KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DÜZLEMDE BİR EĞRİNİN AFİN DİFERANSİYEL İNVARYANTLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Uğur GÖZÜTOK

ARALIK 2016

TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DÜZLEMDE BİR EĞRİNİN AFİN DİFERANSİYEL İNVARYANTLARI

Uğur GÖZÜTOK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 01 / 12 /2016
Tezin Savunma Tarihi : 30 / 12 /2016

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU

Trabzon 2016

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALINDA
Uğur GÖZÜTOK Tarafından Hazırlanan

DÜZLEMDE BİR EĞRİNİN AFİN DİFERANSİYEL İNVARYANTLARI

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 06 / 12 / 2016 gün ve 1679 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Ömer PEKŞEN ....

Üye : Prof. Dr. Emin KASAP ....

Üye : Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU ....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, düzlemde bir eğrinin afin diferansiyel invaryantları incelenmiştir.

Öncelikle, tez konusunun belirlenmesi ve çalışmanın bu biçimi almasında payı büyük olan ve her aşamada yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Doç.Dr.Yasemin SAĞIROĞLU'na teşekkür eder, saygı ve sevgilerimi sunarım.

Ayrıca bu süreçte hep yanımda olan ve büyük desteğini aldığım sevgili eşim Arş.Gör.Nazlı YAZICI GÖZÜTOK'a ve sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim. Diğer yandan, moral motivasyon açısından bana desteklerini sunan KTÜ Matematik bölümündeki tüm saygıdeğer hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Uğur GÖZÜTOK

Trabzon 2016

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Düzlemde Bir Eğrinin Afin Diferansiyel İnvaryantları" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU'nun sorunluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 30/12/2016

Uğur GÖZÜTOK

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

DÜZLEMDE BİR EĞRİNİN AFİN DİFERANSİYEL İNVARYANTLARI

Uğur GÖZÜTOK

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU
2016, 59 Sayfa

Bu tezde, düzlemde bir eğrinin afin diferansiyel invaryantları olan yay uzunluğu ve eğriliği incelenmiştir.

Birinci bölümde, bu tez çalışmasına temel oluşturacak Vektör Uzayları ve Lineer Dönüşümler, Matris, Determinant ve Lineer Denklem Sistemleri, Jordan Normal Form, Afin Uzay, Grup Hareketi, Yörünge ve İnvaryant, Afin Grup ve Alt Grupları, Temel Diferansiyel Geometri kavramları verilmiştir.

İkinci bölümde, Lie dönüşüm grupları üzerinde temel hesaplamalar yapılıp, bu gruplar teorisinin afin diferansiyel geometri ile ilişkisi kurulmuştur. Grup operatörleri ve sonsuz küçük operatörler tanıtılıp, bu kavramlardan yararlanılarak düzlemde afin dönüşümlerin tek parametreli grubu elde edilmiştir. Son olarak operatörler kullanılarak düzlemde bir eğrinin afin yay uzunluğu ve afin eğriliği hesaplanmıştır. Operatörler metodu kullanılarak afin grup ve onun alt gruplarında uygulamalar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Afin diferansiyel invaryantlar, Afin yay uzunluğu, Afin eğrilik, r −parametreli Lie grubu

Master Thesis

SUMMARY

AFFINE DIFFERENTIAL INVARIANTS OF A CURVE ON THE PLANE

Uğur GÖZÜTOK

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Yasemin SAĞIROĞLU
2016, 59 Pages

In this thesis, arc length and curvature which are affine differential invariants of a curve in the plane are investigated.

In Chapter 1, the notions Vector Spaces and Linear Transformations, Matrices, Determinants and Systems of Linear Equations, Jordan Canonical Form, Affine Space, Group Action, Orbits and Invariants, Affine Group and Subgroups, Elementary Differential Geometry which form a basis for this thesis are given.

In Chapter 2, we make elementary calculations on Lie transformation groups and associate that group theory with affine differential geometry. Then we introduce group operators, infinitesimal operators and by using these notions we obtain one parameter group of affine transformations on the plane. Finally, by using operators, affine arc length and affine curvature of a curve in the plane are calculated and all these ideas are applied to affine group and subgroups.

Key Words: Affine differential invariants, Affine arc length, Affine curvature, r −parameter Lie group

ŞEKİLLER DİZİNİ

SEMBOLLER DİZİNİ

E_λ	: λ öz değerinin öz uzayı
I_n	: $n \times n$ tipinde birim matris
O_x	: x elemanının yörüngesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu reel vektör uzayı
$rankA$	: A matrisinin rankı
$boy(V)$	: V uzayının boyutu
$St(x)$	: x elemanının sabitleyeni
$Sp(S)$	: S kümesi tarafından gerilen alt uzay
$\mathcal{L}(V, W)$	: V uzayından W uzayına tüm lineer dönüşümlerin kümesi
$\mathcal{L}(V)$	: V uzayından V uzayına lineer operatörlerin kümesi
$\|A\|$	: A matrisinin determinantı
$\|\|p\|\|$	: p noktasının normu
$T_p(\mathbb{R}^3)$	: $\mathbb{R}^3$ ün p noktasındaki tanjant uzayı
$v_p[f]$	: f fonksiyonunun v_p vektörüne göre yönlü türevi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Afin diferansiyel geometri, geometri alanında büyük önem teşkil eden bir konudur. Klasik diferansiyel geometrinin bir dalı olan afin diferansiyel geometri, 1920'lerin başında ortaya atılmıştır. 1923'te W.Blashke, [2] çalışmasıyla bu konuya ilk katkıda bulunanlardan biri olmuştur. Bundan kısa süre sonra G. Fubini ve E. Čech [5] çalışmalarıyla afin diferansiyel geometri ve projektif geometri ile ilgili çalışma alanını genişletmişlerdir. Özellikle bu iki konunun birbiriyle ve klasik diferansiyel geometri ile ilişkisi yeni problemler oluşturmuştur. Ancak tüm bu yeni çalışma alanlarının doğmasına Felix Klein'ın Erlangen Program'ı sebep olmuştur. Klein, Erlangen Program'da gruplar teorisini kullanarak bu grupların temel oluşturduğu geometrileri karakterize edebilmek için bir metot vermiştir.

Afin diferansiyel geometri, klasik diferansiyel geometride olduğu gibi modern diferansiyel geometride de aynı önemde yer tutmaktadır. Afin diferansiyel geometri ile ilgili çalışmalar birçok önemli matematikçinin ilgisini çekmiştir. 1962'de P.A.Schirokow, [19] çalışması ve 1983'te S.Buchin, [3] çalışması ile bu alana iki temel eser kazandırmışlardır. Bu çalışmalarda genel afin grup ve onun alt gruplarında eğriler teorisi oluşturulmuştur. Ayrıca 1994'te K.Nomizu ve T. Sasaki [11] çalışmalarında afin immersiyonları tanıtmıştır. Djavvat Khadjiev'in afin grubun alt gruplarında eğrilerin diferansiyel invaryantlarına ait bir çok çalışması bulunmaktadır. 2012'de Y.Sağıroğlu [16] çalışmasında parametrik eğrilerin denkliğini invaryantlar aracılığı ile açıklamıştır.

Afin diferansiyel geometride en çok ilgi gören konular eğriler, eğrilerin yay uzunluğu ve eğriliği gibi invaryantları olmuştur. [10,15-18,20] çalışmalarında bu invaryantların elde edilişi farklı metotlarla yapılmıştır. Ayrıca birçok kaynakta afin grubun alt grupları olan equi-afin, centro-afin ve equi-centro-afin grupların geometrisindeki invaryantlar ve bunların elde edilişleri incelenmiştir; fakat genel afin grupta afin invaryantların elde edilişi ile ilgili literatürde yeterince çalışma mevcut değildir. Bunun sebebi genel afin grubun geometrisinde bu invaryantların elde edilmesinin zorluğudur. Schirokow [19] çalışmasında, iki boyutta genel afin grubun ve onun tüm alt gruplarının geometrisinde bir eğrinin yay uzunluğu ve eğriliğini hesaplamıştır. Ancak verilen yöntemin üç boyut için çözümü zordur.

Bu tez çalışmasında, Lie Grupları Teorisinde operatörler metodu kullanılarak, genel afin grup ve onun tüm alt gruplarının geometrilerinde bir düzlem eğrisinin yay uzunluğu ve eğriliği hesaplanmıştır. Bu metotla, genel afin grup ve onun alt grupları bir r-parametreli Lie Grubu olarak ele alınmaktadır. Bir r-parametreli Lie Grubunun genişletilmiş grup denklemleri ve genişletilmiş grup operatörleri, bu grupta alınan herhangi bir eğrinin yay uzunluğu ve eğriliğinin hesaplanmasında kullanılmıştır.

1.2. Temel Kavramlar

Bu başlık altında verilen kavramların oluşturulmasında [1,4,6,8-9,12,14,21-22] kaynaklarından yararlanılmıştır.

1.2.1. Vektör Uzayları ve Lineer Dönüşümler

Tanım 1.1 F bir cisim ve V boştan farklı bir küme olsun. V kümesi üzerinde

$$+ : V \times V \longrightarrow V \quad \text{ve} \quad \cdot : F \times V \longrightarrow V$$

ile tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleri verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, bu iki işlemle birlikte, boştan farklı V kümesine F cismi üzerinde bir vektör uzayı denir:

i. Herhangi $u, v, w \in V$ elemanları için $u + (v + w) = (u + v) + w$ olmalıdır.
ii. Herhangi $u, v \in V$ elemanları için $u + v = v + u$ olmalıdır.
iii. Herhangi $u \in V$ elemanı için $0 + u = u + 0$ olacak şekilde bir $0 \in V$ elemanı vardır.
iv. Herhangi $u \in V$ elemanı için $u + (-u) = (-u) + u = 0$ olacak şekilde bir $-u \in V$ elemanı vardır
v. Herhangi $a, b \in F$ ve $u, v \in V$ elemanları için $a(u + v) = au + av$, $(a + b)u = au + bu$, $(ab)u = a(bu)$ ve $1u = u$ olmalıdır.

Burada F cisminin elemanlarına skalerler, V kümesinin elemanlarına da vektörler denir. Ayrıca F üzerinde bir V vektör uzayına kısaca V uzayı denir.

Tanım 1.2. V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $S \subset V$ boştan farklı bir altküme olsun. Eğer S, V üzerindeki toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile F üzerinde bir vektör uzayı oluyorsa S altkümesine V vektör uzayının bir alt vektör uzayı veya alt uzayı denir.

Teorem 1.3. V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $S \subset V$ boştan farklı bir altküme olsun. Bu takdirde, S bir alt uzaydır $\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in F$ ve $\forall u, v \in S$ için $au + bv \in S$ dir.

Tanım 1.4. V, F cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı ve $S \subset V$ boştan farklı bir altküme olsun. S kümesindeki elemanların tüm lineer birleşimlerinin kümesine, S tarafından üretilen (gerilen) alt uzay denir ve bu uzay aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$Sp(S) = \{r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n \mid r_i \in F, v_i \in S\}.$$

Tanım 1.5. V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $S \subset V$ boştan farklı bir altküme olsun. Her $s_i \in S$ ve $a_i \in F, i = 1,2, \dots, n$ için $a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n = 0$ olduğunda, her $i = 1,2, \dots, n$ için $a_i = 0$ oluyorsa, S kümesine lineer bağımsızdır denir. Eğer S lineer bağımsız değil ise lineer bağımlıdır denir.

Tanım 1.6. V bir vektör uzayı ve $S \subset V$ boştan farklı bir altküme olsun. Eğer S lineer bağımsız ve $Sp(S) = V$ ise S kümesine V uzayının bir bazıdır denir.

Tanım 1.7. V bir vektör uzayı olmak üzere, eğer V sıfır uzayı ise ya da sonlu bir baza sahipse V uzayına sonlu boyutludur denir. Aksi durumda V uzayına sonsuz boyutludur denir. Bir vektör uzayının boyutu, herhangi bir bazındaki vektör sayısına eşittir. Eğer bir V uzayı n elemanlı bir baza sahip ise n −boyutludur denir ve $boy(V) = n$ yazılır.

Tanım 1.8. V ve W, bir F cismi üzerinde iki vektör uzayı, $L: V \longrightarrow W$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a, b \in F$ ve $\forall u, v \in V$ için

$$L(au + bv) = aL(u) + bL(v)$$

oluyorsa L fonksiyonuna bir lineer dönüşüm denir.

V uzayından W uzayına tüm lineer dönüşümlerin kümesi $\mathcal{L}(V, W)$ ile ifade edilir.

Tanım 1.9. V uzayından V uzayına bir lineer dönüşüme V üzerinde bir lineer operatör denir. V uzayından V uzayına tüm lineer operatörlerin kümesi $\mathcal{L}(V)$ ile ifade edilir.

1.2.2. Matris, Determinant ve Lineer Denklem Sistemleri

Tanım 2.1. F bir cisim olmak üzere, F cisminin elemanlarının m satır ve n sütundan oluşan her bir dikdörtgensel dizilimine, F cismi üzerinde $m \times n$ tipinde bir matris denir. $m \times n$ tipindeki bir matris aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m\times n} \,.$$

Tanım 2.2. $n \times n$ tipindeki bir matrise kare matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir kare matrisin $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanları matrisin köşegenini temsil eder ve bu elemanlara köşegen elemanları denir.

Tanım 2.3. Köşegen elemanlarının tümü 1, geriye kalan elamanlarının tümü 0 olan $n \times n$ tipindeki bir kare matrise birim matris denir ve I ya da I_n ile ifade edilir.

Tanım 2.4. $A, n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, A matrisinin determinantı

$$\sum_{(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)} \epsilon(\,\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) a_{1\lambda_1} a_{2\lambda_2} \dots a_{n\lambda_n}$$

değeri ile tanımlanır ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Buradaki ϵ aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\epsilon(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = sgn \prod_{1 \le r < s \le n} (\lambda_s - \lambda_r).$$

Teorem 2.5. $A, n \times n$ tipinde bir matris ve A matrisinin determinantı $|A|$ olsun. A matrisinin herhangi iki satırı ya da sütunu yer değiştirilirse elde edilen matrisin determinantı $-|A|$ dır.

