\}$ ve $Eke\{a,b,1\}$ mevcut olmadığından L bir $\vee -$ yarı kafes değildir. Böylece L bir kafes değildir.



Şekil 3. $L = \{0,1,a,b,c,d\}$ kısmi sıralı kümesinin Hasse diyagramı

Örnek 1.2.24. Her zincir bir kafestir.

Örnek 1.2.25. G bir grup ve $\Lambda(G)$, G nin bütün alt gruplarının ailesi olmak üzere, $\Lambda(G)$ kümesi,

$A \wedge B = A \cap B$, $A \vee B = < A \cup B >= \bigcap_{\substack{A \cup B \leq T \\ T \leq G}} T$ işlemleri ile bir kafestir.

Tanım 1.2.26.[8] L bir kafes ve $x \in L$ olsun. $\{y \in L | y \leq x\}$ kümesine x *ile üretilen esas ideal* denir ve $\downarrow x$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.27.[8] Bir L kısmi sıralı kümenin *duali(eş yapılısı)*, aynı elemanlar üzerinde ters kısmi sıralama bağıntısı ile tanımlanan $\tilde{\tilde{L}}$ kısmi sıralı kümesidir.

Açıkça, her kafesin duali de bir kafestir**.**

Lemma 1.2.28.[2] L_1 ve L_2 iki kafes olsun. Bu takdirde, $L_1 \times L_2$ bir kafestir. Eğer L_1 ve L_2 iki tam kafes ise $L_1 \times L_2$ tam kafestir.

Tanım 1.2.29.[5] L bir kafes ve $\emptyset \neq A \subseteq L$ olmak üzere, $\forall x, y \in A$ için

$x \vee y$, $x \wedge y \in A$ ise A ya L nin *bir alt kafesi* denir.

Örnek 1.2.30. $2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ in bir alt kafesidir.

Örnek 1.2.31. G bir grup olsun. Bu durumda $\Lambda(G)$, $P(G)$ kafesinin bir alt kafesi değildir. Gerçekten,

$\Lambda(G) \subseteq P(G)$ ve $(P(G),\cup,\cap)$ bir kafestir. $A, B \in \Lambda(G)$ için

$A \wedge B = A \cap B \in \Lambda(G)$ dir. Fakat iki alt grubun birleşimi alt grup olmak zorunda değildir. Buradan, $A \vee B = A \cup B \notin \Lambda(G)$ dir. Dolayısıyla $\Lambda(G), P(G)$ nin alt kafesi değildir.

Tanım 1.2.32.[2] L bir kafes olsun. L sonlu bir küme ise L kafesine $sonlu\ kafes$ denir.

Özellikle her sonlu kafes sınırlıdır.

Tanım 1.2.33.[5] L bir kafes olsun. Her $A \subseteq L$ için $\wedge A$ ve $\vee A$ mevcut ise, L ye bir $tam\ kafes$ denir.

Teorem 1.2.34.[2] L bir kafes, $A \subseteq L$ olsun. Eğer $1 \in A$ ve $B \subset A$ için $\inf B \in A$ ise A bir tam kafestir.

Ayrıca teoremin duali doğrudur.

Uyarı. Her tam kafes bir kafestir. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 1.2.35. $(\mathbb{Z}, \leq)$ bir kafestir. Fakat tam kafes değildir.

Lemma 1.2.36.[2] Her sonlu kafes bir tam kafestir.

Tanım 1.2.37.[8] $(L_1, \leq_1)$ ve $(L_2, \leq_2)$ iki kafes olsun. $\varphi: L_1 \to L_2$ dönüşümüne bir *kafes izomorfizması* denir: $\Leftrightarrow$ φ birebir, örten ve $\forall x, y \in L_1$ için $x \leq_1 y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq_2 \varphi(y)$ dir.

Tanım1.2.38.[5] Bir L kafesinde $x \leq z$ iken $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ eşitliği sağlanıyorsa, L kafesine *modüler kafes* denir.

Tanım 1.2.39.[5] L bir kafes olsun. Her $x, y, z \in L$ için

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

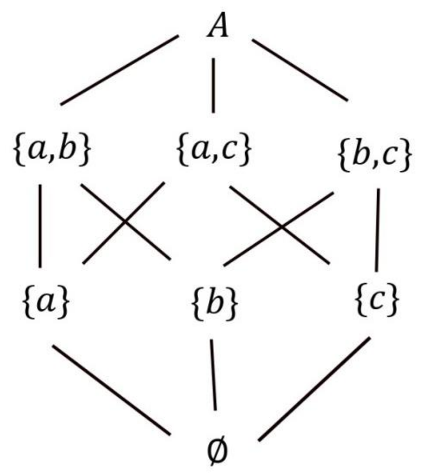
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

eşitliklerinden en az biri sağlanıyorsa, L kafesine *dağılmalı kafes* denir.

Açıkça her dağılmalı kafes modülerdir. Fakat tersi doğru değildir.

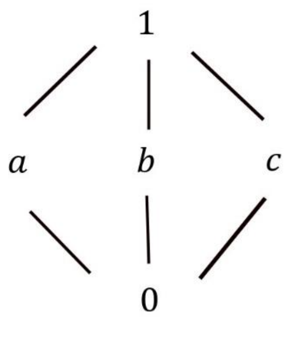
Örnek 1.2.40. Her zincir dağılmalı bir kafestir.

Örnek 1.2.41. $A = \{a, b, c\}$ kümesi göz önüne alınsın. Bu durumda $(P(A), \subseteq)$ kafesi dağılmalıdır.

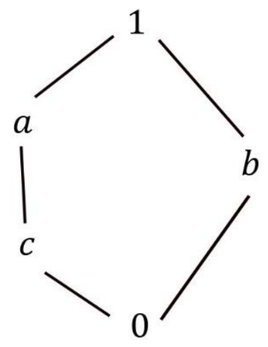


Şekil 4. $A = \{a, b, c\}$ olmak üzere $(P(A), \subseteq)$ kafesinin Hasse diyagramı

Örnek 1.2.42. Sırasıyla, aşağıdaki Şekil 5 ve Şekil 6 ile Hasse diyagramları verilen $M_5 = \{0, a, b, c, 1\}$ ve $N_5 = \{0, a, b, c, 1\}$ kafesleri dağılmalı değildir.



Şekil 5. M_5 kafesinin Hasse diyagramı



Şekil 6. N_5 kafesinin Hasse diyagramı

Lemma 1.2.43.[5] L dağılmalı bir kafes olsun. Bu takdirde L nin her alt kafesi dağılmalıdır.

Teorem 1.2.44.[5] L bir kafes olsun. Eğer L, M_5 veya N_5 e izomorf bir alt kafes içermiyorsa, L dağılmalı bir kafestir.

1.3. Kafeslerde Özel Elemanlar ve Üretilen Kafesler

Tanım 1.3.1. [8] L bir tam kafes olsun.

(i) $a \in L$ olsun. Bu durumda a elemanına *kompakt eleman* denir:$\Leftrightarrow$
$\forall X \subseteq L$ için $\exists X_1 \subseteq X$ sonlu alt kümesi öyle ki $a \leq \vee X$ ise $a \leq \vee X_1$ dir.

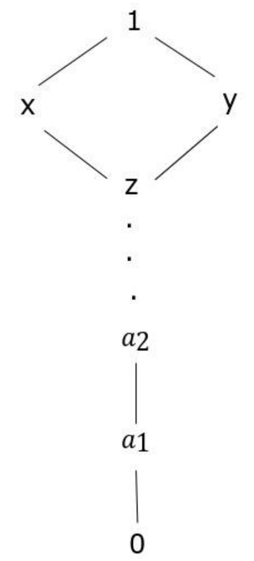
(ii) L ye *cebirsel kafes* denir:$\Leftrightarrow$ L nin her elemanı kompakt elemanların supremumudur.

Literatürde cebirsel kafeslere *kompakt olarak üretilen kafes* de denir.

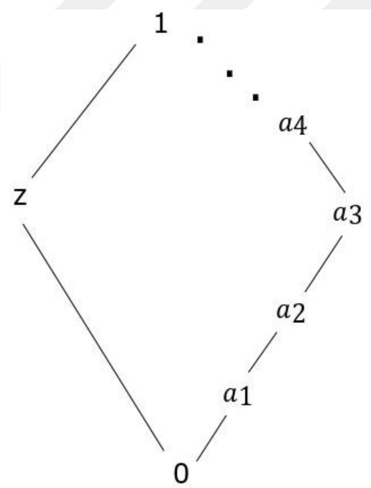
L tam kafesinin bütün kompakt elemanlarının kümesi L^c ile gösterilecektir ve

$L^{c^*} = L^c \cup \{1\}$ olarak tanımlanacaktır.

Açıkça, L^c sonlu supremum altında kapalıdır ve $0 \in L^c$ dir. Böylece L^c bir $\vee$-yarıkafestir. Fakat L^c infimum altında kapalı olmayabilir.



Şekil 7. $L_1 = \{0,1,x,y,z,a_1,a_2,...\}$ kafesinin Hasse diyagramı



Şekil 8. $L_2 = \{0,1,z,a_1,a_2,a_3,a_4,...\}$ kafesinin Hasse diyagramı

Örnek 1.3.2. Yukarıdaki Şekil 7'de Hasse diyagramı verilen L_1 kafesinde görüldüğü gibi x ve y kompakt elemandır, fakat $x \wedge y$ kompakt eleman değildir.

Örnek 1.3.3. Şekil 8'de Hasse diyagramı ile verilen L_2 kafesinde z kompakt eleman değildir. Ayrıca kompakt elemanların supremumu olarak yazılamaz. Dolayısıyla L_2 kafesi cebirsel değildir.

Örnek 1.3.4. Her sonlu kafes cebirseldir.

Örnek 1.3.5. $[0,1]$ tam kafesinde $L^c = \{0\}$ dır. Böylece $[0,1]$ cebirsel bir kafes değildir.

Tanım 1.3.6.[8] L $\vee -$yarı kafesinin boştan farklı bir I alt kümesine bir *ideal* denir $:\Leftrightarrow$

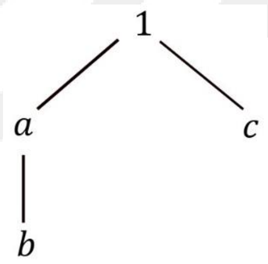
(i) $a \in I$, $b \in L$ ve $b \leq a$ ise $b \in I$,

(ii) $a, b \in I$ ise $a \vee b \in I$ dır.

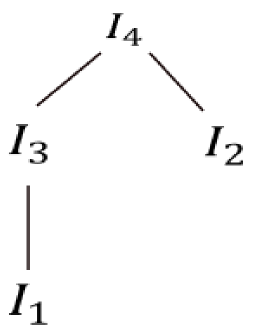
L $\vee$-yarıkafesinin ideallerinin kümesi IdL ile gösterilecektir. $(IdL, \subseteq)$ kısmi sıralı bir kümedir, fakat kafes olması gerekmez.

Ayrıca $Id_0 L = IdL \cup \{\emptyset\}$ olarak tanımlanacaktır.

