KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİR SINIF YARI NORMAL OPERATÖRLERİN GENİŞLETİLMİŞ SPEKTRUMU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatih YILMAZ

MAYIS 2017
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİR SINIF YARI NORMAL OPERATÖRLERİN GENİŞLETİLMİŞ SPEKTRUMU

Fatih YILMAZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19 / 04 / 2017
Tezin Savunma Tarihi : 17 / 05 / 2017

Tez Danışmanı : **Yrd. Doç. Dr. Meltem SERTBAŞ**

Trabzon 2017

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında
Fatih YILMAZ Tarafından Hazırlanan

BİR SINIF YARI NORMAL OPERATÖRLERİN GENİŞLETİLMİŞ SPEKTRUMU

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 25 / 04 / 2017 gün ve 1699 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	:	**Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV**	…………………………………
Üye	:	**Doç. Dr. Ruşen YILMAZ**	…………………………………
Üye	:	**Yrd. Doç. Dr. Meltem SERTBAŞ**	…………………………………

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim süresince gerek tez konumum belirlenmesinde gerekse çalışmalarımda bana yol gösteren, tezin bu hale gelmesinde her türlü yardımını ve desteğini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Meltem SERTBAŞ' a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Eğitim ve öğretim hayatım süresi içerisinde manevi desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme, özellikle eşime teşekkürü bir borç bilirim.

Fatih YILMAZ
Trabzon 2017

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans olarak sunduğum ‘‘BİR SINIF YARI NORMAL OPERATÖRLERİN GENİŞLETİLMİŞ SPEKTRUMU’’ başlıklı bu çalışmayı baştan sona danışmanım Yrd. Doç. Dr. Meltem SERTBAŞ’ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 17/05/2017

Fatih YILMAZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

BİR SINIF YARI NORMAL OPERATÖRLERİN GENİŞLETİLMİŞ SPEKTRUMU

Fatih YILMAZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Meltem SERTBAŞ
2017, 63 Sayfa

Bu tez çalışmasında bir Hilbert uzayında bazı yarı normal operatörlerin genişletilmiş özdeğerleri araştırılmış, ayrıca kompakt normal operatör ile tanımlanmış bir cebir homomorfizmasının spektrum kümesi belirlenmiştir. Alınan sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Yarı normal operatörler, Kompakt normal operatörler, Operatörün genişletilmiş özdeğeri
.

Master Thesis

SUMMARY

ON EXTENDED SPECTRUM OF QUASİNORMAL OPERATORS

Fatih YILMAZ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Asst. Prof. Meltem SERTBAŞ
2017, 63 Pages

In this thesis, the extended eigenvalues for some quasinormal operators in a Hilbert space have been investigated. Moreover, the spectrum of an algebra homomorphism defined by a compact normal operator has been researched. The results which have been obtained in this thesis are supported by examples.

Keywords: Quasinormal operators, Compact normal operators, Extended eigenvalues of operators

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$R(A)$	A operatörünün görüntü kümesi
$\bar{X}$	X kümesinin kapanışı
$\|\cdot\|_X$	X üzerinde tanımlı norm
$X\times Y$	X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımı
$(\cdot,\cdot)_H$	H üzerinde tanımlı iç çarpım
$L(X,Y)$	X uzayından Y uzayına tanımlı tüm sürekli lineer operatörler kümesi
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar kümesi
$K(X,Y)$	X uzayından Y uzayına tanımlı kompakt operatörler kümesi
$dimX$	X lineer uzayının boyutu
A^{-1}	A operatörünün tersi
A^*	A operatörünün eşleniği
$A^{1/2}$	A operatörünün karekökü
$\|A\|$	$\|A\| = (A^*A)^{1/2}$
$KerA$	A operatörünün çekirdeği
$\rho(A)$	A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma_c(A)$	A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(A)$	A operatörünün kalan spektrumu
$\sigma_p(A)$	A operatörünün noktasal (ayrık) spektrumu
$\sigma(A)$	A operatörünün spektrumu
$\sigma_{ess}(A)$	A operatörünün esas spektrumu
$R_\lambda(A)$	A operatörünün rezolvent operatörü
$\sigma_{ext}(A)$	A operatörünün genişletilmiş özdeğerleri kümesi

1.GENEL BİLGİLER

1.1.Giriş

20. yüzyılın başlangıcında ilk kaynaklarını U. Volterra, I. Fredholm, D. Hilbert, M. Frechet, F. Riesz'in ve S. Banach'ın çalışmaları olan ve daha sonraları 'fonksiyonel analiz' olarak adlandırılan yeni bir alan gelişmeye başladı. Bu matematikçiler integral denklemleri, özdeğer problemleri ve ortogonal ayrılış gibi konuları incelemişlerdir.

Fonksiyonel analizin gelişmesinde, J. von Neumann'ın Hilbert uzayında operatörler cebiri alanında yaptığı çalışmalar büyük öneme sahiptir [15]. J. von Neumann'ın operatör teorisinin kuantum mekaniğindeki geniş uygulama alanına sahip olduğunu göstermiştir. Şüphesiz operatör teorisinin ve operatörlerin spektral teorisi D. Hilbert [16], F. Riesz [17,18,19,20,21], B. Sz.-Nagy [22], N.I. Akhiezer ve I.M. Glazman [23], P.R. Halmos [24], L.H. Loomis [25], B.A. Lengyel ve M.H. Stone [26], A. Wintner [27], K. Yosida ve T. Nakayama [28] gibi birçok matematikçi tarafından şekillendirilmiş ve geliştirilmiştir.

Özel olarak, yarı normal operatörler sınıfı ilk kez 1953 yılında A. Brown [5] tarafından tanıtılmış ve çalışılmıştır. Yarı normal operatör tanımından rahatlıkla görüleceği gibi yarı normal operatörler sınıfı normal operatörleri $(AA^* = A^*A)$ ve izometrileri $(A^*A = E)$ de içerir. Diğer taraftan, herhangi bir yarı normal operatör normal bir genişlemeye sahip olup alt normal operatördür [2]. Normal operatörler ile izometrilerin özellikleri tamamen incelenmiş ve yapıları iyi bilinmektedir. Yarı normal operatörler, normal operatörler ve izometriler kadar basit olmamakla birlikte alt normal operatörler kadar da anlaşılması zor değildir. Yarı normal operatörler analitik fonksiyonlarda geniş bir uygulama alanına sahiptir. Üstelik yarı normal operatörler için alınan sonuçlar alt normal operatörlerin daha iyi anlaşılmasına kolaylık sağlamaktadır.

Operatör teorisinin ilk problemlerinden biri, verilen bir A operatörü için

$$AB = BA$$

denklemini sağlayan B operatörlerinin oluşturduğu kümenin belirlenmesidir. Bu alanda V.I. Lomonosov 1973 yılındaki çalışması [29] birçok farklı problemleri de beraberinde getirmiştir. Bunlardan biri de A operatörü ile B operatörü arasında $AB = \lambda BA$ bağıntısının incelenmesidir. Bu tip denklemler kuantum mekaniğinde uygulama alanları olup ayrıca spektral analiz içinde önemli bir yere sahiptir [3]. Şimdi bu problemle ilgili yapılan çalışmaların kısa bir özetini verelim.

H ayrılabilir kompleks Hilbert uzayı ve $L(H)$ ise H üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi olsun. $A \in L(H)$ operatörü için,

$$TA = \lambda AT$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı $T \in L(H)$ operatörü var ise λ kompleks sayısına A sınırlı operatörünün bir genişletilmiş özdeğeri ve ayrıca $T \in L(H)$ operatörüne de A nın λ ya karşılık gelen genişletilmiş özoperatörü adı verilir [4]. A nın tüm genişletilmiş özdeğerler kümesi ise $\sigma_{ext}(A)$ ile gösterilir. A. Biswas, A. Lambert ve S. Petrovic, [4] çalışmalarında $V: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$ olarak tanımlanan V Volterra operatörünün genişletilmiş özdeğerler kümesinin $\sigma_{ext}(V) = (0, +\infty)$ olduğunu ispatlamışlardır. M.T. Karaev, [30] çalışmasında, $L_2[0,1]$ üzerinde tanımlı V Volterra operatörünün genişletilmiş özoperatörlerinin kümesini tanımlamıştır. Bundan başka, A. Biswas ve S. Petrovic, [4] çalışmalarında, $\sigma(A)$ ile A operatörünün spekturum kümesi gösterilmek üzere,

$$\sigma_{ext}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \sigma(A) \cap \sigma(\lambda A) \neq \emptyset\}$$

olduğunu M. Rosenblum Teoremi'ni kullanarak elde etmişlerdir. Üstelik S. Shkarin, [32] çalışmasında, ayrılabilir bir H Hilbert uzayında genişletilmiş noktasal spektrum kümesinin yalnızca $\{1\}$ kümesine eşit olduğu yarı nilpotent kompakt operatörlerin varlığını göstermiştir. G. Cassier ve H. Alkanjo, [8] çalışmasında, operatörlerin birebir olması durumunda bir özeşlenik pozitif operatörün çarpım operatörü ve bir normal operatör için genişletilmiş özdeğerlerinin kümesini tanımlamışlardır. Z.I. İsmailov ve E.O. Çevik, [10] çalışmasında, direkt toplam operatörlerin genişletilmiş özdeğerlerinin koordinat operatörlerin genişletilmiş özdeğerleriyle bağlantısını incelemişlerdir ve normal kompakt operatörlerin genişletilmiş özdeğer kümesini belirlemişlerdir. Ayrıca G. Cassier ve H. Alkanjo, [39] çalışmasında, saf yarı normal operatörler için genişletilmiş özdeğerlerini ve genişletilmiş özuzaylarını incelemişlerdir.

Bu tezde, H ayrılabilir kompleks Hilbert uzayı ve $L(H)$ ise H üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi olmak üzere A yarı normal operatörünün genişletilmiş özdeğerlerine bağlı problemler ele alınmıştır. Ayrıca görüntü kümesi yoğun olan kompakt normal bir operatör yardımıyla tanımlanan bir cebir homomorfizmasının spektrumu incelenmesi amaçlanmıştır.

1.2.Gerekli Kavram ve Açıklamalar

Bu bölümde tezde kullanılacak gerekli kavram ve açıklamalar verilecektir.

Tanım 1.2.1 (Metrik Uzay, ([7], s.40)): X boştan farklı bir küme ve her $x, y, z \in X$ için,

(1) $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$ (özdeşlik aksiyomu)

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetriklik aksiyomu)

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlayan

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to d(x, y)$$

fonksiyonu var ise bu d fonksiyonuna bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Örnek 1.2.2: X keyfi bir küme olmak üzere, $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O halde böyle tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir ve özel olarak bu metrik triviyal metrik veya ayrık metrik olarak tanımlanır. Gerçekten,

(1) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$. $d(x, y) = 0$ ise d nin tanımından $x = y$ olur ve terside doğrudur.

(2) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$ olur.

(3) Her $x, y, z \in X$ için d nin tanımından $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ olduğu kolayca görülür.

Örnek 1.2.3: $n \in \mathbb{N}$ ve $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı Öklid metriği denir. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı farklı bir metrik,

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

şeklinde tanımlanan $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur.

Tanım 1.2.4 (Ayrılabilir Metrik Uzay, ([9], s.19)): (X,d) bir metrik uzay olsun. Eğer bu metrik uzayın sayılabilir yoğun altkümesi var ise bu metrik uzaya ayrılabilir metrik uzay denir.

Örnek 1.2.5: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ rasyonel sayılar kümesi $|\cdot|$ mutlak değer metriğinde yoğun ve sayılabilir olduğundan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ metrik uzayı ayrılabilir metrik uzaydır.

Tanım 1.2.6 (Lineer (Vektör) Uzay, ([9], s.3)): X boştan farklı bir küme ve K $(\mathbb{R}\ veya\ \mathbb{C})$ bir cisim olsun.

$$+ : X \times X \to X, \quad (x,y) \to x+y, \quad x,y \in X$$
$$\cdot : K \times X \to X, \quad (\alpha,x) \to \alpha.x, \quad \alpha \in K, x \in X$$

dönüşümleri ile toplama ve skalerle çarpma işlemleri denilen işlemler tanımlansın. Bu işlemler her $x,y,z \in X$ ve her $\alpha,\beta \in K$ için;

(a) $x + y = y + x$

(b) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(c) $x + 0 = x$ bağıntısını sağlayan bir tek $0 \in X$ elemanı vardır.

(d) $x + (-x) = 0$ bağıntısını sağlayan bir tek $-x \in X$ elemanı vardır.

(e) $1.x = x$

(f) $\alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x$

(g) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

(h) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$

koşulları sağlanıyor ise X kümesine K cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzay) denir.

Örnek 1.2.7 ([9], s.5): S boştan farklı bir küme ve X, K cismi üzerinde bir vektör uzay olsun. Bu durumda $F(S,X) \coloneqq \{f \mid f: S \to X \text{ bir fonksiyon}\}$ olmak üzere $F(S,X)$ ailesi

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x)+g(x) \ , \quad f,g \in F(S,X)$$
$$(\alpha f)(x) \coloneqq \ \alpha f(x) \ , \quad \alpha \in K \ , \ f \in F(S,X)$$
işlemleri altında bir vektör uzaydır.

Tanım 1.2.8 (Lineer (Vektör) Altuzay, ([9], s.3)): X bir vektör uzay olsun ve $Y \subset X, Y \neq \emptyset$ olsun. Eğer Y kümesi X üzerinde tanımlı olan cebirsel işlemlere göre kendi başına bir vektör uzay oluşturuyorsa Y kümesine X vektör uzayının bir altuzayıdır denir.

Y altkümesinin vektör altuzay olduğunu anlamak için $x,y \in Y$ ve $\alpha,\beta \in K$ için $\alpha x + \beta y \in Y$ olması yeterlidir (altuzay testi).

Örnek 1.2.9: X vektör uzay olmak üzere $\{0\} \subset X$ altkümesi X in bir vektör altuzayıdır.

Tanım 1.2.10 ([9], s.4): X bir vektör uzayı, $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subset X, \ n \geq 1, \ n \in \mathbb{N}$ sonlu bir altküme ve $M \subset X$ boştan farklı keyfi bir altküme olsun. Keyfi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ skalerleri için,
$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n \in V$$
yazımına V nin elemanlarının bir lineer kombinasyonu denir. Eğer,
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$
eşitliği ancak ve ancak
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$
olması halinde gerçekleniyorsa $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ kümesine lineer bağımsız, aksi halde lineer bağımlı denir.

M nin her sonlu altkümesi lineer bağımsız ise M ye lineer bağımsız, aksi halde M ye lineer bağımlı denir. M nin tüm sonlu altkümelerinin tüm lineer kombinasyonlarının kümesine M nin gereni (spanı) denir ve $SpanM$ ile gösterilir.

Eğer V lineer bağımsız ve $SpanV = X$ ise V ye X in bir bazı denir. Eğer X in sonlu bir bazı var ise bu bazın eleman sayısına X in boyutu denir ve $dimX$ ile gösterilir. X in sonlu bir bazı yok ise X e sonsuz boyutlu denir.

Tanım 1.2.11 (Normlu Vektör Uzay, ([9], s.31)): X, K cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzay olmak üzere, her $x,y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için,

(1) $\|x\| \geq 0$

(2) $\|x\| = 0$ için gerek ve yeter şart $x = 0$

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlayan $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir norm ve üzerinde norm tanımlanan X vektör uzayına bir normlu vektör uzayı denir. Ayrıca $\|x\| = 1$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ vektörüne birim vektör denir.

Örnek 1.2.12: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı boştan farklı sonlu boyutlu keyfi bir vektör uzayı X olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ kümesi X vektör uzayının bir bazı olmak üzere, her $x \in X$ için, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ yazabilecek şekilde tek türlü $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}$ skalerleri vardır. O halde,

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir normdur. Gerçekten her $x, y \in X$ için, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ ve $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. O halde,

(1) $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$

(2) $x = 0$ ise $\|x\| = 0$ olur. Tersine $\| x \| = 0$ ise $(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2)^{\frac{1}{2}} = 0$ olur ki $1 \leq i \leq n$ için $\lambda_i = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $x = 0$ olur.

(3) $\|\alpha x\| = (\sum_{i=1}^{n} |\alpha\lambda_i|^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\|x\|$

(4) Hölder eşitsizliğinden dolayı,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i + \mu_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i}\, \mu_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_i} + \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} 2\Re e(\overline{\lambda_i}\, \mu_i) + \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i \mu_i| + \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + 2.\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

olur ki buradan $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ olduğu görülür.

Önerme 1.2.13 ([9], s.36): X bir lineer (vektör) uzayı ve bu uzay üzerinde tanımlı bir norm $\|\cdot\|$ olmak üzere $d : X \times X \to R$, $d(x, y) = \|x - y\|$ olarak tanımlanan fonksiyon bir metriktir ve (X, d) bir metrik uzaydır, ayrıca özel olarak bu metrik, $\|\cdot\|$ normu tarafından doğurulmuş metrik uzay olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.14 (Yakınsak Dizi, ([9], s.36; s.12)): $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay, $(x_n) \subset X$ bir dizi olmak üzere, eğer $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ ise, $(x_n) \subset X$ dizisi $x \in X$ elemanına $\|\cdot\|$ normuna göre yakınsıyor denir ve $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{\|\cdot\|} x$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

Tanım 1.2.15 (Cauchy Dizisi, ([9], s.12; s.36)): $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay, $(x_n) \subset X$ bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ ve $m, n > n_\varepsilon$ doğal sayıları için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir ise $(x_n) \subset X$ dizisine $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi denir.