Sonuç 2.6. $A, n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, eğer A matrisinin herhangi iki satırı ya da sütunu aynı ise $|A| = 0$ dır.

Teorem 2.7. $A, n \times n$ tipinde bir matris ve A matrisinin determinantı $|A|$ olsun. A matrisinin herhangi bir satırının ya da sütununun bir k sabitiyle çarpılmasıyla elde edilen matrisin determinantı $k|A|$ dır.

Sonuç 2.8. A $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, $|kA| = k^n |A|$ dır.

Teorem 2.9.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nr} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_{2r} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \ldots & b_{nr} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} + b_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2r} + b_{2r} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nr} + b_{nr} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tanım 2.10. $A, n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, $AB = I$ olacak şekilde bir B $n \times n$ matrisi varsa B matrisine A matrisinin tersidir denir. Tersi var olan bir matrise regüler matris denir.

Teorem 2.11. $A, n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, A matrisinin tersi vardır ancak ve ancak $|A| \neq 0$ dır.

Teorem 2.12. $A, n \times n$ tipinde regüler bir matris olmak üzere $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ dir.

Tanım 2.13. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve b reel sabitler olmak üzere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenlerine bağlı bir lineer denklem aşağıdaki eşitlikle verilir:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b.$$

Buradaki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenlerine denklemin bilinmeyenleri denir.

Tanım 2.14. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenlerine bağlı lineer denklemlerin sonlu bir kümesine bir lineer denklem sistemi denir. Eğer $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ sistemdeki tüm denklemleri sağlıyor ise, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sayı dizisine lineer denklem sisteminin bir çözümüdür denir. n bilinmeyenli ve m denkleme sahip bir lineer denklem sistemi aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{gathered}$$

Bu denklemdeki bilinmeyenlerin katsayılarından oluşan matrise lineer denklem sisteminin katsayılar metrisi denir ve bu matris aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Böylece $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ve $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ olmak üzere, verilen denklem sistemi matrisler formunda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$Ax = b.$$

Bu denklemdeki bilinmeyenlerin katsayıları ve $b_1, b_2, \ldots, b_m$ değerlerinden oluşan matrise lineer denklem sisteminin genişletilmiş matrisi denir ve bu matris aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Tanım 2.15. Hiçbir çözüme sahip olmayan lineer denklem sistemlerine uyumsuzdur denir. Eğer bir denklem sisteminin en az bir çözümü mevcut ise bu denklem sistemine uyumludur denir.

Tanım 2.16. Bir A matrisinin lineer bağımsız satır sayısına ya da lineer bağımsız sütun sayısına A matrisinin rankı denir ve $rankA$ ile ifade edilir.

Teorem 2.17. $Ax = b$, n bilinmeyene ve m denkleme sahip bir lineer denklem sistemi olsun. Bu takdirde, $Ax = b$ uyumludur $\Leftrightarrow rankA = rank[A|b]$.

Sonuç 2.18. $Ax = b$, n bilinmeyene ve $n + 1$ denkleme sahip bir lineer denklem sistemi olsun. Bu takdirde, $Ax = b$ uyumlu ise $det[A|b] = 0$.

1.2.3. Jordan Normal Form

Tanım 3.1. $A, n \times n$ tipinde bir matris ve $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ sıfırdan farklı bir vektör olmak üzere, $Av = \lambda v$ olmasını sağlayan λ değerine A matrisinin öz değeri; v vektörüne ise λ öz değerine karşılık gelen öz vektör adı verilir.

Tanım 3.2. $A, n \times n$ tipinde bir matris ve λ da A matrisinin bir öz değeri olsun. Bu takdirde λ öz değerinin öz uzayı $E_\lambda = \{v \mid Av = \lambda v\}$ ile tanımlanır.

Tanım 3.3. $A, n \times n$ matrisi için, $I, n \times n$ tipindeki birim matrisi ifade etmek üzere $\det(\lambda I - A)$ polinomuna, A matrisinin karakteristik polinomu denir.

Tanım 3.4. $A, n \times n$ tipinde bir matris, a da onun bir öz değeri olsun. $\det(\lambda I - A)$ karakteristik polinomunun bir kökü olarak a değerinin katlılığına, a öz değerinin cebirsel katlılığı denir. Ayrıca a öz değerine karşılık gelen E_a öz uzayının boyutuna da, a öz değerinin geometrik katlılığı denir.

Tanım 3.5. A ve $B, n \times n$ tipinde iki matris olsun. Eğer $A = PBP^{-1}$ olacak şekilde, tersi var olan bir P matrisi mevcut ise A ve B matrislerine benzerdir denir.

Tanım 3.6. $A, n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, eğer A köşegen bir matris ile benzer ise A matrisine köşegenleştirilebilir matris denir.

Tanım 3.7. Bir λ öz değerine karşılık gelen $k \times k$ tipinde bir Jordan bloğu aşağıdaki şekilde $k \times k$ tipinde bir matristir:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Tanım 3.8. $i = 1,2,\dots,n$ ve her J_i $k \times k$ tipinde bir Jordan bloğunu temsil etmek üzere Jordan normal forma sahip bir J matrisi aşağıdaki şekilde bir blok köşegen matristir:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & & 0 \\ & J_2 & & & \\ & & J_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & J_n \end{bmatrix}.$$

Tanım 3.9. $A, n \times n$ tipinde bir matris ve λ da A matrisinin bir öz değeri olsun. Bir $k > 0$ tamsayısı için $(\lambda I - A)^k(v) = 0$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı v vektörüne, A matrisinin λ öz değerine karşılık gelen genelleştirilmiş öz vektörü denir. Bu şartı sağlayan en küçük k tamsayısına ise v genelleştirilmiş öz vektörünün indeksi denir.

Tanım 3.10. $A, n \times n$ tipinde bir matris ve λ A matrisinin bir öz değeri ve $\{v_1, \dots, v_k\}$ da λ öz değerine karşılık gelen genelleştirilmiş öz vektörlerin kümesi olsun. v_k genelleştirilmiş öz vektörünün indeksi k olmak üzere $v_{k-1} = (A - \lambda I)v_k$, $v_{k-2} = (A - \lambda I)v_{k-1}, \dots, v_1 = (A - \lambda I)v_2$ şartı sağlanıyorsa $\{v_1, \dots, v_k\}$ kümesine genelleştirilmiş öz vektörlerin k uzunluklu bir zinciri denir.

Teorem 3.11. $A, 2 \times 2$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlardan biri geçerlidir:

i. A matrisi, her biri 1 cebirsel katlılığa sahip a ve b gibi iki öz değere sahiptir. $u = (u_1, u_2)$, a öz değerine karşılık gelen; $v = (v_1, v_2)$ de b öz değerine karşılık gelen öz vektör olsun. Bu takdirde $A = PJP^{-1}$ olup, $J = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ve $P = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$ dir.

ii. A matrisi, cebirsel katlılığı 2 olan tek bir öz değere sahiptir.

   a. A, lineer bağımsız iki öz vektöre sahiptir. Öz vektörler $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$ olmak üzere, $A = PJP^{-1}$ olup $J = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ ve $P = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$ dir.

b. A, genelleştirilmiş öz vektörlerin $\{u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)\}$ şeklinde bir zincirine sahiptir. Bu takdirde $A = PJP^{-1}$ olup $J = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ ve $P = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$ dir.

Jordan normal formun diferansiyel denklem sistemlerine uygulanışı aşağıdaki şekilde verilir:

1) Bir homojen diferansiyel denklem sistemi $Y' = AY$ matris formuyla verilsin.

i. J, A matrisinin Jordan normal formunu ifade etmek üzere $A = PJP^{-1}$ şeklinde yazılır. Bu eşitlik sistemde yerine yazılırsa sistem aşağıdaki şekle dönüşür:

$$Y' = (PJP^{-1})Y$$
$$Y' = PJ(P^{-1}Y)$$
$$P^{-1}Y' = J(P^{-1}Y)$$
$$(P^{-1}Y)' = J(P^{-1}Y).$$

ii. $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y} = \mathrm{Z}$ denilirse sistem $Z' = JZ$ biçimine dönüşür ve bu sistem Z için çözülür.

iii. $Z = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y}$ olduğundan ana sistemin genel çözümü $Y = PZ$ şeklinde elde edilir.

2) Bir homojen olmayan diferansiyel denklem sistemi $Y' = AY + G$ matris formuyla verilsin.

i. J, A matrisinin Jordan normal formunu ifade etmek üzere $A = PJP^{-1}$ şeklinde yazılır. Bu eşitlik sistemde yerine yazılırsa sistem aşağıdaki şekle dönüşür:

$$Y' = (PJP^{-1})Y + G$$
$$Y' = PJ(P^{-1}Y) + G$$
$$P^{-1}Y' = J(P^{-1}Y) + P^{-1}G$$
$$(P^{-1}Y)' = J(P^{-1}Y) + P^{-1}G.$$

ii. $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y} = \mathrm{Z}$ ve $H = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{G}$ denilirse sistem $Z' = JZ + H$ biçimine dönüşür ve bu sistem Z için çözülür.

iii. $Z = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y}$ olduğundan ana sistemin genel çözümü $Y = PZ$ şeklinde elde edilir.

1.2.4. Afin Uzay

Tanım 4.1. V, n boyutlu bir reel vektör uzayı ve Ω boştan farklı bir küme olsun. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan, $\Omega \times \Omega \longrightarrow V,\ (p, q) \longmapsto \overrightarrow{pq}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon var ise Ω kümesine V ile ilişkili afin uzay denir:

i. Herhangi $p, q, r \in \Omega$ elemanları için $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$ dir.

ii. Herhangi $p \in \Omega$ ve $x \in V$ elemanları için $x = \overrightarrow{pq}$ olacak şekilde yalnız bir $q \in \Omega$ elemanı vardır.

Ω afin uzayının boyutu, V vektör uzayının boyutu olarak tanımlanır.

Örnek 4.2. Her reel vektör uzayı, kendi üzerinde bir afin uzaydır.

Örnek 4.3. $\mathbb{R}^n$, n boyutlu standart reel vektör uzayı, n boyutlu standart afin uzaydır.

Tanım 4.4. Ω, V vektör uzayı üzerinde n boyutlu bir afin uzay ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, V vektör uzayının bir bazı olsun. Herhangi bir $p \in \Omega$ için $\overrightarrow{op} = \sum x^i(p)e_i$ yazılsın. Burada reel sayıların $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ n −li gösterimine p noktasının koordinatları denir. $\{x^1, \dots, x^n\}$ fonksiyon kümesine ise $o \in \Omega$ orijinli afin koordinat sistemi denir.

Tanım 4.5. Ω_1 ve Ω_2, V_1 ve V_2 vektör uzayları üzerinde afin uzaylar, $f: \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ afin uzayların bir fonksiyonu olsun. Her $p, q \in \Omega_1$ elemanları için $F(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$ olacak şekilde bir $F: \mathrm{V}_1 \longrightarrow \mathrm{V}_2$ lineer dönüşümü varsa f fonksiyonuna bir afin dönüşüm adı verilir. $F(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$ yazılımı $f(q) = f(p) + F(q - p)$ şeklinde ifade edebilir. Böylece, f afin dönüşümünün bir lineer dönüşüm ve bir ötelemeden oluştuğu görülür. Buradaki F lineer dönüşümüne f afin dönüşümü ile ilgili lineer dönüşümdür denir.

Tanım 4.6. Ω, V vektör uzayı üzerinde bir afin uzay ve $\Omega' \subset \Omega$ boştan farklı bir alt küme olsun. Eğer bir $p \in \Omega'$ elemanı için $\{\overrightarrow{pq} \mid q \in \Omega'\}$ vektör kümesi V nin bir alt uzayı ise Ω' alt kümesine Ω afin uzayının afin alt uzayı denir.

1.2.5. Grup Hareketi, Yörünge ve İnvaryant

Tanım 5.1. G bir grup ve X boştan farklı bir küme olsun. $\varphi: G \times X \longrightarrow X$ fonksiyonuna, aşağıdaki iki şartı sağlaması halinde G grubunun X üzerindeki hareketi denir:

i. $e \in G$, G grubunun birim elemanı olmak üzere $\forall x \in X$ için $\varphi(e, x) = x$ dir.

ii. $\forall g, h \in G$ ve $x \in X$ için $\varphi(gh, x) = \varphi\big(g, \varphi(h, x)\big)$ dir.

G grubunun X üzerindeki hareketi notasyonel olarak, $g \in G$ ve $x \in X$ elemanları için $\varphi(g, x) = gx$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 5.2. G, X kümesi üzerinde hareket eden bir grup olmak üzere, bir $x \in X$ elemanının grup hareketi altındaki görüntüsünden elde edilen tüm noktaların kümesine x elemanının yörüngesi denir ve bu küme aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$O_x = \{gx \mid g \in G\}$.

Bir x elemanının yörüngesindeki eleman sayısı, yörüngenin uzunluğu olarak tanımlanır. Eğer bir x elemanının yörüngesinin uzunluğu 1 ise bu elemana hareketin sabit noktası denir.

Tanım 5.3. G, X üzerinde hareket eden bir grup olmak üzere, bu hareketin tek bir yörüngesi mevcut, yani her $x, y \in X$ elemanları için $gx = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, bu harekete geçişlidir denir.

Tanım 5.4. G, X üzerinde hareket eden bir grup olmak üzere, bir $x \in X$ elemanı için $St(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$ kümesine x noktasının sabitleyeni denir.

Tanım 5.5. G, X üzerinde hareket eden bir grup olsun. Belirli bir N kümesi için $\sigma: X \longrightarrow N$ fonksiyonunun aynı yörüngeye ait noktalarda aldığı değerler birbirine eşit ise σ fonksiyonuna hareketin bir invaryantı denir.

