KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

PERİYODİK VE ÇİFT POTANSİYEL FONKSİYONU İÇİN KARARSIZLIK ARALIKLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine KALAN

KASIM 2019
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

PERİYODİK VE ÇİFT POTANSİYEL FONKSİYONU İÇİN KARARSIZLIK ARALIKLARI

Emine KALAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 01.11.2019
Tezin Savunma Tarihi : 28.11.2019

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Haskız COŞKUN

Trabzon 2019

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında
Emine KALAN Tarafından Hazırlanan

Periyodik ve Çift Potansiyel Fonksiyonu İçin Kararsızlık Aralıkları

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 12 / 11 /2019 gün ve 1827 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Ziya YAPAR ....

Üye : Prof. Dr. Ömer PEKŞEN ....

Üye : Prof. Dr. Haskız COŞKUN ....

Prof. Dr. Asim KADIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenerek, tecrübesini, desteğini ve hoşgörüsünü esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Haskız COŞKUN'a, tez çalışmam boyunca bilgilerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Erhan COŞKUN'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca büyük özveri gösteren maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan ailem, eşim ve arkadaşlarıma teşekkür ederim. İyi ki varsınız.

Emine KALAN
Trabzon, 2019

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum ‘‘Periyodik ve Çift Potansiyel Fonksiyonu için Kararsızlık Aralıkları’’ başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Haskız COŞKUN’un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 28/11/2019

Emine KALAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans

ÖZET

PERİYODİK VE ÇİFT POTANSİYEL FONKSİYONU İÇİN KARARSIZLIK ARALIKLARI

Emine KALAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Haskız COŞKUN

2019, 63 Sayfa

Bu çalışmada ikinci mertebeden kendine eş

$$(py')' + (\lambda s - q)y = 0$$

denkleminin katsayı fonksiyonlarının belirli varsayımları sağlaması durumunda yardımcı özdeğer problemi kullanılarak kararsızlık aralıklarının uzunlukları için bazı asimptotik sonuçlar elde edilmiştir.

Katsayı fonksiyonları $p''(x)$ ve $s''(x)$ mevcut ve parçalı sürekli kabul edilmiştir. Potansiyel fonksiyonu $q(x)$ çift (veya tek), $[0, a]$ üzerinde integrallenebilen a periyodlu bir fonksiyondur.

Anahtar Kelimeler: Periyodik ve çift potansiyel fonksiyon, Yardımcı özdeğerler, Kararsızlık aralıkları.

Master Thesis

SUMMARY

INSTABILITY INTERVALS FOR PERIODIC AND EVEN POTENTIAL FUNCTION

Emine KALAN

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Haskız COŞKUN
2019, 63 Page

In this thesis we obtain some asymtotic results for the length of the instability intervals for the second order differential equation

$(py')' + (\lambda s - q)y = 0$

are derived by means of an auxiliary eigenvalue problem under various assumptions on the coefficient fuctions.

It was assumed that $p''(x)$ and $s''(x)$ are existand piecewise continuous. The potential function $q(x)$ is even (or odd), integrable $[0, a]$ and has period a.

Key Words: Periodic and double potantial function, Auxiliary eigenvalues, Instability intervals.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

λ, μ : periyodik ve yarı periyodik özdeğerler

$\Lambda_n(\tau)$: yardımcı özdeğerler

l_n : kararsızlık aralığının uzunluğu

$\lambda \to \infty$: λ, ∞ a yaklaşırken

O,o : asimptotik davranışları tarif etmek için kullanılan simgeler

$\frac{d}{dx}$: x'e göre birinci türev

$q^r(x)$: q(x) fonksiyonunun x'e göre r. mertebeden türevi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

İkinci mertebeden

$$(py')' + (\lambda s - q)y = 0 \tag{1}$$

denklemi; $p''(x)$ ve $s''(x)$ mevcut ve parçalı sürekli olması durumunda uygun dönüşümler yardımıyla

$$y'' + (\lambda - q)y = 0 \tag{2}$$

denklemine indirgenebilir[4]. λ reel bir parametre ve $q(x)$ ise reel değerli bir fonksiyondur. (2) denkleminin lineer bağımsız y_1 ve y_2 çözümleri

$$y_1(0,\lambda) = y_2'(0,\lambda) = 1,\ y_1'(0,\lambda) = \ y_2(0,\lambda) = 0$$

koşullarını sağlaması durumunda diskriminant fonksiyonu

$$D(\lambda) = y_1(a,\lambda) + y_2'(a,\lambda)$$

olarak tanımlanır. $D(\lambda) - 2 = 0$ denkleminin sıfır yerleri $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ...$ ile gösterilirse bu değerler (2) denkleminin periyodik sınır koşullarını sağlaması durumunda periyodik özdeğerler olarak bilinmektedir[4]. Benzer şekilde $D(\lambda) + 2 = 0$ denkleminin sıfır yerleri $\mu_0, \mu_1, \mu_2, ...$ ile gösterilirse, bu değerler de (2) denkleminin yarı periyodik sınır koşullarını sağlaması durumunda yarı periyodik özdeğerler olarak adlandırılır.

Genel olarak λ_n ve μ_n değerleri

$$\lambda_0 < \mu_0 \leq \mu_1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_2 \,....$$

bağıntısına sahiptir[4]. $\lambda \in \mathcal{R}$ ve $\lambda \in (\lambda_{2m}, \mu_{2m}) \cup (\mu_{2m+1}, \lambda_{2m+1})$ olması durumunda (2) denkleminin trivial olmayan tüm çözümleri $(-\infty, \infty)$ aralığında sınırlıdır.

$\lambda \in (-\infty, \lambda_0) \cup (\mu_{2m}, \mu_{2m+1}) \cup (\lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2})$ olması durumunda ise (2) denkleminin tüm sıfırdan farklı çözümleri $(-\infty, \infty)$ aralığında sınırlıdır. (μ_{2m}, μ_{2m+1}) ve $(\lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2})$ aralıkları sırasıyla $(2m+1)$.ci ve $(2m+2)$.ci kararsızlık aralıkları, $(-\infty, \lambda_0)$ ise sıfırıncı kararsızlık aralığı olarak adlandırılır.

Kararsızlık aralıklarının bilinmesi durumunda q potansiyel fonksiyonu hakkında bazı sonuçların elde edilmesi mümkündür. Genel olarak bu tür problemler ‘‘ ters problemler’’ olarak adlandırılır ve bu konuda yapılan çalışmalardan en önemlisi 1946 yılında G. Borg tarafından ispatlanmıştır**[6]**. Benzer çalışmalar ve alternatif sonuçlar Hochstadt**[7]** ve Ungar**[8]** tarafından yürütülmüştür.

Bu çalışmada, (2) denklemindeki $q(t)$ fonksiyonu reel değerli, $[0, a]$ üzerinde integrallenebilen, a periyoduna sahip ve ayrıca

$$q(t) = q(a-t) \; veya \left(q(t) = -q(a-t)\right)$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon olarak kabul edilmiştir. Bu koşullar altında (2) denkleminin $y(\tau) = y(\tau + a) = 0$ sınır koşullarını sağlayan ve yardımcı özdeğerler olarak adlandırılan $\Lambda_n(\tau)$ özdeğerleri hesaplanarak λ_n ve μ_n için asimptotik sonuçlar elde edilmiştir. Analitik olarak yapılan çalışmalar sonucunda elde edilen asimptotik tahminler kullanılarak kararsızlık aralıkları ile ilgili $l_n = F(n) + O(n^{-k})$ şeklinde sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar farklı örneklere uygulanmış ve nümerik yaklaşımlar kullanılarak kararsızlık aralıklarının uzunlukları hesaplanmıştır.

İkinci bölümde genel bir çözüm formu elde edebilmek amacıyla aşağıda tanımı verilen büyük “O” ve küçük “o” notasyonu kullanılacaktır:

‘‘x_0 noktasının herhangi bir ε_0 civarındaki tüm x’ler için

$$|f(x)| \leq M|g(x)|, x \in \varepsilon_0, x \neq x_0$$

eşitsizliğini sağlayan bir $M > 0$ sayısı varsa x, x_0’ a yakınsadığında $f(x)$ fonksiyonu, $g(x)$ fonksiyonuna göre sınırlıdır” denir ve

$f(x) = O\big((gx)\big), x \to x_0$ şeklinde yazılır. ”

“f(x) ve g(x) fonksiyonları x_0 noktasının herhangi bir ε_0 civarında tanımlanmış ve g(x) ≠ 0 olmak üzere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

eşitliğinin sağlanması durumunda f(x) fonksiyonuna g(x) fonksiyonundan asimptotik olarak küçüktür” denir ve

$$f(x) = o\big(g(x)\big), \quad x \to x_0$$

şeklinde yazılır.” **[1].**

1.2. Periyodik ve Yarı Periyodik Özdeğer Problemleri

$$\{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x) - q(x)\}y(x) = 0 \tag{1.1}$$

denkleminde $p(x), q(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonları a periyoda sahip; λ ise reel bir parametre olsun.

(1.1) denklemi için iki özdeğer problemi ele alınacaktır. Bu problemler (1.1) denklemi için temel oluşturmaktadır. Burada bahsedilen özellikler bölüm 1.3'deki $D(\lambda)$ için λ’nın incelenmesinde kullanılacaktır.

i. Periyodik Problem: $[0, a]$ aralığı üzerinde tanımlı

$$\{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x) - q(x)\}y(x) = 0$$

denklemi ile

$$y(a) = y(0), \quad y'(a) = y'(0) \tag{1.2}$$

periyodik sınır koşullarını sağlayan problemdir.

$D = d/dx$ olmak üzere $L \coloneqq D[p(x)D] - q(x)$ operatörü verilsin.

(1.2) problemi

$$L[y] + \lambda s(x)y = 0$$

şeklinde ifade edilir. Şimdi bu operatörün simetrikliği aşağıdaki gibi gösterilsin. Verilen aralık üzerinde sürekli, ikinci mertebe türeve sahip ve verilen sınır koşullarını sağlayan her u , v fonksiyonu için

$$\begin{aligned} L[u] &= \{D[p(x)D] - q(x)\}u \\ &= [p(x)u']' - q(x)u \\ &= p'(x)u' + p(x)u'' - q(x)u \\ L[v] &= \{D[p(x)D] - q(x)\}v \\ &= [p(x)v']' - q(x)v \\ &= p'(x)v' + p(x)v'' - q(x)v \end{aligned}$$

ve $u(a) = u(0),\ u'(a) = u'(0), v(a) = v(0), v'(a) = v'(0)$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\int_0^a (uL[v] - vL[u])dx \\ &\quad = \int_0^a [u\, p'(x)v' + up(x)v'' - q(x)uv - vp'(x)u' - vp(x)u'' + q(x)uv]dx \\ &\quad \underbrace{= \int_0^a p'(uv' - vu')dx}_{J_1} + \underbrace{\int_0^a p(x)(uv'' - vu'')dx}_{J_2} \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradaki J_1 ve J_2 integralleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} J_1 &= (uv' - vu')p|_0^a - \int_0^a p(uv' - vu')'\, dx \\ &= -\int_0^a p(u'v' + uv'' - v'u' - vu'')dx \\ &= -\int_0^a p(uv'' - vu'')dx \\ &= -J_2 \\ &\Rightarrow J_1 + J_2 = 0 \\ &\Rightarrow \int_0^a (uL[v] - vL[u])dx = 0\, , \end{aligned}$$

bulunur. Yani operatör verilen sınır koşullarına göre $[0, a]$ üzerinde simetriktir.

(1.2) problemi kendine eştir ve sayılabilir sayıda özdeğerlere sahiptir yani;

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq . . . \text{ ve } n \to \infty \text{ , } \lambda_n \to \infty \text{ [2]} \tag{1.3}$$

sağlanır. λ_n $(n = 0,1,2,. . .)$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar $\psi_n(x)$ ile gösterilirse bunlar da aşağıdaki özelliğe sahiptirler.

$$\int_0^a \psi_n(x)\psi_m(x)s(x)dx = \begin{cases} 1, & (m = n) \\ 0, & (m \neq n) \end{cases}$$

Burada $\psi_n(x)$ a periyotlu sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar olmak üzere reel eksenin tamamına genişletilebilir. Bu nedenle bu fonksiyonlar λ_n özdeğerine karşılık gelen (1.1) probleminin çözümleridir.

i. Yarı Periyodik Problemi: $[0, a]$ aralığı üzerinde tanımlı

$$\{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x) - q(x)\}y(x) = 0$$

denklemi ile

$$y(a) = -y(0), \quad y'(a) = -y'(0) \tag{1.4}$$

yarı periyodik sınır koşullarını sağlayan problemdir.

Bu problem de benzer şekilde kendine eştir ve verilen sınır koşullarına göre simetriktir, bu nedenle sayılabilir sayıda özdeğerlere sahiptir. Yani;

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq . . . \text{ ve } \mu\_n \to \infty \text{ , } n \to \infty \tag{1.5}$$

dır. Yarı periyodik özdeğer probleminin özdeğerleri μ_n $(n = 0,1,. . .)$, bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar da $\xi_n(x)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1: $p(x) = s(x) = 1, q(x) = 0$, $x \in [0, a]$ olması durumunda, (1.1) denklemi $y'' + \lambda y = 0$ denklemine indirgenir.

$\lambda = 0$ için çözüm

$y = c_1 + c_2 x$

dir. Sınır değerleri kullanıldığında ise

$y(0) = c_1\,,\ y(a) = c_1 + c_2 a$

ve buradan

$c_1 = c_1 + c_2 a$

olur. Türev alınır, a da hesaplanır ve $y'(0) = y'(a)$ kullanılırsa

$y'(0) = c_2 = y'(a)$

y ve y' den

$c_2 a = 0$

$c_2 = 0\,, c_1\ keyfi$

elde edilir. Burada c_1 özel olarak 1 alınırsa

$\lambda_0 = 0$ özdeğerine karşı $\psi_0(x) = 1$ bir özfonksiyondur.

$\lambda = k^2 > 0$ için çözüm

$y = c_1 coskx + c_2 sinkx$

dir. Sınır değerleri kullanıldığında ise

$y(0) = c_1,\quad y(a) = c_1 coska + c_2 sinka$

ve buradan

$c_1 = c_1 coska + c_2 sinka$

olur. Türev alınır, a da hesaplanır ve $y'(0) = y'(a)$ kullanılırsa

$y'(a) = -kc_1 sinka + kc_2 coska = kc_2 = y'(0)$

y ve y' den

$c_1(1 - coska) - c_2 sinka = 0$

$c_1 sinka + c_2(1 - coska) = 0$

elde edilir ve sıfırdan farklı çözüm için katsayılar determinantı kullanılırsa

$$\begin{vmatrix} 1-coska & -sinka \\ sinka & (1-coska) \end{vmatrix} = (1 - coska)^2 + sin^2 ka$$
$$= 1 - 2coska + \cos^2 ka + \sin^2 ka$$
$$= 0$$
$$\Rightarrow (2 - 2coska) = 0$$
$$\Rightarrow 1 = coska \Rightarrow ka = 2(m+1)\pi$$
$$\Rightarrow k = \frac{2(m+1)\pi}{a}$$

bulunur ve

$$\lambda_{2m+1} = \lambda_{2m+2} = \frac{4(m+1)^2\pi^2}{a^2}$$

şeklinde olur.

