KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE ÜÇGENSEL NORMLARIN İNŞASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve YEŞİLYURT

HAZİRAN 2019
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE ÜÇGENSEL NORMLARIN İNŞASI

Merve YEŞİLYURT

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 / 05 /2019
Tezin Savunma Tarihi : 10 / 06 /2019

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Ümit ERTUĞRUL

Trabzon 2019

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında
Merve YEŞİLYURT Tarafından Hazırlanan

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE ÜÇGENSEL NORMLARIN İNŞASI

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 21 / 05 / 2019 gün ve 1805 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Funda KARAÇAL ....

Üye : Doç. Dr. Mücahide Nesibe KESİCİOĞLU ....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ümit ERTUĞRUL ....

Prof. Dr. Asim KADIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Çalışma süresince özendirici, yapıcı tutumu ile destek olan bu çalışmanın hazırlanması süreci boyunca önerileriyle, yönlendirmeleriyle ve sağladığı motivasyonla bana rehberlik yapan, tecrübelerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ümit ERTUĞRUL' a en içten dileklerimle saygı ve minnetimi sunuyorum.

Ayrıca tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini her daim arkamda hissettiğim aileme, özel olarak arkadaşım Nilay GÜLAY'a ve üzerimde emeği geçen KTÜ Matematik Bölümünün tüm değerli hocalarına çok teşekkür ederim. İlaveten, 2210-Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

MERVE YEŞİLYURT

Trabzon 2019

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normların İnşası" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Ümit ERTUĞRUL' un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 10 / 06 / 2019

Merve YEŞİLYURT

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE ÜÇGENSEL NORMLARIN İNŞASI

MERVE YEŞİLYURT

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ümit ERTUĞRUL
2019, 76 Sayfa

Bu çalışmanın amacı sınırlı L kafesinin alt aralıkları üzerinde tanımlı t- normlardan L sınırlı kafesi üzerinde bir t- norm elde etmek için bir inşa metodu vermek, bu metodu literatürdeki mevcut yöntemlerle karşılaştırmak ve bu metodu genelleştirmektir.

Bu çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1 de çalışmaya temel oluşturan bazı tanım, teoremler verilmiştir. Bölüm 2 de, ilk önce L sınırlı kafesinin $[0, a_1], [a_1, 1]$ alt aralıkları üzerinde tanımlı t- normlardan L sınırlı kafesi üzerinde bir t- norm elde etmek için bir metot verilmiştir. Bu metot mevcut metotlarla karşılaştırılmış ve farklılıkları örneklerle ortaya konulmuştur. Dahası bu metot genelleştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Üçgensel norm, Sınırlı kafes

Master Thesis

SUMMARY

CONSTRUCTION OF TRIANGULAR NORMS ON BOUNDED LATTICES

MERVE YEŞİLYURT

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assistant Professor Ümit ERTUĞRUL
2019, 76 Pages

Aim of this study is to give a construction method to obtain a t- norm on the bounded lattice L from the t- norms on subintervals of bounded lattice L, is to compare the mentioned method with the available methods in the literature and is to generalize this method.

This study consists of two main parts. In Chapter 1, some definitions and theorems which are the basis of our study are given. In Chapter 2, a method to obtain a t- norm on the bounded lattice L from the t- norms on the subintervals $[0, a_1]$, $[a_1, 1]$ of bounded lattice L is given at first. This method is compared with the existing methods and the differences are presented with examples. Moreover, this method is generalized.

Key Words: Triangular norms, Bounded lattice

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

SEMBOLLER DİZİNİ

$\cap$	: Arakesit işlemi
$\cup$	: Birleşim işlemi
$\subseteq$	: Kümeler arasında alt küme bağıntısı
$A \cap B$	: Kümelerin arakesiti
$A \cup B$	: Kümelerin birleşimi
$A \setminus B$	: Kümelerin farkı
$A \times B$	: Kümelerin kartezyen çarpımı
$\emptyset$	: Boş küme
$\bar{X}$	: X in üst sınırlarının kümesi
$\underline{X}$	: X in alt sınırlarının kümesi
$\wp(X)$	: X in güç kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$[a, b]$	: Kapalı aralık
(a, b)	: Açık aralık
$[a, b), (a, b]$	: Yarı-açık aralık
$\wedge$	: Kafeste infimum işlemi
$\vee$	: Kafeste supremum işlemi
t-norm	: Üçgensel norm
t-konorm	: Üçgensel konorm
$a \parallel b$	: a elemanı ile b elemanı kıyaslanamaz

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Menger'in 'Statistical Metrics' adlı çalışması ile üçgensel normların tarihi başlamıştır [25]. Üçgensel normlar klasik üçgen eşitsizliğinin bir genelleştirmesi sırasında ortaya çıkmıştır. Günümüzde kullanıldığı haliyle t- normların aksiyomları Schweizer ve Sklar [28-32] tarafından verilmiştir. Literatürde üçgensel normlar birçok farklı açıdan ele alınmıştır: üçgensel normlardan elde edilen sıralamalar [6,20,21], üçgensel normlardan elde edilen kapanış operatörleri [16] vb. Üçgensel normlar ilk olarak $[0,1]$ birim reel aralığı üzerinde tanımlanmıştır [22]. Daha sonra $[0,1]$ birim reel aralık durumundan daha genel olan L sınırlı kafesler üzerinde tanımlanmıştır ve birçok araştırmacı sınırlı kafesler üzerindeki t- normları araştırmıştır [4,6,26].

Birçok uygulama alanı olması sebebiyle, sınırlı kafesler üzerindeki üçgensel normların inşası araştırmacılar tarafından ilgi çeken bir konu olmuştur. Dahası, üçgensel normların uninormların ve nullnormların özel bir sınıfı [7,8] olduğu da göz önüne alınınca, üçgensel normlar için elde edilecek bir inşa yönteminin sadece üçgensel normlar için değil, aggregation fonksiyonlarının ailesi için de oldukça önemli olduğu anlaşılır.

Literatür incelendiğinde, Saminger'in sınırlı kafesler üzerinde t- normların inşası üzerine yaptığı çalışma görülür [26]. Fakat bahsi geçen inşa metodu her durumda herhangi bir kafes üzerinde veya keyfi t- normlar için bir t-norm üretmemektedir. Daha sonra, Ertuğrul vd. [6] Saminger'in inşa yönteminin her zaman bir t- norm üretmiyor olması gerçeğinden hareketle, sınırlı kafesin bir alt aralığı üzerinde tanımlı bir t- normdan L üzerinde bir t- norm elde etmek için bir metot önermiştir. Fakat bu yöntem de sınırlı kafesin $[a,1]$ tipinde bir alt aralığında tanımlı bir t- normdan L kafesi üzerinde bir t- norm elde etmenin bir yolunu verir. L nin alt aralıklarında tanımlı t- normların bir inşasını sağlamaz. Ertuğrul vd. ve Saminger'in ardından Çaylı [4] da Ertuğrul vd. lerinin inşa metodunu modifiye ederek alternatif bir metot önermiştir.

Bu çalışmada, L sınırlı kafesinin alt aralıkları üzerinde tanımlı t- normlardan, hiçbir ek şarta gerek olmaksızın, L sınırlı kafesi üzerinde bir t-norm elde etmek için inşa metotları üzerinde durulmuştur.

1.2. Kısmen Sıralı Kümeler ve Kafesler

1.2.1.Kısmen Sıralı Kümeler

Tanım 1.1. [2] K bir küme ve $\leq$, K üzerinde bir bağıntı olsun. Her $a, b, c \in K$ için

K1. Her $a \in K$ için $a \leq a$ (Yansıma)

K2. $a, b \in K$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$ (Ters Simetri)

K3. $a, b, c \in K$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$ (Geçişme)

şartları sağlanırsa, $\leq$ bağıntısına K üzerinde bir sıralama (veya kısmen sıralama) denir. Üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı mevcut olan K kümesine sıralı küme (veya kısmen sıralı küme) denir ve bu küme $(K, \leq)$ ikilisi ile gösterilir.

Eğer $a \leq b$ ve $a \neq b$ ise $a < b$ yazılır ve 'a, b de öz olarak içerilir' olarak ifade edilir. $a \leq b$ bağıntısı $b \geq a$ olarak da yazılır ve 'a, b de içerilir' olarak ifade edilir. Benzer şekilde $a < b$, $b > a$ olarak da yazılır.

Örnek 1.2. A bir küme olmak üzere, $(\wp(A), \subseteq)$ kısmen sıralı bir kümedir.

Lemma 1.3. [2] Herhangi bir kısmen sıralı kümede hiçbir a için $a < a$ ve $a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$ dir.

Uyarı 1.4. [2] $(K, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun.

(i) Bir $a \in K$ elemanı her $x \in K$ için $a \leq x$ şartını sağlayacak şekilde mevcutsa böyle bir a elemanına K nin en küçük elemanı denir ve 0 ile gösterilir. Bu elemanın tek olduğu açıktır.

(ii) Bir $b \in K$ elemanı her $x \in K$ için $x \leq b$ şartını sağlayacak şekilde mevcutsa böyle bir b elemanına K nin en büyük elemanı denir ve 1 ile gösterilir. Bu elemanın tek olduğu açıktır.

Eğer 0 ve 1 elemanları varsa, her $x \in K$ için $0 \leq x \leq 1$ olduğundan 0 ve 1 e evrensel sınırlar denir.

Lemma 1.5. [2] $(K, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ olsun.
Eğer $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_1$ ise $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ (ters devir) dir.

K4. Her a ve b için $a \leq b$ veya $b \leq a$ dir.

Tanım 1.6. [2] K4 özelliğini sağlayan bir kısmen sıralı kümeye tam sıralı küme, zincir veya lineer sıralı küme denir.

Teorem 1.7. [2] $(K, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $T \subseteq K$ alt kümesi ise, $(T, \leq)$ kısmen sıralı bir kümedir. Özel olarak, K bir zincir ise T de zincirdir.

Örnek 1.8. [2] $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi bir zincir olduğundan $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi doğal sıralamaya göre bir zincirdir.

Tanım 1.9. [2] $(K, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. $a, b \in K$ için 'a örter b' denir: $\Leftrightarrow$ $a > b$ olup, $a > x > b$ olacak şekilde bir $x \in K$ elemanı mevcut değildir.

Tanım 1.10. [2] $(K, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. $a, b \in K$ için $a \nleq b$ ve $b \nleq a$ ise yani a ve b elemanları kıyaslanmıyorsa a ve b elemanlarına kıyaslanamayan elemanlar denir ve bu $a \parallel b$ ile gösterilir.

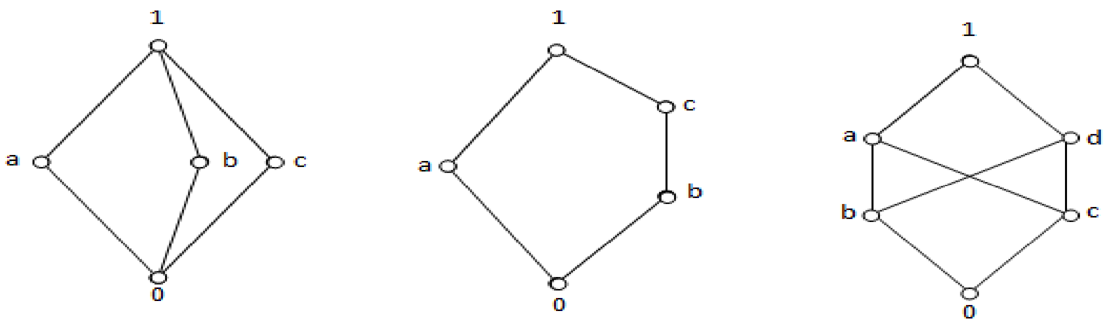
Tanım 1.11. $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes $a_0, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n \in L$, $0 = a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_j \leq \cdots \leq a_i \leq \cdots \leq a_0 = 1$ olsun. I_{a_i} ve $I_{a_i, a_{i+1}, \dots, a_j}$ sırasıyla

$$I_{a_i} := \{x \in L : x \parallel a_i \ ve \ a_{i+1} \leq x \leq a_{i-1}\}$$

$$I_{a_i, a_{i+1}, \dots, a_j} := \{x \in L : x \parallel a_i, \ x \parallel a_{i+1}, \dots, \ x \parallel a_j \ ve \ a_{j-1} \leq x \leq a_{i+1}\}$$

olarak tanımlanır.

Kapsama bağıntısı kullanılarak herhangi bir sonlu kısmen sıralı kümenin aşağıdaki gibi bir grafiksel gösterimi elde edilir: K nin her bir elemanını göstermek için küçük bir daire çizilir ve $a > b$ olduğunda a, b den daha yukarı yazılır. a, b yi örttüğünde a dan b ye düz bir çizgi çizilir. Sonuçta elde edilen şekle K nin bir diyagramı denir. Aşağıda bazı kısmen sıralı kümelerin diyagram örnekleri verilmiştir.



M_5 N_5 P_6

Şekil 1.1. Diyagram örnekleri

Tanım 1.11. [2] $(K, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $Y \subseteq K$ olsun.

(i) $a \in Y$ olsun. Eğer $x < a$ olacak şekilde $x \in Y$ mevcut değil ise bu a elemanına Y kümesinin bir minimal elemanı denir.

Y kümesinde maksimal eleman, dual olarak tanımlanır.

En küçük eleman bir minimal eleman ve en büyük eleman da bir maksimal elemandır. Ancak tersinin doğru olması gerekmez.

Teorem 1.12. [2] $(K, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $\emptyset \neq Y \subseteq K$ sonlu alt küme olsun. Bu takdirde Y kümesi minimal ve maksimal elemanlara sahiptir.

Teorem 1.13. [2] Zincirlerde minimal (maksimal) ve en küçük (en büyük) eleman kavramları denktir. Böylece keyfi alınan sonlu bir zincir en küçük ve en büyük elemanlara sahiptir.

Tanım 1.14. [2] $(K, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $Y \subseteq K$ olsun.