Tanım 5.6. G, X üzerinde hareket eden bir grup olsun. Belirli bir N kümesi için $\sigma: X \longrightarrow N$ invaryantı farklı yörüngelerde farklı değerler alıyorsa, σ invaryantına tam invaryant denir.

1.2.6. Afin Grup ve Alt Grupları

Tanım 6.1. Ω, n boyutlu bir afin uzay ve $f: \Omega \longrightarrow \Omega$, ilgili lineer dönüşümü regüler olan bir afin dönüşüm olsun. Bu şartı sağlayan tüm f afin dönüşümlerinin oluşturduğu gruba genel afin grup denir.

$x \in \Omega$ elemanını $x' \in \Omega$ elamanına dönüştüren, ilgili lineer dönüşümü regüler olan f afin dönüşümünü matrisler yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$x' = Ax + b\,, \quad detA \neq 0.$$

Tanım 6.2. n boyutlu bir Ω afin uzayında, $x \in \Omega$ elemanını $x' \in \Omega$ elemanına dönüştüren, $x' = Ax + b\,,\ detA = 1$ ile tanımlı afin dönüşümlerin oluşturduğu gruba equi-afin grup denir.

Tanım 6.3. n boyutlu bir Ω afin uzayında, $x \in \Omega$ elemanını $x' \in \Omega$ elemanına dönüştüren, $x' = Ax\,,\ detA \neq 0$ ile tanımlı afin dönüşümlerin oluşturduğu gruba centro-afin grup denir.

Tanım 6.4. n boyutlu bir Ω afin uzayında, $x \in \Omega$ elemanını $x' \in \Omega$ elemanına dönüştüren, $x' = Ax\,,\ detA = 1$ ile tanımlı afin dönüşümlerin oluşturduğu gruba equicentro-afin grup denir.

1.2.7. Temel Diferansiyel Geometri

Tanım 7.1. $\mathbb{R}^3$ te, $v, p \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere bir v vektör kısmından ve bir p uygulama noktasından oluşan vektöre v_p tanjant vektörü denir. Bir v_p tanjant vektörü, p noktasından $p + v$ noktasına bir ok ile resmedilir.

Tanım 7.2. Bir $p \in \mathbb{R}^3$ için, uygulama noktası p olan tüm tanjant vektörlerin kümesine $\mathbb{R}^3$ ün p noktasındaki tanjant uzayı denir ve bu uzay $T_p(\mathbb{R}^3)$ ile gösterilir.

Tanım 7.3. $\mathbb{R}^3$ teki her bir p noktasını $V(p)$ tanjant vektörüne eşleyen bir V fonksiyonuna $\mathbb{R}^3$ te bir vektör alanı denir.

Tanım 7.4. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve v_p, $\mathbb{R}^3$ te bir tanjant vektör olsun. $v_p[f] = \frac{d}{dt} f(p + tv)|_{t=0}$ değerine f fonksiyonunun v_p tanjant vektörüne göre türevi denir.

Tanım 7.5. Bir $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı için $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna $\mathbb{R}^3$ te bir eğri denir.

Tanım 7.6. $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ olmak üzere, $\forall t \in I$ için α eğrisinin t noktasındaki hız vektörü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right).$$

Tanım 7.7. $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Eğer $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regülerdir denir.

Tanım 7.8. $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Bir $J \subset \mathbb{R}$ açık aralığı için eğer $h: J \longrightarrow I$ fonksiyonu diferansiyellenebilir ise $\beta = \alpha(h): J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisine α eğrisinin bir parametrizasyonu denir.

Tanım 7.9. $\phi_p: T_p(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $v, w \in T_p(\mathbb{R}^3)$ ve her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\phi_p(av + bw) = a\phi_p(v) + b\phi_p(w)$$

lineerlik şartını sağlıyorsa, bu fonksiyona $T_p(\mathbb{R}^3)$ üzerinde bir $1-$form denir.

Tanım 7.10. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun df diferansiyeli aşağıdaki şekilde tanımlı bir $1-$formdur:

$$df(v_p) = v_p[f].$$

Örnek 7.11. Doğal koordinat fonksiyonlarının dx_1, dx_2, dx_3 diferansiyelleri birer $1-$formdur ve aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$dx_i(v_p) = v_p[x_i] = \sum_j v_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = v_i.$$

Örnek 7.12. $\psi = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$ ile tanımlı dönüşüm bir $1-$formdur ve bir $v_p \in T_p(\mathbb{R}^3)$:

$$\psi(v_p) = \left(\sum f_i dx_i\right)(v_p) = \sum f_i(p) dx_i(v_p) = \sum f_i(p)\, v_i$$

dir.

Tanım 7.13. $p = (p_1, p_2, p_3), q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ elemanlarının nokta çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$p.q = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3.$$

Tanım 7.14. Bir $p \in \mathbb{R}^3$ noktasının normu $\|p\| = \sqrt{p.p}$ ile tanımlanır.

Tanım 7.15. Aynı uygulama noktasına sahip v_p ve w_p tanjant vektörlerinin nokta çarpımları $v_p.w_p = v.w$ ile tanımlanır.

Tanım 7.16. Bir $p \in \mathbb{R}^3$ noktasında, karşılıklı olarak birbirlerine dik olan e_1, e_2, e_3 birim tanjant vektörlerin kümesine p noktasında bir çatı denir.

Tanım 7.17. Aynı uygulama noktasına sahip v_p ve w_p tanjant vektörlerinin vektörel çarpımları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Tanım 7.18. $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bir eğri olsun. α eğrisinin hızı, hız vektörünün boyu olarak tanımlanır ve $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ ile ifade edilir.

Tanım 7.19. $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin hızı $\|\alpha'\| = 1$ ise bu eğriye birim hızlı eğri denir.

Tanım 7.20. $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bir eğri olsun. α eğrisinin $t = a$ dan $t = b$ ye kadar yay uzunluğu aşağıdaki formül ile verilir:

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt.$$

Teorem 7.21. $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ regüler bir eğri olsun. Bu takdirde, α eğrisinin, birim hızlı olacak şekilde bir β parametrizasyonu vardır.

Tanım 7.22. $\beta: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde $T = \beta'$ vektör alanına β eğrisinin birim tanjant vektör alanı denir. Ayrıca T' vektör alanına β eğrisinin eğrilik vektör alanı denir. Diğer yandan $T.T = 1$ ifadesinin türevlenmesinden $T'.T = 0$ elde edilir. Bunun anlamı T' nün daima T ye dik olmasıdır, yani T' nün β eğrisine normal olmasıdır.

Tanım 7.23. Her $s \in I$ için $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ ile tanımlı κ reel değerli fonksiyonuna β eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir.

Tanım 7.24. $\kappa > 0$ olmak üzere, $N = \frac{T\prime}{\kappa}$ ile tanımlı vektör alanına β eğrisinin temel normal vektör alanı ve $B = T \times N$ ile tanımlı vektör alanına da β eğrisinin binormal vektör alanı denir.

Tanım 7.25. Burada tanımlanan T, N, B üçlüsüne β eğrisi üzerindeki Frenet çatı alanı denir.

Tanım 7.26. $B' = -\tau N$ eşitliği ile verilen reel değerli τ fonksiyonuna, β eğrisinin burulma fonksiyonu denir.

Teorem 7.27. $\beta: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\kappa > 0$, β eğrisinin eğriliği ve τ, β eğrisinin burulması olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{array}{llcl} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & + & \tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{array}$$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Lie Dönüşüm Grupları Üzerinde İşlemler

Boyutu n olan bir uzayda bir x noktasının koordinatları $x^1, x^2, \dots, x^n$ ile verilsin. Bu uzayda x noktasını x' noktasına dönüştüren dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$x_i{}' = \varphi_i(x_1, \dots, x_n;\ a_1, \dots, a_r) \quad (i = 1,2, \dots, n). \tag{2.1.1}$$

Burada φ_i analitik fonksiyonları x_i ve a_α $(\alpha = 1,2, \dots, r)$ değişkenlerine bağlıdır. a_α değişkenlerine (2.1.1) dönüşümünü belirleyen parametreler denir. Bu parametrelerin aralarında hiçbir ilişki yoksa yani sayıları azaltılamıyorsa, bunlara bağımsız ya da temel parametreler denir. Bu durumda (2.1.1) görüntülerinin kümesi r-parametreli aile adını alır. (2.1.1) ifadesindeki dönüşümü kısaca T_a ile ifade edecek olursak, (2.1.1) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$x' = T_a x. \tag{2.1.2}$$

(2.1.1) dönüşümlerinin r-parametreli ailesi aşağıdaki şartları sağlaması halinde r-parametreli Lie grubu adını alır:

i. Aileye ait iki dönüşümün çarpımı yine bu aileye ait olmalı.
   Başka bir deyişle: $x' = T_a x, x'' = T_b x'$ ise $x'' = T_c x$ olup, burada c_α parametreleri ile belirli analitik fonksiyonlar a_α ve b_α parametreleri ile belirlenir.
ii. Ailedeki her dönüşümün ters dönüşümü bu ailede var olmalı.
   Başka bir deyişle, (2.1.2) denkleminin x değişkenine göre çözülebildiğini varsayalım: $x = T_b x'$, buradaki dönüşüm $b_\alpha(a)$ parametreleri ile belirlidir ve $x = T_a^{-1} x'$ ile de ifade edilir. Bu iki şartın sağlanması ile grup, herhangi bir T dönüşümü için $T^{-1}T$ dönüşümünü yani birim dönüşümü içermiş olur.

Parametrelerin $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$ alınmasıyla $x_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n; 0, \dots, 0)$ birim dönüşümü elde edilir. c_α lar keyfi sabitler olmak üzere, a_α parametrelerini $c_\alpha \delta t$ “sonsuz küçük” değerleriyle değiştirelim, böylece etkisi altında x noktasını, yakın bir komşuluğunda x' ye dönüştüren bir "sonsuz küçük dönüşüm" elde edilir. Bu aşağıdaki şekilde ifade edilir [19]:

$$x_i{}' = x_i + \sum_{\alpha=1}^{r} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial a_\alpha}\right)_0 c_\alpha \delta t. \tag{2.1.3}$$

$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial a_\alpha}\right)_0$ değerini $\xi_\alpha^i(x_1, \dots, x_n)$ ile ifade edelim. Böylece aşağıdaki diferansiyel operatörler oluşturulabilir:

$$X_\alpha = \xi_\alpha^s(x) \frac{\partial}{\partial x_s} \quad (\alpha = 1,2, \dots, r). \tag{2.1.4}$$

Bu operatörlere, grubun sonsuz küçük operatörleri denir. Bu operatörlerin doğrusal kombinasyonları kullanılarak (2.1.3) denklemi, aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$x_i{}' = x_i + (c_\alpha X_\alpha x_i)\delta t. \tag{2.1.5}$$

Burada (2.1.5) sonsuz küçük dönüşümü, $X = c_\alpha X_\alpha$ sonsuz küçük operatörü tarafından tanımlanır denir.

Şimdi r-parametreli grubun operatörü yerine, aşağıdaki gibi herhangi bir diferansiyel operatörü alalım ve inceleyelim:

$$X = \xi_\alpha^i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{2.1.6}$$

$\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ için,

$$\frac{dx_1}{\xi^1} = \frac{dx_2}{\xi^2} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi^n} = dt \tag{2.1.7}$$

diferansiyel denklem sistemini oluşturalım.. Bu sistemin çözümünden aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&f_1(c_1, \dots, c_n, t) = x_1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&f_{n-1}(c_1, \dots, c_n, t) = x_{n-1} \\
&f_n(c_1, \dots, c_n, t) = x_n.
\end{aligned}
\tag{2.1.8}
$$

Burada x_i değişkenlerinin $t = 0$ için başlangıç değeri x_i^0 olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$
\begin{aligned}
&f_1(c_1, \dots, c_n) = x_1^0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&f_{n-1}(c_1, \dots, c_n) = x_{n-1}^0, \\
&f_n(c_1, \dots, c_n) = x_n^0.
\end{aligned}
\tag{2.1.9}
$$

Böylece (2.1.9) denklemlerinden elde edilen başlangıç değerleri, (2.1.8) denklem sisteminde yerine yazılırsa, x_0 noktasını x noktasına dönüştüren bir dönüşüm elde edilir ve t değişkenini de bu dönüşümün parametresi olarak alınırsa, dönüşümlerin tek parametreli bir ailesi elde edilmiş olur. Bu aile aslında tek parametreli bir Lie grubu oluşturur. Bu grubun sonsuz küçük bir dönüşümü altında hareket eden bir noktanın koordinatlarının diferansiyeli, aşağıdaki denklemle belirlenir:

$$dx_i = Xx_i dt = \xi^i dt.$$

(2.1.7) denkleminden görüleceği gibi, X operatörü tek parametreli grubun bir sonsuz küçük operatörüdür. Bu operatör için, (2.1.6) sonsuz küçük operatörü tarafından üretilir denir. t parametresinin her değeri için grubun dönüşümü altındaki her noktanın görüntüsüne x_0 noktasında bir yörünge denir. Çeşitli noktaların yörüngelerine kısaca, verilen grubun yörüngesi denir.