$\lambda = -k^2 < 0$ için çözüm

$$y = c_1 coshkx + c_2 sinhkx$$

dir. Sınır değerleri kullanıldığında ise

$y(0) = c_1, \quad y(a) = c_1 coshka + c_2 sinhka$

ve buradan

$$c_1 = c_1 coshka + c_2 sinhka$$

olur. Türev alınır, a da hesaplanır ve $y'(0) = y'(a)$ kullanılırsa

$$y'(a) = kc_1 sinhka + kc_2 coshka = kc_2 = y'(0)$$

y ve y' den

$$c_1(coshka - 1) + c_2 sinhka = 0$$

$$c_1 sinhka + c_2(coshka - 1) = 0$$

elde edilir. Sıfırdan farklı çözüm için katsayılar determinantı kullanılırsa

$$\begin{vmatrix} (coshka-1) & sinhka \\ sinhka & (coshka-1) \end{vmatrix} = (coshka - 1)^2 - sinh^2 ka$$

$$= 1 - 2coshka + \cosh^2 ka - \sinh^2 ka$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow (2 - 2coshka) = 0$$

$$\Rightarrow 1 = coshka$$

$$\Rightarrow ka = 0$$

bulunur. Yani,

$\lambda = -k^2 < 0$ özdeğer değildir.

Benzer şekilde

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(a) = -y(0), y'(a) = -y'(0)$$

yarı periyodik probleminin özdeğerleri için

$\mu = 0$ için

$$y = c_1 + c_2 x \ , \ y' = c_2$$

$$y(a) = -y(0) \Rightarrow c_1 + c_2 a = -c_1$$

$$y'(a) = -y'(0) \Rightarrow c_2 = -c_2$$

olduğundan $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ dır. Buradan $\mu = 0$ özdeğer değildir.

$\mu = k^2 > 0$ için çözüm

$y = c_1 coskx + c_2 sinkx$

dir. Sınır değerleri kullanıldığında ise

$$-y(0) = c_1, \quad y(a) = c_1 coska + c_2 sinka$$

ve buradan

$$-c_1 = c_1 coska + c_2 sinka$$

olur. Türev alınır, a da hesaplanır ve $-y'(0) = y'(a)$ kullanılırsa

$y'(a) = -kc_1 sinka + kc_2 coska = -kc_2 = -y'(0)$

y ve y' den

$c_1(1 + coska) + c_2 sinka = 0$

$-c_1 sinka + c_2(coska + 1) = 0$

elde edilir. Çözüm için katsayılar determinantı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1+coska & sinka \\ -sinka & (1+coska) \end{vmatrix} &= (1 + coska)^2 + sin^2 ka \\
&= (1 + 2coska + \cos^2 ka + \sin^2 ka) \\
&= 0 \\
&\Rightarrow 2 + 2coska = 0 \\
&\Rightarrow -1 = coska \Rightarrow ka = (2m+1)\pi \\
&\Rightarrow k = \frac{(2m+1)\pi}{a}
\end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$\mu_{2m} = \mu_{2m+1} = \frac{(2m+1)^2\pi^2}{a^2}$$

şeklinde olur.

$\mu = -k^2 < 0$ için çözüm

$y = c_1 coshkx + c_2 sinhkx$

dir. Sınır değerleri kullanıldığında ise

$$-y(0) = -c_1, \quad y(a) = c_1 coshka + c_2 sinhka$$

ve buradan

$$-c_1 = c_1 coshka + c_2 sinhka$$

olur. Türev alınır, a da hesaplanır ve $-y'(0) = y'(a)$ kullanılırsa

$y'(a) = kc_1 sinhka + kc_2 coshka = -kc_2 = -y'(0)$

y ve y' den

$c_1(coshka + 1) + c_2 sinhka = 0$

$c_1 sinhka + c_2(coshka + 1) = 0$

elde edilir. Çözüm için katsayılar determinantı kullanılırsa

$$\begin{vmatrix} (coshka+1) & sinhka \\ sinhka & (coshka+1) \end{vmatrix} = (coshka + 1)^2 - sinh^2 ka$$

$$= 1 + 2coshka + \cosh^2 ka - \sinh^2 ka$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow (2 + 2coshka) = 0$$

$$\Rightarrow -1 = coshka$$

bulunur.

Bu eşitliği sağlayan bir k değeri yoktur. Yani,

$\mu = -k^2 < 0$ özdeğer değildir.

Örnek 1.2: $p(x) = 1, q(x) = 0,$

$$s(x) = 1 \quad \left(-\tfrac{1}{2}a < x \le 0\right), \quad s(x) = 9 \quad \left(0 < x \le \tfrac{1}{2}a\right)$$

olmak üzere,

$y'' + \lambda s y = 0$ denklemi iki ayrı aralık için;

$y'' + \lambda y = 0 \qquad -\frac{1}{2}a < x \leq 0$

$y'' + 9\lambda y = 0 \qquad 0 < x \leq \frac{1}{2}a$

şeklinde olur.

Periyodik problem: $\lambda = 0$ özdeğerine karşı $\psi_0(x) = 1$ özfonksiyonun olduğu açıktır. $\lambda > 0$ için denklemin genel çözümü aşağıdaki forma sahiptir.

$$\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} = \begin{cases} A cos x\sqrt{\lambda} + B sin x\sqrt{\lambda} & \left(-\frac{1}{2}a \leq x \leq 0\right) \\ C cos 3x\sqrt{\lambda} + D sin 3x\sqrt{\lambda} & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}a\right) \end{cases}$$

ve

$$\begin{matrix} y_1' \\ y_2' \end{matrix} = \begin{cases} -A\sqrt{\lambda} sin x\sqrt{\lambda} + B\sqrt{\lambda} cos x\sqrt{\lambda} \\ -3C\sqrt{\lambda} sin 3x\sqrt{\lambda} + 3D\sqrt{\lambda} cos 3x\sqrt{\lambda} \end{cases}$$

dir. Burada A, B, C, D sabitlerdir. Çözümün sürekliliği kullanılır ve $x = 0$'daki türevi alınırsa

$A = C$, $B = 3D$ dir.

$\left[-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\right]$ aralığına ilişkin periyodik sınır şartları, yani

$y_1\left(-\frac{a}{2}\right) = y_2\left(\frac{a}{2}\right)$, $y_1'\left(-\frac{a}{2}\right) = y_2\left(\frac{a}{2}\right)$ kullanlırsa;

$$C\left\{cos\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right) - \cos\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right)\right\} + D\left\{sin\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right) + 3\sin\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right)\right\} = 0$$

$$C\left\{3sin\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right)\right\} - 3D\left\{cos\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right) - \cos\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right)\right\} = 0$$

bulunur.

C ve D aynı anda sıfır olmaksızın, sıfırdan farklı çözüm elde etmek için katsayılar determinantı hesaplanırsa

$$\begin{vmatrix} cos\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)-\cos\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right) & sin\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)+3\sin\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right) \\ 3sin\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)+\sin\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right) & -3cos\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)+3\cos\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$-3\cos^2\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right) + 6\cos\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right) cos\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right) - 3\sin^2\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right) - 3\cos^2\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right) -$$

$$3\sin^2\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right) - 10\ sin\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)\sin\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ \ 8cos2a\sqrt{\lambda} - 2cosa\sqrt{\lambda} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow\ \ 8cos^2a\sqrt{\lambda} - cosa\sqrt{\lambda} - 7 = 0 \tag{1.6}$$

eşitliği elde edilir. (1.6) için iki durum söz konusudur. Birinci durum;

$$cosa\sqrt{\lambda} = -\frac{7}{8}$$

dır. Bu durumda özdeğerler basittir. İkinci durum ise

$$cosa\sqrt{\lambda} = 1$$

dır. Bu durumda ise özdeğerler iki katlıdır.

Bu nedenle $\lambda_0 = 0$ ve $m \geq 0$ için

$$\lambda_{4m+1} = \frac{4\left(m\pi+\frac{1}{2}\alpha\right)^2}{a^2}, \qquad \lambda_{4m+2} = \frac{4\left\{(m+1)\pi-\frac{1}{2}\alpha\right\}^2}{a^2},$$

$$\lambda_{4m+3} = \lambda_{4m+4} = \frac{4(m+1)^2\pi^2}{a^2}$$

olur. Burada

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi \text{ ve } \alpha = cos^{-1}\left(-\frac{7}{8}\right)$$

dır.

Yarı periyodik problem: $\left[-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\right]$ aralığına ilişkin yarı periyodik sınır şartları yani $y_1\left(-\frac{a}{2}\right) = -y_2\left(\frac{a}{2}\right)$, $y_1'\left(-\frac{a}{2}\right) = -y_2\left(\frac{a}{2}\right)$ kullanılırsa

$$C\left\{-cos\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)-\cos\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right)\right\}-D\left\{sin\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)-3\sin\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right)\right\}=0$$
$$C\left\{-3sin\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)+\sin\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right)\right\}+3D\left\{cos\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)+\cos\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right)\right\}=0$$

bulunur.

C ve D aynı anda sıfır olmaksızın, sıfırdan farklı çözüm elde etmek için katsayılar determinantı hesaplanırsa

$$\begin{vmatrix} -cos\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)-\cos\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right) & -sin\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)+3\sin\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right) \\ -3sin\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)+\sin\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right) & 3cos\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)+3\cos\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right) \end{vmatrix}=0$$
$$\Rightarrow -3\cos^2\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)-6\cos\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right)cos\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)-3\sin^2\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)-$$
$$3\cos^2\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right)-3\sin^2\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right)+10\ sin\left(\frac{3}{2}a\sqrt{\lambda}\right)\sin\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\lambda}\right)=0$$
$$\Rightarrow\ 8cos2a\sqrt{\lambda}-2cosa\sqrt{\lambda}+6=0$$
$$\Rightarrow\ 8cos^2a\sqrt{\lambda}-cosa\sqrt{\lambda}-1=0$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda özdeğerler ise;

$$cosa\sqrt{\lambda}=(1\pm\sqrt{33})/16$$

olur.

Yarı periyodik problemin özdeğerlerinin tümü basittir ve

$$\mu_{4m}=\frac{4\left(m\pi+\frac{1}{2}\beta\right)^2}{a^2},\quad \mu_{4m+1}=\frac{4\left(m\pi+\frac{1}{2}\gamma\right)^2}{a^2}$$
$$\mu_{4m+2}=\frac{4\left\{(m+1)\pi-\frac{1}{2}\gamma\right\}^2}{a^2},\quad \mu_{4m+3}=\frac{4\left\{(m+1)\pi-\frac{1}{2}\beta\right\}^2}{a^2}$$

olur. Burada

$$\beta=cos^{-1}\left\{\frac{1+\sqrt{33}}{16}\right\},\qquad \gamma=cos^{-1}\left\{(1-\sqrt{33})/16\right\}$$

dır.

1.3. Prüfer Dönüşüm Formülleri

Bu bölümde

$$\{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x) - q(x)\}y(x) = 0$$

probleminin özdeğerleri olan λ_n ve μ_n $(n \to \infty)$ için asimptotik tahminler elde edilecektir. Bunun için eğer $p''(x)$ ve $s''(x)$ mevcut ve parçalı sürekli ise

$$\{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x) - q(x)\}y(x) = 0$$

probleminin çözümü için aşağıda verilen Liouville dönüşümü ve dönüştürülmüş denklemi kullanılır.

$$t = \int_0^a \left\{\frac{s(u)}{p(u)}\right\}^{1/2} du, \quad z(t) = \{p(x)s(x)\}^{1/2} y(x)$$

Dönüştürülmüş denklem;

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \{\lambda - Q(t)\}z(t) = 0, \tag{1.7}$$

$$Q(t) = q(x) - p^{\frac{1}{4}}(x)s^{-\frac{3}{4}}(x)\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}\{p(x)s(x)\}^{-\frac{1}{4}} \tag{1.8}$$

şeklindedir.

λ parametresi değişmez. Ayrıca x-aralığı [0,a] üzerinde periyodik ve yarı periyodik sınır koşullarına karşılık gelen t-aralığı için aynı tipte sınır koşullarına dönüştürülür. Bundan dolayı (1.7) eşitliği için periyodik ve yarı periyodik özdeğerler olan λ_n ve μ_n,

$$\{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x) - q(x)\}y(x) = 0$$

problemindeki özdeğerler ile aynıdır. $q^r(x)$, $p^{(r+2)}(x)$ ve $s^{(r+2)}(x)$ in tümü mevcut ise Q(t) r defa türevlenebilirdir.

$p''(x)$ ve $s''(x)$ mevcut değil ve $\{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x) - q(x)\}y(x) = 0$ problemi olduğu gibi uygulanamazsa bu durumda Liouville dönüşümü kullanılamaz. Aşağıdaki denklem göz önüne alınsın.

$$\{C(x)y'(x)\}' + D(x)y(x) = 0 \quad (x_1 \le x \le x_2) \tag{1.9}$$

Burada C(x) ve D(x) reel değerli, periyodik olması gerekmeyen ve türevleri parçalı sürekli fonksiyonlar olmak üzere; C(x) ve D(x) pozitif ve $R(x) = \{C(x)D(x)\}^{½}$ olarak tanımlansın.

Eğer $y(x)$ (1.9) eşitliğinin sıfırdan farklı reel değerli bir çözümü ise

$$R(x)y(x) = \rho(x)sin\theta(x)\,, \quad C(x)y'(x) = \rho(x)cos\theta(x) \tag{1.10}$$

dır. Burada

$$\rho(x) = \{R^2(x)y^2(x) + C^2(x)y'^2(x)\}^{½}$$
$$\theta(x) = tan^{-1}\{R(x)y(x)/C(x)y'(x)\}$$

ile verilir.