(i) $a \in K$ ve her $y \in Y$ için $y \leq a$ ise, a elemanına Y kümesinin bir üst sınırı denir ve Y kümesinin üst sınırlarının kümesi $\overline{Y}$ ile gösterilir. Her $t \in \overline{Y}$ için $a \leq t$ ise, a elemanına Y kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $a = supY$ veya $a = \vee Y$ ile gösterilir.

(ii) $b \in K$ ve her $y \in Y$ için $b \leq y$ ise, b elemanına Y kümesinin bir alt sınırı denir ve Y kümesinin alt sınırlarının kümesi $\underline{Y}$ ile gösterilir. Her $k \in \overline{Y}$ için $k \leq b$ ise, b elemanına Y kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $b = infY$ veya $b = \wedge Y$ ile gösterilir.

1.2.2. Kafesler

Tanım 1.15. [2] $(L, \leq)$ bir kısmen sıralı kümesi olsun. Her $x, y \in L$ için $sup\{x, y\}$ ve $inf\{x, y\}$ varsa L ye kafes denir.

$x, y \in L$ için $x \vee y := sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y := inf\{x, y\}$ olarak gösterilir.

Örnek 1.16. [2] Şekil 1.1 de verilen diyagram örneklerinde M_5 ve N_5 kafes olup P_6 kafes değildir.

Örnek 1.17. [2]$(\wp(A), \subseteq)$ kısmen sıralı kümesi bir kafestir. Bu kafeste her $X, Y \in \wp(A)$ için $X \vee Y = X \cup Y$ ve $X \wedge Y = X \cap Y$ dir.

Tanım 1.18. [2] Bir L kafesine sınırlı kafes denir:$\Leftrightarrow$ L, en küçük eleman 0 ve en büyük eleman 1 e sahiptir. Bu durum, kısaca $(L, \leq, 0, 1)$ ile gösterilir.

Tanım 1.19. [2] L bir kafes ve $A \subseteq L$ olsun. A alt kümesine L kafesinin bir alt kafesidir denir:$\Leftrightarrow$ Her $a, b \in A$ için $a \wedge b \in A$ ve $a \vee b \in A$ dir.

Bir kafeste boş küme ve tek elemanlı alt kümeler alt kafestir. Daha genel olarak, $(L, \leq)$ bir kafes ve $a, b \in L$ için $a \leq b$ ise

$$[a, b] := \{x \in L | a \leq x \leq b\}$$

ile tanımlanan $[a, b]$ kapalı aralığı bir alt kafestir.

Benzer şekilde L kafesinin

$(\mathrm{a}, \mathrm{b}] \coloneqq \{x \in L | a < x \leq b\}$,

$[\mathrm{a}, \mathrm{b}) \coloneqq \{x \in L | a \leq x < b\}$,

yarı açık aralıkları ve

$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \coloneqq \{x \in L | a < x < b\}$

açık aralığı da tanımlanabilir.

Tanım 1.20. [2] $(T, \leq_1)$ ve $(K, \leq_2)$ iki kısmen sıralı küme olsun. T ve K kısmen sıralı kümelerinin

$T \times K = \{(x, y) | x \in T, y \in K\}$

şeklinde tanımlanan $T \times K$ kartezyen çarpım kümesi

$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2$ ve $y_1 \leq_2 y_2 \quad x_1, x_2 \in T,\ y_1, y_2 \in K$

bağıntısı altında kısmen sıralı bir kümedir. Bu $(T \times K, \leq)$ kısmen sıralı kümesine T ve K kısmen sıralı kümelerinin direkt çarpım kümesi denir.

Teorem 1.21. [2] M ve N iki kafes olsun. $M \times N$ direkt çarpımı da yine bir kafestir. Burada $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M \times N$ için

$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2)$

$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2)$

dır.

Bir kafeste $\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemleri önemli cebirsel özelliklere sahiptir.

Lemma 1.22. [2] K kısmen sıralı bir küme olsun. İnfimum ve supremum işlemleri (eğer varsa) aşağıdaki özelliklere sahiptir:

L1. $a \wedge a = a, \quad a \vee a = a,$ (İdempotent)

L2. $a \wedge b = b \wedge a, \quad a \vee b = b \vee a,$ (Komütatif)

L3. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$ (Birleşme)

L4. $a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a.$ (Yok etme)

Üstelik $a \leq b$ ifadesi $a \wedge b = a$ ve $a \vee b = b$ şartlarının her birine denktir.

Lemma 1.23. [2] K, 0 en küçük elemanına sahip kısmen sıralı bir küme ise her $a \in K$ için

$0 \wedge a = 0$ ve $0 \vee a = a$

dir. Dual olarak K, 1 evrensel üst sınırına sahip ise her $a \in K$ için

$a \wedge 1 = a$ ve $a \vee 1 = 1$

dir.

Lemma 1.24. [2] Herhangi bir kafeste infimum ve supremum işlemleri sıra korurdur. Yani bir L kafesinde $a, b, c \in L$ için

$b \leq c$ ise $a \wedge b \leq a \wedge c$ ve $a \vee b \leq a \vee c$,

sağlanır.

Lemma 1.25. [2] L bir kafes olsun. Her $a, b, c \in L$ için

$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

eşitsizlikleri sağlanır.

1.3. $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ Üzerinde Üçgensel Normlar ve Konormlar

1.3.1. Temel Tanım ve Teoremler

1.3.1.1. $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ Üzerinde Üçgensel Normlar

Aksi belirtilmedikçe, [0,1] üzerindeki doğal sıralamayı ≤ ile göstereceğiz.

Tanım 1.26. [22] Bir üçgensel norm (kısaca t- norm) T, [0,1] birim aralığı üzerinde bir ikili işlemdir; $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu her $x, y, z \in [0,1]$ için aşağıdaki özellikleri sağlar.

T1. $T(x, y) = T(y, x)$ (Komütatiflik)

T2. $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ (Birleşme)

T3. $y \leq z$ ise $T(x, y) \leq T(x, z)$ (Monotonluk)

T4. $T(x, 1) = x$ (Sınır şartı)

özelliklerini sağlar.

Örnek 1.27. [22] Dört temel t- norm olan T_M, T_P, T_L, T_D aşağıdaki gibidir:

$T_M(x, y) = min(x, y)$ (Minimum)

$T_P(x, y) = xy$ (Çarpım)

$T_L(x, y) = max(x + y - 1, 0)$ (Lukasiewicz t-norm)

$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0,1)^2, \\ min(x, y), & \text{Aksi halde.} \end{cases}$$ (Drastik çarpım)

Uyarı 1.28. [22] T, [0,1] birim aralığı üzerinde bir t- norm olsun.

(i) Tanım 1.26 ile her T t- normu her $x \in [0,1]$ için

$T(0, x) = T(x, 0) = 0$ (1)

$T(1, x) = x$ (2)

eşitliklerini sağlar. (1) ve (2)' de verilen eşitliklere ilave sınır şartı denir. Böylece her t-norm $[0,1]^2$ birim kare üzerinde çakışıktır.

(ii) Bir T t- normunun ikinci bileşene göre monotonluğu, (T1) komütatiflik ve (T3) monotonluk özellikleri ile tanımlanır. Bu monotonluk her iki bileşene göre monotonluğa denktir; yani

$x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ ise $T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2)$ (3)

sağlanır.

Tanım 1.29. [22]

(i) T_1 ve T_2 iki t- norm olsun. Eğer her $x, y \in [0,1]$ için $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ eşitsizliği sağlanıyor ise T_1, T_2 t- normundan daha zayıftır veya denk olarak T_2, T_1 t-normundan daha güçlüdür denir ve bu durum $T_1 \leq T_2$ ile gösterilir.

(ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise yani $T_1 \leq T_2$ ve bir $x_0, y_0 \in [0,1]$ için $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ ise, bu durum $T_1 < T_2$ ile gösterilir.

Uyarı 1.30. [22]

(i) T, [0,1] birim aralığı üzerinde bir t-norm olsun.

Bu durumda keyfi T t- normu için

$T_D \leq T \leq T_M$ (4)

eşitsizliği sağlanır.

(ii) Açıkça $T_L < T_P$ olduğundan dört temel t- norm arasında

$T_D < T_L < T_P < T_M$ (5)

bağıntısı vardır.

Tanım 1.31. [26] $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve I lineer sıralı indeks kümesi olsun. L nin $\{(a_i, b_i)\}_{i \in I}$ L nin ikişer ikişer ayrık alt aralıklarının bir ailesi ve $\{T^{[a_i, b_i]}\}_{i \in I}$ aralıkları üzerindeki t- normların bir ailesi olsun. $T = (< a_i, b_i, T^{[a_i, b_i]} >)_{i \in I} : L^2 \to L$ ordinal toplamı

$$T(x, y) = \begin{cases} T^{[a_i, b_i]}(x, y) & , \quad x, y \in [a_i, b_i] \\ x \wedge y & , \quad Aksi\ Takdirde. \end{cases} \tag{6}$$

ile verilir.

Önerme 1.32. [**26**] $(L,\wedge,\vee,0,1)$ sınırlı bir kafes ve $(I,\leq)$ lineer sıralı indeks kümesi olsun.

$I \neq \emptyset$ ve $\{(a_i,b_i)\}_{i\in I}$ L nin ikişer ikişer ayrık alt aralıklarının bir ailesi olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir :

(i) (6) ile tanımlı T: $L^2 \to L$ ordinal toplamı $[a_i,b_i]$üzerinde tanımlı $T^{[a_i,b_i]}$ keyfi t-normları için bir t- normdur.

(ii) Her $x \in L$ ve her $i \in L$ için aşağıdakiler sağlanır.

(a) x, a_i ile kıyaslanamaz ise; x, her $u \in [a_i,b_i)$ ile de kıyaslanamazdır.

(b) x, b_i ile kıyaslanamaz ise; x, her $u \in (a_i,b_i]$ ile de kıyaslanamazdır

Teorem 1.33. [**6**] $(L,\leq,0,1)$ sınırlı bir kafes ve $a \in L\backslash\{0,1\}$ olsun. V, $[a,1]$ üzerinde bir t- norm olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanan $T: L^2 \to L$ fonksiyonu L üzerinde bir t- normdur.

$$T(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & , \quad x = 1 \; veya \; y = 1 \\ V(x,y) & , \quad x, y \in [a,1) \\ x \wedge y \wedge a & , \quad Aksi \; takdirde. \end{cases} \qquad (7)$$

L üzerinde bir t- normdur.

Teorem 1.34. [4] $(L,\leq,0,1)$ sınırlı bir kafes ve $a \in L\backslash\{0,1\}$ olsun. V $[a,1]$ üzerinde bir t- norm ise $T: L^2 \to L$ fonksiyonu L üzerinde bir t- normdur.

$$T(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & , \quad x = 1 \; veya \; y = 1 \\ V(x,y) & , \quad x, y \in [a,1) \\ 0 & , \quad Aksi \; takdirde. \end{cases} \qquad (8)$$

L üzerinde bir t- normdur.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde sınırlı kafeslerin alt aralıkları üzerinde tanımlı t- normlardan sınırlı kafes üzerinde bir t- norm elde etmek için bir yöntem araştırılmıştır. Literatür incelendiğinde [26] numaralı kaynakta bir kafesin bir alt aralığı üzerinde tanımlı bir t- normdan veya alt aralıkları üzerinde tanımlı t- normlardan kafes üzerinde bir t- norm inşa etme problemi üzerinde durulduğu görülür. Fakat önerilen yöntem her durumda bir t- norm üretmemektedir. Bahsi geçen çalışmada Saminger hangi özel kafesler üzerinde bu inşanın bir t- norm ürettiğini veya alt aralıklar üzerinde hangi özel t- normlar için metodun bir t- norm vereceği üzerinde çalışmıştır. Ardından Ertuğrul vd. leri çalışmasında $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes $a \in L$ olmak üzere $[a, 1]$ alt aralığı üzerinde tanımlı t- normu, ek bir şart olmaksızın L üzerine genişletmek için bir metot vermişlerdir. Literatürde Ertuğrul vd. lerinin verdiği yöntemin modife edilmiş bir inşası daha mevcuttur [4]. Ertuğrul ve diğerlerinin çalışması göz önüne alındığında bu çalışmada $[a, 1]$ aralığındaki V t- normu bir T t- normuna genişletilmiştir. Bu yöntemden yola çıkılarak T_1, $[0, a]$ üzerinde bir t- norm T_2, $[a, 1]$ üzerinde birer t- norm iken L üzerinde T_1 ve T_2 t- normları yardımıyla hiçbir ek şarta gerek olmaksızın T t- normu elde edilebilir mi problemi araştırılmıştır. Ardından daha genel olarak $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes $0 = a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_1 \leq a_0 = 1$ ve T_i ler $[a_i, a_{i-1}]$ $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere L üzerinde T_i lerden bir t- norm inşası verilmiştir.

Teorem 2.1. $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $0 = a_2 < a_1 < a_0 = 1$ olacak şekilde $a_0, a_1, a_2 \in L$ için T_1 ve T_2 sırasıyla L nin $[\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_0]$ ve $[\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_1]$ alt aralıkları üzerinde tanımlı iki t- norm olsun. Bu takdirde, aşağıda verilen $T: L^2 \to L$ fonksiyonu L üzerinde bir t- normdur.

$$T(x,y) = \begin{cases} T_1(x,y) & , \quad (x,y) \in [a_1, a_0)^2 \\ T_2(x,y) & , \quad (x,y) \in [a_2, a_1)^2 \\ x \wedge y & , \quad (x,y) \in [a_2, a_1) \times [a_1, a_0) \cup [a_1, a_0) \times [a_2, a_1) \\ & \qquad \cup L \times \{1\} \cup \{1\} \times L \\ T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) & , \quad Aksi\ Takdirde. \end{cases} \tag{9}$$

İspat : i) Monotonluk: $x, y \in L$ ve her $z \in L$ için $x \leq y$ olacak şekilde $T(x,z) \leq T(y,z)$ olduğu gösterilmelidir. İspatta x, y, z elemanlarının tüm olası durumları aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

1. x $\in [a_2, a_1)$ olsun.