Örnek 1.3.7. Aşağıda Şekil 9 ile Hasse diyagramı verilen L $\vee -$yarı kafesinin idealleri $I_1 = \{b\}, I_2 = \{c\}, I_3 = \{a, b\}, I_4 = \{a, b, c, 1\} = L$ dir. L nin ideallerinin kısmi sıralı kümesinin Hasse diyagramı Şekil 10'daki gibidir. $I_1 \wedge I_2 = \emptyset \notin IdL$ olduğundan IdL kafes değildir.



Şekil 9. $L = \{1, a, b, c\}$ $\vee -$yarı kafesinin Hasse diyagramı

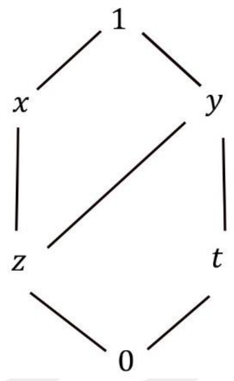


Şekil 10. $L = \{1, a, b, c\}$ $\vee -$yarı kafesinin ideallerinin kısmi sıralı kümesinin Hasse diyagramı

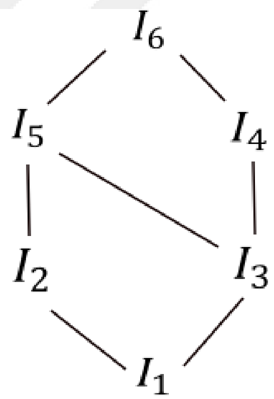
Teorem 1.3.8.[8] L bir $\vee -$yarı kafes ve $0 \in L$ olsun. Bu durumda $(IdL, \subseteq)$ kafestir.

Örnek 1.3.9. Aşağıda Şekil 11'de bir $L = \{1, x, y, z, t, 0\}$ dağılmalı kafesinin Hasse diyagramı verilmiştir. L nin idealleri $I_1 = \{0\}, I_2 = \{t, 0\}, I_3 = \{z, 0\}, I_4 = \{x, z, 0\}$,

$I_5 = \{y, t, z, 0\}$, $I_6 = \{0, t, z, y, x, 1\} = L$ dir. L nin ideallerinin kafesinin Hasse diyagramı Şekil 12'de verilmiştir.



Şekil 11. $L = \{1, x, y, z, t, 0\}$ dağılmalı kafesinin Hasse diyagramı



Şekil 12. $L = \{1, x, y, z, t, 0\}$ dağılmalı kafesinin ideallerinin kafesinin Hasse diyagramı

Tanım 1.3.10.[8] L bir kafes ve $\emptyset \neq A \subseteq L$ olsun. L nin A yı kapsayan en küçük idealine L nin A *tarafından üretilen ideali* denir ve $(A]$ ile gösterilir.

Lemma 1.3.11.[8] L bir kafes ve $\emptyset \neq A, I \subseteq L$ olsun. $I = (A]$ dır: $\Leftrightarrow$

(i) I bir idealdir.

(ii) $A \subseteq I$ dır.

$(iii) \forall i \in I$ için $\exists n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$ ve $\exists h_0, h_1, \dots, h_{n-1} \in A$ öyle ki $i \leq h_0 \vee \dots \vee h_{n-1}$ dir.

İspat. $I_0 = \{\, i \mid bazı\ h_0, h_1, \dots, h_{n-1} \in A\ ve\ bazı$ n $\in \mathbb{Z}, n \geq 1\ için\ i \leq h_0 \vee h_1 \vee \dots \vee . h_{n-1}, h_0, h_1, \dots, h_{n-1}\ dır\}$ kümesi tanımlansın. İdeal tanımından I_0 ın bir ideal olduğu ve $A \subseteq I_0$ olduğu açıktır. Sonuç olarak, $A \subseteq J$ ve J bir idealse, $I_0 \subseteq J$ dir ve böylece I_0, A yı kapsayan en küçük idealdir. Yani $I = I_0$ dır.

Sonuç 1.3.12.[8] L bir kafes olsun. Bu durumda IdL ve Id_0L kümeleri kapsama bağıntısı altında birer kısmi sıralı kümedir ve hatta $(IdL, \subseteq)$, $(Id_0L, \subseteq)$ birer kafestir.

İspat. Gerçekten, $(\emptyset] = \emptyset$ olduğu göz önüne alınırsa, $I \vee J = [I \cup J]$ dir. Lemma 1.3.11'den görülür ki $I, J \in IdL$ için $x \in I \vee J \Leftrightarrow x \leq i \vee j$ olacak şekilde $\exists i \in I$ ve $\exists j \in J$ dir.

$\{I_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ L nin ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda

$\wedge\, (I_\lambda | \lambda \in \Lambda) = \cap\, (I_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ ve

$\vee\, (I_\lambda | \lambda \in \Lambda) = (\cup\, (I_\lambda | \lambda \in \Lambda)]$ dır ve böylece IdL nin boştan farklı her alt kümesi supremuma sahiptir.

K en küçük elemana sahip bir $\vee$-yarı kafes olmak üzere, IdK kafesi kullanılarak cebirsel kafeslerin kullanışlı bir karakterizasyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 1.3.13.[8] L bir kafes olsun. Bu takdirde L kafesi cebirseldir $\Leftrightarrow$ L en küçük elemana sahip bir K $\vee -$yarı kafesinin bütün ideallerinin kafesi ile izomorftur.

İspat. $'' \Leftarrow ,,$ K en küçük elemana (0) sahip bir $\vee -$yarı kafes olsun. Bu durumda Teorem 1.3.8'den dolayı K bir tam kafestir. $a \in K$ için $(a]$, IdK nın bir kompakt elemanıdır. Gerçekten,

$X \subseteq IdK$ ve $(a] \subseteq \vee X$ olsun. Sonuç 1.3.12 nin ispatında olduğu gibi,

$\vee X = \{x | x \leq t_0 \vee t_1 \vee \dots \vee t_{n-1}, t_i \in I_i, I_i \in X\}$ dir. Böylece,

$a \leq t_0 \vee t_1 \vee \dots \vee t_{n-1}, t_i \in I_i,\ I_i \in X$ dir. O halde, $X_1 = \{I_0, I_1, \dots, I_{n-1}\}$ olmak üzere $(a] \subseteq \vee X_1$ dir. $\forall I \in IdK$ için $I = \vee\, ((a] | a \in I)$ olduğundan IdK cebirsel bir kafestir.

$'' \Rightarrow ,,$ L cebirsel bir kafes ve $K = L^c$ olsun.

i) $0 \in K$ dır. Gerçekten, $0 \leq \vee X$, $X \subseteq L$ olsun. $a \in X$ için $\{a\} \subseteq X$ ve $0 \leq a = \vee \{a\}$ dır.

ii) $a, b \in K$ ve $a \vee b \leq \vee X,\ X \subseteq L$ olsun. Bu takdirde $a \leq a \vee b \leq \vee X$ dır. Böylece

$a \leq \vee X_0$ olacak şekilde $X_0 \subseteq X$ sonlu alt kümesi vardır. Benzer şekilde $b \leq \vee X_1$ olacak şekilde $X_1 \subseteq X$ sonlu alt kümesi vardır.

Buradan, $a \vee b \leq \vee (X_0 \cup X_1)$ ve $X_0 \cup X_1, X$ in sonlu bir alt kümesidir.

Böylece, K 0 elemanına sahip bir $\vee -$yarı kafestir.

$\varphi: L \to IdK, a \in L$ için $\varphi(a) = \{x | x \in K, x \leq a\} = K \cap\downarrow a$, dönüşümü göz önüne alınsın.

L cebirsel bir kafes olduğundan $a = \vee \varphi(a)$ dır.

$a, b \in L$ için $\varphi(a) = \varphi(b)$ olsun. Bu takdirde $\vee \varphi(a) = \vee \varphi(b) \Rightarrow a = b$ dir. Dolayısıyla φ birebirdir.

φ nin örtenliğini göstermek için, $I \in IdK$ ve $a = \vee I$ olsun. Bu takdirde $I \subseteq \varphi(a)$ dır.

$x \in \varphi(a)$ olsun. Bu durumda $x \leq \vee I$ dir ve böylece x in kompaktlığından $x \leq \vee I_1$ olacak şekilde $I_1 \subseteq I$ sonlu alt kümesi vardır. Bundan dolayı, $x \in I$ dır. Bu ise $\varphi(a) \subseteq I$ olduğunu ispatlar. Sonuç olarak, $\varphi(a) = I$ olup φ örtendir. Böylece φ bir izormorfizmadır.

Tanım 1.3.14.[8] L bir kafes ve θ, L üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu takdirde, θ denklik bağıntısına L nin bir *kongrüans bağıntısı* denir: $\Leftrightarrow$

$(a_0, b_0) \in \theta$ ve $(a_1, b_1) \in \theta \Rightarrow (a_0 \wedge a_1, b_0 \wedge b_1) \in \theta$ ve $(a_0 \vee a_1, b_0 \vee b_1) \in \theta$ dır.

Bir L kafesinin bütün kongrüans bağıntılarından oluşan küme $ConL$ ile gösterilir.

Lemma 1.3.15.[8] L bir kafes olsun. Bu durumda Id_0L ve $ConL$ tam kafeslerdir. Eğer L en küçük elemana sahipse, IdL bir tam kafestir.

Tanım 1.3.16.[8] L bir kafes ve $A \subseteq L \times L$ olsun.

$\forall(a, b) \in A$ için $(a, b) \in \theta$ olacak şekildeki en küçük kongrüans bağıntısına *A tarafından üretilen kongrüans bağıntısı* denir ve $\theta(A)$ ile gösterilir.

Eğer $A = \{(a, b)\}$ ise, $\theta(A)$ yerine $\theta(a, b)$ yazılır.

I, L nin bir ideali olmak üzere, $A = I \times I$ ise, $\theta(A)$ yerine $\theta(I)$ yazılır.

$\theta(a, b)$ kongrüans bağıntısına *temel(esas) konrüans bağıntısı* denir.

Dikkat edelim ki, $\theta(a, b)$ kongrüans bağıntısı $(a, b) \in \theta$ olacak şekildeki en küçük kongrüans bağıntısıdır.

Önerme 1.3.17. L bir kafes olmak üzere L nin en küçük kongrüans bağıntısı

$I_L = \{(x, x): x \in L\}$ dir.

İspat. L üzerinde bir kongrüans bağıntısı olduğundan aynı zamanda bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla bu bağıntı yansıyan, simetrik ve geçişkendir. Bu nedenle kongrüans bağıntılarının en küçüğü, yansıyan elemanları kapsayan $I_L = \{(x,x): x \in L\}$ dir.

Lemma 1.3.18.[8] L bir kafes ve $\theta(a,b)$ temel kongrüans bağıntısı olsun. Bu takdirde, $\theta(a,b)$ kompakttır.

İspat. L bir kafes, $a,b \in L, X \subseteq ConL$ ve $\theta(a,b) \leq \vee X$ olsun.