(1.10) deki ilk denklemden $y'(x)$,

$$\{R(x)y(x)\}' = \{\rho(x)sin\theta(x)\}'$$
$$\Rightarrow R'(x)y(x) + y'(x)R(x) = \rho'(x)sin\theta(x) + \theta'(x)cos\theta(x)\rho(x)$$
$$\Rightarrow y'(x) = \frac{\rho'(x)sin\theta(x) + \theta'(x)cos\theta(x)\rho(x) - R'(x)y(x)}{R(x)}$$

olarak bulunur. Bu değer (1.10) deki ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$C(x)\left[\frac{\rho'(x)sin\theta(x) + \theta'(x)cos\theta(x)\rho(x) - R'(x)y(x)}{R(x)}\right] = \rho(x)cos\theta(x)$$
$$\Rightarrow \frac{\rho(x)cos\theta(x)}{C(x)}R(x) + \frac{\rho(x)sin\theta(x)}{R(x)}R'(x) - \rho'(x)sin\theta(x) = \theta' cos\theta(x)\rho(x)$$
$$\Rightarrow \theta'(x)cos\theta(x) = -\frac{\rho'(x)}{\rho(x)}sin\theta(x) + \frac{R(x)}{C(x)}\cos\theta(x) + \frac{R'(x)}{R(x)}sin\theta(x) \tag{1.11}$$

elde edilir. Daha sonra (1.10) de ki $C(x)y'(x)$ ve $y(x)$ ifadeleri (1.9) da yerine yazılırsa

$$\{\rho(x)cos\theta(x)\}' + D(x)\frac{\rho(x)sin\theta(x)}{R(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \rho'(x)cos\theta(x) - \theta'(x)sin\theta(x)\rho(x) + D(x)\frac{\rho(x)sin\theta(x)}{R(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \theta'(x)sin\theta(x) = \frac{\rho'(x)}{\rho(x)}cos\theta(x) + \frac{D(x)}{R(x)}\sin\theta(x)$$

elde edilir. Şartlar yeniden düzenlenir ve $\frac{\rho'(x)}{\rho(x)}$ ifadesi yok edilirse aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\theta'(x) = \left(\frac{D(x)}{C(x)}\right)^{1/2} + \frac{1}{4}\frac{\{C(x)D(x)\}'}{C(x)D(x)}sin\{2\theta(x)\} \tag{1.12}$$

$0 \le \theta(a_0) < \pi$ olan bir $a_0 \in R$ göz önüne alınsın.

$a_0 < a_1 \le x_2$ olmak üzere $y(a_0) \ge 0$ koşulunu sağlayan $y(x)$, $(a_0, a_1]$ de N tane sıfır yerine sahip ise

$$N\pi \le \theta(a_1) < (N+1)\pi \tag{1.13}$$

olur.

Lemma 1.1 [3]: $q(t)$ fonksiyonu $[0, \mathrm{a}]$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$\tau \le x_1 < x_2 \le \tau + a$, $\tau \in [0, a]$ için

$$\int_{x_1}^{x_2} q(t)\,{}^{sin}_{cos}\big(c\theta(t,\tau)\big)dt = o(1)$$

dır. Özel olarak

$$\int_0^a q(t)\,{}^{sin}_{cos}\big(c\theta(t)\big)dt = o(1)$$

şeklindedir.

1.4. Asimptotik Tahminler

Literatürde mevcut olan aşağıdaki teoremler, λ_{2m+1} ve λ_{2m+2} için asimptotik tahminleri verir. Aynı tahmin ve ispatlar μ_{2m} ve μ_{2m+1} için de geçerlidir. Yalnızca μ_{2m} ve μ_{2m+1} de $2(\mathrm{m}+1)$ in yerine $(2\mathrm{m}+1)$ yazılır. I aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$I = \int_0^a \{s(x)/p(x)\}^{\frac{1}{2}} dx$$

Teorem 1.1 [4]: $m \to \infty$ iken λ_{2m+1} ve λ_{2m+2} aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\sqrt{\lambda} = 2(m+1)\pi I^{-1} + o(m) \tag{1.14}$$

Teorem 1.2 [4]: $s'(x)$ mevcut ve parçalı sürekli olsun. $m \to \infty$ iken λ_{2m+1} ve λ_{2m+2} aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\sqrt{\lambda} = 2(m+1)\pi I^{-1} + o(1) \tag{1.15}$$

Bundan sonra $\mathrm{p(x)} = \mathrm{s(x)} = 1$ olduğunu varsayalım.

Teorem 1.3 [4]: $\mathrm{p(x)} = \mathrm{s(x)} = 1$ olsun. $m \to \infty$ iken λ_{2m+1} ve λ_{2m+2} aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2(m+1)\pi}{a} + \frac{1}{4}(m+1)^{-1}\pi^{-1}\int_0^a q(x)dx + o(m^{-1}) \tag{1.16}$$

Teorem 1.4 [4]: $\mathrm{p(x)} = \mathrm{s(x)} = 1$ olsun. $q^{(r)}(x)$ mevcut ve parçalı sürekli olsun. λ_{2m+1} ve λ_{2m+2} aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2(m+1)\pi}{a} + \sum_{k=1}^{r+1} A_k\{2(m+1)\pi/a\}^{-k} + o(m^{-r-1}) \tag{1.17}$$

Burada A_k m den bağımsız q ve onun q^{r-1} e kadar türevlerini içerir.

Özellikle;

$$A_1 = \frac{1}{2a}\int_0^a q(x)dx,\ A_2 = 0,\ A_3 = \frac{1}{8a}\int_0^a q^2(x)dx - {A_1}^2 \tag{1.18}$$

şeklindedir.

Teorem 1.5 [4]: p(x) = s(x) = 1 ve q(x) parçalı sürekli olsun. $m \to \infty$ iken λ_{2m+1} ve λ_{2m+2} sırasıyla eksi ve artı işaretiyle aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2(m+1)\pi}{a} + \frac{1}{4}(m+1)^{-1}\pi^{-1}\int_0^a q(x)dx \pm \frac{1}{8}m^{-1}\pi^{-1}aC_{2m+2} + O(m^{-\frac{3}{2}})$$

Burada $c_n = (a_n^2 + {b_n}^2)^{1/2}$, a_n ve b_n ise $q(x)$ in $[0,a]$ da tanımlı Fourier katsayılarıdır, yani

$$a_n = \frac{2}{a}\int_c^{c+a} q(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{a}t\right)dt$$

ve

$$b_n = \frac{2}{a}\int_c^{c+a} q(t)\sin\left(\frac{2n\pi}{a}t\right)dt$$

şeklindedir.

1.5. Kararlılık ve Kararsızlık Aralıkları

$$\{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x) - q(x)\}y(x) = 0 \tag{1.19}$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri $\phi_1(x,\lambda)\ ve\ \phi_2(x,\lambda)$ ile gösterilsin, öyle ki

$$\phi_1(0) = 1, {\phi_1}'(0) = 0, \phi_2(0) = 0, {\phi_2}'(0) = 1$$

sağlansın.

Bu durumda $\phi_1(x,\lambda)\ ve\ \phi_2(x,\lambda)$ analitik fonksiyonlardır [**4**].

(1,19) denklemin diskriminantı

$$D(\lambda) = \phi_1(a,\lambda) + \phi_2'(a,\lambda) \tag{1.20}$$

olarak tanımlanır. $D(\lambda)$, λ'nın sürekli fonksiyonu olduğundan $|D(\lambda)| < 2$ şartını sağlayan λ değerleri reel x ekseninde açık bir küme oluştururlar. Bu küme ayrık açık aralıkların sayılabilir birleşimi ve boştan farklı bir kümedir.[**4**] Bu aralıklar (1.19) denkleminin kararlılık aralıklarıdır. Benzer şekilde $|D(\lambda)| > 2$ şartını sağlayan aralıklar (1.19)'in kararsızlık aralıklarıdır. Kararlılık aralıklarının kapanışları olan $|D(\lambda)| \leq 2$ şartını sağlayan aralıklar (1.19) denkleminin koşullu kararlılık aralıklarıdır.

1.6. $D(\lambda)$ Fonksiyonu

λ_n ve μ_n (1.3) ve (1.5) de tanımlandığı gibi sırasıyla periyodik ve yarı periyodik özdeğerler olmak üzere $D(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Teorem 1.6 [4]: λ_n ve μ_n yukarıda tanımlandığı gibi olmak üzere

(i) λ_n ve μ_n aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$\lambda_0 < \mu_0 \leq \mu_1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_2 \leq \mu_3 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \ldots$

(ii) $[\lambda_{2m}, \mu_{2m}]$ aralığında D(λ) 2' den -2' ye azalır.

(iii) $[\mu_{2m+1}, \lambda_{2m+1}]$ aralığında D(λ) -2' den 2' ye artar.

(iv) $(-\infty, \lambda_0)$ ve $(\lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2})$ aralıklarında D(λ) > 2 dir.

(v) (μ_{2m}, μ_{2m+1}) aralığında D(λ) < -2 dir.

Sonuç olarak (1.19) probleminin kararlılık aralıkları (λ_{2m}, μ_{2m}) , $(\mu_{2m+1}, \lambda_{2m+1})$ ve bu aralıkların kapanışları da koşullu kararlılık aralıklarıdır.

(1.19) probleminin kararsızlık aralıkları ise $(-\infty, \lambda_0)$, $(\lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2})$ ve (μ_{2m}, μ_{2m+1}) şeklindedir.

(μ_{2m}, μ_{2m+1}) , $(\lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2})$ sırasıyla (2m+1) ve (2m+2) nci kararsızlık aralığı, $(-\infty, \lambda_0)$ ise sıfırıncı kararsızlık aralığı olarak adlandırılır.

$n.ci$ kararsızlık aralığının uzunluğu ise l_n ile gösterilir.

$n = 2m + 1$ için $l_{2m+1} = \mu_{2m+1} - \mu_{2m}$ ve $n = 2m + 2$ için $l_{2m+2} = \lambda_{2m+2} - \lambda_{2m+1}$

ile hesaplanır.

$\{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x) - q(x)\}y(x) = 0$ problemi; $0 \leq \tau \leq a$ olmak üzere aşağıdaki sınır koşullarıyla göz önüne alınsın.

$$y(\tau) = y(\tau + a) = 0\,,\; y'(\tau) = y'(\tau + a) = 0 \tag{1.21}$$

Bu problemin özdeğerleri $\Lambda_n(\tau)$ ile gösterilsin. Bu özdeğerler yardımcı özdeğerler olarak adlandırılsın.

Teorem 1.7 [4]: $\tau \in [0, a]$ olmak üzere $\Lambda_{2m}(\tau)$ ve $\Lambda_{2m+1}(\tau)$ fonksiyonlarının görüntüleri sırasıyla $[\mu_{2m}\,, \mu_{2m+1}]$ ve $[\lambda_{2m+1}\,, \lambda_{2m+2}]$ ile verilir yani;

$$\mu_{2m} \leq \Lambda_{2m}(\tau) \leq \mu_{2m+1} \quad , \quad \lambda_{2m+1} \leq \Lambda_{2m+1}(\tau) \leq \lambda_{2m+2} \tag{1.22}$$

dır.

Sonuç olarak

$$min\Lambda_{2m}(\tau) = \mu_{2m} \quad , \qquad max\Lambda_{2m}(\tau) = \mu_{2m+1} \tag{1.23}$$

ve benzer şekilde

$$min\Lambda_{2m+1}(\tau) = \lambda_{2m+1}\,, \qquad max\Lambda_{2m+1}(\tau) = \lambda_{2m+2} \tag{1.24}$$

dır.

1.7. Kararsızlık Aralıklarının Uzunluğu

$\{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda s(x) - q(x)\}y(x) = 0$ probleminin n. nci kararsızlık aralığının uzunluğu olan l_n için aşağıdaki tahminler mevcuttur.

Teorem1.8 [4]: $n \to \infty$ iken l_n aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. $l_n = o(n^2)$;

ii. Eğer $s'(x)$ mevcut ve parçalı sürekli ise $l_n = o(n)$;

iii. Eğer $s^{(r+2)}(x), p^{(r+2)}(x)\; ve\; q^{(r)}(x)$ mevcut ve parçalı sürekli ise $l_n = o(n^{-r})$ dir.

Teorem1.9 [4]: $n \to \infty$ iken l_n aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. Eğer s(x) parçalı düzgün ise $l_n = O(n)$;

ii. Eğer $s'(x)$ mevcut , $s'(x)$ ve $p'(x)$ parçalı düzgün ise $l_n = O(1)$;

iii. Eğer $s^{(r+2)}(x), p^{(r+2)}(x)\ ve\ q^{(r)}(x)$ mevcut ve parçalı düzgün ise $l_n = O(n^{-r-1})$ dır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

2.1. Asimptotik Tahminlerle İlgili Literatürde Mevcut Bazı Sonuçlar

Bu bölümde 1. bölümdeki tanım, teorem ve yöntemlerden faydalanarak aşağıdaki diferansiyel denklemin spektral yapısı incelenmektedir.

$$y''(t) + \big(\lambda - q(t+\tau)\big)y(t) = 0 \tag{2.1}$$

Burada $q(t)$ reel değerli ve $[a, b]$ aralığında lebesque anlamında integrallenebilir bir fonksiyon; $\tau\epsilon[0, a]$ ve λ spektral parametredir.

2.2. Özdeğerler İçin Asimptotik Çözümler

$q(t)$ reel değerli ve $[a, b]$ aralığında lebesque anlamında integrallenebilir bir fonksiyon ve $\tau\epsilon[0, a]$ olmak üzere;

$$y''(t) + \big(\lambda - q(t+\tau)\big)y(t) = 0 \tag{2.2}$$

diferensiyel denklemi

$$y(0) = y(a) = 0 \tag{2.3}$$

sınır koşulları ile göz önüne alınsın. (2.2) denklemi (2.3) sınır değerleri ile aşağıdaki probleme denktir [5].

$$y' + \big(\Lambda - q(t)y(t)\big) = 0 \tag{2.4}$$

$$y(\tau) = y(\tau + a) = 0 \tag{2.5}$$

(2.1)-(2.3) özdeğer probleminin $n \to \infty$ için $\Lambda_n(\tau)$ özdeğerlerinin asimptotik yaklaşımlarının

$$\Lambda_n(\tau) = F(n) + o(n^{-K}) \tag{2.6}$$

olduğu bilinmektedir. Burada K, $q(t)$ fonksiyonunun düzgünlüğüne bağlı olarak hata teriminde bulunan bir sabittir. q potansiyel fonksiyonunun düzgünlüğü arttıkça K sabiti de daha büyük değerler alacaktır.

Aşağıda tanımlanan prüfer dönüşümü göz önüne alınsın.

$$tan\theta(t,\Lambda,\tau) \coloneqq \Lambda^{1/2}\frac{y(t,\Lambda)}{y'(t,\Lambda)}, \qquad t \in [\tau, \tau + a] \tag{2.7}$$

(2.5) sınır değerleri kullanılırsa

$$\theta(\tau) = 0\ ,\ \theta(\tau + a) = (n+1)\pi \qquad (n \in N)$$

elde edilir.

(2.2) a karşılık gelen θ denklemi

$$\theta'(t,\tau) = \Lambda^{1/2} - \frac{1}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}q(t) + \frac{1}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}q(t)\cos 2\theta(t,\tau) \tag{2.8}$$

ile verilir. (2.8) denkleminin $[\tau, x]$ üzerinde integrali alınırsa

$$\theta(x,\tau) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(x-\tau) - \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_\tau^x q(t)dt + \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_\tau^x q(t)\cos\big(2\theta(t,\tau)\big)\,dt \tag{2.9}$$

bulunur.

(2.8) denkleminde ki $\theta(t,\tau)$ fonksiyonu için, **[6]** de tanımlandığı gibi aşağıdaki dizi göz önüne alınsın. $k = 1, 2, 3 \ldots$ için

$$\theta_1(t,\tau) \coloneqq \Lambda^{\frac{1}{2}}(t-\tau) - \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_\tau^t q(s)ds \tag{2.10}$$

$$\theta_{k+1}(t,\tau) := \theta_1(t,\tau) + \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_\tau^t q(s)\cos(2\theta_k(s,\tau))ds \quad (2.11)$$

şeklindedir.