1.1. y $\in [a_2, a_1)$

1.1.1. $z \in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_2(x,z) \leq T_2(y,z) = T(y,z)$$

1.1.2. z $\in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

1.1.3. z $\in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

1.1.4. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

1.2. y $\in [a_1, a_0)$

1.2.1. z $\in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_2(x,z) \leq y \wedge z = T(y,z)$$

1.2.2. z $\in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq T_1(y,z) = T(y,z)$$

1.2.3. z $\in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

1.2.4. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

1.3. y $\in I_{a_1}$

1.3.1. z $\in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_2(x,z) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

1.3.2. z $\in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

1.3.3. z $\in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

1.3.4. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

1.4. y = 1

1.4.1. z $\in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_2(x,z) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

1.4.2. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

1.4.3. z ∈ I_{a_1}

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

1.4.4. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq 1 \wedge 1 = T(y,z)$$

2. x ∈ $[a_1, a_0)$ olsun.

2.1. y ∈ $[a_1, a_0)$

2.1.1. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

2.1.2. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_1(x,z) \leq T_1(y,z) = T(y,z)$$

2.1.3. z ∈ I_{a_1}

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

2.1.4. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

2.2. y = 1

2.2.1. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

2.2.2. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_1(x,z) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

2.2.3. z ∈ I_{a_1}

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

2.2.4. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq 1 \wedge 1 = T(y,z)$$

3. x ∈ I_{a_1} olsun.

3.1. y ∈ $[a_1, a_0)$

3.1.1. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq y \wedge z = T(y,z)$$

3.1.2. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_1(y,z) = T(y,z)$$

3.1.3. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

3.1.4. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

3.2. $y \in I_{a_1}$

3.2.1. $z \in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

3.2.2. $z \in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

3.2.3. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

3.2.4. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

3.3. $y = 1$

3.3.1. $z \in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

3.3.2. $z \in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

3.3.3. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

3.3.4. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq 1 \wedge 1 = T(y,z)$$

4. $x = 1$ olsun.

Bu durumda $x \leq y$ olduğundan $y = 1$ olur. Bu durum açıktır. O halde T fonksiyonu monotondur.

ii) Asosyatiflik: Her $x, y, z \in L$ için $T\big(x, T(y,z)\big) = T(T(x,y), z)$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir. $x, y, z \in L$ nin en az birinin 1 olması durumunda ispat açıktır. İspatta x, y, z elemanlarının tüm olası durumları aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

1. $x \in [a_2, a_1)$ olsun.

1.1. $y \in [a_2, a_1)$

1.1.1. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y,z)) = T_2(x, T_2(y,z)) = T_2(T_2(x,y), z)$$
$$= T(T_2(x,y), z) = T(T(x,y), z)$$

1.1.2. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,y) = T_2(x,y) = T_2(x,y) \wedge z$$
$$= T(T_2(x,y), z) = T(T(x,y), z)$$

1.1.3. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = T_2(x \wedge a_1, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1))$$
$$= T_2(T_2(x,y) \wedge a_1, z \wedge a_1) = T_2(T_2(x,y), z \wedge a_1)$$
$$= T(T_2(x,y), z) = T(T(x,y), z)$$

1.2. y $\in [a_1, a_0)$

1.2.1. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,z) = T_2(x,z) = T(x,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

1.2.2. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_1(y,z)\big) = x \wedge T_1(y,z) = x = x \wedge z = T(x,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

1.2.3. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = T_2(x \wedge a_1, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1))$$
$$= T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(x,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

1.3. y $\in I_{a_1}$

1.3.1. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = T_2(x \wedge a_1, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1))$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z \wedge a_1)$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y), z)$$

1.3.2. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = T_2(x \wedge a_1, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1))$$
$$= T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) = T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) \wedge z$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y), z)$$

1.3.3. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T(x,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1))=T_2(x\wedge a_1,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1))$$
$$=T_2(T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1),z\wedge a_1)$$
$$=T(T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1),z)=\ T(T(x,y),z)$$

2. $x\in[a_1,a_0)$ olsun.

2.1. y $\in[a_2,a_1)$

2.1.1. z $\in[a_2,a_1)$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T(x,T_2(y,z))=T_2(y,z)\wedge x=T_2(y,z)=\mathrm{T(y,z)}$$
$$=T(x\wedge y,z)=T(T(x,y),z)$$

2.1.2. z $\in[a_1,a_0)$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T(x,y\wedge z)=T(x,y)=x\wedge y=y=y\wedge z=\mathrm{T(y,z)}$$
$$=T(x\wedge y,z)=T(T(x,y),z)$$

2.1.3. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T(x,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1))=x\wedge T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1)=$$
$$=T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1)=T(y,z)$$
$$=T(x\wedge y,z)=T(T(x,y),z)$$

2.2. y $\in[a_1,a_0)$

2.2.1. z $\in[a_2,a_1)$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T(x,y\wedge z)=T(x,z)=x\wedge z=\mathrm{z}$$
$$=T_1(x,y)\wedge z=T(T_1(x,y),z)=T(T(x,y),z)$$

2.2.2. z $\in[a_1,a_0)$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T\big(x,T_1(y,z)\big)=T_1(x,T_1(y,z))=T_1(T_1(x,y),z)$$
$$=T(T_1(x,y),z)=T(T(x,y),z)$$

2.2.3. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T(x,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1))=x\wedge T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1)=$$
$$=z\wedge a_1=T_2(T_1(x,y)\wedge a_1,z\wedge a_1)$$
$$=T(T_1(x,y),z)=T(T(x,y),z)$$

2.3. y $\in I_{a_1}$

2.3.1. z $\in[a_2,a_1)$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T(x,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1))=x\wedge T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1)$$
$$=T_2(T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1),z\wedge a_1)$$

$= \mathrm{T}(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), \mathrm{z}) = T(T(x,y),z)$

2.3.2. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = x \wedge T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)$$
$$= \; z \wedge T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)$$
$$= \mathrm{T}(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), \mathrm{z}) = T(T(x,y),z)$$

2.3.3. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = x \wedge T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z \wedge a_1)$$
$$= \mathrm{T}(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), \mathrm{z}) = T(T(x,y),z)$$

3. x $\in I_{a_1}$ olsun.

3.1. y $\in [a_2, a_1)$

3.1.1. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y,z)) = T_2(x \wedge a_1, T_2(y,z))$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z \wedge a_1)$$
$$= \mathrm{T}(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), \mathrm{z}) = T(T(x,y),z)$$

3.1.2. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,y) = T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1)$$
$$= \; T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) \wedge z$$
$$= \mathrm{T}(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), \mathrm{z}) = T(T(x,y),z)$$

3.1.3. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = T_2(x \wedge a_1, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1))$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z \wedge a_1)$$
$$= \mathrm{T}(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), \mathrm{z}) = T(T(x,y),z)$$

3.2. y $\in [a_1, a_0)$

3.2.1. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,z) = \; T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1)$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z \wedge a_1)$$
$$= \mathrm{T}(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), \mathrm{z}) \; = T(T(x,y),z)$$

3.2.2. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_1(y,z)\big) = T_2(x \wedge a_1, T_1(y,z) \wedge a_1) = x \wedge a_1$$
$$= T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1)$$

$$= \mathrm{T}(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1),\mathrm{z}) = T(T(x,y),z)$$

3.2.3. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = T_2(x \wedge a_1, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1))$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z \wedge a_1)$$
$$= \mathrm{T}(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1),\mathrm{z}) = T(T(x,y),z)$$

3.3. y $\in I_{a_1}$

3.3.1. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = T_2(x \wedge a_1, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1))$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z \wedge a_1)$$
$$= \mathrm{T}(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1),\mathrm{z}) = T(T(x,y),z)$$

3.3.2. z $\in [a_1, a_0)$

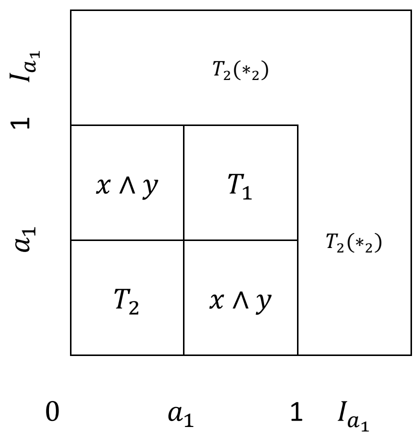
$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = T_2(x \wedge a_1, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1))$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z \wedge a_1)$$
$$= \mathrm{T}(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1),\mathrm{z}) = T(T(x,y),z)$$

3.3.3. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = T_2(x \wedge a_1, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1))$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z \wedge a_1)$$
$$= \mathrm{T}(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1),\mathrm{z}) = T(T(x,y),z)$$

T nin komutatifliği ve 1 in *T* nin birim elemanı olduğu açıktır.

T_1 ve T_2 yardımıyla elde edilen T t- normu aşağıdaki gibi şematize edilebilir.



Şekil 2.1. T t- normu

Yukarıdaki şekilde $(*_2) = (x \wedge a_1, y \wedge a_1)$ i ifade etmektedir. Çalışmanın bundan sonraki kısmında da $(*_n) = (x \wedge a_{n-1}, y \wedge a_{n-1})$ i ifade edecektir.

Uyarı 2.2.

(i) (9) formülü ile verilen inşa yöntemi (6) formülü ile verilen inşa yönteminden farklıdır (Bakınız Örnek 2.6). Dahası (6) formülü her kafes üzerinde bir t- norm üretmez (Bakınız Uyarı 2.4).

(ii) (9) formülü ile verilen inşa yönteminde $T_2 = T_\wedge$ olarak seçilirse

$$T(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & , \quad x = 1 \; veya \; y = 1 \\ T_1(x,y) & , \quad x, y \in [a_1, 1) \\ x \wedge y \wedge a_1 & , \quad Aksi\, Takdirde. \end{cases}$$

elde edilir ve bu durumda (7) formülü ile çakışır. Fakat $T_2 \neq T_\wedge$ olması durumunda eşit olmaları gerekmez (Bakınız Uyarı 2.5). Böylece (9) formülü ile verilen inşa metodunun (7) ile verilen inşa metodundan çok daha genel bir yöntem olduğu sonucuna ulaşılır.

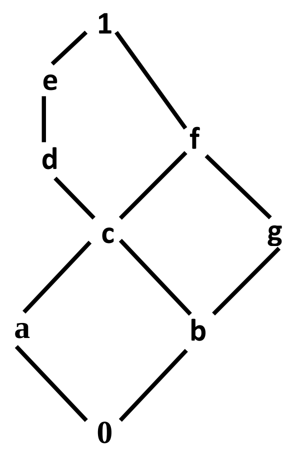
(iii) (9) formülü ile verilen inşa yöntemi (8) ile verilen inşa yönteminden farklıdır (Bakınız Örnek 2.6).

(iv) (9) formülünde $T_2 = T_D$, $[a_2, a_1) \times [a_1, a_0) \cup [a_1, a_0) \times [a_2, a_1)$ üzerinde 0 alınırsa (9) formülü yine bir t- norm üretir ve (8) formülü ile çakışır.

(v) $I_{a_1} = \emptyset$ ise (9) formülü ile üretilen T t- normu, (6) formülü ile üretilen T_6 t- normu ile çakışır. Böylece (9) ile verilen inşa yönteminin (6) ile verilen inşa yönteminden daha genel olduğu anlaşılır.

Teorem 2.1. in bir uygulaması olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.3. $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı kafesi aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 2.2. Kafes diyagramı

Kafes diyagramından gözleneceği üzere $0 = a_2 < a_1 = c < a_0 = 1$ dir. $[0, c]$ üzerinde $T_2 = T_D$, $[c, 1]$ üzerinde $T_1 = T_\wedge$ alınırsa Teorem 2.1. yardımıyla L üzerinde bir T t- normu aşağıdaki şekilde elde edilir.

Tablo 1. T t- normu

T	0	a	b	c	d	e	f	g	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	a	a	a	a	0	a
b	0	0	0	b	b	b	b	0	b
c	0	a	b	c	c	c	c	b	c
d	0	a	b	c	d	d	c	b	d
e	0	a	b	c	d	e	c	b	e
f	0	a	b	c	c	c	f	b	f
g	0	0	0	b	b	b	b	0	g
1	0	a	b	c	d	e	f	g	1

Uyarı 2.4. Örnek 2.3 de verilen L sınırlı kafesi göz önüne alınsın. (6) formülü göz önüne alınarak elde edilen T_6 operatörü aşağıda verilmiştir.

Tablo 2. T_6 operatörü

T_6	0	a	b	c	d	e	f	g	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	a	a	a	a	0	a
b	0	0	0	b	b	b	b	b	b
c	0	a	b	c	c	c	c	b	c
d	0	a	b	c	d	d	c	b	d
e	0	a	b	c	d	e	c	b	e
f	0	a	b	c	c	c	f	g	f
g	0	0	b	b	b	b	g	g	g
1	0	a	b	c	d	e	f	g	1

Fakat $0 = T_6(b,b) = T_6\big(b, T_6(c,g)\big) \neq T_6(T_6(b,c),g) = T_6(b,g) = b$ olduğundan T_6, L üzerinde bir t- norm değildir.

Uyarı 2.5. Örnek 2.3 de verilen L sınırlı kafesi göz önüne alınsın. (7) formülü kullanılarak T_7 t- normu aşağıdaki şekilde elde edilir.

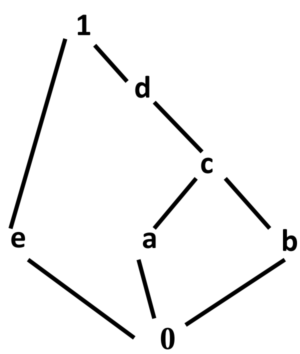
Tablo 3. T_7 t- normu

T_7	0	a	b	c	d	e	f	g	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	a	a	a	0	a
b	0	0	b	b	b	b	b	b	b
c	0	a	b	c	c	c	c	b	c
d	0	a	b	c	d	d	c	b	d
e	0	a	b	c	d	e	c	b	e
f	0	a	b	c	c	c	f	b	f
g	0	a	b	b	b	b	b	b	g
1	0	a	b	c	d	e	f	g	1

$b = T_7\ (g,g) \neq T(g,g) = 0$ olduğundan $T_7\ \neq T$ dir. Uyarı 2.2 de belirtildiği gibi $T_7 = T_\wedge$ seçilirse $T_7\ = T$ elde edilir. Bu örnek genelde (9) formülünün (7) formülü ile aynı t- normu üretmediğini ve dahası (9) formülünün çok daha genel olduğunu gösterir.

Aşağıdaki örnek, Önerme 1.32 ile ifade edilen şartları sağlayan kafesler de dahi (6) ile üretilen T_6 t- normunun ve (8) formülü ile üretilen T_8 t- normunun (9) formülü ile elde edilen T t- normuna her zaman eşit olmadığına bir örnektir.

Örnek 2.6. Kafes diyagramı aşağıdaki gibi olan $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı kafesi göz önüne alınsın.



Şekil 2.3. $(L, \leq, 0,1)$ kafes diyagramı

$[0, c]$ üzerinde $T_2 = T_D$ t- normu, $[c, 1]$ üzerinde $T_1 = T_\wedge$ t- normu alınsın. Açıkça L sınırlı kafesi [26] çalışmasında verilen inşa metodunun bir t- norm üretmesi için gerekli şartları sağlamaktadır (Bakınız Önerme 1.32). (6) ile üretilen T_6 t- normu aşağıdaki şekilde elde edilir.

Tablo 4. T_6 t- norm

T_6	0	a	b	c	d	e	1
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	a	a	0	a
b	0	0	0	b	b	0	b
c	0	a	b	c	c	0	c
d	0	a	b	c	d	0	d
e	0	0	0	0	0	e	e
1	0	a	b	c	d	e	1

Teorem 2.1. ile elde edilen T t- normu aşağıdaki şekilde elde edilir.

Tablo 5. T t- normu

T	0	a	b	c	d	e	1
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	a	a	0	a
b	0	0	0	b	b	0	b
c	0	a	b	c	c	0	c
d	0	a	b	c	d	0	d
e	0	0	0	0	0	0	e
1	0	a	b	c	d	e	1

$T(e, e) = 0 \neq e = T_6\ (e, e)$ olup $T \neq T_6$ dir. Böylece T ve T_6 nın genelde eşit olmak zorunda olmayabileceği anlaşılır. (8) ile verilen inşa yöntemi ile elde edilen t- norm aşağıdaki gibidir.

Tablo 6. T_8 t- normu

T_8	0	a	b	c	d	e	1
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	a
b	0	0	0	0	0	0	b
c	0	0	0	c	c	0	c
d	0	0	0	c	d	0	d
e	0	0	0	0	0	0	e
1	0	a	b	c	d	e	1

$0 = T_8\ (b,c) \neq T(b,c) = b$ dir. Dolayısıyla, $T_8 \neq T$ dir. Böylece genelde T_8 ile T nin eşit olmayabileceği görülür.

Teorem 2.1 göz önüne alınırsa L nin alt aralıklarının sayısı arttırıldığında bu metot genişletilebilir mi düşüncesinden yola çıkarak sırasıyla $[a_1, a_0], [a_2, a_1], [a_3, a_2]$ üzerinde tanımlı T_1 , T_2 ve T_3 t- normları yardımıyla L üzerinde bir t- norm elde etmek için aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.7. $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $0 = a_3 < a_2 < a_1 < a_0 = 1$ olacak şekilde $a_0, a_1, a_2, a_3 \in L$ için T_1 , T_2 ve T_3 sırasıyla L nin $[\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_0]$, $[\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_1]$ ve $[\mathrm{a}_3, \mathrm{a}_2]$ alt aralıkları üzerinde tanımlı üç t- norm olsun. Bu takdirde, aşağıda verilen $T : L^2 \to L$ fonksiyonu L üzerinde bir t- normdur.

$$T(x,y) = \begin{cases} T_1(x,y) & , & (x,y) \in [a_1, a_0)^2 \\ T_2(x,y) & , & (x,y) \in [a_2, a_1)^2 \\ T_3(x,y) & , & (x,y) \in [a_3, a_2)^2 \\ T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) & , & (x,y) \in I_{a_1} \times [a_2, a_0) \cup [a_2, a_0) \times I_{a_1} \cup I_{a_1} \times I_{a_1} \\ x \wedge y & , & (x,y) \in [a_2, a_1) \times [a_3, a_2) \cup [a_3, a_2) \times [a_2, a_1) \\ & & \cup [a_1, a_0) \times [a_3, a_1) \cup [a_3, a_1) \times [a_1, a_0) \\ & & \cup L \times \{1\} \cup \{1\} \times L \\ T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) & , & Aksi\ Takdirde. \end{cases}$$

İspat : i) Monotonluk: $x, y \in L$ ve $her\ z \in L\ için\ x \leq y$ olacak şekilde $T(x,z) \leq T(\mathrm{y}, \mathrm{z})$ olduğu gösterilmelidir. İspatta x, y, z elemanlarının tüm olası durumları aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

1. $x \in [a_3, a_2)$ olsun.

1.1. $y \in [a_3, a_2)$

1.1.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = T_3(x,z) \leq T_3(y,z) = T(y,z)$$

1.1.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

1.1.3. $z \in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

1.1.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

1.1.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

1.1.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

1.1.7. $z = 1$

$$\mathrm{T}(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

1.2. y $\in [a_2, a_1)$

1.2.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = T_3(x,z) \leq y \wedge z = T(y,z)$$

1.2.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq T_2(y,z) = T(y,z)$$

1.2.3. $z \in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

1.2.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

1.2.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

1.2.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

1.2.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

1.3. y $\in [a_1, a_0)$

1.3.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = T_3(x,z) \leq y \wedge z = T(y,z)$$

1.3.2. $z \in [a_2, a_1)$

$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$

1.3.3. $z \in [a_1, a_0)$

$T(x,z) = x \wedge z \leq T_1(y,z) = T(y,z)$

1.3.4. $z \in I_{a_1}$

$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$

1.3.5. $z \in I_{a_2}$

$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$

1.3.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$

1.3.7. $z = 1$

$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$

1.4. $y \in I_{a_1}$

1.4.1. $z \in [a_3, a_2)$

$T(x,z) = T_3(x,z) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$

1.4.2. $z \in [a_2, a_1)$

$T(x,z) = x \wedge z \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$

1.4.3. $z \in [a_1, a_0)$

$T(x,z) = x \wedge z \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$

1.4.4. $z \in I_{a_1}$

$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$

1.4.5. $z \in I_{a_2}$

$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$

1.4.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$

1.4.7. $z = 1$

$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$

1.5. $y \in I_{a_2}$

1.5.1. $z \in [a_3, a_2)$

$T(x,z) = T_3(x,z) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$

1.5.2. $z \in [a_2, a_1)$

$T(x,z) = x \wedge z \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$

1.5.3. $z \in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

1.5.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

1.5.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

1.5.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

1.5.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

1.6. y ∈ I_{a_1,a_2}

1.6.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = T_3(x,z) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

1.6.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

1.6.3. $z \in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

1.6.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

1.6.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

1.6.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

1.6.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

1.7. $y = 1$

1.7.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = T_3(x,z) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

1.7.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

1.7.3. $z \in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

1.7.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

1.7.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

1.7.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

1.7.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq 1 \wedge 1 = T(y,z)$$

2. $x \in [a_2, a_1)$ olsun.

2.1. $y \in [a_2, a_1)$

2.1.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

2.1.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_2(x,z) \leq T_2(y,z) = T(y,z)$$

2.1.3. $z \in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

2.1.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

2.1.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

2.1.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

2.1.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

2.2. $z \in [a_1, a_0)$

2.2.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

2.2.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_2(x,z) \leq y \wedge z = T(y,z)$$

2.2.3. $z \in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq T_1(y,z) = T(y,z)$$

2.2.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

2.2.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

2.2.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

2.2.7.$z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z\ )$$

2.3. y ∈ I_{a_1}

2.3.1. z ∈ $[a_3, a_2)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

2.3.2. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_2(x,z) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

2.3.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

2.3.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

2.3.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

2.3.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

2.3.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

2.4. $y = 1$

2.4.1. z ∈ $[a_3, a_2)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

2.4.2. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_2(x,z) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

2.4.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

2.4.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

2.4.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

2.4.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

2.4.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq 1 \wedge 1 = T(y,z)$$

3. $x \in [a_1, a_0)$ olsun.

3.1. $y \in [a_1, a_0)$

3.1.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

3.1.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

3.1.3. $z \in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_1(x,z) \leq T_1(y,z) = T(y,z)$$

3.1.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

3.1.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

3.1.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

3.1.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

3.2. $y = 1$

3.2.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

3.2.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = x \wedge z \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

3.2.3. $z \in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_1(x,z) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

3.2.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

3.2.5. $z \in I_{a_2}$

$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$

3.2.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$

3.2.7. $z = 1$

$T(x,z) = x \wedge 1 \leq 1 \wedge 1 = T(y,z)$

4. $x \in I_{a_1}$ olsun.

4.1. $y \in [a_1, a_0)$

4.1.1. z $\in [a_3, a_2)$

$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq y \wedge z = T(y,z)$

4.1.2. z $\in [a_2, a_1)$

$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq y \wedge z = T(y,z)$

4.1.3. z $\in [a_1, a_0)$

$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_1(y,z) = T(y,z)$

4.1.4. $z \in I_{a_1}$

$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$

4.1.5. $z \in I_{a_2}$

$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$

4.1.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$

4.1.7. $z = 1$

$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$

4.2. y $\in I_{a_1}$

4.2.1. z $\in [a_3, a_2)$

$T(x,z) = T_3(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$

4.2.2. z $\in [a_2, a_1)$

$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$

4.2.3. z $\in [a_1, a_0)$

$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$

4.2.4. $z \in I_{a_1}$

$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$

4.2.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

4.2.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

4.2.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

4.3. $y = 1$

4.3.1. z $\in [a_3, a_2)$

$T(x,z) = T_3(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$4.3.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

4.3.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

4.3.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

4.3.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

4.3.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

4.3.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq 1 \wedge 1 = T(y,z)$$

5. $x \in I_{a_2}$olsun

5.1. $y \in [a_2, a_1)$

5.1.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq y \wedge z = T(y,z)$$

5.1.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_2(y,z) = T(y,z)$$

5.1.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq y \wedge z = T(y,z)$$

5.1.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

5.1.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.1.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \le T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.1.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \le y \wedge 1 = T(y,z)$$

5.2. $y \in [a_1, a_0)$

5.2.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \le y \wedge z = T(y,z)$$

5.2.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \le y \wedge z = T(y,z)$$

5.2.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \le T_1(y,z) = T(y,z)$$

5.2.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \le T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

5.2.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \le T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.2.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \le T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.2.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \le y \wedge 1 = T(y,z)$$

5.3. $y \in I_{a_1}$

5.3.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \le T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.3.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \le T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

5.3.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \le T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

5.3.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \le T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

5.3.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \le T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.3.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \le T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.3.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

5.4. y $\in I_{a_2}$

5.4.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.4.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.4.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.4.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.4.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.4.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.4.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

5.5. y $\in I_{a_1,a_2}$

5.5.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.5.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.5.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.5.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.5.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.5.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

5.5.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

5.6. $y = 1$

5.6.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

5.6.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

5.6.3. $z \in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

5.6.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

5.6.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

5.6.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

5.6.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq 1 \wedge 1 = T(y,z)$$

6. $x \in I_{a_1,a_2}$ olsun.

6.1. $y \in [a_1, a_0)$

6.1.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq y \wedge z = T(y,z)$$

6.1.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq y \wedge z = T(y,z)$$

6.1.3. $z \in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_1(y,z) = T(y,z)$$

6.1.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

6.1.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

6.1.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

6.1.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

6.2. y $\in I_{a_1}$

6.2.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

6.2.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

6.2.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

6.2.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$

6.2.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

6.2.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

6.2.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

6.3. y $\in I_{a_1,a_2}$

6.3.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

6.3.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

6.3.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

6.3.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

6.3.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

6.3.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$

6.3.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq y \wedge 1 = T(y,z)$$

6.4. $y = 1$

6.4.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

6.4.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

6.4.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

6.4.4. $z \in I_{a_1}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

6.4.5. $z \in I_{a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

6.4.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) \leq 1 \wedge z = T(y,z)$$

6.4.7. $z = 1$

$$T(x,z) = x \wedge 1 \leq 1 \wedge 1 = T(y,z)$$

7. $x = 1$ olsun.

Bu durumda $x \leq y$ olduğundan $y = 1$ olur. Bu durum açıktır. O halde T fonksiyonu monotondur.

ii) Asosyatiflik : Her $x, y, z \in L$ için $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir. $x, y, z \in L$ nin en az birinin 1 olması durumunda ispat açıktır. İspatta x, y, z elemanlarının tüm olası durumları aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

1. $x \in [a_3, a_2)$ olsun.

1.1. $y \in [a_3, a_2)$

1.1.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$\begin{aligned} T(x, T(y,z)) &= T(x, T_3(y,z)) = T_3(x, T_3(y,z)) = T_3(T_3(x,y), z) \\ &= T(T_3(x,y), z) = T(T(x,y), z) \end{aligned}$$

1.1.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$\begin{aligned} T(x, T(y,z)) &= T(x, y \wedge z) = T(x,y) = T_3(x,y) = T_3(x,y) \wedge z \\ &= T(T_3(x,y), z) = T(T(x,y), z) \end{aligned}$$

1.1.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$\begin{aligned} T(x, T(y,z)) &= T(x, y \wedge z) = T(x,y) \\ &= T_3(x,y) = T_3(x,y) \wedge z \\ &= T(T_3(x,y), z) = T(T(x,y), z) \end{aligned}$$

1.1.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x,y), z) = T(T(x,y), z)$$

1.1.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x,y), z) = T(T(x,y), z)$$

1.1.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x,y), z) = T(T(x,y), z)$$

1.2. $y \in [a_2, a_1)$

1.2.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,z) = T_3(x,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

1.2.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y,z)) = x \wedge T_2(y,z) = x = x \wedge z = T(x,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

1.2.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,y)$$
$$= x \wedge y = x = x \wedge z = T(x,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

1.2.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = x \wedge T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = x$$
$$= T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(x,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

1.2.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) = \mathrm{T(x,z)}$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

1.2.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)) = T_3(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T_3(x\wedge a_2,z\wedge a_2) = \mathrm{T(x,z)}$$
$$= T(x\wedge y,z) = T(T(x,y),z)$$

1.3. $y \in [a_1,a_0)$

1.3.1. z $\in [a_3,a_2)$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,y\wedge z) = T(x,z) = T_3(x,z)$$
$$= T(x\wedge y,z) = T(T(x,y),z)$$

1.3.2. z $\in [a_2,a_1)$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,y\wedge z) = T(x,z) = x\wedge z = x = T(x,z)$$
$$= T(x\wedge y,z) = T(T(x,y),z)$$

1.3.3. z $\in [a_1,a_0)$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T\big(x,T_1(y,z)\big) = x\wedge T_1(y,z)$$
$$= x= x\wedge z = T(x,z)$$
$$= T(x\wedge y,z) = T(T(x,y),z)$$

1.3.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1)) = x\wedge T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1) = x$$
$$= T_3(x\wedge a_2,z\wedge a_2) = T(x,z)$$
$$= T(x\wedge y,z) = T(T(x,y),z)$$

1.3.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)) = T_3(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = (x\wedge a_2,z\wedge a_2) = \mathrm{T(x,z)}$$
$$= T(x\wedge y,z) = T(T(x,y),z)$$

1.3.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)) = T_3(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T_3(x\wedge a_2,z\wedge a_2) = \mathrm{T(x,z)}$$
$$= T(x\wedge y,z) = T(T(x,y),z)$$

1.4. $y \in I_{a_1}$

1.4.1. z $\in [a_3,a_2)$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)) = T_3(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z)$$

$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

1.4.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)\big) = x \wedge T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = x$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

1.4.3. $z \in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)\big) = x \wedge T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = x$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

1.4.4. $z \in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = x \wedge T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = x$$
$$= T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) = T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

1.4.5. $z \in I_{a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

1.4.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

1.5. $y \in I_{a_2}$

1.5.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

1.5.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

1.5.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

1.5.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

1.5.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

1.5.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

1.6. $y \in I_{a_1,a_2}$

1.6.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

1.6.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

1.6.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

1.6.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$

$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

1.6.5. z ∈ I_{a_2}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

1.6.6. z ∈ I_{a_1,a_2}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

2. $x \in [a_2, a_1)$ olsun.

2.1. $y \in [a_3, a_2)$

2.1.1. z ∈ $[a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y,z)) = x \wedge T_3(y,z) = T_3(y,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y),z)$$

2.1.2. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,y) = x \wedge y = y = y \wedge z$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y),z)$$

2.1.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,y)$$
$$= x \wedge y = y = y \wedge z$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y),z)$$

2.1.4. z ∈ I_{a_1}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)\big) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y),z)$$

2.1.5. z ∈ I_{a_2}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y),z)$$

2.1.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y),z)$$

2.2. $y \in [a_2, a_1)$

2.2.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,z) = x \wedge z = z$$
$$= T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) \wedge z$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y),z)$$

2.2.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y,z)) = T_2(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1))$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z)$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y),z)$$

2.2.3. $z \in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T_2(x,y)$$
$$= T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) = T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) \wedge z$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y),z)$$

2.2.4. $z \in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = T_2(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1))$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z \wedge a_1)$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y),z)$$

2.2.5. $z \in I_{a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y),z)$$

2.2.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y),z)$$

2.3. $y \in [a_1, a_0)$

2.3.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,z) = x \wedge z = z$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

2.3.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,z) = T_2(x,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

2.3.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_1(y,z)\big) = x \wedge T_1(y,z)$$
$$= x = x \wedge z = T(x,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

2.3.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = T_2(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1))$$
$$= T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(x,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

2.3.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2 = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(x,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

2.3.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2 = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(x,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

2.4. $y \in I_{a_1}$

2.4.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y), z)$$

2.4.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)\big) = T_2(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1))$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z)$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y), z)$$

2.4.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = T_2(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1))$$
$$= T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) = T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) \wedge z$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x, y), z)$$

2.4.4. z ∈ I_{a_1}

$$T(x, T(y, z)) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = T_2(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1))$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z \wedge a_1)$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x, y), z)$$

2.4.5. z ∈ I_{a_2}

$$T(x, T(y, z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x, y), z)$$

2.4.6. z ∈ I_{a_1, a_2}

$$T(x, T(y, z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x, y), z)$$

2.5. $y \in I_{a_2}$

2.5.1. z ∈ $[a_3, a_2)$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

2.5.2. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

2.5.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = y \wedge a_2$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

2.5.4. $z \in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

2.5.5. $z \in I_{a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

2.5.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

2.6. $y \in I_{a_1,a_2}$

2.6.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

2.6.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

2.6.3. $z \in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = y \wedge a_2$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

2.6.4. $z \in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

2.6.5. $z \in I_{a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$

$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$

$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

2.6.6. z ∈ I_{a_1,a_2}

$$T(x, T(y, z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$

$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$

$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

3. $x \in [a_1, a_0)$ olsun.

3.1. $y \in [a_3, a_2)$

3.1.1. z ∈ $[a_3, a_2)$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, T_3(y, z)) = x \wedge T_3(y, z) = T_3(y, z)$$

$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x, y), z)$$

3.1.2. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, y \wedge z) = T(x, y) = x \wedge y = y = y \wedge z$$

$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x, y), z)$$

3.1.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T(x, T(y, z)) = T(x, y \wedge z) = T(x, y)$$

$$= x \wedge y = y = y \wedge z$$

$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x, y), z)$$

3.1.4. z ∈ I_{a_1}

$$T(x, T(y, z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$

$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y, z)$$

$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x, y), z)$$

3.1.5. z ∈ I_{a_2}

$$T(x, T(y, z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$

$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y, z)$$

$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x, y), z)$$

3.1.6. z ∈ I_{a_1,a_2}

$$T(x, T(y, z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$

$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T(y, z)$$

$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x, y), z)$$

3.2. $x \in [a_2, a_1)$

3.2.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,z) = x \wedge z = z$$
$$= y \wedge z = T(y,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

3.2.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y,z)) = x \wedge T_2(y,z) = T_2(y,z)$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

3.2.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = x \wedge y = y$$
$$= y \wedge z = T(y,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

3.2.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = x \wedge T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)$$
$$= T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T(y,z)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

3.2.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

3.2.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(x \wedge y, z) = T(T(x,y), z)$$

3.3. $y \in [a_1, a_0)$

3.3.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,z) = x \wedge z = z$$
$$= T_1(x,y) \wedge z$$
$$= T(T_1(x,y), z) = T(T(x,y), z)$$

3.3.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,z) = x \wedge z = z$$
$$= T_1(x,y) \wedge z$$
$$= T(T_1(x,y), z) = T(T(x,y), z)$$

3.3.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_1(y,z)\big) = T_1(x, T_1(y,z))$$
$$= T_1(T_1(x,y), z)$$
$$= T(T_1(x,y), z) = \ T(T(x,y), z)$$

3.3.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = \ x \wedge T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)$$
$$= T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1) = z \wedge a_1$$
$$= T(T_1(x,y), z) = \ T(T(x,y), z)$$

3.3.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$
$$= T(T_1(x,y), z) = \ T(T(x,y), z)$$

3.3.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$
$$= T(T_1(x,y), z) = \ T(T(x,y), z)$$

3.4. $y \in I_{a_1}$

3.4.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = \ z \wedge a_2 = z = T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) \wedge z$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y), z)$$

3.4.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)\big) = \ x \wedge T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)$$
$$= T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z)$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y), z)$$

3.4.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)\big) = x \wedge T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)$$

$$= T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = y \wedge a_1 = T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) \wedge z$$

$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y),z)$$

3.4.4. z $\in I_{a_1}$

$$T(x, T(y,z)) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = x \wedge T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)$$

$$= T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1) = T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z \wedge a_1)$$

$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y),z)$$

3.4.5. z $\in I_{a_2}$

$$T(x, T(y,z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$

$$= \ T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$

$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = \ T(T(x,y),z)$$

3.4.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T(x, T(y,z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$

$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$

$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = \ T(T(x,y),z)$$

3.5. $y \in I_{a_2}$

3.5.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T(x, T(y,z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$

$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$

$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

3.5.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T(x, T(y,z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$

$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) \wedge z$$

$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

3.5.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T(x, T(y,z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$

$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) \wedge z$$

$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

3.5.4. z $\in I_{a_1}$

$$T(x, T(y,z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$

$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$

$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

3.5.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)) = x\wedge T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)$$
$$= T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2) = z\wedge a_2$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2, y\wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

3.5.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)) = x\wedge T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)$$
$$= T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2) = z\wedge a_2$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2, y\wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

3.6. y $\in I_{a_1,a_2}$

3.6.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)) = x\wedge T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)$$
$$= T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2, y\wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

3.6.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)) = x\wedge T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)$$
$$= T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2) = T_3(x\wedge a_2, y\wedge a_2)\wedge z$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2, y\wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

3.6.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)) = x\wedge T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)$$
$$= T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2) = T_3(x\wedge a_2, y\wedge a_2)\wedge z$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2, y\wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

3.6.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)) = x\wedge T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)$$
$$= T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2, y\wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

3.6.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)) = x\wedge T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)$$
$$= T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2, y\wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

3.6.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)) = x\wedge T_3(y\wedge a_2, z\wedge a_2)$$

$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

4. $x \in I_{a_1}$ olsun.

4.1. $y \in [a_3, a_2)$

4.1.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y,z)) = T_3\big(x \wedge a_2, T_3(y,z)\big)$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

4.1.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

4.1.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

4.1.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)\big) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

4.1.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

4.1.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

4.2. $y \in [a_2, a_1)$

4.2.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= z = T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) \wedge z$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y),z)$$

4.2.2. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y,z)) = T_2\big(x \wedge a_1, T_2(y,z)\big)$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z)$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y), z)$$

4.2.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1)$$
$$= T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) \wedge z$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y), z)$$

4.2.4. z ∈ I_{a_1}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = T_2\big(x \wedge a_1, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)\big)$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z \wedge a_1)$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y), z)$$

4.2.5. z ∈ I_{a_2}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge a_2$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y), z)$$

4.2.6. z ∈ I_{a_1,a_2}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = x \wedge a_2$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y), z)$$

4.3. $y \in [a_1, a_0)$

4.3.1. z ∈ $[a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x, z) = T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y), z)$$

4.3.2. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x, z) = T_2(x \wedge a_1, z \wedge a_1)$$
$$= T_2(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z \wedge a_1)$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y), z)$$

4.3.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_1(y,z)\big) = x \wedge a_1$$
$$= T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) = T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) \wedge z$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = T(T(x,y), z)$$

4.3.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T(x,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1))=T_2(\,x\wedge a_1,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1))$$
$$=T_2(T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1),z\wedge a_1)$$
$$=T(T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1),z)=\ T(T(x,y),z)$$

4.3.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2))=T_3(x\wedge a_2,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2))$$
$$=T_3(x\wedge a_2,z\wedge a_2)=z\wedge a_2$$
$$=T(T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1),z)=\ T(T(x,y),z)$$

4.3.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2))=T_3(x\wedge a_2,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2))$$
$$=T_3(x\wedge a_2,z\wedge a_2)=z\wedge a_2$$
$$=T(T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1),z)=\ T(T(x,y),z)$$

4.4. $y\in I_{a_1}$

4.4.1. z $\in [a_3,a_2)$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2))=T_3(x\wedge a_2,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2))$$
$$=T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)=\ z\wedge a_2=z=T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1)\wedge z$$
$$=T(T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1),z)=T(T(x,y),z)$$

4.4.2. z $\in [a_2,a_1)$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T\big(x,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1)\big)=T_2(\,x\wedge a_1,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1))$$
$$=T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1)=T_2(T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1),z)$$
$$=T(T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1),z)=T(T(x,y),z)$$

4.4.3. z $\in [a_1,a_0)$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T\big(x,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1)\big)=T_2(\,x\wedge a_1,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1))$$
$$=T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1)=\ T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1)\wedge z$$
$$=T(T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1),z)=T(T(x,y),z)$$

4.4.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T(x,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1))=T_2(\,x\wedge a_1,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1))$$
$$=\ T_2(T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1),z\wedge a_1)$$
$$=T(T_2(x\wedge a_1,y\wedge a_1),z)=T(T(x,y),z)$$

4.4.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big)=T\big(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)\big)=T_3(x\wedge a_2,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2))$$

$$= \; T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = \; T(T(x,y),z)$$

4.4.6. z ∈ I_{a_1,a_2}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)\big) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= \; T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = z \wedge a_2$$
$$= T(T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1), z) = \; T(T(x,y),z)$$

4.5. $y \in I_{a_2}$

4.5.1. z ∈ $[a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

4.5.2. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = y \wedge a_2 = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

4.5.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = y \wedge a_2 = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

4.5.4. z ∈ I_{a_1}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = y \wedge a_2$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

4.5.5. z ∈ I_{a_2}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

4.5.6. z ∈ I_{a_1,a_2}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

4.6. $y \in I_{a_1,a_2}$

4.6.1. z ∈ $[a_3, a_2)$

$$T(x, T(y,z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

4.6.2. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T(x, T(y,z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = y \wedge a_2 = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

4.6.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T(x, T(y,z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = y \wedge a_2 = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

4.6.4. z ∈ I_{a_1}

$$T(x, T(y,z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2) = y \wedge a_2$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

4.6.5. z ∈ I_{a_2}

$$T(x, T(y,z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

4.6.6. z ∈ I_{a_1,a_2}

$$T(x, T(y,z)) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5. $x \in I_{a_2}$ olsun.

