KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

REGÜLER STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİ VE ÖZDEĞERLER İÇİN ASİMPTOTİK TAHMİNLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serap DÜĞENCİ

HAZİRAN 2016
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

REGÜLER STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİ VE ÖZDEĞERLER İÇİN ASİMPTOTİK TAHMİNLER

Serap DÜĞENCİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 03 / 06 /2016
Tezin Savunma Tarihi : 30 / 06 /2016

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Haskız COŞKUN

Trabzon 2016

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında
Serap DÜĞENCİ Tarafından Hazırlanan

REGÜLER STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİ VE ÖZDEĞERLER İÇİN ASİMPTOTİK TAHMİNLER

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 07 / 06 / 2016 gün ve 1656 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. İhsan ÜNVER ....

Üye : Prof. Dr. Haskız COŞKUN ....

Üye : Doç. Dr. Mehmet MERDAN ....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanıp bu hale getirilmesine kadar yardımını ve desteğini esirgemeyen hocam Prof. Dr. Haskız COŞKUN' a saygılarımı sunar, emeği için teşekkür ederim.

Ayrıca bu süre içerisinde, desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim. Özellikle tezin teslim aşmasından savunma aşamasına kadar geçen süre içerisinde yanımda olan annem Ayşe DÜĞENCİ ve ablam Kübra DÜĞENCİ' ye sonsuz teşekkür ederim.

Serap DÜĞENCİ

Trabzon 2016

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Regüler Sturm-Liouville Problemleri ve Özdeğerler İçin Asimptotik Tahminler" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Haskız COŞKUN'un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 30/06/2016

Serap DÜĞENCİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

REGÜLER STURM-LİOUVİLLE PROBLEMLERİ ve ÖZDEĞERLER İÇİN ASİMPTOTİK TAHMİNLER

Serap DÜĞENCİ
Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Haskız COŞKUN
2016, 73 Sayfa

Bu çalışma esas olarak iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde

$$Ly(x) := a_0(x)y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_2(x)$$

denklemi ve

$$a_{11}y(a) + a_{12}y\,'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}\, y\,'(b) = 0$$

$$a_{21}y(a) + a_{22}y\,'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}\, y\,'(b) = 0$$

ayrılmamış sınır koşullarını içeren regüler Sturm-Liouville problemleri ile ilgili teoriye yer verilmiştir.

İkinci bölümde, ilk olarak özdeğer problemi için kendine eşlik, basit özdeğerler, green fonksiyonu ve diskriminant fonksiyonunu(Δ) içeren bazı teorik sonuçlar ispatlanmıştır. Daha sonra

$$y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0\ ,\quad x \in [a,b]$$

diferensiyel denklemi ve

$$a_0\, y(a) + a_1 y'(a) = 0$$

$$b_0\, y(b) + b_1 y'(b) = 0$$

ayrılmış sınır koşullarını içeren sınır değer probleminin özdeğerleri için bazı asimptotik tahminler bulunmuştur. **[3]** çalışmasında özdeğerler için elde edilen asimptotik tahminlerdeki $o(n^{-3})$ hata terimi elde ettiğimiz sonuçlarda $o(n^{-4})$ olarak iyileştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Regüler Sturm-Liouville problemleri, Özdeğerler, Asimptotik tahmin

Master Thesis

SUMMARY

REGULAR STURM-LIOUVILLE PROBLEMS AND ASYMPTOTIC ESTIMATES FOR EIGENVALUES

Serap DÜĞENCİ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Haskız COŞKUN
2016, 73 Pages

This thesis is composed of two parts. In the first part, we give some basic theory related to regular Sturm-Liouville problem including the differential equation

$$Ly(x) := a_0(x)y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_2(x)$$

with non-seperated boundary conditions

$$a_{11}y(a) + a_{12}y\,'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}\, y\,'(b) = 0$$

$$a_{21}y(a) + a_{22}y\,'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}\, y\,'(b) = 0.$$

In the second part, we first prove some theoretical resullts for eigenvalue problems including self-adjointness, simple eigenvalues, green's function and obtaining Δ discriminant function and then some asymptotic estimates for the eigenvalues of the boundary value problem including the differential equation

$$y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0\ ,\ x \in [a,b]$$

with seperated boundary conditions

$$a_0\, y(a) + a_1 y'(a) = 0$$

$$b_0\, y(b) + b_1 y'(b) = 0$$

are obtained. The error term $o(n^{-3})$ which appears in the asymptotic estimates of the eigenvalues in **[3]** is improved to $o(n^{-4})$ in our same type of results.

Key Words: Regular Sturm-Liouville problems, Eigenvalues, Asymptotic estimates

SEMBOLLER DİZİNİ

λ	: özdeğer
$\frac{d}{dx}$	: x’ e göre birinci türev
$z\dot{(x)}$	: z(x) fonksiyonunun x’e birinci türevi
$\lambda\rightarrow\infty$	: λ, ∞ a yaklaşırken
$\overline{g(x)}$	: g(x) fonksiyonunun eşleniği
O, o	: asimptotik davranışları tarif etmek için kullanılan simgeler
W(f, g)	: Wronskian determinantı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Diferensiyel denklemler için Sturm-Liouville problemleri teorisi ilk olarak 19. yüzyılın ortalarında İsveçli matematikçi Jacques Sturm(1803-1855) ve Fransız matematikçi Joseph Liouville (1809-1882) nin çalışmalarında ortaya çıkmıştır. Bu teori için özdeğer ve özfonksiyon kavramları temel oluşturmaktadır. Ayrıca bu teori sadece matematik alanında değil birçok fizik alanlarında da kullanılmaktadır.

Özdeğerler (veya karakteristik değerler) fiziksel bir sistemin sahip olabileceği özel değerlerde nasıl davrandıklarını belirlemek için önemlidir. Bu değerler sisteme ait özel bir enerji, özel bir frekans değeri, dalgaların girişimi veya kuvvet dengesinin sağlandığı bir duruma ait olabilir. Özfonksiyonlar ise, fiziksel sistemin sahip olduğu özdeğerlerdeki (örneğin bir dalga) fonksiyonları olabilir.

Titreşim yapan bir sistemin doğal frekansı ile dışarıdan uygulanan sürücü kuvvetin frekansı birbirine eşit veya yakın olması sistemin kararlılığı açısından veya malzemelerin elastik özelliklerinin incelendiği durumlarda, şekil bozukluklarının başladığı noktaların belirlenmesinde özfonksiyonların alacağı özdeğerler önemli olmaktadır.

Bu tez çalışmasında da bazı diferensiyel denklemler için özdeğerler ve özfonksiyonlar ile ilgili teorik bilgiler ele alınacaktır. Ayrıca özellikle teorik yaklaşımların uygulandığı ikinci bölümde genel bir çözüm formu elde edebilmek amacıyla aşağıda tanımları verilen büyük "O" ve küçük "o" notasyonları kullanılacaktır:

"x_0' ın herhangi bir ε_0 civarındaki tüm x ler için

$$|f(x)| \leq M|g(x)|, \quad x \in \varepsilon_0, \; x \neq x_0$$

eşitsizliğini sağlayan bir $M > 0$ sayısı varsa x, x_0' a yakınsadığında f(x) fonksiyonu , g(x) fonksiyonuna göre sınırlıdır" denir ve

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0$$

şeklinde yazılır."

Ek olarak " f(x) ve g(x) fonksiyonları x_0 noktasının herhangi bir ε_0 civarında tanımlanmış ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

eşitliğinin sağlanması durumunda f(x) fonksiyonuna g(x) fonksiyonundan asimptotik olarak küçüktür" denir ve

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to x_0$$

şeklinde yazılır."**[8]**

1.2. Sturm-Liouville Teori

L ikinci mertebeden aşağıdaki gibi tanımlanan lineer bir diferensiyel operatör,

$$L := a_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x) \tag{1.1}$$

ve λ kompleks bir parametre olmak üzere

$$Ly(x) = \lambda y(x), \quad x \in [a,b] \tag{1.2}$$

denklemi göz önüne alınsın. Tanımlanan L operatöründe $a_0(x)$, $a_1(x)$ ve $a_2(x)$ katsayı fonksiyonları [a,b] aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar ve $a_0(x) \neq 0$ olsun. (1.2) denkleminin

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = 0 \\ a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

sınır koşullarını sağlayan y(x) çözümünü bulma problemine özdeğer problemi veya Sturm-Liouville problemi adı verilir. Sınır koşullarında a_{ij} ve b_{ij} (i, j = 1,2) katsayıları sabitlerdir. (1.3) eşitliklerinin her ikisi de hem a hem de b değerlerini içerdiğinden bu tür sınır koşullarına ayrılmamış sınır koşulları adı verilir. Eğer ilk eşitlik sadece a değerlerini, ikinci eşitlik ise sadece b değerlerini içerirse bu tür sınır koşullarına da ayrılmış sınır koşulları adı verilir. Ayrılmamış sınır koşulundaki bu iki denklem lineer bağımsız olmalıdır.

Yani,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \qquad (1.4)$$

matrisinin rankı 2 olmalıdır.
$y(x) \equiv 0$ çözümü [a,b] aralığında verilen diferensiyel denklemi ve sınır koşullarını sağlar. Bu çözüme özdeğer probleminin trivial çözümü adı verilir. Özdeğer problemlerinde önemli olan nokta trivialden farklı çözümünün olup olmadığıdır. Bu problemlerde λ nın tüm değerleri için ya da bazı değerleri için trivial olmayan çözümler olabileceğinden λ parametresi de önemlidir. Eğer özdeğer probleminde $y(x) \equiv 0$ çözümü elde ediliyorsa λ özdeğer olamaz.

(1.3) eşitliklerinin her ikisi için tüm a_{ij} değerlerinin sıfır olması ve sadece b_{ij} değerlerinin mevcut olması durumunda (veya tüm b_{ij} değerlerinin sıfır ve a_{ij} lerin sıfırdan faklı olması durumunda) (1.3) koşullarına başlangıç koşulları adı verilir. Örneğin; tüm a_{ij} lerin sıfır olması durumunda (1.3), $y(b)$ ve $y'(b)$ ye ait iki denklemden oluşur. (1.4) matrisinin rankı iki olduğundan $\det(b_{ij}) \neq 0$ olur. Böylece $y(b) = y'(b) = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Bu durum (1.2) - (1.3) probleminin trivial çözümünün mevcut olduğunu gösterir.

Benzer durum her $b_{ij} = 0$ için söz konusudur.

Tanım 1.1: [a,b] aralığında yukarıda verilen diferensiyel denklemi ve sınır koşullarını $\lambda = \lambda_0$ ve $y(x) = \Psi(x)$ durumunda sağlayan , λ_0 ve sıfırdan farklı $\Psi(x)$ mevcutsa bu durumda λ_0 değerine verilen Sturm-Liouville probleminin özdeğeri , $\Psi(x)$ fonksiyonuna ise λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu adı verilir.

Tanım 1.2: Eğer bir λ_0 özdeğerine karşılık gelen iki lineer bağımsız özfonksiyon mevcutsa λ_0 özdeğerine katlı özdeğer, bir tek özfonksiyon mevcutsa basit özdeğer adı verilir.

Örnek 1.1: $-y''(x) = \lambda y(x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$ (1.5)

diferensiyel denklemi

$$y(0) = 0 \text{ ve } y(\pi) = 0 \qquad (1.6)$$

sınır koşulları ile verilsin. Trivial olmayan $y(x)$ çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $\lambda = k^2 > 0$ olsun. (1.5) denkleminin çözümü A, B sabitler olmak üzere

$$y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

şeklindedir. (1.6) da verilen birinci sınır koşulu ile $y(0) = 0$ eşitliğinden $A = 0$ elde edilir.

Böylece denklem

$$y(x) = B\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

şekline dönüşür. Şimdi ikinci sınır koşulunu uygularsak

$$B\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

elde edilir. Trivial olmayan çözümleri araştırdığımızdan bu eşitlikte $B \neq 0$ olmalıdır. O halde $\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$ eşitliğinden $\lambda_n = n^2$, $(n = 1,2,\ldots)$ özdeğerleri bulunur. Böylece trivial olmayan çözümleri $y_n(x) = B\sin nx$, $(n = 1,2,\ldots)$ şeklinde yazılır. Burada $\lambda_n = n^2$, $(n = 1,2,\ldots)$ özdeğerlerine karşılık gelen iki lineer bağımsız özfonksiyon yoktur. Yani (1.5)-(1.6) probleminin özdeğerleri basittir.

Eğer $\lambda = 0$ ise (1.5) denkleminin çözümü $y(x) = Ax + B$ şeklindedir. Burada (1.6) sınır koşulları uygulanırsa $A = B = 0$ elde edilir. Yani $y(x) = 0$ trivial çözümü mevcut olup $\lambda = 0$ özdeğer olamaz.

Eğer $\lambda = -k^2 < 0$ ise (1.5) denkleminin çözümü

$$y(x) = A\cosh\sqrt{\lambda}\,x + B\sinh\sqrt{\lambda}\,x$$

şeklindedir. Sınır koşullarından $y(0) = 0$ ile $A = 0$ ve $y(\pi) = 0$ ile $B = 0$ bulunur. Yani $y(x) = 0$ trivial çözümü elde edilir. Bu durumda da $\lambda = -k^2 < 0$ özdeğer olamaz.

1.3. Özdeğerler İçin Diskriminant ($\Delta(\lambda)$) Fonksiyonu

$\Phi_1(x,\lambda)$ ve $\Phi_2(x,\lambda)$, (1.2) denkleminin λ kompleks parametresine bağlı lineer bağımsız çözümleri olsun. (1.2) denkleminin her bir çözümü A_1 ve A_2 x'den bağımsız olmak üzere ;

$$y(x,\lambda) = A_1\,\Phi_1(x,\lambda) + A_2\,\Phi_2(x,\lambda) \tag{1.7}$$

şeklindedir.

$y(x,\lambda)$ çözümü (1.3) ile verilen sınır koşullarını sağlayacağından,

$$a_{11}[A_1\,\Phi_1(a,\lambda) + A_2\,\Phi_2(a,\lambda)] + a_{12}[A_1\,\Phi_1'(a,\lambda) + A_2\,\Phi_2'(a,\lambda)]$$

$$+\, b_{11}[A_1\,\Phi_1(b,\lambda) + A_2\,\Phi_2(b,\lambda)] + b_{12}[A_1\,\Phi_1'(b,\lambda) + A_2\,\Phi_2'(b,\lambda)] = 0 \qquad (1.8)$$

ve

$$a_{21}[A_1\,\Phi_1(a,\lambda) + A_2\,\Phi_2(a,\lambda)] + a_{22}[A_1\,\Phi_1'(a,\lambda) + A_2\,\Phi_2'(a,\lambda)]$$

$$+\, b_{21}[A_1\,\Phi_1(b,\lambda) + A_2\,\Phi_2(b,\lambda)] + b_{22}[A_1\,\Phi_1'(b,\lambda) + A_2\,\Phi_2'(b,\lambda)] = 0 \qquad (1.9)$$

eşitlikleri bulunur. $(1\leq i, j \leq 2)$ için

$$\alpha_{ij}(\lambda) := a_{i1}\,\Phi_j(a,\lambda) + a_{i2}\,\Phi_j'(a,\lambda) + b_{i1}\,\Phi_j(b,\lambda) + b_{i2}\,\Phi_j'(b,\lambda) \qquad (1.10)$$

olarak tanımlanırsa (1.8)-(1.9) eşitlikleri aşağıdaki denklem sistemine dönüşür:

$$A_1\,\alpha_{11}(\lambda) + A_2\,\alpha_{12}(\lambda) = 0$$

$$A_1\,\alpha_{21}(\lambda) + A_2\,\alpha_{22}(\lambda) = 0 \qquad (1.11)$$

Bu durumda λ' nın özdeğer olabilmesi için $y(x,\lambda) \neq 0$ olması gerekir. Bunun için A_1 ve A_2 aynı anda sıfır olmamalıdır.

Bu durumda katsayılar determinantı olarak tanımlanan $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu için

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}(\lambda) & \alpha_{12}(\lambda) \\ \alpha_{21}(\lambda) & \alpha_{22}(\lambda) \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.12)$$

gerekliliği ortaya çıkar. Bulunan bu determinant ile de λ özdeğerleri hesaplanır. Yani $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerleri λ özdeğerlerini belirler.

O halde örnek 1.1 de bulunan özdeğerler $\Delta(\lambda)$ yardımıyla da hesaplanabilir: $y(x,\lambda) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x$ çözümünden $\Phi_1(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\,x$ ve $\Phi_2(x,\lambda) = \sin\sqrt{\lambda}\,x$ alabiliriz ($\lambda = k^2 > 0$ durumunda).

$y(0) = 0$ ve $y(\pi) = 0$ olduğundan (1.3) ile verilen sınır koşullarına göre $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $b_{11} = 0$, $b_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 0$, $b_{21} = 1$ ve $b_{22} = 0$ dır.

$a = 0$ ve $b = \pi$ olmak üzere;

$$\alpha_{11}(\lambda) = a_{11}\, \Phi_1(0,\lambda) + a_{12}\, \Phi_1'(0,\lambda) + b_{11}\, \Phi_1(\pi,\lambda) + b_{12}\, \Phi_1'(\pi,\lambda)$$

$$= \Phi_1(0,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\, 0 = 1$$

$$\alpha_{12}(\lambda) = a_{11}\, \Phi_2(0,\lambda) + a_{12}\, \Phi_2'(0,\lambda) + b_{11}\, \Phi_2(\pi,\lambda) + b_{12}\, \Phi_2'(\pi,\lambda)$$

$$= \Phi_2(0,\lambda) = \sin\sqrt{\lambda}\, 0 = 0$$

$$\alpha_{21}(\lambda) = a_{21}\, \Phi_1(0,\lambda) + a_{22}\, \Phi_1'(0,\lambda) + b_{21}\, \Phi_1(\pi,\lambda) + b_{22}\, \Phi_1'(\pi,\lambda)$$

$$= \Phi_1(\pi,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\, \pi$$

$$\alpha_{22}(\lambda) = a_{21}\, \Phi_2(0,\lambda) + a_{22}\, \Phi_2'(0,\lambda) + b_{21}\, \Phi_2(\pi,\lambda) + b_{22}\, \Phi_2'(\pi,\lambda)$$

$$= \Phi_2(\pi,\lambda) = \sin\sqrt{\lambda}\, \pi$$

değerleri bulunur. Bu değerler (1.12) katsayılar determinantında yerine yazarsak

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\sqrt{\lambda}\,\pi & \sin\sqrt{\lambda}\,\pi \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir.

Bu durumda $\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$ eşitliği yani $\lambda_n = n^2$ $(n = 1,2,\ldots)$ özdeğerleri bulunur. Böylece bir önceki yöntemle bulunan özdeğerleri bu yöntemle de elde etmiş oluruz.