Lemma 2.1 [7]: q(t), $t \in [\tau, \tau + a]$ için integrallenebilen bir fonksiyon ve x_1, x_2: $\tau \leq x_1 < x_2 \leq \tau + a$ olmak üzere

$$\int_{x_1}^{x_2} q(t) \, {}^{cos}_{sin}\big(c\theta(t,\tau)\big)dt = o(1)$$

dır.

Lemma 2.2 [8]: $t \in [\tau, \tau + a]$ ve $q \in L^1[0, a]$ verilsin. $\Lambda \to \infty$ için;

$$\int_\tau^t q(s)\cos\big(2\theta(s,\tau)\big)\,ds = o(1)$$

şeklindedir.

İspat: $\mu := \pi/(2\Lambda^{\frac{1}{2}})$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca

$$x_1 + \mu \leq a \text{ ve } x_2 - x_1 \geq \mu$$

koşulları verilsin.

$$I := \int_{x_1}^{x_2} q(s)\cos\big(2\theta(s,\tau)\big)\,ds \text{ ve } I' := \int_{x_1+\mu}^{x_2+\mu} q(s)\cos\big(2\theta(s,\tau)\big)\,ds$$

şeklinde tanımlansınlar.

$$I - I' = \int_{x_1}^{x_1+\mu} q(s)\cos\big(2\theta(s,\tau)\big)\,ds + \int_{x_2}^{x_2+\mu} q(s)\cos\big(2\theta(s,\tau)\big)\,ds$$

olur. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}|I - I'| &= \left|\int_{x_1}^{x_1+\mu} q(s)\cos(2\theta(s,\tau))\,ds + \int_{x_2}^{x_2+\mu} q(s)\cos\big(2\theta(s,\tau)\big)\,ds\right| \\ &\leq \int_{x_1}^{x_1+\mu}|q(s)||\cos(2\theta(s,\tau))|ds + \int_{x_2}^{x_2+\mu}|q(s)||\cos(2\theta(s,\tau))|ds\end{aligned}$$

$-1 \leq cosx \leq 1$ ve $q \in L^1[0,a]$ ve $\mu = o(1)$ olduğundan

$$I - I' = o(1) \tag{2.12}$$

olur.

$$I + I' = \int_{x_1}^{x_2} q(s)\cos\big(2\theta(s,\tau)\big)\,ds + \int_{x_2+\mu}^{x_2+\mu} q(s)\cos\big(2\theta(s,\tau)\big)\,ds$$

eşitliğine $u = x - \mu$ dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} I + I' &= \int_{x_1}^{X_2}\big[q(s)\cos\big(2\theta(s,\tau)\big)\,ds + q(s+\mu)\cos(2\theta(s+\mu,\tau))\big]\,ds \\ &= \int_{x_1}^{x_2} q(s)\big\{\cos\big(2\theta(s,\tau)\big) + \cos(2\theta(s+\mu,\tau))\big\}ds \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} \cos\big(2\theta(s+\mu,\tau)\big)\{q(s+\mu) - q(s)\}ds \end{aligned}$$

bulunur. $q \in L^1[0,a]$ olduğundan

$$\int_0^{a-\mu} |q(s+\mu) - q(s)|ds = o(1)$$

sağlanır. Bu durumda eşitliğin son terimi $o(1)$ olur. Ayrıca

$$\cos\big(2\theta(s,\tau)\big) + \cos\big(2\theta(s+\mu,\tau)\big) = 2cos\{\theta(s+\mu,\tau) + \theta(s,\tau)\}$$
$$cos\{\theta(s+\mu,\tau) - \theta(s,\tau)\}$$

dır. Ek olarak $0 \leq x_1 < x_2 \leq a$ ve $\delta > 0$ olmak üzere $x_2 - x_1 \leq \delta\Lambda^{-1/2}$ verilsin.

Bu taktirde $\Lambda \to \infty$ için

$$\theta(x_2) - \theta(x_1) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(x_2 - x_1) + o(1)$$

dır (Lemma 4.1.**[7]**). Buradan

$$\theta(s+\mu,\tau) - \theta(s,\tau) = \frac{\pi}{2} + o(1)$$

bulunur. Bu durumda $I + I'$ eşitliğinin ilk terimi de $o(1)$ olur. Sonuç olarak

$$I + I' = o(1) \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.12)-(2.13) eşitlikleri ile

$$I = o(1)$$

olur. Özel olarak $x_1 = \tau$ ve $x_2 = t$ alınırsa ispat tamamlanır.

Lemma 2.3 [8]: $t \in [\tau, \tau + a]$ ve $(k = 1,2,\dots)$ olmak üzere $\Lambda \to \infty$ için;

$$\int_\tau^t q(s) \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \big(2\theta_k(s,\tau)\big) ds = o(1)$$

şeklindedir.

İspat: Lemma 2.2 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Lemma 2.4 [8]: $t \in [\tau, \tau + a]$ ve $(k = 1,2,\dots)$ olmak üzere $\lambda \to \infty$ için;

$$\theta_{k+1}(t,\tau) - \theta_k(t,\tau) = o(\lambda^{-\frac{k}{2}})$$

eşitliği sağlanır.

İspat: k üzerinde indüksiyon yöntemi uygulanmalıdır. $k = 1$ olsun. (2.10)-(2.11) eşitlikleri ile

$$\theta_2(t,\tau) - \theta_1(t,\tau) = \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2} \int_\tau^t q(s) \cos\big(2\theta_1(s,\tau)\big)\, ds$$

dır. Lemma 2.3 ile integral terimi $o(1)$ olur. Buradan da

$$\theta_2(t) - \theta_1(t) = o(\lambda^{-\frac{1}{2}})$$

elde edilir. $k - 1$ için

$$\theta_k(t) - \theta_{k-1}(t) = o(\lambda^{-\frac{(k-1)}{2}})$$

olsun. k için de doğru olduğu gösterilsin. (2.10)-(2.11) eşitlikleri ile

$$\theta_{k+1}(t,\tau)-\theta_k(t,\tau)=\frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_\tau^t q(s)\left\{\cos\left(2\theta_k(s,\tau)\right)-\cos(2\theta_{k-1}(s,\tau)\right\}ds$$
$$=-\Lambda^{-1/2}\int_\tau^t q(s)\sin\left(\theta_k(s,\tau)-\theta_{k-1}(s,\tau)\right)\sin\left(\theta_k(s,\tau)+\theta_{k-1}(s,\tau)\right)ds$$

bulunur. Buradan

$$|\theta_{k+1}(t,\tau)-\theta_k(t,\tau)|\leq \Lambda^{-\frac{1}{2}}\sup_{0\leq t\leq a}|\theta_k(t,\tau)-\theta_{k-1}(t,\tau)|\int_0^a|q(s)|ds=o\left(\lambda^{-\frac{k}{2}}\right)$$

olur.

Lemma 2.5 [8]: $t\in[\tau,\tau+a]$ ve $(k=1,2,\ldots)$ olmak üzere $\Lambda\to\infty$ için;

$$\theta(t,\tau)-\theta_k(t,\tau)=o(\lambda^{-\frac{k}{2}})$$

şeklindedir.

İspat: k üzerinde indüksiyon yöntemi uygulanmalıdır. $k=1$ olsun. (2.10)-(2.7) eşitlikleri ile

$$\theta(t,\tau)-\theta_1(t,\tau)=\frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_\tau^t q(s)\cos\left(2\theta(s,\tau)\right)ds$$

bulunur. Lemma 2.2 ile integral terimi $o(1)$ olur. Buradan da

$$\theta(t,\tau)-\theta_1(t,\tau)=o(\lambda^{-\frac{1}{2}})$$

bulunur. k için doğru olsun. $k+1$ için doğru

$$\theta(t,\tau)-\theta_{k+1}(t,\tau)=\frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_\tau^t q(s)\left\{\cos\left(2\theta(s,\tau)\right)-\cos\left(2\theta_k(s,\tau)\right)\right\}ds$$
$$=-\Lambda^{-1/2}\int_\tau^t q(s)\sin\left(\theta(s,\tau)-\theta_k(s,\tau)\right)\sin\left(\theta(s,\tau)+\theta_k(s,\tau)\right)ds$$

olmak üzere indüksiyon hipotezi ile

$$|\theta(t,\tau)-\theta_{k+1}(t,\tau)|\leq \Lambda^{-\frac{1}{2}}\sup_{0\leq t\leq a}|\theta(t,\tau)-\theta_k(t,\tau)|\int_0^a|q(t)|dt=o\left(\lambda^{-1\left(\frac{1}{2}\right)(k+1)}\right)$$

bulunur.

Teorem 2.1 [8]: $\forall\, n$ pozitif tamsayısı, $0 \leq \tau < a$ ve $q \in L'[\tau, \tau + a]$ için ; $\Lambda \to \infty$

$$\theta(\tau + a) = \Lambda^{1/2} a - \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)dt + \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)\cos\big(2\theta_n(t,\tau)\big)\,dt$$
$$+o(\lambda^{-\frac{1}{2}(n+1)})$$

dır.

İspat: (2.9) eşitliği $x = \tau + a$ için yazılırsa

$$\theta(\tau + a) = \Lambda^{1/2} a - \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)dt + \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)\cos\big(2\theta(t,\tau)\big)\,dt$$

ve $cos2\theta = cos2\theta_n + cos2\theta - cos2\theta_n$

şeklinde yazılırsa

$$\theta(\tau + a) = \Lambda^{1/2} a - \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)dt + \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)\cos\big(2\theta_n(t,\tau)\big)\,dt$$
$$+\frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)\{\cos\big(2\theta(t,\tau)\big) - \cos(2\theta_n(t,\tau))\}dt$$

olur.

Lemma 2.5 kullanılırsa son terim $o(\Lambda^{-\frac{1}{2}(n+1)})$ olur ve ispat tamamlanır.

2.3. Elde Edilen Sonuçlar

$y''(t) + \big(\lambda - q(t+\tau)\big)y(t) = 0, \quad y(0) = y(a) = 0$ özdeğer probleminin Λ_n özdeğerlerinin asimptotik tahminlerini elde etmek için n=1 durumunda teorem 2.1 göz önüne alınsın.

Lemma 2.6: Eğer $f(t+a) = f(t)$ ise

$$\int_{\tau}^{\tau+a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 2.6 aşağıda verilen teorem ve sonuçta kullanılacaktır.

Teorem 2.2 : $\lambda \to \infty$, $\int_0^a q(t)dt = 0$ varsayımı için;

$$(n+1)\pi = \Lambda^{1/2}a2 + \frac{a}{2(n+1)\pi}\cos(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau)\int_\tau^{\tau+a} q(t)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt + \frac{a}{2(n+1)\pi}\sin\left(\frac{a}{2(n+1)\pi}\tau\right)\int_\tau^{\tau+a} q(t)\sin(\frac{2(n+1)\pi}{a}t)dt + o(\lambda^{-1})$$

şeklindedir.

İspat: Teoremin ispatı için teorem 2.1 de $n = 1$ alınırsa,

$$\theta(\tau+a) = \Lambda^{1/2}a - \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_\tau^{\tau+a} q(t)dt + \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_\tau^{\tau+a} q(t)\cos\big(2\theta_1(t,\tau)\big)\,dt + o(\lambda^{-1}) \tag{2.14}$$

olur. Denklemde bulunan θ_1 değeri (2.10) da tanımlandığı üzere,

$$\theta_1(t,\tau) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(t-\tau) - \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_\tau^t q(s)ds$$

şeklindedir.

$$2\theta_1(t,\tau) = 2\Lambda^{\frac{1}{2}}(t-\tau) - \Lambda^{-1/2}\int_\tau^t q(s)ds$$

$$\begin{aligned}\cos(2\theta_1(t,\tau)) &= \cos[2\Lambda^{\frac{1}{2}}(t-\tau) - \Lambda^{-\frac{1}{2}}\int_\tau^t q(s)ds] \\ &= \cos(2\Lambda^{\frac{1}{2}}(t-\tau))\cos(\Lambda^{-\frac{1}{2}}\int_\tau^t q(s)ds) \\ &\quad +\sin(2\Lambda^{\frac{1}{2}}(t-\tau))\sin(\Lambda^{-\frac{1}{2}}\int_\tau^t q(s)ds)\end{aligned}$$

olur. $cos(\Lambda^{-\frac{1}{2}}\int_\tau^t q(s)ds) = 1 - o(\lambda^{-1})$ ve $\sin(\Lambda^{-\frac{1}{2}}\int_\tau^t q(s)ds) = \Lambda^{-\frac{1}{2}}\int_\tau^t q(s)ds + o(\lambda^{-1})$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\cos(2\theta_1(t,\tau)) &= \cos[2\Lambda^{\frac{1}{2}}(t-\tau) - \Lambda^{-\frac{1}{2}}\int_\tau^t q(s)ds] \\ &= \cos(2\Lambda^{\frac{1}{2}}(t-\tau)) + \Lambda^{-\frac{1}{2}}\sin(2\Lambda^{\frac{1}{2}}(t-\tau))\int_\tau^t q(s)ds + o(\lambda^{-1})\end{aligned}$$

bulunur.

$$\frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)\cos\big(2\theta_1(t,\tau)\big)\,dt = \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)\,[\cos(2\Lambda^{\frac{1}{2}}(t-\tau))$$
$$+\Lambda^{-\frac{1}{2}}\sin(2\Lambda^{\frac{1}{2}}(t-\tau))\int_{\tau}^{t} q(s)ds]dt$$
$$+o(\lambda^{-1})$$
$$= \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)\cos(2\Lambda^{\frac{1}{2}}(t-\tau))\mathrm{dt} + \mathrm{o}(\lambda^{-1})$$
$$= \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)\cos(2\Lambda^{\frac{1}{2}}t - 2\Lambda^{1/2}\tau)\mathrm{dt} + \mathrm{o}(\lambda^{-1})$$
$$= \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)[\cos(2\Lambda^{\frac{1}{2}}t)\cos(2\Lambda^{1/2}\tau)$$
$$+sin(2\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{t})sin(2\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau)]\mathrm{dt} + o(\lambda^{-1})$$
$$= \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}cos\left(2\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau\right)\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)\,cos\left(2\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{t}\right)\mathrm{dt}$$
$$+\frac{1}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}sin\left(2\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau\right)\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)\,sin\left(2\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{t}\right)\mathrm{dt}$$
$$+o(\lambda^{-1}) \tag{2.15}$$

olur. $\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)dt$ değeri lemma 2.6 ile $\int_{0}^{a} q(t)dt$ değerine eşit ve teoremde verilen varsayım ile bu değer de sıfıra eşit olur.

(2.14) eşitliği (2.15) ile

$$\theta(\tau+a) = \Lambda^{1/2}a + \frac{1}{2}\Lambda^{-1/2}cos\left(2\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau\right)\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)\,cos\left(2\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{t}\right)\mathrm{dt}$$
$$+\frac{1}{2}\Lambda^{-\frac{1}{2}}sin\left(2\Lambda^{\frac{1}{2}}\tau\right)\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)\,sin\left(2\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{t}\right)\mathrm{dt} + o(\lambda^{-1}) \tag{2.16}$$

bulunur ve $\theta(\tau+a) = (n+1)\pi$ $(n \in N)$ ve $\Lambda^{-\frac{1}{2}} = \frac{(n+1)\pi}{a} + o\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{(n+1)\pi}{a} + o(n^{-1})$ olduğu kullanılırsa ispat tamamlanır.