2.2. Düzlemde Afin Dönüşümlerin Tek Parametreli Grubu

Düzlemde genel afin grup aşağıdaki denklemlerle verilir:

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$
$$y' = a_2 x + b_2 y + c_2,$$

Bu 6-parametreli bir Lie grubudur. Bu grubun bir sonsuz küçük dönüşümü aşağıdaki formdadır:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)\delta t, \\ y' &= y + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)\delta t, \end{aligned}\right\} \tag{2.2.1}$$

burada $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ keyfi sabitler ve δt ise sonsuz küçük bir çarpandır. Buradan, grubun altı sonsuz küçük operatörü elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad x\frac{\partial}{\partial x}, \quad y\frac{\partial}{\partial x}, \quad x\frac{\partial}{\partial y}, \quad y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Böylece (2.2.1) dönüşümü tarafından belirlenen operatör aşağıdaki gibidir:

$$X = \alpha_1 x\frac{\partial}{\partial x} + \beta_1 y\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_1\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 x\frac{\partial}{\partial y} + \beta_2 y\frac{\partial}{\partial y} + \gamma_2\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.2.2}$$

(2.2.1) denklemlerini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)\delta t, \\ \delta y &= (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)\delta t. \end{aligned}\right\} \tag{2.2.3}$$

(2.2.2) operatörünün oluşturduğu tek parametreli grubu belirleyebilmek ve bu grubun yörüngelerini bulabilmek için aşağıdaki diferansiyel denklem sistemini oluşturalım:

$$\frac{dx}{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1} = \frac{dy}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2} = dt. \tag{2.2.4}$$

Öncelikle yeni bir koordinat sistemi oluşturarak bu sistemi daha basit bir hale getirelim. Bunun için,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= px + qy,\\ \bar{y} &= rx + sy,\end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \neq 0$$

koordinat dönüşümü (2.2.3) sistemine uygulanması sonucunda elde edilen yeni denklem sisteminde $\bar{x}, \bar{y}$ değişkenlerinin katsayılar matrisi $\tilde{B}$ ile eski matris $B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$ arasında aşağıdaki ilişki vardır:

$$\tilde{B} = ABA^{-1}.$$

Burada, $\tilde{B}$ aşağıdaki Jordan normal formlarından birine sahip olacak şekilde A matrisini seçmek her zaman mümkündür[21]:

$$1.\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad 2.\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{2.2.5}$$

Şimdi tüm bu durumları inceleyelim.

1.Durum: Bu durumda (2.2.4) sistemi aşağıdaki hali alır:

$$\frac{dx}{\lambda_1 x + \gamma_1} = \frac{dy}{\lambda_2 y + \gamma_2} = dt. \tag{2.2.6}$$

Bunu birkaç özel duruma bölelim:

a) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_1 \neq \pm\lambda_2$

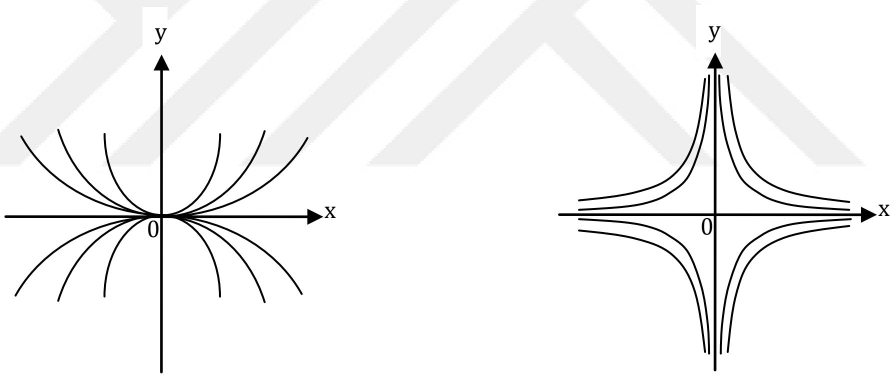
Burada uygun bir koordinat dönüşümü ile γ_1, γ_2 sabitleri yok edilebilir ve (2.2.6) sistemi için aşağıdaki çözümleri elde ederiz:

$x = c_1 e^{\lambda_1 t},$
$y = c_2 e^{\lambda_2 t}.$

Bu denklemlerde; c_1, c_2 leri bir M başlangıç noktasının koordinatları ve x, y leri de M' dönüştürülmüş noktasının koordinatları olarak düşünürsek, aşağıdaki tek parametreli grup elde edilmiş olur:

$x' = xe^{\lambda_1 t},$
$y' = ye^{\lambda_2 t}.$

Bu grubun yörünge eğrileri, orijinde merkezlenmiş, genelleştirilmiş hiperbol ($\alpha < 0$) ve paraboldür ($\alpha > 0$): $y = cx^{\alpha}$ ($\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$). (Şekil 2.2.1)



$\alpha > 0$ $\alpha < 0$

Şekil 2.2.1. Genelleştirilmiş parabol ve hiperbol

b) $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda \neq 0$

Benzer işlemler yapıldığında aşağıdaki tek parametreli grup elde edilir:

$x' = xe^{\lambda t},$
$y' = ye^{-\lambda t}.$

Bu grubun yörünge eğrileri standart hiperbollerdir: $xy = c$.

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$

Bu durumda da benzer işlemlerin ardından aşağıdaki tek parametreli grup elde edilir:

$$x' = xe^{\lambda t},$$
$$y' = ye^{\lambda t}.$$

Bu grubun yörünge eğrileri ise orijinden geçen doğrulardır: $y = cx$.

d) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$

Bu durumda, uygun bir dönüşüm yardımıyla γ_1 sabiti yok edilebilir fakat γ_2 sabitini yok edemeyiz. Dolayısıyla (2.2.6) sisteminin çözümünden aşağıdaki tek parametreli grup elde edilmiş olur:

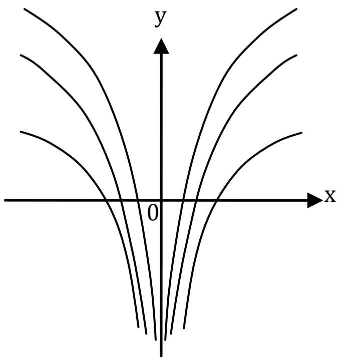
$$x' = xe^{\lambda_1 t},$$
$$y' = y + \gamma_2 t.$$

$\gamma_2 \neq 0$ durumu için yörünge eğrileri logaritmik eğrilerdir: $y = \alpha lnx + c$ $\left(\alpha = \frac{\gamma_2}{\lambda_1}\right)$. (Şekil 2.2.2)

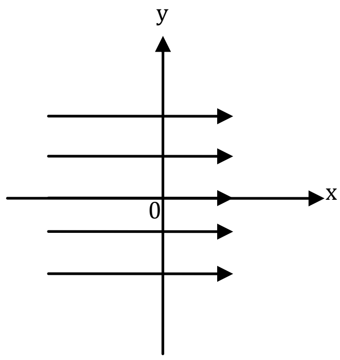
$\gamma_2 = 0$ durumu için ise tek parametreli grup aşağıdaki şekle dönüşür:

$$x' = xe^{\lambda_1 t},$$
$$y' = y.$$

Bu durumda da yörünge eğrileri x eksenine paralel doğrulardır. (Şekil 2.2.3)



Şekil 2.2.2. Logaritmik eğriler



Şekil 2.2.3. x eksenine paralel doğrular

e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Bu durumda (2.2.6) sisteminin çözümünden aşağıdaki tek parametreli grup elde edilir:

$$x' = x + \gamma_1 t,$$
$$y' = y + \gamma_2 t.$$

Bu grubun yörünge eğrileri $\overrightarrow{\gamma_1 \gamma_2}$ vektörüne paralel doğrulardır.

2.Durum: Bu durumda aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\frac{dx}{\lambda x + y + \gamma_1} = \frac{dy}{\lambda y + \gamma_2} = dt. \qquad (2.2.7)$$

Burada da üç seçenek mevcuttur:

a) $\lambda \neq 0$

Eksenlerin ötelenmesi ile (2.2.7) sistemindeki γ_1 ve γ_2 sabitlerinden kurtulabiliriz. Dolayısıyla elde edilen yeni sistemin çözümlerini aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$x = (ct + c_1)e^{\lambda t},$$
$$y = ce^{\lambda t}.$$

Bu çözümler de aşağıdaki tek parametreli grubu verir:

$$x' = (x + yt)e^{\lambda t},$$
$$y' = ye^{\lambda t}.$$

Bu grubun yörünge eğrileri transandantal eğrilerdir: $x = \frac{1}{\lambda} ylny + cy.$

b) $\lambda = 0, \gamma_2 \neq 0$

Bu durumdaki tek parametreli grup aşağıdaki şekildedir:

$$x' = x + yt + \frac{t^2}{2},$$
$$y' = y + t.$$

Bu grubun yörünge eğrileri paraboldür: $y^2 = 2x + c.$

c) $\lambda = 0, \gamma_2 = 0$

Bu durumdaki tek parametreli grup ise aşağıdaki şekildedir:

$$x' = x + yt,$$
$$y' = y.$$

Bu grubun yörünge eğrileri x eksenine paralel doğrulardır.

Tüm bu yapılan incelemeler ışığında, düzlemde genel afin grubun tek parametreli alt gruplarının tüm çeşitlerini görmüş olduk. Şimdi de diğer özel afin gruplar için aynı incelemeleri yapalım.

I.Equi-afin Grup

Bu grubun elemanları aşağıdaki formdadır:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1.$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2,$$

Bu elemanlar 5-parametreli bir Lie Grubu oluştururlar. Bu grubun sonsuz küçük dönüşümleri aşağıdaki formdadır:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)\delta t, \\ y' &= y + (\alpha_2 x - \alpha_1 y + \gamma_2)\delta t, \end{aligned}\right\}$$

Buradan grubun sonsuz küçük operatörleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\ , \qquad \frac{\partial}{\partial y}\ , \qquad y\frac{\partial}{\partial x}\ , \qquad x\frac{\partial}{\partial y}\ , \qquad x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\ .$$

Böylece sonsuz küçük dönüşüm tarafından belirlenen operatör aşağıdaki şekildedir:

$$X = \alpha_1\left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right) + \beta_1 y\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_1\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 x\frac{\partial}{\partial y} + \gamma_2\frac{\partial}{\partial y}.$$

Bu operatörün oluşturduğu tek parametreli grubu bulabilmek için aşağıdaki denklem sistemini oluşturalım:

$$\frac{dx}{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1} = \frac{dy}{\alpha_2 x - \alpha_1 y + \gamma_2} = dt.$$

Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi aşağıdaki Jordan normal formalarından birine sahiptir:

$$1.\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}\ ; \quad 2.\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.Durum: Bu durum için sistem aşağıdaki şekli alır:

$$\frac{dx}{\lambda x + \gamma_1} = \frac{dy}{-\lambda y + \gamma_2} = dt.$$

Burada iki özel durum mevcuttur:

a) $\lambda \neq 0$

Bu durumda öteleme kullanarak γ_1 ve γ_2 sabitlerinden kurtulabiliriz. Dolayısıyla sistemin çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$x = c_1 e^{\lambda t}$$
$$y = c_2 e^{-\lambda t}.$$

Böylece grubun tek parametreli alt grubu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$x' = x e^{\lambda t}$$
$$y' = y e^{-\lambda t}.$$

Bu tek parametreli grubun yörünge eğrileri standart hiperbollerdir: $xy = c$.

b) $\lambda = 0$

Bu durumda diferansiyel denklem sisteminin çözümünden aşağıdaki tek parametreli grup elde edilir:

$$x' = x + \gamma_1 t$$
$$y' = y + \gamma_2 t.$$

Bu grubun yörünge eğrileri $\overrightarrow{\gamma_1 \gamma_2}$ vektörüne paralel doğrulardır.

2.Durum: Bu durumda sistem aşağıdaki hale dönüşür:

$$\frac{dx}{y+\gamma_1} = \frac{dy}{\gamma_2} = dt.$$

$\gamma_2 \neq 0$ için sistemin çözümünden aşağıdaki tek parametreli grup elde edilir:

$$x' = x + yt + \frac{\gamma_2}{2}t^2$$
$$y' = y + \gamma_2 t.$$

Bu grubun yörünge eğrileri parabollerdir.

$\gamma_2 = 0$ için aşağıdaki tek parametreli grup elde edilir:

$$x' = x + y$$
$$y' = y.$$

Bu grubun yörünge eğrileri x eksenine paralel doğrulardır.

II.Centro-affine Grup

Düzlemde centro-afin grup aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{matrix} x' = a_1x + b_1y, \\ y' = a_2x + b_2y, \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bu 4-parametreli bir Lie grubudur. Bu grubun bir sonsuz küçük dönüşümü aşağıdaki formdadır:

$$\left.\begin{matrix} x' = x + (\alpha_1 x + \beta_1 y)\delta t, \\ y' = y + (\alpha_2 x + \beta_2 y)\delta t, \end{matrix}\right\}$$

Buradan, grubun altı sonsuz küçük operatörü aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$x\frac{\partial}{\partial x}\ , \qquad y\frac{\partial}{\partial x}\ , \qquad x\frac{\partial}{\partial y}\ , \qquad y\frac{\partial}{\partial y}\ .$$

Böylece grubun sonsuz küçük operatörü aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$X = \alpha_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \beta_1 y \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 x \frac{\partial}{\partial y} + \beta_2 y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Bu operatörün oluşturduğu tek parametreli grubu belirleyebilmek ve bu grubun yörüngelerini bulabilmek için aşağıdaki diferansiyel denklem sistemini oluşturalım:

$$\frac{dx}{\alpha_1 x + \beta_1 y} = \frac{dy}{\alpha_2 x + \beta_2 y} = dt.$$

Bu sisteminin katsayılar matrisi aşağıdaki Jordan normal formlarından birine sahiptir:

$$1.\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad 2.\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1.Durum: Bu durumda denklem sistemi aşağıdaki hali alır:

$$\frac{dx}{\lambda_1 x} = \frac{dy}{\lambda_2 y} = dt.$$

Bunu birkaç özel duruma bölelim:

a) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_1 \neq \pm\lambda_2$

Bu durum için aşağıdaki çözümler elde edilir:

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t},$$
$$y = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Böylece aşağıdaki tek parametreli grup elde edilir:

$$x' = xe^{\lambda_1 t},$$
$$y' = ye^{\lambda_2 t}.$$

Bu grubun yörünge eğrileri, genelleştirilmiş hiperbol $(\alpha < 0)$ ve paraboldür $(\alpha > 0)$: $y = cx^{\alpha}$ $(\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1})$.

b) $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda \neq 0$

Benzer işlemler yapıldığında aşağıdaki tek parametreli grup elde edilir:

$$x' = xe^{\lambda t},$$
$$y' = ye^{-\lambda t}.$$

Bu grubun yörünge eğrileri standart hiperbollerdir: $xy = c$.