Örnek 1.2.16: $C([0,1], \mathbb{R}) \coloneqq \{f \mid f: [0,1] \to \mathbb{R}$ ve sürekli$\}$ olmak üzere $(f_n) \subset C([0,1], \mathbb{R})$ dizisi her $t \in [0,1]$ için $f_n(t) \coloneqq t^n$ şeklinde tanımlanıyor. (f_n) dizisi,

$$(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1), \qquad \| f \|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \ , \ f \in C([0,1], \mathbb{R})$$

normlu uzayında bir Cauchy dizisi olmasına rağmen,

$$(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \ , \| f \|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\} \ , \ f \in C([0,1], \mathbb{R})$$

normlu uzayında bir Cauchy dizisi değildir. Gerçekten, $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ olmak üzere,

$$\int_0^1 |t^n - t^m| dt = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-m}{(m+1)(n+1)} < \frac{1}{m}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon \coloneqq [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!] + 1$ alınırsa her $n, m > n_\varepsilon$ için

$$\|f_n - f_m\|_1 < \frac{1}{m} < \varepsilon$$

olacağından

$$\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$$

olduğu bulunur. Öyleyse (f_n) dizisi $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisidir.

Şimdi (f_n) dizisinin $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olmadığı gösterilsin. (f_n) dizisi $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi ve $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ olsun. O halde $n > m$ için,

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup\{|t^n - t^m| : 0 \le t \le 1\} = \sup\{t^n - t^m : \ 0 \le t \le 1\}$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$\sup\{t^n - t^m : 0 \le t \le 1\} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}} \left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

eşitliği bulunur. Buradan devam edilirse,

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}\right)^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n-m}}} \left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

eşitliğine ulaşılır. Eğer $m = k \in \mathbb{N}$ ve $n = 2k \in \mathbb{N}$ alınırsa

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \left(\frac{k}{2k}\right)^{\frac{k}{2k-k}} . \left(1 - \frac{k}{2k}\right) = \frac{1}{2} . \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

olur. Bu durumda $\varepsilon = \frac{1}{8}$ için $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$ eşitsizliğine ulaşılır ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla (f_n) dizisi $(C([0,1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olamaz.

Tanım 1.2.17 (Tam Uzay, ([9], s.16; s.36)): Eğer bir normlu uzayda her Cauchy dizisi bu normlu uzayda yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir.

Tanım 1.2.18 (Banach Uzayı, ([9], s.16; s.48)): Tam normlu uzaya bir Banach uzayı denir.

Örnek 1.2.19 ([9], s.49): $1 \le p < \infty$ olmak üzere,

$$l_p(\mathbb{C}) = \left\{ x = (x_i) : x_i \in \mathbb{C}, i \ge 1 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$$

uzayı,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

ile tanımlı norma göre bir Banach uzayıdır. Gerçekten, $1 \le p < \infty$ ve $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$, $l_p(\mathbb{C})$ de bir Cauchy dizisi olsun. O halde her $\varepsilon > 0$, öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$, $n, m > n_0$ doğal sayıları için,

$$\left| x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \right|^p \le \sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \right|^p = \left\| x^{(n)} - x^{(m)} \right\|_p^p < \varepsilon^p$$

olacağından her $i = 1, 2, \ldots$ için $\left(x_i^{(n)}\right)$ skalerlerin dizisi bir Cauchy dizisidir. Burada her $x_i^{(n)} \in \mathbb{C}$ ve $\mathbb{C}$ tam normlu uzay olduğundan,

$$x_i = \lim_{n \to \infty} x_i^{(n)}$$

olur. Burada her $N > 1$ ve $n, m \ge n_0$ için

$$\sum_{i=1}^{N}\left|x_i^{(n)}-x_i^{(m)}\right|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^{(n)}-x_i^{m}\right|^p < \varepsilon^p$$

bulunur. n ve N yi sabit tutarak, $m\to\infty$ limiti alınırsa, $n \geq n_0$ ve $N \geq 1$ için

$$\sum_{i=1}^{N}\left|x_i^{(n)}-x_i\right|^p \leq \varepsilon^p$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi n yi sabit tutarak, $N\to\infty$ limit alarak $n \geq n_0$ için

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^{(n)}-x_i\right|^p \leq \varepsilon^p \tag{1.1}$$

elde edilir. O halde her i için $x_i^{(n)}-x_i \in \mathbb{C}$ olup $x=(x_i)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x = x^{(n)} - \left(x^{(n)}-x\right) \in l_p(\mathbb{C})$ olduğu rahatlıkla görülür. Ayrıca (1.1) den her $n \geq n_0$ için,

$$\| x^{(n)} - x \|_p < \varepsilon$$

olduğu bulunur. Sonuç olarak $l_p(\mathbb{C})$ Banach uzayıdır.

Tanım 1.2.20 (İç Çarpım Uzayı, ([9], s.51; s.53)): X , K ($K=\mathbb{R}$ ya da $K=\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $(\cdot,\cdot): X\times X \to K$ fonksiyonu her $x,y,z \in X$ ve her $\alpha,\beta \in K$ için,

(a) $(x,x) \in \mathbb{R}$ ve $(x,x) \geq 0$,

(b) $(x,x)=0$ için gerek ve yeter şart $x=0$ olmasıdır,

(c) $(\alpha x+\beta y,z) = (\alpha x,\ z)+(\beta y,\ z) = \alpha(x,z)+\beta(y,z)$,

(d) $(x,y) = \overline{(y,x)}$

şartlarını sağlıyor ise bu fonksiyona X üzerinde bir iç çarpım ve $\left(X,(\cdot,\cdot)\right)$ ikilisine de bir iç çarpım uzayı denir.

Örnek 1.2.21: $(\cdot,\cdot) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $(x,y)=\sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}$ olarak tanımlanan fonksiyon $\mathbb{C}^n$ üzerinde bir iç çarpımdır ve özel olarak bu iç çarpıma $\mathbb{C}^n$ üzerindeki standart iç çarpım denir. Gerçekten her $x,y,z \in \mathbb{C}^n$ ve her $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ için,

(a) $(x,x)=\sum_{k=1}^{n} x_k\overline{x_k} = \sum_{k=1}^{n}|x_k|^2 \in \mathbb{R}$ ve $(x,x)=\sum_{k=1}^{n} x_k\overline{x_k} = \sum_{k=1}^{n}|x_k|^2 \geq 0$,

(b) $x=0$ ise $(x,x)=\sum_{k=1}^{n} x_k\overline{x_k} = \sum_{k=1}^{n}|x_k|^2 = 0$ olur. $(x,x)=0$ ise $(x,x) = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{x_k} = \sum_{k=1}^{n}|x_k|^2 = 0$ olacağından her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k=0$ olmalıdır. Buradan $x=0$ olur,

(c) $(\alpha x+\beta y,z) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha x_k+\beta y_k)\overline{z_k} = \sum_{k=1}^{n}\alpha x_k\overline{z_k} + \sum_{k=1}^{n}\beta y_k\overline{z_k} =$
$\alpha\sum_{k=1}^{n} x_k\overline{z_k} + \beta\sum_{k=1}^{n} y_k\overline{z_k} = \alpha(x,z)+\beta(y,z)$,

(d) $(x,y)=\sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}=\overline{\sum_{k=1}^{n}\overline{x_k\overline{y_k}}}=\overline{\sum_{k=1}^{n}\overline{x_k}y_k}=\overline{(y,x)}$

olduğundan $(\cdot,\cdot):\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$, $(x,y)=\sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}$ olarak tanımlanan fonksiyon $\mathbb{C}^n$ üzerinde bir iç çarpımdır.

Örnek 1.2.22 ([12], s.40): $t\in[a,b]$ olmak üzere,

$$(f,g)_{L_2[a,b]}=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt\,,\quad f,g\in L_2(a,b)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm $L_2[a,b]$ lineer uzayı üzerinde bir iç çarpım fonksiyonudur. Gerçekten,

(a) Her $f\in L_2[a,b]$ için,

$$(f,f)_{L_2[a,b]}=\int_a^b f(t)\overline{f(t)}\,dt=\int_a^b |f(t)|^2\,dt\ \geq 0\,.$$

Eğer,

$$(f,f)_{L_2[a,b]}=\int_a^b f(t)\overline{f(t)}\,dt=\int_a^b |f(t)|^2\,dt=0$$

ise $|f(t)|=0$ $\lambda-$h.h.y. olup buradan $f(t)=0$ $\lambda-$h.h.y. olduğu bulunur.

Tersine, eğer $f=0$ ise

$$(f,f)_{L_2[a,b]}=\int_a^b f(t)\overline{f(t)}\,dt=\int_a^b |f(t)|^2\,dt=\int_a^b 0\,dt=0$$

olup $(f,f)_{L_2[a,b]}=0$ eşitliği elde edilir.

(b) Her $f,g\in L_2[a,b]$ için,

$$(f,g)_{L_2[a,b]}=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt=\overline{\int_a^b \overline{f(t)}g(t)\,dt}=\overline{\int_a^b g(t)\overline{f(t)}\,dt}=\overline{(g,f)}_{L_2[a,b]}$$

(c) Her $f\in L_2[a,b]$ ve $\beta\in\mathbb{C}$ için,

$$(\beta f,g)_{L_2[a,b]}=\int_a^b \beta f(t)\overline{g(t)}\,dt=\beta\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt=\beta(f,g)_{L_2[a,b]}$$

(d) Her $f,g,h\in L_2[a,b]$ için

$$(f+h,g)_{L_2[a,b]} = \int_a^b \big(f(t)+h(t)\big)\overline{g(t)}\,dt = \int_a^b \big(f(t)\overline{g(t)} + h(t)\overline{g(t)}\big)\,dt$$

$$= \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt + \int_a^b h(t)\overline{g(t)}\,dt = (f,g)_{L_2[a,b]} + (h,g)_{L_2[a,b]}$$

Tanım 1.2.23 ([11], s.131): X bir iç çarpım uzayı olmak üzere, $x, y \in X$ için,

$$(x,y) = 0$$

ise x ve y ortoganeldir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir. Benzer şekilde, $A \subset X$ ve $B \subset X$ olmak üzere her $y \in A$ için $x \perp y$ oluyorsa $x \perp A$ ve her $y \in A, x \in B$ için $y \perp x$ ise, $A \perp B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.24 (Ortogonal Küme, Ortonormal Küme, ([11], s.152)): X bir iç çarpım uzayı olmak üzere, $M \subset X$ boştan farklı bir altküme olsun. Eğer her $x, y \in M, x \neq y$ için $x \perp y$ oluyorsa M ye ortogonal küme denir. Ayrıca M ortogonal kümesinin her x elemanı için $(x,x) = 1$ ise M ye ortonormal küme denir.

Tanım 1.2.25 (Ortonormal Baz, ([11], s.183)): X bir iç çarpım uzayı ve M altkümesi X in bir bazı olsun. Eğer M ayrıca bir ortonormal küme ise M ye bir ortonormal baz denir.

Tanım 1.2.26 (İç Çarpımın Ürettiği Norm, ([9], s.56)): $\big(X\,,\ (\cdot\,,\cdot)\big)$ bir iç çarpım uzayı $x \in X$ için,

$$\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir norm olup ve bu norma iç çarpımın ürettiği norm denir.

Tanım 1.2.27 (Hilbert Uzayı, ([9], s.63)): Eğer bir iç çarpım uzayı iç çarpımın ürettiği norma göre tam uzay ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Örnek 1.2.28 ([9], s.64): $l_2(\mathbb{C}) \coloneqq \{(x_n) : x_n \in \mathbb{C}\,, n \geq 1\,, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ üzerinde tanımlı, $(\cdot\,,\cdot) : l_2(\mathbb{C}) \times l_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, $(x,y) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$, $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in l_2(\mathbb{C})$ fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonudur ve $l_2(\mathbb{C})$ uzayı bu iç çarpımın ürettiği

$$\|x\|_{l_2} = (x,x)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x|^2\right)^{1/2} \quad , \qquad x = (x_n) \in l_2(\mathbb{C})$$

normuna göre bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.2.29 (Lineer Operatör, ([9], s.82)): X ve Y aynı K cismi üzerinde iki lineer uzay, $D(A)$; X in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer her $x, y \in D(A)$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için,

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

ise A operatörüne bir lineer operatör denir. Burada $D(A)$ kümesine A lineer operatörünün tanım kümesi, $R(A) = \{y \in Y: Ax = y, x \in D(A)\}$ kümesine A lineer operatörünün görüntü kümesi, $KerA = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ kümesine de A operatörünün çekirdeği denir.

Tanım 1.2.30 (Birim Operatör, ([9], s.84)): X bir lineer uzay olmak üzere $E: X \rightarrow X$, her $x \in X$ için $Ex = x$ şeklinde tanımlanan operatöre birim operatör denir.

Tanım 1.2.31 (Sıfır Operatör, ([9], s.84)): X bir lineer uzay olmak üzere $0: X \rightarrow X$, her $x \in X$ için $0x = 0$ şeklinde tanımlanan operatöre sıfır operatörü denir.

Örnek 1.2.32 ([9] , s.84): Birim ve sıfır operatörleri lineer operatörlerdir.

Örnek 1.2.33 ([9], s.90): $l_\infty(\mathbb{C}) = \{c = (c_n): c_n \in \mathbb{C},\ sup\{|c_n|, n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$ olmak üzere $(c_n) \in l_\infty(\mathbb{C})$ ve $x = (x_n) \in l_1(\mathbb{C})$ için,

$$A : l_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$$

şeklinde tanımlanan operatör ([9], s.89) daki Lemma 4.3 ten iyi tanımlıdır. Ayrıca $x = (x_n)\, , y = (y_n) \in l_1(\mathbb{C})$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} c_n(\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (c_n \alpha x_n + c_n \beta y_n) \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} c_n \alpha x_n + \sum_{n=1}^{k} c_n \beta y_n \right) = \alpha \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} c_n x_n + \beta \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} c_n y_n \\ &= \alpha Ax + \beta Ay \end{aligned}$$

olup A operatörü lineer olur.

Tanım 1.2.34 (Sürekli Operatör, ([9], s.96)): X ve Y iki normlu lineer uzay, $D(A)$; X in bir lineer altuzayı, $A: D(A) \subset X \to Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(A)$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in D(A)$ için $\|x - x_0\| < \delta$ olduğunda $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlayan öyle bir $\delta > 0$ sayısı mevcut ise A operatörüne $x = x_0$ noktasında süreklidir denir. A operatörü her $x \in D(A)$ noktasında sürekli ise bu operatöre sürekli operatör denir.

Tanım 1.2.35 (Sınırlı Operatör, ([9], s.92)): X ve Y iki normlu lineer uzay, $A : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in X$ için $\|Ax\|_Y \leq k\|x\|_X$ koşulunu sağlayan pozitif k reel sayısı var ise A operatörüne sınırlıdır denir ve X den Y ye tanımlanan tüm sınırlı lineer operatörler kümesi $L(X, Y)$ ile gösterilir. Özel olarak $X = Y$ ise $L(X, X)$ yerine $L(X)$ yazılır.

Önerme 1.2.36 ([9], s.88): X ve Y iki normlu lineer uzay ve $A : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. O halde aşağıdakiler birbirine denktirler.

(a) A lineer operatörü düzgün süreklidir.

(b) A lineer operatörü süreklidir.

(c) A lineer operatörü, $x = 0$ noktasında süreklidir.

(d) $\|x\| \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in X$ için $\|Ax\| \leq k$ olacak şekilde k pozitif reel sayısı vardır.

(e) Her $x \in X$ için $\|Ax\| \leq k\|x\|$ koşulunu sağlayan pozitif k reel sayısı vardır, yani A lineer operatörü sınırlıdır.

Örnek 1.2.37 ([9], s.91): $a, b \in \mathbb{R}$ için, $k: [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$ sürekli ve $M = sup\{|k(s, t)|: (s, t) \in [a, b] \times [a, b]\} < \infty$ olsun. $g \in C[a, b]$ için,

$$f(s) = \int_a^b k(s, t). g(t)dt$$

şeklinde tanımlanan $f: [a, b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $C[a, b]$ nın elemanıdır. Ayrıca $K: C[a, b] \to C[a, b]$ operatörü,

$$\big(K(g)\big)(s) = f(s) = \int_a^b k(s, t)g(t)dt$$

şeklinde tanımlansın. O halde, $K \in L(C[a, b])$ ve

$$\|K(g)\| \leq M(b - a)\|g\|$$

olur. Gerçekten, varsayalım ki $\varepsilon > 0$ ve $s \in [a,b]$ olsun. Ayrıca $k_s = k(s,t)\,, t \in [a,b]$ olacak şekilde $k_s \in C[a,b]$ fonksiyonu tanımlayalım. $[a,b] \times [a,b]$ kümesi $\mathbb{R}^2$ nin kompakt bir altkümesi olduğundan k fonksiyonu düzgün süreklidir. Dolayısıyla her $t \in [a,b]$ için $|s - s'| < \delta$ olduğunda $|k_s(t) - k_{s'}(t)| < \varepsilon$ olan $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan devam edilirse,

$$|f(s) - f(s')| \leq \int_a^b |k(s,t) - k(s',t)||g(t)|dt \leq \varepsilon(b-a)\|g\|$$

olacağından f süreklidir. Her $s \in [a,b]$ için,

$$\left|\big(K(g)\big)(s)\right| \leq \int_a^b |k(s,t)g(t)|dt \leq \int_a^b M\|g\|dt = M(b-a)\|g\|$$

olacağından, $\|K(g)\| \leq M(b-a)\|g\|$ olur ki $K \in L(C[a,b])$ olduğu ispatlanır.

Örnek 1.2.38 ([9], s.92): Tüm polinom tipli fonksiyonları içeren $C_{\mathbb{C}}[0,1] = \{f \mid f: [0,1] \to \mathbb{C}\,, f \text{ sürekli}\}$ uzayının lineer altuzayı $\mathcal{P}$ ile gösterilsin. Her $p \in \mathcal{P}$ için p' ile p nin türevi gösterilmek üzere, $T: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ lineer operatörü,

$$T(p) = p'$$

olarak tanımlanırsa bu T lineer operatörü sürekli değildir. Gerçekten de, $p_n \in \mathcal{P}$ polinomları $p_n(t) = t^n$ olarak tanımlansın. O halde,

$$\|p_n\| = \sup\{|p_n(t)|; t \in [0,1]\} = 1$$

olmasına rağmen her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\|T(p_n)\| = \|p_n{}'\| = \sup\{|p_n{}'(t)|: t \in [0,1]\} = \sup\{|n.t^{n-1}|: t \in [0,1]\} = n$$

olduğundan, her $p \in \mathcal{P}$ için $\|Tp\| \leq k\|p\|$ olacak şekilde $k \geq 0$ sayısı bulunamaz. Dolayısıyla T operatörü sınırsız bir operatördür.