Yukarıdaki teoremde yer alan $\Lambda_n^{1/2}(\tau)$ değeri çözülürse

$$\Lambda_n^{\frac{1}{2}}(\tau) = \frac{(n+1)\pi}{a} - \frac{1}{2(n+1)\pi}\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt -$$
$$\frac{1}{2(n+1)\pi}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_{\tau}^{\tau+a} q(t)\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt + o(n^{-2})$$

bulunur.

Sonuç 2.1:

$$\Lambda_n^{\frac{1}{2}}(\tau) = \frac{(n+1)\pi}{a}$$
$$-\frac{1}{2(n+1)\pi}\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^a q(t)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt$$
$$-\frac{1}{2(n+1)\pi}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^a q(t)\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt + o(n^{-2}) \tag{2.17}$$

bulunur.

İspat: Lemma 2. 6 kullanılarak elde edilir.

Sonuç 2.1 de bulunan eşitlik için;

$$I_1 := \int_0^a q(t)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt$$
$$I_2 \coloneqq \int_0^a q(t)\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt \tag{2.18}$$

ve

$$F(n,\tau) \coloneqq \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)I_1 + \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)I_2 \tag{2.19}$$

olarak tanımlanırsa

$$\Lambda_n^{\frac{1}{2}}(\tau) = \frac{(n+1)\pi}{a} - \frac{1}{2(n+1)\pi}F(n,\tau) + o(n^{-2}) \tag{2.20}$$

şeklinde yazılır.

Yukarıdaki sonuçlar kullanılarak $[0,a]$ üzerinde tanımlı potansiyel fonksiyonunun periyodik ve çift olması durumunda yardımcı özdeğerler hesaplanabilir.

Teorem 2.3: $q(t) \in L'[0,a]$, $q(t+a) = q(t)$ ve $\int_0^a q(t)dt = 0$ olmak üzere

$q(t) = q(a-t)$ $\left(veya\ q\left(\frac{a}{2}-t\right) = q\left(\frac{a}{2}+t\right)\ \ 0 \le t \le \frac{a}{2}\right)$ özelliğini sağlayan reel değerli fonksiyonlar için

$$y'' + (\Lambda - q(t))y(t) = 0$$

$$y(0) = y(a) = 0 \quad , \quad \tau \in [o, a]$$

probleminin $\Lambda_n(\tau)$ yardımcı özdeğerleri

$$\Lambda_n^{\frac{1}{2}}(\tau) = \frac{(n+1)\pi}{a} - \frac{1}{(n+1)\pi} \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right) \int_0^{\frac{a}{2}} q(t) \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right) dt + o(n^{-2})$$

ile verilir.

İspat: (2.17) ile verilen $\Lambda_n^{\frac{1}{2}}(\tau)$ göz önüne alınsın. (2.18) ile verilen I_1 ve I_2 integralleri

$$I_1 = \int_0^{a/2} q(t) \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right) dt + \int_{a/2}^{a} q(t)\cos(\frac{2(n+1)\pi}{a}t)dt$$
$$I_2 = \int_0^{a/2} q(t) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right) dt + \int_{a/2}^{a} q(t)\sin(\frac{2(n+1)\pi}{a}t)dt$$

şeklinde yazılsın.

Burada hesaplamaların daha iyi anlaşılabilmesi için (2.18) ile verilen I_1 ve I_2 integralleri için aşağıdaki notasyonlar tanımlansın:

$$I_{11} := \int_{a/2}^{a} q(t)\cos(\frac{2(n+1)\pi}{a}t)dt$$
$$I_{21} := \int_{a/2}^{a} q(t)\sin(\frac{2(n+1)\pi}{a}t)dt$$

İlk olarak I_1 ve I_2 değerleri ayrı ayrı hesaplansın. I_1 için

$$I_1 = \int_0^{a/2} q(t) \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right) dt + I_{11}$$

şeklindedir.

I_{11} eşitliğinin sağ tarafındaki integral için $u = a - t$ dönüşümü ve trigonometrik özdeşlikler kullanılırsa

$$I_{11} = \int_{a/2}^{0} q(a-u) cos\left[\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\right)(a-u)\right](-du)$$

$$= \int_0^{a/2} q(a-u) \cos 2(n+1)\,\pi \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} u\right) du$$

olur. q fonksiyonu için teoremde verilen $q(a-u) = q(u)$ varsayımı kullanılırsa u=t dönüşümü için

$$I_{11} = cos2(n+1)\pi \int_0^{a/2} q(u) \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} u\right) du$$
$$= cos2(n+1)\pi \int_0^{a/2} q(t) \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt$$

bulunur. Ayrıca $cos2(n+1)\pi = 1$, $(n \in N)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$I_1 = \int_0^{a/2} q(t) \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt + \int_0^{a/2} q(t) \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt$$
$$= 2\int_0^{a/2} q(t) \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt$$

şeklinde bulunur.

Benzer şekilde I_{21} eşitliği için $u = a - t$ dönüşümü ve trigonometrik özdeşlikler kullanılırsa

$$I_{21} = \int_{a/2}^{0} q(a-u) sin\left[\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\right)(a-u)\right](-du)$$
$$= \int_0^{a/2} q(a-u)(-\cos 2(n+1)\,\pi) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} u\right) du$$

olur. q fonksiyonu için teoremde verilen $q(a-u) = q(u)$ varsayımı kullanılırsa u=t dönüşümü için

$$I_{21} = -cos2(n+1)\pi \int_0^{a/2} q(u) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} u\right) du$$
$$= -cos2(n+1)\pi \int_0^{a/2} q(t) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt$$

bulunur. Ayrıca $cos2(n+1)\pi = 1$, $(n \in N)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$I_2 = \int_0^{a/2} q(t) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt - \int_0^{a/2} q(t) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt$$
$$= 0$$

şeklinde bulunur. Buradan (2.19) ile tanımlanan $F(n,\tau)$ eşitliği

$$F(n,\tau) = 2\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt$$

olarak bulunur. Son olarak $F(n,\tau)$ (2.20) de yerine yazılırsa

$$\Lambda_n^{\frac{1}{2}}(\tau) = \frac{(n+1)\pi}{a} - \frac{1}{(n+1)\pi}\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt + o(n^{-2})$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 2.2 : $n \to \infty$ için;

$$\Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt + o(n^{-1})$$

bulunur.

İspat: Teorem 2.3 ile bulunan $\Lambda_n^{1/2}(\tau)$ değeri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\Lambda_n(\tau) &= \left[\Lambda_n^{\frac{1}{2}}(\tau)\right]^2 \\
&= \left[\frac{(n+1)\pi}{a} - \frac{1}{(n+1)\pi}\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt \ + o(n^{-2})\right]^2 \\
&= \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - 2\,\frac{(n+1)\pi}{a}\ \frac{1}{(n+1)\pi}\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt + o(n^{-1}) \\
&= \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt + o(n^{-1})
\end{aligned}$$

olur.

$$\Lambda_n(\tau) := \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}F_2(n,\tau) + o(n^{-1}) \qquad (2.21)$$

olarak tanımlansın. Burada

$$F_2(n,\tau) = \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt$$

şeklindedir.

Lemma 2.7:

$$F_2(n,\tau) = \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt$$
$$\coloneqq \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\gamma(a,n)$$

olarak tanımlanırsa, $\tau\epsilon[0,a]$ olmak üzere

$$\min_{\tau} F_2(n,\tau) = -\gamma(a,n) \text{ ve } \max_{\tau} F_2(n,\tau) = \gamma(a,n)$$

dır.

İspat: $F_2(n,\tau)$ aşağıdaki şekilde ifade edilsin.

$$F_2(n,\tau) = \sqrt{\gamma^2(a,n)}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau + \phi\right)$$

öyle ki $\sin\phi = \frac{\gamma(a,n)}{|\gamma(a,n)|}$ ve $\cos\phi = 0$ şeklinde yazılabilir, yani

$$F_2(n,\tau) = |\gamma(a,n)|\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau + \phi\right)$$

olur. Bu yazım kullanılarak $\min_{\tau} F_2(n,\tau)$ ve $\max_{\tau} F_2(n,\tau)$ kolaylıkla bulunabilir.

$\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau + \phi\right) = -1$ olduğundan

$$\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau + \phi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \tau_{1,min}(n) = \frac{a}{2(n+1)\pi}\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right) \text{ ve } \tau_{1,max}(n) = \frac{a}{2(n+1)\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

dır. Bu durumda

$$\min_{\tau} F_2(n,\tau) = F_2(n,\tau_{min}) = |\gamma(a,n)|\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau_{min} + \phi\right)$$
$$= |\gamma(a,n)|\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau_{min}\right)\frac{\gamma(a,n)}{|\gamma(a,n)|}$$

$$= \gamma(a,n)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}.\frac{a}{2(n+1)\pi}\left(\frac{3\pi}{2}-\phi\right)\right)$$
$$= \gamma(a,n)\,.\,(-1).\,sin\phi$$
$$= (-)\gamma(a,n)\frac{\gamma(a,n)}{|\gamma(a,n)|} = -\gamma(a,n)$$

ve

$$\max_{\tau} F_2(n,\tau) = F_2(n,\tau_{max}) = |\gamma(a,n)|\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau_{max}+\phi\right)$$
$$= |\gamma(a,n)|\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau_{max}\right)\frac{\gamma(a,n)}{|\gamma(a,n)|}$$
$$= \gamma(a,n)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}.\frac{a}{2(n+1)\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\right)$$
$$= \gamma(a,n)\,.\,(1).\,sin\phi$$
$$= \gamma(a,n)\frac{\gamma(a,n)}{|\gamma(a,n)|} = \gamma(a,n)$$

olarak bulunur.

Teorem 2.4: $n \to \infty$ iken $\tau \in [0,a]$ için $q(t) \in L'[0,a]$, $q(t+a) = q(t)$ ve $\int_0^a q(t)dt = 0$ olmak üzere $q(t) = q(a-t)$ $\left(veya\; q\left(\frac{a}{2}-t\right) = q\left(\frac{a}{2}+t\right)\;\; 0 \le t \le \frac{a}{2}\right)$ özelliğini sağlayan reel değerli fonksiyonlar için

$$\max_{\tau} \Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt + o(n^{-1})$$

ve

$$\min_{\tau} \Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt + o(n^{-1})$$

şeklindedir.

İspat: Sonuç 2.2 ile bulunan $\Lambda_n(\tau)$ nun maksimum ve minimum değerini elde etmek için $\Lambda_n(\tau)$ değeri (2.21) şeklinde yeniden yazılsın.

$\Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}F_2(n,\tau) + o(n^{-1})$ olduğundan

$$\max_{\tau\epsilon[0,a]} \Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\min_{\tau\epsilon[0,a]} F_2(n,\tau) + o(n^{-1})$$

ve

$$\min_{\tau\epsilon[0,a]} \Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\max_{\tau\epsilon[0,a]} F_2(n,\tau) + o(n^{-1})$$

olduğundan önceki lemma kullanılırsa

$$\begin{aligned}\max_{\tau\epsilon[0,a]} \Lambda_n(\tau) &= \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}(-\gamma(a,n)) + o(n^{-1}) \\ &= \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\gamma(a,n) + o(n^{-1}) \\ &= \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt + o(n^{-1})\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\min_{\tau\epsilon[0,a]} \Lambda_n(\tau) &= \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\gamma(a,n) + o(n^{-1}) \\ &= \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt + o(n^{-1})\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.5: $q(t) \in L'[0,a], q(t+a) = q(t)$ ve $\int_0^a q(t)dt = 0$ olmak üzere

$q(t) = q(a-t)$ $\left(veya\ q\left(\frac{a}{2}-t\right) = q\left(\frac{a}{2}+t\right)\ \ 0 \le t \le \frac{a}{2}\right)$ özelliğini sağlayan reel değerli fonksiyonlar için

$$\begin{aligned}&y'' + (\lambda - q(t))y(t) = 0 \\ &y(0) = y(a)\ \ , y'(0) = y'(a)\end{aligned}$$

probleminin periyodik özdeğerleri λ_n $(n \to \infty)$

i. $\lambda_{2m+1} = \frac{4(m+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} q(t)\cos\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1})$

ii. $\lambda_{2m+2} = \frac{4(m+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1})$

ile verilir.

İspat: Teorem 2.5 in ispatı için (1.24) ve teorem 2.4 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\lambda_{2m+1} &= min\Lambda_{2m+1}(\tau) \\
&= \frac{(2m+1+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} q(t)\cos\left(\frac{2(2m+1+1)\pi}{a}t\right)dt + o((2m+1)^{-1}) \\
&= \frac{4(m+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)cos\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1}) \\
\lambda_{2m+2} &= max\Lambda_{2m+1}(\tau) \\
&= \frac{(2m+2)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)cos\left(\frac{2(2m+2)\pi}{a}t\right)dt + o((2m+1)^{-1}) \\
&= \frac{4(m+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)cos\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1})
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.6: $q(t) \in L'[0,a]q(t+a) = q(t)$ ve $\int_0^a q(t)dt = 0$ olmak üzere

$q(t) = q(a-t)\ \left(veya\ q\left(\frac{a}{2} - t\right) = q\left(\frac{a}{2} + t\right)\ \ 0 \le t \le \frac{a}{2}\right)$ özelliğini sağlayan reel değerli fonksiyonlar için

$$\begin{aligned}
&y'' + \big(\lambda - q(t)\big)y(t) = 0 \\
&y(a) = -y(0) \ \ , y'(a) = -y'(0)
\end{aligned}$$

probleminin yarı periyodik özdeğerleri $\mu_n \quad (n \to \infty)$

$$\mu_{2m} = \frac{(2m+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1}) \tag{2.22}$$

$$\mu_{2m+1} = \frac{(2m+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1}) \tag{2.23}$$

ile verilir.

İspat: Teoremin ispatı için (1.23) ve teorem 2.4 kullanılırsa

$$\mu_{2m} = min\Lambda_{2m}(\tau) = \frac{(2m+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1})$$
$$\mu_{2m+1} = max\Lambda_{2m}(\tau) = \frac{(2m+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1})$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.7: n. ci kararsızlık aralığının uzunluğu l_n ile gösterilirse $(n \to \infty)$ için

$$l_{2m+1} = \frac{4}{a}\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1})$$
$$l_{2m+2} = \frac{4}{a}\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1})$$

şeklindedir.

İspat: $2m+1.nci$ kararsızlık aralığı (μ_{2m}, μ_{2m+1}) dır. μ_{2m} ve μ_{2m+1} sırasıyla (2.22) ve (2.23) de ki gibi olmak üzere (μ_{2m}, μ_{2m+1}) aralığın uzunluğu ise

$$l_{2m+1} = \mu_{2m+1} - \mu_{2m}$$

eşitliği ile sağlanır.

