KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANG HUMMASI HASTALIĞININ RASTGELE ETKİLER ALTINDA MATEMATİKSEL MODELLENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mohammed NAJMULDEEN

MAYIS 2016
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANG HUMMASI HASTALIĞININ RASTGELE ETKİLER ALTINDA MATEMATİKSEL MODELLENMESİ

Mohammed NAJMULDEEN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 09/05/2016
Tezin Svunma Tarihi : 31/05/2016

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Tülay KESEMEN

Trabzon 2016

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında

Mohammed NAJMULDEEN Tarafından Hazırlanan

DANG HUMMASI HASTALIĞININ RASTGELE ETKİLER ALTINDA MATEMATİKSEL MODELLENMESİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 17/05/2016 gün ve 1653 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. İhsan ÜNVER ....

Üye : Doç. Dr. Tülay KESEMEN ....

Üye : Doç. Dr. Mehmet MERDAN ....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Geniş bilgi birikimi, yol göstericiliği ve tecrübesiyle tez konumu belirleyip çalışma sürecinde ortaya çıkan zorlukların çözümünde yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Doç. Dr. Tülay KESEMEN'e en derin duygularımla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım sırasında büyük katkılarından ve desteklerinden dolayı RTEÜ Matematik Bölümü öğretim elemanı Arş. Gör. Zafer BEKİRYAZICI'ya, Gümüşhane Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Doç. Dr. Mehmet MERDAN'a ve KTÜ İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü öğretim üyesi Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK'e teşekkür ederim.

Ayrıca hayatım boyunca beni en iyi şekilde yetiştiren anneme, babama ve her şeyin en iyisine layık olan aileme ve manevi desteklerini esirgemeyen sevdiklerime teşekkür ederim.

Öğütleriyle büyüdüğüm ve çocukluğumdan beri örnek aldığım Türk Dil Kurumu üyesi merhum dayım türkolog, araştırmacı, tarihçi Av. Ata TERZİBAŞI'ya da teşekkürü bir borç bilirim.

Mohammed NAJMULDEEN

Trabzon 2016

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Dang Humması Hastalığının Rastgele Etkiler Altında Matematiksel Modellenmsei” başlıklı bu çalışmaya baştan sona kadar Doç. Dr. Tülay KESEMEN’in sorumluluğumda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 31/05/2016

Mohammed NAJMULDEEN

İÇİNDEKİLER

Yüksek Lisans

ÖZET

DANG HUMMASI HASTALIĞININ RASTGELE ETKİLER ALTINDA MATEMATİKSEL MODELLENMESİ

Mohammed NAJMULDEEN

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Tülay KESEMEN
2016, 73 Sayfa, 11 Ek Sayfa

Bu çalışmada Dang Humması hastalığının deterministik matematiksel modeli çift taraflı üstel (Laplace) dağılıma sahip rastgele etkiler altında incelenmektedir. Dang Humması özel bir çeşit sivrisinek tarafından yayılan tropik bir ateşli hastalıktır. Literatürde var olan çalışmalarda Dang Humması hastalığı lineer olmayan deterministik diferansiyel denklemler kullanılarak modellenmektedir. Ancak Dang Humması hastalığının modellenmesinde kullanılan bazı parametrelerin gerçekte dış etkenlere bağlı oldukları bilinmektedir. Bu nedenle Dang Humması hastalığının yayılımını modelleyen denklem sisteminin bazı parametreleri rastgele etki terimleri kullanılarak rastgele hale getirilmektedir. Bu şekilde rastgele hale getirilen parametrelerin tasvir ettiği olayların rastgele davranışları da denklem sisteminde modellenmektedir. Deterministik parametrelerin rastgele hale getirilmesi için Laplace dağılımına sahip rastgele değişkenler kullanılmaktadır. Bu yöntemle doğrusal olmayan rastgele diferansiyel denklemlerden oluşan modeli kurulan Dang Humması hastalığının davranışları incelenmektedir. Bu denklem sisteminin sayısal çözümlerinin Monte-Carlo metodları ile simülasyonları yapılmakta ve elde edilen sonuçlar kullanılarak hastalıkla ilgili yorumlar yapılmaktadır. Simülasyonlar sonucunda Dang Humması hastalığının modelinin bileşenlerinin beklenen değer, varyans, standart sapma, güven aralığı ve momentleri yanı sıra çarpıklık ve basıklık katsayılarının hesaplanmasının ardından model bileşenlerinin rastgele davranışları hakkında yorumları yapılmaktadır. Deterministik modelden elde edilen çözümler ile rastgele modelden elde edilen çözümler karşılaştırarak, rastgele modelin hastalıkla ilgili matematiksel çalışmalara katkısının ne olduğu ile ilgili çıkarımlar yapılmaktadır. Uygulanan rastgele modelleme çalışmaları Dang Humması hastalığı için özgündür ve Dang Humması üzerine yapılan matematiksel analizlere katkı sağlayacaktır.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel Model, Rastgele Etki, Simülasyon, Laplace Dağılımı.

Master Thesis

ABSTRACT

MATHEMATICAL MODELLING OF DENGUE DISEASE UNDER LAPLACIAN RANDOM EFFECTS

Mohammed NAJMULDEEN

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Tülay KESEMEN
2016, 73 Pages, 11 Pages Appendix

In this study, the deterministic mathematical model of Dengue disease is examined under Laplacian random effects. Dengue disease is a tropical disease transmitted by a special type of mosquitoes. Dengue disease is modeled bu using nonlinear deterministic differential equations in the literature. However, it is known that some of the parameters used in the mathematical modeling of Dengue disease are dependent on external factors. Hence, the parameters of the equation system used for the modeling the transmission of dengue fever should be randomized by using random effect terms. This way, the randomness in the events described by the randomized parameters can be modeled in the equation system. Random variables with Laplace distribution are used for randomizing the deterministic parameters. The behavior of dengue fever disease is examined with a model consisting of nonlinear random differential equations. Simulations of the numerical results of the equation system are made with Monte-Carlo methods and the results are used for commenting on the disease. Comments are made on the random behavior of the components of the model after calculating their numerical characteristics like the expected value, variance, standard deviation, confidence interval and moments along with the coefficients of skewness and kurtosis from the results of the simulations. Results from the deterministic model are compared with the results from the random model to point out the possible contribution of random modeling to the mathematical analysis studies on the disease. The used random modeling studies are innovative for dengue fever and will contribute to the mathematical studies on dengue fever.

Key Words: Mathematical Model, Random Effect, Simulation, Laplace Distribution.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu tez çalışması Dang Humması hastalığının yayılmasını modelleyen bir deterministik denklem sisteminin katsayılarına rastgele etki terimleri eklenmesi ile oluşturulan rastgele modelin incelenmesinden oluşmaktadır. İncelenen nüfusun üç gruba ayrılması ve gruplardaki değişimlerin matematiksel analizi ile hastalığın gidişatı hakkında yorumlar yapılmasına olanak sağlayan SIR modelinin Dang Humması hastalığında uygulamaları literatürde mevcuttur. Hastalığın yayılması probleminin rastgele koşullar altında ne gibi değişimler gösterebileceğinin incelenmesi için literatürdeki deterministik çalışmaların aksine bu model üzerinde bir çalışma yapılması amaçlanmıştır. Bu amaçla model bir doğrusal olmayan rastgele diferansiyel denklem sistemi haline getirilecek ve bu sistemin sayısal çözümlerinin simülasyonları yapılacaktır. Simülasyon sonuçlarından hastalık modelinin sayısal karakteristikleri hesaplanacak ve bu şekilde hastalığın rastgele koşullar altına davranışlarının ne şekilde olacağı ile ilgili yorumlar yapılacaktır.

Tezin birinci bölümünde yapılan çalışmanın genel hatları belirtilmektedir. Çalışmanın ikinci bölümünde kurulacak olan rastgele diferansiyel denklem sistemi için gerekli olan olasılık teorisine ait kavramlar ele alınmaktadır. Olasılık teorisindeki aksiyomlar, rastgele değişken, dağılım fonksiyonu, rastgele değişkenlerin karakteristikleri ve yakınsaklık çeşitleri gibi bazı temel kavramların verilmesinin ardından stokastik süreçlerle ilgili bazı kavramlara da değinilmektedir. Modelin rastgele hale getirilmesi için gerekli olan Laplace dağılımı, üstel dağılım ve normal dağılım gibi olasılık dağılımlarına ait bilgiler de bu bölümde verilmektedir. Ek olarak stokastik süreçler ile ilgili tanımlar ve sayısal karakteristiklerle ilgili bilgiler de bu bölüme dahil edilmiştir.

Üçüncü bölüm diferansiyel denklemler ile ilgili kavramları içerir. Bu bölümde diferansiyel denklemlerin sınıflandırılmaları ile genel ve özel çözümleri verilmekte ve diferansiyel denklem çeşitleri örneklendirilmektedir. Doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerinin sayısal çözümlerinin elde edilmesi için kullanılan Runge-Kutta yöntemi de bu bölüme işlenmektedir. Dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi ile ilgili formüllerin verilmesinden sonra bir örnek ile metodun işleyişi açıklanmaktadır.

Dördüncü bölümde de benzer şekilde rastgele diferansiyel denklemler ele alınmaktadır. Diferansiyel denklemlerin başlangıç değerleri, parametreleri ve homojen olmayan kısımlarının rastgele alınması ile kurulan rastgele diferansiyel denklemlerle ilgili bilgiler de verilmektedir. En son olarak stokastik diferansiyel denklemler ve stokastik hesap ile ilgili kavramlar da bu bölümde bulunmaktadır.

Beşinci bölümde Dang Humması hastalığı ilgili bilgiler verildikten sonra, hastalıkların matematiksel modellenmesi ve genel hastalık modelleri hakkında bilgiler sunulmaktadır. Deterministik modelin ifade edilmesi ve işleyişinin açıklanmasından sonra bu modelin nasıl rastgele hale getirildiği anlatılmakta ve rastgele denklem sistemi ile ilgili bilgiler verilmektedir.

Altıncı bölümde rastgele parametrelerin sağladığı farklılıkla ilgili açıklamalar yapıldıktan sonra modelin simülasyonundan elde edilen sayısal sonuçlar verilmekte ve hastalığın yayılımının rastgele davranışları hakkında sonuçlar sunulmaktadır. Bu bağlamda modelin çözüm eğrileri, beklenen değerleri, varyansları, güven aralıkları ile çarpıklık ve basıklık katsayıları ile ilgili grafikler verilmiş ve simülasyonda elde edilen uç değerlere değinilmiştir. Yedinci bölümde elde edilen matematiksel veriler hastalıkla ilişkilendirilmekte ve deterministik sonuçlar ile rastgele sonuçların karşılaştırılması yapılmaktadır.

Tez çalışması sonucunda literatürde deterministik modellenmesi var olan Dang Humması hastalığı için rastgele model kurulumu ve karakteristiklerinin incelenmesi çalışmaları yapılmıştır. Bu çalışmalar farklı hastalıkların modellemenlerinde de kullanılabilme potansiyeline sahiptir. Dang Humması ile ilgili yapılan matematiksel çalışmalara farklı bir bakış açısı kazandıracak bu çalışma benzer konulara da kaynak oluşturacaktır.

1.1. Matematiksel Modelleme

Matematiksel model bir sistemin matematik diliyle ifade edilmesidir. Bu matematiksel modelin oluşturulma sürecine matematiksel modelleme denir. Fizik, kimya, doğa bilimleri ve mühendislik alanlarının yanı sıra psikoloji, sosyoloji gibi sosyal bilim dallarında da matematiksel modellere rastlanmaktadır.

Matematiksel modeller kullanılarak bir sistemin farklı bileşenlerinin etkileri incelenebildiği gibi gelecekteki davranışları hakkında tahminler de yapılabilir. Model bileşenlerinin sistematik analizi aracılığıyla ilgilenilen olayın optimizasyonu sağlanabilir, yürütülecek tahminler ve olayın akışı ile ilgili planlar yapılabilir.

Bu nedenle öncelikle modellenecek olay ile ilgili bilgiler toplanır. Olay hakkında sahip olunan bilgi miktarına göre kullanılacak model tipi belirlenir ve modelin bileşenlerini etkileyen parametrelerin değerlerinin belirlenmesi ile ilgili çalışmalar yapılır. Dinamik ve statik modeller, doğrusal ve doğrusal olmayan modeller ile deterministik ve stokastik modeller bu alanda kullanılan matematiksel model tiplerinden sadece birkaçıdır.

Matematiksel modellenmesi yapılacak olan olayları deterministik ve stokastik olarak iki gruba ayırmak mümkündür. Deterministik olaylarda sonuç tam olarak belirlenebilmekte ve koşullar değişmediği sürece aynı sonuçlar elde edilmektedir. Stokastik olaylarda ise aynı koşullar altında farklı sonuçlar elde edilebilmektedir. Özellikle hastalıklarla ilgili yapılan incelemelerde rastgele model kullanılmasıyla deterministik modelleme çalışmalarına kıyasla oluşacak farklılıklar incelenmelidir.

1.1.2. Literatür Özeti

Her ne kadar doğadaki olayların aynı koşullarda farklı sonuçlar vermesi denklemlerde stokastik süreçler ve rastgele değişkenler kullanılarak temsil edilebilse de, matematiksel modelleme çalışmalarında genel olarak stokastik modellemenin kullanıldığı görülmektedir.

Stokastik matematiksel modeller Imran M., Hassan M., Dur-E-Ahmad M. ve Khan A. tarafından yapılan “A comparison of a deterministic and stochastic model for Hepatitis C with an isolation stage” isimli çalışmada olduğu gibi, stokastik gürültü olarak adlandırılan terimler içermektedir (Imran vd., 2013). Bu çalışma ayrıca deterministik ve stokastik modellerin sonuçlarının karşılaştırılmasını içermesi bakımından da örnek gösterilebilir. Hastalıklarla ilgili stokastik modelleme çalışmalarına Tan W. ve Wu H. tarafından yapılan “Stochastic modeling of the dynamics of $CD4^+$ T-cell infection by HIV ad some Monte Carlo studies” isimli çalışması örnek gösterilebilir (Tan ve Wu, 1997). Pang L., Zhao Z., Liu S. ve Zhang X. tarafından yapılan “A mathematical model approach for tobacco control in China” başlıklı çalışmada olduğu gibi, stokastik modeller sadece sağlık alanında değil farklı bilim dallarında da kullanılmaktadır (Pang vd., 2015). Stokastik modelleme çalışmalarında Lahrouz A., Omari L., Kiouach A. ve Belmaati A. tarafından yapılan “Deterministic and stochastic stability of a mathematical model of smoking” başlıklı çalışmada olduğu gibi kararlılık analizleri veya duyarlılık analizleri de yapılarak, incelenilen olay hakkında daha detaylı bilgiler de elde edilebilmektedir (Lahrouz vd., 2011).

Stokastik modelleme ile ilgili yukarıdaki gibi gürültü terimleri içeren model örneklerine literatürde sıkça rastlanmaktadır. Ancak bu çalışmada kullanılacak olan rastgele diferansiyel denklemlerden oluşan rastgele modellere dair örnekler, stokastik modellere oranla neredeyse yok denecek kadar azdır. Bu modellere Merdan, M. ve Khaniyev T. tarafından yapılan "On the Behaviour of Solutions under the Influence of Stochastic Effect of Avian-Human Influenza Epidemic Model" adlı çalışma örnek gösterilebilir (Merdan ve Khaniyev, 2008). Bu çalışmada kuş gribi hastalığı için kullanılan deterministik modelin parametreleri normal ve üçgensel dağılımlı etkiler ile rastgele hale getirilmiş ve bir rastgele diferansiyel denklem sistemi oluşturulmuştur. Rastgele etkiler kullanılarak hastalık modellemeleri ile ilgili Merdan M., Bekiryazici Z. ve Kesemen T. tarafından yapılan "Stochastic and Deterministic Stability of Models for Hepatitis C" isimli çalışma da örnek gösterilebilir (Merdan vd., 2015).

Dang Humması hastalığı ile ilgili yapılan matematiksel model çalışmalarına kaynak olarak Esteva, L. ve Vargas C. tarafından yapılan "Analysis of a dengue disease transmission model" başlıklı çalışma, Yacoob Y. tarafından yapılan "Analysis of a dengue disease transmission model without immunity" başlıklı çalışma ve Phaijoo G.R. ve Gurung D.B. tarafından yapılan "Mathematical study of biting rates of mosqutioes in transmission of dengue disease" başlıklı çalışma gösterilebilir (Esteva ve Vargas, 1998; Yacoob, 2007; Phaijoo ve Gurung, 2015).

1.2. OLASILIK ve STOKASTİK SÜREÇLER TEORİSİNİN BAZI TEMEL KAVRAMLARI

1.2.1. Olasılık Teorisinin Bazı Temel Kavramları

Tez çalışmasında kullanılacak olan olasılık teorisi ve stokastik süreçlerin bazı kavramları aşağıda verilmektedir.

Tanım 1.2.1.1. Bilimsel bir gerçeği göstermek, bir yasayı doğrulamak, bir varsayımı kanıtlamak amacı ile yapılan işleme deney denir.

Bir deney yapıldığında olabilecek bütün sonuçların kümesine örnek uzayı denir ve S veya Ω ile gösterilir. Örnek uzayın her alt kümesi bir olaydır.

Tanım 1.2.1.2. Sonlu veya sayılabilir sonsuz sayıda elemana sahip örnek uzayın her bir alt kümesine rastgele olay denir.

Küme kavramı matematiğin (ve bir çok bilim dalının) en temel kavramlarından birisi olmasına rağmen, tanımı net olarak yapılmayan bir kavramdır.

Olasılıkta örnek uzayı, üzerinde çalışacağımız kümeyi göstermektedir. Bu örnek uzaya bazen evrensel küme de denir.

Tanım 1.2.1.3. Hiç elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve $\emptyset$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.1.4. A kümesine ait olan her eleman B kümesine de ait ise A kümesi B'nin alt kümesidir denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.1.5. Bir kümenin kendisinden ve boş kümeden farklı her alt kümesine bir özalt kümesi veya has alt kümesi denir ve $A \subset B$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.1.6. A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanı ve B kümesinin her elemanı A kümesinin de elemanı ise $A = B$ dir.

Tanım 1.2.1.7. A ve B kümelerinin her ikisinde ortak olan elemanların oluşturduğu kümeye A ile B'nin arakesiti veya kesişimi denir ve $A \cap B$ ile gösterilir.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Ayrıca $A \cap B \subset A$ ve $A \cap B \subset B$ dir.

Tanım 1.2.1.8. A ve B kümesinden en az birine ait olan elemanların oluşturduğu kümeye A ile B'nin birleşimi denir ve $A \cup B$ ile gösterilir.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Ayrıca $A \subset A \cup B$ ve $B \subset A \cup B$ dir.

Tanım 1.2.1.9. Arakesitleri boş küme olan kümelere ($A \cap B = \emptyset$) ayrık kümeler denir.

Tanım 1.2.1.10. E evrensel küme ve $A \subset E$ olmak üzere bir A kümesinin tümleyeni A'da olmayan fakat evrensel kümede olan elemanların kümesidir.

$$\bar{A} = A^c = \{x \mid x \notin A\,, x \in E\}.$$

Ayrıca $A \cap \bar{A} = \emptyset$ ve $A \cup \bar{A} = E$ dir.

Tanım 1.2.1.11. A ve B iki küme olsun. A'ya ait fakat B'ye ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A ile B'nin fark kümesi denir ve

$$A \backslash B = A - B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\} = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in \bar{B}\} = A \cap \bar{B}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.2.1.12. A ve B iki küme olsun. $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$ kümesine A ile B'nin simetrik farkı denir.

Tanım 1.2.1.13. Ω örnek uzayının bazı alt kümelerinin oluşturduğu bir kümeye (kolleksiyona) sınıf denir.

Tanım 1.2.1.14. Bir Ω, $\Omega \neq \emptyset$, kümesinin bütün alt kümelerinin oluşturduğu sınıfa o kümenin kuvvet kümesi denir, $P(\Omega)$ veya $\sigma(\Omega)$ ile gösterilir.

Not: $\mathbb{R}$'deki sayıların kümesi

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ olmak üzere $B_1 = \{(a,b) \mid a < b\,; a,b \in \mathbb{R}\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ olmak üzere $B_2 = \{(a,b] \mid a < b\,; a,b \in \mathbb{R}\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ olmak üzere $B_3 = \{[a,b) \mid a < b\,; a,b \in \mathbb{R}\}$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ olmak üzere $B_4 = \{[a,b] \mid a \leq b\,; a,b \in \mathbb{R}\}$

$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ olmak üzere $B_5 = \{(-\infty,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ olmak üzere $B_6 = \{(-\infty,a] \mid a \in \mathbb{R}\}$

$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ olmak üzere $B_7 = \{(a,+\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$

[a,+∞) = {x ∈ ℝ | x ≥ a} olmak üzere B_8= $\{[a,+\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$

şeklinde gösterilebilir ve bu kümeler ℝ'de birer sınıftır.

$I = \left\{\bigcup_{i=1}^{8} B_i\right\} \cup \{\mathbb{R}\}$ kümesi de bir sınıftır. I kümesine ℝ'deki aralıkların kümesi denir.

Tanım 1.2.1.15. $\Omega \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{U}$ da Ω üzerinde bir sınıf olmak üzere $\mathcal{U}$ sınıfı;

1) $\Omega \in \mathcal{U}$
2) $\forall A \in \mathcal{U}$ için $\bar{A} \in \mathcal{U}$
3) $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{U}$

koşullarını sağlıyor ise $\mathcal{U}$ sınıfına bir cebir denir.

Tanım 1.2.1.16. $\Omega \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{F}$ de Ω üzerinde bir sınıf olmak üzere $\mathcal{F}$ sınıfı

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) ∀ A ∈ $\mathcal{F}$ için $\bar{A} \in \mathcal{F}$
3) $A_n \in \mathcal{F}$ için $n = 1,2,3,\ldots$ için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$
   ($\mathcal{F}$'deki her $\{A_n\}$, $n \in \mathbb{N}$; dizisi için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$)

özelliklerine sahip ise $\mathcal{F}$ sınıfına Ω'da bir σ-cebir denir.

Teorem 1.2.1.1. $\mathcal{F}$, Ω 'da bir σ-cebir olmak üzere

a) $\phi \in \mathcal{F}$
b) $\{A_n\}$, $\mathcal{F}$'de bir dizi $\forall n$ için $A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$
c) $A_i \in \mathcal{F}$, $i = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$
d) $A_i \in \mathcal{F}$, $i = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$
e) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \backslash B = A \cap \bar{B} \in \mathcal{F}$'dir.

Not: Buradan görülmektedir ki bazı cebirler σ-cebir değildir. Ancak Ω sonlu sayıda elemana sahip olduğunda her cebir aynı zamanda sigma cebiridir.

Tanım 1.2.1.17. Ω'daki $\mathcal{F}_1$ ve $\mathcal{F}_2$ sigma cebirleri için $\forall A \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow A \in \mathcal{F}_2$ oluyorsa, yani $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ ise $\mathcal{F}_1$ sigma cebri $\mathcal{F}_2$ sigma cebirinden küçüktür denir.

Teorem 1.2.1.2. $I \neq \emptyset$ indis kümesi, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$ için $\mathcal{F}_\alpha$ bir sigma cebir olmak üzere $\mathcal{F} = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_\alpha$ sınıfı da bir σ-cebiridir.

Teorem 1.2.1.3. $\mathcal{F}$, Ω'da bir sınıf olsun. $\mathcal{F}$'yi kapsayan en küçük bir sigma cebiri vardır. Bu sigma cebiri $\sigma(\mathcal{F})$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.1.18. $\mathbb{R}$'deki açık aralıkların sınıfını $\mathcal{F}_1 = \{(a,b) | \, a < b; \; a,b \in \mathbb{R}\}$ kapsayan en küçük σ-cebirine Borel cebiri denir ve $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_{\mathfrak{R}}$ veya $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Borel cebirine bazen reel sayılardaki açık aralıkların ürettiği σ-cebiri de denir.

Borel cebiri açık aralıkların sınıfını kapsayan en küçük sigma cebir olması nedeniyle açık aralıklar Borel cebirinin elemanlarıdır. Diğer bir ifadeyle Borel cebiri $\mathbb{R}$'de açık aralıklar tarafından üretilen σ-cebirdir.

Tanım 1.2.1.19. (Olasılık Ölçüsü) $\mathcal{F}$ sınıfı, Ω'da bir σ-cebir olsun. $\mathcal{F}$ σ-cebirinde tanımlanmış $P: \mathcal{F} \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$A \longrightarrow P(A)$$

1) $\forall A \in \mathcal{F}$ için $P(A) \geq 0$,
2) $P(\Omega) = 1$,
3) $\forall A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1,2,\ldots;$ $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ için,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

özelliklerine sahipse P fonksiyonuna $\mathcal{F}$ üzerinde bir olasılık ölçüsü denir. $P(A)$ değerine A'nın olasılık ölçüsü veya kısaca A'nın olasılığı denir.

Tanım 1.2.1.20. (Olasılık Uzayı) Ω boş olmayan bir küme, $\mathcal{F}$, Ω'da bir σ – cebiri ve P ise $\mathcal{F}$'de tanımlanmış bir olasılık ölçüsü olmak üzere $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ üçlüsüne olasılık uzayı denir. Olasılık uzayı bir stokastik deneyin matematiksel modelini ifade eder.

Tanım 1.2.1.21. (Rastgele Değişken) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve $\xi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ ise ξ fonksiyonuna bir rastgele değişken denir.

Not: Bir rastgele değişkene ait dağılım fonksiyonunun matematiksel gösterimi ise aşağıdaki tanımda verildiği gibidir.

Tanım 1.2.1.22. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve ξ bir rastgele değişken olmak üzere

$$P_\xi(B) = P\{\xi \in B\}$$

olasılığına ξ rastgele değişkeninin dağılımı denir. $P_\xi(B)$ dağılımının tanım kümesi $\mathfrak{B}$ Borel cebirdir. Bir rastgele değişkenin dağılımında $B = (-\infty, x]$ ve $x \in \mathbb{R}$ alınırsa

$$\mathcal{F}_\xi(x) = P(\xi \in (-\infty, x]) = P(\xi \leq x)$$

fonksiyonuna ξ rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu denir.

Tanım 1.2.1.23. (Kesikli Dağılımlar Sınıfı) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı, $\xi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bir rastgele değişken olsun. ξ'nin değerler kümesi sonlu veya sayılabilir sonsuz ise ξ rastgele değişkenine kesikli rastgele değişken, onun dağılımına kesikli dağılım, dağılım fonksiyonuna kesikli dağılım fonksiyonu denir. Başka bir deyişle kesikli dağılımlar bir elemanlı Borel kümeleri üzerinde tanımlanabilirler. Yani, ξ rastgele değişkeninin değer kümesi $\{x_1, x_2, \ldots\}$ ise bu durumda $P\{\omega: \xi(\omega) = x_i\}$, $i = \overline{1, \infty}$ olasılıklarını vermek, bu rastgele değişkeninin tüm dağılımlarını tanımlamak için yeterlidir.

$P\{\omega: \xi(\omega) = x_i\}$ olasılıklarına ξ kesikli rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu denir ve genellikle p_i sembolü ile gösterilir.

$$p_i = P\{\omega: \xi(\omega) = x_i\}, \ i = \overline{1, \infty}.$$

Olasılık fonksiyonu tanımından da görüldüğü gibi aşağıdaki iki koşulu sağlamalıdır.