Tanım 1.2.39 (Operatör Normu, ([9], s.97)): X ve Y normlu uzay olmak üzere, $A: X \to Y$ sınırlı operatörü için,

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\} = \inf\{k: \|Ax\|_Y \leq k\|x\|_X \text{, her } x \in X\}$$

şeklinde tanımlı, $\|\cdot\|: L(X,Y) \to \mathbb{R}$ normuna A sınırlı operatörünün normu denir.

Örnek 1.2.40: X normlu uzay üzerinde tanımlı $E: X \to X$ birim operatörü sınırlı olmak üzere, $\|E\| = 1$ dir. Benzer şekilde X normlu uzay üzerinde tanımlı $0: X \to X$ sıfır operatörü sınırlı operatör olup, $\|0\| = 0$ dır.

Örnek 1.2.41: $C_{\mathbb{R}}[0,1] = \{f | f: [0,1] \to \mathbb{R}$ ve f sürekli $\}$ olmak üzere $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|: x \in [0,1]\}$, $f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ olsun. Şimdi, $f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ için;

$$Af(t) := \int_0^1 f(t)\, dt$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. O halde,

$$|Af(t)| = \left| \int_0^1 f(t)\, dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)|\, dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\, dt = \|f\|_\infty$$

olup her $f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ için $Af(t) \in \mathbb{R}$ olur, yani $A: C_{\mathbb{R}}[0,1] \to \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyoneldir. Ayrıca A lineer operatörü sınırlı bir operatör olup $\|A\| = 1$ olur. Gerçekten, her $f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ için,

$$|Af(t)| \leq \|f\|_\infty$$

eşitsizliğinden A lineer operatörünün sınırlı ve $\|A\| \leq 1$ olduğu elde edilir.

Diğer taraftan,

$$\|A\| = sup\{|Af(t)|: f \in C_{\mathbb{R}}[0,1] \text{ ve } \|f\|_\infty \leq 1\}$$

olduğundan her $x \in [0,1]$ için $g(x) = 1$ şeklinde alınırsa,

$$g \in C_{\mathbb{R}}[0,1], \|g\|_\infty = 1 \text{ ve } |Ag(t)| = \left| \int_0^1 g(t)\, dt \right| = 1$$

olup buradan ise $1 \leq \|A\|$ sonucu elde edilir. Sonuç olarak $\|A\| = 1$ eşitliği bulunur.

Teorem 1.2.42 ([9], s.97): X ve Y iki normlu uzay olmak üzere X den Y ye tanımlı tüm lineer sınırlı operatörlerin oluşturduğu $L(X,Y)$ lineer uzayı $\|\cdot\|$-operatör normu altında bir normlu uzaydır.

Tanım 1.2.43 (Operatör Normunda Yakınsama, ([7], s.246)): X ve Y iki normlu uzay ve $A_n,\ A \in L(X,Y),\ n \geq 1$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, her $n > N_\varepsilon$ olduğunda $\|A_n - A\| < \varepsilon$ koşulunu sağlayacak $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mevcut ise (A_n) dizisi A ya operatör normunda yakınsıyor veya düzgün yakınsıyor denir.

Tanım 1.2.44 (Kompakt Küme, ([9], s.16)): X bir normlu uzay ve $M \subset X$ bir küme olsun. Eğer her $(x_n) \subset M$ dizisi M kümesinde bulunan bir elemana yakınsayan bir altdizi içeriyorsa $M \subset X$ kümesine kompakt küme denir.

Örneğin; $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ Öklid uzayında her kapalı sınırlı küme kompakttır.

Tanım 1.2.45 (Kompakt Operatör, ([11], s.405)): X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \to Y$ lineer sınırlı bir operatör olsun. Bu durumda eğer her sınırlı $M \subset X$ altkümesi için $\overline{A(M)}$ kümesi kompakt ise A operatörüne kompakt operatör denir. X den Y ye tüm kompakt operatörler ailesi $K(X, Y)$ ile gösterilir. Özel olarak $X = Y$ ise bu aile $K(X)$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.46 ([11], s.407): X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \to Y$ lineer operatör olsun. A operatörünün kompakt operatör olması için gerek ve yeter şart A operatörünün X deki her sınırlı $(x_n) \subset X$ dizisi için $(Ax_n) \subset Y$ dizisinin Y de yakınsak bir altdizisinin mevcut olmasıdır.

Teorem 1.2.47 ([11], s.407): X ve Y normlu uzaylar ve $A: X \to Y$ lineer operatör olsun. O halde;

a) A sınırlı ve $dimR(A) < \infty$ ise A operatörü kompakttır.

b) Eğer $dimX < \infty$ ise A operatörü kompakttır.

Teorem 1.2.48 ([12], s.93): H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı olmak üzere eğer $(A_n) \subset K(H_1, H_2)$, $A \in L(H_1, H_2)$ ve $\|A_n - A\| \to 0$ ise $A \in K(H_1, H_2)$ olur.

Örnek 1.2.49 ([11], s.409): $l_2(\mathbb{C}) \coloneqq \{x = (x_n): x_n \in \mathbb{C}, n \geq 1, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ olmak üzere, her $x = (x_n) \in l_2(\mathbb{C})$ için, $Ax = y$, $y = (y_n) \in l_2(\mathbb{C})$, $y_n = \frac{x_n}{n}$, $n = 1,2, \ldots$ şeklinde tanımlanan $A : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$ operatörü kompaktır. Gerçekten, A operatörünün lineer olduğu aşikardır ve $x = (x_n) \in l_2(\mathbb{C})$ ve $y = (y_n) \in l_2(\mathbb{C})$ için $A_n: l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$ operatörü, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n x = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \ldots, \frac{x_n}{n}, 0, 0, 0, \ldots\right)$$

şeklinde tanımlansın. A_n lineer ve sınırlıdır dolayısıyla Teorem 1.2.47 a)'dan dolayı kompakttır. Bundan başka,

$$\|(A - A_n)x\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |y_i|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} |x_i|^2 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2 \leq \frac{\| x \|^2}{(n+1)^2}$$

olur. Burada normu $\|x\| \leq 1$ olan her $x \in l_2(\mathbb{C})$ için supremum alınırsa,

$$\|A_n - A\| \leq \frac{1}{n+1}$$

olur ki, operatör normuna göre $A_n \to A$ olduğu görülür. Teorem 1.2.48 den dolayı A kompakt olur.

Örnek 1.2.50: H bir Hilbert uzayı, $(e_n)_{n\geq 1} \subset H$ ortonormal baz olmak üzere, $A: H \to H$, her $x \in H$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$ için

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_{n+1}$$

operatörü kompakt değildir. Gerçekten,

$$Ae_n = e_{n+1}\ , n \geq 1$$

olup

$$M = \{e_n : n \geq 2\} \subset H$$

kümesi göz önüne alınırsa her $n \geq 1$ için

$$\|e_n\|^2 = (e_n, e_n) = 1$$

olup M kümesi sınırlıdır. Bu halde

$$A(M) = Span\{e_n : n \geq 2\}$$

olup

$$x_n = e_n\ , n \geq 2$$

şeklinde alınırsa (x_n) dizisinin hiçbir altdizisi yakınsayamaz. Çünkü $n \neq m$ için

$$\|x_n - x_m\|^2 = (e_n - e_m\ , e_n - e_m) = 1 + 1 = 2$$

olup

$$\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$$

bulunur. Buradan $\overline{A(M)} \subset H$ kümesinin kompakt olmadığı dolayısıyla da A operatörünün kompakt olmadığı elde edilir.

Örnek 1.2.51 ([33], s.449): $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $x = (x_j) \in l_p(\mathbb{C})$ ve $i = 1, 2, 3, \ldots$ için,

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x_j$$

ile verilen $A: l_p(\mathbb{C}) \to l_q(\mathbb{C})$ lineer dönüşümü göz önüne alınsın. Eğer,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}|^q < \infty$$

ise o zaman A operatörü kompakt olduğu gösterilsin.

$$\sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}|^q = (\alpha_i)^q\ , i = 1, 2, 3, \ldots$$

ve

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i{}^q = (\beta_n)^q \,, n = 0, 1, 2, \dots$$

ve $\beta = \beta_0$ olsun. Hipotezden, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i{}^q$ yakınsak olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$$

olduğu görülür. Eğer $1 < p < \infty$ ve $x = (x_j) \in l_p(\mathbb{C})$ ise o zaman Hölder eşitsizliğinden,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij} x_j| \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \alpha_i \|x\|_p \tag{1.2}$$

bulunur. Eğer $p = \infty$ ise o zaman $q = 1$ dir ve her j için

$$|k_{ij} x_j| \le |k_{ij}| \|x\|_\infty$$

ve

$$\sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij} x_j| \le \alpha_i \|x\|_\infty \tag{1.3}$$

olur. (1.2) ve (1.3) birlikte her bir $i \ge 1$ için $(Ax)_i$ nin var olduğunu ve $i \ge 1,\ 1 < p \le \infty$ için,

$$|(Ax)_i| \le \alpha_i \|x\|_p \tag{1.4}$$

olduğunu gösterir. Bu nedenle

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(Ax)_i|^q \le (\|x\|_p)^q \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i{}^q = (\beta \|x\|_p)^q$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre her i için A operatörü iyi-tanımlıdır, yani her $x \in l_q(\mathbb{C})$ için $Ax \in l_q(\mathbb{C})$ olur. Üstelik her $x \in l_p(\mathbb{C})$ için,

$$\|x\|_q \le \beta \|x\|_p$$

bulunur. O halde $A \in L\left(l_p(\mathbb{C}),\ l_q(\mathbb{C})\right)$. $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i e_i = ((Ax)_1, (Ax)_2, \dots, (Ax)_n, 0, 0, \dots)$$

ile $A_n : l_p(\mathbb{C}) \to l_q(\mathbb{C})$ tanımlayalım. Buna göre $A_n x \in l_q(\mathbb{C})$ dir, A_n lineerdir ve (1.2) den

$$(\|A_n x\|_q)^q = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i|^q \le (\|x\|_p)^q \sum_{i=1}^{n} \alpha_i{}^q$$

elde edilir. Buradan,

$$\|A_n x\|_q \leq \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^q\right)^{\frac{1}{q}} = \beta\|x\|_p$$

eşitsizliği doğru olur. Bu (A_n) operatör dizisinin operatör normuna göre sınırlı olduğunu gösterir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için A_n operatörünün görüntü kümesi sonlu boyutludur. Yani $dimR(A_n) < \infty$. Bu nedenle her $n \in \mathbb{N}$ için A_n kompakt operatördür. Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in l_p(\mathbb{C})$ için,

$$(Ax)_i - (A_n x)_i = \begin{cases} 0 \ , & 1 \leq i \leq n \text{ için} \\ (Ax)_i \ , & i > n \text{ için} \end{cases}$$

olduğundan (1.4) eşitsizliği kullanılarak

$$(\|Ax - A_n x\|_q)^q = \sum_{i=n+1}^{\infty} |(Ax)_i|^q \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} {\alpha_i}^q (\|x\|_p)^q = \beta_n^q (\|x\|_p)^q$$

bulunur. Böylece,

$$\|Ax - A_n x\|_q \leq \beta_n \|x\|_p$$

elde edilir. O halde $\|A - A_n\| \leq \beta_n \to 0$ olur. Buradan, $L\left(l_p(\mathbb{C}), l_q(\mathbb{C})\right)$ içinde $A_n \to A$ dır. Ayrıca A_n kompakttır ve $l_q(\mathbb{C})$ Banach uzayı olduğundan kompakt operatörler kümesi, $L\left(l_p(\mathbb{C}), l_q(\mathbb{C})\right)$ sınırlı operatörler kümesinin kapalı bir altuzayıdır. Buradan $A \in K\left(l_p(\mathbb{C}), l_q(\mathbb{C})\right)$ olduğu görülür.

Benzer şekilde $l_1(\mathbb{C})$ ve $l_\infty(\mathbb{C})$ için ve $x = (x_j) \in l_1(\mathbb{C}),\ i = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij}\, x_j$$

ile tanımlı $A: l_1(\mathbb{C}) \to l_\infty(\mathbb{C})$ dönüşümü göz önüne alınsın. Eğer her bir $i \in \mathbb{N}$ için,

$$\alpha_i = \sup_{j \geq 1} |k_{ij}| < \infty$$

ve $\lim_{i\to\infty} \alpha_i = 0$ ise o zaman $A \in K\left(l_1(\mathbb{C}), l_\infty(\mathbb{C})\right)$ olur. Gerçekten de yukarıdaki işlemlerin benzeri uygulandığında A operatörünün kompakt operatör olduğu görülür.

Tanım 1.2.52 (Kapalı Lineer Operatör, ([11], s.292)): X ve Y iki normlu uzay, $D(A)$, X in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda,

$$Gr(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times Y$$

olarak tanımlanan A operatörünün grafiği $X \times Y$ normlu uzayında kapalı ise A operatörüne kapalı lineer operatör denir.

Teorem 1.2.53 ([11], s.293): X ve Y iki normlu uzay, $D(A)$, X in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Bu takdirde A operatörünün kapalı operatör olması için gerek ve yeter şart her $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$ olan $(x_n) \subset D(A)$ için $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ olmasıdır.

Tanım 1.2.54 (Bire-Bir Operatör, ([11], s.614)): X ve Y iki lineer uzay, $D(A)$, X in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x_1, x_2 \in D(A)$ için $x_1 \neq x_2$ bağıntısı sağlandığında $Ax_1 \neq Ax_2$ bağıntısı sağlanıyorsa A operatörüne bire-bir operatör denir.

Tanım 1.2.55 (Eşlenik Operatör, ([7], s.353)): H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H nın bir lineer altuzayı, $A: D(A) \subset H \to H$ lineer bir operatör ve $\overline{D(A)} = H$ olsun. Bu durumda,

$$D(A^*) := \{y \in H : \forall x \in D(A) \text{ için bir } z \in H \text{ vardır öyle ki } (Ax, y)_H = (x, z)_H\}$$

olmak üzere,

$$A^*: D(A^*) \subset H \to H, \qquad A^* y := z$$

şeklinde tanımlanan operatöre A operatörünün eşlenik (adjoint) operatörü denir.

Örnek 1.2.56 ([9], s.170): Keyfi $f \in C[0,1]$ için $T_f \in L(L_2[0,1])$ operatörü,

$$(T_f g)(t) := f(t) g(t)$$

olarak tanımlansın. O halde eğer $f \in C[0,1]$ ise $(T_f)^* = T_{\bar{f}}$ olur. Gerçekten $g, h \in L_2[0,1]$ ve $k = (T_f)^* h$ olsun. Eşleniğin tanımından $(T_f g, h) = (g, k)$ olmalı ve dolayısıyla,

$$\int_0^1 f(t) g(t) \overline{h(t)} dt = \int_0^1 g(t) \overline{k(t)} dt$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bu eşitlik $\overline{k(t)} = \overline{h(t)} f(t)$ için geçerli olduğundan, buradan $k(t) = \overline{f(t)} h(t)$ olur. Eşleniğin tekliğinden dolayı, $(T_f)^* h = k = \bar{f} h$ elde ederiz ki dolayısıyla $(T_f)^* = T_{\bar{f}}$ olur.

Örnek 1.2.57 ([9], s.171): $S_r: l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$, $S_r(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ olarak tanımlanan S_r operatörüne sağa öteleme operatörü denir. $S_r \in L(l_2(\mathbb{C}))$ sağa öteleme operatörünün eşleniği $S_r{}^*$ olmak üzere,

$$S_r{}^*(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_2, y_3, y_4, \ldots)$$

dir. Gerçekten $x = (x_n)$ ve $y = (y_n) \in l_2$ ve $z = (z_n) = S_r{}^*(y)$ olsun. Eşlenik operatörün tanımından $(S_r x, y) = (x, S_r{}^* y)$ olur. Dolayısıyla,

$$\big((0, x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots)\big) = \big((x_1, x_2, x_3, \ldots), (z_1, z_2, z_3, \ldots)\big)$$

olacağından,

$$x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + x_3\overline{y_4} + \ \ldots = x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + x_3\overline{z_3} + \ \ldots$$

olur. Eğer $z_1 = y_2, z_2 = y_3, \ldots,$ ise bu eşitlik her $x_1, x_2, x_3, \ldots$ için sağlanır ve eşleniğin tekliğinden,

$$S_r{}^*(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (z_1, z_2, z_3, \ldots) = (y_2, y_3, y_4, \ldots)$$

olduğu elde edilir.

Örnek 1.2.58: $H = (L_2[0,1], \|\cdot\|_2)$ nın bir altuzayı $D(A) \coloneqq \{u \in L_2[0,1];\ u' \in L_2[0,1], u(0) = u(1)\}$ olsun. O halde,

$$A: D(A) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1], \qquad Au = u'$$

olarak tanımlanan lineer operatörü için eşlenik operatörü bulunsun. Şöyle ki A^*, A operatörünün eşlenik operatörü ve $u, v \in L_2[0,1]$, $t \in [0,1]$ için,

$$(Au, v) = \int_0^1 u'(t)v(t)dt = u(1)v(1) - u(0)v(0) - \int_0^1 u(t)v'(t)dt$$

$$= -\int_0^1 u(t)v'(t)dt = \int_0^1 u(t)\big(-v'(t)\big)dt = (u, A^*\mathrm{v})$$

olduğundan $A^*v = -v'$ ve $D(A) = D(A^*)$ olduğu elde edilir.

Tanım 1.2.59 (Özeşlenik Operatör, ([7], s.359)): H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H nın bir lineer altuzayı, $A: D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör ve A^*, A operatörünün eşlenik operatörü olsun. Bu durumda, eğer $D(A) = D(A^*)$ ve her $x \in D(A)$ için $Ax = A^*x$ ise A operatörüne özeşlenik (self adjoint) operatör denir.

Örnek 1.2.60 ([9], s.170): Keyfi $f \in C[0,1]$ için $T_f \in L(L_2[0,1])$ operatörü,

$$(T_f g)(t) := f(t)g(t)$$

olarak tanımlansın. O halde eğer $f \in C[0,1]$ ise Örnek 1.2.56 den dolayı $(T_f)^* = T_{\bar{f}}$ olur. Eğer $f \in C[0,1]$ reel değerli ise $\left(T_f\right)^* = T_f$ olur ki bu durumda reel değerli $f \in C[0,1]$ için T_f özeşlenik operatördür.

Örnek 1.2.61 ([9], s.170): $H = \mathbb{C}^2$ ve $x_{12},\ x_{21} \in \mathbb{C},\ x_{11}, x_{22} \in \mathbb{R}, \overline{x_{12}} = x_{21}$ olmak üzere, $A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlı A operatörü özeşlenik operatördür. Gerçekten, A operatörünün eşleniği $A^* = \begin{pmatrix} x_{11} & \overline{x_{21}} \\ \overline{x_{12}} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = A$ olduğundan $A = A^*$ olup A operatörü özeşleniktir.

Tanım 1.2.62 (Normal Operatör, ([7], s.365)): H bir Hilbert uzayı, $A \in L(H)$ ve A^* operatörü, A lineer operatörünün eşlenik operatörü olmak üzere,

$$D(A) = D(A^*)$$

ve

$$AA^* = A^*A$$

ise A operatörüne normal operatör denir.

Teorem 1.2.63 ([7], s.379): H kompleks Hilbert uzayı, $A \in L(H)$ ve A^* operatörü, A lineer operatörünün eşlenik operatörü olmak üzere, A nın normal operatör olması için gerek ve yeter şart her $x \in H$ için,

$$\|Ax\| = \|A^*x\|$$

olmasıdır.

Örnek 1.2.64: $H = (L_2[0,1], \|\cdot\|_2)$ nın bir altuzayı,

$$D(A) \coloneqq \{u \in L_2[0,1]; u' \in L_2[0,1], u(0) = u(1)\}$$

olsun. O halde,

$$A: D(A) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1]\,, \qquad Au = u'$$

olarak tanımlanan lineer operatörü bir normal operatördür. Gerçekten, Örnek 1.2.58 de görüldüğü gibi, $A^*v(t) = -v'(t)$ ve $D(A^*) \coloneqq \{v \in L_2[0,1];\ v' \in L_2[0,1], v(0) = v(1)\}$ olup, $D(A) = \ D(A^*)$ ve her $u(t) \in L_2[0,1]$ için,

$$\|Au\|_{L_2[0,1]} = \|u'\|_{L_2[0,1]} = \|-u'\|_{L_2[0,1]} = \|A^*u\|_{L_2[0,1]}$$

dir. Dolayısıyla A normal operatördür.

Tanım 1.2.65 (Yarı Normal Operatör, ([2], s.29)): H bir Hilbert uzayı, $A \in L(H)$ ve A^* operatörü, A lineer operatörün eşlenik operatörü olmak üzere, A ile A^*A komütatif, yani

$$AA^*A = A^*AA$$

ise A operatörüne yarı normal (quasinormal) operatör denir.

Örnek 1.2.66 ([9], s.176): Keyfi $f \in C[0,1]$ için $T_f \in L(L_2[0,1])$ operatörü Örnek 1.2.56 daki gibi tanımlansın. Eğer $f \in C[0,1]$ ise T_f normaldir. Gerçekten de Örnek 1.2.56 da $\left(T_f\right)^* = T_{\bar{f}}$ olduğu görülür. Bundan dolayı, her $g \in L_2[0,1]$ için,

$$\left(T_f\left(T_f\right)^*\right)(g) = T_f\left(T_{\bar{f}}\,(\mathrm{g})\right) = T_f\left(\bar{f}g\right) = f\bar{f}g$$

ve

$$\left(\left(T_f\right)^* T_f\right)(g) = T_{\bar{f}}\left(T_f(g)\right) = T_{\bar{f}}\,(fg) = \bar{f}fg = f\bar{f}g$$

olup,

$$T_f\left(T_f\right)^* = \left(T_f\right)^* T_f$$

eşitliği bulunur. Buradan T_f operatörünün normal bir operatör olup aynı zamanda yarı normal operatör olduğu görülür.

Örnek 1.2.67 ([9], s.177): $S_r: l_2 \to l_2$, $S_r(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ olarak tanımlanan S_r sağa öteleme operatörü bir normal operatör değildir fakat yarı normal operatördür. Gerçekten de her $(y_n) \in l_2$ için S_r operatörünün eşlenik operatörü,

$$S_r^*(y_1, y_2, y_3, \dots) = (y_2, y_3, y_4, \dots)$$

olduğu Örnek 1.2.57 de gösterilmişti. O halde $(x_n) \in l_2$ için,

$$S_r^*\left(S_r(x_1, x_2, x_3, \dots)\right) = S_r^*(0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

ve

$$S_r\left(S_r^*(x_1, x_2, x_3, \dots)\right) = S_r(x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, x_2, x_3, x_4, \dots)$$

olup

$$S_r^* S_r \neq S_r S_r^*$$

olacağından sağa öteleme operatörü normal değildir. Fakat

$$\begin{aligned}(S_r S_r^* S_r)(x_1, x_2, x_3, \dots) &= S_r\left(S_r^* S_r(x_1, x_2, x_3, \dots)\right) = S_r(x_1, x_2, x_3, \dots)\\ &= (0, x_1, x_2, x_3, \dots)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}S_r^* S_r S_r(x_1, x_2, x_3, \dots) &= S_r^* S_r\left(S_r(x_1, x_2, x_3, \dots)\right) = S_r^* S_r(0, x_1, x_2, x_3, \dots)\\ &= (0, x_1, x_2, x_3, \dots)\end{aligned}$$

olduğundan,

$$S_r S_r^* S_r = S_r^* S_r S_r$$

olur ki, buradan S_r sağa öteleme operatörünün yarı normal operatör olduğu görülür.

Tanım 1.2.68 (Saf Yarı Normal Operatör, ([2], s.38)): H bir Hilbert uzayı, $A \in L(H)$ olsun. Eğer A yarı normal operatör fakat H daki tüm altuzaylara kısıtlanışı normal operatör değil ise A operatörüne saf yarı normal operatör denir.

Tanım 1.2.69 (Üniter Operatör, ([9], s.181)): H bir kompleks Hilbert uzayı, $A \in L(H)$ ve A^*, A operatörünün eşlenik operatörü olsun. Bu durumda $E: H \to H$ birim operatör olmak üzere, eğer $AA^* = A^*A = E$ ise A operatörüne üniter operatör denir.

Örnek 1.2.70: $H = \mathbb{C}^2$ ve $x, y \in \mathbb{C}$, $|x|^2 + |y|^2 = 1$ olmak üzere, $A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -e^{i\vartheta}\bar{y} & e^{i\vartheta}\bar{x} \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlı A operatörü üniter operatördür. Gerçekten de A operatörünün eşlenik operatörü $A^* = \begin{pmatrix} \bar{x} & -e^{-i\vartheta}y \\ \bar{y} & e^{-i\vartheta}x \end{pmatrix}$ olduğu açıktır. O halde,

$$AA^* = \begin{pmatrix} x & y \\ -e^{i\vartheta}\bar{y} & e^{i\vartheta}\bar{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} & -e^{-i\vartheta}y \\ \bar{y} & e^{-i\vartheta}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x|^2 + |y|^2 & 0 \\ 0 & |x|^2 + |y|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} \bar{x} & -e^{-i\vartheta}y \\ \bar{y} & e^{-i\vartheta}x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -e^{i\vartheta}\bar{y} & e^{i\vartheta}\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x|^2 + |y|^2 & 0 \\ 0 & |x|^2 + |y|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur ki, $AA^* = A^*A = E$ olduğundan A operatörü üniterdir.

Tanım 1.2.71 (İzometri, ([7], s.51)): H_1 ve H_2 birer Hilbert uzayı, $A: H_1 \to H_2$ operatörü birebir olsun. Eğer keyfi $x \in H_1$ için $\|Ax\|_{H_2} = \|x\|_{H_1}$ oluyor ise A operatörüne izometri ve bu iki uzaya da izometrik denir.

Teorem 1.2.72 ([7], s.364): H_1 ve H_2 birer Hilbert uzayı ve $A: H_1 \to H_2$ lineer operatör olmak üzere A^*, A operatörünün eşlenik operatörü olsun. Bu durumda $E: H_1 \to H_1$ birim operatör olmak üzere, A operatörünün izometri olabilmesi için gerek ve yeter koşul,

$$A^*A = E$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Tanım 1.2.73 (Üniter Denklik, ([6], s.258)): H_1, H_2 birer Hilbert uzayı olmak üzere $A_1: H_1 \to H_1$ ve $A_2: H_2 \to H_2$ lineer operatörleri için,

$$UA_1U^{-1} = A_2$$

$$U^{-1}A_2U = A_1$$

olacak şekilde $U: H_1 \to H_2$ üniter (örten izometri) operatör var ise A_1 ve A_2 operatörlerine üniter denktir denir.

Tanım 1.2.74 (Kısmi İzometri, ([38], s.248)): H_1 ve H_2 birer Hilbert uzayı, $A: H_1 \to H_2$ operatörü için her $x \in (KerA)^{\perp}$ için $\|Ax\|_{H_2} = \|x\|_{H_1}$ oluyorsa A operatörüne kısmi izometri operatör denir. Burada ki $(KerA)^{\perp}$, A nın başlangıç (initial) uzayı ve $R(A)$ uzayı da A nın final uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.75 (Pozitif Operatör, ([7], s.411)): H bir Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \to H$ bir özeşlenik operatör olsun. Eğer her $x \in D(A)$ için

$$(Ax, x)_H \geq 0$$

ise A operatörüne pozitif operatör denir ve $A \geq 0$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 1.2.76 (Karekök Operatör, ([7], s.422)): H bir Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \to H$ bir pozitif operatör olsun. O halde, $B^2 = A$ eşitliğini sağlayan B özeşlenik operatörüne A operatörünün bir karekökü adı verilir. Ek olarak $B \geq 0$ olduğunda $B = \sqrt{A}$ ya da $B = A^{1/2}$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.77 ([7], s.422): H bir Hilbert uzayı ve $A \in L(H)$ bir pozitif operatör olsun. $B^2 = A$ eşitliğini sağlayan tek bir $B \in L(H), B \geq 0$ operatörü vardır ve A operatörü ile komütatif olan her $C \in L(H)$ operatörü ile komütatiftir.

Teorem 1.2.78 (Kutupsal Ayrışım, [38], s.248, [1], s.74): H_1, H_2 Hilbert uzayları $A \in L(H_1, H_2)$ ve A^* operatörü A nın eşlenik operatörü olsun. Başlangıç uzayı $(KerA)^{\perp}$, bitiş uzayı $\overline{R(A)}$ olan $U: H_1 \to H_2$ kısmi izometrisi ve $P \in L(H_1)$ bir pozitif operatör olmak üzere,

$$A = UP$$

eşitliği yazılabilir ve bu yazıma A nın kutupsal ayrışımı denir. Ayrıca bu gösterimde $KerU = KerP$ olur. Gösterimde özel olarak $P = |A|: H_1 \to H_1$, $|A| = (AA^*)^{1/2}$ seçilebilir ve o halde bu gösterim,

$$A = U|A|$$

şeklinde olur.

Tanım 1.2.79 (Rezolvent Küme, ([7], s.298)): X kompleks normlu lineer uzay, $D(A)$, X in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \to X$ lineer operatör olsun. $E: X \to X$ birim operatör ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, eğer $R(A - \lambda E)$ kümesi X de yoğun ve $(A - \lambda E)$ operatörünün tersi

$R(A - \lambda E)$ kümesinde var ve sınırlı ise $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı A operatörünün rezolvent kümesine aittir denir ve $\lambda \in \rho(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.80 (Sürekli Spektrum, ([7], s.298)): X kompleks normlu lineer uzay, $D(A)$, X in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \to X$ lineer operatör olsun. $E: X \to X$ birim operatör ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, eğer $R(A - \lambda E)$ kümesi X de yoğun ve $(A - \lambda E)$ operatörünün tersi $R(A - \lambda E)$ kümesinde var fakat sınırlı değil ise λ sayısı A operatörünün sürekli spektrumuna aittir denir ve $\lambda \in \sigma_c(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.81 (Kalan Spektrum, ([7], s.298)): X kompleks normlu lineer uzay, $D(A)$, X in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \to X$ lineer operatör olsun. $E: X \to X$ birim operatör ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, eğer $R(A - \lambda E)$ kümesi X de yoğun değil fakat $(A - \lambda E)$ operatörünün tersi $R(A - \lambda E)$ kümesinde var (sınırlı ya da sınırsız) ise λ sayısı A operatörünün kalan spektrumuna aittir denir ve $\lambda \in \sigma_r(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.82 (Noktasal Spektrum, ([7], s.298)): X kompleks normlu lineer uzay, $D(A)$, X in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \to X$ lineer operatör olsun. $E: X \to X$ birim operatör ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $(A - \lambda E)$ operatörünün tersi yok ise λ sayısı A operatörünün noktasal (ayrık) spektrumuna aittir denir ve $\lambda \in \sigma_p(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.83 (Özdeğer, Özvektör, ([7], s.6, s.298)): X kompleks normlu lineer uzay, $D(A)$, X in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \to X$ lineer operatör olmak üzere $\lambda \in \sigma_p(A)$ sayısına A nın özdeğeri, $Ax = \lambda x$, $x \in X$, $x \neq 0$ denklemin çözümüne ise A nın λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir.

Tanım 1.2.84 (Spektrum, ([7], s.298)): X kompleks normlu lineer uzay, $D(A)$, X in bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset X \to X$ lineer operatör olmak üzere $\sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_p(A)$ kümesine A nın spekturumu denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.85 (Esas Spektrum, ([6], s.243)): H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H nın bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset H \to H$ lineer operatörü sınırlı olsun. Eğer $R(A)$ kapalı, $KerA$ ve $coKerA$ nın boyutları sonlu ise A operatörüne Fredholm operatör denir. E birim operatör ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $A - \lambda E$ operatörünün bir Fredholm operatörü olmadığı tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayılarının kümesine A operatörünün esas spektrumu denir ve esas spektrum kümesi $\sigma_{ess}(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.86 (Rezolvent Operatör, ([11], s.370)): H bir Hilbert uzayı, $D(A)$, H nın bir lineer altuzayı ve $A: D(A) \subset H \to H$ lineer operatör olsun. Bu takdirde $\lambda \in \mathbb{C}$, $E: H \to H$ ise birim operatör olmak üzere $A_\lambda = A - \lambda E$ operatörü terslenebilir (tersi var ve sınırlı) ise

$$A_\lambda^{-1} = (A - \lambda E)^{-1}$$

operatörüne A operatörünün rezolvent operatörü denir ve $R_\lambda(A)$ sembolü ile gösterilir.

Örnek 1.2.87 ([1], s.299): $V: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$ ile tanımlı lineer sınırlı Volterra operatörünün spektrumu $\sigma(V) = \{0\}$ şeklindedir. Gerçekten de $E: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ birim operatör olmak üzere $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$(V - \lambda E)f = g\,, \qquad f, g \in L_2(0,1)$$

spekturum problemine bakılsın. İlk olarak

(a) $g = 0\;,\; \lambda \neq 0$ durumu incelensin. Bu durumda problem

$$(V - \lambda E)f = 0$$

şeklinde olup buradan,

$$\int_0^x f(t)dt = \lambda f(x), \;\; f \in L_2(0,1)$$

şeklindedir. Bu integral denklemi,

$$\begin{cases} f(x) = \lambda f'(x), & \lambda - \text{h.h.y.} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

diferansiyel denklem olan sınır-değer problemine dönüşür. Son eşitlikten,

$$f'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x), \qquad \lambda - \text{h.h.y.}$$

olup buradan ise $f(x)$ çözümü

$$f(x) = ce^{\frac{1}{\lambda}x}$$

şeklinde olur. Buradan $f(0) = 0$ sınır-değer şartını yerine yazılırsa $f(x) = 0$, $\lambda -$ h.h.y. bulunur. Bu $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ sayısının özdeğer olamayacağı anlamına gelir.

(b) $g = 0$, $\lambda = 0$ durumu ele alınsın. Bu halde $Vf = 0$ olup

$$\int_0^x f(t)dt = 0\,, \qquad f \in L_2(0,1)$$

olur. Buradan $f(x) = 0\,, \lambda -$ h.h.y. olduğu bulunur. Bu ise $\lambda = 0$ sayısının özdeğer olamayacağı anlamına gelir. Böylece (a) ve (b) durumlarından $\sigma_p(A) = \emptyset$ olduğu elde edilir.

(c) $g \neq 0,\ \lambda \neq 0$ durumundan,

$$(V - \lambda E)f = g\,, \qquad f, g \in L_2(0,1)$$

yani

$$\int_0^x f(t)dt - \lambda f(x) = g(x), \qquad f, g \in L_2(0,1)$$

olur. Bu halde

$$h(x) := \int_0^x f(t)dt$$

olarak alınırsa integral denklemi

$$\begin{cases} h'(x) - \dfrac{1}{\lambda}h(x) = -\dfrac{1}{\lambda}g(x) \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

diferansiyel denklemine dönüşür. Bu denklemin genel çözümü

$$h(x) = ce^{\frac{1}{\lambda}x} - \frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)}g(t)dt$$

şeklindedir. $h(0) = 0$ olduğundan $c = 0$ olup buradan

$$h(x) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)}g(t)dt$$

eşitliği elde edilir. $h(x) = \int_0^x f(t)dt$ olduğundan,

$$(V - \lambda E)^{-1}g(x) = f(x) = h'(x) = \left(-\frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)}g(t)dt\right)'$$

$$= -\frac{1}{\lambda}g(x) - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)}g(t)dt$$

çözümü elde edilir. Son eşitlikten $R_\lambda(V) = (V - \lambda E)^{-1}$ nin var olduğu ve

$$(V - \lambda E)^{-1} \in L\big(L_2(0,1)\big)$$

olduğu elde edilir. Sonuç olarak,

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} = \rho(V)$$

olup

$$\sigma(V) = \{0\}$$

şeklindedir.

(d) $g \neq 0$, $\lambda = 0$ durumunda ise $0 \in \sigma_c(V)$ olduğu açıktır. Böylece

$$\sigma(V) = \sigma_c(V) = \{0\}$$

bulunur.

