

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

STABİLİZE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ADAPTİF AĞ OLUŞTURMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mahir Ceylan ERDOĞAN

OCAK 2014
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

STABİLİZE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ADAPTİF AĞ OLUŞTURMA

Mahir Ceylan Erdoğan

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 07.01.2014
Tezin Savunma Tarihi : 24.01.2014

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN

Trabzon 2014

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Mahir Ceylan Erdoğan tarafından hazırlanan

Stabilize Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Adaptif Ağ Oluşturma

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 07/ 01 / 2014 gün ve 1536 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri


Başkan: Prof. Dr. Erhan ÇOŞKUN



Üye : Prof. Dr. Orhan AYDIN



Üye : Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN



Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Çalışmamda danışmanlığımı üstlenen Sayın Doç. Dr. Selçuk Han Aydın'a, değerli yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarım İzzet İslamoğlu, Turgay Öztürk, Naim Püne, Emir Erdoğan, Mengü Demir, Meltem Mutlu Erdoğan, Arş Gör. İsmail Avcu, Fahrettin Çirakoğlu, Arş Gör. Harun Selvitopi, Arş Gör. Süleyman Şengül ve ayrıca beni büyütüp bugünlere getiren aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mahir Ceylan ERDOĞAN
Trabzon, 2014

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “STABİLİZE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ADAPTİF AĞ OLUŞTURMA” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN’ın sorumluluğunda tamamladığımı, örnekleri kendim topladığımı, deneyleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 24/01/2014

Mahir Ceylan Erdoğan

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ BEYANNAMESİ	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
SEMBOLLER DİZİNİ.....	X
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı	1
1.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi	1
1.3. Tarihsel Gelişim	1
1.4. Stabilize Edilmiş Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	3
1.5. Adaptive Sonlu Elemanlar Yöntemi	6
1.6. Tezin Planı.....	8
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME	9
2.1. 1 Boyutlu Uzayda Elemanlar	9
2.2. 2 Boyutlu Uzayda Elemanlar	10
2.3. Şekil Fonksiyonları	10
2.3.1. 1 Boyutlu Uzayda Şekil Fonksiyonları	10
2.3.2. 2 Boyutlu Uzayda Üçgen Eleman İçin Şekil Fonksiyonları	11
2.3.2.1. Keyfi Tanımlanmış Bir Üçgenin Standart Birim Üçgene Dönüşümü	13
2.4. Sınır Koşulları	14
2.5. Sonlu Elemanlar Yöntemi Formülasyonu	14
2.5.1. 1 Boyutlu Varyasyonel Hal	16
2.5.2. 2 Boyutlu Varyasyonel Hal	18
2.5.3. Stabilize Edilmiş Sonlu Elemanlar	19
2.5.3.1. 1 Boyutlu Denklemler İçin Stabilizasyon	19
2.5.3.2. 2 Boyutlu Denklemler İçin Stabilizasyon	20
2.5.4. Adaptif Yöntemler	21
2.5.5. Üçgenlerin Bölünmesi.....	21
3. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	23
3.1. 1-D Konveksiyon-Difüzyon Problemi	23

3.2.	2-D Konveksiyon-Difüzyon Problemi	28
4.	SONUÇLAR.....	36
5.	ÖNERİLER	37
6.	KAYNAKLAR.....	38
ÖZGEÇMİŞ		

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

STABİLİZE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ADAPTİF AĞ OLUŞTURMA

Mahir Ceylan ERDOĞAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN

2014, 38 Sayfa

Literatürden bilindiği üzere, konveksiyon baskın konveksiyon-difüzyon denklemlerinin sınırlı bölgelerde çözümlerinde sınır katmanları bulunur. Bundan dolayı standart sonlu elemanlar yöntemi ile eşit aralıklı kaba bir ağ kullanılarak elde edilen sayısal çözümlerde, gerçek çözümde olmayan salınımlar ve kararsızlıklar ile karşılaşılır. Bunu gidermek için, kullanılan ağın düzenlenmesi veya stabilize edilmiş yöntem kullanılması gerekmektedir. Bu tezde, en çok tercih edilen stabilize sonlu elemanlar yöntemlerinden SUPG yöntemiyle adaptif ağ oluşturularak, eşit aralıklı ağa oranla daha yakınsak sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır. Önerilen yöntem, 1 ve 2 boyutlu uzayda tanımlı örnek problemler üzerinde test edilerek adaptif ağ ile elde edilen sonuçların verimliliği gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konveksiyon-difüzyon denklemi, stabilize sonlu elemanlar yöntemleri, SUPG, Adaptif ağ

Master Thesis

SUMMARY

ADAPTIVE MESH GENERATION USING STABILIZED FINITE ELEMENT
METHOD

Mahir Ceylan Erdoğan

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Selçuk Han Aydın
2014, 38 Pages

It is already known from literature that convection dominated convection-diffusion equations on a bounded domain have boundary layers. Therefore, there are some oscillation and numerical instabilities obtained from standard finite element method using uniform rough mesh which are not exist on the exact solution. In order to eliminate these numerical errors, either the mesh must be refined or some stabilized method should be used. In this thesis, the mostly used stabilized finite element method called SUPG is used to generate an adaptive mesh and improve the stabilized finite element solutions obtained from uniform mesh. The proposed method is tested on some problems defined in 1D and 2D, and the accuracy is observed from the obtained solutions using adaptive mesh.

Key Words: Convection-diffusion equation, stabilized finite element methods, SUPG, adaptive mesh.

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1. Köşe noktaları verilen genel bir üçgen	11
Şekil 2.2. Genel bir üçgenin standart bir üçgene dönüşmesi [9].....	13
Şekil 2.3. Üçgenler (a) bire bölünmüş (b) ikiye bölünmüş (c) üçe bölünmüş	22
Şekil 3.1. Standart sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm ve gerçek çözümün karşılaştırması (17 nokta).....	24
Şekil 3.2. Stabilize sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm ve gerçek çözümün karşılaştırması (17 nokta).....	24
Şekil 3.3. Standart sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm ve gerçek çözümün karşılaştırması (33 nokta).....	25
Şekil 3.4. Stabilize sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm ve gerçek çözümün karşılaştırması (33 nokta).....	25
Şekil 3.5. Standart (a) ve stabilize (b) sonlu elemanlar yöntemleri ile sayısal çözüm ve gerçek çözümün karşılaştırması	26
Şekil 3.6. Her aşama sonunda ağ noktalarının dağılımı	27
Şekil 3.7. Adaptif ağ (a) ve eşit aralıklık ağ (b) kullanarak elde edilen sayısal çözümler ile gerçek çözümün karşılaştırması	27
Şekil 3.8. Problem tanım bölgesi ve sınır koşulları.....	28
Şekil 3.9. Adatif ağ sürecinde elde edilen ağlar (ikinci aşama (a), üçüncü aşama (b), dördüncü aşama (c) ve sayısal çözüm izdüşüm eğrileri (d)	29
Şekil 3.10. Problem tanım bölgesi ve sınır koşulları.....	30
Şekil 3.11. Adatif ağ sürecinde elde edilen ağlar (birinci aşama (a), ikinci aşama (b), üçüncü aşama (c) ve sayısal çözüm izdüşüm eğrileri (d)	31
Şekil 3.12. Problem tanım bölgesi ve sınır koşulları.....	33
Şekil 3.13. Adatif ağ sürecinde elde edilen ağlar (üçüncü aşama (a), dördüncü aşama (b)) ve sayısal çözüm izdüşüm eğrileri (c) ile 3 boyutlu grafiği (d)	34
Şekil 3.14. Problem tanım bölgesi ve sınır koşulları.....	35
Şekil 3.15. Adatif ağ süreci sonunda elde edilen ağ (a) ve sayısal çözüm izdüşüm eğrileri (b).....	35

SEMBOLLER DİZİNİ

a	: Konveksiyon katsayısı
A_e	: Üçgen elemanın alanı
F^e	: Eleman vektör
F	: Global vektör
K^e	: Eleman matris
K	: Global matris
\mathbf{n}	: Normal vektör $\mathbf{n} = n_x, n_y$
N_i^e	: Eleman baz fonksiyonları
Q^e	: Eleman sınır integral vektörü
Q	: Global sınır integral vektörü
u	: Bilinmeyen fonksiyonun zayıf çözümü
u_h^e	: Bilinmeyen fonksiyonun eleman üzerinde ayrıklaştırılmış çözümü
U	: Bilinmeyen fonksiyonun tam çözümü
ω	: Ağırlık (test) fonksiyonu
(x, y)	: Global (doğal) koordinatlar
Γ	: Bölgenin sınırı
Γ_D	: Dirichlet türü koşullu sınır
Γ_N	: Neumann türü koşullu sınır

- ε : Difüzyon katsayısı
- τ_κ : Stabilizasyon katsayısı
- h_κ : Eleman boyutu
- P_{e_κ} : Peclet sayısı
- $|\mathbf{a}|$: Vektör normu
- (ξ, η) : Yerel (taşınmış) koordinatlar
- Ω : Tanım bölgesi
- Ω_e : e elemanına ait bölge
- $\partial\Omega$: Ω bölgesinin sınırı
- ∇ : Gradyent $(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j})$
- ∇^2 : Laplace $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$
- 1D : Bir boyutlu uzay
- 2D : İki boyutlu uzay

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı

Bu tezde özellikle konveksiyon baskın konveksiyon-difüzyon denklemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünde adaptif ağ oluşturularak kararlı çözümlerin elde edilmesi incelenecektir.

1.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bu bölümde, başta mühendislik problemleri olmak üzere birçok fiziksel ve matematiksel problemin çözümü için kullanılmakta olan Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) hakkında özet bilgiler verilecektir.

Sonlu elemanlar yöntemi diferensiyel denklem veya denklemlerle ifade edilen pek çok fizik veya mühendislik problemlerinin sayısal olarak çözümünde kullanılan yaygın bir yöntemdir. Sonlu elemanlar yöntemi, keyfi herhangi bir bölgede tanımlanan problemlerin, basit alt bölgelere ayrıştırılarak, her bir alt bölgede daha esnek koşullarda elde edilen çözümlerin birleşiminden oluşan sayısal bir yöntemdir.

Sonlu elemanlar yönteminin pek çok farklı sürümleri mevcuttur. Bunların bazıları;

- Standart sonlu elemanlar yöntemi (Galerkin Method)
- Süreksiz sonlu elemanlar yöntemi (Discontinuous Galerkin Method)
- Geliştirilmiş sonlu elemanlar yöntemi (Extended finite element method-XFEM)
- Ağ bağımsız sonlu elemanlar yöntemi (Mesh free finite element method)
- Smoothed Finite Element methods (S-FEM)
- hp-FEM.

olarak adlandırılır.

1.3. Tarihsel Gelişim ve Literatür Taraması

Sonlu elemanlar yöntemi ile ilk uygulamalar günümüzden çok öncelerde yaklaşık M.S 13 yıllarında geometri alanında olmuştur. Sonlu elemanlar yöntemi, π sayısının yaklaşık değerini bulmak, dairenin alanı ile çevresini hesaplamak için kullanılmışlardır [1].

Daireyi düzenli poligonlara ayırarak basitleştirilmiş problemi çözmek, sonlu elemanlar yönteminin önemli özelliğini sergilemektedir.

Sonlu elemanlar yönteminde modern kullanım ilk olarak yapı analizi üzerinde olmuştur ve bu çalışmalar Alexander Hrennikoff (1941) ve Mc Henry (1943) tarafından geliştirilen yarı analitik analiz metotlarıdır. Hrennikoff ve Mc Henry bir boyut için doğru elemanlarını kullanmışlardır. Buna alternatif olarak Richard Courant çözümleri varyasyonel formda kurmayı önermiştir. Sonra Courant buna ilaveten yaklaşık sayısal çözümleri bulabilmek amacı ile bütün bölgeyi daha basit alt üçgensel bölgeler üzerinde parçalı şekil fonksiyonlarını tanıtmıştır.

Argyis ve Kelsey (1954) enerji prensibini kullanarak “matrix structural analysis” (matrislerin yapısal analizi) yöntemini geliştirmiştir. Turner ve diğ. (1956) iki boyutlu elemanlar üzerinde yaptığı çalışmalarda kafes eleman, giriş eleman, iki boyutlu üçgen ve dikdörtgen elemanlar için eleman matrisini (rijitlik matrisini) oluşturmuşlardır. "Sonlu Elemanlar" terimi ilk defa Ray W.Clough (1960) tarafından düzlemsel gerilme analizinde uygulanmaya başlandığında kullanılmıştır.

Martin (1965) kararlılık analizini ilk defa sonlu elemanlar yöntemiyle incelemiştir. Bununla birlikte artık statik problemlerin gibi dinamik problemler de sonlu elemanlar yöntemiyle incelenmeye başlandı.

Varyasyonel formülasyon terimi ilk kez Melosh (1963) tarafından kullanılmıştır. Szabo ve Lee (1969) “ağırlıklı rezidü yöntemi” nin sonlu elemanlar yönteminde uygulanmasını sağlamışlardır. Zaman içerisinde bunlara ek olarak, sonlu elemanlar yöntemi geliştirilerek ısı transferi, yeraltı sularının akışı, manyetik alan ve diğer birçok alandaki problemlerin çözümlerine de uygulanmıştır [2].