Bu takdirde $(a,b) \in \vee X$ dir ve böylece bir $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ dizisi vardır ki burada

$0 \leq i < n$ olacak şekilde ki $\forall i$ için $(x_i, x_{i+1}) \in \theta_i$ olacak şekilde $\theta_i \in X$ vardır. Böylece $(a,b) \in \vee X_0$, $X_0 = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}\}$ dir.

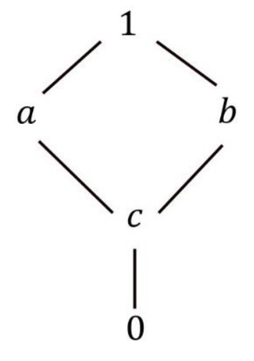
O halde, $X_0 \subseteq X$ sonlu alt küme olmak üzere $\theta(a,b) \leq \vee X_0$ dir.

Teorem 1.3.19.[8] L bir kafes olsun. Bu durumda $ConL$ cebirsel bir kafestir.

İspat. $\forall \theta \in ConL$ için, $\theta = \vee \{\theta(a,b) | (a,b) \in \theta\}$ dır. Bu durumda, Lemma 1.3.15 ve Lemma 1.3.18 in bir sonucu olarak $ConL$ cebirsel bir kafestir.

Sonuç 1.3.20.[8] L bir kafes olsun. Bu durumda $ConL$ dağılmalı, cebirsel bir kafestir.

Örnek 1.3.21. Hasse diyagramı Şekil 13'te verilen bir $L = \{0, a, b, c, 1\}$ kafesi göz önüne alınsın.



Şekil 13. $L = \{0,1,a,b,c\}$ kafesinin Hasse diyagramı

L nin bütün kongrüans bağıntıları:

$Q_1 = \{(0,0),(a,a),(b,b),(c,c),(1,1)\}$

$Q_2 = \{(0,0),(a,a),(b,b),(c,c),(1,1),(a,0),(0,a),(0,c),(c,0),(1,b),(b,1)(a,c),$ $(c,a)\}$

$Q_3 = \{(0,0), (a,a), (b,b), (c,c), (1,1), (b,0), (0,b), (c,0), (0,c), (1,a), (a,1), (b,c), (c,b)\}$

$Q_4 = \{(0,0), (a,a), (b,b), (c,c), (1,1), (c,0), (0,c)\}$

$Q_5 = \{(0,0), (a,a), (b,b), (c,c), (1,1), (1,a), (a,1), (c,b), (b,c)\}$

$Q_6 = \{(0,0), (a,a), (b,b), (c,c), (1,1), (b,1), (1,b), (c,a), (a,c)\}$

$Q_7 = \{(0,0), (a,a), (b,b), (c,c), (1,1), (c,1), (1,c), (c,a), (a,c), (a,1), (1,a), (c,b), (b,c), (1,b), (b,1), (1,c), (c,1), (a,b), (b,a)\}$

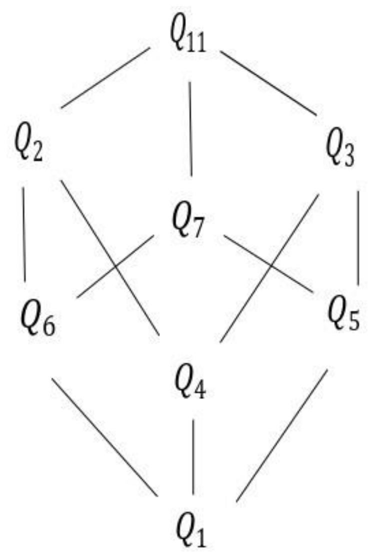
$Q_8 = \{(0,0), (a,a), (b,b), (c,c), (1,1), (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (a,1), (1,a), (c,b), (b,c), (1,b), (b,1), (1,c), (c,1)\}$

$Q_9 = \{(0,0), (a,a), (b,b), (c,c), (1,1), (a,c), (c,a), (b,1), (1,b)\}$

$Q_{10} = \{(0,0), (a,a), (b,b), (c,c), (1,1), (b,c), (c,b), (1,a), (a,1)\}$

$Q_{11} = \{(0,0), (a,a), (b,b), (c,c), (1,1), (1,0), (0,1), (a,0), (0,a), (b,0), (0,b), (c,0), (0,c), (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b), (1,a), (a,1), (1,b), (b,1), (1,c), (c,1)\}$ dir.

Görüldüğü gibi, $Q_5 = Q_{10}$, $Q_6 = Q_9$, $Q_7 = Q_8$ dir. Bu durumda $ConL$ kafesinin Hasse diyagramı aşağıdaki Şekil 14'teki gibidir.



Şekil 14. $L = \{0, a, b, c, 1\}$ kafesinin kongrüans bağıntılarının kafesinin Hasse diyagramı

Örnek 1.3.22. Hasse diyagramı Şekil 6 da verilmiş olan N_5 kafesinin kongrüans bağıntıları ve kongrüans bağıntılarının kafesi aşağıdaki gibidir.

$Q_1 = \{(0,0),(a,a),(b,b),(c,c),(1,1)\}$

$Q_2 = \{(0,0),(a,a),(b,b),(c,c),(1,1),(a,0),(0,a),(c,0),(0,c),(a,c),(c,a),$
$(1,b),\ (b,1)\}$

$Q_3 = \{(0,0),(a,a),(b,b),(c,c),(1,1),(1,0),(0,1),(1,a),(a,1),(a,0),(0,a),$
$(c,0),(0,c),(b,0),(0,b),(1,c),(c,1),(1,b),(b,1),(a,b),(b,a),(c,b),(b,c),(c,a),$
$(a,c)\}\ \}$

$Q_4 = \{(0,0),(a,a),(b,b),(c,c),(1,1),(a,1),(1,a),(0,b),(b,0),(c,1),(1,c),$
$(a,c),(c,a)\}$

$Q_5 = \{(0,0),(a,a),(b,b),(c,c),(1,1),(c,0),(0,c),(1,b),(b,1)\}$

$Q_6 = (0,0),(a,a),(b,b),(c,c),(1,1),(b,0),(0,b),(1,a),(a,1),(1,c),(c,1),(c,a),$
$(a,c)\}$

$Q_7 = \{(0,0),(a,a),(b,b),(c,c),(1,1),(a,c),(c,a)\}$

$Q_8 = \{(0,0),(a,a),(b,b),(c,c),(1,1),(a,b),(b,a),(a,1),(1,a),(a,0),(0,a),$
$(c,0),(0,c),(0,b),(b,0),(1,b),(b,1),(c,b),(b,c),(a,c),(c,a),(a,b),(b,a),(0,1),$
$(1,0)\}$

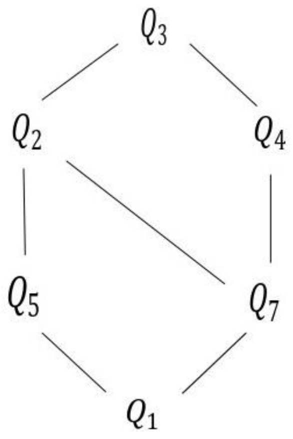
$Q_9 = \{(0,0),(a,a),(b,b),(c,c),(1,1),(b,c),(c,b),(c,0),(0,c),(c,1),(1,c),$
$(0,b),(b,0),(1,b),(b,1),(1,a),(a,1),(a,c),(c,a),(a,b),(b,a),(a,0),(0,a),(1,0),$
$(0,1)\}$

$Q_{10} = \ \{(0,0),(a,a),(b,b),(c,c),(1,1),(c,1),(1,c),(c,a),(a,c),(0,b),$
$(b,0),(1,a),(a,1)\}$

$Q_{11} = \{(0,0),(a,a),(b,b),(c,c),(1,1),(b,1),(1,b),(0,a),(a,0),(0,c),(c,0),$
$(a,c),\ (c,a)\}$

$Q_{12} = \{(0,0),(a,a),(b,b),(c,c),(1,1),(0,1),(1,0),(1,a),(a,1),(c,1),(1,c),$
$(b,1),(1,b),(a,0),(0,a),(c,0),(0,c),(b,0),(0,b),(a,c),(c,a),(a,b),(b,a),(b,c),$
$(c,b)\}$

Görüldüğü gibi, $Q_3 = Q_8 = Q_9 = Q_{12}$, $Q_2 = Q_{11}$, $Q_4 = Q_6 = Q_{10}$ dur.



Şekil 15. N_5 kafesinin kongrüans bağıntılarının kafesinin Hasse diyagramı

Teorem 1.3.23.[14] L bir tam kafes olsun. L nin her elemanı kompakttır.$\Leftrightarrow$ L artan zincir şartını sağlar.

Tanım 1.3.24.[5] L bir tam kafes ve $a \in L$ olsun.

(i) a elemanına bir *atom* denir : $\Leftrightarrow$ $0 \prec a$ dır.

(ii) a elemanına bir *ko-atom* denir : $\Leftrightarrow$ $a \prec 1$ dır.

L kafesinin bütün atomlarının ve ko-atomlarının kümeleri, sırasıyla, $A(L)$ ve $C(L)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.3.25.[2] Sonlu bir $0 = x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 1$ *zincirinin uzunluğu* $n-1$ dir. Bir *L kafesinin uzunluğu $\ell(L)$*, L deki zincirlerin uzunluklarının en küçük üst sınırıdır. Bir L kafesi için $\ell(L)$ sonlu ise, L *sonlu uzunluktadır* denir.

Tanım 1.3.26.[5] L bir tam kafes ve $x \in L - \{0\}$ olsun. $x = a \vee b$ koşulunu sağlayan her $a, b \in L$ için $x = a$ veya $x = b$ ise, x elemanına $\vee$-*indirgenemez eleman* denir.

L kafesinin tüm $\vee -$ indirgenemez elemanlarının kümesi $J(L)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.3.27.[5] L bir tam kafes ve $x \in L - \{1\}$ olsun. $x = a \wedge b$ koşulunu sağlayan her $a, b \in L$ için $x = a$ veya $x = b$ ise, x elemanına $\wedge$-*indirgenemez eleman* denir.

L kafesinin tüm $\wedge -$ indirgenemez elemanlarının kümesi $M(L)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.3.28.[2] L bir tam kafes olsun.

(i) $x \in L - \{1\}$ olsun. $a \wedge b \leq x$ koşulunu gerçekleyen her $a, b \in L$ için $a \leq x$ veya $b \leq x$ ise, x elemanına *asal eleman ($\wedge$-asal eleman)* denir.

(ii) $x \in L - \{0\}$ olsun. $a \vee b \geq x$ koşulunu gerçekleyen her $a, b \in L$ için $a \geq x$ veya $b \geq x$ ise x elemanına *ko-asal eleman ($\vee$-asal eleman)* denir.

L kafesinin bütün asal elemanlarının kümesi $pr(L)$ ve bütün ko-asal elemanlarının kümesi $copr(L)$ ile gösterilecektir.

Örnek 1.3.29. Şekil 13'te Hasse diyagramı verilen $L = \{0, a, b, c, 1\}$ kafesi göz önüne alınsın. Bu takdirde,

$pr(L) = \{0, a, b\}$, $copr(L) = \{a, b, c\}$, $J(L) = \{a, b, c\}$, $M(L) = \{a, b, 0\}$,

$A(L) = \{c\}$, $C(L) = \{a, b\}$, $L^c = \{1, a, b, c, 0\}$ dır.