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$

Bu durumda da benzer işlemlerin ardından aşağıdaki tek parametreli grup elde edilir:

$$x' = xe^{\lambda t},$$
$$y' = ye^{\lambda t}.$$

Bu grubun yörünge eğrileri ise orijinden geçen doğrulardır: $y = cx$.

d) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$

Bu durum için aşağıdaki tek parametreli grup elde edilmiş olur:

$$x' = xe^{\lambda_1 t},$$
$$y' = y.$$

Bu grubun yörünge eğrileri x eksenine paralel doğrulardır.

2.Durum: Bu durumda aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\frac{dx}{\lambda x + y} = \frac{dy}{\lambda y} = dt. \tag{2.2.7}$$

Burada iki seçenek mevcuttur:

a) $\lambda \neq 0$

Denklem sistemin çözümünü aşağıdaki şekilde ederiz:

$$x = (ct + c_1)e^{\lambda t},$$
$$y = ce^{\lambda t}.$$

Bu çözümler de aşağıdaki tek parametreli grubu verir:

$$x' = (x + yt)e^{\lambda t},$$
$$y' = ye^{\lambda t}.$$

Bu grubun yörünge eğrileri transandantal eğrilerdir: $x = \frac{1}{\lambda} yln y + cy$.

b) $\lambda = 0$

Bu durumdaki tek parametreli grup aşağıdaki şekildedir:

$$x' = x + yt,$$
$$y' = y.$$

Bu grubun yörünge eğrileri x eksenine paralel doğrulardır.

III.Equi-centro-affine Grup

Bu grubun elemanları aşağıdaki formdadır:

$$x' = a_1 x + b_1 y, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1.$$
$$y' = a_2 x + b_2 y,$$

Bu elemanlar 3-parametreli bir Lie Grubu oluştururlar. Bu grubun sonsuz küçük dönüşümleri aşağıdaki formdadır:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + (\alpha_1 x + \beta_1 y)\delta t, \\ y' &= y + (\alpha_2 x - \alpha_1 y)\delta t, \end{aligned}\right\}$$

Buradan grubun sonsuz küçük operatörleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y\frac{\partial}{\partial x}\ , \qquad x\frac{\partial}{\partial y}\ , \qquad x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\ .$$

Böylece sonsuz küçük dönüşüm tarafından belirlenen operatör aşağıdaki şekildedir:

$$X = \alpha_1\left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right) + \beta_1 y\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Bu operatörün oluşturduğu tek parametreli grubu bulabilmek için aşağıdaki denklem sistemini oluşturalım:

$$\frac{dx}{\alpha_1 x + \beta_1 y} = \frac{dy}{\alpha_2 x - \alpha_1 y} = dt.$$

Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi aşağıdaki Jordan normal formalarından birine sahiptir:

$$1.\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}\ ; \qquad 2.\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.Durum: Bu durum için sistem aşağıdaki şekli alır:

$$\frac{dx}{\lambda x} = \frac{dy}{-\lambda y} = dt.$$

Burada $\lambda \neq 0$ için sistemin çözümünden aşağıdaki tek parametreli grup elde edilir:

$$x' = xe^{\lambda t}$$
$$y' = ye^{-\lambda t}.$$

Bu tek parametreli grubun yörünge eğrileri standart hiperbollerdir: $xy = c$.

2.Durum: Bu durumda sistem aşağıdaki hale dönüşür:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{0} = dt.$$

Bu sistemin çözümünden de aşağıdaki tek parametreli grup elde edilir:

$$x' = x + yt$$
$$y' = y.$$

Bu grubun yörünge eğrileri x eksenine paralel doğrulardır.

2.3. r-Parametreli Bir Lie Grubunda Bir Eğrinin Eğrilik ve Yay Uzunluğu

Düzlemde r-parametreli bir Lie Grubu aşağıdaki şekilde verilir:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f_1(x, y; a_1, \dots, a_r), \\ y_1 &= f_2(x, y; a_1, \dots, a_r). \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.1)$$

$y(x)$, $(n-1)$.mertebeden sürekli türevlere sahip olmak üzere, $y = y(x)$ eğrisini alalım. Bu takdirde aşağıdaki notasyonu kullanabiliriz:

$$y' = \frac{dy}{dx} \ , \qquad y'' = \frac{dy'}{dx} \ , \dots , \qquad y^{(r-2)} = \frac{dy^{(r-3)}}{dx} \ .$$

Burada $x_1, y_1, y_1{}', \dots , y_1{}^{(r-2)}$ değerlerini dönüştürülen değerler olarak düşünerek, aşağıdaki eşitlikleri oluşturabiliriz:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f_1(x, y; a_1, \dots , a_r), \\ y_1 &= f_2(x, y; a_1, \dots , a_r), \\ y_1' &= f_2(x, y, y'; a_1, \dots , a_r), \\ &\vdots \\ y_1{}^{(r-2)} &= f_2\big(x, y, y', \dots , y^{(r-2)}; a_1, \dots , a_r\big). \end{aligned}\right\} \tag{2.3.2}$$

(2.3.2) denklem sistemine, genişletilmiş grup denklemleri denir. Bu sisteme ayrıca grubun $(r-2)$.mertebeden diferansiyel genişlemesi denir.

Burada $x, y, y', \dots , y^{(r-2)}$ değerlerini bağımsız değişkenler olarak düşünürsek, bunların oluşturduğu sıralı r −liye $(r-2)$.mertebeden eleman denir ve e ile ifade edilir. Ayrıca $x, y, y', \dots , y^{(r-2)}$ değerlerine e elemanlarının koordinatları denir. Diğer yandan, dönüşüm grubunun parametre sayısı da r dir.

$(r-2)$.mertebeden elemanların uzayında genişletilmiş grup geçişmelidir. Yani herhangi bir e elemanı için, bu elemanın belirli bir komşuluğunda, e elemanını bir e_1 elemanına dönüştürebiliriz. (2.3.1) fonksiyonları analitik olduklarından, aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz [19]:

$$a_1 = a_1(e, e_1), \dots , a_r = a_r(e, e_1) \tag{2.3.3}$$

Diğer yandan her bir koordinatın diferansiyeli alınırsa:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy, \\ dy_1 &= \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

elde edilir. Burada a_α parametrelerini (2.3.3) ifadesindeki karşılıkları ile değiştirirsek, aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= \beta_1(e,e_1)dx + \beta_2(e,e_1)dy, \\ dy_1 &= \gamma_1(e,e_1)dx + \gamma_2(e,e_1)dy. \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.4)$$

Bu ifadelerde dx, dy ve e, grubun dönüşümü ile dx_1, dy_1 ve e_1 değerlerine bağlı keyfi değerlerdir. dx^*, dy^* ve e^* da dx, dy ve e ifadelerinin grubun başka bir dönüşümü altındaki görüntüleri olsun. (2.3.4) sisteminde dx, dy ve e yerine dx^*, dy^* ve e^* yazılsa da denklem sistemi sağlanacaktır. Başka bir deyişle, dx_1, dy_1 ve e_1 sabit tutulup dx, dy ve e ifadeleri grup dönüşümleri ile dönüştürülürse (2.3.4) eşitlikleri değişmeyecektir. Böylece $\beta_1(e,e_1) = \lambda_1(e), \beta_2(e,e_1) = \lambda_2(e), \gamma_1(e,e_1) = \mu_1(e), \gamma_2(e,e_1) = \mu_2(e)$ diyebiliriz. Buradan da aşağıdaki diferansiyel formlar elde edilmiş olur:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \lambda_1(e)dx + \lambda_2(e)dy, \\ \omega_2 &= \mu_1(e)dx + \mu_2(e)dy. \end{aligned}\right\}$$

Şimdi $y = y(x)$ eşitliği ile verilen eğriyi göz önüne alalım. $dy = y'dx$ olduğunu biliyoruz. Bunu ω_1, ω_2 formlarında yerine yazarsak aşağıdaki eşitlikler elde edilecektir:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= [\lambda_1(e) + \lambda_2(e)y']dx = \lambda(e)dx, \\ \omega_2 &= [\mu_1(e) + \mu_2(e)y']dx = \mu(e)dx. \end{aligned}\right\}$$

Bu katsayıların oranı grubun, yalnızca e değişkenine bağlı invaryantıdır. Bu invaryanttan $\omega = \omega(e)dx$ biçiminde bir invaryant form oluşturulabilir. Buna $r-$ parametreli Lie Grubu'nun ürettiği geometrideki bir eğrinin yay elemanı denir ve $ds = w(e)dx$ ile ifade edilir [19].

Şimdi (2.3.2) genişletilmiş grup denklemlerindeki $y_1^{(r-2)}$ ifadesinin diferansiyelini inceleyelim:

$$dy_1^{(r-2)} = \frac{\partial f_r}{\partial x}dx + \frac{\partial f_r}{\partial y}dy + \frac{\partial f_r}{\partial y'}dy' + \cdots + \frac{\partial f_r}{\partial y^{(r-2)}}dy^{(r-2)}.$$

Burada a_α parametreleri yerine (2.3.3) eşitliklerini yazarsak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$dy_1^{(r-2)} = \alpha_1(e,e_1)dx + \alpha_2(e,e_1)dy + \cdots + \alpha_r(e,e_1)dy^{(r-2)}.$$

Yine $e_1$elemanı sabit tutulup benzer işlemler yapılırsa aşağıdaki diferansiyel form elde edilir:

$$\alpha_1(e)dx + \alpha_2(e)dy + \cdots + \alpha_r(e)dy^{(r-2)}.$$

Diğer yandan tekrar $y = y(x)$ eğrisini ve aşağıdaki eşitlikleri dikkate alalım:

$$dy = y'dx, dy' = y''dx, \dots, dy^{(r-2)} = y^{(r-1)}dx.$$

Böylece aşağıdaki invaryant form elde edilir:

$$\left[\alpha_1(e) + \alpha_2(e)y' + \cdots + \alpha_r(e)y^{(r-1)}\right]dx,$$

bunu da başka bir ifadeyle aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\left[\tilde{\alpha}(e) + \tilde{\beta}(e)y^{(r-1)}\right]dx.$$

Bu formu eğrimizin yay elemanı $ds = \omega(e)dx$ ile bölelim, bu takdirde aşağıdaki diferansiyel form elde edilmiş olur:

$$k = \alpha(e) + \beta(e)y^{(r-1)}. \tag{2.3.5}$$

Bu ifadeye $r -$ parametreli Lie Grubu'nun ürettiği geometride bir eğrinin eğriliği denir.

2.4. "k" ve "ds" İfadelerinin Grup Operatörleri Yardımıyla Hesaplanması

Bir $r -$ parametreli Lie Grubu'nun r tane lineer bağımsız sonsuz küçük operatörü aşağıdaki şekildedir:

$$X_\varrho = \xi_\varrho \frac{\partial}{\partial x} + \eta_\varrho \frac{\partial}{\partial y} \qquad (\varrho = 1,2, \dots, r).$$

Bu operatörün $(r-1)$.mertebeden genişletilmiş hali, aşağıdaki gibi tanımlanır [4]:

$$X_{\varrho}{}^{(r-1)} = \xi_{\varrho}\frac{\partial}{\partial x} + \eta_{\varrho}\frac{\partial}{\partial y} + \eta'{}_{\varrho}\frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + \eta_{\varrho}{}^{(r-1)}\frac{\partial}{\partial y^{(r-1)}}.$$

Burada,

$$\begin{aligned}
\eta'{}_{\varrho} &= \frac{d\eta_{\varrho}}{dx} - y'\frac{d\xi_{\varrho}}{dx}\\
\eta''{}_{\varrho} &= \frac{d\eta'{}_{\varrho}}{dx} - y''\frac{d\xi_{\varrho}}{dx}\\
&\vdots\\
\eta_{\varrho}{}^{(r-1)} &= \frac{d\eta_{\varrho}{}^{(r-2)}}{dx} - y^{(r-1)}\frac{d\xi_{\varrho}}{dx},
\end{aligned}$$

şeklindedir. Örnek olarak bu denklemlerden birincisini türetelim. (x, y) noktasını (x_1, y_1) noktasına dönüştüren sonsuz küçük dönüşüm aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x + \xi_{\varrho}\delta t + \xi_{\varrho}(\delta t)^2 + \cdots, \qquad \delta x = \xi_{\varrho}\delta t,\\
y_1 &= y + \eta_{\varrho}\delta t + \eta_{\varrho}(\delta t)^2 + \cdots, \qquad \delta y = \eta_{\varrho}\delta t.
\end{aligned}$$

Bu eşitliklerin diferansiyeli alınırsa:

$$\begin{aligned}
dx_1 &= dx + d\xi_{\varrho}\delta t + d\xi_{\varrho}(\delta t)^2 + \cdots,\\
dy_1 &= dy + d\eta_{\varrho}\delta t + d\eta_{\varrho}(\delta t)^2 + \cdots,
\end{aligned}$$

olur ve buradan da

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} = y' + \left(\frac{d\eta_{\varrho}}{dx} - y'\frac{d\xi_{\varrho}}{dx}\right)\delta t + \cdots$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki eşitlik elde edilmiş olur:

$$\delta y' = \eta'_{\varrho}\delta t = \left(\frac{d\eta_{\varrho}}{dx} - y'\frac{d\xi_{\varrho}}{dx}\right)\delta t.$$

$r -$ parametreli bir Lie Grubu'nun geometrisinde bir eğrinin eğriliği

$$k = \alpha y^{(r-1)} + \beta.$$

biçiminde tanımlanmıştı. Bu eşitliğin sonsuz küçük dönüşüm altında görüntüsü aşağıdaki biçimdedir:

$$\frac{\delta k}{\delta t} = \frac{\delta \alpha}{\delta t} y^{(r-1)} + \alpha {\eta_{\varrho}}^{(r-1)} + \frac{\delta \beta}{\delta t} = 0. \quad (2.4.1)$$

Burada,

$$\eta_{\varrho}^{(r-1)} = \frac{d\eta_{\varrho}^{(r-2)}}{dx} - y^{(r-1)}\frac{d\xi_{\varrho}}{dx}$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitliğin hesaplanması ile elde edilen $\eta_{\varrho}^{(r-1)}$ değerinde $y^{(r-1)}$ değişkeninin katsayısını γ_{ϱ} ve geriye kalan tüm terimleri de δ_{ϱ} ile ifade edersek,

$$\eta_{\varrho}^{(r-1)} = \gamma_{\varrho} y^{(r-1)} + \delta_{\varrho}$$

eşitliği elde edilir. Bunu (2.4.1) denkleminde yerine yazarsak,

$$\frac{\delta k}{\delta t} = y^{(r-1)}\left(\frac{\delta \alpha}{\delta t} + \alpha\gamma_{\varrho}\right) + \frac{\delta \beta}{\delta t} + \alpha\delta_{\varrho} = 0$$

elde edilir. $y^{(r-1)}$ keyfi olduğundan, bu denklemin sağlanması için,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta\alpha}{\delta t}+\alpha\gamma_{\varrho}=0\\ \frac{\delta\beta}{\delta t}+\alpha\delta_{\varrho}=0\end{aligned}\right\} \tag{2.4.2}$$

denklem sisteminin sağlanması gerekir. Bu denklemlerden birincisini detaylı olarak yazıp inceleyelim:

$$\frac{\delta ln\alpha}{\delta t}+\gamma_{\varrho}=\frac{\partial ln\alpha}{\partial x}\xi_{\varrho}+\frac{\partial ln\alpha}{\partial y}\eta_{\varrho}+\frac{\partial ln\alpha}{\partial y'}\eta_{\varrho}'+\cdots+\frac{\partial ln\alpha}{\partial y^{(r-2)}}\eta_{\varrho}^{(r-2)}+\gamma_{\varrho}=0.$$

Burada $\varrho=1,2,\dots,r$ olduğundan r tane denklem elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{\partial ln\alpha}{\partial x}dx+\frac{\partial ln\alpha}{\partial y}dy+\frac{\partial ln\alpha}{\partial y'}dy'+\cdots+\frac{\partial ln\alpha}{\partial y^{(r-2)}}dy^{(r-2)}-dln\alpha=0$$

olduğu dikkate alınırsa, $r+1$ adet denklem elde edilir ve bu denklem sistemi uyumlu ise aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & {\eta_1}' & \cdots & \eta_1^{(r-2)} & \gamma_1\\ \xi_2 & \eta_2 & {\eta_2}' & \cdots & \eta_2^{(r-2)} & \gamma_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \xi_r & \eta_r & {\eta_r}' & \cdots & \eta_r^{(r-2)} & \gamma_r\\ dx & dy & dy' & \cdots & dy^{(r-2)} & -dln\alpha\end{vmatrix}=0$$

Burada,

$$\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \cdots & \eta_1^{(r-2)} & \gamma_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \cdots & \eta_2^{(r-2)} & \gamma_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \xi_r & \eta_r & \cdots & \eta_r^{(r-2)} & \gamma_r\\ dx & dy & \cdots & dy^{(r-2)} & -dln\alpha\end{vmatrix}=-\Delta dln\alpha+\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \cdots & \eta_1^{(r-2)} & \gamma_1\\ \xi_2 & \eta_2 & \cdots & \eta_2^{(r-2)} & \gamma_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \xi_r & \eta_r & \cdots & \eta_r^{(r-2)} & \gamma_r\\ dx & dy & \cdots & dy^{(r-2)} & 0\end{vmatrix}=0$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$dln\alpha = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1{}' & \cdots & \eta_1^{(r-2)} & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi_r & \eta_r & \eta_r{}' & \cdots & \eta_r^{(r-2)} & \gamma_r \\ dx & dy & dy' & \cdots & dy^{(r-2)} & 0 \end{vmatrix} \qquad (2.4.3)$$

eşitliği elde edilir ve Δ aşağıdaki şekildedir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1{}' & \cdots & \eta_1^{(r-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_r & \eta_r & \eta_r{}' & \cdots & \eta_r^{(r-2)} \end{vmatrix}. \qquad (2.4.4)$$

(2.4.2) denklem sisteminin ikinci denklemi için de benzer işlemler yapılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$d\beta = \frac{\alpha}{\Delta}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1{}' & \cdots & \eta_1^{(r-2)} & \delta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi_r & \eta_r & \eta_r{}' & \cdots & \eta_r^{(r-2)} & \delta_r \\ dx & dy & dy' & \cdots & dy^{(r-2)} & 0 \end{vmatrix}. \qquad (2.4.5)$$

(2.4.3) ve (2.4.5) ifadelerinden α ve β elde edilip (2.3.6) denkleminde yerine yazılırsa eğrinin eğriliği elde edilmiş olur.

Diğer taraftan,

$$k = \alpha y^{(r-1)} + \beta$$

eşitliğinin diferansiyeli alınırsa,

$$dk = y^{(r-1)}d\alpha + \alpha dy^{(r-1)} + d\beta$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$dk = \alpha\left[y^{(r-1)}dln\alpha + dy^{(r-1)}\right] + d\beta$$

olur. Buradaki $dln\alpha$ yerine (2.4.3) deki karşılığı ve $d\beta$ yerine de (2.4.5) deki karşılığı yazılırsa,

$$dk = \alpha\left[y^{(r-1)}\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \cdots & \eta_1^{(r-2)} & \gamma_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \xi_r & \eta_r & \cdots & \eta_r^{(r-2)} & \gamma_r\\ dx & dy & \cdots & dy^{(r-2)} & 0\end{vmatrix} + dy^{(r-1)}\right] + \frac{\alpha}{\Delta}\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \cdots & \eta_1^{(r-2)} & \delta_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \xi_r & \eta_r & \cdots & \eta_r^{(r-2)} & \delta_r\\ dx & dy & \cdots & dy^{(r-2)} & 0\end{vmatrix}$$

olup, eşitlik düzenlenirse

$$dk = \frac{\alpha}{\Delta}\left[y^{(r-1)}\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \cdots & \eta_1^{(r-2)} & \gamma_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \xi_r & \eta_r & \cdots & \eta_r^{(r-2)} & \gamma_r\\ dx & dy & \cdots & dy^{(r-2)} & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \cdots & \eta_1^{(r-2)} & \delta_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \xi_r & \eta_r & \cdots & \eta_r^{(r-2)} & \delta_r\\ dx & dy & \cdots & dy^{(r-2)} & 0\end{vmatrix} + \Delta dy^{(r-1)}\right]$$

elde edilir. Determinantların temel özelliklerini kullanarak bu eşitliği aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$dk = \frac{\alpha}{\Delta}\left[\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \eta_1{}' & \cdots & \eta_1^{(r-2)} & \gamma_1 y^{(r-1)} + \delta_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \xi_r & \eta_r & \eta_r{}' & \cdots & \eta_r^{(r-2)} & \gamma_r y^{(r-1)} + \delta_r\\ dx & dy & dy' & \cdots & dy^{(r-2)} & 0\end{vmatrix} + \Delta dy^{(r-1)}\right].$$

Yine burada determinantın sütun açılımını kullanarak,

$$dk = \frac{\alpha}{\Delta}\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \eta_1{}' & \cdots & \eta_1^{(r-2)} & \gamma_1 y^{(r-1)} + \delta_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \xi_r & \eta_r & \eta_r{}' & \cdots & \eta_r^{(r-2)} & \gamma_r y^{(r-1)} + \delta_r\\ dx & dy & dy' & \cdots & dy^{(r-2)} & dy^{(r-1)}\end{vmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\eta_\varrho^{(r-1)} = \gamma_\varrho y^{(r-1)} + \delta_\varrho$ olduğu kullanılırsa aşağıdaki formül elde edilir:

$$dk = \frac{\alpha}{\Delta}\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & \eta_1{}' & \cdots & \eta_1^{(r-2)} & \eta_1^{(r-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \xi_r & \eta_r & \eta_r{}' & \cdots & \eta_r^{(r-2)} & \eta_r^{(r-1)}\\ dx & dy & dy' & \cdots & dy^{(r-2)} & dy^{(r-1)}\end{vmatrix}. \qquad (2.4.6)$$

Buradan görülür ki (2.4.6) formülü ile k direkt hesaplanabilir.

Şimdi de bir eğrinin yay uzunluğunu hesaplayalım. r-parametreli bir Lie grubunda bir eğrinin yay uzunluğu aşağıdaki şekilde verilir:

$$s = \int \varphi(x, y, y', \dots, y^{(r-2)})dx.$$

Sonsuz küçük dönüşüm durumunda $\delta x = \xi_a \delta t$ ve $\delta y = \eta_\alpha \delta t$ eşitlikleri kullanılırsa

$$s + \int \left(\frac{\delta\varphi}{\delta t} + \varphi \frac{d\xi_\alpha}{dx}\right) dx\delta t$$

elde edilir [19]. Eğrinin yay uzunluğu bir grup invaryantı olduğundan $\frac{\delta\varphi}{\delta t} + \varphi \frac{d\xi_\alpha}{dx} = 0$ olmalıdır. Dolayısı ile

$$\frac{\delta ln\varphi}{\delta t} + \frac{d\xi_\alpha}{dx} = \frac{\partial ln\varphi}{\partial x}\xi_\alpha + \frac{\partial ln\varphi}{\partial y}\eta_\alpha + \frac{\partial ln\varphi}{\partial y'}\eta'_\alpha + \cdots + \frac{\partial ln\varphi}{\partial y^{(r-2)}}\eta_\alpha^{(r-2)} + \frac{d\xi_\alpha}{dx} = 0$$

elde edilir. Diğer yandan aşağıdaki özdeşliği de göz önüne alalım:

$$\frac{\partial ln\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial ln\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial ln\varphi}{\partial y'}dy' + \cdots + \frac{\partial ln\varphi}{\partial y^{(r-2)}}dy^{(r-2)} - dln\varphi = 0.$$

Böylece $(r+1)$ denklem elde edilir. Bu denklem sisteminin uyumluluğundan aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & {\eta_1}' & \cdots & \eta_1^{(r-2)} & \frac{d\xi_1}{dx} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi_r & \eta_r & {\eta_r}' & \cdots & \eta_r^{(r-2)} & \frac{d\xi_r}{dx} \\ dx & dy & dy' & \cdots & dy^{(r-2)} & -dln\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Buradan küçük bir düzenlemeyle aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1{}' & \cdots & \eta_1^{(r-2)} & \dfrac{d\xi_1}{dx} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi_r & \eta_r & \eta_r{}' & \cdots & \eta_r^{(r-2)} & \dfrac{d\xi_r}{dx} \\ dx & dy & dy' & \cdots & dy^{(r-2)} & 0 \end{vmatrix} - \Delta\, dln\varphi = 0.$$

Bu denklemin düzenlenmesiyle aşağıdaki formül elde edilir.

$$dln\varphi = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1{}' & \cdots & \eta_1^{(r-2)} & \dfrac{d\xi_1}{dx} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi_r & \eta_r & \eta_r{}' & \cdots & \eta_r^{(r-2)} & \dfrac{d\xi_r}{dx} \\ dx & dy & dy' & \cdots & dy^{(r-2)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Buradaki Δ, (2.4.3) denklemindekiyle aynıdır. Böylece eğrinin yay uzunluğu formülü olan $s = \int \varphi(x, y, y', \dots, y^{(r-2)})dx$ eşitliğindeki φ fonksiyonu için bir formül elde edilmiş olur.

2.5. Uygulamalar: Afin Grup ve Onun Alt Gruplarının Geometrisinde, Bir Düzlem Eğrisinin Eğriliği ve Yay Uzunluğu

2.5.1. Equi-centro-afin Grupta Hesaplamalar

Equi-centro-afin grubun düzlemdeki görüntüsü aşağıdaki şekildedir:

$$x_1 = ax + by, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$
$$y_1 = cx + dy,$$

Bu grubun operatörleri;

$$y\frac{\partial}{\partial x}\ , \qquad x\frac{\partial}{\partial y}\ , \qquad x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklindedir. Bu operatörleri $X_\varrho = \xi_\varrho \frac{\partial}{\partial x} + \eta_\varrho \frac{\partial}{\partial y}$ genel formunda yazıp ξ_ϱ ve η_ϱ katsayıları elde edilir. $X_1 = y\frac{\partial}{\partial x}\,, X_2 = \ x\frac{\partial}{\partial y}\,, X_3 = \ x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$ olduğundan, katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\xi_1 = y\,, \qquad \eta_1 = 0$$
$$\xi_2 = 0, \qquad \eta_2 = x$$
$$\xi_3 = x, \qquad \eta_3 = -y$$

Diğer yandan bu grubun 2.mertebeden genişletilmiş grup operatörü

$$X_\varrho{}'' = \xi_\varrho \frac{\partial}{\partial x} + \eta_\varrho \frac{\partial}{\partial y} + \eta'_\varrho \frac{\partial}{\partial y'} + \eta_\varrho{}'' \frac{\partial}{\partial y''}$$

formundadır ve bu genişletilmiş operatörün η'_ϱ ve $\eta_\varrho{}''$ katsayıları aşağıdaki formüller aracılığı ile hesaplanır:

$$\eta'_\varrho = \frac{d\eta_\varrho}{dx} - y'\frac{d\xi_\varrho}{dx}$$
$$\eta''_\varrho = \frac{d\eta'_\varrho}{dx} - y''\frac{d\xi_\varrho}{dx}.$$

$\eta'_\varrho = \frac{d\eta_\varrho}{dx} - y'\frac{d\xi_\varrho}{dx}$ eşitliğindeki ξ_ϱ ve η_ϱ ifadeleri yerine yazılıp, $\varrho = 1,2,3$ için hesaplamalar yapılırsa:

$$\eta'_1 = -y'^2$$
$$\eta'_2 = 1$$
$$\eta'_3 = -2y'$$

katsayıları elde edilir. Diğer yandan, $\eta''_\varrho = \frac{d\eta'_\varrho}{dx} - y''\frac{d\xi_\varrho}{dx}$ eşitliğindeki η'_ϱ ve ξ_ϱ ifadeleri denklemde yenine yazılırsa:

$$\eta''_1 = -3y'y''$$

$$\eta_2'' = 0$$
$$\eta_3'' = -3y''$$

katsayıları elde edilmiş olur. Tüm bu katsayılar (2.4.4) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\Delta = \begin{vmatrix} y & 0 & -y'^2 \\ 0 & x & 1 \\ x & -y & -2y' \end{vmatrix} = (xy' - y)^2$$

olmak üzere, (2.4.3) formülünden

$$\begin{aligned} dln\varphi &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} y & 0 & -y'^2 & y' \\ 0 & x & 1 & 0 \\ x & -y & -2y' & 1 \\ dx & dy & dy' & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(xy'-y)^2}\left[-y'\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ x & -y & -2y' \\ dx & dy & dy' \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ x & -y & -2y' \\ dx & dy & dy' \end{vmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{(xy'-y)^2}[y'(xy'-y)dx - (xy'-y)dy + x(xy'-y)dy'] \\ &= \frac{1}{(xy'-y)^2}(xy'-y)(y'dx + xdy' - dy) = \frac{d(xy'-y)}{xy'-y} \\ &= dln(xy'-y) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $dln\varphi = dln(xy' - y)$ bulunur. Bu denklemin çözümünden $\varphi = xy' - y$ elde edilir. Bu eşitlik yay uzunluğu formülünde yerine yazılırsa, eğrinin yay uzunluğu

$$ds = (xy' - y)dx \qquad (2.5.1)$$

olarak elde edilir.

