KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TALEP MİKTARI SONLU VARYANSLI AĞIR KUYRUKLU DAĞILIMA SAHİP (s,S) TİPLİ ENVANTER MODELLERİN ASİMPTOTİK VE YAKLAŞIK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ebru ŞENOL

HAZİRAN 2017
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TALEP MİKTARI SONLU VARYANSLI AĞIR KUYRUKLU DAĞILIMA SAHİP (s,S) TİPLİ ENVANTER MODELLERİN ASİMPTOTİK VE YAKLAŞIK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Ebru ŞENOL

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 29 / 05 /2017
Tezin Savunma Tarihi : 16 / 06 /2017

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Tülay Kesemen

Trabzon 2017

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında
Ebru ŞENOL Tarafından Hazırlanan

TALEP MİKTARI SONLU VARYANSLI AĞIR KUYRUKLU DAĞILIMA SAHİP (s,S) TİPLİ ENVANTER MODELLERİN ASİMPTOTİK VE YAKLAŞIK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 31 / 5 / 2017 gün ve 1704 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Doç. Dr. Mehmet MERDAN ....

Üye : Doç. Dr. Tülay KESEMEN ....

Üye : Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN ....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması süreci boyunca önerileri ve yönlendirmeleriyle bana rehberlik yapan danışman hocam Doç. Dr. Tülay KESEMEN'e ve yardımlarından dolayı RTEÜ matematik bölümü öğretim elemanı Dr. Aslı Bektaş Kamışlık'a en içten dileklerimle saygı ve minnetimi sunarım.

Ayrıca tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini her daim arkamda hissettiğim aileme ve yüksek lisans eğitimimin tüm aşamalarında yanımda olan eşim İbrahim ŞENOL'a sonsuz teşekkür ederim.

115F221 nolu araştırma projesi kapsamında bu çalışmayı finansal olarak destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'a teşekkür ederim.

Ebru ŞENOL

Trabzon 2017

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Talep Miktarı Sonlu Varyanslı Ağır Kuyruklu Dağılıma Sahip (s,S) Tipli Envanter Modellerin Asimptotik ve Yaklaşık Yöntemlerle İncelenmesi" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Tülay KESEMEN' in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Ebru ŞENOL

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

TALEP MİKTARI SONLU VARYANSLI AĞIR KUYRUKLU DAĞILIMA SAHİP (s,S) TİPLİ ENVANTER MODELLERİN ASİMPTOTİK VE YAKLAŞIK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Ebru ŞENOL

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Tülay KESEMEN
2017, 75 Sayfa

Bu tez çalışmasında (s,S) tipli bir yarı-Markov envanter model, ödüllü yenileme süreci olarak bilinen bir stokastik süreç yardımı ile modellenmiştir. Sistemi ifade eden süreçte talep miktarlarının önce $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfından daha sonra da $\mathcal{R}_\alpha$ sınıfından bir ağır kuyruklu dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. Böylece bu sınıflardan ağır kuyruklu dağılımların (s,S) tipli envanter modellerin olasılık ve sayısal karakteristikleri üzerindeki etkisi araştırılmıştır.

Yenileme sürecinde yenileme fonksiyonunu oluşturan rasgele değişkenler $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfından olduğunda Emrechts ve Omey (1984) tarafından yenileme fonksiyonu için önerilmiş olan asimptotik açılım kullanılmış ve bu açılım sürece uygulanarak sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır. Daha sonra $\mathcal{R}_\alpha$ sınıfından rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için Mitov ve Omey (2014) tarafından önerilen yaklaşık sonuçlar sisteme uygulanmış ve sistemi ifade eden sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için yaklaşık çözümler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: (s,S) tipli yarı-Markov envanter modeller, Ağır kuyruklu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonları, Ödüllü yenileme süreçleri, Ergodik dağılım fonksiyonu, Düzenli değişen dağılımlar, Zayıf yakınsama, Asimptotik açılım, Yaklaşık sonuçlar.

SUMMARY

INVESTIGATION OF INVENTORY MODEL OF TYPE (s,S) WITH ASYMPTOTIC AND APPROXIMATE METHODS WHEN DEMAND DISTRIBUTION ARE HEAVY TAILED WITH FINITE VARIANCE

Ebru ŞENOL

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Tülay KESEMEN
2017, 75 Pages

In this thesis study a semi-Markovian inventory model of type (s,S) is modelled with the help of a stochastic process known as the renewal reward process. In this process, it is assumed that the demand random variables have a heavy tail distribution from the $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ class first and then the $\mathcal{R}_\alpha$ class. Thus, the effect of the heavy-tail distributions from these classes is investigated on the characteristics of inventory model of type (s,S).

In the renewal process, the asymptotic expansion proposed by Emrechts and Omey (1984) for the renewal function which is generated by the $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ class of random variables was used and the asymptotic expansions for ergodic distribution function of the process were reached by applying this asymptotic expansion. Subsequently, approximate results proposed by Mitov and Omey (2014) for the renewal function generated by random variables from the $\mathcal{R}_\alpha$ class have been applied to the system and approximate solutions have been obtained for the ergodic distribution function.

Key Words: A semi Markovian inventory model of type (s,S), Renewal function generated by the heavy tailed random variables, Asymptotic expansion, Renewal reward process, Ergodic distribution function, Regular variation, Weak convergence, Asymptotic expansion, Approximate results.

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$a(x) \sim b(x)$	: $a(x)$'in $b(x)$'e asimptotik denkliği
$E(\xi)$	: ξ rasgele değişkeninin beklenen değeri
$P\,\{A\}$	: A olayının meydana gelme olasılığı
$\nu(t)$	: Yenileme süreci
U(t)	: Yenileme Fonksiyonu
$Var(\xi)$	: ξ rasgele değişkeninin varyansı
$E\left(e^{\theta\xi}\right)$	: ξ rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu
$F^{*n}(x)$	: $F(x)$ fonksiyonunun n. konvülüsyon çarpımı
$\bar{F}(x)$	: F dağılım fonksiyonunun kuyruğu
$F_I(x)$	: F dağılım fonksiyonunun integrallenmiş kuyruk fonksiyonu
$m_I(x)$	: $F_I(x)$ dağılımına sahip rasgele değişkenin beklenen değeri
$log\big(F(x)\big)$	: $F(x)$ fonksiyonunun logaritması
$\limsup_{x\to\infty} F(x)$	: $F(x)$ fonksiyonunun üst limiti
$\liminf_{x\to\infty} F(x)$	: $F(x)$ fonksiyonunun alt limiti

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Stokastik süreçler teorisi olasılık teorisinin 20. yüzyılda ortaya çıkan ve hızla gelişen önemli bir alanıdır. Stokastik süreçler (veya rastgele süreçler), zaman içerisinde rasgele değişen durumları tanımlamak için kullanılan bir olasılık modelidir. Daha geniş anlamıyla stokastik süreçler deterministik süreçlerin olasılık alanındaki karşılığıdır. Statik görüntüler, borsa ve döviz kuru dalgalanmaları, konuşma ve ses sinyalleri, bir hastanın EKG, EEG, kan basıncı ya da sıcaklığı gibi tıbbi veriler stokastik süreçler ile karşılaşılan uygulama alanlarından bazılarıdır. Günlük hayatta karşılaşılan pek çok olay rasgele süreçler yardımı ile tanımlandığından, stokastik süreçler mühendislik ve istatistikte çok önemli bir yere sahiptir. Örneğin çok sayıda parçadan oluşan bir cihaz ele alınsın. Cihazın her bir parçası herhangi bir sebepten bozulabilir. Bozulmuş olan parçanın yenisi ile değiştirildiği farz edilsin. $[0, t]$ zaman aralığında kaç tane parçanın değiştirileceği önceden bilinemez. Bu tür sistemlerin t zaman çalıştıktan sonra bulunacağı konumun tahmin edilebilmesi için t ye bağlı özel bir olasılık yapısı olan ve $\upsilon(t)$ ile gösterilen bir yapı ile modellenmeleri gerekir. $\upsilon(t)$ ile gösterilen bu yapı t' ye bağlıdır ve rasgeledir. $\upsilon(t)$'nin temel özelliği azalmayan olması ve rasgele anlarda bazı değerler almasıdır. $\upsilon(t)$ fonksiyonu güvenirlik teorisinde önemli role sahiptir. Benzer fonksiyon sigorta teorisinde $[0, t]$ aralığındaki sigorta ödemelerinin sayısını da ifade etmektedir. İşte bu anlatılan durumlar ve benzerleri, matematikte stokastik süreç kavramını ortaya çıkarmıştır.

Stokastik süreçler teorisinin temelleri 20. yüzyılda A.A. Markov (1856-1922), E. Slutski (1880-1948), N. Wiener (1894-1965), A.Y. Khinchin (1894-1959), A.N. Kolmogorov (1903-1987) gibi matematikçiler tarafından verilmiştir. Stokastik süreçlerle ilgili W. Feller (1906-1970), P. Levy (1886-1971), A. Wald (1902-1950), J. Doob (1910-2004), K. Ito (1915-2008), E. Dynkin (1924), A. Skorohod (1929), L. Takac (1927), E. Çınar (1941) gibi matematikçilerin de önemli katkıları bulunmaktadır [56].

Stokastik süreçlerin uygulamada en sık karşılaşılan sınıfları yenileme, ödüllü yenileme, Markov süreçleri ve rasgele yürüyüş süreçleridir. Özellikle yenileme süreçleri stokastik süreçler teorisinde ve onun uygulamalarında önemli bir role sahiptir. Literatürde yenileme süreçlerinin kendi karakteristiklerine ait bazı çalışmalar mevcuttur. Örneğin, Smith

[67], Feller [29] yenileme fonksiyonu için iki terimli asimptotik açılım elde etmişlerdir. Yenileme süreçleri yarı-Markov süreçlerinin özel bir hali olup Poisson süreçlerinin genelleştirilmişi olarak da ifade edilebilir. Bir Poisson süreci kısaca, olaylar arası geçen zaman süreleri, birbirinden bağımsız ve aynı üstel dağılıma sahip rasgele değişkenler olan bir sayma süreci olarak tanımlanabilir. Çünkü bu süreçte olaylar arası geçen zaman süreleri, birbirinden bağımsız ve aynı keyfi dağılıma sahip rasgele değişkenlerdir. Ayrıca Poisson sürecinde basamak değişkenlerini gösteren rasgele değişkenler aynı üstel dağılıma sahiptir. Yenileme süreçlerinde ise basamak değişkenlerini ifade eden rasgele değişkenler bağımsız, aynı dağılıma sahiptirler. Fakat yenileme süreçlerinde basamak değişkenlerini ifade eden rasgele değişkenler üstel dağılıma sahip olmak zorunda değildir. Dolayısıyla yenileme süreçleri Poisson süreçlerine göre daha genel süreçlerdir ve uygulama alanları oldukça geniştir.

Bu çalışmanın amacı, (s,S) tipli bir envanter modelin kesikli müdehaleli bir ödüllü yenileme süreci ile tanımlayıp belirli karakteristikleri için asimptotik açılımlar ve yaklaşık çözümler elde etmektir. Bu çalışmayı literatürdeki benzer çalışmalardan ayıran en önemli özellik, talep miktarını ifade eden rasgele değişkenlerin ağır kuyruklu farklı dağılım yapılarına sahip olduğu varsayımıdır. Bu farklar ayrıntılı olarak aşağıdaki gibi açıklanabilir.

(s,S) tipli envanter modeller daha önce ağır kuyruklu dağılımların alt üstel ve sonsuz varyanslı düzenli değişen kuyruklu dağılıma sahip talep miktarları ile çalışılmış, sürecin dağılım fonksiyonu ve dağılımının n. mertebeden momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır [40]. Bu çalışmada ise [40], [41] ,[44], [45], [46] gibi bu konuda daha önce yapılmış çalışmalardan farklı olarak ağır kuyruklu dağılımların önce $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfı olarak bilinen özel bir alt sınıfı ile çalışılmış, sürecin dağılım fonksiyonu için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır. Daha sonra talep miktarları için sonlu varyanslı düzenli değişen dağılımlar sınıfından bir dağılım alınarak sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için yaklaşık çözümlere ulaşılmıştır.

Ağır kuyruklu dağılımlar gerçekleşme olasılığı ve gerçekleşme sıklığı düşük fakat gerçekleştiğinde etkisi yüksek olan (tsunami gibi) sıradışı olayların modellenmesinde kullanılan özel dağılımlardır. Depremler, fırtına, sel gibi doğal afetler ile ekonomik ve finansal krizler, bankacılık krizleri, firmaların beklenmedik şekilde iflası gibi olaylar sıra dışı olaylara örnek olarak verilebilir. Bu olayların sebep olabileceği riskleri yönetmek ve bu risklerden kaynaklı kayıp etkisini azaltmak için bazı tedbirlerin alınması gerekir. Örneğin bir bankanın alım satım portföyü nedeniyle maruz bulunduğu piyasa riskine karşılık sermaye ayrılması aşamasında, her 100 günden 99 unda (veya 95 inde) ortaya çıkabilecek kaybın miktarı değil geriye kalan 1 (veya 5) günde ortaya çıkabilecek kaybın miktarı esas alınarak sermaye ayrılır. Bunun diğer anlamı, sermayenin normal piyasa koşullarını yansıtan 99 gün değil, geriye kalan 1 günde ne olabileceği dikkate alınarak ayrıldığıdır [49]. İşte bu ve benzeri sıra dışı olayların meydana geldiği bankacılık, finansal risk yönetimi ve envanter sistemler gibi alanlarda karşılaşılan problemlerin modellenmesinde ağır kuyruklu (kalın kuyruklu) dağılımların kullanılması gerçekçi sonuçlar elde edilmesini sağlar. Bir olayın gerçekleşme olasılığının düşük olması halinde bu olaya ait olasılıklar, dağılım fonksiyonunun kuyruk bölgesinde yer alır. Eğer bu verilerle modellenen olaylar normal dağılımın kuyruk bölgelerinde gerçekleşen olaylara göre daha fazla gerçekleşme ihtimaline sahipse ve etkisi de çok yüksekse bu tür verilerin ağır kuyruklu dağılımlar ile modellenmesi gerekir. Olasılık teorisinde ağır kuyruklu dağılımlar kuyruk yapıları üstel olarak sınırlandırılmış ve kuyruk kısmı üstel dağılıma göre daha yavaş sıfıra giden dağılımları nitelemek için kullanılır. Hafif ve ağır kuyruk yapısına sahip dağılımlar arasındaki temel fark, hafif kuyruk yapısına sahip dağılımların pozitif değerli moment çıkaran fonksiyonu sonlu değer alırken, ağır kuyruklu dağılımların moment çıkaran fonksiyonunun sonsuz değer almasıdır. Ağır kuyruklu dağılımların tüm pozitif üstel momentleri sonlu olmayabilir. Ayrıca olasılık yoğunluk fonksiyonunun kuyruk kısmının sıfıra yaklaşma hızı ne kadar yavaşsa, uç değerlere verilen olasılık değerleri daha fazla olacağından dağılım ağır (veya kalın) kuyruklu olarak nitelendirilmektedir [10]. Ağır kuyruklu dağılımlar şu şekilde de tanımlanabilir; bir dağılımın kuyruk fonksiyonu dağılımın kuyruğuna doğru gidildikçe üstel fonksiyon olarak azalıyor ise bu dağılım ağır kuyruklu dağılımdır [10].

Ağır kuyruklu dağılımlar pek çok farklı olayda gerçekçi bir model olarak kabul edilir. Örneğin; nehirlerin taşkın seviyelerini ölçmede, büyük sigorta taleplerinde, aşırı ozon yoğunluğu seviyelerini ölçmede, kasırgalarda, bir kasırga esnasında meydana gelen dalga seviyelerini ölçmede, normale göre çok düşük ve çok yüksek sıcaklıkları ölçmede ağır kuyruklu dağılımların kullanılması daha gerçekçi sonuçlar alınmasını sağlamaktadır. Ağır kuyruklu dağılımların bu tür olayların modellemesinde kullanımı ile ilgili literatürde önemli çalışmalar mevcuttur ([1], [10], [22], [27], [54]).

Ağır kuyruklu dağılımlar stokastik sistemlerin analizinde de büyük rol oynar. Örneğin bilgisayar veri girişi veya iletişim ağı gibi modeller ile uyumludurlar. Ayrıca çoğu risk sürecini tanımlamak için de gereklidirler. Ağır kuyruklu dağılımların önemli örnekleri Pareto dağılımı, lognormal dağılım ve şekil parametresi (λ), $0 < \lambda < 1$ olan Weibull dağılımıdır. Ağır kuyruklu dağılımlar ve uygulamaları ile ilgili literatürde önemli teorik çalışmalar mevcuttur: (Asmussen [8] Bingham, Goldie ve Teugels [13], Embrechts [27]).

Aykırı değerler üretme eğiliminde olan ağır kuyruklu dağılımların araştırılması literatürde önemli bir araştırma alanıdır. Bu çalışmada da özel olarak literatürde en çok kullanılan stok kontrol modellerinden biri olan (s,S) tipli stok kontrol modellerinin ağır kuyruklu talep miktarları ile incelenmesi amaçlanmaktadır. Böylece ağır kuyruklu dağılımların (s,S) tipli envanter modeller üzerindeki etkilerinin araştırılması amaçlanmıştır. (s,S) tipli envanter modelin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımının momentleri için kullanılan kesin formüller Tahir KHANİYEV tarafından geliştirilmiş ve kendisi ile ortak çalışma yapan pek çok akademisyen ve Tülay KESEMEN' in makalelerinde kullanılmış özgün ve güçlü bir yöntemdir [2-4], [11-12], [40-46]. Bu yöntemin, talep miktarlarını ifade eden rasgele değişkenlerin farklı sınıflardan ağır kuyruklu dağılımlara sahip olduğu durumları sistemin içine katarak genişletilmesi amaçlanmaktadır. Çalışmanın literatürdeki çalışmalardan en büyük farkı ağır kuyruklu dağılımların her bir alt sınıfı için bu rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımını ifade eden farklı bir formül kullanılacak olmasıdır. Çalışmada elde edilen sonuçlarla ödüllü yenileme süreçlerinin ve özel olarak envanter modellerin ağır kuyruklu dağılımlar kullanılarak etkilerinin araştırılması konusunda daha sonra yapılacak olan çalışmalara öncülük etmesi hedeflenmektedir.

Bu amaçla öncelikle ağır kuyruklu dağılıma sahip rasgele değişkenler hakkında genel bilgiler verilecektir. Her bir alt sınıfa ait rasgele değişken tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımı ve yaklaşık sonuçları ile ilgili literatür araştırmasına yer verilecektir. Ağır kuyruklu dağılımların $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ ve düzenli değişen kuyruklu dağılım sınıfları ayrıntılı bir şekilde ele alınarak talep miktarları bu alt sınıflardan rasgele değişkenlere sahipken (s,S) tipli envanter modeli ifade eden sürecin ergodikliği araştırılacaktır. Daha sonra ergodik dağılım fonksiyonu için literatürde elde edilmiş olan kesin formüller kullanılarak modeli ifade eden sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için asimptotik açılımlara ve yaklaşık sonuçlara ulaşılacaktır.

1.2. Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda çalışma içerisinde kullanılacak olan temel kavramsal bilgilere yer verilecektir. Bu kavramlar daha sonra çalışmada ele alınacak olan sistemin ergodik dağılım fonksiyonu için asimptotik ve yaklaşık sonuçların elde edilmesi amacı ile kullanılacaktır

Tanım 1.2.1 [11] $f(x)$ ve $g(x)$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesi üzerinde tanımlı iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ olsun eğer ;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

ise $f(x) = O\big(g(x)\big)$ olarak yazılır.

Örneğin, $1 - cosx = O(x^2)$ olur. Çünkü $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$ ' dır.

Tanım 1.2.2 [11] $f(x)$ ve $g(x)$ reel reel sayılar kümesinin bir alt kümesi üzerinde tanımlı iki fonksiyon olsun ve $g(x) \neq 0$ olsun. Eğer

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

ise $f(x) = o\big(g(x)\big)$, şeklinde yazılır.

Örneğin $1 - cosx = o(x)$ olur. Çünkü $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-cosx}{x} = 0$' dır.

Tanım 1.2.3 [11] $g(x) \neq 0$ olmak üzere reel sayılarda tanımlı $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için eğer,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \to 1$$

oluyor ise $f(x) \sim g(x)$ biçiminde yazılır ve buna $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları "asimptotik olarak denk" tirler denir.

Özellik 1.2.1 [16] (O Fonksiyonu ile İlgili Temel Özellikler)

i. c pozitif sabit bir sayı olmak üzere, $f(x) = O\big(c\, g(x)\big)$ ise $f(x) = O(g(x))$'dir. Özel olarak "O" teriminin içinde sabit sayı olması durumunda $f(x) = O(1)$'dir.

ii. O terimi geçişme özelliğine sahiptir yani $f(x) = O(g(x))$ ve $g(x) = O(h(x))$ olduğunda $f(x) = O(h(x))$'dir.

iii. $f_1(x) = O(g(x))\ ve\ f_2(x) = O(g(x))$ olduğundan $f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$ dir

iv. $f_i(x) = O(g_i(x)),\ i = 1{,}2$ olduğundan $f_1(x)f_2(x) = O(g_1(x)g_2(x))$ dir.

v. $f(x) = O(g(x)h(x))$ olduğundan $f(x) = g(x)O(h(x))$ dir.

vi. $f(x)$ ve $g(x)$ sonlu aralıklarda integrallenebilir iki fonksiyon ve $f(x) = O(g(x))$ olduğundan

$$\int_{x_0}^{x} f(y)\,dy = O\left(\int_{x_0}^{x} |g(y)|dy\right), \qquad (x \geq x_0)$$

dir.

Özellik 1.2.2 [16] (o Fonksiyonu ile İlgili Temel Özellikler)

i. $f_1(x) = o(g(x))\ ve\ f_2(x) = o(g(x))$ olduğundan $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$ dir

ii. $f_i(x) = o(g_i(x)),\ i = 1{,}2$ olduğundan $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$ dir.

iii. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ise $f(x) = o(1)$ dir. Ayrıca c sabit olmak üzere, $cf(x) = o(1)$dir.

iv. $f(x) = o(1)$ ise aynı zamanda $f(x) = O(1)$ dir.

Önerme 1.2.1 [16] (o Fonksiyonunun İntegrallenebilmesi) $f = o(g)$ olsun ve g $x_0{}'$ ın bir komşuluğunda tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\int_{x_0}^{x} f = o\left(\int_{x_0}^{x} f\right);\ \ x \to x_0$$

dır.

İspat: Notasyon kolaylığı açısından $g > 0$ olsun. Ayrıca $x - x_0 > 0$ ve $x - x_0 \in N$ olsun $\forall \epsilon > 0$ için $|f(x)| < \epsilon\, g(x)$ olacak biçimde bir x_ϵ bulunur. $''x''$, x_0 ve x_ϵ aralığında olduğundan aşağıdaki sonuç kolaylıkla elde edilir.

$$\left|\int_{x_0}^{x} f\right| \leq \int_{x_0}^{x} |f| \leq \epsilon \int_{x_0}^{x} g$$

Not 1.2.1 [16] Türevlenebilme; “o” teriminin integrallenebilmesi ile ilgili durum türevlenebilme için her zaman geçerli değildir. Örneğin, $f(x) = x^2\sin(1/x)$ ise $f(x) = o(x)$ dır. Fakat $x \to 0$ olduğunda $f'(x) \neq o(1)$ dır.

Tanım 1.2.4 [11] $\{\xi_n\}$, $n \geq 1$ Ω örnek uzayında tanımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi ve ξ aynı Ω örnek uzayında tanımlı bir rasgele değişken olsun.

i. $\forall$ ε > 0 için $\lim_{n\to\infty} P\{\omega|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0$ sağlanıyor ise $\{\xi_n\}_{n\in N}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisi ξ rasgele değişkenine olasılık anlamında yakınsaktır denir. $\xi_n(\omega) \xrightarrow{P} \xi(\omega)$ şeklinde gösterilir.

ii. $F(x)$'in sürekli olduğu noktalar için $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ ise $\{\xi_n\}_{n\in N}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisi ξ rasgele değişkenine "zayıf yakınsaktır" denir. $\xi_n(\omega) \xrightarrow{d} \xi(\omega)$ şeklinde gösterilir. Literatürde dağılıma göre yakınsaklık olarak da bilinmektedir.

iii. $\{\xi_n(\omega)\}$ dizisi, $\xi(\omega)$ noktasına hemen hemen her yerde yakınsaktır ancak ve ancak$\{w \in \Omega: \{X_n(\omega)\} \nrightarrow X(\omega)\} \subseteq E$ olacak şekilde ölçüsü sıfır olan bir E kümesi mevcuttur.

1.3. Ağır Kuyruklu ve Hafif Kuyruklu Dağılımlar

1.3.1. Ağır Kuyruklu Dağılımlar

Bu kısımda ağır kuyruklu ve hafif kuyruklu dağılımların tanımları ve aralarındaki farklar matematiksel olarak ifade edilecektir. Ayrıca ağır kuyruklu dağılımların alt sınıfları ve bu dağılımlar ile ilgili temel teorik bilgiler verilecektir.

Tanım 1.3.1.1 [55] X bir rasgele değişken olmak üzere; X rastlantı değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(x) = P(X \leq x)$, kuyruk dağılımı $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$ şeklinde gösterilmektedir. Kuyruk dağılımı, kalan ömür dağılımı olarak da adlandırılır.

Tanım 1.3.1.2 [31] F, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir dağılım fonksiyonu olsun. Eğer

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} F(dx) = \infty, \qquad \forall \lambda > 0 \tag{1}$$

şartı sağlanıyor ise, F dağılım fonksiyonuna ağır kuyruklu dağılım fonksiyonu ve F dağılımı tarafından ifade edilen X rasgele değişkenine de ağır kuyruklu rasgele değişkendir denir.

Tanım 1.3.1.2 den görüleceği gibi eğer F ağır kuyruklu bir dağılım ise X rasgele değişkeni herhangi bir pozitif üstel momente sahip değildir. Bir başka deyişle F ağır kuyruklu ise F 'in kuyruk fonksiyonu $\bar{F}$, üstel olarak azalan her hangi bir fonksiyonla sınırlandırılamaz.

Ağır kuyruklu dağılımlar ile ilgili literatürde farklı tanımlamalar mevcuttur:

Tanım 1.3.1.3 [31] $f \geq 0$ ağır kuyruklu olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\lim_{x\to\infty} sup\, f(x)e^{\lambda x} = \infty, \qquad \forall\lambda > 0 \tag{2}$$

şartı sağlanır.

Hafif (ince) ve kalın kuyruk yapısına sahip dağılımlar arasındaki temel fark, hafif (ince) kuyruk yapısına sahip dağılımların pozitif değerli moment çıkaran fonksiyonu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\mathcal{F}(dx)$$

sonlu değer alırken, kalın kuyruklu dağılımların moment çıkaran fonksiyonu sonsuz değer almasıdır. Ayrıca $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ üzerinde hafif kuyruklu F dağılımının genelde tüm momentleri sonludur. yani

$$\int_0^\infty x^k\mathcal{F}(dx) < \infty, \ \ \forall\, k > 0$$

dir. Eğer $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ üzerinde bir $\mathcal{F}$ dağılımının tüm pozitif momentleri sonlu değilse, yani belirli bazı $k > 0$ değerleri için

$$\int_0^\infty x^k F\,(dx) = \infty$$

oluyor ise F genellikle ağır kuyruklu dağılım yapısındadır.

Tablo 1. ve Tablo 2.' de hafif kuyruklu dağılımlar ile ağır kuyruklu dağılımların uygulamada en sık karşılaşılan örnekleri verilmiştir [58].

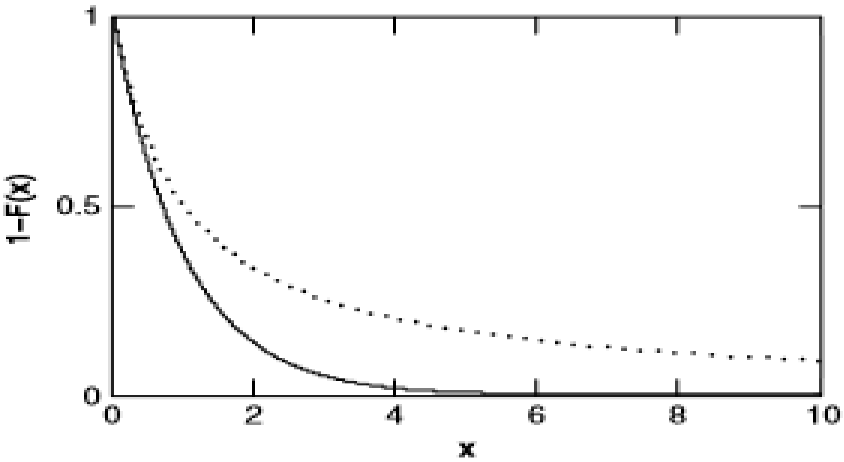
Tablo 1. Hafif Kuyruklu Dağılımlar

Dağılım	$\bar{F}(\mathrm{x}) = 1 - F(x)$ ya da $\mathrm{f}(x)$	Parametresi
Üstel dağılım	$\bar{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{-\alpha x}$	$\alpha > 0$
Gama Dağılımı	$f(x) = \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{\beta x}$	$\alpha, \beta > 0$
Weibull Dağılımı	$\bar{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{-cx^{\tau}}$	$c > 0,$ $\tau \geq 1$

Tablo 2. Ağır Kuyruklu Dağılımlar

Dağılım	$\bar{F}(\mathrm{x}) = 1 - F(x)$ ya da $f(x)$	Parametresi
Lognormal Dağılım	$\mathrm{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-(lnx-\mu)^2/2\sigma^2}$	$\mu \in R, \quad \sigma > 0$
Pareto Dağılımı	$\bar{F}(\mathrm{x}) = \left(\dfrac{\kappa}{\kappa + x}\right)^{\alpha}$	$\kappa, \alpha > 0$
Burr Dağılımı	$\bar{F}(\mathrm{x}) = \left(\dfrac{\kappa}{\kappa + x^{\tau}}\right)^{\alpha}$	$\kappa, \alpha, \tau > 0$
Weibull Dağılımı	$\bar{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{-cx^{\tau}}$	$c > 0,$ $0 < \tau < 1$

Şekil 1. de de ağır kuyruklu bir dağılım olan Pareto ile üstel dağılımının kuyruk kısmının sıfıra gidiş hızı karşılaştırılmaktadır. Pareto dağılımının kuyruk kısmı, üstel dağılıma göre sıfıra daha yavaş yaklaşmaktadır [55]



Şekil 1. Pareto dağılımı ile üstel dağılımın kuyruk kısmı

Ağır kuyruklu dağılımlar normal ve üstel dağılımlardan farklıdır. Örneğin üstel dağılım fonksiyonu, $F(x) = 1 - e^{-\alpha x},\ x \geq 0$,

$$\frac{\bar{F}(\mathrm{x}+\mathrm{y})}{\bar{F}(\mathrm{x})} = \exp(-ay), \qquad x \geq 0, y \geq 0$$

eşitliğini sağlar. Bu yüzden üstel dağılım ağır kuyruklu dağılım değildir [55].

Başka bir örnek verilirse, $\lambda > 0$; şekil parametresi ile Weibull dağılımının kuyruk dağılımı,

$$\bar{F}(\mathrm{x}) = \exp\left(-x^{\lambda}\right), \qquad x \geq 0 \tag{3}$$

şeklindedir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$f(x) = \lambda x^{\lambda-1}\exp\left(-x^{\lambda}\right) \ , x \geq 0$$

biçiminde tanımlıdır.

$\lambda < 1$ olduğu durumda bu dağılım ağır kuyruklu dağılımdır. $\lambda = 1$ olduğunda ise bu dağılım üstel dağılımdır [31].

1.3.2. Ağır Kuyruklu Dağılımların Bazı Özel Altsınıfları

Uygulamada genel olarak ağır kuyruklu dağılımlar tanımlaması yeterli olmadığı için bu dağılımlar ile ifade edilen farklı verileri modellemek amacıyla ağır kuyruklu dağılımların sahip oldukları ortak özelliklere bağlı olarak çeşitli alt sınıflar oluşturulmuştur. Bu sınıfların uygulamada en sık karşılaşılanları, alt-üstel dağılımlar (sub-exponential), uzun kuyruklu dağılımlar (long tailed), baskın değişen kuyruklu dağılımlar (dominated-varying tailed) ve düzenli değişen kuyruklu dağılımlar (regularly-varying tailed) olarak bilinmektedir.

1.3.2.1. Alt-Üstel Dağılımlar

Alt-üstel dağılımlar ilk kez 1964 yılında Chistyakov [19] tarafından, dallanma süreci üzerine yapılan uygulamalarda kullanılmıştır. Bu dağılım sınıfına alt-üstel denilmesinin sebebi; bu sınıf içerisindeki dağılımların herhangi bir üstel dağılımdan daha yavaş azalan bir kuyruk yapısına sahip olmasıdır. S simgesi ile gösterilen alt-üstel dağılımlara örnek olarak; Lognormal, Pareto ve şekil parametresi bir değerinden küçük olan Weibull dağılımı verilebilir.

Tanım 1.3.2.1.1 [38] Herhangi bir F dağılım fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise;

1. $\alpha > 0,\ \bar{F}(\mathrm{x}) > 0$
2. Herhangi bir dağılımda $n \geq 2$ değeri için,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}^{*n}(\mathrm{x})}{\bar{F}(\mathrm{x})} = n$$

F dağılım fonksiyonuna alt üstel dağılıma sahiptir denir.

Burada $\overline{\mathrm{F}^{*\mathrm{n}}}(\mathrm{x})$; F dağılım fonksiyonunun n katlı konvülasyon çarpımının kuyruk dağılımını göstermektedir ve

$$\bar{F}^{*n}(\mathrm{x}) = 1 - F^{*n}(x) = P(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n > \mathrm{x})$$

biçiminde elde edilmektedir.

Tanım 1.3.2.1.2 [38] $X_1,\ X_2,\ldots$ bağımsız ve alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alan aynı F dağılımına sahip rastlantı değişkenleri olmak üzere, tüm n = 2,3,... değerleri için;

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

olmak üzere;

$$\mathrm{P}\ (S_n > \mathrm{x}) = \bar{F}^{*n}(\mathrm{x}) \sim n\bar{F}(\mathrm{x})$$

eşitliği sağlanmaktadır.

Teorem 1.3.2.1.1 [38] F dağılımı alt-üstel dağılıma sahip olsun. Bu durumda

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n > \mathrm{x})}{P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) > \mathrm{x})} \sim \frac{\bar{F}^{*n}(\mathrm{x})}{\mathrm{n}\bar{F}(\mathrm{x})} \to 1 \tag{4}$$

ilişkisi sağlanır.

İspat:

$$P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) > \mathrm{x}) = 1 - F^n(x)$$

$$= \{\ [1 - \bar{F}(x)][1 + \bar{F}(x) + [\bar{F}(x)]^2 + \cdots + [\bar{F}(x)]^{n-1}]\}$$

$$= \bar{F}(\mathrm{x}) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x)\ \sim n\bar{F}(\mathrm{x}),\ \ x \to 1$$

Burada asimptotik denklik tanımından;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n > \mathrm{x})}{P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) > \mathrm{x})} \sim \frac{\bar{F}^{*n}(\mathrm{x})}{\mathrm{n}\bar{F}(\mathrm{x})} \to 1 \Leftrightarrow F \in \mathcal{S}$$

dır.

Teorem 1.3.2.1.1 ‘den yola çıkılarak alt-üstel dağılımlar için şu yorum yapılabilir. Rasgele değişkenlerin toplamının beklenenden çok büyük olması toplam içerisindeki tek bir değerin büyük olmasından kaynaklanır. Bu özellik literatürde katastrofi ya da tek büyük sıçrama özelliği olarak bilinmektedir.

Not 1.3.2.1.1 [38] Alt üstel dağılımlar aşağıdaki özellikleri sağlar

1) $F \in \mathcal{S} \Longrightarrow F^{*n}(x) \in \mathcal{S},\quad n \in N$
2) $F \in \mathcal{S} \Longrightarrow F^n(x) \in \mathcal{S},\qquad n \in N$

Not 1.3.2.1.2 [38] $F \in \mathcal{S}$ ise aşağıdaki ilişkiler doğrudur:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(\mathrm{x} - \mathrm{y})}{\bar{F}(\mathrm{x})} \to 1,\quad \forall y \in R \tag{5}$$

$$\int_0^\infty e^{\epsilon x} dF(x) = \infty,\quad \forall \epsilon > 0 \tag{6}$$

$$\frac{\bar{F}(\mathrm{x})}{e^{-\epsilon x}} \to \infty, \ \ \forall \epsilon > 0 \tag{7}$$

F'in kuyruğu herhangi bir üstel dağılımdan daha yavaş azalır. (6) ifadesi alt-üstel dağılımın üstel momente sahip olmadığını gösterir. Bir dağılımın alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer aldığının ispatlanması çok kolay olmamaktadır. Bu nedenle risk teorisindeki uygulamalar için dağılımın kendisinden çok, bu dağılımın integrallenmiş kuyruk dağılımının alt-üstel olması ile ilgilenilmektedir. Sonlu beklenen değere sahip, negatif olmayan rastlantı değişkeninin dağılım fonksiyonu F ile gösterilmek üzere, integrallenmiş kuyruk dağılımı F_I,

$$F_I(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{\alpha}\int_0^x \bar{F}(\mathrm{y})dy, & x > 0 \end{cases} \tag{8}$$

olarak elde edilmektedir [15].

Pareto Dağılımı [38] Pareto dağılımı ölçek parametresi $b > 0$ ve şekil parametresi $\alpha > 0$ olarak isimlendirilen iki parametre yardımı ile tanımlanır. Pareto dağılımının kuyruk kısmının dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} 1 \ , & 0 \leq x < b \\ \left(\frac{b}{x}\right)^{\alpha}, & x \geq b \end{cases} \tag{9}$$

Weibull Dağılımı [38] $\lambda > 0$ şekil parametresi olmak üzere; ağır kuyruklu Weibull dağılımının dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\alpha x^{\lambda}\right), \ \ x \geq 0, \ \ 0 < \lambda < 1, \ \ \alpha > 0; \tag{10}$$

Weibull dağılımının tüm momentleri sonludur.

Lognormal Dağılım [Goldie 1978] Konum parametresi $\mu \in \mathbb{R}$ ve şekil parametresi $\sigma > 0$ olmak üzere; Lognormal dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-(lnx-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad x \geq 0, \ \ \mu \, \epsilon \, R, \ \ \sigma > 0 \tag{11}$$

Lognormal dağılıma sahip bir X rasgele değişkeni, μ ortalaması ve σ^2 varyansı ile normal dağılıma sahiptir. Lognormal dağılımın tüm momentleri sonludur.

Loggamma Dağılımı [38] Alt-üstel dağılıma örnek dağılımlardan biri de Loggamma dağılımıdır. Loggamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)}(\ln x)^{\beta-1}x^{-\alpha-1} \quad x \geq 0, \quad \alpha, \beta > 0 \tag{12}$$

Alt üstel dağılımlar, dallanma süreci (Chistyakov [19]; Athreya [7]; Chover, Ney [20]), yenileme teorisi (Teugels [69]; Embrechts ve Omey [26]), sonsuz varyanslı zaman serileri (Davis ve Resnick [23]), geniş sapmalar teorisi (Pinelis [62]) üzerine yapılan uygulamalarda kullanılmıştır.

1.3.2.2. Uzun Kuyruklu Dağılımlar

Ağır kuyruklu dağılımların önemli alt sınıflarından biri de uzun kuyruklu dağılımlar olarak bilinen sınıftır. İnternet çağında pek çok uygulamada uzun kuyruklu dağılımlar kullanılmaktadır. Örneğin Amazon.com sitesindeki kitapların başlıklarına göre kategorize edildiğini düşünülsün. Her bir başlık altındaki kitabın satış oranları uzun kuyruklu dağılım yapısına sahiptir. Diğer bir örnek de internette aranan terimlerin sıklığıdır. Örneğin insanlar gün içinde milyonlarca terime arama motorlarında aratmaktadırlar. Google'da yapılan bir araştırmaya göre en çok aranan ilk 1000 terim toplam aranan terimlerin sadece %10 ununu oluşturmaktadır. Fakat arama motorunda yalnızca birkaç defa ya da yalnızca bir defa aranan milyonlarca terim bulunmaktadır. Bu durum Google arama motorunda aranan terimlerin uzun kuyruklu dağılım yapısı gösterdiğini kanıtlar. Bu ve bunun gibi pek çok gerçek hayat problemi uzun kuyruklu dağılımlar kullanılarak modellenmektedir.

Tanım 1.3.2.2.1 [15], [31] Uzun kuyruklu dağılım F, $(0, \infty)$ aralığında tanımlı ve $x \to \infty$ değerleri için $F(x) < 1$ olan bir dağılım fonksiyonu olmak üzere; $y \geq 0$ değerleri için F dağılımı,

$$\lim_{x\to\infty} P(X > x + y \,|X > y) = \lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x + y)}{\bar{F}(x)} = 1 \tag{13}$$

eşitliğini sağlıyor ise F dağılımına uzun kuyruklu dağılımdır denir. Bu durum tüm $y \geq 0$ değerleri için $\bar{F}(x + y) \sim \bar{F}(x)$ olması demektir.

Not1.3.2.2.1 [15] Ağır kuyruklu dağılımların daha geniş alt sınıflarından olan uzun kuyruklu dağılımlar ($\mathcal{L}$ sınıfı) için de $e^{\varepsilon x}\bar{F}(x) \to \infty$, $x \to \infty$ özelliğinin sağlandığı bilinmektedir.

Not 1.3.2.2.2 [52] $\mathcal{S}$ (alt-üstel dağılım), $\mathcal{L}$ (uzun kuyrukluklu dağılım) nin altkümesidir. Bu nedenle $\mathcal{S}$'e ait olan örnekler $\mathcal{L}$ sınıfına da aittir. Fakat $\mathcal{L}\backslash\mathcal{S}$ sınıfına ait bilindik örnekler bulunamamaktadır. Bu sınıfa ait örnekler çoğu zaman iki farklı dağılımın bileşkesi şeklinde ifade edilmektedirler.

1.3.2.3. Baskın Değişen Kuyruklu Dağılımlar

Tanım 1.3.2.3.1 [72],[73] (Baskın değişen kuyruklu dağılım) F dağılımı $0 < y < 1$ aralığındaki y değeri için,

$$\text{limsup}_{x\to\infty} \frac{\bar{F}\,(xy)}{\bar{F}\,(x)} < \infty \tag{14}$$

özelliğine sahipse bu dağılım baskın değişen kuyruklu dağılım olarak tanımlanmaktadır.

Baskın değişen kuyruklu dağılım sınıfı $\mathcal{D}$ ile gösterilir ve $F[0,\infty)$ olmak üzere $\bar{F}\,(xy) = O(1)\bar{F}\,(x)$ şeklinde yazılabilir [30]. Ayrıca $F \in \mathcal{D}$ ise

$$\text{liminf}_{x\to\infty} \frac{\bar{F}\,(ux)}{\bar{F}\,(x)} > 0, \qquad u > 1$$

dır. Başka bir ifadeyle baskın değişen kuyruklu dağılım aşağıdaki şekilde de verilir;

Tanım 1.3.2.3.2 [31] $c > 0$ olsun. Ayrıca $\forall x$ için

$$\bar{F}\,(2x) \geq c\bar{F}(x) \tag{15}$$

sağlansın. Bu durumda F dağılımı baskın değişen kuyruklu dağılım olarak tanımlanmaktadır.

Baskın değişen kuyruklu dağılım sınıfı ile ilgili uygulamalar daha çok Wang ve Tang [72] tarafından yapılmıştır. Baskın değişen dağılımı diğer sınıflarla beraber düşünülürse;

1. $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{L}$;
2. $\mathcal{L} \cap \mathcal{D} \subsetneq \mathcal{S}$;
3. $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{S}$ ve $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{D}$

olduğunu görülmüş olur [26].

Teorem 1.3.2.3.1 [37] Aşağıdaki üç şart $F \in \mathcal{S}$ olması için gerekli koşullardır. Her bir $y \in (0,\infty)$ için;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}\,(x-y)}{\bar{F}\,(x)} = 1 \tag{16}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}^{(2)}(x)}{\bar{F}\,(x)} = \beta < \infty \tag{17}$$

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{F}^{(2)}(x)}{\bar{F}\,(x)} < \infty \tag{18}$$

Tanım 1.3.2.3.1, Teorem 1.3.2.3.1' den yola çıkılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir. [38]

(i) $F \in \mathcal{D}$ *ve (1)* sağlanırsa $F \in \mathcal{S}$ dır.

(ii) $F \in \mathcal{D}$ *ve (2)* sağlanırsa $F \in \mathcal{S}$ dir.

Baskın değişen kuyruklu dağılımlara ait örnek olarak aşağıdaki dağılım verilebilir:

Örnek 1.3.2.3.1 [32] (Peter ve Paul Dağılımı) Dağılım fonksiyonu

$$F(\mathrm{x}) = \sum_{k:2^k \leq x} 2^{-k} \;, x \geq 0$$

biçiminde verilmiş olan dağılım literatürde **Peter ve Paul Dağılımı** olarak bilinmektedir. F dağılımı Peter Paul dağılımı olsun. Bu taktirde her k$\in N$ ve $x \geq 0$ için

$$\frac{\bar{F}(2^k - 1)}{\bar{F}(2^k)} = 2 \tag{19}$$

dir. (19) eşitliğinden yola çıkılarak F dağılımı Peter Paul dağılımı için $F \notin \mathcal{L}$ ve $F \notin \mathcal{S}$ olduğu ispatlanmıştır. Fakat kolayca ispatlanır ki $F \in \mathcal{D}$. O halde 'Peter and Paul' Dağılımı $\mathcal{D} \setminus \mathcal{S}$ veya $\mathcal{D} \setminus \mathcal{L}$ sınıfına aittir[70].

$\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ (Konvülüsyon-Kapalı) (convolution-closed) sınıfına ait dağılımlar

1. Pareto dağılımı [26], [31] Biçim parametresi $b > 0$ ve şekil parametresi $\alpha > 0$ olan Pareto dağılımının kuyruk dağılım fonksiyonu genel durumda aşağıdaki gibidir.

$$\bar{F}(\mathrm{x}) = \left(\frac{b}{x}\right)^{\alpha} \tag{20}$$

Pareto dağılımı kuvvet kanunlu dağılım (power law distribution) olarak da isimlendirilir. Pareto dağılımının $\gamma < \alpha$ dereceden tüm momentleri sonludur ve $\gamma \geq \alpha$ dereceden tüm momentleri sonsuzdur. Yani, X rasgele değişkeni Pareto dağılımına sahipse:

$$E(X^{\gamma}) = \begin{cases} \infty \;, & \gamma \geq \alpha \\ \dfrac{b^{\alpha}\alpha}{\alpha - \gamma}, & \gamma < \alpha \end{cases} \tag{21}$$

moment derecesi ile, α kuyruk indeksi arasındaki bu ilişki düzenli değişen dağılıma sahip bütün rasgele değişkenlerin ortak özelliğidir.

2. Burr dağılımı [26], [31] Burr dağılımının kuyruk davranışı Pareto dağılım kuyruk davranışına benzer özellik gösterir. Burr dağılımı $\alpha, \kappa, \tau > 0$ parametreleri ile ifade edilir ve dağılımın kuyruk kısmı aşağıdaki gibidir.

$$\bar{F}(\mathrm{x}) = \left(\frac{\kappa}{\kappa + x^{\tau}}\right)^{\alpha} \tag{22}$$

F, Burr dağılımı ise $x \to \infty$ iken $\bar{F}(x) \sim \kappa^{\alpha} x^{-\tau\alpha}$ dır. Burr dağılımının $\gamma < \alpha\tau$ dereceden tüm momentleri sonludur.

3. Cauchy dağılımı [26] Biçim parametresi $\kappa > 0$ ve konum parametresi a olan Cauchy dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \frac{\kappa}{\pi((x-a)^2 + \kappa^2)} \tag{23}$$

Cauchy dağılımının $\gamma < 1$ olan tüm momentleri sonludur. Birinci momenti yani beklenen değeri sonlu değildir.

4. Loggamma dağılımı[31] $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ (convolution-closed) sınıfına ait dağılımlardan biri olan loggamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \frac{e^{\beta x} e^{-e^{x}/a}}{\Gamma(\beta) a^{\beta}}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{24}$$

5. Frechet dağılımı [26], [32] Frechet tipli dağılımlar Cauchy, Loggamma, Pareto,Burr gibi ağır kuyruklu dağılımlardır. Frechet dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathrm{P}(X \leq x) = e^{-x^{\alpha}}, x > 0, \alpha > 0 \tag{25}$$

Teorem 1.3.2.3.2 [26] $F \in \mathcal{D}$ ise $F_I \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ ve ayrıca $F_I \in \mathcal{D}$ dir.

İspat: Tüm x ≥ 0 için

$$\bar{F}_I(x) = \int_x^{\infty} \bar{F}(y)dy \geqq \int_x^{2x} \bar{F}(y)dy \geqq x\bar{F}(2x)$$

dir. $F \in \mathcal{D}$ olduğundan,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{x\bar{F}(x)}{\bar{F}_I(x)} \leqq \limsup_{x\to\infty} \frac{x\bar{F}(x)}{\bar{F}(2x)} < \infty$$

Üstelik,

$$\bar{F}_I(x/2)/\bar{F}_I(x) = \left\{\int_{x/2}^{\infty} \bar{F}(y)dy\right\} \Big/ \left\{\int_{x}^{\infty} \bar{F}(y)dy\right\}$$

$$= 1 + \left\{\int_{x/2}^{\infty} \bar{F}(y)dy\right\} \Big/ \left\{\int_{x}^{\infty} \bar{F}(y)dy\right\}$$

$$\leqq 1 + \{\bar{F}(x/2)\ x/2\}/\bar{F}_I(x)$$

$$= 1 + 2^{-1}\{\bar{F}(x/2)/\bar{F}(x)\}\{\bar{F}(x)/\bar{F}(2x)\}\{x\bar{F}(2x)/\bar{F}_I(x)\}$$

dır. Bu yüzden

$$\lim_{x\to\infty} sup\ \bar{F}_I(x/2)/\bar{F}_I(x) < \infty$$

O halde $F_I \in \mathcal{D}$ dır.

y > 0 alınırsa,

$$1 = \left\{\int_x^{x+y} \bar{F}(s)ds + \int_{x+y}^{\infty} \bar{F}(s)ds\right\}/\bar{F}_I(x)$$

Olur. Buradan

$$1 \leqq \{\bar{F}(x)y\}/\bar{F}_I(x) + \bar{F}_I(x+y)/\bar{F}_I(x)$$

$$\leqq \{y\bar{F}(x)/x\bar{F}(2x)\} + \bar{F}_I(x+y)/\bar{F}_I(x)$$

Son toplamdaki ilk terim $F \in \mathcal{D}$ olduğu için $x \to \infty$ iken $\{y\bar{F}(x)/x\bar{F}(2x)\} = o(1)$ dir. Bu nedenle,

$$1 \leqq \lim_{x\to\infty} inf\ \bar{F}_I(x+y)/\bar{F}_I(x) \leqq \lim_{x\to\infty} sup\ \bar{F}_I(x+y)/\bar{F}_I(x) \leqq 1$$

elde edilir, yani $F_I \in \mathcal{L}$ dir (aynı durum y ≤ 0 için de geçerlidir).

$F \in \mathcal{D} \implies F_I \in \mathcal{S}$ özelliği bazı uygulamalarda çok kullanışlıdır. Bu özelliğin tersi her zaman doğru değildir. Örneğin F lognormal dağılım ise $F \in \mathcal{L}\backslash\mathcal{D}$'dır. (Embrechts 1979) ve bu yüzden $F_I \in \mathcal{L}\backslash\mathcal{D}$ (Embrechts ve Veraverbeke 1982). Ayrıca Peter and Paul dağılımı ele alındığında $F \in \mathcal{D}\backslash\mathcal{L}$ olduğu görülür. Teorem 1.3.2.3.2'ye göre;

$F \in \mathcal{S} \implies F_I \in \mathcal{S}$ ifadesi de yanlıştır [26].

Ayrıca kolayca görülebilir ki [32];

I. $F \in \mathcal{D} \implies F_I \in \mathcal{D}$

II. $F \in \mathcal{L} \implies F_I \in \mathcal{L}$, ancak tersi doğru değildir.

Not 1.3.2.3.1 [72] $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ ağır kuyruklu dağılımın kullanışlı bir sınıfıdır. Çünkü bu sınıf düzenli değişen dağılım sınıfını içerir.

1.3.2.4. Düzenli Değişen Kuyruklu Dağılımlar

Tanım 1.3.2.4.1 [58] Pozitif ölçülebilir bir f fonksiyonu $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall\, \mathrm{t} > 0$ için,

$$\lim_{\mathrm{x}\to\infty} \frac{f\,(\mathrm{tx})}{f(\mathrm{x})} = \mathrm{t}^{\alpha} \qquad (26)$$

eşitliğini sağlıyor ise f fonksiyonuna düzenli değişen fonksiyon denir. Düzenli değişen fonksiyonlar $RV(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.2.4.2 [29] (Yavaş DeğişenFonksiyonlar) $(0, \infty)$ aralığında pozitif ölçülebilir bir $l(\mathrm{x})$ fonksiyonu,

$$\lim_{\mathrm{x}\to\infty} \frac{l\,(\mathrm{tx})}{l(\mathrm{x})} = 1, \;\; \forall\, \mathrm{t} > 0 \qquad (27)$$

özelliğini sağlıyorsa $l(\mathrm{x})$ fonksiyonuna yavaş değişen fonksiyon denir.

Tanım 1.3.2.4.3 [52] (Düzenli değişen kuyruklu dağılım) F reel değerli bir dağılım fonksiyonu olsun. Eğer $\forall\, t > 0$ için

$$\lim_{\mathrm{x}\to\infty} \frac{\bar{F}(\mathrm{tx})}{\bar{F}(\mathrm{x})} = \mathrm{t}^{-\alpha} \qquad (28)$$

eşitliği sağlanacak şekilde $\alpha > 0$ mevcut ise F dağılımı düzenli değişen kuyruklu dağılımdır. Tanım 1.3.2.4.3'ten görüleceği gibi eğer F düzenli değişen kuyruklu dağılıma sahipse F in kuyruk kısmı $\bar{F}(\mathrm{x})$, -α indeksi ile düzenli değişen fonksiyondur, yani $\bar{F}(\mathrm{x}) \in RV(-\alpha)$ dır. Düzenli değişen dağılımlar notasyonel olarak $\mathcal{R}_{(-\alpha)}$ biçiminde gösterilir.

Not 1.3.2.4.1 [55] $l(\mathrm{x})$; yavaş değişen fonksiyon, $x > 0$ ve $\mathcal{R}_{(0)}$ olmak üzere $\alpha > 0$ değerleri için $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ olduğu takdirde $\bar{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{-\alpha} l(x)$ olacaktır.

Düzenli değişen kuyruklu dağlıma örnek olarak bünyesinde $l(x) = c\ln(x)$ veya $l(x) = c\ln(\ln(x))$ şeklindeki dönüşüm fonksiyonları ya da bir sabite yakınsayan $l(x)$ fonksiyonunun yer aldığı Pareto dağılımı örnek olarak verilebilir. Literatürde Düzenli değişen fonksiyonlar ile ilgili Bingham, Goldie ve Teugels [13]'in çalışmaları bulunmaktadır.

Hafif kuyruklu dağılımların tüm momentleri $E[(X^+)^k]$ vardır ve sonludur. Düzenli değişen dağılımlar ise tersine $\beta < \alpha$ için tüm momentleri EX^β sonludur.
Düzenli değişen dağılımla ilgili temel özellikler ([13], [29], [57], [63]) tarafından özetlenmiştir.

Düzenli değişen dağılımla ilgili örnek olarak, Pareto dağılımı, Burr dağılımı, Cauchy dağılımı, loggamma dağılımı, Frechet ve durağan dağılımlar verilebilir.

1.3.2.5. Ağır Kuyruklu Dağılımların Diğer Altsınıfları

Tanım 1.3.2.5.1 [32], [72] (Genişletilmiş Düzenli Değişen Dağılımlar) (ERV) Düzenli değişen dağılımın bir alt sınıfıdır. $F \in ERV\ (-\alpha, -\beta)\ ise, y\ > 1,\ 0 \leq \alpha \leq \beta < \infty$ için,

$$y^{-\beta} \leq \lim_{x\to\infty} inf \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}\ (x)} \leq \lim_{x\to\infty} sup \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}\ (x)} \leq y^{-\alpha} \tag{29}$$

ifadesi sağlanır. Eğer $\alpha = \beta$ ise F dağılım fonksiyonu düzenli değişen sınıfına ait olur.

Tanım 1.3.2.5.2 [32], [72] (Sabit Değişen Kuyruklu Dağılımlar) $\mathcal{D}$'nin bir alt sınıfıdır ve $\mathcal{C}$ sembolü ile gösterilir. $\mathcal{C}$ sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$F \in \mathcal{C} \Longrightarrow \lim_{l\nearrow 1} \lim_{x\to\infty} sup \frac{\bar{F}(lx)}{\bar{F}\ (x)} = 1 \quad \text{veya} \quad \lim_{l\searrow 1} \lim_{x\to\infty} inf \frac{\bar{F}(lx)}{\bar{F}\ (x)} = 1 \tag{30}$$

Tanım 1.3.2.5.3 [24] (Ortalama Düzenli Değişen Dağılımlar) (İntermediate Regularly Varying) F, $\mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir dağılım olsun. Eğer

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{x\to\infty} inf \frac{\bar{F}(x(1+\varepsilon))}{\bar{F}} = 1 \tag{31}$$

ifadesi sağlanıyor ise F dağılımı ortalama (intermediate) düzenli değişen dağılım olarak adlandırılır.

Herhangi bir düzenli değişen dağılım bir ortalama düzenli değişen dağılımdır ve herhangi bir ortalama düzenli değişen dağılım baskın değişen dağılımdır.
Eğer

$$\int_0^x \bar{F}(x-y)\bar{F}(y)dy \sim 2m\bar{F}(x), \qquad x \to \infty \tag{32}$$

ise F, $\mathbb{R}^+$üzerinde tanımlı kuvvetli alt-üstel dağılımdır yani $F \in \mathcal{S}^*$dır [24].

Kuvvetli alt-üstel dağılımlar arasında ortalama düzenli değişen dağılım, lognormal ve $\lambda < 1$ parametreli Weibull dağılımı vardır. Eğer herhangi bir baskın değişen dağılım uzun kuyruklu ise o dağılım $\mathcal{S}^*$ ın içindedir.

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

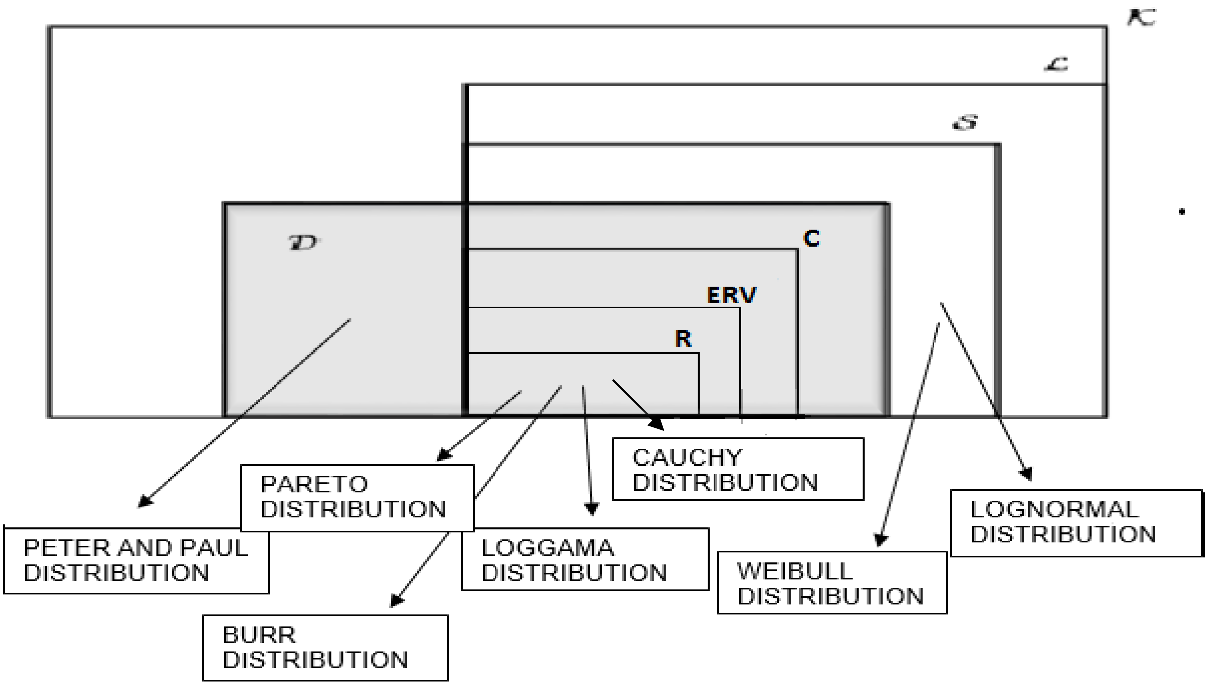
$$\bar{F}\big(x(1+\varepsilon)\big) = o\big(\bar{F}(x)\big), \qquad x \to \infty \tag{33}$$

ise F dağılımı hızlı değişen (rapidly varying) dağılım olarak adlandırılır [24]. Açıktır ki bu sınıf $\lambda > 0$ parametreli ve kuyruk kısmı $\bar{F}(x) = e^{-x^{\lambda}}$ biçiminde tanımlı Weibull dağılımını içerir. Lognormal dağılım da hızlı değişen dağılımlar sınıfındadır ancak bu sınıf ortalama düzenli değişen dağılım sınıfını içermez.

Ağır kuyruklu dağılımların alt sınıfları arasında aşağıdaki kapsama ilişkisi vardır [32]:

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{ERV} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{L} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L} \tag{34}$$

Bu ilişki Şekil 2'de görülmektedir [52]:



Şekil 2. Ağır kuyruklu dağılımlar ve onlara ait örneklerin sınıflandırılması

<u>Özetlenecek olursa</u>

$\mathcal{K}$; kalın kuyruklu dağılım

$\mathcal{L}$; uzun kuyruklu dağılım

$\mathcal{S}$; alt üstel dağılım

$\mathcal{R}$; düzenli değişen dağılım

$\mathcal{D}$; baskın değişen dağılımları göstermek üzere $(0,\infty)$ aralığında tanımlı F dağılımını göstermek üzere;

$$\mathcal{K} = \left\{ f(-\epsilon) = \int_0^\infty e^{\varepsilon x} d\mathcal{F}(x) = \infty, \ \ \forall \ \varepsilon > 0 \ için \right\},$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \lim_{x\to\infty} \frac{\bar{\mathcal{F}}(x-y)}{\bar{\mathcal{F}}(x)} = 1, \ \ \forall \ y > 0 \ için \right\},$$

$$\mathcal{R} = \{ \bar{\mathcal{F}} \in \mathcal{R}_{-\alpha}, \ \ \forall \ \alpha \geq 0 \ için \},$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \lim_{x\to\infty} \frac{\bar{\mathcal{F}}(x/2)}{\bar{\mathcal{F}}(x)} < \infty \right\}$$

özelliklerine sahiptir [15]. Bu sınıflar arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibidir:

1. $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{K} \ \ ve \ \ \mathcal{R} \subset \mathcal{D}$
2. $\mathcal{D} \cap \mathcal{L} \subset \mathcal{S}$
3. $\mathcal{R} \subset \mathcal{ERV} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{L} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$
4. $\mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$
5. $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ sınıfı tüm düzenli değişen dağılım sınıfını içerir.
6. $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{S}$ ve $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{D}$
7. $\mathcal{F} \in \mathcal{D} \Longrightarrow \mathcal{F}_{\mathrm{I}} \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$
8. $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{L}, \mathcal{D} \cap \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{S}$
9. Lognormal dağılım $\mathcal{S} \backslash \mathcal{D}$ sınıfına aittir.
10. Düzenli değişen dağılıma sahip her örnek aynı zamanda $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ sınıfına da aittir

11. Pareto, Burr, Cauchy, Frechet, Loggamma dağılımları, aynı zamanda $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfına da aittir. Bu yüzden bu dağılımlar baskın değişen dağılımların bir elemanı olduğu için ve Teorem 1.3.2.3.2 teoreminden yola çıkılarak verilen dağılımların aynı zamanda F_I'nın da elemanları olduğu sonucu elde edilir.
12. 'Peter ve Paul' dağılımı ele alınsın. $k \in N$, için
$G \in \mathcal{D} \backslash \mathcal{L}, \quad \bar{G}(x) = 2^{-k}, \quad x \in [2^k, 2^{k+1})$

$$\frac{\bar{G}(2^k - 1)}{\bar{G}(2^k)} = 2 \Rightarrow \quad G \notin \mathcal{L}$$

$$\frac{\bar{G}(x)}{\bar{G}(2x)} = 2 \Rightarrow G \in \mathcal{D}$$

ilişkileri doğru olduğundan; bu dağılımın $\mathcal{D} \backslash \mathcal{S}$ veya $\mathcal{D} \backslash \mathcal{L}$ sınıfına ait olduğu sonucu elde edilir [52].

1.4. Stokastik Süreçler

Stokastik kavramı ilk kez J. Bernoulli (1654-1705) tarafından kullanılmaya başlanmış olup stokastik süreç kavramı ise A.N. Kolmogorov ve A.Y. Hinçin tarafından ortaya konulmuştur. Günümüzde stokastik süreçler ile ilgili yapılan çalışmaların sayısı oldukça fazladır. Bu alanda N. Weiner, W. Feller, J. Neumann, R. Fisher, J. Dobb gibi olasılıkçılar emek vermiştir. Stokastik süreçler, hisse senedi fiyatları, internet trafigi, biyolojik popülasyonların çeşitli özellikleri gibi kavramların matematiksel olarak modellenmesine yardımcı olurlar. Stokastik süreçlerin istatistik ve mühendislikte de önemi büyüktür.

Tanım 1.4.1 [2] U, Ω basit olaylar uzayının altkümelerinden oluşmuş kümeler sınıfı olsun. Eğer U aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa U'ya bir cebir denir.

1. $\Omega \in U$

2. $A \in U$ ise $\bar{A} \in U$,

3. $A, B \in U$ ise $A \cup B \in U$.

Tanım 1.4.2 [2] $\Omega \neq \emptyset$ bir küme ve $\Im$ da Ω üzerinde bir sınıf olsun. Eğer $\Im$ sınıfı;

1. $\Omega \in \Im$

2. $\forall A \in \Im$ ise $\bar{A} \in \Im$

3. $\forall A_i \in \mathfrak{I}$, $i \geq 1$ kümeleri ikişer ikişer ayrık kümeler olmak üzere; $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{I}$ özelliklerine sahip ise, $\mathfrak{I}$ sınıfına Ω kümesinde tanımlı bir sigma (σ) cebirdir denir. Ω basit olaylar uzayı, $\mathfrak{I}$ de onun alt kümelerinden oluşturulmuş σ cebir olmak üzere $(\Omega, \mathfrak{I})$ ikilisine ölçülebilir uzay denir.

Tanım 1.4.3 [2], [11] $\Omega \neq \emptyset$ bir küme, $\mathfrak{I}$, Ω üzerinde tanımlanmış bir σ-cebir ve $P, \mathfrak{I}$ üzerinde tanımlanmış bir olasılık ölçüsü olmak üzere, $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ üçlüsüne bir olasılık uzayı denir.

Tanım 1.4.4 [2],[11] $\mathbb{R}$ kümesindeki açık aralıkların $\mathfrak{I}_1 = \{(a,b) | a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ sınıfını kapsayan en küçük σ-cebirine Borel cebiri denir.

Tanım 1.4.5 [2] $\mathfrak{I}$, $\Omega \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlanmış bir σ-cebir olsun ve $P: \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ olsun,

i. $\forall$ A $\in \mathfrak{I}$ için $P(A) \geq 0$

ii. $A_i \in \mathfrak{I}$, $i \geq 1$ ve $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ için

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

iii. $P(\Omega) = 1$

aksiyomları Kolmogorov aksiyomları olarak bilinir. Bu aksiyomlar 1933 yılında A. N. Kolmogorov tarafından verilmiştir ve bu aksiyomları sağlayan P fonksiyonuna $\mathfrak{I}$ üzerinde bir olasılık ölçüsü denir. A herhangi bir küme olmak üzrere; $P(A)$ değerine A kümesinin olasılığı denir.

Tanım 1.4.6 [2] (Rasgele Değişken) $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ bir olasılık uzayı ve $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ olmak üzere; her $x \in \mathbb{R}$ için $\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{I}$ oluyor ise ξ fonksiyonuna rasgele değişken denir.

Tanım 1.4.7 [2] (Aritmetik Rasgele Değişken) $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere, bir ξ rasgele değişkeni 1 olasılık ile, $\{\alpha k + \beta, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ kümesinden değerler alıyor ise, ξ rasgele değişkenine aritmetik rasgele değişken ve ξ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonuna, aritmetik dağılım fonksiyonu denir.

Rasgele değişkenler tek değişkenli fonksiyonlardır. Ancak bazı durumlarda ikinci bir değişkene bağlı olan rasgele değişkenlerle de karşılaşılabilir. Örneğin borsadaki herhangi bir hisse senedinin fiyatının zamanla değişim göstermesi durumu tek değişkenle ifade edilemez. İşte bu gibi durumlarda stokastik süreç kavramına ihtiyaç duyulur.

Tanım 1.4.8 [2] $(\Omega, \mathfrak{I}, \mathrm{P})$ bir olasılık uzayı ve $T \subseteq \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ olsun. Reel değerli $\xi(\omega, t)$ fonksiyonu her $t \in T$ için Ω örnek uzayında tanımlanmış rasgele değişken ise ona rasgele fonksiyon denir. Başka bir ifadeyle $B_t$ve B_R, T kümesinin alt kümeleri üzerinde inşa edilmiş Borel σ- cebirleri olsunlar.

$\xi(\omega, t): \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $B \in B_R$ için

$\{(\omega, t): \xi(\omega, t) \in B\} \in \sigma(\mathfrak{I} \times B_T)$

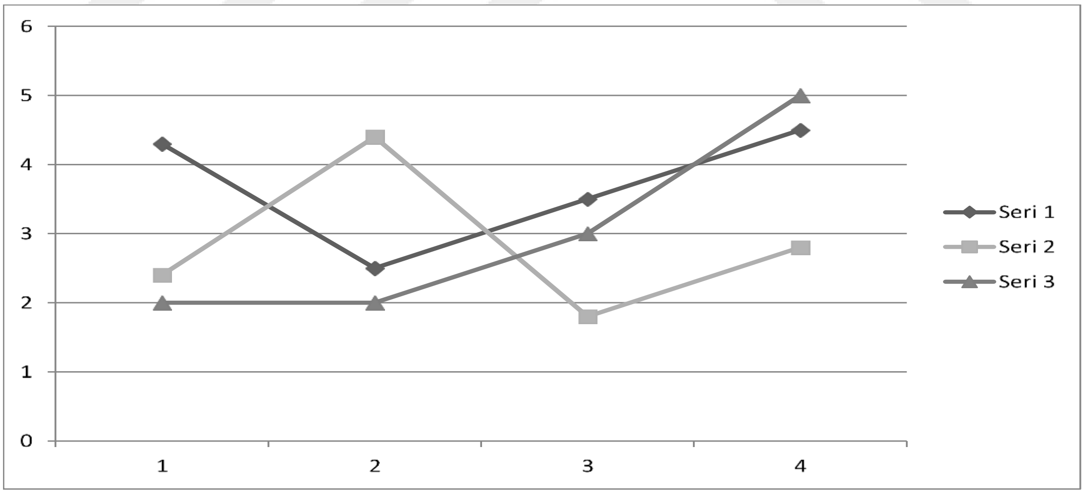
şartını sağlıyor ise, $\xi(\omega, t)$ fonksiyona bir rasgele fonksiyon denir.

Eğer $t \in T = \mathbb{R}^+$olarak alınırsa ve zaman parametresi olarak yorumlanırsa $\xi(\omega, t)$ fonksiyonuna stokastik süreç denir.

Tanım 1.4.9 [2] (Stokastik Sürecin Realizasyonları) Stokastik süreç rasgele değişkenden farklı olarak ω parametresinin yanısıra zamana da bağlı bir fonksiyondur.

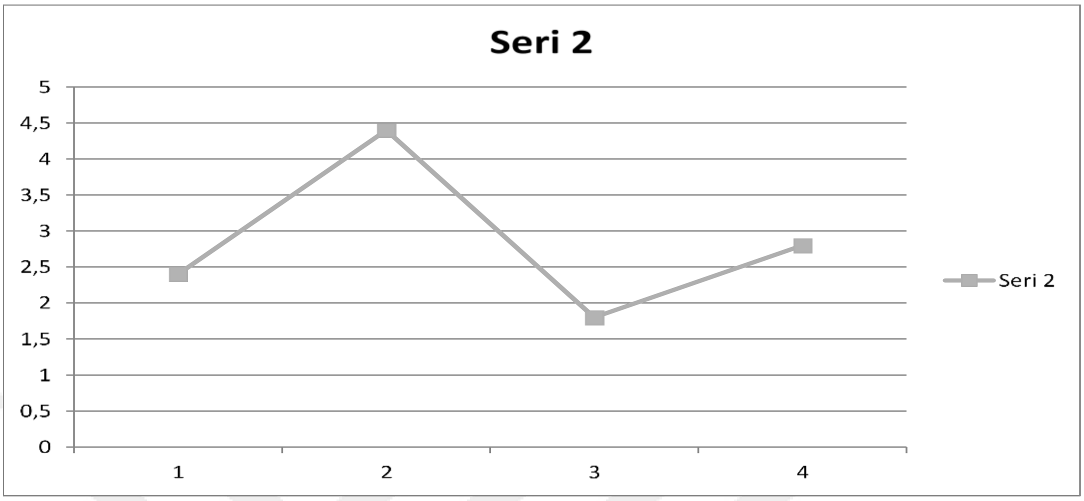
$\xi(\omega, t)$ stokastik sürecinin ω parametresi sabit tutulursa sadece t ye bağlı olan ve rasgele olmayan bir fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyona ise stokastik sürecin realizasyonu denir.

Stokastik sürecin sonsuz sayıda realizasyonu vardır. Çünkü realizasyonların sayısı ω parametresinin sayısına bağlıdır.



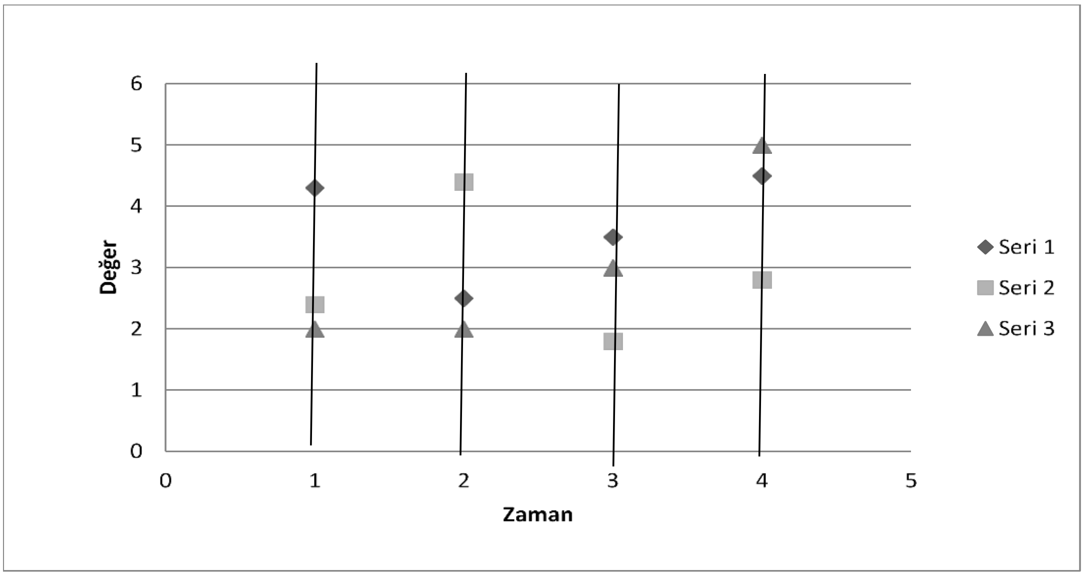
Şekil 3. Bir Stokastik Sürecin Realizasyonları

Eğer ω parametresi sabit tutulursa $\xi(\omega, t) = g(t)$, t'ye bağlı olarak ölçülebilir bir fonksiyon olur.



Şekil 4. Sabitlenmiş ω Parametresi için Stokastik Sürecin Bir Realizasyonu

Eğer t parametresi sabit tutulursa bu durumda sadece ω parametresine bağlı olan bir fonksiyon yani rasgele değişken elde edilir.



Şekil 5. Sabitlenmiş t=1,2,3,4 değerleri için Stokastik Sürecin Bir Realizasyonu

Stokastik süreç, rasgele değişkenlerin bir ailesidir.

Tanım 1.4.10 [2], [11] (Stokastik Sürecin Sonlu Boyutlu Dağılımları)

Stokastik sürecin en genel ve en temel olasılık karakteristikleri onun sonlu boyutlu dağılımlarıdır. Bu dağılımlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 1.4.10.1 [2], [11] (Bir boyutlu dağılım) $0 < t_1 < \infty,\ B_1 \in B_{\mathbb{R}}$ olsun.

$$P\{\xi(t_1) \in B_1\} = P_{t_1}(B_1)$$

olasılığına bir boyutlu dağılım denir. Özel olarak $B_1 = (-\infty, x] \subset \mathbb{R}$ olduğunda

$$P\{\xi(t_1) \leq x\} = F_{t_1}(x_1)$$

olasılığına bir boyutlu dağılım fonksiyonu denir.

Tanım 1.4.10.2 [11] (İki boyutlu dağılım) $0 < t_1 < t_2 < \infty,\ B_1, B_2 \in B_{\mathbb{R}}$ olsun.

$$P\{\xi(t_1) \in B_1, \xi(t_2) \in B_2\} = P_{t_1,t_2}(B_1, B_2)$$

olasılığına iki boyutlu dağılım denir. Özel olarak $B_1 = (-\infty, x] \subset \mathbb{R},\ B_2 = (-\infty, x] \subset \mathbb{R}$ olduğunda

$$P\{\xi(t_1) \leq x_1\,, \xi(t_2) \leq x_2\} = F_{t_1,t_2}(x_1, x_2)$$

iki boyutlu dağılım fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 1.4.10.3 [11] (n boyutlu dağılım) $0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n < \infty,\ B_1, B_2, \ldots, B_n \in B_{\mathbb{R}}$ olsun. $P\{\xi(t_1) \in B_1, \xi(t_2) \in B_2, \ldots, \xi(t_n) \in B_n\} = P_{t_1,t_2,\ldots t_n}(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ olasılıklarına stokastik sürecin n-boyutlu dağılımı denir.

Ayrıca $B_1 = (-\infty, x] \subset \mathbb{R},\ B_2 = (-\infty, x] \subset \mathbb{R}, \ldots, B_n = (-\infty, x] \subset \mathbb{R}$ olduğunda

$$P\{\xi(t_1) \leq x_1\,, \xi(t_2) \leq x_2, \ldots, \xi(t_n) \leq x_n\} = F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

olasılıklarına n boyutlu dağılım fonksiyonu denir.

$\left\{F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right\}, n = 1,2,..$ dağılımlarının ailesine sonlu boyutlu dağılım denir.

T ve D kümesinin her biri hem kesikli hem de sürekli olabilir. Eğer $\xi(\omega, t)$ stokastik sürecinin D durum kümesi kesikli ise sürecin sonlu boyutlu dağılımları $\forall\ t_n \in T,\ n \geq 1$ için

$$f_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = P\{\omega: \xi(\omega, t_1) = k_1, \ldots, \xi(\omega, t_n) = k_n\}$$

şeklindedir.

Eğer $\xi(\omega, t)$ stokastik sürecinin D durum kümesi sürekli ise sürecin sonlu boyutlu dağılımları

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 1.4.11 [11] $\xi(\omega, t)$ bir stokastik süreç, $F_t(x)$ ise bu sürecin bir boyutlu dağılım fonksiyonu olsun. $\forall\ t$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\ dF_t(x) < +\infty$$

sağlanıyorsa

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ dF_t(x) \tag{35}$$

ifadesine stokastik sürecin beklenen değeri denir ve $\mu(t)$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.12 [2],[11] $\xi(\omega, t)$ bir stokastik süreci verilmiş olsun. $\forall\ t \in T$ için

$$V[\xi(t)] = E[\xi(t) - \mu(t)]^2, \tag{36}$$

fonksiyonuna stokastik sürecin varyansı denir.

Stokastik sürecin beklenen değeri ve varyansı kadar kovaryans fonksiyonu da önemlidir**.** Kovaryans fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlanır:

Tanım 1.4.13 [11] $\xi(t_1)$ ve $\xi(t_2)$ iki stokastik süreç olsunlar. $\forall\ t_1, t_2 \in T$ için,

$$Cov\left(\xi(t_1), \xi(t_2)\right) = E[(\xi(\omega, t_1) - \mu(t_1))(\xi(\omega, t_2) - \mu(t_2))] \tag{37}$$

biçiminde tanımlanan değere kovaryans adı verilir.

Stokastik süreçler belirli özelliklerine göre sınıflara ayrılır. Stokastik süreçlerin sınıflandırılması onların öğrenilmesinde kolaylık sağlar. Çünkü sınıflandırma yapıldığında sürecin belli özellikleri öne çıkar. Bu durum ise belli metotların uygulanmasını mümkün kılar. Örneğin stokastik süreçlerin değerleri arasındaki stokastik ilişkiye göre sınıflandırma yapmak mümkündür. Bu sınıflar ise Gauss süreçleri, değerleri bağımsız süreçler, artışları bağımsız süreçler, durağan ve durağan olmayan süreçler, yenileme süreçleri, Markov süreçleri ve dallanan süreçler olarak ayrılır.

1.5. Sayma Süreçleri

Zaman içinde gözlemlenen olayların sayımında sayma süreçleri önemli yer tutar. Örneğin gece boyunca belirli aralıklarla uyanmak, belli bir zaman aralığında sahip olunan çocuk, bir galeride bir ay içinde satılan araba sayısı sayma sürecine örnek olarak verilebilirler

Tanım 1.5.1 [2], [40] (Sayma Süreci) Sayma süreci negatif olmayan, tam değerli ve artan bir stokastik süreçtir. $N(t)$, $[0, t]$ aralığında gerçekleşen olayların sayısını göstersin. $N(t) = N(\omega, t), \omega \in \Omega, t \geq 0$ sürecine sayma süreci denir. Yukarıda verilen örnekte $N(t)$ bir galeride bir ay içinde satılan araba sayısını gösterir. Gerçekten bu rasgele sayı hem t'ye hem de ω'ya bağlıdır. Sayma sürecinin aşağıdaki özellikleri vardır:

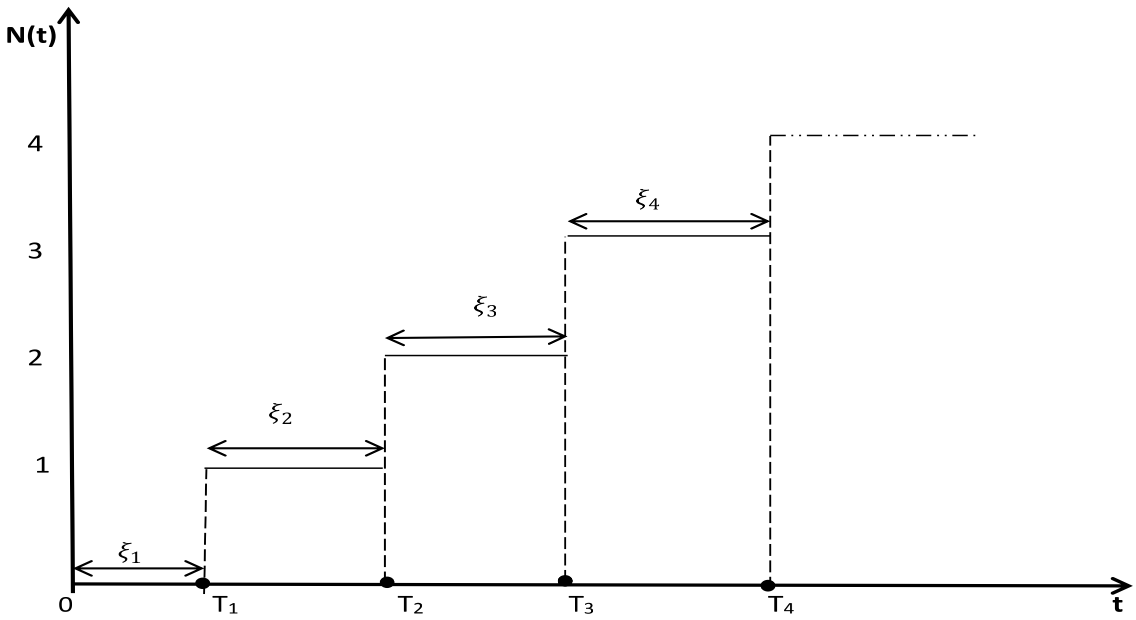
i. $N(t)$, 0,1,2,…değerlerini alır.

ii. Her $s < t$ için $N(s) \leq N(t)$ dir, yani $N(t)$ azalmayan bir fonksiyondur.

iii. $[s, t]$ aralığında gerçekleşen olayların sayısı, $[0, t]$ aralığında gerçekleşen olayların sayısı ile $[0, s]$ aralığında gerçekleşen olayların sayısı farkına eşittir. Yani,

$N(s, t) = N(t) - N(s)'$dır.

$f_{s,t}(n) = P\{N(s, t) = n\}$ olasılığına sayma sürecinin dağılımı denir.



Şekil 6. Sayma Sürecinin Bir Realizasyonu

Şekil 6'da T_n ve ξ_n rasgele değişkenler olmak üzere, T_n ile sürecin $n.$ basamak anı, ξ_n ile $(n-1).$ ve $n.$ basamaklar arasında geçen zamanı gösterir. T_n ve ξ_n rasgele değişkenleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\xi_n = T_n - T_{n-1}, \;\; T_0 = 0, \;\; T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \,, \;\; n \geq 1.$$

$N(t)$, [0,t] aralığında gerçekleşen olayların sayısını göstermek üzere;

$$N(t) = max\{n : T_n \leq t\} \tag{38}$$

biçiminde tanımlanır.

1.6. Yenileme ve Ödüllü Yenileme Süreçleri

Yenileme süreçleri, stokastik süreçler teorisinde ve onun uygulamalarında, stokastik finans ve güvenilirlik gibi birçok gerçek hayat uygulamalarında çok önemli yer tutar. Bu uygulamalar ile ilgili Alsmeyer, Aras ve Woodroofe, Borovkov, Brown ve Solomon, Gihman, Skorohod, Khaniyev ve Atalay, Prabhu gibi ünlü olasılıkçılar önemli çalışmalar yapmışlardır [44], [63]. Yenileme süreçlerinin en çok kullanıldığı alanlardan biri stok kontrol modelleridir. Literatürde yenileme süreçlerinin kendi karakteristiklerine ait bazı çalışmalar Smith [67], Feller [29] gibi olasılıkçılar tarafından yapılmıştır. Yenileme süreci zaman içinde rasgele meydana gelen olaylar için genelleştirilmiş bir stokastik süreçtir. Bu geçici olaylar yenileme veya varış olarak adlandırılır. Yenileme süreci bir varış sürecidir. Varışlar (olaylar) arası geçen zaman süreleri pozitif değerli, bağımsız ve aynı dağılıma sahip bir sayma sürecidir. Burada varışlara örnek olarak belli bir zaman aralığında bir mağazaya gelen müşteriler, ardışık iki doğa olayı (kasırga, deprem gibi) arası geçen zaman verilebilir.

Yenileme süreçleri Poisson süreçlerinin daha genel bir halidir. Aynı zamanda yarı-Markov süreçlerinin özel bir halidir. Bir Poisson sürecinde artışlar bağımsız ve olaylar arası geçen zaman aynı üstel dağılımına sahip rasgele değişkenler olan bir sayma süreci olarak tanımlanabilir. Yenileme sürecinde ise Poisson sürecinden farklı olarak artışlar bağımsız değil ve olaylar arası geçen zaman herhangi bir aynı keyfi dağılıma sahip rasgele değişkenlerdir.

Tanım 1.6.1 [2] $(\Omega, \Im, \mathrm{P})$ bir olasılık uzayı olsun. Ayrıca, ξ_n, $n \geq 1$ aynı dağılıma sahip, bağımsız ve pozitif değerli rasgele değişkenler dizisi olsun.

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \,, \quad T_0 = 0$$

olmak üzere $\{T_n\},\ n \geq 0$ rasgele değişkenler dizisine yenileme süreci denir. Bu durumda ξ_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(t)$ ile gösterilir ve

$$F(t) = P\{\xi_n \leq t\}$$

biçiminde ifade edilir. Her sabit tutulmuş t için $[0, t]$ aralığındaki yenilemelerin sayısını gösteren $v(t) = v(\omega, t) = max\{n \geq 0: T_n \leq t\}$ sürecine yenileme süreci denir. Başka bir deyişle $v(t)$ her sabit tutulmuş t için tam değerler alan rasgele bir değişken olup $T_1, T_2, \dots, T_n$ dizisinde t'den küçük eşit olan sonuncu rasgele değişkenin numarasını göstermektedir. Örneğin $t \in [\, T_4, T_5]$ olduğunda $v = 4$ olur.

Yenileme sürecini açıklamak için bir örnek verilebilir. Bir cihazın bir parçasının $\xi_1(\omega)$ süresi kadar çalıştıktan sonra bozulduğu ve onun yerine aynı türden ikinci parçanın konduğu; bu parçanın da $\xi_2(\omega)$ süresi kadar çalıştıktan sonra bozulduğu ve sürecin bu şekilde devam ettiği varsayılsın. Burada parçalar aynı türden olduğundan $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega), \dots$ değişkenleri rasgele değişkenler olup aynı dağılıma sahiptir.

Yenileme teorisi bir cihazdaki belirli bir miktar parçadan belirli bir sürede ortalama kaç tanesinin devre dışı kalacağı ile ilgilenir.

Tanım 1.6.2 [2] $\eta(t) = min\{n: T_n > t\},\ t > 0$ sürecine yenileme süreci denir. Eğer tüm t'ler için $T_n \leq t$ ise bu durumda $\eta(t) = +\infty$ kabul edilmektedir. Ayrıca $\eta(t) = v(t) + 1$ dir.

Tanım 1.6.3 [2] $v(t)$ yenileme sürecinin dağılımı ξ_n'in dağılım fonksiyonu $F(x) = P\{\xi_n \leq x\}$ ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$P\{v(t) = n\} = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t), n \geq 0, \tag{39}$$

Burada

$$F^{*n}(t) = \int_0^t F^{*(n-1)}(t-x)dF(x),\ n \geq 1 \tag{40}$$

ve

$$F^{*0}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

dır.

Tanım 1.6.4 [11, 40] $v(t)$ yenileme sürecinin beklenen değerine yenileme fonksiyonu denir ve $U(t)$ ile gösterilir.

$$U(t) \equiv E\big(v(t)\big) \tag{41}$$

$v(t)$'nin $[0, t]$ aralığındaki adımlarının (yenilemelerinin) ortalama sayısı yenileme fonksiyonu $U(t)$ ile ifade edilir.

Teorem 1.6.1 [40] $U(t)$ yenileme fonksiyonu T_n'nin dağılım fonksiyonu ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) \tag{42}$$

İspat:

$$\begin{aligned} U(t) \equiv E\big(v(t)\big) &= \sum_{n=0}^{\infty} nP\{v(t) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n\big[F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t)\big] \\ &= 1[F^{*1}(t) - F^{*2}(t)] + 2[F^{*2}(t) - F^{*3}(t)] + \cdots \\ &= F^{*1}(t) + F^{*2}(t) + F^{*3}(t) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) \end{aligned}$$

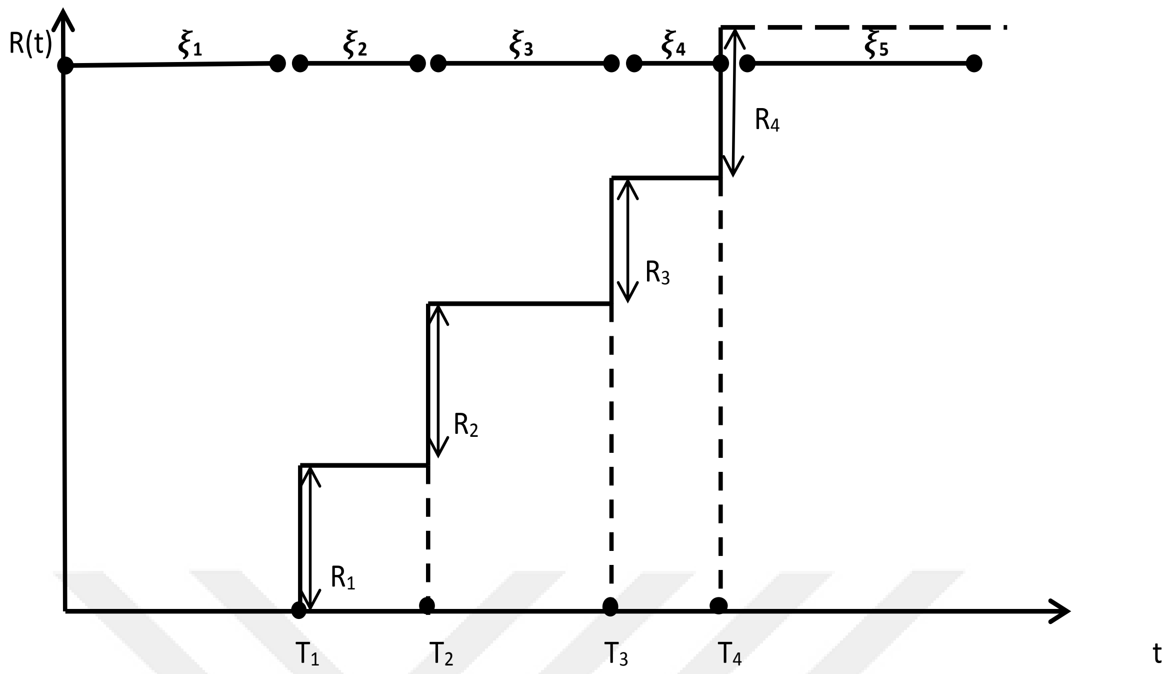
Tanım 1.6.5 [40], (Ödüllü Yenileme Süreci)

$\{(\xi_n, R_n), n \geq 1\}$ rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip olsun. ξ_n ardışık iki yenileme arası geçen zamanı göstermek üzere, $\{v(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci ve $v(t) = max\{n \geq 0: T_n \leq t\}$ öyleki $T_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n,\ n \geq 1$ dır.

Her bir yenilemenin olduğu anda bir ödül verilsin ve n. yenileme anında bir ödül kazanılsın ve bu ödül $n \in \mathbb{R}$ için R_n olsun. O halde t anına kadar sisteme verilen ödüllerin sayısını veren ifade aşağıdaki gibidir:

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n \tag{43}$$

Bu stokastik süreç $\{R(t), t \geq 0\}$ ödüllü yenileme süreci olarak isimlendirilir.



Şekil 7. Ödüllü Yenileme Sürecinin Bir Realizasyonu

Daha önce de belirtildiği gibi yenileme süreçleri güvenilirlik teorisinden risk teorisine, garanti analizinden envanter teoriye kadar pek çok gerçek hayat probleminin modellenmesinde kullanılmaktadır. Uygulama alanlarının genişliği nedeniyle yenileme süreçleri ve bu süreçlerin olasılık ve sayısal karakteristiklerinin incelenmesi günümüzde hala çok popüler bir çalışma alanıdır. Bu çalışmanın inceleme konusu olan (s,S) tipli stok kontrol modelleri de yenileme süreçleri yardımı ile modellenmektedir. Dolayısı ile (s,S) tipli stok kontrol modellerinin karakteristikleri incelenirken yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımının bilinmesi gerekir.

Klasik yenileme teorisinde bazı koşullar altında yenileme fonksiyonunun asimptotik davranışına dair yapılmış pek çok çalışma mevcuttur. Aşağıdaki teoremler dağılım fonksiyonunun sonlu momente sahip hafif kuyruklu dağılım olduğu durum için sırası ile Blackwell (1948) ve Smith (1954) tarafından verilmiştir.

Teorem 1.6.2 [14] Her $y > 0$ için,

$$\lim_{t\to\infty}(U(t+y) - U(t\,)) = \mu^{-1}y \tag{44}$$

dır.

Teorem 1.6.3 [14], [67] Q, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer Q, $(0, \infty)$ aralığında sonlu, integrallenebilir ve artmayan bir fonksiyon ise, aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\lim_{t\to\infty}(U * Q)(t) = \mu^{-1} \int_0^\infty Q(u)du. \tag{45}$$

Bu teoremler sırası ile, güçlendirilmiş yenileme teoremi ve kesinleştirilmiş yenileme teoremi olarak bilinir.

Smith [67] tarafından ispatlanan yenileme teoremi Feller [29] tarafından geliştirilmiştir. (s,S) tipli stok kontrol modelleri ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalarda Feller [29] tarafından önerilen asimptotik açılım etkili bir şekilde kullanılmıştır. Hafif kuyruklu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonları için dağılımın beklenen değeri ve varyansı sonlu olduğunda Feller [29] tarafından önerilen asimptotik açılım aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$U(t) - \frac{t}{\mu} \sim \frac{\sigma^2 + \mu - \mu^2}{2\mu^2}, \quad t \to \infty. \tag{46}$$

Sgibnev [66], $\mathrm{E}[\mathrm{X}^2] = \infty$ durumu için bu sonucu aşağıdaki biçimde geliştirmiştir:

$$U(t) - \frac{t}{\mu} \sim \frac{1}{\mu^2} \int_0^t \left(\int_y^\infty \overline{F}(x)dx \right) dy, \quad t \to \infty. \tag{47}$$

Bu açılımlar rasgele değişkenlerin hafif kuyruklu oldukları durumlar için kullanılabilmektedir. Rasgele değişkenlerin ağır kuyruklu oldukları durumda ise farklı alt sınıflardan dağılımların kuyruk davranışlarını da göz önünde bulundurarak geliştirilmiş özel asimptotik açılımların kullanılması gerekmektedir. Bu kısımda öncelikle stokastik süreçler, yenileme süreçleri ve ağır kuyruklu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonları ile ilgili kısa bir literatür taramasına yer verilecek daha sonra yapılan çalışmalar kısmına geçilecektir.

1.7 Literatür Araştırması

Stokastik süreçler kavramı ilk kez 1930'larda ''Olasılık Teorisinde Analitik Yöntem'' Kolmogorov [48] çalışması ile sistematik olarak ele alınmıştır. Bundan 3 yıl sonra Khintchine (1933) durağan süreçler ile ilgili teoriler üzerine çalışmıştır ve stokastik süreçlerin sınıflandırılması için önemli bir zemin hazırlamıştır.

Kesikli müdahaleli stokastik süreçler kavramı ilk kez A.N. Kolmogorov tarafından ele alınmıştır ve 70' li yıllarda pek çok bilim adamı tarafından incelenerek literatüre çok önemli eserler kazandırılmıştır: [8], [29], [33], [36], Konu ile ilgili en önemli çalışmalardan biri de Skorohod [36] tarafından yapılmıştır. Skorohod tarafından yapılan ''Random process with independent increments'' çalışmasında bu sınıf için genel ergodik teorem ispat edilmiş olsa da genel durumda ispat edilen bu teoremlerden elde edilen ifadeler açık olmadığından pratikte uygulamaya geçirilememiştir. Bu nedenle 1980'li yıllarda çeşitli bariyerli yenileme süreçleri, ödüllü yenileme süreçleri ve rastgele yürüyüş süreçleri gibi daha dar altsınıflar ele alınmaya başlanmıştır. Elde edilen sonuçlar çok önemli olmakla birlikte süreçlerin olasılık ve sayısal karakteristiklerinin karmaşık yapıları 1990'lı yıllara kadar süreçlerin her yönü ile araştırılmasına engel olmuştur. Güncel problemlerin çözümünde matematiksel ifadesi kompleks olmayan yapıların kullanılması büyük kolaylık sağlamaktadır. Bu nedenle 1990' lı yıllarda ve 2000'li yılların başlarından itibaren yapılan çalışmalarda daha çok asimptotik yöntemler kullanılarak yaklaşık fakat sade ifadeler elde edilmesi amaçlanmıştır. Literatürde çok önemli yaklaşım formülleri mevcuttur örneğin: Lotov [53], Levy ve Taqqu [50], Khaniyev [46], Khaniyev ve Aksop [45], Kesemen vd [43], Kesemen [42]. Bu çalışmalarda verilen formüller gerçek formüllere yeteri kadar yaklaşık formüllerdir ve uygulamada kullanılabilirlikleri daha yüksektir.

Stokastik süreçleri belirli özelliklerine göre sınıflandırmak mümkündür ve süreçlerin incelenmesinde kolaylık sağlar. Stokastik süreçler ailesinin günümüzde uygulama alanı en geniş sınıflarından biri de hiç kuşkusuz yenileme süreçleridir. Literatürde yenileme süreçleri kullanılarak modellenen pek çok gerçek hayat problemi vardır. Uygulama alanlarının genişliği nedeniyle yenileme süreçleri ve bu süreçlerin olasılık ve sayısal karaktersitiklerinin incelenmesi günümüzde hala çok popüler bir çalışma alanıdır.

Stok kontrol modelleri kesikli müdahaleli yarı Markov süreçler olarak adlandırılan özel bir ödüllü yenileme sürecinin önemli kullanım alanlarından biridir. Son yıllarda ödüllü yenileme süreçleri ve (s,S) tipli stok kontrol modelleri kapsamlı bir şekilde incelenmiş olasılık ve sayısal karakterleri ile ilgili önemli sonuçlar elde edilmiştir. Khaniyev vd. [46] kesikli şans karışımının üçgensel dağılıma sahip olduğu durumda ergodik momentler için asimptotik açılıma ulaşmışlardır. Khaniyev ve Aksop [45] ve Bekar vd. [12] sırası ile bu modeli genelleştirilmiş Beta dağılımlı ve Weibull dağılımlı kesikli şans karışımları ile incelemişler, ergodik dağılım için zayıf yakınsama teoremini ve ergodik momentler için asimptotik açılım elde etmişlerdir.

(s,S) tipli stok kontrol modelleri de dahil olmak üzere yenileme süreçleri ile ifade edilen modellerin karakteristiklerini incelerken yenileme fonksiyonu için asimptotik ve yaklaşık sonuçların bilinmesi gerekir. Yenileme fonksiyonunun incelenmesi literatürdeki önemli çalışma alanlarından biridir. Daha önce belirtildiği gibi yenileme fonksiyonunu üreten ξ rasgele değişkenlerinin sonlu momente ve hafif kuyruklu dağılıma sahip olduğu durum için sırası ile Blackwell [14] ve Smith [67] tarafından yenileme fonksiyonları için asimptotik sonuçlar elde edilmiştir.

Blackwell [14] sonucu daha sonra genellenmiştir. Yenileme fonksiyonunun asimptotik ifadesi için Martingal teorisi temel alınarak elde edilmiş olan önemli sonuçlar yine literatürde mevcuttur Meyer, Jagers Doob, Snell ve Williamson bu konuda önemli çalışmalar yapmışlardır. Ayrıca Coupula metodu kullanılarak elde edilen sonuçlar Lindvall, Arjas, Nummelin ve Tweedie Athreya, McDonald ve Ney, Ney Thorisson tarafından elde edilmiştir [39]. Teorem 1.5.3 ile verilmiş olan kesinleştirilmiş yenileme teoremi daha sonra Mohan [59] tarafından genellenmiştir.

Ağır kuyruklu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonlarının asimptotik ifadelerine ulaşabilmek için dağılımların kuyruk davranışlarına göre farklı açılımlar elde etmek gerekir. Farklı altsınıflardan ağır kuyruklu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonlarının asimptotik açılımlarını bulmaya yönelik ilk önemli çalışmalar Feller [29], Smith [67] ve Teugels [69] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarda ağır kuyruklu dağılımların bir altsınıfı olan $0 < \alpha < 2$ olmak üzere; $-\alpha$ indeksi ile düzenli değişen dağılımlar altsınıfına ait rastgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik davranışı farklı yöntemlerle incelenmiştir. Yine aynı altsınıfa $1/2<\alpha<2$ durumunda ait olan rastgele değişkenlerin ürettiği yenileme fonksiyonu için (ki bu durumda rastgele değişkenin sonlu momentleri mevcut değildir) Teugels [69]'in sonuçlarının daha geliştirilmiş hali Anderson ve Athreya [5] tarafından verilmiştir. Ayrıca Mohan [59] bu sonuçları daha fazla dağılımı içine alan oldukça geniş bir sınıf için genelleştirmiştir. Bu konuda düzenli değişen dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonu ile ilgili önemli çalışmalardan biri Teugels [69] tarafından yapılmıştır. Teugels [69] öncelikle düzenli değişen dağılımların bir alt sınıfı olan V_α sınıfını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 1.7.1 [69] $\alpha \geq 0$ olsun. Bu durumda eğer dağılım fonksiyonu $F(t)$

$$1 - F(t) \sim t^{-\alpha} L(t) \tag{48}$$

koşulunu sağlayacak şekilde yavaş değişen bir $L(t)$ dağılımı mevcut ise, $F \in V_\alpha$ dır. Teugels [69] α'nın farklı durumları için düzenli değişen dağılımların bir alt sınıfı olan V_α sınıfı tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik ifadesini aşağıdaki gibi vermiştir:

Teorem 1.7.2 [69] $U(t)$, $F \in V_\alpha$ dağılımına sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu ve $L(t)$ yavaş değişen fonksiyon olmak üzere; $t \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik ilişkiler doğrudur:

1. $U(t) \sim \left(L(t)\right)^{-1}, \quad \alpha = 0.$
2. $U(t) \sim t^{\alpha}\left(L(t)\right)^{-1}\left(sin\frac{\alpha\pi}{\alpha\pi}\right), \quad 0 < \alpha < 1.$
3. $U(t) \sim t\, L_1(t)^{-1}, \quad \alpha = 1$

Burada

$$L_1(t) = \int_0^t \left(1 - F(y)\right)dy \tag{49}$$

$\frac{1}{2} < \alpha < 1$ durumu için yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımı Anderson ve Athreya [5] tarafından verilmiştir. Yine $1 < \alpha < 2$ durumunda düzenli değişen dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için Teugels [69] aşağıdaki asimptotik açılımı önermiştir:

$$\tau(t) \equiv U(t) - \frac{t}{\mu} \sim \frac{t^2\overline{F}(t)}{\mu^2\,(\alpha-1)(2-\alpha)}, \;\; t \to \infty. \tag{50}$$

Burada $\tau(t) \in RV(2-\alpha)$ dır ve aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$\tau(t) \sim \frac{1}{\mu^2} \int_0^t \int_x^\infty \overline{F}(v)dvdx, \quad t \to \infty. \tag{51}$$

Mohan [59] makalesinde $\tau(t) \in RV(2-\alpha)$ şartı olmadan da (51) açılımının sağladığını göstermiştir. Embrechts ve Omey [26] çalışmasında $F \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ alt sınıfından dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik ifadesi kapalı formda aşağıdaki biçimde elde edilmiştir.

Teorem 1.7.3 [26] $F \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ olsun. Ayrıca F singüler olmayan bir dağılım ve F'in ikinci momenti sonlu olsun. Bu durumda bu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonu aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$U(x) - \frac{x}{\mu} - \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F}_I(z)dz = o\left(x\,\overline{F}_I(x)\right), \quad x \to \infty. \tag{52}$$

Burada

$$\overline{F}_I(x) = \int_x^\infty \overline{F}(y)dy \tag{53}$$

dır.

Ağır kuyruklu dağılımların düzenli değişen kuyruklu dağılımlar alt sınıfından dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için asimptotik açılım kapalı formda Geluk [34] tarafından verilmiştir. Bu çalışmada düzenli değişen dağılımlar alt sınıfından hem sonlu hem de sonsuz varyanslı rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonları incelenmiştir. Bu açılımların asimptotik ifadeleri Teorem 1.7.4 'te verilmiştir:

Teorem 1.7.4 [34] $F(.)$, $(0, \infty)$ aralığında değerler alan bir dağılım fonksiyonu olsun ve bu dağılım fonksiyonunun kuyruk kısmı $\bar{F} \equiv 1 - F$ ile gösterilsin. $\bar{F} \equiv 1 - F$, $-\alpha$ indeksi ile düzenli değişen bir dağılım fonksiyonu ise, bu dağılıma sahip rastgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu U aşağıdaki asimptotik açılımları sağlar:

$1 < \alpha < 2$ için:

$$U(x) - \frac{x}{\mu} - \frac{1}{\mu^2} \int_0^x \int_s^\infty \bar{F}(v)\,dv\,ds = O\left(x^4 \bar{F}(x)^2 \bar{F}\left(x^2 \bar{F}(x)\right)\right), \; x \to \infty \tag{54}$$

$\alpha = 2$ için ;

$$U(x) - \frac{x}{\mu} - \frac{1}{\mu^2}\int_0^x \int_s^\infty \bar{F}\,(v)\,dv\,ds = o\left(x^4\bar{F}(x)^2\bar{F}\left(x^2\bar{F}(x)\right)\right), x \to \infty \tag{55}$$

Bu çalışmada ayrıca yenileme fonksiyonunun varyansı Smith (1962) çalışmasındaki tekniklere benzer teknikler kullanılarak aşağıdaki gibi bulunmuştur:

Teorem 1.7.5 [34] Teorem 1.7.4 'ün şartları sağlansın. Bu durumda, $\nu(t)$ yenileme fonksiyonu olmak üzere;

$1 < \alpha < 2$ için,

$$Var\,\nu(t) = \frac{4}{\mu^3}\int_0^t\int_0^u\int_y^\infty \overline{F}(s)\,ds\,dy\,du$$

$$-\frac{2t}{\mu^3}\int_0^t\int_y^\infty \overline{F}(s)\,ds\,dy + O\left(t^5\overline{F}(t)^2\overline{F}\left(t^2\overline{F}(t)\right)\right) \tag{56}$$

$\alpha = 2$ için,

$$Var\,\nu(t) = \frac{4}{\mu^3}\int_0^t\int_0^u\int_y^\infty \overline{F}(s)\,ds\,dy\,du$$

$$-\frac{2t}{\mu^3}\int_0^t\int_v^\infty \overline{F}(s)\,ds\,dy + o\left(t^5\overline{F}(t)^2\overline{F}\left(t^2\overline{F}(t)\right)\right) \tag{57}$$

dır.

Teorem 1.7.6 [35] $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ rastgele değişkenleri bağımsız aynı F dağılımına sahip ve negatif olmayan rastgele değişkenler olsunlar. Ayrıca her bir rastgele değişken için $E(\eta^2) < \infty$ olsun. Bu durumda sonlu varyansa sahip alt-üstel dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik açılım doğrudur:

$$U(x)\ -\frac{x}{\mu_1}-\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}=-\frac{1}{\mu_1}\int_x^{\infty}\bar{F}_I\,(s)ds\ +O\big(\bar{F}_I(x)\big),\ \ x\to\infty. \tag{58}$$

Burada;

$$F_I(x)=\frac{1}{\mu_1}\int_0^x \bar{F}\,(y)\,dy \tag{59}$$

biçiminde tanımlanır ve $F_I(\mathrm{x})$ integrallenmiş kuyruk fonksiyonu ya da denge fonksiyonu olarak adlandırılır.

Ağır kuyruklu dağılıma sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonları için elde edilmiş olan en önemli sonuçlardan biri Mitov ve Omey [57] tarafından elde edilmiştir. Bu çalışmanın literatürde elde edilmiş sonuçlardan en önemli farkı burada asimptotik terim içermeyen yaklaşık sonuçların elde edilmiş olmasıdır.

Teorem 1.7.7 [57] $\bar{F}\,(x)\in RV(-\alpha),\ \alpha>2$ olmak üzere $\{\eta_n\},\ n\geq 1$ aynı F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. U(x) yenileme fonksiyonu $\{\eta_n\}$, $n\geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonu olmak üzere $U(x)$'in yaklaşık ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$U_\eta(x)=\frac{x}{m_1}+\frac{1}{m_1}\int_0^x \bar{F}_I(y)\,dy+2m_I\,\bar{F}_I(x). \tag{60}$$

Burada

$$F_I(x)=\frac{1}{m_1}\int_0^x \bar{F}\,(y)\,dy,\ \ m_I=\int_0^{\infty}\big(1-F_I(x)\big)\,dx<\infty. \tag{61}$$

biçiminde ifade edilmiştir ve m_I, $F_I(x)$ denge fonksiyonunun 1. momentini verir. Ayrıca $F_I(x)$ ile tanımlanan integrallenmiş kuyruk fonksiyonunun olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_I(x)=\frac{1}{m_1}\,\bar{F}(x),\qquad x\geq 0 \tag{62}$$

biçimindedir.

Teorem 1.7.4 ve Teorem 1.7.6 kullanılarak düzgün müdahaleli (s,S) tipli envanter modeller literatürde talep miktarları sonsuz varyanslı düzenli değişen dağılıma sahipken ve talep miktarları sonlu varyanslı alt-üstel dağılıma sahipken incelenmiştir [40], [41]. Bu çalışmalarda (s,S) tipli envanter modelin belirli koşullar altında ergodikliği ispatlanmış ve sürecin hem ergodik dağılımı hem de ergodik dağılımının momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır.

Bu çalışmada ise öncelikle talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfından sonlu varyanslı düzenli değişen dağılıma sahipken klasik (s,S) tipli stok kontrol modelleri asimptotik yöntemler ile incelenecektir. Daha sonra talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler sonlu varyanslı düzenli değişen Pareto dağılımına sahipken kesikli müdahaleli (s,S) tipli stok kontrol modelleri yaklaşım yöntemleri ile incelenecektir

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu kısımda talep miktarları sonlu varyanslı Pareto dağılımına sahipken klasik (s,S) tipli envanter modeller incelenecektir. Öncelikle (s,S) tipli envanter modeli ifade eden sürecin matematiksel kurulumu özetlenecek, talep miktarları sonlu varyanslı düzenli değişen dağılıma sahipken sürecin ergodikliğini ifade eden teorem verilecektir. Sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için sırası ile asimptotik ve yaklaşık sonuçlara ulaşılacaktır.

2.1. Talep Miktarı Sonlu Varyanslı Düzenli Değişen Dağılıma Sahip Klasik (s,S) Tipli Stok Kontrol Modeli

Klasik (s,S) tipli stok kontrol modelleri literatürde en çok kullanılan stok kontrol modellerinden biridir. Bu süreç şu şekilde ifade edilebilir. Bir fabrika kendisi için optimum stok kontrol politikasını belirlemeye çalışsın. X(t) bu fabrikanın deposundaki stok seviyesinin zamana göre değişimini göstersin. Bir depodaki herhangi bir t anındaki stok seviyesi X(t) süreci ile gösterilsin. Klasik (s,S) tipli stok kontrol modellerinin çalışma prensibi stok miktarı s seviyesinin altına indiğinde s ile S arasında bir miktarla doldurmak yerine maksimum miktar olan S seviyesine kadar doldurulma prensibine dayanmaktadır. Klasik (s,S) tipli stok kontrol modeli ihtiyaca göre değiştirilebilir. Örneğin stok miktarı s seviyesinin altına indiği anda sistem durdurulup belli bir süre bekledikten sonra stokla doldurulabilir. Ya da sistem S değeri yerine (s,S) aralığında değer alan bir z seviyesinden başlatılıp sistem her s seviyesinin altına düştüğünde rasgele bir ζ miktarı kadar sisteme müdehale edilebilir. Bu sistemlerin her biri farklı tipte bir (s,S) tipli envanter modele karşılık gelmektedir. Sistemin çalışma prensibi daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

Depodaki stok seviyesi (X(t)), t = 0 başlangıç anında $X(0) = S$ olsun. (S maksimum stok seviyesidir). Depoya rasgele $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ anlarında rasgele $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$miktarı kadar talep gelmektedir. Dolayısı ile depodaki stok seviyesi $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ miktari kadar azalmaktadır. Bu durum stok seviyesi $X(t)$, s stok kontrol seviyesinin altına inene kadar devam eder. (Burada $0 < s < S < \infty$). Bu nedenle depodaki stok seviyesinin değişimi aşağıdaki gibi olur.

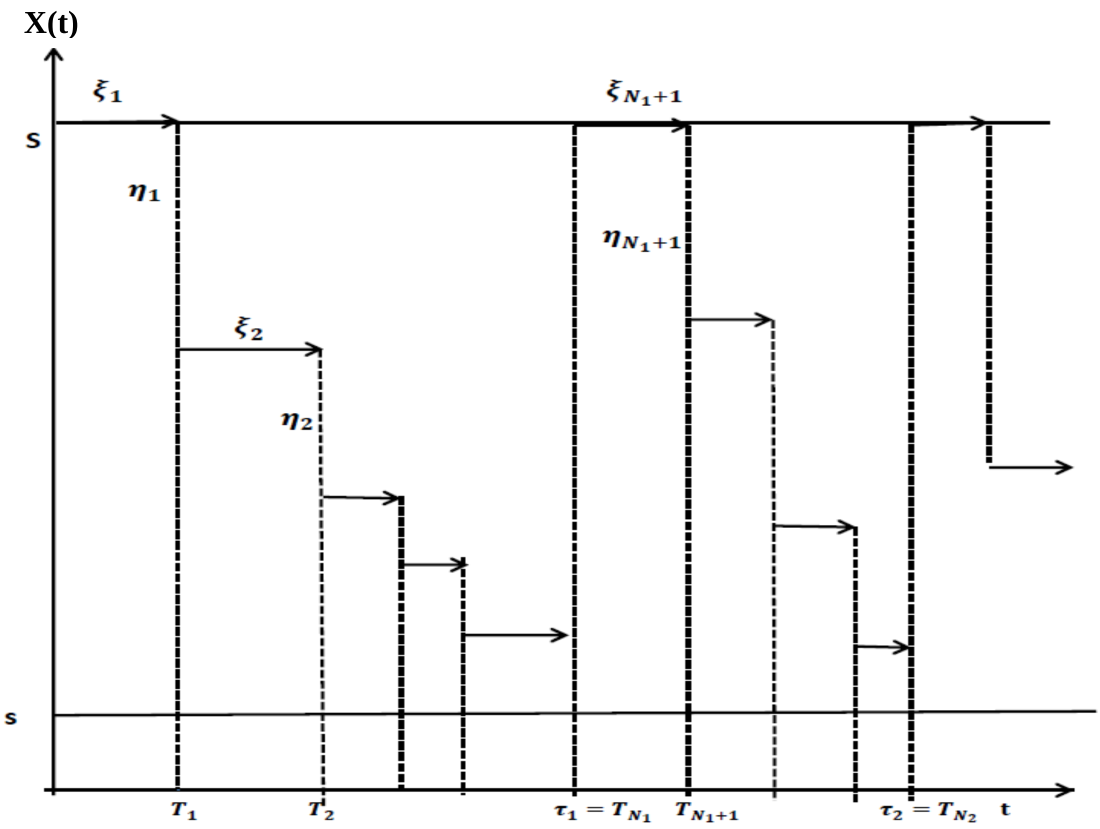
$$X_1 = S - \eta_1,\ X_2 = S - (\eta_1 + \eta_2),\ \ldots,\ \ X_n = S - \sum_{i=1}^{n} \eta_i$$

Burada η_n rasgele değişkeni n. talep miktarını gösterir. ξ_n rasgele değişkenleri (n-1). ve n. talepler arasında geçen süreyi göstersin. Bu durumda n. talep gelinceye kadar geçen toplam zaman

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

olarak tanımlanır. Stok seviyesindeki bu değişim τ_1 anına kadar devam eder. (τ_1, sistemin $s > 0$ kontrol seviyesinin altına düştüğü ilk andır). Bu durum olduğu an depodaki stok seviyesi hiç beklemeden S seviyesine kadar doldurulur. Böylece ilk periyot tamamlanmış olur. 2. periyot S seviyesinden başlar ve 1. periyoda benzer şekilde devam eder.

Son yıllarda (s,S) tipli envanter modelleri geniş çaplı incelenmiş ve onların bazı karakteristikleri de literatürde araştırılmıştır. (örneğin Prabhu [63] Şahin [68] Chen ve Zheng [18], Nasirova, Yapar ve Khaniyev [60], Gavirneni [33]). Bu modellerle ilgili bahsedilen çalışmaların çoğunda analitik çözümler elde edilememiştir. Bunun yerine sezgisel, dinamik proglamlama gibi analitik metodlar kullanılmıştır. Ayrıca bu çalışmaların çoğunda hem (η_n) talep miktarı hem de ardışık talepler arasında geçen (ξ_n) zamanlarının üstel dağılıma sahip olduğu varsayılır. Hem η_n hem de ξ_n üstel dağılıma sahiptir. Bu çalışma (η_n) talep miktarı ağır kuyruklu dağılıma sahiptir ve ardışık iki talep arasında geçen (ξ_n) zamanı keyfi, pozitif değerli mutlak sürekli dağılımlı rasgele değişkenler olduğu varsayılır. Şekil 8'de klasik (s,S) tipli envanter sistemini ifade eden sürecin bir realizasyonu görülmektedir.



Şekil 8 Klasik (s,S) Tipli Envanter Modelin bir Realizasyonu

2.1.1. Sürecin Matematiksel Kurulumu ve Ergodik Dağılımı İçin Kesin Formüller

$\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ aynı $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında tanımlı bağımsız rasgele değişkenlerin iki dizisi olsun. Ayrıca her bir dizi kendi arasında bağımsız ve aynı dağılımlı olsun. ξ_n ve η_n sadece pozitif değerler alabilen ve dağılım fonksiyonları aşağıdaki gibi gösterilen fonksiyonlar olsun.

$\Phi(t) = P\{\xi_n \leq t\}$, $F \equiv F_\eta(x) = P\{\eta_1 \leq x\}$, x> 0.

$\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenlerinin yardımıyla bağımsız $\{T_n\}$, $\{Y_n\}$ yenileme dizilerini aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun;

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad Y_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i, \quad n = 1,2,\dots; \quad T_0 = Y_0 = 0$$

$\{N_n\}$, tam değerli rasgele değişkenler dizisi de aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$N_0 = 0,\ N_{n+1} = inf\{k \geq N_n + 1 : \zeta_n - (Y_k - Y_{N_n}) < s\},\ n = 0,1,2,\ldots$$

(N_1, bu ana kadar gelen taleplerin sayısını gösterir).

τ_n sistemin n. kez stok kontrol seviyesinin altına düştüğü andır ve aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\tau_n = T_{N_n},\ \ n = 1,2,\ldots; \tau_0 = 0$$

Ayrıca $\upsilon(t)$ sayma süreci tanımlanmış olsun;

$$\upsilon(t) = max\{n \geq 0: T_n \leq t\}, \qquad t \geq 0.$$

Burada kurulan tüm yenileme dizileri ve tanımlanan notasyonlar kullanılarak (s,S) tipli envanter modeli temsil eden $X(t)$ stokastik süreci aşağıdaki gibi inşa edilir.

$$X(t) = S - \left(Y_{\upsilon(t)} - Y_{N_k}\right),\ \tau_k < t < \tau_{k+1},\ k = 0,1,2,\ldots$$

Bu çalışmanın amacı, $\beta \equiv S - s$ yeterince büyük iken yani $\beta \equiv S - s \to \infty$ durumunda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının asimptotik davranışını incelemektir. Burada $\{\eta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin ağır kuyruklu dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır.

Matematiksel olarak inşa edilmiş olan $X(t)$ sürecinin ergodikliği Khaniyev ve Atalay [44] tarafından belli şartlar altında ispatlanmıştır. Teorem 2.1.1.1 X(t) sürecinin belirli koşullar altında ergodik olduğunu ve ergodik dağılım fonksiyonu için kesin formülleri vermektedir.

Teorem 2.1.1.1 [44] Başlangıç rasgele değişken dizileri $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}, n \geq 1$ aşağıdaki şartları sağlasın.

1. $E(\xi) < \infty$
2. $E(\eta_1) > 0$
3. η_1 sonlu varyanslı düzenli değişen dağılıma sahip rasgele değşken.
4. η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan rasgele değişken

Yukardaki şartlar altında $X(t)$ süreci ergodiktir ve ergodik dağılım fonksiyonunun kesin hali aşağıdaki formda yazılır.

$$Q_X(x) = 1 - \frac{U(S-x)}{U(S-s)}, s \leq x \leq S$$

Burada U(x), $\{\eta_i\}$ rasgele değişkenler dizisi tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur ve

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_\eta^{*n}(x)\,, n \geq 1$$

biçiminde ifade edilir. İfade kolaylığı açısından $W_\beta(t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$W_\beta(t) = \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$$

$W_\beta(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun kesin hali aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_{W_\beta}(x) = 1 - \frac{U\big(\beta(1-x)\big)}{U(\beta)}, \beta \equiv S - s \to \infty$$

2.1.2. Sürecin Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Asimptotik Açılımlar

Bu kısımda, Kısım 2.1'de işleyişi, matematiksel kurulumu ve ergodik dağılım fonksiyonu için kesin formülleri elde edilmiş olan klasik (s,S) tipli envanter modeller ele alınacaktır. Bu çalışmanın literatürdeki çalışmalardan farkı (s,S) tipli envanter modelde talepleri ifade eden $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfından sonlu varyanslı Pareto dağılımı ile ele alınmış olmasıdır. Burada daha önce de belirtildiği gibi $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfından Pareto dağılımına sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımına ihtiyaç duyulmaktadır. $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfından Pareto dağılımına sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımına ulaşabilmek için Embrechts ve Omey (1984) çalışmasında $F \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ alt sınıfından dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik ifadesi kullanılacaktır.

Teorem 1.7.3'te $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfından singüler olmayan ve ikinci momenti sonlu olan rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik ifadesi

$$\overline{F}_I(x) = \int_x^\infty \overline{F}(y)dy$$

denge fonksiyonunu göstermek üzere;

$$U_\eta(x) - \frac{x}{\mu} - \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}_I(z)dz = o\left(x\,\overline{F}_I(x)\right), \quad x \to \infty \tag{63}$$

biçiminde ifade edilmişti. Bu kısımda öncelikle (63) ifadesi kullanılarak $L \cap D$ sınıfından Pareto dağılımına sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımı elde edilecektir.

Yardımcı Teorem 2.1.2.1 $\{\eta_n\},\ n \geq 1$ aynı $L \cap D$ sınıfından sonlu varyanslı düzenli değişen dağılımlı Pareto dağılımına sahip rasgele değişkenlerinin bir dizisi olsun. Yani $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu $F(x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{\alpha},\ x \geq b,\ b > \alpha,$ $\alpha > 2$ biçiminde tanımlansın. $E(\eta_1^n) = m_n,\ \ n = 1{,}2$ olmak üzere; $\{\eta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonu aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar.

$$U_\eta(x) = \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2{m_1}^2} + \frac{b^\alpha}{{m_1}^2}\frac{b^\alpha}{(\alpha-1)(2-\alpha)}x^{2-\alpha} + o(x^{2-\alpha}) \tag{64}$$

İspat: Öncelikle;

$$F_I(x) = \frac{1}{m_1}\int_0^x \bar{F}(y)dy$$

olduğu bilinmektedir. Ayrıca

$$E(\eta_1) = m_1 = \int_0^\infty \bar{F}(z)dz = \int_0^\infty zf(z)dz$$

ve

$$E(\eta_1^2\,) = m_2 = \int_0^\infty z^2 f(z)dz = \int_0^\infty 2z\bar{F}(z)dz$$

dır. Buradan

$$m_1 = \int_0^\infty \bar{F}(y)dy = \int_0^x \bar{F}(y)dy + \int_x^\infty \bar{F}(y)dy$$

$$m_1 - \int_x^\infty \bar{F}(y)dy = \int_0^x \bar{F}(y)dy$$

olduğundan

$$F_I(x) = \frac{1}{m_1}\int_0^x \bar{F}(y)dy = 1 - \frac{1}{m_1}\int_x^\infty \bar{F}(y)dy$$

olduğu kolayca görülebilir. O halde

$$\bar{F}_I(x) = \frac{1}{m_1}\int_x^{\infty} \bar{F}(y)dy \tag{65}$$

F_I ‘nin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_I(x) = \frac{1}{m_1}\bar{F}(x)$ olduğu bilinmektedir. Buradan

$$m_I = \int_0^{\infty} x f_I(x)dx = \int_0^{\infty} \bar{F}_I(x)dx$$

$$= \int_0^{\infty} x\frac{1}{m_1}\bar{F}(x)dx = \frac{1}{m_1}\int_0^{\infty} x\bar{F}(x)dx = \frac{1}{2m_1}\int_0^{\infty} 2x\bar{F}(x)dx$$

$$= \frac{1}{2m_1}E(X^2) \tag{66}$$

elde edilir. Burada

$$m_I = \frac{m_2}{2m_1}$$

dır. Ayrıca,

$$m_I = \int_0^{\infty} \bar{F}_I(y)dy = \int_0^{x} \bar{F}_I(y)dy + \int_x^{\infty} \bar{F}_I(y)dy$$

$$m_I - \int_x^{\infty} \bar{F}_I(y)dy = \int_0^{x} \bar{F}_I(y)dy$$

$$\frac{m_2}{2m_1} - \int_x^{\infty} \bar{F}_I(y)dy = \int_0^{x} \bar{F}_I(y)dy$$

olduğundan

$$\frac{m_2}{2{m_1}^2} - \frac{1}{m_1}\int_x^{\infty} \bar{F}_I(y)dy = \frac{1}{m_1}\int_0^{x} \bar{F}_I(y)dy \tag{67}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Ayrıca

$$x\bar{F}_I(x) = x\frac{1}{m_1}\int_x^{\infty} \bar{F}(y)dy = x\frac{1}{m_1}\int_x^{\infty} b^{\alpha}y^{-\alpha}dy = \frac{b^{\alpha}}{m_1}\frac{x^{2-\alpha}}{1-\alpha}$$

elde edilir. O halde,

$$o\left(x\bar{F}_I(x)\right) = o(x^{2-\alpha}) \tag{68}$$

dir. (64), (67) ve (68) ifadesinde yerine yazılır ise

$$U(x) = \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2{m_1}^2} - \frac{1}{{m_1}^2}\int_x^\infty \int_y^\infty \bar{F}(t)dt\,dy + o(x^{2-\alpha})$$

$$= \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2{m_1}^2} - \frac{b^\alpha}{{m_1}^2}\int_x^\infty \frac{y^{1-\alpha}}{\alpha - 1}dy + o(x^{2-\alpha})$$

$$= \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2{m_1}^2} - \frac{b^\alpha}{{m_1}^2}\frac{y^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\Big|_x^\infty + o(x^{2-\alpha})$$

$$= \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2{m_1}^2} - \frac{b^\alpha}{{m_1}^2}\frac{x^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(\alpha-2)} + o(x^{2-\alpha}),\;\; \alpha > 2$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.1.2.2 Teorem 2.1.1.1 ve Yardımcı Teorem 2.1.2.1'nin şartları sağlansın. Bu durumda $\beta \equiv S - s \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik açılımlar doğrudur:

$$U\big(\beta(1-x)\big) = \frac{1-x}{m_1}\beta + \frac{m_2}{2{m_1}^2} - \frac{b^\alpha}{{m_1}^2}\frac{(1-x)^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\beta^{2-\alpha} + o(\beta^{2-\alpha}) \qquad (69)$$

$$U(\beta) = \frac{1}{m_1}\beta + \frac{m_2}{2{m_1}^2} - \frac{b^\alpha}{{m_1}^2}\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\beta^{2-\alpha} + o(\beta^{2-\alpha}),\;\; \alpha > 2 \qquad (70)$$

İspat: Yardımcı Teorem 2.1.2.1 ile elde edilen

$$U(x) = \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2{m_1}^2} + \frac{b^\alpha}{{m_1}^2}\frac{b^\alpha}{(\alpha-1)(2-\alpha)}x^{2-\alpha} + o(x^{2-\alpha}) \qquad (71)$$

açılımında "$\beta(1-x)$" ve "β" ifadeleri "x" yerine yazılarak (69) ve (70) ifadelerine kolayca ulaşılır.

Teorem 2.1.2.1 Teorem 2.1.1.1 ve Yardımcı Teorem 2.1.2.2'nin şartları sağlansın. Bu durumda $\beta \equiv S - s \to \infty$ için $W_\beta(t) = \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$Q_{W_\beta}(x) = x - \frac{xm_2}{2m_1}\beta^{-1} + \frac{b^\alpha(1-x)((1-x)^{1-\alpha}-1)}{m_1(\alpha-1)(\alpha-2)}\beta^{1-\alpha} + o(\beta^{1-\alpha}),\ \ \alpha > 2 \tag{72}$$

İspat: (69) ve (70) asimptotik açılımları kullanılarak;

$$\begin{aligned}
Q_{W_\beta}(x) &= 1 - \frac{U\big(\beta(1-x)\big)}{U(\beta)} \\
&= 1 - \left\{\left[\frac{1-x}{m_1}\beta + \frac{m_2}{2{m_1}^2} + \frac{b^\alpha}{{m_1}^2}\frac{(1-x)^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\beta^{2-\alpha} + o(\beta^{2-\alpha})\right]\right. \\
&\qquad \left.\left[\frac{1}{m_1}\beta + \frac{m_2}{2{m_1}^2} + \frac{b^\alpha}{{m_1}^2}\frac{1}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\beta^{2-\alpha} + o(\beta^{2-\alpha})\right]^{-1}\right\} \\
&= 1 - \left\{\left[\frac{1-x}{m_1}\beta + \frac{m_2}{2{m_1}^2} + \frac{b^\alpha}{{m_1}^2}\frac{(1-x)^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\beta^{2-\alpha} + o(\beta^{2-\alpha})\right]\right. \\
&\qquad \left.\left[\frac{\beta}{m_1}\left[1 + \frac{m_2}{2\beta m_1} + \frac{b^\alpha}{m_1}\frac{1}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\beta^{1-\alpha} + o(\beta^{1-\alpha})\right]\right]^{-1}\right\} \\
&= 1 - \left\{\left[(1-x) + \frac{m_2}{2m_1}\beta^{-1} + \frac{b^\alpha}{m_1}\frac{(1-x)^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\beta^{1-\alpha} + o(\beta^{1-\alpha})\right]\right. \\
&\qquad \left.\left[1 + \frac{m_2}{2m_1}\beta^{-1} + \frac{b^\alpha}{m_1}\frac{1}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\beta^{1-\alpha} + o(\beta^{1-\alpha})\right]^{-1}\right\} \\
&= x + \frac{m_2}{2m_1}\beta^{-1}\big(-1 + (1-x)\big) \\
&\quad - \left[\frac{b^\alpha}{m_1}\frac{(1-x)}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\beta^{1-\alpha}((1-x)^{1-\alpha}-1)\right] + o(\beta^{1-\alpha}) \\
&= x - \frac{xm_2}{2m_1}\beta^{-1} + \left[\frac{b^\alpha}{m_1}\frac{(1-x)((1-x)^{1-\alpha}-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\right]\beta^{1-\alpha} + o(\beta^{1-\alpha}),\ \ \alpha > 2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2.1.2.1 (Zayıf Yakınsama Teoremi) Teorem 2.1.2.1'in şartları sağlansın. Bu durumda $W_\beta(t) = \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun asimptotik açılımı yani (72) ifadesi ile verilen $Q_{W_\beta}(x)$ ifadesi; $\beta \equiv S - s \to \infty$ için $G(x) = x$ fonksiyonuna zayıf yakınsar. Yani $\beta \equiv S - s \to \infty$ için

$$Q_{W_\beta}(x) \to G(x) = x$$

dır.

İspat: $F(x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^\alpha, \ x \geq b, \ b > \alpha, \ \alpha > 2$ olduğundan;

$$\left|\frac{b^\alpha}{m_1}\frac{(1-x)((1-x)^{1-\alpha}-1)}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\right| < \infty$$

ve

$$\left|\frac{m_2}{2m_1}\right| < \infty$$

olduğu açıktır.

Buradan;

$$\frac{m_2}{2m_1}\beta^{-1} \to 0, \ \beta \to \infty; \qquad \beta^{1-\alpha} \to 0, \ \beta \to \infty;$$

ve

$$\left[\frac{b^\alpha}{m_1}\frac{(1-x)((1-x)^{1-\alpha}-1)}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\right]\beta^{1-\alpha} \to 0; \ \beta \to \infty$$

elde edilir. Böylece

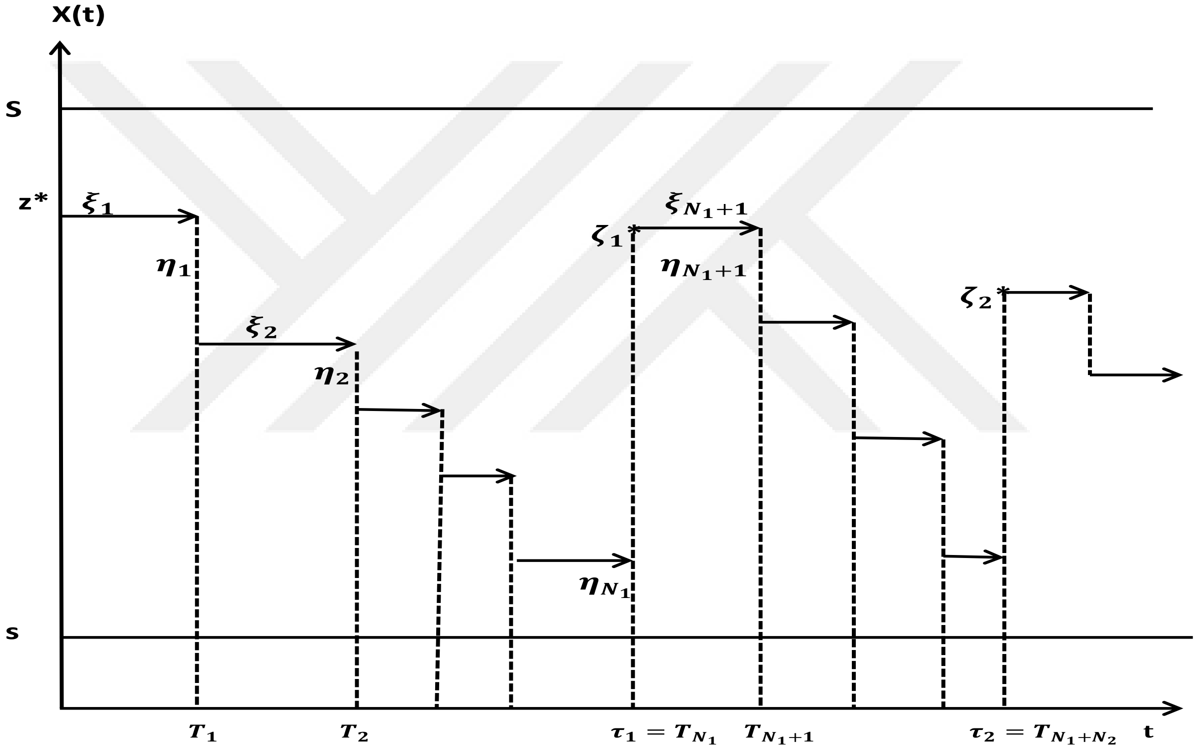
$$Q_{W_\beta}(x) \to G(x) = x; \ \beta \to \infty$$

olduğu kolayca görülmüş olur.

2.2. Talep Miktarı Sonlu Varyanslı Düzenli Değişen Dağılıma Sahip Kesikli Müdahaleli (s,S) Tipli Stok Kontrol Modeli

Bu kısımda talep miktarı sonlu varyanslı düzenli değişen dağılıma sahip kesikli müdehaleli (s,S) tipli envanter model ele alınacaktır. Sürecin matematiksel kurulumu verilip sürecin ergodik olduğu gösterilecektir. Daha sonra ergodik dağılım fonksiyonu için yaklaşık sonuçlar elde edilecektir.

Bir depodaki başlangıç stok seviyesi $X_0 \equiv z \in (s, S)$ olsun. Ayrıca bu depoya rasgele $\{T_i\},\ i \geq 1$ zamanlarında rasgele $\{\eta_i\},\ i \geq 1$ miktarında talepler gelsin. Bu depodaki stok miktarı s kontrol seviyesinin altına düşene kadar bu talepler karşılansın. Stok seviyesi s 'in altına düştüğü ilk an hiç beklemeden stok seviyesi $\{\zeta_1\}$ seviyesine kadar çıkarılsın. Dolayısıyla yeniden doldurulduktan sonraki süreç rasgele $\{\zeta_1\}$ seviyesinden başlar. Sürecin s 'in altına düştüğü ilk an τ_1 ile gösterilirse başlangıçtan τ_1 anına kadar olan zaman dilimi 1. periyottur. 2. periyot belirtildiği gibi $\{\zeta_1\}$ ile başlar ve 1. Periyoda benzer şekilde devam eder. Bu şekilde tanımlanmış olan sistemin bir realizasyonu Şekil 9'da görülmektedir:



Şekil 9. Kesikli Müdehaleli (s,S) Tipli Envanter Modelin Bir Realizasyonu

2.2.1 Sürecin Matematiksel Kurulumu

$\{\xi_n, \eta_n, \zeta_n\}, n \geq 1$ bağımsız, aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. ξ_n ardışık talepler arası geçen zaman ve η_n, n. talep miktarıdır. ζ_n ise $[s, S]$ arası değerler alır ve n. kez geri doldurulduktan sonra başlangıç stok seviyesini gösterir. Ayrıca $\xi_n,\ \eta_n,\ \zeta_n$ birbirinden bağımsızdır ve onların dağılımları $\Phi(t),\ F(x)$ ve $\pi(z)$ olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\Phi(t) = P\{\xi_n \leq t\}, \quad F(x) = P\{\eta_n \leq x\}, \quad \Pi(z) = P\{\zeta_n \leq z\}, \quad$ n=1,2,3….

Buradan $\{\zeta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $[s, S]$ aralığında düzgün dağılıma sahip olduğu varsayılacaktır.

Bu çalışmayı diğer çalışmalardan ayıran en önemli özellik $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin ağır kuyruklu dağılıma sahip olmasıdır.

Şimdi de T_n ve S_n yenileme dizileri tanımlansın:

$$T_0 = S_0 = 0,\ T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ ,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \quad , n \geq 1$$

T_n , n.talep anı ve S_n ilk n. talebe kadar sisteme gelen talep miktarının toplamıdır.

$$N_0 = 0;\ N_1 = inf\{k \geq 1 : \text{z} - S_k < s\},\ z \in [s, S],$$

$$N_{n+1} = inf\{k \geq N_n + 1 : \zeta_n - S_k + S_{N_n} < s\},\ n \geq 1,$$

$$\tau_0 = 0;\ \tau_n = T_{N_n} = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i \quad ,\ n \geq 1,$$

$$\upsilon(t) = max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}, \qquad t \geq 0.$$

Not edelim ki $N_n,\ n \geq 1$ tam değerli rasgele değişkenler dizisi ve τ_1 stok seviyesinin kontrol seviyesinin (s) altına düştüğü ilk anı gösterir. Rasgele değişkenlerin bu dizileri kullanılarak üzerinde çalışılacak olan X(t) süreci aşağıdaki gibi elde edilir:

$$X_t = \zeta_n - (\eta_{N_{n+1}} + \eta_{N_{n+2}} + \cdots + \eta_{\upsilon(t)})$$

$$= \zeta_n - (S_{\upsilon(t)} - S_{N_n}), \quad t \in [\tau_n, \tau_{n+1}], n \geq 0,$$

X(t) süreci $t > 0$ anında depodaki materyal miktarını gösterir.

2.2.2. Sürecin Ergodikliği ve Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Kesin Formüller

Sürecin ergodikliği ve ergodik dağılımının kesin şekli belirli koşullar altında Khaniyev v.d. tarafından [46] çalışmasında aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 2.2.2.1 [46] $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}$ ve $\{\zeta_n\},\ n = 1,2, ...$ başlangıç rasgele değişkenleri aşağıdaki koşulları sağlasın:

i. $0 < E(\xi_1) < \infty$,

ii. $E(\eta_1) > 0$,

iii. $\{\eta_i\},\ i \geq 1$ aritmetik olmayan rasgele değişkenlerdir,

iv. Markov zincirini oluşturan $\{\zeta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu $\pi(z),\ [s, S]$ aralığında düzgün dağılıma sahiptir.

Yukarda belirtilen koşullar altında $X(t)$ süreci ergodiktir.

Sonuç 2.2.2.1 [46] Ölçülebilir sonlu $f(x)$, $(f:(s,S) \to \mathbb{R})$ fonksiyonu için aşağıdaki ilişki 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(u))\, du = \frac{\int_s^S \int_s^S f(x)\left[U_\eta(z-s) - U_\eta(z-x)\right] d\pi(z) dx}{\int_s^S U_\eta(z-s)\, d\pi(z)}.$$

Burada

$$U_\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x)$$

$\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur, ayrıca $F^{*n}(x)$, $F(x)$ dağılım fonksiyonunun n. konvülüsyon çarpımıdır. Sonuç 2.2.2.1' den yararlanılarak X(t) sürecinin ergodik dağılımı için kesin formüller aşağıdaki gibi elde edilir:

$$Q_X(x) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \leq x\} = 1 - \frac{\int_x^S U_\eta(z-x) d\pi(z)}{\int_s^S U_\eta(z-s) d\pi(z)};\ x \in [s,S].$$

Burada; $U_\eta(t)$, "η" rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur. İşlem kolaylığı açısından $X(t)$ sürecinin standartlaştırılmış hali olan $Y(t)$ süreci aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$Y(t) = \frac{X(t)-s}{\beta}, \qquad \beta \equiv \frac{S-s}{2}.$$

Dolayısı ile $Y(t)$ sürecinin ergodik dağılımı $Q_Y(v)$ ile gösterilir ise $Y(t)$ sürecinin ergodik dağılımı $Q_Y(v)$

$$Q_Y(v) = \lim_{t\to\infty} P\{Y(t) \leq v\}, \qquad v \in [0,2)$$

biçiminde tanımlanır. Bu durumda

$$Q_Y(v) = \lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{X(t)-s}{\beta} \leq v\right\} = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \leq \beta v + s\}$$

ve

$$Q_Y(v) = Q_X(s+\beta v) = 1 - \frac{\int_{s+\beta v}^{s+2\beta} U_\eta(z-s-\beta v)\, d\pi(z)}{\int_{s}^{s+2\beta} U_\eta(z-s)\, d\pi(z)}; \;\; v \in [0,2)$$

olacaktır. Burada ζ_n rasgele değişkenlerinin $[s, S]$ aralığında düzgün dağılıma sahip olduğu varsayılmıştı. Dolayısı ile, $\tilde{\zeta}_n = \zeta_n - s$ rasgele değişkenleri $[0,2\beta]$ aralığında düzgün dağılımlı olacaktır. $\tilde{\zeta}_n = \zeta_n - s$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonuna $\tilde{\pi}(x)$ denir ve $Q_Y(v)$ ergodik dağılım fonksiyonu için aşağıdaki kesin formüle ulaşılır:

$$Q_Y(v) = 1 - \frac{\int_{\beta v}^{2\beta} U_\eta(x-\beta v)\ \tilde{\pi}(x)dx}{\int_0^{2\beta} U_\eta(x)\, \tilde{\pi}(x)dx}; \; v \in [0,2).$$

$$Q_Y(v) = 1 - \frac{\frac{1}{2\beta}\int_{\beta v}^{2\,\beta} U_\eta(x-\ \beta\, v)dx}{\frac{1}{2\beta}\int_0^{\beta} U_\eta(x)d\mathrm{x}}$$

2.2.3. Sürecin Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Yaklaşık Sonuçlar

Bu kısımda talep miktarları sonlu varyanslı düzenli değişen dağılıma sahip kesikli müdahaleli (s,S) tipli envanter modelin ergodik dağılım fonksiyonu için aşağıdaki varsayımlar altında yaklaşık sonuçlar elde edilecektir.

1. Kesikli müdehaleyi ifade eden $\{\zeta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkeninin $(0, 2\beta)$ arasında düzgün dağılıma sahip
2. Talep miktarını ifade eden $\{\eta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenleri $2 < \alpha < 3$ kuyruk indeksi ile düzenli değişen Pareto dağılımına sahiptir. Yani

$\bar{F}(x) = P\{\eta_1 > x\} = b^\alpha\, x^{-\alpha},\ \ 2 < \alpha < 3$ ‘dır.

Sonlu varyanslı düzenli değişen dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için yaklaşık sonuçlar Embrechts ve Omey [26] çalışmasında aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$U_\eta(x) = \frac{x}{m_1} + \frac{1}{m_1}\int_0^x \bar{F}_I(y)\, dy + 2m_I\, \bar{F}_I(x).$$

Burada

$$F_I(x) = \frac{1}{m_1} \int_0^x \bar{F}(y)\, dy, \qquad m_I = \int_0^\infty \big(1 - F_I(x)\big)\, dx < \infty.$$

dır. Ayrıca $F_I(\mathrm{x})$ ile tanımlanan integrallenmiş kuyruk fonksiyonunun olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_I(x) = \frac{1}{m_1} \bar{F}(x), \qquad x \geq 0$$

biçimindedir.

Bu kısımda $2 < \alpha < 3$ kuyruk indeksi ile sonlu varyanslı düzenli değişen alt sınıfından Pareto dağılımına sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için yaklaşık sonuçlar elde edilirken Emrechts ve Omey [26] çalışmasında elde edilen sonuçlar kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 2.2.3.1 η_n rasgele değişkenleri Teorem 1.7.7 nin şartlarını sağlasın. Bu durumda;

$$m_I = \int_0^\infty \big(1 - F_I(x)\big)\, dx = \frac{m_2}{2m_1}$$

elde edilir.

İspat: Teorem 1.7.7'nin şartları altında

$$F_I(x) = \frac{1}{m_1} \int_0^x \bar{F}(y) dy$$

olduğu bilinmektedir.

$$m_I = \int_0^\infty (1 - F_I(x)) dx \tag{73}$$

Ayrıca:

$$E(\eta_1) = m_1 = \int_0^\infty \bar{F}(z) dz = \int_0^\infty z f(z) dz$$

ve

$$E(\eta_1^2) = m_2 = \int_0^\infty z^2 f(z) dz = \int_0^\infty 2z\bar{F}(z) dz$$

dır.

$\alpha > 2$ olduğu için,

$$\int_0^\infty \bar{F}(z)dz < \infty, \quad \int_0^y \bar{F}(z)dz = \infty$$

olur. Diğer taraftan;

$$f_I(x) = \frac{1}{m_1}\bar{F}(x) \Rightarrow x\, f_I(x) = \frac{x}{m_1}\bar{F}(x)$$

tir. Buradan

$$m_I = \int_0^\infty x f_I(x)dx = \int_0^\infty \frac{x}{m_1}\bar{F}(x) = \frac{1}{m_1}\int_0^\infty x\bar{F}(x)dx = \frac{1}{2m_1}\int_0^\infty 2x\bar{F}(x)dx$$
$$= \frac{1}{2m_1}E(X^2) = \frac{m_2}{2m_1}$$

sonucu elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.2.3.2 η_n rasgele değişkenleri Teorem 1.7.7 nin şartlarını sağlasın. Bu durumda η_n rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_\eta(x) = \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2{m_1}^2} - \frac{1}{{m_1}^2}\int_x^\infty \int_y^\infty \bar{F}(t)dt\, dy + \frac{m_2}{{m_1}^2}\int_x^\infty \bar{F}(y)dy \tag{74}$$

İspat: Öncelikle;

$$m_1 = E(X) = \int_0^\infty \bar{F}(y)dy = \int_0^x \bar{F}(y)dy + \int_x^\infty \bar{F}(y)dy$$
$$m_1 - \int_x^\infty \bar{F}(y)dy = \int_0^x \bar{F}(y)dy$$

Bu durumda,

$$1 - \frac{1}{m_1}\int_x^\infty \bar{F}(y)dy = \frac{1}{m_1}\int_0^x \bar{F}(y)dy = F_I(x)$$

o halde

$$\bar{F}_I(x) = \frac{1}{m_1}\int_x^\infty \bar{F}(y)dy \tag{75}$$

elde edilir. Yardımcı teorem 2.2.3.1 kullanılarak;

$$m_I = \frac{m_2}{2m_1} = \int_0^x \bar{F}_I(y)dy + \int_x^\infty \bar{F}_I(y)dy$$

sonucu elde edilir. Buradan kolayca görülür ki;

$$\frac{1}{m_1}\int_0^x \bar{F}_I(y)dy = \frac{m_2}{2{m_1}^2} - \frac{1}{m_1}\int_x^\infty \bar{F}_I(y)dy \tag{76}$$

dir.

$$U_\eta(x) = \frac{x}{m_1} + \frac{1}{m_1}\int_0^x \bar{F}_I(y)dy + \frac{m_2}{m_1}\bar{F}_I(x) \tag{77}$$

olarak elde edilmiş idi. (75) ve (76), (77)'da yerine yazılır ise;

$$U_\eta(x) = \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2{m_1}^2} - \frac{1}{m_1}\int_x^\infty \bar{F}_I(y)dy + \frac{m_2}{m_1}\frac{1}{m_1}\int_x^\infty \bar{F}(y)dy$$

$$= \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2{m_1}^2} - \frac{1}{m_1}\int_x^\infty \bar{F}_I(y)dy + \frac{m_2}{{m_1}^2}\int_x^\infty \bar{F}(y)dy$$

$$= \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2{m_1}^2} - \frac{1}{{m_1}^2}\int_x^\infty \int_y^\infty \bar{F}(t)dt\,dy + \frac{m_2}{{m_1}^2}\int_x^\infty \bar{F}(y)dy$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.2.3.3 $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ sonlu varyanslı düzenli değişen dağılımlı Pareto dağılımına sahip rasgele değişkenlerinin bir dizisi olsun. Yani $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu $F(x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^\alpha, x \geq b,\ b > \alpha,\ 2 < \alpha < 3$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ rastgele değişkeni tarafından üretilen yenileme fonksiyonu Yardımcı Teorem 2.2.3.2 kullanılarak yaklaşık olarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U_\eta(x) = \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2\,m_1^2} + \frac{b^\alpha}{m_1^2\,(\alpha-1)(2-\alpha)}\,x^{2-\alpha} + \frac{m_2 b^\alpha}{m_1^2\,(\alpha-1)}\,x^{1-\alpha}. \tag{78}$$

İspat: Yardımcı Teorem 2.2.3.2'de

$$U_\eta(x) = \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2{m_1}^2} - \frac{1}{{m_1}^2}\int_x^\infty \int_y^\infty \bar{F}(t)dt\,dy + \frac{m_2}{{m_1}^2}\int_x^\infty \bar{F}(y)dy$$

biçiminde elde edilmiştir.

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{b}{x}\right)^\alpha, \alpha > 2$$

olduğundan;

$$U_\eta(x) = \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} - \frac{b^\alpha}{m_1^2}\int_x^\infty \int_y^\infty t^{-\alpha}dt\,dy + \frac{m_2 b^\alpha}{m_1^2}\int_x^\infty y^{-\alpha}dy$$

$$= \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} - \frac{b^\alpha}{m_1^2}\int_x^\infty \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_y^\infty dy + \frac{m_2 b^\alpha}{m_1^2}\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_x^\infty$$

$$= \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} - \frac{b^\alpha}{m_1^2}\int_x^\infty \frac{y^{1-\alpha}}{\alpha-1}dy + \frac{m_2 b^\alpha}{m_1^2}\frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

$$= \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} - \frac{b^\alpha}{m_1^2}\frac{y^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\Big|_x^\infty + \frac{m_2 b^\alpha}{m_1^2}\frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

$$= \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2\,m_1^2} + \frac{b^\alpha}{m_1^2\,(\alpha-1)(2-\alpha)}\;x^{2-\alpha} + \frac{m_2 b^\alpha}{m_1^2\,(\alpha-1)}\;x^{1-\alpha}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.2.3.4 Yardımcı Teorem 2.2.3.3 ve Teorem 2.2.2.1' in şartları sağlansın.

$$J(v) = \int_{\beta v}^{2\,\beta} U_\eta(x - \,\beta\, v)dx = \int_0^{2\,\beta-\beta v} U_\eta(t)dt$$

tanımlanır ise $J(v)$ için $\beta \equiv \frac{S-s}{2} \to \infty$ durumunda aşağıdaki yaklaşık sonuç elde edilir:

$$\mathrm{J}(v) = \frac{(2\beta-\beta v)^2\mu_1}{2\mu_1^2} + \frac{(2\beta-\beta v)\,\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{b^\alpha}{\mu_1^2}\frac{(2\beta-\beta v)^{3-\alpha}}{(\alpha-1)(\alpha-2)(3-\alpha)} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - \frac{\mu_2}{\mu_1^2}\;\frac{b^\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)}(2\beta-\beta v)^{3-\alpha}. \tag{79}$$

dır. Burada $\mu_k = E(\eta_1^k)$, $k = 1{,}2$, $x \geq b$, $b > \alpha$, $2 < \alpha < 3$ dır.

İspat: $J(v) = \int_{\beta v}^{2\,\beta} U_\eta(x - \,\beta\, v)dx = \int_0^{2\,\beta-\beta v} U_\eta(t)dt$

$$= \int_0^{2\beta-\beta\upsilon} \left[\frac{t}{m_1} + \frac{m_2}{2{m_1}^2} - \frac{1}{{m_1}^2}\int_t^{\infty}\int_y^{\infty}\bar{F}(z)dz\,dy + \frac{m_2}{{m_1}^2}\int_t^{\infty}\bar{F}(y)dy\right]dt$$

$$= \int_0^{2\beta-\beta\upsilon} \frac{t}{m_1}dt + \int_0^{2\beta-\beta\upsilon}\frac{m_2}{2{m_1}^2}dt$$
$$-\frac{1}{{m_1}^2}\int_0^{2\beta-\beta\upsilon}\int_t^{\infty}\int_y^{\infty}\bar{F}(z)dz\,dydt + \frac{m_2}{{m_1}^2}\int_0^{2\beta-\beta\upsilon}\int_t^{\infty}\bar{F}(y)dy\,dt$$

elde edilir. Öncelikle: $2 < \alpha < 3$ için,

$$\int_0^{2\beta-\beta\upsilon}\int_t^{\infty}\int_y^{\infty}\bar{F}(z)dz\,dydt = \int_0^{2\beta-\beta\upsilon}\int_t^{\infty}\int_y^{\infty}b^{\alpha}z^{-\alpha}dz\,dydt$$
$$= \int_0^{2\beta-\beta\upsilon}\int_t^{\infty}\left(\frac{b^{\alpha}y^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right)dydt = \int_0^{2\beta-\beta\upsilon}\left(\frac{b^{\alpha}y^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\Big|_t^{\infty}\right)dt$$
$$= \int_0^{2\beta-\beta\upsilon}\left(\frac{b^{\alpha}t^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\right)dt = \frac{b^{\alpha}}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\int_0^{2\beta-\beta\upsilon}t^{2-\alpha}dt$$
$$= \frac{b^{\alpha}}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\frac{(2\beta-\beta\upsilon)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}, \tag{80}$$

olarak bulunur. Daha sonra:

$$\int_0^{2\beta-\beta\upsilon}\int_t^{\infty}\bar{F}(y)dy\,dt \tag{81}$$

ifadesine ulaşılacaktır.

$$\int_x^{\infty}\bar{F}(y)dy = m_1\,\bar{F}_I(x)$$

ve

$$m_I = \int_0^{\infty}\bar{F}_I(x)dx < \infty$$

olduğu bilindiğinden;

$$\int_0^{2\beta-\beta\upsilon}\int_t^{\infty}\bar{F}(y)dy\,dt = m_1\int_0^{2\beta-\beta\upsilon}\bar{F}_I(x)dx < \infty$$

dir. Buradan

$$m_1\int_0^{2\,\beta-\beta\upsilon}\bar{F}_I(x)dx = m_1\int_0^{\infty}\bar{F}_I(x)dx - m_1\int_{2\,\beta-\beta\upsilon}^{\infty}\bar{F}_I(x)dx$$

$$= \frac{m_2}{2} - m_1\int_{2\,\beta-\beta\upsilon}^{\infty}\bar{F}_I(x)dx \tag{82}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\bar{F}_I(x) = \frac{1}{m_1}\int_x^{\infty}\bar{F}(y)dy$$

olduğu biliniyor. (82) kullanılarak;

$$\frac{m_2}{{m_1}^2}\int_0^{2\,\beta-\beta\upsilon}\int_t^{\infty}\bar{F}(y)dy\ dt = \frac{m_2}{{m_1}^2}\left[\frac{m_2}{2} - m_1\int_{2\,\beta-\beta\upsilon}^{\infty}\bar{F}_I(x)dx\right] \tag{83}$$

elde edilir.

$$\bar{F}_I(x) = \frac{1}{m_1}\int_x^{\infty}b^{\alpha}y^{-\alpha}dy = \frac{1}{m_1}\frac{b^{\alpha}y^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_x^{\infty} = \frac{1}{m_1}\frac{b^{\alpha}x^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

olduğundan

$$m_1\int_{2\,\beta-\beta\upsilon}^{\infty}\bar{F}_I(x)dx = m_1\frac{1}{m_1}\int_{2\,\beta-\beta\upsilon}^{\infty}\frac{b^{\alpha}x^{1-\alpha}}{\alpha-1}dx$$

$$= b^{\alpha}\frac{(2\,\beta-\beta\upsilon)^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(\alpha-2)} \tag{84}$$

bulunur. (84) ifadesi, (83) ifadesinde yerine yazılır ise

$$\frac{m_2}{{m_1}^2}\int_0^{2\,\beta-\beta\upsilon}\int_t^{\infty}\bar{F}(y)dy\ dt =$$

$$= \frac{m_2}{{m_1}^2}\left[\frac{m_2}{2} - m_1\int_{2\,\beta-\beta\upsilon}^{\infty}\bar{F}_I(x)dx\right]\frac{m_2}{{m_1}^2}\left[\frac{m_2}{2} - b^{\alpha}\frac{(2\,\beta-\beta\upsilon)^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\right]$$

$$= \frac{{m_2}^2}{2{m_1}^2} + \frac{m_2}{{m_1}^2}b^{\alpha}\frac{(2\,\beta-\beta\upsilon)^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(2-\alpha)} \tag{85}$$

elde edilir. (80) ve (85) için bulunan değerler $J(\upsilon)$' da yerine yazılır ise

$$\mathrm{J}(\upsilon) = \frac{(2\beta - \beta\upsilon)^2 m_1}{2{m_1}^2} + \frac{(2\beta - \beta\upsilon)\, m_2}{2{m_1}^2} + \frac{b^\alpha}{{m_1}^2}\frac{(2\beta - \beta\upsilon)^{3-\alpha}}{(\alpha-1)(\alpha-2)(3-\alpha)}$$
$$+ \frac{{m_2}^2}{2{m_1}^2} - \frac{m_2}{{m_1}^2}\; \frac{b^\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)}(2\beta - \beta\upsilon)^{3-\alpha}.$$

elde edilir.

Sonuç 2.2.3.1 Yardımcı Teorem 2.2.3.4'ün şartları sağlansın. $\upsilon \to 0$ ve $\beta \equiv \frac{S-s}{2} \to \infty$ için

$$J(0) = \frac{(2\,\beta)^2}{2m_1} + \frac{m_2}{2{m_1}^2}(2\,\beta) - \frac{1}{{m_1}^2}\frac{b^\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\frac{(2\,\beta)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} + \frac{{m_2}^2}{2{m_1}^2}$$
$$+ \frac{m_2}{{m_1}^2} b^\alpha \frac{(2\,\beta)^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(2-\alpha)}.$$

$$\mathrm{m_k} = \mathrm{E}(\eta_1^k), \qquad \mathrm{k} = 1,2, \qquad \mathrm{x} \ge \mathrm{b}, \qquad \mathrm{b} > \alpha, \qquad 2 < \alpha < 3$$

elde edilir.

Teorem 2.2.3.1 bu kısımda elde edilmesi amaçlanan temel sonucu vermektedir.

Teorem 2.2.3.1 Teorem 1.7.7, Yardımcı Teorem 2.2.3.3 ve Teorem 2.2.2.1' in şartları sağlansın. Ayrıca talep miktarını ifade eden $\eta_n,\ n \ge 1;\quad 2 < \alpha < 3$ kuyruk indeksi ile sonlu varyanslı düzenli değişen alt sınıfından Pareto dağılımına sahip olsun. Bu durumda $\mathrm{Y(t)}$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu için aşağıdaki yaklaşık sonuç elde edilir:

$$Q_Y(\upsilon) = \frac{\{(4m_1\upsilon - m_1\upsilon^2)\beta^2 + (m_2\upsilon)\beta + c_3\,\beta^{3-\alpha} + c_4\,\beta^{2-\alpha}\}}{\{4m_1\beta^2 + (m_2\upsilon)\beta + [c_1 2^{3-\alpha}]\beta^{3-\alpha} + {m_2}^2 - (c_2 m_2)\beta^{2-\alpha}\}}$$

Burada

$$m_k = E({\eta_1}^k), k = 1,2, \quad x \ge b, \quad b > \alpha, \quad 2 < \alpha < 3$$

ve

$$c_1 = \frac{2b^\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}, \quad c_2 = \frac{2b^\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$$

$$c_3 = c_1(\,2^{3-\alpha} - (2-\upsilon)^{3-\alpha}), \quad c_4 = c_2 m_2(\,(2-\upsilon)^{2-\alpha} - 2^{2-\alpha})$$

biçimindedir.

İspat: Y(t) süreci için ergodik dağılım fonksiyonunun kesin formülü

$$Q_Y(v) = 1 - \frac{\int_{\beta v}^{2\beta} U_\eta(x - \beta v)dx}{\int_0^{2\beta} U_\eta(x)dx} = 1 - \frac{J(v)}{J(0)} \tag{86}$$

biçiminde verilmiş idi. $J(v)$ ve $J(0)$ için bulunmuş olan ifadeler (86)'da yerine yazılır ise

$$\begin{aligned}
Q_Y(v) = 1 - \Bigg\{ & \left[\frac{(2\beta - \beta v)^2}{2m_1} + \frac{m_2}{2{m_1}^2}(2\beta - \beta v)\right. \\
& \left. - \frac{1}{{m_1}^2}\frac{b^\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\frac{(2\beta - \beta v)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} + \frac{{m_2}^2}{2{m_1}^2} + \frac{m_2}{{m_1}^2}b^\alpha\frac{(2\beta - \beta v)^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\right] \\
& \left[\frac{(2\beta)^2}{2m_1} + \frac{m_2}{2{m_1}^2}(2\beta) - \frac{1}{{m_1}^2}\frac{b^\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\frac{(2\beta)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} + \frac{{m_2}^2}{2{m_1}^2}\right. \\
& \left. + \frac{m_2}{{m_1}^2}b^\alpha\frac{(2\beta)^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\right]^{-1}\Bigg\} \\
& = \{(4m_1v - m_1v^2)\beta^2 + (m_2v)\beta + [c_1(2^{3-\alpha} - (2-v)^{3-\alpha})]\beta^{3-\alpha} \\
& + [c_2m_2((2-v)^{2-\alpha} - 2^{2-\alpha})]\beta^{2-\alpha}\} \\
& \{4m_1\beta^2 + (m_2v)\beta + [c_12^{3-\alpha}]\beta^{3-\alpha} + {m_2}^2 - (c_2m_2)\beta^{2-\alpha}\}^{-1} \\
& = \frac{\{(4m_1v - m_1v^2)\beta^2 + (m_2v)\beta + c_3\beta^{3-\alpha} + c_4\beta^{2-\alpha}\}}{\{4m_1\beta^2 + (m_2v)\beta + [c_12^{3-\alpha}]\beta^{3-\alpha} + {m_2}^2 - (c_2m_2)\beta^{2-\alpha}\}}
\end{aligned}$$

Burada

$$m_k = E({\eta_1}^k), k = 1,2, \quad x \geq b, \quad b > \alpha, \quad 2 < \alpha < 3$$

$$c_1 = \frac{2b^\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}, \quad c_2 = \frac{2b^\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$$

$$c_3 = c_1(2^{3-\alpha} - (2-v)^{3-\alpha}), \quad c_4 = c_2m_2((2-v)^{2-\alpha} - 2^{2-\alpha})$$

sonucu elde edilir.

3. BULGULAR

(s,S) tipli yarı-markov envanter modeller daha önce pek çok farklı çalışmada ele alınmış sistemi ifade eden sürecin sayısal ve olasılık karakteristikleri incelenmiştir. Bu çalışmada ise (s,S) tipli yarı-Markov envanter modeller ağır kuyruklu dağılımların $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfından daha sonra da $\mathcal{R}_\alpha$ sınıfından bir ağır kuyruklu dağılıma sahip talep miktarları ile incelenmiştir.

Öncelikle yarı Markov envanter model, ödüllü yenileme süreci olarak adlandırılan yarı-Markov bir süreç yardımıyla matematiksel olarak inşa edilmiştir. Bunun için daha önce bu konuda yapılmış çalışmalardan yararlanılmıştır. (s,S) tipli envanter modeller ile ilgili yapılmış olan önceki çalışmalarda sistemi ifade eden sürecin ergodikliği ispat edilmiş, ayrıca ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılım fonksiyonunun momentleri için kesin formüller talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu aracılığı ile verilmiştir Khaniyev ve Atalay [44], Khaniyev ve Aksop [45] Khaniyev v.d. [46], Aliyev v.d. [3], Aliyev [4]. Bu konuda yapılmış olan son çalışmalarda ise Kesemen v.d. [41] ve Bektaş Kamışlık [40] talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler alt-üstel dağılıma ve sonsuz varyanslı düzenli değişen dağılıma sahipken süreç incelenmiş, sürecin ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılımın momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır. Bu çalışmada ise literatürdeki mevcut çalışmalara ek olarak aşağıdaki bulgulara erişilmiştir.

Yenileme sürecinde yenileme fonksiyonunu oluşturan rasgele değişkenler $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfından olduğunda Emrechts ve Omey [26] tarafından yenileme fonksiyonu için önerilmiş olan asimptotik açılım kullanılmıştır. Böylece $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfından sonlu varyanslı düzenli değişen Pareto dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu elde edilmiştir. Talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfından düzenli değişen dağılıma sahipken klasik (s,S) tipli stok kontrol modelleri asimptotik yöntemler ile incelenmiştir. Sistemi ifade eden sürecin ergodikliği gösterilmiştir. Sistemin ergodik dağılım fonksiyonu için asimptotik açılımlara ulaşılmış ve zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiştir.

Daha sonra $\mathcal{R}_\alpha$ sınıfından rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için Mitov ve Omey [57] tarafından önerilen yaklaşık sonuçlar kullanılmıştır. Sonlu varyanslı düzenli değişen Pareto dağılımına sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için yaklaşık çözüme ulaşılmıştır. Talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler sonlu varyanslı düzenli değişen Pareto dağılımına sahipken kesikli düzgün müdahaleli (s,S) tipli stok kontrol modelleri yaklaşım yöntemleri ile incelenmiştir. Sistemi ifade eden sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için yaklaşık sonuçlar elde edilmiştir.

4. İRDELEME

(s,S) tipli stok kontrol modelleri de dahil olmak üzere yenileme süreçleri ile ifade edilen modellerin karakteristiklerini incelerken yenileme fonksiyonunun asimptotik ifadesini bilmek gerekir. Literatürde önemli iki açılım hafif kuyruklu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonları için Smith [67] ve Feller [29] tarafından önerilmiştir.

Ağır kuyruklu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonlarının asimptotik ifadelerine ulaşabilmek için dağılımların kuyruk davranışlarına göre farklı açılımlar elde etmek gerekir. Farklı altsınıflardan ağır kuyruklu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonlarının asimptotik açılımlarını bulmaya yönelik ilk önemli çalışmalar Feller [29], Smith [67], Teugels [69], Anderson ve Athreya [5], Mohan [59], Embrechts ve Omey [26] Geluk [34], Geluk ve Frenk [35] ve Mitov ve Omey [57] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmanın amacı farkı literatürde daha önce pek çok dağılım ile incelenmiş olan (s,S) tipli envanter modellerini iki önemli alt sınıftan ağır kuyruklu dağılıma sahip talep miktarları ile incelemektir.

Bu amaçla farklı altsınıflardan ağır kuyruklu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonları için literatürde önerilen açılımlar (s,S) tipli stok kontrol modellerine uygulanmış ve süreçlerin ergodik dağılımları için asimptotik açılımlara ve yaklaşık çözümlere ulaşılmıştır. Ayrıca elde edilen asimptotik açılımlar için zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiştir.

Bu çalışmanın konusu olan (s,S) tipli envanter modeller daha önce talep miktarlarının ağır kuyruklu dağılıma sahip olduğu durumlar için de incelenmiş ve önemli sonuçlara ulaşılmıştır (Aliyev [4], Kesemen v.d [41] ve Bektaş Kamışlık [40]). Literatürdeki bütün bu çalışmalarda (s,S) tipli envanter modeller alt üstel dağılıma sahip ve sonsuz varyanslı düzenli değişen dağılıma sahip talep miktarları ile incelenmiş sürecin karakteristikleri için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır. Bu çalışmanın diğer çalışmalardan farkı ise (s,S) tipli envanter modellerin $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfından ve $\mathcal{R}_\alpha$ sınıfından talep miktarları ile incelenmiş olmasıdır. Ayrıca bu çalışmada ilk defa sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için asimptotik terim içermeyen yaklaşık sonuçlara ulaşılmıştır. Böylece modellerin sıkça kullanıldığı stok kontrol ve risk teorisi alanlarında karşılaşılabilecek aykırı değerleri de değerlendirmeye alma olanağı sağlanarak, süreçlerin bu alanlardaki uygulamalarında daha gerçekçi sonuçların elde edileceği düşünülmektedir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada (s,S) tipli klasik envanter modeller ve düzgün müdehaleye sahip (s,S) tipli envanter modeller sırası ile ağır kuyruklu dağılımların $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfından ve $\mathcal{R}_\alpha$ sınıfından talep miktarları ile incelenmiştir. Aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Her bir altsınıfa ait rastgele değişken tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için farklı bir asimptotik açılım tespit edilmiş ve bu çalışmada ele alınan problemde kullanılabilir olup olmadığı tespit edilmiştir.

2. Ağır kuyruklu dağılımların altsınıflarından seçilen rastgele değişkenlere, rastgele değişkenin bulunduğu altsınıfın özelliklerine uygun olan özel açılım formülleri uyguladığında hafif kuyruklu dağılımlar için genel durumda önerilen açılımlardan daha farklı sonuçlar elde edilebildiği görülmüştür.

3. Talep miktarları farklı sınıflardan ağır kuyruklu dağılımlara sahip (s,S) tipli stok kontrol modellerinde sistemdeki stokun rastgele miktarını karakterize eden dağılımın asimptotik ifadesini elde edilmiştir. Bu hedefe ulaşmak için farklı altsınıflardan rastgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonları saptanmıştır.

4. Bir önceki maddede saptanan asimptotik açılımlardan Emrechts ve Omey [26] tarafından yenileme fonksiyonu için önerilmiş olan asimptotik açılım kullanılarak $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfından sonlu varyanslı düzenli değişen Pareto dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu elde edilmiştir. Talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ sınıfından düzenli değişen sonlu varyanslı Pareto dağılıma sahipken klasik (s,S) tipli stok kontrol modelinin ergodikliği gösterilmiştir. Sistemin ergodik dağılım fonksiyonu için asimptotik açılımlara ulaşılmış ve zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiştir. Burada kuyruk indeksi olarak $\alpha > 2$ alınmıştır.

5. 3 numaralı maddede saptanan asimptotik açılımlardan $\mathcal{R}_\alpha$ sınıfından rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için Mitov ve Omey [57] tarafından önerilen yaklaşık sonuçlar kullanılarak sonlu varyanslı düzenli değişen Pareto dağılımına sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için yaklaşık çözüme ulaşılmıştır. Talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler sonlu varyanslı düzenli

değişen Pareto dağılımına sahipken kesikli düzgün müdahaleli (s,S) tipli stok kontrol modelleri yaklaşım yöntemleri ile incelenmiştir. Sistemi ifade eden sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için yaklaşık sonuçlar elde edilmiştir. Bu kısımda kuyruk indeksi olarak $2 < \alpha < 3$ durumu incelenmiştir. Bu durumda bilindiği gibi düzenli değişen dağılımlar sonlu varyansa sahiptir. Bu kısımda elde edilen sonuçların literatürde daha önce elde edilmiş olan benzer sonuçlardan en büyük farkı burada asimptotik terim içermeyen yaklaşık sonuçların elde edilmiş olmasıdır.

6. ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının ana motivasyonu literatürde önemli bir yere sahip olan ağır kuyruklu dağılımların envanter modeller ile ilgili problemlerde kullanılması ile ilgili tespit edilmiş olan boşluktur. Çalışmanın tespit edilmiş olan bu boşluğu bir nebze olsun doldurabileceği ve bu alanda gelecekte yapılacak olan çalışmalar için bir başlangıç olabileceği umulmaktadır. Yapılmış olan bu çalışma aşağıdaki yönlerden geliştirilebilir:

1. Müdahaleyi ifade eden rasgele değişkenin düzgün dağılımdan daha farklı ve karmaşık yapıdaki dağılımlara sahip olduğu durumlar için benzeri problemlerin çözülmesi.

2. Benzeri süreçlerin ve rasgele yürüyüş süreçlerinin ağır kuyruklu dağılımların farklı altsınıflarından talep miktarları ile incelenmesi.

3. Çalışmada ele alınan yarı Markov envanter modeller için ağır kuyruklu tahmincilerin elde edilmesi.

4. Talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler ağır kuyruklu iken bu çalışmada ele alınan sürecin ergodik dağılım fonksiyonunun momentleri için analitik ve asimptotik çözümlerin bulunması.

7. KAYNAKLAR

1. Adler, R.J., Feldman, R.E. ve Taqqu, M.S. (eds) A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications. Birkhäuser, Boston, 1998.

2. Aliyev, R., Stokastik Süreçler Teorisine Giriş, Karadeniz Teknik Üniversitesi Matbaası, Trabzon 2010.

3. Aliyev, R., Ardıç, Ö. ve Khaniyev, T., Asymptotic approach for a renewal-reward process with a general interference of chance, Communication in statistics: Theory and Methods 45, 14 (2016) 4237-4248.

4. Aliyev, R., On a stochastic process with a heavy-tailed distributed component describing inventory model type of (s, S), Communications in Statistics: Theory and Methods, 46, 5 (2016) 2571-2579.

5. Anderson, K.K. ve Athreya, K.B., A renewal theorem in the infinite mean case, Ann. Prob. , 88 , 15 (1987) 388-393.

6. Araman, V.F., Theory and Applications of Stochastic Systems Lecture 11, November 21, 2003.

7. Athreya, K.B. ve Ney, P.E. Branching Processes Springer, New York, 1972.

8. Asmussen, S., Ruin Probabilities, Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability, World Scientific Publishing, Singapore, 2000.

9. Aydoğdu, H. ve Atakan, C., Yenileme süreçleri ve integral denklemler, S.Ü.Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi, 20 (2012) 91-97, Konya.

10. Beirlant, J., Goeghebeur, Y., Teugels, J. and Segers, J. Statistics of Extremes: Theory and Applications. Wiley, Chichester, 2004.

11. Bekar, N.O., Ödüllü Yenileme Süreçlerinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Matbaası, Şubat, 2012 Trabzon

12. Bekar, N.O., Aliyev,R. ve Khaniyev, T., Asymptotic expansions for a renewal-reward process with Weibull distributed interference of chance, Contemporary Analysis and Applied Mathematics, 2, 1 (2013) 200-211.

13. Bingham, N., H., Goldie, C., M. ve Teugels, J., L., Encyclopedia of Mathematics and its Applications-Regular Variation, Cambridge University Press, New-York, 1987.

14. Blackwell, D.A., Renewal theorem, Duke Math. J., 15 (1948) 145-150.

15. Bulut, B. ve Erdemir, C., Kalın kuyruklu risk modellerinde iflas olasılığı, İstatistikçiler Dergisi, 4 (2011) 39-56.

16. http://contacts.ucalgary.ca/info/math/files/info/unitis/courses/AMAT425/F2008/LEC1/AMAT425-F08-LEC1-Big-O-and-Small-o.pdf, 4 Şubat 2016.

17. Castillo, E., Hadi, A., Balakrishnan, N. ve Sarabia, J., Extreme Value and Related Models with Applications in Engineering and Science. Wiley, Hoboken, NJ, 2006.

18. Chen, F. ve Zheng, Y.S., Sensitivity analysis of an (s,S) inventory model. Operations Research Letters, 21, 1 (1997) 19–23.

19. Chistyakov, V.P., A theorem on sums of independent positive random variables and its applications to branching random processes, Theory Probab. Appl., 9 (1964) 640-648.

20. Chover, J. , P. Ney ve S. Wainger, Functions of probability measures, J. Anal. Math. 26 (1973) 255-302.

21. Cline D.B.H., Samorodnitsky, G., Subexponentiality of the product of independent random variables, Stochastic Process and Their Applications, 49 (1994) 75-98, North-Holland.

22. Coles, S. An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values. Springer, London, 2001.

23. Davis R.A. ve Resnick, S.I. Limit theory for moving averages of random variables with regularly varying tail probabilities. Annals of Probabilty, 13 (1985) 179-195.

24. Denisov, D., Korshunov, D., Vitali, W., Tail Asymtotics for the Supercriticial Galton-Watson Process in the Heavy-Tailed Case, 2010.

25. Dimitros, G., Konstantinides ve Christos E. Kountzakis, Coherent Risk Measures Under Dominated Variation, http://www.samos.aegean.gr/actuar/konstant/Kountzakis ICSIM-14.pdf, 24 Ocak 2017.

26. Embrechts, P., Omey, E., A property of longtailed distributions, J. Appl. Prob.,21 (1984) 80-87.

27. Embrechts, P., Klüppelberg, C. ve Mikosch T., Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Applications of Mathematics Stochastic Modelling and Applied Probability 33 , Springer, New York, 2001.

28. Embrechts, P. ve Veraverbeke, N., Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. Insurance Mathematics. Econom., 1 (1982) 55–72.

29. Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications II (2nd Edition), Wiley, New York, 1971.

30. Foss, S., Rare Events in Random Walks and Queueing Networks in the Presence of Heavy-Tailed Distributions, The University of Texas at Austin, 2009.

31. Foss, S., Korshunov, D. ve Zachary, S., An Introduction to Heavy Tailed and Subexponential Distributions, Springer Series in Operaions Research and Financial Engineering, New York, 2011

32. Gao, Q., Wang, Y., Randomly weighted sums with dominated varying-tailed increments and application to risk theory, Journal of the Korean Statistical Society, 39 (2010) 305-314.

33. Gavirneni, S., An efficient heuristic for inventory control when the customer is using a (s; S) policy. Operations Research Letters, 28, 4 (2001) 187–192.

34. Geluk, J.L., A Renewal Theorem in the finite-mean case, Proceedings of the American Mathematical Society, 125, 11 (1992) 3407-3413.

35. Geluk, J.L. ve Frenk, J.B.G., Renewal theory for random variables with a heavy tailed distribution and finite variance, Statistics and Probability Letters, 81 (2011) 77-82.

36. Gihman, I., I. ve Skorohod, A., V., Theory of Stochastic Processes II, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1975.

37. Goldie, C.M., Subexponential distributions and dominated-variation aails, J. Appl. Prob., 15 (1978) 440-442.

38. Goldie, C.M. ve Klüppelberg, C., Subexponential distributions, a practical guide to heavy tails: Statistical Techniques and Applications, (1998) 435-460.

39. Gut, A., Stopped Random Walks Limit Theorems and Applications e-book, Springer, New York, 2008.

40. Kamışlık, A.B., (s,S) tipli Envanter Modellerin Ağır Kuyruklu Dağılımların Belirli Alt Sınıfları İle İncelenmesi, Trabzon Mart 2017.

41. Kesemen, T., Kamışlık, A.B., Küçük, Z. ve Şenol E., Inventory model of (s,S) with subexponential Weibull distributed demand, 9, 3 (2016) 81-92.

42. Kesemen, T., On the semi-Markovian random walk with delay and Weibull distributed interference of chance, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 42, 3 (2013) 299-3007.

43. Kesemen, T., Aliyev, R. ve Khaniyev, T., Limit distribution for semi-Markovian random walk with Weibull distributed interference of chance, Journal of Inequalities and Applications, 1 (2013) 134.

44. Khaniyev, T.A. ve Atalay, K.D., On the weak convergence of the ergodic distribution for an inventory model of type (s,S), Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 9, 4 (2010) 599-611.

45. Khaniyev, T. ve Aksop, C., Asymptotic results for an inventory model of type (s,S) with a generalized beta interference of chance, TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, 2, 1 (2011) 223 – 236.

46. Khaniyev, T.A., Kokangul, A. ve Aliyev, R.T., An asymptotic approach for a semi-Markovian inventory model of type (s, S), Applied Stochastic Models in Business and Industry, 29, 5 (2013) 439 – 453.

47. Klüppelberg, C., Subexponential distributions and integrated tails, Journal of Applied Probability 25, 1 (1988) 132-141.

48. Kolmogoroff, A., Über die Analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeit, Mathematische Annalen, 104, 1 (1931) 415- 458.

49. Küçüközmen, C.C. ve Mazıbaşı, M., Bankalarda Operasyonel Riskin Ölçümü: Uç Değer Teorisi Uygulaması, www.coskunkucukozmen.com/wpcontent/uploads/2012/02/ucdeğer.pdf

50. Levy, J.B. ve Taqqu, M.S., Renewal reward processes with heavy-tailed interrenewal times and heavy-tailed rewards, Bernoulli, 6, 1 (2001) 23–44.

51. Li, J., Wang, K., Wang, Y., Finite-time ruin probability with NQD dominated varying-Tailed claims and nlod inter-arrival times, Jrl Syst Sci & Complexity, 22 (2009) 407-414.

52. Liesen, J., Blath, J., Foss, S. ve Scheutzow, M., New Classes Of Large Claim Size Distributions: Introduction, Properties And Application, Berlin, 2014.

53. Lotov, V. I., On some boundary crossing problems for Gaussian random walks, The Annals of Probability, 24, 4 (1996) 2154-2171.

54. McNeil, A.J., Frey, R.ve Embrechts, P., Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, Tools. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.

55. Markovich, N., Nonparametric Analysis Of Univariate Heavy-Tailed Data, Moscow, Russia, 2007.

56. Meyer, P. A., Stochastic processes from 1950 to the present, Electronic Journal for History of Probability and Statistics, 5, 1 (2009) 1-42.

57. Mitov, K.V., Omey, E., Intuitive approximations for the renewal function, Statistics and Probability Letters, 84 (2014) 72-80.

58. Mikosh, T., Regular Variation, Subexponentiality and Their Applications in Probability Theory. www.eurandom.tue.nl/reports/1999/013-report.pdf 24 Ocak 2017.

59. Mohan, N.R., Teugels renewal theorem and stable laws, Annals of Probability, 54, 4 (1976) 863-868.

60. Nasirova, T., Khaniyev, T., Yapar, C., Ünver, İ. ve Küçük, Z., Olasılık, Karadeniz Teknik Üniversitesi Matbaası, Trabzon 2009.

61. Odd O. Aalen, Introduction to Counting Process. http://folk.uio.no/74rogan/BGC1-2012/slides/Introduction-counting-processes-handouts.pdf , Mart 2012, Oslo.

62. Pinelis, I.F., Asymptotic equivalence of the probabilities of large deviations for sums and maxima of independent random variables, in: A.A. Borovkov, ed., Limit Theorems of Probability Theory, Trudy Inst. Mat. 5 “Nauka” Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 1985 144-173.

63. Prabhu, N. U., Stochastic Storage Processes. New York: Springer-Verlag, 1981.

64. Resnick, S., I., Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, New York, 2006.

65. Samorodnitsky, G., Sun, J., Multivariate Subexponential Distributions and Their Applications,http://people.orie.cornell.edu/gennady/techreports/MultSubFinal.pdf, NewYork.

66. Sgibnev, M.S., Renewal theorem in the case of an infinite variance. Siberian Math. J. 22 (1981) 787–796,.

67. Smith, W.L., Asymptotic renewal theorems, Proc. Roy. Soc. Sec. A: Mathematics, 64, 1 (1954) 9-48.

68. Sahin, I., On the continuous-review (s, S) inventory model under compound renewal demand and random lead times, Journal of Applied Probability, 20, 1 (1983) 213–219.

69. Teugels, J., L., Renewal theorems when the first or the second moment is infinite., Ann. Math. Statist. 39, 37 (1968) 1210-1219.

70. Watanabe, T., Yamamuro, K., Ratio of the tail of an intinitely divisible distribution on the line to that of ıts levy measure, Electronic Journal of Probability, 15 (2010) 44-74.

71. Whitt, P., Renewal Theory: Renewal Reward Process. www.columbia. edu/~ww2040/ 6711F12 lect1004.pdf., 4 Ekim 2012.

72. Wang, D., Tang, Q., Tail probabilities of randomly waighted sums of random variables with dominated variation, Stochastic Models, 22 (2006) 253-272.

73. Zhang, C., Uniform Asymptotics for The Tail Probability of Weighted Sums with Heavy Tails, 30 Mart 2014.

ÖZGEÇMİŞ

Ebru ŞENOL, 1989 yılında Safranboluda doğdu. İlk öğrenimini Bartın Gazi İlköğretim Okulu'nda , lise öğrenimini ise Bartın Köksal Toptan Lisesi'nde tamamladı. 2006-2011 yılları arasında Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matemaik Bölümü'nde lisans öğrenimini tamamladı.

2011 yılında Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı'nda Tezsiz Yüksek Lisans eğitimini tamamlayarak Pedagojik Formasyon belgesi aldı. 2012 yılında Trabzon'un Tonya ilçesine matematik öğretmeni olarak atandı. 2014 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim dalında yüksesklisans programına başladı. 2015 yılından beri Şalpazarı Ayten Yılmaz Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

Ebru ŞENOL evlidir. İngilizce bilmektedir.

Kesemen T., Bektaş Kamışlık A. , Küçük Z., **Şenol E**. , "Inventory Model of Type (s,S) With Subexponential Weibull Distrubuted Demand", Journal Of The Turkish Statistical Association, vol.9, no.3, pp.81-92, 2016.

Bektaş Kamışlık A., Kesemen T., **Şenol E**., "On the Moments of Semi-Markovian Inventory Model When the Demand Distribution Belongs to the General Class of Regularly Varying Distributions with Infinite Variance ", International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics 2016 (ICRAPAM 2016), MUĞLA, TÜRKIYE, 19-23 Mayıs 2016, pp.121-122