5.1. $y \in [a_3, a_2)$

5.1.1. z ∈ $[a_3, a_2)$

$$T(x, T(y,z)) = T(x, T_3(y,z)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y,z))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.1.2. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.1.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.1.4. z ∈ I_{a_1}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)\big) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.1.5. z ∈ I_{a_2}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.1.6. z ∈ I_{a_1,a_2}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2))$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.2. $y \in [a_2, a_1)$

5.2.1. z ∈ $[a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x, z)$$
$$= T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.2.2. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y,z)) = x \wedge a_2$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.2.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2)$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.2.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1)) = x\wedge a_2$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z)$$

5.2.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T\big(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)\big) = T_3\big(x\wedge a_2,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)\big)$$
$$= T_3(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z\wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z)$$

5.2.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T\big(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)\big) = T_3\big(x\wedge a_2,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)\big)$$
$$= T_3(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z\wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z)$$

5.3. $y\in[a_1,a_0)$

5.3.1. z $\in [a_3,a_2)$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,y\wedge z) = T(x,z) = T_3(x\wedge a_2,z\wedge a_2)$$
$$= T_3(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z\wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z)$$

5.3.2. z $\in [a_2,a_1)$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,y\wedge z) = T(x,z) = T_3(x\wedge a_2,z\wedge a_2)$$
$$= T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2)\wedge z$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z)$$

5.3.3. z $\in [a_1,a_0)$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T\big(x,T_1(y,z)\big) = x\wedge a_2$$
$$= T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2) = T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2)\wedge z$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z)$$

5.3.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1)) = x\wedge a_2$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z)$$

5.3.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)) = T_3(x\wedge a_2,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2))$$
$$= T_3(x\wedge a_2,z\wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z)$$

5.3.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

5.4. $y \in I_{a_1}$

5.4.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

5.4.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = x \wedge a_2$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

5.4.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = x \wedge a_2$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

5.4.4. z $\in I_{a_1}$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = x \wedge a_2$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

5.4.5. z $\in I_{a_2}$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

5.4.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T(x,T(y,z)) = T(x,T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),$$

5.5. $y \in I_{a_2}$

5.5.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.5.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.5.3. z $\in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.5.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.5.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.5.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.6. $y \in I_{a_1,a_2}$

5.6.1. z $\in [a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

5.6.2. z $\in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$

$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

5.6.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y, z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

5.6.4. z ∈ I_{a_1}

$$T\big(x, T(y, z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

5.6.5. z ∈ I_{a_2}

$$T\big(x, T(y, z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

5.6.6. z ∈ I_{a_1,a_2}

$$T\big(x, T(y, z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

6. $x \in I_{a_1,a_2}$ olsun.

6.1. $y \in [a_3, a_2)$

6.1.1. z ∈ $[a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y, z)\big) = T(x, T_3(y, z)) = T_3\big(x \wedge a_2, T_3(y, z)\big)$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

6.1.2. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y, z)\big) = T(x, y \wedge z) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

6.1.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y, z)\big) = T(x, y \wedge z) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = \ T(T(x, y), z)$$

6.1.4. $z \in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)\big) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

6.1.5. $z \in I_{a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

6.1.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2))$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

6.2. $y \in [a_2, a_1)$

6.2.1. $z \in [a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T(x,z)$$
$$= T_3(x \wedge a_2, z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

6.2.2. $z \in [a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y,z)) = x \wedge a_2$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

6.2.3. $z \in [a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2)$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

6.2.4. $z \in I_{a_1}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = x \wedge a_2$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

6.2.5. $z \in I_{a_2}$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)\big) = T_3\big(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)\big)$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),z)$$

6.2.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T\big(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)\big) = T_3\big(x\wedge a_2,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)\big)$$
$$= T_3(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z\wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z)$$

6.3. $y\in[a_1,a_0)$

6.3.1. z $\in[a_3,a_2)$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,y\wedge z) = T(x,z) = T_3(x\wedge a_2,z\wedge a_2)$$
$$= T_3(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z\wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z)$$

6.3.2. z $\in[a_2,a_1)$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,y\wedge z) = T(x,z) = T_3(x\wedge a_2,z\wedge a_2)$$
$$= T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2)\wedge z$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z)$$

6.3.3. z $\in[a_1,a_0)$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T\big(x,T_1(y,z)\big) = x\wedge a_2$$
$$= T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2) = T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2)\wedge z$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z)$$

6.3.4. z $\in I_{a_1}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_2(y\wedge a_1,z\wedge a_1)) = x\wedge a_2$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z)$$

6.3.5. z $\in I_{a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)) = T_3(x\wedge a_2,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2))$$
$$= T_3(x\wedge a_2,z\wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z)$$

6.3.6. z $\in I_{a_1,a_2}$

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)) = T_3(x\wedge a_2,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2))$$
$$= T_3(x\wedge a_2,z\wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z)$$

6.4. $y\in I_{a_1}$

6.4.1. z ∈ $[a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)\big) = T_3\big(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)\big)$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

6.4.2. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)\big) = x \wedge a_2$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

6.4.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)\big) = x \wedge a_2$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

6.4.4. z ∈ I_{a_1}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_2(y \wedge a_1, z \wedge a_1)) = x \wedge a_2$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

6.4.5. z ∈ I_{a_2}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)\big) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

6.4.6. z ∈ I_{a_1,a_2}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)\big) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y),$$

6.5. $y \in I_{a_2}$

6.5.1. z ∈ $[a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x,y), z)$$

6.5.2. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$

$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

6.5.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

6.5.4. z ∈ I_{a_1}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

6.5.5. z ∈ I_{a_2}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

6.5.6. z ∈ I_{a_1,a_2}

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

6.6. $y \in I_{a_1,a_2}$

6.6.1. z ∈ $[a_3, a_2)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z \wedge a_2)$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

6.6.2. z ∈ $[a_2, a_1)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

6.6.3. z ∈ $[a_1, a_0)$

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2)) = T_3(x \wedge a_2, T_3(y \wedge a_2, z \wedge a_2))$$
$$= T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) = T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) \wedge z$$
$$= T(T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2), z) = T(T(x, y), z)$$

6.6.4. $z \in I_{a_1}$

$$\begin{aligned} T(x,T(y,z)) &= T(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)) = T_3(x\wedge a_2,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)) \\ &= T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2) \\ &= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z) \end{aligned}$$

6.6.5. $z \in I_{a_2}$

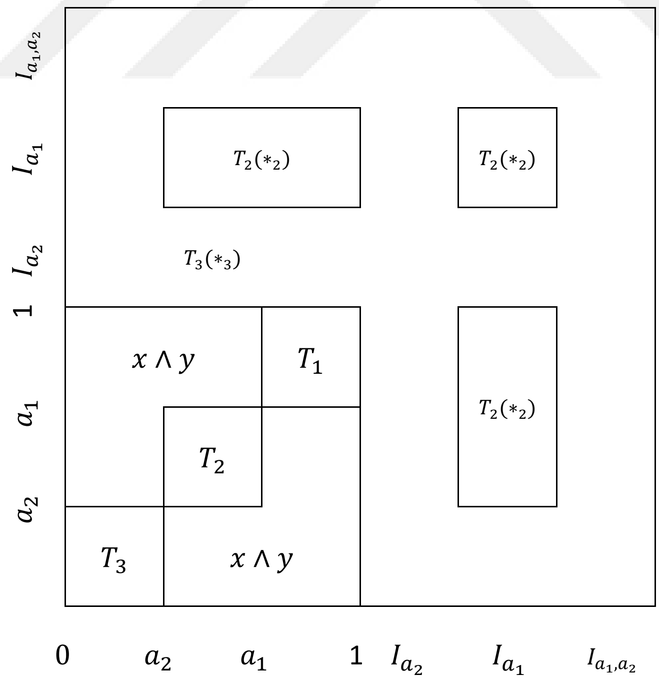
$$\begin{aligned} T(x,T(y,z)) &= T(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)) = T_3(x\wedge a_2,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)) \\ &= T_3(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z\wedge a_2) \\ &= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z) \end{aligned}$$

6.6.6. $z \in I_{a_1,a_2}$

$$\begin{aligned} T(x,T(y,z)) &= T(x,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)) = T_3(x\wedge a_2,T_3(y\wedge a_2,z\wedge a_2)) \\ &= T_3(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z\wedge a_2) \\ &= T(T_3(x\wedge a_2,y\wedge a_2),z) = T(T(x,y),z) \end{aligned}$$

T nin komutatifliği ve 1 in T nin birim elemanı olduğu açıktır.

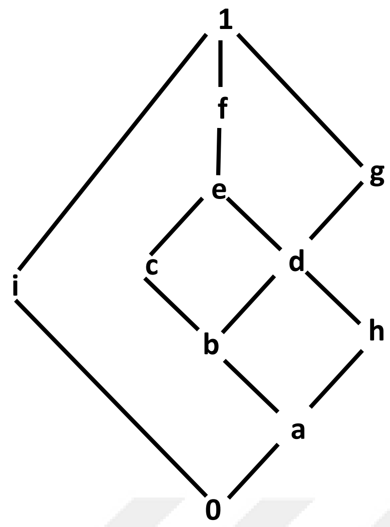
T_1, T_2 ve T_3 yardımıyla elde edilen T t- normu aşağıdaki gibi şematize edilebilir.



Şekil 2.4. T t- normu

Teorem 2.7. nin bir uygulaması olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.8. $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı kafesi aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 2.5. $(L, \leq, 0,1)$ kafes diyagramı

Kafes diyagramından da görüneceği üzere $0 = a_3 < a_2 = b < a_1 = e < a_0 = 1$ için $[0, b]$ üzerinde $T_3 = T_D$, $[b, e]$ üzerinde

Tablo 7. T_2 t- normu

T_2	b	c	d	e
b	b	b	b	b
c	b	b	b	c
d	b	b	d	d
e	b	c	d	e

t- normu, $[e, 1]$ üzerinde $T_1 = T_\wedge$ alınırsa, Teorem 2.7 yardımıyla L üzerinde T t- normu aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 8. T t- normu

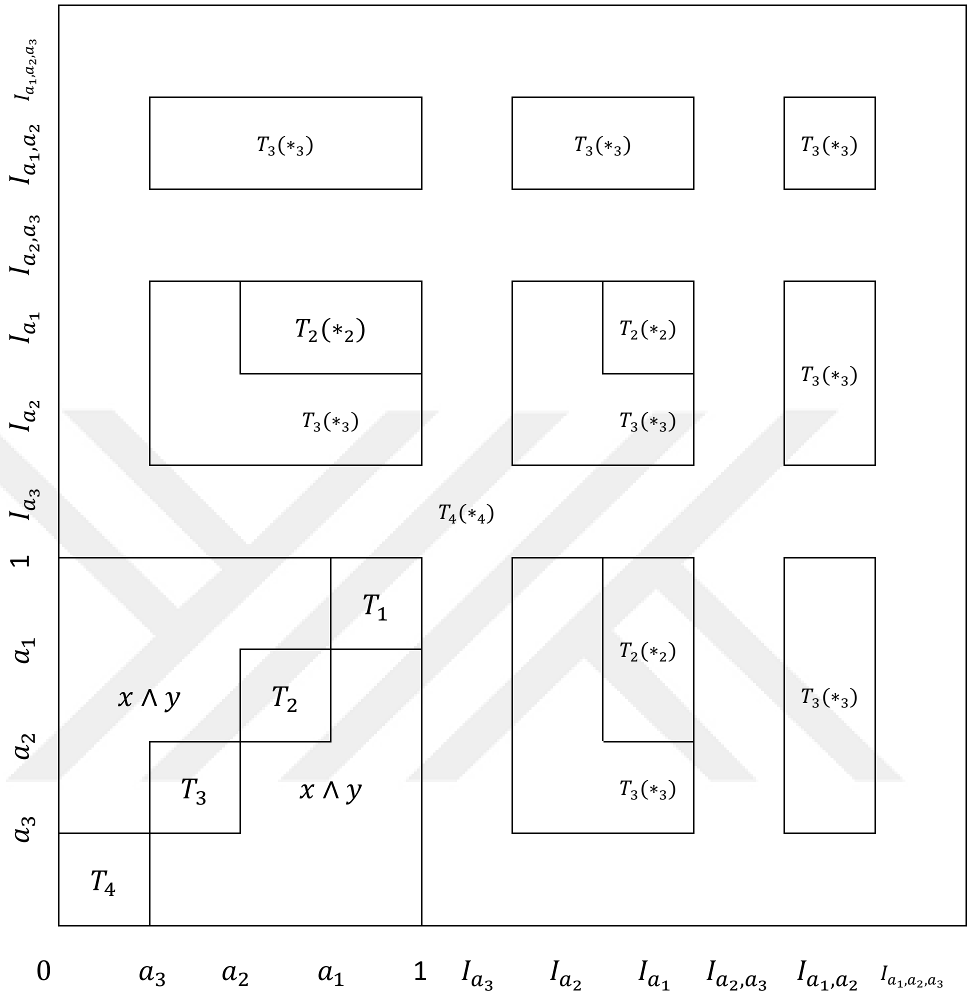
T	0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	a	a	a	a	a	a	0	0	a
b	0	a	b	b	b	b	b	b	a	0	b
c	0	a	b	b	b	c	c	b	a	0	c
d	0	a	b	b	d	d	d	d	a	0	d
e	0	a	b	c	d	e	e	d	a	0	e
f	0	a	b	c	d	e	f	d	a	0	f
g	0	a	b	b	d	d	d	d	a	0	g
h	0	0	a	a	a	a	a	a	0	0	h
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i
1	0	a	b	c	d	e	f	g	h	i	1

Teorem 2.9. $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $0 = a_4 < a_3 < a_2 < a_1 < a_0 = 1$ olacak şekilde $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in L$ için T_1 , T_2, T_3 ve T_4 sırasıyla L nin $[a_1, a_0]$, $[a_2, a_1]$, $[a_3, a_2]$ ve $[a_4, a_3]$ alt aralıkları üzerinde tanımlı dört t- norm olsun. Bu takdirde, aşağıda verilen $T : L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu L üzerinde bir t- normdur.

$$T(x,y) = \begin{cases} T_1(x,y) & , \quad (x,y) \in [a_1,a_0)^2 \\ T_2(x,y) & , \quad (x,y) \in [a_2,a_1)^2 \\ T_3(x,y) & , \quad (x,y) \in [a_3,a_2)^2 \\ T_4(x,y) & , \quad (x,y) \in [a_4,a_3)^2 \\ T_2(x \wedge a_1, y \wedge a_1) & , \quad (x,y) \in I_{a_1} \times [a_2,a_0) \cup [a_2,a_0) \times I_{a_1} \cup I_{a_1} \times I_{a_1} \\ T_3(x \wedge a_2, y \wedge a_2) & , \quad (x,y) \in (I_{a_2} \cup I_{a_1,a_2}) \times [a_3,a_0) \cup [a_3,a_0) \times (I_{a_2} \cup I_{a_1,a_2}) \\ & \quad \cup I_{a_1} \times [a_3,a_2) \cup [a_3,a_2) \times I_{a_1} \cup I_{a_2} \times I_{a_2} \\ & \quad \cup I_{a_1,a_2} \times I_{a_1,a_2} \cup I_{a_1} \times I_{a_2} \cup I_{a_2} \times I_{a_1} \\ & \quad \cup I_{a_1,a_2} \times (I_{a_1} \cup I_{a_2}) \cup (I_{a_1} \cup I_{a_2}) \times I_{a_1,a_2} \\ x \wedge y & , \quad (x,y) \in [a_1,a_0) \times [a_4,a_1) \cup [a_4,a_1) \times [a_1,a_0) \\ & \quad \cup [a_2,a_1) \times [a_4,a_2) \cup [a_4,a_2) \times [a_2,a_1) \\ & \quad \cup [a_3,a_2) \times [a_4,a_3) \cup [a_4,a_3) \times [a_3,a_2) \\ & \quad \cup L \times \{1\} \cup \{1\} \times L \\ T_4(x \wedge a_3, y \wedge a_3) & , \quad Aksi\ Takdirde. \end{cases}$$

İspat: Teorem 2.7 nin ispatına benzer şekilde yapılır.

T_1, T_2 , T_3 ve T_4 yardımıyla elde edilen T t- normu aşağıdaki gibi şematize edilebilir.



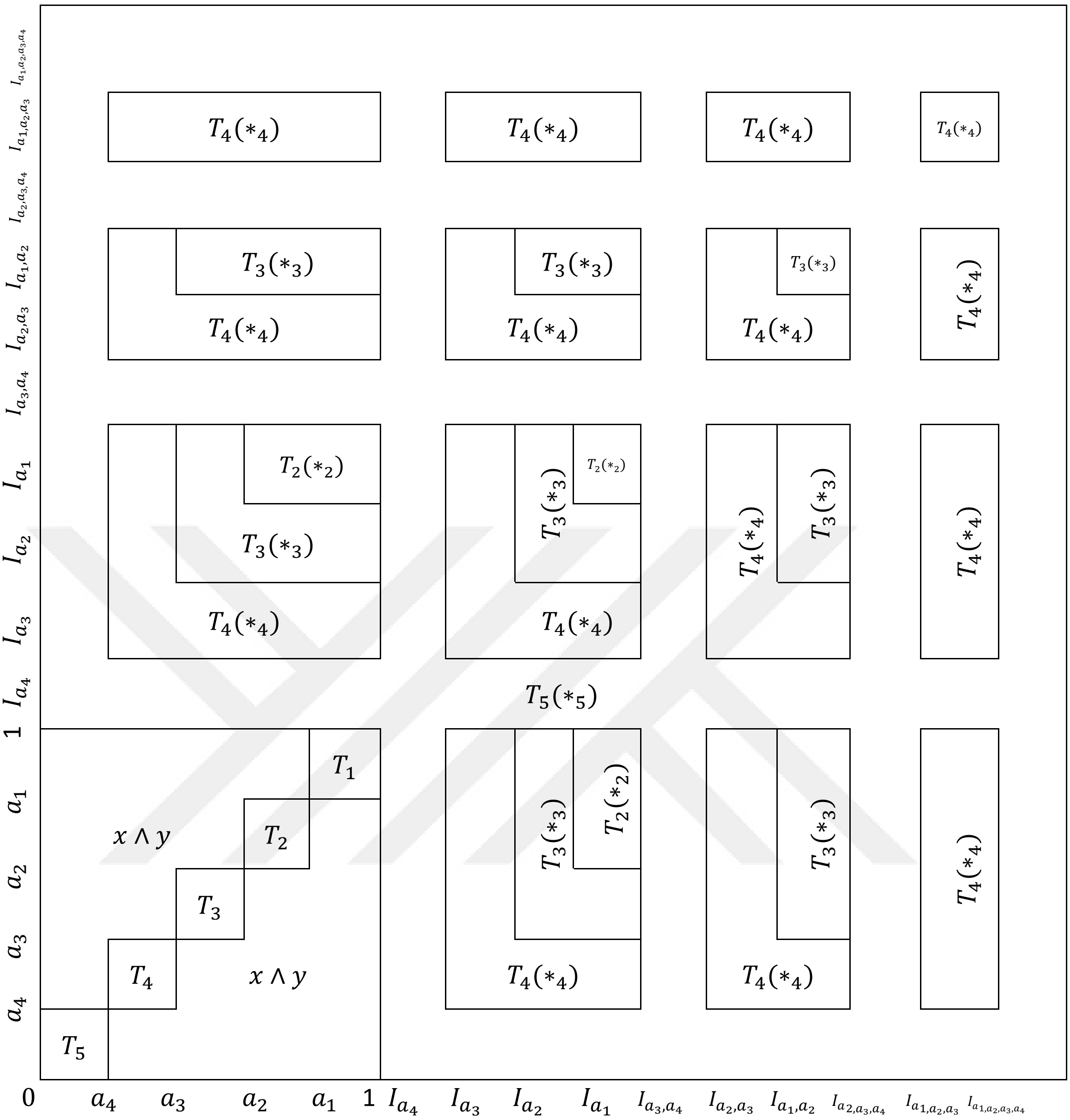
Şekil 2.6. T t- norm

Teorem 2.10. $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $0 = a_5 < a_4 < a_3 < a_2 < a_1 < a_0 = 1$ olacak şekilde $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in L$ için T_1 , T_2, T_3 , T_4 ve T_5 sırasıyla L nin $[a_1, a_0]$, $[a_2, a_1]$, $[a_3, a_2]$, $[a_4, a_3]$ ve $[a_5, a_4]$ alt aralıkları üzerinde tanımlı beş t- norm olsun. Bu takdirde, aşağıda verilen $T : L^2 \to L$ fonksiyonu L üzerinde bir t- normdur.

Şekil 2.7 de T_1, T_2 , T_3, T_4 ve T_5 yardımıyla elde edilen T t- normu aşağıda gösterilmiştir.

$$T(x,y=\begin{cases} T_1(x,y) & , \quad (x,y)\in[a_1,a_0)^2 \\ T_2(x,y) & , \quad (x,y)\in[a_2,a_1)^2 \\ T_3(x,y) & , \quad (x,y)\in[a_3,a_2)^2 \\ T_4(x,y) & , \quad (x,y)\in[a_4,a_3)^2 \\ T_5(x,y) & , \quad (x,y)\in[a_5,a_4)^2 \\ T_2(x\wedge a_1, y\wedge a_1) & , \quad (x,y)\in I_{a_1}\times[a_2,a_0)\cup[a_2,a_0)\times I_{a_1}\cup I_{a_1}\times I_{a_1} \\ T_3(x\wedge a_2, y\wedge a_2) & , \quad (x,y)\in (I_{a_2}\cup I_{a_1,a_2})\times[a_3,a_0)\cup[a_3,a_0)\times(I_{a_2}\cup I_{a_1,a_2}) \\ & \quad \cup I_{a_1}\times[a_3,a_2)\cup[a_3,a_2)\times I_{a_1}\cup I_{a_2}\times I_{a_2} \\ & \quad \cup I_{a_1,a_2}\times I_{a_1,a_2}\cup I_{a_1}\times I_{a_2}\cup I_{a_2}\times I_{a_1} \\ & \quad \cup I_{a_1,a_2}\times(I_{a_1}\cup I_{a_2})\cup(I_{a_1}\cup I_{a_2})\times I_{a_1,a_2} \\ T_4(x\wedge a_3, y\wedge a_3) & , \quad (x,y)\in(I_{a_3}\cup I_{a_2,a_3}\cup I_{a_1,a_2,a_3})\times[a_4,a_0) \\ & \quad \cup[a_4,a_0)\times(I_{a_3}\cup I_{a_2,a_3}\cup I_{a_1,a_2,a_3}) \\ & \quad \cup(I_{a_1}\cup I_{a_2}\cup I_{a_1,a_2})\times[a_4,a_3)\cup[a_4,a_3)\times(I_{a_1}\cup I_{a_2}\cup I_{a_1,a_2}) \\ & \quad \cup I_{a_3}\times I_{a_3}\cup I_{a_2,a_3}\times I_{a_2,a_3}\cup I_{a_1,a_2,a_3}\times I_{a_1,a_2,a_3} \\ & \quad \cup(I_{a_2,a_3}\cup I_{a_1,a_2,a_3})\times(I_{a_1}\cup I_{a_2}\cup I_{a_3}) \\ & \quad \cup(I_{a_1}\cup I_{a_2}\cup I_{a_3})\times(I_{a_2,a_3}\cup I_{a_1,a_2,a_3}) \\ & \quad \cup(I_{a_1}\cup I_{a_2}\cup I_{a_1,a_2})\times I_{a_3}\cup I_{a_3}\times(I_{a_1}\cup I_{a_2}\cup I_{a_1,a_2}) \\ & \quad \cup I_{a_1,a_2}\times I_{a_2,a_3}\cup I_{a_2,a_3}\times I_{a_1,a_2} \\ & \quad \cup I_{a_1,a_2,a_3}\times(I_{a_1,a_2}\cup I_{a_2,a_3})\cup(I_{a_1,a_2}\cup I_{a_2,a_3})\times I_{a_1,a_2,a_3} \\ x\wedge y & , \quad (x,y)\in[a_1,a_0)\times[a_5,a_1)\cup[a_5,a_1)\times[a_1,a_0) \\ & \quad \cup[a_2,a_1)\times[a_5,a_2)\cup[a_5,a_2)\times[a_2,a_1) \\ & \quad \cup[a_3,a_2)\times[a_5,a_3)\cup[a_5,a_3)\times[a_3,a_2) \\ & \quad \cup[a_4,a_3)\times[a_5,a_4)\cup[a_5,a_4)\times[a_4,a_3) \\ & \quad \cup L\times\{1\}\cup\{1\}\times L \\ T_5(x\wedge a_4, y\wedge a_4) & , \quad Aksi\ Takdirde. \end{cases}$$

İspat: Teorem 2.7 nin ispatına benzer şekilde yapılır.



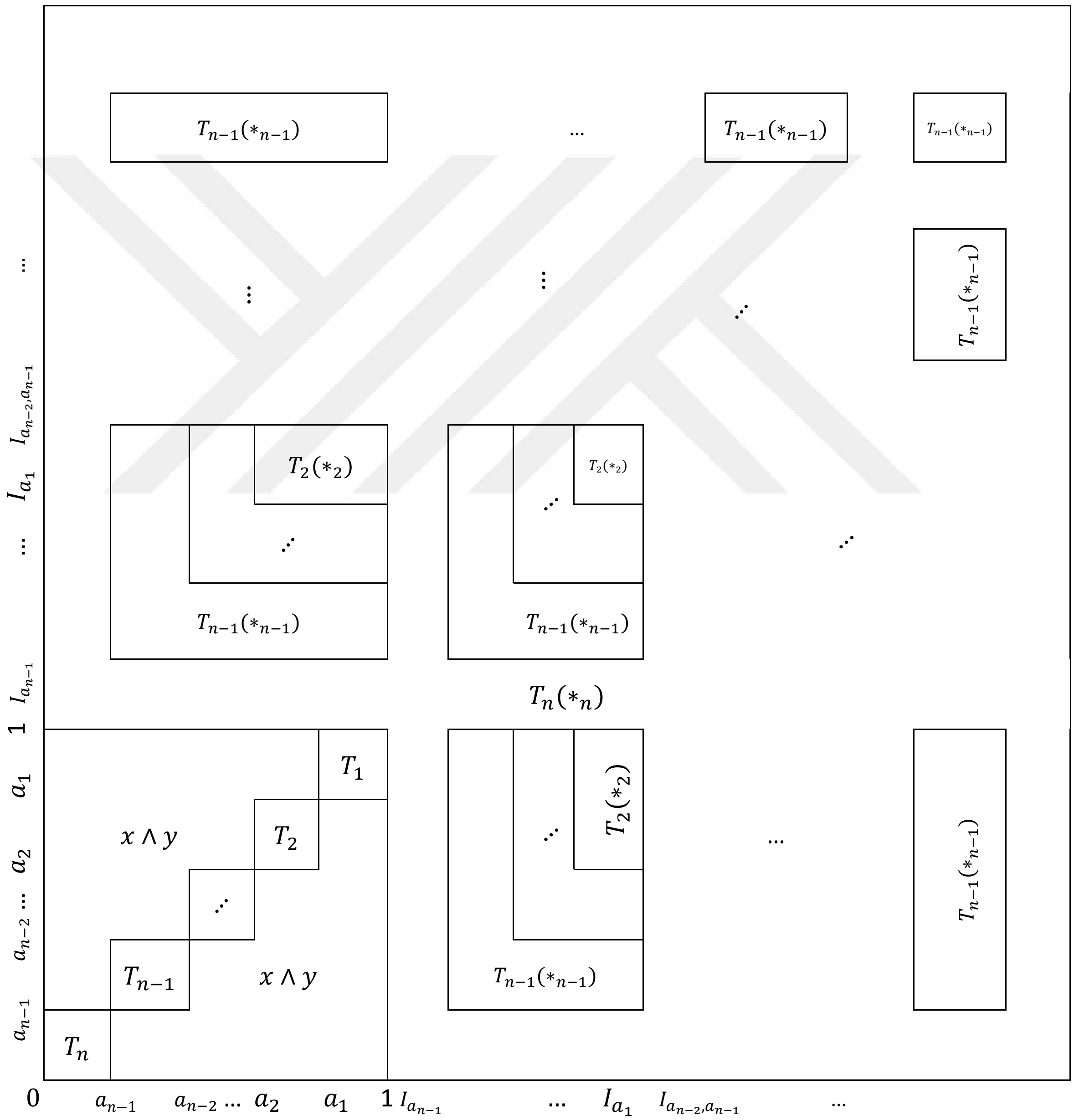
Şekil 2.7. T t- normu

Bu bulgulardan yola çıkarak $0 = a_n < a_{n-1} < \cdots < a_1 < a_0 = 1$ olacak şekilde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in L$ için T_1 , $T_2,\ldots,T_{n-1}$ ve T_n sırasıyla L nin $[\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_0]$, $[\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_1]$, …, $[\mathrm{a}_{n-1}, \mathrm{a}_{n-2}]$, $[\mathrm{a}_n, \mathrm{a}_{n-1}]$ üzerinde tanımlı n tane t- norm verildiğinde T t- normu aşağıdaki şekilde elde edilir. Böylece iki alt aralık için verilen inşa metodu genellenmiş olur.

Teorem 2.11. $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $0 = a_n < a_{n-1} < \cdots < a_1 < a_0 = 1$ olacak şekilde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in L$ için T_1 , $T_2,\ldots,T_{n-1}$ ve T_n sırasıyla L nin $[\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_0]$, $[\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_1]$, …, $[\mathrm{a}_{n-1}, \mathrm{a}_{n-2}]$, $[\mathrm{a}_n, \mathrm{a}_{n-1}]$ alt aralıkları üzerinde tanımlı t- normlar olsun. Bu takdirde, aşağıda verilen $T_n^*: L^2 \to L$ fonksiyonu L üzerinde bir t- normdur.

$$T_n^{\ *}(x,y)=\begin{cases} T_{l+1}(x,y) & , \quad (x,y)\in[a_{i+1},a_i)^2,\quad 0\le i\le n-1 \\ T_{l+1}(x\wedge a_l, y\wedge a_l) & , \quad (x,y)\in I_{a_k,a_{k+1}\dots,a_l}\times[a_p,a_r)\cup[a_p,a_r)\times I_{a_k,a_{k+1}\dots,a_l} \\ & \quad (0\le r\le p\le l+1\le n),(1\le k\le l\le n-1) \\ T_{m+1}(x\wedge a_m, y\wedge a_m) & , \quad (x,y)\in I_{a_k,a_{k+1}\dots,a_l}\times[a_{m+1},a_m)\cup[a_{m+1},a_m)\times I_{a_k,a_{k+1}\dots,a_l} \\ & \quad (2\le m+1\le n),(\ l<m) \\ T_{mak\{r,l\}+1}(x\wedge a_{mak\{r,l\}}, y\wedge a_{mak\{r,l\}}) & , \quad (x,y)\in I_{a_k,a_{k+1}\dots,a_l}\times I_{a_p,a_{p+1}\dots,a_r}\cup I_{a_p,a_{p+1}\dots,a_r}\times I_{a_k,a_{k+1}\dots,a_l} \\ & \quad (1\le k\le l\le n-1),(1\le p\le r\le n-1) \\ x\wedge y & , \quad (x,y)\in[a_{i+1},a_i)\times[a_n,a_{i+1})\cup[a_n,a_{i+1})\times[a_{i+1},a_i) \\ & \quad \cup L\times\{1\}\cup\{1\}\times L,(2\le i+2\le n) \\ T_n(x\wedge a_{n-1}, y\wedge a_{n-1}) & , \quad Aksi\ Takdirde. \end{cases} \tag{10}$$

$T_1, T_2, \dots, T_n$ yardımıyla elde edilen T t- normu aşağıdaki gibi şematize edilebilir.



Şekil 2.8. T t- normu

Yukarıdaki verilen formül yukarıda ispatı verilen tüm durumları kapsar. Yukarıdaki formüle alternatif olarak bu genelleme aşağıdaki şekilde de ifade edilir. Aşağıdaki formül $n+1$ elamanlı bir zincir ile n elemanlı bir zincir için elde edilen inşa arasında bir ilişkiyi verir.

$$T_n{}^*(x,y) = \begin{cases} T_{n-1}{}^*(x,y) & , \quad \begin{array}{c} (x,y) \in [a_{i+1}, a_i)^2, \quad 0 \le i \le n-2 \\ \cup\, I_{a_k,a_{k+1}\dots,a_l} \times [a_p, a_r) \cup [a_p, a_r) \times I_{a_k,a_{k+1}\dots,a_l} \\ (0 \le r \le p \le l+1 \le n-1\,), (1 \le k \le l \le n-2) \\ \cup\, I_{a_k,a_{k+1}\dots,a_l} \times [a_{m+1}, a_m) \cup [a_{m+1}, a_m) \times I_{a_k,a_{k+1}\dots,a_l} \\ (2 \le m+1 \le n-1), (\,l < m) \\ \cup\, I_{a_k,a_{k+1}\dots,a_l} \times I_{a_p,a_{p+1}\dots,a_r} \cup I_{a_p,a_{p+1}\dots,a_r} \times I_{a_k,a_{k+1}\dots,a_l} \\ (1 \le k \le l \le n-2), (1 \le p \le r \le n-2) \\ \cup\, [a_{i+1}, a_i) \times [a_n, a_{i+1}) \cup [a_n, a_{i+1}) \times [a_{i+1}, a_i) \\ \cup\, L \times \{1\} \cup \{1\} \times L \;\; (2 \le i+2 \le n-1) \end{array} \\ T_n(x \wedge a_{n-1}, y \wedge a_{n-1}) & , \quad Aksi\ Takdirde. \end{cases} \tag{11}$$

Uyarı 2.12. (11) formülü $T_n{}^*$ t-normu ile $T_{n-1}{}^*$ t-normu arasındaki ilişkiyi verir.

Uyarı 2.13. Bu çalışmada t- normlar için yapılan tüm çalışmalar dual olarak t-conormlar için de yapılır.

3. İRDELEME

Bu çalışmada sınırlı kafesler üzerinde t- normlar için bir inşa yöntemi araştırılmıştır. Bu tezin amacı L sınırlı kafesinin alt aralıkları üzerinde tanımlı T_i t- normlarından, hiçbir ek şarta gerek kalmaksızın, L üzerinde bir T t- normu elde etmek için bir inşa metodu vermektir. Bu amaçla literatür incelendiğinde, L sınırlı kafesinin $[a, 1]$ alt aralığı üzerinde tanımlı bir t-normdan L üzerinde bir t- norm elde etmek için inşa metotlarının mevcut olduğu görülmüştür. Bu inşa metotlarının dışında, L sınırlı kafesinin alt aralıkları üzerinde tanımlı t- normlardan L üzerinde bir t- norm elde etmek için hangi ek koşullara ihtiyaç duyulduğunun incelendiği bir çalışma da mevcuttur. Bu bilgiler ışığında, L sınırlı kafesinin $[0, a_1]$, $[a_1, 1]$ alt aralıkları üzerinde tanımlı t- normlardan hiçbir ek şart gerekmeksizin L üzerinde bir t- norm elde etmek için bir inşa metodu araştırılmıştır. Bu metot $[0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, $[a_2, 1]$ alt aralıkları üzerinde tanımlı t- normlardan L üzerinde bir t- norm elde edebilecek şekilde genişletilmiştir. Benzer fikirle çok daha genel bir form elde edilmiştir. Elde edilen inşa metodu mevcut yöntemlerle karşılaştırılmıştır.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada elde edilen bazı sonuçlar şunlardır:

1. L nin $[0, a_1], [a_1, 1]$ alt aralıkları üzerinde tanımlı sırasıyla T_1, T_2 t- normlarından, hiçbir ek şarta gerek duymaksızın, L üzerinde bir t- norm elde etmek için bir metot verilmiştir.

2. Önerilen inşa metodunun (6), (7), (8) formülleri ile verilen inşa metotlarından farklı olduğu gösterilmiştir. Hangi durumlarda çakıştıkları araştırılmıştır.

3. Önerilen inşa metodunun (6), (7) ile verilen inşa metotlarından daha genel olduğu gösterilmiştir.

4. Önerilen metodun $L\, nin$ $[0, a_2], [a_2, a_1], [a_1, 1]$ ve $[0, a_3], [a_3, a_2], [a_2, a_1]$,$[a_1, 1]$ alt aralıklarında tanımlı t- normlardan L üzerinde bir t- norm elde etmek için nasıl modifiye edildiği gösterilmiş ve ispatlanmıştır.

5. Verilen metot $[a_i, a_{i-1}]$ $(1 \leq i \leq n,\ a_0 = 1,\ a_n = 0)$ aralıkları üzerinde tanımlı T_i t- normlarından L üzerinde bir T t- normu elde edilecek şekilde genelleştirilmiştir.

6. L nin $n + 1$ elemanlı zinciri yardımıyla elde edilen t- norm ile n elemanlı zincir yardımıyla elde edilen t- norm arasındaki ilişki ortaya koyulmuştur.

5. ÖNERİLER

1. Benzer inşa metodu uninormlar için de araştırılabilir.

2. $0 = a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_1 \leq a_0 = 1$ olmak üzere benzer inşa metodu $[a_k, a_{k-1}]$ $(k \in \{1,2,\dots,n\})$ üzerinde tanımlı monoton, asosyatif, komutatif bir $*$ ikili işlemi ve $[a_i, a_{i-1}]$ $(1 \leq i \leq n, i \neq k)$ üzerinde T_i t- normları alınarak verilebilir mi, araştırılabilir.

3. İnşa metodunun üzerine kurulduğu T_i $(1 \leq i \leq n)$ t-normlarının sağladığı cebirsel özelliklerin T t- normu için de korunup korunmadığı araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Beliakov, G., Pradera, A. ve Calvo T., Aggregation functions: A guide for practitioners, Studies in Fuzziness and Soft Computing, 221, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

2. Birkhoff G., Lattice Theory, 3 rd edition, Providence, Rhode Island, 1967.

3. Clifford A. H., Naturally totally ordered commutative semigroups, Amer. J. Math., 76 (1954) 631-646.

4. Çaylı, G., on a new class of t-norms and t-conorms on bounded lattices, Fuzzy sets and systems, 332 (2018) 129-143.

5. Dubois D. and Prade H., Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York, 1980.

6. Ertuğrul, Ü., Karaçal, F. ve R. Mesiar, Modified ordinal sums of triangular norms and triangular conorms on bounded lattices, International Journal of Intelligent Systems, 30 (2015) 807-817.

7. Ertuğrul, Ü., Kesicioğlu, M. N. ve Karaçal, F., Ordering Based on Uninorms, Information Sciences, 330 (2016) 315-327.

8. Ertuğrul, Ü., Construction of nullnorms on bounded lattices and an equivalence relation on nullnorms, Fuzzy sets and systems, 334 (2018) 94-109.

9. Esteva, F., Godo, L., Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continous t-norms, Fuzzy sets and systems, 124 (2001) 271-288.

10. Goguen, J.A., L- Fuzzy Sets, J. Math Anal. Appl. 18 (1967) 145-174.

11. Goguen, J.A., The Fuzzy Tychonoff theorem, J. Math Anal. Appl. 43 (1973) 734-742.

12. Grabisch, M., Marichal, J.-L., Mesiar, R. ve Pap, E., Aggregation Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

13. Hájek ,P., Metamathematics of Fuzzy Logic, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

14. Höhle, P., Probabilistische Topologien, Manuscripta Math, 26 (1978) 223-245.

15. Höhle, U., Commutative, residuated ℓ-monoids, in: U. Höhle, E.P. Klement (Eds.), Non Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets: A Handbook on the Math. Foundations of Fuzzy Set Theory, Kluwer, Dordrecht, 1995.

16. İnce, M.A. ve Karaçal, F., t-closure operators, International Journal of General Systems, https://doi.org/10.1080/03081079.2018.1549041.

17. Karaçal, F. ve Khadjiev, Dj., ∨ - distributive and infinitely ∨ -distributive t-norms on complete lattice, Fuzzy Sets and Systems, 151 (2005) 341-352.

18. Karaçal F. and Kesicioğlu M. N., A T- partial order obtained from t-norms, Kybernetika, 47 (2011) 300-314.

19. Karaçal, F., Ertuğrul, Ü. ve Mesiar, R., Characterization of uninorms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems, 308 (2017) 54-71.

20. Kesicioğlu, M. N. ve Mesiar, R., Ordering based on implications, Information Sciences, 276 (2014) 377-386.

21. Kesicioğlu, M. N., Karaçal, F. ve Mesiar, R., Order-equivalent triangular norms, Fuzzy Sets and Systems, 268 (2015) 59-71.

22. Klement E.P., Mesiar R. and Pap E., Triangular norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

23. Klement E.P., Mesiar R. and Pap E., Problems on triangular norms and related operators, Fuzzy Sets and Systems, 145 (2004) 471-479.

24. Ma Z. and Wu W.-M., Logical operators on complete lattices, Inform. Sci., 55 (1991) 77-97.

25. Menger K., Statistical metrics, Proc. Nat. Acad. Sci., 8 (1942) 535-537

26. Saminger, S., On ordinal sums of triangular norms on bounded lattices, Fuzzy sets and systems, 157 (2006) 1403-1416.

27. Saminger-Platz S., Klement E.P. and Mesiar R., On extensions of triangular norms on bounded lattices, Indagations Mathematicae, 19 (2009) 135-150.

28. Schweizer B. and Sklar A., Espaces Metriques Aleatories, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 247 (1958) 2092 – 2094.

29. Schweizer B. and Sklar A., Statistical Metric Spaces, Pasific J. Math., 10 (1960) 313 – 334.

30. Schweizer B. and Sklar A., Associative fuctions and statistical triangle inequalities, Publ. Math. Debrecen, 8 (1961) 169 – 186.

31. Schweizer B. and Sklar A., Associative fuctions and abstract semigroups, Publ. Math. Debrecen, 10 (1963) 69-81.

32. Schweizer B. and Sklar A., Probabilistic Metric Spaces, North-Holland, New York, 1983

33. Zadeh L. A., Fuzzy sets, Inform. Control, 8 (1965) 338-353.

34. Zhang D., Triangular norms on partially ordered sets, Fuzzy Sets and Systems, 153 (2005) 195-209.

ÖZGEÇMİŞ

Merve YEŞİLYURT, 1991 yılında Küçükçekmece'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Trabzon'da tamamladı. 2014 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden ikincilikle mezun oldu. 2015 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesinde Pedagojik Formasyon Eğitimi aldı. 2017 yılında K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisansa başladı. İngilizce bilmektedir.