Özel olarak (1.2) denkleminde $a_0(x) = -1$, $a_1(x) = 0$ ve $a_2(x) = q(x)$ alınması durumundaki

$$y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0\,, \quad x \in [a,b] \tag{1.13}$$

diferensiyel denkleminin

$$a_0\, y(a) + a_1 y'(a) = 0$$

$$b_0\, y(b) + b_1 y'(b) = 0 \tag{1.14}$$

şeklindeki ayrılmış sınır koşulları ile $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu incelensin. Burada q(x) reel değerli ve [a,b] aralığında sürekli bir fonksiyondur.

Öncelikle

$$y''(x) + \lambda y(x) = f(x) \tag{1.15}$$

homojen olmayan denklemi göz önüne alınsın ve denklemin genel çözümü sistemler için değişen parametreler yöntemi kullanılarak hesaplansın. (1.15) ile verilen denklem sisteme dönüştürülürse;

$$x_1 = y$$

$$x_2 = y'$$

olmak üzere

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = f(x) - \lambda x_1$$

şeklinde bulunur. $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ olarak tanımlanırsa (1.15) denklemi

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

denklem sistemine dönüşür.

Eğer sistemler için değişen parametreler yöntemine göre

$$X' = AX + F(x)$$

biçiminde bir sistem varsa

$$X = X_c + X_p$$

şeklinde çözüm araştırılmalıdır. X_c homojen kısmın çözümü, X_p de homojen olmayan kısım için özel çözümdür. Daha fazla olarak ϕ homojen kısmın bir çözümü ve $C := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ sabit matris olmak üzere genel çözüm

$$X = \phi C + \phi Y$$

şeklinde olmalıdır. Burada Y özel çözüm için uygun bir matristir.

Yukarıdaki denklem sisteminde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

olmak üzere ϕ matrisi incelenmelidir.

Diferensiyel denklemler teorisine göre, $X' = AX$ sistemi için $X_1, X_2, \dots, X_n$ lineer bağımsız çözümler olmak üzere

$$\phi := [\, X_1 \quad X_2 \dots X_n \,]_{n\times n}$$

şeklinde temel çözüm matrisi mevcuttur. $X_1, X_2, \dots, X_n$ lineer bağımsız çözümlerin elde edilmesi için öncelikle $|A - \lambda I| = 0$ yapan λ özdeğerleri bulunmalıdır. Eğer λ özdeğerleri kompleks ise çözümler şu şekilde bulunur:

$\lambda_1 = p + iq$ ve $\lambda_1 = p - iq$ olsun. $\lambda_1 = p + iq$ için $V_1 = a + ib$ özvektörü olarak alınırsa

$$X_1(x) = e^{px}(a\cos qx - b\sin qx)$$

$$X_2(x) = e^{px}(b\cos qx + a\sin qx)$$

şeklinde yazılır.**[7]**

Şimdi yukarıda elde edilen sistemdeki $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ matrisi göz önüne alınırsa $|A - \lambda I| = 0$ determinantı ile özdeğerler $i\sqrt{\lambda}$ ve $-i\sqrt{\lambda}$ şeklinde kompleks olarak bulunur. Dikkat edilirse burada $p = 0$ ve $q = \sqrt{\lambda}$ dır. $(A - i\sqrt{\lambda}\, I)\, V_1 = 0$ ile özvektör

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada da $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$ dır. Bu durumda X_1 ve X_2 için çözümler

$$X_1(x) = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\lambda}\, x \\ -\sqrt{\lambda}\, \sin\sqrt{\lambda}\, x \end{pmatrix}$$

$$X_2(x) = \begin{pmatrix} \sin\sqrt{\lambda}\, x \\ \sqrt{\lambda}\, \cos\sqrt{\lambda}\, x \end{pmatrix}$$

olur. O halde yukarıdaki ϕ tanımı ile

$$\phi = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\lambda}\ x & \sin\sqrt{\lambda}\ x \\ -\sqrt{\lambda}\ \sin\sqrt{\lambda}\ x & \sqrt{\lambda}\ \cos\sqrt{\lambda}\ x \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır ve $\phi' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}\phi$ homojen denklem sistemini sağlar.

İkinci olarak denklemin homojen olmayan kısmı için özel çözüm araştırılsın. Bu durumda

$$X_p = \phi Y$$

şeklinde bir çözümün mevcut olması gerekir. Bu çözüm denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$Y' = \phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$$\phi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\lambda}\ x & \frac{-\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}} \\ \sin\sqrt{\lambda}\ x & \frac{\cos\sqrt{\lambda}\ x}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$Y' = \begin{pmatrix} \frac{-\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}} f(x) \\ \frac{\cos\sqrt{\lambda}\ x}{\sqrt{\lambda}} f(x) \end{pmatrix}$$

bulunur. Burada her iki tarafın integrali alınırsa

$$Y = \int_a^x \begin{pmatrix} \frac{-\sin\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}} f(t) \\ \frac{\cos\sqrt{\lambda}\ t}{\sqrt{\lambda}} f(t) \end{pmatrix} dt$$

olur. c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $C := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda genel çözüm

$$X = \phi C + \phi Y$$

eşitliği ile

$$X = \phi\left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_a^x \begin{pmatrix} \frac{-\sin\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}} f(t) \\ \frac{\cos\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}} f(t) \end{pmatrix} dt\right]$$

şeklinde yazılır. ϕ matrisinin değeri yerine yazılırsa

$$X = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\lambda}\,x & \sin\sqrt{\lambda}\,x \\ -\sqrt{\lambda}\,\sin\sqrt{\lambda}\,x & \sqrt{\lambda}\,\cos\sqrt{\lambda}\,x \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_a^x \begin{pmatrix} \frac{-\sin\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}} f(t) \\ \frac{\cos\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}} f(t) \end{pmatrix} dt\right]$$

bulunur. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ olduğundan,

$$y(x,\lambda) = c_1\cos\sqrt{\lambda}\,x + c_2\sin\sqrt{\lambda}\,x + \int_a^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(x-t)}{\sqrt{\lambda}} f(t)dt \qquad (1.16)$$

olur. (1.15) denklemindeki f(x) değeri yerine yazılırsa

$$y(x,\lambda) = c_1\cos\sqrt{\lambda}\,x + c_2\sin\sqrt{\lambda}\,x + \int_a^x q(t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(x-t)}{\sqrt{\lambda}} y(t)dt \qquad (1.17)$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

(1.17) tipindeki denklem bir Volterra integral denklemi olarak bilinir. Burada bilinmeyen c_1 ve c_2 katsayıları (1.14) ile verilen sınır koşulları ile bulunur. Genel varlık teoremlerinden biliniyor ki bir lineer diferensiyel denklemin katsayıları sürekli ise (1.17) de verilen $y(x,\lambda)$ bir çözümdür. Ayrıca $y(x,\lambda)$ çözümü de $a \le x \le b$ aralığında sürekli olur. Analizden sürekli bir fonksiyonun sınırlı olduğu bilindiğinden bir $K > 0$ için

$$|y(x,\lambda)| \le K, \qquad (a \le x \le b)$$

sağlanır. Benzer şekilde q(x) sürekli olarak verildiğinden $a \le x \le b$ aralığında

$$|q(x)| \le M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcuttur. (1.17) deki integral için;

$$\left|\int_a^x q(t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(x-t)}{\sqrt{\lambda}} y(t)dt\right| \le \int_a^x |q(t)|\left|\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(x-t)}{\sqrt{\lambda}}\right| |y(t)|\,dt$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{\lambda}} MKb \qquad (1.18)$$

bulunur. Bu durumda

$$\int_a^x q(t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}y(t)dt = O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})$$

yazılabilir. O halde genel çözüm

$$y(x, \lambda) = c_1\cos\sqrt{\lambda}\ x + c_2\sin\sqrt{\lambda}\ x + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \tag{1.19}$$

şekline dönüşür. (1.13) denklemi ikinci mertebe olduğundan lineer bağımsız iki çözümü mevcuttur. Daha önce (1.13) denkleminin asimptotik iki çözümü

$$y_1(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\ x + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}\ x\int q(x)dx + \dots$$

$$y_2(x,\lambda) = \sin\sqrt{\lambda}\ x - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}\ x\int q(x)dx + \dots$$

şeklinde verilmişti**[2]**. Buradan da görülüyor ki $y_1(x, \lambda)$ ve $y_2(x, \lambda)$ çözümlerinin ikinci terimleri $O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})$ ile sınırlıdır.

$$R_1(x,\lambda) := \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}\ x\int q(x)dx + \dots$$

$$R_2(x,\lambda) := -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}\ x\int q(x)dx + \dots$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$y_1(x, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\ x + R_1(x,\lambda)$$

$$y_2(x, \lambda) = \sin\sqrt{\lambda}\ x + R_2(x,\lambda) \tag{1.20}$$

şeklinde yazılır. (1.19)-(1.20) ile

$$y(x, \lambda) = c_1y_1(x, \lambda) + c_2y_2(x, \lambda)$$

çözümü elde edilir. Bu çözüm için (1.14) sınır koşuları kullanılarak c_1 ve c_2 katsayıları bulunmalıdır:

$$[a_0y_1(a) + a_1y_1'(a)]\ c_1 + [a_0y_2(a) + a_1y_2'(a)]\ c_2 = 0$$

$$[b_0y_1(b) + b_1y_1'(b)]\ c_1 + [b_0y_2(b) + b_1y_2'(b)]\ c_2 = 0$$

$y(x, \lambda)$ çözüm olduğundan c_1 ve c_2 aynı anda sıfır olamaz. O halde katsayılar determinantı olan ve λ özdeğerlerini elde etmemizi sağlayan $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu incelenmelidir. (1.20) eşitlikleri kullanılarak;

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_0[\cos\sqrt{\lambda}\,a + R_1(a,\lambda)] + & a_0[\sin\sqrt{\lambda}\,a + R_2(a,\lambda)] + \\ a_1[-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,a + R_1'(a,\lambda)] & a_1[\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,a + R_2'(a,\lambda)] \\ b_0[\cos\sqrt{\lambda}\,b + R_1(b,\lambda)] + & b_0[\sin\sqrt{\lambda}\,b + R_2(b,\lambda)] + \\ b_1[-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,b + R_1'(b,\lambda) & b_1[\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,b + R_2'(b,\lambda)] \end{vmatrix} \qquad (1.21)$$

şeklinde yazılır. Burada $R_i(x,\lambda)$ ve $R_i'(x,\lambda)$ $(i= 1,2)$ fonksiyonları sınırlıdır.

Şimdi aşağıdaki notasyonların tanımlanması ile $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu yakından incelensin:

$$P_1(\lambda) := -a_1b_1\sin\sqrt{\lambda}\,b\,R_2'(a,\lambda) - a_1b_1\,R_1'(b,\lambda)R_2'(a,\lambda) - a_1b_1\cos\sqrt{\lambda}\,a\,R_1'(b,\lambda)$$
$$-a_1b_1\sin\sqrt{\lambda}\,a\,R_2'(a,\lambda) + a_1b_1\cos\sqrt{\lambda}\,b\,R_1'(a,\lambda) + a_1b_1\,R_1'(a,\lambda)R_2'(b,\lambda),$$

$$P_2(\lambda) := a_0b_1\cos\sqrt{\lambda}\,aR_2'(b,\lambda) + a_0b_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,b\,R_1(a,\lambda) + a_0b_1\,R_2'(b,\lambda)\,R_1(a,\lambda)$$
$$-a_0b_1\,R_1'(b,\lambda)\,R_2(a,\lambda) - a_0b_1\sin\sqrt{\lambda}\,aR_1'(b,\lambda) + a_0b_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,b\,R_2(a,\lambda)$$
$$- a_1b_0\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,aR_2(b,\lambda) + a_1b_0R_2(b,\lambda)\,R_1'(a,\lambda) + a_1b_0\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,bR_1'(a,\lambda)$$
$$-a_1b_0\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,aR_1(b,\lambda) - a_1b_0\cos\sqrt{\lambda}\,bR_2'(a,\lambda) - a_1b_0R_1(b,\lambda)\,R_2'(a,\lambda)$$

ve

$$P_3(\lambda) := a_0b_0\sin\sqrt{\lambda}\,bR_1(a,\lambda) - a_0b_0\cos\sqrt{\lambda}\,bR_2(a,\lambda) + a_0b_0\cos\sqrt{\lambda}\,aR_2(b,\lambda)$$
$$- a_0b_0\sin\sqrt{\lambda}\,aR_1(b,\lambda) + a_0b_0\,R_1(a,\lambda)\,R_2(b,\lambda) - a_0b_0\,R_1(b,\lambda)\,R_2(a,\lambda).$$

olmak üzere

$$\Delta(\lambda) = \lambda a_1b_1\sin\sqrt{\lambda}\,(b-a) + \sqrt{\lambda}\,P_1(\lambda) + (a_0b_1 - a_1b_0)\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,(b-a) + P_2(\lambda)$$
$$+ a_0b_0\sin\sqrt{\lambda}\,(b-a) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}P_3(\lambda)$$

olur. Burada tanımlanan $P_i(\lambda)$, $(i = 1,2,3)$ sınırlıdır ve $\Delta(\lambda)$ için üç durum söz konusudur:

i) $a_1b_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\Delta(\lambda) = \lambda a_1 b_1 \sin\sqrt{\lambda}\,(b-a) + \sqrt{\lambda}\,P_1(\lambda)$$

şeklindedir. λ özdeğerlerini bulabilmek için

$$\sin\sqrt{\lambda}\,(b-a) = \frac{-P_1(\lambda)}{\sqrt{\lambda}a_1b_1}$$

olmalıdır. Eşitliğin sağ tarafı büyüyen λ değerleri için giderek küçüleceğinden;

$$\sqrt{\lambda} \approx \frac{n\pi}{(b-a)} \quad (n = 1,2, \ldots)$$

elde edilir.

ii) $a_1b_1 = 0$ ve $a_0b_1 - a_1b_0 \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\Delta(\lambda) = (a_0b_1 - a_1b_0)\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,(b-a) + P_2(\lambda)$$

şeklindedir. λ özdeğerlerini bulabilmek için

$$\cos\sqrt{\lambda}\,(b-a) = \frac{-P_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda}\,(a_0b_1 - a_1b_0)}$$

olur. Buradan yine daha büyük λ değerleri ile;

$$\sqrt{\lambda} \approx \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{(b-a)} \quad (n = 1,2, \ldots)$$

bulunur.

iii) $a_1b_1 = a_0b_1 - a_1b_0 = 0$ olsun.

$$\Delta(\lambda) = a_0b_0 \sin\sqrt{\lambda}\,(b-a) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} P_3(\lambda)$$

olur. Bu durumda λ özdeğerleri

$$\sin\sqrt{\lambda}\,(b-a) = \frac{-p_3(\lambda)}{\sqrt{\lambda}a_0b_0}$$

eşitliği ile

$$\sqrt{\lambda} \approx \frac{n\pi}{(b-a)} \quad (n = 1,2, \ldots)$$

bulunur.

Teorem 1.1 [1]: L ikinci mertebeden lineer bir diferensiyel operatör,

$$L := a_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)$$

λ kompleks bir parametre olmak üzere

$$Ly(x) = \lambda y(x)\,, \quad x \in [a,b]$$

denklemi verilsin. Aşağıda verilen ayrılmamış sınır koşulları göz önüne alınsın.

$$a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = 0$$

$$a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = 0$$

Burada, ya

a) Her kompleks sayı bir özdeğerdir.

ya da

b) Özdeğerler sonlu olmayan limit noktası ile sayılabilir bir küme oluşturur.

İspat: λ kompleks değeri için

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}(\lambda) & \alpha_{12}(\lambda) \\ \alpha_{21}(\lambda) & \alpha_{22}(\lambda) \end{vmatrix}$$

şeklinde bir $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu tanımlansın. Burada $\alpha_{ij}(\lambda)$ ler (1.10) da tanımlanmıştır. $\Phi_1(x,\lambda)$ ve $\Phi_2(x,\lambda)$ teoremdeki denklemin [a,b] aralığında belirli noktalardaki başlangıç değerleri λ özdeğerinden bağımsız olan çözümleri olsun.

$\Phi_1(x,\lambda)$ ve $\Phi_2(x,\lambda)$ tüm kompleks λ düzleminde analitik fonksiyonlardır. (Teorem1.7.2 **[1]**) Ayrıca (1.10) ile tanımlanan $\alpha_{ij}(\lambda)$, $\Phi_1(x,\lambda)$ ve $\Phi_2(x,\lambda)$ çözümlerinin lineer kombinasyonları olduğundan analitiktir. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu da $\alpha_{ij}(\lambda)$ lere bağlı olduğundan analitiktir.

Ayrıca teoremde verilen özdeğer probleminin özdeğerleri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerleridir. Bu nedenle tüm λ değerleri için $\Delta(\lambda) = 0$ olmadıkça $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları sonlu limit noktasına sahip olmaz. Böylece teorem1.1 ispatlanmış olur.