1) $\forall i = 1,2, \ldots$ için $p_i \geq 0$ olmalıdır.
2) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ olmalıdır.

1) ve 2) koşullarını sağlayan $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pozitif sayıları için olasılık fonksiyonu $\{p_i\}$ sayıları ile verilmiş olan bir ξ kesikli rastgele değişkeni inşa etmek her zaman mümkündür.

$\forall B \in \mathfrak{B}$ için $P_\xi(B) \equiv P\{\omega: \xi(\omega) \in B\} = \sum_{\{i: x_i \in B\}} p_i \Rightarrow B = (-\infty, x], x \in \mathbb{R}$

kabul edilirse, $\mathcal{F}_\xi(x) = \sum_{\{i: x_i \leq x\}} p_i$ biçiminde kesikli rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu yazılabilir.

Not: Başka bir deyişle, kesikli rastgele değişken için olasılık modelini inşa etmek, bu rastgele değişkeninin değerlerini ve bu değerlere uygun gelen olasılık fonksiyonlarını tanımlamak anlamına gelir.

Tanım 1.2.1.24. (Mutlak Sürekli Dağılımlar Sınıfı)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere $\xi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_\xi(x)$ dağılım fonksiyonu ve $\mathcal{L}(\xi)$, ξ rastgele değişkeninin değer kümesi olsun.

1) $\exists\ \Delta = (\alpha, \beta)$: $\Delta \subseteq \mathcal{L}(\xi)$ olsun.

2) Öyle bir $\exists\ f(x) \geq 0$ olsun ki, $\forall x \in \mathbb{R}$ için ξ'nin dağılım fonksiyonu

$\mathcal{F}_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ şeklinde yazılabilsin.

Yukardaki iki koşul sağlandığında ξ rastgele değişkenine sürekli rastgele değişken, onun dağılımına mutlak sürekli dağılım ve dağılım fonksiyonuna ise mutlak sürekli dağılım foksiyonu denir.

Not: Tezde kullanılacak bazı sürekli dağılımlar aşağıda belirtilmektedir.

Tanım 1.2.1.25. ξ rastgele değişkeni λ parametreli üstel dağılıma sahip olduğunda olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0,\ \lambda > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

olur. ξ rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

dır.

Tanım 1.2.1.26. ξ rastgele değişkeni (μ, σ^2) parametreli normal dağılıma sahip ise olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ , x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

dır. $\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2}\, du$ integralini almak mümkün olmadığından (μ, σ^2) parametreli normal dağılımın dağılım fonksiyonu

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

şeklinde kalır.

Özellikle $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ olduğunda ξ rastgele değişkeni standart normal dağılıma sahiptir ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_\xi(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$$

dır.

ξ rastgele değişkeninin standart normal dağılım fonksiyonu

$$F_{\xi}(x) \equiv \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

dır.

Tanım 1.2.1.27. ξ rastgele değişkeni (λ_1, λ_2) parametreli iki taraflı üstel (Laplace) dağılımına sahip olduğunda dağılım foksiyonu;

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{\lambda_2 x}, & x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x}, & x > 0 \end{cases}$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{\lambda_2 x}, & x \leq 0 \\ \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x}, & x > 0 \end{cases}$$

dır. Özel olarak $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ alınırsa;

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2} e^{\lambda x}, & x \leq 0 \\ \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}, \ x \in \mathbb{R}$$

burada λ_1, λ_2 ve $\lambda > 0$ dır.

Tanım 1.2.1.28. ξ ve η bağımsız rastgele değişkenleri [0,1] aralığında sürekli düzgün dağılıma sahip olduklarında $\zeta = \eta + \xi$ rastgele değişkeni [0,2] aralığında üçgensel dağılıma sahip olur ve ζ rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{\zeta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x \in (0,1] \\ 2 - x, & x \in (1,2) \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$$

dır.

Ayrıca ζ rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{\zeta}(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{2}\,, & x \in (0,1] \\ 1 - \dfrac{2-x^2}{2}\,, & x \in (1,2) \\ 1\,, & x \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.2.1.29. (Lebesgue İntegrali) $(\Omega, \mathcal{F}, P(.))$ olasılık uzayında reel değerli $\xi(\omega)$ rastgele değişkeni ve $g(x)$ Borel fonksiyonu verildiğinde

$$\int g(\xi(\omega))\ P(d\omega) \tag{1}$$

integrali gözönüne alınsın, bu integral bir Lebesgue integraldir. $\xi(\omega)$ rastgele değişkeni reel değerli olduğundan (1) formülünde $\xi(\omega) = x \in \mathbb{R}$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} P(d\omega) &= P\{\omega : \xi(\omega) \in [x, x + dx)\} \\ &= P\{\omega : x \leq \xi(\omega) \leq x + dx\} \\ &= P\{\omega : \xi(\omega) \leq x + dx\} - P\{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \\ &= \mathcal{F}_{\xi}(x + dx) - \mathcal{F}_{\xi}(x) = d\mathcal{F}_{\xi}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\mathcal{F}_{\xi}(x), \xi(\omega)$ rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonudur. Buna göre (1) integrali,

$$\int_{\Omega} g\big(\xi(\omega)\big) P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) d\,\mathcal{F}_{\xi}(x)$$

şeklini alır (Nasırova vd.,2009).

Tanım 1.2.1.30. (Beklenen Değer) $(\Omega, \mathcal{F}, P(.))$ olasılık uzayında reel değer alan bir $\xi(\omega)$ rastgele değişkeni verildiğinde eğer $\int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega)$ integrali varsa, bu integralin değerine $\xi(\omega)$ rastgele değişkeninin beklenen değeri denir ve

$$E\big(\xi(\omega)\big) = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega)$$

şeklinde ifade edilir (Nasırova vd.,2009). Özel halde beklenen değer aşağıdaki gibidir:

ξ bir rastgele değişken ve $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ için $\{x: g(x) \in B\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ özelliğine sahip bir foksiyon olmak üzere, $E(g(\xi))$ değerine $g(\xi)$ fonksiyonunun beklenen değeri denir. Kesikli ve sürekli rastgele değişken için aşağıdaki gibidir:

1. ξ kesikli bir rastgele değişken ve

$$\sum_x |g(x)| f(x) < \infty$$

olduğunda,

$$E\big(g(\xi)\big) = \sum_x g(x) f(x)$$

dır.

2. ξ sürekli bir rastgele değişken ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) < \infty$$

olduğunda,

$$E\big(g(\xi)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

dır.

Beklenen Değerin Özellikleri:

1. $P\{\omega: \xi(\omega) = c\} = 1$ ise $E\big(\omega: \xi(\omega)\big) = c$ dir.
2. Eğer $\xi(\omega) \geq 0$ ve $E\big(\xi(\omega)\big) = 0$ ise h.h.h.y. $\xi(\omega) = 0$ dır.
3. $a \leq \xi(\omega) \leq b$ ise a ve b birer sabit olmak üzere, $a \leq E(\xi(\omega)) \leq b$ olur.
4. c bir sabit olmak üzere, $E\big(c\xi(\omega)\big) = cE(\xi(\omega))$ olur.
5. a ve b birer sabit olmak üzere, $E(a\xi(\omega) + b) = aE\big(\xi(\omega)\big) + b$ olur.
6. $\xi(\omega)$ ve $\eta(\omega)$ beklenen değerleri mevcut iki rastgele değişken ise toplamlarının da beklenen değeri vardır ve bu beklenen değer, beklenen değerlerin toplamına eşittir. Yani,

$E\big(\xi(\omega)+\eta(\omega)\big)=E\big(\xi(\omega)\big)+E(\eta(\omega))$ dır.

7. Herhangi bir A olayının olasılığı, bu olayın göstergesinin (indikatörünün) beklenen değerine eşittir. Yani $P(A)=E(I_A(\omega))$ dır (Nasırova vd., 2009).

Özel halde beklenen değerin özellikleri aşağıda verildiği gibi ifade edilir:

1) a ve b sabitler ve ξ rastgele değişken ise $E(a\xi+b)=aE(\xi)+b$ dır, özel olarak
   a. $a=0$ ise $E(b)=b$,
   b. $a=1$ ise $E(\xi+b)=E(\xi)+b$ dir. Yani bir rastgele değişkenin bir sabitle toplamının beklenen değeri, rastgele değişkenin beklenen değeri ile aynı sabitin toplamına eşittir.
   c. $b=0$ ise $E(a\xi)=aE(\xi)$ dir. Yani bir rastgele değişkenin sabitle çarpımının beklenen değeri, sabit değerle rastgele değişkenin beklenen değerinin çarpımına eşittir.
   d. $a=1, b=-E(\xi)=-\mu$ ise $E[\xi-E(\xi)]=E(\xi-\mu)=0$ dır. Yani ξ rastgele değişkeninin kendi ortalamasından sapmasının ortalaması sıfırdır. (ξ,μ) iki boyutlu rastgele değişken ve $\zeta=g(\xi,\mu)$ olarak alınsın.

   d_1. (ξ,μ) kesikli rastgele değişken ve $p(x,y)=P\big(\xi=x_i,\ \mu=y_j\big)$,

   $i=1,2,\dots m;\ \ j=1,2,\dots,n$ ise

$$E(\zeta)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}g\big(x_i,y_j\big)p\big(x_i,y_j\big)$$

   d_2. (ξ,μ) sürekli rastgele değişken ve olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x,y)$ ise

$$E(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

dır.

2) Beklenen değerleri $E(\xi)$ ve $E(\eta)$ olan ξ ve η rastgele değişkenlerinin ortak olasılık foksiyonu $f\big(x_i,y_j\big)$; $i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ olsun. Bu takdirde
   $E(\xi+\eta)=E(\xi)+E(\eta)$
   dır. Yani iki rastgele değişkenin toplamının beklenen değeri onların beklenen değerlerinin toplamına eşittir.

3) Beklenen değerleri $E(\xi)$ ve $E(\eta)$ olan ξ ve η bağımsız rastgele değişkenlerinin ortak olasılık foksiyonu $f(x_i, y_j)$; $i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, n$ olsun. Bu takdirde

   $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$

   dır. Yani bağımsız rastgele değişkenin çarpımının beklenen değeri, beklenen değerlerin çarpımına eşittir (Akdeniz, 2010).

Tanım 1.2.1.31. (n. Mutlak Moment) $(\Omega, \mathcal{F}, P(.))$ olasılık uzayında reel değer alan bir ξ rastgele değişkeni verildiğinde, $E(|\xi|^n) < \infty$ ise $E(|\xi|^n)$ sayısına ξ rastgele değişkeninin n. mertebeden mutlak momenti denir.

Tanım 1.2.1.32. (n. Başlangıç Momenti) $(\Omega, \mathcal{F}, P(.))$ olasılık uzayında reel değer alan bir ξ rastgele değişkeni verildiğinde, $E(|\xi|^n) < \infty$ ise $\alpha_n = E(\xi)^n$ sayısına ξ rastgele değişkeninin n. mertebeden başlangıç momenti denir.

Tanım 1.2.1.33. (n. Merkezi Moment) $(\Omega, \mathcal{F}, P(.))$ olasılık uzayında reel değer alan bir ξ rastgele değişkeni verildiğinde, $E(|\xi|^n) < \infty$ ise $\mu_n = E(\xi - a)^n, n \geq 2$ sayısına ξ rastgele değişkeninin merkezi momenti denir. Burada $a = E(\xi)$ 'dır.

Tanım 1.2.1.34. (Faktöriyel veya Çarpımsal Moment) $(\Omega, \mathcal{F}, P(.))$ olasılık uzayında reel değer alan bir ξ rastgele değişkeni verildiğinde

$E(|\xi|^n) < \infty$ ise $f_n = E[\xi(\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-n+1)]\,, n \geq 1,$

sayısına rastgele değişkenin n. mertebeden faktöriyel (çarpımsal) momenti denir.

Tanım 1.2.1.35. $(\Omega, \mathcal{F}, P(.))$ olasılık uzayında reel değer alan bir ξ rastgele değişkeni verildiğinde $\mathrm{V}(\xi) = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2) - [E(\xi)]^2$ sayısına ξ rastgele değişkeninin varyansı denir.

Bir başka deyişle varyans, rastgele değişkenin aldığı değerlerin beklenen değerden sapmasının derecesini gösterir.

Varyansın Özellikleri:

1. $\mathrm{V}(\xi) \geq 0$ 'dır.
2. $\mathrm{V}(\xi) = 0$ yanlız ve yanlız $\xi = c$ (hemen hemen her yerde) olduğunda olur. Burada c bir sabittir.
3. $\mathrm{V}(c\xi) = c^2\mathrm{V}(\xi)$ 'dır.
4. ξ ve η bağımsız rastgele değişkenleri ise $\mathrm{V}(\xi \pm \eta) = \mathrm{V}(\xi) + \mathrm{V}(\eta)$

Tanım 1.2.1.36. $(\Omega, \mathcal{F}, P(.))$ olasılık uzayında reel değer alan bir ξ rastgele değişkeni verildiğinde, $\mu_3 = E[\xi - E(\xi)]^3$, 3. merkezi moment ve $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}(\xi)}$ standart sapma olmak üzere $\alpha = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ sayısına çarpıklık (skewness), asimetrilik veya eğiklik ölçüsü denir.

Tanım 1.2.1.37. $(\Omega, \mathcal{F}, P(.))$ olasılık uzayında reel değer alan bir ξ rastgele değişkeni verildiğinde, $\mu_4 = E[\xi - E(\xi)]^4$ 4. merkezi moment ve $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}(\xi)}$ standart sapma olmak üzere $\beta = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ sayısına rastgele değişkenin basıklık (kurtosis), diklik veya sivrilik katsayısı denir.

Tanım 1.2.1.38. Üzerinde çalışılan tüm gruba ya da sonuçların genelleştirilebileceği gruba kitle (yığın) denir.

Tanım 1.2.1.39. Bir kitlenin belli bir özelliğini incelemek üzere bu kitleden rastgele seçilen birimler topluluğuna örneklem (örnek) denir.

Tanım 1.2.1.40. ξ bir rastgele değişken olmak üzere aldığı değerler $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ ile gösterilirse örneklem ortalaması:

$$\bar{\xi} = \frac{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)}{n}$$

olur.

Tanım 1.2.1.41. (Merkezi Limit Teoremi) $(\Omega, \Im, P(.))$ olasılık uzayında aynı dağılıma sahip $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ bağımsız rastgele değişkenleri verilsin. $\Phi(x)$ ile $(0,1)$ parametreli standart normal dağılım fonksiyonu ve $E(\xi_k) = a_k$, $\mathrm{V}(\xi_k) = \sigma^2$ olmak üzere

$$\zeta_k = \frac{S_n - \sum_{k=1}^{n} a_k}{\sigma/\sqrt{n}} \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

dır.

Tanım 1.2.1.42. (Merkezi Limit Teoremi) $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ ler μ ortalamalı ve σ^2 varyanslı aynı olasılık dağılımına sahip bağımsız rastgele değişkenler olsun. $\bar{\xi}$ rastgele değişkeni $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ 'leri aritmetik ortalaması olmak üzere $\eta = \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ile tanımlanan η rastgele değişkeni n'nin büyük değerleri için $(n > 30)$ yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir. Burada n örneklem hacmidir.

Tanım 1.2.1.43. Bilinmeyen bir kitle parametresini tahmin etmek için kullanılan örneklem istatistiğine tahmin edici denir. Bir tahmin edicinin bir tek değerine ise nokta tahmin denir.

Tanım 1.2.1.44. Kitle sonsuz elemanlı olduğunda ve (μ, σ^2) parametreli normal dağılımlı $(N(\mu, \sigma^2))$ bir kitlenin varyansı bilindiğinde kitle ortalaması μ için $1-\alpha$ güven düzeyli güven aralığı:

$$\bar{\xi} - \eta_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{\xi} + \eta_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

dır. Burada n örneklem hacmidir.

Tanım 1.2.1.45. Kitle sonlu elemanlı olduğunda ve (μ, σ^2) parametreli normal dağılımlı $(N(\mu, \sigma^2))$ bir kitlenin varyansı bilindiğinde kitle ortalaması μ için $1-\alpha$ güven düzeyli güven aralığı:

$$\bar{\xi} - \eta_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{n} . \frac{N-n}{N-1}} < \mu < \bar{\xi} + \eta_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{n} . \frac{N-n}{N-1}}$$

dır. Burada $\frac{n}{N} < 0{,}05$ olduğunda $\sqrt{\frac{\sigma}{n} . \frac{N-n}{N-1}}$ terimi güven sınırlarını çok az etkilemektedir. Ayrıca burada n örneklem hacmi, N kitlenin hacmidir.

Tanım 1.2.1.46. (Olasılığa Göre Yakınsaklık)

Her $\varepsilon > 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\omega: |\xi_n - \xi_0| \geq \varepsilon\} = 0$ olduğunda "ξ_n rastgele değişken dizisi ξ_0 rastgele değişkenine olasılığa göre yakınsar" denir. Kısaca $n \to \infty$ iken $\xi_n \xrightarrow{p} \xi_0$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.1.47. (Ortalamaya Göre Yakınsaklık)

Her $r > 0$ için $E(|\xi_n|^r) < \infty$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} E(|\xi_n - \xi|^r) = 0$$

ise, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rastgele değişken dizisi, ξ rastgele değişkenine "r. mertebeden orta manada yakınsak"tır denir. Özel olarak $\lim\limits_{n\to\infty} E(|\xi_n - \xi|^2) = 0$ ise, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rastgele değişken dizisi, ξ rastgele değişkenine "Ortalama karesel manada yakınsak"tır denir ve $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, \xi_n = \xi$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.1.48. (Dağılıma Göre Yakınsaklık)

$F(x)$'in sürekli olduğu noktalar için $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ ise $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rastgele değişken dizisi, ξ rastgele değişkenine "Dağılıma göre yakınsak"tır denir ve $\xi_n \xrightarrow{d} \xi, n \to \infty$ şeklinde yazılır. Literatürde bu yakınsaklık çeşidi, zayıf yakınsaklık olarak da bilinmektedir.

Tanım 1.2.1.49. (1 Olasılığı İle Yakınsaklık) Ölçüsü sıfır olan bir kümenin dışında $P\{\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi\} = 1$ veya $P\{\lim_{n\to\infty} \xi_n \neq \xi\} = 0$ ise, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rastgele değişken dizisi, ξ rastgele değişkenine "1 olasılığı ile yakınsak"tır denir ve $\xi_n \xrightarrow{1} \xi,\ n \to \infty$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.1.50. $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ olasılık uzayında $\{\xi_n, n = 1,2,\ldots\}$ rastgele değişkenler dizisi verilmiş olsun. Bu dizinin yardımıyla aşağıdaki rastgele değişkenler dizisi ele alınsın

$$\frac{(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) - E[\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n]}{n}\ ; n = \overline{1,\infty} \tag{2}$$

Eğer (2) dizisi, olasılığa göre sıfıra yakınsıyorsa $\{\xi_n, n = 1,2,\ldots\}$ dizisi "büyük sayılar kanununa uyuyor" denir.

Eğer (2) dizisi, 1 olasılığı ile sıfıra yakınsıyorsa $\{\xi_n, n = 1,2,\ldots\}$ dizisi "güçlendirmiş büyük sayılar kanununa uyuyor" denir. Bu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$P\{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - E(\xi_k) = 0\} = 1.$$

1.2.2. Stokastik Süreçler

Tanım 1.2.2.1. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve $T \subset \mathbb{R}$ keyfi küme olsun.

$$X_t: \Omega \times T \to \mathbb{R},\ \ w \in \Omega, t \in T$$

için $\{(\mathrm{w}, \mathrm{t}): X_t \in \mathrm{B}\} \in \sigma(\mathcal{F} \times B_T)$, $B \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{R}}$ koşulu sağlasın. Burada B_T ; $\mathfrak{B}_{\mathfrak{R}}$ uygun olarak T ve $\mathfrak{R}$'nin alt kümeleri üzerinde tanımlanmış Borel cebiridir, $\sigma(\mathcal{F} \times B_T)$, $\mathcal{F}$ ve $\mathfrak{B}_{\mathfrak{R}}$ sigma cebirlerinin kartezyen çarpımını içeren en küçük σ-cebirdir. Bu şekilde tanımlanmış X_t fonksiyonuna "rastgele fonksiyon" denir.

Eğer $T = \mathbb{R}^+$ ise yani t parametresi zaman rolüne sahip ise bu durumda rastgele fonksiyona “stokastik süreç” denir. Bu tanımdan da görünüyor ki rastgele değişkenden farklı olarak stokastik süreç hem de zamana bağlı bir fonksiyondur.

Not: Bir stokastik süreç $X(t,w)$, $X_t(w)$, X_t, $X(t)$ notasyonlarının herhangi biriyle gösterilebilir.

Buradan görülüyor ki sabit bir $t_0 \in T$ zamanı için $X(t_0,\cdot): (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyondur bu da $X(t_0,w)$’nın bir rastgele değişken olduğunu gösterir. Buradan görülür ki stokastik süreç aslında rastgele değişkenlerin bir ailesidir.

Eğer bir $w_0 \in \Omega$ sabitlenirse $X(\cdot,w_0): T \to \mathbb{R}$ zamanın bir fonksiyonu olur. Rastgele olmayan bir fonksiyon, bir stokastik sürecin örnek yolu, gerçekleşmesi veya yörüngesi olarak adlandırılır.

Rastgele değişkenlerde olduğu gibi stokastik süreçlerde de dağılım ve dağılım fonksiyonu önemli rol oynar.

Tanım 1.2.2.2. $X(w,t)$ bir stokastik süreç olsun. $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ dizisi ve $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{R}}$ Borel kümeleri ele alınsın. Bu takdirde,

$$P_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(B_1, B_2, \ldots, B_n) = P\{w: X(w,t_1) \in B_1, X(w,t_2) \in B_2, \ldots, X(w,t_n) \in B_n)\}$$

olasılıklarına $X(w,t)$ stokastik sürecinin n boyutlu dağılımları denir.

Yukarıdaki tanımda $B_k = (-\infty, x_k]$, $x_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1,n}$ olsun. Bu takdirde

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{w: X(w,t_1) \le x_1, X(w,t_2) \le x_2, \ldots, X(w,t_n) \le x_n)\}$$

fonksiyonuna $X(w,t)$ stokastik sürecinin n boyutlu dağılım fonksiyonu denir.

1.2.3. Stokastik Süreçlerin Bazı Karakteristikleri

Tanım 1.2.3.1. Verilmiş bir X_t süreci için $\mu_X: T \to \mathbb{R}, \forall\, t \in T$ olmak üzere $\mu_X(t) = E[X_t]$ olarak tanımlanan fonksiyona X_t’nin beklenen değer fonksiyonu denir.

Tanım 1.2.3.2. Verilmiş bir X_t süreci için $C_X: T \times T \to \mathbb{R}, \forall\, t, s \in T$ olmak üzere

$$C_X(t,s) = cov(X_t, X_s) = E[\big(X_t - \mu_X(t)\big)\big(X_s - \mu_X(s)\big)]$$

olarak tanımlanan fonksiyona X_t’nin kovaryans fonksiyonu denir.

Eğer $t = s$ ise kovaryans fonksiyonu X_t'nin varyans fonksiyonuna dönüşür.

Tanım 1.2.3.3. Bir $X = (X_t, t \in T \subset \mathbb{R})$ süreci verilsin. Eğer $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ 'lerin her bir seçimi ve $t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h \in T$ olacak şekilde $\forall h$ için ;

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \overset{d}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$$

oluyorsa X sürecine kesin durağan süreç denir. Burada $\overset{d}{=}$ sembolü iki rastgele vektörün dağılım fonksiyonlarının eşit olması anlamına gelir.

Tanım 1.2.3.4. Bir $X = (X_t, t \in T \subset \mathbb{R})$ süreci verilsin. Eğer $\forall\, t, s \in T$ ve $\forall\, t + h\,, s + h \in T$ olacak şekilde $\forall\, h$ için

$$X_t - X_s \overset{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h}$$

oluyorsa X sürecine durağan artışlara sahiptir denir.

Tanım 1.2.3.5. Bir $X = (X_t, t \in T \subset \mathbb{R})$ süreci verilsin. Eğer $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ olacak şekilde bir $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ 'lerin her bir seçimi

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

rastgele değişkenleri bağımsızlarsa X sürecine bağımsız artışlara sahip süreç denir.

1.2.4. Wiener Süreci

Tanım 1.2.4.1. Bir $W(t, w): [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci eğer aşağıdaki koşulları sağlıyorsa W sürecine Brown hareketi ya da Wiener süreci denir.

1) $P(w: W(0, w) = 0) = 1$ dir. Diğer bir deyişle bir olasılıkla Wiener süreci sıfır noktasında sıfır değerini alır.
2) Durağan ve bağımsız artışlara sahiptir.
3) $\forall\, t > 0$ için $W(t, w)$ Wiener süreci, $(0, t)$ parametreli normal dağılıma sahiptir.
4) $P(w: W(\cdot, w)\ \text{sürekli}) = 1$ dir. Bir başka deyişle Wiener sürecinin hemen her gerçekleşmesi süreklidir.

Teorem 1.2.4.1. $\forall\, 0 < s < t$ için $W_t - W_s$ artışı $(0, t - s)$ parametreli normal dağılıma $(N(0, t - s))$ sahiptir.

Teorem 1.2.4.2. $W = (W_t, t \in [0,\infty))$ Wiener sürecinin beklenen değer ve varyans fonksiyonu

$$E(W_t) = 0 \text{ ve } Var(W_t) = t$$

dir.

Teorem 1.2.4.3. $W = (W_t, t \in [0,\infty))$ Wiener sürecinin kovaryans fonksiyonu

$$C_W(s,t) = \min(s,t)$$

dir.

Teorem 1.2.4.4. Wiener sürecinin hemen her gerçekleşmesi hiç bir yerde diferansiyellenemezdir. Matematiksel ifadeyle ;

$$P\left(w: \lim_{t \to t_0} sup \frac{W_t - W_{t_0}}{t - t_0} = \infty\right) = 1$$

dır.

1.3. DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Diferansiyel denklemler ilk defa İngiliz fizikçi Isaac Newton tarafından 17. yüzyılın sonlarında yazılan ve 1744 yılında yayınlanan “Methodus fluxionum et serierum infinitarum” isimli çalışma ile kullanılmaya başlanmıştır. Isaac Newton’ın bu yıllarda “fluxional equations (değişken denklemler)” olarak adlandırdığı üç diferansiyel denklemi ve çözümlerini anlattığı çalışmasından (Newton, 1744) kısa süre sonra başta Avrupalı matematikçilerin benimsedikleri “diferansiyel yöntem” çalışılmaya başlanmıştır. Bu çalışmalarla literatüre kazandırılan diferansiyel denklem kavramı günümüzde bir çok çeşitleriyle mühendislik, fizik, ekonomi ve biyoloji gibi alanlardaki olayların modellenmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

1.3.1. Diferansiyel Denklemler ile İlgili Bazı Temel Kavramlar

Tanım 1.3.1.1. Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin bir veya birden fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denkleme diferansiyel (diferensiyel) denklem adı verilir (Coşkun, 2002).

$y, y', \dots, y^{(n)}$ ifadeleri y fonksiyonunun bağımlı olduğu bağımsız değişkene göre sırasıyla birinci, ikinci,…, n-inci türevlerini göstermek için kullanılır. Bahsedilen bağımsız değişken x ise

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

anlamına gelir. Farklı kaynaklarda, özellikle bağımsız değişken olarak t kullanıldığında türevler nokta kullanılarak $\dot{y},\ \ddot{y}, \dots$ şeklinde de gösterilmektedir.

Tanım 1.3.1.2. Bir diferansiyel denklemin mertebesi denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin mertebesi olarak alınır.

x reel (gerçel) değişkeninin bir bilinmeyen fonksiyonu $y = y(x)$ olmak üzere n. mertebeden bir diferansiyel denklem

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

şeklinde gösterilebilir.

Diferansiyel denklemler çeşitli özellikleri göz önüne alınarak birçok farklı sınıfa ayrılmaktadırlar. Örneğin içerdikleri türevlere göre “adi” ve “kısmi” şeklinde iki ayrı grup altında sınıflandırılır ve incelenirler.

Tanım 1.3.1.3. Bir diferansiyel denklem tek değişkenli fonksiyonların türevlerini içeriyorsa "Adi Diferansiyel Denklem" olarak adlandırılır.

Dolayısıyla $y = y(x)$ şeklinde yalnızca x bağımsız değişkenine bağlı olan bilinmeyen fonksiyonları ve bu fonksiyonların türevlerini içeren

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3$$

denklemi bir adi diferansiyel denklem örneğidir.

Tanım 1.3.1.4. Bir diferansiyel denklem içinde en az iki bağımsız ve bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre farklı mertebelerden türevlerini bulunduruyorsa "kısmi diferansiyel denklem" olarak adlandırılır.

Bu durumda $y = y(x, t)$ şeklinde x ve t bağımsız değişkenlerinin bir fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevlerini içeren

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 5\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

denklemi bir kısmi diferansiyel denklem örneği olarak gösterilebilir (Bronson, 1994). Kısmi diferansiyel denklemlerde farklı bağımlı değişkenlere göre türevler için kullanılan ∂ gösterimine dikkat edilmelidir.

Diferansiyel denklemler bilinmeyenlerinin birbirleri ve katsayıları ile durumlarına göre "doğrusal (lineer)" ve "doğrusal olmayan (nonlineer)" diferansiyel denklemler olarak da iki sınıfa ayrılır.

Tanım 1.3.1.5. $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ şeklinde verilen diferansiyel denklem x değişkeni ve ona bağlı y fonksiyonu ile bu fonksiyonun türevlerinin bir polinomu şeklinde verilmiş ise doğrusaldır. $a_0, a_1, \dots, a_n, f$ fonksiyonları bir I aralığı üzerinde tanımlanış fonksiyonlar olmak üzere

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

şeklinde verilen diferansiyel denklem bir "doğrusal (lineer)" diferansiyel denklemdir (Dernek ve Dernek, 2001). Burada $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$ fonksiyonları sıfır ve sıfırdan farklı, sabit veya sabit olmayan, doğrusal veya doğrusal olmayan fonksiyonlar olabilir. Diferansiyel denklemin doğrusal olması yalnızca $y(x)$ ve türevlerinin durumlarına bağlıdır.

O halde

$$y' + 3y = 3x$$

eşitliği ile verilen diferansiyel denklem bir doğrusal diferansiyel denklemdir. Denklemin yalnızca x değişkeni ve bu değişkene bağımlı y fonksiyonu ile bu fonksiyonun türevini içerdiği göz önünde bulundurularak doğrusal adi diferansiyel denklem olarak da belirtmek mümkündür. Ancak aksi belirtilmediği sürece bu çalışma boyunca adi diferansiyel denklemler kavramından bahsederken diferansiyel denklem kavramı kullanılacaktır.

Tanım 1.3.1.6. Bir diferansiyel denklem $a_0, a_1, \dots, a_n, f$ fonksiyonları bir I aralığı üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar olmak üzere

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

formunda yazılamıyorsa "doğrusal olmayan (nonlineer)" bir diferansiyel denklemdir.

Örneğin

$$y' + 3y^2 = 3x$$

şeklinde verilen diferansiyel denklem doğrusal olmayan bir diferansiyel denklemdir. Bilinmeyen fonksiyonun karesi veya daha büyük kuvvetleri ile bu fonksiyonun türevleri ile kendinin sıfırdan farklı kuvvetlerinin çarpımını içeren denklemler en sık görülen doğrusal olmayan diferansiyel denklem örnekleridir.

Lineer diferansiyel denklemler de çözümleri için izlenecek yolun belirlenebilmesi açısından "homojen" ve "homojen olmayan" diferansiyel denklemler olarak sınıflandırılmaktadırlar.

Tanım 1.3.1.7. n. mertebeden bir lineer diferansiyel denklem $a_0, a_1, \dots, a_n, f$ fonksiyonları bir I aralığı üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar olmak üzere

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

biçiminde verilsin. Burada $f(x)$ ve $a_j(x), j = 0,1, \dots, n$ katsayıları yalnızca x değişkenine bağlıdır. Dolayısıyla y fonksiyonuna veya y'nin herhangi bir türevine bağlı değildir. Eğer burada $f(x) = 0$ ise bu denkleme "homojendir" denir; aksi takdirde denklem "homojen olmayan" şeklinde sınıflandırılır (Bronson, 1994).

O halde

$$y'' + y' - 3y = 0$$

şeklinde verilen denklem bir homojen ikinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklemdir. Aksi durumda

$$y'' + y' - 3y = 2x$$

şeklinde verilen denklem ise bir homojen olmayan ikinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklemdir.

Benzer şekilde denklemler katsayılarının durumlarına göre sabit katsayılı ve değişken katsayılı olarak da sınıflandırılır. Diferansiyel denklemlerin birçok çözüm yöntemleri bulunmaktadır ve bir diferansiyel denklemin hangi şekilde çözülebileceğini bulmak için öncelikle diferansiyel denklemin ait olduğu sınıfı belirlemek gerekmektedir. Hangi sınıfa ait olduğu belirlenen diferansiyel denklem, bu sınıfa uygun çözüm yöntemleri kullanılarak çözülür.

Tanım 1.3.1.8. Bir x bağımsız değişkenine bağlı y bilinmeyen fonksiyonunu içeren bir diferansiyel denklemin herhangi I aralığı üzerinde bir çözümü, I aralığındaki her x için diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayan bir y fonksiyonudur (Erkıp, 1992).

Bir diferansiyel denklemin "özel çözümü" herhangi bir çözümdür. Bir diferansiyel denklemin genel çözümü tüm çözümlerin kümesidir.

Not: n. mertebeden bir diferansiyel denklemin genel çözümü sabitlere bağlıdır ve tanımlı olduğu bölgede farklı sabitler için farklı fonksiyonları temsil edebilir. Diferansiyel denklemin özel çözümü ise genel çözümlerden diferansiyel denklem ile verilen diğer koşulları da sağlayan fonksiyondur.

Örneğin

$$y' = y + 2$$

diferansiyel denkleminin genel çözümü $y(x) = e^x + c, c\ sabit$ şeklindedir ve $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^x + 2$ ve $y_3(x) = e^x - 2$ fonksiyonlarının tamamı bu denklemin çözümüdür. Bu denkleme ait bir "özel çözüm" belirlenebilmesi için "yardımcı koşullara" ihtiyaç duyulmaktadır.

Örnek 1.3.1.1. $yy' = e^x$ diferansiyel denkleminin çözümü incelensin.

Çözüme ait herhangi bir koşul verilmediğine göre ancak genel çözüme ulaşılabilir. Bunun için denklem şu şekilde yeniden yazılsın:

$$y\frac{dy}{dx} = e^x.$$

Bu durumda denklem şu hale gelecektir:

$$ydy = e^x dx.$$

Her iki tarafın integrali alınırsa:

$$\int ydy = \int e^x \, dx.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = e^x + c$$

$$\Rightarrow y^2 = 2e^x + 2c$$

elde edilir.

O halde verilen denklemin genel çözümü $k = 2c$ iken $y^2 = 2e^x + k$ olarak bulunur.

Diferansiyel denklemlerin özel çözümlerinin bulunması için denklemlerin yanı sıra bazı koşulların da belirtildiği problemler "Başlangıç Değer Problemleri" ve "Sınır Değer Problemleri" olarak ikiye ayrılırlar.

Tanım 1.3.1.9. Bir diferansiyel denklem, bilinmeyen fonksiyon ve türevleri üzerinde tümü bağımsız değişkenin aynı değerinde en yüksek mertebeden türevin mertebesi sayısınca verilen koşullar ile bir başlangıç değer problemi oluşturur. Burada yardımcı koşullar "başlangıç koşulları" olarak adlandırılır.

Örneğin

$$y'' + 3y' = e^x; y(\pi) = 1, y'(\pi) = 2$$

bir başlangıç değer problemidir.

Tanım 1.3.1.10. Bir diferansiyel denkleme ek olarak verilen yardımcı koşullar bağımsız değişkenin birden fazla değerinde verilirse bu bir sınır değer problemi oluşturur ve koşullar da "sınır koşulları" adını alır. Örneğin

$$y'' + 3y' = e^x; y(0) = 1, y(1) = 1$$

bir sınır değer problemidir.

Örnek 1.3.1.2. $yy' = e^x, y(0) = 1$ başlangıç değer problem ele alınsın.

Bu başlangıç değer problemine ait diferansiyel denklemin yukarıdaki denklemle aynı olduğuna dikkat edilmelidir. Dolayısıyla denklemin genel çözümü $y^2 = 2e^x + k$ şeklindedir. Denklemin $y(0) = 1$ başlangıç koşulunu da sağlayan özel çözümü de bulunmalıdır. Bunun için başlangıç koşulu genel çözümde dikkate alınırsa:

$$y^2 = 2e^x + k \Rightarrow y = \sqrt{2e^x + k}$$

olduğundan

$$y(0) = \sqrt{2e^0 + k} = \sqrt{k+2} = 1$$

olmalıdır. Bu durumda $k = -1$ olarak elde edilir ve başlangıç değer probleminin özel çözümü:

$$y(x) = \sqrt{2e^x - 1}$$

olarak bulunur.

1.3.2. Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

Her ne kadar diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri üzerine birçok yöntem mevcutsa da, uygulamada kullanılan diferansiyel denklemlerin ve diferansiyel denklem sistemlerinin bu şekildeki kesin çözümlerine ulaşmak her zaman mümkün olmamaktadır. Böyle durumlarda sayısal (nümerik) yöntemlerin kullanılması ile denklemlerin sayısal çözümlerinin incelenmesi yoluna gidilmesi mümkündür. Özellikle günümüzde gelişen bilgisayar teknolojisi ile birlikte sayısal çözümler için gereken hesap yükü hafiflerken bu çözümlerin hassasiyeti de gitgide artmaktadır.

$$Gerçek\ Değer = Yaklaşık\ Değer + Hata$$

Sayısal yöntemlerde elde edilen sayısal çözüm, denklemin analitik çözümünün belli bir noktadaki sayısal değeri veya bu değere yakın bir değerdir. Sayısal çözümün hesaplanmasında hesaplama, kesme, yuvarlatma gibi nedenlerle oluşan hatalar elde edilen sayısal değerin çözümün gerçek değerinden uzaklaşmasına yol açabilmektedir.

1.3.2.1. Runge-Kutta Metodu

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için geliştirilmiş yöntemlerden birisi de Runge-Kutta metodudur. Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlere uygulanabilen

Runge-Kutta metodu 1900'lü yıllarda Alman matematikçiler C. Runge ve M. W. Kutta tarafından geliştirilmiştir. Diğer birçok sayısal yöntemin aksine çözümün bulunması için türev gerektirmediğinden türev hesabı zahmeti ve zaman kaybı açısından oldukça avantajlı bir yöntemdir. Birçok farklı versiyonu olan Runge-Kutta metodlarını en bilinen hali olan 4. mertebe Runge-Kutta kullanılan bir örnek ile aşağıdaki gibi açıklanabilir.

4. mertebeden Runge-Kutta metodu $\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$ şeklindeki bir diferansiyel denklemde verilen $y(x_0) = y_0$ koşulu ile şu şekilde uygulanır (burada $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ ve $x_{n+1} = x_n + h$ olmak üzere):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)h,$$

$$K_1 = f(x_n, y_n),$$

$$K_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1\right),$$

$$K_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_2\right),$$

$$K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3)$$

dır.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = -2y + x + 4,\ y(0) = 1$ başlangıç değer probleminin çözümünün $y(0.2)$ noktasındaki değeri $h = 0.2$ ile belirlensin.

Dolayısıyla $h = 0.2$ adım boyu ile $y(0) = 1$ koşulunu kullanarak $y(0.2)$ değerindeki sayısal çözüm 4. mertebe Runge-Kutta metodu ile bir adımda elde edilebilir. Verilen örnekte

$$\frac{dy}{dx} = f\big(x, y(x)\big) = -2y + x + 4$$

olduğundan artışlar şöyle bulunur:

$$K_1 = f(x_0, y_0) = f(0,1) = -2(1) + 0 + 4 = 2,$$

$$K_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hK_1\right) = f(0.1,1.2) = -2(1.2) + 0.1 + 4 = 1.7,$$

$$K_3 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hK_2\right) = f(0.1,1.17) = -2(1.17) + 0.1 + 4 = 1.76,$$

$$K_4 = f(x_0 + h, y_0 + hK_3) = f(0.2{,}1.352) = -2(1.352) + 0.2 + 4 = 1.496.$$

Son olarak da bu artışlar formülde yerine yazılırsa,

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)h = 1 + \frac{1}{6}(2 + 1.7 + 1.76 + 1.496)(0.2)$$
$$= 1.3472.$$

$\frac{dy}{dx} = -2y + x + 4, y(0) = 1$ ile verilen başlangıç değer probleminin kesin çözümü

$$y(x) = -\frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x + 1.75$$

şeklindedir ve $x = 0.2$ noktasındaki değeri $y(0.2) = 1.3472599\ldots$ olarak bulunur. Dolayısıyla 4. mertebe Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümün bu değere ne denli yakın olduğu görülebilmektedir (Huang, 2011).

1.4. STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Stokastik denklemler ile ilgili bilgilerden önce ikinci bölümde değinilen “stokastik” kelimesinin anlamına vurgu yapılması faydalı olacaktır. Fiziksel, ekonomik, tıbbi vs. olayların incelenmesi için kurulan denklemler genellikle deterministik, yani rastgele olmayan denklemlerdir. Deterministik denklemlerde çözüm, başlangıç değeri ve parametreler ile tam olarak belirlenebilmektedir ve bu çözüm olayın her tekrarı için aynı şekilde elde edilmektedir. Ancak doğada aynı koşullar altında farklı sonuçlanan olaylar da gözlemlenir. Oluşan bu farklılığın denklemlerde temsil edilebilmesi için denklemler rastgele etki terimleri ve stokastik süreçler kullanılarak kurulabilmektedir (Merdan, 2015).

Diferansiyel denklemlere rastgele etkilerin eklenmesi iki denklem sınıfı oluşturmaktadır. Bu sınıfların ilki ve daha basit olanı “rastgele diferansiyel denklemler” olarak adlandırılırlar ve çözümleri adi diferansiyel denklem çözümlerine benzerdir. İkinci ve daha karmaşık olan sınıf ise stokastik gürültü terimlerinin etkisi altındaki stokastik diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemlerle sembolik olarak stokastik diferansiyel denklem olarak yazılsalar da kullanılan stokastik integral çeşidine göre (Ito, Stratonovich vs.) integral denklemler olarak yazılıp yorumlanırlar (Kloden ve Platen, 1995).

1.4.1. Rastgele Diferansiyel Denklemler

Doğadaki olayların modellenmesi, analizi ve davranışlarının tahmininde olasılıksal yöntemlere gitgide daha fazla önem verilmeye başlanmıştır. Gerçek hayattaki fiziksel problemlerin birçoğu adi diferansiyel denklemler ile incelenmektedir ancak bazı durumlardaki olası rastgele sonuçlar göz önüne alınırsa rastgele diferansiyel denklemlerin kullanılmasının daha uygun olacağı görülmektedir (Soong, 1973).

Rastgele diferansiyel denklemler üç şekilde sınıflandırılmaktadır:

i. Rastgele başlangıç değerlerine sahip diferansiyel denklemler
ii. Homojen olmayan kısımları rastgele olan diferansiyel denklemler
iii. Katsayıları rastgele olan diferansiyel denklemler.

Rastgele diferansiyel denklemlerin stokastik diferansiyel denklemlere kıyasla daha basit olmalarının yanında özellikle ilk iki sınıftaki (rastgele başlangıç değeri ve homojen olmayan kısımlılar) denklemlerin çözüm yöntemleri bu denklemlerin inşasında kullanılan deterministik diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri ile çok benzerdir.

1.4.1.1. Rastgele Başlangıç Değerine Sahip Diferansiyel Denklemler

Tanım: Birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemi, $a(x), f(x)$ fonksiyonları bir I aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere

$$y' + a(x)y = f(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

şeklinde ele alınsın. Bu diferansiyel denklemi kullanarak rastgele başlangıç değerine sahip bir diferansiyel denklem oluşturmak için $y(x_0) = y_0$ başlangıç değerinin bir rastgele değişken olarak alınması gerekir.

Örnek: $y'(x) + ay(x) = 0, x \geq 0$ şeklinde verilen bir birinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklem $y(x_0) = Y_0$ başlangıç koşuluna sahip olsun. Y_0 başlangıç koşulu m ortalaması ve σ^2 varyansına sahip bir normal dağılımlı rastgele değişken olarak alınarak birinci tip rastgele diferansiyel denklem elde edilebilir.

Bu denklemin çözümü olan $y(x)$ fonksiyonu Y_0 başlangıç değerine bağlı olarak elde edileceğinden bir rastgele değişken olacaktır. Dolayısıyla rastgele diferansiyel denklemin çözümü de bir rastgele değişkendir.

Örnek: $y'(x) = -ay^2, a > 0, 0 \leq x < \infty$ şeklinde bir Riccati diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Bu denkleme ek olarak $y(0) = Y_0$ başlangıç değeri, Y_0 bir rastgele değişken olacak şekilde verilmiş olsun. Öncelikle denklem çözülecek olursa:

$$y'(x) = -ay^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -ay^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2} dy = -adx$$

elde edilir. Buradan integrasyon ile

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int -adx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = -ax + c, c\ sabit$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{ax - c}$$

bulunur. Başlangıç değeri kullanılarak,

$$y(0) = Y_0 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{a0 - c} = -\frac{1}{c} = Y_0 \Rightarrow c = -\frac{1}{Y_0}$$

bulunur ve denklemin çözümü

$$y(x) = \frac{Y_0}{axY_0 + 1}$$

olarak elde edilir. Bu denklem kullanılarak

$$Y_0 = \frac{y}{1 - axy}$$

elde edilir. Burada Y_0 rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu ve yukarıdaki eşitlik kullanılarak $y(x)$ çözüm fonksiyonunun dağılımının elde edilmesi mümkündür. Bu şekilde çözüm fonksiyonu hakkında birçok istatistiksel inceleme yapılabilir ve denklemin temsil ettiği olay hakkında yorumlar yapılabilir (Soong, 1973).

1.4.2. Rastgele Homojen Olmayan Terimli Diferansiyel Denklemler

Tanım: Birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemi, $a(x), f(x)$ fonksiyonları bir I aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere

$$y' + a(x)y = f(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

şeklinde ele alınsın. Bu diferansiyel denklemi kullanarak rastgele homojen olmayan terimlere sahip bir diferansiyel denklem oluşturmak için $f(x)$ başlangıç değerinin bir rastgele değişken olarak alınması gerekir.

1.4.3. Rastgele Katsayılı Diferansiyel Denklemler

Tanım: Birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemi, $a(x), f(x)$ fonksiyonları bir I aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere

$$y' + a(x)y = f(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

şeklinde ele alınsın. Bu diferansiyel denklemi kullanarak rastgele katsayılı bir diferansiyel denklem oluşturmak için $a(x)$ değişken katsayısının bir rastgele değişken olarak alınması gerekir.

1.4.2. Stokastik Diferansiyel Denklemler

Diferansiyel denklemlerin özellikle 20. yüzyılın sonlarına doğru yaygın olarak çalışılmaya başlanan bir dalı da "stokastik diferansiyel denklemler" olmuştur. Denklemdeki terimlerin bir veya daha fazlasının bir stokastik süreç olması nedeniyle bu denklemlerin çözümü de bir stokastik süreç olmaktadır. Özellikle ekonomik modellemelerde yaygın olarak kullanılan stokastik diferansiyel denklemler genellikle Ito integrali içerirler ve durumda "Ito stokastik diferansiyel denklemleri" olarak da belirtilirler.

1.4.2.1. Stokastik Hesap

Stokastik hesap 1940'larda Japon matematikçi K. Ito tarafından tanıtılmıştır. Bu şekilde o ana kadar yetersiz bir şekilde ele alınabilen stokastik diferansiyel denklemler için matematiksel bir formülasyon geliştirilmiştir. Stokastik diferansiyel denklemlerin ifadesinde açığa çıkacak olan gürültü terimi Wiener sürecinin türevinin hesabını içerir, yani

$$dW_t = \frac{d}{dt} W_t.$$

Bu ifade ile verilen türev ise

$$\int_{t_0}^{t} dW_s(w)$$

şeklindeki integral olarak yorumlanır. Ancak buradaki ikinci integral W_s Wiener sürecinin gerçekleşmeleri herhangi bir sınırlı zaman aralığında sınırlı varyasyona sahip olmadığından Riemann-Stieltjes anlamında alınamaz.

Tanım: Bir $f \in L_T^2$ fonksiyonunun Ito stokastik integrali

$$\int_0^T f(t,w)dt = \mathrm{l.i.m.} \sum_{j=1}^{n} f\left(t_j^{(n)}, w\right)\left\{W_{t_{j+1}^{(n)}}(w) - W_{t_j^{(n)}}(w)\right\}$$

şeklinde tek türlü olarak belirli olan ortalama-kare anlamındaki limittir. $f \in L_T^2$ fonksiyonunun Ito integrali, stokastik diferansiyel denklemlerin hesabı için çok faydalı olan şu özelliklere sahiptir;

$f, g \in L_T^2$ ve herhangi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $I(f)$ ile f fonksiyonunun Ito integrali gösterilsin

1. $I(f), A_T$ −ölçülebilirdir,
2. $\mathbb{E}(I(f)) = 0,$

3. $\mathbb{E}(I(f)^2) = \int_0^T \mathbb{E}(f(t,\cdot)^2)dt,$
4. $\mathbb{E}(I(f)I(g)) = \int_0^T \mathbb{E}\big(f(t,\cdot)g(t,\cdot)\big)dt,$
5. 1 olasılığı ile, $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$

dir.

Tanım: Bir $f \in L_T^2$ fonksiyonunun Stratonovich stokastik integrali

$$\int_0^T f(t,w) \circ dt = \text{l.i.m.} \sum_{j=1}^{n} f\left(\tau_j^{(n)}, w\right)\left\{W_{t_{j+1}^{(n)}}(w) - W_{t_j^{(n)}}(w)\right\}$$

şeklinde tek türlü olarak belirli olan ortalama-kare anlamındaki limittir. Burada $\tau_j^{(n)}$ ile her bir $\left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right]$ aralığının orta noktası $\tau_j^{(n)} = \frac{1}{2}\left(t_j^{(n)} + t_{j+1}^{(n)}\right)$ ile temsil edilmektedir.

Not: Burada $\circ$ notasyonu Stratonovich stokastik integralini Ito stokastik integralinden ayırt etmek için kullanılmaktadır.

Not: Stratonovich stokastik integrali bazı durumlarda deterministik integrale yakın özelliklere sahip olmasından dolayı daha faydalı olduğundan Ito integrali ile birlikte en çok kullanılan stokastik integral tipidir. Bu stokastik integraller dışında başka stokastik integral çeşitleri de vardır.

Örnek: W_t Wiener süreci göz önüne alınırsa bu stokastik sürecin Stratonovich integrali

$$\int_0^T W_t \circ dW_t = \frac{1}{2} {W_T}^2$$

şeklinde iken aynı sürecin Ito integrali

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2} {W_T}^2 - \frac{1}{2} T$$

şeklindedir.

1.4.2.2. Stokastik Diferansiyel Denklem

Tanım: Bir stokastik diferansiyel denklem

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$$

formundadır. Burada $a(t, X_t)$ katsayısı stokastik diferansiyel denklemin sürüklenme katsayısı (drift coefficient) olarak adlandırılırken $b(t, X_t)$ de difüzyon katsayısı (diffusion coefficient) olarak adlandırılır. Bu iki fonksiyon için sürüklenme katsayısındaki değişimler daha yavaş iken difüzyon katsayısındaki değişimler daha hızlı olmaktadır. Stokastik diferansiyel denklemdeki W_t ise bir Wiener sürecidir (Brown Hareketi olarak da adlandırılır). Stokastik diferansiyel denklemlerin ifadesinde kullanılan X_t teriminin aslında $X(w, t)$ stokastik sürecinin kısa bir gösterimi olduğuna dikkat edilmelidir.

Stokastik diferansiyel denklemler her ne kadar diferansiyel denklem formunda ifade edilse de genellikle integral denklem formunda yazılarak yorumlanırlar.

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^{t} a(s, X_s)ds + \int_{t_0}^{t} b(s, X_s)dW_s$$

şeklinde ifade edilen stokastik integral denklemde ilk integral bir Lebesgue (veya Riemann) integrali iken ikinci integral bir stokastik integraldir. Stokastik integrasyon işlemi Ito hesabına göre yapılırsa bu işlem bir Ito integrali olarak adlandırılır ve bu durumda stokastik diferansiyel denklem bir "Ito stokastik diferansiyel denklemi" adını alırken integral denklem de "Ito stokastik integral denklemi" adını alır. Stokastik integrasyon hesabında Ito integralinden farklı integral hesapları da olduğundan (Stratonovich integrali vs.) stokastik denklem içerdiği integrale göre isimlendirilir.

Stokastik denklemin bir $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ çözümü de bir stokastik süreçtir ve bu çözümün var olması için çözümün stokastik integrali anlamlı kılacak (belirsiz hale getirmeyecek) özelliklere sahip olması gerekmektedir (Cyganowski vd., 2001). Örnek olarak basit bir stokastik diferansiyel denklem ve çözümü ile bu denklemler ve çözümlerinin stokastik süreçler olduğu görülebilir.

Örnek: $dX_t = (1 + X_t)\left(1 + {X_t}^2\right)dt + \left(1 + {X_t}^2\right)dW_t$ Ito stokastik diferansiyel denkleminin çözümü olan stokastik süreç

$$X_t = \tan(t + t_0 + W_t - W_{t_0} + \arctan(X_{t_0}))$$

şeklinde bulunur (Kloeden ve Platen, 1995). Burada W_t Wiener sürecinin özellikleri bilindiğinden, X_{t_0} başlangıç değeri de bilindiği durumda çözüm süreci X_t hakkında daha detaylı bilgi sahibi olmak mümkün olacaktır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. DANG HUMMASI HASTALIĞININ RASTGELE MODELLENMESİ

Bu bölümde Dang Humması hastalığı hakkında genel bilgiler verilmektedir. Yapılacak çalışmalarda temel alınan deterministik model tanıtıldıktan sonra rastgele etkiler altındaki model kurulmaktadır.

2.1.1. Dang Humması Hastalığı

Dang Humması (dengue fever) dang virüsünün (dengue virus) sebep olduğu tropik bir hastalıktır. Hastalığın başlıca yayılma yolu “Aedes” sivrisineklerinin özellikle “Aedes aegypti” türünün ısırmasıdır. Dişi Aedes aegypti sivrisineklerinin ısırması ile bulaşan hastalık sivrisineklerin kesin olarak ölümüne sebep olsa da insanlarda hayati risk oluşturma oranı çok düşüktür. Kas ve kemik ağrısı, cilt kızarıklıkları ve baş ağrısı hastalığın belirtilerinden bazılarıdır (Esteva ve Vargas, 1998; Yacoob, 2007).

Hastalık özellikle 1960’lı yıllardan sonra iki tehlikeli formu olan “Dang hemorojik ateşi (DHF - Dengue hemorrhagic fever)” ve “Dang şoku sendromu (DSS – Dengue shock syndrome)” ile Güneydoğu Asya’da büyük bir sağlık problemi haline gelmiştir. Amerika, Afrika ve Akdeniz ülkelerinde de karşılaşılan bu hastalık özellikle tropik iklime sahip Batı Pasifik, Güneydoğu Asya ve Amerika bölgelerinde en ciddi seviyede açığa çıkmaktadır (World Health Organization, 2015). Sivrisinek ısırığına bağlı olarak yayılan hastalık, özellikle muson öncesi ve sonrası sivrisineklerin ve sivrisineklerin üreme alanlarının artışına bağlı olarak salgın hale dönüşmektedir. 1970 öncesinde yalnızca 9 ülkede görülen şiddetli dang vakaları (DSS-DHF) günümüzde 100’den fazla ülkede görülmektedir. Son yıllarda yapılan çalışmalar dang virüsünün yıllık yaklaşık 390 milyon yeni enfeksiyona neden olduğunu (Shatt vd., 2013) ve bunların yaklaşık 96 milyonunun ciddi seviyede görüldüğünü belirtmektedir. Bir başka çalışmada ise dünya çapında toplam 128 ülkedeki 3.9 milyar insanın dang virüsü tehlikesiyle yüz yüze olduğu görülmektedir.

Dang virüsünün ilk defa tanımlanması 18. yüzyılın sonlarına dayansa da günümüzde bu virüsün birbirleriyle yakın olsa da 4 farklı türünün olduğu bilinmektedir. DEN 1, DEN 2, DEN 3 ve DEN 4 olarak tanımlanan bu virüslerin sebep olduğu dang hummasının belirli bir tedavisi olmasa da sivrisineklerle mücadele, erken teşhis ve doğru müdahale ile hastalığın ölüm oranlarını %1’in altına düşürmektedir (Phaijoo ve Gurung, 2015; World Health Organization, 2015). Virüs çeşidinin birisinin neden olduğu enfeksiyondan iyileşmek bu virüs tipine karşı kalıcı bağışıklık kazandırsa da, diğer çeşit dang virüslerine karşı bağışıklık sağlamamaktadır. Son yıllarda Dünya Sağlık Örgütü'nün kontrolündeki ülkelerin çoğunda görülmeye başlanan ve artık dünyanın yarısından fazlasını tehdit eden dang virüsünün yayılma hızı oldukça artmaktadır.

2.1.2. Hastalıkların Matematiksel Modellenmesi

Hastalıkların matematiksel modellerinin kurularak incelenmesi üzerine yapılan çalışmaların temeli Daniel Bernoulli'nin 1766 yılında yaptığı "Essai d'une nouvelle analyse de la mortalite causee par la petite verole" başlıklı çalışmaya dayanır. Ünlü matematikçi bu çalışmasında çiçek hastalığını incelemiş ve çiçek hastalığının ölüm oranı, yayılım oranı ve aşının hastalık üzerindeki etkileri incelemek için istatistiksel bir analiz yapmıştır. Bu çalışmanın ardından hastalıkların matematiksel modeller aracılığıyla incelenmesi üzerine çalışmalar başlamış ve bu çalışmalar özellikle 19. yüzyılın başlarında bakteriyolojinin gelişmesi ile hız kazanmıştır (Martcheva, 2015).

Hastalıkların yayılması ve seyri hakkındaki çalışmalarda günümüzde kullanılan matematiksel modellerin birçoğu McKermack ve Kendrick tarafından 1927'de yapılan "A contribution to the mathematical theory of epidemics" adlı incelemede tanıtılan SIR modelini taban almaktadır. Hastaların gruplandırılması ve bu gruplardaki değişimin incelenerek hastalığın gidişatının analizine dayanan modeller (SIR, SIS, SEIR, vs.) özellikle HIV hastalığından sonra çok yoğun olarak çalışılmaktadır (McKermack ve Kendrick, 1927).

2.1.3. SIR Modeli

McKermack ve Kendrick tarafından 1927'de tanıtılan ve günümüzde kullanılan gruplandırılmış modellerin (compartmental models) tabanını oluşturan SIR modeli üç denklemden oluşur.

$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$

şeklindeki denklemde N değişkeni toplam nüfusu temsil eder ve toplam nüfusun sabit olduğu varsayılır. t değişkeni zaman olmak üzere $S(t)$ popülasyondaki hastalığa meyilli insanları, $I(t)$ enfekte (hastalık bulaşmış) insanları ve $R(t)$ ise bağışıklık kazanan insanları temsil eder. Bu modelin akış şeması

$$S \to I \to R$$

şeklinde gösterilebilir. Modeli oluşturan denklem sistemi

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

şeklinde verilir. Burada β parametresi bir kişinin hastalığa yakalanma oranını gösterir ve tüm bireyler için eşit olduğu varsayılır. γ parametresi ise ortalama iyileşme/ölüm süresini temsil eder. Böylece sistem $S(t)$ değişkenini zaman içinde $\frac{\beta SI}{N}$ oranında azalan bir değişken olarak modeller; ilk denklemin anlamı hastalığa meyilli insanların $\frac{\beta SI}{N}$ miktarınca azalması (yani hastalanması) şeklindedir. Benzer şekilde ikinci denklem $I(t)$ değişkenini zaman içinde $\frac{\beta SI}{N}$ miktarınca artarken γI oranında azaltır; ikinci denklem hastalıklı insanların sayısının $\frac{\beta SI}{N}$ kadar insanın hasta olmasıyla arttığını ancak γI kadar insanın ölmesi/iyileşmesi ile azaldığını belirtir. Son denklem ise $R(t)$ değişkenini zaman içinde γI miktarınca artırır; yani iyileşen/ölen insanlar zaman içinde hastalıklı insanlardan ayrılan γI miktarı kadar artmaktadır (McKendrick ve Kermack, 1927).

SIR modeli zaman içinde daha fazla parametre ve denklem eklenmesi ve farklı durumlar için bu parametrelerin değiştirilmesi ile çok farklı haller almıştır. SEIR, SIS, SEIRS gibi modeller SIR modeline değişken eklenmesi ve insanların farklı gruplandırılmasını temel alan incelemeler sonucunda oluşturulmuştur. Bu modeller mesela iyileşmeyi temsil eden parametrenin göz ardı edilmesi ile tedavisi olmayan hastalıklara uygulanması örneğindeki gibi farklı durumlara optimize edilerek birçok hastalığa uygulanmaktadır.

2.2. Dang Humması Hastalığının Deterministik Modeli

Dang humması hastalığının matematiksel incelemesi için kullanılan model SIR modelinin hem insanlar hem de sivrisinekleri için bir arada ele alındığı bir denklem sistemidir. Bu denklem sistemi kurulurken şu varsayımlarda bulunulmuştur:

- Hastalıktan iyileşen bir insan hastalığa karşı bağışıklık kazanır.
- İnsan popülasyonu sabittir, dolayısıyla insanların ölüm oranını temsil eden μ_H aynı zamanda insanların doğum oranını da temsil eder.

$$\frac{d}{dt}N_H = 0.$$

- Sivrisinek (vektör/taşıyıcı) popülasyonunun değişimi

  $$\frac{d}{dt}N_V = A - \mu_V N_V$$

  ile gösterilir. Burada sivrisineklerin artış (doğum, katılım, vs.) temsil eden A parametresi sivrisinek yumurtalarının yalnızca belli bir oranı yetişkin sivrisinek haline geldiği için sivrisinek nüfusundan bağımsızdır. μ_V parametresi ise sivrisineklerin ölüm oranını temsil eder.
- Sivrisinek popülasyonu $t \to \infty$ iken A/μ_H denge noktasına yakınsar.

Bu varsayımlar altında insan popülasyonu üç bölüme ayrılmıştır (gruplandırılmıştır-compartmented): Hastalığa duyarlı insanlar (S_H), Hasta (enfekte) insanlar (I_H) ve İyileşmiş (Bağışıklık kazanmış) insanlar (R_H). Sivrisinek (vektör) popülasyonu ise yaşam süreleri çok kısa olduğu ve hastalıktan iyileşemedikleri için iki bölüme ayrılmıştır: Hastalığa duyarlı sivrisinekler (S_V) ve Hasta (enfekte) sivrisinekler (I_V). Bu kabuller ve gruplandırmalar ile Esteva ve Vargas tarafından 1998 yılında SIR modeli kullanılarak oluşturulan deterministik dang humması hastalığı modeli şöyle verilir:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}S_H &= \mu_H N_H - \frac{\beta_H b}{N_H} S_H I_H - \mu_H S_H,\\
\frac{d}{dt}I_H &= \frac{\beta_H b}{N_H} S_H I_H - (\mu_H + \gamma_H) I_H,\\
\frac{d}{dt}R_H &= \gamma_H I_H - \mu_H R_H,\\
\frac{d}{dt}S_V &= A - \frac{\beta_V b}{N_H} S_V I_H - \mu_V S_V,\\
\frac{d}{dt}I_V &= \frac{\beta_V b}{N_H} S_V I_H - \mu_V I_V.
\end{aligned} \tag{3}$$

Denkem sistemi iki koşula sahiptir:

$$N_H = S_H + I_H + R_H, \qquad N_V = S_V + I_V.$$

Bu denklem sisteminin iyi tanımlı olduğu, $N_H = S_H + I_H + R_H,\ S_V + I_V = A/\mu_H$ denklemlerinin belirttiği T altkümesinde invaryant olduğu ve N_H değişkeninin sabit olması ile $N_V \to A/\mu_H$ olması dolayısıyla asimptotik davranışlarının incelenebileceği Castillo-Chavez ve

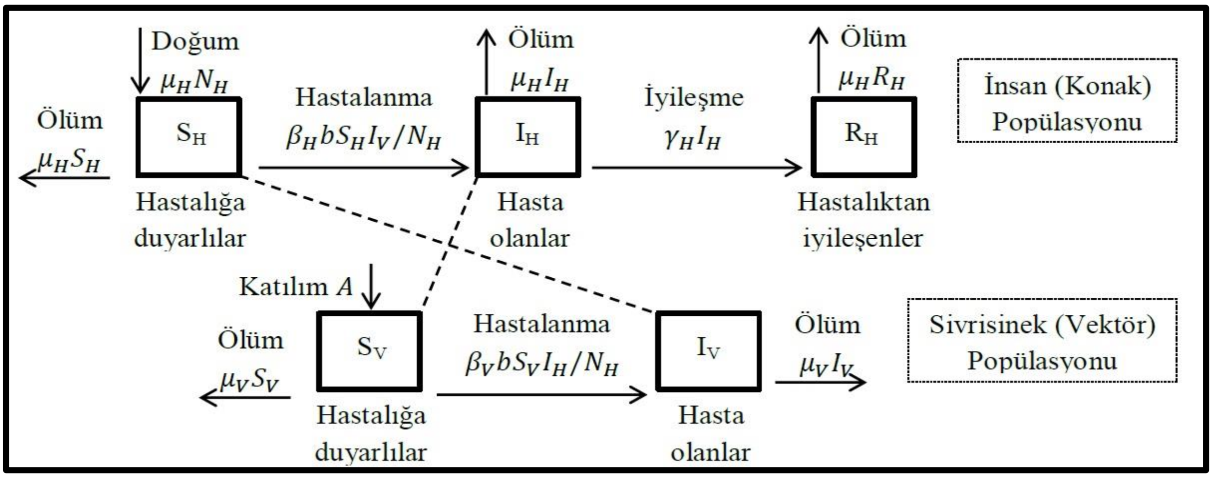
Thieme, 1995 ile Esteva ve Vargas, 1998 çalışmalarında gösterilmiştir (Esteva ve Vargas, 1998).

(3) denklem sistemindeki parametrelerin temsil ettiği değerler şöyle verilir:

Tablo 1. (3) modelinin değişkenleri ile parametrelerinin açıklamaları

N_H	İnsan (konak) nüfusunun toplam sayısı
S_H	Hastalığa duyarlı insanların toplam sayısı
I_H	Hasta insanların toplam sayısı
R_H	Bağışıklık kazanan insanların toplam sayısı
N_V	Vektör (sivrisinek) popülasyonunun toplam sayısı
S_V	Vektör popülasyonundaki hastalığa duyarlı sivrisineklerin toplam sayısı
I_V	Vektör popülasyonundaki hasta sivrisineklerin toplam sayısı
μ_H	Konak (insan) popülasyonunun doğum/ölüm oranı
μ_V	Vektör (sivrisinek) popülasyonunun ölüm oranı
β_H	Hastalığın sivrisinekten insana bulaşma olasılığı
β_V	Hastalığın insandan sivrisineklere bulaşma olasılığı
γ_H	İnsanların hastalıktan iyileşme oranı
b	Sivrisineklerin ısırma oranı

Bu denklem sistemi ve parametreler ile açıklanan Dang Humması hastalığı modelinin akış şeması şöyle gösterilebilir (Phaijoo ve Gurung, 2015):



Şekil 1. Dang Humması Hastalığının Matematiksel Modelinin Akış Şeması

(3) denklem sistemi görüldüğü gibi 5 diferansiyel denklemden oluşmaktadır. Bu sistemde popülasyonlar T altkümesinde sabit olduğundan model

$$S_H^* = \frac{S_H}{N_H}, I_H^* = \frac{I_H}{N_H}, R_H^* = \frac{R_H}{N_H}, S_V^* = \frac{S_V}{A/\mu_H}, I_V^* = \frac{I_V}{A/\mu_H}$$

şeklinde grupların popülasyon içindeki oranlarını temsil eden yeni değişkenler kullanılarak da çalışılabilir ($N_H = S_H + I_H + R_H,\ S_V + I_V = A/\mu_H$ koşulları göz önünde bulunduruldu). Yeni değişkenlerin kullanılırsa,

$$\frac{N_H}{N_H} = \frac{S_H + I_H + R_H}{N_H} \Longrightarrow 1 = S_H^* + I_H^* + R_H^*$$

ve

$$\frac{S_V + I_V}{A/\mu_H} = \frac{A/\mu_H}{A/\mu_H} \Longrightarrow S_V^* + I_V^* = 1$$

olacaktır. Buradan

$$R_H^* = 1 - S_H^* - I_H^*$$

ve

$$S_V^* = 1 + I_V^*$$

olarak alınırsa (3) denklem sistemi şu şekilde 3 denklemden oluşan yeni bir denklem sistemine indirgenebilir:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} S_H^* &= \mu_H (1 - S_H^*) - b\beta_H \frac{A/\mu_H}{N_H} S_H^* I_V^*, \\
\frac{d}{dt} I_H^* &= b\beta_H \frac{A/\mu_H}{N_H} S_H^* I_V^* - (\mu_H + \gamma_H) I_H^*, \\
\frac{d}{dt} I_V^* &= b\beta_V (1 - I_V^*) I_H^* - \mu_V I_V^*.
\end{aligned} \tag{4}$$

(4) denklem sistemi vector-host (vektör-konak) modellerinde Bailey ve Dietz tarafından kullanılmıştır (Bailey, 1975; Dietz, 1975). Bu denklem sisteminin Dang Humması hastalığı üzerine detaylı bir incelemesi Esteva ve Vargas tarafından deterministik durumda verilmiştir (Esteva ve Vargas, 1998).

Denklem sisteminin sayısal çözümünün yapılabilmesi ve rastgele etki çalışmalarında eklenecek rastgele miktarın hesaplanabilmesi için model parametrelerinin sayısal değerlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 2. (4) denklem sistemindeki parametrelerin değerleri

Parametre	Tanımı	Değeri
μ_H	Konak doğum/ölüm oranı	3.97×10^{-5}
μ_V	Vektör ölüm oranı	7.1429×10^{-2}
γ_H	Konak iyileşme oranı	1.4286×10^{-1}
b	Vektör ısırma oranı*	Değişken
N_H	Toplam konak popülasyonu	50000
A	Vektör katılım sayısı	5000
β_H	Vektörden konağa bulaşma olasılığı	0.75
β_V	Konaktan vektöre bulaşma olasılığı	1

(*): Sivrisineklerin ısırma oranı kaynak alınan çalışmalarda farklı değerlerle kullanılmıştır. Bu çalışmada $b = 0.25$ değeri kullanılacak olsa da $\{0.25, 0.45, 0.50, 0.68\}$ değerleri de kullanılabilir.

Sayısal hesaplama için gerekli olan başlangıç değerleri ise

$$S_H^*(0) = 0.9999, I_H^*(0) = 1 \times 10^{-4}, I_V^*(0) = 5.71432 \times 10^{-5}$$

olarak belirtilmiştir. Parametre değerleri ve başlangıç değerleri deterministik modelin kaynak alındığı çalışmalarda verilen değerler baz alınarak belirlenmiştir (Esteva ve Vargas, 1998; Phaijoo ve Gurung, 2015).

2.3. Dang Humması Hastalığının Rastgele Modeli

Dang Humması hastalığının rastgele modelinin kurulması (4) denklem sistemindeki diferansiyel denklemlerin katsayılarına rastgele etki terimleri eklenerek bir rastgele diferansiyel denklem sistemi kurulması aracılığıyla yapılacaktır. Diferansiyel denklem sistemine eklenecek rastgele terimler Laplace dağılımına sahip rastgele değişkenlerdir. Bu rastgele değişkenlerin eklenecekleri parametrenin sayısal değerine uygun bir ölçekte olabilmeleri için her bir rastgele değişken belli bir katsayıyla çarpılarak parametreye eklenir. Bu şekilde parametreleri rastgele hale gelen denklem sistemi de bir rastgele diferansiyel denklem sistemi haline gelmiş olur.

(μ, σ) parametreli Laplace dağılımına sahip bir X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sigma}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right), x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

şeklindedir. MATLAB programında $(0, \sigma)$ parametreli Laplace dağılımına sahip bir rastgele değişken $(1/\sigma)$ parametreli üstel dağılıma sahip iki bağımsız rastgele değişkenin farkı alınarak oluşturulabilir. Dolayısıyla MATLAB kullanarak $(0, \sigma)$ parametreli Laplace dağılımına sahip $\eta_i, i = \overline{1{,}5}$ rastgele değişkenleri oluşturulur. Modeldeki denklemlerin rastgele diferansiyel denklemler haline getirilişini açıklamak için (4) denklem sisteminden

$$\frac{d}{dt}I_V^* = b\beta_V(1 - I_V^*)I_H^* - \mu_V I_V^*$$

denklemi ele alınsın. Bu denklemde b, β_V, μ_V parametreleri rastgele hale getirilerek denklem bir rastgele diferansiyel denklem halini alır.

$$b^* = b + c_1\eta_1,$$

$$\mu_V{}^* = \mu_V + c_2\eta_2$$

şeklinde yazılan yeni $b^*, \mu_V{}^*$ parametreleri b, μ_V parametrelerinin değerlerine η_i, $i = 1{,}2$ rastgele değişkenlerinin eklenmesiyle oluşturulmuştur ve bu açıdan birer rastgele değişkendir. Yeni parametreler kullanılarak yazılan

$$\frac{d}{dt}I_V^* = b^*\beta_V(1 - I_V^*)I_H^* - \mu_V{}^* I_V^*$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}I_V^* = (b + c_1\eta_1)\beta_V(1 - I_V^*)I_H^* - (\mu_V + c_3\eta_3)I_V^*$$

denklem bir rastgele diferansiyel denklemdir.

Not: Tek parametreli Laplace dağılımına sahip bir X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu Tanım 1.2.1.27'de

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}e^{\lambda x}, & x < 0 \\ \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \frac{\lambda}{2}e^{\lambda|x|}, \ x \in \mathbb{R}$$

şeklinde verilmiştir. Bu tanım, $\mu = 0$ konum parametreli ve $\sigma = 1/\lambda$ ölçek parametreli Laplace dağılıma sahip olan bir X rastgele değişkenine aittir.

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right), x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

şeklinde verilen yoğunluk fonksiyonu tanımı ise tek parametreli Laplace dağılımının yoğunluk fonksiyonunun genel şeklidir. Burada ölçek parametresi için $\sigma = 1/\lambda$ şeklinde bir değişken değiştirme kullanılmasının sebebi ise $(0, \lambda)$ parametreli Laplace dağılımına sahip bir rastgele değişkenin iki $1/\lambda$ parametreli üstel dağılıma sahip rastgele değişkenin farkı olarak yazılabiliyor olmasından faydalanmaktır. Simülasyonlarda üretilecek $(0, \lambda)$ parametreli Laplace dağılımına sahip rastgele değerleri bu şekilde $1/\lambda$ parametreli üstel dağılımlı rastgele çoklukların ikisinin farkı olarak üretileceğinden, bu bölümde Laplace dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu için $f(x) = \frac{1}{2\sigma}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)$ tanımı tercih edilmiştir.

(4) denklem sistemindeki tüm denklemler benzer şekilde rastgele hale getirilecektir. Bu amaçla kullanılacak yeni rastgele parametreler bu şekilde tanımlanır:

$$b^* = b + c_1\eta_1,$$

$$\mu_V{}^* = \mu_V + c_2\eta_2,$$

$$\mu_H{}^* = \mu_H + c_3\eta_3,$$

$$\gamma_H{}^* = \gamma_H + c_4\eta_4,$$

$$\beta_H{}^* = \beta_H + c_5\eta_5,$$

(4) denklem sistemi yeni parametreler kullanılarak rastgele hale getirilir:

$$\frac{d}{dt}S_H^* = (\mu_H + c_3\eta_3)(1 - S_H^*) - (b + c_1\eta_1)(\beta_H + c_5\eta_5)\frac{A/(\mu_H + c_3\eta_3)}{N_H}S_H^* I_V^*,$$

$$\frac{d}{dt}I_H^* = (b + c_1\eta_1)(\beta_H + c_5\eta_5)\frac{A/(\mu_H + c_3\eta_3)}{N_H}S_H^* I_V^* - (\mu_H + c_3\eta_3 + \gamma_H + c_4\eta_4)I_H^*, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}I_V^* = (b + c_1\eta_1)\beta_V(1 - I_V^*)I_H^* - (\mu_V + c_2\eta_2)I_V^*.$$

Bu şekilde oluşturulan (5) denklem sistemi ile Dang Humması hastalığının Laplace dağılımlı rastgele etkiler altında ne tür davranışlar gösterdiği ve davranışlarının deterministik modelin sonuçları ile ne tür farklılıklar göstereceği incelenecektir.

Rastgele modelin oluşturulmasında dikkat edilmesi gereken bir nokta da $c_i, i = \overline{1,5}$ katsayılarıdır. $\eta_i, i = \overline{1,5}$ rastgele değişkenleri bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduklarından bu dağılıma göre oluşturulacak sayıların benzer büyüklükte olması muhtemeldir. Ancak $\beta_H =$

0.75 ve $\mu_H = 3.97 \times 10^{-5}$ arasındaki durumdan da görülebileceği gibi bu rastgele büyüklüklerin ekleneceği parametrelerin değerleri arasında çok büyük farklar olabilmektedir. Dolayısıyla $c_i, i = \overline{1,5}$ katsayıları da $b, \mu_V, \mu_H, \gamma_H, \beta_H$ parametrelerinin değerlerine uygun olarak seçilir. Bu çalışmada rastgele etkinin parametre değerine oranla az olması için eklenecek etkilerde $c_i, i = \overline{1,5}$ değerleri parametre değerlerinin %5'i olacak şekilde seçilmiştir. Bu değerlerin seçilmesinin kullanılacak Laplace dağılımının ölçek parametresi ile ilişkisi de bulunmaktadır. O halde katsayılar için şu değerler uygundur:

$$c_1 = 0.05 \times 0.25 = 0.0125$$

$$c_2 = 0.05 \times 7.1429 \times 10^{-2} = 3.57145 \times 10^{-3}$$

$$c_3 = 0.05 \times 3.97 \times 10^{-5} = 1.985 \times 10^{-6}$$

$$c_4 = 0.05 \times 1.4286 \times 10^{-1} = 7.143 \times 10^{-3}$$

$$c_5 = 0.05 \times 0.75 = 0.0375$$

(4) denklem sisteminin parametrelerinden bazılarının rastgele hale getirilerek (5) rastgele modeli oluşturulurken bazı parametrelere rastgele etki eklenmemiştir. Rastgele hale getirilmeyen parametreler N_H, A, β_V parametreleridir. Burada N_H ve A parametreleri sırasıyla toplam insan nüfusu sayısı ve sivrisineklerin sabit katılım oranını temsil ettiklerinden modelin oluşturulmasında sabit kabul edilerek belirlenmiş değerlerdir ve dolayısıyla bu parametrelere rastgele etki uygulanmamıştır. Hastalığın insanlardan sivrisineklere bulaşma olasılığını temsil eden β_V parametresinin değerinin 1 olması ise bu olayın bir "kesin olay" olduğunu belirtmektedir. Dolayısıyla bu parametreye de rastgele etki uygulanmamıştır (Merdan vd, 2015).

Deterministik model kullanılarak bir rastgele model oluşturmanın tek yolu yukarıda anlatılan yol olmadığı gibi, bu yolu kullanırken parametrelerin rastgele hale getirilmesinin de tek yolu bu değildir. Parametrelere eklenecek farklı büyüklükte ve farklı dağılımlarda rastgele etkilerle de benzer rastgele modeller kurulabilir. Ancak yukarıda kurulan rastgele model dang humması hastalığının rastgele etkiler altında sergilediği davranışların gözlenmesi için uygun sonuçları verme kabiliyetine sahiptir. Model sonuçlarının incelenmesi ile S_H, I_H, R_H değişkenlerinin rastgele hareketleri incelenecek ve bu sonuçlardan Dang Humması hastalığı süresince görülen rastgele davranışların ne gibi sonuçlar doğurabileceği hakkında yorumlar yapılacaktır.

3. BULGULAR

3.1. RASTGELE MODEL ANALİZİ

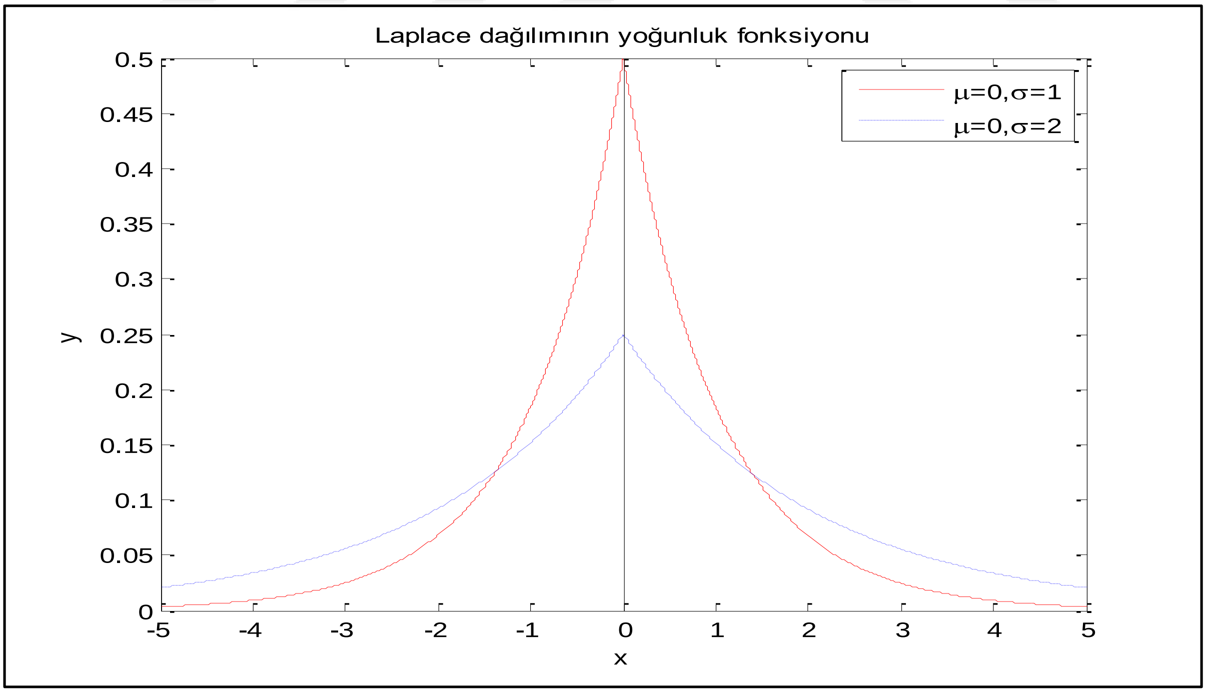
Bu bölümde Dang Humması hastalığının rastgele etkili doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerden oluşan matematiksel modelinin sayısal çözümlerinin Monte-Carlo metotları ile simülasyonu yapılmakta ve elde edilen sonuçlar kullanılarak hastalığın rastgele etkiler altındaki davranışları yorumlanmaktadır.

3.1.1. Rastgele Davranışların Ölçümü

Modelin simülasyonu öncesinde rastgele etki terimlerinin parametrelerde ne gibi değişikliklere yol açacağı ve rastgele etki altındaki modelden nasıl sonuç elde edileceği ile ilgili bazı bilgiler verilecektir.

3.1.1.1. Rastgele Terimlerin Parametrelere Etkisi

Laplace dağılımının $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ parametreleri için dağılım fonksiyonu şekildeki gibidir (Şekil 2). Dolayısıyla bu dağılıma sahip bir rastgele değişkenin herhangi bir parametreye eklenmesi, o parametrenin orijinal değerinin civarında değişik değerler almasına yol açacaktır.



Şekil 2. Laplace dağılımının yoğunluk fonksiyonunun farklı parametreler için şekli

Örneğin deterministik modelde $\beta_H = 0.75$ olarak alınan parametre rastgele modelde ${\beta_H}^* = \beta_H + c_5\eta_5$ şeklinde rastgele etkiler altında alınınca simülasyonlar sırasında alacağı değerler şu şekilde olacaktır:

$${\beta_H}^* = 0.7540, 0.8240, 0.6799, 0.7753, 0.7503, 0.8182, 0.7245, \ldots$$

Görüldüğü gibi bu değerler $\beta_H = 0.75$ değerinden az veya çok olabilecek şekilde bu noktanın etrafında dağılmaktadır. Deterministik sistemdeki parametreler benzer şekilde rastgele hale getirilerek temsil ettikleri model bileşenlerinin doğada farklı şekilde gerçekleşme ihtimalleri modele yansıtılmıştır.

3.1.1.2. Monte Carlo ile Analiz

Monte Carlo metotları sayısal sonuçlar elde edebilmek için tekrarlanan rastgele örneklemelere dayanan geniş bir bilgisayar algoritmaları sınıfını belirtir. Genellikle fizik ve matematikte özellikle diğer matematiksel metotların kullanımı zor veya imkânsız olduğunda en çok işe yararlar.

$$\frac{d}{dt}S_H^* = (\mu_H + c_3\eta_3)(1 - S_H^*) - (b + c_1\eta_1)(\beta_H + c_5\eta_5)\frac{A/(\mu_H + c_3\eta_3)}{N_H}S_H^* I_V^*$$

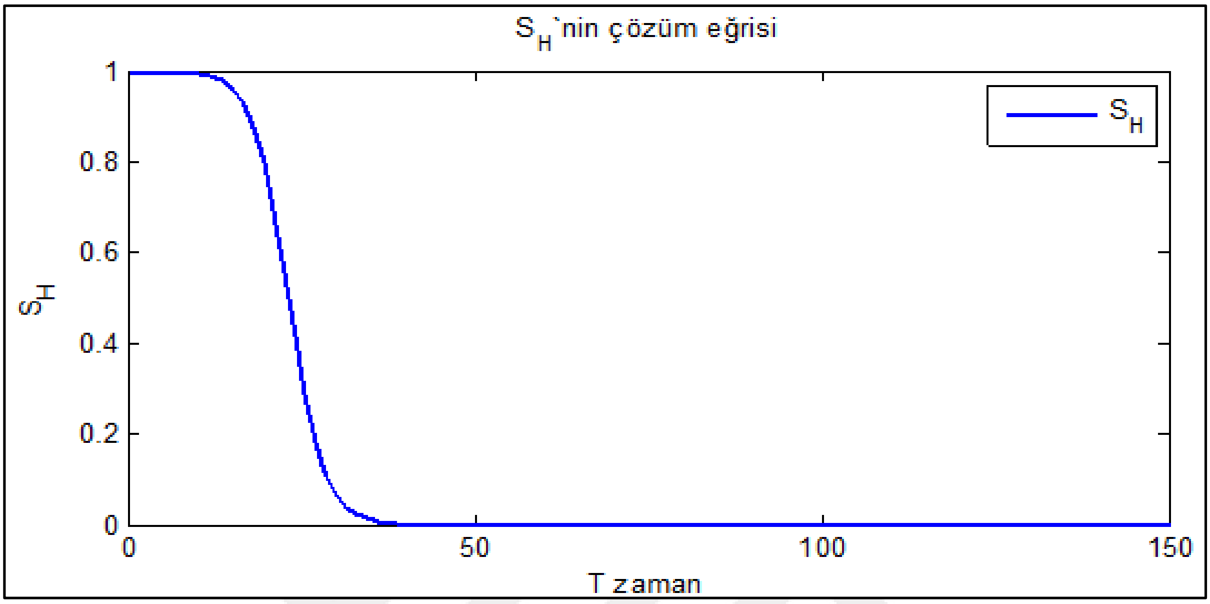
denklemi ile verilen S_H^* değişkeninin teorik olarak beklenen değerinin hesaplanması çok zordur. Ancak Monte-Carlo metodu ile bu beklenen değerin sayısal olarak hesaplanması mümkündür.

- 1. Aşama: Bu denklemden Runge-Kutta metodu ile S_H^* için bir sayısal çözüm elde edilir. Elde edilen sayısal çözüm artık bir rastgele değişken olan S_H^*'ın alması olası olan değerlerden biridir.
- 2. Aşama: İlk adım birçok kez (en az 10^5) tekrarlanır. Böylece S_H^* rastgele değişkeninin alabileceği birçok değer elde edilir.
- 3. Aşama: Büyük sayılar kanunundan yararlanılarak 2. aşamada elde edilen değerlerin ortalaması alınır ve S_H^* rastgele değişkeninin beklenen değeri için yaklaşık bir değer elde edilmiş olur. Tekrar sayısı ne kadar fazla ise elde edilen değer de gerçek değere o kadar yakın olacaktır (Gerçek değere ortalama %90 yakınlık için en az 10^5 tekrar yapılmalıdır).

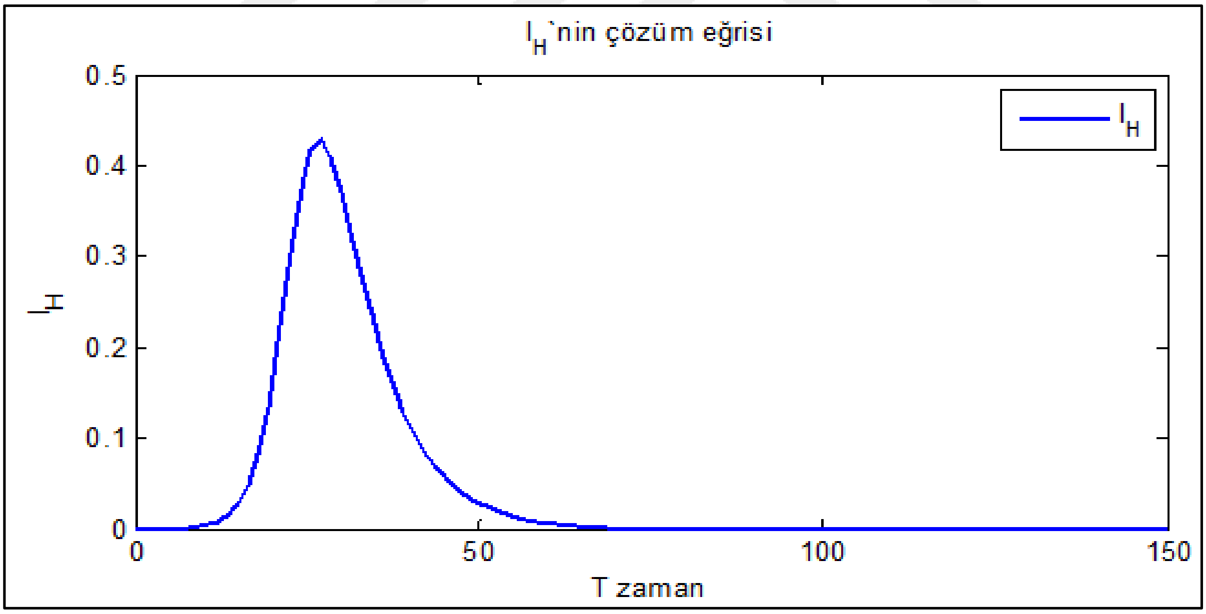
Bu yöntem ile modelin tüm değişkenleri ve bu değişkenlerin farklı karakteristikleri için elde edilen sonuçlar şöyledir:

3.1.2. Çözüm Eğrileri

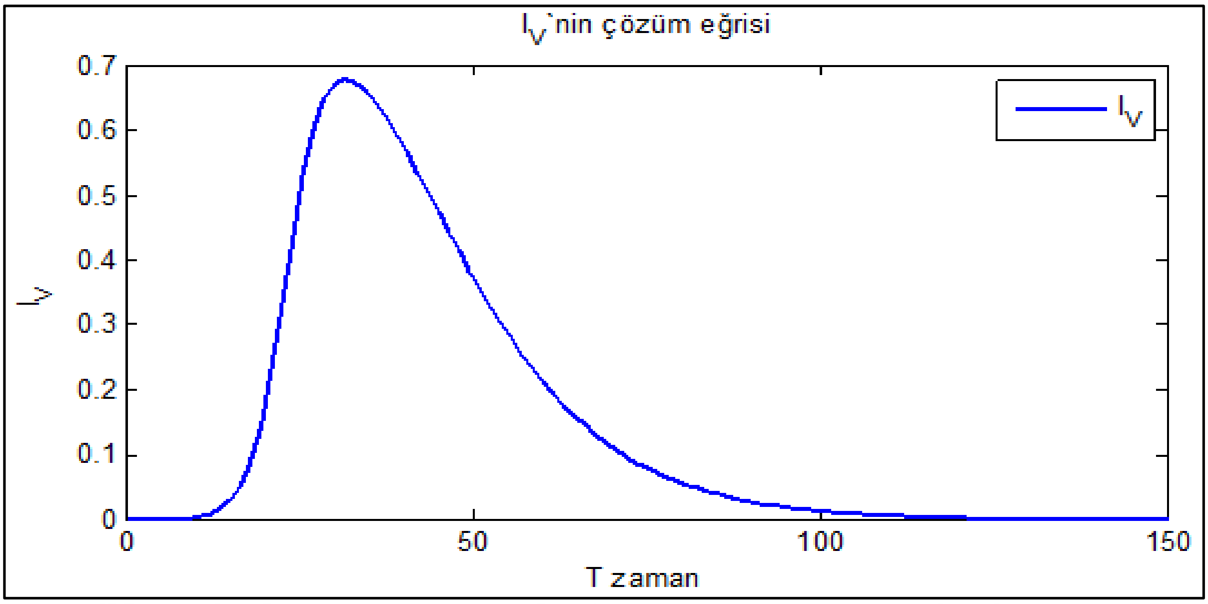
(5) denklem sisteminin incelenmesi sonucunda S_H^*, I_H^*, I_V^* için çözüm eğrileri şekillerdeki gibi elde edilmiştir (Şekil 3, 4, 5).



Şekil 3. Hastalığa duyarlı insanların oranının zaman içindeki değişimi



Şekil 4. Hasta insanların oranının zaman içindeki değişimi



Şekil 5. Hasta sivrisineklerin oranının zaman içindeki değişimi

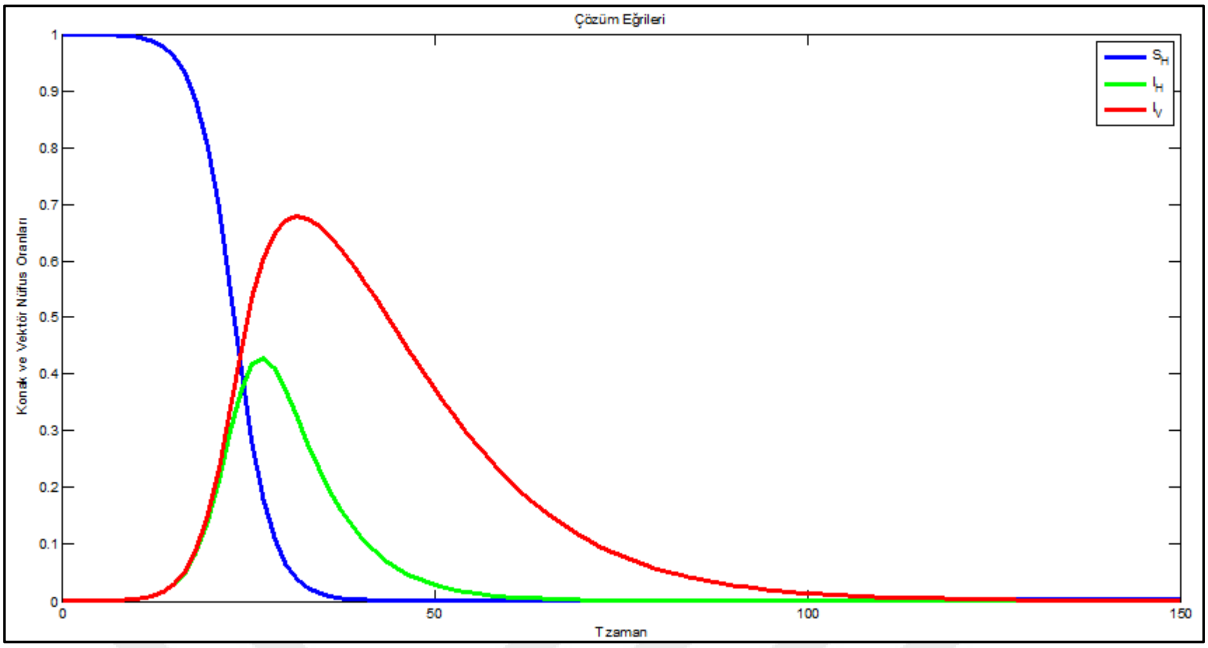
Şekillerden de görüldüğü gibi hastalığa duyarlı olan insanlar ile hasta olan insan ve sivrisineklerin toplam nüfustaki oranları belli bir süre içinde sıfıra inmektedir. Bu da hastalığın yok olması anlamına gelmektedir.

Sayısal analizlerden elde edilen sonuçlarda S_H, I_H ve I_V değişkenleri için en yüksek ve en düşük değerler tablodaki gibi elde edilmiştir (Tablo 3).

Tablo 3. Çözüm eğrilerinde elde edilen en yüksek ve en düşük değerler.

	S_H	I_H	I_V
Maksimum Değer / Zamanı	0.9999	0.4288	0.6787
	0	27	31.5
Minimum Değer / Zamanı	0.0003003	0.8408×10^{-6}	5.714×10^{-5}
	55.5	150	0

S_H, I_H ve I_V değişkenlerinin çözüm eğrilerinin daha iyi incelenmesi ve bu şekilde hastalığın rastgele davranışları hakkında daha sağlıklı yorumlanabilmesi için bu eğrilerin aynı şekil üzerinde görülebildiği grafik incelenebilir (Şekil 6).

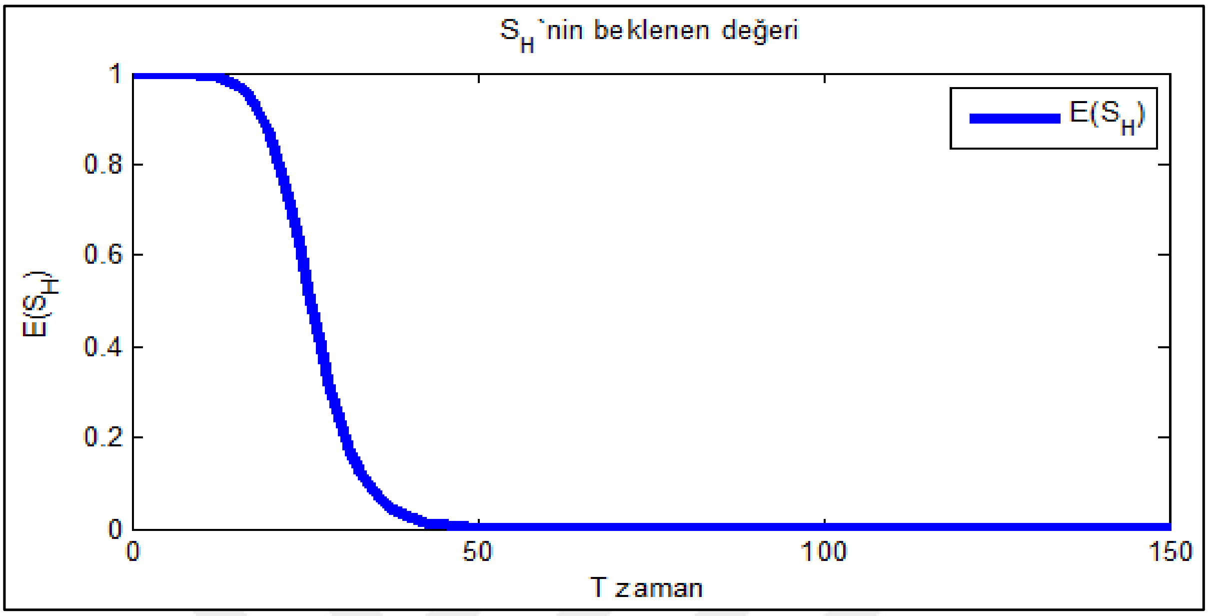


Şekil 6. Hasta duyarlı insanlar ile hasta insan ve sivrisineklerin nüfus oranlarının değişimleri

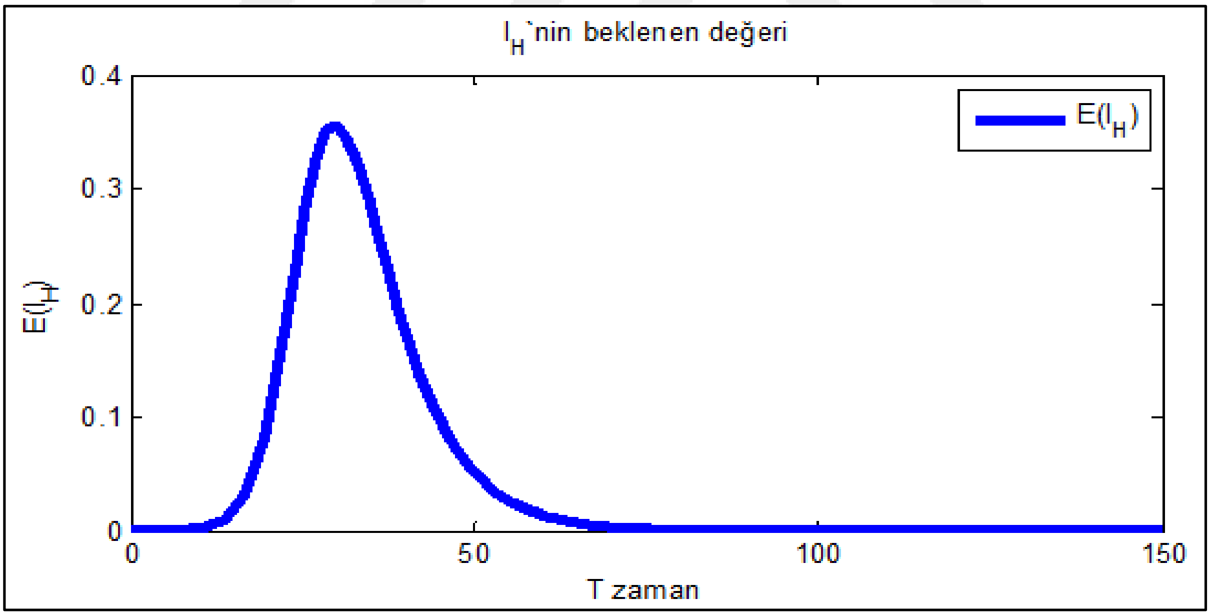
Bu grafikler ve uç değerler tablosu göz önünde bulundurularak hastalıkla ilgili şu çıkarımlar yapılabilir. Hastalık açığa çıktıktan belli bir süre sonra (yaklaşık 9-10 gün) hastalığa duyarlı insanların sayısında hızı bir azalma görülürken hasta insanların ve sivrisineklerin sayısı da benzer bir hızla artmaktadır. İnsan ve sivrisinek nüfusunun sabit olduğu kabulü göz önüne alınırsa değişimler hastalığın toplum içinde hızla yayıldığına işaret eder. Hasta insanların oranının 27. günde $(t = 27)$ maksimum değerine (0.4288) ulaştıktan sonra azalmaya başlamasından kısa bir süre sonra 34. günde $(t = 31.5)$ bu defa hasta insanların oranı maksimum değerine ulaşır (0.6787) ve ardından düşüşe geçer. Bu da hastalığın insanlarda gerilemeye başlamasının sivrisineklerdeki hastalığı etkilemesinin ve hastalığın sivrisineklerde de gerilemeye başlamasının işaretidir. Bu evreden sonra hasta insan sayısı ve sivrisinek sayısı çok hızla azalır, hastalığa duyarlı insan sayısı ise bu düşüşün başladığı nokta zaten sıfıra çok yaklaşmıştır. Bu da nüfusun hastalığa bağışıklık kazanmış insanlardan oluşan kısmının git gide arttığına yani hastalığın toplumdan silinmeye başladığına işaret eder. Bu şekilde çözüm eğrilerinden hastalığın insanların belli bir oranına bulaştıktan sonra önce sivrisineklerde daha sonra da insanlarda azalmaya başladığı ve yaklaşık 100 gün sonra neredeyse tamamı ile nüfustan silindiği yorumu yapılabilir.

3.1.3. Beklenen Değerler

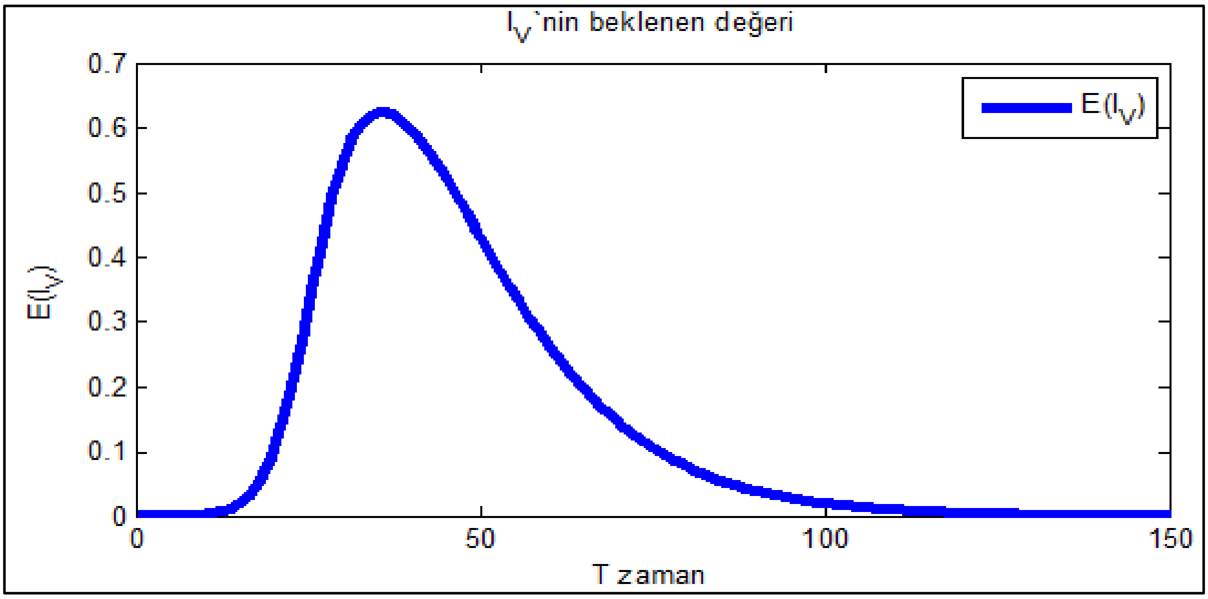
(5) denklem sisteminin incelenmesi sonucunda S_H^*, I_H^*, I_V^* değişkenleri için beklenen değerlerdeki değişim şekillerdeki gibi oluşur (Şekil 7, 8, 9).



Şekil 7. Hastalığa duyarlı insanların oranının beklenen değerinin değişimi



Şekil 8. Hasta insanların oranının beklenen değerinin değişimi



Şekil 9. Hasta sivrisineklerin oranının beklenen değerinin değişimi

Grafiklerde de görüldüğü üzere, hastalığa duyarlı insanlar ile hasta insan ve sivrisineklerin oranlarının beklenen değerleri bu değişkenlerin çözüm eğrilerine benzer değişimler göstermektedir. Rastgele değişkenlerin beklenen değerlerinin bu değişkenlere ait çözüm eğrileriyle uyumlu eğriler oluşturması beklenen bir durumdur.

Sayısal analizlerden elde edilen sonuçlarda $E(S_H), E(I_H)$ ve $E(I_V)$ değişkenleri için en yüksek ve en düşük değerler tablodaki gibi elde edilmiştir (Tablo 4).

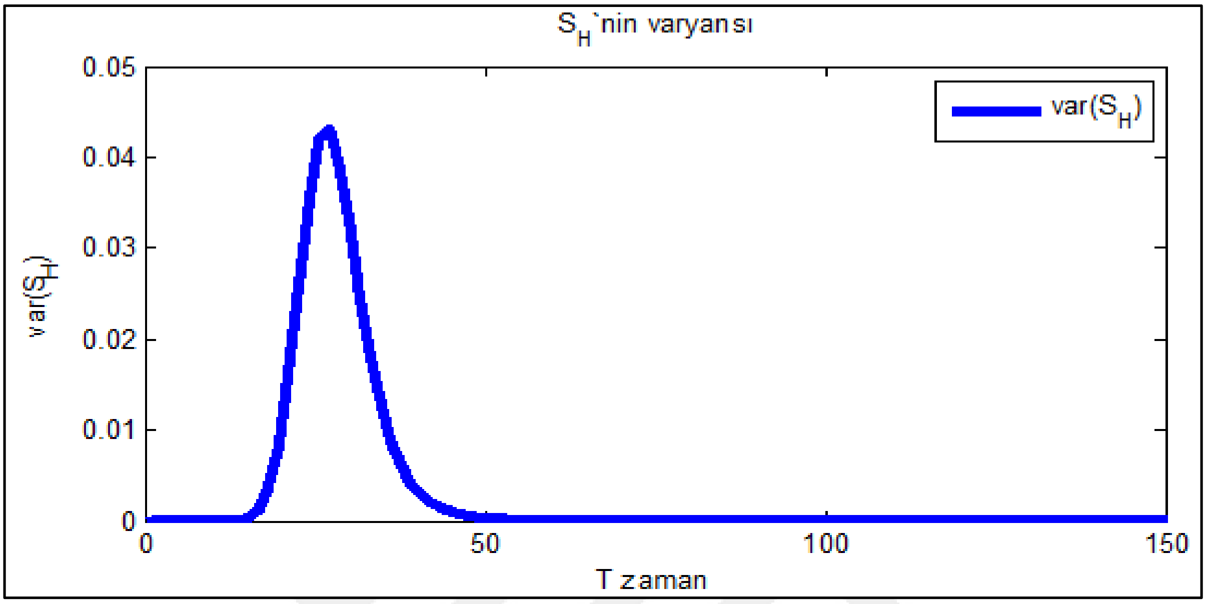
Tablo 4. Beklenen değerler için elde edilen en yüksek ve en düşük değerler

	$E(S_H)$	$E(I_H)$	$E(I_V)$
Maksimum Değer / Zamanı	0.9999	0.3568	0.6264
	0	30	36
Minimum Değer / Zamanı	0.0006801	1.157×10^{-5}	5.714×10^{-5}
	73.5	150	0

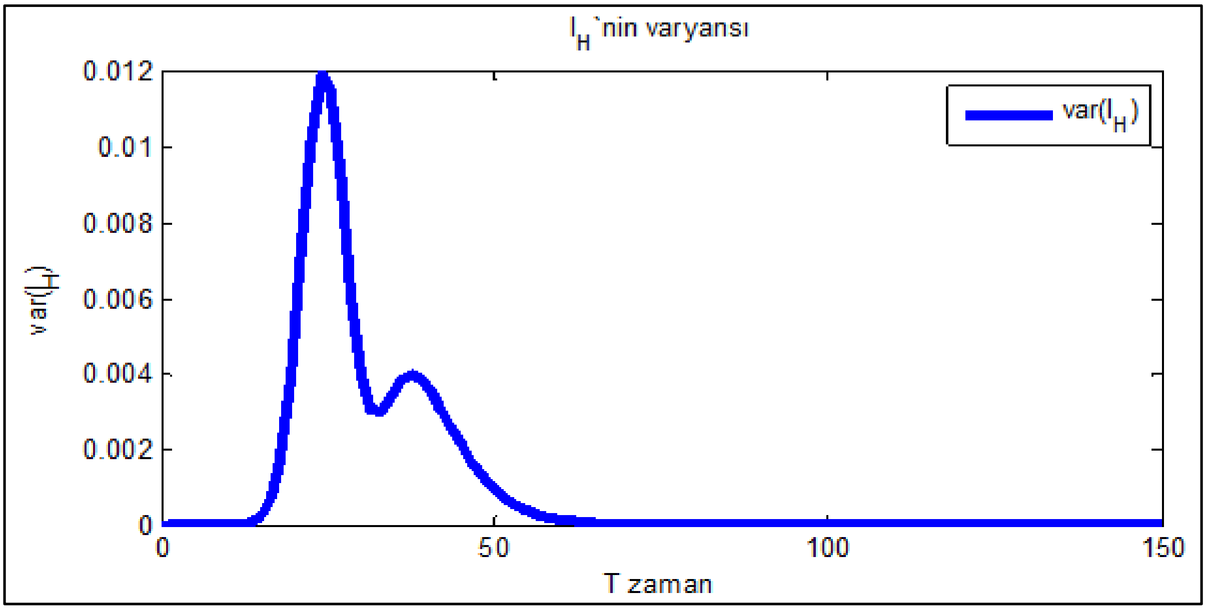
S_H^*, I_H^*, I_V^* değişkenlerine ait çözüm eğrileri ile bu değişkenlerin beklentilerine ait çözüm eğrileri arasında şekil olarak benzerlik olsa da uç değerler tabloları incelendiğinde beklenen değerler ile çözümlerdeki değerler arasında sayısal farklılıklar olduğu görülebilir. Bu durumda modele ait 'beklenen değer' sayısal karakteristiğinin, hastalığın rastgele davranışlarını temsil etme konusunda başarılı olduğu ancak davranışlara ait sayısal verilerin tahmininde hataların oluştuğu gibi bir yorum yapılır. Beklenen değer ile çözüme ait değerler arasında var olan farklılıkların ortadan kaldırılması için simülasyon sayısının artırılması ve bu şekilde sayısal karakteristiklerdeki kesinlik payının artırılması düşünülebilir.

3.1.4. Varyans

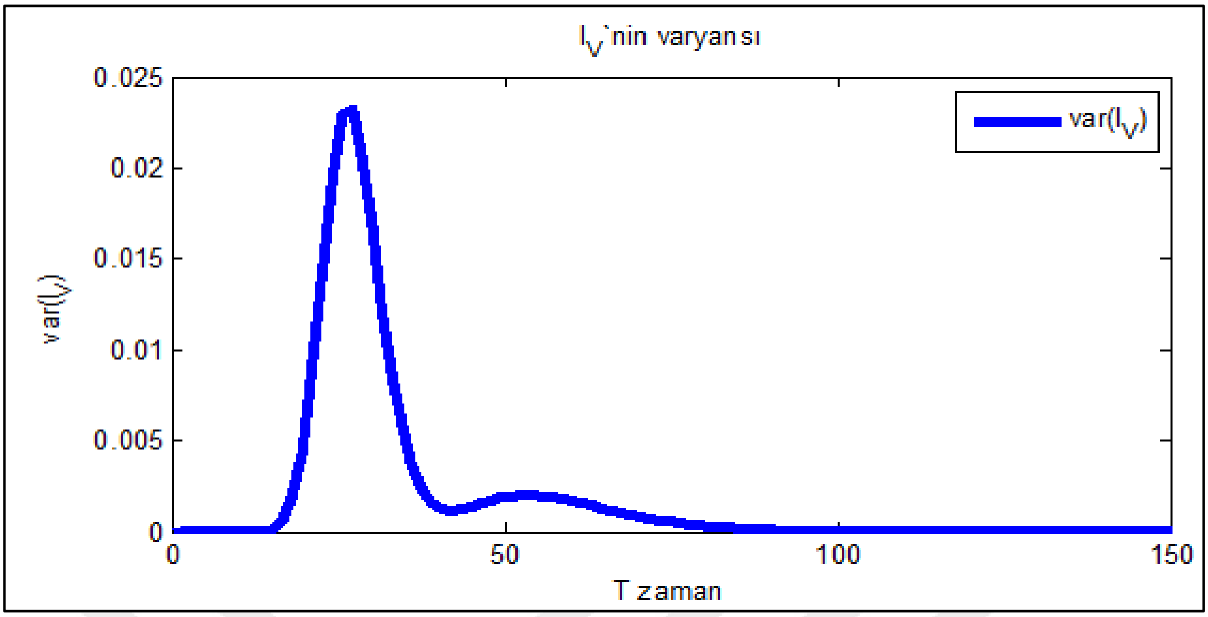
(5) denklem sisteminin incelenmesi sonucunda S_H^*, I_H^*, I_V^* değişkenlerinin varyanslarındaki değişim şekillerdeki gibi oluşur (Şekil 10, 11, 12).



Şekil 10. Hastalığa duyarlı insanların oranının varyansının değişimi



Şekil 11. Hasta insanların oranının varyansının değişimi



Şekil 12. Hasta insanların oranının varyansının değişimi

Grafiklerde hastalığa duyarlı insanlar ile hasta insan ve sivrisineklerin oranlarının varyanslarının benzer dönemlerde artış gösterdiği yine benzer şekilde azaldığı görülmektedir. Hasta insan ve sivrisinek oranlarının varyanslarındaki azalmadan sonra küçük bir artış gösterse de, tüm varyansların belli bir süre sonra sıfıra yaklaştığı gözlemlenir.

Sayısal analizlerden elde edilen sonuçlarda $Var(S_H), Var(I_H)$ ve $Var(I_V)$ değişkenleri için en yüksek ve en düşük değerler tablodaki gibi elde edilmiştir (Tablo 5).

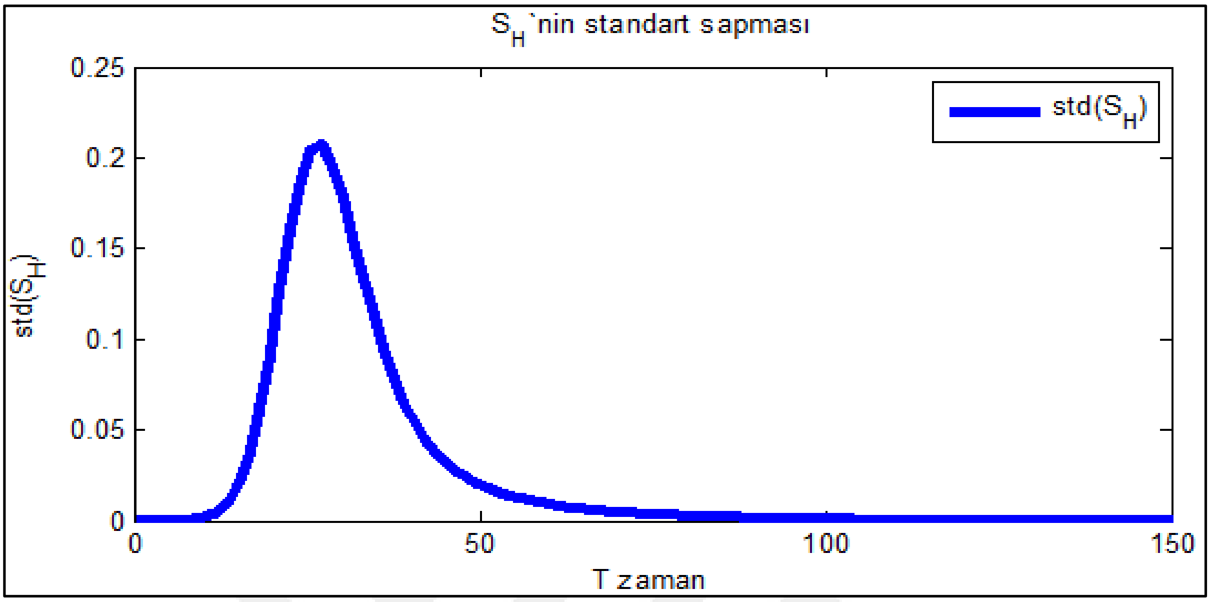
Tablo 5. Varyanslarda elde edilen en yüksek ve en düşük değerler.

	$Var(S_H)$	$Var(I_H)$	$Var(I_V)$
Maksimum Değer / Zamanı	0.04304	0.01191	0.02326
	27	24	27
Minimum Değer / Zamanı	8.931×10^{-25}	9.936×10^{-33}	1.432×10^{-33}
	0	0	0

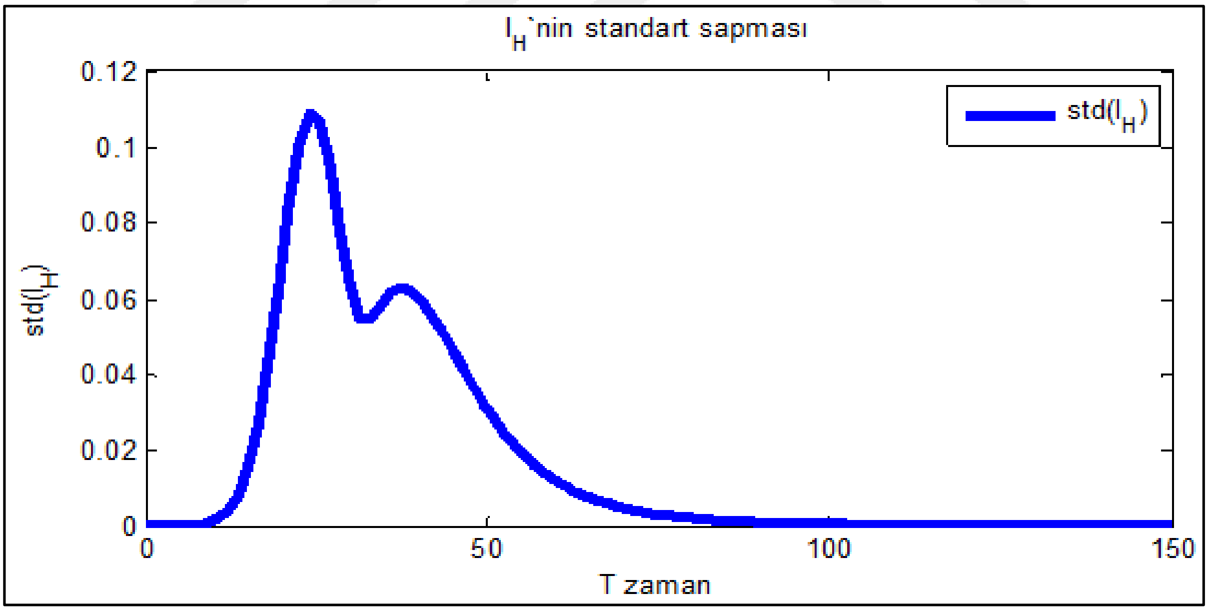
S_H^*, I_H^*, I_V^* değişkenlerine ait varyansların değişiminin benzer şekiller göstermesi bu değişkenlerin çözüm eğrileri de göz önüne alınarak değişkenlerdeki varyansın özellikle $t = 15$ ile $t = 50$ arasında hastalığın düşüşe geçtiği dönemde arttığını gösterir. Hastalığın arttığı ve daha sonra en yaygın olduğu zamana ulaşıp düşüşe geçtiği dönemlerde varyansın yüksek olması bu dönemde hastalıkla ilgili oranların beklentiden sapmalarının fazla olduğu anlamına gelmektedir. Hastalığın durağan olmadığı bu dönemde varyansın en yüksek noktada olması normal olsa da, hastalıkla ilgili beklenen değerlerde daha başarılı tahminlerin elde edilmesi ile bu değerlerin de azalması söz konusu olacaktır.

3.1.5. Standart Sapma

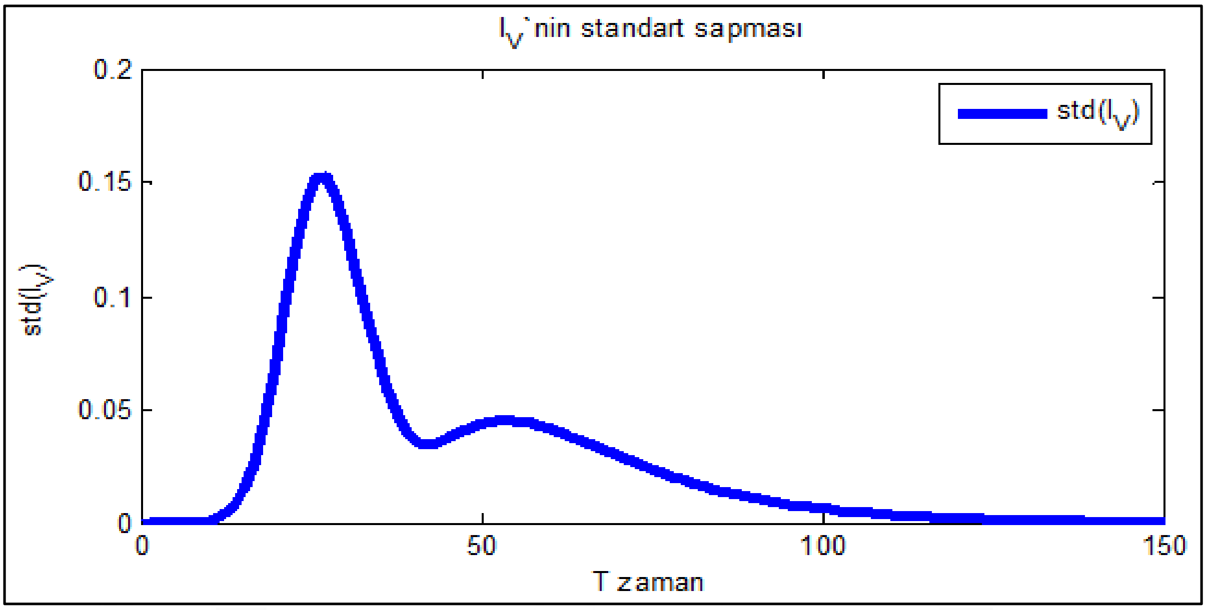
(5) denklem sisteminin incelenmesi sonucunda S_H^*, I_H^*, I_V^* değişkenlerinin standart sapmalarındaki değişim şekillerdeki gibi oluşur (Şekil 13, 14, 15).



Şekil 13. Hastalığa duyarlı insanların oranının standart sapmasının değişimi



Şekil 14. Hasta insanların oranının standart sapmasının değişimi



Şekil 15. Hasta sivrisineklerin oranının standart sapmasının değişimi

Grafiklerde hastalığa duyarlı insanlar ile hasta insan ve sivrisineklerin oranlarının standart sapmalarının varyanslarındaki değişimlere paralel olarak benzer dönemlerde artış gösterdiği yine benzer şekilde azaldığı görülmektedir. Yine varyanslardaki değişimlere benzer şekilde hasta insan ve sivrisinek oranlarının standart sapmalarındaki azalmanın ardından küçük bir artış gösterse de, tüm standart sapmaların belli bir süre sonra sıfıra yaklaştığı gözlemlenmektedir. Standart sapmalar tanım olarak varyans değerinin karekökü alınarak hesaplandığından, değişimlerin grafiklerindeki bu benzerlikler de normaldir.

Sayısal analizlerden elde edilen sonuçlarda $std(S_H), std(I_H)$ ve $std(I_V)$ değişkenleri için en yüksek ve en düşük değerler tablodaki gibi elde edilmiştir (Tablo 6).

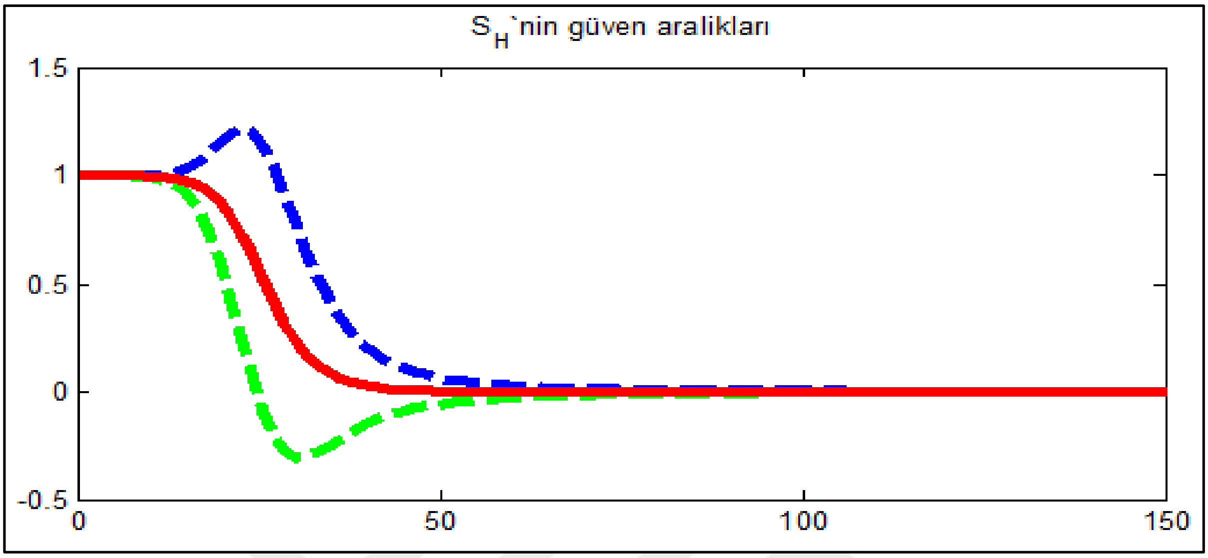
Tablo 6. Standart sapmalarda elde edilen en yüksek ve en düşük değerler

	$std(S_H)$	$std(I_H)$	$std(I_V)$
Maksimum Değer /	0.2075	0.1092	0.1525
Zamanı	27	24	27
Minimum Değer /	9.45×10^{-13}	9.968×10^{-17}	3.785×10^{-17}
Zamanı	0	0	0

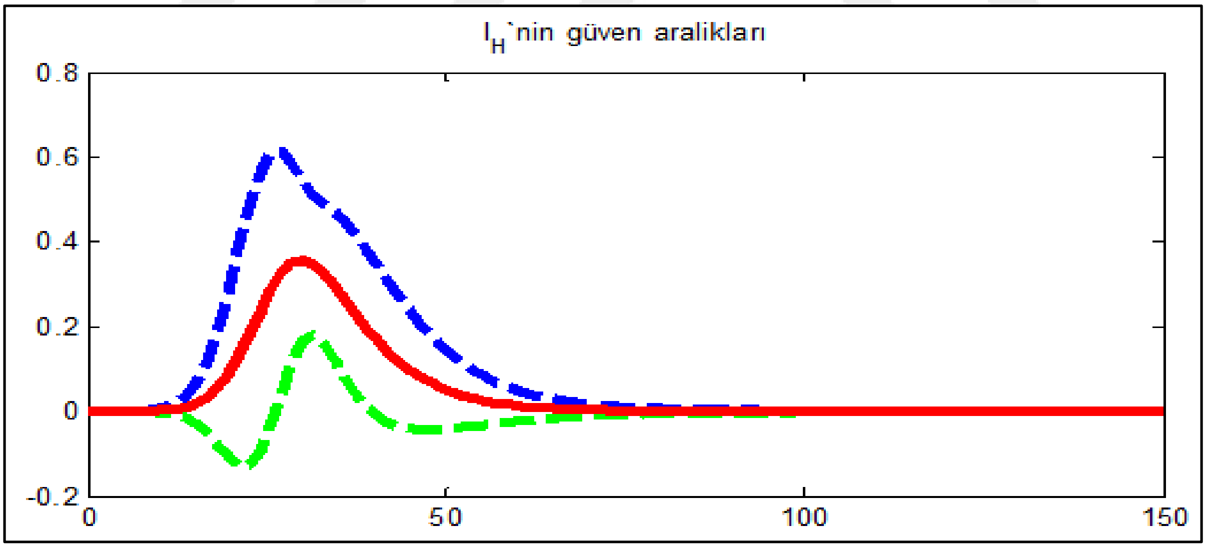
Standart sapmalardaki değişimler için de varyanslardaki değişimler için yapılan yorumların benzeri yapılabilir. Buradaki uç değerler tablosu da göz önünde bulundurularak yer yer elde edilen beklenen değerlerde fazla denebilecek sapmaların görüldüğüne dikkat edilmelidir.

3.1.6. Güven Aralıkları

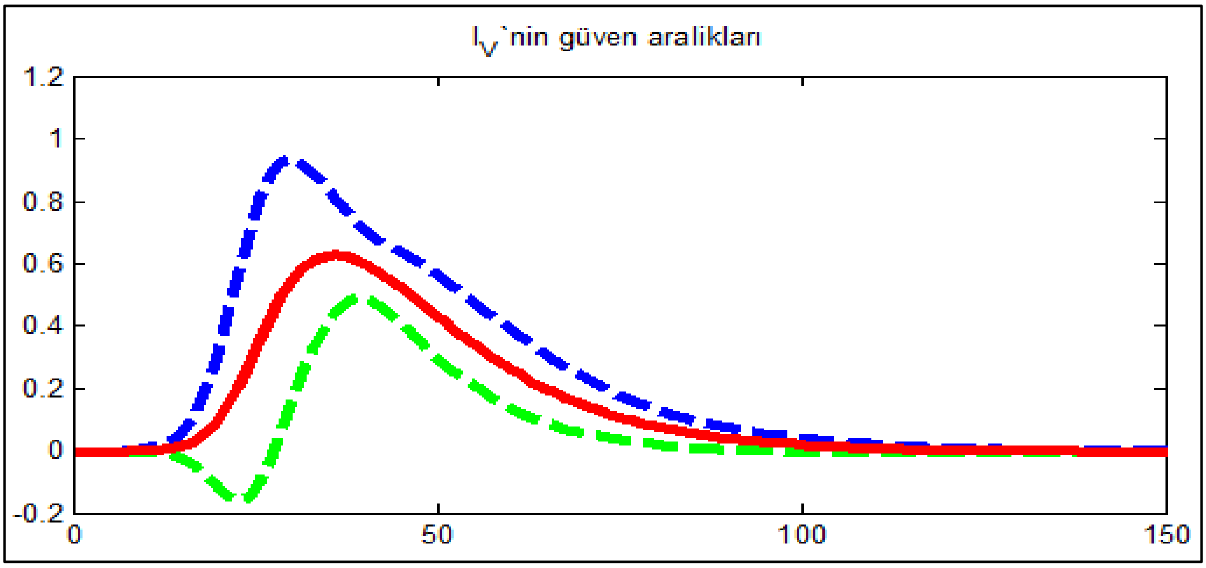
(5) denklem sisteminin incelenmesi sonucunda S_H^*, I_H^*, I_V^* değişkenlerinin güven aralıklarındaki değişim şekillerdeki gibi oluşur (Şekil 16, 17, 18).



Şekil 16. Hastalığa duyarlı insan oranının güven aralığının değişimi



Şekil 17. Hasta insan oranının güven aralığının değişimi



Şekil 18. Hasta sivrisineklerin oranının güven aralığının değişimi

Hastalığa duyarlı insanlar ile hasta insan ve sivrisineklerin oranlarına ait değişimleri gösteren grafikler de bu değişkenlerin beklenen değerleri ve varyans-standart sapmalarındaki değişimlere uygun olarak elde edilmiştir (mavi çizgiler güven aralıklarının üst sınırı, yeşil çizgiler alt sınırı). Bu aşama elde edilen uç değerler aşağıdaki tablodadır (Tablo 7).

Tablo 7. Güven aralıklarında elde edilen en yüksek ve en düşük değerler

	$E(S_H^*) \pm K.std(S_H^*)$	$E(I_H^*) \pm K.std(I_H^*)$	$E(I_V^*) \pm K.std(I_V^*)$
Maksimum Değer / Zamanı	1.212	0.6132	0.9372
	22.5	27	30
Minimum Değer / Zamanı	−0.3025	−0.1248	−0.1583
	30	21	22.5

Burada güven aralıkları

$[E(S_H^*) - K.std(S_H^*), E(S_H^*) + K.std(S_H^*)]$,

$[E(I_H^*) - K.std(I_H^*), E(I_H^*) + K.std(I_H^*)]$,

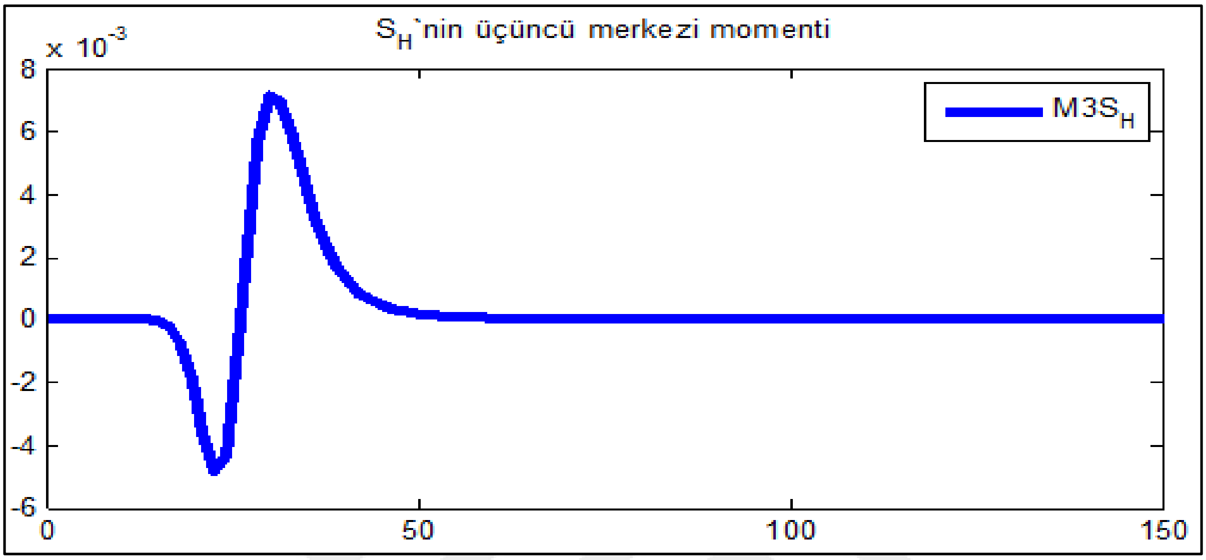
$[E(I_V^*) - K.std(I_V^*), E(I_V^*) + K.std(I_V^*)]$

formülleri kullanılarak elde edilmiştir. İncelenen güven aralıkları $K = 3$ değeri kullanılarak hesaplandığından bu aralıklar S_H^*, I_H^* ve I_V^* değişkenlerininin değerlerini %99 olasılıkla içeren aralıklardır. $K = 2$ değeri kullanılarak %95 olasılıklı güven aralıklarının da hesaplanması mümkündür.

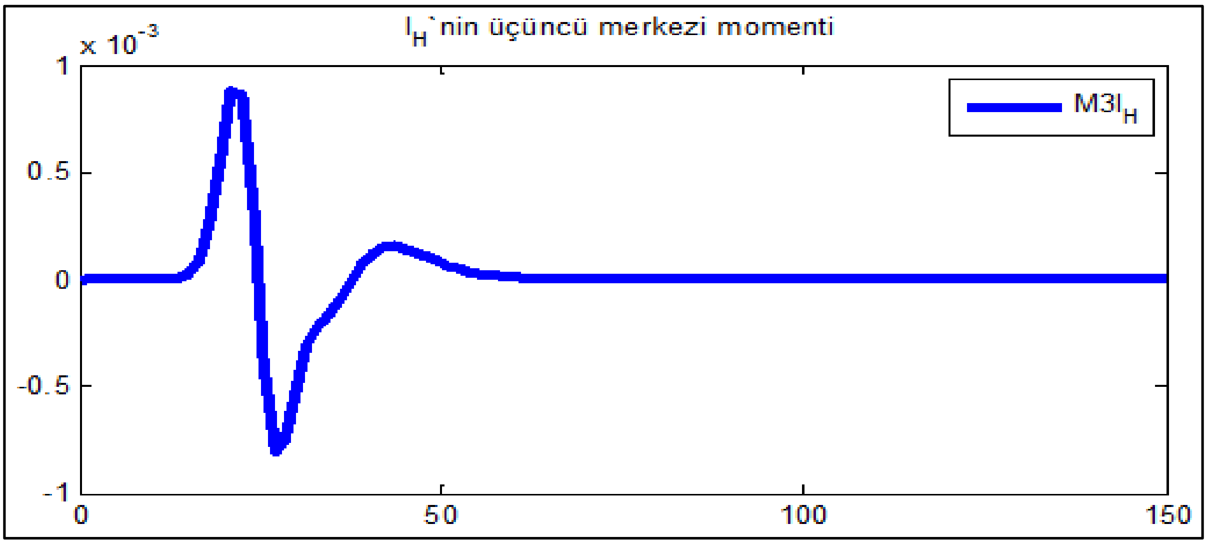
Hastalığın en hareketli dönemi olan $t = 15$ ile $t = 50$ beklenen değer hesapları gerçek değerden uzak kaldığı için bu sapma varyansları ve dolayısıyla da standart sapmaları da etkilemiştir. Standart sapmaların bu dönemdeki artışlarından ötürü güven aralıklarındaki genişleme grafiklerde görülmektedir.

3.1.7. Üçüncü Merkezi Momentler

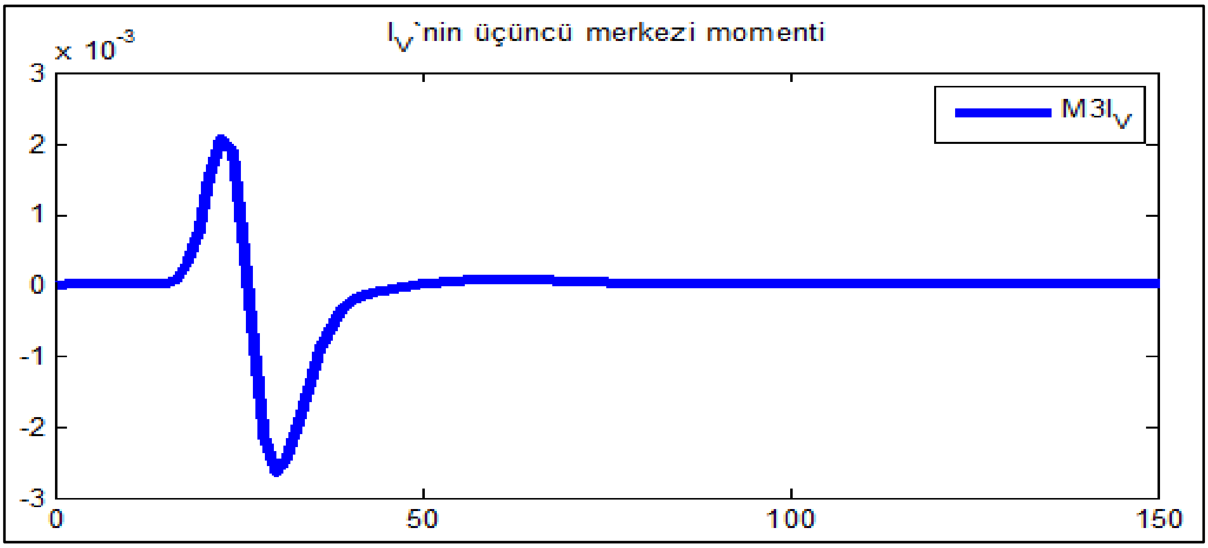
(5) denklem sisteminin incelenmesi sonucunda S_H^*, I_H^*, I_V^* değişkenlerinin üçüncü merkezi momentleri şekillerdeki gibi oluşur (Şekil 19, 20, 21).



Şekil 19. Hastalığa duyarlı insanların oranının üçüncü merkezi momentinin değişimi



Şekil 20. Hasta insanların oranının üçüncü merkezi momentinin değişimi



Şekil 21. Hasta sivrisineklerin oranının üçüncü merkezi momentinin değişimi

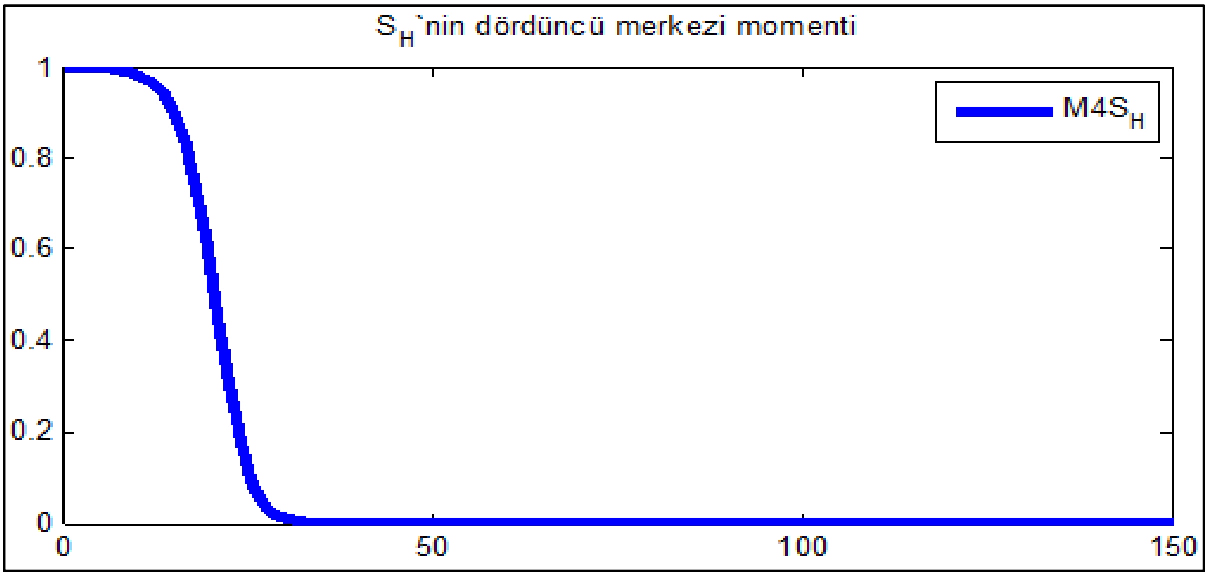
Model değişkenlerinin 3. merkezi momentlerindeki değişimler incelendiğinde elde edilen uç değerler aşağıdaki şekildedir (Tablo 8).

Tablo 8. Üçüncü merkezi momentlerde elde edilen en yüksek ve en düşük değerler

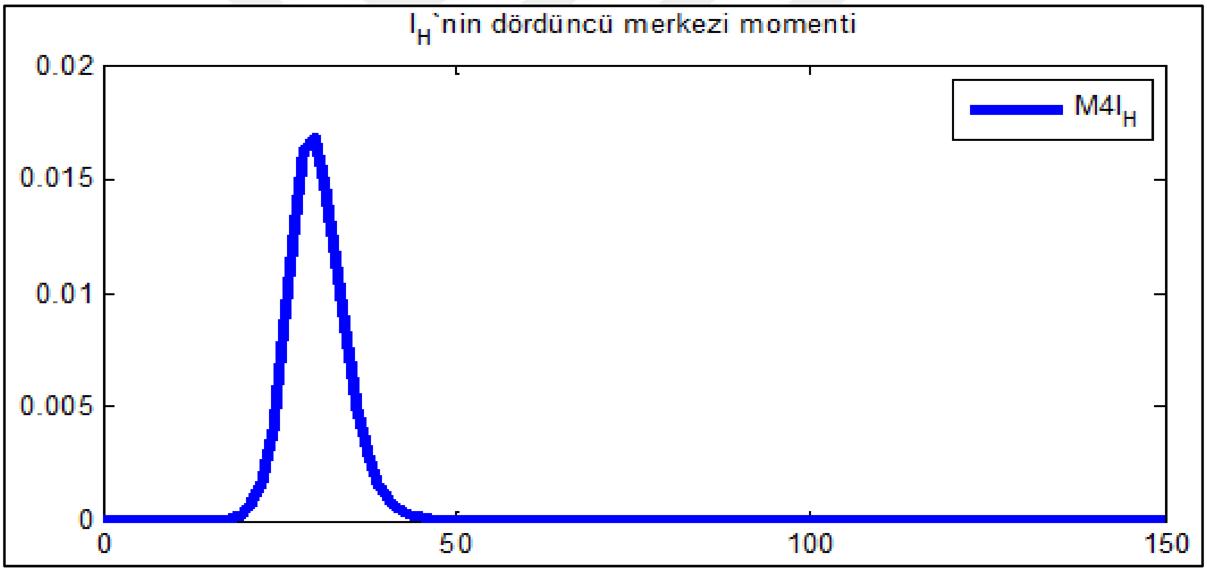
	$E\left(\left(S_H^* - E(S_H^*)\right)^3\right)$	$E\left(\left(I_H^* - E(I_H^*)\right)^3\right)$	$E\left(\left(I_V^* - E(I_V^*)\right)^3\right)$
Maksimum Değer /	0.007172	0.008774	0.002073
Zamanı	30	21	22.5
Minimum Değer /	−0.004844	−0.008039	−0.002634
Zamanı	22.5	27	30

3.1.8. Dördüncü Merkezi Momentler

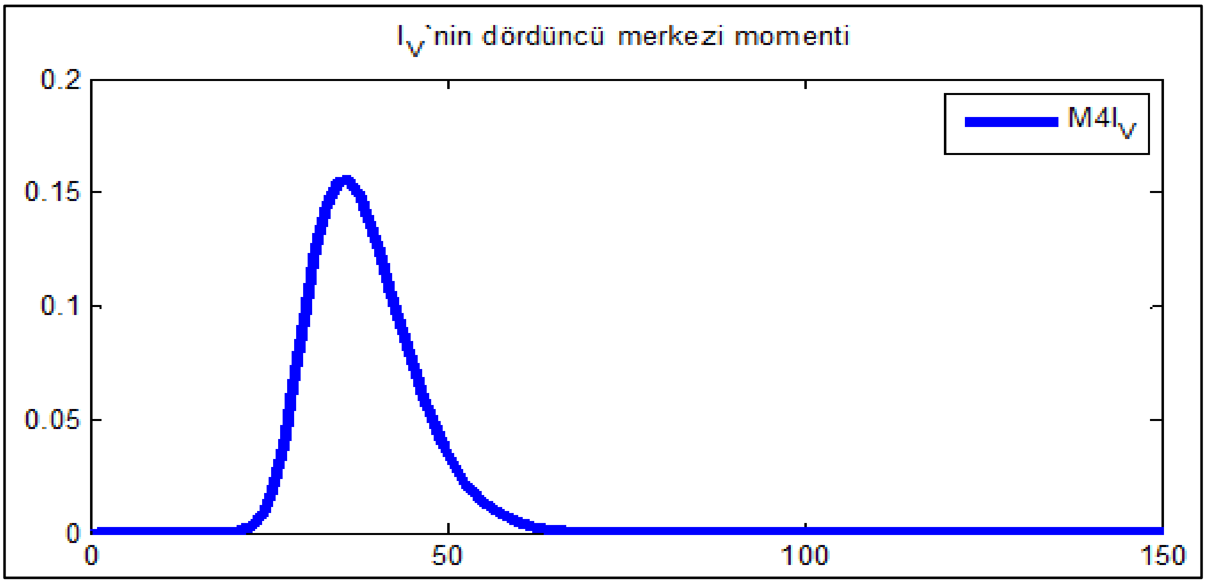
(5) denklem sisteminin incelenmesi sonucunda S_H^*, I_H^*, I_V^* değişkenlerinin dördüncü merkezi momentleri şekillerdeki gibi oluşur (Şekil 22, 23, 24).



Şekil 22. Hastalığa duyarlı insanların oranının dördüncü merkezi momentinin değişimi



Şekil 23. Hasta insanların oranının dördüncü merkezi momentinin değişimi



Şekil 24. Hasta sivrisineklerin oranının dördüncü merkezi momentinin değişimi

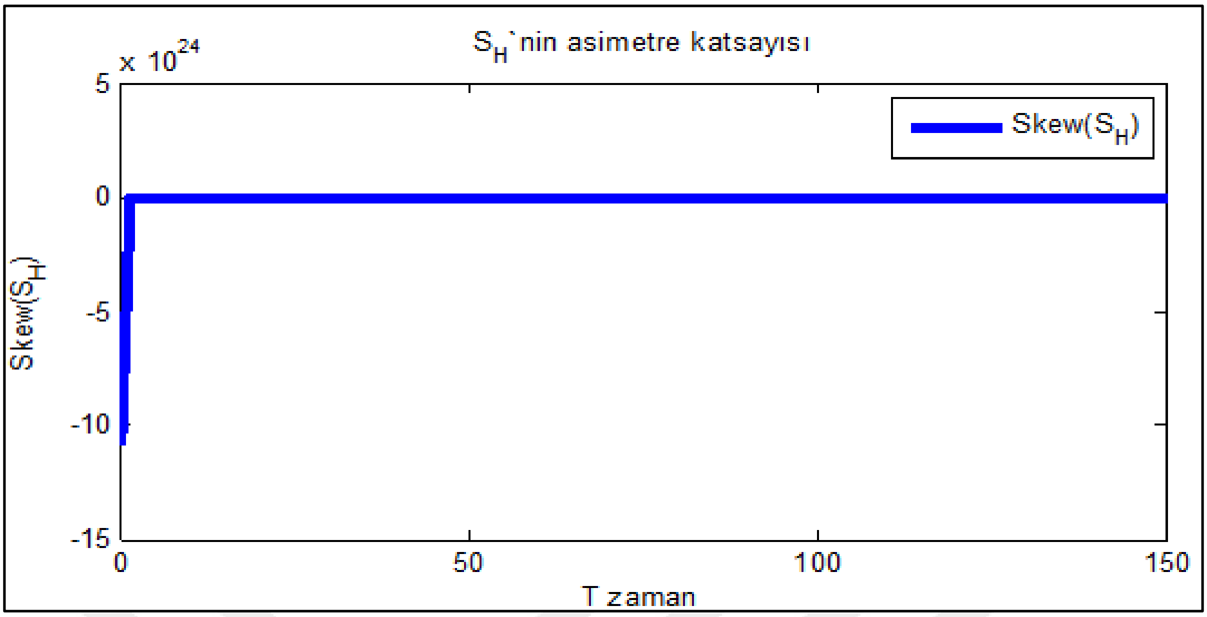
Model değişkenlerinin 4. merkezi momentlerindeki değişimler incelendiğinde elde edilen uç değerler aşağıdaki şekildedir (Tablo 9).

Tablo 9. Dördüncü merkezi momentlerde elde edilen en yüksek ve en düşük değerler

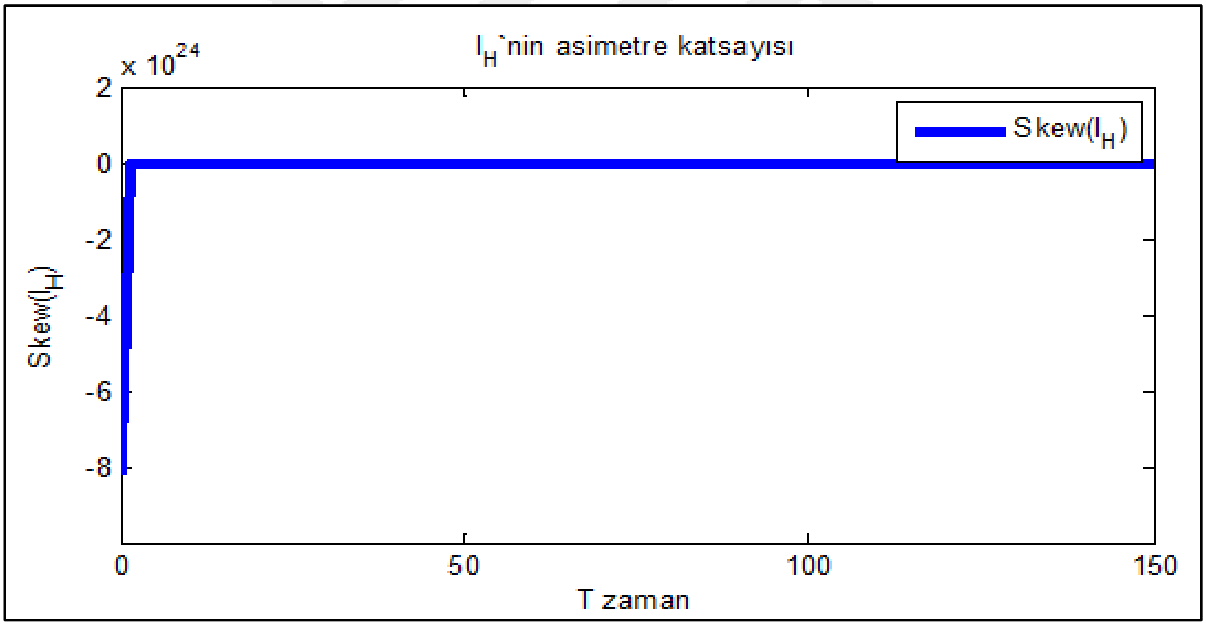
	$E\left(\left(S_H^* - E(S_H^*)\right)^4\right)$	$E\left(\left(I_H^* - E(I_H^*)\right)^4\right)$	$E\left(\left(I_V^* - E(I_V^*)\right)^4\right)$
Maksimum Değer /	0.9996	0.01683	0.1557
Zamanı	0	30	36
Minimum Değer /	2.893×10^{-10}	1×10^{-16}	1.066×10^{-17}
Zamanı	150	0	0

3.1.9. Çarpıklık Katsayıları (Skewness)

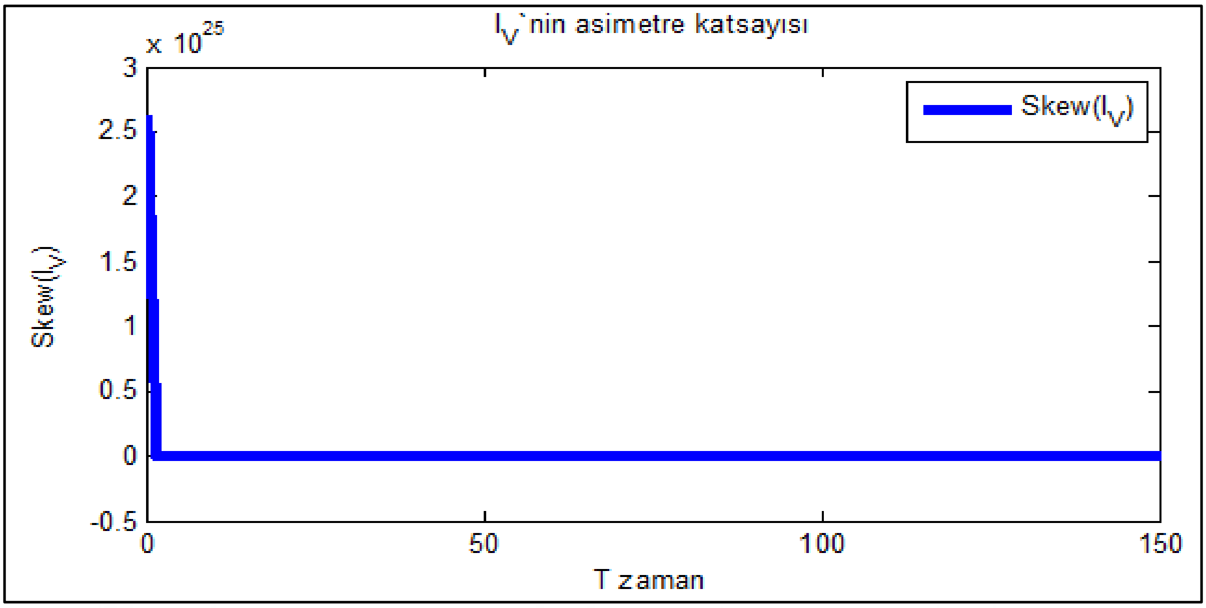
(5) denklem sisteminin incelenmesi sonucunda S_H^*, I_H^*, I_V^* değişkenlerinin çarpıklık katsayıları şekillerdeki gibi oluşur (Şekil 25, 26, 27).



Şekil 25. Hastalığa duyarlı insanların oranının çarpıklık katsayısının değişimi



Şekil 26: Hasta insanların oranının çarpıklık katsayısının değişimi



Şekil 27. Hasta sivrisineklerin oranının çarpıklık katsayısının değişimi

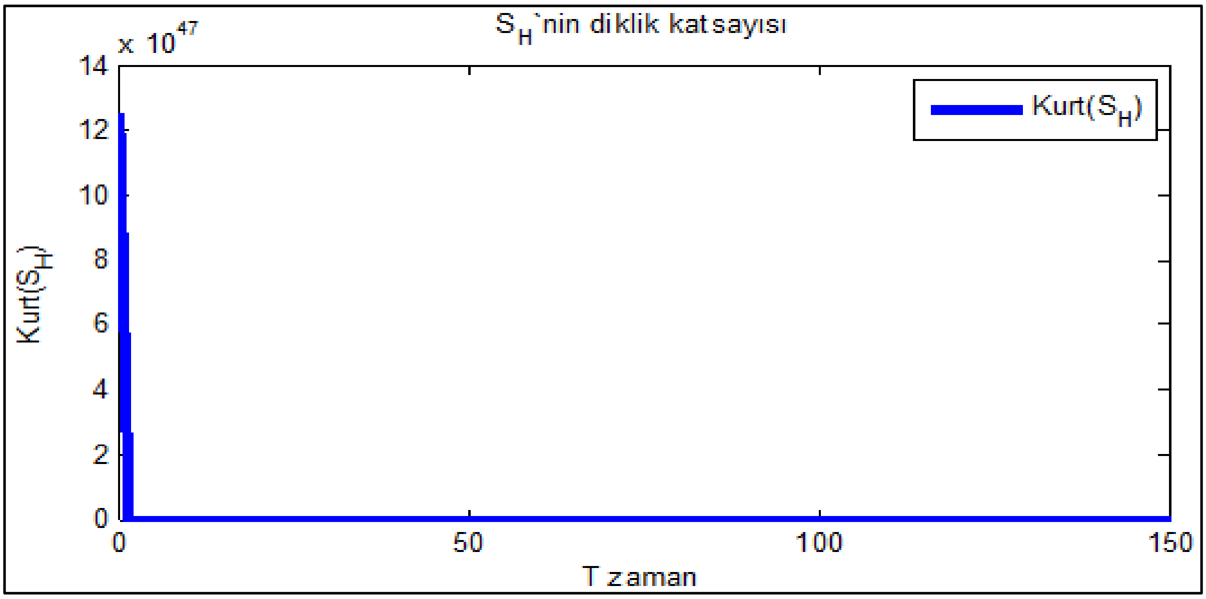
Model değişkenlerinin çarpıklık katsayılarındaki değişimler incelendiğinde elde edilen uç değerler aşağıdaki şekildedir (Tablo 10).

Tablo 10. Çarpıklık katsayılarında elde edilen en yüksek ve en düşük değerler

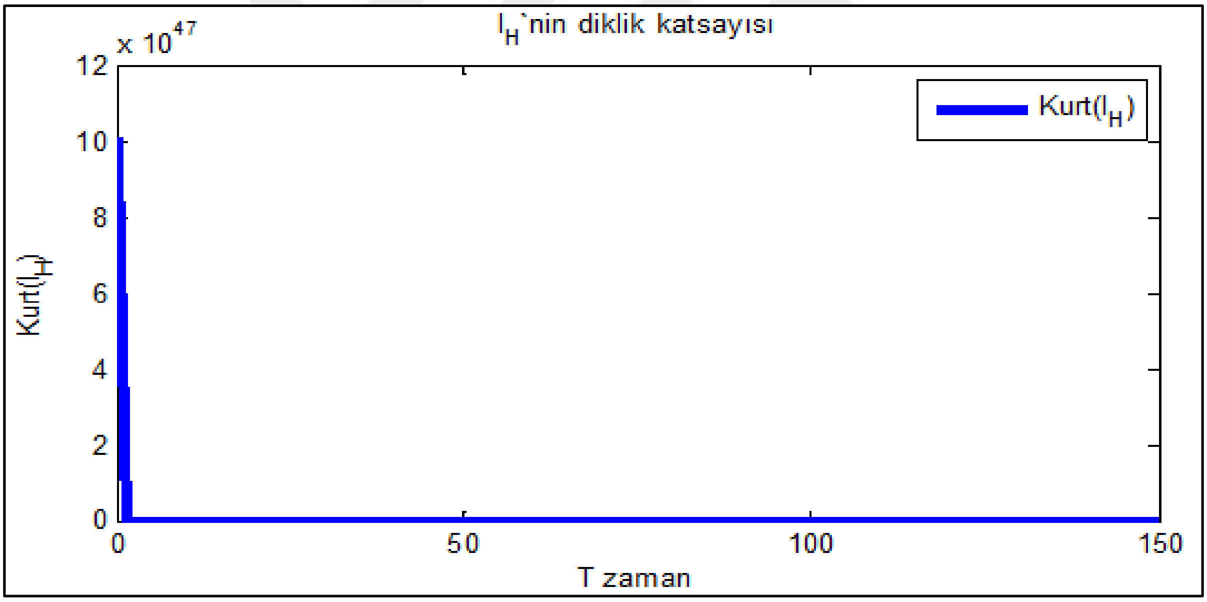
	$Skew(S_H)$	$Skew(I_H)$	$Skew(I_V)$
Maksimum Değer / Zamanı	215.6	263.7	2.626×10^{25}
	96	144	0
Minimum Değer / Zamanı	-1.088×10^{25}	-8.256×10^{24}	-5.436
	0	0	36

3.1.10. Basıklık Katsayıları (Kurtosis)

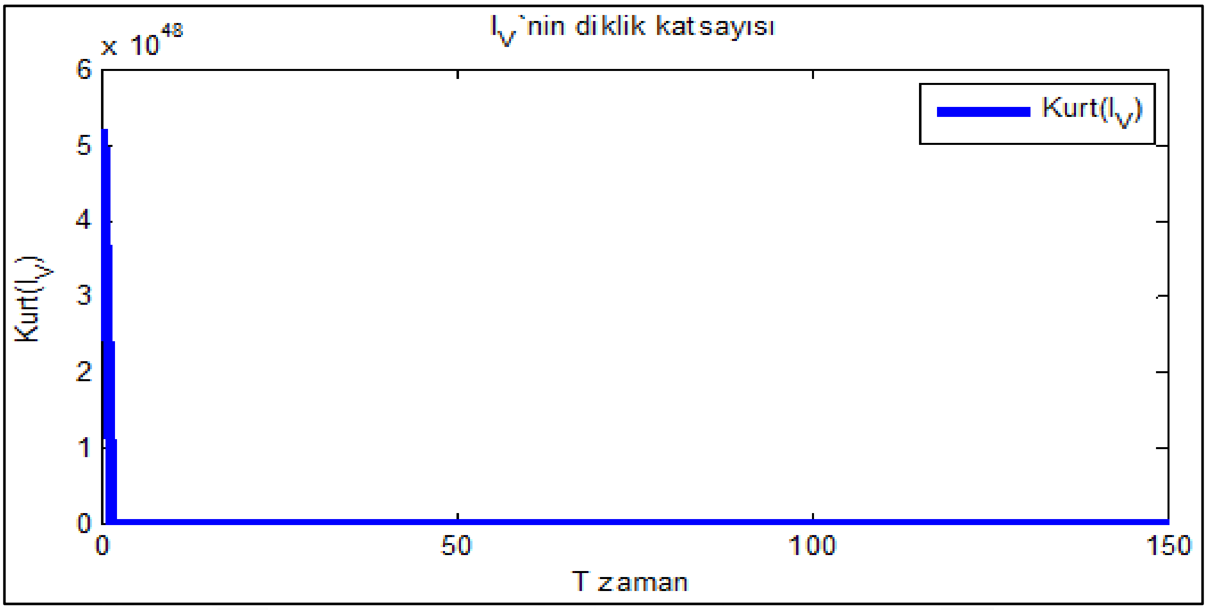
(5) denklem sisteminin incelenmesi sonucunda S_H^*, I_H^*, I_V^* değişkenlerinin basıklık katsayıları şekillerdeki gibi oluşur (Şekil 28, 29, 30).



Şekil 28. Hastalığa duyarlı insanların oranının basıklık katsayısının değişimi



Şekil 29. Hasta insanların oranının basıklık katsayısının değişimi



Şekil 30. Hasta sivrisineklerin oranının basıklık katsayısının değişimi

Model değişkenlerinin basıklık katsayılarındaki değişimler incelendiğinde elde edilen uç değerler şu şekildedir (Tablo 11).

Tablo 11. Basıklık katsayılarında elde edilen en yüksek ve en düşük değerler

	$Kurt(S_H)$	$Kurt(I_H)$	$Kurt(I_V)$
Maksimum Değer /	1.253×10^{48}	1.013×10^{48}	5.198×10^{48}
Zamanı	0	0	0
Minimum Değer /	6.184	10.22	11.83
Zamanı	30	21	21

4. İRDELEME ve SONUÇLAR

3. bölümde Dang Humması hastalığının rastgele modelindeki değişkenlerin çözüm eğrileri, beklenen değerleri, varyansları, standart sapmaları ve güven aralıkları için çizilen grafikler verilmiştir. Bu değişkenler için elde edilen uç değerler ve bu değerlerin hangi anlarda elde edildiğini belirten tablolar, grafiklerdeki eğrilerin davranışları ile birlikte sunulmuştur. Bu grafiklerden yapılabilecek matematiksel çıkarımların hastalık açısından yorumlanması ve deterministik sonuçların rastgele sonuçlarla kıyaslanarak hastalık modellenmesinde rastgele etkinin katkısının tartışılması gerekmektedir.

4.1. Sonuçların Hastalık Üzerine Yorumlanması

Bu çalışmada Dang Humması hastalığının deterministik matematiksel modeli olan (4) denklem sistemi parametrelerinin rastgele hale getirilmesi ile (5) rastgele doğrusal olmayan denklem sistemine dönüştürüldü. 3. bölümde (5) denklem sisteminin sayısal çözümlerinin simülasyonu ile elde edilen grafiklerden hastalıkla ilgili çıkarımlar yapmadan önce modelin iki önemli varsayımının hatırlanması gerekir.

$$N_H = S_H + I_H + R_H, \qquad \frac{d}{dt} N_H = 0.$$

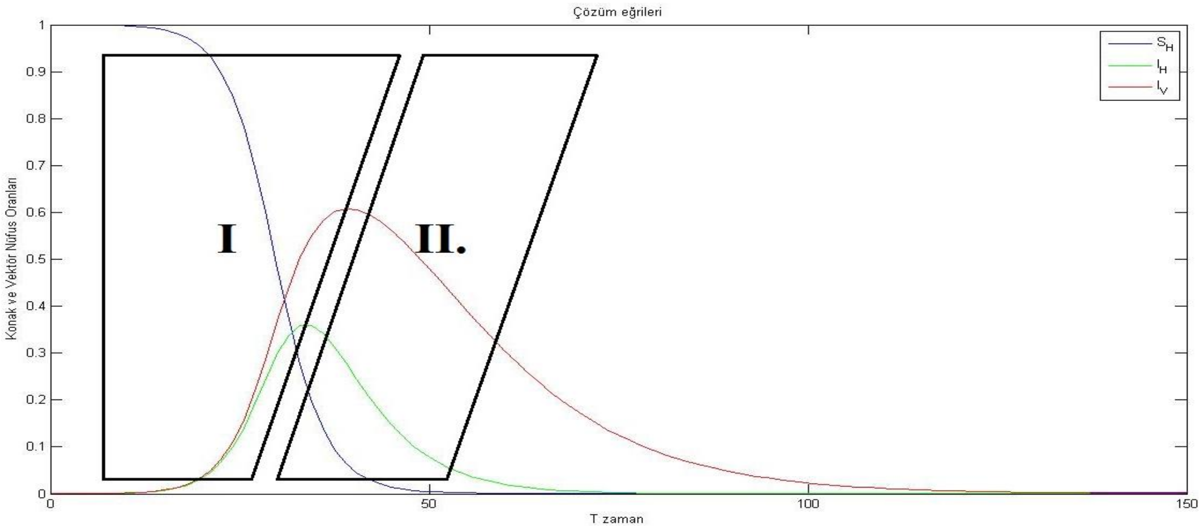
$$N_V = S_V + I_V, \qquad N_V \to \frac{A}{\mu_H}.$$

Grafiklerde incelenen değişkenler S_H^*, I_H^* ve I_V^* şeklindeydi yani hastalığa duyarlı (hasta olma potansiyeli olan) insanlar ile hasta insanlar ve sivrisinekler. $N_H = S_H + I_H + R_H$ koşulundan

$$S_H^* + I_H^* + R_H^* = 1$$

elde edildiğinden, S_H^*, I_H^* oranları için yaptığımız çıkarımlar kolaylıkla R_H^* için de yapılabilir. Benzer şekilde grafiklerden I_V^* için yapılan çıkarımlar aynı yaklaşımla S_V^* için de yapılır.

Aşama I: S_H^*, I_H^* ve I_V^* değişkenlerinin çözüm eğrilerini gösteren şekil incelendiğinde, hastalığın ilk dönemde çok yavaş ilerlediği değişkenlerdeki değişimin çok az olması göz önünde bulundurularak söylenebilir. $t = 10$ noktasına kadar bu şekilde yavaş bir ilerleme içinde olan hastalık bu noktadan itibaren ilerlemesini hızlandırır. Hasta insan ve sivrisineklerin sayısının ilk dönemdeki artışı üstel bir davranış gösterdiğinden, hastalığın ilk dönemde yavaş ilerlemesinin ve daha sonra hızlanmasının sebebinin Dang Humması virüsünün ilk anda popülasyonda çok az miktarda ($I_V^*(0) = 5.71432 \times 10^{-5}$) olması olarak düşünülebilir. Virüs popülasyonda yayıldıkça, doğada benzer bakteri ve canlıların üremelerinde de görüldüğü gibi üstel bir artış grafiğiyle hastalık da artış göstermektedir.

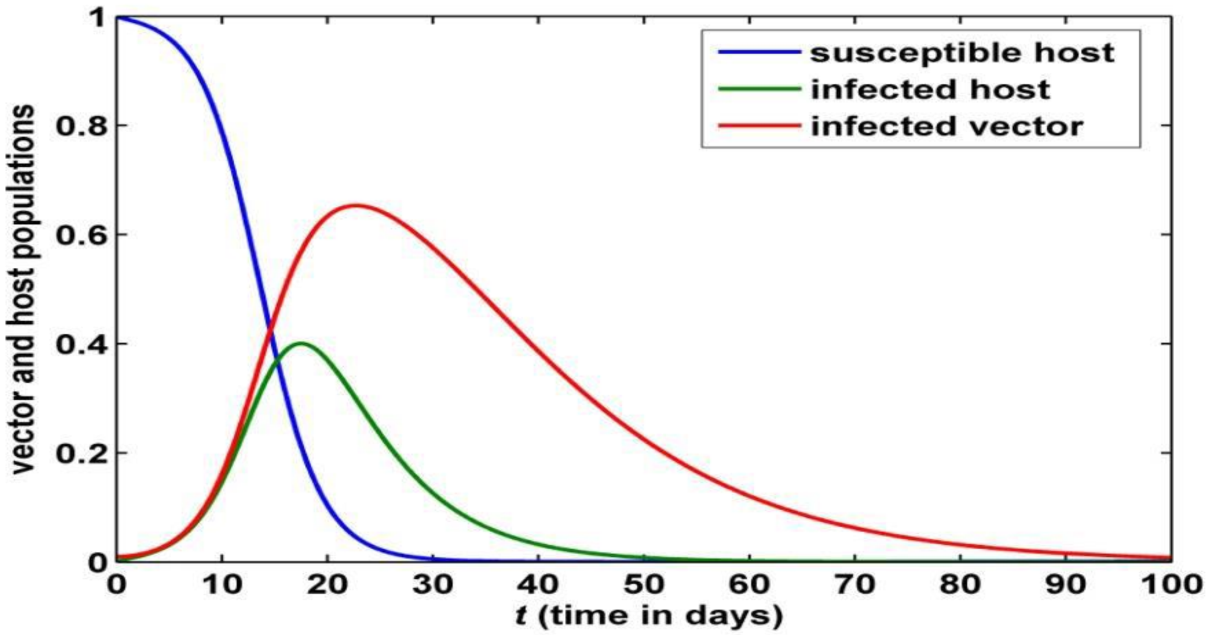


Şekil 31. Çözüm eğrileri grafiğinin analiz edildiği adımlar

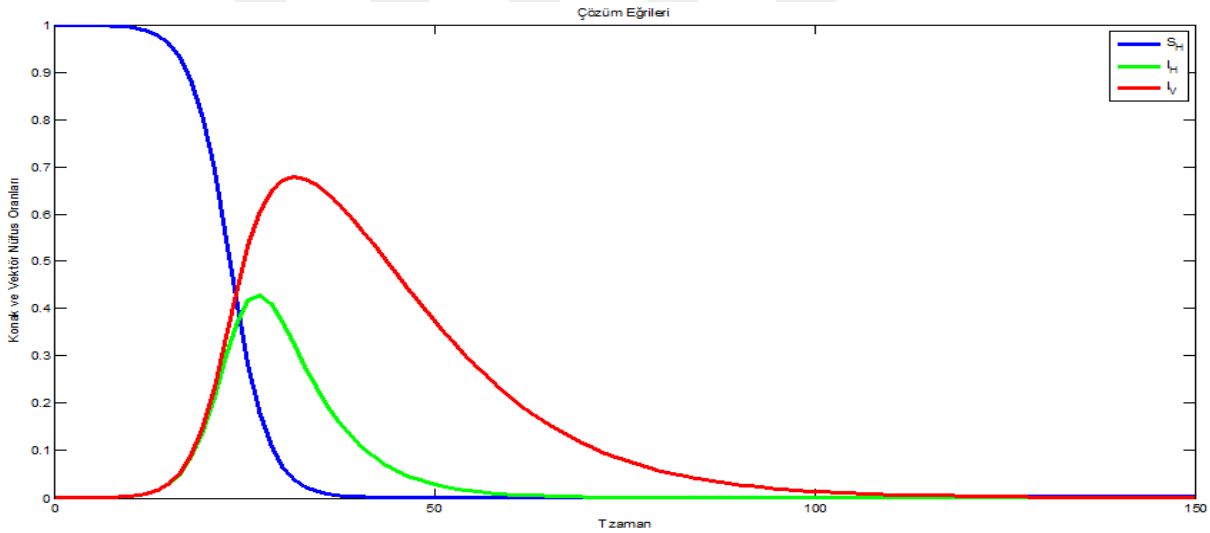
Aşama II: Grafiklerden çıkarım yapılacak ikinci nokta ise hastalığın düşüşe geçmesidir. I_H^* ve I_V^* değişkenlerinin eğrileri incelendiğinde ilk olarak I_H^*, yani hasta insanların maksimum noktasına ulaşıp sonra düşüşe geçtiği görülür. Bunun hemen ardından da I_V^*, yani hasta sivrisinekler maksimum değerine ulaşıp inişe geçmektedir. Hastalığın akış şemasından ve (5) denklem sisteminin incelenmesinden I_V^* ve I_H^* değişkenlerinin birbiri ile bağımlı olduğu görülmektedir, dolayısıyla hasta insanların oranının azalmaya başlamasının hasta sivrisineklerin sayısında da azalmaya sebep olduğu yorumu yapılabilir. Bu aşamadan sonra S_H^* ve I_H^* oranlarının sıfıra inmesi R_H^* oranının 1'e yaklaştığını yani toplumdaki insanların tamamının hastalığa bağışıklık kazanmış bireyler haline geldiğini gösterir. Benzer şekilde I_V^* oranının da sıfıra girmesi hastalığın sivrisinek popülasyonunda da etkisini yitirdiği anlamına gelir.

4.2. Deterministik ve Stokastik Modellerin Karşılaştırılması

Hastalığın seyri ve virüs dinamiklerinin rastgele durumda analizi yapıldıktan sonra rastgele etkiler altında deterministik duruma göre ne gibi farklılıkların görüldüğünü incelemek için Phaijoo ve Gurung tarafından 2015 yılında yapılan "Mathematical Study of Biting Rates of Mosquitoes in Transmission of Dengue Disease" adlı çalışmadaki sonuçlara göz atılabilir. Rastgele modelin tabanı olan deterministik sistemin incelenmesi sonucunda bu çalışmada şu grafik elde edilmiştir (Phaijoo ve Gurung, 2015):



Şekil 32. $b = 0.45$ değeri için deterministik çözüm eğrileri (Phaijoo ve Gurung, 2015)



Şekil 33. Aynı parametre değerlerinin rastgele etkiler altında incelenmesi ile elde edilen sonuçlar

Burada dikkat edilmesi gereken ilk nokta deterministik ve rastgele analizler sonucunda S_H^*, I_H^* ve I_V^* değişkenlerinin çok benzer davranışlar gösterdiğidir. Bu da rastgele incelemeler için kullanılan yöntemin gerçek dışı sonuçlara yol açmadığının kanıtıdır. Rastgele durum ile deterministik durum arasında göze çarpan ilk fark rastgele durumda hastalığın yayılmaya başlaması için belli bir süre geçerken deterministik durumda incelemenin başlangıcından itibaren hızlı bir yayılma görülüyor olmasıdır. Özellikle rastgele durumda $t = 10$ a kadar oldukça yavaş olan ilerleme deterministik durumda görülmemektedir. Sürecin başlangıcındaki bu durağan dönem deterministik sonuçların tepe noktasına ulaştığı ve neredeyse sıfıra vardığı noktaların da rastgele duruma oranla yaklaşık aynı oranda erken olmasına neden olmuştur.

Deterministik ve rastgele durumlardaki sonuçlar arasında fark edilebilecek farklardan bir diğeri ise hasta insanların ve sivrisineklerin oranı I_H^* ve I_V^* değişkenlerinin ulaştıkları maksimum değerleridir. Deterministik durumda 0.6 değerini çok az aşabilen I_V^* değişkeni rastgele durumda 0.7 değerine oldukça yaklaşmışken, deterministik durumda 0.40 değerine varan I_H^* değişkeni rastgele durumda ise bu değeri aşmıştır.

Yukarıda en belirginlerinden iki tanesi sayılan deterministik ve rastgele durumların arasındaki farklar hastalıkla ilgili yapılacak çalışmalarda önemli farklılıklara yol açabilme potansiyeline sahiptir. Örneğin hastalığın insan popülasyonundan neredeyse tamamen yok olması deterministik durumda yaklaşık 50 gün içinde gerçekleşmekte iken rastgele durumda yaklaşık 75 günde gerçekleşir. Benzer şekilde rastgele durumda insan popülasyonunun en kötü halde %40'ı hastalığa yakalanırken, deterministik durumda bu yüzde daha azdır.

Matematiksel modellerin hastalıkla mücadele kılavuz görevi üstelenecek sonuçlar vermesi, tedavi çalışmalarına yol göstermesi ve sağlık politikalarına yön vermesi beklenmektedir. Farklı ülkelerde model parametrelerinde yaşanabilecek 'çok küçük' değişiklikleri göz önünde bulundurmayan deterministik modellerden elde edilecek sonuçların, rastgele modellerden elde edilecek sonuçlara oranla ne denli farklı olabileceği bu iki örnekten de açık şekilde görülmektedir. Bu nedenle hastalıklarla ilgili modellemelerde rastgele çalışmaların yapılması gerekliliği ve rastgele analizlerin yaratacağı avantajlar Dang Humması örneği üzerinde de görülmüş olur.

5. ÖNERİLER

Hastalıkların rastgele modellenmesi ve rastgele modelleme ile ilgili yapılacak ek analizler elde edilecek sonuçların daha verimli kullanılabilmesi ve daha iyi sonuçların elde edilebilmesi açısından faydalı olacaktır. Örnek olarak Phaijoo ve Gurung'un 2015 yılındaki çalışmalarında yapılan analizlere benzer şekilde parametrelerin farklı değerlerinin sonuçlarda oluşturduğu etkilerin incelenmesi rastgele durum için de yapılarak bu parametrelerin hastalık üzerindeki etkileri rastgele durum için de analiz edilebilir. Bu şekilde hastalıkla mücadelede neye önem verilmesi ve hangi yolların izlenebileceği ile ilgili sonuçlar elde edilebilir.

Rastgele modellenmenin bir başka türü olarak stokastik diferansiyel denklemlerin kullanılarak stokastik modelleme yapılmasının da hastalıkla ilgili çalışmalara daha etkin katkı sağlama noktasında faydalı olacağı düşünülmektedir.

Özellikle rastgele modelin simülasyon sonuçları incelendiğinde beklenen değer ve varyans gibi karakteristiklerin daha kesin şekilde hesaplanabilmesi adına simülasyon sayısının artırılması yoluna başvurulabilir. Simülasyon sayısının çok daha fazla olması ile karakteristikler için gerçek değere çok daha yakın değerlerin elde edilmesi mümkün olacaktır.

Rastgele modellenme ve stokastik modelleme çalışmalarında denge noktalarının hesabı, bu noktalardaki kararlılık analizinin yapılması da hastalığın seyri hakkında matematiksel olarak farklı bir bakış açısı sağlayabilir ve faydalı sonuçlar sunar.

Son olarak rastgele modelleme çalışmalarında kullanılacak dağılımlarla ilgili de çalışmalar yapılması düşünülebilir. Rastgele etki için farklı dağılımlar kullanılması, bu dağılımların aynı anda farklı parametrelere uygulanması veya farklı dağılımlar için yapılan analiz sonuçlarının karşılaştırılması gibi çalışmalar, rastgele modelleme çalışmalarına zenginlik katacak ve rastgele modellemenin matematiksel çalışmalara katkısını artıracaktır.

6. KAYNAKLAR

1. Akdeniz F., Olasılık ve İstatistik, 19. Baskı, Akademisyen Kitapevi, Ankara, 2014.
2. Aliyev R., Stokastik Süreçler Teorisine Giriş, KTÜ Matbaası, Trabzon, 2010.
3. Bailey, N., The Mathematical Theory of Infectious Diseases and its Applications, Griffin, London, 1975.
4. Bhatt S., Gething P.W., Brady, O.J., Messina, J.P., Farlow, A.W., Moyes, C.L. et al, The global distribution and burden of dengue, Nature, 496 (2013) 504-507.
5. Bozdağ B., Stokastik Diferansiyel Denklemlerle Modelleme, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, 2010.
6. Brady, O.J., Gething, P.W., Bhatt, S., Messina, J.P., Brownstein, J.S., Hoen, A.G. et al, Refining the global spatial limits of dengue virüs transmission by evidence-based consensus, PLOS Negl Trop Dis, 6(8) (2012).
7. Bronson, R., Schaum's Outline of Differential Equations, 4th Edition, McGraw-Hill Education, New York, 2014.
8. Butcher, J.C., Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, New York, 2008.
9. Coşkun, H., Diferansiyel Denklemler, KTÜ Matbaası, Trabzon, 2002.
10. Cyganowski, S., Kloeden, P. Ve Ombach, J., From Elementary Probability to Stochastic Differential Equations with MAPLE®, Springer-Verlag, New York, 2001.
11. Dernek, A.N. ve Dernek A., Diferansiyel Denklemler, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2001.
12. Dietz, K., Transmission and control of arbovirus diseases. In D. Ludwig and K. L. Cooke, editors, Epidemiology, 104–121. SIAM, 1975.
13. Erkıp, A., Introduction to Theoretical Aspects of Ordinary Differential Equations, METU Publications, Ankara, 1992.
14. Esteva, L. ve Vargas, C., Analysis of a dengue disease transmission model, Mathematical Biosciences, 150 (1998) 131-151.
15. Feller W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume I, 3rd Edition John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968.
16. Feller W., An Introductin to Probability Theory and Its Application, Volume II, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1971.

17. Huang, H., Examples for Runge-Kutta methods, http://www.public.asu.edu/~hhuang38/example_Runge-Kutta.pdf, 23 Mart 2016.
18. Imran, M., Hassan, M., Dur-E-Ahmad, M. ve Khan, A., A comparison of a deterministic and stochastic model for Hepatitis C with an isolation stage, Journal of Biological Dynamics, 7, 1 (2013) 276-301.
19. Kermack, W.O. ve McKendrick, A.G., A Contribution the Mathematical Theory of Epidemics, Proceedings of The Royal Society A, 115, 772 (1927) 700-721.
20. Kloeden, P.E. ve Platen, E., Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1995.
21. Kolmogorov A. N., Foundations of the Theory of Probability, Chelsea Publishing Company, New York, 1956.
22. Lahrouz, A., Omari, L., Kiouach, D. ve Belmaati, A., Deterministic and Stochastic Stability of a Mathematical Model of Smoking, Statistics and Probability Letters , 81 (2011) 1276-1284.
23. Martcheva, M., An Introduction to Mathematical Epidemiology, Springer Science+Business Media, New York, 2015.
24. Merdan M., Bekiryazici Z. ve Kesemen T., Stochastic and Deterministic Stability of Models for Hepatitis C, 7th International Conference on Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications, Eylül 2015, Bakü, Abstracts Book: 114.
25. Merdan, M., ve Khaniyev, T., On the Behaviour of Solutions under the Influence of Stochastic Effect of Avian-Human Influenza Epidemic Model, International Journal of Biotechnology and Biochemistry, 4(1) (2008) 75-100.
26. Newton, I., Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum (The Method of Fluxions and Infinite Series), Opuscula, 1 (1744), 66.
27. Nasırova T., Khaniyev T., Yapar C., Ünver İ., Küçük Z., Olasılık, KTÜ Matbaası, Trabzon, 2009.
28. Öcal, Ç., Genelleştirilmiş Beta Müdahaleli (s,S) Tipli Rasgele Yürüyüş Süreci, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ, Trabzon, 2013.
29. Pang, L., Zhao, Z., Liu, S., Zhang, X., A Mathematical Model Approach for Tobacco Control in China, Applied Mathematics and Computation, 259 (2015) 497-509.

30. Phaijoo, G.R. ve Gurung, D.B., Mathematical Study of Biting Rates of Mosquitoes in Transmission of Dengue Disease, Journal of Science, Engineering and Technology, 11, 2 (2015) 25-33.
31. Shiryayev A. N., Gradute Texts in Mathematics: Probability, Spring Science+ Business Media, LLC, New York, 1984.
32. Soong, T.T., Random Differential Equations in Science and Engineering, Academic Press Inc., New York, 1973.
33. Tan, W. ve Wu, H., Stochastic Modeling of the Dynamics of $CD4^{+}$ T-Cell Infection by HIV ad Some Monte Carlo Studies, Mathematical Biosciences, 147 (1998) 173-205.
34. Yaacob, Y., Analysis of a Dengue Disease Transmission Model without Immunity, Matematika, 23(2) (2007) 75-81.
35. World Health Organization, Dengue and severe dengue, http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs117/en/, 23 Mart 2016.

ÖZGEÇMİŞ

Mohammed NAJMULDEEN, 1 Haziran 1990 tarihinde Irak-Türkmeneli'nin Kerkük şehrinde doğdu. 2002 yılında ilkokuldan mezun olup Türkmen Parlak Ortaokulu'na başlamıştı. 2009 yılında da liseden mezun oldu. Aynı yılda Musul Üniversitesi Bilgisayar Bilimleri ve Matematik Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğretimine devam edip, 2010 yılında Kerkük Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ne geçerek 2013 yılında lisans diploması ile mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisans programına başladı ve halen Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında eğitimine devam etmektedir. Ayrıca anadili Türkçe'nin yanında da iyi derecede Arapça ve İngilizce bilmektedir.