σ, eğri üzerindeki bir noktanın konum vektörünü göstermek üzere, herhangi bir t parametresi için

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y'\dot{x}$$

olup,

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

elde edilir. Böylece bu eşitlik (2.5.1) formülünde yerine yazılırsa formül aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt} = \left(x\frac{\dot{y}}{\dot{x}} - y\right)\dot{x} = x\dot{y} - y\dot{x}.$$

Diğer yandan, elde edilen eşitlikte

$$(\sigma\dot{\sigma}) = \begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{vmatrix} = x\dot{y} - y\dot{x}$$

determinant gösterimi kullanılırsa (2.5.1) formülü aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = (\sigma\dot{\sigma}).$$

Benzer şekilde eğriliği hesaplamak için (2.4.3) ve (2.4.5) formülleri kullanılmalıdır. Bunun için öncelikle $\eta''_\varrho = \gamma_\varrho y'' + \delta_\varrho$ eşitliğindeki katsayılar elde edilmelidir.

$$\eta''_1 = -3y'y''$$
$$\eta''_2 = 0$$
$$\eta''_3 = -3y''$$

olduğundan γ_ϱ ve δ_ϱ katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur:

$$\gamma_1 = -3y', \qquad \delta_1 = 0$$
$$\gamma_2 = 0, \qquad \delta_2 = 0$$
$$\gamma_3 = -3, \qquad \delta_3 = 0.$$

Bu değerler (2.4.3) formülünde yerine yazılırsa,

$$dln\alpha = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} y & 0 & -y'^2 & -3y' \\ 0 & x & 1 & 0 \\ x & -y & -2y' & -3 \\ dx & dy & dy' & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(xy'-y)^2}\left[3y'\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ x & -y & -2y' \\ dx & dy & dy' \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} y & 0 & -y'^2 \\ 0 & x & 1 \\ dx & dy & dy' \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{3}{(xy'-y)^2}[-y'(xy'-y)dx + (xy'-y)dy - x(xy'-y)dy']$$

$$= \frac{-3}{(xy'-y)^2}(xy'-y)(y'dx + xdy' - dy) = \frac{-3d(xy'-y)}{xy'-y}$$

$$= dln(xy'-y)^{-3} = dln\left(\frac{1}{(xy'-y)^3}\right)$$

olup,

$$\alpha = \frac{1}{(xy'-y)^3}$$

elde edilir. Bununla beraber $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0$ değerleri de (2.4.5) formülünde yerine yazılırsa

$$d\beta = \frac{\alpha}{\Delta}\begin{vmatrix} y & 0 & -y'^2 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ x & -y & -2y' & 0 \\ dx & dy & dy' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

olup,

$$\beta = 0$$

elde edilir. Son olarak, elde edilen $\alpha = \frac{1}{(xy'-y)^3}$ ve $\beta = 0$ değerleri $k = \alpha y'' + \beta$ eğrilik formülünde yerine yazılırsa eğrinin eğriliği aşağıdaki şekilde bulunur:

$$k = \frac{y''}{(xy' - y)^3}.$$

σ, eğri üzerindeki bir noktanın konum vektörünü göstermek üzere, herhangi bir t parametresi için

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y'\dot{x}$$

ve

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d}{dt}(y'\dot{x}) = \dot{x}\frac{dy'}{dt} + y'\frac{d\dot{x}}{dt} = \dot{x}\frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\ddot{x} = \dot{x}^2 y'' + \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\ddot{x}$$

olup,

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

ve

$$y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler $k = \frac{y''}{(xy' - y)^3}$ formülünde yerine yazılıp

$$(\dot{\sigma}\ddot{\sigma}) = \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix} = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}$$

ve

$$(\sigma\dot{\sigma}) = \begin{vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \end{vmatrix} = x\dot{y} - y\dot{x}$$

determinant eşitlikleri kullanılırsa eğrinin eğriliği aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$k = \frac{(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})}{(\sigma\dot{\sigma})^3}.$$

2.5.2. Centro-afin Grupta Hesaplamalar

Bilindiği gibi, centro-afin grubun düzlemdeki görüntüsü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} x_1 &= ax + by, \\ y_1 &= cx + dy, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bu grubun operatörleri,

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_4 = y\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklindedir. Buradan 3.mertebeden genişletilmiş operatörün katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{array}{lllll} \xi_1 = x & \eta_1 = 0 & \eta_1' = -y' & \eta_1'' = -2y'' & \eta_1''' = -3y''' \\ \xi_2 = y & \eta_2 = 0 & \eta_2' = -y'^2 & \eta_2'' = -3y'y'' & \eta_2''' = -3y''^2 - 4y'y''' \\ \xi_3 = 0 & \eta_3 = x & \eta_3' = 1 & \eta_3'' = 0 & \eta_3''' = 0 \\ \xi_4 = 0 & \eta_4 = y & \eta_4' = y' & \eta_4'' = y'' & \eta_4''' = y'''. \end{array}$$

Dolayısıyla,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 0 & -y' & -2y'' \\ y & 0 & -y'^2 & -3y'y'' \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & y & y' & y'' \end{vmatrix} = -2y''(xy' - y)^2$$

olmak üzere,

$$dln\varphi = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x & 0 & -y' & -2y'' & 1 \\ y & 0 & -y'^2 & -3y'y'' & y' \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & y' & y'' & 0 \\ dx & dy & dy' & dy'' & 0 \end{vmatrix} = dln\sqrt{\frac{y''}{xy'-y}}$$

elde edilir. Buradan gerekli işlemler yapıldığında yay uzunluğu formülü

$$ds = \frac{y''^{1/2}}{(xy'-y)^{1/2}}dx \qquad (2.5.2)$$

olarak elde edilir.

σ eğri üzerindeki bir noktanın konum vektörünü göstermek üzere, herhangi bir t parametresi için (2.5.2) formülünü aşağıdaki şekilde ifade ederiz:

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = \frac{(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})^{1/2}}{(\sigma\dot{\sigma})^{1/2}}.$$

Diğer yandan, eğrilik hesabı için (2.4.2) ve (2.4.4) formüllerini kullanalım. Bu hesabın yapılabilmesi için öncelikle formüllerdeki α ve β değerlerinin hesaplanması gerekmektedir.

$$dln\alpha = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x & 0 & -y' & -2y'' & -3 \\ y & 0 & -y'^2 & -3y'y'' & -4y' \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & y' & y'' & 1 \\ dx & dy & dy' & dy'' & 0 \end{vmatrix} = dln\left(\frac{(xy'-y)^{1/2}}{2y''^{3/2}}\right)$$

olup,

$$\alpha = \left(\frac{1}{2}\frac{(xy'-y)^{1/2}}{y''^{3/2}}\right)$$

elde edilir. Bununla beraber

$$d\beta = \frac{\alpha}{\Delta}\begin{vmatrix} x & 0 & -y' & -2y'' & 0 \\ y & 0 & -y'^2 & -3y'y'' & -3y''^2 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & y' & y'' & 0 \\ dx & dy & dy' & dy'' & 0 \end{vmatrix} = d\left(\frac{-3xy''^{1/2}}{2(xy'-y)^{1/2}}\right)$$

olup,

$$\beta = -\frac{3}{2}\frac{xy''^{1/2}}{(xy'-y)^{1/2}}$$

elde edilir. Böylece eğrilik aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur:

$$k = \frac{1}{2}\frac{(xy'-y)^{1/2}}{y''^{3/2}}y''' - \frac{3}{2}\frac{xy''^{1/2}}{(xy'-y)^{1/2}}.$$

Herhangi bir t parametresi ile yeni parametrizasyon sonucunda formül aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$k = \frac{(\sigma\dot{\sigma})^{1/2}}{2(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})^{3/2}}\left[(\dot{\sigma}\dddot{\sigma}) - 3\frac{(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})(\sigma\ddot{\sigma})}{(\sigma\dot{\sigma})}\right].$$

2.5.3. Equi-afin Grupta Hesaplamalar

Equi-afin grubun düzlemdeki görüntüsü aşağıdaki şekildedir:

$$x_1 = ax + by + e, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$
$$y_1 = cx + dy + f,$$

Bu grubun operatörleri;

$$\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}, \qquad y\frac{\partial}{\partial x}, \qquad x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

şeklindedir. Buradan 4.mertebeden genişletilmiş operatörün katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{array}{llllll}
\xi_1 = 1 & \eta_1 = 0 & \eta_1' = 0 & \eta_1'' = 0 & \eta_1''' = 0 & \eta_1^{(4)} = 0 \\
\xi_2 = 0 & \eta_2 = 1 & \eta_2' = 0 & \eta_2'' = 0 & \eta_2''' = 0 & \eta_2^{(4)} = 0 \\
\xi_3 = y & \eta_3 = 0 & \eta_3' = -y'^2 & \eta_3'' = -3y'y'' & \eta_3''' = -3y''^2 - 4y'y''' & \eta_3^{(4)} = -10y''y''' - 5y'y^{(4)} \\
\xi_4 = 0 & \eta_4 = x & \eta_4' = 1 & \eta_4'' = 0 & \eta_4''' = 0 & \eta_4^{(4)} = 0 \\
\xi_5 = x & \eta_5 = -y & \eta_5' = -2y' & \eta_5'' = -3y'' & \eta_5''' = -4y''' & \eta_5^{(4)} = -5y^{(4)}
\end{array}$$

Dolayısıyla,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & -y'^2 & -3y'y'' & -3y''^2 - 4y'y''' \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ x & -y & -2y' & -3y'' & -4y''' \end{vmatrix} = 9y''^3$$

olmak üzere,

$$dln\varphi = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & -y'^2 & -3y'y'' & -3y''^2 - 4y'y''' & y' \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -y & -2y' & -3y'' & -4y''' & 1 \\ dx & dy & dy' & dy'' & dy''' & 0 \end{vmatrix} = dlny''^{1/3}$$

elde edilir. Buradan gerekli işlemler yapıldığında yay uzunluğu formülü

$$ds = y''^{1/3}dx \tag{2.5.3}$$

olarak elde edilir.

σ eğri üzerindeki bir noktanın konum vektörünü göstermek üzere, herhangi bir t parametresi için (2.5.3) formülünü aşağıdaki şekilde ifade ederiz:

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = (\dot{\sigma}\ddot{\sigma})^{1/3}.$$

Benzer şekilde eğriliği de hesaplayalım.

$$dln\alpha = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & -y'^2 & -3y'y'' & -3y''^2 - 4y'y''' & -5y' \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -y & -2y' & -3y'' & -4y''' & -5 \\ dx & dy & dy' & dy'' & dy''' & 0 \end{vmatrix} = dln\frac{1}{3y''^{5/3}}$$

olup,

$$\alpha = \frac{1}{3y''^{5/3}}$$

elde edilir. Bununla beraber

$$d\beta = \frac{\alpha}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & -y'^2 & -3y'y'' & -3y''^2 - 4y'y''' & -10y''y''' \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -y & -2y' & -3y'' & -4y''' & 0 \\ dx & dy & dy' & dy'' & dy''' & 0 \end{vmatrix}$$
$$= d\left(-\frac{5}{9}\frac{y'''^2}{y''^{8/3}}\right)$$

olup,

$$\beta = -\frac{5}{9}\frac{y'''^2}{y''^{8/3}}$$

elde edilir. Böylece eğrilik aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur:

$$k = \frac{1}{3}\frac{y^{IV}}{y''^{5/3}} - \frac{5}{9}\frac{y'''^2}{y''^{8/3}}$$

Herhangi bir t parametresi ile yeni parametrizasyon sonucunda formül aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$k=\frac{3[\dot\sigma\ddot\sigma][\dot\sigma\ddddot\sigma]+12[\dot\sigma\ddot\sigma][\ddot\sigma\dddot\sigma]-5[\dot\sigma\dddot\sigma]^2}{9[\dot\sigma\ddot\sigma]^{8/3}}.$$

2.5.4. Genel Afin Grupta Hesaplamalar

Düzlemde genel afin grubun görüntüsü aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} x_1 &= ax+by+e, \\ y_1 &= cx+dy+f, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bu grubun operatörleri;

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad x\frac{\partial}{\partial x}, \quad y\frac{\partial}{\partial x}, \quad x\frac{\partial}{\partial y}, \quad y\frac{\partial}{\partial y}.$$