Örnek 1.3.30. Şekil 5'te Hasse diyagramı verilen M_5 kafesi göz önüne alınsın. Bu takdirde,

$pr(L) = \{\emptyset\}$, $copr(L) = \{\emptyset\}$, $J(L) = \{a, b, c\}$, $M(L) = \{a, b, c\}$,

$A(L) = \{a, b, c\}$, $C(L) = \{a, b, c\}$, $L^c = \{1, a, b, c, 0\}$ dır.

1.4. T-normlar ve T-konormlar

Tanım 1.4.1.[6] $(L, \leq, 0, 1)$ kısmi sıralı bir küme olsun. $T: L \times L \to L$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, T ye L üzerinde bir *üçgensel norm(t-norm)* denir.

(i) $T(x, y) = T(y, x)$ (değişme),

(ii) $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ (birleşme),

(iii) $y \leq z \Rightarrow T(x, y) \leq T(x, z)$ (monotonluk),

(iv) $T(x, 1) = x$ (sınır şartı).

Tanım 1.4.2.[6] $(L, \leq, 0, 1)$ kısmi sıralı bir küme ve T_1, T_2 L üzerinde iki t-norm olsun. $\forall (x, y) \in L \times L$ için $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ ise, T_1 , T_2 *den zayıftır veya* T_2, T_1 *den güçlüdür* denir ve bu durum, $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

Örnek 1.4.3. Aşağıda verilen T_M ve T_D t-normları sınırlı bir L kafesi üzerindeki sırasıyla, en güçlüve en zayıf t-normlardır.

$$T_M(x, y) = \mathrm{x} \wedge \mathrm{y},$$

$$T_D(x, y) = \begin{cases} x & , \quad if\ y = 1 \\ y & , \quad if\ x = 1 \\ 0 & , \quad aksi\ halde \end{cases}$$

Tanım 1.4.4.[6] $(L, \leq, 0, 1)$ kısmi sıralı bir küme olsun. $S: L \times L \to L$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, S ye L üzerinde bir *üçgensel konorm(t-konorm)* denir.

(i) $S(x, y) = S(y, x)$ (değişme)

(ii) $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$ (birleşme)

(iii) $y \leq z \Rightarrow S(x, y) \leq S(x, z)$ (monotonluk)

(iv) $S(x,0) = x$ (sınır şartı).

Örnek 1.4.5. Aşağıda, [0,1] tam kafesi üzerinde, sırasıyla, S_M, S_P, S_L ve S_D t-konormları verilmiştir.

$S_M(x,y) = \max(x,y)$,

$S_P(x,y) = x + y - x.y$,

$S_L(x,y) = \min(x+y,1)$,

$$S_D(x,y) = \begin{cases} 1 & ,(x,y) \in]0,1[^2 \\ \max(x,y) & ,aksi\ halde \end{cases} .$$

Teorem 1.4.6.[6] $(L_1, \leq, 0_{L_1}, 1_{L_1})$ ve $(L_2, \leq 0_{L_2}, 1_{L_2})$ iki kısmi sıralı küme olsun. T_1, L_1 üzerinde bir t-norm ve T_2, L_2 üzerinde bir t-norm olmak üzere,

$T_1 \times T_2 \colon (L_1 \times L_2) \times (L_1 \times L_2) \to (L_1 \times L_2)$,

$(T_1 \times T_2)\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = (T_1(x_1,y_1), T_2(x_2,y_2))$ ile tanımlı $T_1 \times T_2$ fonksiyonu

$L_1 \times L_2$ üzerinde bir t-normdur.

Tanım 1.4.7.[20] L bir tam kafes olsun. T, L üzerinde bir t-norm ve $p \in L - \{1\}$ olsun. p elemanına *T-indirgenemez eleman* denir $:\Leftrightarrow T(a,b) = p$ olan $\forall a,b \in L$ için $a = p$ veya $b = p$ dir.

Bir L kafesindeki bütün T-indirgenemez elemanların kümesi $T_i(L)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.4.8.[10] L bir tam kafes olsun. T, L üzerinde bir t-norm ve $p \in L - \{1\}$ olsun.

(i) p elemanına *T-asal eleman* denir $:\Leftrightarrow$

$T(a,b) \leq p$ olan $\forall a,b \in L$ için $a \leq p$ veya $b \leq p$ dir.

(ii) p elemanına *T-koasal eleman* denir $:\Leftrightarrow$

$T(a,a) \leq p$ olan $\forall a \in L$ için $a \leq p$ dir.

Bir L kafesindeki bütün T-asal elemanlarının kümesi $T_p(L)$ ile tüm T-koasal elemanların kümesi $T_{sp}(L)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.4.9.[10] L bir tam kafes olsun. T, L üzerinde bir t-norm ve $x \in L$ olsun. x elemanına *T-asal radikal eleman* denir: $\Leftrightarrow x = \wedge \{p \in T_p(L) \mid p \geq x\}$ dir.

Bir L kafesindeki bütün T-asal radikal elemanların kümesi $L_R(T)$ ile gösterilecektir.

Özel olarak, $1 \in L_R(T)$ dir.

Önerme 1.4.10.[20] L bir tam kafes olsun. T , L kafesi üzerinde bir t-norm olmak üzere $T_p(L) \subseteq T_i(L)$ dir.

Örnek 1.4.11. $L_1 = \{0,1\}$ ve $L_2 = \{0, {}^1/_2, 1\}$ olsun. $L_1 \times L_2$ kafesi üzerinde aşağıdaki eşitlik ile tanımlanan T t-normu verilsin.

$$T(x,y) = T(y,x) = \begin{cases} x & , \quad y = (1,1) \\ (0,1) & , \quad x = y = (0,1) \\ (1,0) & , \quad x, y \in \{(1,0), (1, ½)\} \\ (0,0) & , \quad aksi\ halde \end{cases}$$

Bu durumda,

$T_i(L_1 \times L_2) = \{(0, {}^1/_2), (0,1), (1, {}^1/_2)\}$,

$T_p(L_1 \times L_2) = \{(0,1), (1, {}^1/_2)\}$,

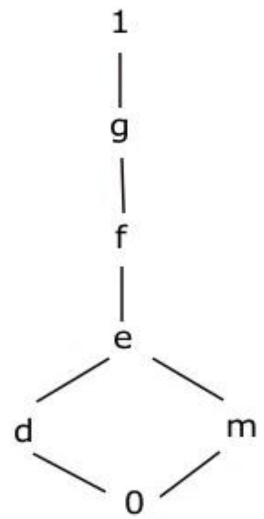
$T_{sp}(L_1 \times L_2) = \{(0, {}^1/_2), (0,1), (1, {}^1/_2)\}$,

$L_R(T) = \{(1,1), (1, {}^1/_2), (0,1), (0, {}^1/_2)\}$ dir.

Örnek 1.4.12. Aşağıda Şekil 16 ile Hasse diyagramı verilen $L = \{0,1,d,m,e,f,g\}$ kafesi üzerinde

$$T(x,y) = \begin{cases} e & , \quad x = f\ ve\ y = f \\ x \wedge y & , \quad aksi\ halde \end{cases}$$

t-normu tanımlansın. Bu takdirde,



Şekil 16. $L = \{0,1,d,m,e,f,g\}$ kafesinin Hasse diyagramı

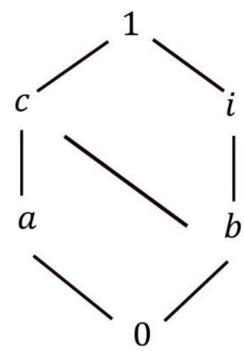
$T_i(L) = \{g, f, d, m\}$, $T_p(L) = \{g, f, d, m\}$, $T_{sp}(L) = \{0, d, m, f, g\}$ ve

$L_R(T) = \{0, d, m, f, g, 1\}$ dir.

Örnek 1.4.13. Aşağıda Şekil 17 ile Hasse diyagramı verilen $L = \{1, a, b, c, i, 0\}$ kafesi üzerinde

$$T(x,y) = \begin{cases} T_D , & (x,y) \neq (i,i) \\ i , & (x,y) = (i,i) \end{cases}$$

t-normu göz önüne alınsın.



Şekil 17. $L = \{1, a, b, c, i, 0\}$ kafesinin Hasse diyagramı

Bu takdirde,

$T_i(L) = \{a, b, c, i\}$, $T_p(L) = \{c\}$, $T_{sp}(L) = \{c\}$, $L_R(T) = \{c, 1\}$ dir.

Örnek 1.4.14. Şekil 13'te Hasse diyagramı verilen $L = \{0, a, b, c, 1\}$ kafesi ve bu kafes üzerinde $T(x,y) = x \wedge y$ t-normu göz önüne alınsın. Bu takdirde,

$T_i(L) = \{a, b, 0\}$, $T_p(L) = \{a, b, 0\}$, $T_{sp}(L) = \{a, b, c, 0\}$, $L_R(T) = \{a, b, c, 0{,}1\}$ dir.

Örnek 1.4.15. Şekil 5'te Hasse diyagramı verilen M_5 kafesi ve bu kafes üzerinde $T(x,y) = x \wedge y$ t-normu göz önüne alınsın. Bu takdirde,

$T_i(L) = \{a, b, c\}$, $T_p(L) = \{a, b, c\}$, $T_{sp}(L) = \{a, b, c, 0\}$, $L_R(T) = \{a, b, c, 0{,}1\}$ dir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. Cebirsel Kafeslerde Üretilen T-normlar ve T-konormlar

Bu bölümde cebirsel kafeslerin üretici elemanlarının kümesi üzerinde tanımlı bir t-norm yardımıyla cebirsel kafes üzerinde bir t-norm elde etmek için bir inşa yöntemi araştırılmıştır. Literatüre bakıldığında, Yılmaz ve diğerleri [20] çalışmasında sonlu dağılmalı bir L kafesinde $\vee$-indirgenemez elemanların kümesi üzerinde verilen bir t-norm yardımıyla L kafesi üzerinde bir t-normun inşasını vermişlerdir. Bu çalışmada, Yılmaz ve diğerlerinin [20] da verdiği inşa yönteminden hareketle cebirsel kafesler üzerinde t-norm elde edilmiştir.

L bir kafes olmak üzere L^c nin 0 elemanına sahip bir $\vee-$yarıkafes olduğu 1. Bölümde verilmiştir. Ayrıca Teorem 1.3.13 den dolayı, L cebirsel kafesi için

$\varphi: L \to Id(L^c),\ \varphi(x) = \{d \in L^c | d \leq x\} = L^c \cap\downarrow x$ dönüşümü bir izomorfizmadır. L cebirsel bir kafes olmak üzere, $\forall x \in L$ için

$\tilde{\varphi}(x) = \left\{d \in L^{c^*} \middle| d \leq x\right\} = L^{c^*} \cap\downarrow x$ tanımlansın.

Lemma 2.1.1. L cebirsel bir kafes olsun. Bu durumda $\forall x, y \in L$ için $x \leq y \Rightarrow \tilde{\varphi}(x) \subseteq \tilde{\varphi}(y)$ dir.