Sonlu elemanlar yöntemi, etkin bir yöntem olduğundan dolayı pek çok araştırmacı tarafından kullanılmış olup bu alanda yüzlerce makale, kitap ve benzeri çalışmalar yayınlanmıştır. Bu çalışmaların bazıları [9];

Marco Túllio de Vilhena, “An analytical solution of the steady state convective-diffusion equation with space dependent diffusion coefficient” (Journal of Membrane Science, 71, 1–2 (1992) 51–56) isimli çalışmasında konveksiyon-difüzyon denkleminin zaman bağımsız kararlı halinin konum değişken difüzyon katsayılı halinin analitik çözümünü incelemiştir. A. Rapa, L. Elliottb, D.B. Inghamb, D. Lesnicb ve X. Wen, “DRBEM for Cauchy convection-diffusion problems with variable coefficients”, (Engineering Analysis with Boundary Elements, 28 (2004) 1321–1333) isimli

çalışmalarında ikili sınır elemanları yöntemi (Dual Reciprocity Boundary Element Method (DRBEM)) ile Tikhonov regülirizasyon yöntemi (Tikhonov regularisation method) veya yuvarlanmış tekil değer ayrıştırması yöntemi (Truncated Singular Value Decomposition (TSVD) method) birleşimi ile değişken katsayılı konveksiyon-difüzyon denklemini çözmüşlerdir. Ming-Chih Lai ve Yu-Hou Tseng, “A fast iterative solver for the variable coefficient diffusion equation on a disk”, (Journal of Computational Physics 208 (2005) 196–205) isimli çalışmalarında kutupsal koordinatlarda tanımlanan değişken katsayılı konveksiyon-difüzyon denklemini sonlu farklar yaklaşımı kullanarak preconditioned conjugate gradient (PCG) yöntemi ile çözümünü elde etmişlerdir. Yeliz Koca, “Pozisyona bağlı difüzyon katsayısı içeren karşıt akımlı sistemlerde difüzyon işleminin modellenmesi”, (Yüksek Lisans Tezi, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Kimya Mühendisliği Anabilim Dalı, Gebze, 2008) yüksek lisans tezinde, difüzyon katsayısının pozisyonun bir fonksiyonu olduğu durumların modellemelerini yapmış ve Rayleigh-Ritz yöntemi ile sayısal çözümlerini elde etmiştir. Dmitri Lastochkin ve Moshe Favelukis, “Bubble growth in a variable diffusion coefficient liquid”, (Chemical Engineering Journal 69 (1998) 21-25) isimli çalışmalarında difüzyon katsayısının üstel olarak konsantrasyona bağlı olduğu durumu incelemişlerdir.

1.4. Stabilize Edilmiş Sonlu Elemanlar Yöntemi

Konveksiyon baskın ve sınır katmanlı bir diferensiyel denklemin standart sayısal yöntemler ile çözümünde salınımlar, kilitlenme, tekil matrisler ile karşılaşma gibi pek çok sayısal kararsızlık sorunları ile karşılaşılır. Bu sorunları gidermek için sayısal yöntemde kullanılan ağ üzerinde değişiklik yapılabilir (eleman ve nokta sayısının artırılması, problemin yapısına göre noktaların sayılarının ve yerlerinin değiştirilmesi, vb. [3-5]) veya sayısal formülasyona ilave terimler eklenerek sayısal çözümün kararlılığı sağlanmaya çalışılır.

The Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) yöntemi sonlu elemanlar yönteminde ilk olarak ortaya konulan ve halen daha etkin bir şekilde kullanılan stabilizasyon yöntemidir. SUPG yöntemi ilk olarak Brooks ve Hughes [6] tarafından konveksiyon baskın konveksiyon-difüzyon problemlerinin çözümü için ortaya konulmuş ve daha sonra pek çok probleme uygulaması geliştirilmiştir. SUPG yöntemi, standart sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlarda oluşan salınımları ve sayısal kararsızlıkları

azaltarak daha yakınsak bir çözüm elde edilmesini sağlar. Yöntemin temel yaklaşımı, standart sonlu elemanlar formülasyonuna akım yönünde ağ bağımlı terimler ekleyerek denklemdaki kararsızlıkları azaltmaktır. Bu terimler sayısal hataları, akış yönünde yapay akışkan gibi davranarak iyileştirir.

SUPG yöntemi, Petrov-Galerkin yönteminin geliştirilmesi ile elde edilen bir stabilizasyon türüdür. SUPG haricinde, hemen hemen SUPG ile aynı yapıda olan Galerkin en küçük kareler yöntemi (Galerkin Least Squares – GLS), Douglas-Wang Galerkin yöntemi (Douglas-Wang Galerkin Method – DWG) de özellikle yüksek dereceli cebirsel polinomlar seçildiğinde kullanılan diğer stabilizasyon türleridir. Konveksiyon-difüzyon problemi haricinde, Stokes denklemleri, Navier-Stokes denklemleri, Magnetohidrodinamik denklemleri gibi pek çok doğrusal veya doğrusal olmayan denklemlerin sayısal elemanlar yöntemi ile çözümlerinde aşağıdaki stabilizasyon yöntemleri pek çok çalışmada kullanılmıştır.

- İki aşamalı sonlu elemanlar yöntemi (Two-level finite element method - TLFEM)
- Stabilize edilmiş alt grid yöntemi (Stabilized subgrid method – SSM)
- Streamline Diffusion Finite Element Method (SDFEM)
- Residual-Free Bubble Method (RFBM)
- Multiscale Finite Element Method (MFEM)

Stabilize Sonlu Elemanlar Yöntemi ile yapılan çalışmaların bazılarını listelenecek olursa [9];

Ramon Codina, “Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation”, (Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 156 (1998) 185-210) isimli çalışmasında, konveksiyon-difüzyon denkleminin değişik sonlu elemanlar yöntemi formülasyonları ile çözümlerini, formülasyonların avantaj ve dezavantajlarını incelemiştir. Önder Türk, “The Finite Element Method Solution of Reaction-diffusion-advection Equations in Air Pollution”, (Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, 2008) isimli yüksek lisans tezinde hava kirliliği modelleme problemlerinde ortaya çıkan reaksiyon difüzyon adveksiyon denklemlerinin stabilize sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünü incelemiştir. Janivita Joto Sudirham, “Space-time Discontinuous Galerkin Methods For Convection-diffusion Problems Application to Wet-chemical Etching”, (Doctor’s Thesis, University of Twente, 2005, Indonesia) isimli doktora tezinde zaman bağımlı konveksiyon-difüzyon denklemlerinin süreksiz Galerkin

sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü ve uygulamasını incelemiştir. Feng-Nan Hwang, “A new submesh strategy in the two-level finite element method for the advective-diffusive equation”, (Master Thesis, University of Colorado Denver , 1999, Denver) isimli yüksek lisans tezinde konveksiyon-difüzyon denklemleri için iki aşamalı sonlu elemanlar yöntemi ve alt ağ üzerinde uygun sonlu elemanlar ağı belirlenmesi üzerine çalışma gerçekleştirmiştir. J.M. Melenk ve C.Schwab, “An hp finite element method for convection-diffusion problems”, (IMA Journal of Numerical Analysis, 19, 3 (1999) 425-453) isimli çalışmalarında konveksiyon-difüzyon denkleminin hp-sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünü incelemiştir. R. Bruce Kellogg ve Christos Xenophontos, “An Enriched Subspace Finite Element Method for Convection-diffusion Problems”, (International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 7, 3 (2010) 477–490) isimli çalışmalarında sınır katman davranışının olduğu bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemini, normal sonlu eleman yönteminde kullanılan baz fonksiyonlarının sınır katmanının olduğu bölgelerde, sınır katman davranışı ile aynı yapıda ek fonksiyonlar ile geliştirilmesi ile elde edilen yeni formülasyon ile çözümünü elde etmişlerdir. J.M.L.Maubach, “A parallel finite element method for convection-diffusion problems” (Proceedings of the ECMI-2004 conference, 2004, Eindhoven) isimli konferans çalışmasında paralel sonlu elemanlar yönteminin konveksiyon-difüzyon denklemine uygulamasını gerçekleştirmiştir. Ramon Codina I Rovira, “A Finite Element Model For Incompressible Flow Problems” (Doctoral Thesis, Universitat Politecnica De Catalunya, 1992, Barcelona) isimli doktora tezinde, başta konveksiyon-difüzyon denklemleri olmak üzere akış problemleri için stabilizasyon yöntemlerini, kararlılık ve hata analizlerini incelemiştir. R.D. Lazarov ve P.S. Vassilevski, “Least-Squares Streamline Diffusion Finite Element Approximations to Singularly Perturbed Convection-Diffusion Problems”, (Conference on Singularly Perturbed Convection-Diffusion Problems Lozenetz, Bulgaria, 1998) isimli çalışmalarında en küçük kareler yöntemi ile sonlu elemanlar yönteminin singüler pertürbe konveksiyon-difüzyon problemlerinin çözümlerini incelemiştir. Gerard R. Richter, “An Explicit Finite Element Method for Convection-dominated Steady State Convection-diffusion Equations” (Siam J. Numer. Anal., 28, 3 (1991) 744-759) isimli çalışmasında konveksiyon baskın konveksiyon-difüzyon denklemlerinin yüksek dereceli geliştirilmiş sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü ve analizini yapmıştır. A.I. Neslitürk, “A stabilizing subgrid for convection-diffusion problem”, (Math. Models Methods Appl. Sci., 16 (2006) 211-232) ve “On the choice of stabilizing sub-grid for convection-diffusion problem on rectangular

grids”, (Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010) 3687-3699) isimli çalışmalarında çok küçük difüzyon katsayılı konveksiyon-difüzyon denklemlerinin stabilize çözümlerini tek noktalı alt grid kullanarak elde etmiştir. Eugenio Onate ve Marco Manzan “Stabilization techniques for finite element analysis of convection-diffusion problems” (Convection Heat Transfer.". WIT Press, 2000,10-25.) isimli çalışmalarında konveksiyon-difüzyon denkleminin çözümünde kullanılan genel stabilizasyon formülasyonlarının özetini çıkartmışlardır. Torsten LinB ve Niall Madden, “A finite element analysis of a coupled system of singularly perturbed reaction-diffusion equations” (Applied Mathematics and Computation, 148,3 (2004) 869-880) ve Christos Xenophontos ve Lisa Oberbroeckling “A numerical study on the finite element solution of singularly perturbed systems of reaction-diffusion problems” (Applied Mathematics and Computation,187 (2007) 1351-1367) çalışmalarında singüler pertübeli konveksiyon-difüzyon denklemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümlerini incelemişlerdir.

1.5. Adaptif Sonlu Elemanlar Yöntemi

Eşit aralıklı ağ üzerinde sonlu elemanlar yöntemi kullanımı, özellikle sınır katman problemlerinin çözümünde yetersiz kalmaktadır. Sınır katmanının olduğu bölgelerde, çözümün karakteristiğini daha etkin bir şekilde ortaya koymak için eleman sayısının artırılması gerekmektedir. Bu durum ise genel denklemler sisteminin büyümesine, dolayısı ile hesaplama süresinin ve hesaplama maliyetinin artmasına neden olmaktadır.

Bu sorunu gidermek için özellikle 1980’li yılların sonlarında ve 1990’lı yılların başlarından itibaren adaptif ağ gelişimi üzerine çalışmalar başlamıştır. Adaptif ağ yöntemlerinde genel olarak, ihtiyaç duyulan bölgelerde

- Cebirsel polinom derecesini artırma (p metodu)
- Eleman sayısını artırma (h method)

şeklinde iki farklı yaklaşım kullanılır. Geliştirilmiş yöntemler ise bu iki yaklaşımın birleşimi olan hp -FEM (hem eleman sayısının hem cebirsel polinomun derecesinin artırılması) yöntemini kullanırlar [7].

hp -FEM ayrıştırılmaları fikri, Barna Szabo’nun ve Washington Üniversitesi, St. Louis, Missouri’deki öğrencileri ve iş arkadaşlarının p metodu üzerine çalışmalarına dayanmaktadır [8]. P metodunda mesh tespit edilir ve yakınsama düzgün bir biçimde ya da uyarlamalı olarak polinom mertebesi p ’yi artırarak elde edilir. Spektral sonlu elementlerin

büyük bir bölümünün temsilcisi olan p metodu, sınıra kadar analitik olan çözümleme problemleri için üstel bir yakınsama getirebilir. Bununla birlikte periyodik sınır koşullu birim küplerinde tanımlanan problemler hariç böyle bir düzenleme genellikle pratikte oluşmaz. Babuska ve Vogelius tekillikler durumunda p yakınsamasının h yakınsaması için olduğundan (serbestlik derecesi açısından) iki kat daha hızlı olduğunu göstermiştir. Hp uyarlanabilir metodunun ilk sınırlı versiyonu ($p = 1, 2, 3$) Philippe Devloo tarafından 1988 yılında Teksasta ayrılışından kısa bir süre sonra bir araya getirildi. Birtakım 2D, 3D p ve hp kodları araştırma organizasyonlarında ve akademik çevrede geliştirildi. İlk p kodlarından olan STRIPE Borje Anderson tarafından, İsveç Havacılık Enstitüsü'nde geliştirildi. Yıllar içinde, STRIPE, uçak basıncı/çatlak analizi, yapısal durörgüanlık metallerde, kompozitlerde çatlak/kırık analizi, statik analiz ve mikromekanik'i içeren birçok araştırma projesinin temeli oldu [8]. Kodlama kütlesi ilk zorlanmış yaklaşıklama versiyonunu uygulayan ve ilk tam otomatik hp uygulanabilir stratejilerini keşfeden ve uygulayan Waldek Rachowicz tarafından yapıldı. PHLEX olarak adlandırılan ve hp adaptif sonlu elemanların çekirdeğini oluşturan yazılım COMCO (Computational Mechanics Company) de geliştirilmiştir. COMET-X, FIESTA, PROBE, NETGEN, NEKTAR, MELINA, PolyFEM, Pro/MECHANICA, ve Stress Check ticari amaçlı geliştirilen hp -FEM yazılımlarıdır.