1.4. Kendine Eş Özdeğer Problemleri

Tanım 1.3: L ikinci mertebeden aşağıdaki gibi tanımlanan lineer bir diferensiyel operatör,

$$L := a_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)$$

ve λ kompleks bir parametre olmak üzere

$$Ly(x) = \lambda y(x)\,, \quad x \in [a,b]$$

denklemi göz önüne alınsın. Tanımlanan L operatöründe $a_0(x)$, $a_1(x)$ ve $a_2(x)$ katsayı fonksiyonları [a,b] aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar ve $a_0(x) \neq 0$ olmak üzere

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}\,y'(b) = 0 \\ a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}\,y'(b) = 0 \end{array}\right\}$$

ayrılmamış sınır koşulları ile verilsin. f(x) ve g(x) [a,b] aralığında sürekli ikinci türeve sahip ve yukarıda verilen sınır koşullarını sağlayan fonksiyonlar olmak üzere

$$\int_a^b \overline{g(x)}Lf(x)\,dx = \int_a^b f(x)\overline{Lg(x)}\,dx \qquad (1.22)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu probleme kendine eş özdeğer problemi adı verilir (Bazı kaynaklarda kendine eş problem yerine simetriklik kavramı kullanılmaktadır). (1.22) deki bağıntı kendine eş operatörler teorisinde önemli sonuçlara sahiptir. Fakat bunları vermeden önce bu bağıntıya denk olan green formülü elde edilmelidir. $L = a_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)$ ikinci mertebe lineer diferensiyel operatörü için $a_r(x)$ ler $C^{(2-r)}[a,b]$ de (r =1,2) tanımlı olsunlar.

$$\int_a^b \overline{g(x)}Lf(x)\,dx = \int_a^b \overline{g(x)}[\,a_0(x)f''(x) + a_1(x)\,f'(x) + a_2(x)f(x)]\,dx$$

$$= \int_a^b \underbrace{\overline{g(x)}\, a_0(x) f''(x)}_{I_1} dx + \int_a^b \underbrace{\overline{g(x)}\, a_1(x)\, f'(x)}_{I_2} dx + \int_a^b \overline{g(x)} a_2(x) f(x)\, dx$$

olduğundan I_1 ve I_2 integralleri hesaplanmalıdır.

$$I_1 = \int_a^b \underbrace{\overline{g(x)}\, a_0(x)}_{u} \underbrace{f''(x)\, dx}_{dv} = \overline{g(x)}\, a_0(x) f'(x)\Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{\left\{\overline{g(x)} a_0(x)\right\}' f'(x)}_{I_3} dx \quad ,$$

$$I_3 = \int_a^b \underbrace{\left\{\overline{g(x)} a_0(x)\right\}'}_{u} \underbrace{f'(x) dx}_{dv} = \left\{\overline{g(x)} a_0(x)\right\}' f(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x) \left\{\overline{g(x)}\, a_0(x)\right\}'' dx \, .$$

I_3 integralinin hesaplanan bu değeri I_1 de yerine yazılırsa

$$I_1 = \overline{g(x)}\, a_0(x) f'(x)\Big|_a^b - \left\{\overline{g(x)} a_0(x)\right\}' f(x)\Big|_a^b + \int_a^b f(x) \left\{\overline{g(x)}\, a_0(x)\right\}'' dx$$

olur. Benzer şekilde

$$I_2 = \int_a^b f'(x) a_1(x) \overline{g(x)}\, dx = \overline{g(x)} a_1(x) f(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x) \left\{a_1(x) \overline{g(x)}\right\}' dx$$

bulunur. I_1, I_2 ve I_3 değerleri yerine yazılırsa

$$\int_a^b \overline{g(x)} L f(x)\, dx = \left[\overline{g(x)}\, a_0(x) f'(x) - \left\{\overline{g(x)} a_0(x)\right\}' f(x) + \overline{g(x)} a_1(x) f(x)\right]\Big|_a^b$$

$$+ \int_a^b f(x) \left[\left\{\overline{g(x)}\, a_0(x)\right\}'' - \left\{a_1(x) \overline{g(x)}\right\}' + \left\{a_2(x) \overline{g(x)}\right\}\right] dx \qquad (1.23)$$

şeklinde bulunur.

$$[f,g](x) = \overline{g(x)}\, a_0(x) f'(x) - \left\{\overline{g(x)} a_0(x)\right\}' f(x) + \overline{g(x)} a_1(x) f(x),$$

$$L^* := a_0(x)\frac{d^2}{dx^2} - a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)$$

olmak üzere (1.23) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\int_a^b \overline{g(x)}Lf(x)\,dx = [f,g]\,(b) - [f,g]\,(a) + \int_a^b f(x)\,\overline{L^*g(x)}\,dx$$

bulunur. Buradan

$$\int_a^b \overline{g(x)}Lf(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,\overline{L^*g(x)}\,dx = [f,g]\,(b) - [f,g]\,(a)$$

şeklinde green formülü elde edilmiş olur.

Green formülünde;

i) $L = L^*$,

ii) Her f(x) ve g(x) sürekli türevlenebilir ve ayrılmamış sınır koşullarını sağlayan fonksiyonları için [f,g](b) = [f,g](a) oluyorsa (1.22) eşitliği elde edilir. Yani L kendine eş forma sahip olur.

p(x) ve q(x) reel değerli olmak üzere

$$L := -\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x) \tag{1.24}$$

operatörü

$$Ly(x) = \lambda y(x)$$

denklemi ile kendine eş forma sahiptir. Sınır koşulları a_1,a_2,b_1 ve b_2 reel olması durumunda

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0$$

$$b_1y(b) + b_2y'(b) = 0 \tag{1.25}$$

veya

$$y(a) - y(b) = 0$$

$$p(a)y'(a) - p(b)y'(b) = 0 \tag{1.26}$$

şeklindedir.

L, (1.24) deki gibi verildiğinde $a_0(x) = -p(x)$ ve $a_1(x) = -p'(x)$ olur. Bu durumda green formülü;

$$[f,g]\,(x) = p(x)\left\{f(x)\overline{g'(x)} - f'(x)\overline{g(x)}\right\}$$

olmak üzere

$$\int_a^b\left\{\overline{g(x)}\,Lf(x) - f(x)L\overline{g(x)}\right\}dx = [f,g]\,(b) - [f,g]\,(a) \qquad (1.27)$$

şeklinde yazılır.

Sınır koşulları (1.25) deki gibi verildiğinde [f,g] (b) = [f,g] (a) eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Bunun için f(x) ve g(x) (1.25) sınır koşullarını sağlayan sürekli ikinci türeve sahip fonksiyonlar olsun. O halde

$$a_1 f(a) + a_2 f'(a) = 0$$

$$a_1 g(a) + a_2 g'(a) = 0$$

olur. a_1 ve a_2 aynı anda sıfır olamayacağından

$$f(a)\overline{g'(a)} - f'(a)\overline{g(a)} = 0$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde

$$a_1 f(b) + a_2 f'(b) = 0$$

$$a_1 g(b) + a_2 g'(b) = 0$$

için

$$f(b)\overline{g'(b)} - f'(b)\overline{g(b)} = 0$$

bulunur. Buradan

$$[f,g](a) = 0 = [f,g](b)$$

olur.

Sınır koşulları (1.26) gibi verildiğinde de [f,g] (b) = [f,g] (a) eşitliğinin mümkün olacağı gösterilmelidir. f(x) ve g(x) fonksiyonları (1.26) sınır koşullarını sağlayan iki fonksiyon olsun. O halde

$$[f,g](b) - [f,g](a) = p(b)\left\{f(b)\overline{g'(b)} - f'(b)\overline{g(b)}\right\} - p(a)\left\{f(a)\overline{g'(a)} - f'(a)\overline{g(a)}\right\}$$

eşitliği elde edilir. f(x) ve g(x) fonksiyonlarının sınır koşullarını sağladığı göz önüne alınır ve eşitlikte yerine yazılırsa

$$[f,g](b) - [f,g](a) = 0$$

bulunur. Yani

$$[f,g](b) = [f,g](a)$$

sağlanır.

Ayrıca (1.26) daki sınır koşullarına periyodik sınır koşulları adı verilir.

Böylece (1.24) ile tanımlanan L operatörünün ayrılmış sınır koşulları ve periyodik sınır koşulları durumunda kendine eş forma sahip olduğu gösterilmiş olur.

Özel olarak (1.24) operatöründe $p(x) = 1$ ve sınır şartlarının (1.25) eşitliğindeki gibi olması durumunda da (1.24) de tanımlanan L operatörü kendine eştir.

L, (1.24) deki gibi verildiğinde (1.2) diferensiyel denklemi

$$\{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda - q(x)\}\, y(x) = 0 \qquad (1.28)$$

olan Sturm-Liouville denklemine dönüşür. Genelliği bozmaksızın [a,b] aralığında $p(x) > 0$ alabiliriz. Eğer $p(x) < 0$ ise (1.28) eşitliğini -1 ile çarpar ve p(x), q(x) ve λ yerine sırasıyla $-p(x)$, $-q(x)$ ve $-\lambda$ alabiliriz.

Şimdi kendine eş operatörlerle ilgili literatürde mevcut bazı önemli teoremler ele alınsın.

Teorem 1.2 [1]: L ikinci mertebeden lineer bir diferensiyel operatör,

$$L := a_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)$$

ve λ kompleks bir parametre olmak üzere

$$Ly(x) = \lambda y(x)\ , \quad x \in [a,b]$$

denklemi ve

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}\,y'(b) = 0 \\ a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}\,y'(b) = 0 \end{aligned}\right\}$$

ayrılmamış sınır koşulları ile kendine eş özdeğer problemi göz önüne alınsın. Bu problemin bütün özdeğerleri reeldir.

İspat: λ_0 bir özdeğer ve $\Psi(x)$ bu özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyon olsun. (1.22) de $f(x) = g(x) = \Psi(x)$ alınsın. $\Psi(x)$ bir özfonksiyon olduğundan $L\,\Psi(x) = \lambda_0\Psi(x)$ olur. Bu eşitlik ve tanım 1.3 kullanılırsa

$$\lambda_0\int_a^b|\Psi(x)|^2\,dx = \overline{\lambda_0}\int_a^b|\Psi(x)|^2dx$$

yani

$$(\lambda_0-\overline{\lambda_0})\int_a^b|\Psi(x)|^2dx = 0$$

bulunur. $\Psi(x) \neq 0$ olacağından integral değeri sıfır olamaz. O halde

$$(\lambda_0-\overline{\lambda_0}) = 0$$

olur. Buradan

$$\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$$

elde edilir. Böylelikle λ özdeğerlerinin reel olduğu gösterilir.

Sonuç 1.1: Kendine eş özdeğer probleminin özdeğerleri sonlu olmayan limit noktası ile sayılabilir bir küme oluşturur.

Bunun ispatı teorem1.1 den elde edilir. (a) sağlanmadığından (b) nin olacağı sonucu kolaylıkla ortaya çıkar.

Tanım 1.4: $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ [a,b] aralığında tanımlı, integrallenebilen fonksiyonlar ve $r(x) > 0$ olmak üzere;

$$\int_a^b r(x)\, f_1(x)\, \overline{f_2(x)}\, dx = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonları $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre [a,b] aralığında ortogonaldir denir. Özel olarak $r(x) = 1$ olması durumunda

$$\int_a^b f_1(x)\, \overline{f_2(x)}\, dx = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonları [a,b] aralığında ortogonaldir denir.

Ortogonalliğe ek olarak $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 1$$

şartı sağlanıyorsa $f(x)$ fonksiyonuna [a,b] üzerinde ortonormaldir denir.

Teorem 1.3 [1]: L ikinci mertebeden lineer bir diferensiyel operatör,

$$L := a_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)$$

λ kompleks bir parametre olmak üzere

$$Ly(x) = \lambda y(x)\,, \quad x \in [a,b]$$

denklemi ve

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = 0 \\ a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = 0 \end{aligned}\right\}$$

ayrılmamış sınır koşulları ile kendine eş özdeğer problemi göz önüne alınsın. Bu problemin farklı iki özdeğerine karşılık gelen iki özfonksiyonu ortogonaldir.

İspat: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere λ_1, λ_2 özdeğerler ve sırasıyla bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar $\Psi_1(x)$ ve $\Psi_2(x)$ olsun. Bu durumda $L\Psi_1(x) = \lambda_1\Psi_1(x)$ ve $L\Psi_2(x) = \lambda_2\Psi_2(x)$ eşitlikleri sağlanır.

$f(x) = \Psi_1(x)$ ve $g(x) = \Psi_2(x)$ olmak üzere (1.22) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\lambda_1 \int_a^b \overline{\Psi_2(x)}\, \Psi_1(x)\, dx = \overline{\lambda_2} \int_a^b \Psi_1(x)\, \overline{\Psi_2(x)}\, dx$$

elde edilir. $\lambda_2 = \overline{\lambda_2}$ olmak üzere

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b \Psi_1(x)\, \overline{\Psi_2(x)}\, dx = 0$$

eşitliğinde $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan

$$\int_a^b \Psi_1(x)\, \overline{\Psi_2(x)}\, dx = 0$$

bulunur. Buradan $\Psi_1(x)$ ve $\Psi_2(x)$ özfonksiyonlarının ortogonal olduğu görülür.
Yukarıda verilen iki teorem örnek 1.1 için incelenebilir:
Özdeğerlerin reel olduğu açıktır. $m \neq n$ olmak üzere $\lambda_m \neq \lambda_n$ için özfonksiyonlar sırasıyla $\Psi_1(x) = \sin mx$ ve $\Psi_2(x) = \sin nx$ olsun.($k^2 > 0$ olması durumunda)

$$\int_a^b \Psi_1(x)\Psi_2(x)\, dx = \int_a^b \sin mx \sin nx dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(n-m)x dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(n+m)x dx$$

$$= 0$$

bulunur. Böylece keyfi seçilen $\Psi_1(x)$ ve $\Psi_2(x)$ fonksiyonları için ortogonallik gösterilir.

Ayrıca $\Psi_n(x) = B \sin nnx$ özfonksiyonları için $B = \sqrt{2/\pi}$ seçilirse $\Psi_n(x) = \sqrt{2/\pi} \sin nnx$ özfonksiyonları $[0,\pi]$ üzerinde ortonormal olur.

Genel olarak herhangi bir f(x) fonksiyonu ortonormal özfonksiyonların sonsuz serisi şeklinde yazılabilir. Yani $\Psi_n(x)$ ortonormal bir özfonksiyon ve

$$c_n = \int_0^\pi f(t)\, \Psi_n(t) dt$$

olmak üzere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Psi_n(x) \qquad (1.29)$$

şeklindedir.

Bu eşitlik özfonksiyon açılım formülü olarak bilinir.

Son olarak;

$\{p(x)y'(x)\}' + \{\lambda - q(x)\}\, y(x) = 0$

denklemini daha basit bir denkleme dönüştüren ($p(x) = 1$), Liouville dönüşümü olarak bilinen dönüşüme yer verilecektir.

Dönüşümün uygulanabilmesi için $[a,b]$ aralığında $p(x)$ reel değerli, $p(x) > 0$ ve $p''(x)$ mevcut ve sürekli olmalıdır.

$t = \int_a^x f(u)du$, $y(x) = g(x)z(t)$

dönüşümü tanımlansın.

Burada $f(x)$ ve $g(x)$ sonradan belirlenecek uygun fonksiyonlardır. t değişkenine göre alınan türev "." ile gösterilirse,

$$
\begin{aligned}
\{py'\}' + \{\lambda - q\}\, y &= py'' + p'y' + (\lambda - q)\, y \\
&= p(g''z + g'\dot{z}f + g'\dot{z}f + g\ddot{z}f^2 + g\dot{z}f') + p'(g'z + g\dot{z}f) + (\lambda - q)gz \\
&= (pgf^2)\ddot{z} + (p'gf + pg'f + pg'f + pgf')\dot{z} + (p'g' + pg'' + (\lambda - q)g)z \\
&= (pgf^2)\ddot{z} + [fg'p + (fgp)']\dot{z} + [(pg')' + (\lambda - q)g]z \,. \qquad (1.30)
\end{aligned}
$$

Eğer $\dot{z}$ terimi mevcut değilse

$fg'p = -(fgp)'$

alınmalıdır. Bu son eşitliğin her iki tarafı "fgp" ile bölünürse

$$\frac{g'}{g} = -\frac{(fgp)'}{fgp}$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınır ve integral sabiti de sıfır seçilirse

$\ln g = -\ln fgp$

veya

$$fg^2p = 1$$

elde edilir. Ayrıca

$$f^2p := 1 \tag{1.31}$$

tanımlanırsa (1.30) aşağıdaki şekilde yazılır:

$$(py')' + (\lambda - q)y = g\ddot{z} + [(pg')' + (\lambda - q)g]z$$

$$= g[\ddot{z} + \{(\lambda - q) + (pg')'/g\}z]$$

(1.31) eşitliği kullanılarak

$$f(x) = p(x)^{-1/2}$$

bulunur. Benzer şekilde verilen eşitlikler kullanılarak

$$g(x) = p(x)^{-1/4}$$

olur. Böylece f(x) ve g(x) tanımlanmış olur. Denklem için elde edilen son eşitlik kullanılırsa z(t) için denklem

$$\ddot{z}(t) + [\lambda - q_1(t)]z(t) = 0 \tag{1.32}$$

şekline dönüşür. Burada,

$$q_1(t) = q(t) + p(x)^{1/4}\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{d}{dx}p(x)^{-1/4}\right\} \tag{1.33}$$

dır. Böylece (1.28) denklemi p(x) = 1 olan (1.32) denklemine dönüşür.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

Bu bölümde Sturm-Liouville problemleriyle ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

İlk olarak kendine eşlik ve $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu ile ilgili problemlere ve teoremlere yer verilmiştir. Çözümleri ve ispatları için birinci bölümde verilen teorik yaklaşımlar kullanılmıştır. Ayrıca ele alınan bazı örnekler sayesinde wronskian determinantına ve green fonksiyonuna değinilmiştir. Ek olarak λ özdeğerlerinin hangi şartlar altında pozitif, negatif veya sıfır olması gerektiğini gösteren örnekler incelenmiş ve burada da rayleigh oranına değinilmiştir.

İkinci olarak **[3]** çalışmasındaki sonuçlar $n = 3$ için genişletilmiştir. Bunun için öncelikle **[3]** de olduğu gibi prüfer dönüşümü kullanılarak uygun yaklaşımların tanımlandığı θ_j dizisi ve hata terimlerini belirleyen lemmalar kullanılmıştır. Elde edilen sonuç $n = 2$ durumunda **[3]** deki sonuçla uyumludur. Bu uyumluluk özellikle ilgili sonuçları verildiği bölümde vurgulanmıştır. Böylelikle $n\to\infty$ için elde edilen geliştirilmiş yaklaşımlar önemli katkı sağlamaktadır.

2.1. Elde Edilen Teoremler ve Bazı Problemler

Teorem 2.1: $y''(x) + \{\lambda - q(x)\}\, y(x) = 0$ (2.1)

denklemi ve

$$y(b) = \alpha y(a) + \beta y'(a) \tag{2.2}$$

$$y'(b) = \gamma y(a) + \delta y'(a)$$

sınır koşulları göz önüne alınsın.

i) $D^2 := \frac{d^2}{dx^2}$

olarak tanımlanırsa $L = D^2 - q(x)$ operatörünün kendine eş operatör olması için gerek ve yeter koşul $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

ii) $b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \neq 0$ olması durumunda

$$a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}\, y'(b) = 0$$

$$a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}\, y'(b) = 0$$

ayrılmamış sınır koşulları (2.2) ile verilen sınır koşullarına dönüşür.

İspat: i) $L = D^2 - q(x)$ olsun. f(x) ve g(x) sürekli ikinci türeve sahip fonksiyonlar olmak üzere;

$$\int_a^b \{\overline{g(x)}\, Lf(x) - f(x)L\overline{g(x)}\}dx = [f,g](b) - [f,g](a) = 0$$

kabul edilsin. Buradaki f(x) ve g(x) fonksiyonları kendine eşlik tanımından (2.2) ile verilen sınır koşullarını sağlar. O halde

$$[f,g](b) - [f,g](a) = 0$$

eşitliğinde sınır koşulları yerine yazılırsa

$$[f(a)\,\overline{g'(a)} - f'(a)\overline{g(a)}][\alpha\delta - \gamma\beta - 1] = 0$$

elde edilir. Buradan ilk terim sıfırdan farklı olacağından

$$\alpha\delta - \gamma\beta - 1 = 0$$

yani

$$\alpha\delta - \gamma\beta = 1$$

olur.

Tersine $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$ alındığında yukarıda verilen L operatörünün kendine eş olduğu gösterilebilir.

ii) $b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \neq 0$ olsun. Ayrılmamış sınır koşulları

$$b_{11}y(b) + b_{12}\, y'(b) = -a_{11}y(a) - a_{12}y'(a) \qquad (*)$$

$$b_{21}y(b) + b_{22}\, y'(b) = -a_{21}y(a) - a_{22}y'(a)$$

şeklinde yazılsın. İlk denklem b_{22} ve ikinci denklem b_{12} ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa;

$$(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})y(b) = y(a)(b_{12}a_{21} - a_{11}b_{22}) + y'(a)(b_{12}a_{22} - b_{22}a_{12})$$

elde edilir. $b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \neq 0$ olduğundan her tarafı y(b) nin katsayısı ile bölersek

$$y(b) = \alpha y(a) + \beta y'(a)$$

şeklinde yazılabileceği gösterilir.