şeklindedir. Buradan 5.mertebeden genişletilmiş operatörün katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$\xi_1=1$	$\eta_1=0$	$\eta_1'=0$	$\eta_1''=0$	$\eta_1'''=0$	$\eta_1^{(4)}=0$	$\eta_1^{(5)}=0$
$\xi_2=0$	$\eta_2=1$	$\eta_2'=0$	$\eta_2''=0$	$\eta_2'''=0$	$\eta_2^{(4)}=0$	$\eta_2^{(5)}=0$
$\xi_3=x$	$\eta_3=0$	$\eta_3'=-y'$	$\eta_3''=-2y''$	$\eta_3'''=-3y'''$	$\eta_3^{(4)}=-4y^{(4)}$	$\eta_3^{(5)}=-5y^{(5)}$
$\xi_4=y$	$\eta_4=0$	$\eta_4'=-y'^2$	$\eta_4''=-3y'y''$	$\eta_4'''=-3y''^2-4y'y'''$	$\eta_4^{(4)}=-10y''y'''-5y'y^{(4)}$	$\eta_4^{(5)}=-10y'''^2-15y''y^{(4)}-6y'y^{(5)}$
$\xi_5=0$	$\eta_5=y$	$\eta_5'=y'$	$\eta_5''=y''$	$\eta_5'''=y'''$	$\eta_5^{(4)}=y^{(4)}$	$\eta_5^{(5)}=y^{(5)}$
$\xi_6=0$	$\eta_6=x$	$\eta_6'=1$	$\eta_6''=0$	$\eta_6'''=0$	$\eta_6^{(4)}=0$	$\eta_6^{(5)}=0$

Dolayısıyla,

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & -y' & -2y'' & -3y''' & -4y^{(4)} \\ y & 0 & -y'^2 & -3y'y'' & -3y''^2-4y'y''' & -10y''y'''-5y'y^{(4)} \\ 0 & y & y' & y'' & y''' & y^{(4)} \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=2y''^2(3y''y^{(4)}-5y'''^2)$$

olmak üzere,

$$
dln\varphi = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & -y' & -2y'' & -3y''' & -4y^{(4)} & 1 \\ y & 0 & -y'^2 & -3y'y'' & -3y''^2 - 4y'y''' & -10y''y''' - 5y'y^{(4)} & y' \\ 0 & y & y' & y'' & y''' & y^{(4)} & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx & dy & dy' & dy'' & dy''' & dy^{(4)} & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= dln\left(\frac{3y''y^{(4)} - 5y'''^2}{3y''^2}\right)^{1/2}
$$

elde edilir. Buradan gerekli işlemler yapıldığında yay uzunluğu formülü

$$
ds = \left(\frac{3y''y^{(4)} - 5y'''^2}{3y''^2}\right)^{1/2} dx \tag{2.5.4}
$$

olarak elde edilir.

σ eğri üzerindeki bir noktanın konum vektörünü göstermek üzere, herhangi bir t parametresi için (2.5.4) formülünü aşağıdaki şekilde ifade ederiz:

$$
\frac{ds}{dt} = \dot{s} = \left(\frac{3(\dot{\sigma}\ddddot{\sigma})(\dot{\sigma}\ddot{\sigma}) + 12(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})(\ddot{\sigma}\dddot{\sigma}) - 5(\dot{\sigma}\dddot{\sigma})^2}{3(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})^2}\right)^{1/2}.
$$

Benzer şekilde eğriliği de hesaplayalım.

$$
dln\alpha = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & -y' & -2y'' & -3y''' & -4y^{(4)} & -5 \\ y & 0 & -y'^2 & -3y'y'' & -3y''^2 - 4y'y''' & -10y''y''' - 5y'y^{(4)} & -6y' \\ 0 & y & y' & y'' & y''' & y^{(4)} & 1 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx & dy & dy' & dy'' & dy''' & dy^{(4)} & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= dln\frac{3y^{(5)}}{2\zeta^{3/2}y''}, \qquad \zeta = \frac{y^{(4)}}{y''} - \frac{5}{3}\frac{y'''^2}{y''^2}
$$

olup,

$$\alpha = \frac{3y^{(5)}}{2\zeta^{3/2}y''}$$

elde edilir. Bununla beraber,

$$d\beta = \frac{\alpha}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & -y' & -2y'' & -3y''' & -4y^{(4)} & 0 \\ y & 0 & -y'^2 & -3y'y'' & -3y''^2-4y'y''' & -10y''y'''-5y'y^{(4)} & -10y'''^2-15y''y^{(4)} \\ 0 & y & y' & y'' & y''' & y^{(4)} & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dx & dy & dy' & dy'' & dy''' & dy^{(4)} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= d\left(\frac{3}{2\zeta^{3/2}}\left(-5\frac{y'''y^{(4)}}{y''^2}+\frac{40}{9}\frac{y'''^3}{y''^3}\right)\right)$$

olup,

$$\beta = \frac{3}{2\zeta^{3/2}}\left(-5\frac{y'''y^{(4)}}{y''^2}+\frac{40}{9}\frac{y'''^3}{y''^3}\right)$$

elde edilir. Böylece eğrilik aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur:

$$k = \frac{3}{2\zeta^{3/2}}\left(\frac{y^{(5)}}{y''}-5\frac{y'''y^{(4)}}{y''^2}+\frac{40}{9}\frac{y'''^3}{y''^3}\right).$$

Bu eşitliği daha basit formda aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$k = -\frac{3}{2\zeta^{1/2}}\left(ln\frac{\zeta}{y''^{3/2}}\right)'.$$

Herhangi bir t parametresi ile yeni parametrizasyon sonucunda formül aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$k = -\frac{3}{2\Lambda^{1/2}}\frac{d}{dt}\left(ln\frac{\Lambda}{(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})^{3/2}}\right), \qquad \Lambda^{1/2} = \dot{s}.$$

3. SONUÇLAR

1. Düzlemde afin dönüşümlerin tek parametreli grubu ve bu grubun yörünge eğrileri elde edilmiştir. Elde edilen tek parametreli grup ve grubun yörünge eğrileri aşağıdaki şekildedir:

   a) $\begin{matrix} x' = xe^{\lambda_1 t} \\ y' = ye^{\lambda_2 t} \end{matrix}$ tek parametreli grubunun yörünge eğrileri $y = cx^{\alpha}$ $(\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1})$ dir.

   b) $\begin{matrix} x' = xe^{\lambda t} \\ y' = ye^{-\lambda t} \end{matrix}$ tek parametreli grubunun yörünge eğrileri $xy = c$ dir.

   c) $\begin{matrix} x' = xe^{\lambda t} \\ y' = ye^{\lambda t} \end{matrix}$ tek parametreli grubunun yörünge eğrileri $y = cx$ dir.

   d) $\begin{matrix} x' = xe^{\lambda_1 t} \\ y' = y + \gamma_2 t \end{matrix}$ tek parametreli grubunun yörünge eğrileri $y = \alpha lnx + c$ dir.

   e) $\begin{matrix} x' = xe^{\lambda_1 t} \\ y' = y \end{matrix}$ tek parametreli grubunun yörünge eğrileri $y = c$ dir.

   f) $\begin{matrix} x' = x + \gamma_1 t \\ y' = y + \gamma_2 t \end{matrix}$ tek parametreli grubunun yörünge eğrileri $\overrightarrow{\gamma_1\gamma_2}$ vektörüne paralel doğrulardır.

   g) $\begin{matrix} x' = (x + yt)e^{\lambda t} \\ y' = ye^{\lambda t} \end{matrix}$ tek parametreli grubunun yörünge eğrileri $x = \frac{1}{\lambda} ylny + cy$ dir.

   h) $\begin{matrix} x' = x + yt + \frac{t^2}{2} \\ y' = y + t \end{matrix}$ tek parametreli grubunun yörünge eğrileri $y^2 = 2x + c$ dir.

   i) $\begin{matrix} x' = x + yt \\ y' = y \end{matrix}$ tek parametreli grubunun yörünge eğrileri $y = c$ dir.

2. Herhangi bir r −parametreli Lie grubunun geometrisindeki bir düzlem eğrisinin yay uzunluğu ve eğriliği için formüller elde edilmiştir.
3. Herhangi bir r −parametreli Lie grubunda operatörler aracılığıyla k ve ds için formüller elde edilmiştir.
4. Afin diferansiyel geometri ile Lie gruplar teorisinin ilişkisi ortaya konulmuştur.
5. Equi-centro-afin grubun geometrisindeki bir düzlem eğrisinin yay uzunluğu ve eğriliği elde edilmiştir:

$$\dot{s} = (\sigma\dot{\sigma}), \qquad k = \frac{(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})}{(\sigma\dot{\sigma})^3}.$$

6. Centro-afin grubun geometrisindeki bir düzlem eğrisinin yay uzunluğu ve eğriliği elde edilmiştir:

$$\dot{s} = \frac{(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})^{1/2}}{(\sigma\dot{\sigma})^{1/2}}, \qquad k = \frac{(\sigma\dot{\sigma})^{1/2}}{2(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})^{3/2}}\left[\left(\dot{\sigma}\dddot{\sigma}\right) - 3\,\frac{(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})(\sigma\ddot{\sigma})}{(\sigma\dot{\sigma})}\right].$$

7. Equi-afin grubun geometrisindeki bir düzlem eğrisinin yay uzunluğu ve eğriliği elde edilmiştir:

$$\dot{s} = (\dot{\sigma}\ddot{\sigma})^{1/3}, \qquad k = \frac{3(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})\left(\dot{\sigma}\ddddot{\sigma}\right) + 12(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})\left(\ddot{\sigma}\dddot{\sigma}\right) - 5\left(\dot{\sigma}\dddot{\sigma}\right)^2}{9(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})^{8/3}}.$$

8. Afin grubun geometrisindeki bir düzlem eğrisinin yay uzunluğu ve eğriliği elde edilmiştir:

$$\dot{s} = \left(\frac{3\left(\dot{\sigma}\ddddot{\sigma}\right)(\dot{\sigma}\ddot{\sigma}) + 12(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})\left(\ddot{\sigma}\dddot{\sigma}\right) - 5\left(\dot{\sigma}\dddot{\sigma}\right)^2}{3(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$k = -\frac{3}{2\Lambda^{1/2}}\frac{d}{dt}\left(ln\,\frac{\Lambda}{(\dot{\sigma}\ddot{\sigma})^{3/2}}\right), \qquad \Lambda^{1/2} = \dot{s}.$$

4. ÖNERİLER

1. Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlardan hareketle, afin grup ve onun alt gruplarında eğriler teorisi oluşturulabilir.
2. İki boyutta operatörlerden faydalanılarak yay uzunluğu ve eğrilik hesabı temel alınarak, metodun üç boyuttaki ve n boyuttaki durumu araştırılabilir.
3. Sonsuz küçük dönüşümlerden elde edilen operatörler yardımıyla farklı gruplarda yay uzunluğu ve eğrilik hesabı oluşturulabilir.

5. KAYNAKLAR

1. Anton, H. and Rorres, C., Elementary Linear Algebra, Tenth Edition, Wiley, USA, 2010.

2. Blaschke, W., Vorlesungen Über Differentialgeometrie und Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, Band 2, Berlin, 1923.

3. Buchin, S., Affine Differential Geometry, Science Press, China, 1983.

4. Duzhin, S., V. and Tchebotarevsky, B., D., Transformation Groups for Beginners, AMS, USA, 2004.

5. Fubini, G. and Čech, E., Geometria Proiettiva Differenziale, ASCR, Bologna, 1926.

6. Gardner, R., B. and Wilkens, G., R., The Fundamental Theorems of Curves and Hypersurfaces in Centro-affine Geometry, Bull. Belg. Math. Soc., 4 (1997) 379-401.

7. Khadjiev, Dj. and Pekşen, Ö., The Complete System of Global Differential and Integral Invariants for Equi-affine Curves, Differential Geom. Appl., 20 (2004) 167-175.

8. Klein, F., Vergleichende Betrachtungen Über Neuere Geometrische Forschungen, Verlag, Erlangen, 1872.

9. Mirsky, L., An Introduction to Linear Algebra, Oxford University Press, London, 1955.

10. Nadjafikhah, M., Affine Differential Invariants for Planar Curves, BJGA, 7, 1 (2002) 69-78.

11. Nomizu, K. and Sasaki, T., Affine Differential Geometry: Geometry of Affine Immersions, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

12. O'Neill, B., Elementary Differential Geometry, Revised Second Edition, Elsevier, USA, 2006.

13. Pekşen, Ö. and Khadjiev, Dj., On Invariants of Curves in Centro-affine Geometry, J. Math. Kyoto Univ., 44, 3 (2004) 603-613.

14. Roman, S., Advanced Linear Algebra, Third Edition, Springer, USA, 2008.

15. Sağıroğlu, Y., The Equivalence of Curves in $SL(n,\mathbb{R})$ and Its Application to Ruled Surfaces, Appl. Math. Comput., 218 (2011) 1019-1024.

16. Sağıroğlu, Y., Affine Differetnial Invariants of Curves, LAP, Saarbrücken, 2012.

17. Sağıroğlu, Y. and Pekşen, Ö., The Equivalence of Equi-affine Curves, Turk. J. Math., 34 (2010) 95-104.

18. Salkowski, E., Affine Differentialgeometrie, de Gruyter, Berlin, 1934.

19. Schirokow, P. and Schirokow, A., Affine Differentialgeometrie, Teubner, Leipzig. 1962.

20. Simon, U., Schwenk-Schellschmidt, A. and Viesel, H., Introduction to the Affine Differential Geometry of Hypersurfaces, Science University of Tokyo, Tokyo, 1991.

21. Weintraub, S., H., Jordan Canonical Form: Application to Differential Equations, Morgan and Claypool Publishers, USA, 2008.

22. Weyl, H., The Classical Groups, Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.

ÖZGEÇMİŞ

Uğur GÖZÜTOK, 1989 yılında Samsun'da doğdu. İlk ve ortaöğrenimini 50.Yıl İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini Samsun Anadolu Lisesi'nde ve lisans öğrenimini Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Bölümü'nde tamamladı. 2014 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisansa başladı. 2015 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı ve bu tarihten itibaren tezli yüksek lisans eğitimini Karadeniz Teknik Üniversitesi'nde sürdürdü. Yabancı dili İngilizcedir.