İspat. $x, y \in L$ ve $x \leq y$ olsun. Bu takdirde, $\downarrow x \subseteq\downarrow y$ dir. Buradan,

$\downarrow x \cap L^{c^*} \subseteq\downarrow y \cap L^{c^*}$ olup $\tilde{\varphi}(x) \subseteq \tilde{\varphi}(y)$ dir.

Lemma 2.1.2. L cebirsel bir kafes olsun. Bu takdirde L nin her x elemanı $x = \vee\, \tilde{\varphi}(x)$ şeklinde bir gösterime sahiptir.

İspat. $x \in L - \{1\}$ için $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ olduğundan $\vee\, \tilde{\varphi}(x) = \vee\, \varphi(x) = x$ dir.

Eğer $x = 1$ alınırsa, $\vee\, \tilde{\varphi}(1) = \vee\, (\varphi(1) \cup \{1\}) = 1$ dir.

Lemma 2.1.3. L bir cebirsel kafes olsun ve L^{c^*}kısmi sıralı kümesi artan zincir şartını sağlasın. Bu durumda $k_1, k_2 \in Maks(L^{c^*})$ için $k_1 = k_2$ dir.

İspat. $k_1, k_2 \in Maks(L^{c^*})$ için L^{c^*} sonlu supremum altında kapalı olduğundan

$k_1 \vee k_2 \in L^{c^*}$ dır. $k_1 \leq k_1 \vee k_2$ ve k_1 maksimal eleman olduğundan $k_1 = k_1 \vee k_2$ dir. Buradan $k_2 \leq k_1$ dir. Benzer şekilde $k_1 \leq k_2$ elde edilir. O halde $k_1 = k_2$ dir.

Teorem 2.1.4. L cebirsel bir kafes olsun ve L^{c^*} kısmi sıralı kümesi artan zincir şartını sağlasın. T, L^{c^*} üzerinde bir t-norm olmak üzere L üzerinde bir T_E ikili işlemi şu şekilde tanımlansın:

$$T_E(x,y) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} T(c,d)$$

Bu durumda T_E, L üzerinde bir t-normdur.

İspat. $x,y,z,t \in L$ için $x = y$ ve $z = t$ olsun. Bu durumda $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(y)$ ve $\tilde{\varphi}(z) = \tilde{\varphi}(t)$ dir. $T_E(x,z) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(z)} T(c,d) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(y)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(t)} T(c,d) = T_E(y,t)$ dir. Böylece T_E iyi tanımlıdır.

(i) $T_E(x,1) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(1)} T(c,d) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} T(c,1) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} c = x$ dir.

(ii) $x,y,z \in L$ ve $y \leq z$ olsun. $\tilde{\varphi}(y) \subseteq \tilde{\varphi}(z)$ ve buradan $\vee\, \tilde{\varphi}(y) \leq \vee\, \tilde{\varphi}(z)$ dir. O halde $T_E(x,y) \leq T_E(x,z)$ olup T_E monotondur.

(iii) T ve $\vee$ ikili işlemleri değişmeli olduğundan $T_E(x,y) = T_E(y,x)$ dir.

(iv) $x,y,z \in L$ olsun. $T_E(T_E(x,y),z) = T_E\left(\bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} T(c,d), \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} e\right)$ dir.

$f \leq \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} T(c,d)$ olacak şekilde $f \in L^{c^*}$ elemanı alınsın. $f \in L^{c^*}$ olduğundan $\exists c_1, c_2, \dots, c_n \in \tilde{\varphi}(x)$ ve $\exists d_1, d_2, \dots, d_n \in \tilde{\varphi}(y)$ öyle ki

$f \leq T(c_1,d_1) \vee \dots \vee T(c_1,d_m) \vee \dots \vee T(c_n,d_1) \vee \dots \vee T(c_n,d_m)$ dir. L^{c^*} artan zincir şartını sağladığından, Lemma 2.1.3 den dolayı $f \leq T(c_i,d_j)$ olacak şekilde $c_i \in \tilde{\varphi}(x)$ ve

$d_j \in \tilde{\varphi}(y)$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ vardır. Buradan,

$T_E\left(\bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} T(c,d), \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} e\right) \leq \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} T(T(c,d),e)$ dir.

Ayrıca açık olarak,

$\bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} T(T(c,d),e) \leq T_E\left(\bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} T(c,d), \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} e\right)$ dir.

O halde,

$T_E\left(\bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} T(c,d), \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} e\right) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} T(T(c,d),e)$ dir.

Böylece, $T_E(T_E(x,y),z) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} T(T(c,d),e)$ dir. Aynı şekilde,

$T_E(x,T_E(y,z)) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} T(T(c,d),e)$ dir. Buradan,

$T_E(T_E(x,y),z) = T_E(x,T_E(y,z))$ dir. Böylece T_E birleşmelidir. Sonuç olarak, T_E, L üzerinde bir t-normdur.

Teorem 2.1.5. L cebirsel bir kafes olsun ve L^{c^*} kısmi sıralı kümesi artan zincir şartını sağlasın. S , L^{c^*} üzerinde bir t-konorm olmak üzere L üzerinde bir S_E ikili işlemi şu şekilde tanımlansın:

$$S_E(x,y) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} S(c,d)$$

Bu takdirde S_E, L üzerinde bir t-konormdur.

İspat. $x,y,z,t \in L$ için $x = y$ ve $z = t$ olsun. Bu durumda $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(y)$ ve $\tilde{\varphi}(z) = \tilde{\varphi}(t)$ dir. $S_E(x,z) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(z)} S(c,d) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(y)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(t)} S(c,d) = S_E(y,t)$ dir. Bu durumda S_E iyi tanımlıdır.

(i) $S_E(x,0) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(0)} S(c,d) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} S(c,0) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} c = x$ dir.

(ii) $x,y,z \in L$ ve $y \leq z$ olsun. $\tilde{\varphi}(y) \subseteq \tilde{\varphi}(z)$ ve buradan $\vee\, \tilde{\varphi}(y) \leq \vee\, \tilde{\varphi}(z)$ dir. O halde $S_E(x,y) \leq S_E(x,z)$ olup S_E monotondur.

(iii) S ve $\vee$ ikili işlemleri değişmeli olduğundan $S_E(x,y) = S_E(y,x)$ dir.

(iv) $x,y,z \in L$ olsun. $S_E(S_E(x,y),z) = S_E\left(\bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} S(c,d), \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} e\right)$ dir.

$f \leq \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} S(c,d)$ olacak şekilde $f \in L^{c^*}$ elemanı alınsın. $f \in L^{c^*}$ olduğundan $\exists c_1, c_2, \dots, c_n \in \tilde{\varphi}(x)$ ve $\exists d_1, d_2, \dots, d_n \in \tilde{\varphi}(y)$ öyle ki

$f \leq S(c_1,d_1) \vee \dots \vee S(c_1,d_m) \vee \dots \vee S(c_n,d_1) \vee \dots \vee S(c_n,d_m)$ dir. L^{c^*} artan zincir şartını sağladığından, Lemma 2.1.3 den dolayı $f \leq S(c_i,d_j)$ olacak şekilde $c_i \in \tilde{\varphi}(x)$ ve $d_j \in \tilde{\varphi}(y)$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ vardır. Buradan,

$S_E\left(\bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} S(c,d), \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} e\right) \leq \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} S(S(c,d),e)$ dir.

Ayrıca açık olarak,

$\bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} S(S(c,d),e) \leq S_E\left(\bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} S(c,d), \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} e\right)$ dir.

O halde,

$S_E\left(\bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} S(c,d), \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} e\right) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} S(S(c,d),e)$ dir.

Böylece, $S_E(S_E(x,y),z) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} S(S(c,d),e)$ dir. Aynı şekilde, $S_E(x, S_E(y,z)) = \bigvee_{c\in\tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d\in\tilde{\varphi}(y)} \bigvee_{e\in\tilde{\varphi}(z)} S(S(c,d),e)$ dir. Buradan, $S_E(S_E(x,y),z) = S_E(x, S_E(y,z))$ dir. Böylece S_E birleşmelidir.

Sonuç olarak, S_E, L üzerinde bir t-konormdur.

Önerme 2.1.6. L cebirsel bir kafes olmak üzere L^{c^*} kısmi sıralı kümesi artan zincir şartını sağlasın ve T_1, T_2 L^{c^*} üzerinde $T_1 \leq T_2$ şartını sağlayan iki t-norm olsun. Bu takdirde $T_{1_E} \leq T_{2_E}$ dır.

İspat. $x, y \in L$ olsun. $T_1 \leq T_2$ olduğundan $\forall c \in \tilde{\varphi}(x)$ ve $\forall d \in \tilde{\varphi}(y)$ için

$T_1(c, d) \leq T_2(c, d)$ dir. Buradan,

$T_{1_E}(x, y) = \bigvee_{c \in \tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d \in \tilde{\varphi}(y)} T_1(c, d) \leq \bigvee_{c \in \tilde{\varphi}(x)} \bigvee_{d \in \tilde{\varphi}(y)} T_2(c, d) = T_{2_E}(x, y)$ dir.

Yani, $T_{1_E}(x, y) \leq T_{2_E}(x, y)$ dir.

Sonuç 2.1.7. L cebirsel bir kafes olmak üzere ve L^{c^*} kısmi sıralı kümesi artan zincir şartını sağlasın. Bu takdirde,

$T_{D_E} \leq T_E \leq T_{M_E}$ dir.

2.2. T-norma Bağlı Elemanlar

Bu bölümde tam kafesler üzerinde verilen bir t-norma bağlı indirgenemez elemanların ve asal elemanların kümelerinin bazı cebirsel özellikleri incelenmiş ve örnekler sunulmuştur. Karacal ve diğerleri [10] bir tam kafeste T-asal elemanı tanıtmışlardır. Yılmaz ve diğerleri [20] bir tam kafeste T-indirgenemez eleman tanımını vermişler ve bu elemanların kümesinin bazı cebirsel özelliklerini çalışmışlardır. Çalışmanın bu bölümünde, ilk olarak bazı şartlar altında bir L tam kafesinde T-asal elemanların kümesi ile ko atomların kümesi arasındaki ilişki incelenmiştir. Daha sonra, tam kafeslerin direkt çarpımında T-indirgenemez elemanların kümesi ve T-asal elemanların kümesinin bazı cebirsel özellikleri araştırılmış ve örnekler sunulmuştur. Ayrıca bu kümeler için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Önerme 2.2.1. L bir tam kafes olsun. Eğer $C(L) = \emptyset$ ve $T = T_D$ ise, bu takdirde $T_p = \emptyset$ dir.

İspat. $(L, \leq, 0,1)$ ve $C(L) = \emptyset$ olsun. L deki herhangi bir x elemanı için bir y elemanı vardır öyle ki $x < y < 1$ dir. Böylece $T(y, y) = 0 \leq x$ dir, fakat $y \nleq x$ dir. Buradan

$x \notin T_p(L) \Rightarrow T_p(L) = \emptyset$ dir.

Önerme 2.2.2. L bir tam kafes olsun. Eğer $|C(L)| = 1$ ve $T = T_D$ ise, bu takdirde $T_p(L) = C(L)$ dir.

İspat.

- Varsayalım ki $\ell(L) = 1$ olsun. $L = \{x_1 = 0, x_2 = 1\}$ ve $C(L) = \{x_1\}$ olsun. Açıkça $x_1 \in T_p(L)$ dir. Buradan, $T_p(L) = C(L)$ dir.
- Varsayalım ki $\ell(L) \geq 2$ olsun. $L = \{0 = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 1\}$ ve $C(L) = \{x_{n-1}\}$ olsun. $T(x_2, x_2) = x_1 \leq x_1$ dir, fakat $x_2 \nleq x_1$ dir. Böylece, $x_1 \notin T_p(L)$ dir.

$x_i \in L - (C(L) \cup \{1\})$ olsun. $C(L) = \{x_{n-1}\}$ olduğundan $x_i \leq x_{n-1}$ dir.
$T(x_{n-1}, x_{n-1}) = x_1 \leq x_i$ dir, fakat $x_{n-1} \nleq x_i$ dir. Böylece $x_i \notin T_p(L)$ dir. Açıkça $x_{n-1} \in T_p(L)$ dir. Sonuç olarak $T_p(L) = C(L)$ dir.

- Varsayalım ki L sonsuz uzunluklu bir kafes olsun. $L = \{x_i \mid i \in I\}$ ve I sonsuz indis kümesi olsun. $|C(L)| = 1$ olduğundan vardır bir tek $j \in I$ öyle ki $C(L) = \{x_j\}$ dir. $x_k \in L - (C(L) \cup \{1\})$ olsun. $T(x_j, x_j) = x_1 \leq x_k$ dır, fakat $x_j \nleq x_k$ dır. Böylece, $x_k \notin T_p(L)$ dır. Açıkça $x_j \in T_p(L)$ dir. Buradan $T_p(L) = C(L)$ dir.

Örnek 2.2.3. Şekil 16'da Hasse diyagramı verilen $L = \{0,1, g, f, e, d, m\}$ kafesi ve bu kafes üzerinde

$$T = T_D(x, y) = \begin{cases} x \wedge y & , \quad x = 1 \vee y = 1 \\ 0 & , \quad aksi\ halde \end{cases}$$

t-normu göz önüne alınsın.

Açıkça, $C(L) = \{g\}$ ve $T_p(L) = \{g\}$ dir. Sonuç olarak $C(L) = T_p(L)$ dir.

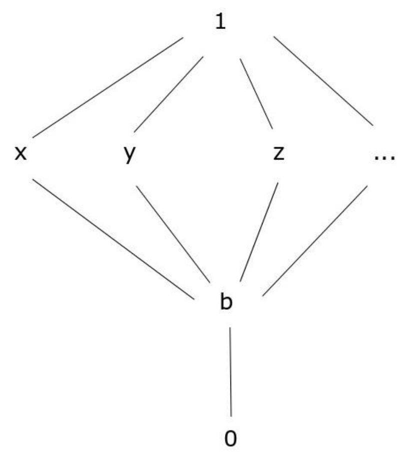
Önerme 2.2.4. L bir tam kafes olsun. Eğer $|C(L)| \geq 2$ ve $T = T_D$ ise, bu takdirde $T_p(L) = \emptyset$ dir.

İspat. Varsayalım ki $L = \{x_i | i \in I\}$ ve $C(L) = \{x_j | j \in J\}$, $J \subseteq I$ ve $|J| \geq 2$ olsun. $x_t \in L - \{1\}$ alınsın.

- $x_t \in L - C(L)$ olsun. Buradan $\forall j, k \in J$ için $T(x_j, x_k) = 0 \leq x_t$ dir. Fakat $x_j \nleq x_t$ ve $x_k \nleq x_t$ dir. Buradan $x_t \notin T_p(L)$ dir.
- $x_t \in C(L)$ olsun. Bu durumda $\forall j, k \in J - \{t\}$ için $(x_j, x_k) = 0 \leq x_t$, dir. Fakat $x_j \parallel x_t$ ve $x_k \parallel x_t$ olduğundan $x_j \nleq x_k$ ve $x_k \nleq x_t$ dir. Buradan $x_t \notin T_p(L)$ dir.

Sonuç olarak $T_p(L) = \emptyset$ dir.

Örnek 2.2.5. Aşağıdaki Şekil 18 ile Hasse diyagramı verilen $L = \{0, b, x, y, z, \dots\}$ kafesi göz önüne alınsın.



Şekil 18. $L = \{0, b, x, y, z, ...\}$ kafesinin Hasse diyagramı

Kolayca görülüyor ki $C(L) = \{x, y, z, ...\}$ dir. L üzerinde $T = T_D$ t-normu göz önüne alındığında $T(y, z) = 0 \leq x$ dir, fakat $y \nleq x, z \nleq x$ dir. Böylece $x \notin T_p(L)$ dir. Benzer şekilde, $0, y, z, .. \notin T_p(L)$ olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak $T_p(L) = \emptyset$ dir.

Önerme 2.2.4 ün tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.2.6. $L = [0,1]$ kafesi ve L üzerinde $T = T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$ t-normu göz önüne alınsın. $C(L) = \emptyset$ dir ve dolayısıyla $|C(L)| = 0$ dır.

- $T_L(x, y) = 0$ olsun . Buradan $x + y - 1 \leq 0 \Rightarrow x + y \leq 1$ dir. $T_L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$ dır, fakat $\frac{1}{2} \nleq 0$ dır. Buradan $0 \notin T_p(L)$ dir.
- $T_L(x, y) \leq \frac{1}{2}$ olsun . Buradan $\max(x + y - 1, 0) \leq \frac{1}{2}$ dir.

(i) $\max(x + y - 1, 0) = 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$ veya $y \leq \frac{1}{2}$ dir.

(ii) $\max(x + y - 1, 0) = x + y - 1 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x + y \leq \frac{3}{2}$ dir. $T\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$ dir, fakat $\frac{3}{4} \nleq \frac{1}{2}$ dir. Böylece $\frac{1}{2} \notin T_p(L)$ dir.

- $T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0) \leq p, p \in (0, \frac{1}{2})$ olsun.

(i) $\max(x + y - 1, 0) = 0 \Rightarrow x + y \leq 1$ dir. $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0 \leq p$ dir, fakat $\frac{1}{2} \nleq p$ dir. Buradan $p \notin T_p(L)$ dir.

- $T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0) \leq q, q \in (\frac{1}{2}, 1)$ olsun.

(i) $\max(x + y - 1, 0) = 0 \Rightarrow x + y \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$ veya $y \leq \frac{1}{2}$ dir.

(ii) $\max(x + y - 1, 0) = x + y - 1 \Rightarrow 0 \leq x + y - 1 \leq q \Rightarrow 1 \leq x + y$

$\leq 1+q$ dır. $T_L\left(\frac{1+q}{2},\frac{1+q}{2}\right)=q\leq q$ dır. Fakat

$q<1\Rightarrow 2q<1+q\Rightarrow q<\frac{1+q}{2}$ yani $\frac{1+q}{2}\nleq q$ dır. Buradan $q\notin T_p(L)$ dir.

Böylece $T_p(L)=\emptyset$ dir.

Teorem 2.2.7. $\left(L_1,\leq,0_{L_1},1_{L_1}\right)$ ve $\left(L_2,\leq 0_{L_2},1_{L_2}\right)$ iki tam kafes ve T_1 ve T_2, sırasıyla, L_1 ve L_2 üzerinde iki t-norm olsun. Bu takdirde,

$(T_1\times T_2)_i(L_1\times L_2)=T_{1_i}(L_1)\times\{1_{L_2}\}\cup\{1_{L_1}\}\times T_{2_i}(L_2)$ dir.

İspat. $(p,q)\in\ T_{1_i}(L_1)\times\{1_{L_2}\}\cup\{1_{L_1}\}\times T_{2_i}(L_2)$ olsun. Buradan

$(p,q)\in\ T_{1_i}(L_1)\times\{1_{L_2}\}$ veya $(p,q)\in\{1_{L_1}\}\times T_{2_i}(L_2)$ dir.Böylece

$(p\in T_{1_i}(L_1)\wedge q=1_{L_2})$ veya $(p=1_{L_1}\wedge q\in T_{2_i}(L_2))$ dir.

$(T_1\times T_2)\big((x,y),(a,b)\big)=(p,q)$ olsun. Böylece,

$(T_1\times T_2)\big((x,y),(a,b)\big)=(p,1_{L_2})$, $p\in T_{1_i}(L_1)$ veya $(T_1\times T_2)\big((x,y),(a,b)\big)=\left(1_{L_1},q\right)$, $q\in T_{2_i}(L_2)$ dir. Eğer $(T_1\times T_2)\big((x,y),(a,b)\big)=(p,1_{L_2})$, $p\in T_{1_i}(L_1)$ ise,

$(T_1(x,a),T_2(y,b))=\left(p,1_{L_2}\right)\Rightarrow T_1(x,a)=p$ ve $T_2(y,b)=1_{L_2}$ dir. Buradan $x=p$

$x=p$ veya $a=p,y=b=1_{L_2}$ dir. Böylece $\left(p,1_{L_2}\right)=(x,y)$ veya $\left(p,1_{L_2}\right)=(a,b)$dir.

Buradan $(p,1_{L_2})\in\ (T_1\times T_2)_i(L_1\times L_2)$ dir.

Benzer şekilde $\left(1_{L_1},q\right)\in\ (T_1\times T_2)_i(L_1\times L_2)$ dir. Buradan,

$T_{1_i}(L_1)\times\{1_{L_2}\}\cup\{1_{L_1}\}\times T_{2_i}(L_2)\subseteq(T_1\times T_2)_i(L_1\times L_2)\ldots(*)$

dir. Tersine, $(p,q)\in\ (T_1\times T_2)_i(L_1\times L_2)$ ve $q\notin T_{2_i}(L_2),p\notin T_{1_i}(L_1)$ olsun.

Bu durumda $q=1_{L_2}$ veya $\exists y,b\in L_2{:}\,T_2(y,b)=q$ ve $y\neq q,b\neq q$ dir. Benzer şekilde

$p=1_{L_1}$ veya $\exists x,a\in L_1{:}\,T_1(x,a)=p$ ve $x\neq p,a\neq p$ dir.

Varsayalım ki $p\neq 1_{L_1}$ve $q\neq 1_{l_2}$ olsun.

$(p,q)=\big(T_1(x,a),T_2(y,b)\big)=(T_1\times T_2)\big((x,y),(a,b)\big)$

$\Rightarrow(p,q)=(x,y)$ veya $(p,q)=(a,b)$ dir. Buradan,

$p=x,q=y$ veya $p=a,q=b$ dir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $p=1_{L_1}$veya $q=1_{L_2}$ dir.

- $p=1_{L_1}$ olsun. $(T_1\times T_2)\big((x,y),(a,b)\big)=\left(1_{L_1},q\right)$

$\Rightarrow (T_1(x,a), T_2(y,b)) = (1_{L_1}, q)$ dir. Buradan, $T_1(x,a) = 1_{L_1}$ve $T_2(y,b) = q$ dır. Böylece $x = a = 1_{L_1}, y = q$ veya $b = q$ dır. Dolayısıyla, $q \in T_{2_i}(L_2)$ dir.

- $q = 1_{L_2}$ olsun. Benzer şekilde, $p \in T_{1_i}(L_1)$ dir. Buradan,

$(p,q) \in T_{1_i}(L_1) \times \{1_{L_2}\} \cup \{1_{L_1}\} \times T_{2_i}(L_2)$ dir.

Böylece $(T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2) \subseteq T_{1_i}(L_1) \times \{1_{L_2}\} \cup \{1_{L_1}\} \times T_{2_i}(L_2) \ldots (**)$ dir.

$(*)$ ve $(**)$ dan dolayı $(T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2) = T_{1_i}(L_1) \times \{1_{L_2}\} \cup \{1_{L_1}\} \times T_{2_i}(L_2)$ dir.

Teorem 2.2.8. $(L_1, \leq, 0_{L_1}, 1_{L_1})$ ve $(L_2, \leq 0_{L_2}, 1_{L_2})$ iki tam kafes, T_1 ve T_2, sırasıyla, L_1, L_2 üzerinde iki t-norm olsun. Bu takdirde,

$(T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2) = T_{1_p}(L_1) \times \{1_{L_2}\} \cup \{1_{L_1}\} \times T_{2_p}(L_2)$ dir.

İspat. Varsayalım ki $(p,q) \in T_{1_p}(L_1) \times \{1_{L_2}\} \cup \{1_{L_1}\} \times T_{2_p}(L_2)$ olsun.

$(p,q) \in T_{1_p}(L_1) \times \{1_{L_2}\}$ veya $(p,q) \in \{1_{L_1}\} \times T_{2_p}(L_2)$ dir. Böylece,

$(p \in T_{1_p}(L_1)$ ve $q = 1_{L_2})$ veya $(p = 1_{L_1}$ ve $q \in T_{2_p}(L_2))$ dir.

$(T_1 \times T_2)((x,y),(a,b)) \leq$ (p,q) olsun. Eğer $(p,q) \in T_{1_p}(L_1) \times \{1_{L_2}\}$ ise,

$(T_1 \times T_2)((x,y),(a,b)) \leq (p, 1_{L_2})$, $p \in T_{1_p}(L_1)$ dir. Buradan

$T_1(x,a) \leq p$ ve $T_2(y,b) \leq 1_{L_2} \Rightarrow (x \leq p$ veya $a \leq p)$ ve $(y \leq 1_{L_2}$veya $b \leq 1_{L_2})$

$\Rightarrow (x,y) \leq (p, 1_{L_2})$ veya $(a,b) \leq (p, 1_{L_2}) \Rightarrow (p, 1_{L_2}) \in (T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2)$ dir.

Benzer şekilde, $(1_{L_1}, q) \in (T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2)$ dir. Buradan,

$T_{1_p}(L_1) \times \{1_{L_2}\} \cup \{1_{L_1}\} \times T_{2_p}(L_2) \subseteq (T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2) \ldots (***)$

dir. Tersine, $(p,q) \in (T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2)$ ve $p \notin T_{1_p}(L_1)$, $q \notin T_{2_p}(L_2)$ olsun.

Bu takdirde,

$p = 1_{L_1}$ veya $\exists x, a \in L_1 : T_1(x,a) \leq p$ ve $x \nleq p, a \nleq p$ dir. Benzer şekilde,

$q = 1_{L_2}$veya $\exists y, b \in L_2 : T_2(y,b) \leq q$ ve $y \nleq q$, $b \nleq q$ dir.

Varsayalım ki $p \neq 1_{L_1}$ve $q \neq 1_{L_2}$ olsun. Buradan,

$(p,q) \geq (T_1(x,a), T_2(y,b)) = (T_1 \times T_2)((x,y),(a,b))$ dir. $(p,q) \in (T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2)$ olduğundan $(p,q) \geq (x,y)$ veya $(p,q) \geq (a,b)$ dır. Böylece $p \geq x, q \geq y$ veya

$p \geq a, q \geq b$ olduğunu elde ederiz ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, $p = 1_{L_1}$ veya $q = 1_{L_2}$ dir.

- $p = 1_{L_1}$ olsun. Bu durumda $(T_1 \times T_2)((x,y),(a,b)) \leq (1_{L_1}, q)$ ve böylece

$(T_1(x,a),T_2(y,b)) \leq (1_{L_1},q)$ dir. O halde

$T_1(x,a) \leq\ 1_{L_1}$ve $T_2(y,b) \leq q \Rightarrow \left(x \leq 1_{L_1}\text{veya } a \leq 1_{L_1}\right)$ ve $(y \leq q$ veya $b \leq q)$ dir.

Buradan $q \in T_{2_p}(L_2)$ dir.

- $q = 1_{L_2}$ olsun. Benzer şekilde, $p \in T_{1_p}(L_1)$ olduğu gösterilebilir. Buradan,

$(T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2) \subseteq T_{1_p}(L_1) \times \{1_{L_2}\} \cup \{1_{L_1}\} \times T_{2_p}(L_2)$ …$(****)$

dir. Sonuç olarak, $(***)$ ve $(****)$ dan

$(T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2) = T_{1_p}(L_1) \times \{1_{L_2}\} \cup \{1_{L_1}\} \times T_{2_p}(L_2)$ dir.

Sonuç 2.2.9. $(L_1, \leq, 0_{L_1,} 1_{L_1})$ ve $(L_2, \leq, 0_{L_2}, 1_{L_2})$ iki tam kafes, T_1 ve T_2, sırasıyla, L_1 ve L_2 üzerinde iki t-norm olsun. Eğer $T_{1_p}(L_1) = T_{1_i}(L_1)$ ve $T_{2_p}(L_2) = T_{2_i}(L_2)$ ise, bu takdirde

$(T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2) = (T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2)$ dir.

İspat. Teorem 2.2.7 ve Teorem 2.2.8 den elde edilir.

Sonuç 2.2.10. $(L_1, \leq, 0_{L_1,} 1_{L_1})$ ve $(L_2, \leq 0_{L_2}, 1_{L_2})$ iki tam kafes, T_1 ve T_2, sırasıyla, L_1 ve L_2 üzerinde iki t-norm olsun. Bu takdirde,

$[T_{1_i}(L_1) \times T_{2_i}(L_2)] \cap [(T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2)] = \emptyset$ dir.

İspat. $T_{1_i}(L_1) \times T_{2_i}(L_2) = \emptyset$ veya $(T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2) = \emptyset$ ise ispat açıktır. Varsayalım ki $T_{1_i}(L_1) \times T_{2_i}(L_2) \neq \emptyset$ ve $(T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda,

$T_{1_i}(L_1) \times T_{2_i}(L_2) \nsubseteq (T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2)$ veya $(T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2) \nsubseteq T_{1_i}(L_1) \times T_{2_i}(L_2)$ olduğu aşağıdaki gibi gösterilir.

- $(p,q) \in T_{1_i}(L_1) \times T_{2_i}(L_2)$ olsun. Buradan $p \in T_{1_i}(L_1)$ ve $q \in T_{2_i}(L_2)$ dir. Böylece $p \neq 1_{L_1}$ ve $q \neq 1_{L_2}$ dir. Dolayısıyla $(p,q) \notin (T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2)$ dir.
- $(p,q) \in (T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2)$ olsun. Buradan $p = 1_{L_1}$, $q \in T_{2_i}(L_2)$ veya

$p \in T_{1_i}(L_1), q = 1_{L_2}$dir. Tanım 1.4.7 den dolayı, $p \notin T_{1_i}(L_1)$ veya $q \notin T_{2_i}(L_2)$ dir.

Buradan $(p,q) \notin T_{1_i}(L_1) \times T_{2_i}(L_2)$ dir.

Sonuç 2.2.11. $(L_1, \leq, 0_{L_1,} 1_{L_1})$ ve $(L_2, \leq 0_{L_2}, 1_{L_2})$ iki tam kafes, T_1 ve T_2, sırasıyla, L_1 ve L_2 üzerinde iki t-norm olsun. Bu takdirde,

$[T_{1_p}(L_1) \times T_{2_p}(L_2)] \cap [(T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2)] = \emptyset$ dir.

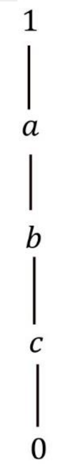
İspat. $T_{1_p}(L_1) \times T_{2_p}(L_2) = \emptyset$ veya $(T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2) = \emptyset$ olursa ispat açıktır. Varsayalım ki $T_{1_p}(L_1) \times T_{2_p}(L_2) \neq \emptyset$ ve $(T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda,

$T_{1_p}(L_1) \times T_{2_p}(L_2) \nsubseteq (T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2)$ veya $(T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2) \nsubseteq T_{1_p}(L_1) \times T_{2_p}(L_2)$ olduğu aşağıdaki gibi gösterilir.

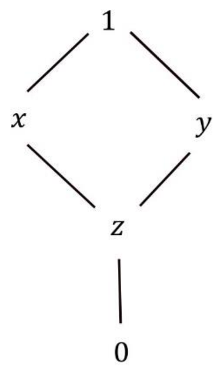
- $(p, q) \in T_{1_p}(L_1) \times T_{2_p}(L_2)$ olsun. Buradan $p \in T_{1_p}(L_1)$ ve $q \in T_{2_p}(L_2)$ dir. Böylece, $p \neq 1_{L_1}$ ve $q \neq 1_{L_2}$ dir. Böylece $(p, q) \notin (T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2)$ dir.
- $(p, q) \in (T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2)$ olsun. Buradan $p = 1_{L_1}$, $q \in T_{2_p}(L_2)$ veya

$p \in T_{1_p}(L_1), q = 1_{L_2}$ dir. Tanım 1.4.8 den dolayı $p \notin T_{1_p}(L_1)$ veya $q \notin T_{2_p}(L_2)$ dir. Buradan $(p, q) \notin T_{1_i}(L_1) \times T_{2_i}(L_2)$ dir.

Örnek 2.2.12. Hasse diyagramları, aşağıda, sırasıyla, Şekil 19 ile Şekil 20 verilen $L_1 = \{0, a, b, c, 1\}$ ve $L_2 = \{1, x, y, z, 0\}$ kafesleri göz önüne alınsın. $T_1 = T_2 = T_M$ için $T_{1_i}(L_1) = \{a, b, c, 0\} = T_{1_p}(L_1)$ ve $T_{2_i}(L_2) = \{x, y, 0\} = T_{2_p}(L_2)$ olduğu açıktır.



Şekil 19. $L_1 = \{0, a, b, c, 1\}$ kafesinin Hasse diyagramı



Şekil 20. $L_2 = \{1, x, y, z, 0\}$ kafesinin Hasse diyagramı

$T_{1_i}(L_1) \times T_{2_i}(L_2) = \{(a,x),(a,y),(a,0),(b,x),(b,y),(b,0),(c,x),(c,y),(c,0),$ $(0,x),\ (0,y),(0,0)\} = T_{1_p}(L_1) \times T_{2_p}(L_2)$ dir.