(*) da ilk eşitlik b_{21} ikinci eşitlik b_{11} ile çarpılır ve $b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \neq 0$ olduğundan her tarafı $y'(b)$ nin katsayısı ile bölünürse

$$y'(b) = \gamma y(a) + \delta y'(a)$$

şeklinde sınır koşuluna dönüşür.

Teorem 2.2: $y''(x) + \{\lambda - q(x)\}y(x) = 0$

denklemi göz önüne alınsın. Bu denklemin [a,b] aralığında bir çözümü $\phi(x)$ ile gösterilirse

$$\lambda \int_a^b \phi^2(x)dx = \int_a^b [\phi'^2(x) + q(x)\phi^2(x)]dx - \phi(b)\phi'(b) + \phi(a)\phi'(a)$$

eşitliği sağlanır. $m := \inf q(x)$ $(a \leq x \leq b)$ olarak tanımlansın. $a_1a_2 \leq 0$ ve $b_1b_2 \geq 0$ sağlanması durumunda diferensiyel denklemin

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = 0$$

$$b_1y(b) + b_2y'(b) = 0$$

sınır koşulları ile elde edilen tüm özdeğerleri m değerinden büyük veya eşittir.

İspat: Öncelikle $\phi(x)$ çözümünün yukarıdaki eşitliği sağladığı gösterilsin. $\phi(x)$ bir çözüm olduğundan denklemde yerine yazılırsa

$$\phi''(x) + \{\lambda - q(x)\}\phi(x) = 0 \tag{2.3}$$

olur.

$$\lambda \int_a^b \phi^2(x)\, dx = \int_a^b \phi(x)[\lambda\, \phi(x)]\, dx \tag{2.4}$$

eşitliğindeki $\lambda\, \phi(x)$ değeri (2.3) eşitliğinden çekilirse

$$\int_a^b \phi(x)[\, q(x)\phi(x) - \phi''(x)\,)]\, dx = \int_a^b \phi^2(x)q(x)\, dx - \underbrace{\int_a^b \phi(x)\, \phi''(x)dx}_{I} \tag{2.5}$$

bulunur. I integraline kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$I = \phi(b)\phi'(b) - \phi(a)\, \phi'(a) - \int_a^b [\phi'(x)]^2\, dx$$

olur. I ve (2.5) eşitlikleri (2.4) de yerine yazılırsa

$$\lambda \int_a^b \phi^2(x)dx = \int_a^b [\phi'^2(x) + q(x)\phi^2(x)]dx - \phi(b)\phi'(b) + \phi(a)\phi'(a)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi verilen eşitliği kullanarak teoremin diğer kısmı ispatlansın. Yukarıdaki son eşitliğin her iki tarafı λ nın katsayısı ile bölünürse

$$\lambda = \frac{\int_a^b [\phi'^2(x) + q(x)\phi^2(x)]dx}{\int_a^b \phi^2(x)dx} - \frac{\phi(b)\phi'(b)}{\int_a^b \phi^2(x)dx} + \frac{\phi(a)\phi'(a)}{\int_a^b \phi^2(x)dx} \tag{2.6}$$

elde edilir. $\phi(x)$ bir çözüm olduğundan verilen sınır koşullarını sağladığı göz önüne alınır ve $a_1a_2 \leq 0$ ve $b_1b_2 \geq 0$ kabulleri kullanılırsa

$$\phi(a)\phi'(a) \geq 0\,, \quad \phi(b)\phi'(b) \leq 0$$

elde edilir. Ayrıca $\int_a^b \phi^2(x)\, dx \geq 0$ olduğu da analizden bilinmektedir. Benzer şekilde $\int_a^b \phi'^{\,2}(x)\, dx \geq 0$ olduğu görülür. $m := \inf q(x)$ durumuda göz önüne alınırsa (2.6) eşitliği ile

$$\lambda \geq m$$

elde edilir.

Teorem 2.3: $x \in [x_1, x_2]$ aralığında $p(x), r(x) > 0$ ve $p'(x)$, $r(x)$ ve $q(x)$ $[x_1,x_2]$ de sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'(x)] + [q(x) + \lambda r(x)]y(x) = 0$$

denklemi verilsin. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i) $-\int_{x_1}^{x_2}[p(x)y'^{\,2}(x) - q(x)y^2(x)]dx + \lambda\int_{x_1}^{x_2} r(x)y^2(x)dx + p(x)y(x)y'(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$

ii) $p(x)y(x)y'(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$ ve $q(x) < 0$ ise tüm özdeğerler sıfırdan büyük veya eşittir.

iii) $y(x_1)y'(x_1) \geq 0$, $y(x_2)y'(x_2) \leq 0$ ve $q(x) \leq 0$ ise tüm özdeğerleri sıfırdan büyük veya eşittir.

İspat: i) $\lambda\int_{x_1}^{x_2} r(x)y^2(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} y(x)[\lambda r(x)y(x)]dx$ (*)

verilen diferensiyel denklemden $\lambda r(x)y(x)$ yerine eşiti yazılırsa

$$\int_{x_1}^{x_2} y(x)[-\frac{d}{dx}[p(x)y'(x)] - q(x)y(x)]dx = -\int_{x_1}^{x_2} q(x)y^2(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{y(x)[\frac{d}{dx}[p(x)y'(x)]dx}_{I}$$

I integrali için kısmi integrasyon uygularsak

$$I = p(x)y(x)y'(x)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} p(x)y'^2(x)\,dx$$

olur. Bulunanlar (*) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-\int_{x_1}^{x_2}[p(x)y'^2(x) - q(x)y^2(x)]dx + \lambda\int_{x_1}^{x_2} r(x)y^2(x)dx + p(x)y(x)y'(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

elde edilir.

ii) $p(x)y(x)y'(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$ olduğundan

$$\lambda = \frac{\int_{x_1}^{x_2}[p(x)y'^2(x) - q(x)y^2(x)]dx}{\int_{x_1}^{x_2} r(x)y^2(x)dx}$$

olur. $p(x), r(x) > 0$ tanımı $q(x) < 0$ kabulü ve bir fonksiyonun karesinin integralinin sıfırdan büyük veya eşit olma özellikleri göz önüne alınırsa

$\lambda \geq 0$

elde edilir.

iii) (i) ile verilen eşitlikte λ yalnız bırakılırsa

$$\lambda = \frac{\int_{x_1}^{x_2}[p(x)y'^2(x)-q(x)y^2(x)]dx}{\int_{x_1}^{x_2} r(x)y^2(x)dx} - \frac{p(x_2)y(x_2)y'(x_2) - p(x_1)y(x_1)y'(x_1)}{\int_{x_1}^{x_2} r(x)y^2(x)dx} \qquad (**)$$

olur. $y(x_1)y'(x_1) \geq 0$, $y(x_2)y'(x_2) \leq 0$ eşitsizlikleri ile

$$p(x)y(x)y'(x)\Big|_{x_1}^{x_2} \leq 0$$

elde edilir. (ii) deki benzer durumlar göz önüne alındığında

$\lambda \geq 0$

bulunur.

(**) ile verilen bu eşitliğe rayleigh oranı adı verilir.

Şimdi aşağıdaki problemde kullanılacak Wronskian fonksiyonu incelensin:

$f_1, f_2, f_3,\ldots,f_m$ bir J aralığında tanımlı fonksiyonlar olmak üzere her biri J aralığında (m-1) defa türevlenebilir olsunlar.

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_m(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{(m-1)} & f_2^{(m-1)} & \cdots & f_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

m×m lik bu determinanta $f_1, f_2, f_3,\ldots,f_m$ fonksiyonlarının *Wronskian* ı denir.
$W(f_1, f_2, f_3,\ldots,f_m)(x)$ şeklinde gösterilir.

Özel olarak $f_1 = \theta_1$ ve $f_2 = \theta_2$ alınırsa

$$W(\theta_1, \theta_2) = \begin{vmatrix} \theta_1(x) & \theta_2(x) \\ \theta_1'(x) & \theta_2'(x) \end{vmatrix}$$

ile hesaplanır.

Problem 2.1: $y''(x) + \lambda y(x) = 0 \qquad (0 \leq x \leq \pi)$

denklemi

$y(0) = 0$ ve $y(\pi) = 0$

sınır koşulları ile verilsin. Bu özdeğer probleminin $\lambda = 0$ ve $\lambda = k^2 > 0$ durumları için green fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: Sınır değer problemleri için green fonksiyonu $W(\theta_1, \theta_2) = -\Delta(\lambda)$ olmak üzere;

$$G(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} -\theta_1(x, \lambda)\theta_2(\xi, \lambda) \,/\, \Delta(\lambda) & (a \leq x \leq \xi) \\ \\ -\theta_2(x, \lambda)\theta_1(\xi, \lambda) \,/\, \Delta(\lambda) & (\xi \leq x \leq b) \end{cases}$$

şeklinde olduğu bilinmektedir **(**Bölüm 5.6 **[1])**. Burada θ_1 fonksiyonu birinci sınır koşulunu, θ_2 fonksiyonu ikinci sınır koşulunu sağlayacak şekilde belirlenen fonksiyonlardır.

$\lambda = k^2 > 0$ durumunda genel çözüm $y(x) = c_1\cos kx + c_2\sin kx$ şeklindedir. O halde **[1]** ile verilen tanımlamalar kullanılarak green fonksiyonu hesaplansın.

$\theta_1 := c_1\cos kx + c_2\sin kx \qquad \theta_1(0) = 0$

$\theta_2 := d_1\cos kx + d_2\sin kx \qquad \theta_2(\pi) = 0$

şeklinde tanımlansın. Verilen sınır koşulları ile uygun seçimler yapılırsa

$\theta_1(x) = \sin kx$ ve $\theta_2(x) = \sin k(\pi - x)$

alınabilir. θ_1 ve θ_2 nin bu seçimleri ile $W(\theta_1, \theta_2) = -k\sin k\pi$ olur.

Bu sonuçlar yukarıda tanımlanan $G(x, \xi, \lambda)$ green fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$G(x, \xi, k) = \begin{cases} \dfrac{\sin kx \, \sin k(\pi - \xi)}{-k \sin k\pi} & (0 \leq x \leq \xi) \\ \\ \dfrac{\sin k\xi \, \sin k(\pi - x)}{-k \sin k\pi} & (\xi \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

elde edilir. $k = \sqrt{\lambda}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$G(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}x \, \sin\sqrt{\lambda}(\pi - \xi)}{-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi} & (0 \leq x \leq \xi) \\ \\ \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}\xi \, \sin\sqrt{\lambda}(\pi - x)}{-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi} & (\xi \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

olur.

$\lambda = 0$ için denklemin genel çözümü $y(x) = c_1 + c_2x$ şeklindedir. O halde

$\theta_1 := c_1 + c_2x \qquad \theta_1(0) = 0$

$\theta_2 := d_1 + d_2x \qquad \theta_2(\pi) = 0$

şeklinde tanımlanırsa $\theta_1(x) = x$ ve $\theta_2(x) = \pi - x$ alınabilir. Buradan $W(\theta_1, \theta_2) = -\pi$ bulunur. Sonuç olarak green fonksiyonu

$$G(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{x\,(\pi - \xi)}{-\pi} & (0 \leq x \leq \xi) \\ \\ \dfrac{\xi\,(\pi - x)}{-\pi} & (\xi \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

Problem 2.2: $y''(x) + \lambda y(x) = 0 \qquad (a \leq x \leq b)$

denklemi

$y'(a) = 0$ ve $y'(b) = 0$

sınır koşulları ile verilsin. Bu özdeğer probleminin özdeğerlerini, özfonksiyonlarını ve green fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $\lambda = 0$ olsun. Genel çözüm $y(x) = c_1 + c_2x$ şeklindedir. Sınır koşuları uygulanırsa $c_2 = 0$ olur. c_1 için kısıtlayıcı hiçbir eşitlik elde edilmediğinden c_1 keyfi seçilir. O halde $\lambda = 0$ özdeğeri için çözümler (özfonksiyonlar) $y(x) = c_1$ şeklindedir.

$\theta_1 := c_1 \qquad \theta_1'(a) = 0$

$\theta_2 := d_1 \qquad \theta_2'(b) = 0$

seçilsin. $W(\theta_1, \theta_2) = 0$ olduğundan green fonksiyonunda yerine yazılırsa $\lambda = 0$ için green fonksiyonun mevcut olamayacağı görülür.

$\lambda = k^2 > 0$ olsun. Genel çözümü $y(x) = c_1\cos kx + c_2\sin kx$ şeklindedir. Sınır koşulları ile

$y'(a) = -kc_1\sin ka + kc_2\cos ka = 0$

$y'(b) = -kc_1\sin kb + kc_2\cos kb = 0$

sağlanır. Buradan c_1 ve c_2 yi aynı anda sıfır yapmayan değerlerin olması için bu eşitliklerin katsayılar determinantı sıfır olmalıdır. Bu durumda

$k^2\sin k(b-a) = 0$

sağlayan $k = \frac{n\pi}{(b-a)}$ (n=1,2,3,…) şeklinde k değerleri mevcuttur. O halde $\lambda_n = [\frac{n\pi}{(b-a)}]^2$ özdeğerleri için

$$y_n(x) = c_1\cos\frac{n\pi}{(b-a)}x + c_2\sin\frac{n\pi}{(b-a)}x \qquad (n = 1,2,3\ldots)$$

trivial olmayan çözümler mevcut olur.

$\theta_1 := c_1\cos kx + c_2\sin kx \qquad \theta_1'(a) = 0$

$\theta_2 := d_1\cos kx + d_2\sin kx \qquad \theta_2'(b) = 0$

şeklinde yazılsın.

Sınır koşulları ile uygun seçimler yapılırsa

$\theta_1(x) = \cos k(x-a)$ ve $\theta_2(x) = \cos k(x-b)$

olur. $W(\theta_1, \theta_2) = k\sin k(b-a)$ sonucu da kullanılırsa

$$G(x, \xi, k) = \begin{cases} \dfrac{\cos k(\xi-a)\cos k(x-b)}{k\sin k(b-a)} & (a \leq x \leq \xi) \\ \\ \dfrac{\cos k(x-a)\cos k(\xi-x)}{k\sin k(b-a)} & (\xi \leq x \leq b) \end{cases}$$

şeklinde green fonksiyonu bulunur.

$\lambda = -k^2 < 0$ olsun. Denklemin genel çözümü $y(x) = c_1\cosh kx + c_2\sinh kx$ şeklindedir. Sınır koşulları yerine yazılırsa

$y'(a) = kc_1\sinh ka + kc_2\cosh ka = 0$

$y'(b) = kc_1\sinh kb + kc_2\cosh kb = 0$

sağlanır. Buradan öncelikle katsayılar determinantı incelenirse

$-k^2\sinh k(b-a) = 0$

bulunur. Fakat bu eşitlikte $b-a \neq 0$ ve $k \neq 0$ olduğundan eşitlik hiçbir zaman mümkün olamaz. O halde $c_1 = c_2 = 0$ elde edilir. Yani $\lambda = -k^2 < 0$ ile trivial çözümler elde edilir. Bu durumda green fonksiyonu mevcut olamaz.

Teorem 2.4 [1]: $y''(x) + \{\lambda - q(x)\}y(x) = 0$

diferensiyel denklemi ve

$a_0y(a) + a_1y'(a) = 0$

$b_0y(b) + b_1y'(b) = 0$

ayrılmış sınır koşulları ile basit özdeğerlere sahiptir.

İspat: Kabul edelim ki $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ aynı λ özdeğerine karşılık gelen iki lineer bağımsız özfonksiyonlar olsun. $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ çözüm olduğundan başlangıç değerlerini sağlarlar. $x = a$ noktasında,

$$a_0\, \varphi_1 (a) + a_1\, \varphi_1'(a) = 0$$

$$a_0\, \varphi_2 (a) + a_1\, \varphi_2'(a) = 0$$

olur. a_0 ve a_1 aynı anda sıfır olamayacağından katsayılar determinantı (wronskian determinantı) ile $W(\varphi_1, \varphi_2)(a) = 0$ bulunur. Benzer şekilde $x = b$ noktasında $W(\varphi_1, \varphi_2)(b) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ orantılı olmak zorundadır. Bu durum $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ çözümlerinin lineer bağımsız olmasıyla çelişir. O halde λ özdeğerine karşılık gelen bir tek özfonksiyon vardır.

Problem 2.3: L, n. mertebe lineer operatörü $L = \sum_{r=0}^{n} a_{n-r}(x)\frac{d^r}{dx^r}$,

$$Ly(x) = \lambda y(x) \tag{2.7}$$

denklemi ve

$$\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}y^{(j-1)}(a) + b_{ij}y^{(j-1)}\} = 0 \quad (i = 1,2,\dots,n) \tag{2.8}$$

sınır koşulu ile verilsin. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunu bulunuz.

Özel olarak $L=d^4/dx^4$ lineer operatörü ile

$$Ly(x) = \lambda y(x)$$

denklemine

$$y(a) = y^{(2)}(a) = y^{(1)}(b) = y^{(3)}(b) = 0$$

sınır koşullarını uygulayarak $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Öncelikle operatörün ve denklemin n.mertebe hali en geniş şekilde yazılsın.

$$L = a_n(x) + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_{n-2}(x)\frac{d^2}{dx^2} + \dots + a_0(x)\frac{d^n}{dx^n}$$

opratörü için

$a_0(x)y^{(n)}(x) + \ldots + a_{n-2}(x)y''(x) + a_{n-1}(x)y'(x) + (a_n(x)-\lambda)y(x) = 0$

denklemi yazılır. Benzer şekilde sınır koşulu incelensin.

$\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}y^{(j-1)}(a) + b_{ij}y^{(j-1)}\} = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$

$i = 1$ olsun.

$a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + \ldots + a_{1n}y^{(n-1)}(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) + \ldots + b_{1n}y^{(n-1)}(b) = 0$

$i = 2$ olsun.

$a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + \ldots + a_{2n}y^{(n-1)}(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) + \ldots + b_{2n}y^{(n-1)}(b) = 0$

$i = 3$ olsun.

$a_{31}y(a) + a_{32}y'(a) + \ldots + a_{3n}y^{(n-1)}(a) + b_{31}y(b) + b_{32}y'(b) + \ldots + b_{3n}y^{(n-1)}(b) = 0$

$\vdots$

$i = n$ olsun.

$a_{n1}y(a) + a_{n2}y'(a) + \ldots + a_{nn}y^{(n-1)}(a) + b_{n1}y(b) + b_{n2}y'(b) + \ldots + b_{nn}y^{(n-1)}(b) = 0.$

$\phi_1(x,\lambda), \phi_2(x,\lambda), \ldots, \phi_n(x,\lambda)$ verilen diferensiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri olsun.

O halde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ler sabit olmak üzere

$y(x,\lambda) = A_1\,\phi_1(x,\lambda) + A_2\,\phi_2(x,\lambda) + \ldots + A_n\,\phi_n(x,\lambda)$

şeklinde çözümü mevcuttur. $y(x,\lambda)$ çözüm olduğundan verilen sınır koşullarını sağlar.