Teorem 2.6 ile verilen μ_{2m} ve μ_{2m+1} in değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} l_{2m+1} &= \frac{(2m+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} q(t)\cos\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt \\ &\quad - \left[\frac{(2m+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} q(t)\cos\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt\right] + o(m^{-1}) \\ &= \frac{4}{a}\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1}) \end{aligned}$$

bulunur.

$2m+2.nci$ kararsızlık aralığı $(\lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2})$ dir. Bu aralığının uzunluğu

$$l_{2m+2} = \lambda_{2m+2} - \lambda_{2m+1}$$

eşitliği ile sağlanır. Teorem 2.5 ile verilen λ_{2m+1} ve λ_{2m+2} kullanılırsa

$$l_{2m+2}=\frac{4(m+1)^2\pi^2}{a^2}+\frac{2}{a}\int_0^{a/2}q(t)\cos\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt$$
$$-\left[\frac{4(m+1)^2\pi^2}{a^2}-\frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{2}}q(t)\cos\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt)\right]+o(m^{-1})$$
$$=\frac{4}{a}\int_0^{a/2}q(t)\cos\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt+o(m^{-1})$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.8: $q(t)\in L'[0,a], q(t+a)=q(t)$ ve $\int_0^a q(t)dt=0$ olmak üzere

$q(t)=-q(a-t)$ özelliğini sağlayan reel değerli fonksiyonlar için

$y''+\big(\Lambda-q(t)\big)y(t)=0$

$y(0)=y(a)=0 \quad , \quad \tau\in[o,a]$

probleminin $\Lambda_n(\tau)$ yardımcı özdeğerleri

$$\Lambda_n^{\frac{1}{2}}(\tau)=\frac{(n+1)\pi}{a}-\frac{1}{(n+1)\pi}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^{\frac{a}{2}}q(t)\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt+o(n^{-2})$$

ile verilir.

İspat: (2.17) ile verilen $\Lambda_n^{\frac{1}{2}}(\tau)$ göz önüne alınsın. (2.18) ile verilen I_1 ve I_2 integralleri

$$I_1=\int_0^{a/2}q(t)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt+\int_{a/2}^{a}q(t)\cos(\frac{2(n+1)\pi}{a}t)dt$$
$$I_2=\int_0^{a/2}q(t)\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt+\int_{a/2}^{a}q(t)\sin(\frac{2(n+1)\pi}{a}t)dt$$

şeklinde yazılsın.

Burada hesaplamaların daha iyi anlaşılabilmesi için (2.18) ile verilen I_1 ve I_2 integralleri için aşağıdaki notasyonlar tanımlansın:

$$I_{11}:=\int_{a/2}^{a}q(t)\cos(\frac{2(n+1)\pi}{a}t)dt$$
$$I_{21}:=\int_{a/2}^{a}q(t)\sin(\frac{2(n+1)\pi}{a}t)dt$$

İlk olarak I_1 ve I_2 değerleri ayrı ayrı hesaplansın. I_1 için

$$I_1 = \int_0^{a/2} q(t) \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt + I_{11}$$

dır.I_{11} eşitliğinin sağ tarafındaki integral için $u = a - t$ dönüşümü ve trigonometrik özdeşlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{a/2}^{0} q(a-u) cos\left[\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\right)(a-u)\right](-du) \\ &= \int_0^{a/2} q(a-u) \cos 2(n+1)\pi \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} u\right) du \end{aligned}$$

olur. q fonksiyonu için teoremde verilen $q(a-u) = -q(u)$ varsayımı kullanılırsa ve u=t dönüşümü için

$$\begin{aligned} I_{11} &= cos2(n+1)\pi \int_0^{a/2} [-q(u)] \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} u\right) du \\ &= -cos2(n+1)\pi \int_0^{a/2} q(t) \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $cos2(n+1)\pi = 1$, $(n \in N)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{a/2} q(t) \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt - \int_0^{a/2} q(t) \cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Benzer şekilde I_{21} eşitliği için $u = a - t$ dönüşümü ve trigonometrik özdeşlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned} I_{21} &= \int_{a/2}^{0} q(a-u) sin\left[\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\right)(a-u)\right](-du) \\ &= \int_0^{a/2} q(a-u)(-\cos 2(n+1)\pi) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} u\right) du \end{aligned}$$

olur. q fonksiyonu için teoremde verilen $-q(a-u) = q(u)$ varsayımı kullanılarak u=t dönüşümü için

$$I_{21} = -cos2(n+1)\pi \int_0^{a/2} [-q(u)] \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} u\right) du$$
$$= cos2(n+1)\pi \int_0^{a/2} q(t) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt$$

bulunur. Ayrıca $cos2(n+1)\pi = 1$, $(n \in N)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$I_{21} = \int_0^{a/2} q(t) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt$$

olur ve buradan

$$I_2 = \int_0^{a/2} q(t) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt + \int_0^{a/2} q(t) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt$$
$$= 2 \int_0^{a/2} q(t) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt$$

şeklinde bulunur. Buradan (2.19) ile tanımlanan $F(n,\tau)$ eşitliği

$$F(n,\tau) = 2\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} \tau\right) \int_0^{a/2} q(t) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt$$

olarak bulunur. Son olarak $F(n,\tau)$ (2.20) de yerine yazılırsa

$$\Lambda_n^{\frac{1}{2}}(\tau) = \frac{(n+1)\pi}{a} - \frac{1}{(n+1)\pi} \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} \tau\right) \int_0^{\frac{a}{2}} q(t) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt + o(n^{-2})$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 2.3 : $n \to \infty$ için;

$$\Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a} \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} \tau\right) \int_0^{a/2} q(t) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt + o(n^{-1})$$

bulunur.

İspat: Teorem 2.8 ile bulunan $\Lambda_n^{1/2}(\tau)$ değeri kullanılırsa

$$\Lambda_n(\tau) = \left[\Lambda_n^{\frac{1}{2}}(\tau)\right]^2$$

$$= \left[\frac{(n+1)\pi}{a} - \frac{1}{(n+1)\pi}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt \;\; + o(n^{-2})\right]^2$$
$$= \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - 2\,\frac{(n+1)\pi}{a}\;\;\frac{1}{(n+1)\pi}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt + o(n^{-1})$$
$$= \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt + o(n^{-1})$$

şeklindedir.

$$\Lambda_n(\tau) := \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}F_3(n,\tau) + o(n^{-1}) \tag{2.24}$$

olarak tanımlansın. Burada

$$F_3(n,\tau) = \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt$$

şeklindedir.

Lemma 2.8:

$$F_3(n,\tau) = \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}t\right)dt$$
$$\coloneqq \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau\right)\beta(a,n)$$

olarak tanımlanırsa, $\tau \epsilon [0, a]$ olmak üzere

$$\min_{\tau} F_3(n,\tau) = -\beta(a,n) \text{ ve } \max_{\tau} F_3(n,\tau) = \beta(a,n)$$

dır.

İspat: $F_3(n,\tau)$ aşağıdaki şekilde ifade edilsin.

$$F_3(n,\tau) = \sqrt{\beta^2(a,n)}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau + \phi\right)$$

öyle ki $\cos\phi = \frac{\beta(a,n)}{|\beta(a,n)|}$ ve $\sin\phi = 0$ şeklinde yazılabilir, yani

$F_3(n,\tau) = |\beta(a,n)| \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau + \phi\right)$

olur. Bu yazım kullanılarak $\min_{\tau} F_3(n,\tau)$ ve $\max_{\tau} F_3(n,\tau)$ kolaylıkla bulunabilir.

$\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau + \phi\right) = -1$ olduğundan

$\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau + \phi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \tau_{1,min}(n) = \frac{a}{2(n+1)\pi}(\frac{3\pi}{2} - \phi)$ ve $\tau_{1,max}(n) = \frac{a}{2(n+1)\pi}(\frac{\pi}{2} - \phi)$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\min_{\tau} F_3(n,\tau) = F_3(n,\tau_{min}) &= |\beta(a,n)|.\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau_{min} + \phi\right) \\
&= |\beta(a,n)|.\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau_{min}\right).\frac{\beta(a,n)}{|\beta(a,n)|} \\
&= \beta(a,n).\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}.\frac{a}{2(n+1)\pi}\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right)\right) \\
&= \beta(a,n)\,.(-1).cos\phi \\
&= (-)\beta(a,n)\frac{\beta(a,n)}{|\beta(a,n)|} = -\beta(a,n)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\max_{\tau} F_3(n,\tau) = F_3(n,\tau_{max}) &= |\beta(a,n)|.\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau_{max} + \phi\right) \\
&= |\beta(a,n)|.\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}\tau_{max}\right).\frac{\beta(a,n)}{|\beta(a,n)|} \\
&= \beta(a,n)\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a}.\frac{a}{2(n+1)\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right) \\
&= \beta(a,n)\,.(1).cos\phi \\
&= \beta(a,n)\frac{\beta(a,n)}{|\beta(a,n)|} = \beta(a,n)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.9: $n \to \infty$ iken, $\tau \in [0,a]$ için $q(t) \in L'[0,a]$, $q(t+a) = q(t)$ ve $\int_0^a q(t)dt = 0$ olmak üzere $q(t) = -q(a-t)$ özelliğini sağlayan reel değerli fonksiyonlar için

$$\max_{\tau} \Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt + o(n^{-1})$$

ve

$$\min_{\tau} \Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t) \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt + o(n^{-1})$$

şeklindedir.

İspat: Sonuç 2.3 ile bulunan $\Lambda_n(\tau)$ nun maksimum ve minimum değerini elde etmek için $\Lambda_n(\tau)$ değeri (2.24) şeklinde yeniden yazılsın.

$\Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a} F_3(n,\tau) + o(n^{-1})$ olduğundan

$$\max_{\tau\epsilon[0,a]} \Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a} \min_{\tau\epsilon[0,a]} F_3(n,\tau) + o(n^{-1})$$

ve

$$\min_{\tau\epsilon[0,a]} \Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a} \max_{\tau\epsilon[0,a]} F_3(n,\tau) + o(n^{-1})$$

olduğundan önceki lemma kullanılırsa

$$\begin{aligned}\max_{\tau\epsilon[0,a]} \Lambda_n(\tau) &= \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}(-\beta(a,n)) + o(n^{-1}) \\ &= \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\beta(a,n) + o(n^{-1}) \\ &= \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t) sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt + o(n^{-1})\end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\min_{\tau\epsilon[0,a]} \Lambda_n(\tau) &= \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\beta(a,n) + o(n^{-1}) \\ &= \frac{(n+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t) sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{a} t\right) dt + o(n^{-1})\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.10: $q(t) \in L'[0,a], q(t+a) = q(t)$ ve $\int_0^a q(t)dt = 0$ olmak üzere

$q(t) = -q(a-t)$ özelliğini sağlayan reel değerli fonksiyonlar için

$$y'' + (\lambda - q(t))y(t) = 0$$
$$y(0) = y(a) \quad , y'(0) = y'(a)$$

probleminin periyodik özdeğerleri $\lambda_n \quad (n \to \infty)$

i. $\lambda_{2m+1} = \frac{4(m+1)^2\pi^2}{a} - \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t) \sin\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right) dt + o(m^{-1})$

ii. $\lambda_{2m+2} = \frac{4(m+1)^2\pi^2}{a} + \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t) \sin\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right) dt + o(m^{-1})$

ile verilir.

İspat: Teorem 2.9 ve (1.24) kullanılarak

i. $\lambda_{2m+1} = \frac{(2m+1+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t) sin\left(\frac{2(2m+1+1)\pi}{a}t\right) dt + o((2m+1)^{-1})$

$\qquad = \frac{4(m+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t) sin\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right) dt + o(m^{-1})$

ii. $\lambda_{2m+2} = \frac{(2m+2)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t) sin\left(\frac{2(2m+2)\pi}{a}t\right) dt + o((2m+1)^{-1})$

$\qquad = \frac{4(m+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t) sin\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right) dt + o(m^{-1})$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.11: $q(t) \in L'[0,a], q(t+a) = q(t)$ ve $\int_0^a q(t)dt = 0$ olmak üzere

$q(t) = -q(a-t)$ özelliğini sağlayan reel değerli fonksiyonlar için

$$y'' + (\lambda - q(t))y(t) = 0$$
$$y(a) = -y(0) \quad , y'(a) = -y'(0)$$

probleminin yarı periyodik özdeğerleri $\mu_n \quad (n \to \infty)$

$$\mu_{2m} = \frac{(2m+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1}) \quad (2.25)$$

$$\mu_{2m+1} = \frac{(2m+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1}) \quad (2.26)$$

ile verilir.

İspat: (1.23) den

$\mu_{2m} = min\Lambda_{2m}(\tau)$ ve $\mu_{2m+1} = max\Lambda_{2m}(\tau)$
olduğu bilinmektedir.

1.23) ve teorem 2.9 kullanılarak

$$\mu_{2m} = min\Lambda_{2m}(\tau) = \frac{(2m+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} q(t)\sin\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1})$$
$$\mu_{2m+1} = max\Lambda_{2m}(\tau) = \frac{(2m+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1})$$

bulunur.

Teorem 2.12: n. ci kararsızlık aralığının uzunluğu l_n ile gösterilirse $(n \to \infty)$ için

$$l_{2m+1} = \frac{4}{a}\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1})$$

$$l_{2m+2} = \frac{4}{a}\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1})$$

şeklindedir.

İspat: $2m+1.nci$ kararsızlık aralığı (μ_{2m},μ_{2m+1}) dir. μ_{2m} ve μ_{2m+1} sırasıyla (2.25) ve (2.26) da ki gibi olmak üzere(μ_{2m},μ_{2m+1}) aralığın uzunluğu ise

$$l_{2m+1} = \mu_{2m+1} - \mu_{2m}$$

eşitliği ile sağlanır.

Teorem 2.11 ile verilen μ_{2m} ve μ_{2m+1} değerleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
l_{2m+1} &= \frac{(2m+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} q(t)\sin\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt \\
&\quad -\left[\frac{(2m+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} q(t)\sin\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt\right] + o(m^{-1}) \\
&= \frac{4}{a}\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1})
\end{aligned}
$$

olur. $2m+2.nci$ kararsızlık aralığı $(\lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2})$ dir. Bu aralığının uzunluğu

$$l_{2m+2} = \lambda_{2m+2} - \lambda_{2m+1}$$

eşitliği ile sağlanır. Teorem 2.10 ile verilen λ_{2m+1} ve λ_{2m+2} değerleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
l_{2m+2} &= \frac{4(m+1)^2\pi^2}{a^2} + \frac{2}{a}\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt \\
&\quad -\left[\frac{4(m+1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} q(t)\sin\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt)\right] + o(m^{-1}) \\
&= \frac{4}{a}\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1})
\end{aligned}
$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.13: $q(t)$ fonksiyonu; ortalama değeri sıfır olan reel değerli bir fonksiyon olsun ve

i $q(t+a) = q(t)$

ii. $q(t) = q(a-t)$ özelliklerini sağlasın.

Eğer $l_{2m+1} = o(m^{-1})$ ise

$$\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt = o(m^{-1})$$

ve $l_{2m+2} = o(m^{-1})$ ise

$$\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt = o(m^{-1})$$

sağlanır.

İspat: Teorem 2.7 den

$l_{2m+1} = \frac{4}{a}\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1}) = o(m^{-1})$ olması için

$\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt = o(m^{-1})$ ve

$l_{2m+2} = \frac{4}{a}\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1}) = o(m^{-1})$ olması için

$\int_0^{a/2} q(t)\cos\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt = o(m^{-1})$

olmalıdır.

Teorem 2.14: $q(t)$ fonksiyonu ortalama değeri sıfır olan reel değerli bir fonksiyon ve

i. $q(t+a) = q(t)$
ii. $q(t) = -q(a-t)$ özelliklerini sağlasın.

Eğer $l_{2m+1} = o(m^{-1})$ ise

$\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt = o(m^{-1})$

ve $l_{2m+2} = o(m^{-1})$ ise

$\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt = o(m^{-1})$

sağlanır.

İspat: Teorem 2.12 den

$l_{2m+1} = \frac{4}{a}\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1}) = o(m^{-1})$ olması için

$\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{2(2m+1)\pi}{a}t\right)dt = o(m^{-1})$ ve

$l_{2m+2} = \frac{4}{a}\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt + o(m^{-1}) = o(m^{-1})$ olması için

$\int_0^{a/2} q(t)\sin\left(\frac{4(m+1)\pi}{a}t\right)dt = o(m^{-1})$

olmalıdır.

Bu tür sonuçlar ters problemler sınıfına aittir; yani kararsızlık aralıklarının uzunluklarıyla ilgili bilinen bazı tahminler $q(t)$ potansiyel fonksiyonuyla ilgili sonuçlar bulunmasını sağlar.

Nitekim bu çalışmada elde edilen sonuçlar ters problemler için bir zemin teşkil etmektedir.

2.4. Örnekler ve Bazı Nümerik Sonuçlar

Örnek 2.1: $q(t) = cost, \quad [a,b] = [0,2\pi]$

i. $\int_0^{2\pi} costdt = sintI_0^{2\pi} = 0 \quad \Rightarrow \int_0^{a} q(t)dt = 0$

ii. $cos(t+2\pi) = costcos2\pi - sintsin2\pi = cost \Rightarrow \; q(a+t) = q(t)$

iii. $cos(2\pi - t) = cos2\pi cost + sin2\pi sint = cost \Rightarrow \; q(a-t) = q(t)$

olduğundan sonuç 2.2 ile

$$\Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{4\pi^2} - \frac{2}{2\pi}\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{2\pi}\tau\right)\int_0^{2\pi/2} cost\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{2\pi}t\right)dt + o(n^{-1})$$
$$= \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{1}{\pi}\cos\big((n+1)\tau\big)\underbrace{\int_0^{\pi} cost\cos\big((n+1)t\big)\,dt}_{I} + o(n^{-1})$$

olur.

$$I = \int_0^{\pi} cost\cos\big((n+1)t\big)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\cos(t+(n+1)t)\,dt + \int_0^{\pi}\cos(t-(n+1)t)dt\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\cos(n+2)\,tdt + \int_0^{\pi}\cos(-nt)dt\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+2}\sin(n+2)\,I_0^{\pi} + \frac{1}{n}\sin(nt)\,I_0^{\pi}\right] = 0 \qquad \Rightarrow \quad I = 0$$

$$\Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2}{4} + o(n^{-1})$$

$$\Lambda_{2m+1}(\tau) = \frac{(2m+2)^2}{4} + o(m^{-1})$$

$$\min\Lambda_{2m+1}(\tau) = \lambda_{2m+1} = (m+1)^2 + o(m^{-1})$$

$$\max\Lambda_{2m+1}(\tau) = \lambda_{2m+2} = (m+1)^2 + o(m^{-1})$$

$$\Longrightarrow l_{2m+2} = \lambda_{2m+2} - \lambda_{2m+1} = o(m^{-1})$$

$$\Lambda_{2m}(\tau) = \frac{(2m+1)^2}{4} + o(m^{-1})$$

$$\min\Lambda_{2m}(\tau) = \mu_{2m} = \frac{(2m+1)^2}{4} + o(m^{-1})$$

$$\max\Lambda_{2m}(\tau) = \mu_{2m+1} = \frac{(2m+1)^2}{4} + o(m^{-1})$$

$$\Longrightarrow l_{2m+1} = \mu_{2m+1} - \mu_{2m} = o(m^{-1})$$

olur.

Örnek 2.2: $q(t) = sint, \quad [a,b] = [0,2\pi]$

i. $\int_0^{2\pi} sintdt = -(cost)I_0^{2\pi} = -(1-1) = 0 \quad \Longrightarrow \int_0^a q(t)dt = 0$

ii. $sin(t+2\pi) = sintcos2\pi + costsin2\pi = sint \Longrightarrow \; q(a+t) = q(t)$

iii. $-[sin(2\pi - t)] = -[sin2\pi cost - cos2\pi sint] = sint$

$$\Longrightarrow \; -q(a-t) = q(t)$$

olduğundan sonuç 2.4 ile

$$\Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{4\pi^2} - \frac{2}{2\pi}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{2\pi}\tau\right)\int_0^{2\pi/2} sint \sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{2\pi}t\right)dt + o(n^{-1})$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{1}{\pi}\sin\big((n+1)\tau\big)\underbrace{\int_0^{\pi} sint \sin\big((n+1)t\big)\,dt}_{J} + o(n^{-1})$$

olur.

$$J = \int_0^{\pi} sint \sin\big((n+1)t\big)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\cos(t+(n+1)t)\,dt - \int_0^{\pi}\cos(t-(n+1)t)dt\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}\cos(n+2)\,tdt - \int_0^{\pi}\cos(-nt)dt\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+2}\sin(n+2)\,I_0^{\pi} - \frac{1}{n}\sin(nt)\,I_0^{\pi}\right] = 0 \qquad \Longrightarrow \quad J = 0$$

$$\Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2}{4} + o(n^{-1})$$

$$\Lambda_{2m+1}(\tau) = \frac{(2m+2)^2}{4} + o(m^{-1})$$

$$\min\Lambda_{2m+1}(\tau) = \lambda_{2m+1} = (m+1)^2 + o(m^{-1})$$

$$\max\Lambda_{2m+1}(\tau) = \lambda_{2m+2} = (m+1)^2 + o(m^{-1})$$

$$\Longrightarrow l_{2m+2} = \lambda_{2m+2} - \lambda_{2m+1} = o(m^{-1})$$

$$\Lambda_{2m}(\tau) = \frac{(2m+1)^2}{4} + o(m^{-1})$$

$$\min\Lambda_{2m}(\tau) = \mu_{2m} = \frac{(2m+1)^2}{4} + o(m^{-1})$$

$$\max\Lambda_{2m}(\tau) = \mu_{2m+1} = \frac{(2m+1)^2}{4} + o(m^{-1})$$

$$\Longrightarrow l_{2m+1} = \mu_{2m+1} - \mu_{2m} = o(m^{-1})$$

olur.

Örnek 2.3: $q(t) = \begin{cases} t - \pi/2 & , \ 0 \le t \le \pi \\ 3\pi/2 - t & , \ \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$, $[a,b] = [0,2\pi]$

i. $\int_0^{\pi}(t - \pi/2)dt + \int_{\pi}^{2\pi}(3\pi/2 - t)dt = \frac{t^2}{2} I_0^{\pi} - \frac{\pi}{2} t I_0^{\pi} + \frac{3\pi}{2} t I_{\pi}^{2\pi} - \frac{t^2}{2} I_{\pi}^{2\pi}$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} + 3\pi^2 - \frac{3\pi^2}{2} - \left(\frac{4\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^a q(t)dt = 0$$

ii. $q(t + 2\pi) = \begin{cases} t + 2\pi - \pi/2 & , \ 0 \le t + 2\pi \le \pi \\ 3\pi/2 - (t + 2\pi) & , \ \pi \le t + 2\pi \le 2\pi \end{cases}$

$$= \begin{cases} t + 3\pi/2 & , -2\pi \le t \le -\pi \\ -\pi/2 - t & , -\pi \le t \le 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} t - \pi/2 & , 0 \le t \le \pi \\ 3\pi/2 - t & , \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \ q(a + t) = q(t)$$

iii. $q(2\pi - t) = \begin{cases} 2\pi - t - \pi/2 & , \ 0 \le 2\pi - t \le \pi \\ 3\pi/2 - (2\pi - t) & , \ \pi \le 2\pi - t \le 2\pi \end{cases}$

$$= \begin{cases} 3\pi/2 - t & , \pi \le t \le 2\pi \\ -\pi/2 + t & , 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \ q(a - t) = q(t)$$

olduğundan sonuç 2.2 ile

$$\Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{4\pi^2} - \frac{2}{2\pi}\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{2\pi}\tau\right)\int_0^{2\pi/2}(t - \frac{\pi}{2})\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{2\pi}t\right)dt + o(n^{-1})$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{1}{\pi}\cos\big((n+1)\tau\big)\underbrace{\int_0^{\pi}\big(t-\frac{\pi}{2}\big)\cos\big((n+1)t\big)\,dt}_{K} + o(n^{-1})$$

olur. K eşitliği için $u = t - \frac{\pi}{2}$ ve $dv = \cos((n+1)t)dt$ alınır ve kısmi integrasyon uygulanırsa

$$K = \int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\big((n+1)t\big)\,dt$$

$$= \left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{n+1}\sin\big((n+1)t\big)\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n+1}\sin((n+1)t)dt$$

$$= \frac{1}{n+1}.\frac{1}{n+1}\cos\big((n+1)t\big)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{(n+1)^2}\cos\big((n+1)\pi\big) - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}\big[\cos\big((n+1)\pi\big) - 1\big]$$

$$\Longrightarrow K = \begin{cases} 0 & , \quad n\ tek \\ -2/(n+1)^2 & , \quad n\ çift \end{cases}$$

$$\Lambda_n(\tau) = \begin{cases} \frac{(n+1)^2}{4} + o(n^{-1}) & , \quad n\ tek \\ \frac{(n+1)^2}{4} + \frac{2}{(n+1)^2\ \pi}\cos\big((n+1)\tau\big) + o(n^{-1}) & , \ n\ çift \end{cases}$$

$$\Lambda_{2m+1}(\tau) = \begin{cases} \frac{(2m+2)^2}{4} + o(m^{-1}) & ,(2m+1)\ \ tek \\ \frac{(2m+2)^2}{4} + \frac{2}{(2m+2)^2\ \pi}\cos\big((2m+2)\tau\big) + o(m^{-1}), & (2m+1)\ çift \end{cases}$$

$$\min\Lambda_{2m+1_{tek}}(\tau) = \lambda_{2m+1} = (m+1)^2 + o(m^{-1})$$

$$\min\Lambda_{2m+1_{çift}}(\tau) = \lambda_{2m+1} = (m+1)^2 - \frac{1}{2(m+1)^2\pi} + o(m^{-1})$$

$$\max\Lambda_{2m+1_{tek}}(\tau) = \lambda_{2m+2} = (m+1)^2 + o(m^{-1})$$

$$\max\Lambda_{2m+1_{çift}}(\tau) = \lambda_{2m+2} = (m+1)^2 + \frac{1}{2(m+1)^2\pi} + o(m^{-1})$$

$$\Longrightarrow \quad l_{2m+2_{tek}} = \lambda_{2m+2} - \lambda_{2m+1} = o(m^{-1})$$

$$l_{2m+2_{çift}} = \lambda_{2m+2} - \lambda_{2m+1} = \frac{1}{(m+1)^2\pi} + o(m^{-1})$$

$$\Lambda_{2m}(\tau) = \begin{cases} \frac{(2m+1)^2}{4} + o(m^{-1}) & , \quad (2m)\ tek \\ \frac{(2m+1)^2}{4} + \frac{2}{(2m+1)^2\ \pi}\cos\big((2m+1)\tau\big) + o(m^{-1}), & (2m)\ çift \end{cases}$$

$$\min\Lambda_{2m_{tek}}(\tau) = \mu_{2m} = \frac{(2m+1)^2}{4} + o(m^{-1})$$

$$\min\Lambda_{2m_{çift}}(\tau) = \mu_{2m} = \frac{(2m+1)^2}{4} - \frac{2}{(2m+1)^2\ \pi} + o(m^{-1})$$

$$\max\Lambda_{2m_{tek}}(\tau)=\mu_{2m+1}=\frac{(2m+1)^2}{4}+o(m^{-1})$$

$$\max\Lambda_{2m_{çift}}(\tau)=\mu_{2m+1}=\frac{(2m+1)^2}{4}+\frac{2}{(2m+1)^2\ \ \pi}+o(m^{-1})$$

$$\Longrightarrow\ l_{2m+1_{tek}}=\mu_{2m+1}-\mu_{2m}=o(m^{-1})$$

$$l_{2m+1_{çift}}=\mu_{2m+1}-\mu_{2m}=\frac{4}{(2m+1)^2\ \ \pi}+o(m^{-1})$$

olur.

Örnek 2.4: $q(t)=\begin{cases} t^{-1/2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}} & ,\ 0\le t\le\pi \\ (2\pi-t)^{-1/2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}} & ,\ \pi\le t\le 2\pi \end{cases}$, $[a,b]=[0,2\pi]$

i. $\int_0^{\pi}\left(t^{-1/2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)dt+\int_{\pi}^{2\pi}\left[(2\pi-t)^{-1/2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right]dt=0$

ii. $q(t+2\pi)=\begin{cases} (t+2\pi)^{-1/2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}} & ,\ 0\le t+2\pi\le\pi \\ (2\pi-(t+2\pi))^{-1/2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}} & ,\ \pi\le t+2\pi\le 2\pi \end{cases}$

$$=\begin{cases} (t+2\pi)^{-1/2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}} & ,-2\pi\le t\le-\pi \\ (-t)^{-1/2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}} & ,-\ \pi\le t\le 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} t^{-1/2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}} & ,0\le t\le\pi \\ (2\pi-t)^{-1/2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}} & ,\pi\le t\le 2\pi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ q(a+t)=q(t)$$

iii. $q(2\pi-t)=\begin{cases} (2\pi-t)^{-1/2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}} & ,\ 0\le 2\pi-t\le\pi \\ (2\pi-(2\pi-t))^{-1/2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}} & ,\ \pi\le 2\pi-t\le 2\pi \end{cases}$

$$=\begin{cases} (2\pi-t)^{-\frac{1}{2}}-\frac{2}{\sqrt{\pi}} & ,-2\pi\le -t\le-\pi \\ t^{-\frac{1}{2}}-\frac{2}{\sqrt{\pi}} & ,-\pi\le -t\le 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} t^{-1/2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}} & ,\ 0\le t\le\pi \\ (2\pi-t)^{-1/2}-\frac{2}{\sqrt{\pi}} & ,\ \pi\le t\le 2\pi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ q(a-t)=q(t)$$

olduğundan sonuç 2.2 ile

$$\Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2\pi^2}{4\pi^2} - \frac{2}{2\pi}\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{2\pi}\tau\right)\int_0^{2\pi/2}\left(t^{-1/2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\cos\left(\frac{2(n+1)\pi}{2\pi}t\right)dt$$
$$+o(n^{-1})$$
$$= \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{1}{\pi}\cos\big((n+1)\tau\big)\underbrace{\int_0^{\pi}\left(t^{-1/2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\cos\big((n+1)t\big)\,dt}_{L} + o(n^{-1})$$

olur. L eşitliği için $u = (n+1)t$, $t = (n+1)^{-1}u$ dönüşümü uygulanırsa

$$L = \int_0^{(n+1)\pi}[(n+1)^{-1}u]^{-1/2}\cos u\,du - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{(n+1)\pi} cosudu$$
$$= \int_0^{(n+1)\pi}((n+1)^{-1})^{-1/2}u^{-1/2}cosudu$$
$$= (n+1)^{1/2}\int_0^{(n+1)\pi} u^{-1/2}cosudu$$
$$= (n+1)^{1/2}\left[\int_0^{\infty} u^{-1/2}cosudu - \int_{(n+1)\pi}^{\infty} u^{-1/2}cosudu\right]$$

olur. $\int_0^{\infty} u^{-1/2}cosudu = \sqrt{\pi/2}$ olduğu bilinmektedir. Yani

$L = (n+1)^{1/2}\sqrt{\pi/2} - (n+1)^{1/2}\underbrace{\int_{(n+1)\pi}^{\infty} u^{-1/2}cosudu}_{M}$ şeklindedir. M integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$M = \int_{(n+1)\pi}^{\infty} u^{-1/2}cosudu = u^{-1/2}sinu\,\mathrm{I}_{(n+1)\pi}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{(n+1)\pi}^{\infty} u^{-3/2}sinudu$$
$$= \frac{1}{2}\int_{(n+1)\pi}^{\infty} u^{-\frac{3}{2}}sinudu$$

olur.