Örnek 1.2.88 ([33], s.269): $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ Banach uzayında $A_i\colon D(A_i) \subset C[0,1] \to C[0,1]$, $i = 1, 2, 3$ için,

a) $A_1 u := u'$, $D(A_1) = \{u \in C[0,1];\ u' \in C[0,1], u(0) = 0\}$,

b) $A_2 u := u'$, $D(A_2) = \{u \in C[0,1];\ u' \in C[0,1]\}$

c) $A_3 u := u'$, $D(A_3) = \{u \in C[0,1];\ u' \in C[0,1], u(0) = u(1)\}$

operatörlerinin spektrumları bulunsun. Bu halde $E\colon C[0,1] \to C[0,1]$ birim operatör olmak üzere,

a) $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$A_1 u = u' = \lambda u + f \ , f \in C[0,1]$$

denkleminin genel çözümü,

$$u(t) = ce^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)ds \ , c \in \mathbb{C}$$

şeklinde olup $u(0) = 0$ sınır değer koşullarından $c = 0$ bulunur. Dolayısıyla $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$(A_1 - \lambda)u = f, f \in C[0,1]$$

denkleminin

$$u(t) = R_\lambda(A_1)f(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)ds \ \in C[0,1]$$

şeklinde tek bir çözümü vardır, yani

$$R_\lambda(A_1) = (A_1 - \lambda E)^{-1}$$

mevcut olup,

$$(A_1 - \lambda E)^{-1} \in L(C[0,1])$$

dir. Dolayısıyla $\sigma(A_1) = \emptyset$ ve $\rho(A_1) = \mathbb{C}$ olur.

b) $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$A_2u = u' = \lambda u\,, u \in D(A_2)$$

denkleminin çözüm kümesi,

$$u(t) = ce^{\lambda t}\,, c \in \mathbb{C}$$

şeklinde olup her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $A_2u = \lambda u$ denkleminin $u \neq 0\,, u \in C[0,1]$ şeklinde çözümü vardır. Dolayısıyla noktasal spektrum tanımından,

$$\sigma(A_2) = \sigma_p(A_2) = \mathbb{C}$$

olur.

c) $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$A_3u = u' = \lambda u\,, u \in D(A_3)$$

denkleminin çözüm kümesi,

$$u_\lambda(t) = ce^{\lambda t} \;\;, c \in \mathbb{C}\,, 0 \leq t \leq 1$$

şeklindedir. Ayrıca $u_\lambda \in C[0,1]$ olup $u(0) = u(1)$ sınır değerleri kullanılırsa,

$$c = ce^{\lambda}$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$c\left(1 - e^{\lambda}\right) = 0$$

olup $c \neq 0$ için,

$$1 = e^{\lambda}$$

olur. Buradan ise $\lambda = 2k\pi i\,,\ k \in \mathbb{Z}$ olduğu bulunur. Noktasal (ayrık) spektrum tanımından,

$$\sigma_p(A_3) = \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$$

elde edilir. Şimdi $\lambda \neq \lambda_k = 2k\pi i\,, k \in \mathbb{Z}$ durumu incelensin.

$$A_3u = \lambda u + f\,, \qquad u, f \in C[0,1]$$

denkleminin çözüm kümesi,

$$u(t) = ce^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)ds\,, c \in \mathbb{C}$$

şeklindedir. $u(0) = u(1)$ sınır değerleri kullanılırsa,

$$c = \left(1 - e^{\lambda}\right)^{-1} \int_0^1 e^{\lambda(1-s)} f(s)ds$$

olup,

$$R_\lambda f(t) = \left(1 - e^\lambda\right)^{-1} \int_0^1 e^{\lambda(1+t-s)} f(s)ds + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)ds \quad , f \in C[0,1]$$

sonucuna ulaşılır. Buradan,

$$R_\lambda f(t) = \frac{1+e^\lambda}{1-e^\lambda} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)ds + \frac{e^\lambda}{1-e^\lambda} \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} f(s)ds$$

elde edilir. Şimdi $R_\lambda f(t) \in L(C[0,1])$ olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
\|R_\lambda f(t)\|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} \{|R_\lambda f(t)|\} \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \left\{ \left| \frac{1+e^\lambda}{1-e^\lambda} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)ds + \frac{e^\lambda}{1-e^\lambda} \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} f(s)ds \right| \right\} \\
&\le \sup_{t\in[0,1]} \left\{ \left| \frac{1+e^\lambda}{1-e^\lambda} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)ds \right| \right\} + \sup_{t\in[0,1]} \left\{ \left| \frac{e^\lambda}{1-e^\lambda} \int_t^1 e^{\lambda(t-s)} f(s)ds \right| \right\} \\
&\le \sup_{t\in[0,1]} \left\{ \left| \frac{1+e^\lambda}{1-e^\lambda} \right| e^\lambda \int_0^1 \left| e^{-\lambda s} f(s) \right| ds \right\} \\
&\quad + \sup_{t\in[0,1]} \left\{ \left| \frac{e^\lambda}{1-e^\lambda} \right| e^\lambda \int_0^1 \left| e^{-\lambda s} f(s) \right| ds \right\} \\
&\le \left| \frac{e^\lambda + e^{2\lambda}}{1-e^\lambda} \right| \|f(t)\|_\infty + \left| \frac{e^{2\lambda}}{1-e^\lambda} \right| \|f(t)\|_\infty = \left| \frac{e^\lambda + 2e^{2\lambda}}{1-e^\lambda} \right| \|f(t)\|_\infty
\end{aligned}$$

olacağından, $R_\lambda f(t) \in L(C[0,1])$ olur. Böylece her $\lambda \neq \lambda_k , k \in \mathbb{Z}$ ise $\lambda \in \rho(A_3)$. Sonuç olarak,

$$\sigma(A_3) = \{2k\pi i; k \in \mathbb{Z}\}$$

olur.

Teorem 1.2.89 ([7], s.299): Eğer A lineer operatörü sonlu boyutlu X lineer uzayında tanımlı bir operatör ise $\sigma_r(A) = \emptyset$ ve $\sigma_c(A) = \emptyset$ olur.

Teorem 1.2.90 ([11], s.390): H bir Hilbert uzayı olmak üzere $A \in L(H)$ ise $\sigma(A) \neq \emptyset$ olur.

Teorem 1.2.91 ([7], s.382): H bir Hilbert uzayı olmak üzere $A \in L(H)$ olsun. Bu durumda,

a) Eğer $A = A^*$ ise, $\sigma_r(A) = \emptyset$, $\sigma(A) \subset [-\| A \|, \| A \|]$ olur.

b) Eğer A operatörü normal bir operatör ise, $\sigma_r(A) = \emptyset$ olur.

Örnek 1.2.92 ([33], s.415): $A \in L\big(l_2(\mathbb{C})\big)$, $A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, 3x_1, x_2, 3x_3, \dots)$ olarak tanımlanan operatör için eğer $|\mu| < 3$ ise o zaman μ, $(A^*)^2$ nin bir özdeğeri olur. Buradan, $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \sqrt{3}\}$ olduğu görülür. Gerçekten $\sigma(A)$ yi bulmadan önce $(A^*)^2$ bulunsun. Açıkça görüleceği gibi $A^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = (3x_2, x_3, 3x_4, \dots)$ dir. O halde

$$(A^*)^2\big(x_1, x_2, x_3, \dots\big) = A^*\big(A^*(x_1, x_2, x_3, \dots)\big) = A^*(3x_2, x_3, 3x_4, x_5, \dots)$$
$$= (3x_3, 3x_4, 3x_5, 3x_6, \dots)$$

olduğu elde edilir. Buradan,

$$(3x_3, 3x_4, 3x_5, 3x_6, \dots) = \mu\big(x_1, x_2, x_3, \dots\big) = \big(\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3, \dots\big)$$

olacak şekilde yani her $n \in \mathbb{N}$ için $3x_{n+2} = \mu x_n$ olacak şekilde sıfırdan bir $(x_n) = \big(x_1, x_2, x_3, \dots\big) \in l_2(\mathbb{C})$ bulunsun. O halde $x_1 = x_2 = 1$ ve $n \geq 2$ için,

$$x_{2n-1} = x_{2n} = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{n-1}$$

olsun. Dolayısıyla (x_n) sıfırdan farklıdır ve her $|\mu| < 3$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|\mu|}{3}\right)^{2(n-1)} < \infty$$

olup, buradan $(x_n) \in l_2(\mathbb{C})$ olduğu elde edilir. Böylece, $(A^*)^2(x_n) = \mu(x_n)$ eşitliği sağlanır ve μ sayısı $(A^*)^2$ nin bir özdeğeridir ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör (x_n) dir. Buradan devam edilirse,

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 3\} \subseteq \sigma((A^*)^2)$$

olduğu elde edilir. Böylece,

$$\{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : |\lambda| < 3\} \subseteq \sigma(A^2)$$

bulunur. Fakat,

$$\{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : |\lambda| < 3\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 3\}$$

eşitliğinin doğruluğundan,

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 3\} \subseteq \sigma(A^2)$$

olur. Genel teoremden $\sigma(A^2)$ kapalı olup

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 3\} \subseteq \sigma(A^2)$$

olur. Dolayısıyla $|\lambda| \leq \sqrt{3}$ ise o zaman $\lambda \in \sigma(A)$ dir. Çünkü aksi takdirde $\lambda^2 \notin \sigma(A^2)$ olurdu ve bu $|\lambda|^2 > 3$ çelişkisi verirdi. O halde,

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \sqrt{3}\} \subseteq \sigma(A)$$

dir. Diğer yandan, eğer $\lambda \in \sigma(A)$ ise o zaman $\lambda^2 \in \sigma(A^2)$ dir. Bu halde,

$$\lambda^2 \leq r_\sigma(A^2) \leq \| A^2 \| = 3$$

olduğu elde edilir. Buradan $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \sqrt{3}\}$ olur. Sonuç olarak da A nin spektrumu, $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \sqrt{3}\}$ olarak bulunur.

Örnek 1.2.93 ([13], s.223): $L_2(0,1)$ uzayında $A: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$,

$$Af(x) = \int_0^1 \min(x,y)\, f(y)dy$$

şeklinde tanımlanan operatörün spektrumu bulunsun. Öncelikle, her $f \in L_2(0,1)$ için A operatörü,

$$Af(x) = \int_0^1 \min(x,y)\, f(y)dy = \int_0^x yf(y)dy + x\int_x^1 f(y)dy$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte kullanılarak önce A operatörünün noktasal spektrumu incelensin. Yani $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$Af(x) = \lambda f(x), \qquad f \in L_2(0,1)$$

denkleminin çözümü bulunsun. O halde,

$$\int_0^x yf(y)dy + x\int_x^1 f(y)dy = \lambda f(x)$$

denklemini çözmek için her iki tarafın türevi alınırsa,

$$xf(x) + \int_x^1 f(y)dy - xf(x) = \lambda f'(x)$$

denklemi elde edilir. Buradan,

$$\int_x^1 f(y)dy = \lambda f'(x)$$

eşitliği elde edilir. Bulunan denklemin her iki tarafının türevi tekrar alınırsa,

$$-f(x) = \lambda f''(x)$$

olduğu bulunur. Burada eğer $\lambda = 0$ ise $f = 0$ olur, yani $\lambda = 0 \notin \sigma_p(A)$. Şimdi $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ olduğu kabul edilsin. O halde yukarıdaki yapılan işlemlerden bakılan problem,

$$\begin{cases} f''(x) = -\dfrac{1}{\lambda} f(x), & f \in L_2(0,1), \lambda \in \mathbb{C} \\ f(0) = f'(1) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemine dönüşür. Bu denklemin çözümü,

$$f(x) = c_1 \cos\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x + c_2 \sin\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x \quad , \quad x \in [0,1]$$

şekilndedir. $f(0) = 0$ ve $f'(1) = 0$ sınır değerleri kullanılırsa,

$$c_1 = 0 \;\; ve \;\; c_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0$$

eşitlikleri, buradan da $\cos\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0$ olduğu elde edilir. Son eşitlikten,

$$\frac{(2k+1)\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \; , \;\; k \in \mathbb{Z}$$

ve buradan da

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2}{(2k+1)\pi} \; , k \in \mathbb{Z}$$

olduğu görülür. Bu sonuncu eşitlikten ise A nın özdeğerlerinin,

$$\lambda_k = \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} = \frac{1}{\left(k + {}^1/_2\right)^2 \pi^2} \; , k \in \mathbb{Z}$$

şeklinde olduğu görülür, yani

$$\sigma_p(A) = \left\{ \frac{1}{\left(k + {}^1/_2\right)^2 \pi^2} : \; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

sonucuna ulaşılır.

$A: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $A \in K(L_2(0,1))$ ([13], s.223) ve $dim L_2(0,1) = \infty$ olduğundan A^{-1} sınırlı olamaz ([9], s.208). Dolayısıyla $0 \notin \sigma_p(A)$. Ayrıca A operatörü özeşlenik operatör olduğundan Teorem 1.2.91'den dolayı $\sigma_r(A) = \emptyset$ olur. O halde $0 \notin \sigma_p(A), 0 \notin \rho(A)$ ve $\sigma_r(A) = \emptyset$ ise $0 \in \sigma_c(A)$. Sonuç olarak A operatörünün spektrumu,

$$\sigma(A) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\left(k + {}^1/_2\right)^2 \pi^2} : \; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

şeklinde olduğu bulunur.

Tanım 1.2.94 (Genişletilmiş Özdeğer, [4]): H bir kompleks Hilbert uzayı ve $A \in L(H)$ olsun. Eğer,

$$TA = \lambda AT$$

olacak şekilde sıfırdan farklı $T \in L(H)$ operatörü mevcut ise $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına A operatörünün bir genişletilmiş özdeğeri ve ayrıca $T \in L(H)$ operatörüne de A operatörünün

$\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına karşılık gelen genişletilmiş özoperatörü adı verilir. A operatörünün tüm genişletilmiş özdeğerler kümesi ise $\sigma_{ext}(A)$ ile gösterilir.

Bu durumda $\lambda = 1$ sayısının her lineer sınırlı A operatörü için bir genişletilmiş özdeğeri olduğu açıktır. Burada tanımdaki T operatörü E birim operatörü seçilebilir.

Tanım 1.2.95 ([4]): H bir kompleks Hilbert uzayı ve $A \in L(H)$ olsun. $X \in L(H)$ için,

$$XA = AY \tag{1.5}$$

koşulunu sağlayan sıfırdan farklı $Y \in L(H)$ operatörü var olabilir. (1.5) denklemini sağlayan X lineer sınırlı operatörlerinin kümesi ε_A ile gösterilir. Açıktır ki ε_A kümesi bir cebirdir. Eğer $A \in L(H)$ operatörünün görüntü kümesi yoğun, yani $\overline{R(A)} = H$ ise,

$$\Phi_A : \varepsilon_A \to L(H)$$
$$X \to \Phi_A(X) = Y$$

operatörü tanımlanabilir. Kolayca görüleceği gibi Φ_A operatörü cebir homomorfizmasıdır.

Teorem 1.2.96 ([4]): H bir kompleks Hilbert uzayı, $A \in L(H)$ ve $\overline{R(A)}$ yoğun olsun. Tanım 1.2.95 de tanımlanan $\Phi_A : \varepsilon_A \to L(H)$ cebir homomorfizması ε_A üzerinde kapalıdır. Gerçekten de kapalı olduğunu göstermek için, ε_A üzerinde tanımlı operatör normuna göre yakınsak (X_n) operatör dizisi X operatörüne yakınsadığında, $\big(\Phi_A(X_n)\big)$ dizisi de bir $Y \in L(H)$ operatörüne operatör normuna göre yakınsadığında, $X \in \varepsilon_A$ ve $\Phi_A(X) = Y$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için öncelikle $\Phi_A(X_n) = Y_n$ olsun. O halde ε_A tanımından,

$$X_n A = AY_n \tag{1.6}$$

olur. Açıktır ki $X_n A \to XA$ ve $AY_n \to AY$, $n \to \infty$ görülür. Dolayısıyla (1.6) deki eşitlik $XA = AY$ olur ki, burada $\Phi_A(X) = Y$ dir.

Tanım 1.2.97 (Hilbert Uzaylarının ve Operatörlerinin Direk Toplamı, ([14], s.256)): $H_n, n \geq 1$ Hilbert uzaylarının sonsuz direkt toplamı ve $H_n,\ n \geq 1$ Hilbert uzayı üzerinde yoğun tanımlı kapalı $A_n: D(A_n) \subset H_n \to H_n$, $n \geq 1$ operatörlerin sonsuz direkt toplamı sırasıyla,

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n = \left\{ u = (u_n) : u_n \in H_n, n \geq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \| u_n \|_{H_n}^2 < \infty \right\}$$

$$A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n \,, A: D(A) \subset H \to H$$

$$D(A) = \{u = (u_n) \in H: u_n \in D(A_n), n \geq 1, Au = (A_n u_n) \in H\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $H_n = H_1$ ise $\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_1$ yerine $H_1{}^{(\infty)}$ gösterimi kullanılır. O halde H uzayı

$$(u, v)_H = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n, v_n)_{H_n}$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır[1,4].

Örneğin; $H_n := (\mathbb{C}, |\cdot|), n \geq 1$ olmak üzere

$$\mathbb{C}^{(\infty)} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{C} = \left\{(u_n): u_n \in \mathbb{C}, n \geq 1 \; ve \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty\right\} = l_2(\mathbb{C})$$

şeklindedir. Ayrıca eğer,

$$A_n: H_n \to H_n \,, A_n u_n := \alpha_n u_n, n \geq 1, \alpha_n \in \mathbb{C}, \qquad \alpha = \sup_{n \geq 1} |\alpha_n| < \infty$$

olmak üzere,

$$A: \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n \to \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n \,,$$

$$A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$$

olsun. O halde

$$v := Au \,, (v_n) = (\mathrm{A_n u_n}) = (\mathrm{\alpha_n u_n}), n \geq 1$$

olup her $u \in \mathbb{C}$ için

$$\|Au\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{\alpha_n}|^2 \, |\mathrm{u_n}|^2\right)^2 \leq \alpha \|u\|_H$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$A: \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n \to \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$$

operatörü sınırlı bir operatördür.

Tanım 1.2.98 ([2], s.4): H bir Hilbert uzayı ve keyfi $x_1, x_2 \in H$ olmak üzere, her $x \in H$ için, $x_1 \otimes x_2 : H \to H$ operatörü

$$x_1 \otimes x_2(x) = (x, x_2) x_1$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.2.99 (Taraflı Öteleme, ([2], s.13)): H bir Hilbert uzayı ve S, H üzerinde tanımlı bir operatör olsun. $H_1, H_2, H_3, \ldots$ ikişerli ortogonal olan H nın altuzayları için $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \ldots$ olmak üzere, eğer S operatörü H_n altuzayını H_{n+1} altuzayı üzerine izometrik olarak resmediyorsa S ye bir taraflı öteleme operatörü denir.

Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $dimH_n = 1$ ise taraflı ötelemeye, 'sağa öteleme operatörü' denir.

Açıktır ki tanımdaki her H_n in boyutu aynıdır ve boyutları sonsuz da olabilir.

Tanım 1.2.100 (İdempotent Operatör, ([9], s.155)): X herhangi bir vektör uzayı olmak üzere, $P^2 = P$ koşulunu sağlayan $P : X \to X$ lineer operatörüne bir idempotent operatörü denir.

Örnek 1.2.101: $H = \mathbb{C}^2$ ve $P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ise P bir idempotent operatörüdür. Gerçekten, her $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ için,

$$P^2x = P(Px) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = Px$$

olup, buradan $P^2 = P$ olduğu görülür.

Tanım 1.2.102 (Ortogonal Projeksiyon, ([7], s.407)): H bir Hilbert uzayı ve M kapalı bir altuzayı olsun. $H = M \oplus M^{\perp}$, H nın direkt toplamı olmak üzere, her $z \in H$ için,

$$z = x + y$$

olacak şekilde $x \in M$ ve $y \in M^{\perp}$ vardır. $Pz = x$ olarak tanımlı $P: H \to H$ operatörüne M üzerinde ortogonal projeksiyon denir.

Teorem 1.2.103 ([7], s.408): H bir Hilbert uzayı ve $P : H \to H$ lineer operatörünün ortogonal projeksiyon olabilmesi için gerek ve yeter şart P lineer operatörünün idempotent ve özeşlenik operatör olmasıdır.

Teorem 1.2.104 (Kompakt Normal Operatörler İçin Spektral Teorem, ([7], s.438)): H kompleks bir Hilbert uzayı, $A \in L(H)$ operatörü kompakt normal operatör ve E birim operatör olsun. $Ker(A - \lambda E)$ uzayı ile $A - \lambda E$ operatörünün çekirdeği gösterilsin. P_λ operatörü $Ker(A - \lambda E)$ üzerinde tanımlı ortogonal projeksiyon operatör olmak üzere,

$$H = Ker(A) \oplus \sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(A) \\ \lambda \neq 0}} \oplus\, Ker(A - \lambda E) = Ker(A) \oplus \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} \\ \lambda \neq 0}} \oplus\, Ker(A - \lambda E)$$

$$= \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \oplus\, Ker(A - \lambda E),$$

ya da

$$H = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \oplus\, Ker\big(A^* - \bar{\lambda} E\big),$$

ayrıca,

$$\overline{R(A)} = \overline{R(A^*)} = \sum_{\lambda \neq 0} \oplus\, Ker(A - \lambda E) = \sum_{\lambda \neq 0} \oplus\, Ker\big(A^* - \bar{\lambda} E\big)$$

ve

$$A = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \lambda\, P_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} \lambda P_\lambda \quad , \quad E = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} P_\lambda$$

eşitlikleri sağlanır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. Bir Sınıf Yarı Normal Operatörlerin Genişletilmiş Spektrumu

Bu bölümde, H ayrılabilir kompleks Hilbert uzayı ve $L(H)$ ise H üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi olmak üzere A yarı normal operatörünün genişletilmiş özdeğerlerine bağlı problemler ele alınmıştır. Ayrıca, A operatörü kompakt normal operatör ve yoğun görüntü kümesi var ise Φ_A operatörünün spektrumu incelenmiştir.

Önerme 2.1.1: $A \in L(H)$ yarı normal operatör ve $0 \in \sigma_p(A)$ ise $\sigma_{ext}(A) = \mathbb{C}$ eşitliği sağlanır.

İspat : $A: H \to H$ lineer operatörü için U: H→ H bir kısmi izometri operatör ve $|A|$, A^*A nin karekökü olmak üzere, A nın kutupsal ayrışımı $A = U|A|$ biçiminde yazılabilir. Bu yazımda $KerU = Ker|A|$ eşitliği doğrudur. Ayrıca $A: H \to H$ lineer operatörünün yarı normal operatör olması için gerek ve yeter koşul,

$$U|A| = |A|U$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [1]. Üstelik $0 \in \sigma_p(A)$ olduğundan,

$$Ax_0 = 0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in H\backslash\{0\}$ elemanı mevcuttur. Buradan her $x \in H$ için,

$$A(x_0 \otimes x_0)x = A\big((x, x_0)x_0\big) = (x, x_0)Ax_0 = 0 \tag{2.1}$$

ve diğer taraftan,

$$(x_0 \otimes x_0)Ax = (x_0 \otimes x_0)U|A|x = (U|A|x, x_0)x_0 = (x, U^*|A|x_0)x_0 = 0 \tag{2.2}$$

eşitliği doğrudur. (2.1) ve (2.2) den her $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$(x_0 \otimes x_0)A = \lambda A(x_0 \otimes x_0)$$

eşitliği doğru olacağından,

$$\sigma_{ext}(A) = \mathbb{C}$$

eşitliği elde edilir. ■

Teorem 2.1.2: $A: H \to H$ lineer operatörü bir yarı normal operatör ve $0 \notin \sigma_p(A)$ olsun. Eğer $A: H \to H$ normal operatör değilse,

$$\left\{\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \in \mathbb{C} : \lambda_i , \lambda_j \in \sigma_p(A)\right\} \cup \{0\} \subset \sigma_{ext}(A)$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: $A: H \to H$ lineer operatörü yarı normal operatör olduğundan,

$$AA^*A = A^*AA$$

eşitliği sağlanır. O halde,

$$(AA^* - A^*A)A = 0 = 0A(AA^* - A^*A)$$

ve hipotezden A lineer operatörü normal operatör olmadığından $AA^* - A^*A \neq 0$ olup buradan,

$$0 \in \sigma_{ext}(A)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan eğer $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı $\sigma_p(A)$ kümesinin elemanı ise $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$ olur [9]. Dolayısıyla her $\lambda_i , \lambda_j \in \sigma_p(A)$ için;

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

$$A^*x_i = \overline{\lambda_i} x_i$$

$$Ax_j = \lambda_j x_j$$

$$A^*x_j = \overline{\lambda_j} x_j$$

eşitlikleri sağlayan $x_i, x_j \in H \setminus \{0\}$ özvektörleri mevcuttur. Buradan,

$$(x_i \otimes x_j)Ax = (Ax, x_j)x_i = (x, A^*x_j)x_i = (x, \overline{\lambda_j}x_j)x_i = \lambda_j(x, x_j)x_i \qquad (2.3)$$

ve

$$A(x_i \otimes x_j)(x) = A((x, x_j)x_i) = (x, x_j)Ax_i = (x, x_j)\lambda_i x_i = \lambda_i(x, x_j)x_i \qquad (2.4)$$

eşitlikleri bulunur. (2.3) ve (2.4) denklemlerinden de;

$$(x_i \otimes x_j)A = \frac{\lambda_j}{\lambda_i} A(x_i \otimes x_j)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla her $\lambda_i , \lambda_j \in \sigma_p(A)$ için,

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \in \sigma_{ext}(A)$$

olduğu bulunur. ■

Sonuç 2.1.3: Eğer $A: H \to H$ lineer operatörü özeşlenik operatör ve esas spektrumu $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$ ise,

$$\sigma_{ext}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \sigma(A) \cap \sigma(\lambda A) \neq \emptyset\}$$

eşitliği sağlanır.

İspat : $A \in L(H)$ operatörü H üzerinde özeşlenik operatör olsun. $\sigma_{ess}(A)$ kümesi $\sigma(A)$ daki özuzayları sonlu boyutlu olan ayrık özdeğerlerin dışındaki noktaları içerir [36]. $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$ olduğunda, özeşlenik operatörler için spektral problemden, $\lambda_i \in \sigma_p(A)$ ve P_i ikişerli ortogonal sonlu ranklı operatörler olmak üzere A operatörü için,

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$$

eşitliği sağlanır [6]. Eğer $0 \in \sigma_p(A)$ ise Önerme 2.1.1 den dolayı eşitliğin doğruluğu açıktır. Diğer taraftan her $\lambda \in \sigma_{ext}(A)$ için,

$$TA = \lambda AT$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir $T: H \to H$ operatörü mevcuttur. Bu durumda $TP_n \neq 0$ olacak şekilde bir $P_n, n \in \mathbb{N}$ projeksiyon operatörü mevcuttur. Bu halde $\exists n \in \mathbb{N}$, $TP_n \neq 0$ için,

$$TAP_n = \lambda ATP_n$$

olup,

$$\lambda_n TP_n = \lambda ATP_n$$

yani,

$$ATP_n = \frac{\lambda_n}{\lambda} TP_n$$

olur. Buradan,

$$\frac{\lambda_n}{\lambda} \in \sigma(A)$$

olur. Bu sonuncudan

$$\sigma_{ext}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(A) \cap \sigma(\lambda A) \neq \emptyset\}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı ve Teorem 2.1.2 den dolayı,

$$\sigma_{ext}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \sigma(A) \cap \sigma(\lambda A) \neq \emptyset\}$$

eşitliği sağlanır. ■

Ayrıca, aşağıdaki sonuç [10] çalışmasında bir kompakt normal operatörün spektral gösteriminden elde edilmiştir.

Sonuç 2.1.4: Eğer $A \in L(H)$ bir kompakt normal operatör ise

$$\sigma_{ext}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \sigma_p(A) \cap \sigma_p(\lambda A) \neq \emptyset\}$$

eşitliği sağlanır [10].

Not: Eğer bir $A : H \to H$ lineer operatörü kompakt yarı normal operatör ise normaldir.

Teorem 2.1.5: Eğer $A : H \to H$ kompakt normal operatör ve $0 \in \sigma_c(A)$ ise $\Phi_A : \varepsilon_A \to L(H)$ cebir homomorfizması için,

$$\sigma(\Phi_A) = \overline{\sigma_p(\Phi_A)}$$

bağıntısı sağlanır.

İspat: Genel teoriden $\sigma(\Phi_A)$ kümesi kapalı olduğundan, $\overline{\sigma_p(\Phi_A)} \subset \sigma(\Phi_A)$ bağıntısı doğrudur. Şimdi $\sigma(\Phi_A) \subset \overline{\sigma_p(\Phi_A)}$ olduğu gösterilsin. A kompakt normal operatör ve $0 \in \sigma_c(A)$ olduğundan A operatörü, Spektral Ayrışım Teoremi'ne göre, $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ kümesi H nın ortonormal bazı ve $\lambda_i \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$A = \sum_{i \geq 1} \lambda_i x_i \otimes x_i \ , \quad \lambda_i \to 0 \ , \ i \to +\infty$$

şeklinde yazılabilir [7]. Varsayalım ki $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \overline{\sigma_p(\Phi_A)}$ ve $Y: H \to H$ keyfi lineer sınırlı bir operatör olsun. Bu Y operatörü yardımıyla;

$$X = \sum_{n=1}^{+\infty} A(\lambda_n E - \lambda A)^{-1} Y x_n \otimes x_n$$

şeklinde $X: H \to H$ operatörü tanımlansın. Keyfi $x, y \in H \ ve \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned} X(\alpha x + \beta y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} A(\lambda_n E - \lambda A)^{-1} Y x_n \otimes x_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha x + \beta y, x_n) A(\lambda_n E - \lambda A)^{-1} Y x_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \big((\alpha x, x_n) x_n + (\beta y, x_n)\big) A(\lambda_n E - \lambda A)^{-1} Y x_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\alpha(x, x_n) Y x_n + \beta(y, x_n)\big) A(\lambda_n E - \lambda A)^{-1} Y x_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\alpha(x, x_n)\big) A(\lambda_n E - \lambda A)^{-1} Y x_n \end{aligned}$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\beta(y\,,x_n)\big)A(\lambda_n E-\lambda A)^{-1}Yx_n$$

$$=\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}A(\lambda_n E-\lambda A)^{-1}\,Yx_n\otimes x_n(x)$$

$$+\beta\sum_{n=1}^{+\infty}A(\lambda_n E-\lambda A)^{-1}Y\,x_n\otimes x_n(y)$$

$$=\alpha Xx+\beta Xy$$

olduğundan operatör lineerdir. Dahası her $n, m \in \mathbb{N}$ için,

$$(\lambda_n E-\lambda A)^{-1}(\lambda_n E-\lambda A)x_m=x_m$$

olacağından

$$(\lambda_n E-\lambda A)^{-1}(\lambda_n-\lambda\lambda_m)x_m=x_m$$

ve buradan,

$$(\lambda_n E-\lambda A)^{-1}x_m=\frac{1}{\lambda_n-\lambda\lambda_m}x_m$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla

$$A(\lambda_n E-\lambda A)^{-1}=\sum_{\lambda_m\in\sigma_p(A)}\frac{\lambda_m}{\lambda_n-\lambda\lambda_m}x_m\otimes x_m$$

eşitliği elde edilir. Üstelik,

$$\|A(\lambda_n E-\lambda A)^{-1}\|=\sup\left\{\left|\frac{\lambda_m}{\lambda_n-\lambda\lambda_m}\right|\;;\lambda_m,\lambda_n\in\sigma_p(A)\right\}$$

$$=\sup\left\{\left|\frac{1}{\frac{\lambda_n}{\lambda_m}-\lambda}\right|;\;\lambda_m,\lambda_n\in\sigma_p(A)\right\}<+\infty \qquad (2.5)$$

sonucuna ulaşılır. Her $x\in H$ için,

$$\|Xx\|=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}A(\lambda_n E-\lambda A)^{-1}Yx_n\otimes x_n\,x\right\|\le\sup\left\{\left|\frac{1}{\frac{\lambda_n}{\lambda_m}-\lambda}\right|;\;\lambda_m,\lambda_n\in\sigma_p(A)\right\}\|Y\|\|x\|$$

olduğundan X sınırlı olur. Ayrıca, her $x\in H$ için

$$XAx = \sum_{n=1}^{\infty} A(\lambda_n E - \lambda A)^{-1} Y(Ax, x_n)\, x_n = A \sum_{n=1}^{\infty} (Ax, x_n)(\lambda_n E - \lambda A)^{-1} Y x_n$$
$$= A \sum_{n=1}^{\infty} (x, A^* x_n)(\lambda_n E - \lambda A)^{-1} Y x_n = A \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (x, x_n)(\lambda_n E - \lambda A)^{-1} Y x_n$$
$$= A \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\lambda_n E - \lambda A)^{-1} Y x_n \otimes x_n x = A \Phi_A(X) x$$

olacağından,

$$\Phi_A(X) \coloneqq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (\lambda_n E - \lambda A)^{-1} Y x_n \otimes x_n$$

şeklinde operatör (2.5) den sınırlı olduğu kolaylıkla görülür. Üstelik,

$$(\Phi_A - \lambda E)X = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (\lambda_n E - \lambda A)^{-1} Y x_n \otimes x_n - \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} A(\lambda_n E - \lambda A)^{-1} Y x_n \otimes x_n$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_n E - \lambda A)(\lambda_n E - \lambda A)^{-1} Y x_n \otimes x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} Y x_n \otimes x_n = Y$$

olur ki yani $(\Phi_A - \lambda E)X = Y$ eşitliği bulunur. Buradan $\Phi_A - \lambda E$ operatörünün örten ve Sonuç 2.1.4 den bire bir olup $\lambda \in \rho(\Phi_A)$ olduğu elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Sonuç 2.1.6: Eğer $A : H \to H$ kompakt normal operatör ve $0 \in \sigma_c(A)$ ise $\Phi_A : \varepsilon_A \to L(H)$ cebir homomorfizması için,

$$\sigma(\Phi_A) = \overline{\left\{ \frac{\lambda_\imath}{\lambda_\jmath} \in \mathbb{C} : \lambda_\imath, \lambda_\jmath \in \sigma_p(A) \right\}}$$

bağıntısı sağlanır.

Örnek 2.1.7: H bir Hilbert uzayı ve $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$, H nın bir ortonormal bazı olsun. O halde, $x_n \in \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ olmak üzere,

$$A: H \to H, \qquad A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x_n \otimes x_n$$

olarak tanımlanan lineer operatörü ele alınsın. Öncelikle A operatörü bir özeşlenik operatördür. Gerçekten $x, y \in H$ için, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ ve $y = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n$, $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$ olsun. O halde,

$$(Ax,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x,x_n)x_n\,, y\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\alpha_n x_n, y\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\alpha_n(x_n,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\alpha_n\overline{\beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x,x_n)\overline{(y,x_n)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x,(x_n,y)x_n) = \left(x, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x_n,y)x_n\right) = (x,Ay)$$
$$= (x, A^*y)$$

olacağından $A = A^*$ olur ki A özeşleniktir. A operatörünün kompakt operatör olduğu A nın kanonik gösterimin bir sonucudur ([34], s.243). A kompakt operatörünün noktasal spektrumu,

$$\sigma_p(A) = \left\{\frac{(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$$

olur. Buradan, Sonuç 2.1.4 ten dolayı da,

$$\sigma_{ext}(A) = \left\{\frac{(-1)^{n+m}n}{m}; n,m \in \mathbb{N}\right\}$$

elde edilir. Bu eşitlik ve Sonuç 2.1.6 dan,

$$\sigma(\Phi_A) = \overline{\sigma_p(\Phi_A)} = \overline{\sigma_{ext}(A)} = \overline{\left\{\frac{(-1)^{n+m}n}{m} : n,m \in \mathbb{N}\right\}} = \mathbb{R}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 2.1.8: A: $L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Af)(x) = (1-x)\int_0^x yf(y)dy + x\int_x^1 (1-y)f(y)dy$ lineer operatörü tanımlansın. A operatörü özeşlenik operatördür. Gerçekten her $f,g \in L_2[0,1]$ için,

$$(Af,g) = \int_0^1 \left((1-x)\int_0^x yf(y)dy + x\int_x^1 (1-y)f(y)dy\right)\overline{g(x)}dx$$
$$= \int_0^1 \left((1-x)\overline{g(x)}\int_0^x yf(y)dy + x\overline{g(x)}\int_x^1 (1-y)f(y)dy\right)dx$$
$$= \int_0^1 \left((1-x)\overline{g(x)}\int_0^x yf(y)dy\right)dx + \int_0^1 \left(x\overline{g(x)}\int_x^1 (1-y)f(y)dy\right)dx$$

$$= \left(-\int_x^1 (1-y)\overline{g(y)}dy \int_0^x yf(y)dy \right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}$$

$$+ \int_0^1 \left(\int_x^1 (1-y)\overline{g(y)}dy \right) xf(x)dx$$

$$+ \left(\int_0^x y\overline{g(y)}dy \int_x^1 (1-y)f(y)dy \right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}$$

$$+ \int_0^1 \left(\int_0^x y\overline{g(y)}dy\,(1-x)f(x) \right) dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\overline{x\left(\int_x^1 (1-y)g(y)dy \right)} dx + \int_0^1 f(x)\overline{(1-x)\left(\int_0^x yg(y)dy \right)} dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\overline{\left(x\left(\int_x^1 (1-y)g(y)dy \right) + (1-x)\left(\int_0^x yg(y)dy \right) \right)} dx$$

$$= (f, A^*g)$$

olduğundan $A = A^*$ olur ki A özeşlenik operatördür. Ayrıca,

$$k(x,y) = \begin{cases} (1-x)y, & 0 \le y \le x \le 1 \\ x(1-y), & 0 \le x \le y \le 1 \end{cases}$$

olmak üzere, $k\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve

$$Af(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy$$

olduğundan A kompakt operatördür [2]. Şimdi noktasal spektrum kümesi, yani $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$Af = \lambda f \ , \qquad f \in L_2[0,1]$$

denkleminin çözüm kümesi bulunsun. $x \in [0,1]$ için,

$$(1-x)\int_0^x yf(y)dy + x\int_x^1 (1-y)f(y)dy = \lambda f(x)$$

eşitliğinin her iki tarafının da türevi alınırsa,

$$-\int_0^x yf(y)dy + (1-x)xf(x) + \int_x^1 (1-y)f(y)dx - x(1-x)dx = \lambda f'(x)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik düzenlenip tekrar türev alınırsa,

$$-xf(x) - (1-x)f(x) = \lambda f''(x)$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan,

$$\begin{cases} \lambda f'' + f = 0 \\ f(1) = f(0) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemine ulaşılır. Burada $\lambda = 0$ için $f(x) = 0$ olacağı aşikardır. Varsayalım ki $\lambda \neq 0$ olsun. O halde bu sınır değer probleminin çözümü de $\lambda_n = \frac{1}{n^2\pi^2}$, $n \in \mathbb{N}$ özdeğerleri için mümkündür. Sonuç olarak,

$$\sigma_p(A) = \left\{\frac{1}{n^2\pi^2} \ ; n \in \mathbb{N}\right\}$$

elde edilir. Sonuç 2.1.4 ten dolayı da,

$$\sigma_{ext}(A) = \left\{\frac{n^2}{m^2}; n, m \ \in \mathbb{N}\right\}$$

olur. Sonuç 2.1.6 dan dolayı da

$$\sigma(\Phi_A) = \overline{\sigma_p(\Phi_A)} = \overline{\sigma_{ext}(A)} = \overline{\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2 \ ; n, m \ \in \mathbb{N}\right\}} = [0, +\infty)$$

olduğu elde edilir.

Sonuç 2.1.9: Eğer $A : H \to H$ kompakt lineer operatör ve $0 \in \sigma_c(A)$ ise $0 \in \sigma(\Phi_A)$ olur.

İspat: $A: H \to H$ operatörünün görüntü kümesi yoğun olduğundan $0 \notin \sigma_p(\Phi_A)$ dır. Gerçekten $0 \in \sigma_p(\Phi_A)$ olsa idi, $TA = 0$ olan bir $T \neq 0$ lineer operatörü mevcut olurdu. Oysa $\overline{R(A)} = H$ olduğundan $T = 0$ olur. Bu ise $0 \notin \sigma_p(\Phi_A)$ olduğunu verir. Ayrıca $A: H \to H$ lineer operatörü kompakt olduğundan (x_n) ve (y_n), H da ortonormal dizi ve $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ sıfıra yakınsayan pozitif reel sayı dizisi olmak üzere A operatörünün,

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n \otimes y_n$$

şeklinde kanonik gösterimi mevcuttur [38]. Ek olarak, $\lambda_n \to 0$, $n \to \infty$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < \lambda_{j(n)} \leq \frac{1}{n^2}$ ve $0 < \lambda_{i(n)} \leq \frac{1}{n}$ olacak şekilde $(\lambda_{j(n)})$, $(\lambda_{i(n)}) \subset (\lambda_n)$ altdizileri bulunabilir. Buradan,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda_{j(n)}}{\lambda_{i(n)}} = 0$$

olur. Bu halde, H üzerinde $Y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_{j(n)} \otimes y_{i(n)}$ şeklinde tanımlanan operatör lineer sınırlı operatördür. Gerçekten her $x \in H$ için,

$$\|Yx\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (x, y_{i(n)}) y_{j(n)} \right\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| (x, y_{i(n)}) \right|^2 \right)^{1/2} \leq \|x\|$$

olduğundan Y operatörü sınırlıdır. Eğer Φ_A örten ise Y operatörü için, $\Phi_A(X) = Y$ olacak şekilde bir $X: H \to H,\ X \in \varepsilon_A$operatörü bulanabilir. Fakat $XA = AY$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$XAy_{j(n)} = AYy_{j(n)}$$

buradan,

$$\lambda_{j(n)} X x_{j(n)} = Ay_{i(n)} = \lambda_{i(n)} x_{i(n)}$$

yani, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$Xx_{j(n)} = \frac{\lambda_{i(n)}}{\lambda_{j(n)}} x_{i(n)}$$

olacağından $X,\ H$ üzerinde sınırlı olamaz, dolayısıyla Φ_A örten değildir. Buradan $0 \in \sigma(\Phi_A)$ olduğu elde edilir. ■

Sonuç 2.1.10: Eğer $A: H \to H$ lineer operatörü için $KerA = \{0\}$ ve $A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$ olacak şekilde P_i ikişerli ortogonal sonlu ranklı izdüşüm operatörleri mevcut ise,

$$\sigma(\Phi_A) = \overline{\sigma_p(\Phi_A)}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.1.11: $A : H \to H$ yarı normal ama normal operatör olmasın, o halde $|\lambda| \leq 1$ koşulunu sağlayan tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ sayıları $\sigma_{ext}(A)$ kümesinin elemanlarıdır, yani $\overline{D}(0,1) \subset \sigma_{ext}(A)$.

İspat : $A: H \to H$ yarı normal ama normal operatör olmasın, o halde A_n normal kısım ve A_p, $H_0\ ve\ H_0^{\perp}$ üzerinde saf yarı normal kısım olmak üzere $A = A_n \oplus A_p$ olarak yazabiliriz. Ayrıca, $A = U|A|$ kutupsal ayrışımı için $U(H_i) = H_{i+1}$ ve $|A|(H_i) \subset H_i$, $i \in N$ olacak şekilde $H_0^{\perp} = H_1 \oplus H_2 \oplus$ ... ayrışımı mevcuttur [2]. Üstelik, P_i operatörü H_i üzerinde projeksiyon ve $\lambda \in \overline{D}(0,1)$ olmak üzere $T_\lambda \coloneqq \sum_{i \in N} \lambda^i P_i$ operatörü için,

$$\|T_\lambda x\| \leq \|x\|$$

$$T_\lambda A = \lambda A T_\lambda$$

ve

$$P_1 A = 0$$

eşitlikleri doğrudur. Buradan $\overline{D}(0,1) \subset \sigma_{ext}(A)$ olduğu elde edilir.■

Örnek 2.1.12: $(a_n) \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ve her $n \in N$ için $|a_{n+1}| = |a_n|$ olmak üzere,

$$A : l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N})$$

$$A(x_1, x_2, \dots) = (0, a_1 x_1, a_2 x_2, \dots)$$

olarak tanımlanan bir ağırlıklı sağa öteleme operatörü bir yarı normal fakat normal operatör değildir. Bu operatörün genişletilmiş özdeğerleri sadece $\mathbb{C}$ nin kapalı birim çemberi içindedir. Gerçekten de,

$$A : l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N})$$

$$A(x_1, x_2, \dots) = (0,\ a_1 x_1, a_2 x_2, \dots)$$

olarak tanımlanan A ağırlıklı sağa öteleme operatörünün bir saf yarı normal operatör olduğu gösterilsin. Açıkça görüleceği gibi A operatörünün eşleniği,

$$A^*(x_1, x_2, \dots) = (\overline{a_1} x_2, \overline{a_2} x_3, \dots)$$

olur. Şimdi her $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in H$ için,

$$AA^* x = A(\overline{a_1} x_2, \overline{a_2} x_3, \dots) = (0,\ |a_1|^2 x_2, |a_2|^2 x_3, \dots)$$

ve

$$A^* A x = A^*(0, a_1 x_1, a_2 x_2, \dots) = (|a_1|^2 x_1, |a_2|^2 x_2, \dots)$$

olduğundan $AA^* \neq A^* A$ olur, yani normal değildir. Fakat, her $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in H$ için

$$AA^* A x = A(|a_1|^2 x_1, |a_2|^2 x_2, \dots) = (0, \alpha_1 |\alpha_1|^2 x_1, \alpha_2\ |a_2|^2 x_2, \dots)$$

ve

$$A^* A A x = A^* A(0, a_1 x_1, a_2 x_2, \dots) = A^*(0, 0, a_1 a_2 x_1, a_2 a_3 x_2, \dots)$$
$$= (0,\ a_1\ |a_2|^2 x_1, a_2 |a_3|^2 x_2, \dots)$$

olacağından $A^* A A = A A^* A$ olup A ağırlıklı sağa öteleme operatörü yarı normaldir. Şimdi bu A operatörünün genişletilmiş özdeğerleri sadece $\mathbb{C}$ nin kapalı birim çemberi olduğu gösterilsin. Varsayalım ki, $\lambda \in \sigma_{ext}(A)$ve $|\lambda| > 1$ olsun. O halde,

$$TA = \lambda AT$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir T operatörü vardır. Açıktır ki $l_2(\mathbb{N})$ Hilbert uzayı doğal bazın her elemanı için,

$$Te_{n+1} = \frac{\lambda^n}{\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1} A^n T e_1 \quad , \qquad n \in \mathbb{N}$$

eşitliği geçerlidir. T sıfırdan farklı operatör olduğundan $Te_1 \in l_2(\mathbb{N})$ sıfırdan farklıdır. Ayrıca,

$$\|Te_{n+1}\|_2 = |\frac{\lambda}{\alpha_1}|^n \|A^n Te_1\|_2 = |\lambda^n| \|Te_1\|_2 \quad , \ n \in \mathbb{N}$$

eşitliğinden dolayı T sınırsızdır, dolayısıyla ağırlıklı sağa öteleme operatörünün genişletilmiş özdeğerler kümesinde $|\lambda| > 1$ koşulunu sağlayan hiçbir eleman yoktur.

Tanım 2.1.13 [38]: A operatörü keyfi H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı sınırlı operatör olmak üzere $H^{(\infty)} = H \oplus H \oplus$ ... üzerinde $S \otimes A$ operatörü,

$$S \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & & \\ & & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \cdots & \end{bmatrix}$$

matrisi ile tanımlanır.

Teorem 2.1.14 [38]: H Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan keyfi bir T operatörünü saf yarı normal operatör olması için gerek ve yeter şart S bir taraflı öteleme ve A, $KerA = \{0\}$ olan bir pozitif operatör olmak üzere T nin Tanım 2.1.13 de tanımlanan $S \otimes A$ operatörü ile üniter denk olmasıdır.

Önerme 2.1.15: A operatörü keyfi H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı sınırlı operatör ve S operatörü $H^{(\infty)} = H \oplus H \oplus$ ... üzerinde tanımlı bir taraflı öteleme operatörü olsun. Eğer,

$$T = [T_{ij}]_{i,j=1}^{\infty} \ , \ T_{ij}: H \to H, \qquad T \in L\big(H^{(\infty)}\big)$$

$$T(S \otimes A) = \lambda(S \otimes A)T$$

ise,

$i)$ $T_{ij} = 0$, her $j > i$ için ve

$ii)$ $T_{ij}A = \lambda A T_{i-1j-1}$, her $i \geq j$ için

eşitlikleri sağlanır. Tersine, eğer $T = [T_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ operatörü yukarıdaki iki durumu sağlıyor ise $S \otimes A$ operatörünün bir genişletilmiş özoperatörüdür.

İspat: Varsayalım ki $T = [T_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$, $T_{ij}: H \to H$ için $T(S \otimes A) = \lambda(S \otimes A)T$ eşitliği sağlansın. Burada ki $S \otimes A$ operatörü Tanım 2.1.13 deki gibi tanımlanmıştır. O halde,

$$T(S\otimes A)=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & & \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \cdots & \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \cdots & \\ & \vdots & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ A & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & A & 0 & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \cdots & \\ & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} T_{12}A & T_{13}A & T_{14}A & & \\ T_{22}A & T_{23}A & T_{24}A & \cdots & \\ T_{32}A & T_{33}A & T_{34}A & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \cdots & \\ & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

$$\lambda(S\otimes A)T=\lambda\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ A & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & A & 0 & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \cdots & \\ & \vdots & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & & \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \cdots & \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \cdots & \\ & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

$$=\lambda\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ AT_{11} & AT_{12} & AT_{13} & \cdots & \\ AT_{21} & AT_{22} & AT_{23} & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \cdots & \\ & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$i)\ T_{ij}=0\,,$ her $j>i$ için ve

$ii)\ T_{ij}A=\lambda AT_{i-1j-1}\,,$ her $i\geq j$ için

olmalıdır. Tersi de yukarıda ki eşitliklerin sonucudur. ■

Önerme 2.1.16: H_1, H_2 Hilbert uzayları olmak üzere $A: H_1 \to H_1$ve $B: H_2 \to H_2$ operatörleri sınırlı operatörler ve üniter denk olsun. O halde $\sigma_{ext}(A)=\sigma_{ext}(B)$ eşitliği sağlanır.

İspat : $A: H_1 \to H_1$ve $B: H_2 \to H_2$ operatörleri sınırlı operatörler ve üniter denk olsun. O halde,

$$U: H_1 \to H_2$$
$$UAU^{-1}=B$$
$$A=U^{-1}BU$$

olacak şekilde bir izomorfizm vardır. Şimdi $\lambda \in \sigma_{ext}(A)$ alınsın. O halde,

$$T_1 A = \lambda A T_1$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $T_1 : H_1 \to H_1$ operatörü vardır. Buradan devam edilirse,

$$T_1 U^{-1} B U = \lambda U^{-1} B U T_1$$

olur ve buradan da,

$$(U T_1 U^{-1}) B = \lambda B (U T_1 U^{-1})$$

olacağından, $\lambda \in \sigma_{ext}(B)$ olur (2.7).

Diğer taraftan $\lambda \in \sigma_{ext}(B)$ için benzer şekilde,

$$T_2 B = \lambda B T_2$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir $T_2 : H_2 \to H_2$ operatörü vardır. Dolayısıyla,

$$T_2 U A U^{-1} = \lambda U A U^{-1} T_2$$

ve buradan da,

$$U^{-1} T_2 U A = \lambda A U^{-1} T_2 U$$

olacağından $\lambda \in \sigma_{ext}(A)$ olur (2.8). Dolayısıyla, (2.7) ve (2.8) sonuçlarından

$$\sigma_{ext}(A) = \sigma_{ext}(B)$$

eşitliği elde edilir. ■

Teorem 2.1.17: Eğer $A : H \to H$ operatörü saf yarı normal operatör ise

$$\sigma_{ext}(|A|) \subset \sigma_{ext}(A)$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: A saf yarı normal operatörünün kutupsal ayrışımı $A = U|A|$ olsun. A saf yarı normal olduğundan $U : H \to H$ kısmi izometridir. Ayrıca, von Neumann-Wold Ayrışım Teoremi'nden,

$$H = KerU^* \oplus U(KerU^*) \oplus U^2(KerU^*) \oplus \dots$$

eşitliği yazılabilir [2]. Her $n \geq 0$ için $U^n(KerU^*)$ altuzayları $n \in \mathbb{N}$ için $|A|$ operatörü altında invaryanttır [2,5]. $|A|$ operatörünün her genişletilmiş özdeğeri için $KerU^*$ üzerinde tanımlı sıfır operatöründen farklı bir özoperatörler vardır ve $KerU^*$ bu operatörler altında invaryanttır. Gerçekten bir λ, $|A|$ operatörünün keyfi bir genişletilmiş özdeğeri olarak alınsın. O halde,

$$T|A| = \lambda |A| T$$

koşulunu sağlayan sıfır olmayan bir T operatörü vardır. Bu durumda T sıfırdan farklı bir operatör ve $H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} U^n(KerU^*)$ olduğundan P_i , $i \geq 0$ operatörleri $U^i(KerU^*)$ altuzayları için birer projeksiyon operatörleri olmak üzere,

$$P_n T x_m \neq 0$$

olacak şekilde $x_m \in U^m(KerU^*)$ ve P_n projeksiyon operatörü mevcuttur. Buradan $P_n T P_m$ operatörünün sıfırdan farklı olduğu elde edilir. Üstelik,

$$X = (U^*)^n P_n T P_m U^m$$

şeklinde tanımlanan operatör $KerU^*$ üzerinde sıfırdan farklıdır. Üstelik $KerU^*$, X altında invaryanttır ve $(KerU^*)^{\perp} \subset KerX$ olur. Dahası $|A|$ ile U komütatif olduğundan

$$X: KerU^* \rightarrow KerU^*$$

$$X|A| = \lambda |A| X$$

eşitliği sağlanır. [5] deki sonuca göre, A operatörü,

$$B : (KerU^*)^{(\infty)} \rightarrow (KerU^*)^{(\infty)}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ |A| & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & |A| & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & |A| & \vdots \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan B operatörü ile üniter denktir. Önerme 2.1.15 den dolayı,

$$W: (KerU^*)^{(\infty)} \rightarrow (KerU^*)^{(\infty)}$$

$$W := \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & X & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & X & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan operatör sıfırdan farklı olur. Ayrıca $WB = \lambda BW$ eşitliği elde edilir. Bu sonuncudan $\sigma_{ext}(|A|) \subset \sigma_{ext}(A)$ olduğu elde edilir. ■

Sonuç 2.1.18: Eğer $A: H \rightarrow H$ saf yarı normal operatör ise

$$\{\lambda\mu : \lambda \in \sigma_{ext}(|A|) , |\mu| \leq 1\} \subset \sigma_{ext}(A)$$

bağıntısı sağlanır.

İspat: Teorem 2.1.11 ve Teorem 2.1.17 nın direk sonucudur. ■

Sonuç 2.1.19: A operatörü sağa öteleme operatör olmak üzere,

$$\sigma_{ext}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1 \}$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 2.1.20: $A: L^2(0,+\infty) \to L^2(0,+\infty)$ operatörü,

$$Af(x) = \begin{cases} f(x-1) & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. A nın bir sağa öteleme operatör ve A^*, A operatörünün eşlenik operatörü olmak üzere,

$$A^* f(x) = f(x+1)$$

olduğu kolayca görülür. Buradan,

$$AA^* f(x) = Af(x+1) = f(x)$$

ve

$$A^*Af(x) = A^*f(x-1) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

olduğundan, $A^*A \neq AA^*$ olur ki A operatörü normal değildir. Fakat,

$$AA^*Af(x) = \begin{cases} f(x-1) , & x \geq 1 \\ 0 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

ve

$$A^*AAf(x) = A^*Af(x-1) = \begin{cases} f(x-1) , & x \geq 1 \\ 0 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

olacağından A operatörü yarı normal operatördür. Dolayısıyla Sonuç 2.1.18 den,

$$\sigma_{ext}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \ , |\lambda| \leq 1\}$$

olur.

Örnek 2.1.21 (G. E. Keough, [2], s.46): H bir Hilbert uzayı ve A, H üzerinde tanımlı pozitif tersi mevcut bir operatör olsun.

$$H_A{}^2 := \left\{F: D(0, \|A^{-1}\|^{-1}) \to H \,;\, F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n \,, \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n f_n\|^2 < \infty, f_n \in H\right\}$$

kümesi tanımlansın. Ayrıca, $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n g_n \in H_A{}^2$ olmak üzere,

$$(F,G) = \sum_{n=0}^{\infty} (A^n f_n, A^n g_n)$$

şeklinde tanımlanan iç çarpıma göre $\left(H_A{}^2, (\cdot\,,\cdot)\right)$ uzayı bir Hilbert uzayıdır. O halde,

$$M: H_A{}^2 \to H_A{}^2$$
$$(MF)(z) = zF(z)$$

olarak tanımlanan M operatörü yarı normaldir ve M^*, M nin eşlenik operatörü olmak üzere M^*M operatörü terslenebilirdir. Gerçekten, $M: {H_A}^2 \to {H_A}^2$, $(MF)(z) = zF(z)$ olarak tanımlı M operatörünün yarı normal fakat normal olmadığı gösterilsin. O zaman,

$$F, G \in {H_A}^2, F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n \ , G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n g_n \ \ ve\ f_n, g_n \in H$$

olmak üzere,

$$(MF, G) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} f_n \, , G \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n f_{n-1} \, , G \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (A^n f_{n-1}, A^n g_n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (A^n f_n, A^n A^2 g_{n+1}) = (F, M^* G)$$

olduğundan, M^* eşlenik operatörü,

$$(M^* F)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n A^2 f_{n+1} = A^2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_{n+1}$$

olur. Şimdi M^*M ile MM^* operatörleri bulunsun.

$$M(M^* F)(z) = M \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n A^2 f_{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n A^2 f_n$$

ve

$$M^*(MF)(z) = M^* \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} f_n \right) = M^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n f_{n-1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n A^2 f_n = A^2 F(z)$$

olduğundan $M^*M \neq MM^*$ olur. Yani M normal operatör değildir. Devam edilirse,

$$(MM^*M)F(z) = M(M^*MF)(z) = M\big(A^2 F(z)\big) = A^2 z F(z)$$

ve

$$(M^*MM)F(z) = (M^*M)\big(zF(z)\big) = A^2 z F(z)$$

olduğundan, $MM^*M = M^*MM$ olur ki bu M nin yarı normal olduğunu gösterir.

$$(M^*M)^{1/2} = AE$$

olup, Sonuç 2.1.18 den,

$$\{\lambda\mu : \ \lambda \in \sigma_{ext}(A) \, , |\mu| \leq 1\} \subset \sigma_{ext}(M)$$

bağıntısı sağlanır.

Teorem 2.1.22: $A: H \to H$ saf yarı normal operatör ve $A = U|A|$ kutupsal gösterimi ve $dimKerU^* < \infty$ olsun. O halde,

$$\sigma_{ext}(A) = \sigma_{ext}(U) \,.\, \sigma_{ext}(|A|)$$

eşitliği doğrudur.

İspat: $A: H \to H$ saf yarı normal operatör ve $A = U|A|$ kutupsal gösterimi olsun. $\sigma_{ext}(U) \,.\, \sigma_{ext}(|A|) \subset \sigma_{ext}(A)$ olduğu Sonuç 2.1.18 den açıktır. Şimdi varsayalım ki $\lambda \in \sigma_{ext}(A)$ fakat $\lambda \notin \sigma_{ext}(U) \,.\, \sigma_{ext}(|A|)$ olsun. O halde, $\lambda \notin \sigma_{ext}(|A|)$ ve $|\lambda| > 1$ olur. $T = [T_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$, $T_{ij}: H \to H$ için $T: (KerU^*)^{(\infty)} \to (KerU^*)^{(\infty)}$, $T \neq 0$ operatörü öyle ki

$$T(S \otimes |A|) = \lambda(S \otimes |A|)T$$

olur. $T \neq 0$ olduğundan, T_{ij} , $i, j \in \mathbb{N}$ bileşen operatörü sıfırdan farklıdır. Önerme 2.1.15 ve $dimKerU^* < \infty$ olduğundan $|A|^{-1}$ mevcut olup,

$$T_{i1} = \lambda^{-n}|A|^{-n}T_{i+n,n+1}\,|A|^n$$

eşitliği doğrudur. Burada $T \neq 0$ olduğundan $T_{i1} \neq 0$ alınabilir. Eğer $\mu \in \sigma(T_{i1})$ ise

$$T_{i1} - \mu E = \lambda^{-n}|A|^{-n}T_{i+n,n+1}\,|A|^n - \lambda^{-n}\lambda^n\mu E = \lambda^{-n}|A|^{-n}(T_{i+n,n+1} - \lambda^n\mu)|A|^n$$

eşitliğinde her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sigma\big(T_{i+n,n+1}\big) = \lambda^n\sigma(T_{i1})$$

olur. Burada, $T_{i1} : H \to H$ operatörü sıfırdan farklı olduğundan $\sigma(T_{i1}) \neq \{0\}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $T_{i1} \neq T_{i+n,n+1}$. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\big\|T_{i+n,n+1}\big\| = \lim_{n\to\infty}|\lambda|^n\|T_{i1}\| = +\infty$$

olur fakat T sınırlı bir operatör olup her $x \in KerU^*$, $\|x\| \leq 1$ için,

$$\widetilde{x_n} = \big(x_{1,n}, x_{2,n}, x_{3,n}, \ldots\big) \in (KerU^*)^{(\infty)}$$

$$x_{i,j} = \begin{cases} 0 \;, & i \neq j \\ x \;, & i = j \end{cases}$$

olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\|T\widetilde{x_n}\| = \sum_{k=0}^{\infty}\big\|T_{n+k,n}x\big\| < \infty$$

olup her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\big\|T_{i+n,n+1}x\big\| \leq \|T\widetilde{x_{n+1}}\| < \infty$$

yani her $n \in \mathbb{N}$ için, $\big\|T_{i+n,n+1}\big\| < \infty$ olduğu bulunur. Bu ise $\lim_{n\to\infty}\big\|T_{i+n,n+1}\big\| = \infty$ olmasıyla çelişir. Sonuç olarak,

$$\sigma_{ext}(A) = \sigma_{ext}(U) \,.\, \sigma_{ext}(|A|)$$

eşitliği elde edilir. ■

Örnek 2.1.23: $S \otimes A: (\mathbb{C}^2)^{(\infty)} \rightarrow (\mathbb{C}^2)^{(\infty)}$ ve $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere A^{-1} mevcut olup Teorem 2.1.22 den,

$$\sigma_{ext}(S \otimes A) = \sigma_{ext}(S)\,.\,\sigma_{ext}(A)$$

olur. Burada $\sigma_{ext}(A) = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ olduğundan,

$$\sigma_{ext}(S \otimes A) = \overline{D}(0,2)$$

olduğu elde edilir.

Sonuç 2.1.24: $A: H \rightarrow H$ sınırlı terslenebilir bir operatör ve $T: H^{(\infty)} \rightarrow H^{(\infty)}$, $T = \left[T_{ij}\right]_{i,j=1}^{\infty}$, $T_{ij}: H \rightarrow H$ operatörü için,

$$T(S \otimes A) = \lambda(S \otimes A)T$$

olsun. Eğer $\lambda \in \sigma_{ext}(S \otimes A) / \sigma_{ext}(S).\sigma_{ext}(A)$ ise her $i, j \in \mathbb{N}$ için,

$$\sigma(T_{ij}) = \{0\}$$

eşitliği doğrudur.

3. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayında tanımlı yarı normal operatörlerin,

1. Öz değerleriyle, genişletilmiş spektrumun arasında bağıntılar elde edilmiştir.
2. Kompakt olması durumunda operatör yardımı ile tanımlanan homomorfizmanın spektrum kümesi belirlenmiştir.
3. Kutupsal ayrışım operatörlerinin genişletilmiş spektrumlarıyla ilişkisi incelenmiştir.

Alınan bu sonuçlar örneklerle desteklenmiş olup bu bulgular makale olarak Turkish Journal of Mathematics dergisinde kabul edilmiştir [40].

4.ÖNERİLER

1. Teorem 2.1.5. kapsamındaki cebir homomorfizmanın tanım kümesinin sonlu boyutlu operatörlerin kümesine kısıtlandığında iz normuna göre spektrumu araştırma konusu olabilir.
2. Teorem 2.1.5. kapsamında cebir homomorfizmanın tanım kümesinin kompakt operatörlerin kümesine kısıtlanışı alınarak iz normuna göre spektrum kümesi araştırma konusu olabilir.
3. Bir operatörün kutupsal ayrışımındaki operatörlerin genişletilmiş spektrumlarının çarpım kümesi ile operatörün genişletilmiş spektrum kümesinin ilişkilendirilebildiği operatör sınıfları araştırma konusu olabilir.

5.KAYNAKLAR

1. Halmos, P.R., A Hilbert Space Problem Book, Springer Verlag, New York Inc., 1974.

2. Conway, J.B., The Theory of Subnormal Operators, Mathematical Surveys and Monographs, USA, 1991.

3. Cho, M., Dungal, B.P., Harte, R. ve Ota, S., Operator Equation $AB = \lambda BA$, International Mathematical Forum, 5, 53 (2010) 2629-2637.

4. Biswas, A., Lambert, A. ve Petrovic, S., Extended Eigenvalues and Volterra Operators, Glasg. Math. J., 44, 3 (2002) 521-534.

5. Brown, A., On A Class of Operators, Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953) 723-728.

6. Kato, T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, Heidelberg, 1980.

7. Bachman, G. ve Narici, L., Functional Analysis, Academic Press Inc. London, 1966.

8. Cassier, G. ve Alkanjo, H., Extended Spectrum, Extended Eigenspaces and Normal Operators, J. Math. Anal. Appl., 418 (2014) 305-316.

9. Rynne, B.P. ve Youngson, M. A., Lineer Functional Analysis, Springer, 2008.

10. Ismailov, Z. ve Çevik, E.O., Extended Eigenvalues of Direct Sum of Operators, J. Ana. Num. Theor., 3 (2015) 127-131.

11. Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applicatons, John Wiley&Sons, 1978.

12. Gohberg, I.C., Goldberg, S. ve Kaashoek, M.A., Basic Classes of Linear Operators, Birkhauser, Berlin, 2003.

13. Hirsh, F. ve Lacombe, G., Elements of Functional Analysis, Verlag, Newyork, 1999.

14. Dunford, N. ve Schwartz, J.T., Linear Operators, 1; 2, Interscience, New York, 1958; 1963.

15. von Neumann, J., Zur Algebra der Functional Operationen und Theorie der Normalen Operatoren, Math. Ann.,102 (1929-1930) 370-427.

16. Hilbert, D., Grundzüge Einer Allgemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen, I-VI. Nachr. Akad. Wiss. Gottingen. Math.-Phys. KL, I (1904) 49-91, II (1905)213-259, III (1905) 307-338, IV (1906) 157-227.

17. Riesz, F., Sur Certains Systemes Singuliers D'equations İntegrales, Ann. Ecole Norm.

Sup., 3, 28 (1911) 33-62.

18. Riesz, F., Über Lineare Funktionalgleichungen, Acta. Math., 41 (1918) 71-98.

19. Riesz, F., Les Systemes D'equations Lineaires A Une Infinite D'inconnues, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

20. Riesz, F., Über Die Linearen Transformationen Des Komplexen Hilbertschen Raumes, Acta Sei. Math. Szeged, 5 (1930-1932) 23-54.

21. Riesz, F., Über Quadratische Formen von Unendlich Vielen Veranderlichen, Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math.-Phys. Kl, (1910) 190-195.

22. Sz.-Nagy, B., Spectraldarstellung Linearer Transtormationen Des Hilbertschen Raumes, Ergebnisse der Math., J. Springer, Berlin, 5 (1942), Reprinted Edvards Bros., Ann Arbor, Mich., 1947.

23. Akhiezer, N.I. ve Glazman, I.M., The Theory of Linear Operators on Hilbert Space, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moskova-Leningrad, 1950.

24. Halmos, P.R., Introduction to Hilbert Space and The Theory of Spectral Multiplicity, Chelsea, New York, 1951.

25. Loomis, L.H., An introduction to Abstract Harmonic Analysis, D. Van Nostrand Co., New York, 1953.

26. Lengyel, B.A. ve Stone, M.H., Elementary Proof of the Spectral Theorem, Ann. of Math., 2, 37 (1936) 853-864.

27. Wintner, A., zur Theorie der Beschrankten Bilinearformen. Math. Z., 30 (1929) 228-289.

28. Yosida, K. ve Nakayama, T., On the Semi-Ordered Ring and Its Application to The Spectral Theorem, I, II, Proc. Imp. Acad. Tokyo, I 18 (1942), 555-560, II. 19 (1943) 144-147.

29. Lomonosov, V., Invariant Subspace of The Family Operators That Commute with Completely Continous Operator, Funkcionalnyi Analizi Ego Prilozenijo, 3, 7, 55-56, 1973.

30. Karaev, M.T., On Extended Eigenvalues and Extended Eigenoperators of Some Operator Classes, Proc. Amer Math, 134 (2006) 2383-2392.

31. Biswas A. ve Petrovic, S. On Extended Eigenvalues of Operators, Integr Equat Oper Th, 57 (2007) 593-598.

32. Shkarin, S., Compact Operators without Extended Eigenvalues, J. Math. Anal. App., 332 (2007) 455-462.

33. Soykan, Y., Fonksiyonel Analiz Çözümlü Alıştırmaları, 978-605-133-201-7, Nobel Yayınevi, Genişletilmiş ve Yeniden Düzenlenmiş 2. Basım, Şubat 2012.

34. Birman, M.S. ve Solomjak, M.Z., Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space, D. Reidel Publishing Company, 1986.

35. Conway, J.B. ve Wu, P.Y., The Structure of Quasinormal Operators and The Double Commutant Property, Transactions of The American Mathematical Society, Volume 270, Number 2, April 1982

36. Coburn, L.A., Weyl's Theorem for Nonnormal Operators. Michigan Math J. 13 (1966) 285-288.

37. Rudin, W., Functional Analysis, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1973.

38. Conway, J.B., A Course in Functional Analysis, Springer Verlag, New York Inc., 1985.

39. Cassier, G. ve Alkanjo H. Extended Spectrum and Extended Eigenspaces of Quasi-Normal Operators. Banach J. Math Anal, 11 (2017) 266-281.

40. Sertbaş, M. ve Yılmaz, F., On Extended Spectrum of Some Quasinormal Operators, Turkish Journal of Mathematics, DOI: 10.3906/mat-1610-99.

ÖZGEÇMİŞ

Fatih YILMAZ, 04.02.1988 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlköğrenimini ve ortaöğrenimini Trabzon ilinin Arsin ilçesinde, liseyi Trabzon Fatih Lisesi (Y.D.A.) tamamladı. 2005–2006 eğitim-öğretim yılında İstanbul Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'ne girdi. 2009 yılının Haziran ayında lisans eğitimin tamamlayarak üniversitesinden mezun oldu. 2009-2010 eğitim öğretim yılında İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsünde Tezsiz Yüksek Lisans (Matematik Öğretmenliği Pedagojik Formasyon)'ını tamamlayarak mezun oldu. 2014–2015 öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı yüksek lisans öğrenimine başladı**.** 2013 yılında MEB'e lise matematik öğretmeni olarak atanarak 2013-2017 yılları arasında Rize'de farklı okullarda öğretmenlik yaptı. 2017 yılının Mayıs ayında KTÜ Fen Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı ve hala görevine devam etmektedir.