$(T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2) = \{(1,x),(1,y),(1,0),(a,1),(b,1),(c,1),(0,1)\}$
$= (T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2)$ dir.

Açıkça, $(1,x),(a,1) \in L_1 \times L_2$ için $(T_1 \times T_2)\big((1,x),(a,1)\big) =$ $\big(T_1(1,a), T_2(x,1)\big) = (a,x)$ ve $(a,x) \notin (T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2)$ dir. Bundan dolayı, $(T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2) \neq T_{1_i}(L_1) \times T_{2_i}(L_2)$ dir.

Benzer şekilde,

$(1,x),(a,1) \in L_1 \times L_2$ için $(T_1 \times T_2)\big((1,x),(a,1)\big) = \big(T_1(1,a), T_2(x,1)\big)$ $= (a,x) \leq (a,x)$ dir, fakat $(1,x) \nleq (a,x)$ ve $(a,1) \nleq (a,x)$ dir. Dolayısıyla, $(T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2) \neq T_{1_p}(L_1) \times T_{2_p}(L_2)$ dir.

Örnek 2.2.13. Hasse diyagramı Şekil 13 ile verilen $L_1 = \{1, a, b, c, 0\}$ kafesi üzerinde $T_1(x,y) = x \wedge y$ t-normu ve Hasse diyagramı Şekil 16 ile verilen $L_2 = \{1, g, f, e, d, m, 0\}$ kafesi üzerinde

$$T_2(x,y) = \begin{cases} e & , \quad x = f \ ve \ y = f \\ x \wedge y & , \quad aksi\ halde \end{cases}$$

t-normu göz önüne alınsın.

Bu takdirde,

$T_{1_i}(L_1) = \{a, b, 0\} = T_{1_p}(L_1)$ ve $T_{2_i}(L_2) = \{d, m, g, f\} = T_{2_p}(L_2)$ olduğu açıktır.

$T_{1_i}(L_1) \times T_{2_i}(L_2) = \{(a,d),(a,m),(a,g),(a,f),(b,d),(b,m),(b,g),(b,f),$ $(0,d),(0,m),(0,g),(0,f)\} = T_{1_p}(L_1) \times T_{2_p}(L_2)$ dir.

$(T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2) = \{(1,g),(1,f),(1,d),(1,m),(a,1),(b,1),(0,1)\}$

$= (T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2)$ dir.

Ancak,

$(1, d), (a, 1) \in L_1 \times L_2$ için $(T_1 \times T_2)\big((1, d), (a, 1)\big) = \big(T_1(1, a), T_2(d, 1)\big) = (a, d)$ dir.

$(a, d) \notin (T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2)$ dir. Bundan dolayı,

$(T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2) \neq T_{1_i}(L_1) \times T_{2_i}(L_2)$ dir.

Benzer şekilde,

$(1, d), (a, 1) \in L_1 \times L_2$ için $(T_1 \times T_2)\big((1, d), (a, 1)\big) = \big(T_1(1, d), T_2(x, 1)\big)$

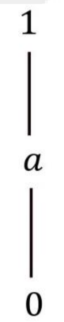
$= (a, d) \leq (a, d)$ dir, fakat $(1, d) \nleq (a, d)$ ve $(a, 1) \nleq (a, d)$ dir. Dolayısıyla,

$(T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2) \neq T_{1_p}(L_1) \times T_{2_p}(L_2)$ dir.

Örnek 2.2.14. Hasse diyagramı aşağıda Şekil 21 ile verilen $L_1 = \{1, a, 0\}$ kafesi üzerinde $T_1(x, y) = x \wedge y$ t-normu ve Hasse diyagramı Şekil 22 ile verilen

$L_2 = \{1, x, y, z, t, 0\}$ kafesi üzerinde $T_2(x, y) = \begin{cases} x \wedge y & , \ x = 1 \ veya \ y = 1 \\ 0 & , \quad aksi \ halde \end{cases}$

t-normu göz önüne alınsın.



Şekil 21. $L_1 = \{0, a, 1\}$ kafesinin Hasse diyagramı

Şekil 22. $L_2 = \{1, x, y, z, t, 0\}$ kafesinin Hasse diyagramı

Bu takdirde,

$T_{1_i}(L_1) = \{a, 0\} = T_{1_p}(L_1)$ ve $T_{2_i}(L_2) = \{x, y, z, t\}$, $T_{2_p}(L_2) = \{x\}$ olduğu açıktır.

Ayrıca,

$T_{1_i}(L_1) \times T_{2_i}(L_2) = \{(a, x), (a, y), (a, z), (a, t), (0, x), (0, y), (0, z), (0, t)\}$ ve

$T_{1_p}(L_1) \times T_{2_p}(L_2) = \{(a, x), (0, x)\}$ dir.

$(T_1 \times T_2)_i(L_1 \times L_2) = \{(1, x), (1, y), (1, z), (1, t), (a, 1), (0,1)\}$ ve

$(T_1 \times T_2)_p(L_1 \times L_2) = \{(1, x), (a, 1), (0,1)\}$ dir.

3. İRDELEME

Bu çalışmanın iki amacından birincisi, cebirsel bir L kafesinde üretici elemanların kısmi sıralı kümesi üzerinde verilen bir t-normu kafes üzerine genişleterek L kafesi üzerinde bir t-norm elde etmektir. Bu amaç doğrultusunda, cebirsel kafesler üzerinde t-norm üretmek için bir inşa yöntemi verilmiştir. Aynı yöntem, t-konorm inşa etmek için kullanılmıştır. Çalışmanın ikinci amacı ise, tam kafesler üzerinde verilen bir t-norma bağlı indirgenemez elemanların kümesinin ve asal elemanların kümesinin bazı cebirsel özelliklerini araştırmaktır. Bu nedenle, bazı şartlar altında bir L tam kafesinde T-asal elemanların kümesi ile ko atomların kümesi arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca, tam kafeslerin direkt çarpımında T-indirgenemez elemanların kümesi ve T-asal elemanların kümesi için bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir. Bulguları desteklemek amacıyla örnekler sunulmuştur.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada elde edilen bazı sonuçlar şu şekildedir:

1. Cebirsel bir L kafesinde kompakt elemanların kümesi üzerinde tanımlı bir t-norm, L üzerinde bir t-norm elde edecek şekilde genişletilmiştir.
2. T-norm elde etmek için verilen yöntem, t-ko norm elde etmek için kullanılmıştır.
3. Bazı şartlar altında bir L tam kafesinde T-asal elemanların kümesi ile ko atomların kümesi arasındaki ilişki incelenmiştir.
4. Tam kafeslerin direkt çarpımında T-indirgenemez elemanların kümesi ve T-asal elemanların kümesi için bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir.

5. ÖNERİLER

Bu çalışmada elde edilen bulgular ışığında,

1. Benzer inşa yöntemleri, farklı elemanlar tarafından üretilen kafesler üzerinde t-norm ve t-konorm elde etmek için kullanılabilir. Ayrıca verilen yöntem, kafesler üzerinde uninorm inşa etmek için incelenebilir.
2. Tam kafesler üzerinde tanımlı bir t-norma bağlı T-indirgenemez eleman ve T-asal eleman tanımları uninormlara genişletilerek bu elemanlar için benzer cebirsel özellikler araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Alsina, C., Trillas, E. and Valverde, L., On Non-Distributive Logical Connectives for Fuzzy Set Theory, Busefal 3 (1980) 18-29.

2. Birkhoff, G., Lattice Theory, American Mathematical Society Colloquinum Publications, Rhode Island, 1967.

3. Calvo, T., Kolesarova A., Komornikova, M. and Mesiar, R., Aggregation Operators: Properties, Classes and Construction Methods, Physica-Verlag GmbH Heidelberg, Germany, 2002.

4. Crawley, P., Decomposition Theory for Nonsemimodular Lattices, Trans. Amer. Math. Soc. 99 (1961) 246-254.

5. Davey, B. A. and Priestley H. A., Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Press, Cambridge, United States, 1990.

6. De Baets, B. and Mesiar, R., Triangular norms on product lattices, Fuzzy sets syst. 104(1999) 61-75.

7. De Cooman, G. and Kerre, E., Order Norms on Bounded Partially Ordered Sets, J. Fuzzy Math., 2 (1994) 281-310.

8. Gratzer, G., General Lattice Theory, second ed., Birkhauser verlag, Basel, Switzerland, 1998.

9. Jenei, S. and De Baets, B., On the Direct Decomposability of T-norms on Product Lattices, Fuzzy Sets and Systems, 139 (2003) 699-707.

10. Karacal, F. and Sagiroglu, Y., Infinitely $\vee$-Distributive T-norms on Complete Lattices and Pseudo-Complements, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 32-43.

11. Klement, E. P., Mesiar, R. and Pap, E., Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

12. Klement, E., Mesiar, R. and Pap, E., Triangular Norms as Ordinal Sums of Semigroups in the Sense of A.H. Clifford, Semigroup Forum, 65 (2002) 71-82.

13. Menger, K., Statistical metrics, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 8 (1942) 535-537.

14. Nation, J.B., Notes on Lattice Theory, math.hawaii.edu/~jb/math618/Nation_ LatticeTheory. pdf, 13 Kasım 2019.

15. Saminger, S., On Ordinal Sums of Triangular Norms on Bounded Lattices, Fuzzy Sets and Systems, 157 (2006) 1403-1416.

16. Schweizer, B. and Sklar, A., Statistical Metric Spaces, Pasific J. Math., 10 (1960) 313-334.

17. Schweizer, B. and Sklar, A., Associative Functions and Abstract Semigroups, Publ. Math. Debrecen, 10 (1963) 69-81.

18. Schweizer, B. and Sklar, A., Probabilistic Metric Spaces, Elsevier, Amsterdam, 1983.

19. Semenova, M. V., Lattices with Unique Irreducible Decompositions, Algebra and Logic, 39, 1 (2000) 93-103.

20. Yılmaz, Ş. and Kazancı, O., Constructions of triangular norms on lattices by means of irreducible elements, Information Sciences, 397–398 (2017) 110–117.

21. Yılmaz, Ş., Kafeslerde İndirgenemez Elemanlar Yardımıyla Üretilen T-normlar, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.

22. Zhang, D., Triangular Norms on Partially Ordered Sets, Fuzzy Sets and Systems, 153, 2 (2005) 195-209.

ÖZGEÇMİŞ

Rabia İŞÇİ 1993 yılında Trabzonda doğdu. İlk öğrenimini Mevlüt Selami Yardım Ortaokulu'nda, orta öğrenimini Vakfıkebir Anadolu Lisesi'nde tamamlamıştır.

2011-2012 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü lisans programını kazandı ve 2016 yılında lisans programından bölüm birincisi olarak mezun olmuştur.

2015-2016 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi'nden Pedagojik Formasyon Eğitimi Sertifikasını almıştır.

2016-2017 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrenimine başlamıştır. Rabia İŞÇİ İngilizce bilmektedir.