Hp -FEM yöntemi ile yapılan çalışmaların bazılarını listelenecek olursa [8];

M. Ainsworth ve B. Senior "An adaptive refinement strategy for hp -finite element Computations" (Appl. Numer. Math., 26(1-2): 165–178, December 1997) çalışmalarında hp -fem yöntemini anlatmışlardır. I. Babuska ve B.Q. Guo "Approximation properties of the hp version of the finite element method" (Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 133: 319–346, 1996) çalışmalarında hp -fem ile yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. I. Babuska, T. Strouboulis, ve K. Copps "hp optimization of finite element approximations: analysis of the optimal mesh sequences in one dimension" (Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 150: 89–108, 1997) çalışmalarında 1 boyutlu uzayda hp -fem ile mesh optimizasyonu üzerinde çalışmışlardır. W. Cecot, L Demkowicz, ve W. Rachowicz "An hp -adaptive finite element method for electromagnetics. Part 3: a three-dimensional infinite element for Maxwell's equations" (Int. J. Numer. Meth. Eng., 57: 899–921, 2003) çalışmalarında 3 boyutlu uzayda hp -fem ile Maxwell denklemlerinin çözümlerini incelemişlerdir. H.J. Chang, J.M. Bass, W. Tworzydło, ve J.T. Oden "hp-Adaptive Methods for Finite Element Analysis of Aerothermal Loads in High-Speed Flows" (Technical Report TR-93-11.A., COMCO,

1993) çalışmalarında yüksek hızlı akımlar için hp-fem yöntemini uygulamışlardır. M. Costabel, M. Dauge, ve Ch. Schwab “Exponential convergence of hp fem for Maxwell’s equations with weighted regularization in polygonal domains” (Math. Models. Meth. Appl. Sci., 15(4), 2005) çalışmalarında hp-fem yöntemin Maxwell denklemleri için üstel seviyede yakınsaklığını incelemişlerdir. L. Demkowicz, J.T. Oden, ve Ph. Devloo “On h-type mesh refinement strategy based on a minimization on interpolation error” (Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.,53: 67–89, 1985) çalışmalarında enterpolasyon hatasının minimize edilmesi ile hp-fem yönteminin uygulamasını gerçekleştirmişlerdir. L. Demkowicz, J.T. Oden, ve R. Rachowicz “A new finite element method for solving compressible Navier-Stokes equations based on an operator splitting method and hp adaptivity” (Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 84: 275–326,1990) çalışmalarında Navier-Stokes denklemlerinin çözümlerini hp-fem yöntemi ile incelemişlerdir. Ph. Devloo, J. T. Oden, ve P. Pattani “An hp adaptive finite element method for the numerical simulation of compressible flow” (Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.,203–235, 1988) çalışmalarında sıkıştırılabilir akımların hp-fem yöntemi ile sayısal çözümü ve simülasyonunu göstermişlerdir.

1.6. Tezin Planı

Tez aşağıdaki taslak çerçevesinde hazırlanmıştır. Bölüm 2’de ilk olarak konveksiyon-difüzyon denkleminin standart sonlu elemanlar yöntemi ile formülasyonu verilmiştir. Daha sonra SUGP türü stabilizasyon yöntemi anlatılıp denklemlere eklenecek ilave terimlerin formülleri verilmiştir. Bu bölümde son olarak, SUPG yöntemi kullanılarak 1D ve 2D uzayında adaptif ağ geliştirme algoritması sunulmuştur. Bölüm 3’de ise örnek problemler üzerinde, Bölüm 2’de elde edilen sonuçların 1D ve 2D problemlerine uygulamaları yapılarak elde edilen sonuçların yorumları yapılmıştır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

Bu bölümde ilk olarak sonlu elemanlar yöntemi anlatılacaktır. Daha sonra stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemi incelenecek. Adaptive sonlu elemanlar yöntemleri gözden geçirildikten sonra, tezde uygulanan adaptive yöntemin ayrıntıları verilecektir.

Sonlu elemanlar yöntemi, sınırlı bir Ω bölgesinde tanımlanmış sınır değer probleminin sayısal olarak çözümünde kullanılan bir yöntemdir. İlk olarak problem tanım bölgesi Ω daha basit (sade) alt bölgelere ayrıştırılır. Bu alt bölgeler '*eleman*' olarak adlandırılır. Elemanlar ise düğüm noktaları olarak adlandırılan noktalarla birbirine bağlanarak problem tanım bölgesi oluşturulmuş olur. Düğüm noktaları haricindeki diğer noktaların da dahil olduğu tüm noktalara ayrıklaştırma noktaları denir [9,10].

Yöntem özetle üç ana adımdan oluşur:

1) Birinci adımda, genel hali ile verilen problem tanım bölgesi, geometrik olarak basit alt bölgelere ayrılır.

2) İkinci adımda, her bir eleman için diferensiyel denklemin çözümü, bilinmeyen fonksiyonun eleman üzerinde seçilen noktalarda (node) cebirsel polinomlar türünden ifade edildikten sonra, denklemin varyasyonel formu kullanılarak elde edilen doğrusal denklem sistemi türünden ifade edilir.

3) Son adımda ise her bir eleman için elde edilen denklem sistemlerinin etkileşimi (assembly procedure) yapılarak problem bölgesi üzerinde geçerli genel denklem sistemi oluşturulur ve çözüm, noktasal (discrete) olarak elemanlar üzerinde seçilen noktalarda elde edilir.

2.1. 1 Boyutlu Uzayda Elemanlar

Bir boyutlu uzayda elemanlar doğru parçaları ile gösterilir. Elemanların uç noktaları (düğüm noktaları) ayrıklaştırma noktaları olarak seçilir ise bu tür eleman doğrusal (linear) eleman olarak adlandırılır. Nokta sayısı üç olursa (üçüncü eleman genellikle orta nokta seçilir) bu tür elemanlar ikinci dereceden (kuadratik) eleman olarak adlandırılır.

2.2. 2 Boyutlu Uzayda Elemanlar

İki boyutlu uzayda genellikle üçgen ve dörtgen elemanlar kullanılmaktadır. Bu tezde sadece üçgen elemanlar kullanılacaktır. Seçilecek şekil fonksiyonunun derecesine göre üçgen eleman üzerinde üç, altı ve daha fazla ayrıklaştırma noktası kullanılabilir. Eğer ayrıklaştırma noktaları sadece üçgenin köşe noktaları olarak seçilirse bu tür eleman doğrusal (lineer) üçgen eleman olarak adlandırılır. Bölgenin üçgenlere ayrıklaştırılmasında dikkat edilmesi gereken kurallar; üçgenler üst üste çakışmamalı, bölge içinde boşluk kalmamalı (bölgenin tamamı üçgenleştirilmeli), bir üçgenin köşe noktası diğer herhangi bir üçgenin kenarına denk gelmemeli ve üçgenler bir birlerine sadece köşe noktalarından bağlanmalıdır.

2.3. Şekil Fonksiyonları

Sonlu elemanlar yönteminde bilinmeyen fonksiyon, her bir eleman için eleman üzerinde seçilen ayrıklaştırma noktaları kullanılarak tanımlanan şekil fonksiyonlarının (N_i) doğrusal kombinasyonu olarak

$$u(x) \approx u_h^e(x) = \sum_{i=1}^n u_i^e N_i^e(x) \quad (2.1)$$

formunda tanımlanır [10].

2.3.1. 1 Boyutlu Uzayda Şekil Fonksiyonları

1 Boyutlu uzayda şekil fonksiyonlarını tanımlamak için N_i şekil fonksiyonları ile eleman üzerinde seçilen x_j ayrıklaştırma noktaları arasında sağlanması gereken

$$N_i^e(x_j) = \begin{cases} 1, & i=j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad (2.2)$$

özelliği kullanılır.

Eleman üzerinde sadece iki nokta seçilir ise bu tür elemanlar doğrusal eleman olarak adlandırılır ve doğrusal elemanlar için N_i şekil fonksiyonları a ve b sabit sayılar olmak üzere

$$N_i^e(x_j) = a_i + b_i x_j, \quad i, j=1,2 \quad (2.3)$$

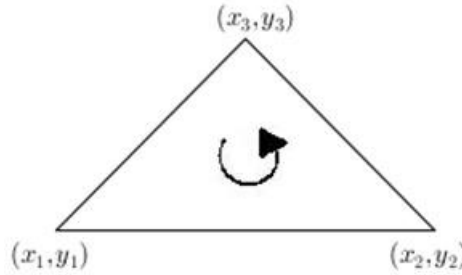
formunda tanımlanırlar. Yukarıda verilen, şekil fonksiyonlarının sağlaması gereken (2.2) özelliği kullanılarak a_1, b_1 ve a_2, b_2 değerleri yerine yazılır ise $N_1(x)$ ve $N_2(x)$

$$N_1(x) = \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}, N_2(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} \quad (2.4)$$

olarak bulunur.

2.3.2. 2 Boyutlu Uzayda Üçgen Eleman İçin Şekil Fonksiyonları

Bu tezde sadece üçgen elemanlar kullanılacağı için üçgen elemanlar üzerinde tanımlanan şekil fonksiyonları incelenecektir. Üçgen eleman üzerinde seçilen noktalar saat yönünde veya saatin tersi yönünde sırası ile numaralandırır (çoğunlukla saatin tersi yönü kullanılır) ve tüm elemanlar için aynı yön kullanılmalıdır.



Şekil 2.1. Köşe noktaları verilen genel bir üçgen

Doğrusal üçgen eleman için şekil fonksiyonları

$$N_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

formunda tanımlanır. 1 boyutlu elemanlar üzerinde tanımlı şekil fonksiyonları için tanımlanan kural 2 boyutlu elemanlar için de geçerlidir. Örnek olarak, N_1 baz fonksiyonu birinci ayrıklaştırma noktasında 1 değerini diğer noktalarda (ikinci ve üçüncü ayrıklaştırma noktalarında) ise sıfır değerini alır. Buna göre doğrusal üçgen eleman için şekil fonksiyonlarını bulmak için

$$\begin{cases}
N_1(x_1, y_1) = 1 = a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 \\
N_1(x_2, y_2) = 0 = a_1 + b_1 x_2 + c_1 y_2 \\
N_1(x_3, y_3) = 0 = a_1 + b_1 x_3 + c_1 y_3
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
N_2(x_1, y_1) = 0 = a_2 + b_2 x_1 + c_2 y_1 \\
N_2(x_2, y_2) = 1 = a_2 + b_2 x_2 + c_2 y_2 \\
N_2(x_3, y_3) = 0 = a_2 + b_2 x_3 + c_2 y_3
\end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases}
N_3(x_1, y_1) = 0 = a_3 + b_3 x_1 + c_3 y_1 \\
N_3(x_2, y_2) = 0 = a_3 + b_3 x_2 + c_3 y_2 \\
N_3(x_3, y_3) = 1 = a_3 + b_3 x_3 + c_3 y_3
\end{cases}$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemlerinin çözümünden A_e , e üçgen elemanın alanı olmak üzere

$$\begin{aligned}
N_1(x, y) &= \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{2A_e} \\
N_2(x, y) &= \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y}{2A_e} \\
N_3(x, y) &= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y}{2A_e}
\end{aligned} \quad (2.7)$$

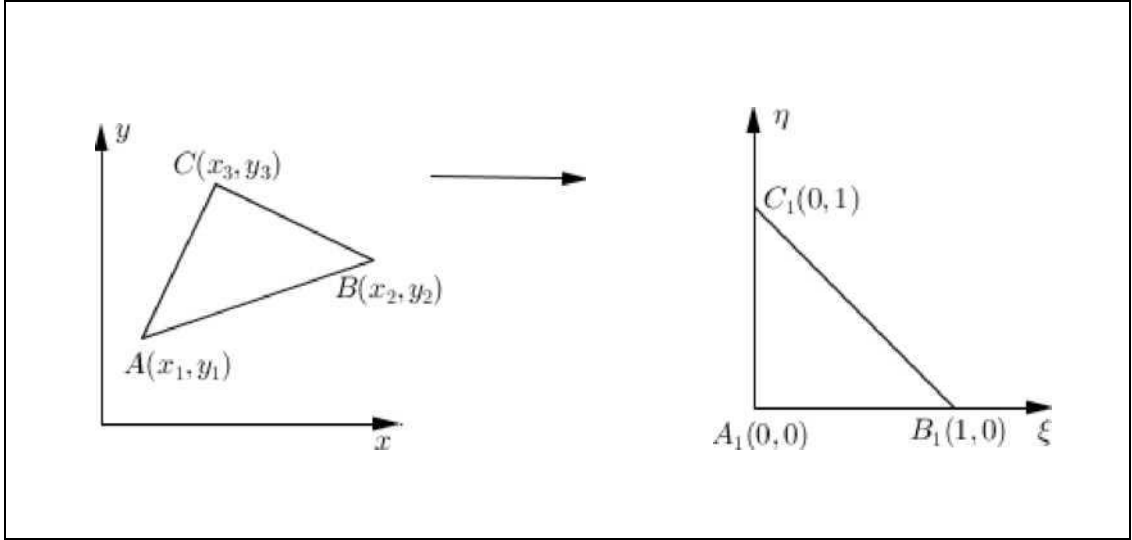
olarak bulunur.

Herhangi bir üçgen eleman için şekil fonksiyonları bu yöntem ile hesaplanabiliyor olsa dahi, sonlu elemanlar yönteminin programlanmasında bu yöntem yerine, verilen herhangi bir üçgen doğrusal dönüşümle standart birim üçgene dönüştürülür ve şekil fonksiyonları bir kereye mahsus olmak üzere sadece standart birim üçgen için hesaplanır.

(x, y) koordinat sisteminde tanımlanan herhangi keyfi bir üçgeni (ξ, η) koordinat sisteminde standart birim üçgene dönüştürebilmek için

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta \\
y &= \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta
\end{aligned} \quad (2.8)$$

doğrusal dönüşümü kullanılır.



Şekil 2.2 Genel bir üçgenin standart bir üçgene dönüşmesi [9]

2.3.2.1. Keyfi Tanımlanmış Bir Üçgenin Standart Birim Üçgene Dönüşümü

(x, y) koordinat sisteminde üçgenin köşe noktaları (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) olarak alınır ve şekil fonksiyonlarının özellikleri ve aşağıdaki tablo değerleri kullanılarak standart birim üçgen için şekil fonksiyonları

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$N_2(\xi, \eta) = \xi \tag{2.9}$$

$$N_3(\xi, \eta) = \eta$$

olarak bulunur [10].

Tablo 1. Köşe noktalarının dönüşüm değerleri

x - y koordinat sistemi	ξ - η koordinat sistemi
(x_1, y_1)	$(0, 0)$
(x_2, y_2)	$(1, 0)$
(x_3, y_3)	$(0, 1)$

2.4. Sınır Koşulları

Sonlu elemanlar yöntemi sınırlı bölge üzerinde tanımlı sınır değer problemlerine uygulanabilen bir yöntemdir. Bundan dolayı problemde sınır koşullarının da tanımlanmış olması gerekmektedir

Üç farklı şekilde sınır şartları tanımlanabilir;

Sınırlarda fonksiyon değeri belirtildiği durumlar Dirichlet türü sınır koşulu ($u = g$), sınırlarda fonksiyon normal türev değeri belirtildiği durumlar Neumann türü sınır koşul

($\frac{\partial u}{\partial n} = g$) ve sınır kuşulları Dirichlet ve Neumann türü koşulların kombinasyonu olarak

tanımlanmış ise karışık ve Robin türü sınır koşulu $c_1 u + c_2 \frac{\partial u}{\partial n} = g$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olarak adlandırılır.

2.5. Sonlu Elemanlar Yöntemi Formülasyonu

Öncelikle Ω bölgesi üzerinde konveksiyon-difüzyon sınır değer problemi

$$-\varepsilon \nabla^2 U + \mathbf{a} \cdot \nabla U = f \quad (2.10)$$

diferensiyel denklemi ve

$$U = g_0, \Gamma_D \quad \frac{\partial U}{\partial n} = g_1, \Gamma_N$$

sınır koşulları ile tanımlanmış olsun. Denklemin çözümü $U(x,y)$ fonksiyonu, denklemin tanımlandığı Ω bölgesinin tamamında ve sınır şartlarını bütün sınırlarda sağlayacağından dolayı problemin bu hali problemin güçlü hali (strong form) olarak adlandırılır. Bütün bu koşulları sağlayan çözüm teorik olarak elde edilebilir. Sonlu elemanlar yönteminde ise problemin daha esnek koşullar altında çözümü elde edilmeye çalışılacaktır.

Denklemin daha esnek koşullar altında çözümün elde etmek için, öncelikle diferensiyel denklem bir ağırlık (test) fonksiyonu ω ile çarpılır ve problem tanım bölgesi üzerinde integrali alınır. Bu yöntem ağırlıklı rezidü yöntemi (weighted residual method) olarak adlandırılır.

1 boyutlu uzayda tanımlı

$$\begin{cases} -\varepsilon U_{xx}(x) + aU_x(x) = f(x), x_0 < x < x_N \\ U(x_0) = U_0 \\ U(x_N) = U_N \end{cases} \quad (2.11)$$

Konveksiyon-difüzyon problemine ağırlıklı rezidü yöntemi uygulanır ise

$$\int_{x_0}^{x_N} (-\varepsilon u_{xx} + a u_x - f) \omega dx = 0 \quad (2.12)$$

integral eşitliği elde edilir. Elde edilen bu eşitlikteki ikinci mertebeden türev terimine kısmi integrasyon yöntemi uygulanır ise

$$\int_{x_0}^{x_N} (\varepsilon u_x \omega_x + a u_x \omega - f \omega) dx - \varepsilon u_x \omega \Big|_{x_0}^{x_N} = 0 \quad (2.13)$$

eşitliği elde edilebilir. Bu eşitliğe problemin zayıf hali (weak form) denir. Eğer problemin sınır koşulları Dirichlet türü sınır koşulları olarak tanımlanmış ise, ağırlık fonksiyonu için $\omega(x_0) = \omega(x_N) = 0$ ilave koşulu ile sınır değer terimlerinin etkisi kaybolur. Bu durumda

$$\int_{x_0}^{x_N} (\varepsilon u_x \omega_x + a u_x \omega - f \omega) dx = 0 \quad (2.14)$$

denklemini elde edilebilir.

Benzer şekilde 2 boyutlu uzayda

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2}$$

ve

$$\mathbf{a} = (a_1(x, y), a_2(x, y)) \text{ için } \mathbf{a} \cdot \nabla U = a_1(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + a_2(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} -\varepsilon \nabla^2 U(x, y) + \mathbf{a}(x, y) \cdot \nabla U(x, y) = f(x, y), (x, y) \in \Omega \\ U(x, y) \Big|_{(x, y) \in \Gamma_D} = g_0, & \Gamma_D \\ \frac{\partial U(x, y)}{\partial n} \Big|_{(x, y) \in \Gamma_N} = g_1, & \Gamma_N \end{cases} \quad (2.15)$$

eşitlikleri ile tanımlanan konveksiyon-difüzyon probleminin zayıf halini elde etmek için

$$\int_{\Omega} (-\varepsilon \nabla^2 u + \mathbf{a} \cdot \nabla u - f) \omega dx dy = 0 \quad (2.16)$$

integral eşitliğinde $-\nabla^2 u \omega$ terimi için Divergence teoremi

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) \omega d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \omega d\Omega + \oint_{\Gamma} \omega (\mathbf{n} \cdot \nabla u) ds \quad (2.17)$$

uygulanır ise

$$\int_{\Omega} (\varepsilon \nabla u \cdot \nabla \omega + (\mathbf{a} \cdot \nabla u) \omega - f \omega) dx dy - \oint_{\Gamma} (\varepsilon \mathbf{n} \cdot \nabla u) \omega ds = 0 \quad (2.18)$$

eşitliği elde edilir. Sınır koşulunun Dirichlet türü belirtildiği sınırlarda $\omega = 0$ şartı sağlayacağından (2.18) eşitliğinde bulunan sınır integrali düşer. Bundan dolayı Dirichlet türü sınır koşulları için

$$\int_{\Omega} (\varepsilon \nabla u \cdot \nabla \omega + (\mathbf{a} \cdot \nabla u) \omega - f \omega) dx dy = 0 \quad (2.19)$$

integral eşitliğini elde edebilir.

Problem tanım bölgesi Ω üzerinde elde edilen integral denklemlerinin çözümü, bölgenin alt bölgelere ayrıştırılması ile elde edilen elemanlar üzerinde ayrı ayrı integrallenmesi ve elde edilen sonuçların birleşiminden bulunur. Her bir eleman üzerinde bilinmeyen fonksiyonun şekil fonksiyonlarının kombinasyonu türünden

$$u(\mathbf{x}) \approx u_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n u_i^e N_i^e(\mathbf{x})$$

yazılması ile denklemlerin zayıf hallerinden varyasyonel halleri elde edilir.

2.5.1. 1 Boyutlu Varyasyonel Hal

1-D Varyasyonel hali için sonlu elemanlar yönteminde, denklem (2.13) de u yerine (2.1) deki yaklaşım yazılır ise

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial x} \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + a \omega \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} - f \omega \right) dx - \left(\varepsilon \omega \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0 \quad (2.20)$$

integral denklemi elde edilir. Benzer şekilde ağırlık fonksiyonu da şekil fonksiyonlarının doğrusal kombinasyonu olarak ifade edilir ise

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\varepsilon \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + a N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) dx \right) u_i^e - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f N_j^e dx$$

$$- \sum_{i=1}^n \varepsilon N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} u_i^e \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0 \quad (2.21)$$

integral denkleminde i,j indislerinden matris-vektör formunda

$$K_{ij}^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\varepsilon \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + a N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) dx$$

eleman matrisi,

$$F_j^e = \int_{\Omega_e} f N_j^e dx \quad (2.22)$$

yük vektörü ve

$$Q_{ij}^e = \sum_{i=1}^n \varepsilon N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} u_i^e \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

normal türev vektörü olmak üzere

$$[K^e] \{u^e\} = \{F^e\} + \{Q^e\} \quad (2.23)$$

eşitliği elde edilir. Eleman bazında elde edilen matris ve vektörlerin bir birlerine etkileşimi (assembly procedure) gerçekleştirildikten sonradiferensiyel denklem için

$$[K] \{u\} = \{F\} \quad (2.24)$$

genel matris-vektör sistemi elde edilir.

2.5.2. 2 Boyutlu Varyasyonel Hal

Bir boyutlu uzaydaki sonlu elemanlar yaklaşımı ile iki boyutlu uzaydaki sonlu elemanlar yaklaşımı paralellik gösterir. Buna göre (2.18) denkleminde bilinmeyen $u(x,y)$ fonksiyonu ve ağırlık fonksiyonu yerlerine şekil fonksiyonları türünden ifadeleri yazılır ise

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega_e} \left(\varepsilon \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) + a_1 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + a_2 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) dx dy \right\} u_i^e - \int_{\Omega_e} f N_j^e dx dy - \oint_{\Gamma_e} \varepsilon N_j^e q_n ds = 0, j=1,2,\dots,n \quad (2.25)$$

eşitliği elde edilir.

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) + a_1 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + a_2 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right\} dx dy$$

$$F_j^e = \int_{\Omega_e} f N_j^e dx dy \quad (2.26)$$

$$Q_j^e = \oint_{\Gamma_e} \varepsilon N_j^e q_n ds$$

tanımlamaları kullanılarak elde edilen denklem eleman bazında matris-vektör formunda

$$[K^e] \{u^e\} = \{F^e\} + \{Q^e\} \quad (2.27)$$

şeklinde ifade edilebilir. 1 boyutlu uzaydaki duruma benzer şekilde her bir eleman için elde edilen eleman matrisleri ve yük vektörlerinin etkileşiminden

$$[K] \{u\} = \{F\} + \{Q\} \quad (2.28)$$

genel matris-vektör sistemi elde edilir. Elde edilen bu genel (global) sisteme Dirichlet türü sınır koşul değerleri uygulandıktan sonra çözüm elde edilir [9].

2.5.3. Stabilize Edilmiş Sonlu Elemanlar

Literatürde bilindiği üzere konveksiyon baskın veya sınır katmanına sahip konveksiyon-difüzyon denklemlerinin standart Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünde kararlı sonuçlar elde edebilmek için yoğun bir grid (mesh) kullanılması gerekmektedir. Ayırıklaştırma nokta sayısının artırılması ise elde edilen genel matris-vektör sisteminin boyutunun büyümesine neden olduğundan dolayı hesaplama maliyetini artırmaktadır. Bunun yerine ise, nokta sayısını artırmadan, sınır katman bölgesine göre noktaların dağılımı düzenlenebilir. Shishkin ve Backhvalov mesh algoritmaları bu alanda en çok kullanılan grid ayarlama yöntemleridir [3-5]. Bu seçim, sayısal yöntemden kaynaklanan kararsızlıkları belli oranda giderebilmesine rağmen yeterli olamamaktadır. İlave olarak sisteme stabilizasyon yöntemi uygulamak gerekmektedir. Sonlu elemanlar yönteminde farklı stabilizasyon yöntemleri uygulanmaktadır. Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) yöntemi Brooks ve Hughes tarafından ortaya konulan ve halen daha kullanılmakta olan bir stabilizasyon yöntemidir [6]. SUPG yönteminde sisteme eleman boyutuna ve konveksiyon ve difüzyon katsayılarının değerlerine bağlı terimler eklenerek çözüm kararlı hale getirilir.

2.5.3.1. 1 Boyutlu Denklemler İçin Stabilizasyon

1 boyutlu uzayda tanımlanan

$$-\varepsilon u_{xx} + au_x = f \quad (2.29)$$

konveksiyon-difüzyon denkleminde konveksiyon katsayısına göre çok küçük difüzyon katsayısı ($0 < \varepsilon \ll a$) durumunda, denklemin standart Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen

$$\int \varepsilon u_x v_x dx + \int a u_x v dx = \int f dx \quad (2.30)$$

integral denklemi ikili (bilineer) formda

$$\varepsilon(u_x, v_x) + a(u_x, v) = (f, v) \quad (2.31)$$

eşitliği ile ifade edilir ise, denklemin SUPG formülasyonu [6]

$$\varepsilon(u_x, v_x) + a(u_x, v) + \tau_\kappa(au_x, av_x) = (f, v) + \tau_\kappa(f, av_x) \quad (2.32)$$

formunda yazılır. Denklemden yer alan τ_κ stabilizasyon parametresi; h_κ eleman boyu ve

$Pe_\kappa = \frac{|a|h_\kappa}{6\varepsilon}$ Pecket sayısı olmak üzere

$$\tau_\kappa = \begin{cases} \frac{h_\kappa}{6|a|} & , Pe_\kappa \geq 1 \\ \frac{h_\kappa^2}{12\varepsilon} & , Pe_\kappa < 1 \end{cases} \quad (2.33)$$

olarak tanımlanır [6].