M eşitliğine tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa,

$M = \frac{1}{2}\left[u^{-\frac{3}{2}}(-cosu)\,\mathrm{I}_{(n+1)\pi}^{\infty} - \frac{3}{2}\int_{(n+1)\pi}^{\infty} u^{-5/2}\,cosudu\right]$ olur.

$$M = \begin{cases} \frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}\int_{(n+1)\pi}^{\infty} u^{-\frac{5}{2}}\,cosudu & , \quad n\; tek \\ -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}\int_{(n+1)\pi}^{\infty} u^{-\frac{5}{2}}\,cosudu & , \quad n\; çift \end{cases}$$

olur.

Ayrıca ortalama değer teoremi ile $-\frac{3}{4}\int_{(n+1)\pi}^{\infty} u^{-\frac{5}{2}} cosudu = o(n^{-5/2})$ şeklindedir. Yani

$$M = \begin{cases} \frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}} + o(n^{-5/2}) & , \quad n\, tek \\ -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}} + o(n^{-5/2}) & , \quad n\, çift \end{cases}$$

olur.

Sonuç olarak,

$$L = \begin{cases} (n+1)^{1/2}\sqrt{\pi/2} - (n+1)^{1/2}\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}} + o(n^{-5/2}) & , \quad n\, tek \\ (n+1)^{1/2}\sqrt{\pi/2} + (n+1)^{1/2}\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}} + o(n^{-5/2}) & , \quad n\, çift \end{cases}$$

$$= (n+1)^{1/2}\sqrt{\pi/2} + o(n^{-2}) \text{ ve}$$

$$\Lambda_n(\tau) = \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{(n+1)^{1/2}\sqrt{\pi/2}}{\pi}\cos\big((n+1)\tau\big) + o(n^{-2})$$

şeklindedir.

$$\Lambda_{2m+1}(\tau) = \frac{(2m+2)^2}{4} - \frac{(2m+2)^{1/2}\sqrt{\pi/2}}{\pi}\cos\big((2m+2)\tau\big) + o(m^{-2})$$

$$\min\Lambda_{2m+1}(\tau) = \lambda_{2m+1} = (m+1)^2 - \frac{(2m+2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi/2}}{\pi} + o(m^{-2})$$

$$\max\Lambda_{2m+1}(\tau) = \lambda_{2m+2} = (m+1)^2 + \frac{(2m+2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi/2}}{\pi} + o(m^{-2})$$

$$\Longrightarrow l_{2m+2} = \lambda_{2m+2} - \lambda_{2m+1} = \frac{2(2m+2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi/2}}{\pi} + o(m^{-2})$$

$$\Lambda_{2m}(\tau) = \frac{(2m+1)^2}{4} - \frac{(2m+1)^{1/2}\sqrt{\pi/2}}{\pi}\cos\big((2m+1)\tau\big) + o(m^{-2})$$

$$\min\Lambda_{2m}(\tau) = \mu_{2m} = \frac{(2m+1)^2}{4} - \frac{(2m+1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi/2}}{\pi} + o(m^{-2})$$

$$\max\Lambda_{2m}(\tau) = \mu_{2m+1} = \frac{(2m+1)^2}{4} + \frac{(2m+1)^{1/2}\sqrt{\pi/2}}{\pi} + o(m^{-2})$$

$$\Rightarrow l_{2m+1} = \mu_{2m+1} - \mu_{2m} = \frac{2(2m+1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi/2}}{\pi} + o(m^{-2})$$

olur.

Bu bölümdeki örnekler; sembolik hesaplama paketi olan MAXİMA yardımıyla,belirli $[0,2\pi]$ aralığı ve spesifik q(t) fonksiyonları için yazılan kodlar yardımıyla tekrar hesaplanmış ve sonuçlar birbiriyle örtüşmüştür. Ayrıca yazılan kodlar son kısımda verilmiştir.

```
(%i1)    maxmintau():=block([tau,t],declare(n,integer),declare(m,integer),assume(tau>0,tau+%pi>0),
       q:readonly("q(t)="),
       a:readonly("a="),
       T1:q·cos((2·(n+1)·%pi/a)·t),
       terim1:integrate(T1,t,0,a),
       T2:q·sin((2·(n+1)·%pi/a)·t),
       terim2:integrate(T2,t,0,a),
       display([terim1,terim2]),
       define(f(tau),(n+1)·%pi/a−1/(2·(n+1)·%pi)·cos((2·(n+1)·%pi/a)·%tau)·(terim1)−1/(2·(n+1)·%pi)·sin((2·(n+1)·%pi/a)·%tau)·(terim2)),
       display(f(tau)),
       fp:(f(tau))^2,
         display(fp),
       define(maxfp(tau),((n+1)^2·%pi^2/a^2)+2/a·integrate(T1,t,0,a/2)),
         display(maxfp(tau)),
       define(minfp(tau),((n+1)^2·%pi^2/a^2)−2/a·integrate(T1,t,0,a/2)),
         display(minfp(tau)),
         T3:q·cos((4·(m+1)·%pi/a)·t),
         define(λ1(t),(4·(m+1)^2·%pi^2/a^2)−2/a·integrate(T3,t,0,a/2)),
         display(λ1(t)),
         define(λ2(t),(4·(m+1)^2·%pi^2/a^2)+2/a·integrate(T3,t,0,a/2)),
         display(λ2(t)),
         T4:q·cos((2·(2·m+1)·%pi/a)·t),
         define(μ1(t),((2·m+1)^2·%pi^2/a^2)−2/a·integrate(T4,t,0,a/2)),
         display(μ1(t)),
         define(μ2(t),((2·m+1)^2·%pi^2/a^2)+2/a·integrate(T4,t,0,a/2)),
         display(μ2(t)),
         define(ı_1(t),λ2(t)−λ1(t)),
         display(ı_1(t)),
          define(ı_2(t),μ2(t)−μ1(t)),
         display(ı_2(t)))$
```

Şekil 1. Çift fonksiyon için yazılan kod

```
(%i1)  maxmintaus():=block([tau,t],declare(n,integer),declare(m,integer),assume(tau>0,tau+%pi>0),
       q:readonly("q(t)="),
       a:readonly("a="),
       T1:q·cos((2·(n+1)·%pi/a)·t),
       terim1:integrate(T1,t,0,a),
       T2:q·sin((2·(n+1)·%pi/a)·t),
       terim2:integrate(T2,t,0,a),
       display([terim1,terim2]),
       define(f(tau),(n+1)·%pi/a−1/(2·(n+1)·%pi)·cos((2·(n+1)·%pi/a)·%tau)·(terim1)−1/(2·(n+1)·%pi)·sin((2·(n+1)·%pi/a)·%tau)·(terim2)),
       display(f(tau)),
       fp:(f(tau))^2,
          display(fp),
       define(maxfp(tau),((n+1)^2·%pi^2/a^2)+2/a·integrate(T2,t,0,a/2)),
          display(maxfp(tau)),
       define(minfp(tau),((n+1)^2·%pi^2/a^2)−2/a·integrate(T2,t,0,a/2)),
          display(minfp(tau)),
          T3:q·sin((4·(m+1)·%pi/a)·t),
          define(λ1(t),(4·(m+1)^2·%pi^2/a^2)−2/a·integrate(T3,t,0,a/2)),
          display(λ1(t)),
          define(λ2(t),(4·(m+1)^2·%pi^2/a^2)+2/a·integrate(T3,t,0,a/2)),
          display(λ2(t)),
          T4:q·sin((2·(2·m+1)·%pi/a)·t),
          define(μ1(t),((2·m+1)^2·%pi^2/a^2)−2/a·integrate(T4,t,0,a/2)),
          display(μ1(t)),
          define(μ2(t),((2·m+1)^2·%pi^2/a^2)+2/a·integrate(T4,t,0,a/2)),
          display(μ2(t)),
          define(ı_1(t),λ2(t)−λ1(t)),
          display(ı_1(t)),
           define(ı_2(t),μ2(t)−μ1(t)),
          display(ı_2(t)))$
```

Şekil 2. Tek fonksiyon için yazılan kod

(%i2) maxmintau();

$q(t)=\cos(t+2\cdot\%pi);$

$a=2\cdot\%pi;$

$[terim1, terim2]=[0,0$

$$\mathrm{f}(\tau)=\frac{n+1}{2}$$

$$fp=\frac{(n+1)^2}{4}$$

$$\mathrm{maxfp}(\tau)=\frac{(n+1)^2}{4}$$

$$\mathrm{minfp}(\tau)=\frac{(n+1)^2}{4}$$

$$\lambda 1(t)=(m+1)^2$$

$$\lambda 2(t)=(m+1)^2$$

$$\mu 1(t)=\frac{(2\,m+1)^2}{4}$$

$$\mu 2(t)=\frac{(2\,m+1)^2}{4}$$

$$l_1(t)=0$$

$$l_2(t)=0$$

(%o2) *done*

Şekil 3. Örnek 1

```
(%i2) maxmintaus();
      q(t)= sin(t+2·%pi);
      a= 2·%pi;
```

$$[terim1, terim2] = [0, 0$$

$$f(\tau) = \frac{n+1}{2}$$

$$fp = \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$maxfp(\tau) = \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$minfp(\tau) = \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$\lambda 1(t) = (m+1)^2$$

$$\lambda 2(t) = (m+1)^2$$

$$\mu 1(t) = \frac{(2m+1)^2}{4}$$

$$\mu 2(t) = \frac{(2m+1)^2}{4}$$

$$l_1(t) = 0$$

$$l_2(t) = 0$$

(%o2) *done*

Şekil 4. Örnek 2

3. SONUÇLAR

Bu çalışmanın literatüre katkıları aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

1. $q(t)$ potansiyel fonksiyonu $[0, a]$ üzerinde periyodik olmak üzere $q(t) = q(a-t)$ $veya$ $\left(q\left(\frac{a}{2} - t\right) = q\left(\frac{a}{2} + a\right), 0 \leq t \leq \frac{a}{2}\right)$ $veya$ $\left(q(t) = -q(a-t)\right)$ özelliğini sağlaması durumunda yardımcı özdeğerler olan $\Lambda_n(\tau)$ hesaplanmıştır. (Teorem 2.3)
2. Potansiyel fonksiyonun çift olması durumunda; yardımcı özdeğerler $\Lambda_n(\tau)$ yardımıyla, $[0, a]$ üzerinde tanımlı periyodik ve yarı periyodik özdeğerler olan λ_n ve μ_n ler hesaplanmıştır. (Teorem 2.5-2.6)
3. Literatürdeki sonuçlardan farklı olarak kararsızlık aralığı l_n açık olarak verilmiştir. Yani $l_n = F(n) + o(n^{-k})$. (bknz Teo 1.8- Teo 1.9)
4. Sembolik hesaplama yardımıyla $\Lambda_n(\tau)$ nun minimum ve maksimum değerleri bulunmuştur.
5. Literatürde ters problemler olarak bilinen kararsızlık aralıklarının uzunluklarının bilinmesi durumunda potansiyel fonksiyonu ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.
6. Potansiyel fonksiyonunun mevcut varsayımları sağlaması durumunda elde edilen teorik sonuçların uygulanabilirliği oluşturulan örneklerle doğrulanmıştır.

4. ÖNERİLER

1. $\Lambda_n(\tau)$ lar geliştirilebilr.
2. $\Lambda_n(\tau)$ ların minimum ve maksimum değerleri uygun program kodlarıyla hesaplanarak spectrum incelenebilir.
3. Kararsızlık aralıkları üzerine elde edilen sonuçlar daha da genişletilebilir.
4. Kararsızlık aralıklarının uzunluklarının asimptotik olarak bilinmesi durumunda ters problemler ile ilgili sonuçlar elde edilebilir. Bunun için $l_n = F(n) + o(n^{-k})$ kullanılır.
5. Potansiyel fonksiyonu farklı varsayımlarla dikkate alınabilir.

5. KAYNAKLAR

1. Halilov, H., Hasanoğlu, A. ve Can, M., Yüksek Matematik I: Tek Değişkenli Fonksiyonlar Analizi, İkinci Basım, Literatür Yayınları, İstanbul, 2002.

2. Eastham, M.S.P., Theory of Ordinary Differantial Equations, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.

3. Atkinson, F.V., Asymptotics of an eigenvalue problem involving an interior singularity, 2 (1988) 1-18.

4. Eastham, M.S.P., The Spectral Theory of Periodic Differantial Equations, Scottish Academic Press, Edinburg and London, 1973.

5. Coşkun, H., On the spectrum of a second order periodic differential equation, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 33 (2003) 1261-1277.

6. Borg, G., Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math.78(1946) 1-96.

7. Hochstadt, H., On the determination of a Hill’s equation from its spectrum I, II, Arch. Rational Mech Anal. 19 (1965) 353-362.

8. Ungar, P., Stable Hill equations, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961) 707-710.

ÖZGEÇMİŞ

Emine KALAN, 1992 yılında Trabzon' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Mustafa Kemal Paşa İlköğretim İlkokulu'nda, lise öğrenimini ise Bakırköy Lisesi'nde tamamladı.

2010-2011 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü' nü kazandı. Bir yıllık ingilizce hazırlık eğitiminin ardından lisans eğitimine başladı. 2016 yılında lisans eğitiminden matematikçi ünvanıyla mezun oldu.

2016 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı.