KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY ALT HYPER KAFESLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematikçi Sinan BAKIRTAŞ

MAYIS 2015
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY ALT HYPER KAFESLER

Matematikçi Sinan BAKIRTAŞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
‘‘YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK) ’’
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 08 / 05 /2015
Tezin Savunma Tarihi : 28 / 05 /2015

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Osman KAZANCI

Trabzon 2015

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında
Sinan BAKIRTAŞ tarafından hazırlanan

GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY ALT HYPER KAFESLER

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 28 / 05 / 2015 gün ve 1602 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	:	**Prof. Dr. Erdal KARADUMAN**	....
Üye	:	**Prof. Dr. Osman KAZANCI**	....
Üye	:	**Doç. Dr. Sultan YAMAK**	....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Öncelikle tez konusunun belirlenmesinden çalışmanın bu hale getirilmesine kadar yardımlarını esirgemeyen, öğrenim hayatımın her aşamasında değerli bilgilerini özveriyle paylaşan, bana inanan , bana yol gösteren ve her zaman desteğini hissettiğim saygıdeğer hocam Prof. Dr. Osman KAZANCI' ya, bu çalışma süresince hiçbir yardımdan kaçınmayan, eleştirileri ile çalışmama katkıda bulunan değerli hocam Doç. Dr. Sultan YAMAK' a sonsuz teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca hayatım boyunca desteklerini benden esirgemeyen başta annem ve babam olmak üzere sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Sinan BAKIRTAŞ
Trabzon 2015

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum ‘‘Genelleştirilmiş Fuzzy Alt Hyper Kafesler” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Osman KAZANCI ‘nın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 28/05/2015

Sinan BAKIRTAŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY ALT HYPER KAFESLER

Sinan BAKIRTAŞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Osman KAZANCI
2015, 44 Sayfa

Bu tezde; fuzzy kümeler ile hyper kafesler arasındaki ilişki araştırılmıştır. İlk önce fuzzy kümelerde fuzzy noktanın yarıçakışık kavramının bir genellemesi olan fuzzy kümelerde ‘‘aitolma ($\in$)’’ ve ‘‘k-yarıçakışık (q_k)’’ kavramları tanımlanmış. Bu yeni kavram kullanılarak fuzzy alt hyper kafesin (hyper idealin) genellemesi olan ($\in,\in\vee q_k$)-fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) kavramlarının cebirsel özellikleri göz önüne alınarak ($\in,\in\vee q_k$)-fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) ile fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) arasındaki ilişki araştırılmıştır.

Hyper kafes kavramı, kafes kavramının bir genellemesi olduğundan birinci bölümde tezin temelini teşkil eden kafes ve hyper kafesin temel özellikleri üzerinde durulmuştur. Ayrıca, fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) kavramı tanıtılmış ve fuzzy alt hyper kafesin (hyper idealin) cebirsel yapıları incelenmiştir.

Tezin ikinci bölümü iki kısımdan oluşmuştur. Birinci kısımda, fuzzy kümelerde fuzzy noktanın ‘‘aitolma ($\in$)’’ ve ‘‘k-yarıçakışık olma (q_k)’’ kavramları kullanılarak fuzzy alt hyper kafesin (hyper idealin) genellemesi olan ($\in,\in\vee q_k$)-fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) kavramları verilmiştir. İkinci kısımda, fuzzy hyper kafeslerde implikasyonlara bağlı fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) kavramları göz önüne alınmış ve implikasyon operatörlerinden Lukasiewciz lojik’e göre fuzzy alt hyper kafesler araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hyper kafes, Alt hyper kafes, Hyper ideal, Aitolma, k-yarıçakışık, Fuzzy Nokta, ($\in,\in\vee q_k$)- Fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal).

Master Thesis

SUMMARY

GENERALİZED FUZZY SUB-HYPERLATTİCES

Sinan BAKIRTAŞ

Karadeniz Technical University
The Graduate School Of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Osman KAZANCI

2015, 44 Pages

In this thesis, we consider a relationship between fuzzy sets and hyperlattices. We first introduce the concept of "belongingness" ($\in$) and "k-quasi-coincidence" (q_k) of a fuzzy point within a fuzzy set. This concept is a generalized concept of quasi-coincidence of a fuzzy point within a fuzzy set. By using this new idea, we consider algebraic structure $(\in,\in\vee q_k)$-fuzzy sub-hyperlattice (hyperideal) of a hyperlattice, and hence, a generalization of a fuzzy sub-hyperlattice (hyperideal) is given. Some related properties of fuzzy sub-hyperlattices (hyperideals) are described.

Since the structure of hyperlattice is a generalized of the structure of lattice, in the first section of the thesis we explored the basic properties of the hyperlattice and lattice. Also, the concept of fuzzy sub-hyperalattice (hyperideal) is introduced and algebraic structures of the fuzzy sub-hyperalattices (hyperideals) are examined.

The second section of this thesis consist of two part. In the first part, using the notions "belongingness ($\in$)" and "k-quasi-coincidence (q_k)" of fuzzy points within fuzzy sets, the concept of an $(\in,\in\vee q_k)$-fuzzy sub-hyperlattice (hyperideal) generalization of the concept a fuzzy sub-hyperlattice (hyperideal) is given. In the second part, we consider the concept of implication-based fuzzy sub-hyperlattice (hyperideal) of hyperlattices and research the implication operators in Lukasiewicz system of continuous-valued logic.

Key Words: Hyperlattice, Subhyperlattice, Hyperideal, Belongingness, k-quasi-coincidence, Fuzzy point, $(\in,\in\vee q_k)$-Fuzzy sub-hyperlattice (hyperideal).

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi,
$\mathcal{P}(A)$	: A kümesinin güç kümesi,
$\overline{B}$	: B nin üst sınırlarının kümesi,
$\underline{B}$	: B nin alt sınırlarının kümesi,
$\vee B$	: B nin en küçük üst sınırı,
$\wedge B$	: B nin en büyük alt sınırı,
$(L, \leq)$	: Kısmi sıralı bir küme,
$(L, \vee, \wedge)$	: Kafes,
L	: Kafes,
$(L, \vee, \wedge, 0, 1)$	: En büyük elemanı 1, en küçük elemanı 0 olan kafes,
$(L, \oplus, \otimes)$	: Hyper kafes,
F(L)	: L nin tüm fuzzy kümesi,
μ_t	: μ fuzzy kümesinin seviye kümesi,
$\mu_t^{>}$	: μ fuzzy kümesinin güçlü seviye kümesi,
$\mu_t^{\leq}$	: μ fuzzy kümesinin alt seviye kümesi,
$\mu_t^{<}$	: μ fuzzy kümesinin güçlü alt seviye kümesi,
χ_I	: I nın karakteristik fonksiyonu,
$Im(\mu)$	: μ nün resim kümesi,
x_t	: fuzzy nokta,
P	: fuzzy önerme,
[P]	: P nin doğruluk değeri,
I_m	: Early Zadeh implikasyon oparatörü,
I_α	: Lukasiewicz implikasyon operatörü,
I_g	: Standard star (Gödel) implikasyon operatörü,
I_{cg}	: Contraposition of Gödel implikasyon operatörü,
I_{gr}	: Gaines-Rescher implikasyon operatörü,
I_b	: Kleene-Dienes implikasyon operatörü,
I_{gg}	: Goguen implikasyon operatörü,

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Cebirsel hyper yapılar (Küme değerli yapılar) teorisi Fransız Matematikçi Marty F. tarafından ilk olarak 1934 yılında ortaya atılmıştır [33]. Bu teori Corsini P. [5] Mittas J. ve Konstantinidou, M. [28], Davvaz B. ve Leoreanu-Fotea V. [12], Ameri R. ve Zahedi M.M [1], Vougiouklis T. [42] tarafından geliştirilmiştir. Cebirsel hyper yapılar klasik cebirsel yapıların uygun bir genellemesidir. Klasik cebirsel yapılarda iki elemanın bir ikili işlem altındaki görüntüsü yine elaman olmasına karşın cebirsel hyper yapılarda iki elamanın hyper işlem altındaki görüntüsü bir kümedir. Bu noktadan haraketle birçok araştırmacı cebirsel hyper yapılar konusuna yoğunlaşmıştır. Özellikle hypergroup [23] hyperring [32], hypermodül [31] kavramları incelenmiştir. Corsini, P. ve Leoreanu-Fotea V. [6], Davvaz ve Leoreanu-Fotea V. [12] ve Vougiouklis T. [42] tarafından yazılan kitaplar bu teorinin gelişmesine büyük ölçüde katkıda bulunmuştur. Bu günlerde ise hyper yapılar teorisi matematiğin çeşitli alanlarında teorik fizikte kontrol mühendisliğinde bilgi sistemlerinde ve bilgisayar bilimlerinde birçok uygulama alanı bulmuştur. Bu gelişmelere paralel olarak birçok araştırmacı çeşitli kavramları ve sonuçları yorumlayarak teorinin gelişmesine büyük ölçüde katkıda bulunmuşlardır [7, 8, 9, 16, 17, 21, 22, 43]. Özellikle hyper kafesler ilk olarak Konstantinidou ve Mittas tarafından ele alınmıştır [30]. Distribütif hyper kafesler ve hyper kafeslerin hyper idealleri Rahnamai-Barghi, [35-36], Guo, Xin [21] tarafından çalışılmış ve bu çalışmalarla birlikte hyper kafes teorisi büyük ölçüde gelişme kaydetmiştir. Özellikle Rasouli ve Davvaz [37-38] hyper kafesler teorisi konusunda ilginç araştırmalar yaparak bu teorinin gelişmesini zenginleştirmişlerdir.

Zadeh L. A., [44] tarafından ilk olarak 1965 yılında önerilen fuzzy kümeler teorisi temel cebirsel kavramlarının genelleştirilmesinde büyük katkı sağlamıştır. Dolayısıyla fuzzy cebirsel yapılar matematikte önemli bir role sahip olup bir çok alanda uygulama alanı bulmuştur. Bu temel alanlardan bazıları: teorik fizik, bilgisayar bilimleri, kontrol mühendisliği, enformasyon bilimleri, lojik, küme teori, grup teori, reel analiz ve ölçüt teori. Fuzzy küme teorisi Rosenfeld [39] tarafından fuzzy cebirsel yapılara taşınarak bir grubun fuzzy alt grubu tanımlanmıştır. Das [10] seviye alt grupları üzerine çalışmıştır. Fuzzy grupların yeni bir genellemesi olan $(\in, \in\vee q)$-fuzzy alt grup ilk olarak Bhakat ve Das [2-3] tarafından fuzzy noktaların ait olma ve çakışık kavramları kullanılarak araştırılmıştır. Gerçekte, $(\in, \in\vee q)$-fuzzy alt gruplar Rosenfeld tarafından literatürde yer alan fuzzy alt grupların önemli ve kullanışlı bir genellemesidir. Bu kavram [1, 3, 4, 6, 14, 18, 19, 20] çalışmalarda ele alınmış hatta Rosenfeld ve Das tarafından araştırılan fuzzy grup kavramının bir genellemesi [41] verilmiştir.

Fuzzy küme teorisinin önemli araştırma konularından biri de fuzzy hyper cebirsel yapılardır. Fuzzy küme teorisi ile hyper cebirsel yapılar arasında oldukça fazla çalışmalar mevcuttur. İlk olarak fuzzy kavramı Zahedi [43] tarafından fuzzy hyper gruplara genişletilmiş bu teori daha sonra Corsini [7], Corsini ve Leoreanu-Fotea V. [8], Leoreanu-Fotea V. [31], Davvaz [16], Davvaz ve Corsini [17] ve birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. [39- 45]. Fuzzy nokta kavramı kullanılarak fuzzy hyper cebirsel yapılar Davvaz ve Corsini [13, 15], Kazancı, Davvaz ve Yamak [24-26] Kazancı ve Davvaz [27] tarafından araştırılmıştır.

Bu tezde ise hyper kafesler fuzzy hyper kafesler ve $(\in, \in\vee q_k)$-fuzzy hyper kafeslerin cebirsel yapısı araştırılmıştır. Birinci bölümde kafeslerin, hyper kafeslerin ve fuzzy hyper kafeslerin cebirsel yapısı incelenmiştir. İkinci kısımda fuzzy nokta kavramı fuzzy kümeler ile kullanılarak $(\in, \in\vee q_k)$-fuzzy hyper kafesleri araştırılmıştır. Genel olarak $(\in, \in\vee q_k)$-fuzzy hyper kafesler $(\in, \in\vee q)$-fuzzy hyper kafeslerin ve de fuzzy hyper kafeslerin bir genellemesidir. Ayrıca implikasyonlara bağlı fuzzy hyper kafesler tanımlanmış ve $(\in, \in\vee q)$-fuzzy hyper kafesler $(\in, \in\vee q_k)$-fuzzy hyper kafeslerin özel bir hali olduğu görülmüştür. Son olarak implikasyonlara bağlı fuzzy hyper kafesler ile fuzzy hyper kafesler arasındaki ilişki verilmiştir.

1.2 Sıralı Kümeler Anlamında Kafesler

Bu bölümde tezin ana konusuna kaynak teşkil edecek olan temel bilgiler [4, 11, 29 35, 36, 40] kaynakları baz alınarak verilmiştir.

Tanım 1.2.1 $L \neq \emptyset$ olan bir küme ve ‘‘$\leq$’’ L üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. ‘‘$\leq$’’ bağıntısına L üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı denir. $\Leftrightarrow \forall\ a, b, c \in L$ için,

i) $a \leq a$,

ii) $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$,

iii) $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$

dir . Bu durumda $(L , \leq)$ ikilisine bir kısmi sıralı küme denir.

Tanım 1.2.2 $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $B \subseteq L$ ve $c, d \in L$ olsun.

i) $\forall b \in B$ için $c \leq b$ ise c elemanına B kümesinin bir alt sınırı denir.

ii) $\forall b \in B$ için $b \leq d$ ise d elemanına B kümesinin bir üst sınırı denir.

Tanım 1.2.3 $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme, $B \subseteq L$ ve $a_0 \in B$ olsun.

i) $\forall b \in B$ için $a_0 \leq b$ ise a_0 elemanına B kümesinin en küçük elemanı denir.

ii) $\forall b \in B$ için $b \leq a_0$ ise a_0 elemanına B kümesinin en büyük elemanı denir.

Eğer L nin en küçük (en büyük) elemanı mevcut ise, bu eleman 0 (1) ile gösterilir.

Tanım 1.2.4 $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $B \subseteq L$ olsun. B nin tüm alt sınırlarının oluşturduğu küme $\underline{B}$ ve tüm üst sınırlarının oluşturduğu küme $\overline{B}$ ile gösterilsin. Bu taktirde,

i) $\underline{B} \neq \emptyset$ olan bir küme ve bu kümenin en büyük elemanı mevcut ise bu elemana B kümesinin en büyük alt sınırı (infimumu) denir ve $\inf B$, $\wedge B$, $\wedge_{b \in B}$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

ii) $\overline{B} \neq \emptyset$ olan bir küme ve bu kümenin en küçük elemanı mevcut ise bu elemana B kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir ve $\sup B$, $\vee B$, $\vee_{b \in B}$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

Eğer $B = \emptyset$ ise açık olarak $\vee\emptyset = 0$ ve $\wedge\emptyset = 1$ dir.

Tanım 1.2.5 $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun.

i) $\forall a,b \in L$ için $\inf\{a,b\}$ mevcut ise L'ye bir $\wedge$-yarıkafes,

ii) $\forall a,b \in L$ için $\sup\{a,b\}$ mevcut ise L'ye bir $\vee$-yarıkafes,

iii) $\forall a,b \in L$ için $\inf\{a,b\}$ ve $\sup\{a,b\}$ mevcut ise L'ye bir kafes,

denir.

Teorem 1.2.6 $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in L$ olsun. Bu taktirde, $a_1 \leq a_2$ ve $b_1 \leq b_2$ ise $a_1 \vee b_1 \leq a_2 \vee b_2$ dir.

Tanım 1.2.7 $(L, \leq)$ bir kafes, $\emptyset \neq H \subseteq L$ olmak üzere, $\forall a, b \in H$ için $a \vee b \in H$ ve $a \wedge b \in H$ ise, H'ye L'nin bir alt kafesi denir.

Tanım 1.2.8 $(L, \leq)$ bir kafes olsun.

i) Eğer L kafesinin en küçük elemanı mevcut ise L ye alttan sınırlı bir kafes denir ve $(L, \leq, 0)$ ile gösterilir.

ii) Eğer L kafesinin en büyük elemanı mevcut ise L ye üsten sınırlı bir kafes denir ve $(L, \leq, 1)$ ile gösterilir.

iii) L kafesine sınırlıdır denir $\Leftrightarrow$ L alttan ve üstten sınırlıdır. Eğer L sınırlı bir kafes ise bu $(L, \leq, 0, 1)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.9 $(L, \leq)$ bir kafes olsun. L sonlu bir küme ise $(L, \leq)$ kafesine sonlu kafes denir. Özellikle her sonlu kafes sınırlıdır.

Önerme 1.2.10 $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. $(L, \leq)$ sınırlı bir kafestir. $\Leftrightarrow$ L nin her sonlu alt kümesi supremum ve infimuma sahiptir.

Teorem 1.2.11 $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $A, B \subseteq L$ sonlu kümeler olmak üzere,

$$\vee(A \cup B) = (\vee A) \vee (\vee B)$$

$$\wedge(A \cup B) = (\wedge A) \wedge (\wedge B)$$ dir.

Tanım 1.2.12 $(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $a, b \in L$ olsun. Eğer $a \leq b$ veya $b \leq a$ koşullarından biri sağlanıyorsa, a ve b elemanlarına kıyaslanabilir elemanlar denir. Aksi halde kıyaslanamaz elemanlar denir.

Tanım 1.2.13 $(L, \leq)$ bir kısmi sıralı olsun. L nin herhangi iki elemanı kıyaslanabilir ise L ye tam sıralı veya zincir denir.

Tanım 1.2.14 $(L_1, \leq, 0_1, 1_1)$ ve $(L_2, \leq, 0_2, 1_2)$ bir sınırlı kafes olmak üzere,

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2$$

kısmi sıralaması ile tanımlı $(L_1 \times L_2, \leq, (0_1, 0_2), (1_1, 1_2))$ sınırlı kafesine L_1 ve L_2 kafeslerinin (kartezyen) çarpımı denir.

1.3 Cebirsel Yapılar Anlamında Kafesler

Tanım 1.3.1 $L \neq \emptyset$ olan bir küme $\wedge$ ve $\vee$, L üzerinde tanımlı ikili işlemler olsun. $(L, \wedge, \vee)$ cebirine bir kafes denir. $\Leftrightarrow$ $\forall$ a, b, c $\in$ L için

- **i)** $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$ (komutatif),
- **ii)** $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (asosyatif),
- **iii)** $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$ (idempotent),
- **iv)** $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$,

dır. Bu durumda L kafesi $(L, \wedge, \vee)$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.2 $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ cebirsel kafesine sınırlı kafes denir. $\Leftrightarrow$ L'nin ‘‘$\vee$’’ ve ‘‘$\wedge$’’ ikili işlemlerinin birim elemanı mevcuttur.

Kafeslerin cebirsel yorumu evrensel cebirde önemli bir rol oynar. Kafesler grup-benzeri cebirsel yapılar ailesi ile bazı bağlantılara sahiptir. Çünkü infimum ve supremum ikili işlemleri komutatif ve asosyatiftir. Bu durumda bir kafesin , tanım kümeleri aynı olan iki komutatif yarı gruptan oluştuğu görülebilir. Kafesi özellikle sınırlı alırsak, bu taktirde bu yarı gruplar komutatif manoidler olur.

Komutatif ve asosyatiflikten dolayı, supremum ve infimum ikili işlemlerinin iki eleman yerine boştan faklı sonlu kümeler için tanımlanabileceği düşünülebilir. Teorem 1.2.11 ile $\vee\emptyset = 0$ ve $\wedge\emptyset = 1$ olduğundan sınırlı kafesler genel kafeslerden daha özeldir. Dolayısıyla birçok yazar bütün kafeslerin sınırlı olmasını arzu eder.

Tanım 1.3.3 $(L_1, \wedge_1, \vee_1\ 0_1, 1_1)$ ve $(L_2, \wedge_2, \vee_2\ 0_2, 1_2)$ iki sınırlı kafes olsun. $L_1 \times L_2$, üzerindeki infimum ve supremum , sırasıyla, $\forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L_1 \times L_2$ için

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge_1 x_2, y_1 \wedge_2 y_2),$$

$$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee_1 x_2, y_1 \vee_2 y_2)$$

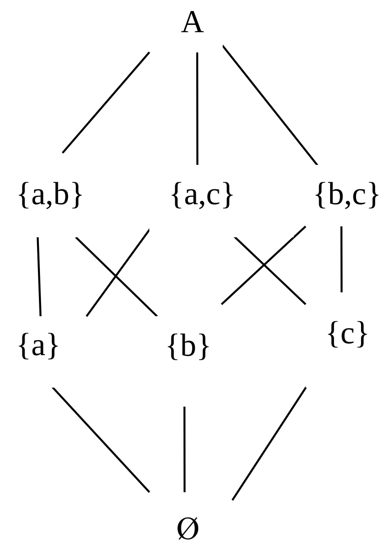
işlemleri ile tanımlı $(L_1 \times L_2, \wedge, \vee, (0_1, 0_2), (1_1, 1_2))$ sınırlı kafesine L_1 ve L_2 kafeslerinin (kartezyen) çarpımı denir.

Sıralı kümeler anlamında kafesler ile cebirsel yapılar anlamında kafesler arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 1.3.4 (L, ∧, ∨) bir kafes olsun. L üzerinde ‘‘≤’’ sıralama bağıntısı $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$ olarak tanımlasın. Bu takdirde (L, ≤), Tanım 1.2.5 ile bir kafestir ve ∀ a, b ∈ L için,
$a \vee b = \sup \{a, b\}$ ve $a \wedge b = \inf \{a, b\}$ dir.

Örnekler 1.3.5

1. A bir küme olmak üzere ($\mathcal{P}(A)$, ⊆) kısmi sıralı bir kümedir. Her X, Y ∈ $\mathcal{P}(A)$ için, ‘‘ $X \wedge Y = X \cap Y$, $X \vee Y = X \cup Y$ ’’ ikili işlemleri ile birlikte sınırlı bir kafestir. Özellikle A={a,b,c} için ($\wp(A)$, ⊆) kafesinin kafes diyagramı Şekil 1 de verilmiştir.



Şekil 1. A={a,b,c} kafes diyagramı

2. ℕ doğal sayılar kümesi doğal sıralaması ile birlikte bir kafestir. Burada 0 en küçük elemandır, ancak en büyük eleman yoktur.

3. ℕ doğal sayılar kümesi üzerinde “≤” bağıntısı “$a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$” olarak tanımlanırsa, (ℕ, ≤) sınırlı bir kafestir. Bu sıralama bağıntısına göre, (ℕ, ≤) kafesinin en büyük ve en küçük elemanları, sırasıyla, 0 ve 1 dir.

Tanım 1.3.6 L bir kafes ve Ø ≠ I ⊆ L olsun. I ‘ya L ’nin bir ideali denir. ⇔

i) ∀ a,b ∈ I için $a \vee b \in I$,

ii) ∀ a ∈ I , x ∈ L için $x \leq a$ ise x ∈ I

dır.

1.4 Hyper Kafesler, İdealler ve Homomorfiler

Tanım 1.4.1 [21] L≠Ø olan bir küme ve $\mathcal{P}^*(L)=\{\, A \mid \emptyset\neq A\subseteq L\}$ olsun. ″o″ : LxL $\rightarrow\mathcal{P}^*(L)$ dönüşümüne L üzerinde bir hyper işlem veya küme değerli işlem denir. ∀ a, b ∈ L ve A, B ∈ $\mathcal{P}^*(L)$ için;

i) $aoA=\{a\}oA=\bigcup_{x\in A} aox$,

ii) $Aoa= Ao\{a\}=\bigcup_{x\in A} xoa$,

iii) $AoB =\bigcup_{x\in A,\ y\in B} xoy$,

olarak tanımlanır.

Tanım 1.4.2 [21] L≠Ø olan bir küme ve ‘‘⊕,⊗’’ L üzerinde tanımlı iki hyper işlem olsun. Aşağıdaki koşulları gerçekleyen (L, ⊕, ⊗) üçlüsüne bir hyper kafes denir.∀a, b, c ∈ L için

H_1) $a\in a\oplus a$, $a\in a\otimes a$,

H_2) $a\oplus b = b\oplus a$, $a\otimes b = b\otimes a$,

H_3) $(a\oplus b)\oplus c = a\oplus(b\oplus c)$, $a\otimes(b\otimes c) = (a\otimes b)\otimes c$,

H_4) $a\in a\oplus(a\otimes b)$, $a\in a\otimes(a\oplus b)$

dir.

Örnekler 1.4.3

1) L={a,b} olsun. L üzerinde ⊕ ve ⊗ hyper işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

⊕	a	b
a	{a,b}	{b}
b	{b}	{b}

⊗	a	b
a	{a,b}	{a,b}
b	{a,b}	{b}

Şekil 2. (L, ⊕, ⊗) Hyper kafes

Açık olarak (L, ⊕, ⊗) bir hyper kafestir.

2) L≠ Ø olan bir küme ve L üzerinde ‘‘⊕, ⊗’’ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın. a, b∈L için a⊕b={a, b}, a⊗b={a, b}. Bu taktirde olarak (L, ⊕, ⊗) bir hyper kafestir.

3) (L, $\leq$, 0, 1) kısmi sıralı bir küme ve L üzerinde ‘‘$\oplus$, $\otimes$’’ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın. a, b$\in$L için, $a\oplus b=\{x \mid x \leq a,\ x \leq b\}$, $a\otimes b=\{x \mid a \leq x,\ b \leq x\}$. Bu taktirde (L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafestir.

Bu örnekte görüldüğü gibi kısmi sıralı bir küme üzerinde hyper kafes yapısı açıklanabiliyor.

4) (L, $\wedge$, $\vee$) bir kafes ve ‘‘$\oplus$’’ ve ‘‘$\otimes$’’ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın. a, b$\in$L $a\oplus b=\{a\wedge b\}$, $a\otimes b=\{a\vee b\}$. Bu taktirde, (L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafestir.

Bu örnekte görüldüğü gibi hyper kafesler kafeslerin bir genellemesidir.

Önerme 1.4.4 [21] L$\neq \emptyset$ olan bir küme ve ‘‘$\oplus$, $\otimes$’’ L üzerinde tanımlı iki hyper işlem olsun. Bu taktirde, (L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafestir. $\Leftrightarrow$A, B$\in\mathcal{P}^*$(L) için aşağıdaki koşullar gerçeklenir.

1) $A\subseteq A\oplus A$, $A\subseteq A\otimes A$

2) $A\oplus B=B\oplus A$, $A\otimes B=B\otimes A$

3) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$, $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$

4) $A\subseteq A\oplus(A\otimes B)$, $A\subseteq A\otimes(A\oplus B)$

dir.

Tanım 1.4.5 [37] $L_1 = (L,\ \oplus_1,\ \otimes_1)$ ve $L_2 = (L,\ \oplus_2,\ \otimes_2)$ iki hyper kafes ve φ:$L_1\rightarrow L_2$ bir dönüşüm olsun.

i) φ ye zayıf hyper kafes homomorfisi denir $\Leftrightarrow$ $\forall$ a, b $\in L_1$ için,

$\varphi(a\oplus_1 b) \subseteq \varphi(a)\oplus_2 \varphi(b)$ ve $\varphi(a\otimes_1 b) \subseteq\varphi(a) \otimes_2 \varphi(b)$.

ii) φ ye güçlü hyper kafes homomorfisi denir $\Leftrightarrow$ $\forall$ a, b $\in L_1$ için,

$\varphi(a\oplus_1 b)= \varphi(a) \oplus_2 \varphi(b)$ ve $\varphi(a\otimes_1 b)= \varphi(a) \otimes_2 \varphi(b)$.

φ: $L_1\rightarrow L_2$ hyper kafes homomorfisi, örten ise φ ye epimorfi, 1-1 ise φ ye monomorfi, 1-1 ve örten ise φ ye izomorfi denir.

Tanım 1.4.6 [37] $L_1 = (L,\ \oplus_1,\ \otimes_1)$ ve $L_2 = (L,\ \oplus_2,\ \otimes_2)$ iki hyper kafes ve φ:$L_1\rightarrow L_2$ bir hyper kafes homomorfisi olsun. Çek$\varphi=\{(a,b) \in L_1\times L_2 \mid \varphi(a)= \varphi(b)\}\subseteq L_1\times L_2$ kümesine φ homomorfisinin çekirdeği denir.

Tanım 1.4.7 [37] $L \neq \emptyset$ olan bir küme ve $\oplus$, $\otimes$ L üzerinde tanımlı iki hyper işlem olsun. $\forall$ a, b $\in$ L için $a \oplus b = L$ ve $a \otimes b = L$ olarak tanımlanırsa (L, $\oplus$, $\otimes$) bir kafes olup bu kafese trivial hyper kafes denir.

Tanım 1.4.8 [37] L= (L, $\oplus$, $\otimes$) hyper kafes ve $A \in \mathcal{P}^*(L)$ olsun. $\forall$ a, b $\in$ A için $a \oplus b$, $a \otimes b \in \mathcal{P}^*(L)$ ise A'ya L'nin alt hyper kafesi denir. Bir başka deyişle A, L nin bir alt hyper kafesidir. $\Leftrightarrow$ A, $\oplus$ ve $\otimes$ hyper işleme kapalıdır.

Örnek 1.4.9 L={ a,b,c,d } ve L üzerinde $\oplus$ ve $\otimes$ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\otimes$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	{a,b}
c	a	a	c	c
d	a	{a,b}	c	d

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	b	{c,d}	d
b	b	b	d	d
c	{c,d}	d	{c,d}	d
d	d	d	d	d

Şekil 3. (L, $\oplus$, $\otimes$) Hyper kafes.

(L,$\oplus$,$\otimes$) nın hyper kafes olduğu kolaylıkla gösterilebilir. S_1={ a,d}$\subseteq$L, S_2={c,d }$\subseteq$L alt hyper kafestir. S_3={ a,c }$\subseteq$L için $a \oplus c$={ c,d } $\not\subseteq$ { a,c } olduğundan S_3 alt hyper kafes değildir.

Önerme 1.4.10 [37] L=(L, $\oplus$, $\otimes$) hyper kafes, S_1 ve S_2 iki alt hyper kafes olsun. Eğer $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ ise $S_1 \cap S_2$ alt hyper kafestir.

Uyarı 1.4.11 İki alt hyper kafesin birleşiminin alt hyper kafes olması gerekmez.

Örnek 1.4.12 Örnek 1.4.9 da tanımlanan hyper kafesi göz önüne alalım. S_1={b}, S_2={c}$\subseteq$L için S_1, S_2 L nin alt hyper kafesidir. $S_1 \cup S_2$={b,c}$\subseteq$L alt hyper kafes değildir. Çünkü $b \otimes c$={a}$\not\subseteq S_1 \cup S_2$ dir.

Önerme 1.4.13 [37] $L_1 = (L, \oplus_1, \otimes_1)$ ve $L_1 = (L, \oplus_2, \otimes_2)$ iki hyper kafes ve φ: L→L_2 strong hyper kafes homomorfisi olsun. Bu taktirde,

1) A ∈ $\mathcal{P}^*(L_1)$ alt hyper kafes ise φ(A) ∈ $\mathcal{P}^*(L_2)$ alt hyper kafes,

2) B ∈ $\mathcal{P}^*(L_2)$ alt hyper kafes ise φ^{-1}(B) ∈ $\mathcal{P}^*(L_1)$ alt hyper kafestir.

Tanım 1.4.14 $L_1 = (L, \oplus_1, \otimes_1)$ ve $L_1 = (L, \oplus_2, \otimes_2)$ iki hyper kafes olsun. $L_1 \times L_2$ üzerinde "$\bullet$ ve $\circ$" iki hyper işlem aşağıdaki gibi tanımlansın.

∀ (a,b), (c,d) ∈ $L_1 \times L_2$ için,

$(a,b) \bullet (c,d)=\{ (e,f) \mid e \in a\oplus_1 c,\ f \in b \oplus_2 d \}$

$(a,b) \circ (c,d)=\{(m,n) \mid m \in a\otimes_1 c,\ n \in b\otimes_2 d\}$

Bu taktirde, $(L_1 \times L_2, \bullet, \circ)$ hyper kafes olup bu kafese L_1 ve L_2 hyper kafeslerinin direkt çarpımı denir.

Teorem 1.4.15 [37] $L_1 = (L, \oplus_1, \otimes_1)$ ve $L_1 = (L, \oplus_2, \otimes_2)$ iki hyper kafes olsun. Bu taktirde, $L_1 \times L_2 = (L_1 \times L_2, \bullet, \circ)$ hyper kafestir.

Önerme 1.4.16 [37] $L_1 = (L, \oplus_1, \otimes_1)$ ve $L_1 = (L, \oplus_2, \otimes_2)$ iki hyper kafes A∈$\mathcal{P}^*(L_1)$ alt hyper kafes B∈$\mathcal{P}^*(L_2)$ alt hyper kafes olsun. Bu taktirde, A×B alt hyper kafestir.

Tanım 1.4.17 L=(L, ⊕, ⊗) hyper kafes Ø ≠ I ⊆ L olsun. I ya hyper ideal denir . ⇔

∀ a ∈ I, x ∈ L için,

i) $a \oplus x \in \wp^*(I)$

ii) $a \otimes x \in \wp^*(I)$

dır.

Bu tanım ile her hyper idealin alt hyper kafes olduğu açıktır. Ama bunun tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 1.4.18 Örnek 1.4.9 da tanımlanan L={a,b,c,d} hyper kafesini göz önüne alalım. A={a,d}⊆ L alt hyper kafestir. x=c∈L için a⊕c={c,d}⊈A olduğundan A hyper ideal değildir. B={c,d}⊆ L için B alt hyper kafes olup b∈L için b⊗d={a,b}⊈B olduğundan B hyper ideal değildir.

1.5. Fuzzy Cebirsel Yapılar

Tanım 1.5.1 [29] L bir küme olmak üzere, bir $\mu: L \to [0,1]$ fonksiyonuna L üzerinde bir fuzzy küme denir. $x \in L$ için $\mu(x)$, L nin üyelik derecesini temsil eder.

Bu çalışmada L nin tüm fuzzy kümesi F(L) ile gösterilecek.

Tanım 1.5.2 [29] $\mu, \vartheta \in F(L)$ olsun.

i) Her $x \in L$ için $\mu(x) \leq \vartheta(x)$ ise μ ye, ϑ nün bir fuzzy alt kümesi denir ve $\mu \subseteq \vartheta$ ile gösterilir.

ii) Her $x \in L$ için $\mu(x) = \vartheta(x)$ ise μ ve ϑ fuzzy alt kümelerine eşittir denir ve $\mu = \vartheta$ yazılır.

iii) μ fuzzy alt kümesinin tümleyeni μ^c, $\forall x \in L$ için $\mu^c(x) = 1 - \mu(x)$ olarak tanımlanır.

iv) μ ve ϑ nün kesişimi $\mu \cap \vartheta$ ile gösterilir, $\forall x \in L$ için $(\mu \cap \vartheta)(x) = \inf\{\mu(x), \vartheta(x)\}$ olarak tanımlanır.

v) μ ve ϑ nün birleşimi $\mu \cup \vartheta$ ile gösterilir, $\forall x \in L$ için$(\mu \cup \vartheta)(x) = \sup\{\mu(x), \vartheta(x)\}$ olarak tanımlanır.

vi) $\{\mu_i(x) \mid i \in I\}$ fuzzy alt kümeleri için,

$$\left(\bigcup_{i\in I} \mu_i\right)(x) = \sup\{\mu_i(x) \mid i \in I\} = \bigvee_{i\in I} \mu_i(x)$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right)(x) = \inf\{\mu_i(x) \mid i \in I\} = \bigwedge_{i\in I} \mu_i(x)$$

tanımlıdır.

Tanım 1.5.3 L_1 ve L_2 iki küme $f: L_1 \to L_2$ herhangi bir fonksiyon ve $\mu \in F(L_1), \vartheta \in F(L_2)$ olsun. Bu durumda,

i) μ nün f altındaki görüntüsü $f(\mu)$, $\forall y \in L_2$ için,

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x\in f^{-1}(y)} \mu(x) & , f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı L_2 nin fuzzy alt kümesidir.

ii) ϑ nün f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(\vartheta)$; $\forall x \in L_1$ için $f^{-1}(\vartheta)(x) = \vartheta(f(x))$ şeklinde tanımlı L_1 in fuzzy alt kümesidir.

Tanım 1.5.4 L=(L, ⊕, ⊗) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun. μ ye L nin fuzzy alt hyper kafesi denir. ⇔ $\forall\, x, y \in L$ için,

i) $\min\{\mu(x), \mu(y)\} \leq \inf_{z \in x \oplus y} \{\mu(z)\}$,

ii) $\min\{\mu(x), \mu(y)\} \leq \inf_{z \in x \otimes y} \{\mu(z)\}$,

dir.

Örnek 1.5.5 Örnek 1.4.9 da tanımlı L=(L, ⊕, ⊗) hyper kafesini göz önüne alalım.

$\mu : L \to [0,1]$, $\mu(a) = 0.7, \mu(b) = 0.5$, $\mu(c) = \mu(d) = 0.3$ olarak tanımlansın.

$0.7 = \min\{\mu(a), \mu(a)\} \leq \inf_{z \in a \oplus a} \mu(z) = \mu(a) = 0.7$,

$0.5 = \min\{\mu(a), \mu(b)\} \leq \inf_{z \in a \oplus b} \mu(z) = \mu(a) = 0.7$,

$0.3 = \min\{\mu(a), \mu(c)\} \leq \inf_{z \in a \oplus c} \mu(z) = \mu(a) = 0.7$,

$0.3 = \min\{\mu(a), \mu(d)\} \leq \inf_{z \in a \oplus d} \mu(z) = \mu(a) = 0.7$,

$0.5 = \min\{\mu(b), \mu(b)\} \leq \inf_{z \in b \oplus b} \mu(z) = \mu(b) = 0.5$,

$0.3 = \min\{\mu(b), \mu(c)\} \leq \inf_{z \in b \oplus c} \mu(z) = \mu(a) = 0.7$,

$0.3 = \min\{\mu(b), \mu(d)\} \leq \inf_{z \in b \oplus d} \mu(z) = \mu(b) = 0.5$,

$0.3 = \min\{\mu(c), \mu(c)\} \leq \inf_{z \in c \oplus c} \mu(z) = \mu(c) = 0.3$,

$0.3 = \min\{\mu(c), \mu(d)\} \leq \inf_{z \in c \oplus d} \mu(z) = \mu(c) = 0.3$,

$0.3 = \min\{\mu(d), \mu(d)\} \leq \inf_{z \in d \oplus d} \mu(z) = \mu(d) = 0.3$, ve

$0.7 = \min\{\mu(a), \mu(a)\} \leq \inf_{z \in a \otimes a} \mu(z) = \mu(a) = 0.7$,

$0.5 = \min\{\mu(a), \mu(b)\} \leq \inf_{z \in a \otimes b} \mu(z) = \mu(b) = 0.5$,

$0.3 = \min\{\mu(a), \mu(c)\} \leq \inf_{z \in a \otimes c} \mu(z) = \mu(c) = 0.3$,

$0.3 = \min\{\mu(a), \mu(d)\} \leq \inf_{z \in a \otimes d} \mu(z) = \mu(d) = 0.3$,

$0.5 = \min\{\mu(b), \mu(b)\} \leq \inf_{z \in b \otimes b} \mu(z) = \mu(b) = 0.5$,

$0.3 = \min\{\mu(b), \mu(c)\} \leq \inf_{z \in b \otimes c} \mu(z) = \mu(d) = 0.3$,

$0.3 = \min\{\mu(b), \mu(d)\} \leq \inf_{z \in b \otimes d} \mu(z) = \mu(d) = 0.3$,

$0.3 = \min\{\mu(c), \mu(c)\} \leq \inf_{z \in c \otimes c} \mu(z) = \mu(c) = 0.3$,

$0.3 = \min\{\mu(c), \mu(d)\} \leq \inf_{z \in c \otimes d} \mu(z) = \mu(d) = 0.3$,

$0.3 = \min\{\mu(d), \mu(d)\} \leq \inf_{z \in d \otimes d} \mu(z) = \mu(d) = 0.3$,

Buradan Tanım 1.5.4 ile μ L nin fuzzy alt hyper kafesidir.

Önerme 1.5.6 L=(L, ⊕, ⊗) bir hyper kafes, $\{ \mu_i \mid i \in I\}$ L nin fuzzy alt hyper kafeslerinin bir ailesi olsun. Bu taktirde, $\wedge_{i\in I} \mu_i$ fuzzy alt hyper kafestir.

İspat: $x, y \in L$ ve $\{\mu_i \mid i\in I \}$ L nin herhangi bir fuzzy alt hyper kafeslerinin bir ailesi olsun.

$$\inf_{z\in x\oplus y}\{ \wedge_{i\in I} \mu(z) \} = \inf_{z\in x\oplus y}\{ \inf\{\mu_i(z) \mid i\in I \} \}$$
$$= \inf\{\inf_{z\in x\oplus y}\{ \mu_i(z) \mid i\in I \} \}$$
$$\geq \inf\{ \min\{ \mu_i(x), \ \mu_i(y) \ \mid i\in I \} \}$$
$$= \min\{ \ \inf\{\mu_i(x) \mid i\in I \}, \ \inf\{\mu_i(y) \mid i\in I \} \}$$
$$= \min\{ \wedge_{i\in I} \mu_i(x), \ \wedge_{i\in I} \mu_i(y)\} \qquad (1)$$

$$\inf_{z\in x\otimes y}\{ \wedge_{i\in I} \mu(z) \} = \inf_{z\in x\otimes y}\{ \inf\{\mu_i(\alpha) \mid i\in I \} \}$$
$$= \inf\{\inf_{z\in x\otimes y}\{ \mu_i(\alpha) \mid i\in I \} \}$$
$$\geq \inf\{ \min\{ \mu_i(x), \ \mu_i(y) \ \mid i\in I \} \}$$
$$= \min\{ \ \inf\{\mu_i(x) \mid i\in I \}, \ \inf\{\mu_i(y) \mid i\in I \} \}$$
$$= \min\{ \wedge_{i\in I} \mu_i(x), \ \wedge_{i\in I} \mu_i(y)\} \qquad (2)$$

(1) , (2) ve Tanım 1.5.4 ile $\wedge_{i\in I} \mu_i$ fuzzy alt hyper kafestir.

Uyarı 1.5.7 μ_1, μ_2 fuzzy alt hyper kafes ise $\mu_1 \cup \mu_2$ nin fuzzy alt hyper kafes olması gerekmez.

Örnek 1.5.8 Örnek 1.4.9 da tanımlı L hyper kafesini göz önüne alalım. $\mu_1: L \to [0,1]$, $\mu_2: L \to [0,1]$, $\mu_1(a) = 0.7$, $\mu_1(b) = 0.5$, $\mu_1(c) = \mu_1(d) = 0.3$ ve $\mu_2(a) = \mu_2(b) = 0.3$ $\mu_2(c) = 0.7, \mu_2(d) = 0.5$ şeklinde tanımlansın. Açık olarak $\mu_1, \mu_2 \in F(L)$ alt hyper kafestir.

$$\min\{(\mu_1 \cup \mu_2)(a), (\mu_1 \cup \mu_2)(c)\} = \min\{\sup\{\mu_1(a), \mu_2(a)\}, \sup\{\mu_1(c), \mu_2(c)\}\}$$
$$= \min\{\sup\{0.7,0.3\}, \sup\{0.3,0.7\}\}$$
$$= \min\{0.7,0.7\} = 0.7$$

$$\inf_{z\in a\otimes c}\{(\mu_1 \cup \mu_2)(z)\} = \inf\{(\mu_1 \cup \mu_2)(c), (\mu_1 \cup \mu_2)(d)\}$$
$$= \inf\{\sup\{\mu_1(c), \mu_2(c)\}, \sup\{\mu_1(d), \mu_2(d)\}\}$$
$$= \inf\{\sup\{0.3,0.7\}, \sup\{0.3,0.5\}\}$$
$$= \inf\{0.7 , 0.5\} = 0.5$$

$\min\{(\mu_1 \cup \mu_2)(a), (\mu_1 \cup \mu_2)(c)\} = 0.7 \nleq \inf_{z\in a\otimes c}\{(\mu_1 \cup \mu_2)(z) = 0.5$ olduğundan $\mu_1 \cup \mu_2$ L nin fuzzy alt hyper kafesi değildir.

Teorem 1.5.9 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes, $\mu_1, \mu_2 \in F(L)$ alt hyper kafes öyle ki $\mu_1 \subseteq \mu_2$ veya $\mu_2 \subseteq \mu_1$ olsun. Bu taktirde, $\mu_1 \cup \mu_2 \in F(L)$ alt hyper kafestir.

İspat: $\mu_1, \mu_2 \in F(L)$ iki alt hyper kafes, $\mu_1 \subseteq \mu_2$ ve x, y $\in$ L keyfi olsun. Bu takdirde

$$\inf_{z \in x \oplus y} \{(\mu_1 \cup \mu_2)(z)\} = \inf_{z \in x \oplus y} \{\sup\{\mu_1(z), \mu_2(z)\}\}$$

$$= \inf_{z \in x \oplus y} \{\mu_2(z)\} \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

$$\inf_{z \in x \otimes y} \{(\mu_1 \cup \mu_2)(z)\} = \inf_{z \in x \otimes y} \{\sup\{\mu_1(z), \mu_2(z)\}\}$$

$$= \inf_{z \in x \otimes y} \{\mu_2(z)\} \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \text{ dir.}$$

Buradan Tanım 1.5.4 ile $\mu_1 \cup \mu_2 \in F(L)$ alt hyper kafestir.

Önerme 1.5.10 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ alt hyper kafes olsun. Bu taktirde, $\bar{\mu} = \{ x \in L \mid \mu(x) = 1 \} \neq \emptyset$ ise $\bar{\mu}$ alt hyper kafestir.

İspat: $\bar{\mu} \neq \emptyset$, x, y $\in \bar{\mu}$ keyfi olsun. Bu takdir de $\mu(x) = 1$, $\mu(y) = 1$ ve $\mu \in F(L)$ alt hyper kafes $\Rightarrow 1 = \min\{\mu(x), \mu(y)\} \leq \inf_{z \in x \oplus y}\{\mu(z)\}$ ve $1 = \min\{\mu(x), \mu(y)\} \leq \inf_{z \in x \otimes y}\{\mu(z)\}$ dir. O halde $\forall$ $z \in x \oplus y$ ve $z \in x \otimes y$ için $\mu(z) = 1$ olduğundan $x \oplus y \subseteq \bar{\mu}$, $x \otimes y \subseteq \bar{\mu}$ dir. $\Rightarrow$ $x \oplus y \in \mathcal{P}^*(\bar{\mu})$, $x \otimes y \in \mathcal{P}^*(\bar{\mu})$ dir. Tanım 1.4.8 ile $\bar{\mu}$ alt hyper kafestir.

Teorem 1.5.11 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes $\emptyset \neq I \subseteq L$ olsun. Bu takdirde,

χ_I fuzzy alt hyper kafestir $\Leftrightarrow$ I alt hyper kafestir .

İspat: "$\Rightarrow$" χ_I fuzzy alt hyper kafes ve $x, y \in I$ keyfi olsun. Bu taktirde, $\chi_I(x) = 1$, $\chi_I(y) = 1$ ve χ_I fuzzy alt hyper kafes olduğundan,

$$1 = \min\{\chi_I(x), \chi_I(y)\} \leq \inf_{z \in x \oplus y}\{\chi_I(z)\}, \quad 1 = \min\{\chi_I(x), \chi_I(y)\} \leq \inf_{z \in x \otimes y}\{\chi_I(z)\} \text{ dir.}$$

O halde $\forall$ $z \in x \oplus y$ ve $z \in x \otimes y$ için $\mu(z) = 1$ olduğundan $x \oplus y \subseteq I$, $x \otimes y \subseteq I$ dir. Buradan, $x \oplus y \in \mathcal{P}^*(I)$, $x \otimes y \in \mathcal{P}^*(I)$ dır. Tanım 1.4.8 ile I alt hyper kafestir.

"$\Leftarrow$" I alt hyper kafes, $x, y \in L$ keyfi olsun.

Eğer $x \in L \setminus I$ veya $y \in L \setminus I$ ise $\chi_I(x) = 0$ veya $\chi_I(y) = 0$ olduğundan

$$\inf_{z \in x \oplus y}\{\chi_I(z)\} \geq 0 = \min\{\chi_I(x), \chi_I(y)\}, \inf_{z \in x \otimes y}\{\chi_I(z)\} \geq 0 = \min\{\chi_I(x), \chi_I(y)\} \text{ dir.(1)}$$

Eğer $x, y \in I$ ise $x \oplus y \subseteq I$, $x \otimes y \subseteq I$, $\chi_I(x) = \chi_I(y) = 1$ olduğundan

$$\inf_{z \in x \oplus y}\{\chi_I(z)\} = 1 = \min\{\chi_I(x), \chi_I(y)\}, \inf_{z \in x \otimes y}\{\chi_I(z)\} = 1 = \min\{\chi_I(x), \chi_I(y)\} \text{ dir.(2)}$$

(1), (2) ve Tanım 1.5.4 ile χ_I fuzzy alt hyper kafestir.

Önerme 1.5.12 L=(L, ⊕, ⊗) bir hyper kafes $\emptyset \neq I \subseteq L$ ve $\mu \in F(L)$ olsun.

$$\mu(x) = \begin{cases} t_1 \ , & x \in I \\ t_2 \ , & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \ , \qquad t_1 > t_2 \in [0,1]$$

Bu taktirde, μ fuzzy alt hyper kafestir ⇔ I alt hyper kafestir.

İspat: "⇒" μ fuzzy alt hyper kafes ve $x, y \in I$ keyfi olsun. Bu takdirde, $\mu(x)= t_1$, $\mu(y)= t_1$ ve μ fuzzy alt hyper kafes olduğundan,

$t_1 = \min\{\mu(x), \mu(y)\} \leq \inf_{z \in x \oplus y}\{\mu(z)\}$ ve $t_1 = \min\{\mu(x), \mu(y)\} \leq \inf_{z \in x \otimes y}\{\mu(z)\}$ dir. O halde $\forall\ z \in x \oplus y$ ve $z \in x \otimes y$ için $\mu(z) = t_1$ olduğundan $x \oplus y \subseteq I$, $x \otimes y \subseteq I$ dir. $\Rightarrow$ $x \oplus y \in \mathcal{P}^*(I)$, $x \otimes y \in \mathcal{P}^*(I)$ dır. Tanım 1.4.8 ile I alt hyper kafestir.

"⇐" I alt hyper kafes ve $x, y \in L$ keyfi olsun.

Eğer $x \in L \setminus I$ veya $y \in L \setminus I$ ise $\mu(x) = t_2$ veya $\mu(y) = t_2$ olduğundan

$\inf_{z \in x \oplus y}\{\mu(z)\} \geq t_2 = \min\{\mu(x), \ \mu(y)\}$, $\inf_{z \in x \otimes y}\{\mu(z)\} \geq t_2 = \min\{\mu(x), \ \mu(y)\}$ (1) dir.

Eğer $x, y \in I$ ise $x \oplus y \subseteq I$, $x \otimes y \subseteq I$, $\mu(x) = \mu(y) = t_1$ olduğundan

$\inf_{z \in x \oplus y}\{\mu(z)\} = t_1 = \min\{\mu(x), \ \mu(y)\}$, $\inf_{z \in x \otimes y}\{\mu(z)\} = t_1 = \min\{\mu(x), \ \mu(y)\}$ (2) dir.

(1), (2) ve Tanım 1.5.4 ile μ fuzzy alt hyper kafestir.

Teorem 1.5.13 L=(L, ⊕, ⊗) bir hyper kafes, $\mu \in F(L)$ öyleki $Im(\mu) = \{t_1, \ldots, t_n\}$, i>j için $t_i < t_j$, $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n = L$, L nin alt hyper kafeslerinin bir zinciri öyleki

$$\mu(I_k^*) = t_k, \ I_k^* = I_k \setminus I_{k-1}, \ I_{-1} = \emptyset, \quad k = 0, \ldots, n \text{ olsun.}$$

Bu taktirde, μ fuzzy alt hyper kafestir.

İspat: $x, y \in L$ keyfi olsun. Eğer $x, y \in I_k^*$ ise $\mu(x) = \mu(y) = t_k$ ve $x \oplus y \subseteq I_k$ $x \otimes y \subseteq I_k$ dir. Böylece,

$\inf_{z \in x \oplus y}\{\mu(z)\} \geq t_k = \min\{\mu(x), \ \mu(y)\}$, $\inf_{z \in x \otimes y}\{\mu(z)\} \geq t_k = \min\{\mu(x), \ \mu(y)\}$ dir.

Şimdi $i \neq j$ için $x \in I_i^*$ ve $y \in I_j^*$ olsun. Genelliği bozmaksızın $i \geq j$ olsun. $\Rightarrow$ $\mu(x) = t_i < t_j = \mu(y)$ ve $x \oplus y \subseteq I_i$, $x \otimes y \subseteq I_i$ dir. O halde

$\inf_{z \in x \oplus y}\{\mu(z)\} \geq t_i = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$, $\inf_{z \in x \otimes y}\{\mu(z)\} \geq t_i = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ dir.

Tanım 1.5.14 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun.

i) $\mu_t = \{x \in L \mid \mu(x) \geq t\}$, $t \in [0,1]$ kümesine μ fuzzy kümesinin seviye kümesi denir.

ii) $\mu_t^{>} = \{x \in L \mid \mu(x) > t\}$, $t \in [0,1)$ kümesine μ fuzzy kümesinin güçlü seviye kümesi denir.

iii) $\mu_t^{\leq} = \{x \in L \mid \mu(x) \leq t\}$, $t \in [0,1]$ kümesine μ fuzzy kümesinin alt seviye kümesi denir.

iv) $\mu_t^{<} = \{x \in L \mid \mu(x) < t\}$, $t \in (0,1]$ kümesine μ fuzzy kümesinin güçlü alt seviye kümesi denir.

Lemma 1.5.15 $\mu \in F(L)$ ve $t_0 = \sup_{x \in L} \mu(x)$ olsun. Bu taktirde,

$$\mu_t = \bigcap_{0 \leq r < t} \mu_r^{>} \quad , \forall\ t \in [0, t_0] \text{ dir.}$$

Teorem 1.5.16 $\mu \in F(L)$ olsun. Bu taktirde, aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

1) μ fuzzy alt hyper kafestir.

2) $\mu_t^{>}$ alt hyper kafestir. ($\mu_t^{>} \neq \emptyset$)

3) μ_t alt hyper kafestir. ($\mu_t \neq \emptyset$)

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2). $\mu_t^{>} \neq \emptyset$ ve $x, y \in \mu_t^{>}$ olsun. Buradan, $\mu(x) > t$, $\mu(y) > t$ dir. O halde μ fuzzy alt hyper kafes olduğundan,

$\inf_{z \in x \oplus y}\{\mu(z)\} \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} > t$, $\inf_{z \in x \otimes y}\{\mu(z)\} \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} > t$ dir. $\forall\ z \in x \oplus y$ ve $z \in x \otimes y$ için $\mu(z) > t$ olup $x \oplus y \subseteq \mu_t^{>}$ ve $x \otimes y \subseteq \mu_t^{>}$ dir. Böylece $x \oplus y \in \mathcal{P}^*(\mu_t^{>})$, $x \otimes y \in \mathcal{P}^*(\mu_t^{>})$ elde edilir ki bu bize $\mu_t^{>}$ nin alt hyper olduğunu gösterir.

(2) $\Rightarrow$ (3). Lemma 1.5.15 ile açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1). $\mu_t \neq \emptyset$ ve $t := \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ olsun. $x, y \in \mu_t$ keyfi olsun. Buradan $\mu(x) \geq t$ ve $\mu(y) \geq t$ dir. μ_t alt hyper kafes olduğundan $x \oplus y \subseteq \mu_t$ ve $x \otimes y \subseteq \mu_t$ dir. $\Rightarrow \forall\ z \in x \oplus y$ ve $z \in x \otimes y$ için $z \in \mu_t$ olup $\mu(z) \geq t$ dir. Dolayısıyla $\forall\ z \in x \oplus y$, $z \in x \otimes y$ için $t = \min\{\mu(x), \mu(y)\} \leq \mu(z)$ olduğundan,

$\inf_{z \in x \oplus y}\{\mu(z)\} \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$, $\inf_{z \in x \otimes y}\{\mu(z)\} \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ dir.

Sonuç 1.5.17 L=(L, ⊕, ⊗) bir hyper kafes, $\mu \in F(L)$ ve $t_0 = \sup_{x \in L}^{\mu(x)}$ olsun. Bu taktirde, aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

1) μ fuzzy alt hyper kafestir.

2) Her $t \in [0, t_0]$ için μ_t alt hyper kafestir.

3) Her $t \in [0, t_0]$ için $\mu_t^{>}$ alt hyper kafestir.

4) Her $t \in Im(\mu)$ için μ_t alt hyper kafestir.

5) Her $t \in Im(\mu) \setminus \{t_0\}$ için $\mu_t^{>}$ alt hyper kafestir.

6) Her $t \in [0, 1]$, $\mu_t \neq \emptyset$ için μ_t alt hyper kafestir.

7) Her $t \in [0, 1)$, $\mu_t^{>} \neq \emptyset$ için $\mu_t^{>}$ alt hyper kafestir.

Teorem 1.5.18 $L_1 = (L_1, \oplus, \otimes)$, $L_2 = (L_2, \oplus, \otimes)$ iki hyper kafes ve $f: L_1 \to L_2$ güçlü hyper kafes homomorfisi olsun.

1) $\mu \in F(L_1)$ alt hyper kafes ise $f(\mu) \in F(L_2)$ alt hyper kafestir.

2) $\eta \in F(L_2)$ alt hyper kafes ise $f^{-1}(\eta) \in F(L_1)$ alt hyper kafestir.

İspat :

1) $y_1, y_2 \in L_2$ keyfi olsun. $f^{-1}(y_1) = \emptyset$ veya $f^{-1}(y_2) = \emptyset$ ise

$$\min\{f(\mu)(y_1), f(\mu)(y_2)\} = 0 \leq \inf_{z \in y_1 \oplus y_2}\{\mu(z)\}$$

ve $$\min\{f(\mu)(y_1), f(\mu)(y_2)\} = 0 \leq \inf_{z \in y_1 \otimes y_2}\{\mu(z)\}$$ dir.

$\forall\, 1 \leq i \leq 2$ için $f^{-1}(y_i) \neq \emptyset$ olsun.

$$\begin{aligned}
\min\{f(\mu)(y_1), f(\mu)(y_2)\} &= \min\left\{\bigvee_{f(x_1)=y_1} \mu(x_1), \bigvee_{f(x_2)=y_2} \mu(x_2)\right\} \\
&= \bigvee_{f(x_i)=y_i\ 1 \leq i \leq 2} \min\{f(\mu)(x_1), f(\mu)(x_2)\} \\
&\leq \bigvee_{f(x_i)=y_i\ 1 \leq i \leq 2} \left\{\inf_{z \in x_1 \oplus x_2}\{\mu(z)\}\right\} \\
&\leq \inf_{w \in y_1 \oplus y_2}\{\mu(w)\}\{\vee_{f(z)=w}\, \mu(w)\} = \inf_{w \in y_1 \oplus y_2}\{\mu(w)\}.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\min\{f(\mu)(y_1), f(\mu)(y_2)\} = \min\left\{\bigvee_{f(x_1)=y_1} f(\mu)(x_1), \bigvee_{f(x_2)=y_2} f(\mu)(x_2)\right\}$$

$$= \bigvee_{f(x_i)=y_i\ 1\leq i\leq 2} \{\min\{f(\mu)(x_1), f(\mu)(x_2)\}\}$$

$$\leq \bigvee_{f(x_i)=y_i} \left\{ \bigwedge_{z\in x_1 \oplus x_2} \mu(z) \right\}$$

$$\leq \inf_{w\in y_1\oplus y_2}\{\mu(w)\}\{\vee_{f(z)=w}\mu(w)\} = \inf_{w\in y_1\oplus y_2}\{\mu(w)\}.$$

$\Rightarrow f(\mu) \in f(L_2)$ fuzzy alt hyper kafestir.

2) $\eta \in F(L_2)$ fuzzy alt hyper olsun $x_1,\ x_2 \in L_1$ için,

$$\min\{f^{-1}(\eta)(x_1), f^{-1}(\eta)(x_2)\} = \min\{\eta(f(x_1)), \eta(f(x_2))\}$$

$$\leq \inf_{w\in f(x_1)\oplus_2 f(x_2)}\{\eta(w)\} = \inf_{w\in f(x_1\oplus_1 x_2)}\{\eta(w)\}$$

$$\leq \inf_{z\in x_1\oplus_1 x_2}\{\eta(f(z))\} = \inf_{z\in x_1\oplus_1 x_2}\{f^{-1}(\eta)(z)\} \quad \text{ve}$$

$$\min\{f^{-1}(\eta)(x_1), f^{-1}(\eta)(x_2)\} = \min\{\eta(f(x_1)), \eta(f(x_2))\}$$

$$\leq \inf_{w\in f(x_1)\otimes_2 f(x_2)}\{\eta(w)\} = \inf_{w\in f(x_1\otimes_1 x_2)}\{\eta(w)\}$$

$$\leq \inf_{z\in x_1\otimes_1 x_2}\{\eta(f(z))\} = \inf_{z\in x_1\otimes_1 x_2}\{f^{-1}(\eta)(z)\} \text{ dir.}$$

Buradan, $f^{-1}(\eta) \in F(L_1)$ alt hyper kafestir.

Teorem 1.5.19 $L_1 = (L_1, \oplus_1, \otimes_1)$, $L_2 = (L_2, \oplus_2, \otimes_2)$ hyper kafes, $\mu_1 \in F(L_1)$, $\mu_2 \in F(L_2)$ iki alt hyper kafes olsun. Bu taktirde, $\mu_1 \times \mu_2 \in F(L_1 \times L_2)$ alt hyper kafestir.

İspat:

$x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in L_1 \times L_2$ keyfi olsun.

$$\bigwedge_{\alpha\in x\oplus y} (\mu_1 \times \mu_2)(\alpha) = \bigwedge_{(\alpha_1,\alpha_2)\in(x_1\oplus y_1, x_2\oplus y_2)} (\mu_1 \times \mu_2)(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$= \bigwedge_{\alpha_1\in x_1\oplus y_1, \alpha_2\in x_2\oplus y_2} (\mu_1 \times \mu_2)(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$= \bigwedge_{\alpha_1\in x_1\oplus y_1, \alpha_2\in x_2\oplus y_2} \min\{\mu_1(\alpha_1), \mu_2(\alpha_2)\}$$

$$\geq \min\{\wedge_{\alpha_1\in x_1\oplus y_1}\mu_1(\alpha_1), \wedge_{\alpha_2\in x_2\oplus y_2}\mu_2(\alpha_2)\}$$

$$\geq \min\{\min\{\mu_1(x_1), \mu_1(y_1)\}, \min\{\mu_2(x_2), \mu_2(y_2)\}\}$$

$$= \min\{\min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)\}, \min\{\mu_1(y_1), \mu_2(y_2)\}\}$$

$$= \min\{(\mu_1 \times \mu_2)(x_1, x_2), (\mu_1 \times \mu_2)(y_1, y_2)\}$$

$$= \min\{(\mu_1 \times \mu_2)(x), (\mu_1 \times \mu_2)(y)\}\,.$$

Benzer şekilde,

$$\bigwedge_{\alpha \in x \otimes y} (\mu_1 \times \mu_2)(\alpha) = \bigwedge_{(\alpha_1,\alpha_2) \in x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2} (\mu_1 \times \mu_2)(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$= \bigwedge_{\alpha_1 \in x_1 \otimes y_1, \alpha_2 \in x_2 \otimes y_2} (\mu_1 \times \mu_2)(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$= \bigwedge_{\alpha_1 \in x_1 \otimes y_1, \alpha_2 \in x_2 \otimes y_2} \min\{\mu_1(\alpha_1), \mu_2(\alpha_2)\}$$

$$\geq \min\left\{ \bigwedge_{\alpha_1 \in x_1 \oplus y_1} \mu_1(\alpha_1)\,, \bigwedge_{\alpha_2 \in x_2 \oplus y_2} \mu_2(\alpha_2) \right\}$$

$$\geq \min\big\{\min\{\mu_1(x_1), \mu_1(y_1)\}, \min\{\mu_2(x_2), \mu_2(y_2)\}\big\}$$

$$= \min\big\{\min\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2)\}, \min\{\mu_1(y_1), \mu_2(y_2)\}\big\}$$

$$= \min\{(\mu_1 \times \mu_2)(x), (\mu_1 \times \mu_2)(y)\}\,.$$

Böylece, $\mu_1 \times \mu_2 \in F(L_1 \times L_2)$ alt hyper kafestir.

Tanım 1.5.20 L=(L, $\oplus$, $\oplus$) bir hyper kafes, $\mu \in F(L)$ olsun. μ ye fuzzy hyper ideal denir.$\Leftrightarrow$

i) μ fuzzy alt hyper kafes,

ii) $\forall$ x, $a \in L$ için $\mu(a) \leq \inf_{z \in a \oplus x} \mu(z)$ ve $\mu(a) \leq \inf_{z \in a \otimes x} \mu(z)$ dir.

Örnek 1.5.21 Örnek 1.4.9 da tanımlı L=(L, $\oplus$, $\otimes$) hyper kafesini göz önüne alalım. $\mu: L \to [0,1]$, $\forall x \in L$ için $\mu(x) = 0.5$ olarak tanımlansın. Buradan açık olarak μ bir fuzzy hyper idealdir.

Önerme 1.5.22 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\{ \mu_i \mid i \in I\}$ L nin fuzzy hyper ideallerinin bir ailesi olsun. Bu taktirde, $\wedge_{i \in I} \mu_i$ fuzzy hyper idealdir.

İspat: Önerme 1.5.6 ile $\wedge_{i \in I} \mu_i$ fuzzy alt hyper kafestir. $a, b, x \in L$ ve $\{\mu_i \mid i \in I\}$ L nin herhangi bir fuzzy hyper ideallerinin bir ailesi olsun.

$$\inf_{z \in a \oplus x}\{ \wedge_{i \in I} \mu(z) \} = \inf_{z \in a \oplus x}\{ \inf\{\mu_i(z) \mid i \in I\} \}$$

$$= \inf\{\inf_{z \in a \oplus x}\{ \mu_i(z) \mid i \in I\} \}$$

$$\geq \inf\{ \mu_i(a) \mid i \in I \} \}$$

$$= \wedge_{i\in I}\,\mu_i\,(a)\,. \qquad (1)$$

$$\inf_{z\in b\otimes x}\{\wedge_{i\in I}\,\mu(z)\} = \inf_{z\in b\otimes x}\{\inf\{\mu_i(z) \mid i\in I\}\}$$

$$= \inf\{\inf_{z\in b\otimes x}\{\mu_i(z) \mid i\in I\}\}$$

$$\geq \inf\{\mu_i(b) \mid i\in I\}\}$$

$$= \wedge_{i\in I}\,\mu_i\,(b)\,. \qquad (2)$$

(1), (2) ve Tanım 1.5.20 ile $\wedge_{i\in I}\mu_i$ fuzzy hyper idealdir.

Uyarı 1.5.23 μ_1, μ_2 fuzzy hyper ideal ise $\mu_1 \cup \mu_2$ nin fuzzy hyper ideal olmasi gerekmez. Gerçekten, Örnek 1.4.9 da tanımlı $L = (L,\oplus,\otimes)$ hyper kafesini göz önüne alalım. $\mu_1, \mu_2: L \to [0,1]$ ve $\forall x \in L$ için $\mu_1(x) = 0.5$ ve $\mu_2(x) = 0.2$ olarak tanımlayalım. Buradan μ_1, μ_2 fuzzy hyper ideal olup $a \in L$ için $(\mu_1 \cup \mu_2)(a) = 0.5 \nleq \inf_{z\in a\oplus a}(\mu_1 \cup \mu_2)(z) = 0.2$ olduğundan $\mu_1 \cup \mu_2$ fuzzy hyper ideal değildir.

Teorem 1.5.24 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes, $\mu_1, \mu_2 \in F(L)$ hyper ideal ve $\mu_1 \subseteq \mu_2$ veya $\mu_2 \subseteq \mu_1$ olsun. Bu taktirde, $\mu_1 \cup \mu_2 \in F(L)$ hyper idealdir.

İspat: Teorem 1.5.9 ile $\mu_1 \cup \mu_2 \in F(L)$ alt hyper kafestir. μ_1, $\mu_2 \in F(L)$ iki hyper ideal, $\mu_1 \subseteq \mu_2$ ve $x, y \in L$ keyfi olsun. Bu takdirde

$$\inf_{z\in x\oplus y}\{\mu_1 \cup \mu_2(z)\} = \inf_{z\in x\oplus y}\{\sup\{\mu_1(z), \mu_2(z)\}\}$$

$$= \inf_{z\in x\oplus y}\{\mu_2(z)\} \geq \mu_2(z)$$

$$\inf_{z\in x\otimes y}\{\mu_1 \cup \mu_2(z)\} = \inf_{z\in x\otimes y}\{\sup\{\mu_1(z), \mu_2(z)\}\}$$

$$= \inf_{z\in x\otimes y}\{\mu_2(z)\} \geq \mu_2(z)$$

dir. Buradan Tanım 1.5.20 ile $\mu_1 \cup \mu_2 \in F(L)$ hyper idealdir.

Önerme 1.5.25 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ hyper ideal olsun. Bu taktirde, $\bar{\mu} = \{x \in L \mid \mu(x) = 1\} \neq \emptyset$ ise $\bar{\mu}$ hyper idealdir.

İspat: Önerme 1.5.10 ile $\bar{\mu}$ alt hyper kafestir. $\bar{\mu} \neq \emptyset$, $a \in \bar{\mu}$ keyfi olsun. $\bar{\mu}$ nin tanımı ile $\mu(a) = 1$ dir. Diğer yandan μ fuzzy hyper ideal olduğundan $\forall\, x \in L$ için,

$1 = \mu(a) \leq \inf_{z \in a \oplus x}\{\mu(z)\}$ ve $1 = \mu(a) \leq \inf_{z \in a \otimes x}\{\mu(z)\}$ dir. O halde $\forall\ z \in a \oplus x$ ve $z \in a \otimes x$ için $\mu(z) = 1$ olduğundan $a \oplus x \subseteq \bar{\mu}$, $a \otimes x \subseteq \bar{\mu}$ dir. $\Rightarrow$ $a \oplus x \in \mathcal{P}^*(\bar{\mu})$ ve $a \otimes x \in \mathcal{P}^*(\bar{\mu})$ dir. Tanım 1.4.17 ile $\bar{\mu}$ hyper idealdir.

Teorem 1.5.26 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes, $\emptyset \neq I \subseteq L$ olsun. Bu takdirde,

χ_I fuzzy hyper idealdir $\Leftrightarrow$ I hyper idealdir.

İspat: "$\Rightarrow$" Teorem 1.5.11 ile I alt hyper kafestir. χ_I fuzzy hyper ideal, $I \neq \emptyset$ ve $a \in I$ keyfi olsun. χ_I nin tanımı ile $\chi_I(a) = 1$ dir. Diğer yandan χ_I fuzzy hyper ideal olduğundan $\forall x \in L$ için, $1 = \chi_I(a) \leq \inf_{z \in a \oplus x}\{\chi_I(z)\}$ ve $1 = \chi_I(a) \leq \inf_{z \in a \otimes x}\{\chi_I(z)\}$ dir. O halde $\forall\ z \in a \oplus x$ ve $z \in a \otimes x$ için $\chi_I(z) = 1$ olduğundan $a \oplus x \subseteq I$ ve $a \otimes x \subseteq I$ dir. Buradan, $a \oplus x \in \mathcal{P}^*(I)$ ve $a \otimes x \in \mathcal{P}^*(I)$ dır. Tanım 1.4.17 ile I hyper idealdir.

"$\Leftarrow$" Teorem 1.5.11 ile χ_I fuzzy alt hyper kafestir. I hyper ideal, $a, x \in L$ keyfi olsun. I hyper ideal olduğundan $a \oplus x \in \mathcal{P}^*(I)$, $a \otimes x \in \mathcal{P}^*(I)$ ve $\forall z \in a \oplus x$, $z \in a \otimes x$ için $\chi_I(z) = 1$ dir.

Eğer $x \in L \setminus I$ ve $a \in L \setminus I$ ise $\chi_I(x) = 0$ ve $\chi_I(a) = 0$ olduğundan

$\inf_{z \in a \oplus x}\{\chi_I(z)\} \geq 0 = \chi_I(a)$, $\inf_{z \in a \otimes x}\{\chi_I(z)\} \geq 0 = \chi_I(a)$ dir. (1)

Eğer $x \in L \setminus I$ ve $a \in I$ ise $\chi_I(x) = 0$ ve $\chi_I(a) = 1$ olduğundan

$\inf_{z \in a \oplus x}\{\chi_I(z)\} = 1 \geq 1 = \chi_I(a)$, $\inf_{z \in a \otimes x}\{\chi_I(z)\} = 1 \geq 1 = \chi_I(a)$ dir. (2)

Eğer $x \in I$ ve $a \in L \setminus I$ ise $\chi_I(x) = 1$ ve $\chi_I(a) = 0$ olduğundan

$\inf_{z \in a \oplus x}\{\chi_I(z)\} = 1 \geq 0 = \chi_I(a)$, $\inf_{z \in a \otimes x}\{\chi_I(z)\} = 1 \geq 0 = \chi_I(a)$ dir. (3)

Eğer $x, a \in I$ ise $\chi_I(x) = 1$ ve $\chi_I(a) = 1$ olduğundan

$\inf_{z \in a \oplus x}\{\chi_I(z)\} = 1 \geq 1 = \chi_I(a)$, $\inf_{z \in a \otimes x}\{\chi_I(z)\} = 1 \geq 1 = \chi_I(a)$ dir. (4)

(1) , (2) , (3) , (4) ve Tanım 1.5.20 ile χ_I fuzzy hyper idealdir.

Önerme 1.5.27 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes, $\emptyset \neq I \subseteq L$ ve $\mu \in F(L)$ olsun.

$$\mu(x) = \begin{cases} t_1, & x \in I \\ t_2, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \qquad t_1 > t_2 \in [0,1]$$

Bu taktirde, μ fuzzy hyper idealdir. $\Leftrightarrow$ I hyper idealdir.

İspat: "$\Rightarrow$" Önerme 1.5.12 ile I alt hyper kafestir. $\mu(x)$ fuzzy hyper ideal, $I \neq \emptyset$ ve $a \in I$ keyfi olsun. μ nin tanımı ile $\mu(a) = t_1$ dir. Diğer yandan μ fuzzy hyper ideal olduğundan

$\forall x \in L$ için, $t_1 = \mu(a) \leq \inf_{z\in a\oplus x}\{\mu(z)\}$ ve $t_1 = \mu(a) \leq \inf_{z\in a\otimes x}\{\mu(z)\}$ dir. O halde $\forall\ z \in a \oplus x$ ve $z \in a \otimes x$ için $\mu(z) = t_1$ olduğundan $a \oplus x \subseteq I$, $a \otimes x \subseteq I$ dir. Buradan, $a \oplus x \in \mathcal{P}^*(I)$ ve $a \otimes x \in \mathcal{P}^*(I)$ dır. Tanım 1.4.17 ile I hyper idealdir.
"$\Leftarrow$" Önerme 1.5.12 ile μ fuzzy alt hyper kafestir I hyper ideal, $a, x \in L$ keyfi olsun. I hyper ideal olduğundan $a \oplus x \in \mathcal{P}^*(I)$, $a \otimes x \in \mathcal{P}^*(I)$ ve $\forall\ z \in a \oplus x$ ve $z \in a \otimes x$ için $\mu(z) = 1$ dir.

Eğer $x \in L \setminus I$ ve $a \in L \setminus I$ ise $\mu(x) = 0$ ve $\mu(a) = 0$ olduğundan

$\inf_{z\in a\oplus x}\{\mu(z)\} \geq 0 = \mu(a)$, $\inf_{z\in a\otimes x}\{\mu(z)\} \geq 0 = \mu(a)$ dir. (1)

Eğer $x \in L \setminus I$ ve $a \in I$ ise $\mu(x) = 0$ ve $\mu(a) = 1$ olduğundan

$\inf_{z\in a\oplus x}\{\mu(z)\} = 1 \geq 1 = \mu(a)$, $\inf_{z\in a\otimes x}\{\mu(z)\} = 1 \geq 1 = \mu(a)$ dir. (2)

Eğer $x \in I$ ve $a \in L \setminus I$ ise $\mu(x) = 1$ ve $\mu(a) = 0$ olduğundan

$\inf_{z\in a\oplus x}\{\mu(z)\} = 1 \geq 0 = \mu(a)$, $\inf_{z\in a\otimes x}\{\mu(z)\} = 1 \geq 0 = \mu(a)$ dir. (3)

Eğer $x, a \in I$ ise $\mu(x) = 1$ ve $\mu(a) = 1$ olduğundan

$\inf_{z\in a\oplus x}\{\mu(z)\} = 1 \geq 1 = \mu(a)$, $\inf_{z\in a\otimes x}\{\mu(z)\} = 1 \geq 1 = \mu(a)$ dir. (4)

(1) , (2) , (3) , (4) ve Tanım 1.5.20 ile μ fuzzy hyper idealdir.

Teorem 1.5.28 L=(L, ⊕, ⊗) bir hyper kafes, $\mu \in F(L)$ öyleki $Im(\mu) = \{t_1, \dots, t_n\}$, i>j için $t_i < t_j$, $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n = L$, L nin hyper ideallerinin bir zinciri öyle ki,

$$\mu(I_k^*) = t_k,\ I_k^* = I_k \setminus I_{k-1}, I_{-1} = \emptyset, \quad k = 0, \dots, n \quad \text{olsun.}$$

Bu taktirde, μ fuzzy hyper idealdir.

İspat: Teorem 1.5.13 ile μ fuzzy alt hyper kafestir. $x, y \in L$ keyfi olsun. Eğer $a, x \in I_k^*$ ise $\mu(a) = \mu(x) = t_k$ ve $a \oplus x \subseteq I_k$, $a \otimes x \subseteq I_k$ dir. Böylece,
$\inf_{z\in a\oplus x}\{\mu(z)\} \geq t_k = \mu(a)$, $\inf_{z\in a\otimes x}\{\mu(z)\} \geq t_k = \mu(a)$ dir. Şimdi $i \neq j$ için $x \in I_i^*$ ve $y \in I_j^*$ olsun. Genelliği bozmaksızın $i \geq j$ olsun. Buradan $\mu(a) = t_i < t_j = \mu(x)$ ve $a \oplus x \subseteq I_i$, $a \otimes x \subseteq I_i$ dir. O halde,
$\inf_{z\in a\oplus x}\{\mu(z)\} \geq t_k = \mu(a)$, $\inf_{z\in a\otimes x}\{\mu(z)\} \geq t_k = \mu(a)$ dır. Tanım 1.5.20 ile μ fuzzy hyper idealdir.

Teorem 1.5.29 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun. Bu taktirde, aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

1) μ fuzzy hyper idealdir.

2) $\mu_t^{>}$ hyper idealdir. ($\mu_t^{>} \neq \emptyset$)

3) μ_t hyper idealdir. ($\mu_t \neq \emptyset$)

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2). Teorem 1.5.16 ile $\mu_t^{>}$ alt hyper kafestir. $\mu_t^{>} \neq \emptyset$ ve $a, x \in \mu_t^{>}$ olsun. Buradan $\mu(a) > t, \mu(x) > t$ dir. O halde μ fuzzy hyper ideal olduğundan,
$\inf_{z \in a \oplus x}\{\mu(z)\} \geq \mu(a) > t$, $\inf_{z \in a \otimes x}\{\mu(z)\} \geq \mu(a) > t$ dir. $\forall$ $z \in a \oplus x$ ve $z \in a \otimes x$ için $\mu(z) > t$ olup $a \oplus x \subseteq \mu_t^{>}$ ve $a \otimes x \subseteq \mu_t^{>}$ dir. Böylece, $a \oplus x \in \mathcal{P}^*(\mu_t^{>})$, $a \otimes x \in \mathcal{P}^*(\mu_t^{>})$ elde edilir ki bu bize $\mu_t^{>}$ nin hyper ideal olduğunu gösterir.

(2) $\Rightarrow$ (3). Lemma 1.5.15 ve Teorem 1.5.16 ile açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1). Teorem 1.5.16 ile μ fuzzy alt hyper kafestir. $t \in [0,1]$ ve $t := \mu(a)$ olsun . Bu taktirde $a \in \mu_t$ olup μ_t hyper ideal olduğundan $\forall x \in L$ için $a \oplus x \subseteq \mu_t$ ve $a \otimes x \subseteq \mu_t$ dir. Buradan $\forall$ $z \in a \oplus x$ ve $z \in a \otimes x$ için $z \in \mu_t$ olup $\mu(z) \geq t$ dir. Dolayısıyla, her $z \in a \oplus x$, $z \in a \otimes x$ için$\inf_{z \in a \oplus x}\{\mu(z)\} \geq \mu(a)$, $\inf_{z \in a \otimes x}\{\mu(z)\} \geq \mu(a)$ olduğundan μ fuzzy hyper idealdir.

Sonuç 1.5.30 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes, $\mu \in F(L)$ ve $t_0 = \sup_{x \in L}^{\mu(x)}$ olsun. Bu taktirde, aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

1) μ fuzzy hyper idealdir.

2) Her $t \in [0, t_0]$ için μ_t hyper idealdir.

3) Her $t \in [0, t_0]$ için $\mu_t^{>}$ hyper idealdir.

4) Her $t \in Im(\mu)$ için $\mu_t$hyper idealdir.

5) Her $t \in Im(\mu) \setminus \{t_0\}$ için $\mu_t^{>}$ hyper idealdir.

6) Her $t \in [0, 1]$, $\mu_t \neq \emptyset$ için μ_t hyper idealdir.

7) Her $t \in [0, 1)$, $\mu_t^{>} \neq \emptyset$ için $\mu_t^{>}$ hyper idealdir.

Teorem 1.5.31 $L_1 = (L_1, \oplus, \otimes)$, $L_2 = (L_2, \oplus, \otimes)$ iki hyper kafes ve $f: L_1 \rightarrow L_2$ güçlü hyper kafes homomorfisi olsun.

1) $\mu \in F(L_1)$ hyper ideal ise $f(\mu) \in F(L_2)$ hyper idealdir.

2) $\eta \in F(L_2)$ hyper ideal ise $f^{-1}(\eta) \in F(L_1)$ hyper idealdir.

İspat :

1) Teorem 1.5.18 ile $f(\mu) \in F(L_2)$ alt hyper kafestir. $a, x \in L_2$ keyfi olsun $f^{-1}(a) = \emptyset$ ise $f(\mu)(a) = 0 \leq \inf_{z \in a \oplus x}\{\mu(z)\}$ ve $f(\mu)(a) = 0 \leq \inf_{z \in a \otimes x}\{\mu(z)\}$ dir.

$f^{-1}(a) \neq \emptyset$ olsun. $a, x \in L_2$ için $\exists a_1, x_1 \in L_1$ öyleki $f(a_1) = a$, $f(x_1) = x$ dir.

$$\begin{aligned}
\inf_{w \in a \oplus x}\{f(\mu)(w)\} &= \inf_{w \in a \oplus x}\left\{\sup_{z \in f^{-1}(w)}\{\mu(z)\}\right\} \\
&\geq \inf_{w \in a \oplus x}\{\mu(z)\} \quad (\ f(z) = w\ ) \\
&= \inf_{f(z) \in f(a_1) \oplus f(x_1)}\{\mu(z)\} \\
&= \inf_{f(z) \in f(a_1 \oplus x_1)}\{\mu(z)\} \\
&= \inf_{z \in a_1 \oplus x_1}\{\mu(z)\} \geq \mu(a_1)\ .
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \forall\, a_1 \in f^{-1}(a)$ için $\inf_{w \in a \oplus x}\{f(\mu)(w)\} \geq \mu(a_1)$ dır. Buradan

$$\inf_{w \in a \oplus x}\{f(\mu)(w)\} \geq \sup_{a_1 \in f^{-1}(a)}\{\mu(a_1)\} = f(\mu(a))$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\inf_{w \in a \otimes x}\{f(\mu)(w)\} &= \inf_{w \in a \otimes x}\left\{\sup_{z \in f^{-1}(w)}\{\mu(z)\}\right\} \\
&\geq \inf_{w \in a \otimes x}\{\mu(z)\} \quad (\ f(z) = w\ ) \\
&= \inf_{f(z) \in f(a_1) \otimes f(x_1)}\{\mu(z)\} \\
&= \inf_{f(z) \in f(a_1 \otimes x_1)}\{\mu(z)\} \\
&= \inf_{z \in a_1 \otimes x_1}\{\mu(z)\} \geq \mu(a_1)\ .
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \forall\, a_1 \in f^{-1}(a)$ için $\inf_{w \in a \otimes x}\{f(\mu)(w)\} \geq \mu(a_1)$ dır. Buradan,

$\inf_{w \in a \otimes x}\{f(\mu)(w)\} \geq \sup_{a_1 \in f^{-1}(a)}\{\mu(a_1)\} = f(\mu(a))$ olduğundan $f(\mu) \in F(L_2)$ hyper idealdir.

2) Teorem 1.5.18 ile $\eta \in F(L_2)$ alt hyper kafestir. $\eta \in F(L_2)$ hyper ideal olsun. $a,\ x\ \in\ L_1$ için,

$$\begin{aligned}
\inf_{z \in a \oplus x}\{f^{-1}(\eta)(z)\} &= \inf_{z \in a \oplus x}\{\eta(f(z))\} \\
&\geq \inf_{f(z) \in f(a \oplus x)}\{\eta(f(z))\} \\
&\geq \inf_{f(z) \in f(a) \oplus f(x)}\{\eta(f(z))\} \\
&\geq \eta(f(a)) \\
&= f^{-1}(\eta)(a)\ .
\end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\inf_{z \in a \otimes x}\{ f^{-1}(\eta)(z)\} = \inf_{z \in a \otimes x}\{ \eta(f(z))\}$$
$$\geq \inf_{f(z) \in f(a \otimes x)} \{\eta(f(z))\}$$
$$\geq \inf_{f(z) \in f(a) \otimes f(x)} \{ \eta(f(z))\}$$
$$\geq \eta(f(a))$$
$$= f^{-1}(\eta)(a) \quad \text{dır.}$$

Buradan, $f^{-1}(\eta) \in F(L_1)$ hyper idealdir.

Teorem 1.5.32 $L_1 = (L_1, \oplus_1, \otimes_1)$, $L_2 = (L_2, \oplus_2, \otimes_2)$ iki hyper kafes $\mu_1 \in F(L_1)$, $\mu_2 \in F(L_2)$ nin hyper ideali olsun. Bu taktirde, $\mu_1 \text{ x } \mu_2 \in F(L_1 \text{x } L_2)$ hyper idealdir.

İspat: Teorem 1.5.19 ile $\mu_1 \text{ x } \mu_2 \in F(L_1 \text{x } L_2)$ alt hyper kafestir.

$a = (a_1, a_2),\ x = (x_1, x_2) \in L_1 \times L_2$ keyfi olsun.

$$\inf_{z \in a \oplus x}\{(\mu_1 \times \mu_2)(z)\} = \inf_{(z_1,z_2) \in (a_1,a_2) \oplus (x_1,x_2)}\{(\mu_1 \times \mu_2)(z_1, z_2)\}$$
$$= \inf_{z_1 \in a_1 \oplus x_1, z_2 \in a_2 \oplus x_2}\{ \mu_1(z_1), \mu_2(z_2)\}$$
$$= \{\inf_{z_1 \in a_1 \oplus x_1}\{ \mu_1(z_1)\} , \inf_{z_1 \in a_1 \oplus x_1}\{ \mu_2(z_2)\} \}$$
$$\geq \{\mu_1(a_1), \mu_2(a_2)\}$$
$$= \mu_1 \times \mu_2\ (a_1, a_2) = \mu_1 \times \mu_2(a)\ .$$

Benzer şekilde,

$$\inf_{z \in a \otimes x}\{(\mu_1 \times \mu_2)(z)\} = \inf_{(z_1,z_2) \in (a_1,a_2) \otimes (x_1,x_2)}\{(\mu_1 \times \mu_2)(z_1, z_2)\}$$
$$= \inf_{z_1 \in a_1 \otimes x_1, z_2 \in a_2 \otimes x_2}\{ \mu_1(z_1), \mu_2(z_2)\}$$
$$= \{\inf_{z_1 \in a_1 \otimes x_1}\{ \mu_1(z_1)\} , \inf_{z_1 \in a_1 \otimes x_1}\{ \mu_2(z_2)\} \}$$
$$\geq \{\mu_1(a_1), \mu_2(a_2)\}$$
$$= \mu_1 \times \mu_2(a_1, a_2) = \mu_1 \times \mu_2(a) \text{ dır.}$$
$$\Longrightarrow \mu_1 \times \mu_2 \in F(L_1 \times L_2) \text{ hyper idealdir.}$$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1 $(\in, \in \vee q_k)$, $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ Fuzzy Alt Hyper Kafesler (Hyper idealler)

Bu bölümde, L hyper kafesinin $(\in, \in \vee q)$ genel tipte fuzzy alt hyper kafeslerini (hyper ideallerini) elde etmek için $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) kavramı ele alınmıştır. Örnek 2.1.5 te $\mu: L \rightarrow [0,1]$ $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) ancak μ $(\in, \in \vee q)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) olmadığı gösterilmiştir. Dolayısıyla $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) $(\in, \in \vee q)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) in ve fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) in genelleştirilmesidir. Eşlik değerli fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) kavramı kullanılarak, fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal), $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) ve $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) kavramlarının karakterizasyonu ele alınmış ve aralarındaki ilişki araştırılmıştır.

$t \in (0,1]$ olmak üzere, x_t fuzzy noktası aşağıdaki gibi tanımlanır. $x, y \in L$ için,

$$x_t(y) = \begin{cases} t\,, & y = x \\ 0\,, & y \neq x \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

x_t fuzzy noktası aşağıdaki özelliklere sahiptir. $\mu \in F(L)$, $k \in [0,1)$ için,

i) $x_t \in \mu \;\Leftrightarrow\; \mu(x) \geq t$ (x_t nin μ ye ait olması) ,

ii) $x_t q_k \mu \;\Leftrightarrow\; \mu(x) + t + k > 1$ (x_t ile μ nin k- yarı çakışması) ,

iii) $x_t \in \mu$ veya $x_t q_k \mu \;\Leftrightarrow\; x_t \in \vee q_k \mu$ (x_t μ ye ait veya x_t ile μ nin k- yarı çakışması),

iv) $x_t \overline{\alpha} \mu \Leftrightarrow\; \mu(x) < t$ ve $\mu(x) + t + k \leq 1$ ($\alpha \in \{\in, q_k, \in \vee q_k\}$ için $x_t \alpha \mu$ ifadesi geçerli değildir).

Tanım 2.1.1 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun. μ ye L nin $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafesi denir.$\Leftrightarrow$ $\forall$ x, y $\in$ L , t, r $\in$ (0, 1] için,

(i) $x_t, y_r \in \mu$ için $z_{t \wedge r} \in \vee q_k \mu$, $\forall\, z \in x \oplus y$,

(ii) $x_t, y_r \in \mu$ için $z_{t \wedge r} \in \vee q_k \mu$, $\forall\, z \in x \otimes y$.

μ ye L nin ($\in$, $\in \vee q_k$) fuzzy hyper ideal denir.$\Leftrightarrow$ μ $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes ve

(iii) $x_t \in \mu$ için $z_t \in \vee q_k \mu$, $\forall\, z \in x \oplus y$,

(iv) $x_t \in \mu$ için $z_t \in \vee q_k \mu$, $\forall\, z \in x \otimes y$.

Bu tanımda k=0 için μ ye $(\in, \in \vee q)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) denir.

Teorem 2.1.2 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun. Bu taktirde, μ $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafestir.$\Leftrightarrow$ $\forall$ x, y $\in$ L ve k $\in$ [0, 1) için,

(1) $\min\{\mu(x), \mu(y)\} \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \oplus y} \mu(z)$,

(2) $\min\{\mu(x), \mu(y)\} \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \otimes y} \mu(z)$.

μ $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy hyper idealdir. $\Leftrightarrow$ μ $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes ve

(3) $\mu(x) \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \oplus y} \mu(z)$,

(4) $\mu(x) \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \otimes y} \mu(z)$.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (1) : x, y $\in$ L keyfi olsun. Farz edelim ki x_t, $y_r \in \mu$ ve $z \in x \oplus y$ için $z_{t \wedge r} \in \vee q_k \mu$ ve $\inf_{z \in x \oplus y} \mu(z) < \min\{\mu(x), \mu(y)\} \wedge \frac{1-k}{2}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iki durumu göz önüne alalım.

(a) $\min\{\mu(x), \mu(y)\} < \frac{1-k}{2}$,

(b) $\frac{1-k}{2} \leq \min\{(x), \mu(y)\}$.

(a) durumunda; $\min\{\mu(x), \mu(y)\} < \frac{1-k}{2}$ ve $\inf_{z \in x \oplus y} \mu(z) < \min\{\mu(x), \mu(y)\} \wedge \frac{1-k}{2}$ olduğundan $\inf_{z \in x \oplus y} \mu(z) < \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ dir. Şimdi $\inf_{z \in x \oplus y} \mu(z) < t < \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ olacak şekilde bir t seçelim. t nin seçminden $x_t, y_t \in \mu$ dir; fakat $z \in x \oplus y$ için $z_t \,\overline{\in}\, \vee \overline{q_k} \mu$ olur ki bu (i) ile çelişir.

(b) durumunda; $\frac{1-k}{2} \leq \min\{(x), \mu(y)\}$ ve $\inf_{z \in x \oplus y} \mu(z) < \min\{\mu(x), \mu(y)\} \wedge \frac{1-k}{2}$ olduğundan $\inf_{z \in x \oplus y} \mu(z) < \frac{1-k}{2}$ dir. Buradan $x_{\frac{1-k}{2}}, y_{\frac{1-k}{2}} \in \mu$, $z \in x \oplus y$ için $z_{\frac{1-k}{2}} \,\overline{\in}\, \vee \overline{q_k} \mu$ olur ki bu (i) ile çelişir.

O halde, $\min\{\mu(x), \mu(y)\} \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \oplus y} \mu(z)$ dır.

(ii) $\Rightarrow$ (2) : (i) $\Rightarrow$ (1) ye benzer şekilde görülür.

(iii) $\Rightarrow$ (3) : $x, y \in L$ keyfi olsun. Aşağıdaki iki durumu göz önüne alalım.

(a) $\mu(x) < \frac{1-k}{2}$

(b) $\frac{1-k}{2} \leq \mu(x)$.

(a) durumunda farz edelim ki $\mu(x) = t < \frac{1-k}{2}$ ve $z \in x \oplus y$ için $\mu(z) = r < \mu(x)$ olsun. $r < s < t$ ve $r + s < 1 - k$ olacak şekilde s seçelim. s nin seçiminden $x_s \in \mu$ fakat $z \in x \oplus y$ için $z_s \,\overline{\in}\, \vee \overline{q_k} \mu$ olur ki bu (iii) ile çelişir.

(b) durumunda $\frac{1-k}{2} < \mu(x)$ olsun. Eğer $\inf_{z\in x\oplus y} \mu(z) < \mu(x)\wedge\frac{1-k}{2} \Rightarrow x_{\frac{1-k}{2}} \in \mu$; fakat $z \in x \oplus y$ için $z_{\frac{1-k}{2}} \overline{\in} \vee\overline{q_k}\mu$ olur ki bu (iii) ile çelişir.

O halde, $\mu(x)\wedge\frac{1-k}{2} \leq \inf_{z\in x\oplus y} \mu(z)$ olmalıdır.

(iv) ⇒ (4) : (iii) ⇒ (3) ye benzer şekilde görülür.

(1) ⇒ (i) : $x_t, y_r \in \mu$ keyfi olsun. ⇒ $t \leq \mu(x)$ ve $r \leq \mu(y)$ dir. (1) kabulü ile $t\wedge r\wedge\frac{1-k}{2} \leq \min\{\mu(x), \mu(y)\}\wedge\frac{1-k}{2} \leq \inf_{z\in x\oplus y} \mu(z)$ dir.

Eğer $\frac{1-k}{2} < t\wedge r$. ⇒ $\frac{1-k}{2} \leq \inf_{z\in x\oplus y} \mu(z)$. ⇒ $1-k < \inf_{z\in x\oplus y} \mu(z) + t\wedge r$.

⇒ $z \in x \oplus y$ için $1 < \mu(z) + t\wedge r + k$ dir.

Eğer $t\wedge r \leq \frac{1-k}{2}$. ⇒ $t\wedge r \leq \inf_{z\in x\oplus y} \mu(z)$. ⇒ $z \in x \oplus y$ için $t\wedge r \leq \mu(z)$ dir.

Buradan, $1 < \mu(z) + t\wedge r + k$ veya $t\wedge r \leq \mu(z)$ olduğundan $z \in x \oplus y$ için $z_{t\wedge r} \in \vee q_k\mu$ olur.

(2) ⇒ (ii) : (1) ⇒ (i) ye benzer şekilde görülür.

(3) ⇒ (iii) : $x_t \in \mu$ keyfi olsun. ⇒ $t \leq \mu(x)$.

⇒ $t\wedge\frac{1-k}{2} \leq \mu(x)\wedge\frac{1-k}{2} \leq \inf_{z\in x\oplus y} \mu(z)$, buradan açık olarak $t \leq \frac{1-k}{2}$ veya $\frac{1-k}{2} < t$ dir.

Eğer $t \leq \frac{1-k}{2}$. ⇒ $t \leq \inf_{z\in x\oplus y} \mu(z)$. ⇒ $z \in x \oplus y$ için $t \leq \mu(z)$ dir.

Eğer $\frac{1-k}{2} < t$. ⇒ $\frac{1-k}{2} \leq \inf_{z\in x\oplus y} \mu(z)$. ⇒ $1-k < \inf_{z\in x\oplus y} \mu(z) + t$. ⇒ $z \in x \oplus y$ için $1 < \mu(z) + t + k$ dır.

Buradan, $1 < \mu(z) + t + k$ veya $t \leq \mu(z)$ olduğundan $z \in x \oplus y$ için $z_t \in \vee q_k\mu$ olur.

(4) ⇒ (iv) : (3) ⇒ (iii) ye benzer şekilde görülür.

Aşağıdaki sonuç Tanım 2.1.1 ve Teorem 2.1.2 den elde edilir.

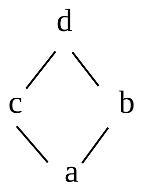
Sonuç 2.1.3 L=(L, ⊕, ⊗) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun. Bu taktirde,

1) μ $(\in, \in\vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafestir. ⇔ Teorem 2.1.2 nin (1) ve (2) koşulları gerçeklenir.

2) μ $(\in, \in\vee q_k)$ fuzzy hyper idealdir. ⇔ Teorem 2.1.2 nin (3) ve (4) koşulları gerçeklenir.

Uyarı 2.1.4 L=(L, ⊕, ⊗) bir hyper kafes olsun. Bu taktirde, her fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) ve $(\in, \in \vee q)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal), $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir; ancak tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.1.5 Kafes diyagramı aşağıda verilen L={ a,b,c,d } göz önüne alınsın. L üzerinde ⊕ ve ⊗ işlemleri Örnekler 1.4.3 te 3 te ki gibi tanımlanırsa, (L, ⊕, ⊗) bir hyper kafestir. (L kafesinden elde edilen hyper kafes.)



⊗	a	b	c	d
a	L	{b,d}	{c,d}	{d}
b	{b,d}	{b,d}	{d}	{d}
c	{c,d}	{d}	{c,d}	{d}
d	{d}	{d}	{d}	{d}

⊕	a	b	c	d
a	{a}	{a}	{a}	{a}
b	{a}	{a,b}	{a}	{a,b}
c	{a}	{a}	{a,c}	{a,c}
d	{a}	{a,b}	{a,c}	L

Şekil 4. (L, ⊕, ⊗) Hyper kafesi

$\mu : L \to [0,1]$, μ(a)=1 , μ(b)=0.6 , μ(c)=0.8 , μ(d)=0.4 olarak tanımlayalım. k=0.2 için,

- μ $(\in, \in \vee q_{0.2})$ fuzzy hyper idealdir.
- μ $(\in, \in \vee q)$ fuzzy hyper ideal değildir.
- μ fuzzy hyper ideal değildir.

Teorem 2.1.6 L=(L, ⊕, ⊗) bir hyper kafes ve $\emptyset \neq I \subseteq L$ olsun. Bu taktirde, I alt hyper kafes (hyper ideal) dir. ⇔ χ_I $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.

İspat: "⇒" I alt hyper kafes olsun. Teorem 1.5.11 ile χ_I fuzzy alt hyper kafestir.

$\Rightarrow \forall x, y \in L$ için $\min\{\chi_I(x), \chi_I(y)\} \leq \inf_{z \in x \oplus y} \{\chi_I(z)\}$ ve

$$\min\{\chi_I(x), \chi_I(y)\} \leq \inf_{z \in x \otimes y} \{\chi_I(z)\} \text{ dir.}$$

$\Rightarrow \min\{\chi_I(x), \chi_I(y)\} \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \oplus y} \{\chi_I(z)\} \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \oplus y} \{\chi_I(z)\}$ ve

$\min\{\chi_I(x), \chi_I(y)\} \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \otimes y} \{\chi_I(z)\} \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \otimes y} \{\chi_I(z)\}$ dir. Teorem 2.1.2 ile χ_I $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafestir.

Teorem 1.5.26 ile χ_I fuzzy hyper ideal olduğundan $\forall x, y \in L$ için $\chi_I(x) \leq \inf_{z \in x \oplus y} \{\chi_I(z)\}$ ve $\chi_I(x) \leq \inf_{z \in x \otimes y} \{\chi_I(z)\}$ dir. $\Rightarrow$ $\chi_I(x) \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \oplus y} \{\chi_I(z)\} \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \oplus y} \{\chi_I(z)\}$ ve $\chi_I(x) \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \otimes y} \{\chi_I(z)\} \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \otimes y} \{\chi_I(z)\}$ dir. Teorem 2.1.2 ile χ_I $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy hyper idealdir.

"$\Leftarrow$" χ_I $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes(ideal) olsun. $x, y \in I$ keyfi olsun. $\Rightarrow$

$$\frac{1-k}{2} = \min\{\chi_I(x), \chi_I(y)\} \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \oplus y} \chi_I(z) \text{ ve}$$

$$\frac{1-k}{2} = \min\{\chi_I(x), \chi_I(y)\} \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \oplus y} \chi_I(z)$$ dir. $0 < \frac{1-k}{2}$ olduğundan $1 = \inf_{z \in x \oplus y} \chi_I(z)$ ve $1 = \inf_{z \in x \otimes y} \chi_I(z)$ dir. $\Rightarrow$ $\forall z \in x \oplus y, x \otimes y$ için $\chi_I(z) = 1$ olduğundan $x \oplus y$, $x \otimes y \subseteq I$ olup $x \oplus y \in \mathcal{P}^*(I)$, $x \otimes y \in \mathcal{P}^*(I)$ dir. Tanım 1.4.8 ile I alt hyper kafestir.

Şimdi I nın hyper ideal olduğunu gösterelim. $x \in I$, $y \in L$ keyfi olsun. χ_I $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy hyper ideal olduğundan,

$\chi_I(x) \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \oplus y} \chi_I(z)$ ve $\chi_I(x) \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \otimes y} \chi_I(z)$ dir. $x \in I, k \in [0,1)$ olduğu göz önüne alınırsa $\chi_I(x) = 1$ ve $0 < \frac{1-k}{2}$ dir. Buradan $1 = \inf_{z \in x \oplus y} \chi_I(z)$ ve $1 = \inf_{z \in x \otimes y} \chi_I(z)$ dir. $\Rightarrow \forall z \in x \oplus y$, $x \otimes y$ için $\chi_I(z) = 1$ olduğundan $x \oplus y, x \otimes y \subseteq I$ olup $x \oplus y \in \mathcal{P}^*(I)$ $x \otimes y \in \mathcal{P}^*(I)$ dir. Tanım 1.4.17 ile I hyper idealdir.

Teorem 2.1.7 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun. Bu taktirde, μ $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.$\Leftrightarrow$ $\forall t \in \left(0, \frac{1-k}{2}\right]$ için $\emptyset \neq \mu_t$ alt hyper kafes (hyper ideal) dir.

İspat: "$\Rightarrow$" μ $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes(ideal) ve $0 < t \leq \frac{1-k}{2}$ olsun. $x, y \in \mu_t$ keyfi olsun. $\Rightarrow$ $t \leq \mu(x)$, $t \leq \mu(y)$ dir. Diğer yandan μ $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes olduğu göz önüne alınırsa,

$$t \leq t \wedge \frac{1-k}{2} \leq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \wedge \frac{1-k}{2} \leq \inf_{z \in x \oplus y} \mu(z) \text{ ve}$$

$t \leq t\wedge\frac{1-k}{2} \leq \min\{\mu(x),\mu(y)\}\wedge\frac{1-k}{2} \leq \inf_{z\in x\otimes y}\mu(z)$ olduğu görülür. Buradan $\forall z \in x \oplus y$, $x \otimes y$ için $\mu(z) \geq t$ olduğundan $x \oplus y, x \otimes y \subseteq \mu_t$ olup $x \oplus y \in \mathcal{P}^*(\mu_t)$ $x \otimes y \in \mathcal{P}^*(\mu_t)$ dir. Tanım 1.4.8 ile μ_t alt hyper kafestir.

Şimdi μ_t nin hyper ideal olduğunu gösterelim. $x \in \mu_t$, $y \in L$ keyfi olsun. $\Rightarrow t \leq \mu(x)$ dir. Diğer yandan μ $(\mathcal{E},\mathcal{E}\vee q_k)$ fuzzy hyper ideal olduğu göz önüne alınırsa,

$$t \leq t\wedge\frac{1-k}{2} \leq \mu(x)\wedge\frac{1-k}{2} \leq \inf_{z\in x\oplus y}\mu(z) \text{ ve}$$

$t \leq t\wedge\frac{1-k}{2} \leq \mu(x)\wedge\frac{1-k}{2} \leq \inf_{z\in x\otimes y}\mu(z)$ olduğu görülür. Buradan $\forall z \in x \oplus y$ ve $z \in x \otimes y$ için $\mu(z) \geq t$ olduğundan $x \oplus y$, $x \otimes y \subseteq \mu_t$ olup $x \oplus y \in \mathcal{P}^*(\mu_t)$ $x \otimes y \in \mathcal{P}^*(\mu_t)$ dir. Tanım 1.4.17 ile μ_t hyper idealdir.

"$\Leftarrow$" $\forall\, t \in \left(0,\frac{1-k}{2}\right]$ için $\emptyset \neq \mu_t$ alt hyper kafes(ideal) olsun. $\forall$ $x, y \in L$ için

$t_0 = \min\{\mu(x),\mu(y)\}\wedge\frac{1-k}{2} \leq \mu(x)$, $t_0 = \min\{\mu(x),\mu(y)\}\wedge\frac{1-k}{2} \leq \mu(y)$ yazabiliriz. Buradan $x \in \mu_{t_0}$ ve $y \in \mu_{t_0}$ dir. μ_{t_0} alt hyper kafes olduğundan $x \oplus y$, $x \otimes y \subseteq \mu_{t_0}$ dir. $\Rightarrow \min\{\mu(x),\mu(y)\}\wedge\frac{1-k}{2} \leq \inf_{z\in x\oplus y}\mu(z)$, $\min\{\mu(x),\mu(y)\}\wedge\frac{1-k}{2} \leq \inf_{z\in x\otimes y}\mu(z)$ dir. Teorem 2.1.2 ile μ $(\in,\in\vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafestir.

Şimdi μ $(\in,\in\vee q_k)$ fuzzy hyper ideal oluğunu gösterelim. $x, y \in L$ keyfi olsun. $x \in L$ için $t_0 = \mu(x)\wedge\frac{1-k}{2} \leq \mu(x)$ yazabiliriz. Buradan $x \in \mu_{t_0}$dir. μ_{t_0} hyper kafes olduğundan $x \oplus y$, $x \otimes y \subseteq \mu_{t_0}$dir. $\Rightarrow \mu(x)\wedge\frac{1-k}{2} \leq \inf_{z\in x\oplus y}\mu(z)$, $\mu(x)\wedge\frac{1-k}{2} \leq \inf_{z\in x\otimes y}\mu(z)$ dir. Teorem 2.1.2 ile μ $(\in,\in\vee q_k)$ fuzzy hyper idealdir.

Sonuç 2.1.8 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun. Bu taktirde, aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

1) μ $(\in,\in\vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.

2) $\forall t \in (0{,}0.5]$ için μ_t $(\mu_t \neq \emptyset)$ alt hyper kafes (hyper ideal) dir.

İspat: Teorem 2.1.7 de k=0 alınırsa elde edilir.

Tanım 2.1.9 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun. μ ye L nin $(\bar{\in},\bar{\in}\vee\overline{q_k})$ fuzzy alt hyper kafesi denir. $\Leftrightarrow$ $\forall$ $x, y \in L$ $t, r \in (0, 1]$ için,

(i) $z_{t\wedge r} \,\bar{\in}\, \mu$ için $x_t \,\bar{\in}\, \vee\overline{q_k}\mu$ veya $y_r \,\bar{\in}\, \vee\overline{q_k}\mu$, $\forall\, z \in x \oplus y$,

(ii) $z_{t\wedge r} \,\bar{\in}\, \mu$ için $x_t \,\bar{\in}\, \vee\overline{q_k}\mu$ veya $y_r \,\bar{\in}\, \vee\overline{q_k}\mu$, $\forall\, z \in x \otimes y$.

μ ye L nin $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy hyper ideal denir.$\Leftrightarrow$ μ $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy alt hyper kafes ve

(iii) $z_t \overline{\in} \mu$ için $x_t \overline{\in} \vee \overline{q_k}\mu$, $\forall z \in x \oplus y$,

(iv) $z_t \overline{\in} \mu$ için $x_t \overline{\in} \vee \overline{q_k}\mu$, $\forall z \in x \otimes y$.

Bu tanımda k=0 için μ ye $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) denir.

Teorem 2.1.10 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun. Bu taktirde, μ $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy alt hyper kafestir.$\Leftrightarrow$ $\forall$ x, y $\in$ L, k $\in [0,1)$ için,

(1) $\min\{\mu(x), \mu(y)\} \leq \inf_{z \in x \oplus y} \mu(z) \vee \frac{1-k}{2}$,

(2) $\min\{\mu(x), \mu(y)\} \leq \inf_{z \in x \otimes y} \mu(z) \vee \frac{1-k}{2}$.

μ $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy hyper idealdir. $\Leftrightarrow$ μ $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes ve

(3) $\mu(x) \leq \inf_{z \in x \oplus y} \mu(z) \vee \frac{1-k}{2}$,

(4) $\mu(x) \leq \inf_{z \in x \otimes y} \mu(z) \vee \frac{1-k}{2}$.

İspat: Teorem 2.1.2 ye benzer şekilde yapılır.

Sonuç 2.1.11 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun. Bu taktirde,

1) μ $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy alt hyper kafestir.$\Leftrightarrow$ Teorem 2.1.10 nun (1) ve (2) koşulları gerçeklenir.

2) μ $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy hyper idealdir.$\Leftrightarrow$ Teorem 2.1.10 nun (3) ve (4) koşulları gerçeklenir.

Uyarı 2.1.12 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes olsun. Bu taktirde, $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal), k=0 için $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir. Her fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) bir $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir; ancak tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.1.13 L=(L, $\oplus$, $\otimes$), Örnek 2.1.5 ki hyper kafes ve $\mu : L \to [0,1]$, μ(a)=0.2, μ(b)=0.4 μ(c)=0.3 , μ(d)=0.2 olsun. k=0.2 için μ $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_{0.2}})$ fuzzy hyper idealdir, ancak μ fuzzy hyper ideal değildir.

Teorem 2.1.14 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\emptyset \neq I \subseteq L$ olsun. Bu taktirde, I alt hyper kafes (hyper ideal) dir. $\Leftrightarrow$ χ_I $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.

İspat: Teorem 2.1.6 ya benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.1.15 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun. Bu taktirde, μ $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.$\Leftrightarrow$ $\forall\, t \in \left(\frac{1-k}{2}, 1\right]$ için $\emptyset \neq \mu_t$ alt hyper kafes (hyper ideal) dir.

İspat: Teorem 2.1.7 ye benzer şekilde yapılır.

Sonuç 2.1.16 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun. Bu taktirde, aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

1) μ $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.

2) $\forall t \in (0.5,1]$ için μ_t $(\mu_t \neq \emptyset)$ alt hyper kafes (hyper ideal) dir.

İspat: Sonuç 2.1.15 de k=0 alınırsa elde edilir.

$\mu \in F(L)$ olsun. Aşağıdaki kümeyi göz önüne alalım.

$K_t = \{\, t \in (0,1] \mid \mu_t$ alt hyper kafes (hyper ideal)$\}$ olsun. Bu durumda,

- Eğer $K_t = (0,1]$ ise μ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.
- Eğer $K_t = (0, \frac{1-k}{2}]$ ise μ $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.
- Eğer $K_t = (\frac{1-k}{2}, 1]$ ise μ $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.

Buna göre $K_t \neq \emptyset$ olmak üzere $K_t = (\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in (0,1)$ $\alpha < \beta$ için $\mu \in F(L)$ nin alt hyper kafes (hyper ideal) olup olmadığı açık bir sorudur. Bu sorunun cevabı için aşağıdaki tanımı göz önüne alalım.

Tanım 2.1.17 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes, $\mu \in F(L)$, $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha < \beta$ olsun. Bu taktirde,

μ ye L nin eşlik değerli fuzzy alt hyper kafesi denir. $\Leftrightarrow$ $\forall\, x, y \in L$ için

i) $\min\{\mu(x), \mu(y)\} \wedge \beta \leq \inf_{z \in x \oplus y} \mu(z) \vee \alpha$,

ii) $\min\{\mu(x), \mu(y)\} \wedge \beta \leq \inf_{z \in x \otimes y} \mu(z) \vee \alpha$.

μ ye L nin eşlik değerli fuzzy hyper ideali denir. $\Leftrightarrow$ μ L nin eşlik değerli fuzzy alt hyper kafesi ve $\forall\, x, y \in L$ için,

iii) $\mu(x) \wedge \beta \leq \inf_{z \in x \oplus y} \mu(z) \vee \alpha$,

iv) $\mu(x) \wedge \beta \leq \inf_{z \in x \otimes y} \mu(z) \vee \alpha$.

Uyarı 2.1.18 Her eşlik değerli fuzzy alt hyper kafesin (hyper idealin) $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) olması gerekmez.

Örnek 2.1.19 L={a, b, c, d,} olmak üzere Örnek 2.1.5 de ki L=(L, $\oplus$, $\otimes$) hyper kafesini göz önüne alalim. $\mu: L \to [0,1]$, $\mu(a) = 0$, $\mu(b) = \mu(c) = \mu(d) = 0.1$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.6$ olarak tanımlayalım. Açık olarak μ eşlik değerli fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir; ancak μ $(\in, \in \vee q_{0.2})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) değildir. Gerçekten,

$$0 = \min\{\mu(a), \mu(a)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in a \oplus a} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0 = \min\{\mu(a), \mu(b)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in a \oplus b} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0 = \min\{\mu(a), \mu(c)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in a \oplus c} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0 = \min\{\mu(a), \mu(d)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in a \oplus d} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0.1 = \min\{\mu(b), \mu(b)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in b \oplus b} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0.1 = \min\{\mu(b), \mu(c)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in b \oplus c} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0.1 = \min\{\mu(b), \mu(d)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in b \oplus d} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0.1 = \min\{\mu(c), \mu(c)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in c \oplus c} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0.1 = \min\{\mu(c), \mu(d)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in c \oplus d} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0.1 = \min\{\mu(d), \mu(d)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in d \oplus d} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2, \quad \text{ve}$$

$$0 = \min\{\mu(a), \mu(a)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in a \otimes a} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0 = \min\{\mu(a), \mu(b)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in a \otimes b} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0 = \min\{\mu(a), \mu(c)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in a \otimes c} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0 = \min\{\mu(a), \mu(d)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in a \otimes d} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0.1 = \min\{\mu(b), \mu(b)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in b \otimes b} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0.1 = \min\{\mu(b), \mu(c)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in b \otimes c} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0.1 = \min\{\mu(b), \mu(d)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in b \otimes d} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$$0.1 = \min\{\mu(c), \mu(c)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in c \otimes c} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$$

$0.1 = \min\{\mu(c), \mu(d)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in c \otimes d} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2,$

$0.1 = \min\{\mu(d), \mu(d)\} \wedge 0.6 \leq \inf_{z \in d \otimes d} \mu(z) \vee 0.2 = 0.2$ dir.

Benzer şekilde μ fuzzy hyper ideal olduğuda gösterilir. Buradan μ eşlik değerli fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir; fakat $0.1 = \min\{\mu(b), \mu(b)\} \wedge 0.4 \nleq \inf_{z \in b \otimes b} \mu(z) = 0$ olduğundan μ $(\in, \in \vee q_{0.2})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) değildir.

Şimdi eşlik değerli fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) leri karakterizasyonunu seviye alt hyper kafes (hyper ideal) ler yardımıyla verelim.

Teorem 2.1.20 L=(L, ⊕, ⊗) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun. μ eşlik değerli fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir. $\Leftrightarrow$ $\forall\, t \in (\alpha, \beta]$ için $\mu_t (\neq \emptyset)$ alt hyper kafes (hyper ideal) dir.

İspat: Teorem 2.1.7 ve Teorem 2.1.15 ile açıktır.

Uyarı 2.1.21 Her eşlik değerli fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) lerin $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) olması gerekmez.

Örnek 2.1.22 L=(L, ⊕, ⊗) Örnek 2.1.5 de ki hyper kafes olsun. $\mu: L \to [0,1]$, $\mu(a) = 1$, $\mu(b) = 0.6$, $\mu(c) = 0.8$, $\mu(d) = 0.4$ olarak tanımlansın. $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.7$, için μ eşlik değerli fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal); ancak k=0.4 için μ $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_{0.2}})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) değildir.

$\alpha = 0.6$, $\beta = 0.7$, için μ eşlik değerli fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) olduğunu açıktır; fakat k=0.4 için $\min\{\mu(a), \mu(b)\} \nleq \inf_{z \in a \otimes b} \mu(z) \vee 0.3$ olduğundan μ $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_{0.2}})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) değildir.

Teorem 2.1.23 L=(L, ⊕, ⊗) bir hyper kafes, $\mu \in F(L)$, $\alpha, \beta \in (0,1]$, $\alpha < \beta$ olsun. Bu taktirde,

1) μ L nin fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir. $\Leftrightarrow$ μ L nin eşlik değerli fuzzy alt hyper kafesi (hyper ideali) dir. $(\alpha = 0, \beta = 1)$.

2) μ L nin $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir. $\Leftrightarrow$ μ L nin eşlik değerli fuzzy alt hyper kafesi (hyper ideali) dir. $\left(\alpha = 0, \beta = \frac{1-k}{2}\right)$.

3) μ L nin $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.$\Leftrightarrow$ μ L nin eşlik değerli fuzzy alt hyper kafesi (hyper ideali) dir. $\left(\alpha = \frac{1-k}{2}, \beta = 1\right)$.

İspat: Açıktır.

2.2 İmplikasyonlara Bağlı Fuzzy Alt Hyper Kafesler (Hyper İdealler)

P fuzzy önerme olmak üzere P nin doğruluk değeri [P] olarak tanımlanır. Burada da fuzzy lojik ve doğruluk değerleri aşağıda verilmiştir.

$[x \in F] = F(x)$;

$[x \notin F] = 1 - F(x)$;

$[P \wedge Q] = \min\{[P], [Q]\}$;

$[P \vee Q] = \max\{[P], [Q]\}$;

$[P \rightarrow Q] = \min\{1, 1 - [P] + [Q]\}$;

$[\forall x P(x)] = \inf[P(x)]$;

$\vDash P \Leftrightarrow [P] = 1$

Fuzzy lojikte birçok implikasyonlar tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Early Zadeh	$I_m(\alpha, \beta) = \max\{1 - \alpha, \min\{\alpha, \beta\}\}$
Lukasiewicz	$I_\alpha(\alpha, \beta) = \min\{1, 1 - \alpha + \beta\}$
Standard star (Gödel)	$I_g(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \alpha \leq \beta \\ \beta, & \alpha > \beta \end{cases}$
Contraposition of Gödel	$I_{cg}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \alpha \leq \beta \\ 1 - \alpha, & \alpha > \beta \end{cases}$
Gaines-Rescher	$I_{gr}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \alpha \leq \beta \\ 0, & \alpha > \beta \end{cases}$
Kleene-Dienes	$I_b(\alpha, \beta) = \max\{1 - \alpha, \beta\}$
Goguen	$I_{gg}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \alpha \leq \beta \\ \frac{\beta}{\alpha}, & \alpha > \beta \end{cases}$

Aşağıda implikasyon oparatörlerden Lukasiewcziz lojik ile ile ilgili tanımlara bakalım.

Tanım 2.2.1 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun. μ ye fuzzyleştirilmiş alt hyper kafes denir. ⇔

i) $\forall x, y \in L$ için $\vDash$ [[$x \in \mu$]$\wedge$[$y \in \mu$] $\rightarrow$ [$\forall z \in x \oplus y$ için $z \in \mu$]],

ii) $\forall x, y \in L$ için $\vDash$ [[$x \in \mu$]$\wedge$[$y \in \mu$] $\rightarrow$ [$\forall z \in x \otimes y$ için $z \in \mu$]] dir.

μ ye fuzzyleştirilmiş hyper ideal denir. ⇔ μ fuzzyleştirilmiş alt hyper kafes ve

iii)$\forall x, y \in L$ için $\vDash$ [[$x \in \mu$] $\rightarrow$ [$\forall z \in x \oplus y$ için $z \in \mu$]],

iv)$\forall x, y \in L$ için $\vDash$ [[$x \in \mu$] $\rightarrow$ [$\forall z \in x \otimes y$ için $z \in \mu$]] dir.

Şimdi t-totoloji kavramını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\vDash_t P \quad \Leftrightarrow \quad [P] \geq t$$

Böylece implikasyonlara bağlı fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) kavramını aşağıdaki gibi genelleyelim.

Tanım 2.2.2 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes, $\mu \in F(L)$, $t \in (0,1]$ olsun.μ ye t-implikasyonuna bağlı fuzzy alt hyper kafes denir. ⇔

i) $\forall x, y \in L$ için $\vDash_t$ [[$x \in \mu$]$\wedge$[$y \in \mu$] $\rightarrow$ [$\forall z \in x \oplus y$ için $z \in \mu$]],

ii) $\forall x, y \in L$ için $\vDash_t$ [[$x \in \mu$]$\wedge$[$y \in \mu$] $\rightarrow$ [$\forall z \in x \otimes y$ için $z \in \mu$]] dir.

μ ye t-implikasyonuna bağlı fuzzy hyper ideal denir. ⇔ μ t-implikasyonuna bağlı fuzzy alt hyper kafes ve

iii)$\forall x, y \in L$ için $\vDash_t$ [[$x \in \mu$] $\rightarrow$ [$\forall z \in x \oplus y$ için $z \in \mu$]],

iv)$\forall x, y \in L$ için $\vDash_t$ [[$x \in \mu$] $\rightarrow$ [$\forall z \in x \otimes y$ için $z \in \mu$]] dir.

I implikasyon operatör olmak üzere aşağıdaki sonucu verelim.

Sonuç 2.2.3 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes, $\mu \in F(L)$, $t \in (0,1]$ olsun. μ ye t-implikasyonuna bağlı fuzzy alt hyper kafes denir. ⇔ $\forall x, y \in L$ için,

1) $I[\min\{\mu(x), \mu(y)\}, \inf_{z \in x \oplus y} \mu(z)] \geq t$,

2) $I[\min\{\mu(x), \mu(y)\}, \inf_{z \in x \otimes y} \mu(z)] \geq t$ dir.

μ ye t-imlikasyonuna bağlı fuzzy hyper ideal denir. $\Leftrightarrow$ μ t-imlikasyonuna bağlı fuzzy alt hyper kafes ve

3) $I[\mu(x), \inf_{z\in x\oplus y} \mu(z)] \geq t$,

4) $I[\mu(x), \inf_{z\in x\otimes y} \mu(z)] \geq t$ dir.

Teorem 2.2.4 L=(L, $\oplus$, $\otimes$) bir hyper kafes ve $\mu \in F(L)$ olsun. Bu taktirde,

1) Eğer $I = I_{gr}$ ise μ 0.5 - implikasyonuna bağlı fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.$\Leftrightarrow$ μ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.

2) Eğer $I = I_g$ ise μ $\frac{1-k}{2}$ - implikasyonuna bağlı fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.$\Leftrightarrow$ μ $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.

3) Eğer $I = I_{cg}$ ise μ $\frac{1-k}{2}$ - implikasyonuna bağlı fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.$\Leftrightarrow$ μ $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir.

İspat: 2 nin ispatını yapalım 1 ve 3 benzer şekilde yapılır.

"$\Rightarrow$" Farz edelim ki μ $\frac{1-k}{2}$ - implikasyonuna bağlı L nın fuzzy alt hyper kafes olsun. $\Rightarrow$ $I_g(\min\{\mu(x), \mu(y)\}, \inf_{z\in x\oplus y} \mu(z)) \geq \frac{1-k}{2}$ ve $I_g(\min\{\mu(x), \mu(y)\}, \inf_{z\in x\otimes y} \mu(z)) \geq c$. O halde $\inf_{z\in x\oplus y} \mu(z) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ veya $\min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq \inf_{z\in x\oplus y} \mu(z) \geq \frac{1-k}{2}$ ve $\inf_{z\in x\otimes y} \mu(z) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ veya $\min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq \inf_{z\in x\otimes y} \mu(z) \geq \frac{1-k}{2}$ dir. Buradan $\inf_{z\in x\oplus y} \mu(z) \vee 0 = \inf_{z\in x\oplus y} \mu(z) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq \frac{1-k}{2}$ ve

$\inf_{z\in x\otimes y} \mu(z) \vee 0 = \inf_{z\in x\otimes y} \mu(z) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq \frac{1-k}{2}$ dir. μ L nin eşlik değerli fuzzy alt hyper kafesi ve $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1-k}{2}$ olduğundan Tanım 2.1.17 (ii) ile μ L nin $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafesdir. Benzer şekilde μ $\frac{1-k}{2}$ - implikasyonuna bağlı L nın fuzzy hyper ideali ise μ $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy hyper ideal olduğu gösterilebilir.

"$\Leftarrow$" Farz edelim ki μ $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) olsun. Buradan $\inf_{z\in x\oplus y} \mu(z) = \inf_{z\in x\oplus y} \mu(z) \vee 0 \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \wedge \frac{1-k}{2}$ ve

$\inf_{z\in x\otimes y} \mu(z) = \inf_{z\in x\otimes y} \mu(z) \vee 0 \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \wedge \frac{1-k}{2}$ dir. Burada iki durum vardır. $\min\{\mu(x), \mu(y)\} \wedge \frac{1-k}{2} = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ veya $\min\{\mu(x), \mu(y)\} \wedge \frac{1-k}{2} = \frac{1-k}{2}$ dir.

Birinci durumda, $\min\{\mu(x),\mu(y)\}\wedge\frac{1-k}{2}=\min\{\mu(x),\mu(y)\}$ olduğundan $\inf_{z\in x\oplus y}\mu(z)\geq\min\{\mu(x),\mu(y)\}$ ve $I_g\left(\min\{\mu(x),\mu(y)\},\inf_{z\in x\oplus y}\mu(z)\right)=1\geq\frac{1-k}{2}$ dir. İkinci durumda, $\min\{\mu(x),\mu(y)\}\wedge\frac{1-k}{2}=\frac{1-k}{2}$ olduğundan $\inf_{z\in x\oplus y}\mu(z)\geq\frac{1-k}{2}$ ve $I_g\left(\min\{\mu(x),\mu(y)\},\inf_{z\in x\oplus y}\mu(z)\right)=\inf_{z\in x\oplus y}\mu(z)\geq\frac{1-k}{2}$ dir. Benzer şekilde, Birinci durumda, $\min\{\mu(x),\mu(y)\}\wedge\frac{1-k}{2}=\min\{\mu(x),\mu(y)\}$ olduğundan $\inf_{z\in x\otimes y}\mu(z)\geq\min\{\mu(x),\mu(y)\}$ ve $I_g\left(\min\{\mu(x),\mu(y)\},\inf_{z\in x\otimes y}\mu(z)\right)=1\geq\frac{1-k}{2}$ dir. İkinci durumda, $\min\{\mu(x),\mu(y)\}\wedge\frac{1-k}{2}=\frac{1-k}{2}$ olduğundan $\inf_{z\in x\otimes y}\mu(z)\geq\frac{1-k}{2}$ ve $I_g\left(\min\{\mu(x),\mu(y)\},\inf_{z\in x\otimes y}\mu(z)\right)=\inf_{z\in x\otimes y}\mu(z)\geq\frac{1-k}{2}$ dir. Bu iki durumdan μ $\frac{1-k}{2}$ - implikasyonuna bağlı fuzzy alt hyper kafesdir. Benzer şekilde μ $\frac{1-k}{2}$ - implikasyonuna bağlı fuzzy hyper ideal olduğu gösterilebilir.

3. SONUÇLAR

1. Fuzzy hyper kafesler ile seviye alt hyper kafes arasındaki ilişki araştırılmıştır.

2. Fuzzy kümelerde fuzzy noktanın ait olma ve k-yarıçakışık olma kavramı kullanılarak $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) tanımı verilmiş ve bu tanıma denk olan teoremler elde edilmiştir.

3. Her fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) ve $(\in, \in \vee q)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal), $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) dir. Ancak bu ifadenin genelde doğru olmadığı gösterilmiştir.

4. $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) ile seviye alt hyper kafes (hyper ideal) arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

5. Eşlik değerli fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) tanımı verilerek hangi koşullar altında fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal), $(\in, \in \vee q_k)$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) ve $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q_k})$ fuzzy alt hyper kafes (hyper ideal) olduğu araştırılmıştır.

4. ÖNERİLER

1. T-Fuzzy hyper kafeslerin fuzzy alt hyper cebirsel yapıları incelenebilir.

2. L-fuzzy hyper kafesler ve soft hyper kafeslerin yapısı incelenebilir.

3. Pawlak yaklaşım uzayında fuzzy hyperkongruans bağıntısı ile fuzzy hyper kafeslerin alt ve üst yaklaşımları araştırılabilir.

4. Genelleştirilmiş yaklaşım uzayında küme değerli homomorfi ve güçlü küme değerli homomorfi kavramı kullanılarak fuzzy hyper kafeslerin alt ve üst yaklaşımları ve cebirsel özellikleri incelenebilir.

5. Fuzzy hyper kafeslerin modülar kafes, tam dağılımlı tam kafes yapısı incelenebilir.

6. Neurosofistik hyper kafeslerin cebirsel özellikleri incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

1. Ameri, R. ve Zahedi, M.M., Hyperalgebraic Systems, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 13 (1999), 21-32.

2. Bhakat, S.K. ve Das, P., On the definition of a fuzzy subgroup, Fuzzy sets and systems, 51,2 (1992), 235-241.

3. Bhakat, S.K. ve Das, P., $(\in,\in\vee q)$-fuzzy subgroups, Fuzzy Sets and Systems, 80 (1996), 359–368.

4. Birkhoff, G., Lattice theory, American Mathematical Society, Providence, RI., 1984.

5. Corsini, P., Prolegomena of Hypergroup Theory, Second Ed., Aviani Editor, 1993.

6. Corsini, P. ve Leoreanu-Fotea, V., Applications of Hyperstructure Theory, Kluwer, Dordrecht, 2003.

7. Corsini, P., Join spaces, power sets, fuzzy sets, in: Proceedings of the Fifth Int. Congress of Algebraic Hyperstructures and Appl., vol. Iasi, Romania, Hadronic Press, 1994.

8. Corsini, P. ve Leoreanu-Fotea, V., Fuzzy sets and join spaces associated with rough sets, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 51 (2002), 527-536.

9. Corsini, P. ve Leoreanu-Fotea, V., Join spaces associated with fuzzy sets, Journal of Combinatorics, Information and System Sciences, 20 (1995), 293–303.

10. Das, P., Fuzzy groups and level subgroups, J. Math. Anal. Appl., 85 (1991), 264–269.

11. Davey, B.A. ve Priestley, H., A., Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

12. Davvaz, B. ve Leoreanu-Fotea, V., Hyperring Theory and Applications, International Academic Press, USA, 2007.

13. Davvaz, B. ve Corsini, P., Generalized fuzzy hyperideals of hypernear-rings and many valued implications, J. Intell. Fuzzy Syst.,17,3 (2006), 241–251.

14. Davvaz, B., Kazancı, O. ve Yamak, S., Generalized fuzzy n-ary subpolygroup endowed with interval valued membership function, J. Intell. Fuzzy Syst., 20 (2009), 159–168.

15. Davvaz, B. ve Corsini, P., Redefined fuzzy Hv-submodules and many valued implications, Inform. Sci., 177 (2007), 865–875.

16. Davvaz, B., Fuzzy Hvper-submodules, Fuzzy Sets and Systems, 117 (2001**),** 477–484.

17. Davvaz, B. ve Corsini, P., Fuzzy *n*-ary hypergroups, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 18,4 (2007), 377-382.

18. Davvaz, B., Kazancı, O. ve Yamak, S., Interval-valued fuzzy n-ary subhypergroups of n-ary hypergroups, Neural Comput Appl., 18 (2009), 903–911.

19. Davvaz, B., Kazancı, O. ve Yamak, S., Generalized fuzzy n-ary subpolygroup endowed with interval valued membership function, J. Intell. Fuzzy Syst., 20 (2009), 159–168.

20. Davvaz, B. ve Kazancı, O., A new kind fuzzy-sublattice (ideal, filter) of a lattice, Int. J. Fuzzy Syst., 88,14 (2011), 2901–2914.

21. Guo, X.Z. ve Xin, X., L., Hyperlattices, Pure and Appl Math., 20 (2004), 40-43.

22. Han, S., W. ve Zhao, B., Distributive hyperlattices, J. Northwest Univ., 35 (2005), 125-129.

23. Jantosciak, J., Transposition hypergroups: Noncommutative join spaces, Journal of Algebra, 187 (1997), 97-119.

24. Kazancı, O., Davvaz, B. ve Yamak, S., Fuzzy n-ary polygroups related to fuzzy points, Comput. Math. Appl., 58 (2009), 1466–1474.

25. Kazancı O, Davvaz, B. ve Yamak, S., Fuzzy n-ary hypergroups related to fuzzy points, Neural Comput Appl., 19 (2010), 649–655

26. Kazancı, O., Davvaz, B. ve Yamak, S., A new characterization of fuzzy n-ary polygroups, Neural Comput Appl., 21 (2012), 59-68.

27. Kazancı, O. ve Davvaz, B., More on fuzzy lattices, Comput. Math. Appl., 64 (2013), 2917-2925.

28. Mittas, J. ve Konstantinidou, M., Sur une nouvelle generation de la notion detreillis, Les supertreillis et certaines de leurs proprietes generales, Ann. Sci. Univ. Blaise Pascal, Ser. Math., 25 (1989), 61-83.

29. Mordeson, J.N. ve Malik, D.S., Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1998.

30. Konstantinidou, M. ve Mittas, J., An introduction to the theory of hyperlattices, Math. Balkanica, 7 (1997), 187-193.

31. Leoreanu-Fotea, V., Fuzzy hypermodules, Comput. Math. Appl., 57 (2009), 466–475.

32. Leoreanu-Fotea, V. ve Davvaz, B., Fuzzy hyperrings, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009), 2366–2378.

33. Marty, F., Sur une generalization de la notion de groupe. in: 8th Congress Math. Scandinaves, 1934, Stockholm, 45-49.

34. Mittas, J. ve Konstantinidou, M., Sur une nouvelle generation de la notion detreillis. Les supertreillis et certaines de leurs proprietes generales, Ann. Sci. Univ. Blaise Pascal, Ser. Math., 25 (1989), 61-83.

35. Rahnamai-Barghi, A., The prime ideal theorem and semiprime ideals in meethyperlattices, Ital. Journal of Pure and Applied Math., 5 (1999), 53-60.

36. Rahnamai-Barghi, A., The prime ideal theorem for distributive hyperlattices, Ital. J. Pure Appl. Math., 10 (2001), 75-78.

37. Rasouli, S. ve Davvaz, B., Lattices derived from hyperlattices, Communications in Algebra, 38 (2010), 2720-2737.

38. Rasouli, S. ve Davvaz, B., Construction and spectral topology on hyperlattices, Mediterr. J. Math., 7 (2010), 249-262.

39. Rosenfeld, A., Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl., 35 (1971), 512–517.

40. Yılmaz, Ş., Kafeslerde indirgenemez elemanlar yardımıyla üretilen t-normlar, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.

41. Yuan, X.H., Zhang, C. ve Ren, Y.H., Generalized fuzzy groups and many valued implications, Fuzzy Sets and Systems, 138 (2003), 205–211.

42. Vougiouklis, T., Hyperstructures and Their Representations, Hadronic Press, Palm Harbor, FL., 1994.

43. Zahedi, M.M., Bolurian, M. ve Hasankhani, A., On polygroups and fuzzy subpolygroups, Journal of Fuzzy Mathematics, 3 (1994), 1-15.

44. Zadeh, L.A., Fuzzy sets, Inform. and Control, 8 (1965), 338–353.

ÖZGEÇMİŞ

Sinan BAKIRTAŞ 24.04.1989 yılında Trabzon'un Araklı ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Araklı Cumhuriyet İlköğretim okulunda, ortaöğrenimini Araklı Saffet Çebi Lisesinde tamamladı. 2008 yılında girdiği Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü 2012 yılında fakülte birincisi olarak tamamladı. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İşletme Bölümü Finans Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine ve Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Bölümünde Matematik Öğretmenliği Pedagojik Formasyon eğitimine başladı. 2013 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Bölümünde Matematik Öğretmenliği Pedagojik Formasyon eğitimini tamamladı ve Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen 2014 yılında kazandığı Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümünde Matematik Öğretmenliği lisans eğitimine devam etmektedir.