Buradan;

$\alpha_{ij}(\lambda) = a_{i1}\phi_j(a,\lambda) + a_{i2}\phi_j'(a,\lambda) + \ldots + a_{in}\phi_j^{(n-1)}(a,\lambda) + b_{i1}\phi_j(b,\lambda) + b_{i2}\phi_j'(b,\lambda) + \ldots + b_{in}\phi_j^{(n-1)}(b,\lambda)$

$(i, j = 1,2,\ldots,n)$ olmak üzere

$$A_1\alpha_{11}(\lambda) + A_2\alpha_{12}(\lambda) + \ldots + A_n\alpha_{1n}(\lambda) = 0$$

$$A_1\alpha_{21}(\lambda) + A_2\alpha_{22}(\lambda) + \ldots + A_n\alpha_{2n}(\lambda) = 0$$

$$\vdots$$

$$A_1\alpha_{n1}(\lambda) + A_2\alpha_{n2}(\lambda) + \ldots + A_n\alpha_{nn}(\lambda) = 0$$

elde edilir. $y(x,\lambda)$ çözüm olduğundan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ler aynı anda sıfır olamaz. O halde katsayılar determinantı sıfır olmak zorundadır. Yani

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}(\lambda) & \alpha_{12}(\lambda) & \cdots & \alpha_{1n}(\lambda) \\ \alpha_{21}(\lambda) & \alpha_{22}(\lambda) & \cdots & \alpha_{2n}(\lambda) \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1}(\lambda) & \alpha_{n2}(\lambda) & \cdots & \alpha_{nn}(\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

dır. Bu determinantı sıfır yapan değerler (2.7)-(2.8) probleminin özdeğerleridir.

Şimdi yukarıda verilen özel durum için $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu hesaplansın. Öncelikle;

$y(a) = 0$ ile $i = 1$ durumundan $a_{11} = 1$ diğerleri sıfırdır.

$y^{(1)}(b) = 0$ ile $i= 2$ durumundan $b_{22} = 1$ diğerleri sıfırdır.

$y^{(2)}(a) = 0$ ile $i = 3$ durumundan $a_{33} = 1$ diğerleri sıfırdır.

$y^{(3)}(b) = 0$ ile $i = 4$ durumundan $b_{44} = 1$ diğerleri sıfırdır.

Daha önce n. mertebe lineer operatöre sahip $Ly(x) = \lambda y(x)$ denkleminin (2.8) ile verilen sınır koşulları ile $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu hesaplanmıştı. Bu $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunu $n= 4$ için

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}(\lambda) & \alpha_{12}(\lambda) & \alpha_{13}(\lambda) & \alpha_{14}(\lambda) \\ \alpha_{21}(\lambda) & \alpha_{22}(\lambda) & \alpha_{23}(\lambda) & \alpha_{24}(\lambda) \\ \alpha_{31}(\lambda) & \alpha_{32}(\lambda) & \alpha_{33}(\lambda) & \alpha_{34}(\lambda) \\ \alpha_{41}(\lambda) & \alpha_{42}(\lambda) & \alpha_{43}(\lambda) & \alpha_{44}(\lambda) \end{vmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. a_{ij} ve b_{ij} değerleri bilindiğinden α_{ij} ler kolaylıkla hesaplanır ve yerine yazılırsa

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \phi_1(a,\lambda) & \phi_2(a,\lambda) & \phi_3(a,\lambda) & \phi_4(a,\lambda) \\ \phi_1'(b,\lambda) & \phi_2'(b,\lambda) & \phi_3'(b,\lambda) & \phi_4'(b,\lambda) \\ \phi_1''(a,\lambda) & \phi_2''(a,\lambda) & \phi_3''(a,\lambda) & \phi_4''(a,\lambda) \\ \phi_1'''(b,\lambda) & \phi_2'''(b,\lambda) & \phi_3'''(b,\lambda) & \phi_4'''(b,\lambda) \end{vmatrix}$$

elde edilir.

Problem 2.4: $y''(x) + \lambda y(x) = 0 \qquad (0 \le x \le 1)$

diferensiyel denklemi

$y(1) = \alpha y(0)$ ve $y'(1) = \beta y'(0)$ $(\alpha, \beta$: reel)

sınır koşulları ile verilsin.

i) $\alpha + \beta = 0$ ve $\alpha^2 = 1$ olması durumunda özdeğerleri bulunuz.

ii) $\alpha + \beta = 0$ ve $\alpha^2 \neq 1$ olması durumunda özdeğerleri bulunuz.

Çözüm: i) $\alpha + \beta = 0$ ve $\alpha^2 = 1$ olsun. Bu durumda $\alpha = 1$ iken $\beta = -1$ veya $\alpha = -1$ iken $\beta = 1$ olur.

$\alpha = 1$ iken $\beta = -1$ olsun. Sınır koşulları $y(1) = y(0)$ ve $y'(1) = -y'(0)$ şekline dönüşür.

$\lambda = 0, -k^2 < 0$ ve $k^2 > 0$ durumları bu varsayım altında incelensin.

$\lambda = 0$ olsun. Genel çözüm $y(x) = c_1 + c_2 x$ şeklindedir. $y(1) = y(0)$ ve $y'(1) = -y'(0)$ koşulları göz önüne alınırsa $c_2 = 0$ ve c_1 keyfi sabit olarak bulunur. Bu durumda $\lambda = 0$ için genel çözüm $y(x) = c_1$ şeklinde yazılır.

$\lambda = -k^2 < 0$ olsun. Genel çözüm $y(x) = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx$ şeklindedir. $y(1) = y(0)$ ve $y'(1) = -y'(0)$ koşulları uygulanırsa

$c_1(\cosh k - 1) + c_2 \sinh k = 0$

$c_1 \sinh k + c_2(\cosh k + 1) = 0$

elde edilir. Buradan c_1 ve c_2 değerlerinin aynı anda sıfır olmaması için katsayılar determinantı incelenir ve sıfır bulunur. O halde $\lambda = -k^2 < 0$ özdeğeri için c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere $y(x) = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx$ çözümü mevcut olur.

$\lambda = k^2 > 0$ olsun. Genel çözüm $y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$ şeklindedir. $y(1) = y(0)$ ve $y'(1) = -y'(0)$ koşulları uygulanırsa

$c_1(\cos k - 1) + c_2 \sin k = 0$

$-c_1 \sin k + c_2(\cos k + 1) = 0$

elde edilir. Buradan c_1 ve c_2 değerlerinin aynı anda sıfır olmaması için katsayılar determinantı incelenir ve yine sıfır bulunur. O halde $\lambda = k^2 > 0$ özdeğeri için c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere $y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$ trivial olmayan çözüm elde edilir.

$\alpha = -1$ iken $\beta = 1$ olsun. Sınır koşulları $y(1) = -y(0)$ ve $y'(1) = y'(0)$ şekline dönüşür. Şimdi $\lambda = 0, -k^2 < 0$ ve $k^2 > 0$ durumlarını bu varsayım altında incelensin.

$\lambda = 0$ olsun. Genel çözüm $y(x) = c_1 + c_2 x$ şeklindedir. Sınır koşulları yerine yazılırsa c_1, c_2 keyfi sabitler olarak bulunur. Bu durumda $\lambda = 0$ özdeğeri ile $y(x) = c_1 + c_2 x$ şeklinde trivial olmayan çözümler bulunur.

$\lambda = -k^2 < 0$ olsun. Genel çözüm $y(x) = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx$ şeklindedir. $y(1) = -y(0)$ ve $y'(1) = y'(0)$ koşulları uygulanırsa

$c_1(\cosh k + 1) + c_2 \sinh k = 0$

$c_1 \sinh k + c_2(\cosh k - 1) = 0$

elde edilir. Buradan c_1 ve c_2 değerlerinin aynı anda sıfır olmaması için katsayılar determinantı incelenir ve sıfır bulunur. O halde $\lambda = -k^2 < 0$ özdeğeri için c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere $y(x) = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx$ çözümü mevcut olur.

$\lambda = k^2 > 0$ olsun. Genel çözüm $y(x) = c_1\cos kx + c_2\sin kx$ şeklindedir. $y(1) = -y(0)$ ve $y'(1) = y'(0)$ koşulları uygulanırsa

$$c_1(\cos k + 1) + c_2\sin k = 0$$

$$-c_1\sin k + c_2(\cos k - 1) = 0$$

elde edilir. Buradan c_1 ve c_2 değerlerinin aynı anda sıfır olmaması için katsayılar determinantı incelenir ve sıfır bulunur.

O halde $\lambda = k^2 > 0$ özdeğeri için c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere $y(x) = c_1\cos kx + c_2\sin kx$ trivial olmayan çözüm elde edilir.

ii) $\alpha + \beta = 0$ ve $\alpha^2 \neq 1$ olsun. Bu durumda $\alpha + \beta = 0$ ve $\alpha \neq 1, -1$ ile $\beta \neq 1, -1$ olur.

$\lambda = 0$ için genel çözüm $y(x) = c_1 + c_2x$ idi. Sınır koşulları $\alpha \neq 1$ ve $\beta \neq 1$ durumunda göz önüne alınırsa $c_1 = c_2 = 0$ yani $y(x) = 0$ trivial çözümü elde edilir. O halde $\lambda = 0$ özdeğer olamaz.

$\lambda = -k^2 < 0$ için genel çözüm $y(x) = c_1\cosh kx + c_2\sinh k$ idi. Sınır koşulları uygulanırsa

$$c_1(\cosh k - \alpha) + c_2\sinh k = 0$$

$$c_1\sinh k + c_2(\cosh k - \beta) = 0$$

elde edilir. Buradan c_1 ve c_2 değerlerinin aynı anda sıfır olmaması için katsayılar determinantı incelenirse

$$(\alpha\beta + 1) = 0$$

eşitliği bulunur. $\alpha + \beta = 0$ ile $\beta = -\alpha$ elde edilir. Bu durumda yukarıdaki eşitlikten

$$\alpha^2 = 1$$

bulunur ki bu $\alpha^2 \neq 1$ olmasıyla çelişir. O halde $c_1 = c_2 = 0$ ile $y(x) = 0$ trivial çözümü elde edilir.

$\lambda = k^2 > 0$ olsun. Genel çözüm $y(x) = c_1\cos kx + c_2\sin kx$ şeklindedir. Sınır koşulları uygulanırsa

$c_1(\cos k - \alpha) + c_2 \sin k = 0$

$-c_1 \sin k + c_2(\cos k - \beta) = 0$

elde edilir. Buradan c_1 ve c_2 değerlerinin aynı anda sıfır olmaması için katsayılar determinantı incelenirse

$(\alpha\beta + 1) = 0$

eşitliği bulunur. Benzer şekilde yukarıdaki durum göz önüne alınırsa trivial çözüm elde edilir. Bu durumda $\lambda = k^2 > 0$ özdeğer olamaz.

2.2. Özdeğerler İçin Asimptotik Çözümler

q(x) reel değerli ve [a,b] aralığında lebesque anlamında integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere;

$$y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0 \qquad (2.9)$$

diferensiyel denklemi

$$a_0 y(a) + a_1 y'(a) = 0 \qquad (2.10)$$

$$b_0 y(b) + b_1 y'(b) = 0$$

ayrılmış sınır koşulları ile göz önüne alınsın.

Burada $a_1 = 0$ ($b_1 = 0$) olması durumuna dirichlet sınır koşulu, $a_0 = 0$ ($b_0 = 0$) olması durumuna neumann sınır koşulu adı verilir.

Amacımız (2.9)-(2.10) özdeğer probleminin $n \to \infty$ için λ_n özdeğerlerinin asimptotik yaklaşımlarını bulmaktır. Genel olarak bu yaklaşımlar

$$\lambda_n = F(n) + o(n^{-K}) \qquad (2.11)$$

şeklindedir. Burada K , q(x) fonksiyonunun düzgünlüğüne bağlı olarak hata teriminde bir sabittir. Daha düzgün bir potansiyel fonksiyonu q ile daha büyük bir K sabiti elde edilir.

Şimdi aşağıda tanımlanan prüfer dönüşümünü kullanılsın:

$$\tan\theta(x) := \lambda^{1/2}\,\frac{y(x,\lambda)}{y'(x,\lambda)}, \quad x \in [a,b] \tag{2.12}$$

Buradan

$$y(x,\lambda) = \rho\lambda^{-1/2}\sin\theta(x)$$

$$y'(x,\lambda) = \rho\cos\theta(x)$$

olur. Ayrıca

$$y_1 = y$$

$$y_2 = y'$$

şeklinde tanımlanırsa

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = (q(x)-\lambda)y_1$$

bulunur. Burada y ve y′ değerleri yukarıdaki eşitliklerden yerine yazılır ve uygun katsayılarla eşitlenirse

$$\theta'(x) = \lambda^{1/2}\cos^2\theta(x) + (\lambda-q(x))\lambda^{-1/2}\sin^2\theta(x)$$

olur. $\cos^2\theta(x) = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)$ ve $\sin^2\theta(x) = \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)$ eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\theta'(x) = \lambda^{1/2} - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(x) + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}q(x)\cos(2\theta(x)) \tag{2.13}$$

bulunur. (2.13) denklemindeki θ(x) fonksiyonu için **[3]** de tanımlandığı gibi aşağıdaki dizi göz önüne alınsın. j= 1, 2, 3, … için

$$\theta_1(x) := \theta(a) + \lambda^{1/2}(x-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^x q(t)dt \tag{2.14}$$

$$\theta_{j+1}(x) := \theta_1(x) + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^x q(t)\cos(2\,\theta_j(t))\,dt \tag{2.15}$$

şeklindedir.

Şimdi asimptotik çözümleri elde etmek için kullanılan bazı teoremler ve lemmalar verilecektir.

Teorem 2.5 [3]: Her n tamsayısı için $\lambda\to\infty$ için

$$\theta(b) - \theta(a) = \lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)dt + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)\cos(2\,\theta_n(t))\,dt + o(\lambda^{-(1/2)(n+1)}) \tag{2.16}$$

şeklindedir.

İspat: (2.13) eşitliğinin [a,x] üzerinde integrali alınırsa

$$\theta(x) - \theta(a) = \lambda^{1/2}(x-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^x q(t)\,dt + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^x q(t)\cos(2\theta(t))\,dt \tag{2.17}$$

bulunur. Özel olarak x = b alınırsa;

$$\theta(b) - \theta(a) = \lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)dt + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)\cos(2\,\theta(t))\,dt$$

olur. İspat tamamlanmadan önce gerekli birkaç lemma verilmelidir.

Lemma 2.1 [6]: $x \in [a,b]$ ve $q \in L^1[a,b]$ verilsin. $\lambda\to\infty$ için;

$$\int_a^x q(t)\cos(2\theta(t))\,dt = o(1)$$

şeklindedir.

İspat: $\mu := \pi / (2\lambda^{1/2})$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca

$$x_1 + \mu \le b \ \text{ ve } \ x_2 - x_1 \ge \mu$$

koşulları verilsin.

$$I := \int_{x_1}^{x_2} q(t)\cos(2\theta(t))\,dt, \quad I' := \int_{x_1+\mu}^{x_2+\mu} q(t)\cos(2\theta(t))\,dt$$

şeklinde tanımlansınlar.

$$I - I' = \int_{x_1}^{x_1+\mu} q(t)\cos(2\theta(t))\,dt + \int_{x_2}^{x_2+\mu} q(t)\cos(2\theta(t))\,dt$$

olur. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$| I - I'| = \left|\int_{x_1}^{x_1+\mu} q(t)\ \cos(2\theta(t))\, dt\ +\ \int_{x_2}^{x_2+\mu} q(t)\ \cos(2\theta(t))\, dt\right|$$

$$\leq \int_{x_1}^{x_1+\mu}|q(t)|\,|\cos(2\theta(t))|dt + \int_{x_2}^{x_2+\mu}|q(t)|\,|\cos(2\theta(t))|dt$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ ve $q \in L^1[a,b]$ ve $\mu = o(1)$ olduğundan

$$I - I' = o(1) \tag{2.18}$$

olur.

$$I + I' = \int_{x_1}^{x_2} q(t) \cos(2\theta(t))\, dt\ +\ \int_{x_1+\mu}^{x_2+\mu} q(t) \cos(2\theta(t))\, dt$$

eşitliğine $u = x-\mu$ dönüşümü uygulanırsa

$$I + I' = \int_{x_1}^{x_2}[q(t) \cos(2\theta(t))\, dt\ + q(t+\mu) \cos(2\theta(t+\mu))]\, dt$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} q(t)\left\{\cos\big(2\theta(t)\big) + \cos(2\theta(t+\mu))\right\} dt$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \cos(2\theta(t+\mu))\,\{q(t+\mu) - q(t)\}dt$$

bulunur. $q \in L^1[a,b]$ olduğundan

$$\int_a^{b-\mu}|q(t+\mu) - q(t)|\, dt = o(1)$$

sağlanır. Bu durumda eşitliğin son terimi o(1) olur. Ayrıca

$$\cos\big(2\theta(t)\big) + \cos\big(2\theta(t+\mu)\big) = 2 \cos\{\theta(t+\mu) + \theta(t)\}\cos\{\theta(t+\mu) - \theta(t)\}$$

dır. Ek olarak $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ ve $\delta > 0$ olmak üzere $x_2 - x_1 \leq \delta\lambda^{-1/2}$ verilsin.

Bu takdirde $\lambda \to \infty$ için

$$\theta(x_2) - \theta(x_1) = \lambda^{1/2}(x_2 - x_1) + o(1)$$

dır (Lemma 4.1.**[4]**). Buradan

$$\theta(t+\mu) - \theta(t) = \frac{\pi}{2} + o(1)$$

bulunur. Bu durumda I+I′ eşitliğinin ilk terimi de o(1) olur. Sonuç olarak

$$I+I' = o(1) \tag{2.19}$$

elde edilir. (2.18)-(2.19) eşitlikleri ile

$$I = o(1)$$

olur. Özel olarak $x_1 = a$ ve $x_2 = x$ alınırsa ispat tamamlanır.

Lemma 2.2 [6]: $x \in [a,b]$ ve $(j= 1,2,\ldots)$ olmak üzere $\lambda\to\infty$ için;

$$\int_a^x q(t) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (2\theta_j(t))\, dt = o(1)$$

şeklindedir.

İspat : Lemma 2.1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Lemma 2.3 [3]: $x \in [a,b]$ ve $(j= 1,2,\ldots)$ olmak üzere $\lambda\to\infty$ için;

$$\theta_{j+1}(x)-\theta_j(x) = o(\lambda^{-j/2})$$

eşitliği sağlanır.

