KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DÜZLEMDE İKİ EĞRİ AİLESİNİN AFİN DİFERANSİYEL İNVARYANTLARI VE DENKLİK PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Demet AYDEMİR

HAZİRAN 2017
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DÜZLEMDE İKİ EĞRİ AİLESİNİN AFİN DİFERANSİYEL İNVARYANTLARI VE DENKLİK PROBLEMİ

Demet AYDEMİR

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

"YÜKSEK LİSANS(MATEMATİK)"

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 08 / 05 /2017

Tezin Savunma Tarihi : 05 / 06 /2017

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU

Trabzon 2017

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında
Demet AYDEMİR Tarafından Hazırlanan

DÜZLEMDE İKİ EĞRİ AİLESİNİN AFİN DİFERANSİYEL İNVARYANTLARI VE DENKLİK PROBLEMİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 16 / 05 / 2017 gün ve 1702 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	:	**Prof.Dr. Ömer PEKŞEN**	....
Üye	:	**Doç.Dr. Yasemin SAĞIROĞLU**	....
Üye	:	**Yrd.Doç.Dr. Özcan BEKTAŞ**	....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, düzlemde eğri ailelerinin afin diferansiyel invaryantları ve iki eğri ailesinin denkliği problemi incelenmiştir.

Öncelikle, tez konusunun belirlenmesi ve çalışmanın bu biçimi almasında payı büyük olan ve her aşamada yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Doç.Dr.Yasemin SAĞIROĞLU’na teşekkür eder, saygı ve sevgilerimi sunarım.

Ayrıca bu süreçte bana destek olan sevgili aileme teşekkür ederim.

Demet AYDEMİR

Trabzon 2017

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Düzlemde İki Eğri Ailesinin Afin Diferansiyel İnvaryantları ve Denklik Problemi" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU'nun sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 05/06/2017

Demet AYDEMİR

İÇİNDEKİLER

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

DÜZLEMDE İKİ EĞRİ AİLESİNİN AFİN DİFERANSİYEL İNVARYANTLARI VE DENKLİK PROBLEMİ

Demet AYDEMİR

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU

2017, 47 sayfa

Bu tezde, düzlemde bir ikili eğri ailesinin afin diferansiyel invaryantları elde edilmiş olup, bu tip ailelerin denklik probleminin çözümü araştırılmıştır.

İlk olarak bir ikili eğri ailesinin afin diferansiyel invaryantları bulunmuştur. Afin gruba göre bu invaryantlar kullanılarak iki tane ikili eğri ailesinin denklik koşulları oluşturulmuştur. Ayrıca, elde edilen diferansiyel invaryant üreteç sisteminin minimal olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Afin grup, Diferansiyel invaryant, Denklik

Master Thesis

SUMMARY

AFFINE DIFFERENTIAL INVARIANTS OF TWO CURVE FAMILIES ON THE PLANE AND EQUIVALENCE PROBLEM

Demet AYDEMİR

Karadeniz Technical University
The Graduate of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Yasemin SAĞIROĞLU

2017, 47 Pages

In this thesis, the affine differential invariants of a family of binary curves are obtained and the equivalence problem of this type of families is investigated.

Primarily, the affine differential invariants of a family of binary curves are found. By using these invariants, the equivalence conditions of two families of binary curves with respect to affine group are formed. Also, it is shown that the obtained generator system of differential invariants is minimal.

Key Words: Affine group, Differential invariants, Equivalence

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}^+$	: Sayma Sayıları Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n-Boyutlu Reel Vektör Uzayı
$Aff(n,\mathbb{R})$	: Afin Dönüşümler Grubu
$GL(n,\mathbb{R})$	: Genel Lineer Grup
$G(x)$	: x noktasının G –yörüngesi
$O(n)$	: Ortogonal Matrisler Grubu
$SAff(n,\mathbb{R})$	: Özel Afin Dönüşümler Grubu
$SL(n,\mathbb{R})$	: Özel Lineer Grup
$x^{(k)}$	: x in k. türevi
$\{x_\tau, \tau \in T\}$	: $\tau \in T$ sayıda vektörden (parametrik eğriden) oluşan bir vektör (parametrik eğri) ailesi
$[x_1, x_2 \dots x_n]$	: $x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$, …, $x_n = \begin{pmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$ determinantı
$f\{x\}$	: x diferansiyel bilinmeyenini ve onun sonlu tane türevini içeren reel katsayılı bir diferansiyel polinom
$f < x >$	: x diferansiyel bilinmeyenli bir diferansiyel rasyonel fonksiyon
$K[x]$	: Katsayıları K $\mathbb{R}$-cebirinden olan bir bilinmeyenli polinomlar $\mathbb{R}$-cebiri
$\mathbb{R}(x)$	: x bilinmeyenli rasyonel fonksiyonlar cismi
$\mathbb{R}[x]^G$	: G-invaryant polinomlar halkası
$\mathbb{R}(x)^G$	: G-invaryant rasyonel fonksiyonlar cismi
$\mathbb{R}\{x\}^G$	: x diferansiyel bilinmeyenli reel katsayılı G- invaryant polinomlar halkası
$\mathbb{R} < x >^G$	: x diferansiyel bilinmeyenli G-invaryant diferansiyel rasyonel fonksiyonlar cismi

$\mathbb{R}\{x_1, x_2\}^G$	: x_1, x_2 diferansiyel bilinmeyenli reel katsayılı G- invaryant polinomlar halkası
$\mathbb{R} < x_1, x_2 >^G$	: x_1, x_2 diferansiyel bilinmeyenli G-invaryant diferansiyel rasyonel fonksiyonlar cismi
$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$	: n tane bilinmeyenli reel katsayılı polinomlar halkası
$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^G$	: n tane bilinmeyenli reel katsayılı G-invaryant polinomlar halkası
$\mathbb{R}(x_1, \dots, x_n)$	: n tane bilinmeyenli rasyonel fonksiyonlar cismi
$\mathbb{R}[f]$	: f, C^∞-sınıfından bir fonksiyon olmak üzere bilinmeyeni f olan reel katsayılı polinomlar $\mathbb{R}$-cebiri
$\mathbb{R} < f >$	: f bilinmeyenli diferansiyel rasyonel fonksiyonlar cismi
$\mathbb{R} < f, g >$	: f, g bilinmeyenli diferansiyel rasyonel fonksiyonlar cismi
$\mathbb{R}[f, f', \dots, f^{(k)}]$	: $f, f', \dots, f^{(k)}$ bilinmeyenlerinin reel katsayılı polinomlar $\mathbb{R}$-cebiri
$\mathbb{R}\{f\}$	: $= \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{R}[f, f', \dots, f^{(k)}]$
$G: K$	: G grubunun K kümesi üzerindeki etkisi
$x \overset{G}{\sim} y$	: x elemanı y elemanına G-denktir
$l_x(p, q)$	: $x(p)$ den $x(q)$ ya kadar olan afin yay uzunluğu
$T(\alpha)$	: α eğrisinin tipi
$s_x(t)$	: Afin yay uzunluğu fonksiyonu
$x(t_x(s))$	: Eğrinin afin invaryant parametrizasyonu
ϕ_α	: α nın tüm invaryant parametrizasyonlarının kümesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Afin diferansiyel geometri kavramı ilk olarak 1872 yılında Felix Klein'nin "Erlangen Programı"'nda ortaya çıkmıştır. Bu programa göre, Afin diferansiyel geometri, afin transformasyonlar altında invaryant kalan özelliklerden oluşur. Afin diferansiyel geometride afin invaryantların araştırılması yapılmıştır. Bu çalışmaların çoğu afin diferansiyel invaryantların üreteç kümelerini bulmaya yöneliktir. Eğrilerin afin invaryantlarının inşaası bir çok çalışmada ele alınmıştır [1, 10, 18]. Bununla beraber, afin invaryantlar yardımıyla eğrilerin denklik probleminin çözümü de çalışılmıştır [13, 14, 15, 17].

Eğrilerin diferansiyel geometrisi çok uzun yıllardır çalışılmaktadır. Eğrilerin afin diferansiyel geometrisi de birçok yönüyle incelenmiştir. Bu çalışmaların çoğunda, yay uzunluğu, eğrilikler gibi invaryantlar bulunmuştur. [9] da, n-boyutlu afin uzayda bir eğrinin centro-afin invaryantları, yay uzunluğu ve eğrilikleri incelenmiştir. Ayrıca, afin grubun alt gruplarında da eğriler ve invaryantları farklı metodlarla ele alınmıştır [2, 4, 7, 8, 18]. Bu çalışmalarda bir tek eğri için afin invaryantlar incelenmiştir. [16] da, bir afin eğri için afin diferansiyel invaryantlar incelenmiş olup denklik probleminin çözümü yapılmıştır.

Afin diferansiyel geometride, diferansiyel invaryantlar kullanılarak eğrilerin denkliğinin araştırılması başka bir problemdir. $SL(n,\mathbb{R})$ grubuna göre, eğri ailelerinin denkliği [13] de verilmiştir. Yine afin grubun farklı alt gruplarında denklik probleminin araştırılması yapılmıştır [8, 10, 12, 14, 15].

Bu tezde, Afin diferansiyel geometride bir ikili eğri ailesinin afin diferansiyel invaryantları kümesinin üreteçleri bulunmuştur. Bu afin diferansiyel invaryantlar kullanılarak iki ikili eğri ailesinin denklik koşulları verilmiştir. Ayrıca elde edilen üreteç kümesinin minimal olduğu gösterilmiştir.

Burada elde edilen sonuçlar "5th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications-IECMSA 2016, 16-19 August 2016, Belgrad-Serbia" adlı konferansta sunulmuştur.

1.2. Halka, Vektör Uzayı, Cisim ve Cebirler

Bu bölümde [6] dan yararlanılmıştır.

Tanım 1.2.1. $R \neq \emptyset$ olan bir küme ve $''+\,,\ \cdot\,''$ R üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun. Aşağıdaki koşulları gerçekleyen $(R, +, \cdot)$ üçlüsüne bir halka denir:

i. $(R, +)$ bir abel grup

ii. $\forall a, b \in R$ için $a.(b.c) = (a.b).c$

iii. $\forall a, b, c \in R$ için $a.(b + c) = a.b + a.c$, $(a + b).c = a.c + b.c$,

Eğer $\forall a, b \in R$ için $a.b = b.a$ ise R halkasına değişmeli halka denir. $(R, .)$ yarı grubunun birim elemanı mevcut ise bu elemana R nin birim elemanı denir ve $1_R = 1$ ile gösterilir. Bu durumda R halkasına birim elemanlı halka denir.

Tanım 1.2.2. Birim elemanlı, değişmeli, sıfır bölensiz bir halkaya tamlık bölgesi denir.

Örnek 1.2.1. $(\mathbb{R}, +\,,\ \cdot)$ bir halkadır.

Örnek 1.2.2. Katsayıları $\mathbb{R}$'den olan tüm polinomların kümesini $\mathbb{R}[x]$ ile gösterelim. $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ bir halkadır.

Tanım 1.2.3. F bir cisim, $V \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, $+ : V \times V \to V$, $(u, v) \to u + v$ $\cdot : F \times V \to V$, $(\alpha, v) \to \alpha.v$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V ye F cismi üzerinde bir F- vektör uzayı denir.

i. $\forall u, v, w \in V$ için $u + (v + w) = (u + v) + w$

ii. $\forall u, v \in V$ için $u + v = v + u$

iii. $\forall u \in V$ için $\exists!\, 0 \in V$ öyle ki $u + 0 = 0 + u = u$

iv. $\forall u \in V$ için $\exists!\, (-u) \in V$ öyle ki $u + (-u) = (-u) + u = 0$

v. $\forall \alpha, \beta \in F$ ve $\forall u, v \in V$ için $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$, $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$

vi. $\forall \alpha, \beta \in F$ ve $\forall u \in V$ için $(\alpha\beta).u = \alpha.(\beta.u)$

vii. 1_F, F cisminin birim elemanı olmak üzere $\forall u \in V$ için $1_F\,.u = u$

dur.

Burada F cisminin elemanlarına skalerler, V kümesinin elemanlarına da vektörler denir.

Örnek 1.2.3. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$- vektör uzayıdır.

Örnek 1.2.4. $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}$- vektör uzayıdır.

Tanım 1.2.4.

i. $(C, +,\ \cdot)$ halka,

ii. $(C, +, \lambda\,\cdot)$ $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı,

iii. $\lambda.(x.y) = (\lambda.x).y = x.(\lambda.y)$, $\forall x, y \in C$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

ise $\{ C, +, \cdot, \lambda \cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$ sistemine bir $\mathbb{R}$-cebir denir.

Örnek 1.2.5. $\{ \mathbb{R}, +, \cdot, \lambda \cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$ bir $\mathbb{R}$-cebir' dir.

Örnek 1.2.6. $\{ \mathbb{R}[x], +, \cdot, \lambda \cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$ bir $\mathbb{R}$-cebir' dir. Gerçekten;

i. $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ bir halkadır,

ii. $(\mathbb{R}[x], +, \lambda \cdot)$ bir $\mathbb{R}$-vektör uzayıdır,

iii. $\forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

$\lambda \cdot \big(p(x).q(x)\big) = \big(\lambda \cdot p(x)\big).q(x) = p(x).\big(\lambda \cdot q(x)\big)$

dir.

Tanım 1.2.5. $\{ C, +, \cdot, \lambda \cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$ bir $\mathbb{R}$-cebir ve $C_1 \subset C$ olsun. $\{C_1, +, \cdot, \lambda \cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}$-cebir ise C_1 altkümesine C nin $\mathbb{R}$- altcebiri denir.

Önerme 1.2.1. C bir $\mathbb{R}$-cebir ve $\{C_\tau, \tau \in T\}$ C' nin $\mathbb{R}$- altcebirlerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde $\bigcap_{\tau \in T} C_\tau$ da bir $\mathbb{R}$-cebir' dir.

İspat: $x, y \in \bigcap_{\tau \in T} C_\tau$ olsun. Buradan $\forall \tau \in T$ için $x, y \in C_\tau$ dur. C_τ , $\mathbb{R}$-cebir olduğu için; $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall \tau \in T$ için $x - y$, $x.y$, $\lambda \cdot x \in C_\tau$ olduğundan, $x - y \in \bigcap_{\tau \in T} C_\tau$, $x.y \in \bigcap_{\tau \in T} C_\tau$ ve $\lambda \cdot x \in \bigcap_{\tau \in T} C_\tau$ dur. O halde $\bigcap_{\tau \in T} C_\tau$ da $\mathbb{R}$-cebir' dir. ■

Not: C bir $\mathbb{R}$-cebir ve $S \subset C$ olsun. $[S]_{\mathbb{R}} = \bigcap_{S \subset C_\tau} C_\tau$ ile gösterelim. Burada $\forall \tau$ için C_τ, C nin $\mathbb{R}$-altcebiridir. S' yi kapsayan en az bir tane $\mathbb{R}$-altcebir vardır. Bu ise C nin kendisidir.

Tanım 1.2.6. C bir $\mathbb{R}$-cebir ve $S \subset C$ olsun. $[S]_{\mathbb{R}} = C$ ise S'ye C' nin üreteç kümesi denir.

Örnek 1.2.7. $C = \mathbb{R}[x]$ olsun. $S = \{1, x\}$ alalım. Burada 1, C' nin birimidir.

$$[S]_{\mathbb{R}} = \{a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_n.x^n : a_i \in \mathbb{R}, i = 0,1, \dots, n\}$$

olup, $[S]_{\mathbb{R}} = C$ dir.

Örnek 1.2.8. $C = \mathbb{R}[x]$ olsun. $S = \{x\}$ alalım.

$$[S]_{\mathbb{R}} = \{a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_n.x^n : a_i \in \mathbb{R}, i = 0,1, \dots, n\}$$

olup, $[S]_{\mathbb{R}} \neq C$'dir.

1.3. Öklid Uzayı

Bu bölümde [5] den yararlanılmıştır.