2.5.3.2. 2 Boyutlu Denklemler İçin Stabilizasyon

1 boyutlu uzaydakine benzer şekilde, 2 boyutlu uzayda konveksiyon-difüzyon denkleminin SUPG formülasyonu[6]

$$\begin{aligned} & \varepsilon((u_x, v_x) + (u_y, v_y)) + (a_1u_x + a_2u_y, v) + \tau_\kappa(a_1u_x + a_2u_y, a_1v_x + a_2v_y) \\ & = (f, v) + \tau_\kappa(f, a_1v_x + a_2v_y) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Stabilizasyon parametresi ile τ_κ öyleki

$$\tau_\kappa = \begin{cases} \frac{h_\kappa}{6\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} & , Pe_\kappa \geq 1 \\ \frac{h_\kappa^2}{12\varepsilon} & , Pe_\kappa < 1 \end{cases} \quad (2.35)$$

$$Pe_\kappa = \frac{h_\kappa \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{6\varepsilon}. \quad (2.37)$$

dir [6].

2.5.4. Adaptif Yöntemler

Literatürde pek çok adaptif yöntem algoritmaları mevcuttur. Bunlardan en çok kullanılanıhp-FEM olarak bilinmektedir.

Bu tezde ise yeni bir adaptif ağ oluşturma algoritması önerilmektedir. Aşamalı adaptif ağ oluşturmada SUPG yöntemindeki stabilizasyon parametresinin değeri kullanılarak süreç ilerletilmektedir.

Algoritma:

1. Eşit aralıklı kaba bir başlangıç ağı seçilir
2. Her bir eleman için stabilizasyon parametresi τ_κ hesaplanır
3. Stabilizasyon parametresi belli bir değerden büyük ise ($\tau_\kappa \geq \frac{\varepsilon}{|a|}$) eleman bölünerek küçültülür (1 boyutlu uzayda orta noktasından 2 ayrı elemana, 2 boyutlu uzayda üçgen elemanlar için kenarların orta noktaları kullanılarak 4 alt üçgene (Şekil 2.3)
4. 2 boyutlu uzayda bölünmeyecek diye işaretlenen elemanlar da bölünecek komşu eleman sayısına göre ağ bütünlüğünün sağlanması için yeni alt üçgenlere ayrıştırılırlar (aşağıda ayrıntısı verilmektedir).
5. Belli bir adım sayısı kadar veya bölünecek eleman kalmayana kadar 2. adımdan itibaren süreç tekrar ettirilir.

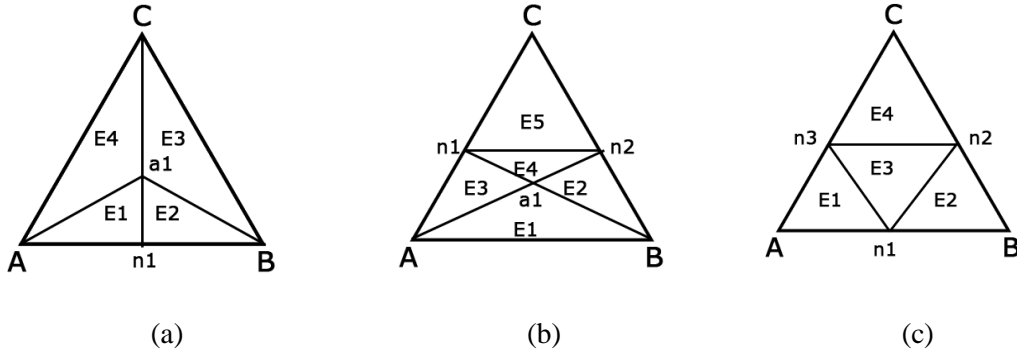
2.5.5. Üçgenlerin Bölünmesi

Bölünmek üzere işaretlenen üçgen elemanlar Şekil 2.3 de gösterildiği şekilde kenarların orta noktaları kullanılarak toplam 4 üçgene ayrıştırılır. Bölünmeyecek üçgenler ise, bölünecek komşu eleman sayısına göre;

- Eğer hiç bir komşusu bölünmeyecek ise, o eleman da bölünmeden olduğu gibi bırakılır.
- Sadece 1 komşusu bölünmek üzere işaretlenmiş ise (Şekil 2.3 (a), AB kenarının olduğu komşu üçgen bölünmek üzere işaretlenmiş), komşu elemanın bölünmesinden eklenen yeni nokta (n1) 'dan dolayı, ağ bütünlüğünün sağlanması ve ortantılı (hemen

hemen açları ve kenarları bir birine eşit) üçgen elemanlar oluşturmak için, üçgenin ağırlık merkezinde yeni ağ noktası (a1) da kullanılarak üçgen 4 üçgene ayrılır (E1, E2, E3, E4).

- 2 komşusu bölünecek üçgenlerde ise (Şekil 2.3 (b), AC ve BC kenarlarının komşu olduğu üçgenler bölünmek üzere işaretlenmiş), yeni eklenen noktalar (n1 ve n2) ve yine üçgenin ağırlık merkezi (a1) kullanılarak üçgen 5 üçgene ayrılır (E1, E2, E3, E4, E5).
- 3 komşusunun da bölünmesi durumunda ise kendisi de otomatik olarak bölünmek üzere işaretlenir ve 4 alt üçgene ayrılır (Şekil 2.3 (c)) (E1, E2, E3, E4).



Şekil 2.3. Üçgenler (a) bire bölünmüş (b) ikiye bölünmüş (c) üçe bölünmüş

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, bir önceki bölümde bir boyutlu ve iki boyutlu uzaylarda sabit ve değişken konveksiyon katsayılı konveksiyon-difüzyon denklemleri için önerilen adaptif ağ oluşturma yöntemi bazı örnek problemler üzerinde test edilip, bulunan sonuçların yorumları yapılacaktır.

3.1. 1-D Konveksiyon-Difüzyon Problemi

İlk olarak 1 boyutlu uzaydaki örnekleri inceleyelim.

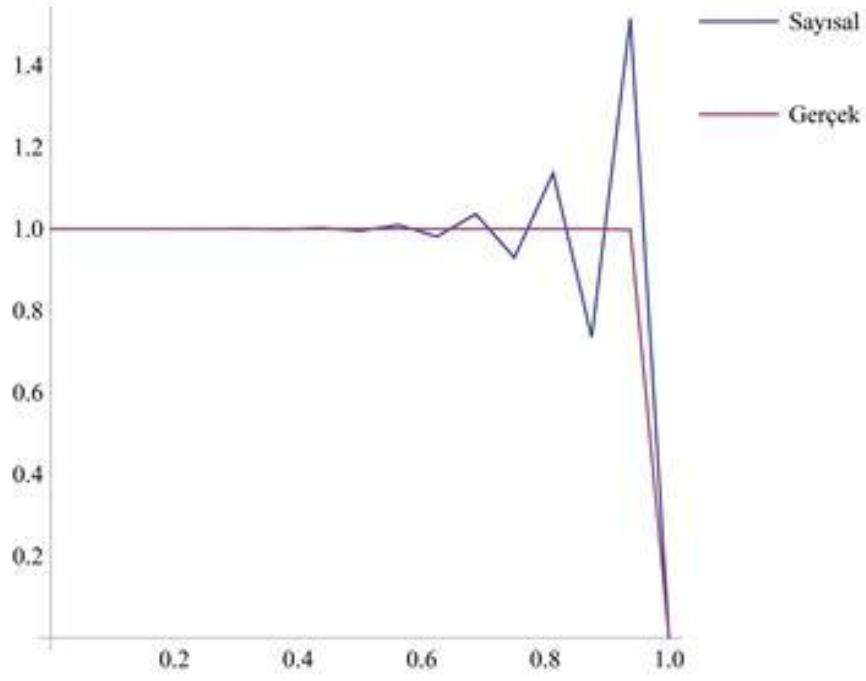
Örnek 1.

İlk örnek olarak

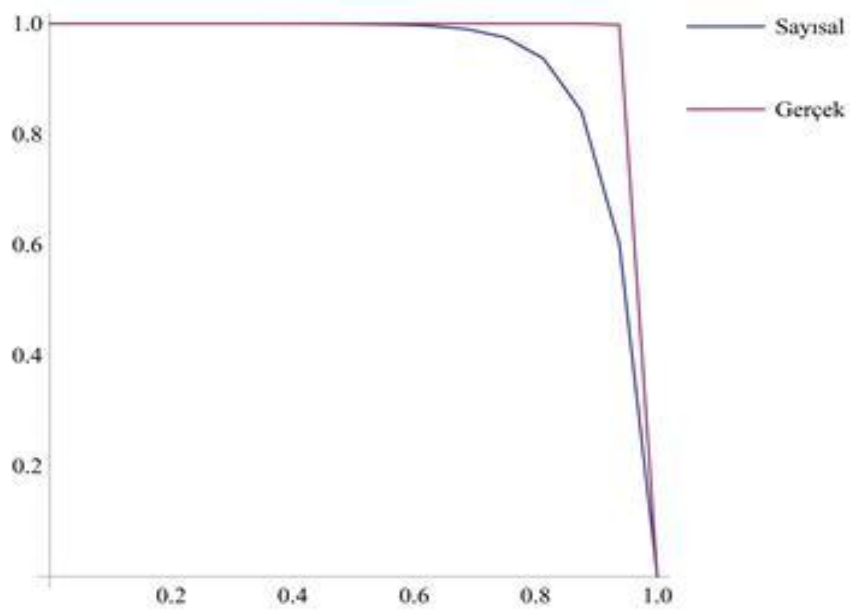
$$-\varepsilon u_{xx} + u_x = 0$$

$$u(0) = 1, u(1) = 0$$

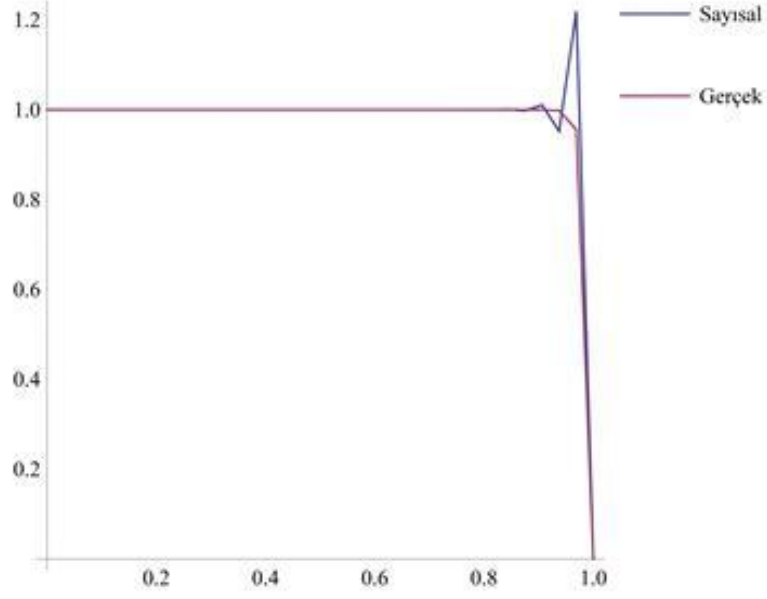
eşitlikleri ile verilmiş 1 boyutlu konveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal ve gerçek (analitik) çözümleri karşılaştırılacaktır. Öncelikle $\varepsilon = 0.01$ değeri için 17 eşit aralıklı nokta (16 eleman) ile elde edilen ağ üzerinde stabilizasyon uygulanmadan, standart Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen çözüm gerçek çözüm ile karşılaştırılmaktadır (Şekil 3.1). Problemin sağ uç sınır noktasında sınır katmanı mevcut olduğundan dolayı, standart sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlarda özellikle sınır katmanının olduğu bölgeye yakın yerlerde salınımlar olduğu ve bunun gerçek çözümle uyuşmadığı gözlemlenmektedir. Aynı problem, aynı ağ (eşit aralıklı 17 nokta) üzerinde SUPG stabilizasyon formülü kullanıldığında ise, sayısal çözümdeki salınımların ortadan kaybolduğu ve sayısal çözümün gerçek çözüme yakınsadığı Şekil 3.2'den gözlemlenmektedir. Eşit aralıklı 33 nokta (32 eleman) kullanıldığında ise stabilizasyon uygulanmadığı durumda, azalmış olsa dahi halen daha çözümde salınımlar olduğu (Şekil 3.3), stabilizasyonlu çözümlerin ise hemen hemen gerçek çözümle çakıştığı gözükmemektedir (Şekil 3.4).