İspat: j üzerinde indüksiyon yöntemi uygulanmalıdır. j = 1 olsun. (2.14)-(2.15) eşitlikleri ile

$$\theta_2(x)-\theta_1(x) = \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^x q(t)\cos(2\,\theta_1(t))\, dt$$

dır. Lemma 2.2 ile integral terimi o(1) olur. Buradan da

$$\theta_2(x)-\theta_1(x) = o(\lambda^{-1/2})$$

elde edilir. $j-1$ için

$$\theta_j(x)-\theta_{j-1}(x) = o(\lambda^{-(j-1)/2})$$

olsun. j için de doğru olduğu gösterilsin. (2.14)-(2.15) eşitlikleri ile

$$\theta_{j+1}(x) - \theta_j(x) = \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^x q(t)\left\{\cos(2\,\theta_j(t)) - \cos(2\,\theta_{j-1}(t)\right\} dt$$

$$= -\lambda^{-1/2}\int_a^x q(t)\sin(\theta_j(t)-\theta_{j-1}(t))\sin(\theta_j(t)+\theta_{j-1}(t))\, dt$$

bulunur. Buradan

$$\left|\theta_{j+1}(x)-\theta_j(x)\right| \leq \lambda^{-1/2} \sup_{a\leq x\leq b}\left|\theta_j(x)-\theta_{j-1}(x)\right| \int_a^b |q(t)|dt$$

$$= o(\lambda^{-j/2})$$

olur.

Lemma 2.4 [3]: $x \in [a,b]$ ve ($j= 1,2,\ldots$) olmak üzere $\lambda\to\infty$ için;

$$\theta(x)-\theta_j(x) = o(\lambda^{-j/2})$$

eşitliği sağlanır.

İspat: j üzerinde indüksiyon yöntemi uygulanmalıdır. j = 1 olsun. (2.14)-(2.17) eşitlikleri ile

$$\theta(x)-\theta_1(x) = \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^x q(t)\cos(2\theta(t))\,dt$$

bulunur. Lemma 2.1 ile integral terimi o(1) olur. Buradan da

$$\theta(x)-\theta_1(x) = o(\lambda^{-1/2})$$

bulunur. j için doğru olsun. j+1 için doğru olduğu gösterilsin.

$$\theta(x)-\theta_{j+1}(x) = \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^x q(t)\left\{\cos\big(2\theta(t)\big)-\cos(2\theta_j(t))\right\}dt$$

$$= -\lambda^{-1/2}\int_a^x q(t)\sin(\theta(t)-\theta_j(t))\sin(\theta(t)+\theta_j(t))\,dt$$

olur. İndüksiyon hipotezi ile

$$\left|\theta(x)-\theta_{j+1}(x)\right| \leq \lambda^{-1/2} \sup_{a\leq x\leq b}\left|\theta(x)-\theta_j(x)\right| \int_a^b |q(t)|dt$$

$$= o(\lambda^{-(1/2)(j+1)})$$

bulunur.

Şimdi teorem 2.5 in ispatı tamamlanabilir:

n = 1,2,… için

$$\theta(b) - \theta(a) = \lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)dt + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)\cos(2\,\theta_n(t))\,dt$$

$$+\ \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)\,\{\cos(2\,\theta(t)) - \cos(2\theta_n(t)\}\,dt$$

şeklinde yazılırsa Lemma 2.4 ile

$$\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)\,\{\cos(2\,\theta(t)) - \cos(2\theta_n(t)\}\,dt = o(\lambda^{-(1/2)(n+1)})$$

olur. Buradan

$$\theta(b) - \theta(a) = \lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)dt$$

$$+\ \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)\cos(2\,\theta_n(t))\,dt + o(\lambda^{-(1/2)(n+1)})$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Lemma 2.5 [5]: $a \le x_1 < x_2 \le b$ ve $f \in L^1[a,b]$ olsun. $\lambda\to\infty$ için;

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,(2\lambda^{1/2}(t-a))\,dt = o(1)$$

dir.

İspat: Bunun ispatı için **[4], [5]** referanslarına bakılabilir.

Şimdi (2.9)-(2.10) özdeğer probleminin λ_n özdeğerlerinin iyileştirilmiş asimptotik tahminlerini elde etmek için $n = 3$ durumunda teorem 2.5 göz önüne alınsın.

Teorem 2.6 : $\lambda \to \infty$ için

$$\theta(b) - \theta(a) = \lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)dt$$

$$+\ \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)\cos(2\,\theta_3(t))\,dt + o(\lambda^{-2}) \tag{2.20}$$

şeklindedir.

Öncelikle yukarıdaki teoremde yer alan $\theta_3(x)$ değeri (2.14)-(2.15) eşitlikleri kullanılarak

$$\theta_3(x) = \theta(a) + \lambda^{1/2}(x-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)dt$$

$$+ \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)\cos\{2\theta(a) + 2\lambda^{1/2}(t-a) - \lambda^{-1/2}\int_a^t q(s)\,ds$$

$$+ \lambda^{-1/2}\int_a^t q(s)\cos[2\theta(a) + 2\lambda^{1/2}(s-a)$$

$$- \lambda^{-1/2}\int_a^s q(l)dl]\,ds\}\,dt \qquad (2.21)$$

bulunur. Bundan sonraki ispatların daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıdaki notasyonlar tanımlansın:

$$\beta_1(s) := 2\theta(a) + 2\lambda^{1/2}(s-a) \ \text{ ve } \ \beta_2(s) := \int_a^s q(l)dl,$$

$$F_c(s, \lambda^{1/2}) := \cos2\theta(a)\cos(2\lambda^{1/2}(s-a)) - \sin2\theta(a)\sin(2\lambda^{1/2}(s-a)),$$

$$F_s(s, \lambda^{1/2}) := \sin2\theta(a)\cos(2\lambda^{1/2}(s-a)) + \cos2\theta(a)\sin(2\lambda^{1/2}(s-a)). \qquad (2.22)$$

Lemma 2.6: $\theta(x)$ fonksiyonu (2.12) deki gibi tanımlanmak üzere $\lambda \to \infty$ için

$$\cos[2\theta(a) + 2\lambda^{1/2}(s-a) - \lambda^{-1/2}\int_a^s q(l)dl] := \cos[\beta_1(s) - \lambda^{-1/2}\beta_2(s)]$$

$$= F_c(s, \lambda^{1/2}) + \lambda^{-1/2}\beta_2(s)F_s(s, \lambda^{1/2})$$

$$- \frac{\lambda^{-1}}{2}(\beta_2(s))^2 F_c(s, \lambda^{1/2})$$

$$- \frac{\lambda^{-3/2}}{6}(\beta_2(s))^3 F_s(s, \lambda^{1/2}) + O(\lambda^{-2})$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Yukarıda verilen notasyonlar ve kosinüs fonksiyonu için fark formülü kullanılırsa

$$\cos[2\theta(a) + 2\lambda^{1/2}(s-a) - \lambda^{-1/2}\int_a^s q(l)dl] = \cos[\beta_1(s) - \lambda^{-1/2}\beta_2(s)]$$

$$= \cos\beta_1(s)\cos(\lambda^{-1/2}\beta_2(s))$$

$$+ \sin\beta_1(s)\sin(\lambda^{-1/2}\beta_2(s))$$

olur. $\cos(\lambda^{-1/2}\beta_2(s)) = [1 - \frac{\lambda^{-1}}{2}(\beta_2(s))^2 + O(\lambda^{-2})]$ ve

$\sin(\lambda^{-1/2}\beta_2(s)) = [\lambda^{-1/2}\beta_2(s) - \frac{\lambda^{-3/2}}{6}(\beta_2(s))^3 + O(\lambda^{-5/2})]$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\cos[\beta_1(s) - \lambda^{-1/2}\beta_2(s)] = \cos\beta_1(s) + \lambda^{-1/2}\beta_2(s)\sin\beta_1(s) - \frac{\lambda^{-1}}{2}(\beta_2(s))^2\cos\beta_1(s)$$

$$- \frac{\lambda^{-3/2}}{6}(\beta_2(s))^3\sin\beta_1(s) + O(\lambda^{-2})$$

şeklinde bulunur. $\beta_1(s)$ tanımında yine kosinüs ve sinüs için toplam-fark formülleri kullanılır ve (2.22) tanımlamaları yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\cos[2\theta(a) + 2\lambda^{1/2}(s-a) - \lambda^{-1/2}\int_a^s q(l)dl] &= \cos[\beta_1(s) - \lambda^{-1/2}\beta_2(s)] \\ &= F_c(s, \lambda^{1/2}) + \lambda^{-1/2}\beta_2(s)F_s(s, \lambda^{1/2}) \\ &- \frac{\lambda^{-1}}{2}(\beta_2(s))^2 F_c(s, \lambda^{1/2}) \\ &- \frac{\lambda^{-3/2}}{6}(\beta_2(s))^3 F_s(s, \lambda^{1/2}) \\ &+ O(\lambda^{-2})\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 2.1: $\lambda\to\infty$ için

$$\begin{aligned}\lambda^{-1/2}\int_a^t q(s)\cos[2\theta(a) + 2\lambda^{1/2}(s-a) - \lambda^{-1/2}\int_a^s q(l)dl]\,ds &:= \lambda^{-1/2}\int_a^t q(s)\cos[\beta_1(s) - \lambda^{-1/2}\beta_2(s)] \\ &= \lambda^{-1/2}\int_a^t q(s)\,F_c(s, \lambda^{1/2})\,ds \\ &+ \lambda^{-1}\int_a^t q(s)\,F_s(s, \lambda^{1/2})\,\beta_2(s)\,ds \\ &- \frac{\lambda^{-3/2}}{2}\int_a^t q(s)\,F_c(s, \lambda^{1/2})\,(\beta_2(s))^2\,ds \\ &+ O(\lambda^{-2})\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\beta_1(s)$, $\beta_2(s)$, $F_c(s, \lambda^{1/2})$ ve $F_s(s, \lambda^{1/2})$ (2.22) deki gibidir.

İspat: Lemma 2.6 kullanılarak elde edilir.

Sonuç 2.1 de bulunan eşitlik için;

$$A_1(t, \lambda^{1/2}) := \int_a^t q(s)\, F_c(s, \lambda^{1/2})\, ds,$$

$$B_1(t, \lambda^{1/2}) := \int_a^t q(s)\, F_s(s, \lambda^{1/2})\, \beta_2(s)\, ds,$$

$$A_2(t, \lambda^{1/2}) := \frac{1}{2} \int_a^t q(s)\, F_c(s, \lambda^{1/2})\, (\beta_2(s))^2\, ds$$

ve

$$\Omega(t, \lambda^{1/2}) := \lambda^{-1/2} \int_a^t q(s)\, F_c(s, \lambda^{1/2})\, ds + \lambda^{-1} \int_a^t q(s)\, F_s(s, \lambda^{1/2})\, \beta_2(s)\, ds$$
$$- \frac{\lambda^{-3/2}}{2} \int_a^t q(s)\, F_c(s, \lambda^{1/2})\, (\beta_2(s))^2\, ds + O(\lambda^{-2})$$

olarak tanımlanırsa

$$\Omega(t, \lambda^{1/2}) = \lambda^{-1/2} A_1(t, \lambda^{1/2}) + \lambda^{-1} B_1(t, \lambda^{1/2}) - \lambda^{-3/2} A_2(t, \lambda^{1/2}) + O(\lambda^{-2})$$

şeklinde yazılır. Şimdi bu tanımlamalar kullanılarak kolaylıkla hesaplanabilecek aşağıdaki lemma verilsin.

Lemma 2.7: $\lambda \to \infty$ için,

$$\cos[\beta_1(t) - \lambda^{-1/2} \beta_2(t) + \Omega(t, \lambda^{1/2})] = F_c(t, \lambda^{1/2})$$
$$+ \lambda^{-1/2}[\beta_2(t) F_s(t, \lambda^{1/2}) + F_s(t, \lambda^{1/2}) A_1(t, \lambda^{1/2})]$$
$$+ \lambda^{-1}[-A_1(t, \lambda^{1/2}) \beta_2(t)\, F_c(t, \lambda^{1/2}) - F_s(t, \lambda^{1/2}) B_1(t, \lambda^{1/2})$$
$$- \frac{F_c(t, \lambda^{1/2}) \beta_2(t)^2}{2} - \frac{F_c(t, \lambda^{1/2}) A_1(t, \lambda^{1/2})^2}{2}]$$
$$+ \lambda^{-3/2} [\frac{-F_s(t, \lambda^{1/2})(\beta_2(t)^3)}{6} + F_s(t, \lambda^{1/2}) \beta_2(t) A_1(t, \lambda^{1/2})^2$$
$$- \frac{F_s(t, \lambda^{1/2})(\beta_2(t)^2) A_1(t, \lambda^{1/2})}{2} - \frac{A_1(t, \lambda^{1/2})^3 F_s(t, \lambda^{1/2})}{6}$$

$$- F_c(t,\lambda^{1/2})A_1(t,\lambda^{1/2})B_1(t,\lambda^{1/2}) - F_s(t,\lambda^{1/2})A_2(t,\lambda^{1/2})$$

$$- F_c(t,\lambda^{1/2})B_1(t,\lambda^{1/2})\beta_2(t) \,]$$

$$+ O(\lambda^{-2})$$

İspat: Yukarıda verilen tanımlamalar kullanılırsa

$$\cos[\beta_1(t)- \lambda^{-1/2}\beta_2(t) + \Omega(t, \lambda^{1/2})] = \cos[\beta_1(t)- \lambda^{-1/2}\beta_2(t)]\cos \Omega(t, \lambda^{1/2})$$

$$- \sin[\beta_1(t)- \lambda^{-1/2}\beta_2(t)]\sin \Omega(t, \lambda^{1/2}) \qquad (2.23)$$

olur. Burada

$$\cos \Omega(t, \lambda^{1/2}) = \cos[\lambda^{-1/2} A_1(t, \lambda^{1/2}) + \lambda^{-1} B_1(t, \lambda^{1/2}) - \lambda^{-3/2} A_2(t, \lambda^{1/2}) + O(\lambda^{-2})]$$

$$= 1- \frac{\lambda^{-1}}{2} A_1^2(t, \lambda^{1/2}) - \lambda^{-3/2} A_1(t, \lambda^{1/2}) B_1(t, \lambda^{1/2}) + O(\lambda^{-2}), \qquad (2.24)$$

$$\sin\Omega(t, \lambda^{1/2}) = \sin[\lambda^{-1/2} A_1(t, \lambda^{1/2}) + \lambda^{-1} B_1(t, \lambda^{1/2}) - \lambda^{-3/2} A_2(t, \lambda^{1/2}) + O(\lambda^{-2})]$$

$$= \lambda^{-1/2} A_1(t, \lambda^{1/2}) + \lambda^{-1} B_1(t, \lambda^{1/2}) - \lambda^{-3/2} A_2(t, \lambda^{1/2})$$

$$- \frac{\lambda^{-3/2}}{6} A_1^3(t, \lambda^{1/2}) + O(\lambda^{-2}) \qquad (2.25)$$

dır. (2.24)-(2.25) ile $\cos[\beta_1(t)- \lambda^{-1/2}\beta_2(t)]$ nin lemma 2.6 dan elde edilen değeri

$$\cos[\beta_1(t)- \lambda^{-1/2}\beta_2(t)] = F_c(t, \lambda^{1/2}) + \lambda^{-1/2}\beta_2(t) F_s(t, \lambda^{1/2}) - \frac{\lambda^{-1}}{2}(\beta_2(t))^2 F_c(t, \lambda^{1/2})$$

$$-\frac{\lambda^{-3/2}}{6}(\beta_2(t))^3 F_s(t, \lambda^{1/2}) + O(\lambda^{-2}) \qquad (2.26)$$

ve benzer şekilde

$$\sin[\beta_1(t)- \lambda^{-1/2}\beta_2(t)] = F_s(t, \lambda^{1/2}) - \lambda^{-1/2}\beta_2(t) F_c(t, \lambda^{1/2}) - \frac{\lambda^{-1}}{2}(\beta_2(t))^2 F_s(t, \lambda^{1/2})$$

$$+ \frac{\lambda^{-3/2}}{6}(\beta_2(t))^3 F_c(t, \lambda^{1/2}) + O(\lambda^{-2}) \qquad (2.27)$$

değerleri (2.23) de yerine yazılırsa

$$\cos[\beta_1(t) - \lambda^{-1/2}\beta_2(t) + \Omega(t,\lambda^{1/2})] = F_c(t,\lambda^{1/2})$$
$$+ \lambda^{-1/2}[\beta_2(t) F_s(t,\lambda^{1/2}) + F_s(t,\lambda^{1/2}) A_1(t,\lambda^{1/2})]$$
$$+ \lambda^{-1}[-A_1(t,\lambda^{1/2})\beta_2(t) F_c(t,\lambda^{1/2}) - F_s(t,\lambda^{1/2}) B_1(t,\lambda^{1/2})$$
$$-\frac{F_c(t,\lambda^{1/2})\beta_2(t)^2}{2} - \frac{F_c(t,\lambda^{1/2})A_1(t,\lambda^{1/2})^2}{2}]$$
$$+ \lambda^{-3/2}[\frac{-F_s(t,\lambda^{1/2})(\beta_2(t)^3)}{6} + F_s(t,\lambda^{1/2})\beta_2(t)A_1(t,\lambda^{1/2})^2$$
$$-\frac{F_s(t,\lambda^{1/2})(\beta_2(t)^2)A_1(t,\lambda^{1/2})}{2} - \frac{A_1(t,\lambda^{1/2})^3 F_s(t,\lambda^{1/2})}{6}$$
$$- F_c(t,\lambda^{1/2})A_1(t,\lambda^{1/2})B_1(t,\lambda^{1/2}) - F_s(t,\lambda^{1/2})A_2(t,\lambda^{1/2})$$
$$- F_c(t,\lambda^{1/2})B_1(t,\lambda^{1/2})\beta_2(t)]$$
$$+ O(\lambda^{-2})$$

elde edilir.

Sonuç 2.2: $\lambda \to \infty$ için

$$\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^x q(t)\cos[\beta_1(t) - \lambda^{-1/2}\beta_2(t) + \Omega(t,\lambda^{1/2})]\,dt = \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^x q(t) F_c(t,\lambda^{1/2})dt$$
$$+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\int_a^x q(t)[\beta_2(t) F_s(t,\lambda^{1/2}) + F_s(t,\lambda^{1/2}) A_1(t,\lambda^{1/2})]dt$$
$$+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\int_a^x q(t)[-A_1(t,\lambda^{1/2})\beta_2(t) F_c(t,\lambda^{1/2})$$
$$- F_s(t,\lambda^{1/2}) B_1(t,\lambda^{1/2}) - \frac{F_c(t,\lambda^{1/2})\beta_2(t)^2}{2}$$
$$- \frac{F_c(t,\lambda^{1/2})A_1(t,\lambda^{1/2})^2}{2}]\,dt$$
$$+ O(\lambda^{-2})$$

olur.

İspat: Lemma 2.7 kullanılarak elde edilir.

Sonuç olarak (2.21) ile verilen $\theta_3(x)$ değerinde lemma 2.5-2.7, sonuç 2.1-2.2 kullanılır ve notasyonlarla verilen ifadelerin gerçek değerleri yerine yazılırsa $\lambda\to\infty$ için

$$\theta_3(x) = \theta(a) + \lambda^{1/2}(x-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)dt + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^x q(t)\,F_c(t,\lambda^{1/2})dt$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\int_a^x q(t)\,[\beta_2(t)\,F_s(t,\lambda^{1/2}) + F_s(t,\lambda^{1/2})\,A_1(t,\lambda^{1/2})]dt$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\int_a^x q(t)\,[-A_1(t,\lambda^{1/2})\,\beta_2(t)\,F_c(t,\lambda^{1/2})$$

$$-F_s(t,\lambda^{1/2})\,B_1(t,\lambda^{1/2}) - \frac{F_c(t,\lambda^{1/2})\beta_2(t)^2}{2}$$

$$-\frac{F_c(t,\lambda^{1/2})A_1(t,\lambda^{1/2})^2}{2}\;]dt$$

$$+ O(\lambda^{-2})$$

$$= \theta(a) + \lambda^{1/2}(x-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)dt$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\cos2\theta(a)\int_a^x q(t)\cos2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin2\theta(a)\int_a^x q(t)\sin2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$+\frac{1}{4}\lambda^{-1}\sin4\theta(a)\int_a^x q(t)\left(\int_a^t\cos2\lambda^{1/2}(s-a)\,ds\right)\cos2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\sin^2 2\theta(a)\int_a^x q(t)\left(\int_a^t\sin2\lambda^{1/2}(s-a)\,ds\right)\cos2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos^2 2\theta(a)\int_a^x q(t)\left(\int_a^t\cos2\lambda^{1/2}(s-a)\,ds\right)\sin2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\sin4\theta(a)\int_a^x q(t)\left(\int_a^t\sin2\lambda^{1/2}(s-a)\,ds\right)\sin2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\sin2\theta(a)\int_a^x q(t)\left(\int_a^t q(s)\,ds\right)\cos2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos2\theta(a)\int_a^x q(t)\left(\int_a^t q(s)\,ds\right)\sin2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$+ o(\lambda^{-3/2})$$

bulunur.

Elde edilen bu $\theta_3(x)$ değeri

$\theta_3(x) := \theta(a) + \lambda^{1/2}(x-a) + T(x, \lambda^{1/2}) + o(\lambda^{-3/2})$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.7: $\lambda \to \infty$ için

$$\theta(b) - \theta(a) = \lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)dt$$

$$+ \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\cos 2\theta(a)\int_a^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\cos 2T(t, \lambda^{1/2})\, dt$$

$$- \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\cos 2\theta(a)\int_a^b q(t)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\sin 2T(t, \lambda^{1/2})\, dt$$

$$- \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\cos 2T(t, \lambda^{1/2})\, dt$$

$$- \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\sin 2T(t, \lambda^{1/2})\, dt$$

$$+ o(\lambda^{-2})$$

şeklindedir.

İspat: $\theta_3(x)$ tanımlanan son değeri teorem 2.6 da yerine yazılırsa

$$\theta(b) - \theta(a) = \lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)dt$$

$$+ \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)\cos\{2\theta(a) + 2\lambda^{1/2}(x-a) + 2T(t, \lambda^{1/2})\}\, dt + o(\lambda^{-2})$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafında bulunan ikinci integral içinde yer alan ifadesinin

$$\cos\{2\theta(a) + 2\lambda^{1/2}(x-a) + 2T(t, \lambda^{1/2})\} = \cos[2\theta(a) + 2\lambda^{1/2}(x-a)]\cos 2T(t, \lambda^{1/2})$$

$$- \sin[2\theta(a) + 2\lambda^{1/2}(x-a)]\sin 2T(t, \lambda^{1/2})$$

$$= \{\cos 2\theta(a)\cos(2\lambda^{1/2}(x-a)) - \sin 2\theta(a)\sin(2\lambda^{1/2}(x-a))\}\cos 2T(t, \lambda^{1/2})$$

$$- \{\sin 2\theta(a)\cos 2\lambda^{1/2}(x-a) + \cos 2\theta(a)\sin 2\lambda^{1/2}(x-a)\}\sin 2T(t, \lambda^{1/2})$$

olduğu göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 2.7 kısaca şöyle ifede edilsin:

$$\theta(b) - \theta(a) := \lambda^{1/2}(b-a) - \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int_a^b q(t)dt + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + o(\lambda^{-2}) \qquad (2.28)$$

Şimdi de I_1, I_2, I_3 ve I_4 değerlerini ayrı ayrı hesaplansın. Öncelikle

$$\cos 2T(t, \lambda^{1/2}) = 1 - \frac{1}{2}\lambda^{-1}\left(\int_a^t q(s)\, ds\right)^2 - \frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos^2 2\theta(a)\left(\int_a^t q(s)\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)^2$$

$$-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\sin^2 2\theta(a)\left(\int_a^t q(s)\sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)^2 + O(\lambda^{-2}) \qquad (2.29)$$

$$\sin 2T(t, \lambda^{1/2}) = 2T(t, \lambda^{1/2}) + O(\lambda^{-3/2}) \qquad (2.30)$$

bulunur.

$$I_1 = \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\cos 2\theta(a)\int_a^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\cos 2T(t, \lambda^{1/2})\, dt$$

eşitliğinde (2.29) dan $\cos 2T(t, \lambda^{1/2})$ değeri yerine yazılırsa;

$$I_1 = \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\cos 2\theta(a)\int_a^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

$$-\frac{1}{4}{}^{3/2}\cos 2\theta(a)\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)ds\right)^2\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

$$-\frac{1}{4}\lambda^{-3/2}\cos^3 2\theta(a)\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)^2\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

$$-\frac{1}{8}\lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)^2\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

$$+ o(\lambda^{-5/2})$$

bulunur. Burada eşitliklerin daha iyi görülmesi açısından aşağıdaki notasyonlar tanımlansın:

$$\int_a^t q(s)\sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds := K_s(t, \lambda)$$

$$\int_a^t q(s)\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds := K_c(t, \lambda)$$

$$\int_a^t q(s)ds := Q(t) \qquad (2.31)$$

Bu durumda,

$$I_1 = \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\cos2\theta(a)K_c(b,\lambda)$$

$$-\frac{1}{4}{}^{3/2}\cos2\theta(a)\int_a^b q(t)\,Q^{\,2}(t)\cos2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$-\frac{1}{4}\lambda^{-3/2}\cos^3 2\theta(a)\int_a^b q(t)\,K_c^2(t,\lambda)\cos2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$-\frac{1}{8}\lambda^{-3/2}\sin4\theta(a)\sin2\theta(a)\int_a^b q(t)\,K_s^2(t,\lambda)\cos2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$+\,o(\lambda^{-5/2})$$

olur.

$$I_2 = -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\cos2\theta(a)\int_a^b q(t)\sin2\lambda^{1/2}(t-a)\sin2T(t,\lambda^{1/2})\,dt$$

eşitliğinde (2.30) dan $\sin2T(t,\lambda^{1/2})$ değeri yerine yazılırsa;

$$I_2 = \frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos2\theta(a)\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)ds\right)\sin2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cos^2 2\theta(a)\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\cos2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)\sin2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$+\frac{1}{4}\lambda^{-1}\sin4\theta(a)\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\sin2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)\sin2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$-\frac{1}{4}\lambda^{-3/2}\sin4\theta(a)\cos2\theta(a)\times$$

$$\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\left(\int_a^s q(l)\cos2\lambda^{1/2}(l-a)dl\right)\cos2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)\sin2\lambda^{1/2}(t-a)dt$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\sin^2 2\theta(a)\cos2\theta(a)\times$$

$$\int_a^b q(t)\left\{\int_a^t q(s)\left(\int_a^s q(l)\sin2\lambda^{1/2}(l-a)dl\right)\cos2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right\}\sin2\lambda^{1/2}(t-a)dt$$

$$-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\cos^3 2\theta(a)\times$$

$$\int_a^b q(t)\left\{\int_a^t q(s)\left(\int_a^s q(l)\cos2\lambda^{1/2}(l-a)dl\right)\sin2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right\}\sin2\lambda^{1/2}(t-a)dt$$

$$+\frac{1}{4}\lambda^{-3/2}\sin4\theta(a)\cos2\theta(a)\times$$

$$\int_a^b q(t)\{\int_a^t q(s)\,(\int_a^s q(l)\sin 2\lambda^{1/2}(l-a)dl\,)\,\sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\}\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)dt$$

$$-\frac{1}{4}\,\lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\int_a^b q(t)(\int_a^t q(s)\,(\int_a^s q(l)\,dl\,)\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)dt$$

$$-\frac{1}{2}\,\lambda^{-3/2}\cos^{2}2\theta(a)\int_a^b q(t)\{\int_a^t q(s)\,(\int_a^s q(l)\,dl\,)\sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\}\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)dt$$

$$+\,o(\lambda^{-2})$$

bulunur. Öncelikle I_2 eşitliğinin sağ tarafındaki integrallerin bazıları için kısmi integrasyon uygulansın. Burada

$$I_2 := I_{21} + I_{22} + I_{23} + I_{24} + I_{25} + I_{26} + I_{27} + I_{28} + I_{29}$$

şeklinde tanımlanırsa I_2 nin son 6 terimine kısmi integrasyon uygulanması yeterli olacaktır. O halde

$$I_{24} = -\frac{1}{4}\,\lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\cos 2\theta(a)\times$$

$$\int_a^b q(t)(\int_a^t q(s)\,(\int_a^s q(l)\cos 2\lambda^{1/2}(l-a)dl\,)\,\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)dt$$

eşitliği için (2.31) deki tanımlamalar kullanılarak

$$I_{24} = -\frac{1}{4}\,\lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\cos 2\theta(a)\times\int_a^b q(t)(\int_a^t q(s)K_c(s,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)dt$$

şeklinde yazılır.

$$u = \int_a^t q(s)K_c(s,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds,$$

$$du = q(t)\,K_c(t,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)dt,$$

$$dv = q(t)\,\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)dt,$$

$$v = \int_a^t q(s)\,\sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds,$$

dönüşümleri ile kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I_{24} = -\frac{1}{4}\lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\cos 2\theta(a)\left[\int_a^b q(t)K_c(t,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)dt\right]K_s(b,\lambda)$$

$$+\frac{1}{4}\lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\cos 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_c(t,\lambda)\,K_s(t,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

bulunur.

$$I_{25} = \frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\sin^2 2\theta(a)\cos 2\theta(a)\times$$

$$\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\left(\int_a^s q(l)\sin 2\lambda^{1/2}(l-a)dl\right)\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\sin^2 2\theta(a)\cos 2\theta(a)\times\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\,K_s(s,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

eşitliği için yukarıdaki benzer dönüşümler uygulanırsa kısmi integrasyon ile

$$I_{25} = \frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\sin^2 2\theta(a)\cos 2\theta(a)\left[\int_a^b q(t)K_s(t,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt\right]K_s(b,\lambda)$$

$$-\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\sin^2 2\theta(a)\cos 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_s^{\,2}(t,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

şeklinde bulunur.

$$I_{26} = -\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\cos^3 2\theta(a)\times$$

$$\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\left(\int_a^s q(l)\cos 2\lambda^{1/2}(l-a)dl\right)\sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\cos^3 2\theta(a)\times\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\,K_c(s,\lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

eşitliği için yukarıdaki benzer dönüşümler uygulanırsa kısmi integrasyon ile

$$I_{26} = -\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\cos^3 2\theta(a)\left[\int_a^b q(t)K_c(t,\lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt\right]K_s(b,\lambda)$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^{-3/2}\cos^3 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_s(t,\lambda)\,K_c(t,\lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

bulunur.

$I_{27} = \frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2} \sin 4\theta(a) \cos 2\theta(a) \times$

$$\int_a^b q(t)\Big(\int_a^t q(s)\ \Big(\int_a^s q(l) \sin 2\lambda^{1/2}(l-a)dl\Big) \sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\Big) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

$$= \frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2} \sin 4\theta(a) \cos 2\theta(a) \int_a^b q(t)\Big(\int_a^t q(s)\ K_c(s,\lambda) \sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\Big) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

eşitliği için yine yukarıdaki benzer dönüşümler uygulanırsa kısmi integrasyon ile

$$I_{27} = \frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2} \sin 4\theta(a) \cos 2\theta(a)\Big[\int_a^b q(t) K_s(t,\lambda) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt\Big] K_s(b,\lambda)$$

$$-\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2} \sin 4\theta(a) \cos 2\theta(a) \int_a^b q(t) K_s^{\,2}(t,\lambda)\ \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

bulunur.

$$I_{28} = -\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2} \sin 4\theta(a) \times \int_a^b q(t)\Big(\int_a^t q(s)\ \Big(\int_a^s q(l)dl\Big) \cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\Big) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

$$= -\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2} \sin 4\theta(a) \times \int_a^b q(t)\Big(\int_a^t q(s)\ Q(s) \cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\Big) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

eşitliği için yine yukarıdaki benzer dönüşümler uygulanırsa kısmi integrasyon ile

$$I_{28} = -\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2} \sin 4\theta(a)\Big[\int_a^b q(t) Q(t) \cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt\Big] K_s(b,\lambda)$$

$$+\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2} \sin 4\theta(a) \int_a^b q(t) Q(t) K_s(t,\lambda) \cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

bulunur.

$$I_{29} = -\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2} \cos^2 2\theta(a) \times \int_a^b q(t)\Big(\int_a^t q(s)\ \Big(\int_a^s q(l)dl\Big) \sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\Big) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2} \cos^2 2\theta(a) \times \int_a^b q(t)\Big(\int_a^t q(s)\ Q(s) \sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\Big) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

eşitliği için yine yukarıdaki benzer dönüşümler uygulanırsa kısmi integrasyon ile

$$I_{29} = -\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2} \cos^2 2\theta(a)\Big[\int_a^b q(t) Q(t) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt\Big] K_s(b,\lambda)$$

$$+\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2} \cos^2 2\theta(a) \int_a^b q(t) Q(t) K_s(t,\lambda) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

bulunur. Buradan

$$I_2 = \frac{1}{2}\ \lambda^{-1}\cos 2\theta(a)\int_a^b q(t)\ Q(t)\ \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

$$-\frac{1}{2}\ \lambda^{-1}\cos^2 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_c(t,\lambda)\ \sin 2\lambda 1^{/2}(t-a)\ dt$$

$$+\frac{1}{4}\ \lambda^{-1}\sin 4\theta(a)\int_a^b q(t)K_s(t,\lambda)\ \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

$$-\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\cos 2\theta(a)[\int_a^b q(t)K_c(t,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)dt\ ]\ K_s(b,\lambda)$$

$$+\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\cos 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_c(t,\lambda)\ K_s(t,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

$$+\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\sin^2 2\theta(a)\cos 2\theta(a)[\int_a^b q(t)K_s(t,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt\ ]\ K_s(b,\lambda)$$

$$-\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\sin^2 2\theta(a)\cos 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_s{}^2(t,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

$$-\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\cos^3 2\theta(a)[\int_a^b q(t)K_c(t,\lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt\ ]\ K_s(b,\lambda)$$

$$+\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\cos^3 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_s(t,\lambda)\ K_c(t,\lambda)\ \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

$$+\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\cos 2\theta(a)[\int_a^b q(t)K_s(t,\lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt\ ]\ K_s(b,\lambda)$$

$$-\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\cos 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_s{}^2(t,\lambda)\ \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

$$-\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)[\int_a^b q(t)Q(t)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt\ ]\ K_s(b,\lambda)$$

$$+\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\int_a^b q(t)Q(t)K_s(t,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

$$-\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\cos^2 2\theta(a)[\int_a^b q(t)Q(t)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt\ ]\ K_s(b,\lambda)$$

$$+\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\cos^2 2\theta(a)\int_a^b q(t)Q(t)K_s(t,\lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ dt$$

$$+\ o(\lambda^{-2})$$

olur.

$$I_3 = -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)\ \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\ \cos 2T(t,\lambda^{1/2})\ dt$$

eşitliğinde (2.29) dan $\cos 2T(t, \lambda^{1/2})$ değeri yerine yazılırsa;

$$I_3 = -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$+\frac{1}{4}\lambda^{-3/2}\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)ds\right)^2 \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$+\frac{1}{4}\lambda^{-3/2}\sin 2\theta(a)\cos^2 2\theta(a)\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)^2 \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$+\frac{1}{4}\lambda^{-3/2}\sin^3 2\theta(a)\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)^2 \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$+\,o(\lambda^{-5/2})$$

bulunur. (2.31) göz önüne alınırsa

$$I_3 = -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin 2\theta(a)\,K_s(b,\lambda)$$

$$+\frac{1}{4}\lambda^{-3/2}\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)\,Q^2(t)\sin 2\lambda 1^{/2}(t-a)\,dt$$

$$+\frac{1}{4}\lambda^{-3/2}\sin 2\theta(a)\cos^2 2\theta(a)\int_a^b q(t)\,K_c^{\,2}(t,\lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$+\frac{1}{4}\lambda^{-3/2}\sin^3 2\theta(a)\int_a^b q(t)\,K_s^{\,2}(t,\lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$+\,o(\lambda^{-5/2})$$

şeklinde yazılır.

$$I_4 = -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\sin 2T(t,\lambda^{1/2})\,dt$$

eşitliğinde (2.30) dan $\sin 2T(t, \lambda^{1/2})$ değeri yerine yazılırsa;

$$I_4 = \frac{1}{2}\lambda^{-1}\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)ds\right)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$-\frac{1}{4}\lambda^{-1}\sin 4\theta(a)\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^{-1}\sin^2 2\theta(a)\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$$

$-\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\ \sin 2\theta(a)\ \times$

$\int_a^b q(t)\{\int_a^t q(s)\ (\int_a^s q(l)\cos 2\lambda^{1/2}(l-a)dl\ )\ \cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\}\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)dt$

$+\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\sin^3 2\theta(a)\ \times$

$\int_a^b q(t)\{\int_a^t q(s)\ (\int_a^s q(l)\sin 2\lambda^{1/2}(l-a)dl\ )\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\}\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)dt$

$-\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\cos^2 2\theta(a)\sin 2\theta(a)\ \times$

$\int_a^b q(t)\{\int_a^t q(s)\ (\int_a^s q(l)\cos 2\lambda^{1/2}(l-a)dl\ )\sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\}\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)dt$

$+\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\ \sin 2\theta(a)\ \times$

$\int_a^b q(t)(\{\int_a^t q(s)\ (\int_a^s q(l)\sin 2\lambda^{1/2}(l-a)dl\ )\ \sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\}\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)dt$

$-\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\sin^2 2\theta(a)\int_a^b q(t)\{\int_a^t q(s)\ (\int_a^s q(l)\ dl\ )\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\}\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)dt$

$-\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\int_a^b q(t)\{\int_a^t q(s)\ (\int_a^s q(l)\ dl\ )\sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\}\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)dt$

$+\ o(\lambda^{-2})$

bulunur. Burada

$I_4 := I_{41} + I_{42} + I_{43} + I_{44} + I_{45} + I_{46} + I_{47} + I_{48} + I_{49}$

şeklinde tanımlanırsa I_4 ün son 6 terimine kısmi integrasyon uygulanmalıdır. O halde

$I_{44} = -\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\ \sin 2\theta(a)\ \times$

$\int_a^b q(t)(\int_a^t q(s)\ (\int_a^s q(l)\cos 2\lambda^{1/2}(l-a)dl\ )\ \cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)dt$

eşitliği için (2.31) deki tanımlamalar kullanılarak

$I_{44} = -\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\ \sin 2\theta(a)\ \times\int_a^b q(t)(\int_a^t q(s)K_c(s,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)dt$

şeklinde yazılır.