Tanım 1.3.1. E, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere, $\varphi: E \times E \to \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlasın:

$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ için;

i. $\varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$

ii. $\varphi(\lambda.x, y) = \lambda.\varphi(x, y)$

iii. $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

iv. $\varphi(x, x) > 0$

v. $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bu şekilde tanımlanan φ dönüşümüne E de skaler (iç) çarpım denir. (E, φ) ikilisine de iç çarpımlı vektör uzayı denir.

Tanım 1.3.2. Sonlu boyutlu iç çarpımlı vektör uzayına Öklid uzayı denir.

Örnek 1.3.1. $E = \mathbb{R}$ alalım. $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\varphi(x, y) = x.y$ dönüşümünü tanımlayalım. $(\mathbb{R}, \varphi)$ nin Öklid uzayı olduğunu gösterelim:

$\forall x, y, z, \lambda \in \mathbb{R}$ için

i. $\varphi(x + y, z) = (x + y).z = x.z + y.z = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$

ii. $\varphi(\lambda.x, y) = (\lambda.x).y = \lambda.(x.y) = \lambda.\varphi(x, y)$

iii. $\varphi(x, y) = x.y = y.x = \varphi(y, x)$

iv. $\varphi(x, x) = x.x = x^2 > 0$

v. $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x.x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

dır.

Örnek 1.3.2. $E = \mathbb{R}^2$ alalım. $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\varphi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_2$ dönüşümünü tanımlayalım. $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ nin Öklid uzayı olduğunu gösterelim:

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2)$ için;

i. $\varphi(x + y, z) = (x_1 + y_1).z_1 + (x_2 + y_2).z_2$

$= (x_1.z_1 + x_2.z_2) + (y_1.z_1 + y_2.z_2)$

$= \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$

ii. $\varphi(\lambda.x, y) = (\lambda.x_1).y_1 + (\lambda.x_2).y_2 = \lambda.(x_1.y_1) + \lambda.(x_2.y_2) = \lambda.\varphi(x, y)$

iii. $\varphi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_2 = y_1.x_1 + y_2.x_2 = \varphi(y, x)$

iv. $\varphi(x,x) = {x_1}^2 + {x_2}^2 > 0$

v. $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow {x_1}^2 + {x_2}^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \varphi(x,x) = 0$

dır.

Örnek 1.3.3. $E = \mathbb{R}^n, \varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i$ dönüşümü tanımlayalım. $(\mathbb{R}^n, \varphi)$ Öklid uzayıdır.

Not: Bu iç çarpım Öklid iç çarpımı olarak adlandırılır ve çoğu kez $x.y$ veya $< x,y >$ ile gösterilir.

Örnek 1.3.4. $E = \mathbb{R}$, $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\phi(x,y) = x^2 . y$ dönüşümünü tanımlayalım. $(\mathbb{R}, \phi)$ nin Öklid uzayı olmadığını gösterelim. Gerçekten $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için;

$$\phi(x+y,z) = (x+y)^2 . z = x^2 . z + y^2 . z + 2.x.y.z$$

olur. Fakat iç çarpım tanımına göre $\phi(x+y,z) = x^2 . z + y^2 . z$ olmalıdır. Bunun için $2.x.y.z = 0$ olmalıdır. Buradan $x = 0$ veya $y = 0$ veya $z = 0$ dır. Fakat bu şart tüm x, y, z ler için sağlanmadığından $\phi(x+y,z) \neq x^2 . z + y^2 . z$ olup, ϕ bir iç çarpım değildir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}, \phi)$ Öklid uzayı değildir.

Tanım 1.3.3. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında $x \in \mathbb{R}^n$ için $\sqrt{x.x}$ sayısına x vektörünün normu denir ve $\|x\|$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.3. 4. $\|x\| = 1$ ise x vektörüne birim vektör denir.

Tanım 1.3.5. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında $x.y = 0$ ise x ve y vektörlerine ortogonal denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir.

Lemma 1. 3.1. $\mathbb{R}^n$ de tanımlanan norm aşağıdaki aksiyomları sağlar:

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ için;

i. $\|x\| \geq 0$

ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii. $\|\lambda . x\| = |\lambda| . \|x\|$

iv. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

1.4. Afin Uzaylar

Bu bölümde [5] den yararlanılmıştır.

Tanım 1.4.1. $A \neq \emptyset$ bir küme ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir $\psi : A \times A \longrightarrow V$ dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için $(P, Q) \longrightarrow \overrightarrow{PQ} \in V$ şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A kümesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

i. $\forall P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$,

ii. $\forall P \in A$ ve $\forall \vec{\alpha} \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \vec{\alpha}$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

$\overrightarrow{PQ}$ vektöründe P noktasına başlangıç noktası ve Q noktasına uç noktası denir. Diğer yandan A nın boyutu $boyA = boyV$ olarak tanımlanır.

i. ve ii. aksiyomlarına $A \neq \emptyset$ nokta kümesi için afin aksiyomlar denir. Afin aksiyomlara göre, (i) den A da iki nokta bir vektör belirtir. (ii) den A da belli bir P noktası seçildiğinde $\forall Q \in A$ noktasına bir $\overrightarrow{PQ} \in V$ vektörü karşılık gelir, yani belli bir $P \in A$ noktası seçildiği zaman

$$Q \in A \longrightarrow \overrightarrow{PQ} \in V$$

dönüşümü birebir olur.

Örnek 1.4.1. Bir F cismi üzerindeki n- boyutlu uzay F^n olmak üzere, $A = V = F^n$ olsun. Bu durumda $A \times A \longrightarrow V$ dönüşümü $\forall P = \alpha \in F^n$ ve $\forall Q = \beta \in F^n$ için $\overrightarrow{PQ} = \beta - \alpha$ biçiminde tanımlanabilir. O halde $A = F^n$ nokta kümesi $V = F^n$ vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzaydır.

Örnek 1.4.1 de belirtilen $A = F^n$ afin uzayına n- boyutlu standart afin uzay denir ve F^n ile gösterilir. $F = \mathbb{R}$ ve $F = \mathbb{C}$ olması hallerinde $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ uzaylarına sırasıyla n-boyutlu standart reel afin uzay ve n- boyutlu standart kompleks afin uzay denir.

Teorem 1.4.1. A bir V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:

i. $\overrightarrow{PP} = \vec{0} \in V, \forall P \in A$

ii. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}, P, Q \in A$

iii. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$

İspat: i. Afin aksiyomlarının birincisinden $P = Q = R$ kabul edilerek

$$\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} \implies \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

elde edilir.

ii. Birinci afin aksiyomda $P = R$ alınırsa $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}$ olur ki bu da (i) den $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$ olduğundan $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \vec{0}$ olup,

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$$

elde edilir.

iii. Birinci afin aksiyoma göre $\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'}$ ve $\overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'}$ olduğundan $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'}$ olur. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ olduğundan son ifadeden

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$$

elde edilir.■

Tanım 1.4.2. Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in V$ vektörlerinin sistemi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$-lisine A afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası ve P_i $i = 1,2, \dots, n$ noktalarına da çatının birim noktaları denir.

Teorem 1.4.2. Bir vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun. Belli bir $P_0 \in A$ noktası seçildiğinde başlangıcı P_0 olan bir afin çatı vardır.

İspat: V nin bir bazı $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ olsun. Her bir $1 \leq i \leq n$ için $\overrightarrow{P_0P_i} = \alpha_i$ olacak şekilde bir tek $P_i \in A$ noktasının var olduğunu aksiyom (ii) den biliyoruz. O halde $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$-lisi bir afin çatıdır ve $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ bazı verildiğinde tektir. ■

Sonuç: Bir V vektör uzayı ile birleşen bir A afin uzayı ve A da bir $P_0 \in A$ noktası verildiğinde başlangıcı P_0 olan afin çatı ile V de bir $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ bazı birbirine karşılık gelirler.

n-boyutlu bir V vektör uzayı ile birleşen bir A afin uzayının afin çatılarından biri $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ olsun. Bu çatı A da aşağıdaki gibi afin koordinat sistemi denen bir koordinat sistemi belirtir.

V nin bir bazı $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ olduğundan $\forall P \in A$ için $\overrightarrow{P_0P} \in V$ vektörünü bu baza göre tek türlü olarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i}, \; a_i \in F$$

A nın birleştiği V vektör uzayı F cismi üzerinde tanımlandığına göre

$$x_i : A \longrightarrow F, \; 1 \le i \le n$$

fonksiyonlarını $\forall P \in A$ için

$$P \longrightarrow x_i(P) = a_i, \; 1 \le i \le n,$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece $P \in A$ noktasını F^n standart afin uzayının bir

$$(x_1(P), x_2(P), \dots, x_n(P))$$

elemanına karşılık tutmuş oluruz; bu sıralı n-liye P noktasının koordinatları denir.

Tersine n tane $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ sayıları verildiğinde koordinatları $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ olan bir tek $P \in A$ noktası vardır. Gerçekten;

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i} \in V$$

vektörünü ele alalım. Bu halde ikinci afin aksiyomundan

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

olacak biçimde bir tek $P \in A$ noktası vardır.

Böylece $x_1, x_2, \ldots, x_n : A \longrightarrow F$ fonksiyonlarının bir $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sistemini elde etmiş oluruz. Bu sistem yardımıyla bir $A \xrightarrow{birebir} F^n$ (standart afin uzay) dönüşümü elde edilmiş olur. Bu fonksiyonlar sistemine A nın bir afin koordinat sistemi denir. O halde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ afin koordinat sisteminde $x_i : A \longrightarrow F$ fonksiyonları afin anlamda koordinat fonksiyonlarıdırlar. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sistemini belirleyen $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ afin çatısındaki $P_0, P_1, \ldots, P_n \in A$ noktalarından P_0 başlangıç noktası ve diğerleri birim noktalardır.

Örnek 1.4.2. n-boyutlu bir A afin uzayında bir afin çatı $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ ise $P_0, P_1, \ldots, P_n$ noktalarının koordinatları $P_0 = (0,0,\ldots,0)$, $P_1 = (1,0,\ldots,0), \ldots, P_n = (0,0,\ldots,1)$ dir. Buradan da P_0 ın A da başlangıç noktası ve P_i nin de A da i-yinci birim nokta olduğu görülmektedir.

Örnek 1.4.3. n-boyutlu standart afin uzay F^n de $E_0 = (0,0,\ldots,0)$, $E_1 = (1,0,\ldots,0)$, …, $E_n = (0,0,\ldots,1)$ noktalarını alalım. $\{E_0, E_1, \ldots, E_n\}$ çatısına standart afin çatı ve bu çatıya karşılık gelen afin koordinat sistemine de standart koordinat sistemi denir. Bu koordinat sisteminde $\forall P \in F^n$ noktasına $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ sayıları, P nin koordinatları olarak $P = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ biçiminde karşılık gelir.

1.5. Afin Grup ve Afin Grubun Alt Grupları

Bu bölümde [5] den yararlanılmıştır.

Bir F cismi üzerinde tanımlanan n-boyutlu afin uzaylardan biri A olsun. $Aff(n,F) = Ot(A) = \{ f : f : A \longrightarrow A$ afin otomorfizm (afinite)$\}$ kümesini ele alalım. $Aff(n,F)$ kümesinin otomorfizmlerin bileşke işlemine göre bir grup olduğu kolayca gösterilebilir. A da bir afin koordinat sistemi tespit edilirse bu grup $g \in GL(n,F)$ ve $b \in F_1^n$ olmak üzere, $\begin{bmatrix} g & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in F_{n+1}^{n+1}$ biçimindeki matrislerin grubu ile temsil edilebilir.

Tanım 1.5.1. F cismi üzerinde n-boyutlu bir afin uzay A olsun. $g \in GL(n,F)$ ve $b \in F_1^n$ olmak üzere, elemanları $\begin{bmatrix} g & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in F_{n+1}^{n+1}$ olan matrisler grubuna afin grup denir ve $Aff(n,F)$ veya $Ot(A)$ ile gösterilir.

Örnek 1.5.2. $Aff(n,\mathbb{R}) = \{F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : F(x) = gx + b\, , x \in \mathbb{R}^n\, , \exists g \in GL(n,\mathbb{R}), \exists b \in \mathbb{R}^n \}$ kümesinin fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup olduğunu gösterelim.

$F_1, F_2 \in Aff(n,\mathbb{R})$ olsun. Buradan $\exists g_1, g_2 \in GL(n,\mathbb{R})$, $\exists b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$ için

$$F_1(x) = g_1 x + b_1\,, \quad F_2(x) = g_2 x + b_2\,, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

dir.

$$\begin{aligned}(F_1 \circ F_2)(x) &= F_1\big(F_2(x)\big) = F_1(g_2 x + b_2) = g_1(g_2 x + b_2) + b_1 \\ &= g_1(g_2 x) + b_2 + b_1 \\ &= (g_1 g_2)x + g_1 b_2 + b_1\end{aligned}$$

olup $g_1 g_2 \in GL(n,\mathbb{R})$ ve $g_1 b_2 + b_1 \in \mathbb{R}^n$ olduğundan $F_1 \circ F_2 \in Aff(n,\mathbb{R})$ dir. Grup aksiyomlarının sağlandığının gösterimi:

i. $F_1, F_2, F_3 \in Aff(n,\mathbb{R})$ olsun. $\exists g_1, g_2, g_3 \in GL(n,\mathbb{R})$, $\exists b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^n$ için $F_1(x) = g_1 x + b_1$, $F_2(x) = g_2 x + b_2$, $F_3(x) = g_3 x + b_3$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ dir. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için:

$$\begin{aligned}[(F_1 \circ F_2) \circ F_3](x) &= (F_1 \circ F_2)\big(F_3(x)\big) = (F_1 \circ F_2)(g_3 x + b_3) \\ &= (g_1 g_2)(g_3 x + b_3) + g_1 b_2 + b_1 \\ &= (g_1 g_2)(g_3 x) + (g_1 g_2) b_3 + g_1 b_2 + b_1 \\ &= (g_1(g_2 g_3))x + g_1(g_2 b_3) + g_1 b_2 + b_1 \\ &= g_1((g_2 g_3)x + (g_2 b_3) + b_2) + b_1 \\ &= F_1((g_2 g_3)x + (g_2 b_3) + b_2) = F_1(F_2(F_3(x))) \\ &= F_1((F_2 \circ F_3)x) = [F_1 \circ (F_2 \circ F_3)](x)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(F_1 \circ F_2) \circ F_3 = F_1 \circ (F_2 \circ F_3)$ tür.

ii. $g = I \in GL(n,\mathbb{R})$ ve $b = 0 \in \mathbb{R}^n$ olarak alınırsa $E(x) = x$, $E \in Aff(n,\mathbb{R})$ elemanı $\forall F \in Aff(n,\mathbb{R})$ için $F \circ E = E \circ F = F$ koşulunu sağlar.

iii. $F \in Aff(n,\mathbb{R})$ olsun. $\exists g \in GL(n,\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ için $F(x) = gx + b$ dir. $g \in GL(n,\mathbb{R})$ olduğundan $g^{-1} \in GL(n,\mathbb{R})$ dir. $g^{-1}b \in \mathbb{R}^n$ dir.

$$F^{-1}(x) = g^{-1}x - g^{-1}b \in Aff(n,\mathbb{R})$$

elemanını göz önüne alalım. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için;

$$\begin{aligned}(F \circ F^{-1})(x) = F\big(F^{-1}(x)\big) = F(g^{-1}x - g^{-1}b) &= g(g^{-1}x - g^{-1}b) + b \\ &= g(g^{-1}x) - g(g^{-1}b) + b \\ &= (gg^{-1})(x) - (gg^{-1})b + b \\ &= ex - eb + b = x - b + b = x = E(x)\end{aligned}$$

olduğundan $F \circ F^{-1} = E$ dir. Benzer şekilde $F^{-1} \circ F = E$ olduğu görülür. Dolayısıyla F^{-1}, F nin tersidir. $Aff(n,\mathbb{R})$ bir gruptur.

Örnek 1.5.1. $GL(n,\mathbb{R}) = \{g = (a_{ij}) \ : detg \neq 0\ ,\ i,j = 1,2,\dots,n\ , a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ kümesi matrislerin çarpımına göre bir gruptur. Bu gruba genel lineer grup denir.

$g_1 = (a_{ij})\ , g_2 = (b_{jk}) \in GL(n,\mathbb{R})$ olsun. $g_1.g_2 = (a_{ij}).(b_{jk}) = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk})$ olup $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk} \in \mathbb{R}\ (i,k = 1,\dots,n)$ dir. Ayrıca $det(g_1.g_2) = detg_1.detg_2$ dir. $detg_1 \neq 0$ ve $detg_2 \neq 0$ olduğundan $det(g_1.g_2) \neq 0$ olup $g_1.g_2 \in GL(n,\mathbb{R})$ elde edilir.
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ olup $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n,\mathbb{R})$ ve I bu grubun birim elemanıdır. $g \in GL(n,\mathbb{R})$ olsun. $detg \neq 0$ olduğundan g^{-1} mevcuttur.

Örnek 1.5.2. $SAff(n,\mathbb{R}) = \{F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : F(x) = gx + b,\ x \in \mathbb{R}^n, \exists g \in SL(n,\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n\}$ kümesi de fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba özel afin grup denir. Burada $SL(n,\mathbb{R}) = \{g = (a_{ij}): detg = 1, i,j = 1,2,\dots,n\ , a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ matrislerin çarpımına göre bir gruptur.

1.6. Diferansiyel Halka, Diferansiyel $\mathbb{R}$-Cebir ve Diferansiyel Cisim

Bu bölümde [15] den yararlanılmıştır.

Tanım 1.6.1. $(H,+,\cdot)$ bir halka ve $d: H \longrightarrow H$, $d(a) = da$ olmak üzere

i. $d(a+b) = da + db$

ii. $d(a.b) = da.b + a.db$

ise H ye bir diferansiyel halka denir.

Örnek 1.6.1. $\mathbb{R}[x]$ bir diferansiyel halkadır.

Not: Diferansiyel cisim tanımı da benzer şekilde verilebilir.

Tanım 1.6.2. $\{C,+,\cdot,\lambda\ \cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}$-cebir ve $d: C \longrightarrow C$, $d(a) = da$ fonksiyonu için

i. $d(a+b) = da + db$

ii. $d(a.b) = da.b + a.db$

iii. $d(\lambda a) = \lambda.da$

ise $\{C,+,\cdot,\lambda\ \cdot, da\}$ sistemine diferansiyel $\mathbb{R}$-cebir denir.

Örnek 1.6.2. $\mathbb{R}[x]$, x bilinmeyenli reel katsayılı polinomlar diferansiyel $\mathbb{R}$-cebirini ele alalım. $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ için $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ olarak verilsin.

$p'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$ şeklindeki türev istenen özellikleri sağlar.

$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in \mathbb{R}[x]$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

i. $d\big(p(x) + q(x)\big) = d(\sum_{k=0}^{mak\{n,m\}} (a_k + b_k)x^k) = \sum_{k=0}^{mak\{n,m\}} d\,((a_k + b_k)x^k) = \sum_{k=0}^{mak\{n,m\}} (d(\,a_k x^k) + d(b_k x^k)) = \sum_{k=0}^{mak\{n,m\}} d(\,a_k x^k) + \sum_{k=0}^{mak\{n,m\}} d(b_k x^k) = d\left(\sum_{k=0}^{mak\{n,m\}} a_k x^k\right) + d\left(\sum_{k=0}^{mak\{n,m\}} b_k x^k\right) = d(p(x)) + d(q(x))$

ii. $d\big(p(x).q(x)\big) = dp(x).q(x) + p(x).dq(x)$

$p(x).q(x) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^i\, x^j$

$d\big(p(x).q(x)\big) = d\big(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^i\, x^j\big)$

$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} d(a_i b_j x^i\, x^j)$

$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j d(x^i\, x^j)$

$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j [dx^i.x^j + x^i.dx^j]$

$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j dx^i.x^j + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^i.dx^j$

$= \big(\sum_{i=0}^{n} a_i dx^i\big).\big(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\big) + \big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\big).\big(\sum_{j=0}^{m} b_j dx^j\big)$

$= d\big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\big).\big(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\big) + \big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\big).d\big(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\big)$

$= dp(x).q(x) + p(x).dq(x)$

iii. $d\big(\lambda p(x)\big) = d\big(\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\big) = d\big(\sum_{i=0}^{n} \lambda\, a_i x^i\big)$

$= \sum_{i=0}^{n} d(\lambda\, a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda\, d(a_i x^i) = \lambda\left(\sum_{i=0}^{n} d(\,a_i x^i)\right)$

$= \lambda\left(d\big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\big)\right) = \lambda.dp(x)$

$\mathbb{R}[x]$ bir diferansiyel $\mathbb{R}$-cebirdir.

Örnek 1.6.3. $K = C^{\infty}(0,1)$ birimli $\mathbb{R}$-cebir ve cismini alalım. $d\colon K \longrightarrow K$ olmak üzere $df(x)$ ile $f(x)$ in analizdeki türevini alalım. $\forall f, g \in K$ için;

i. $d\big(f(t) + g(t)\big) = df(t) + dg(t)$, $\forall t \in (0,1)$

ii. $d\big(f(t).g(t)\big) = df(t).g(t) + f(t).dg(t)$, $\forall t \in (0,1)$

iii. $d\big(\lambda f(t)\big) = \lambda.df(t)$, $\forall t \in (0,1)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

iv. $d\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{df(t).g(t) - f(t).dg(t)}{(g(t))^2}$, $g(t) \neq 0$, $\forall t \in (0,1)$

ile (K, d) bir diferansiyel cisimdir.

Önerme 1.6.1. K bir diferansiyel $\mathbb{R}$-cebir olsun. $0 \neq e \in K$, K nın birim elemanı olmak üzere $e' = 0$ dır.

İspat: $a \in K$ için $a' = (a.e)' = a'.e + a.e'$ dir. Buradan $a' + a.e' = a'$ olur. Bundan dolayı $a.e' = 0$ dır. Özel olarak $a = e$ olarak alırsak $e.e' = 0$ olur. $e \neq 0$ için $e' = 0$ olmak zorundadır.■

Önerme 1.6.2. K bir diferansiyel $\mathbb{R}$-cebir olmak üzere regüler $x \in K$ elemanı için $(x^{-1})' = -x^{-1}.x'.x^{-1}$ dir.

İspat: $x.x^{-1} = e$ dir. Her iki tarafın türevini alırsak $(x.x^{-1})' = e' = 0$ dır. Buradan;

$$x'.x^{-1} + x.(x^{-1})' = 0$$
$$x.(x^{-1})' = -x'.x^{-1}$$
$$(x^{-1})' = x^{-1}.(-x'.x^{-1})$$

elde edilir. K, $\mathbb{R}$-cebir olduğundan dolayı $(x^{-1})' = -x^{-1}.x'.x^{-1}$ elde edilir.■

1.7. Küme Üzerinde Grup Hareketi

Bu bölümde [15] den yararlanılmıştır.

Tanım 1.7.1. G bir grup ve K bir küme olsun. $\phi: G \times K \to K$ dönüşümü verilsin. $g \in G, x \in K$ için $\phi(g, x) = g.x$ şeklinde gösterelim. $\forall g_1, g_2 \in G$,$\forall x \in K$ için;

i. $(g_1.g_2).x = g_1.(g_2.x)$

ii. e , G'nin birimi olmak üzere, $e\,.\,x = x$

koşulları sağlanıyorsa, ϕ'ye G'nin K üzerindeki hareketi (etkisi) denir. G'nin K üzerindeki hareketi G: K şeklinde gösterilir.

Örnek 1.7.1. $GL(n, \mathbb{R})$ grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki hareketi

$g = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$ ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$g.x = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}x_1 + \cdots + g_{1n}x_n \\ \vdots \\ g_{n1}x_1 + \cdots + g_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

olarak verilir. Gerçekten; $\forall g,h \in GL(n,\mathbb{R})$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için;

$$\text{i. } (g.h).x = \left(\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \right) . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_{11}.h_{11} + \cdots + g_{1n}.h_{n1} & \cdots & g_{11}.h_{1n} + \cdots + g_{1n}.h_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}.h_{11} + \cdots + g_{nn}.h_{n1} & \cdots & g_{n1}.h_{1n} + \cdots + g_{nn}.h_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (g_{11}.h_{11} + \cdots + g_{1n}.h_{n1}).x_1 + \cdots + (g_{11}.h_{1n} + \cdots + g_{1n}.h_{nn}).x_n \\ \vdots \\ (g_{n1}.h_{11} + \cdots + g_{nn}.h_{n1}).x_1 + \cdots + (g_{n1}.h_{1n} + \cdots + g_{nn}.h_{nn}).x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_{11}(h_{11}.x_1 + \cdots + h_{1n}.x_n) + \cdots + g_{1n}.(h_{n1}.x_1 + \cdots + h_{nn}.x_n) \\ \vdots \\ g_{n1}.(h_{11}.x_1 + \cdots + h_{1n}.x_n) + \cdots + g_{nn}.(h_{n1}.x_1 + \cdots + h_{nn}.x_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (h_{11}.x_1 + \cdots + h_{1n}.x_n) \\ \vdots \\ (h_{n1}.x_1 + \cdots + h_{nn}.x_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = g.(h.x)$$

ii. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n,\mathbb{R})$birim elemanını alalım. $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ için;

$$I.x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.x_1 + \cdots + 0.x_n \\ \vdots \\ 0.x_1 + \cdots + 1.x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

olacağından, $I.x = x$ elde edilir.

1.8. G-Denklik ve G-İnvaryant Fonksiyonlar

Bu bölümde [15] den yararlanılmıştır.

Tanım 1.8.1. G bir grup olmak üzere, G'nin X kümesi üzerindeki etkisi verilsin. $x, y \in X$ olmak üzere, $\exists g \in G$ için $y = g.x$ ise x ve y'ye G-denktir denir ve bu durum $x \overset{G}{\sim} y$ şeklinde gösterilir.

Önerme 1.8.1. G grubunun bir X kümesi üzerindeki etkisi verilsin. Bu takdirde $\forall x, y \in X$ için $x \overset{G}{\sim} y$ bir denklik bağıntısıdır.

İspat: ‘‘$\sim$ ‘‘ bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını göstermeliyiz.

i. $x \in X$ olsun. $g = e \in G$ alalım. $x = g.x = e.x = x$ olup, $x \overset{G}{\sim} x$ dir.

ii. $x, y \in X$ olsun. $x \overset{G}{\sim} y \Rightarrow \exists g \in G$ öyleki $y = g.x$ dir. Burada eşitliğin her iki tarafı soldan $g^{-1} \in G$ ile çarpılırsa

$$y = g.x \Rightarrow g^{-1}.y = g^{-1}.g.x \Rightarrow g^{-1}.y = e.x = x$$

olup, $y \overset{G}{\sim} x$’ dir.

iii. $x, y, z \in X$ ve $x \overset{G}{\sim} y$, $y \overset{G}{\sim} z$ olsun.

$x \overset{G}{\sim} y$ ve $y \overset{G}{\sim} z$ olduğundan $\exists g_1, g_2 \in G$ öyleki $y = g_1.x$ ve $z = g_2.y$ dir. Buradan $z = g_2.y = g_2.(g_1.x) = (g_2.g_1).x$ olup $z = (g_2.g_1).x$ elde edilir. Ayrıca $g_2.g_1 \in G$ olduğu için $x \overset{G}{\sim} z$ dir. ■

Tanım 1.8.2 $\{x_\tau, \tau \in T\}$ ve $\{y_\tau, \tau \in T\}$ iki vektör ailesi olsun. $\exists g \in G$ olmak üzere $y_\tau = g.x_\tau$, $\forall \tau \in T$ ise bu vektör ailelerine G-denktir denir. İki vektör ailesinin denkliği $\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{y_\tau, \tau \in T\}$ ile gösterilir.

Önerme 1.8.2: $\{x_\tau, \tau \in T\}$ ve $\{y_\tau, \tau \in T\}$ iki vektör ailesi olsun. Bu takdirde $\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{y_\tau, \tau \in T\}$ bir denklik bağıntısıdır.

İspat: ‘‘$\sim$ ‘‘ bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını göstermeliyiz.

i. $\forall \tau \in T$ için $\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{x_\tau, \tau \in T\}$ olduğunu gösterelim. $\forall \tau \in T$, $\forall x_\tau \in X$ $g = e \in G$ alalım. $x_\tau = g.x_\tau = e.x_\tau = x_\tau$ olup, $\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{x_\tau, \tau \in T\}$ dir.

ii. $\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{y_\tau, \tau \in T\} \Leftrightarrow \{y_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{x_\tau, \tau \in T\}$ olduğunu gösterelim. $x_\tau, y_\tau \in X$ alalım. $x_\tau \overset{G}{\sim} y_\tau \Longrightarrow \exists g \in G$ öyle ki $\forall \tau \in T$ için $y_\tau = g.x_\tau$ dir. Buradan eşitliğin her iki tarafı $g^{-1} \in G$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} y_\tau = g.x_\tau &\Longrightarrow g^{-1}.y_\tau = (g^{-1}.g).x_\tau \\ &\Longrightarrow g^{-1}.y_\tau = e.x_\tau = x_\tau \end{aligned}$$

olup, $\{y_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{x_\tau, \tau \in T\}$ dir. Tersi de benzer şekilde yapılır.

iii.$\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{y_\tau, \tau \in T\}$ ve $\{y_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{z_\tau, \tau \in T\}$ ise $\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{z_\tau, \tau \in T\}$ olduğunu gösterelim.

$\forall \tau \in T$ için $\exists g_1, g_2 \in G$ öyle ki $y_\tau = g_1.x_\tau$ ve $z_\tau = g_2.y_\tau$ dir. Buradan $\forall \tau \in T$ için $z_\tau = (g_2.g_1).x_\tau$ elde edilir. $g_2.g_1 \in G$ olduğundan $\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{z_\tau, \tau \in T\}$ dir.■

Tanım 1.8.3. Bir G grubunun bir X kümesi üzerindeki etkisi verilsin ve $x \in X$ olsun. $G(x) = \{g.x : g \in G\}$ kümesine x noktasının G-yörüngesi denir.

Örnek 1.8.1. $G = O(1) = \{-1,1\}$ ve $X = \mathbb{R}$ alalım. Bir $x \in \mathbb{R}$ noktasının $O(1)$-yörüngesi $O(1)(x) = \{\mp x : x \in \mathbb{R}\}$ şeklindedir.

Örnek 1.8.2. $G = \left\{\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in [0,2\pi]\right\}$ ve $X = \mathbb{R}^2$ alalım. $x \in \mathbb{R}^2$ noktasının G-yörüngesi

$$G(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\| = \|x\|\}$$

dir.

Tanım 1.8.3. Bir G grubunun X kümesi üzerindeki etkisini alalım. $f: X \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall g \in G$ için $f(g.x) = f(x), \forall x \in X$ ise f reel fonksiyonuna G -invaryant denir.

Tüm G-invaryant polinomların kümesi $\mathbb{R}[x]^G$ ve tüm G-invaryant rasyonel fonksiyonlar kümesi ise $\mathbb{R}(x)^G$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.8.3. $G = O(n)$ olsun. $O(n)$ grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki etkisini alalım. $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $f(x) =< x, x >$ alınırsa bu $O(n)$-invaryanttır. Gerçekten, $\forall g \in O(n)$ için; $f(g.x) =< g.x, g.x >=< x, x > = f(x)$ olur.

Önerme 1.8.3. $x \overset{G}{\sim} y$ olsun. Bu takdirde $\forall f \in \mathbb{R}[x]^G$ için $f(x) = f(y)$'dir.

İspat: $x \overset{G}{\sim} y$ olduğundan $\exists g \in G$ için $y = g.x$ dir. Keyfi bir f G -invaryant polinomu için $f(y) = f(g.x) = f(x)$ olduğundan $f(x) = f(y)$'dir. ■

Örnek 1.8.4. $O(n)$ grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki etkisini alalım.

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, \ldots, x_n = \begin{pmatrix} x_{n1} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{olmak üzere} \quad |[x_1 \ldots x_n]| = \left\|\begin{matrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{nn} \end{matrix}\right\|$$

için $f(x_1, \ldots, x_n) = |[x_1 \ldots x_n]|$ alınırsa, bu $O(n)$-invaryanttır. Gerçekten, $\forall g \in O(n)$ için;

$$f(gx_1, \ldots, gx_n) = |[gx_1 \ldots gx_n]| = |detg|.[x_1 \ldots x_n] = [x_1 \ldots x_n] = f(x_1, \ldots, x_n)$$

elde edilir.

Önerme 1.8.4. $\mathbb{R}[x]^G$, $\mathbb{R}[x]$ polinomlar $\mathbb{R}$-cebirinin birimli $\mathbb{R}$-altcebiridir.

İspat: $\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x]^G$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall g \in G$ için;

i. $(f_1 + f_2)(g.x) = f_1(g.x) + f_2(g.x)$
$= f_1(x) + f_2(x)$
$= (f_1 + f_2)(x)$

ii. $(f_1.f_2)(g.x) = f_1(g.x).f_2(g.x)$
$= f_1(x).f_2(x)$
$= (f_1.f_2)(x)$

iii. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(\lambda.f_1)(g.x) = \lambda.f_1(g.x) = \lambda.f_1(x) = (\lambda.f_1)(x)$

iv. $1(x) = 1 \in \mathbb{R}$ birim elemanı için,

$$(1f_1)(g.x) = 1(g.x).f_1(g.x) = 1.f_1(x) = f_1(x)$$

olup, $f_1 + f_2,\ f_1.f_2,\ \lambda \cdot f_1,\ 1 \in \mathbb{R}[x]^G$ dir. Yani $\mathbb{R}[x]^G$, $\mathbb{R}[x]$ in birimli $\mathbb{R}$-altcebiridir.■

Tanım 1.8.4. H grubunun X kümesi üzerindeki etkisini alalım. f, X kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $\exists \lambda(h)$ $(h \in H)$ fonksiyonu için $f(h.x) = \lambda(h).f(x)$, $\forall h \in H$ $\forall x \in X$ ise f'ye nispi invaryant denir. Bu $\lambda(h)$ fonksiyonuna ise f'nin çarpanı denir.

Önerme 1.8.5. $x \in X$ ve $h_1, h_2 \in H$ olmak üzere f, λ çarpanına sahip en az bir noktada sıfırdan farklı bir nispi invaryant fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\lambda(h_1.h_2) = \lambda(h_1).\lambda(h_2)$$

dir.

İspat: $f\big((h_1.h_2).x\big) = f\big(h_1.(h_2.x)\big) = \lambda(h_1).f(h_2.x) = \lambda(h_1).\lambda(h_2).f(x)$

$$f\big((h_1.h_2).x\big) = \lambda(h_1.h_2).f(x)$$

olup, her iki tarafın eşitliğinden $\lambda(h_1.h_2) = \lambda(h_1).\lambda(h_2)$ elde edilir. ■

Örnek 1.8.5. $H = O(n)$ ve $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ olsun. $O(n)$ nin $\mathbb{R}^n$ üzerindeki etkisi Örnek 1.8.4 deki gibi olmak üzere $f(x_1, \dots, x_n) = [x_1 x_2 \dots x_n]$ polinomunu alalım. $\forall g \in H$ için;

$$f(g.x_1, \dots, g.x_n) = [g.x_1\ g.x_2 \dots g.x_n] = detg.[x_1 x_2 \dots x_n]$$

olup, $\lambda(g) = detg$ olur. $det(g_1.g_2) = detg_1.detg_2$ olduğundan determinant $O(n)$ grubuna göre nispi invaryanttır.

Önerme 1.8.6. $H \subset GL(n, \mathbb{R})$ alt grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerinde etkisi verilsin. $f \in \mathbb{R}(x)^H$ olmak üzere $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$ olacak şekilde çarpanları eşit olan iki nispi H-invaryant polinomun bölümü şeklinde yazılabilir.

İspat: Keyfi $f \in \mathbb{R}(x)^H, f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$ şeklinde yazılabilir. $P(x)$ ve $Q(x)$ in en büyük ortak böleni 1 olarak alınabilir. Eğer en büyük ortak bölen 1 değilse, en büyük ortak bölene böldüğümüzde bu polinomlar aralarında asal olur.

f, H-invaryant olduğundan $\forall h \in H$ için $f(h.x) = f(x)$ dir. Buradan;

$$f(h.x) = \frac{P(h.x)}{Q(h.x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} = f(x)$$

olur. İçler dışlar çarpımı yapılırsa $P(h.x).Q(x) = P(x).Q(h.x)$ elde edilir. $P(x)$ ve $Q(x)$'i aralarında asal alabiliriz. Bu durumda $P(h.x) = \frac{P(x).Q(h.x)}{Q(x)}$ olacağından $Q(h.x), Q(x)$'e bölünecektir. Yani $\exists\varphi(x,h)$ polinomu için $Q(h.x) = \varphi(x,h).Q(x)$ olacaktır. Polinomların eşitliğinden her iki tarafın derecesi eşit olmalıdır. Bu durumda $\varphi(x,h)$ polinomu sadece h'ye bağlı olmalıdır. O halde $Q(h.x) = \varphi(h).Q(x)$'dir. Bu eşitliği yukarıda yerine yazarsak;

$$P(h.x) = \frac{P(x).Q(h.x)}{Q(x)} = \frac{P(x).\varphi(h).Q(x)}{Q(x)} = \varphi(h).P(x)$$

olacaktır. ■

Önerme 1.8.7. $\mathbb{R}$'de yukarıdaki teoremdeki $\varphi(h)$ polinomu $\exists r \in \mathbb{N}^+$ için $\varphi(h) = h^r$ biçimindedir.

İspat: $\varphi(h)$, r dereceli bir polinom olsun. O halde $\varphi(h) = a_0 + a_1.h^1 + \cdots + a_r.h^r$ biçimindedir.

$$\varphi(k) = a_0 + a_1.k^1 + \cdots + a_r.k^r$$
$$\varphi(h.k) = a_0 + a_1.(h.k)^1 + \cdots + a_r.(h.k)^r$$

olur. $\varphi(h.k) = \varphi(h).\varphi(k)$ olduğundan bunları yerine yazarsak;

$$\begin{aligned}\varphi(h.k) &= (a_0 + a_1.h^1 + \cdots + a_r.h^r).(a_0 + a_1.k^1 + \cdots + a_r.k^r) \\ &= {a_0}^2 + a_0.a_1.h + a_0.a_1.k + \cdots + {a_r}^2.h^r.k^r\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın eşitliğinden ${a_i}^2 = a_i$, $i \neq j$ için $a_i.a_j = 0$ $i,j = 0,1 \dots, r$ elde edilir. r için de ${a_r}^2 = a_r$ dir. Buradan $a_r = 0$ veya $a_r = 1$'dir. Polinomun derecesi r olduğundan $a_r \neq 0$ dır. Yani $a_r = 1$ dir. $a_i.a_r = 0$, $i = 0,1, \dots, r-1$ olduğundan $\forall i$ için $a_i = 0$ olmalıdır. Buradan $\varphi(h) = a_r.h^r$ biçimindedir. $a_r = 1$ olduğundan $\varphi(h) = h^r$ olduğu elde edilir.■

Önerme 1.8.8. $g \in O(n)$ olmak üzere $\lambda(g)$ bir rasyonel fonksiyon ve $\forall g_1, g_2 \in O(n)$ için $\lambda(g_1.g_2) = \lambda(g_1).\lambda(g_2)$ olsun. Bu takdirde $\exists k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda(g) = (det\, g)^k$ dır.

İspat: [3] ■

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. $\mathbb{R}^2$'de Afin Eğriler ve Bir Afin Eğrinin Uzunluğu

Bu bölümde [16, 18] den yararlanılmıştır.

Tanım 2.1.1 $I = (a, b)$, $\mathbb{R}$'nin bir açık aralığı olsun. $x: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ C^∞- dönüşümüne $\mathbb{R}^2$ de bir I -yol denir.

Tanım 2.1.2. $\mathbb{R}^2$ de $x(t)$ I_1-yol ve $y(r)$ I_2-yol olsun. Eğer $\varphi: I_2 \longrightarrow I_1$ $\varphi'(r) > 0$ ve $\forall r \in I_2$ için $y(r) = x(\varphi(r))$ olacak şekilde φ C^∞-difeomorfizmi mevcut ise x ve y yollarına D-denktir denir ve $x \overset{D}{\sim} y$ ile gösterilir.

$\mathbb{R}^2$ de D-denk yolların sınıfına $\mathbb{R}^2$ de bir eğri denir. Bir eğriyi α ile gösterelim. $x \in \alpha$ yoluna α eğrisinin bir parametrizasyonu denir.

Örnek 2.1.1. $I_1 = (4, \infty)$ ve $I_2 = (2, \infty)$ olsun. $x(t) = (\sqrt{t}, t)$ I_1-yol ve $y(r) = (r, r^2)$ I_2-yol olsun. $\varphi: I_2 \rightarrow I_1$, $\varphi(r) = r^2$ olmak üzere

$$x\big(\varphi(r)\big) = x(r^2) = (r, r^2) = y(r)$$

dir. Buradan $x \overset{D}{\sim} y$elde edilir.

Tanım 2.1.3. x ve y, $\mathbb{R}^2$ de iki I-yol olsun. Eğer $\exists F \in Aff(2, \mathbb{R})$ öyleki $y(t) = Fx(t)$ ise x ve y yollarına $Aff(2, \mathbb{R})$ denktir denir ve $x \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} y$ şeklinde yazılır.

$\alpha = \{h_\tau : \tau \in \Phi\}$ $\mathbb{R}^2$ de bir eğri olsun. Burada h_τ, α nın bir parametrizasyonudur. $\forall F \in Aff(2, \mathbb{R})$ için $F\alpha = \{Fh_\tau : \tau \in \Phi\}$ $\mathbb{R}^2$ de bir eğridir.

Örnek 2.1.2. $I = (-\infty, \infty)$ olsun. $x(t) = (t, t^2)$ ve $y(t) = (t + 2t^2 - 1, -t^2 + 3)$ I-yollarını göz önüne alalım. $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ve $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ için

$$y(t) = F\big(x(t)\big) = F(t, t^2) = (t + 2t^2 - 1, -t^2 + 3),\ t \in I$$

olduğundan $x(t)$ $\overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim}$ $y(t)$ dir.

Tanım 2.1.4. α ve β , $\mathbb{R}^2$ de iki eğri olsun. Eğer $\exists F \in Aff(2, \mathbb{R})$ öyleki $\beta = F\alpha$ ise α ve β eğrilerine $Aff(2, \mathbb{R})$-denk denir.

$x(t)$, $\mathbb{R}^2$ bir I-yol ve $[x'(t)\, x''(t)]$ $x'(t)$ ve $x''(t)$ vektörlerinin bileşenlerinden oluşturulan determinant olsun.

Tanım 2.1.5. $x(t)$, $\mathbb{R}^2$ de bir I-yol olsun. Eğer $\forall t \in I$ için $[x'(t)\, x''(t)] \neq 0$ ve
$3[x'(t)\, x^{(\iota v)}(t)]\, [x'(t)\, x''(t)] + 12[x'(t)\;\; x''(t)][\, x''(t)\, x'''(t)] - 5[x'(t)\;\; x'''(t)]^2 \neq 0$
ise $x(t)$ yoluna afin regüler denir.

Bir eğri regüler bir yol içeriyorsa regülerdir.

$x: I \to \mathbb{R}^2$ bir I-yol, $I = (a, b)$, $p, q \in I$ olsun. $x(p)$ ve $x(q)$ arasındaki yay uzunluğu

$$l_x(p,q) = \int_p^q \left| \frac{3\big[x'\, x^{(\iota v)}\big][\, x'\, x''] + 12[x'x''][x''x'''] - 5[x'x''']^2}{3[x'x'']^2} \right|^{\frac{1}{2}} dt$$

olarak verilir [18].

$l_x(a,q) = \lim\limits_{p \to a} l_x(p,q)$, $l_x(p,b) = \lim\limits_{q \to b} l_x(p,q)$ olmak üzere x yolunun uzunluğu $L(x) = l_x(a,q) + l_x(p,b) - l_x(p,q)$ olarak tanımlanır. Burada dört durum mümkündür:

i. $l_x(a,q) < \infty\,, l_x(p,b) < \infty$

ii. $l_x(a,q) < \infty\,, l_x(p,b) = \infty$

iii. $l_x(a,q) = \infty\,, l_x(p,b) < \infty$

iv. $l_x(a,q) = \infty\,, l_x(p,b) = \infty$

(i) durumunda x yoluna sonlu afin tipli, (ii), (iii), (iv) durumlarına da sırasıyla $(0, \infty)$ $(-\infty, 0)$, $(-\infty, \infty)$ afin tipli denir. Bir x yolunun afin tipini $T(x)$ ile göstereceğiz.

Örnek 2.1.3. $x: (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$, $x(t) = (cost, sint)$ yolunu göz önüne alalım.

$l_x(p,q) = \int_p^q |3|^{\frac{1}{2}} dt$

$= \int_p^q \sqrt{3}dt = \sqrt{3}(q-p)$

$l_x(0,q) = \lim\limits_{p \to 0} \sqrt{3}(q-p) = \sqrt{3}q$

$l_x(p,\pi) = \lim\limits_{q \to \pi} \sqrt{3}(q-p) = \sqrt{3}\pi - \sqrt{3}p$

$l = l_x(a,q) + l_x(p,b) - l_x(p,q)$

$l = \sqrt{3}q + \sqrt{3}\pi - \sqrt{3}p - \sqrt{3}(q-p) = \sqrt{3}\pi$

olup x sonlu afin tiplidir.

Not: Örnek 2.1.3 te $p = 0\,, q = \infty$ alınırsa $(0,\infty)$-tipli, $p = -\infty\,, q = 0$ alınırsa $(-\infty, 0)$ tipli ve $p = -\infty, q = \infty$ alınırsa $(-\infty,\infty)$ tipli eğri elde edilir.

Önerme 2.1.1 i. $x \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} y$ ise $T(x) = T(y)$ dir.

ii. α bir eğri $x, y \in \alpha$ olsun. Bu takdirde $T(x) = T(y)$ dir.

İspat: i. x sonlu tipli olsun. $x \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} y$ olduğundan $\exists F \in Aff(2,\mathbb{R})$ öyleki $\exists gGL(2,\mathbb{R}), \exists b \in \mathbb{R}^2$ için

$$y(t) = Fx(t) = gx(t) + b$$

dir. Buradan

$$y'(t) = gx'(t)\,, y''(\,t) = gx''(t), \ldots, y^{(n)} = gx^{(n)}\,, n \in \mathbb{N}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} l_y(a,q) &= \lim_{p\to a} l_y(p,q) \\ &= \lim_{p\to a} \int_p^q \left| \frac{3[y'\,y^{(iv)}][\,y'\,y''] + 12[y'y''][y''y'''] - 5[y'y''']^2}{3[y'y'']^2} \right|^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \lim_{p\to a} \int_p^q \left| \frac{3[gx'\,gx^{(iv)}][\,gx'\,gx''] + 12[gx'gx''][gx''gx'''] - 5[gx'gx''']^2}{3[gx'gx'']^2} \right|^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \lim_{p\to a} \int_p^q \left| \frac{3[x'\,x^{(iv)}][\,x'\,x''] + 12[x'x''][x''x'''] - 5[x'x''']^2}{3[x'x'']^2} \right|^{\frac{1}{2}} dt \\ &= l_x(a,q) < \infty \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $l_y(p,b) = l_x(p,b) < \infty$ olduğu görülür. Böylece y sonlu tiplidir, yani $T(x) = T(y)$ dir. Diğer tipler için de benzer ispat yapılabilir.

ii. $x, y \in \alpha$ olsun. O halde bir $\varphi: (c,d) \to (a,b)\,, \varphi'(r) > 0\,, C^\infty$-difeomorfizmi mevcuttur öyle ki $\forall r \in (c,d)$ için $y(r) = x\big(\varphi(r)\big)$ dir. x sonlu tipli olsun.$\bar{p}, \bar{q} \in (c,d)$ için $l_y(\bar{p},\bar{q}) = \int_{\bar{p}}^{\bar{q}} \left| \frac{3[y'(r)\,y^{(iv)}(r)][\,y'(r)\,y''(r)] + 12[y'(r)y''(r)][y''(r)y'''(r)] - 5[y'(r)y'''(r)]^2}{3[y'(r)y''(r)]^2} \right|^{\frac{1}{2}} dr$

olmak üzere

$$l_y(c,\bar{q}) = lim_{\bar{p}\to c}\, l_y(\bar{p},\bar{q})$$

$$= \lim_{\bar{p}\to c} \int_{\bar{p}}^{\bar{q}} \left| \frac{3[y'(r)\, y^{(iv)}(r)][\, y'(r)\, y''(r)] + 12[y'(r)y''(r)][y''(r)y'''(r)] - 5[y'(r)y'''(r)]^2}{3[y'(r)y''(r)]^2} \right|^{\frac{1}{2}} dr$$

$$= \lim_{\bar{p}\to c} \int_{\bar{p}}^{\bar{q}} \left| \frac{\begin{array}{c} 3[(x(\varphi))'(x(\varphi))^{(iv)}][(x(\varphi))'(x(\varphi))''] + 12[(x(\varphi))'(x(\varphi))''][(x(\varphi))''(x(\varphi))'''] \\ -5[(x(\varphi))'(x(\varphi))''']^2 \end{array}}{3[(x(\varphi))'(x(\varphi))'']^2} \right|^{\frac{1}{2}} dr$$

$$= \lim_{\bar{p}\to c} \int_{\bar{p}}^{\bar{q}} \varphi'(r) \left| \frac{3[x'(\varphi)\, x^{(iv)}(\varphi)][\, x'(\varphi)\, x''(\varphi)] + 12[x'(\varphi)x''(\varphi)][x''(\varphi)x'''(\varphi)] - 5[x'(\varphi)x'''(\varphi)]^2}{3[x'(\varphi)x''(\varphi)]^2} \right|^{\frac{1}{2}} dr$$

$\varphi(r) = t,\ \varphi'(r)dr = dt$ dönüşümü yapılırsa

$$l_y(c,\bar{q}) = \lim_{\varphi(\bar{p})\to a} \int_{\varphi(\bar{p})}^{\varphi(\bar{q})} \left| \frac{3[x'\, x^{(iv)}][\, x'\, x''] + 12[x'x''][x''x'''] - 5[x'x''']^2}{3[x'x'']^2} \right|^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \lim_{\varphi(\bar{p})\to a} l_x(\varphi(\bar{p}),\varphi(\bar{q})) = l_x(a,\varphi(\bar{q}))$$

dir. Benzer şekilde $l_y(\bar{p},d)$=$l_x(\varphi(\bar{p}),b)$ dir. Böylece

$$l_y(c,\bar{q}) = l_x(a,\varphi(\bar{q})) < \infty,\ \ l_y(\bar{p},d) = l_x(\varphi(\bar{p}),b)\ < \infty$$

olup y sonlu afin tiplidir. Yani, $T(x) = T(y)$ dir. Diğer tipler için de benzer şekilde ispat yapılır. ■

$x \in \alpha$ yolunun afin tipine α eğrisinin afin tipi denir ve $T(\alpha)$ ile gösterilir. Önerme 2.1.1. e göre $T(\alpha)$, α eğrisinin afin invaryantıdır.

$x(t)$, $\mathbb{R}^2$ de regüler bir yol olsun. Her bir afin tip için afin yay uzunluğu fonksiyonu $s_x(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanır. Sonlu afin tipi ve $T(x) = (0,\infty)$ için $s_x(t) = l_x(a,t)$, $T(x) = (-\infty,0)$ için $s_x(t) = -l_x(a,t)$ dir. $T(x) = (-\infty,\infty)$ tipi için $\mathbb{R}$ nin her $I = (a,b)$ aralığında bir $a_I \in I,\ I = (-\infty,\infty)$ için $a_I = 0$ olsun. Bu durumda $s_x(t) = l_x(\, a_I,t)$ dir [16].

Her $t \in I$ için $s_x{}'(t) > 0$ olduğundan $s_x(t)$ nin ters fonksiyonu mevcuttur. Bu ters fonksiyonu $t_x(s)$ ile göstereceğiz. $t_x(s)$ nin tanım kümesi $T(x)$ dir. Her $s \in T(x)$ için $t_x'(s) > 0$ dır.

Önerme 2.1.2. $I=(a,b)$, $J=(c,d)$ ve $x,\mathbb{R}^2$ de regüler bir I-yol olsun. Bu takdirde;

i. Her $F\in Aff(2,\mathbb{R})$ için $s_{Fx}(t)=s_x(t)$, $t_{Fx}(s)=t_x(s)$ dir.

ii. $s_{x(\varphi)}(r)=s_x(\varphi(r))+s_0$ ve $\varphi\left(t_{x(\varphi)}(s+s_0)\right)=t_x(s)$ eşitlikleri $\varphi: J\to I$ öyle ki $\forall r\in J$ için $\varphi'(r)>0$ C^∞-difeomorfizmi için sağlanır, burada $T(x)\neq(-\infty,+\infty)$ için $s_0=0$, $T(x)=(-\infty,+\infty)$ için $s_0=l_x\big(\varphi(a_J),a_I\big)$ dır.

İspat: i. $T(x)=(0,\infty)$ olsun. $s_x(t)=l_x(a,t)=\lim\limits_{p\to a} l_x(p,t)$ idi. Buradan

$$
\begin{aligned}
s_{Fx}(t) &= l_{Fx}(a,t)\\
&=\lim_{p\to a}\int_p^t\left|\frac{3\left[(gx+b)'(gx+b)^{(iv)}\right]\left[(gx+b)'(gx+b)''\right]+12\left[(gx+b)'(gx+b)''\right]\left[(gx+b)''(gx+b)'''\right]-5\left[(gx+b)'(gx+b)'''\right]^2}{3[(gx+b)'(gx+b)'']^2}\right|^{\frac{1}{2}}dt\\
&=\lim_{p\to a}\int_p^t\left|\frac{3\left[gx'gx^{(iv)}\right]\left[gx'gx''\right]+12\left[gx'gx''\right]\left[gx''gx'''\right]-5[gx'gx''']^2}{3[gx'gx'']^2}\right|^{\frac{1}{2}}dt\\
&=\lim_{p\to a}\int_p^t\left|\frac{(detg)^2.\{3\left[x'x^{(iv)}\right]\left[x'x''\right]+12\left[x'x''\right]\left[x''x'''\right]-5\left[x'x'''\right]^2\}}{(detg)^2.3[x'x'']^2}\right|^{\frac{1}{2}}dt\\
&=\lim_{p\to a}\int_p^t\left|\frac{3\left[x'x^{(iv)}\right]\left[x'x''\right]+12\left[x'x''\right]\left[x''x'''\right]-5\left[x'x'''\right]^2}{3[x'x'']^2}\right|^{\frac{1}{2}}dt\\
&=\lim_{p\to a} l_x(p,t)\\
&=l_x(a,t)\\
&=s_x(t)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$s_x\big(t_x(s)\big)=s$ ve $t_x\big(s_x(t)\big)=t$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$s_{Fx}\big(t_{Fx}(s)\big)=s \text{ ve } t_{Fx}\big(s_{Fx}(t)\big)=t$$

olur.

$$t_{Fx}\big(s_{Fx}(t)\big)=t_x\big(s_x(t)\big)=t$$

olup, ters fonksiyonun tekliğinden $t_{Fx}(s) = t_x(s)$ elde edilir. Diğer tipler de benzer şekilde gösterilir.

ii. $T(x) = (-\infty, +\infty)$ olsun.

$$s_{x(\varphi)}(r) = \int_{a_J}^{r} \left| \frac{3\left[(x(\varphi))'(x(\varphi))^{(iv)}\right][x(\varphi))'(x(\varphi))''] + 12\left[(x(\varphi))'(x(\varphi))''\right]\left[(x(\varphi))''(x(\varphi))'''\right] - 5[(x(\varphi))'(x(\varphi))''']^2}{3[(x(\varphi))'(x(\varphi))'']^2} \right|^{\frac{1}{2}} dr$$

$$= l_x\left(\varphi(a_J), \varphi(r)\right)$$

$$= l_x(a_I, \varphi(r)) + l_x\left(\varphi(a_J), a_I\right)$$

elde edilir. Böylece $s_{x(\varphi)}(r) = s_x(\varphi(r)) + s_0$, burada $s_0 = l_x\left(\varphi(a_J), a_I\right)$ dır.

$s_x\left(t_x(s)\right) = s$ ve $t_x\left(s_x(t)\right) = t$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$s_{x(\varphi)}\left(t_{x(\varphi)}(\tau)\right) = \tau$$

olur. O halde

$$s_x\left(\varphi\left(t_{x(\varphi)}(\tau)\right)\right) + s_0 = \tau$$

ve

$$s_x\left(\varphi\left(t_{x(\varphi)}(\tau)\right)\right) = \tau - s_0$$

elde edilir. Her iki tarafın t_x altındaki görüntüsünü alırsak

$$\varphi\left(t_{x(\varphi)}(\tau)\right) = t_x(\tau - s_0)$$

bulunur. $\tau - s_0 = s$ dersek,

$$\varphi\left(t_{x(\varphi)}(s + s_0)\right) = t_x(s)$$

elde edilir. $T(x) \neq (-\infty,+\infty)$ için $s_0 = 0$ dır.■

Uyarı: α regüler bir eğri ve $x \in \alpha$ olsun. $x\big(t_x(s)\big)$ α nın bir parametrizasyonudur.

Tanım 2.1.6. Regüler bir α eğrisinin $x\big(t_x(s)\big)$ parametrizasyonuna α nın invaryant parametrizasyonu denir. α nın tüm invaryant parametrizasyonlarının kümesi Φ_α ile gösterilir.

Önerme 2.1.3. α regüler bir eğri, $x \in \alpha$ bir I-yol, $I = T(\alpha)$ olmak üzere aşağıdaki şartlar denktir:

i. x, α'nın invaryant parametrizasyonudur.

ii. $\forall s \in T(\alpha)$ için

$$\left(\frac{3[x'(s)\,x^{(iv)}(s)][\,x'(s)\,x''(s)]+12[x'(s)x''(s)][x''(s)x'''(s)]-5[x'(s)x'''(s)]^2}{3[x'(s)x''(s)]^2}\right)^2 = 1 \text{ dir.}$$

iii. $\forall s \in T(\alpha)$ için $s_x(s) = s$ dir.

İspat: i)⇒ii) $x \in \Phi_\alpha$ olsun. $\exists y \in \alpha$ öyleki $x(s) = y\left(t_y(s)\right)$ dir. Önerme 2.1.2. ye göre $s_x(s) = s_{y(t_y)}(s) + s_0 = s + s_0$ dır. Burada s_0 Önerme 2.1.2. deki gibidir. s_0, s ye bağlı olmadığından,

$$s_x'(s) = \left|\frac{3[x'(s)\,x^{(iv)}(s)][\,x'(s)\,x''(s)]+12[x'(s)x''(s)][x''(s)x'''(s)]-5[x'(s)x'''(s)]^2}{3[x'(s)x''(s)]^2}\right|^{\frac{1}{2}} = 1$$

olur.

Böylece her $s \in T(\alpha)$ için,

$$\left(\frac{3[x'(s)\,x^{(iv)}(s)][\,x'(s)\,x''(s)]+12[x'(s)x''(s)][x''(s)x'''(s)]-5[x'(s)x'''(s)]^2}{3[x'(s)x''(s)]^2}\right)^2 = 1$$

dir.

ii) ⇒iii) $s_x(t)$ nin tanımından, $(0,\infty)$ afin tipi için

$$s_x(s) = l_x(a,s)$$

$$= \lim_{p\to a} \int_p^s \left|\frac{3[x'(s)\,x^{(iv)}(s)][\,x'(s)\,x''(s)]+12[x'(s)x''(s)][x''(s)x'''(s)]-5[x'(s)x'''(s)]^2}{3[x'(s)x''(s)]^2}\right|^{\frac{1}{2}} ds$$

$$= \lim_{p\to a} \int_p^s ds = \lim_{p\to a}(s-p) = s-a$$

elde edilir. $a = 0$ iken $s_x(s) = s$ dir. Diğer tipler için de benzer şekilde ispat yapılır.

iii)⇒i) $s_x(s) = s$ eşitliği $t_x(s) = s$ anlamına gelir. Böylece, $x(s) = x(t_x(s)) \in \Phi_\alpha$ dır.■

Önerme 2.1.4. α regüler bir eğri ve $T(\alpha) \neq (-\infty, +\infty)$ olsun. Bu takdirde α nın bir tek invaryant parametrizasyonu vardır.

İspat: $x, y \in \Phi_\alpha$, x bir I_1 -yol ve y bir I_2 -yol olsun. Öyleyse $\varphi: I_2 \to I_1$ $\varphi'(r) > 0$ olacak şekilde bir C^∞-difeomorfizmi mevcuttur ve $\forall r \in I_2$ için $y(r) = x\big(\varphi(r)\big)$ dir. Önerme 2.1.2. den ve $T(\alpha) \neq (-\infty, +\infty)$ için,

$$y\left(t_y(s)\right) = x\left(\varphi\left(t_{x(\varphi)}(s)\right)\right) = x\big(t_x(s)\big)$$

elde edilir.■

Önerme 2.1.5. α regüler bir eğri, $T(\alpha) = (-\infty, +\infty)$ ve $x \in \Phi_\alpha$ olsun. Bu takdirde

$$\Phi_\alpha = \{y :\ y(s) = x(s+s'),\ s' \in (-\infty, +\infty)\}$$

dur. Özellikle Φ_α kümesi sayılamazdır.

İspat: $x, y \in \Phi_\alpha$ olsun. Öyleyse $\exists h, k \in \alpha$ öyleki $x(s) = h\big(t_h(s)\big)$, $y(s) = k\big(t_k(s)\big)$ dir. Burada h bir I_1-yol ve k bir I_2-yoldur. $h, k \in \alpha$ olduğundan $\exists$ $\varphi: I_2 \to I_1$ öyle ki $\varphi'(r) > 0$ ve $\forall r \in I_2$ için $k(r) = h\big(\varphi(r)\big)$ dir. Önerme 2.1.2. den

$$y(s) = k\big(t_k(s)\big) = h\left(\varphi\left(t_{h(\varphi)}(s)\right)\right) = h\big(t_h(s-s_0)\big) = x(s-s_0)$$

bulunur.

$x \in \Phi_\alpha$, $s' \in (-\infty, +\infty)$ ve $z(s) = x(s+s') \in \Phi_\alpha$ olsun. Önerme 2.1.3. den $\forall s \in T(\alpha)$ için.

$$\left(\frac{3[x'(s)\,x^{(iv)}(s)][\ x'(s)\,x''(s)]+12[x'(s)x''(s)][x''(s)x'''(s)]-5[x'(s)x'''(s)]^2}{3[x'(s)x''(s)]^2}\right)^2 = 1$$

dir. $s' \in (-\infty, +\infty)$ için $s + s' \in (-\infty, +\infty)$ olduğundan, $\forall s \in T(\alpha)$ için

$$\left(\frac{3[z'(s)\, z^{(iv)}(s)][\, z'(s)\, z''(s)] + 12[z'(s) z''(s)][z''(s) z'''(s)] - 5[z'(s) z'''(s)]^2}{3[z'(s) z''(s)]^2}\right)^2 = 1$$

elde edilir. Önerme 2.1.3. den $z(s) \in \Phi_\alpha$ dır. ■

Teorem 2.1.1. α, β regüler eğriler ve $x \in \Phi_\alpha$, $y \in \Phi_\beta$ olsun. Bu takdirde

i. $T(\alpha) = T(\beta) \neq (-\infty, +\infty)$ için, $\alpha \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \beta$ dır $\Leftrightarrow x\,(s) \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} y(s)$ dir.

ii. $T(\alpha) = T(\beta) = (-\infty, +\infty)$ için $\alpha \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \beta$ dır $\Leftrightarrow \exists s' \in (-\infty, +\infty)$ için $x(s) \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} y(s + s')$ dir.

İspat: i. $\alpha \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \beta$ ve $h \in \alpha$ olsun. Öyleyse $\exists F \in Aff(2, \mathbb{R})$ öyleki $\beta = F\alpha$ dır. Buradan $Fh \in \beta$ olur. Önerme 2.1.2. ve Önerme 2.1.4. ü kullanarak,

$$x(s) = h\big(t_h(s)\big),\ y(s) = (Fh)\big(t_{Fh}(s)\big)$$

ve

$$\begin{aligned} Fx(s) &= F\left(h\big(t_h(s)\big)\right) \\ &= (Fh)\left(\big(t_{Fh}(s)\big)\right) \\ &= y(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $x(s) \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} y(s)$ bulunur.

Tersine, $x(s) \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} y(s)$ olsun. Öyleyse $\exists F \in Aff(2, \mathbb{R})$ öyleki $Fx = y$ dir. Buradan $\alpha \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \beta$ dır.

ii. $\alpha \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \beta$ olsun. O halde $\exists h \in \alpha,\ k \in \beta,\ I$-yol ve $F \in Aff(2, \mathbb{R})$ öyleki $k(t) = Fh(t)$ dir. Buradan

$$k\big(t_k(s)\big) = k\big(t_{Fh}(s)\big) = k(\big(t_h(s)\big) = (Fh)\big(t_h(s)\big)$$

bulunur. Önerme 2.1.5. den $s_1, s_2 \in (-\infty, +\infty)$ için

$$x(s) = k(t_k(s + s_1)), y(s) = h(t_h(s + s_2))$$

elde edilir. Bu nedenle, $x(s - s_1) = Fy(s - s_2)$ olur. Böylece $x(s) \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} y(s + s')$ olup, burada $s' = s_1 - s_2$ dir.

Tersine, $s' \in (-\infty, +\infty)$ için $x(s) \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} y(s + s')$ olsun. $\exists F \in Aff(2, \mathbb{R})$ öyleki $y(s + s') = Fx(s)$ dir. $y(s + s') \in \beta$ olduğundan, $\alpha \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \beta$ dır.■

2.2. Eğrilerin Diferansiyel Polinomları ve Diferansiyel Rasyonel Fonksiyonları

Bu bölümde [15] den yararlanılmıştır.

x bir bilinmeyen olmak üzere katsayıları $\mathbb{R}$ den olan x bilinmeyenli polinomlar $\mathbb{R}$-cebirini $\mathbb{R}[x]$ ile göstermiştik. $f(t), t \in I$ bir C^∞-fonksiyon olsun. Bilinmeyeni f olan reel katsayılı polinomlar $\mathbb{R}$-cebiri $\mathbb{R}[f]$ ile gösterilir. $P \in \mathbb{R}[f]$ ise $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$ olmak üzere $P(f) = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n$ biçimindedir.

$P(f, f') = a_0(f') + a_1(f')f + a_2(f')f^2 + \cdots + a_n(f')f^n$ polinomu katsayıları $a_i(f') \in \mathbb{R}[f']$ $i = 0, \ldots, n$ olan f bilinmeyenli polinomlar $\mathbb{R}$-cebirinin elemanıdır. Bu $\mathbb{R}$-cebir $\mathbb{R}[f'][f] = \mathbb{R}[f, f']$ ile gösterilir. Tümevarımla $\mathbb{R}[f, \ldots, f^{(m)}]$ $\mathbb{R}$-cebiri oluşturulabilir.

$$\mathbb{R}\{f\} = \cup_{m=0}^{\infty} \mathbb{R}[f, \ldots, f^{(m)}]$$

olarak alınır. $P_1, P_2 \in \mathbb{R}\{f\}$ olsun. $P_1 \in \mathbb{R}\{f\}$ olduğundan, $\exists s \in \mathbb{N}$ için $P_1 \in \mathbb{R}[f, \ldots, f^{(s)}]$ dir. $P_2 \in \mathbb{R}\{f\}$ olduğundan $\exists k \in \mathbb{N}$ için $P_2 \in \mathbb{R}[f, \ldots, f^{(k)}]$ dır. $n = \mathrm{mak}(s, k)$ olarak alacak olursak $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[f, \ldots, f^{(n)}]$ olur. Buradaki toplama ve çarpma işlemleri ise $\mathbb{R}[f, \ldots, f^{(n)}]$ $\mathbb{R}$-cebirinde olduğu gibidir.

Önerme 2.2.1: $\mathbb{R}\{f\}$ bir tamlık bölgesidir.

İspat: $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}[f, \ldots, f^{(m)}]$ bir tamlık bölgesi olduğundan $\mathbb{R}\{f\}$ bir tamlık bölgesidir [6].

$\mathbb{R}\{f\}$ bir tamlık bölgesi olduğundan bunu kapsayan bir bölüm cismi vardır. Bu bölüm cismi $\mathbb{R} < f >$ ile gösterilir. $\mathbb{R} < f >$ nin elemanları $P_1, P_2 \in \mathbb{R}\{f\}, P_2 \neq 0$ olmak üzere $\frac{P_1}{P_2}$ biçimindedir. $\mathbb{R} < f >$ nin elemanlarına diferansiyel rasyonel fonksiyonlar denir. Buradaki türev şu şekildedir:

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)' = \frac{{P_1}'.P_2 - P_1.{P_2}'}{{P_2}^2}$$

Benzer şekilde $\mathbb{R}\{f, g\}$ bir tamlık bölgesidir ve onu kapsayan bölüm cismi $\mathbb{R} < f, g >$ ile gösterilir. Bu şekilde tümevarımla $\mathbb{R} < f_1, f_2, \dots, f_m >$ bölüm cismi oluşturulabilir.

Not: x bir I-yol olsun. $\mathbb{R}^n$ de bir I-yol aynı zamanda $\mathbb{R}^n$ de bir parametrik eğri olarak adlandırılır.

$x: I \to \mathbb{R}^n$ bir parametrik eğri ise bu durumda, $\forall t \in I$ için $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big)$ biçimindedir. Burada $x_i: I \to \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ C^∞-türevli fonksiyonlardır.

$h \in GL(n, \mathbb{R})$ olmak üzere $h = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$ olsun. h elemanının $x(t)$ üzerindeki etkisi;

$$hx(t) = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}x_1(t) + \cdots + h_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ h_{n1}x_n(t) + \cdots + h_{nn}x_n(t) \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

Tanım 2.2.1. $H \subset GL(n, \mathbb{R})$ bir alt grup; $x: I \to \mathbb{R}^n$ bir parametrik eğri olmak üzere $f < x >$ bir diferansiyel rasyonel fonksiyon olsun. Eğer $\forall h \in H$ için $f < hx >= f < x >$ ise $f < x >$ diferansiyel rasyonel fonksiyonuna H-invaryant denir. Bütün H-invaryant diferansiyel rasyonel fonksiyonlar kümesi $\mathbb{R} < x >^H$ ile gösterilir. Benzer şekilde H-invaryant diferansiyel polinom tanımı verilebilir. Bütün H-invaryant diferansiyel polinomlar kümesi $\mathbb{R}\{x\}^H$ ile gösterilir.

$\mathbb{R}\{x_1, x_2\}^H$ ve $\mathbb{R} < x_1, x_2 >^H$ yukarıdaki gibi tanımlanır.

Örnek 2.2.1. $H = O(1) = \{-1,1\}$ olsun. $0 \neq f(x) \in \mathbb{R}\{x\}^H$ için

$$f\{x\} = \sum A_{\alpha_0 \dots \alpha_n} x^{\alpha_0} (x')^{\alpha_1} \dots (x^{(n)})^{\alpha_n}$$

biçimindedir. f, H-invaryant olduğundan:

$$f\{-x\} = \sum A_{\alpha_0\dots\alpha_n}(-x)^{\alpha_0}(-x')^{\alpha_1}\dots(-x^{(n)})^{\alpha_n}$$
$$= \sum A_{\alpha_0\dots\alpha_n}x^{\alpha_0}(x')^{\alpha_1}\dots(x^{(n)})^{\alpha_n} = f\{x\}$$

olmalıdır. Buradan:

$$f\{-x\} = \sum(-1)^{\alpha_0+\dots+\alpha_n}.A_{\alpha_0\dots\alpha_n}x^{\alpha_0}(x')^{\alpha_1}\dots(x^{(n)})^{\alpha_n}$$
$$= \sum A_{\alpha_0\dots\alpha_n}x^{\alpha_0}(x')^{\alpha_1}\dots(x^{(n)})^{\alpha_n}$$

olmalıdır. $\alpha_0 + \dots + \alpha_n$ tek ise:

$$\sum(-1).A_{\alpha_0\dots\alpha_n}x^{\alpha_0}(x')^{\alpha_1}\dots(x^{(n)})^{\alpha_n} = \sum A_{\alpha_0\dots\alpha_n}x^{\alpha_0}(x')^{\alpha_1}\dots(x^{(n)})^{\alpha_n}$$

olur. Buradan:

$$2\left(\sum A_{\alpha_0\dots\alpha_n}x^{\alpha_0}(x')^{\alpha_1}\dots(x^{(n)})^{\alpha_n}\right) = 0$$

olup $A_{\alpha_0\dots\alpha_n} = 0$ elde edilir. O halde f, H-invaryanttır ancak ve ancak terimleri üstleri toplamı tek olanların katsayıları 0 dır.

Teorem 2.2.1. i. $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, $GL(2,\mathbb{R})$ grubunun bir $GL(2,\mathbb{R})$-invaryant polinomu (rasyonel fonksiyonu) olsun. Bu takdirde:

$$f(x_1, \dots, x_{m+1}) = \varphi(x_1 - x_{m+1}, \dots, x_m - x_{m+1})$$

koşulunu sağlayan f , $Aff(2,\mathbb{R})$-invaryant polinom (rasyonel fonksiyon) dur.

ii. $f(x_1, \dots, x_{m+1})$**,** bir $Aff(2,\mathbb{R})$-invaryant polinomu (rasyonel fonksiyon) olsun. Bu takdirde $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ $GL(2,\mathbb{R})$-invaryant polinom (rasyonel fonksiyonu)

$$f(x_1, \dots, x_{m+1}) = \varphi(x_1 - x_{m+1}, \dots, x_m - x_{m+1})$$

olacak şekilde mevcuttur.

İspat: i. $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, $GL(2,\mathbb{R})$-invaryant polinom (rasyonel fonksiyon) olsun. $\forall\, g \in GL(2,\mathbb{R})$, $\forall\, b \in \mathbb{R}^2$ için;

$$\begin{aligned}
&f(gx_1 + b, \dots, gx_{m+1} + b) \\
&= \varphi((gx_1 + b) - (gx_{m+1} + b), \dots, (gx_m + b) - (gx_{m+1} + b)) \\
&= \varphi(gx_1 - gx_{m+1}, \dots, gx_m - gx_{m+1}) \quad (g \text{ lineer olduğundan}) \\
&= \varphi\big(g(x_1 - x_{m+1}), \dots, g(x_m - x_{m+1})\big) \ (\varphi, GL(2,\mathbb{R}) \text{ invaryant olduğundan}) \\
&= \varphi(x_1 - x_{m+1}, \dots, x_m - x_{m+1}) \\
&= f(x_1, \dots, x_{m+1})
\end{aligned}$$

olup f, $Aff(2,\mathbb{R})$- invaryant polinom (rasyonel fonksiyon) dur.

ii. $f(x_1, \dots, x_{m+1})$, $Aff(2,\mathbb{R})$- invaryant polinom (rasyonel fonksiyon) olsun.

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_m, 0)$$

olarak alalım. f , $Aff(2,\mathbb{R})$- invaryant polinom (rasyonel fonksiyon) olduğundan özel olarak $b = 0$ alınırsa $GL(2,\mathbb{R})$- invaryanttır. Dolayısıyla φ, $GL(2,\mathbb{R})$- invaryanttır. $b \in \mathbb{R}^2$ ve $g = e$ olarak alınırsak f, $Aff(2,\mathbb{R})$-invaryant polinom (rasyonel fonksiyon) olduğundan;

$$f(x_1, \dots, x_{m+1}) = f(x_1 + b, \dots, x_{m+1} + b)$$

elde edilir. $b = -x_{m+1}$ olarak alırsak;

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_{m+1}) &= f(x_1 - x_{m+1}, \dots, x_{m+1} - x_{m+1}, 0) \\
&= \varphi(x_1 - x_{m+1}, \dots, x_m - x_{m+1})
\end{aligned}$$

olup eşitlik sağlanır. ■

2.3. $\mathbb{R} < x_1 , x_2 >^G$ Diferansiyel Cisminin Üreteçleri

Bu tez çalışmasında yapılan orijinal çalışmalar bu bölüm ve devamındaki bölümlerde yer almaktadır.

Bundan sonra bir x parametrik eğrisinin regülerliği bakımından $\forall t \in I$ için $[x'_1(t)\ x''_1(t)] \neq 0$ olduğunu varsayacağız [15].

Teorem 2.3.1. x_1 ve x_2 $\mathbb{R}^2$ de iki parametrik eğri, x_1 regüler ve $G = Aff(2,\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R} < x_1\ , x_2 >^G$ nin üreteç kümesi

$$\frac{[x'_1\quad x'''_1]}{[x'_1\ \ x''_1]},\ \frac{[x''_1\quad x'''_1]}{[x'_1\ \ x''_1]}\ ,\ \frac{[x_1 - x_2\quad x''_1]}{[x'_1\ \ x''_1]}\ ,\ \frac{[x'_1\quad x_1 - x_2]}{[x'_1\ \ x''_1]}$$

biçimindedir.

İspat: $f \in \mathbb{R} < x_1\ , x_2 >^G$ olsun. Bu durumda $\exists k \in \mathbb{N}$ için

$$f < x_1\ , x_2 >= f < x_1\ , x_2, x'_1\ , x'_2, x''_1\ , x''_2, \dots, x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k)} >$$

G-invaryanttır. Buradan $\forall g \in GL(2,\mathbb{R})$ ve $\forall b \in \mathbb{R}^2$ için

$$f < gx_1\ + b, gx_2 + b > = f < x_1\ , x_2 >$$

dir. O halde

$$f < gx_1 + b, gx_2 + b, gx'_1\ , gx'_2, gx''_1\ , gx''_2, \dots, gx_1{}^{(k)}, gx_2{}^{(k)} >$$
$$= f < x_1\ , x_2, x'_1\ , x'_2, x''_1\ , x''_2, \dots, x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k)} >$$

olur. g=e alırsak

$$f < x_1\ + b, x_2 + b, x'_1\ , x'_2, x''_1\ , x''_2, \dots, x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k)} >$$
$$= f < x_1\ , x_2, x'_1\ , x'_2, x''_1\ , x''_2, \dots, x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k)} >$$

elde edilir. Bu eşitlik $\forall$b için geçerli olduğundan b=$-x_1$ alırsak

$$f < x_1 - x_1\ , x_2 - x_1\ , x'_1\ , x'_2, x''_1\ , x''_2, \dots, x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k)} >$$
$$= \varphi < x_2 - x_1\ , x'_1\ , x'_2, x''_1\ , x''_2, \dots\ , x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k)} >$$

olur. φ, $GL(2,\mathbb{R})$ invaryant olduğundan

$\varphi < g(x_2\text{-}x_1\ ), gx_1'\ , gx_2', gx_1'', gx_2'', \dots, gx_1{}^{(k)}, gx_2{}^{(k)} >$
$= \varphi < x_2\text{-}x_1\ , x_1'\ , x_2', x_1'', x_2'', \dots, x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k)} >$

dır. Burada $x_1' = y_1$ ve $x_2\text{-}x_1 = y_2$ alırsak $\forall g \in GL(2,\mathbb{R})$ için

$$\psi < gy_1, gy_2, gy_1', gy_2' \dots, gy_2{}^{(k)} >= \psi < y_1, y_2, y_1', y_2', \dots, y_2{}^{(k)} >$$

elde edilir. ψ, $GL(2,\mathbb{R})$-invaryanttır, buradan

$$\frac{[y_1''\ \ y_1']}{[y_1\ y_1']}, \frac{[y_1\ y_1'']}{[y_1\ y_1']}, \frac{[y_2\ y_1']}{[y_1\ y_1']}, \frac{[y_1\ y_2]}{[y_1\ y_1']}$$

ile üretilebilir [17]. $y_2 = x_2 - x_1$ ve $y_1 = x_1'$ ifadelerini yerine yazarsak

$$\frac{[x_1''\quad x_1''']}{[x_1'\ \ x_1'']}, \quad \frac{[x_1'\quad x_1''']}{[x_1'\ \ x_1'']}, \quad \frac{[x_2 - x_1\quad x_1'']}{[x_1'\ \ x_1'']}, \quad \frac{[x_1'\quad x_2 - x_1\ ]}{[x_1'\ \ x_1'']}$$

elde edilir.■

2.4. İki Eğri Ailesinin Denkliği

Tanım 2.4.1. $\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2\}$ iki parametrik eğri ailesi olsun. Eğer $\exists g \in GL(2,\mathbb{R})$, $\exists b \in \mathbb{R}^2$ için

$y_1(t) = gx_1(t) + b$
$y_2(t) = gx_2(t) + b\ , \forall t \in I$

ise bu eğri ailelerine $Aff(2,\mathbb{R})$-denktir denir ve $\{x_1, x_2\} \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \{y_1, y_2\}$ ile gösterilir.

Teorem 2.4.1. $G = Aff(2,\mathbb{R})$ olsun. $\{x_1, x_2\}$ ve $\{y_1, y_2\}$ iki eğri ailesi ve x_1, y_1 regüler olsun. Eğer

$$\frac{[x_1' \quad x_1''']}{[x_1' \;\; x_1'']} = \frac{[y_1' \quad y_1''']}{[y_1' \;\; y_1'']}\,, \quad \frac{[x_1'' \quad x_1''']}{[x_1' \;\; x_1'']} = \frac{[y_1'' \; y_1''']}{[y_1' \;\; y_1'']}$$

$$\frac{[x_2 - x_1 \quad x_1'']}{[x_1' \;\; x_1'']} = \frac{[y_2 - y_1 \; y_1'']}{[y_1' \;\; y_1'']}\,, \frac{[x_1' \;\; x_2 - x_1]}{[x_1' \;\; x_1'']} = \frac{[y_1' \;\; y_2 - y_1]}{[y_1' \;\; y_1'']}$$

oluyor ise $\exists g \in GL(2,\mathbb{R})$ ve $\exists b \in \mathbb{R}^2$ için

$$y_1(t) = gx_1(t) + b$$
$$y_2(t) = gx_2(t) + b$$

dir. Yani $\{x_1, x_2\} \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \{y_1, y_2\}$ dir.

İspat: $x_1' = z_1$, $y_1' = w_1$, $x_2 - x_1 = z_2$, $y_2 - y_1 = w_2$ olsun. Bu durumda yukarıdaki eşitlikler

$$\frac{[z_1 \;\; z_1'']}{[z_1 \;\; z_1']} = \frac{[w_1 \; w_1'']}{[w_1 \; w_1']} \quad , \quad \frac{[z_1' \;\; z_1'']}{[z_1 \;\; z_1']} = \frac{[w_1' \;\; w_1'']}{[w_1 \;\; w_1']} \qquad (1)$$

$$\frac{[z_2 \;\; z_1']}{[z_1 \;\; z_1']} = \frac{[w_2 \;\; w_1']}{[w_1 \;\; w_1']} \quad , \quad \frac{[z_1 \;\; z_2]}{[z_1 \;\; z_1']} = \frac{[w_1 \;\; w_2]}{[w_1 \;\; w_1']} \qquad (2)$$

olarak yazılabilir.

$$A_z = \begin{pmatrix} z_{11}(t) & z_{11}'(t) \\ z_{12}(t) & z_{12}'(t) \end{pmatrix} \qquad A_z' = \begin{pmatrix} z_{11}'(t) & z_{11}''(t) \\ z_{12}'(t) & z_{12}''(t) \end{pmatrix}$$

matrislerini göz önüne alalım.

$[x_1' \;\; x_1''] = [z_1 \;\; z_1'] \neq 0$ olduğundan A_z matrisinin tersi mevcuttur. $A_z^{-1}.A_z' = C$ olsun. Buradan $A_z' = A_z \cdot C$ olur. O halde

$$\begin{pmatrix} z_{11}' & z_{11}'' \\ z_{12}' & z_{12}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{11}' \\ z_{12} & z_{12}' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

dir. Buradan aşağıdaki denklem sistemleri elde edilir:

$$z_{11}' = c_{11}z_{11} + c_{21}z_{11}'$$
$$z_{12}' = c_{11}z_{12} + c_{21}z_{12}'$$

$$z''_{11} = c_{12}z_{11} + c_{22}z'_{11}$$
$$z''_{12} = c_{12}z_{12} + c_{22}z'_{12}$$

Bu denklem sistemlerinin çözümlerinden

$$c_{11} = \frac{[\ z'_1\ z'_1]}{[z_1\ z'_1]} = 0 \quad , \ c_{21} = \frac{[z_1\ z'_1]}{[z_1\ z'_1]} = 1 \ \ , \ \ c_{12} = \frac{[\ z'_1\ z''_1]}{[z_1\ z'_1]} \quad , \ \ c_{22} = \frac{[z_1\ z''_1]}{[z_1\ z'_1]}$$

bulunur.

$A_w = \begin{pmatrix} w_{11} & w'_{11} \\ w_{12} & w'_{12} \end{pmatrix}$ matrisini göz önüne alalım. (1) ve (2) eşitliklerinden $A_w^{-1}.A'_w = A_z^{-1}.A'_z$ bulunur.

$$\begin{aligned}(A_wA_z^{-1})' &= A'_wA_z^{-1} + A_w(A_z^{-1})' \\ &= A'_wA_z^{-1} - A_wA_z^{-1}A'_zA_z^{-1} \\ &= A_wA_w^{-1}A'_wA_z^{-1} - A_wA_z^{-1}A'_zA_z^{-1} \\ &= A_w(A_w^{-1}A'_w - A_z^{-1}A'_z)A_z^{-1} = 0\end{aligned}$$

dir. Öyleyse $\exists g \in GL(2,\mathbb{R})$ öyleki $A_wA_z^{-1} = g$ dir, buradan $A_w = gA_z$ dir. Bunu açık olarak yazarsak

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w'_{11} \\ w_{12} & w'_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z_{11} & z'_{11} \\ z_{12} & z'_{12} \end{pmatrix}$$

olur. O halde

$$w_1(t) = gz_1(t), \qquad \forall t \ \in I$$

ve buradan

$$y'_1(t) = gx'_1(t)\,, \qquad \forall t \in I$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$y_1(t) = gx_1(t) + b \tag{3}$$

elde edilir.

$D_z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix}$ ve $A_z^{-1}.D_z = H$ olsun. Öyleyse $D_z = A_z.H$ dir. Açık şekilde yazarsak

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z'_{11} \\ z_{12} & z'_{12} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

olur. Buradan aşağıdaki denklem sistemleri elde edilir:

$$z_{11} = h_{11}z_{11} + h_{21}z'_{11}$$
$$z_{12} = h_{11}z_{12} + h_{21}z'_{12}$$
$$z_{21} = h_{12}z_{11} + h_{22}z'_{11}$$
$$z_{22} = h_{12}z_{12} + h_{22}z'_{12}$$

Bu denklem sistemlerinin çözümlerinden

$$h_{11} = \frac{[z_1 \ \ z'_1]}{[z_1 \ \ z'_1]} = 1\,, \quad h_{21} = \frac{[z_1 \ \ z_1]}{[z_1 \ \ z'_1]} = 0\,, \; h_{12} = \frac{[z_2 \ \ z'_1]}{[z_1 \ \ z'_1]}\,, \; h_{22} = \frac{[z_1 \, z_2]}{[z_1 \ \ z'_1]}$$

bulunur. Buradan

$$A_z^{-1}.D_z = H = A_w^{-1}.D_w$$

olur. $A_w = gA_z$ idi.

$$A_z^{-1}.D_z = (g.A_z)^{-1}.D_w = A_z^{-1}.g^{-1}.D_w$$

dur. O halde

$$D_z = g^{-1}.D_w$$
$$D_w = g.D_z \ , \ g \in GL(2,\mathbb{R})$$

elde edilir. Açık şekilde yazarsak

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{12} & w_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix}$$

olur. Buradan

$$w_2 = g z_2 \ , \ g \in GL(2, \mathbb{R})$$

dir. Yani

$$y_2 - y_1 = g(x_2 - x_1)$$

dir. $y_1 = g x_1 + b$ idi. O halde

$$y_2 = g x_2 + b \quad , \ g \in GL(2, \mathbb{R}) \, , \ \ b \in \mathbb{R}^2 \tag{4}$$

elde edilir. (3) ve (4) den $\{ x_1, x_2\} \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \{y_1, y_2\}$ bulunur.■

Örnek.2.4.1. $x_1(t) = (t, t^2)$, $x_2(t) = (t, e^t)$, $y_1(t) = (t + 2t^2 - 1, 3t^2 + 2)$ ve $y_2(t) = (t + 2e^t - 1, 3e^t + 2)$ $\mathbb{R}^2$ de x_1, y_1 regüler olan parametrik eğriler olmak üzere $\{ x_1, x_2\} \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \{y_1, y_2\}$ dir. Teorem 2.4.1. deki eşitlikler sağlanıyorsa bu iki eğri ailesi birbirine denktir. Gerçekten;

$$\frac{[x_1' \ x_1''']}{[x_1' \ x_1'']} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{2} = 0 \, , \frac{[y_1' \ y_1''']}{[y_1' \ y_1'']} = \frac{\begin{vmatrix} 1+4t & 0 \\ 6t & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+4t & 4 \\ 6t & 6 \end{vmatrix}} = \frac{0}{6} = 0 \Rightarrow \frac{[x_1' \ x_1''']}{[x_1' \ x_1'']} = \frac{[y_1' \ y_1''']}{[y_1' \ y_1'']}$$

$$\frac{[x_1'' \ x_1''']}{[x_1' \ x_1'']} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{0}{2} = 0 \, , \frac{[y_1'' \ y_1''']}{[y_1' \ y_1'']} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{0}{6} = 0 \Rightarrow \frac{[x_1'' \ x_1''']}{[x_1' \ x_1'']} = \frac{[y_1'' \ y_1''']}{[y_1' \ y_1'']}$$

$$\frac{[x_2 - x_1 \ \ x_1'']}{[x_1' \ \ x_1'']} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ t^2 - e^t & 2 \end{vmatrix}}{2} = 0 \, , \frac{[y_2 - y_1 \, y_1'']}{[y_1' \ \ y_1'']} = \frac{\begin{vmatrix} 2t^2 - 2e^t & 4 \\ 3t^2 - 3e^t & 6 \end{vmatrix}}{6} = 0 \Rightarrow \frac{[x_2 - x_1 \ \ x_1'']}{[x_1' \ \ x_1'']} = \frac{[y_2 - y_1 \, y_1'']}{[y_1' \ \ y_1'']}$$

$\frac{[x_1' \ \ x_2-x_1\ ]}{[x_1' \ \ x_1'']} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2t & t^2-e^t \end{vmatrix}}{2} = \frac{t^2-e^t}{2}$, $\quad \frac{[y_1' \ \ y_2-y_1]}{[y_1' \ \ y_1'']} = \frac{\begin{vmatrix} 1+4t & 2t^2-2e^t \\ 6 & 3t^2-3e^t \end{vmatrix}}{6} = \frac{t^2-e^t}{2} \quad \Rightarrow \frac{[x_1' \ \ x_2-x_1\ ]}{[x_1' \ \ x_1'']} =$
$\frac{[y_1' \ \ y_2-y_1]}{[y_1' \ \ y_1'']}$

olarak bulunur. Teorem 2.4.1. deki eşitlikler sağlanır. Yani $\{ x_1, x_2\} \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \{y_1, y_2\}$ dir. Bu denklik $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$ ve $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ için sağlanır. Buradaki $g \in GL(2,\mathbb{R})$ teoremin ispatından elde edilir.

2.5. Diferansiyel Üreteç Sisteminin Bağımsızlığı

Teorem 2.5.1. G= $Aff(2,\mathbb{R})$ ve $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)$, $t \in I$ C^∞-fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda

$$\frac{[x_1' \ \ x_1''']}{[x_1' \ \ x_1'']} = f_1(t),\ \frac{[x_1'' \ x_1''']}{[x_1' \ \ x_1'']} = f_2(t),\ \frac{[x_2-x_1 \ x_1'']}{[x_1' \ \ x_1'']} = f_3(t),\ \frac{[x_1' \ \ x_2-x_1\ ]}{[x_1' \ \ x_1'']} = f_4(t) \qquad (5)$$

olacak şekilde, x_1 regüler olan x_1 , x_2 parametrik eğrileri mevcuttur.

İspat: $x_1' = y_1$ ve $x_2 - x_1 = y_2$ olsun. Teoremdeki eşitlikler aşağıdaki hale gelir:

$$\frac{[y_1\, y_1'']}{[y_1\, y_1']} = f_1(t)\ ,\ \frac{[y_1''\, y_1']}{[y_1\, y_1']} = f_2(t) \qquad (6)$$

$$\frac{[y_2\, y_1']}{[y_1\, y_1']} = f_3(t)\ ,\ \frac{[y_1\, y_2]}{[y_1\, y_1']} = f_4(t) \qquad (7)$$

Diğer taraftan;

$$A_{y_1} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{11}' \\ y_{12} & y_{12}' \end{pmatrix}, \qquad A_{y_1}' = \begin{pmatrix} y_{11}' & y_{11}'' \\ y_{12}' & y_{12}'' \end{pmatrix}$$

ve $A_{y_1}^{-1}.A_{y_1}' = B$ olsun. Buradan $A_{y_1}' = A_{y_1}.B$ olur.

$$\begin{pmatrix} y_{11}' & y_{11}'' \\ y_{12}' & y_{12}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{11}' \\ y_{12} & y_{12}' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Matris çarpımının eşitliğinden aşağıdaki denklem sistemleri bulunur:

$$y'_{11} = b_{11}y_{11} + b_{21}y'_{11}$$
$$y'_{12} = b_{11}y_{12} + b_{21}y'_{12}$$
$$y''_{11} = b_{12}y_{11} + b_{22}y'_{11}$$
$$y''_{12} = b_{12}y_{12} + b_{22}y'_{12}$$

denklem sistemlerinin Cramer kuralına göre çözümü ile,

$$b_{11} = \frac{[y'_1 \ y'_1]}{[y_1 \ y'_1]} = 0 \ , \ b_{12} = \frac{[y''_1 \ y'_1]}{[y_1 \ y'_1]} \ , \ b_{21} = \frac{[y_1 \ y'_1]}{[y_1 \ y'_1]} = 1 \ , \ b_{22} = \ \frac{[y_1 \ y''_1]}{[y_1 \ y'_1]}$$

elde edilir. Buradan B matrisi

$$B = \begin{pmatrix} 0 & f_2(t) \\ 1 & f_1(t) \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. $A'_{y_1} = A_{y_1}.B$ olduğundan

$$y''_{11} = f_2(t)y_{11} + f_1(t)y'_{11}$$
$$y''_{12} = f_2(t)y_{12} + f_1(t)y'_{12}$$

dür. O halde

$$\begin{pmatrix} y''_{11} \\ y''_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} f_2(t) + \begin{pmatrix} y'_{11} \\ y'_{12} \end{pmatrix} f_1(t)$$

denklem sistemi elde edilir. $\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} = z$ dersek,

$$z'' = f_1(t)z' + f_2(t)z$$

olur. Diferansiyel denklemler teorisinden bu denklemin bir çözümü vardır. Bu çözüm $y_1(t) = (w_1(t), w_2(t))$ olsun. Bu durumda $y_1(t)$ eğrisi (6) eşitliklerini sağlar.

$A_2 = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix}$ matrisini göz önüne alalım. $A_{y_1}^{-1}.A_2 = H$ olsun. Buradan

$A_2 = A_{y_1}.H$ olur. Açık şekilde yazarsak

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y'_{11} \\ y_{12} & y'_{12} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

olur. Buradan

$$y_{11} = h_{11}y_{11} + h_{21}y'_{11}$$
$$y_{12} = h_{11}y_{12} + h_{21}y'_{12}$$
$$y_{21} = h_{12}y_{11} + h_{22}y'_{11}$$
$$y_{22} = h_{12}y_{12} + h_{22}y'_{12}$$

denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemlerinin Cramer kuralı ile çözümünden

$$h_{11} = \frac{[y_1\ y'_1]}{[y_1\ y'_1]} = 1\ ,\ h_{12} = \frac{[y_2\ y'_1]}{[y_1\ y'_1]}\ ,\ \ h_{21} = \frac{[y_1\ y_1]}{[y_1\ y'_1]} = 0\ ,\ \ h_{22} = \frac{[y_1\ y_2]}{[y_1\ y'_1]}$$

olup,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & f_3(t) \\ 0 & f_4(t) \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$y_{21} = f_3(t)y_{11} + f_4(t)y'_{11}$$
$$y_{22} = f_3(t)y_{12} + f_4(t)y'_{12}$$

Bu denklem sisteminin çözümünden bir $y_2(t) = \big(u_1(t), u_2(t)\big)$ eğrisi elde edilir. Burada $det\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1{}'(t) & u_2{}'(t) \end{pmatrix} \neq 0$ dır ve y_2 eğrisi (7) eşitliklerini sağlar.

$y_1 = x_1{}'$ ve $x_2 - x_1 = y_2$ olduğundan

$$x_1(t) = \int y_1(t)dt + c_1$$

ve

$$x_2(t) = y_2(t) + x_1(t) = y_2(t) + \int y_1(t)dt + c_1$$

eğrileri elde edilir. Ayrıca $det\begin{pmatrix} w_1(t) & w_2(t) \\ w_1{}'(t) & w_2{}'(t)\end{pmatrix} \neq 0$ olduğundan $[y_1\, y_1'] \neq 0$ olup $[x_1{}'x_1{}''] \neq 0$, yani $x_1(t)$ eğrisi regüler olur. Bu şekilde elde edilen $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ eğrileri teoremdeki koşulları sağlayan eğrilerdir.■

Sonuç 2.5.1. $\{\alpha_1, \alpha_2\}, \{\beta_1, \beta_2\}$ $\mathbb{R}^2$ de regüler eğri aileleri ve $x_1 \in \phi_{\alpha_1}, y_1 \in \phi_{\beta_1}$

$$H(t) = \frac{3[x_1{}'\, x_1{}^{(iv)}][\, x_1{}'\, x_1{}''] + 12[x_1{}'x_1{}''][x_1{}''x_1{}'''] - 5[x_1{}'x_1{}''']^2}{3[x_1{}'x_1{}'']^2}$$

$$Y(t) = \frac{3[y_1{}'\, y_1{}^{(iv)}][\, y_1{}'\, y_1{}''] + 12[y_1{}'y_1{}''][y_1{}''y_1{}'''] - 5[y_1{}'y_1{}''']^2}{3[y_1{}'y_1{}'']^2}$$

olsun.

i. $T(\alpha_1) = T(\beta_1) \neq (-\infty, +\infty)$ ve $T(\alpha_2) = T(\beta_2) \neq (-\infty, +\infty)$ için $\{\alpha_1, \alpha_2\} \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \{\beta_1, \beta_2\} \Leftrightarrow sgn(H(t)) = sgn(Y(t))$

$$\frac{[x_1' \quad x_1''']}{[x_1' \;\; x_1'']} = \frac{[y_1{}'\, y_1{}''']}{[y_1{}'y_1{}'']}\,, \quad \frac{[x_1'' \quad x_1''']}{[x_1' \;\; x_1'']} = \frac{[y_1{}''\, y_1{}''']}{[y_1{}'\, y_1{}'']}$$

$$\frac{[x_2 - x_1 \quad x_1'']}{[x_1' \;\; x_1'']} = \frac{[y_2 - y_1\; y_1{}'']}{[y_1{}'y_1{}'']}\,, \quad \frac{[x_1' \;\; x_2 - x_1]}{[x_1' \;\; x_1'']} = \frac{[y_1' \;\; y_2 - y_1]}{[y_1'y_1{}'']}$$

eşitlikleri vardır.

ii. $T(\alpha_1) = T(\beta_1) = T(\alpha_2) = T(\beta_2) = (-\infty, +\infty)$ için $\{\alpha_1, \alpha_2\} \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \{\beta_1, \beta_2\}$ $\Leftrightarrow \exists a \in (-\infty, +\infty)$ öyleki $s' = s + a$ olmak üzere

$$sgn(\,H(t)) = sgn(Y(t))$$

$$\frac{[x_1'\;(s)\;\; x_1'''(s)]}{[x_1'\;(s)\;\; x_1''(s)]} = \frac{[y_1'(s')\, y_1'''(s')]}{[y_1'(s')\;\; y_1''(s')]}\,, \quad \frac{[x_1''\;(s)\;\; x_1'''(s)]}{[x_1'\;(s)\;\; x_1''(s)]} = \frac{[\,y_1''(s')\, y_1'''(s')]}{[y_1'\,(s')\;\; y_1''(s')]}$$

$$\frac{[x_2(s) - x_1\;(s)\;\; x_1''(s)]}{[x_1'\;(s)\;\; x_1''(s)]} = \frac{[y_2(s') - y_1(s')\;\; y_1''(s')]}{[y_1'(s')\;\; y_1''(s')]}\,, \quad \frac{[x_1'\;(s)\;\; x_2(s) - x_1\;(s)]}{[x_1'\;(s)\, x_1''(s)]} = \frac{[y_1'(s')\;\; y_2(s') - y_1(s')]}{[y_1'(s')\, y_1''(s')]}$$

eşitlikleri vardır.

3. SONUÇLAR

1. Genel afin gruba göre bir ikili eğri ailesinin afin diferansiyel invaryantları kümesinin üreteçleri

$$\frac{[x_1' \quad x_1''']}{[x_1' \ \ x_1'']}, \ \frac{[x_1'' \quad x_1''']}{[x_1' \ \ x_1'']}, \ \frac{[x_1 - x_2 \quad x_1'']}{[x_1' \ \ x_1'']}, \ \frac{[x_1' \quad x_1 - x_2]}{[x_1' \ \ x_1'']}$$

olarak bulunmuştur.

2. İki tane ikili eğri ailesinin genel afin grupta denk olabilmesi için

$$\frac{[x_1' \quad x_1''']}{[x_1' \ \ x_1'']} = \frac{[y_1' \ \ y_1''']}{[y_1' \ \ y_1'']}, \quad \frac{[x_1'' \quad x_1''']}{[x_1' \ \ x_1'']} = \frac{[y_1'' \ y_1''']}{[y_1' \ \ y_1'']}$$

$$\frac{[x_2 - x_1 \quad x_1'']}{[x_1' \ \ x_1'']} = \frac{[y_2 - y_1 \ \ y_1'']}{[y_1' \ \ y_1'']}, \quad \frac{[x_1' \ \ x_2 - x_1]}{[x_1' \ \ x_1'']} = \frac{[y_1' \ \ y_2 - y_1]}{[y_1' \ \ y_1'']}$$

eşitliklerini sağlanması gerektiği belirtilmiştir.

3. Bulunan afin diferansiyel invaryantlar kümesinin, üreteç kümesinin minimal olduğu açıklanmıştır.

4. $\{\alpha_1, \alpha_2\}, \{\beta_1, \beta_2\}$ $\mathbb{R}^2$ de regüler eğri aileleri ve $x_1 \in \phi_{\alpha_1}, y_1 \in \phi_{\beta_1}$

$$H(t) = \frac{3[x_1' \, x_1^{(\iota v)}][\, x_1' \, x_1''] + 12[x_1' x_1''][x_1'' x_1'''] - 5[x_1' x_1''']^2}{3[x_1' x_1'']^2}$$

$$Y(t) = \frac{3[y_1' \, y_1^{(\iota v)}][\, y_1' \, y_1''] + 12[y_1' y_1''][y_1'' y_1'''] - 5[y_1' y_1''']^2}{3[y_1' y_1'']^2}$$

olmak üzere

i. $T(\alpha_1) = T(\beta_1) \neq (-\infty, +\infty)$ ve $T(\alpha_2) = T(\beta_2) \neq (-\infty, +\infty)$ için

$\{\alpha_1, \alpha_2\} \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \{\beta_1, \beta_2\} \Leftrightarrow sgn(H(t)) = sgn(Y(t))$

$$\frac{[x_1' \quad x_1''']}{[x_1' \ \ x_1'']} = \frac{[y_1' \, y_1''']}{[y_1' y_1'']}, \quad \frac{[x_1'' \quad x_1''']}{[x_1' \ \ x_1'']} = \frac{[y_1'' \, y_1''']}{[y_1' \, y_1'']}$$

$$\frac{[x_2 - x_1 \quad x_1'']}{[x_1' \ \ x_1'']} = \frac{[y_2 - y_1 \ y_1'']}{[y_1' y_1'']}, \quad \frac{[x_1' \ \ x_2 - x_1]}{[x_1' \ \ x_1'']} = \frac{[y_1' \ \ y_2 - y_1]}{[y_1' y_1'']}$$

eşitlikleri vardır.

ii. $T(\alpha_1) = T(\beta_1) = T(\alpha_2) = T(\beta_2) = (-\infty, +\infty)$ için $\{\alpha_1, \alpha_2\} \overset{Aff(2,\mathbb{R})}{\sim} \{\beta_1, \beta_2\}$
$\Leftrightarrow \exists a \in (-\infty, +\infty)$ öyleki $s' = s + a$ olmak üzere $sgn(\ H(t)) = sgn(Y(t))$

$$\frac{[x_1'\ (s)\ \ x_1'''(s)]}{[x_1'\ (s)\ x_1''(s)]} = \frac{[y_1'(s')\, y_1'''(s')]}{[y_1'(s')\ y_1''(s')]}, \quad \frac{[x_1''\ (s)\ x_1'''(s)]}{[x_1'\ (s)\ x_1''(s)]} = \frac{[\,y_1''(s')\, y_1'''(s')]}{[y_1'\ (s')\ y_1''(s')]}$$

$$\frac{[x_2(s)-x_1\ (s)\ \ x_1''(s)]}{[x_1'\ (s)\ x_1''(s)]} = \frac{[y_2(s')-y_1(s')\ \ y_1''(s')]}{[y_1'(s')\ y_1''(s')]}, \frac{[x_1'\ (s)\ x_2(s)-x_1\ (s)]}{[x_1'\ (s)\, x_1''(s)]} = \frac{[y_1'(s')\ \ y_2(s')-y_1(s')]}{[y_1'(s')\, y_1''(s')]}$$

eşitlikleri vardır.

4. ÖNERİLER

1. Bulunan bu sonuçlar üçlü veya n-li eğri ailelerine uygulanabilir.
2. Afin diferansiyel invaryant parametrizasyonu kullanılarak, aynı inceleme yapılabilir.
3. Afin diferansiyel geometride daha yüksek boyutlarda ($n \geq 3$) afin diferansiyel invaryantlar, denklik problemi araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

1. Angelis, E.De, Moons, T., Van Gool, L. and Verstraelen, P., Complete system of affine semi-invariants for plane and space curves, Geometry and Topology of submanifolds, VIII. Proceedings of the International Meeting on Geometry of Submanifolds, Brussel, Belgium, July August 1995, Singapore, World Scientific, 85-94.

2. Aripov, R.G. and Khadjiev, Dj., The Complete System of Global Differential and Integral Invariants of a Curve in Euclidean Geometry, Russian Mathmetics, 51, 7 (2007) 1-14.

3. Dieudonne J.A., Carrell J.B., Invariant Theory, Old and New, Acad. Press, New York, London, 1971.

4. Gardner, R., B., and Wilkens, G., R., The Fundamental Theorems of Curves and Hypersurfaces in Centro-affine Geometry, Bull.Belg. Math. Soc., 4 (1997) 379-401.

5. Hacısalihoğlu, H.H., 2 ve 3 boyutlu uzaylarda Analitik Geometri, Seçkin yayınevi, Ankara, 2005.

6. Hungerford, T.W., Algebra, Springer-Verlag, New York, 1974.

7. Izumiya, S. and Sano, T., Generic Affine Differential Geometry of Space Curves, Proceedings of the Royal Society of Edinburg, 128 A, (1998) 301-304.

8. Khadjiev, Dj. and Pekşen, Ö., The Complete System of Global Differantial and Integral Invariants for Equi-affine Curves, Differential Geom. Appl., 20 (2004) 167-175.

9. Liu, H., Curves in Affine and Semi-Euclidean Spaces, Results. Math., 65 (2014) 235-249.

10. Pekşen, Ö. and Khadjiev, Dj., On Invariants of Curves in Centro-affine Geometry, J.Math.Kyoto Univ., 44, 3 (2004) 603-613.

11. Pekşen, Ö., Khadjiev, Dj. ve Ören, İ., Invariant parametrizations and Complete Systems of Global Invariants, Turk.J.Math., 36 (2012) 147-160.

12. Sağıroğlu, Y. and Pekşen, Ö. The equivalence of Equi-affine Curves, Turk.J.Math., 34 (2010) 95-104.

13. Sağıroğlu, Y., The Equivalence of Curves in $SL(n,\mathbb{R})$ and Its Application to Ruled Surfaces, Appl.Math.Comput., 218 (2011) 1019-1024.

14. Sağıroğlu, Y., The Equivalence Problem for Parametic Curves in One-dimensional Affine Space , Int.Math.Forum, 6, 4 (2011) 177-184.

15. Sağıroğlu, Y., Affine Differential Invariants of Curves, LAP, Saarbrücken, 2012.

16. Sağıroğlu, Y., Global Differential Invariants of Affine Curves in $\mathbb{R}^2$, Far East Journal of Mathematical Sciences, 96, 4 (2015) 497-515.

17. Sağıroğlu Y. and Yapar Z., GL(n, $\mathbb{R}$)-Equivalence of A Pair of Curves In Terms of Invariants, Journal of Mathematics and System Science, 6 (2016) 16-22.

18. Schirokow, P.A. and Schirokow, A.P., Affine Differential Geometrie, Teubner, Leipzig, 1962.

ÖZGEÇMİŞ

Demet AYDEMİR, 1991 yılında Trabzon'da doğdu. Lise öğrenimini Trabzon Lisesinde tamamladı. Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2014 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladı. Yabancı dili İngilizcedir.