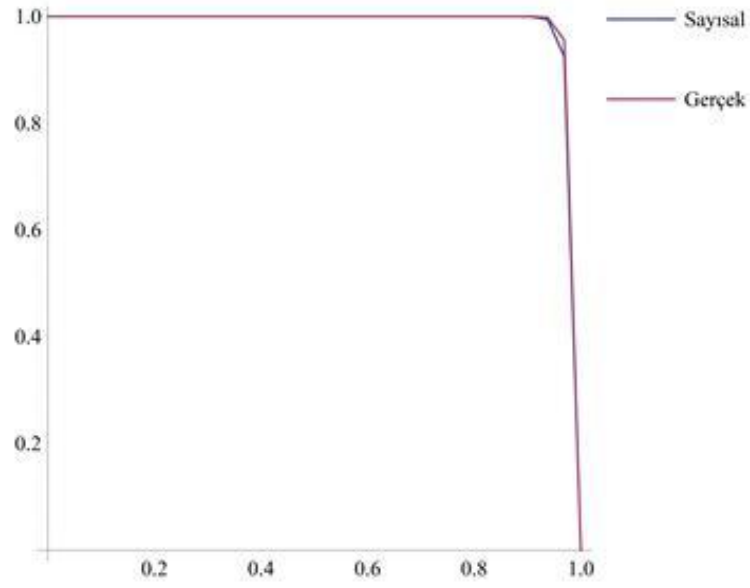
Şekil 3.1. Standart sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm ve gerçek çözümün karşılaştırması (17 nokta)



Şekil 3.2. Stabilize sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm ve gerçek çözümün karşılaştırması (17 nokta)

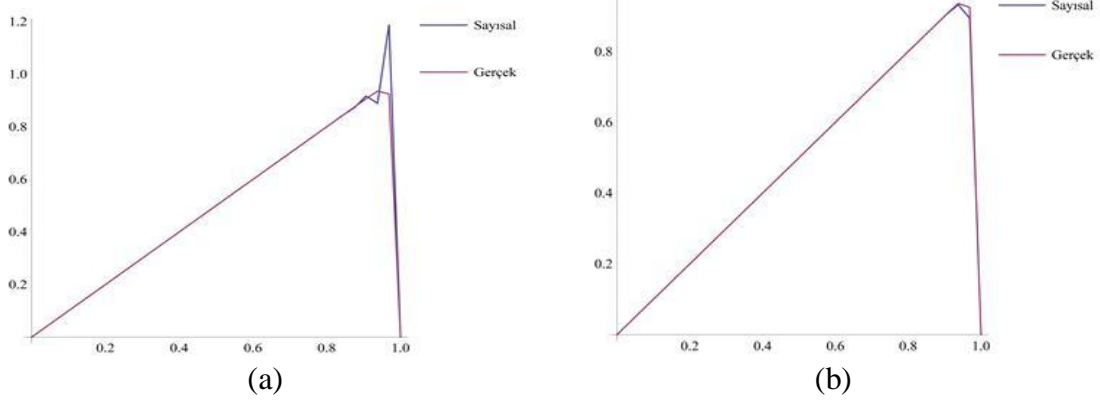


Şekil 3.3. Standart sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm ve gerçek çözümün karşılaştırması (33 nokta)



Şekil 3.4. Stabilize sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözüm ve gerçek çözümün karşılaştırması (33 nokta)

Benzer durum $-\varepsilon u_{xx} + u_x = 1, u(0) = 0, u(1) = 0$ problemi için de gözlemlenmektedir (Şekil 3.5).



Şekil 3.5. Standart (a) ve stabilize (b) sonlu elemanlar yöntemleri ile sayısal çözüm ve gerçek çözümün karşılaştırması

Örnek 2.

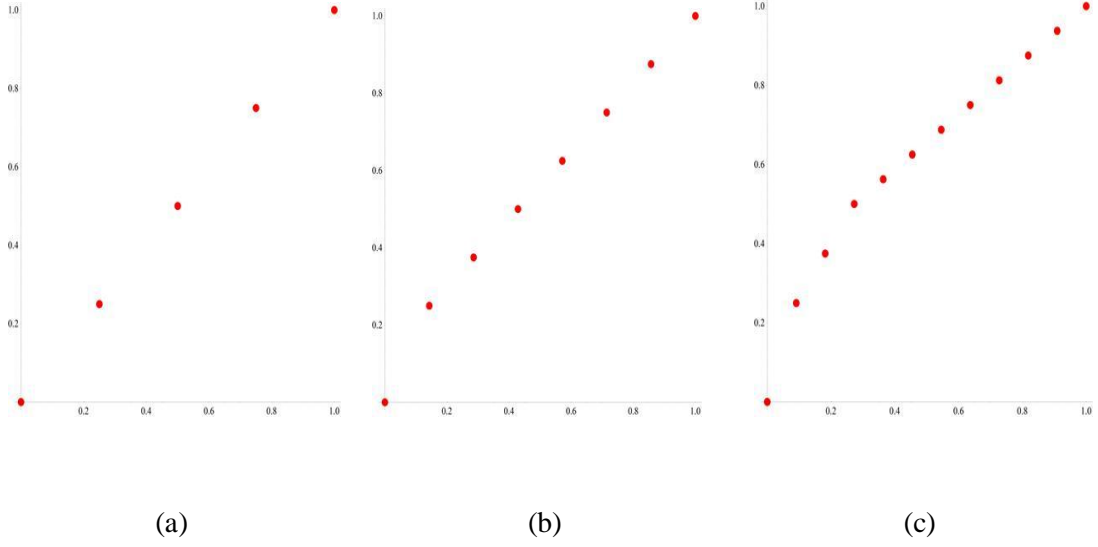
Bu örnekte ise, değişken konveksiyon katsayılı konveksiyon-difüzyon denkleminin çözümü incelenmiştir.

$$-\varepsilon u_{xx} + x u_x = 0$$

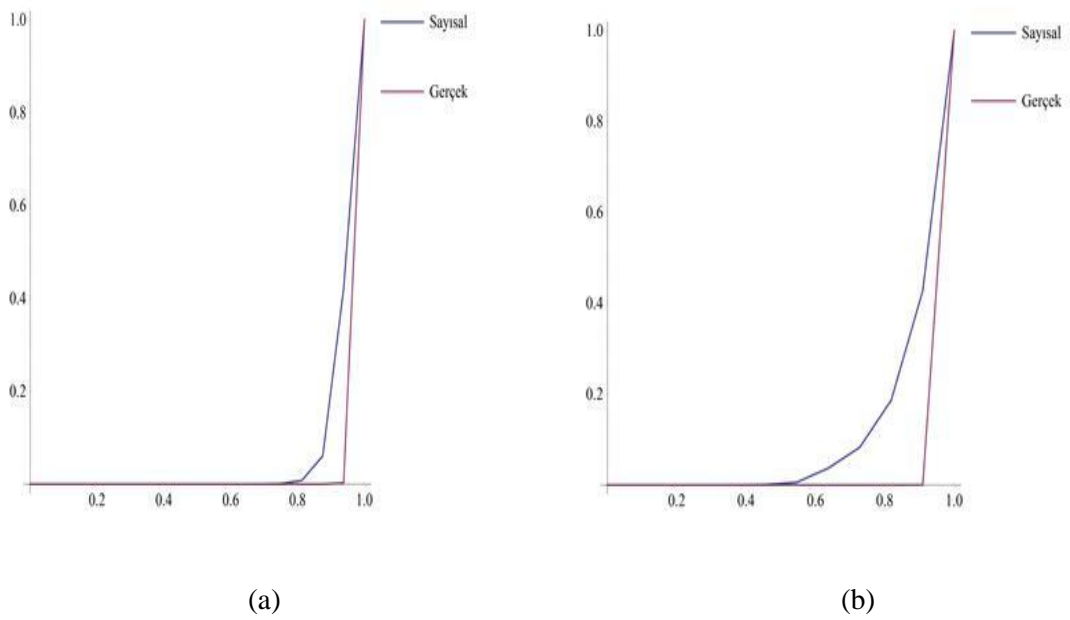
$$u(0) = 0, u(1) = 1$$

Değişken konveksiyon katsayısından dolayı, her bir eleman için stabilizasyon katsayısı da değişecektir. Bu nedenle önceki örneklerde her aşamada elemanların davranışları (bölünme/bölünmeme) aynı kalmasına rağmen, bu durumda ise özellikle sınır katmanının olduğu bölgedeki elemanlarda daha fazla bölünmenin olduğu gözlemlenmektedir. $\varepsilon=0.1$ değeri ile ilk aşamada eşit aralıklı 3 nokta (2 eleman) ile başlatılan süreçte, her bir aşama sonunda elde edilen ağ nokta konumları Şekil 3.6 de gösterilmiştir. Şekillerden de görüleceği üzere, ilk aşamada her bir eleman eşit aralıklı olarak bölünmesine rağmen, ikinci ve üçüncü aşamada ise sadece sağ sınır bölgesinde oluşan sınır katmanına yakın elemanlar bölünmekte ve son aşamada ise 12 noktaya (11 eleman) içeren adaptif bir ağ oluşmuştur. Şekil 3.7 de ise elde edilen adaptif ağ ile aynı nokta ve eleman sayısına sahip fakat eşit aralıklı ağ kullanımı ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması yapılmıştır. Grafikten de çok açık şekilde görüldüğü üzere, stabilizasyon

kullanıldığından dolayı eşit aralıklı ağ kullanılarak elde edilen sonuçların kararlı olmasına rağmen adaptif ağ kullanılarak elde edilen sonuçlar gerçek çözüme göre çok daha yakınsaktır.



Şekil 3.6 Her aşama sonunda ağ noktalarının dağılımı



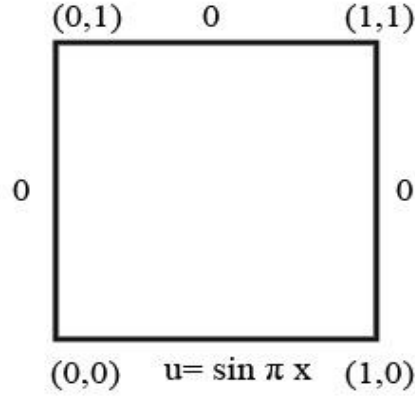
Şekil 3.7. Adaptif ağ (a) ve eşit aralıklı ağ (b) kullanarak elde edilen sayısal çözümler ile gerçek çözümün karşılaştırması

3.2. 2-D Konveksiyon-Difüzyon Problemi

Bu bölümde ise, önerilen adaptif ağ oluşturma yönteminin 2 boyutlu uzayda örnek problemler üzerinde testi gerçekleştirilecektir.

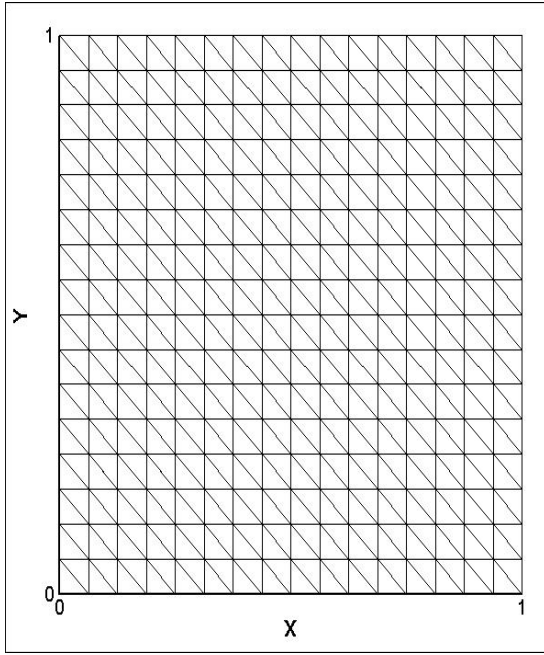
Örnek 3.

İlk örnek problem olarak, sınır koşulları Şekil 3.8 de birim kare bölge üzerinde tanımlanan homojen konveksiyon difüzyon problemi difüzyon katsayısı $\varepsilon = 0.01$ ve konveksiyon katsayı vektörü $\mathbf{a} = 0.75(y, x)$ değerleri için çözülmüştür.

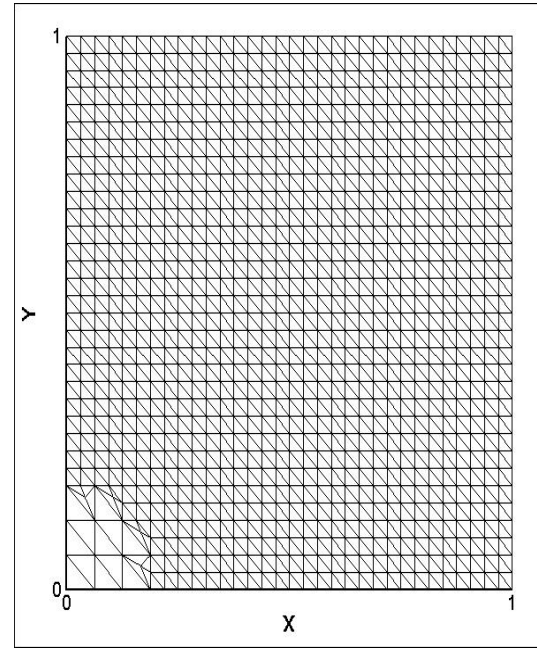


Şekil 3.8. Problem tanım bölgesi ve sınır koşulları

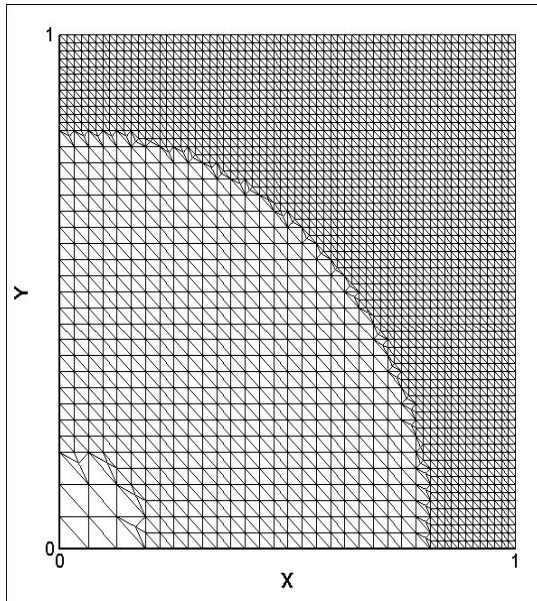
Eşit aralıklı, düzgün dağılımlı üçgenler kullanılarak elde edilen kaba ağ üzerinde başlatılan adaptif süreç 3 aşamalı olarak gerçekleştirilmiştir. İlk aşama sonrasında tüm üçgen elemanlar bölündüğünden dolayı yine eşit aralıklı, eşit boyutlu üçgen elemanlardan oluşan ağ elde edilmiştir (Şekil 3.9 (a)). 2. aşamada ise, sol alt köşeden başlayarak, stabilizasyon katsayısının değeri küçülmeye başladığından dolayı bölünme işlemleri de azalmaya başlamaktadır (Şekil 3.9 (b)). Bu durum 3. aşamada çok daha fazla belirginleşerek, etkinin sağ üst köşeye doğru daha fazla yaygınlaştığı gözlemlenmektedir (Şekil 3.9 (c)). Adaptif ağın sağ üst köşeye doğru yığılmasının, denklemin 2 boyutlu çözüm eğri izdüşümleriyle de uyumlu olduğu son şekilden de görülmektedir (Şekil 3.9 (d)). Konveksiyon katsayısının değerinden dolayı, sağ üst köşeye doğru bir akım olması, özellikle sağ kenarda ve sağ üst köşeye doğru bir sınır katmanının oluşması, çözümün bu bölgede hasas davranmasını ve sonlu elemanlar yönteminde stabilizasyon ihtiyacını gerektirmektedir.



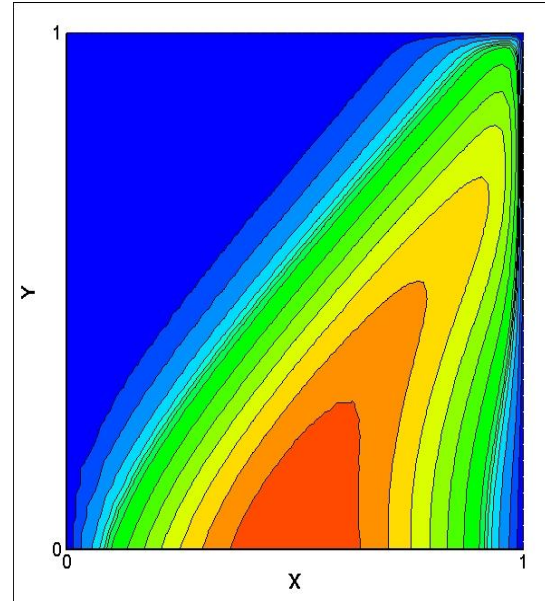
(a)



(b)



(c)

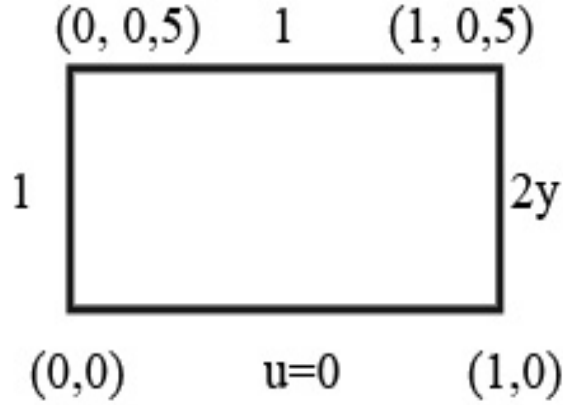


(d)

Şekil 3.9. Adatif ağ sürecinde elde edilen ağlar (ikinci aşama (a), üçüncü aşama (b), dördüncü aşama (c)) ve sayısal çözüm izdüşüm eğrileri (d)

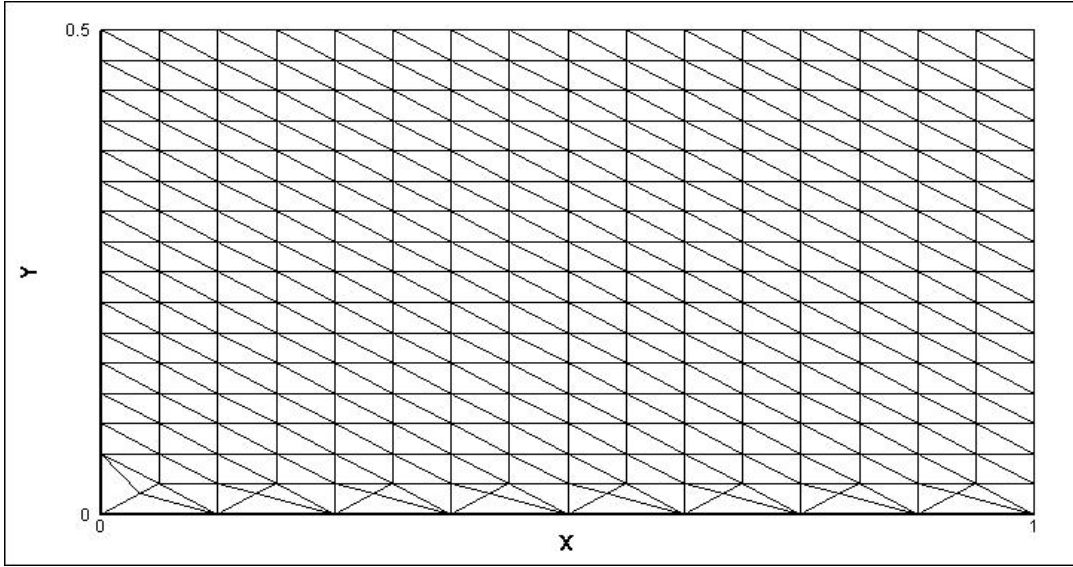
Örnek 4.

Bu problem, dikdörtgensel bölgede ısı katman problemi olarak bilinmektedir [11]. Konveksiyon difüzyon denklemi difüzyon katsayısı $\varepsilon = 0.01$ ve konveksiyon katsayı vektörü $\mathbf{a} = (2y, 0)$ değerleri için çözülmüştür. Problem bölgesi ve sınır koşulları Şekil 3.10 da gösterilmiştir. Soğuk alt kenardan, sıcak üst kenara doğru bir ısı geçişinde sol kenarın sabit, sağ kenarın ise genişlik ile doğrusal olarak orantılı bir şekilde ısıtıldığı kabul edilmektedir.

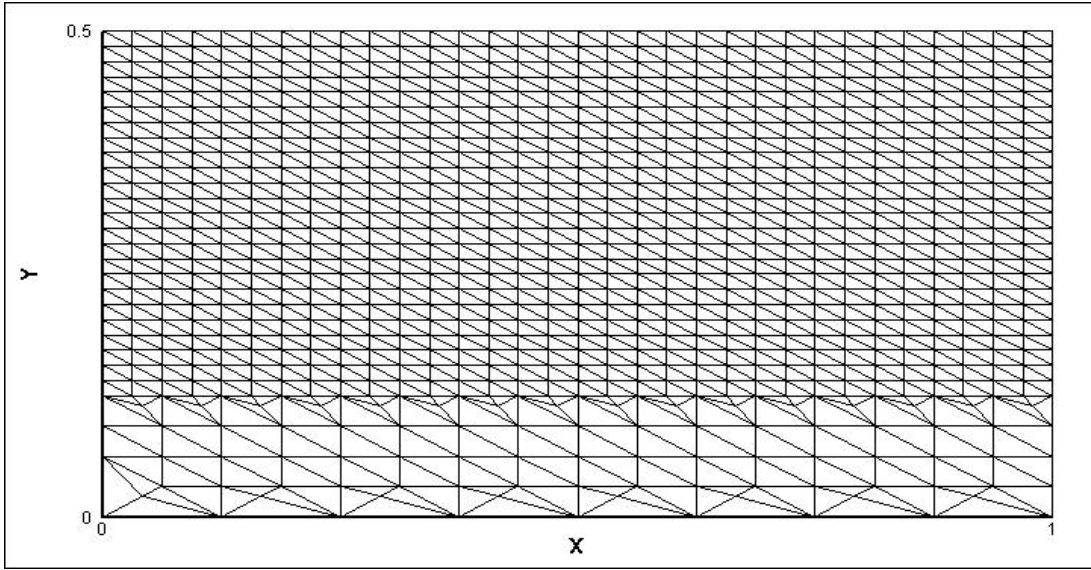


Şekil 3.10. Problem tanım bölgesi ve sınır koşulları

Bir önceki örnekte olduğu gibi, eşit aralıklı ağ kullanılarak başlatılan süreç sonrasında alt kenardan üst kenara doğru ağın gittikçe yoğunlaştığı görünmektedir. 3 aşama sonrasında elde edilen adağtif ağ kullanılarak elde edilen çözümün 2 boyutlu iz düşüm eğrileri de son şekilde gösterilmektedir.



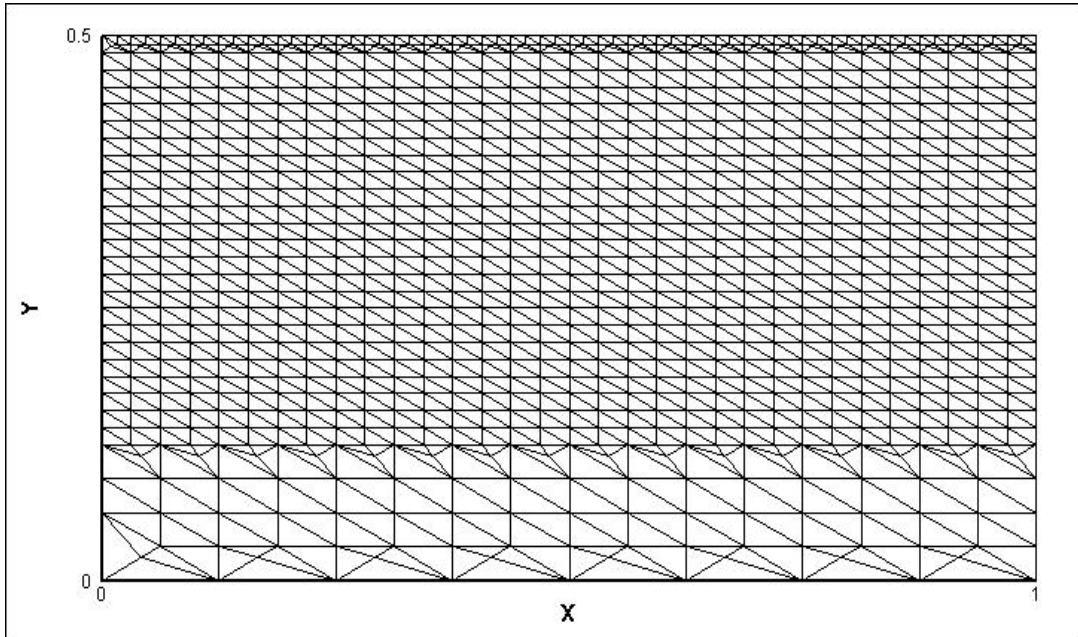
(a)



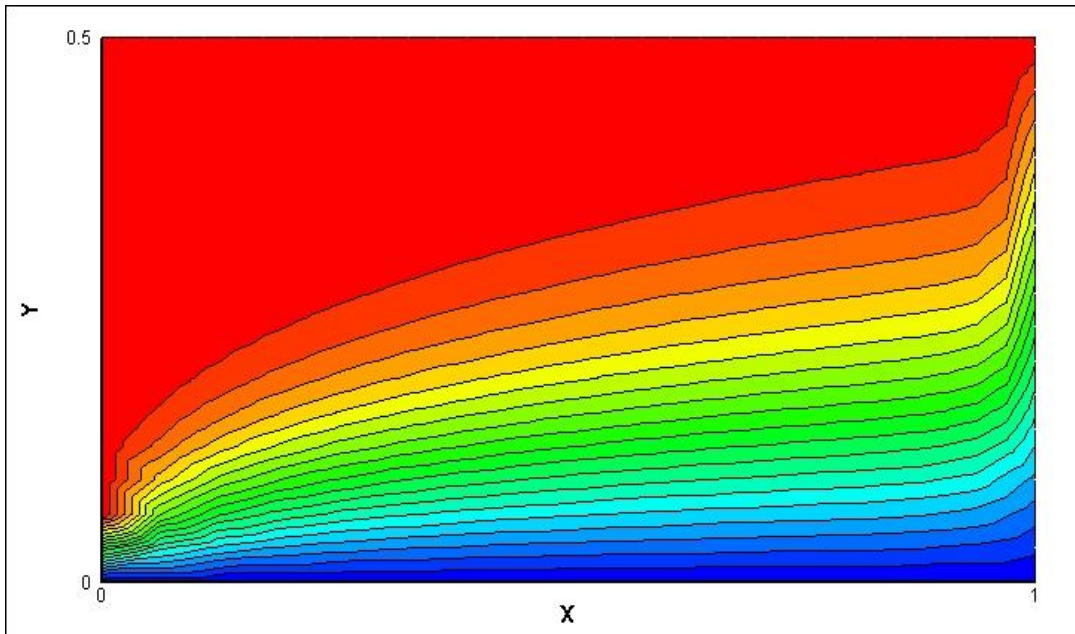
(b)

Şekil 3.11. Adatif ağ sürecinde elde edilen ağlar (birinci aşama (a), ikinci aşama (b), üçüncü aşama (c) ve sayısal çözüm izdüşüm eğrileri (d)

Şekil 3.11'in devamı



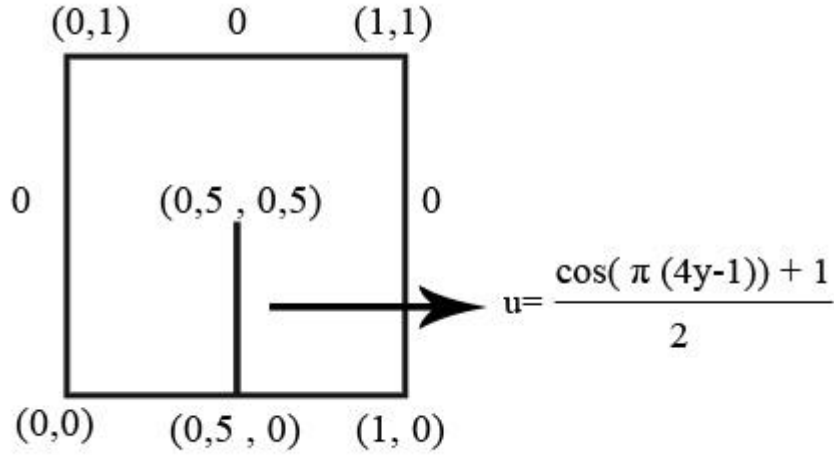
(c)



(d)

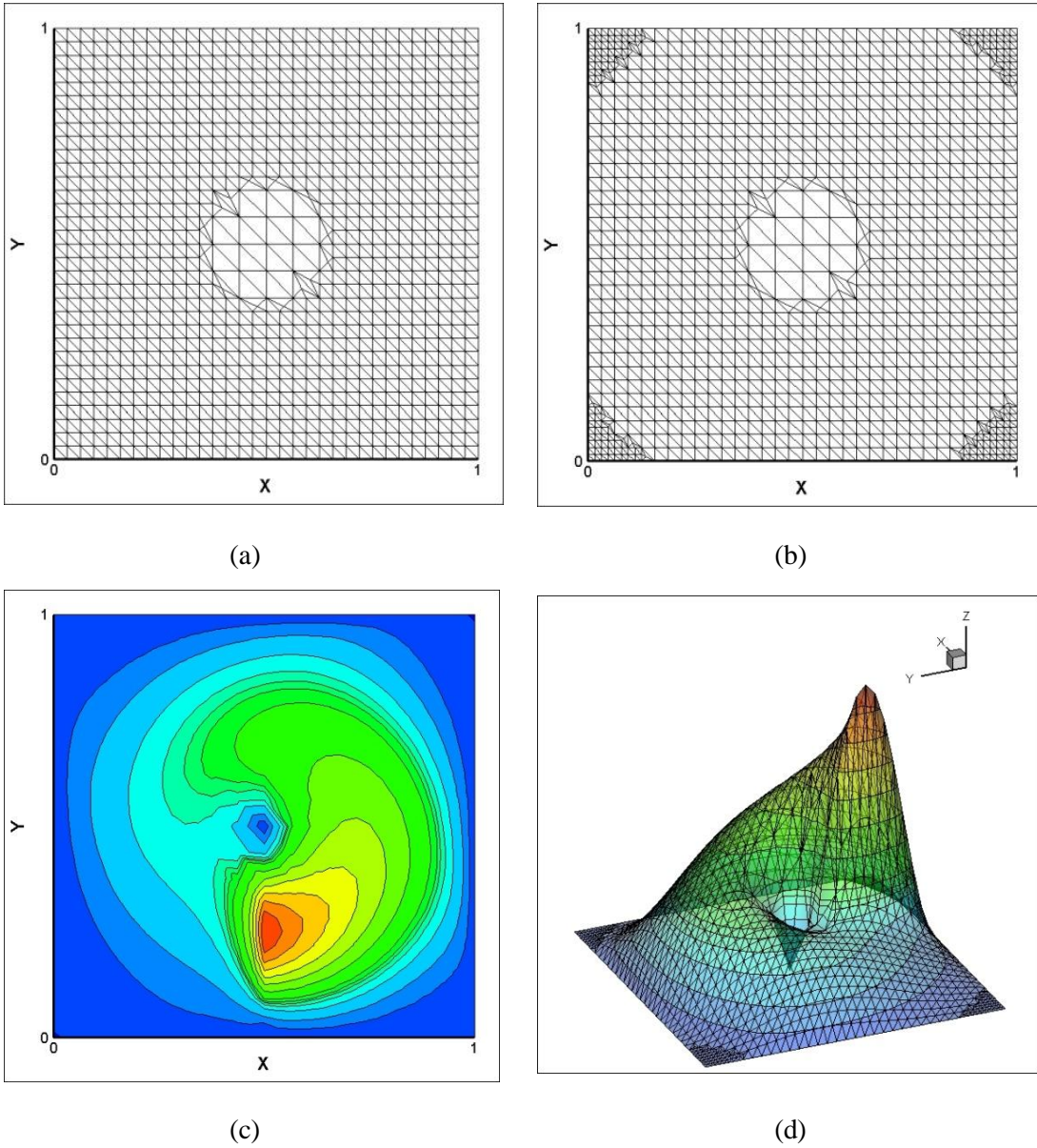
Örnek 5.

Bu örnek ise, birim kare bölge içerisinde kenar sınır koşullarına ek olarak iç bölgede de sınır koşulu belirtilmektedir [11]. Problemin $\varepsilon = 0.01$ ve $\mathbf{a} = (0.5 - y, x - 0.5)$ değerleri için çözümü incelenmiştir. Sınır koşulları ve problem tanım bölgesi Şekil 3.12 de verilmektedir.



Şekil 3.12. Problem tanım bölgesi ve sınır koşulları

Problem, iç sınır bölgesinde en büyük değerini alır ve bu bölge komşuluğunda fonksiyon değerinde hızlı değişimler olur. Bundan dolayı adaptif ağda yoğunlaşma bu noktalardan başlayıp, özellikle köşe noktalarda daha da etkin olmaktadır (Şekil 3.13 (a) ve (b)). Çözümün 2 boyutlu iz düşüm eğrileri Şekil 3.13 (c) de ve 3 boyutlu yüzey grafiği de Şekil 3.13 (d) de verilmektedir. 3 boyutlu grafikten çözüm fonksiyonunun davranışı daha açık bir şekilde görülmektedir.

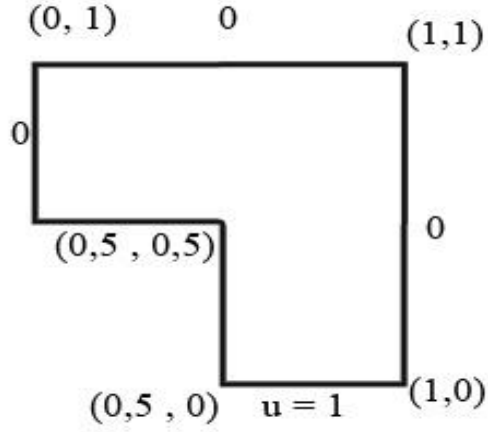


Şekil 3.13. Adatif ağ sürecinde elde edilen ağlar (üçüncü aşama (a), dördüncü aşama (b)) ve sayısal çözüm izdüşüm eğrileri (c) ile 3 boyutlu grafiği (d)

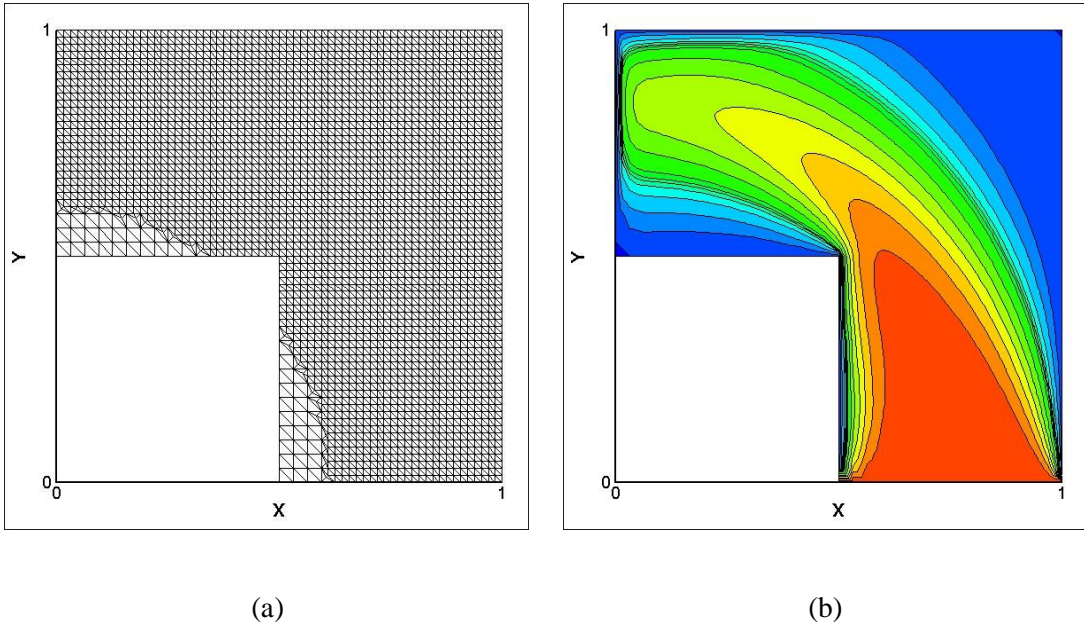
Örnek 6.

Son olarak yöntem L-şeklindeki bölge üzerinde tanımlanan ve sınır koşulları Şekil 3.14 de verilen konveksiyon-difüzyon denkleminin [12], $\varepsilon = 0.01$ ve $\mathbf{a} = (-y, x)$ değerleri için çözümü incelenmiştir. Adaptif yöntem ile elde edilen ağ ile denklemin çözümünün 2 boyutlu izdüşüm eğrilerinin grafiği Şekil 3.15 de gösterilmiştir. Problem, bölgenin hemen hemen tamamında sınır katmanı davranışı gösterdiğinden dolayı yoğun bir ağ kullanımı

gerektirmektedir. Bundan dolayı hemen hemen her aşamada üçgen elemanların tamamının bölündüğü gözlemlenmektedir.



Şekil 3.14. Problem tanım bölgesi ve sınır koşulları



Şekil 3.15. Adatif ağ süreci sonunda elde edilen ağ (a) ve sayısal çözüm izdüşüm eğrileri (b)

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada bir ve iki boyutlu uzaylarda konveksiyon baskın konveksiyon-difüzyon denklemlerinin stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemlerinden en çok kullanılan SUPG yöntemi kullanılarak adaptif ağ oluşturularak, eşit boyutlu (uniform) ağ kullanımına oranla daha yakınsak sayısal sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır. Önerilen adaptif ağ oluşturma yöntemi bir ve iki boyutlu uzaylarda sabit ve değişken konveksiyon katsayılı örnek problemler üzerinde test edilmiş ve yorumları yapılmıştır. Elde edilen sonuçlardan oluşturulan adaptif ağın çözümlere olan etkisi gözlemlenmiştir.

5. ÖNERİLER

Bu çalışmada stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemi kullanarak oluşturulan adaptif ağ ile konveksiyon-difüzyon denklemlerinin bir ve iki boyutlu uzaylarda sayısal çözümleri incelenmiştir. Tezde, özellikle sınır katman problemlerinde, konveksiyon katsayısının baskın olduğu durumlarda adaptif ağ kullanımının sayısal çözümlerdeki etkisi gösterilmeye çalışılmıştır. Önerilen yöntemin, konveksiyon-difüzyon denklemleri haricinde, Navier-Stokes denklemleri gibi doğrusal olmayan denklemlere ve birden fazla bilinmeyenli denklem sistemlerine genelleştirilerek uygulaması ileriki aşamalardaki çalışma olarak gerçekleştirilebilir.

Ayrıca, literatürde en çok kullanılan hp-adaptif ağ üretme yöntemi daha detaylı bir şekilde incelenip, önerilen yöntemin hp algoritması ile birleştirilip birleştirilemeyeceği araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Davies, A.J., The Finite Element Method: An Introduction with Partial Differential Equations, Second Edition,1-6, Oxford University Press Inc.,New York, 2011.
2. Logon,D.L., A First Course In The Finite Element Method, Fifth Edition,2-4, Cengage Learning, USA, 2010.
3. Linb, T., Analysis of a Galerkin Finite Element Method on a Bakhvalov-Shishkin Mesh for a Linear Convection-Diffusion Problem, IMA Journal of Numerical Analysis, 20, 4 (2000) 621-623.
4. Linb, T., Layer-adapted Meshes for Convection-Diffusion Problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, 9-10 (2003) 1061-1105.
5. Hans-Görk, R., Schoenfeld, M., and Luts, T., Robust Numerical Methods For Singularly Perturbed Differential Equations, Springer, 2008.
6. Brooks AN and Hughes TJR. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 32 (1982) 199-259.
7. Bangerth, W., and Rannacher, R., Adaptive Finite Element Methods For Differential Equation, Birkhauser, 2000.
8. Demkowicz, L.F., Computing With hp-Adaptive Finite Elements One and Two Dimensional Elliptic and Maxwell Problems, Charman & Hall, 2007.
9. Çiftçi, C, Değişken Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Denklemlerinin Sonlu Elamanlar Yöntemi İle Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2012.
10. Reddy, J.N., An Introduction to the Finite Element Method, The McGraw-Hill Companies, 2006.
11. Neslitürk, A.İ, Approximating the incompressible Navier-Stokes equations using two level finite element method, Doktora Tezi, University of Colorado, Applied Mathematics, Danver, 1999.
12. Brezzi, F., Marini, D. and Russo, A., Applications of the pseudo residual-free bubbles to the stabilization of convection-diffusion problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 166 (1998) 51-63.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Rize'nin Pazar İlçesi'nde doğdu. İlkokul ve orta öğrenimini Hamidiye İlköğretim Okulu'nda, liseyi ise Ardeşen Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi'nde okudu. 2006 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Matematik Bölümü'nden 2010 yılında mezun oldu. 2010 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı. İyi seviyede İngilizce bilmektedir.