$u = \int_a^t q(s)K_c(s, \lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds,$

$du = q(t)\, K_c(t, \lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)dt,$

$dv = q(t)\, \cos 2\lambda^{1/2}(t-a)dt,$

$v = \int_a^t q(s)\, \cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds,$

dönüşümleri ile kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I_{44} = -\frac{1}{4}\, \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\, \sin 2\theta(a)\Big[\int_a^b q(t)K_c(t, \lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)dt\,\Big]\, K_c(b, \lambda)$$

$$+\frac{1}{4}\, \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\, \sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_c^{\,2}(t, \lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

bulunur.

$$I_{45} = \frac{1}{2}\, \lambda^{-3/2}\sin^3 2\theta(a) \times$$

$$\int_a^b q(t)\Big(\int_a^t q(s)\, \Big(\int_a^s q(l)\sin 2\lambda^{1/2}(l-a)dl\,\Big)\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\Big)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\, \lambda^{-3/2}\sin^3 2\theta(a)\int_a^b q(t)\Big(\int_a^t q(s)\, K_s(s, \lambda)\, \cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\Big)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

eşitliği için yukarıdaki benzer dönüşümler uygulanırsa kısmi integrasyon ile

$$I_{45} = \frac{1}{2}\, \lambda^{-3/2}\sin^3 2\theta(a)\Big[\int_a^b q(t)K_s(t, \lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt\,\Big]\, K_c(b, \lambda)$$

$$-\frac{1}{2}\, \lambda^{-3/2}\sin^3 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_s(t, \lambda)\, K_c(t, \lambda)\, \cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

şeklinde bulunur.

$$I_{46} = -\frac{1}{2}\, \lambda^{-3/2}\cos^2 2\theta(a)\, \sin 2\theta(a)\times$$

$$\int_a^b q(t)\Big(\int_a^t q(s)\, \Big(\int_a^s q(l)\cos 2\lambda^{1/2}(l-a)dl\,\Big)\sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\Big)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

$$= -\frac{1}{2}\, \lambda^{-3/2}\cos^2 2\theta(a)\, \sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)\Big(\int_a^t q(s)\, K_c(s, \lambda)\, \sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\Big)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

eşitliği için yukarıdaki benzer dönüşümler uygulanırsa kısmi integrasyon ile

$$I_{46} = -\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2} \cos^2 2\theta(a)\sin 2\theta(a)\left[\int_a^b q(t)K_c(t, \lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt\right] K_c(b, \lambda)$$

$$+\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2} \cos^2 2\theta(a)\sin 2\theta(a) \int_a^b q(t)K_c{}^2(t, \lambda) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

bulunur.

$$I_{47} = \frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2} \sin 4\theta(a)\sin 2\theta(a) \times$$

$$\int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s) \left(\int_a^s q(l)\sin 2\lambda^{1/2}(l-a)dl\right) \sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2} \sin 4\theta(a)\sin 2\theta(a) \int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\, K_s(s, \lambda) \sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

eşitliği için yine yukarıdaki benzer dönüşümler uygulanırsa kısmi integrasyon ile

$$I_{47} = \frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\sin 2\theta(a)\left[\int_a^b q(t)K_s(t, \lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt\right] K_c(b, \lambda)$$

$$-\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\sin 2\theta(a) \int_a^b q(t)K_s(t, \lambda)\, K_c(t, \lambda) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

bulunur.

$$I_{48} = -\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2} \sin^2 2\theta(a) \int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s) \left(\int_a^s q(l)dl\right) \cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\sin^2 2\theta(a) \int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\, Q(s)\cos 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

eşitliği için yine yukarıdaki benzer dönüşümler uygulanırsa kısmi integrasyon ile

$$I_{48} = -\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\sin^2 2\theta(a)\left[\int_a^b q(t)Q(t)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt\right] K_c(b, \lambda)$$

$$+\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\sin^2 2\theta(a) \int_a^b q(t)Q(t)K_c(t, \lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

bulunur.

$$I_{49} = -\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2} \sin 4\theta(a) \int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s) \left(\int_a^s q(l)dl\right) \sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

$$= -\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a) \int_a^b q(t)\left(\int_a^t q(s)\, Q(s)\sin 2\lambda^{1/2}(s-a)ds\right)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

eşitliği için yine yukarıdaki benzer dönüşümler uygulanırsa kısmi integrasyon ile

$I_{49} = -\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)[\int_a^b q(t)Q(t)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt\ ]\ K_c(b, \lambda)$

$+\ \frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\int_a^b q(t)Q(t)K_c(t, \lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$

bulunur. Buradan

$I_4 = \frac{1}{2}\ \lambda^{-1}\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)\ Q(t)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$

$-\frac{1}{4}\ \lambda^{-1}\sin 4\theta(a)\int_a^b q(t)K_c(t, \lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$

$+\frac{1}{2}\ \lambda^{-1}\sin^2 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_s(t, \lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$

$-\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\sin 2\theta(a)[\int_a^b q(t)K_c(t, \lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)dt\ ]\ K_c(b, \lambda)$

$+\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_c{}^2(t, \lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$

$+\ \frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\sin^3 2\theta(a)[\int_a^b q(t)K_s(t, \lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt\ ]\ K_c(b, \lambda)$

$-\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\sin^3 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_s(t, \lambda)\ K_c(t, \lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$

$-\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\cos^2 2\theta(a)\sin 2\theta(a)[\int_a^b q(t)K_c(t, \lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt\ ]\ K_c(b, \lambda)$

$+\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\cos^2 2\theta(a)\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_c{}^2(t, \lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$

$+\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\sin 2\theta(a)[\int_a^b q(t)K_s(t, \lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt\ ]\ K_c(b, \lambda)$

$-\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_s(t, \lambda)\ K_c(t, \lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$

$-\frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\sin^2 2\theta(a)[\int_a^b q(t)Q(t)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt\ ]\ K_c(b, \lambda)$

$+\ \frac{1}{2}\ \lambda^{-3/2}\sin^2 2\theta(a)\int_a^b q(t)Q(t)K_c(t, \lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$

$-\frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)[\int_a^b q(t)Q(t)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt\ ]\ K_c(b, \lambda)$

$+\ \frac{1}{4}\ \lambda^{-3/2}\sin 4\theta(a)\int_a^b q(t)Q(t)K_c(t,\lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$

$+\ o(\lambda^{-2})$

elde edilir. Bulunan bu değerler (2.28) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$\theta(b)-\theta(a)=\lambda^{1/2}(b-a)$

$\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}[-\int_a^b q(t)dt\ +\cos 2\theta(a)K_c(b,\lambda)-\sin 2\theta(a)K_s(b,\lambda)]$

$\frac{1}{2}\lambda^{-1}[\cos 2\theta(a)\int_a^b q(t)Q(t)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$

$\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)Q(t)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$

$-\cos^2 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_c(t,\lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$

$-\frac{1}{2}\sin 4\theta(a)\int_a^b q(t)K_c(t,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$

$+\frac{1}{2}\sin 4\theta(a)\int_a^b q(t)K_s(t,\lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$

$+\ \sin^2 2\theta(a)\int_a^b q(t)K_s(t,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt\ ]$

$\frac{1}{4}\lambda^{-3/2}[-\cos 2\theta(a)\int_a^b q(t)Q^2(t)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$

$+\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)Q^2(t)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$

$+(2\sin^2 2\theta(a)-\cos^2 2\theta(a))\cos 2\theta(a)\ (\int_a^b q(t)\ K_c^{\ 2}(t,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$

$-\frac{3}{2}\sin 4\theta(a)\sin 2\theta(a)\int_a^b q(t)\ K_s^{\ 2}(t,\lambda)\cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$

$+(\sin^3 2\theta(a)-\sin 4\theta(a)\cos 2\theta(a)\ )\ (\int_a^b q(t)\ K_s^{\ 2}(t,\lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$

$+\frac{3}{2}\sin 4\theta(a)\cos 2\theta(a)\int_a^b q(t)\ F_c^{\ 2}(t,\lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$

$+(2\cos^3 2\theta(a)-\sin 4\theta(a)\sin 2\theta(a)\ )(\int_a^b q(t)K_s(t,\lambda)K_c(t,\lambda)\sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\,dt$

$$+ (-2\sin^3 2\theta(a) + \sin 4\theta(a) \cos 2\theta(a))(\int_a^b q(t)K_s(t,\lambda)\, K_c(t,\lambda) \cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

$$+ \sin 4\theta(a) \int_a^b q(t)K_s(t,\lambda)\, Q(t) \cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

$$+ 2\cos^2 2\theta(a) \int_a^b q(t)K_s(t,\lambda)\, Q(t) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

$$+ 2\sin^2 2\theta(a) \int_a^b q(t)K_c(t,\lambda)\, Q(t) \cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

$$+ \sin 4\theta(a) \int_a^b q(t)\, K_c(t,\lambda)\, Q(t) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt$$

$$- (\sin 4\theta(a) \cos 2\theta(a) \int_a^b q(t)\, K_c(t,\lambda) \cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt)\, K_s(b,\lambda)$$

$$+ (\sin 4\theta(a) \sin 2\theta(a) \int_a^b q(t)\, K_s(t,\lambda) \cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt)\, K_s(b,\lambda)$$

$$- (2\cos^3 2\theta(a) \int_a^b q(t)\, K_c(t,\lambda) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt)\, K_s(b,\lambda)$$

$$+ (\sin 4\theta(a) \cos 2\theta(a) \int_a^b q(t)\, K_s(t,\lambda) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt)\, K_s(b,\lambda)$$

$$- (\sin 4\theta(a) \int_a^b q(t)\, Q(t) \cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt)\, K_s(b,\lambda)$$

$$- (2\cos^2 2\theta(a) \int_a^b q(t)\, Q(t) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt)\, K_s(b,\lambda)$$

$$- (\sin 4\theta(a) \sin 2\theta(a) \int_a^b q(t)\, K_c(t,\lambda) \cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt)\, K_c(b,\lambda)$$

$$+ (2\sin^3 2\theta(a) \int_a^b q(t)\, K_s(t,\lambda) \cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt)\, K_c(b,\lambda)$$

$$- (\sin 4\theta(a) \cos 2\theta(a) \int_a^b q(t)\, K_c(t,\lambda) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt)\, K_c(b,\lambda)$$

$$+ (\sin 4\theta(a) \sin 2\theta(a) \int_a^b q(t)\, K_s(t,\lambda) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt)\, K_c(b,\lambda)$$

$$- (2\sin^2 2\theta(a) \int_a^b q(t)\, Q(t) \cos 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt)\, K_c(b,\lambda)$$

$$- (\sin 4\theta(a) \int_a^b q(t)\, Q(t) \sin 2\lambda^{1/2}(t-a)\, dt)\, K_c(b,\lambda) \,]$$

$$+ o(\lambda^{-2}) \qquad (2.31)$$

bulunur.

Bu teoremde elde edilen sonuç **[3]** ile uyumlu ve özdeğerler için daha da iyileştirilmiş yaklaşımlar elde edilmesini sağlar.

Teorem 2.8: $y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0$

diferensiyel denklemi

$y(0) = 0, \ y(\pi) = 0$

sınır koşulları ile verilsin. Sturm- Liouville probleminin $n\to\infty$ için özdeğerleri aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{1/2} = (n+1) &+ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n+1}\right)[Q(\pi) - K_c(\pi, n)] \\
&+ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\Big[\int_0^{\pi} q(t)Q(t)\sin 2(n+1)t\,dt \\
&\qquad - \int_0^{\pi} q(t)K_c(t,n)\sin 2(n+1)t\,dt\Big] \\
&- \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right)\Big[-\int_0^{\pi} q(t)Q^2(t)\cos 2(n+1)t\,dt \\
&\qquad - \int_0^{\pi} q(t){K_c}^2(t,n)\cos 2(n+1)t\,dt \\
&\qquad + 2\int_0^{\pi} q(t)K_c(t,n)K_s(t,n)\sin 2(n+1)t\,dt \\
&\qquad + 2\int_0^{\pi} q(t)Q(t)K_s(t,n)\sin 2(n+1)t\,dt \\
&\qquad - 2\left(\int_0^{\pi} q(t)K_c(t,n)\sin 2(n+1)t\,dt\right)K_s(,\pi\, n) \\
&\qquad - 2\left(\int_0^{\pi} q(t)Q(t)\sin 2(n+1)t\,dt\right)K_s(\pi, n)\Big] \\
&- \frac{1}{4\pi^2(n+1)^3}[Q(\pi) - K_c(\pi, n)] \\
&+ o(n^{-4})
\end{aligned}$$

İspat: Özel olarak $a = 0$ ve $b = \pi$ alınır ve (2.31) de yerine yazılırsa;

$$\lambda_n^{\ 1/2} = (n+1) + O(1)$$

olur. Buradan

$$\lambda_n^{\ -1/2} = \frac{1}{n+1} + O(n^{-2})$$

değeri (2.31) eşitliğinde tekrar yerine yazılırsa λ_n için

$$\lambda_n^{\ 1/2} = (n+1) + \frac{1}{2\pi(n+1)} + O(n^{-2})$$

iyileştirilmiş değeri elde edilir.

$$\lambda_n^{\ -1/2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2\pi(n+1)^3} + O(n^{-4}),$$

$$\lambda_n^{\ -1} = \frac{1}{(n+1)^2} + O(n^{-4})$$

ve

$$\lambda_n^{\ -3/2} = \frac{1}{(n+1)^3} + O(n^{-4})$$

bulunur. Ayrıca

$$\sin 2\lambda_n^{1/2} t = \sin 2((n+1) + \frac{1}{2\pi(n+1)} + O(n^{-2}))$$

$$= \sin 2(n+1)t + o(n^{-1})$$

ve

$$\cos 2\lambda_n^{1/2} t = \cos 2((n+1) + \frac{1}{2\pi(n+1)} + O(n^{-2}))$$

$$= \cos 2(n+1)t + o(n^{-1})$$

bulunur. Ayrıca $y(0) = 0$ sınır koşulunda $\theta(0) = 0$ ve dolayısıyla $\sin 2\theta(0) = 0$, $\cos 2\theta(0) = 1$ olduğu göz önüne alınsın.

Bulunan tüm bu eşitlikler (2.31) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa teorem 2.8 ispatlanır.

3. SONUÇLAR

Bu çalışmanın literatüre katkıları aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

1. $y''(x) + \{\lambda - q(x)\}y(x) = 0$

diferensiyel denkleminin

$$y(b) = \alpha y(a) + \beta y'(a)$$

$$y'(b) = \gamma y(a) + \delta y'(a)$$

ayrılmamış sınır koşullarını sağlaması halinde kendine eşlik kriteri elde edilmiştir.

2. $y''(x) + \{\lambda - q(x)\}y(x) = 0$

denklemi

$$a_0 y(a) + a_1 y'(a) = 0$$

$$b_0 y(b) + b_1 y'(b) = 0$$

ayrılmış sınır koşulları ile verildiğinde özdeğerlerinin basit olabileceği literatürdeki mevcut sonucu incelenmiştir.

3. $x \in [x_1, x_2]$ olmak üzere

$$\lambda = \frac{\int_{x_1}^{x_2}[p(x)y'^2(x) - q(x)y^2(x)]dx}{\int_{x_1}^{x_2} r(x)y^2(x)dx} - \frac{p(x_2)y(x_2)y'(x_2) - p(x_1)y(x_1)y'(x_1)}{\int_{x_1}^{x_2} r(x)y^2(x)dx}$$

rayleigh oranı kullanılarak özdeğerlerin pozitifliği incelenmiştir.

4. $y''(x) + \lambda y(x) = 0$

denkleminin ayrılmış sınır koşullarını sağlayan bazı özdeğer problemleri için green fonksiyonu elde edilmiştir.

5. L, n. mertebe lineer operatörü

$$L = \sum_{r=0}^{n} a_{n-r}(x)\frac{d^r}{dx^r} ,$$

$Ly(x) = \lambda y(x)$

denklemi ve

$\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}y^{(j-1)}(a) + b_{ij}y^{(j-1)}\} = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

sınır koşulu için $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu incelenmiştir.

6. $q \in L^1[a, b]$ ve a_0, a_1, b_0, b_1 sabitler öyleki $a_0^2 + a_1^2 \neq b_0^2 + b_1^2$ olmak üzere

$y''(x) + \{\lambda - q(x)\}y(x) = 0,$

$y(b) = \alpha y(a) + \beta y'(a)$

$y'(b) = \gamma y(a) + \delta y'(a)$

probleminin özdeğerleri için "iyileştirilmiş asimptotik tahminler" elde edilmiştir. Bu tahminler

$\lambda_n = F(n) + o(n^{-4})$

şeklinde bulunmuştur. **[3]** nolu çalışmada λ_n özdeğerleri için bulunan asimptotik tahminler

$\lambda_n = F_1(n) + o(n^{-3})$

şeklindedir. Ayrıca $F(n) = F_1(n) + F_2(n)$ olduğu görülmüştür.

7. (6) da özetlenen sonuçlar özel olarak $y(0) = 0$ ve $y(\pi) = 0$ Dirichlet sınır koşulu için hesaplanmıştır.

4. KAYNAKLAR

1. Eastham, M.S.P., Theory of Ordinary Differantial Equations, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.

2. Hochstadt, H., Differential Equations: A Modern Approach, Dover Publications Inc., New York, 1963.

3. Harris, B. J., Asymptotics of Eigenvalues for Regular Sturm-Liouville Problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications 183(1994), 25-36.

4. Harris, B. J., A note on a paper of Atkinson concerning the asymptotics of an eigenvalue problem with interior singularity, Proc. Roy. Soc. Eidenbugh Sect. 110A(1988), 63-71.

5. Atkinson, F.V. and Fulton, C.T., Asymptotics of eigenvalues for problems on a finite interval with one limit circle singularity, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 99(1984).

6. Atkinson, F.V., Asymptotics of an eigenvalue problem involving an interior singularity, ANL-87-26, 2(1988), 1-18.

7. Çağlıyan, M., Çelik, N. ve Doğan, S., Adi Diferensiyel Denklemler, Dora Yayınları, Dördüncü Basım, Bursa, 2012.

8. Halilov, H., Hasanoğlu, A. ve Can, M., Yüksek Matematik I: Tek Değişkenli Fonksiyonlar Analizi, İkinci Basım, Literatür Yayınları, İstanbul, 2002.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Balıkesir'in Bandırma ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Karacabey İstiklâl İlköğretim İlkokulu'nda, lise öğrenimini ise Karacabey Anadolu Lisesi'nde tamamladı.

2009 yılında Trabzon Karadeniz Teknik Üniversitesi' ni kazandı. Bir yıllık ingilizce hazırlık eğitiminin ardından Matematik Bölümü' nde lisans eğitimine başladı. 2009-2014 yılları arasında Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü' nü bölüm birincisi ve fakülte ikincisi olarak bitirdi.

Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı.