KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GALİLE VE YARI-GALİLE UZAYLARINDA EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğr. Gör. YÜKSEL KELEŞ

HAZİRAN 2014
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GALİLE VE YARI-GALİLE UZAYLARINDA EĞRİLER

Öğr. Gör. Yüksel KELEŞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	**: 30/06/2014**
Tezin Savunma Tarihi	**: 13/06/2014**

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU

Trabzon 2014

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksel KELEŞ tarafından hazırlanan

GALİLE VE YARI-GALİLE UZAYLARINDA EĞRİLER

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 27/05/2014 gün ve 1555 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. Ziya YAPAR**	**……………………….**
Üye	**: Doç. Dr. Emin BACAKSIZ**	**……………………….**
Üye	**: Yrd. Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU**	**……………………….**

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması ve tamamlanması sürecinde, şüphesiz en büyük emeğe sahip olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU'dur. Bana göstermiş olduğu ilgi, alaka ve yardımlarından dolayı hocam Yrd. Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU'na teşekkür ederim.

Ayrıca bu tezin hazırlanması sürecinde çokca kendilerini ihmal ettiğim fakat bu ihmallerime rağmen beni anlayışla karşılayan kıymetli aileme, özellikle maddi manevi desteğini hiçbir zaman benden esirgemeyen sevgili eşim Hilal KELEŞ'e teşekkür ederim.

Yüksel KELEŞ

Trabzon 2014

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Galile ve Yarı-Galile Uzaylarında Eğriler” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Yrd. Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU’nun sorumluluğunda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştrma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkmasa durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 13/06/2014

Öğr. Gör. Yüksel KELEŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

GALİLE ve YARI-GALİLE UZAYINDA EĞRİLER

Öğr. Gör. Yüksel KELEŞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU

2014, 72 Sayfa

Bu çalışmada, 3 botuylu Galile ve yarı-Galile uzaylarındaki eğriler teorisi ile ilgili makaleler üzerinde yapılan çalışmalar derlenmiştir.

Öncelikle Galile ve yarı-Galile uzayları tanıtılıp bu uzaylardaki eğrilerin genel özellikleri incelenmiştir. Sonra G_3 Galile uzayında Bertrand eğrileri Frenet Bertrand eğrileri, Mannheim eğrileri incelenmiştir. Daha sonra G_3^1 yarı-galile uzayında ise Mannheim eğrileri, AW(k)-tipli eğriler, elastik olmayan regüler eğriler, küresel eğriler, helisler incelenmiş olup bu eğrilerle ilgili bazı teoremler verilmiştir. Yarı-Galile uzayında eğrilerin equiform diferansiyel geometrisi tanıtılarak, bu geometride eğrilere ait bazı temel teoremler açıklanmıştır.

Ayrıca G_3^1 de eğriler için Frenet sisteminin diferansiyel denklemlerinin genel çözümü araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Eğri, Galile Uzayı, Yarı-Galile Uzayı

Master Thesis

SUMMARY

GALİLEAN AND PSEUDO-GALİLEAN SPACE CURVES

Yüksel KELEŞ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU

2014, 72 Pages

In this study, research on the article related to the theory of curves in three dimensional Galilean and pseudo-Galilean spaces has been compiled.

Firstly, the Galilean and pseudo-Galilean space are introduced, general characteristics of the curves in this spaces have been given. Then it is examined Bertrand curves, Frenet Bertrand curves and Mannheim curves in the Galilean space. Later, in the G_3^1 pseudo-Galilean space, Mannheim curves, AW(k)-type curves, nonelastic reguler curves, spherical curves and helices are examined, and some theorems about these curves are given. It is introduced equiform differantial geometry of curves in the pseudo-Galilean space and some basic theorems about curves in this geometry are explained. In addition, the general solution of the differantial equations of Frenet system for curves in is G_3^1 given.

Key Words: Curves, Galilean Space, Pseudo-Galilean Space

SEMBOLLER DİZİNİ

E^3	: 3 Boyutlu Öklid Uzayı
G_3	: 3 Boyutlu Galile Uzayı
G_3^1	: 3 Boyutlu Yarı-Galile Uzayı
$A.B$	: Galile Skaler Çarpımı
$\left\Vert A \right\Vert_G$	: Galile Norm
$A \times_G B$	: Galile Vektörel Çarpım
$S_{\mp}^2$	: Galile Küre
κ	: Eğrilik
τ	: Burulma

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Son iki yüzyılda çeşitli yeni geometriler keşfedildi ve geliştirildi. Geliştirilen bu geometriler bir çok anlamda incelendi. A.Cayley ve F.Klein tarafından çeşitli geometrilerin mümkün olduğu ifade edilmiştir. Bu geometriler arasında aynı zamanda Galile ve yarı-Galile geometrileri de vardır. Bunlar fizikte çok öneme sahiptir.

Diferansiyel geometride, eğriler noktaların bir geometrik kümesi olarak tanımlanabilirler. Bir eğriyi E^3 te hareket eden parçacığın çizdiği yol olarak düşünebiliriz. Bu yüzden, eğrilerin konum vektörünü araştırmak ve eğrinin davranışını belirlemek klasik bir amaçtır. Çünkü, bir konum vektörü uzayda bir P noktasının keyfi bir O referans noktası ile ilişkilendirilmiş konumunu tanımlayan bir vektördür. Bu konuda çok zengin bir literatür vardır [33], [35].

Son yıllarda Galile ve yarı-Galile uzaylarında eğriler ve yüzeyler teorisiyle ilgili araştırmalar artmıştır. Bu uzayların genel bir çalışması ve araştırması Röschel [34] ve Divjak [21] tarafından yapılmıştır.

Öğrenmiş ve Öztekin [10] 3-boyutlu Galile uzayında Bertrand eğrilerini araştırmışlar ve aynı zamanda Mannheim eğrilerinin bir karakterizasyonunu yapmışlardır

Külahçı, Öğrenmiş ve Ergüt [12] ise G_3 uzayında AW(k)-tipli eğrileri tanımlayıp, AW(k)-tipli Bertrand ve Mannheim eğrilerinin bir incelemesini yapmışlardır. Öztekin [5] G_3 uzayında Frenet-Bertrand eğrileri ve Weakened Bertrand eğrilerini araştırmış ve bu eğriler için bazı karakterizasyonlar vermiştir.

Ayrıca Yılmaz [17] 4-boyutlu Galile uzayında eğrilerin Frenet-Serret çatısının inşaasını yapmıştır. Burada ayrıca eğrilerin Frenet-Serret denklemlerini ve Galile küresel eğrilerin bazı karakterizasyonlarını ve örneğini vermiştir.

G_3^1 yarı-Galile uzayında ise Bertrand ve Mannheim eğrilerinin benzer bir incelenmesi [11] ve [7] de yapılmıştır. Külahçı [3] G_3^1 uzayında helis eğrisi için bazı incelemeler yapmıştır. Bu uzayda AW(k)-tipli eğriler ve Mannheim AW(k)-tipli eğrilerin bir araştırması [4] de yapılmıştır. Aynı uzayda küresel eğrilerin bir karakterizasyonu ise [8] de araştırılmıştır.

Öğrenmiş, Yeneroğlu ve Külahçı [2] G_3^1 yarı –Galile uzayında elastik olmayan regüler eğrileri incelemişlerdir. Bu uzayda eğrilerin elastik olmayan akımlarını tanımlamışlar ve eğrilik-burulmayı içeren bir kısmi diferansiyel denklem olarak bir elastik olmayan eğri akımını incelemişlerdir.

Z. Erjavec ve B. Divjak [6] G_3^1 yarı-Galile uzayındaki eğrilerin eguiform diferansiyel geometrisini açıklamışlardır. Bu çalışmada bir hareketli üç ayaklı ve temel invaryantları incelemişlerdir. Frenet formülleri türetilerek, equiform geometride eğrilerin temel teoremi ispatlanmış ve sabit eğrilikli eğriler incelenmiştir.

Ayrıca B. Divjak [1] G_3^1 yarı-Galile uzayında eğriler için Frenet diferansiyel denklem sisteminin çözümünü araştırmıştır.

1.2. E^3 de Temel Tanımlar

1. Tanım (Afin Uzay): $A \neq \emptyset$ bir küme ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri sağlayan bir

$f: A \times A \to V$

$(P,Q) \to f(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$

fonksiyonu varsa A kümesine V vektör uzayı ile birleşen afin uzay denir.

$(A_1)\ \forall P,Q,R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

$(A_2)\ \forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Burada $P,Q \in A$ için $f(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$ şeklinde gösterilir. P noktasına $\overrightarrow{PQ}$ vektörünün başlangıç noktası, Q noktasına da bitiş (uç) noktası denir [12].

1. Örnek: $\mathbb{R}^n$ sıralı n-lilerinin kümesi $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya n-boyutlu standart reel vektör uzayı denir. Bu taktirde,

$$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(P,Q) \to f(P,Q) = Q - P$$

ile tanımlı f fonksiyonu afin uzay aksiyomlarını sağlar.

O halde $\mathbb{R}^n$ sıralı n-lilerinin kümesi, $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleşen afin uzayıdır. Bu uzaya standart reel afin uzay denir [12].

2. Tanım (Afin Çatı): V bir vektör uzayı, A da V ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, ..., P_n \in A$ noktaları için $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}$ vektörlerinin oluşturduğu $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\right\}$ sistemi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ nokta (n+1)-lisine A afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası ve $P_i,\ 1 \le i \le n$ noktalarına da çatının birim noktaları denir.

Eğer $boyV = n$ ise A ya n-boyutlu bir afin uzay denir [12].

3. Tanım (Afin Koordinat Sistemi): V bir F cismi üzerinde tanımlanan n-boyutlu bir vektör uzayı, A, V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay ve $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ kümesi de A afin uzayında bir afin çatı olsun. Bu taktirde $\forall P \in A$ için $\overrightarrow{P_0P} \in A$ vektörü, V vektör uzayının bir $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\right\}$ bazına göre tek türlü olarak;

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i}\,,$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} x_i &: A \to F \\ &P \to x_i(P) = a_i, \quad 1 \le i \le n \end{aligned}$$

fonksiyonları yardımıyla tanımlanan, $\left(x_1(P), x_2(P), ..., x_n(P)\right)$ nokta n-lisine $P \in A$ noktasının afin koordinatları, bu afin koordinatları tanımlamak için kullanılan $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sistemine de afin koordinat sistemi denir [12].

4. Tanım (İç-Çarpım Uzayı): V sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. Bir

$$\psi : V \times V \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu bilineer, simetrik ve pozitif tanımlı ise ψ fonksiyonuna V vektör uzayı üzerinde iç-çarpım fonksiyonu, V vektör uzayına da iç-çarpım uzayı adı verilir [12].

5. Tanım (Öklid Uzayı): A, n-boyutlu V reel vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay olsun. Eğer V vektör uzayında bir iç çarpım işlemi olarak;

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Öklid çarpımı tanımlanırsa, A afin uzayına Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir [12].

6. Tanım (Öklid Çatı): E^n, n-boyutlu bir Öklid uzayı olsun. $P_0, P_1, ..., P_n \in E^n$ için $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\right\}$ vektör kümesi E^n ile birleşen V vektör uzayının bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ sistemine E^n de bir Öklid çatısı veya dik çatı denir [12].

7. Tanım (Eğri): $I \subseteq E^n$ açık bir aralık ve

$$\alpha : I \to E^n$$
$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))$$

diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise α 'ya E^n Öklid uzayında bir eğri, $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığına parametre aralığı, $t \in I$ değişkenine de eğrinin parametresi denir [12].

8. Tanım (Hız Vektörü): E^n Öklid uzayında bir α eğrisi,

$$\alpha : I \to E^n$$
$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))$$

olsun. Bu taktirde

$$\frac{d\alpha}{dt}\Big|_{\alpha(t)} = \alpha'(t)\Big|_{\alpha(t)} = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\Big|_t, \frac{d\alpha_2}{dt}\Big|_t, ..., \frac{d\alpha_n}{dt}\Big|_t\right)$$

vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir [13].

9. Tanım (Birim Hızlı Eğri): E^n Öklid uzayında bir $\alpha : I \to E^n$ eğrisi verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| &: I \to \mathbb{R} \\ t &\to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona α eğrisinin skaler hız fonksiyonu, $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızı denir. Eğer

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri denir [13].

10. Tanım (Regüler Eğri): Bir eğrinin her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise bu eğriye regüler eğri denir [13].

11. Tanım (Yay Uzunluğu): E^n Öklid uzayında bir $\alpha : I \to E^n$ eğrisi verilsin. $a, b \in I$ olmak üzere

$$l = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

reel sayısına α eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu denir [13].

12. Tanım (Yay Uzunluğu Fonksiyonu): E^n Öklid uzayında bir $\alpha : I \to E^n$ eğrisi verilsin. α eğrisinin $t = 0$ dan t ye kadar olan yayının uzunluğu

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du$$

dır. $s(t)$ fonksiyonuna α eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu denir [13].

1. Teorem: α, $\mathbb{R}^3$ de regüler bir eğri ise, α'nın bir β birim hız parametrelenişi vardır [13].

İspat: Bunu ispatlamak için yay uzunluğu fonksiyonundan yararlanılacaktır.

$$s(t)=\int_0^t \|\alpha'(u)\|du$$
$$\frac{ds}{dt}=\|\alpha'(t)\|>0$$

$\frac{ds}{dt}>0$ ise $s(t)$ fonksiyonu kesin monoton artandır. Kesin monoton artan fonksiyon her zaman birebirdir. O halde tersi vardır. Bu ters fonksiyonu $t(s)$ ile gösterelim.

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\frac{ds}{dt}}>0$$

$\beta(s)=\alpha(t(s))$ bileşke fonksiyonu α eğrisinin birim hız parametrelenişidir. Çünkü

$$\beta'(s)=\alpha'(t(s)).\frac{dt}{ds}$$
$$\|\beta'(s)\|=\left\|\alpha'(t(s)).\frac{dt}{ds}\right\|=\frac{dt}{ds}\|\alpha'(t(s))\|=\frac{dt}{ds}.\frac{ds}{dt}=1$$

bulunur. ∎

13. Tanım: $M\subset E^n$ eğrisinin $m\in M$ noktasında M ile sonsuz yakın dört noktası olan küreye, M nin $m\in M$ noktasındaki oskülatör küresi veya eğrilik küresi adı verilir [12].

14. Tanım: $\gamma : I\subset E\to E^n$ E^n de birim hızlı bir eğri olsun. Eğer γ nın yüksek mertebeden türevleri

$$\gamma'(s),\gamma''(s),\gamma'''(s),...,\gamma^{(d)}(s)$$

lineer bağımsız ve

$$\gamma'(s),\gamma''(s),\gamma'''(s),...,\gamma^{(d)}(s),\gamma^{(d+1)}(s)$$

$\forall s\in I$ için lineer bağımlı ise γ ya oskülatör mertebesi d -olan bir Frenet eğrisi denir [27].

1.3. G_3 Galile Uzayında Temel Kavramlar

H_8 benzerlik grubu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}+a_{12}x \\ y' &= a_{21}+a_{22}x+a_{23}\cos\varphi y+a_{23}\sin\varphi z \\ z' &= a_{31}+a_{32}x-a_{23}\sin\varphi y+a_{23}\cos\varphi z \end{aligned}$$

Burada a_{ij} ve φ reel sayılardır. $a_{12}=a_{23}=1$ için $B_6\subset H_8$ izometriler grubunu elde ederiz:

$$B_6 \ldots \quad \begin{aligned} x' &= a+x \\ y' &= b+cx+y\cos\varphi+z\sin\varphi \\ z' &= d+ex-y\sin\varphi+z\cos\varphi \end{aligned}$$

Bu grubun etkisi altında değişmeyen (invaryant kalan) özelliklerin bütünü Galile uzayını oluşturur. Bu uzay G_3 olarak gösterilir.

15. Tanım (Galile Skaler Çarpım): 3-boyutlu Galile uzayında $A=(x,y,z)$ ve $B=(x_1,y_1,z_1)$ vektörleri verilsin. Bu durumda bu vektörlerin Galile skaler çarpımı

$$\langle A,B\rangle_G = A.B=\begin{cases} xx_1 & ,\ x\neq 0 \ veya\ x_1\neq 0 \\ yy_1+zz_1 & ,\ x=0 \quad ve \quad x_1=0 \end{cases}$$

şeklindedir [14].

16. Tanım (Galile uzayında iki vektörün dikliği): Galile uzayında $A=(x,y,z)$ ve $B=(x_1,y_1,z_1)$ vektörleri verilsin. Eğer $A.B=0$ ise bu vektörlere Galile anlamında diktirler denir [14].

17. Tanım (Norm):

$A=(x,y,z)$ vektörünün Galile normu,

$$\|A\|_G=\begin{cases} |x| & , x\neq 0 \\ \sqrt{y^2+z^2} & , \mathrm{x}=0 \end{cases} \tag{1}$$

olarak tanımlanır [14].

18. Tanım (Galile Vektörel Çarpım):

$A=(x_1,y_1,z_1)$, $B=(x_2,y_2,z_2)\in G_3$ olmak üzere A ve B vektörlerinin Galile vektörel çarpımı

$$A\times_G B=\begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

olarak tanımlanır [14].

19. Tanım(İzotropik Vektör):

Bir $A=(x,y,z)\in G_3$ vektöründe $x=0$ ise A vektörüne izotropik, $x\neq 0$ ise izotropik değildir denir [14].

1.4. Galile Uzayında Eğriler

20. Tanım:

$$\alpha : I \to G_3, \quad \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{2}$$

olarak verilsin. Burada $x(t), y(t), z(t) \in C^3$ (sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar) ve $t \in I$ dır. Bu α dönüşümüne G_3 de bir eğri denir.

$\alpha(t)$, G_3 'de bir eğri ve $x'(t) \neq 0$ ise $\alpha(t)$ eğrisine regüler denir [21].

21. Tanım: (2) denklemi ile verilen bir regüler eğrisi için yay uzunluğu parametresi

$$ds = |\dot{x}(t)\,dt| = |dx|$$

olarak tanımlanır. Basitlik için r eğrisinin yay uzunluğu olarak $ds = dx$ ve $s = x$ olarak kabul edilir. Şimdiden sonra s 'ye göre türevi " ′ " olarak göstereceğiz [21].

Galile uzayında yay uzunluğuna göre parametrelenmiş bir eğri $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ olarak verilir.

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha : I \to G_3, \alpha(x) = (x, y(x), z(x)) \tag{3}$$

eğrisi verilsin. Burada $\mathrm{y,z} : I \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonlarına α eğrisinin Galile koordinat fonksiyonları denir. (3) eşitliğinden türev alınırsa

$$\alpha'(x) = (1, y'(x), z'(x)) \tag{4}$$

olur. (1) eşitliğiyle belli norm tanımından dolayı $\|\alpha'(x)\| = 1$ olur. Bu ise α eğrisinin Galilen uzayında birim hızlı bir eğri olduğunu gösterir [14].

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere en az C^3-sınıfından $\alpha : I \to G_3$, $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ eğrisi verilsin. Bu durumda α eğrisinin ardışık iki türevi alınırsa

$$\alpha'(x) = (1, y'(x), z'(x)),$$
$$\alpha''(x) = (0, y''(x), z''(x)) \tag{5}$$

denklemleri elde edilir. $\alpha'(x)$ vektörü birim vektör olduğundan dolayı

$$T(x) = (1, y'(x), z'(x)) \tag{6}$$

vektörü eğrinin teğet vektörü olarak tanımlanır. (5) denklemlerinden

$$\alpha'(x).\alpha''(x) = 0$$

elde edilir. O halde $\alpha''(x)$ vektörü, (6) denklemiyle belli olan birim teğet vektörüne diktir. Bu durumda eğrinin normal vektörü; $\alpha''(x)$ vektörü yönündedir. Bundan dolayı eğrinin $N(x)$ birim normal vektörü

$$N(x) = \frac{\alpha''(x)}{\|\alpha''(x)\|_G} \tag{7}$$

şeklinde olup, (1) ve (5) denklemlerinden

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)}}(0, y''(x), z''(x))$$

olarak elde edilir. Bunun bir sonucu olarak $B(x)$ birim binormal vektörü; $T(x)$ teğet vektörü ve $N(x)$ normal vektörüne dik bir birim vektör olacağından

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)}}(0, -z''(x), y''(x)) \tag{8}$$

şeklinde bulunur. Bu şekilde seçilen $\{T(x), \mathrm{N}(x), \mathrm{B}(x)\}$ çatısına Galile uzayında birim hızlı eğriler için Frenet-Serret çatısı denir [5].

1. Önerme:

(3) denklemiyle verilmiş birim hızlı α eğrisinin Frenet-Serret elemanları T, N, B, κ, τ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} T'(x) \\ N'(x) \\ B'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(x) & 0 \\ 0 & 0 & \tau(x) \\ 0 & -\tau(u) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(x) \\ N(x) \\ B(x) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada κ eğrilik ve τ burulma fonksiyonları

$$\kappa(x) = \sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)} \quad , \quad \tau(x) = \frac{\det(\alpha'(x), \alpha''(x), \alpha'''(x))}{\kappa^2(x)}$$

şeklindedir [5].

İspat: (6), (7) ve (8) eşitliklerinden türev alınarak gerekli işlemler yapıldığında; Frenet-Serret formülleri elde edilir.■

22. Tanım (Birim Hızlı Olmayan Eğriler İçin Eğrilik):

G_3 Galile uzayında birim hızlı olmayan bir $\beta: I \subseteq \mathbb{R} \to G_3$ eğrisi için eğrilik

$$\kappa = \frac{\|\beta' \times_G \beta''\|_G}{\|\beta'\|_G^3}$$

olarak tanımlıdır [28].

1.5. G_3^1 Yarı-Galile Uzayında Temel Kavramlar

G_3^1 yarı-Galile diferansiyel geometrisi geniş ölçüde [1] da geliştirildi. Yarı-Galile uzayının geometrisi Röschel [29]'ın sunduğu Galile uzayına benzerdir (fakat aynısı değildir).

Yarı-Galile geometri reel Cayley-Klein geometrilerinden biridir. Uygun afin koordinatlarda, yarı-Galile grubunun hareketi

$$B_6: \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ e & \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\overline{B_6}: \quad B_6.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ile verilir. Bu gruba G_3^1 yarı-Galile uzayının hareket grubu denir. Afin koordinatlarda $\overline{B_6}$ grubu aşağıdaki gibi etki eder:

$$\overline{B_6}: \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \eta\cosh\varphi & \eta\sinh\varphi \\ e & \eta\sinh\varphi & \eta\cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Burada η, $+1$ veya -1dir.

Uygun bir $T_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ başlangıç noktalı e_1, e_2, e_3 üç ayaklısı yarı-Galile anlamında ortonormaldir, ancak ve ancak e_1, e_2, e_3 vektörleri aşağıdaki gibidir:

$$e_1 = \left(1, y_1, z_1\right),\ e_2 = \left(0, y_2, z_2\right),\ e_3 = \left(0, \varepsilon z_2, \varepsilon y_2\right),\ \ y^2 - z^2 = \delta$$

ve burada her bir ε ve δ, +1 veya -1 dir. Yukarıdaki e_1, e_2, e_3 üç ayaklısı için, $\det\left(e_1, e_2, e_3\right) = 1$ yani $y^2 - z^2 = \varepsilon$ oluyorsa pozitif yönlendirilmiş denir. Bu kavram

B_6 altında invaryant olacaktır (ve $\overline{B_6}$ altında da). Bunun sebebi B_6 (ve $\overline{B_6}$) nın spacelike ve timelike vektörleri koruması, ve $\det(a_1, a_2, a_3)$ ün B_6 altında (ve aynı zamanda $\overline{B_6}$ altında) invaryant olmasıdır [2].

23. Tanım (Yarı-Galile Skaler Çarpım):

G_3^1 de $a = (a_1, a_2, a_3)$ ve $b = (b_1, b_2, b_3)$ vektörlerinin skaler çarpımları

$$a.b = \begin{cases} a_1 b_1 & , \quad a_1 \neq 0 \; ya\, da \;\; b_1 \neq 0 \\ a_2 b_2 - a_3 b_3 & , \quad a_1 = 0 \; ya\, da \;\; b_1 = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır [21].

24. Tanım:

$X = (x, y, z)$ vektörünün yarı-Galile uzunluğu

$$\|X\| = \begin{cases} |x| & , \qquad x \neq 0 \\ \sqrt{|y^2 - z^2|} & , \qquad x = 0 \end{cases}$$

olarak verilir [21].

25. Tanım (Birim Yarı-Galile Küre):

Birim yarı-Galile küre

$$S_{\mp}^2 = \{u \in G_3^1 : u.u = \mp 1\}$$

olarak tanımlanır [14].

26. Tanım: $v=(x,y,z)$ G_3^1 de bir vektör olsun. $x=0$ ise v'ye izotropik, $x\neq 0$ ise izotropik olmayan vektör denir. İzotropik olmayan birim vektörler $(1,y,z)$ formundadır. İzotropik vektörler 4 tipdir:

Spacelike (uzayımsı) $(y^2-z^2>0)$

Timelike (zamanımsı) $(y^2-z^2<0)$

Lightlike (ışığımsı) $(y=\pm z)$

Lightlike olmayan bir izotropik vektör için $y^2-z^2=\pm 1$ ise birim vektördür denir [3].

1.6. Yarı-Galile Uzayında Eğriler

27. Tanım:

$$\alpha : I\to G_3^1,\qquad \alpha(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big) \tag{9}$$

dönüşümü verilsin. Burada $x(t),y(t),z(t)\in C^3$ (sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar) ve $t\in I$ dır. Bu α dönüşümüne G_3^1 de bir eğri denir.

$\alpha(t)$, G_3^1'de bir eğri ve $x'(t)\neq 0$ ise $\alpha(t)$ eğrisine regüler denir [21].

28. Tanım: (9) denklemi ile verilen bir regüler eğrisi için yay uzunluğu parametresi

$$ds=|\dot{x}(t)\,dt|=|dx|$$

olarak tanımlanır. Basitlik için r eğrisinin yay uzunluğu olarak $ds=dx$ ve $s=x$ olarak kabul edilir. Şimdiden sonra s'ye göre türevi " ' " olarak göstereceğiz [21].

G_3^1 de bir α regüler eğrisi $t=s$ yay uzunluğu parametresi ile

$$\alpha(s)=\big(s,y(s),z(s)\big)$$

şeklinde verilir.

$\alpha(s)$ eğrisinin, eğriliği $\kappa_\alpha(s)$ ve burulması $\tau_\alpha(s)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left.\begin{aligned} \kappa_\alpha(s) &= \sqrt{\left|(y'')^2(s)-(z'')^2(s)\right|} \\ \tau_\alpha(s) &= \frac{\det\left(\alpha'(s),\alpha''(s),\alpha'''(s)\right)}{\kappa_\alpha^2(s)} \end{aligned}\right\} \qquad 10$$

Frenet çatısı ise aşağıdaki gibi verilir:

$$T_\alpha(s)=\alpha'(s)=\left(1,y'(s),z'(s)\right)$$

$$N_\alpha(s)=\frac{1}{\kappa_\alpha(s)}\alpha''(s)=\frac{1}{\kappa_\alpha(s)}\left(0,y''(s),z''(s)\right)$$

$$B_\alpha(s)=\frac{1}{\kappa_\alpha(s)}\left(0,-z''(s),y''(s)\right).$$

$T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha$ vektörlerine sırasıyla α ’nın teğet, esas normal ve binormal vektörleri denir. Frenet formüllerinin türevleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} T_\alpha'(s)&=\kappa_\alpha(s)N_\alpha(s)\\ N_\alpha'(s)&=\tau_\alpha(s)B_\alpha(s)\\ B_\alpha'(s)&=\tau_\alpha(s)N_\alpha(s) \end{aligned} \qquad (11)$$

[11]

Yay uzunluğuna göre parametrelenmeyen bir $\alpha: I \to G_3^1$ $I \subseteq \mathbb{R}$ eğrisinin eğrilik ve burulması ise aşağıdaki gibi tanımlanır [6].

$$\begin{aligned} \kappa(s)&=\frac{\sqrt{\left|\ddot{y}(t)^2-\ddot{z}(t)^2\right|}}{\left(\dot{x}(t)\right)^2}\\ \tau(s)&=\frac{\ddot{y}(t)\dddot{z}(t)-\dddot{y}(t)\ddot{z}(t)}{\left|\dot{x}(t)\right|^5\kappa^2(s)} \end{aligned} \qquad (12)$$

[11] de G_3^1 deki eğrilerin farklı bir karakterizasyonu verilmiş olup, burada 2. Tipten bir eğriden de bahsedilir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. G_3 Galile Uzayında Bertrand Eğrileri

1850'de J.Bertrand tarafından keşfedilen Bertrand eğrileri klasik özel eğri teorisinin önemli ve ilginç konularından biridir. Bir Bertrand eğrisi esas normallerini diğer özel eğriyle (Bertrand eşi diye adlandırılır) paylaşan bir özel eğri olarak tanımlanır.

Bertrand eğrileri eğrilik ve burulmasının lineer bağlantılı olduğu özel eğriler olarak karakterize edilirler [5].

29. Tanım (G_3 de Bertrand Eğrisi): α ve $\overline{\alpha}$ eğrilerinin eğrilikleri ve burulmaları sıfırdan farklı olsun. Yani her bir eğri için

$$\kappa_\alpha(s)\neq 0,\qquad \overline{\kappa_\alpha}(s)\neq 0\qquad \tau_\alpha(s)\neq 0,\qquad \overline{\tau_\alpha}(s)\neq 0\qquad (\forall s\in I)$$

olsun. Ayrıca α ve $\overline{\alpha}$ nin G_3'te ki Frenet çatıları sırasıyla $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ ve $\{\overline{T_\alpha}, \overline{N_\alpha}, \overline{B_\alpha}\}$ olsunlar. α ve $\overline{\alpha}$ eğrilerinin $\forall s\in I$ noktasındaki normalleri birbirine paralel ise bu eğrilere Bertand eğrileri denir. $(\alpha,\overline{\alpha})$ eğri çiftine de G_3'de bir Bertrand eğri çifti denir.

$\overline{\alpha}$ eğrisine α'nın Bertrand eş eğrisi, α'ya da $\overline{\alpha}$'nin Bertrand eş eğrisi denir.

Tanımdan $(\alpha,\overline{\alpha})$ Bertrant çifti için, $\overline{u}(\overline{s}(s))=u(s)$ olan bir $\overline{s}=\overline{s}(s)$ fonksiyonel bağıntısı vardır. $(\alpha,\overline{\alpha})$, G_3 de Bertrand çifti olsun. O zaman

$$\overline{\alpha}(s)=\alpha(s)+u(s)N_\alpha(s)$$

yazılabilir [10].

2.Teorem: $(\alpha,\overline{\alpha})$ G_3'de Bertrand eğri çifti olsun. Bu durumda

$$\overline{\alpha}(s)=\alpha(s)+u(s)N_\alpha(s)$$

eşitliğinde verilen u fonksiyonu sabittir [10].

İspat. $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ ve $\{\overline{T_\alpha}, \overline{N_\alpha}, \overline{B_\alpha}\}$ sırasıyla α ve $\overline{\alpha}$ eğrilerinin Frenet çatıları olsunlar. $(\alpha,\overline{\alpha})$ Bertrand çifti olduğundan

$$\overline{\alpha}(s)=\alpha(s)+u(s)N_\alpha(s) \tag{13}$$

yazılabilir. (13) denkleminin s'ye göre türevini alırsak.

$$\overline{T_\alpha}(s)\frac{d\overline{s}}{ds}=T_\alpha(s)+u'(s)N_\alpha(s)+u(s)\tau_\alpha(s)B_\alpha(s) \tag{14}$$

elde edilir. $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ α 'nın Frenet çatısı ve $\overline{\alpha}$, α 'nın Bertrand eşi olduğundan

$$u'(s)=0$$

elde edilir. Bundan dolayı $u(s)$ fonksiyonu sabittir. ■

Şimdi $\overline{T_\alpha}$ 'yı

$$\overline{T_\alpha}=\cos\theta T_\alpha+\sin\theta B_\alpha \tag{15}$$

olarak tanımlayalım. Burada θ, T_α ile $\overline{T_\alpha}$ arasındaki açıdır. Eğer (15) denkleminin s'ye göre türevi alınırsa

$$\overline{\kappa_\alpha}\,\overline{N_\alpha}\frac{d\overline{s}}{ds}=\frac{d(\cos\theta)}{ds}T_\alpha+(\kappa_\alpha\cos\theta-\tau_\alpha\sin\theta)N_\alpha+\frac{d(\sin\theta)}{ds}B_\alpha$$

elde edilir. $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ α 'nın Frenet çatısı ve $\overline{\alpha}$, α 'nın Bertrand eşi olduğundan

$$\theta=sabit \tag{16}$$

olur.

3.Teorem: α, G_3 de bir eğri olsun. α bir Bertrand eğrisidir ancak ve ancak α eğrisinin burulması olan τ_α sabittir [10].

İspat. $\left(\alpha,\overline{\alpha}\right)$ bir Bertrand çifti olsun. (14) eşitliği ve 2. Teorem'den

$$\overline{T_\alpha}\frac{d\overline{s}}{ds}=T_\alpha+u\tau_\alpha B_\alpha \tag{17}$$

dır. (15) ve (17) dikkate alınırsa

$$u\tau_\alpha \cot\theta=1$$

olur. $\lambda=u\cot\theta$ alınır ve (16) eşitliği ile birlikte 2. Teorem kullanılır ise

$$\tau_\alpha=\frac{1}{\lambda} \tag{18}$$

elde edilir. Bu da τ_α nın sabit olduğunu gösterir.

Tersine, τ_α'nın sabit olduğunu farz edelim. Yani $\tau_\alpha=\lambda$, λ sıfırdan farklı bir sabit olsun.

$$\overline{\alpha}=\alpha+uN_\alpha$$

olarak tanımlansın. (17) ve (18) kullanılırsa

$$\frac{\overline{T_\alpha}}{d\overline{s}}\frac{d\overline{s}}{ds}=\frac{\kappa_\alpha-u\tau_\alpha^2}{\sqrt{1+u^2\tau_\alpha^2}}N_\alpha,$$

elde edilir ve bu da N_α ile $\overline{N_\alpha}$ nin lineer bağımlı olduğunu gösterir. 29. Tanım'a göre $\left(\alpha,\overline{\alpha}\right)$ Bertrand çiftidir. ■

4. Teorem: *(Schell Teoremi)* $\left(\alpha,\overline{\alpha}\right)$, bir G_3 Bertrand çifti olsunlar. Bu durumda α, $\overline{\alpha}$ Bertrand eğrilerinin karşılıklı noktalarındaki τ_α ve $\overline{\tau_\alpha}$ burulmalarının çarpımı sabittir [10].

İspat. α yerine $\overline{\alpha}$ alırsak (13) denklemi

$$\alpha = \overline{\alpha} - u\overline{N_\alpha}$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$T_\alpha = \overline{T}_\alpha \frac{d\overline{s}}{ds} - u\overline{\tau}_\alpha \overline{B}_\alpha \frac{d\overline{s}}{ds} \tag{19}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$T_\alpha = \cos\theta \overline{T_\alpha} + \sin\theta \overline{B_\alpha} \tag{20}$$

yazabiliriz. (19) ve (20) den

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{1}{u\overline{\tau_\alpha}} \tag{21}$$

elde edilir. 3.Teoremi ve (21) kullanılır ise

$$\tau_\alpha \overline{\tau_\alpha} = -\frac{\sin^2\theta}{u^2\cos^2\theta} = sabit$$

olduğu görülür ki bu da ispatı tamamlar.■

30. Tanım: c, G_3 Galile uzayında sıfırdan farklı eğrilikli bir regüler eğri olsun. (11) deki Frenet denklemlerini sağlayan bir $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet çatı ailesi varsa, c ye bir Frenet eğrisi denir [5].

31. Tanım: c, G_3 Galile uzayında bir Frenet eğrisi olsun. Eğer c'nin karşılıklı noktalarını birleştiren doğruda karşılıklı N ve $\overline{N}$ asal normalleri çakışan bir $\tilde{c}$ Frenet eğrisi varsa, c'ye bir Frenet-Bertrand eğrisi denir ve FB eğrisi olarak yazılır. $\tilde{c}$ eğrisine c nin bir FB eşleniği denir. $(c, \tilde{c})$ eğri çiftine G_3 Galile uzayında bir Frenet-Bertrand çifti denir [5].

5. Teorem: c bir FB eğrisi ve $\tilde{c}$, c ’nin bir FB eşleniği olsun. Bu durumda $\bar{c}$ ve c nin karşılıklı noktaları arasındaki $|u|$ uzaklığı sabittir, ve $T.\bar{T}=\cos\theta$ olacak şekilde bir sabit θ açısı vardır [5].

İspat. $\{T,N,B\}$ ve $\{\bar{T},\bar{N},\bar{B}\}$ sırasıyla c ve $\tilde{c}$ boyunca Frenet çatıları olsunlar. $(c,\tilde{c})$ bir FB çifti olduğundan

$$\tilde{c}=c+uN \tag{22}$$

yazılabilir. Eğer (22) denkleminin s’ye göre türevini alırsak,

$$\bar{T}\frac{d\bar{s}}{ds}=T+u'N+uN' \tag{23}$$

elde ederiz. Burada s ve $\bar{s}$ sırasıyla c ve $\tilde{c}$ üzerindeki parametrelerdir ve $\frac{d\bar{s}}{ds}\neq 0$ dır. Eğer (11) denklemlerini düşünürsek ve (23)’ü kullanırsak,

$$\bar{T}\frac{d\bar{s}}{ds}=T+u'N+u\tau B \tag{24}$$

buluruz. $\{T,N,B\}$ c boyunca G_3 de Frenet çatısı olduğundan ve $(c,\tilde{c})$ bir FB eğri çifti olduğundan

$$u'=0$$

elde ederiz ki bu u ’nun sabit olması demektir.

Şimdi θ, T ve $\bar{T}$ arasındaki açı olmak üzere

$$\bar{T}=\cos\theta T+\sin\theta B \tag{25}$$

olarak tanımlayalım. Eğer (25) denkleminin s ’ye göre türevini alırsak

$$\bar{\kappa}\bar{N}\frac{d\bar{s}}{ds}=\frac{d(\cos\theta)}{ds}T+(\kappa\cos\theta-\tau\sin\theta)N+\frac{d(\sin\theta)}{ds}B$$

elde ederiz. $\{T, N, B\}$ c boyunca G_3 de Frenet çatısı ve $(c, \tilde{c})$ bir FB eğri çifti olduğundan $(N = \varepsilon N, \varepsilon = \pm 1)$

$$\cos\theta = sabit$$

elde ederiz ki bu θ'nın sabit olması demektir.■

(24) ve (25)'i göz önüne alırsak

$$\cos\theta = \frac{ds}{d\tilde{s}} u\tau \tag{26}$$

elde ederiz ve böylece

$$\tau = \frac{\tan\theta}{u} = sabit$$

bulunur.

$$c = \tilde{c} - \varepsilon u N$$

alalım. Buradan

$$T\frac{ds}{d\tilde{s}} = T - \varepsilon u\tilde{\tau} B \tag{27}$$

ve

$$T = \cos\theta T - \varepsilon \sin\theta B \tag{28}$$

elde ederiz. Eğer (27) ve (28) göz önüne alınırsa

$$\cos\theta = \frac{d\tilde{s}}{ds} \text{ ve} \sin\theta = \frac{d\tilde{s}}{ds} u\tilde{\tau} \tag{29}$$

ve (26) ile (29) denkleminden

$$\tau\tilde{\tau} = \frac{\sin^2\theta}{u^2} = sabit\ (>0)$$

buluruz. Buradan aşağıdaki teoremleri verebiliriz [5].

6. Teorem: c G_3 Galile uzayında bir eğri olsun. Bu durumda c bir FB eğrisidir ancak ve ancak c, τ sabit burulmalı bir eğridir [5]. ■

7. Teorem: c G_3 Galile uzayında bir FB eğrisi olsun. Eğer $\tan\theta = 0$ ise c bir düzlemsel eğridir [5]. ■

8. Teorem: c G_3 Galile uzayında bir FB eğrisi olsun. c, κ sabit eğrilikli bir eğri ise c düzlemsel olmayan dairesel helistir [5]. ■

2.2. Galile Uzayında Mannheim Eğrileri

32. Tanım: α ve α_1 3-boyutlu G_3 Galile uzayında iki eğri olsun. α_1 'in binormal doğrusu α 'nın birim normal doğrusu ise α ve α_1 'e Mannheim eğrileri denir. α 'ya α_1 'in, α_1 'e ise α 'nın Mannheim çifti denir [10].

9. Teorem: r G_3 Galile uzayında bir eğri olsun. Bu durumda r bir Manheim eğrisidir ancak ve ancak onun κ_r eğriliği ve τ_r burulması bir c sabiti için $\kappa_r = c\tau_r^2$ eşitliğini sağlar [10].

İspat. $r = r(s)$ bir regüler Mannheim eğrisi olsun. r 'nin Frenet çatı alanını $\{T_r, N_r, B_r\}$ ile gösterelim.

Farz edelim ki $\overline{r}=\overline{r}\left(\overline{s}\right)$ binormal doğrultusu r nin esas normali ile çakışan bir regüler eğri olsun. $\overline{r}$ nin Frenet çatı alanını $\left\{\overline{T_r},\overline{N_r},\overline{B_r}\right\}$ ile gösterelim. Bu durumda $\overline{B_r}\left(\overline{s}\right)=\pm N_r\left(s\right)$ dir. $\overline{r}$ eğrisi bir $c\left(s\right)\neq 0$ fonksiyonu için s yay uzunluğuna göre

$$\overline{r}\left(s\right)=r\left(s\right)+c\left(s\right)N_r\left(s\right) \tag{30}$$

olarakparametrelenir. (30) denkleminin s ye göre türevini alırsak

$$\overline{r}'=T_r+c'N_r+c\tau_rB_r$$

elde edilir. $\overline{r}$'nin binormal doğrultusu r'nin esas normaliyle çakıştığından $c'=0$ elde ederiz. Böylece c sabittir. s ye göre $\overline{r}''$ ikinci türevi

$$\overline{r}''=\left(\kappa_r-c\tau_r^2\right)N_r+c\tau_r''B_r$$

dir. N_r $\overline{r}$'nin binormal doğrultusunda olduğundan

$$\kappa_r-c\tau_r^2=0$$

dır. Tersine r bir regüler eğri olsun. Bu durumda

$$\overline{r}\left(s\right)=r\left(s\right)+cN_r\left(s\right)$$

eğrisi $N_r\left(s\right)$ binormal doğrultusuna sahiptir.■

10. Teorem: α, G_3 Galile uzayında bir Mannheim eğrisi ve α'nın Mannheim eğri çifti α_1 olsun. α_1'in eğriliği κ_1 ve burulması τ_1 arasında aşağıdaki eşitlik vardır.

$$\tau'_1=\frac{\kappa_1}{\lambda}\left(\lambda^2\tau_1^2+1\right)$$

Burada λ sıfırdan farklı bir sabittir [11].

İspat. Varsayalım ki $\alpha(s)$ G_3 Galile uzayında bir Mannheim eğrisi olsun. O zaman bir $\lambda(s_1)$ fonksiyonu için

$$\alpha(s_1)=\alpha_1(s_1)+\lambda(s_1)B_1(s_1) \tag{31}$$

yazılabilir. (31) in s_1'e göre türevi alınır ve G_3 Galile uzayındaki Frenet formülleri kullanılırsa

$$T\frac{ds}{ds_1}=T_1+\lambda' B_1-\lambda\tau_1 N_1$$

elde edilir. B_1, N ile çakışık olduğundan

$$\lambda'(s_1)=0$$

elde edilir. Bu da λ'nın sıfırdan farklı bir sabit olduğunu gösterir. Böylece

$$T\frac{ds}{ds_1}=T_1-\lambda\tau_1 N_1 \tag{32}$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$T=T_1\cos\theta+N_1\sin\theta \tag{33}$$

dır. Burada θ, α ve α_1 in karşılıklı noktalarındaki T ve T_1 arasındaki açıdır. (33) eşitliğinin s_1'e göre türevi alınırsa

$$\kappa N\frac{ds}{ds_1}=-T_1\theta'\sin\theta+\kappa_1 N_1\cos\theta+N_1\theta'\cos\theta+\tau_1 B_1\sin\theta$$

$$\kappa N\frac{ds}{ds_1}=-T_1\theta'\sin\theta+N_1(\kappa_1+\theta')\cos\theta+\tau_1 B_1\sin\theta$$

bulunur. $\{\alpha,\alpha_1\}$ Mannheim çifti olduğundan

$$\kappa_1+\theta'=0$$

elde ederiz. Bu nedenle

$$\theta' = -\kappa_1 \tag{34}$$

dir. (32) ve (33) den

$$\lambda\tau_1 = -\tan\theta \tag{35}$$

buluruz. Bu son eşitliğin türevi alınırsa

$$\lambda\tau_1' = -\theta'\left(1+\tan^2\theta\right) \tag{36}$$

elde ederiz. (34) ve (35), (36) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\tau_1' = \frac{\kappa_1}{\lambda}\left(\lambda^2\tau_1^2+1\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

2. Önerme: α, G_3 Galile uzayında bir Mannheim eğrisi ve α_1’de α’nın Mannheim eğri çifti olsun. Eğer α helis ise α_1 düzlemsel eğridir [11].

İspat. T, N, B sırasıyla α’nın teğet, esas normal ve binormal vektörleri olsun. Helisin özelliklerinden ve G_3 Galile uzaydaki sabit bir P için

$$\kappa\left(N.P\right) = 0$$

ve

$$\kappa\left(B_1.P\right) = 0$$

yazılabilir. Buradan $\tau_1 = 0$ olduğu kolaylıkla görülür.■

2.3. Yarı-Galile Uzayında Mannheim Eğrileri

33. Tanım: α ve α_1, yarı-Galile uzayında $\forall s \in I$ için κ_α ve τ_α sıfırdan farklı regüler eğriler olsunlar. $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ ve $\{T_{\alpha_1}, N_{\alpha_1}, B_{\alpha_1}\}$ G_3^1’de sırasıyla α ve α_1 regüler eğrilerinin

Frenet çatıları olsunlar. α_1 ’in B_{α_1} binormal doğrusu α ’nın N_α birim normal doğrusu ise α ve α_1 ’e Mannheim eğrileri denir. α ’ya α_1 ’in, α_1 ’e ise α ’nın Mannheim çifti denir.

11. Teorem: α, G_3^1 yarı-Galile uzayında bir eğri olsun. α, bir Mannheim eğrisidir ancak ve ancak α ’nın eğriliği κ_α ve burulması τ_α arasında bir c sabiti için

$$\kappa_\alpha = -\lambda \tau_\alpha^2$$

eşitliği vardır [11].

İspat. $\alpha = \alpha(s)$ bir regüler Mannheim eğrisi olsun. α ’nın Frenet çatısını $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ şeklinde gösterelim. $\alpha_1 = \alpha_1(s_1)$ ’in Frenet çatısını $\{T_{\alpha_1}, N_{\alpha_1}, B_{\alpha_1}\}$ şeklinde gösterelim. O zaman $B_{\alpha_1}(s) = \pm N_\alpha(s)$ dır.

α_1 eğrisi s yay uzunluğu parametresi ile verilir ise

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + \lambda(s) N_\alpha(s) \tag{37}$$

dir. $\exists \lambda(s) \neq 0$ dır. (37) eşitliğinin s’ye göre türevi alınırsa

$$\alpha_1'(s) = T_\alpha + \lambda' N_\alpha + \lambda \tau_\alpha B_\alpha$$

elde edilir. α eğrisinin birim normal doğrultusu ile α_1 eğrisinin binormal doğrultusu çakıştığından $\lambda' = 0$ dır. Bundan dolayı λ sabittir. (37) eşitliğinin s’ye göre ikinci türevi alınırsa

$$\alpha_1''(s) = \left(\kappa_\alpha + \lambda \tau_\alpha^2\right) N_\alpha + \lambda \tau_\alpha' B_\alpha$$

elde edilir. α_1 ’in binormal doğrultusu N_α olduğundan

$$\kappa_\alpha + \lambda \tau_\alpha^2 = 0$$

elde edilir.

Tersine olarak α bir regüler bir eğri olsun. O zaman

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + \lambda N_\alpha(s)$$

eğrisi $N_\alpha(s)$ binormal doğrultuya sahiptir. ■

12. Teorem: α, G_3^1 yarı-Galile uzayında bir eğri ve α 'nın regüler Mannheim eğri çifti α_1 olsun. α_1 'in eğriliği κ_{α_1} ve burulması τ_{α_1} arasında sıfırdan farklı bir λ sabiti için aşağıdaki eşitlik vardır:

$$\tau_1' = \frac{\kappa_1}{\lambda}\left(\lambda^2\tau_1^2 - 1\right)$$

İspat. 10. Teoremi ispatına benzer bir şekilde yapılabilir.■

1. Sonuç:

$$\tau_1' = \frac{\kappa_1}{\lambda}\left(\lambda^2\tau_1^2 - 1\right)$$

eşitliği basit bir parametre değişimi ile

$$\tau_1 = -\frac{\varepsilon}{\lambda}\tan\left(\varepsilon\int \kappa_1 ds + c_0\right)$$

şeklinde yazılır. Bu nedenle G_3^1 yarı-Galile uzayındaki her bir regüler Mannheim eğrisi için bir tek Mannheim eğri çifti vardır. Bu G_3 Galile uzayındaki Mannheim eğrileri için de doğrudur [11].

3. Önerme: α, G_3^1 yarı-Galile uzayında regülerMannheim eğrisi olsun. Ve α eğrisinin regülerMannheim eğri çifti α_1 olsun. Eğer α genel helis ise α_1 düzlemsel eğridir [11].

İspat. T, N, B sırasıyla α'nın teğet, esas normal ve binormal vektörleri olsunlar. Genel helisin özellikleri ve G_3^1 yarı-Galile uzayındaki regüler Mannheim eğrilerinin tanımından G_3^1 yarı-Galile uzayındaki sabit bir P için

$$\kappa(N.P)=0$$

ve

$$\kappa(B_1.P)=0$$

yazılabilir. Buradan $\tau_1=0$ olduğu kolaylıkla görülür.■

Aşağıdaki teorem α ile α^* arasındaki uzaklığın sabit olduğunu gösterir.

13. Teorem: α ve α^* G_3^1 de Mannheim eğri çifti olsunlar.

$$\alpha^*(s)=\alpha\ (s)+\lambda(s)N_\alpha(s)$$

ise λ fonksiyonu sabittir [7].

İspat. α ve α^* G_3 de Mannheim eğri çifti olsunlar. $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ ve $\{T_\alpha^*, N_\alpha^*, B_\alpha^*\}$ sırasıyla α ve α^* regüler eğrilerinin Frenet çatıları olsunlar. α noktasına karşılık gelen nokta α^* olsun, böylece

$$\alpha^*(s)=\alpha\ (s)+\lambda(s)N_\alpha(s) \tag{38}$$

yazılabilir.

(38) denkleminin s'ye göre türevini alırsak.

$$T_\alpha^*(s)\frac{ds^*}{ds}=T_\alpha(s)+\lambda'(s)N_\alpha(s)+\lambda(s)\tau_\alpha(s)B_\alpha(s) \tag{39}$$

elde edilir. N_α ve B_α nın doğrultuları aynı olduğundan $\lambda'(s)=0$ dır. Bundan dolayı $\lambda(s)=sabittir$.■

14. Teorem: α, s yay uzunluğu parametreli bir regüler eğri olsun. α eğrisi bir Mannheim eğrisi ise α regüler eğrisinin burulması olan τ_α sabittir [7].

İspat. $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ bir regüler Mannheim eğri çifti olsun. Öyle ise

$$\begin{aligned} T_\alpha(s) &= \cosh\theta T_\alpha^*(s) - \sinh\theta N_\alpha^*(s) \\ N_\alpha(s) &= -\sinh\theta T_\alpha^*(s) + \cosh\theta N_\alpha^*(s) \end{aligned} \tag{40}$$

şeklinde verilir. Burada θ, α ve α^* ın karşılıklı noktalarındaki T_α ve T_α^* teğet vektörleri arasındaki açıdır. Diğer taraftan, (40) denkleminden

$$\begin{aligned} T_\alpha^*(s) &= \cosh\theta T_\alpha(s) - \sinh\theta B_\alpha(s) \\ N_\alpha^*(s) &= \sinh\theta T_\alpha(s) + \cosh\theta B_\alpha(s) \end{aligned} \tag{41}$$

elde edilir. (41) eşitliklerindeki N_α^* ın s'ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \tau_\alpha^*(s) B_\alpha^*(s)\frac{ds^*}{ds} = {}& \frac{d(\sinh\theta)}{ds} T_\alpha(s) + \sinh\theta\kappa_\alpha(s) N_\alpha(s) \\ & + \cosh\theta\tau_\alpha(s) N_\alpha(s) + \frac{d(\cosh\theta)}{ds} B_\alpha(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Mannheim eğri çiftlerinin N_α normal vektörü ile B_α^* binormal vektörleri lineer bağımlıdır. Bu son ifadeden θ'nın sabit olduğu görülür.

(39) denklemi dikkate alınırsa

$$T_\alpha^*(s)\frac{ds^*}{ds} = T_\alpha(s) + \lambda(s)\tau_\alpha(s) B_\alpha(s) \tag{42}$$

elde edilir. (39) ve (42) denklemlerini göz önüne alırsak

$$\lambda(s)\tau_\alpha(s) coth\theta = 1 \tag{43}$$

elde edilir. $u = \lambda\coth\theta$ alınır ve 13. Teorem dikkate alınırsa

$$\tau_\alpha(s) = \frac{1}{u}$$

elde edilir. Ve böylece τ_α nın sabit olduğu ispatlanmış olur.■

15. Teorem:*(Schell Teoremi).* $\left(\alpha,\alpha^*\right)$, G_3^1 de regüler Mannheim eğri çifti olsunlar. τ_α, α eğrisine, τ_α^* da α^* eğrisine ait burulmalar olmak üzere $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ regüler Mannheim eğri çiftinin ilgili noktalarındaki τ_α ve τ_α^* burulmalarının çarpımı sabittir [7].

İspat. α yerine α^* alırsak (38) denklemi

$$\alpha\ (s)=\alpha^*(s)-\lambda(s)B_\alpha^*(s) \tag{44}$$

şeklinde yazılır. (44) denkleminin *s*'ye göre türevi alınır ve (40) denklemi kullanılırsa

$$\tau_\alpha^*(s)=\frac{1}{\lambda}\tanh\theta \tag{45}$$

elde edilir. (43) ve (45) karşılıklı olarak çarpılırsa

$$\tau_\alpha(s)\tau_\alpha^*(s)=\frac{\tanh^2\theta}{\lambda^2}=sabit$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.■

16. Teorem: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$, G_3^1 de regüler Mannheim eğri çifti ve $\kappa_\alpha,\tau_\alpha,\kappa_\alpha^*,\tau_\alpha^*$ sırasıyla α ve α^* ın eğrilik ve burulmaları olsunlar. O zaman aşağıdaki eşitlikler geçerlidir: [7]

$$i)\ \ \kappa_\alpha^*(s)=-\frac{d\theta}{ds^*}$$

$$ii)\ \ \kappa_\alpha(s)=\tau_\alpha^*(s)\sinh\theta\frac{ds^*}{ds}$$

$$iii)\ \ \tau_\alpha(s)=-\tau_\alpha^*(s)\cosh\theta\frac{ds^*}{ds}$$

İspat. Eğer (40) denklemini dikkate alırsak

$$T_\alpha(s).T_\alpha^*(s)=\cosh\theta$$

elde ederiz. α ve α^* ın Frenet formülleri kullanılarak s^* parametresine göre türev alınır ise

$$\kappa_\alpha(s)N_\alpha(s)\frac{ds}{ds^*}.T_\alpha^*(s)+T_\alpha(s).\kappa_\alpha^*(s)N_\alpha^*(s)=\sinh\theta\frac{ds}{ds^*} \tag{46}$$

elde edilir.

α nın normali N_α ile α^* ın binormali B_α^* nın lineer bağımlı oluşu dikkate alınır ve (40) ve (46) denklemleri kullanılarak

$$\kappa_\alpha^*(s)=-\frac{d\theta}{ds^*}$$

elde edilir. (11), (40), (41) denklemleri kullanılarak $T_\alpha.B_\alpha^*,\ B_\alpha.B_\alpha^*$ iç çarpımları hesaplanırsa *(ii)* ve *(iii)* kolaylıkla görülür. ■

2.4. AW(k)-Tipli Eğriler

Burada yarı-Galile uzayında [4] deki AW(k)-tipli Manheim eğrileri hakkında çalışmalar verilmiştir.

4. Önerme: $r,\ G_3^1$ de oskülatör mertebesi 3 olan bir Frenet eğrisi olsun. Bu durumda:

$$r'(s)=T(s)$$

$$r''(s)=\kappa_r N_r$$

$$r'''(s)=\kappa_r' N_r+\kappa_r\tau_r B_r$$

$$r^{(iv)}(s)=\left(\kappa_r''-\kappa_r\tau_r^2\right)N_r+\left(2\kappa_r'\tau_r+\kappa_r\tau_r'\right)B_r$$

tür [4].

Notasyon:

$$N_1(s)=\kappa_r N_r \tag{48}$$

$$N_2(s)=\kappa_r' N_r+\kappa_r\tau_r B_r \tag{49}$$

$$N_3(s)=\left(\kappa_r''-\kappa_r\tau_r^2\right)N_r+\left(2\kappa_r'\tau_r+\kappa_r\tau_r'\right)B_r \tag{50}$$

olarak gösterelim.

2. Sonuç: $r'(s), r''(s), r'''(s), r^{(iv)}(s)$ lineer bağımlıdır ancak ve ancak $N_1(s), N_2(s), N_3(s)$ lineer bağımlıdır [4].

34. Tanım: Frenet eğrileri

i) $N_3(s)=0$ ise AW(1)-tiplidir. (51)

ii) $\|N_2(s)\|^2 N_3(s)=(N_3(s).N_2(s))N_2(s)$ ise AW(2)-tiplidir. (52)

iii) $\|N_1(s)\|^2 N_3(s)=(N_3(s).N_1(s))N_1(s)$ ise AW(3)-tiplidir. (53)

[4]

17. Teorem: r 3.mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu durumda r AW(1)-tiplidir ancak ve ancak

$$\kappa_r''-\kappa_r\tau_r^2=0$$

ve

$$\tau(s)=\frac{c}{\kappa^2(s)}$$

dir [4].

İspat. r, AW(1)-tipli bir eğri olsun. O zaman (51) eşitliğinden $N_3(s)=0$ dır. Bu durumda (50) denkleminden

$$\left(\kappa_r''-\kappa_r\tau_r^2\right)N_r+\left(2\kappa_r'\tau_r+\kappa_r\tau_r'\right)B_r=0$$

bulunur. Bundan başka, N_r ve B_r lineer bağımsız olduğundan

$$\kappa_r''-\kappa_r\tau_r^2=0$$

ve

$$2\kappa_r^{'}\tau_r+\kappa_r\tau_r^{'}=0$$

elde edilir. İkinci denklemden

$$\tau(s)=\frac{c}{\kappa^2(s)}, \qquad c=sabit$$

elde edilir.

Ters durum aşikardır. Böylece ispat tamamlanır.■

18. Teorem: r, 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu durumda r AW(2)-tiplidir ancak ve ancak

$$2\kappa_r\left(\kappa_r^{'}\right)^2\tau_r^2+\kappa_r^{'}\kappa_r^2\tau_r^{'}\tau_r-\kappa_r^{''}\kappa_r^2\tau_r^2+\kappa_r^3\tau_r^4=0 \tag{54}$$

ve

$$2\left(\kappa_r^{'}\right)^3\tau_r+\kappa_r\left(\kappa_r^{'}\right)^2\tau_r^{'}+\kappa_r^{'}\kappa_r^2\tau_r^3-\kappa_r^{''}\kappa_r^{'}\kappa_r\tau_r=0 \tag{55}$$

dır [4].

İspat: r AW(2)-tipli ise (52) denklemi r için sağlanır. (49) ve (50) denklemlerini (52) denkleminde yerine yazarsak, (54) ve (55) denklemlerini elde ederiz.■

19. Teorem: r, 3. mertebeden bir Frenet eğrisi olsun. Bu durumda r AW(3)-tiplidir ancak ve ancak

$$2\kappa_r^2\kappa_r^{'}\tau_r+\kappa_r^3\tau_r^{'}=0 \tag{56}$$

dır [4].

İspat: r AW(3)-tipli olduğundan (53) denklemi r için sağlanır. Buradan (48) ve (50) denklemlerini (53) denklemlerinde yerine yazarsak, (56) denklemini elde ederiz. Ters durum aşikardır. Böylece ispat tamamlanır.■

2.5. AW(k)-tipli Manheim Eğrileri

20. Teorem: r G_3^1 de bir Manheim eğrisi olsun. Bu durumda r AW(1) tiplidir ancak ve ancak

$$-2c\left(\left(\tau_r^{'}\right)^2+\tau_r\tau_r^{''}\right)+c\tau_r^4=0 \tag{57}$$

ve

$$\tau_r=sabittir. \tag{58}$$

[4].

İspat. 11. Teoremi (51) de düşünürsek, (57) ve (58) i elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.■

2. Örnek: r ,G_3^1 de

$$r(s)=\left(0,a\sinh\frac{s}{b},a\cosh\frac{s}{b}\right) \qquad (a,b\in\mathbb{R})$$

denklemi ile verilen bir eğri olsun. Bu durumda

$$r'(s)=\left(0,\frac{a}{b}\cosh\frac{s}{b},\frac{a}{b}\sinh\frac{s}{b}\right)$$

$$r''(s)=\left(0,\frac{a}{b^2}\sinh\frac{s}{b},\frac{a}{b^2}\cosh\frac{s}{b}\right)$$

$$r'''(s)=\left(0,\frac{a}{b^3}\cosh\frac{s}{b},\frac{a}{b^3}\sinh\frac{s}{b}\right)$$

dir. (10) denklemlerini kullanarak $\kappa_r(s)=\dfrac{a}{b^2}$, $\tau_r(s)=0$ elde ederiz. $\kappa_r(s)$ ve $\tau_r(s)$ (57) ve (58) denklemlerini sağlar [4].

21. Teorem: r , G_3^1 de bir Mannheim eğrisi olsun. Bu durumda r AW(2) tiplidir ancak ve ancak

$$4\tau_r^5\tau_r' - 2c\tau_r^7\tau_r'' - c\tau_r^{10} = 0 \tag{59}$$

ve

$$7\tau_r^4\left(\tau_r'\right)^3 - \tau_r^8\tau_r' - 2\tau_r^5\tau_r'\tau_r'\tau_r'' = 0 \tag{60}$$

dır [4].

İspat. 12. Teoremi (52) de düşünürsek, (59) ve (60)'ı elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır. ■

22. Teorem: r , G_3^1 de bir Mannheim eğrisi olsun. Bu durumda r AW(3) tiplidir ancak ve ancak

$$\tau_r^6\tau_r' = 0 \tag{61}$$

dır [4].

İspat. 11. Teoremi (53) de düşünürsek, (61)'i elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.■

3. Örnek: r , G_3^1 de

$$r(s) = \left(as, a\cosh\frac{s}{b}, \sinh\frac{s}{b}\right) \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

denklemi ile verilen bir eğri olsun. Bu durumda

$$r'(s) = \left(a, \frac{a}{b}\sinh\frac{s}{b}, \frac{a}{b}\cosh\frac{s}{b}\right)$$

$$r''(s) = \left(0, \frac{a}{b^2}\cosh\frac{s}{b}, \frac{a}{b^2}\sinh\frac{s}{b}\right)$$

$$r'''(s)=\left(0,\frac{a}{b^3}\sinh\frac{s}{b},\frac{a}{b^3}\cosh\frac{s}{b}\right)$$

dir. (10) eşitliklerini kullanarak $\kappa_r(s)=\frac{a}{b^2}$, $\tau_r(s)=\sqrt{\frac{a^3}{b^5}}$ buluruz. $\kappa_r(s)$ ve $\tau_r(s)$ (61)'i sağlarlar [4].

2.6. G_3^1 Yarı-Galile Uzayında Elastik Olmayan Regüler Eğriler

Son zamanlarda elastik olmayan eğrilerin hareketinin incelenmesi çeşitli mühendislik uygulamalarında ortaya çıkmıştır.

Dahası Latifi ve diğerleri Minkowski 3-uzayında eğrilerin genişlemeyen (uzamayan) akımlarını çalışmışlardır [22].

Burada, G_3^1 yarı-Galile uzayında [2] deki eğrilerin genişlemeyen akımları verilmiştir. Bir genişlemeyen eğri akımı için bazı durumlar, eğrilik ve burulmayı içeren bir kısmi diferansiyel denklem olarak açıklanmaktadır [22].

$x(t),y(t),z(t)\in C^3$ (üçüncü mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar) ve t bir reel aralıkta değer almak üzere bir r uzay eğrisi

$$r(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$$

olarak verilir. $\dot{x}(t)\neq 0$ ise bu eğri

$$r(x)=\big(x,y(x),z(x)\big)$$

olarak verilebilir ve ek olarak

$$(y'')^2(x)-(z'')^2(x)\neq 0$$

dır.

Bu eğrinin yay uzunluğu parametresi $x=s$ olarak verilsin. s ye göre türevi "$'$" ile gösterelim.

$F:[0,l]\times[0,t_\infty]\rightarrow G_3^1$ dönüşümünün G_3^1 yarı-Galile uzayında düzgün eğrilerin bir 1-parametreli ailesi olduğunu farz edeceğiz. Burada l başlangıç eğrisinin yay uzunluğudur. u, eğri parametrizasyon değişkeni osun, $0\leq u\leq l$. F nin yay-uzunluğu

$$S(u)=\int_0^u\left|\frac{\partial F}{\partial u}\right|du$$

olarak verilir. Burada $\left|\frac{\partial F}{\partial u}\right|=\left|\frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial F}{\partial u}\right|^{1/2}$ dir. $v=\left|\frac{\partial F}{\partial u}\right|$ alırsak, $\frac{\partial}{\partial u}$ operatörü, yay uzunluğu parametresi $ds=vdu$ iken,

$$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u}$$

olarak verilir. F nin herhangi bir akımı

$$\frac{\partial F}{\partial t}=fT+gN+hB$$

olarak gösterilebilir. Eğrinin hiçbir uzama veya sıkışmaya maruz kalmadığı ortamlarda her $u\in[0,l]$ için $\frac{\partial}{\partial t}S(u,t)=\int_0^u\frac{\partial v}{\partial t}du=0$ dır [2].

35. Tanım: G_3^1 yarı-Galile uzayında bir $F(u,t)$ eğri evolasyonu ve onun $\frac{\partial F}{\partial t}$ akımı için $\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial F}{\partial u}\right|=0$ ise inelastiktir denir.

G_3^1 yarı-Galile uzayında inelastik akımların bazı durumları aşağıdaki teoremde verilir [2].

23. Teorem: $\frac{\partial F}{\partial t}=fT+gN+hB$ G_3^1 yarı-Galile uzayında F eğrisinin bir düzgün akımı olsun. Akım inelastik ise f sabittir [2].

İspat: F nin tanımına göre $v^2 = \frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial F}{\partial u}$ dur. $\frac{\partial}{\partial u}$ ve $\frac{\partial}{\partial t}$, u ve t bağımsız koordinatlı olduğundan değişir. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
2v\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial F}{\partial u}\right)\\
&= 2\left(\frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\right)\\
&= 2\left(\frac{\partial F}{\partial u}.\frac{\partial}{\partial u}\left(fT + gN + hB\right)\right)\\
&= 2v\left(T.\frac{\partial f}{\partial u}T + fv\kappa N + \frac{\partial g}{\partial u}N + gv\tau B\right) + \frac{\partial h}{\partial u}B + hv\tau N\\
&= 2v\frac{\partial f}{\partial u}
\end{aligned}$$

buluruz. Böylece

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

$$f = sabit\,.$$

elde ederiz.■

Şimdi kümemizi yay-uzunluğu parametreli eğrilere kısıtlayalım. Yani, $v = 1$, ve u koordinatı, eğrinin s yay-uzunluğuna karşılık gelsin. Buradan aşağıdaki lemma verilebilir:

1. Lemma:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)N+\left(g\tau+\frac{\partial h}{\partial s}\right)B$$
$$\frac{\partial N}{\partial t}=-\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)T+\psi B$$
$$\frac{\partial B}{\partial t}=-\left(g\tau+\frac{\partial h}{\partial s}\right)T-\psi N$$

dir. Burada $\psi=\left\langle \frac{\partial N}{\partial t},B\right\rangle$ dir [2].

İspat: (11) denklemini ve 23. Teoremi kullanarak

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(fT+gN+hB\right)$$
$$=\frac{\partial f}{\partial s}T+f\kappa N+\frac{\partial g}{\partial s}N+g\tau B+\frac{\partial h}{\partial s}B+h\tau N$$
$$=\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)N+\left(g\tau+\frac{\partial h}{\partial s}\right)B$$

hesaplanır. Şimdi Frenet çatısını t ile diferansiyelleyerek:

$$0=\frac{\partial}{\partial t}(T.N)=\left(\frac{\partial T}{\partial t}.N\right)+\left(T.\frac{\partial N}{\partial t}\right)$$
$$=\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)+\left(T.\frac{\partial N}{\partial t}\right)$$
$$0=\frac{\partial t}{\partial t}(T.B)=\left(\frac{\partial T}{\partial t}.B\right)+\left(T.\frac{\partial B}{\partial t}\right)$$
$$=\left(g\tau+\frac{\partial h}{\partial s}\right)+\left(T.\frac{\partial b}{\partial t}\right)$$
$$0=\frac{\partial}{\partial t}(N.B)=\left(\frac{\partial N}{\partial t}.B\right)+\left(N.\frac{\partial B}{\partial t}\right)$$
$$=\psi+\left(N.\frac{\partial B}{\partial t}\right)$$

bulunur. Yukarıdan, $\left(\frac{\partial N}{\partial t}.N\right)=\left(\frac{\partial B}{\partial t}.B\right)=0$ olduğundan

$$\frac{\partial N}{\partial t}=-\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)T+\psi B$$

ve

$$\frac{\partial B}{\partial t}=-\left(g\tau+\frac{\partial h}{\partial s}\right)T-\psi B$$

elde edilir.

24. Teorem: $\frac{\partial F}{\partial t}=fT+gN+hB$ eğri akımının inelastik olduğunu farz edelim. Bu durumda aşağıdaki kısmi diferansiyel denklem sistemi sağlanır [2]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial s}(f\kappa)+\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}(h\tau)+g\tau^2+\tau\frac{\partial h}{\partial s}\\
\frac{\partial \tau}{\partial t}&=\kappa\left(g\tau+\frac{\partial h}{\partial s}\right)+\frac{\partial \psi}{\partial s}\\
\kappa\psi&=\tau\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)+\frac{\partial}{\partial s}(g\tau)+\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}
\end{aligned}$$

İspat: $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial t}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s}$ olduğunu dikkate alarak,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial t}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)N+\left(g\tau+\frac{\partial h}{\partial s}\right)B\right]\\
&=\left[\frac{\partial}{\partial s}(f\kappa)+\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}(h\tau)\right]N+\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)(\tau B)\\
&\quad+\left[\frac{\partial}{\partial s}(h\tau)+\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\right]B+\left[g\tau+\frac{\partial h}{\partial s}\right](\tau N)
\end{aligned}$$

dir, aynı zamanda

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial t}(\kappa N)\\ &= N\left(\frac{\partial \kappa}{\partial t}\right)+\kappa\frac{\partial N}{\partial t}\\ &= N\frac{\partial \kappa}{\partial t}+\kappa\left[-\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)T+\psi B\right]\end{aligned}$$

dir. Böylece görürüz ki

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}(f\kappa)+\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}(h\tau)+g\tau^2+\tau\frac{\partial h}{\partial s}$$

ve

$$\kappa\psi=\tau\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)+\frac{\partial}{\partial s}(g\tau)+\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}$$

dir. $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial B}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial s}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\left[-\left(g\tau+\frac{\partial h}{\partial s}\right)T-\psi N\right]\\ &= -\left[\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}+\frac{\partial}{\partial s}(g\tau)\right]T-\left(g\tau+\frac{\partial h}{\partial s}\right)\kappa N-\frac{\partial \psi}{\partial s}N-\psi\tau B\end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}(\tau N)\\ &= \left[\frac{\partial \tau}{\partial t}N+\left[-\left(f\kappa+\frac{\partial g}{\partial s}+h\tau\right)T+\psi B\right]\right].\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}=\kappa\left(g\tau+\frac{\partial h}{\partial s}\right)+\frac{\partial \psi}{\partial s}$$

elde edilir. ■

2.7. Yarı Galile Uzayında Regüler Bir Eğrinin Küresel Karakterizasyonu

25. Teorem: r, G_3^1'de regüler bir eğri olsun. Eğer r'nin yarı-Galile üç ayaklısı $\{T(x), N(x), B(x)\}$ ise r'nin $r(x)$ noktasındaki Oskülatör küresinin merkezi

$$a(x) = r(x) + m_2(x)N(x) + m_3(x)B(x)$$

dir. Burada

$$m_2(x) = \frac{1}{\kappa(x)}, \qquad m_3(x) = -\frac{m_2'(x)}{\tau(x)}$$

dir [8].

İspat. a, r ve r_1 yarıçaplı ortak üç komşu noktaya sahip bir yarı-Galile kürenin merkezi olsun. Onun denklemini

$$h : I \to \mathbb{R},$$
$$h(x) = (a(x) - r(x)).(a(x) - r(x)) = \mp r_1^2$$

olarak düşünelim. Burada "." G_3^1'de iç çarpım ifade eder. $S_\mp^2$, G_3^1'de bir küre olsun. Bu $S_\mp^2$ küresi

$$S_\mp^2 = \{l : l \in G_3^1, (l - a).(l - a) = \mp r_1^2\}$$

şeklinde verilir. Aşağıdaki denklemleri göz önüne alalım:

$$h(x) = h'(x) = h''(x) = h'''(x) = 0$$

Eğer $h(x) = 0$ ise ve

$$(a(x) - r(x)).(a(x) - r(x)) = \mp r_1^2$$

denkleminin x'e göre türevini alırsak

$$-T(x).(a(x) - r(x)) = 0 \qquad (62)$$

elde edilir. Eğer türev almaya devam edersek

$$-T'(x).(a(x)-r(x))+(T(x).T(x))=0$$

eşitliğini elde edilir. (11) eşitlikleri dikkate alınırsa

$$-\kappa(x)\big(N(x).(a(x)-r(x))\big)+1=0 \tag{63}$$

bulunur ve $a(x)-r(x)\in Sp\{T(x),N(x),B(x)\}$ olduğundan

$$a(x)-r(x)=m_1(x)T(x)+m_2(x)N(x)+m_3(x)B(x) \qquad 64$$

şeklinde yazılabilir. (62) den

$$-\kappa(x)m_2(x)+1=0$$

elde edilir. Buradan da

$$m_2(x)=\frac{1}{\kappa(x)} \tag{65}$$

elde edilir. (64) den

$$T(x).(a(x)-r(x))=m_1(x)$$

ve (62) den de

$$m_1(x)=0$$

elde edilir. (63) eşitliğinin türevi alınırsa

$$-\kappa'(x)\big(N(x).(a(x)-r(x))\big)-\kappa(x)\big(N'(x).(a(x)-r(x))\big)-\kappa(x)\big(N(x).(-T(x))\big)=0$$

ve

$$\big(N(x).(a(x)-r(x))\big)=m_2(x)$$

olduğundan, buradan

$$-\kappa'(x)m_2(x)-\kappa(x)\tau(x)\big(B(x).(a(x)-r(x))\big)=0$$

veya

$$-\kappa'(x)m_2(x)+\kappa(x)\tau(x)m_3(x)=0$$

elde edilir. Ve bu son eşitlikten

$$m_3(x)=\frac{\kappa'(x)m_2(x)}{\kappa(x)\tau(x)} \tag{66}$$

elde edilir. (65) eşitliğinden

$$\kappa'(x)=-\frac{m_2'(x)}{m_2^2(x)}$$

elde edilir ve (66)

$$m_3(x)=-\frac{m_2'(x)}{\tau(x)}$$

olur ki bu da ispatı tamamlar [8].

26. Teorem: $S_{\mp}^2$ orijin merkezli bir yarı-Galile küre ve r 'de $S_{\mp}^2$ üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda regüler eğrinin parametresi x ise aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [8]:

$$\big(N(x).r(x)\big)=-m_2(x)$$
$$\big(B(x).r(x)\big)=m_3(x)$$

İspat. $S_{\mp}^2$ 'nin merkezi orijin ve yarıçapı r_1 olsun. $r(x)\in S_{\mp}^2$ olduğundan

$$\big(r(x).r(x)\big)=r_1^2$$

yazabiliriz. Bunun türevi bize

$$\big(T(x).r(x)\big)=0 \tag{67}$$

eşitliğini verir. (67) nin türevinden

$$\kappa(x)\big(N(x).r(x)\big)+\big(T(x).T(x)\big)=0$$

veya

$$\left(N(x).r(x)\right)=-\frac{1}{\kappa(x)}.$$

elde edilir. (65)’i kullanırsak

$$\left(N(x).r(x)\right)=-m_2(x) \tag{68}$$

elde edilir. (68)’in türevinden

$$\left(N'(x).r(x)\right)=-m_2'(x)$$

veya

$$\tau(x)\left(B(x).r(x)\right)=-m_2'(x)$$

elde edilir. (66) kullanılırsa

$$\left(B(x).r(x)\right)=m_3(x)$$

elde edilir.■

27. Teorem: r, G_3^1’de regüler bir eğri olsun. Yarı-Galile kürenin yarıçapı sabit ise, bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\tau(x)m_2(x)+m_3'(x)=0$$

Burada $m_3(x)\neq 0,\ \tau(x)\neq 0$ dır [8].

İspat. 25. Teoremden,

$$a(x)-r(x)=m_2(x)N(x)+m_3(x)B(x)$$

yazabiliriz ve buradan

$$\left(\left(a(x)-r(x)\right),\left(a(x)-r(x)\right)\right)=\mp r_1^2$$

eşitliğinden

$$m_2^2(x) - m_3^2(x) = \mp r_1^2 \tag{69}$$

denkleminielde ederiz. Burada $r_1 = sabit$ olduğundan, (69) ün türevi alınırsa

$$m_2(x)m_2'(x) - m_3(x)m_3'(x) = 0$$

elde edilir. Buradan $m_3(x) = -\dfrac{m_2'(x)}{\tau(x)}$ değeri kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\tau(x)m_2(x) + m_3'(x) = 0 \tag{70}$$

■

2.8. $m_2^2(X) - m_3^2(X) = \mp r_1^2$ İntegrasyonu

r regüler bir eğri ve $\{T(x), N(x), B(x)\}$, r'nin yarı-Galile üçayaklısı olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [8]:

$$\tau(x)m_2(x) + m_3'(x) = 0, \qquad m_2(x) = \frac{1}{\kappa(x)}, \qquad m_3(x) = -\frac{m_2'(x)}{\tau(x)}$$

Burada $\kappa(x)$ ve $\tau(x)$ r'nin yarı-Galile uzayında sıfırdan farklı eğrilik ve burulmasıdır. $(\kappa(x) \neq 0, \tau(x) \neq 0)$ Ayrıca

$$m_2(x) = \frac{1}{\kappa(x)}$$

ve

$$m_3(x) = -\frac{m_2'(x)}{\tau(x)} = -\left(\frac{1}{\kappa(x)}\right)'\left(\frac{1}{\tau(x)}\right)$$

olduğunu biliyoruz. (70) den

$$-\left[\left(\frac{1}{\kappa(x)}\right)'\left(\frac{1}{\tau(x)}\right)\right]' + \frac{\tau(x)}{\kappa(x)} = 0 \tag{71}$$

elde edilir.

Eğer $q(x)$ ve $p(x)$ sırasıyla $\dfrac{1}{\kappa(x)}$ ve $\dfrac{1}{\tau(x)}$'in yerine kullanılırsa (71) eşitliği

$$\left(p(x)q'(x)\right)' - \frac{q(x)}{p(x)} = 0 \tag{72}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer (72)'deki değişkenleri

$$t = \int \frac{dx}{p(x)}$$

ile değiştirirsek

$$\left(p(x)q(x)'\right)' = \frac{1}{p(x)}\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \tag{73}$$

elde edilir. (72) ve (73) den

$$\frac{1}{p(x)}\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{1}{p(x)}q = 0$$

ve buradan da

$$\frac{d^2q}{dt^2} - q = 0$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$q(x) = A\cosh\int \tau(x)dx + B\sinh\int \tau(x)dx$$

dir [8].

2.9. G_3^1 Yarı-Galile Uzayında Helisler

Sabit eğimli bir eğri ya da genel helis, teğet doğrultuları sabit bir birim vektörle sabit bir açı yapan eğri olarak tanımlanır. Yarı-Galile uzayında bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter koşul eğriliğinin burulmasına oranının sabit olmasıdır. Eğer hem eğrilik hem de burulma sabit iseler, ona bir dairesel helis denir [3].

Şimdi, G_3^1 yarı-Galile uzayında bir helisin konum vektörünün ifadesini verelim [3]. $\alpha(s)$ bir helis ise, bu durumda onun konumvektünü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\mu(s)N(s)+\gamma(s)B(s) \tag{74}$$

burada λ, μ ve γ $s\in I\subset\mathbb{R}$ nin diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır.

(74) ün s'ye göre türevini alarak ve (11) i kullanarak

$$\begin{aligned} &\lambda'(s)=1\\ &\lambda(s)\kappa(s)+\mu'(s)+\gamma(s)\tau(s)=0\\ &\mu(s)\tau(s)+\gamma'(s)=0 \end{aligned} \tag{75}$$

buluruz. (75) den aşağıdaki diferansiyel denklemi verebiliriz:

$$\mu''(s)-\mu(s)\tau^2+\kappa=0 \tag{76}$$

(76) denkleminin çözümü

$$\mu(s)=c_1e^{-\tau s}+c_2e^{\tau s}+\frac{\kappa}{\tau^2} \tag{77}$$

dir. Burada $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ dir. $\lambda'(s)=1$ den aşağıdaki çözüm bulunur:

$$\lambda(s)=s+c_3$$

$(c_3\in\mathbb{R})$, $\gamma'(s)=-\mu(s)\tau(s)$ ve (77) denklemi kullanılarak, bu denklemin çözümünü aşağıdaki gibi buluruz:

$$\gamma(s)=\kappa s-\tau c_1 s-\left(c_2 s-\frac{1}{\tau}\right)e^{\tau s}$$

Böylece konum vektörünü

$$\begin{aligned}\alpha(s)=(s+c_3)T(s)+\left[c_1e^{-\tau s}+c_2e^{\tau s}+\frac{\kappa}{\tau^2}\right]N(s)\\ +\left[\kappa s-\tau c_1 s-\left(c_2 s-\frac{1}{\tau}\right)e^{\tau s}\right]B(s)\end{aligned} \tag{78}$$

olarak buluruz [3].

3. Sonuç: $\alpha=\alpha(s)$ G_3 Galile uzayında, her bir $s\in I\subset\mathbb{R}$ için $\kappa\neq 0$, $\tau\neq 0$ olan birim hızlı bir helis olsun. Bu durumda $\alpha=\alpha(s)$ eğrisinin konum vektörü (78) denklemiyle verilir. [3]

Burada, görüntüsü bir $S_{\mp}^2$ yarı-Galile küresinde bulunan helisler için bazı karakterizasyonlar vereceğiz [3].

28. Teorem: $\alpha(s)$ G_3^1 yarı-Galileuzayında $\kappa\neq 0$, $\tau\neq 0$ olan birim hızlı bir helis olsun. Eğrinin görüntüsü bir $S_{\mp}^2$ yarı-Galile küresinde bulunur ancak ve ancak her bir $s\in I\subset\mathbb{R}$ için eğrilikler aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar:

$$s+c_3=0$$

$$(c_1+c_2s)e^{\tau s}+\frac{\kappa}{\tau^2}=-\frac{1}{\kappa} \tag{79}$$

$$\kappa s-\tau c_1 s-\left(c_2 s-\frac{1}{\tau}\right)e^{\tau s}=0$$

Burada $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ dir. [3]

İspat. Her $s\in I\subset\mathbb{R}$ için

$$\alpha.\alpha=r^2$$

dir ve r Galile kürenin yarıçapıdır. s'ye göre türev alınırsa

$$T.\alpha=0 \tag{80}$$

elde edilir. Yeniden türevlenirse,

$$N.\alpha=-\frac{1}{\kappa} \tag{81}$$

bulunur. Bu durumda yine s'ye göre türevi alınrsa

$$B.\alpha=0 \tag{82}$$

bulunur. (78) denkleminde (80) – (82) denklemleri kullanılarak (79) denklemi bulunur. Tersine, her bir $s \in I \subset \mathbb{R}$ için (79) denklemi geçerli ise bu durumda (78) den $(\alpha.\alpha) = r^2$ denklemini sağlayan $\alpha = -\frac{1}{\kappa}N$ eğrisinin konum vektörünü buluruz. Bu da eğrinin bir $S^2_{\mp}$ yarı-Galile küresinde bulunduğunu gösterir [3]. ■

4. Sonuç: $\alpha(s)$ G^1_3 yarı-Galile uzayında her bir $s \in I \subset \mathbb{R}$ için $\kappa \neq 0$, $\tau \neq 0$ olan birim hızlı bir helis olsun. Eğrinin görüntüsü, merkezi orjinde olan ve $r \in \mathbb{R}^+$ yarı çaplı bir $S^2_{\mp}$ yarı Galile küresinde bulunur ancak ve ancak α bir normal eğridir, yani, konum vektörü daima normal düzleminde bulunan bir eğridir [3].

5. Sonuç: $\alpha(s)$ G^1_3 yarı-Galile uzayında her bir $s \in I \subset \mathbb{R}$ için $\kappa \neq 0$, $\tau \neq 0$ olan birim hızlı bir helis olsun. α bir yarı Gallian küresel eğri ise $S^2_{\mp}$ nin yarı çapı $\alpha = -\frac{1}{\kappa}$ dır [3].

6. Sonuç: $\alpha(s)$ G^1_3 yarı-Galile uzayında her bir $s \in I \subset \mathbb{R}$ için $\kappa \neq 0$, $\tau \neq 0$ olan birim hızlı bir helis olsun. Eğrinin görüntüsü orijin merkezli ve $r \in \mathbb{R}^+$ yarıçaplı bir $S^2_{\mp}$ yarı-Galile küresinde bulunur ancak ve ancak onun konum vektörü sabittir [3].

2.10. Yarı-Galile Uzayında Eğrilerin Equiform Diferansiyel Geometrisi

Burada [6]'daki equiform diferansiyel geometri tanıtılacak, eğrilerin temel teoremi ispatlanacak ve G^1_3 in equiform diferansiyel geometrisinde sabit eğrilikli eğriler açıklanacaktır.

Şimdi [6] daki G^1_3 yarı-Galile uzayının equiform dönüşümlerini tanıtalım.

29. Teorem: G_3^1 uzayının her e equiform dönüşümü bir h homotetisi ile bir i izometrisinin bir bileşimidir, yani $e = i \circ h = h \circ i$ dir. Burada h homotetisi $(x, y, z) \to (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ye

$$\bar{x} = \lambda x \ , \ \bar{y} = \lambda y \ , \ \bar{z} = \lambda z$$

ile tanımlı dönüşümü gösterir. Ayrıca $\lambda > 0$ dır ve $(0,0,0)$ orjinini sabit tutar [6]. ■

Bu dönüşümlerin grubu H_7 ile gösterilir.

36. Tanım: H_7 7-parametreli equiform grubundan indirgenen G_3^1 ün geometrisine G_3^1 uzayının equiform geometrisi denir [6].

Bir önceki teoreme göre, homoteti grubunun ve izometri grubunun invaryantlarını bularak, equiform grubunun invaryantlarını bulabiliriz [6].

2.11. Yarı-Galile Uzayının Equiform Geometrisinde Frenet Formülleri

$r : I \to G_3^1$ bir regüler eğri olsun. $\rho = \dfrac{1}{\kappa}$, r eğrisinin eğrilik yarıçapı olmak üzere, r'nin equiform parametresini

$$\sigma := \int \frac{ds}{\rho} = \int \kappa ds$$

olarak tanımlanır [6].

Buradan

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\rho} \text{ yani } \frac{ds}{d\sigma} = \rho \tag{83}$$

bulunur.

h orijin merkezli ve λ katsayılı bir homoteti olsun. $\tilde{r} = h(r)$ dersek

$$\tilde{s} = \lambda s \text{ ve } \rho = \lambda \rho$$

elde ederiz. Burada $\tilde{s}$, $\tilde{r}$ nın yay uzunluğu parametresi ve ρ bu eğrinin eğrilik yarıçapıdır. Bundan dolayı, σ r nin bir equiform invaryant parametresidir [6].

1. Uyarı: κ ve τ homoteti grubunun invaryantları olmadığına dikkat edelim, çünkü (12) den $\kappa = \frac{1}{\lambda}\kappa$ ve $\tilde{\tau} = \frac{1}{\lambda}\tau$ elde edilir.

$$T = \frac{dr}{d\sigma}$$

vektörüne equiform geometride r eğrisinin bir teğet vektörü denir. Galile uzayındaki T, N, B Tanımı ve (83) den

$$T = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{d\sigma} = \rho\frac{dr}{ds} = \rho t \tag{84}$$

elde ederiz. Dahası, esas normal ve binormal vektörü, ya da basitçe normal ve binormali

$$N = \rho n, \qquad B = \rho b \tag{85}$$

ile tanımlarız. $\{T, N, B\}$ üç ayaklısının r eğrisinin bir equiform invaryant üç ayaklısı olduğunu göstermek kolaydır.

Şimdi bu üçlünün (') ile gösterilen σ ya göre türevlerini hesaplayalım. (11), (83), (84) ve (85) ten

$$T' = \frac{dT}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma}(\rho t) = \frac{d}{ds}(\rho t)\frac{ds}{d\sigma} = (\dot{\rho}t + \rho\dot{t})\rho = \dot{\rho}T + N$$

buluruz. Burada s yay uzunluğuna göre türev bir nokta ile gösterilmektedir. Benzer şekilde,

$$N' = \frac{dN}{d\sigma} = \dot{\rho}N + \rho\tau B$$

$$B' = \frac{dB}{d\sigma} = \rho\tau N + \dot{\rho}B$$

elde edilir [6].

37. Tanım: $$\kappa = \dot{\rho} \tag{86}$$

ile tanımlı $\kappa : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna r eğrisinin equiform eğriliği denir.

κ nın equiform dönüşümler grubunun bir diferansiyel invaryantı olduğunu ispatlayalım. $\tilde{r}$ eğrisinin equiform eğriliğine κ dersek, bu durumda

$$\kappa = \dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\tilde{s}} = \frac{d(\lambda\rho)}{ds}\frac{ds}{d\tilde{s}} = \dot{\rho} = \kappa$$

elde edilir [6].

38. Tanım: $$\tilde{\tau} = \rho\tau = \frac{\tau}{\kappa} \tag{87}$$

ile tanımlı $\tilde{\tau} : I \to \mathbb{R}$ fonsiyonuna r eğrisinin equiform burulması denir. O da equiform dönüşümler grubunun bir diferansiyel invaryantıdır.

Böylece yarı-Galile uzayının equiform geometrisinde Frenet formüllerine benzer formüller

$$\frac{dT}{d\sigma} = \kappa T + N$$

$$\frac{dN}{d\sigma} = \kappa N + \tau B$$

$$\frac{dB}{d\sigma} = \tau N + \kappa B$$

şeklindedir [6].

2. Uyarı: Kapalı eğriler için $\sigma = \int \kappa(s)\,ds$ equiform parametresine toplam eğrilik denir ve toplam eğrilik Öklid uzayının genel diferansiyel geometrisinde önemli bir rol oynar [6].

30. Teorem: $0<\kappa(x)\in C^1$, $0\neq\tau(x)\in C$ olmak üzere $\kappa=\kappa(x)$ ve $\tau=\tau(x)$ fonksiyonları verilsin. Aşağıdaki koşulları sağlayan iki regüler eğri (bir timelike ve bir spacelike) vardır:

(1) c verilen bir noktadan geçer;

(2) Bu noktada c nin Frenet üç ayaklısı verilen bir ortonormal pozitif yönlendirilmiş üç ayaklı ile çakışır;

(3) c, x yay uzunluğu parametreli bir $r(x)\in C^3$ vektör fonksiyonuyla gösterilebilir;

(4) $\kappa(x)$ ve $\tau(x)$ sırasıyla c nin eğrilik ve burulmasıdır [6].■

31. Teorem: $0<\kappa(x)\in C^1$, $0\neq\tilde{\tau}(x)\in C$ olmak üzere $\kappa=\kappa(x)$ ve $\tilde{\tau}=\tilde{\tau}(x)$ fonksiyonları verilsin. Aşağıdaki koşulları sağlayan iki regüler eğri (bir timelike ve bir spacelike) vardır:

(1) $c$verilen bir noktadan geçer;

(2) Bu noktada c nin equiform Frenet üç ayaklısı verilen bir pozitif yönlendirilmiş equiformüç ayaklısı ile çakışır;

(3) c, x yay uzunluğu parametreli bir $r(x)\in C^3$ vektör fonksiyonuyla gösterilebilir;

(4) $\kappa(x)$ ve $\tilde{\tau}(x)$ sırasıyla c nin equiform eğrilik ve equiform burulmasıdır [6].

İspat. $\kappa(x)>0$ dan

$$\rho(x):=\int_0^x \kappa(t)\,dt>0 \tag{88}$$

dır. Böylece

$$\kappa(x):=\frac{1}{\rho(x)}>0 \text{ ve } \tau(x):=\tilde{\tau}(x)\kappa(x)\neq 0 \tag{89}$$

dır. Dahası, 30. Teoremi ile verilen bir noktadan geçen iki regüler eğri vardır, Frenet üç ayaklısı, verilen bir $\{t,n,b\}$ ortonormal pozitif yönlendirilmiş üç ayaklısı ile çakışır.

Eğriler bir $r(x)$ vektör fonksiyonu olarak gösterilebilir ve $\kappa(x)$ ve $\tau(x)$ sırasıyla bu eğrilerin eğrilik ve burulmasıdır. Sonuç olarak, 31. Teoreminin (2) ve (4) durumlarını kontrol etmek gerekir, fakat onlar (84), (85), (88) ve (89) dan elde edilir [6].■

2.12. Sabit Equiform Eğrilik ve Burulmalı Eğriler

Bu bölümde, 31. Teoremin koşullarına sahip, sabit equiform eğrilik ve burulmalı eğriler için dört farklı durum verilecektir [6].

A) $\kappa = sabit \neq 0,\ \tilde{\tau} = sabit \neq 0$

(86) ve (87) ya göre eğri

$$\dot{\rho} = a,\quad \frac{\tau}{\kappa} = b$$

ile karakterize edilir. Burada a ve b sıfırdan farklı reel sabitlerdir. Buradan

$$\kappa = \frac{1}{as+c},\qquad \tau = \frac{b}{as+c}$$

biçimindedir. Burada genelliği kaybetmeksizin $c = 0$ kabul edebiliriz. O halde yukarıdaki denklemler

$$\kappa = \frac{1}{as},\qquad \tau = \frac{b}{as} \tag{90}$$

haline gelir. Dahası, eğrinin koordinat fonksiyonları

$$x = s,\ y = y(s),\ z = z(s)$$

dir. $r'''(x) = \kappa'(x)N(x) + \kappa(x)\tau(x)B(x)$ bağıntısı, Galile uzayındaki T, N, B Tanımı kullanılarak, koordinatlarla aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$(0, y''', z''') = \frac{\kappa'}{\kappa}(0, y'', z'') + \tau(0, \varepsilon z'', \varepsilon y'')$$

Böylece y ve z koordinat fonksiyonlarıyla hesaplama aşağıdaki adi diferansiyel denklem sisteminin çözümüne indirgenir:

$$\left.\begin{aligned} y''' &= \frac{\kappa'}{\kappa} y'' + \tau\varepsilon z'' \\ z''' &= \frac{\kappa'}{\kappa} z'' + \tau\varepsilon y'' \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

(90) formüllerini kullanarak, bu sistem

$$y''' = -\frac{1}{s} y'' + \varepsilon \frac{b}{as} z''$$
$$z''' = -\frac{1}{s} z'' + \varepsilon \frac{b}{as} y''$$

halini alır. $as = t$ dersek

$$t\frac{d^3y}{dt^3} = -\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon\frac{b}{a}\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$t\frac{d^3z}{dt^3} = -\frac{d^2z}{dt^2} + \varepsilon\frac{b}{a}\frac{d^2y}{dt^2}$$

elde edilir. Mertebeleri düşünerek $\left(u = \frac{d^2y}{dt^2}, v = \frac{d^2z}{dt^2}\right)$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{t}u + \varepsilon\frac{b}{at}v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{t}v + \varepsilon\frac{b}{at}u \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

sistemi bulunur.

$a \neq b$ için bu sistemden v ve $\frac{dv}{dt}$ yok edilirse,

$$a^2t^2\frac{d^2u}{dt^2} + 3a^2t\frac{du}{dt} + \left(a^2 - b^2\right)u = 0 \tag{93}$$

homojen Euler diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü

$$u(t)=\frac{1}{t}\left[C_1\cosh\left(\frac{b}{a}\ln t\right)+C_2\sinh\left(\frac{b}{a}\ln t\right)\right]$$

ile verilir. Dahası, $u=\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{a^2}\frac{d^2y}{dx^2}$ olduğundan

$$y''(x)=\frac{a}{x}\left[C_1\cosh\left(\frac{b}{a}\ln ax\right)+C_2\sinh\left(\frac{b}{a}\ln ax\right)\right] \tag{94}$$

bulunur. $C_1=1,\ C_2=0$ için, integralden sonra

$$y'(x)=\frac{a^2}{b}\sinh\left(\frac{b}{a}\ln ax\right)$$

özel çözümünü ya da $t=\frac{b}{a}\ln ax$ alarak

$$y'(t)=\frac{a^2}{b^2}\exp^{\frac{a}{b}t}\sinh t$$

elde edilir. Sonuçta, kısmi integralden sonra

$$y_1(t)=\frac{a^2}{b\left(b^2-a^2\right)}\exp^{\frac{a}{b}t}\left(b\cosh t-a\cosh t\right)$$

bulunur. (94) te $C_1=0,\ C_2=1$ alırsak, (93) Euler denkleminin ikinci özel çözümünü elde edilir. İntegralden sonra

$$y_2(t)=\frac{a^2}{b\left(a^2-b^2\right)}\exp^{\frac{a}{b}t}\left(b\sinh t-a\cosh t\right)$$

fonksiyonu bulunur.

Birinci özel çözüm belirlendiği şekilde, (92) den u ve $\frac{du}{dt}$ yi yok ederek v için aşağıdaki homojen denklemi elde edilir:

$$a^2t^2\frac{d^2v}{dt^2}+3a^2t\frac{dv}{dt}+\left(a^2-b^2\right)v=0$$

Bu Euler denkleminin çözümü, $y_1\left(t\right)$ ve $y_2\left(t\right)$ çözümlerine karşılık olarak

$$z_1\left(t\right)=\frac{a^2}{b\left(b^2-a^2\right)}\exp^{\frac{a}{b}t}\left(b\sinh t-a\cosh t\right)$$

$$z_2\left(t\right)=\frac{a^2}{b\left(b^2-a^2\right)}\exp^{\frac{a}{b}t}\left(b\cosh t-a\sinh t\right)$$

dir.

30. Teoreme göre (90) koşullarını sağlayan iki eğri elde edilir. Birinci eğrinin parametrik gösterimi

$$\begin{cases} x\left(t\right)=\frac{1}{a}\exp^{\frac{a}{b}t}, y\left(t\right)=\frac{a^2}{b\left(b^2-a^2\right)}\exp^{\frac{a}{b}t}\left(b\cosh t-a\sinh t\right), \\ z\left(t\right)=\frac{a^2}{b\left(b^2-a^2\right)}\exp^{\frac{a}{b}t}\left(b\sinh t-a\cosh t\right) \end{cases} \tag{95}$$

ve ikinci eğri

$$\begin{cases} x\left(t\right)=\frac{1}{a}\exp^{\frac{a}{b}t}, y\left(t\right)=\frac{a^2}{b\left(b^2-a^2\right)}\exp^{\frac{a}{b}t}\left(b\sinh t-a\cosh t\right), \\ z\left(t\right)=\frac{a^2}{b\left(b^2-a^2\right)}\exp^{\frac{a}{b}t}\left(b\cosh t-a\sinh t\right) \end{cases} \tag{96}$$

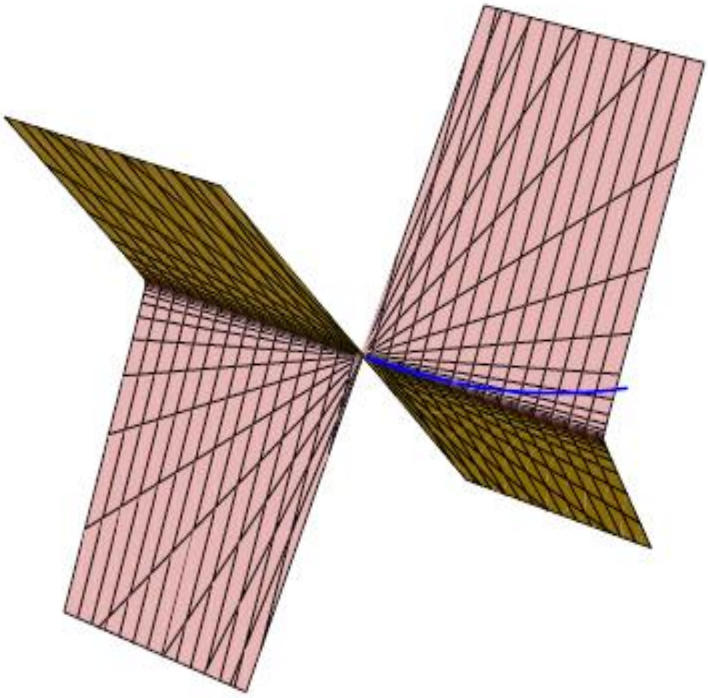
ile verilir. Bu eğriler sırasıyla iki

$$y^2-z^2=\frac{a^6}{b^2\left(b^2-a^2\right)}x^2 \text{ ve } z^2-y^2=\frac{a^6}{b^2\left(b^2-a^2\right)}x^2$$

dönel konilerinde (G_3^1 anlamında) bulunur. Dikkat edelim ki $a<b$ için ilk eğri spacelike ve ikinci eğri timeliketir. $a>b$ için benzer şekildedir. ■

Benzer şekilde, (96) ile verilen eğri için aynı sonucu elde ederiz.

$\frac{\tau}{\kappa} = sabit$ olduğundan, eğriler genel helistir ve onlar aynı zamanda konisel helislerdir [6].



Şekil 1. Konisel Helis

3. Uyarı: $a = b$ için (92) sistemi bir regüler eğri olmayan çözüme sahiptir.

B) $\kappa = sabit \neq 0, \ \tilde{\tau} = 0$

$$\kappa = \frac{1}{as+c}, \ \tau = 0$$

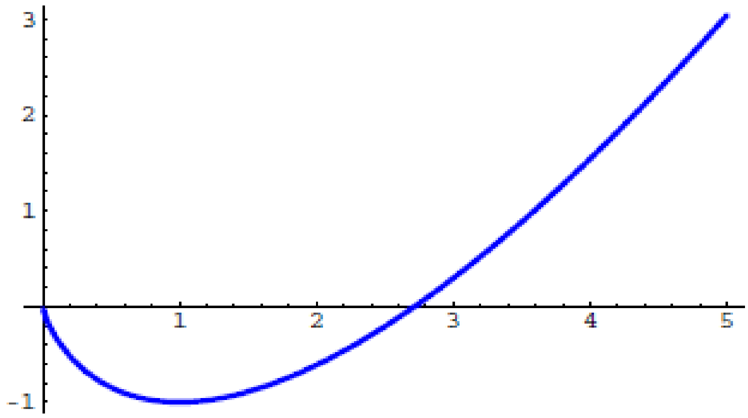
bulunur. (91) sistemi Galile durumundaki aynı forma sahiptir ve

$$y''' = \frac{\kappa'}{\kappa} y'', \qquad z''' = \frac{\kappa'}{\kappa} z''$$

dür. Sonuçta,

$$x = s, y(s) = \frac{1}{a^2}(as+b)\left[\ln(as+b) - 1\right], z = 0$$

dır ve bu G_3^1 de bir izotropik logaritmik spiraldir.

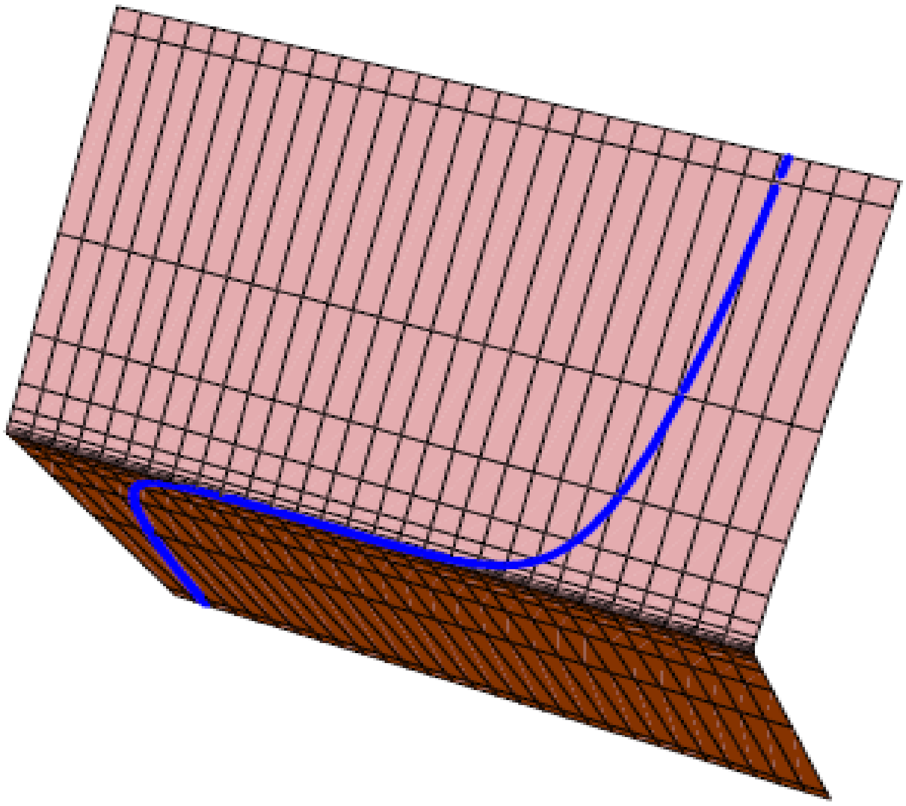


Şekil 2. İzotropik Logaritmik Spiral

C) $\kappa = 0\,, \tilde{\tau} = sabit \neq 0$ ise bu eğriler

$\kappa = sabit \neq 0\,,\; \tau = sabit \neq 0$

ile karakterize edilir ve bundan dolayı $\dfrac{\tau}{\kappa} = sabit$ olur. [25] e göre bunlar dairesel helislerdir.



Şekil 3. Dairesel Helis

D) $\kappa = 0$, $\tilde{\tau} = 0$ ise bu eğrilerin genel denklemleri

$$\kappa = sabit \neq 0, \ \tau = 0$$

olarak verilir. [26]'ya göre bu eğriler yarı-Galile uzayının izotropik çemberleridir, yani G_3^1 deki eğriler

$$y = \frac{\kappa}{2} x^2, \ \ z = 0$$

parabollerine izometriktir [6].

2.13. G_3^1 de Eğriler İçin Frenet Diferansiyel Denklem Sisteminin Genel Çözümü

Şimdi amacımız (11) de Frenet formüllerine benzer formüllerin doğru olduğu bir c eğrisine ait bütün T^*, N^*, B^* vektör alanlarını ve bütün $\kappa^*, \tau^* : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulmaktır [1]. Yani:

$$\frac{dT^*}{dx} = \kappa^* N^*, \ \frac{dN^*}{dx} = \tau^* B^*, \ \frac{dB^*}{dx} = \tau^* N^* \tag{97}$$

olduğunu gösterelim. İlk olarak;

$$\left.\begin{aligned} t^* &= a_{11}T + a_{12}N + a_{13}B \\ n^* &= a_{21}T + a_{22}N + a_{23}B \\ b^* &= a_{31}T + a_{32}N + a_{33}B \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

alalım. Burada $a_{ij} : I \to \mathbb{R}, \ i, j = 1, 2, 3$ tür ve bilinmeyen katsayılardır.

(98)'i türevleyerek ve (11) i kullanarak

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT^*}{dx} &= a_{11}^{'}T + \left(a_{12}^{'} + a_{11}\kappa + a_{13}\tau\right)N + \left(a_{13}^{'} + a_{12}\tau\right)B \\ \frac{dN^*}{dx} &= a_{21}^{'}T + \left(a_{22}^{'} + a_{21}\kappa + a_{23}\tau\right)N + \left(a_{23}^{'} + a_{22}\tau\right)B \\ \frac{dB^*}{dx} &= a_{11}^{'}T + \left(a_{12}^{'} + a_{11}\kappa + a_{13}\tau\right)N + \left(a_{13}^{'} + a_{12}\tau\right)B \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

elde edilir.

(98)'i (97)'nin sağ tarafında yerine yazarak

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT^*}{dx} &= \kappa^* \left(a_{21}T + a_{22}N + a_{23}B\right) \\ \frac{dN^*}{dx} &= \tau^* \left(a_{31}T + a_{32}N + a_{33}B\right) \\ \frac{dB^*}{dx} &= \tau^* \left(a_{21}T + a_{22}N + a_{23}B\right) \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

buluruz. (99) ve (100)'ü karşılaştırarak bilinmeyen fonksiyonların aşağıdaki diferansiyel denklemleri elde edilir:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}^{'}=\kappa^{*}a_{21}\\
&a_{12}^{'}+a_{11}\kappa+a_{13}\tau=a_{22}\kappa^{*}\\
&a_{13}^{'}+a_{12}\tau=a_{23}\kappa^{*}\\
&a_{21}^{'}=\kappa^{*}a_{31}\\
&a_{22}^{'}+a_{21}\kappa+a_{23}\tau=a_{32}\kappa^{*}\\
&a_{23}^{'}+a_{22}\tau=a_{33}\kappa^{*}\\
&a_{31}^{'}=a_{21}\tau^{*}\\
&a_{32}^{'}+a_{31}\kappa+a_{33}\tau=a_{22}\tau^{*}\\
&a_{33}^{'}+a_{32}\tau=a_{23}\tau^{*}
\end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Şimdi (101) sisteminin çözümünü bulmaya çalışacağız. T^{*},N^{*},B^{*} vektörleri G_3^1 de ortonormal vektörler olduğundan, aşağıdaki şekildedirler:

$$\left.\begin{aligned}
&T^{*}=T+fN+gB\\
&N^{*}=\cosh\varphi N+\sinh\varphi B\\
&B^{*}=\sinh\varphi N+\cosh\varphi B
\end{aligned}\right\} \tag{102}$$

Burada f,g,φ x 'in belirli fonksiyonlarıdır ve

$$|f'+\kappa+g\tau|>|g'+g\tau|$$

dur. (102)'yi (98) ile karşılaştırarak

$$\left.\begin{array}{lll}
a_{11}=1 & a_{12}=f & a_{13}=g\\
a_{21}=0 & a_{22}=\cosh\varphi & a_{23}=\sinh\varphi\\
a_{31}=0 & a_{32}=\sinh\varphi & a_{33}=\cosh\varphi
\end{array}\right\} \tag{103}$$

olduğu sonucuna varırız. Ek olarak, (103)'ü (101) de yerine koyarak

$$\left.\begin{aligned}
&f'+\kappa+g\tau=\cosh\varphi\kappa^{*}\\
&g'+f\tau=\sinh\varphi\kappa^{*}
\end{aligned}\right\} \tag{104}$$

elde edilir ve (104)'ün bir sonucu olarak

$$\varphi = arth\frac{g'+f\tau}{f'+\kappa+g\tau} \tag{105}$$

$$\kappa = \sqrt{\left(f'\kappa+g\tau\right)^2-\left(g'+f\tau\right)^2} \tag{106}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, eğer $a_{23}^{'}+a_{22}\tau = a_{33}\tau^{*}$ da $a_{23}=\sinh\varphi, a_{22}=\cosh\varphi$ ve $a_{33}=\cosh\varphi$ alırsak

$$\tau^{*} = \tau+\varphi' \tag{107}$$

elde edilir [1].

Şimdi, aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

32. Teorem: $c: I \to G_3^1,\ I \subseteq \mathbb{R}$ bir regüler C^4 eğri, κ ve τ sırasıyla onun eğrilik ve burulması, ve $f,g: I \to \mathbb{R}$ C^2 fonsiyonlar olsunlar. Bu durumda, Frenet sisteminin genel çözümü (103), (106) ve (107) ile verilir. Burada $\varphi: I \to \mathbb{R}$ (105) ile tanımlanan bir diferansiyellenebilir fonksiyondur [1]. ■

Bu teorem aşağıdaki gibi genelleştirilebilir. $c: I \to G_3^1,\ I \subseteq \mathbb{R}$ C^4 sınıflı bir regüler eğri ve $\kappa_1 = \kappa(x),\ \ \tau_1 = \tau(x)$ sırasıyla onun eğrilik ve burulması olsun. Şimdi, $\kappa_i, \tau_i: I \to \mathbb{R}$ fonksiyon dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\kappa_{i+1} = \sqrt{\left(f_i'\kappa_i+g_i\tau_i\right)^2-\left(g_i'+f_i\tau_i\right)^2}$$

$$\tau_{i+1} = \tau_i+\varphi_i'$$

Burada

$$\varphi_i = arth\frac{g_i'+f_i\tau_i}{f_i'+\kappa_i+g_i\tau_i} \qquad i=1,2,3,...$$

$f_i, g_i : I \to \mathbb{R}$ C^1 sınıflı keyfi fonsiyonlar ve $f_1 = f$, $g_1 = g$ dir.

$$|f_i'\kappa_i + g_i\tau_i| > |g_i' + f_i\tau_i| \qquad i = 1,2,3,...$$

olmalıdır.

Dahası, $F_i = \{t_i, n_i, b_i\}$ G_3^1 de

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + f_i n_i + g_i b_i \\ n_{i+1} &= \cosh\varphi_i n_i + \sinh\varphi_i b_i \\ b_{i+1} &= \sinh\varphi_i n_i + \cosh\varphi_i b_i \end{aligned}$$

ile tanımlı ortogonal üç ayaklıların bir dizisi olsun. $t_1 = t$, $n_1 = n$, $b_1 = b$ alalım. Bu durumda aşağıdaki teoremi tümevarımla ispatlamak kolaydır [1].

33. Teorem: F_i üç ayaklı vektör alanlarının ve κ_i, τ_i fonksiyonlarının türevleri için aşağıdaki Frenet tipi formüller geçerlidir [1]:

$$\frac{dt_i}{dx} = \kappa_i n_i, \ \frac{dn_i}{dx} = \tau_i b_i, \ \frac{db_i}{dx} = \tau_i n_i$$

3. SONUÇLAR

G_3 ve G_3^1 deki eğriler teorisiyle ilgili yapılan araştırmaların sonuçları şu şekilde sıralanabilir.

1) G_3 te verilen $\left(\alpha,\overline{\alpha}\right)$ Bertrand eğri çifti için

$$\overline{\alpha}\left(s\right)=\alpha\left(s\right)+u\left(s\right)N_{\alpha}\left(s\right)$$

eşitliğinde verilen u sabittir. Aynı zamanda τ_{α} ve $\overline{\tau_{\alpha}}$ bu eğrilerin burulmaları ise $\tau_{\alpha}\overline{\tau_{\alpha}}$ çarpımı sabittir.

2) G_3 te verilen $\left(c,\overline{c}\right)$ bir Frenet-Bertrand eğri çifti olsun. Bu durumda bu eğrilerin karşılıklı noktalarındaki $|u|$ uzaklığı sabittir ve $T.\overline{T}=\cos\theta$ olacak şekilde bir θ açısı vardır. Ayrıca c bir FB eğrisi ise burulması sabittir ve $\tan\theta=0$ ise c düzlemsel eğridir. c, κ sabit eğrilikli ise c bir dairesel helistir.

3) r G_3 uzayında bir Mannheim eğrisi ise eğrilik ve burulması arasında $\kappa_r=c\tau_r^2$ eşitliği vardır. α_1, α 'nın Mannheim eğri çifti ise eğrilik ve burulması arasında

$$\tau_1{}'=\frac{\kappa_1}{\lambda}\left(\lambda^2\tau_1^2+1\right)\qquad\left(\lambda\neq 0\ sabit\right)$$

bağıntısı vardır. Ayrıca α bir helis ise α_1 düzlemsel eğridir, ve $\alpha_1\left(s\right)=\alpha\left(s\right)+\lambda\left(s\right)N_{\alpha}\left(s\right)$ eşitliği ile verilen λ sabittir.

4) G_3^1 de α bir Mannheim eğrisi ise eğrilik ve burulması arasında $\kappa_r=-c\tau_r^2$ eşitliği vardır. α_1, α 'nın Mannheim eğri çifti ise eğrilik ve burulması arasında

$$\tau_1{}'=\frac{\kappa_1}{\lambda}\left(\lambda^2\tau_1^2-1\right)\qquad\left(\lambda\neq 0\ sabit\right)$$

bağıntısı vardır. Ayrıca α helis ise α_1 düzlemsel eğridir, ve $\left(\alpha,\alpha_1\right)$ Mannheim eğri çifti için

$$\alpha_1(s)=\alpha(s)+\lambda(s)N_\alpha(s)$$

eşitliği ile verilen λ fonksiyonu sabittir. Bundan başka burulmaları τ_α ve τ_{α_1} ise çarpımları sabittir.

5) G_3^1 de r eğrisi AW(1)-tiplidir ancak ve ancak

$$\kappa_r\,''-\kappa_r\tau_r^2=0 \quad \text{ve} \quad \tau(s)=\frac{c}{\kappa^2(s)}$$

dir. Ayrıca AW(2) ve AW(3)-tipleri için benzer eşitlikler elde edilmiştir. r G_3^1 de AW(1) tipli Manheim eğrisi ise

$$-2c\left(\left(\tau_r^{'}\right)^2+\tau_r\tau_r^{''}\right)+c\tau_r^4=0 \quad \text{ve} \quad \tau_r=sabit$$

olduğu görülmüştür. Bundan başka AW(2) ve AW(3)-tipli Mannheim eğrileri ile ilgili benzer sonuçlar vardır.

6) F , G_3^1 de düzgün eğrilerin bir 1-parametreli ailesi ise $\frac{\partial F}{\partial t}=fT+gN+hB$ düzgün akımı inelastik ise f sabittir.

7) r , G_3^1 regüler ise $r(x)$ noktasındaki Oskülatör küresinin merkezi $m_2(x)=\frac{1}{\kappa(x)}$ ve $m_3(x)=-\frac{m_2'(x)}{\tau(x)}$ olmak üzere

$$a(x)=r(x)+m_2(x)N(x)+m_3(x)B(x)$$

dir.

8) G_3^1 uzayında Equiform geometrisinde Frenet formüllerinin hesaplanması ve ayrıca burada Frenet diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü verilmiştir.

4. ÖNERİLER

1. G_3 ve G_3^1 de yapılan araştırmalar F. Klein geometrilerinin diğerlerinde araşırılabilir.
2. 3 boyutta incelenen bu yapıların benzerleri 4 vaya daha yüksek boyutlarda incelenebilir.
3. G_3 Galile uzayında eğrilerin Equiform geometrisi oluşturularak, eğrilerin temel teorisi, Frenet formülleri araştırılabilir. Ayrıca buradaki temel invaryantlar araştırılabilir.
4. G_3 ve G_3^1 yüzeyler teorisi oluşturulup, yüzeylerle ilgili temel teoremler ve sonuçlar elde edilebilir. (Sadece bazı özel yüzeyler için sonuçlar vardır.)
5. G_3 ve G_3^1 de burada incelenenler dışındaki eğrilerin (küresel göstergeler, involüt,-evolüt, eğrilerin zarfı) özellikleri verilerek bunlar incelenebilir.
6. G_3 ve G_3^1 uzaylarında k-formlarla ilgili araştırmalar yapılabilir. k-formların incelenmesiyle konneksiyon formları oluşturulabilir.
7. G_3 ve G_3^1 uzaylarında farklı çatılar tanımlanabilir. Bu çatıların T, N, B ile bağlantıları araştırılabilir.
8. Bu uzaylarda izometri kavramı tanımlanarak, farklı invaryantları araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

1. Divjak, B., The general solution of the Frenet system of differantial equation for curves in thepsedo-Galile Space G_3^1, Mathematical Communications 2(1997). 143-147
2. Öğrenmiş, A. O., Yeneroğlu, M., Külahcı, M., Inelastik Admissible Curves in the Psedo-Galile Space G_3^1, Int. J.Open Problems Compt. Math., 4,3 (2011).
3. Külahci, M., Characterizations of a helix in the pseudo-Galile Space G_3^1, İnternational Journal of the Physical Sciences, 5,9 (2010) 1438-1442.
4. Öğrenmiş, A. O., On curvatures of a Frenet curve in the pseudo-Galile Space G_3^1, İnternational Journal of the Physical Sciences, 5,15 (2010) 2363-2368.
5. Balgetir Öztekin, H., Weakened Bertrand Curves in the Galilean Space G_3, J. Adv. Math. Studies, 2 (2009) 2, 69-76
6. Erjavec, Z., Divjak, B. The equiform differantial geometry of curves in the psedo-Galilean space, Mathematical Communications 13(2008) 321-332
7. Akyiğit, M., Azak, A. Z., Tosun, M., Admissible Mannheim Curves in Psedo-Galile Space G_3^1, arXiv:1001.2440v3 [math.DG] 3 February 2010
8. Öğrenmiş, A. O., Ergüt, M., On the Explicit Characterization of Admissible Curve in 3-Dimensional Pseudo-Galile Space, J. Adv. Math. Studies, 2(2009) 1, 63-72
9. Bektaş, M. The Characterizations of General helices in the 3-Dimemsional Pseudo-Galile Space, Soochow Journal Of Mathematics, 31,3 (2005) 441-447.
10. A. O. Öğrenmiş, H. Öztekin ve M. Ergüt, Bertrantd Curves in Galile Space and Their Characterizations, Kragujevac J. Math, 32(2009) 139-147.
11. Öğrenmiş, A. O., Öztekin, H. ve Ergüt, M., Some Properties of Mannheim Curves in Galilean and Psedude-Galile space, arXiv:1111.0424v1 [math.DG] 2 Nov 2011
12. Hacısalihoğlu, H. H., Diferansiyel Geometri I, İnönü Ünv. Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 1982.
13. O'Neill, B., Elementary Differantial Geometry, Academic Press New York, London, 1966.
14. Yaglom, I.M., A Simple Non-Euclidean Geometry and Physical Basis, Springer-Verlag, New York, 1979.

15. Balgetir, H., Bektaş, M. ve M. Ergüt, On The B-Scrolls in the 3-Dimensional Lorentzian Space L^3, Kragujevac J. Math, 27(2005) 163-174.
16. Küçükarslan, Z., Bektaş, M., Öztekin, H., İnclined Curves of Null Curves in L^{m+2} and Their Characterizations, International Journal of Physicaland Mathematical Sciences, 3,1 (2012).
17. Yılmaz, S., Construction of the Frenet-Serret frame of a curve in 4D Galile space and some applications, International Journal of Physicaland Mathematical Sciences, 5,8(2010) 1284-1289.
18. Öğrenmiş A. O. ve Ergüt, M., On the Gauss Map of Ruled Surfaces of Type II in 3-Dimemsional Pseudo-Galile Space, Bol. Soc. Paran. Mat. 31,1 (2013) 145-152.
19. Ekici, C. ve Dede, M., On the Darboux Vektor of Ruled Surfaces in Pseudo-Galile Space, Mathematical and Computational Applications, 16,4 (2011) 830-838.
20. Erjavec, Z., Divjak, B., Horvat, D., The General Solutions of Frenet's System in the Equiform Geometry of the Galile, Pseudo-Galile, Simple Isotropic and Double Isotropic Space, International Mathematical Forun, 6,17 (2011), 837-856.
21. Divjak, B., Curves in Pseudo-Galilean Geometry, Annales Univ. Sci. Budapest. 41 (1998), 117-128
22. Latifi, D., Razavi, A., "Inextensible Flows of Curves in Minkowskian Space", Adv. Studiestheor. Phys. 216 (2008) 761-768.
23. Kwon, D.Y., Park, F.C., "Evolution of inelasticplanecurves", Appl. Math. Lett. 12 (1999) 115-119.
24. Kwon, D.Y., Park, F.C., Chi, D.P., "Inextensible Flows of Curves and developable surface", Appl. Math. Lett. 18 (2005) 1156-1162.
25. Divjak, B., Special Curves on Ruled Surface in Galilean and Pseudo-Galilean Space, Acta Math. Hungar. 98,3 (2003), 203-215.
26. Divjak, B., Geometrija Pseudo-Galilean Jevih Prostora, Ph. D. Thesis, University of Zagreb, 1997.
27. Gezgin, F., AW(k)_Tipinden Eğriler, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir, 2005.
28. Pavkovic, B.J. ve I. Kamenarovic, The Equiform Defferential Geometry of Curves in the Galilean Space G_3, Glasnik Mat. 22,42 (1987) 449-457
29. Röschel, O., Die Geometrie Des Galileischen Raumes, Habilitationsschrift, Loben, 1984.

30. Külahci, M., Öğrenmiş, A. O., Ergüt, M., New Characterizations of Curves in the Galile Space G_3 , İnternational Journal of Physical Sciences, 1(2010).
31. Gungor, M. A., Tosun, M., One Parameter Lorentzian Motions in Lorentz 3-Space, Kragujevac J. Math, 31(2008) 95-109.
32. Trencevski, K., Representation of the Lorentz Transformations in 6-Dimensional Space-Time, Kragujevac J. Math, 35,2 (2011) 327-340.
33. Ali, A., Turgut, M., Position Vector of a Time-like Slant Helix in Minkowski 3-Space, J. Math. Anal. Appl., 365 (2010) 559-569
34. Röschel, O., Die Geometrie Des Galileischen Raumes, Berichte der Math.-Stat. Sektion im Forschungszentrum Graz Ber., 256(1986) 1-20. 1984
35. İlarslan, K. ve Boyacıoğlu, Ö., Position vectors of a timelike and a null helix in Minkowski 3-space, Chaos Solitons Fractals, 38,5 (2008) 1383-1389.

ÖZGEÇMİŞ

Yüksel KELEŞ 1982 yılında Van'ın Erciş ilçesinde doğdu. İlkokulunu Adana Yeşiloba İlkokulu, Ortaokulunu Adana İstiklal Ortaokulu'nda, lise öğrenimini de Adana Orhan Çobanoğlu Lisesi'nde tamamladı.

2001-2002 Eğitim-Öğretim yılında Isparta Süleyman Demirel Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2004-2005 Eğitim-Öğretim yılında başarıyla tamamladı. 2009 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Vakfıkebir Meslek Yüksekokulu'na Öğretim Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevine devam etmektedir.

Evli ve iki çocuk babasıdır.